



HAL
open science

Les pavages en géométrie projective de dimension 2 et 3

Ludovic Marquis

► **To cite this version:**

Ludovic Marquis. Les pavages en géométrie projective de dimension 2 et 3. Mathématiques [math].
Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT: . tel-00428902

HAL Id: tel-00428902

<https://theses.hal.science/tel-00428902v1>

Submitted on 30 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre: 9422

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Ludovic MARQUIS

Les pavages en géométrie projective de dimension 2 et 3

Soutenue le 29 Mai 2009 devant la Commission d'examen:

M. Yves BENOIST (Directeur de thèse)
M. Nicolas BERGERON (Rapporteur)
M. William GOLDMAN (Rapporteur)
M. François LABOURIE (Président du jury)
M. Frédéric PAULIN



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

*In mathematics you don't understand things. You just get used to them.
En mathématiques, on ne comprend pas les choses. On s'y habitue.*
– Johann von Neumann

*Mathematics is not a deductive science, that's a cliché. When you try to prove a
theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is
trial and error, experimentation, guesswork.*
*Les mathématiques ne sont pas une science déductive, c'est un cliché. Quand on essaye
de démontrer un théorème, on ne se contente pas de lister les hypothèses, et ensuite
commencer à raisonner. Ce que l'on fait, c'est essayer et se tromper, expérimenter et
hasarder.*
– Paul Richard Halmos

*Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es
in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.*
*Les mathématiciens sont comme les français : quoi que vous leur disiez ils le traduisent
dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.*
Johann Wolfgang von Goethe

Remerciements

Je voudrais commencer par remercier Yves pour le temps et l'énergie qu'il m'a offerts sans relâche pendant ces 3 années. Sa méthode de recherche a changé ma façon de faire des mathématiques. Mon travail doit beaucoup à son extraordinaire disponibilité et à son perfectionnisme.

Je tiens aussi à remercier mes rapporteurs Nicolas Bergeron et William Goldman pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

Je suis très honoré par la participation de François Labourie et Frédéric Paulin à mon jury.

Je tiens aussi à remercier Dominique Hulin pour son accueil aux Etats-Unis et pour m'avoir permis de répéter mon premier exposé.

Je remercie aussi Valérie Blandin-Lavigne pour son aide et sa patience devant mes problèmes administratifs.

Puisque je sais que beaucoup de mes amis ne liront que les remerciements, je me permets de leur offrir ces trois paragraphes. Je remercie en pagaille, le meilleur des marçassins : Erwan, Crampinou pour avoir été avec moi dans le "technique", Jean-Phi parce que je lui ai appris à surfer, MLP pour ses excellents conseils qui remontent le moral. Jimmy parce que l'on a toujours besoin d'un plus petit que soi, Agnès pour m'avoir appris à faire des crèmes brûlées, Michel car il est toujours frétilant, le plus mauvais joueur de jungle speed de cette planète : Nouvo Michel. Cécile parce que l'on se connaît depuis 18 ans, celle qui m'a appris à danser : Phi, Jack parce qu'il est bouddhiste, Petit Ludo car il s'est marié à Venise, Adrien car il a toujours de bons fromages dans son sac. François pour ses jeux de mots Erwanesque, Vincent pour Paul entre autres, Grand Gilles parce qu'il aime se battre. Matthieu car il sait comment réussir un concert d'Iggy Pop, Fanny pour sa philosophie de vie, Petit Gilles parce qu'il peut rendre sa thèse et faire un marathon dans la même semaine, Gwenola car elle pense que lorsqu'on écoute Where is my mind, on est bien, et enfin Sarah, car son grain de folie donne un sens à la chanson Just like a woman.

Un grand merci à Marie-Anne, Mathieu, Benji, Guillaume, les SylvainS, Thomas, Romaric et Flo leur humour dès plus rafraichissants est toujours salvateur. Merci aussi à Pierre pour m'avoir permis de squatter son appart à NYC.

Je remercie aussi mes colocs Benjamin (dit Le Gro) et Kilian pour leur présence. Nos fins de soirées tisane-creusois resteront dans les mémoires.

Enfin, je voudrais remercier ma famille, à commencer par mes parents. Il est clair que sans l'admiration de mon père pour les sciences, je ne serais pas là aujourd'hui. Je n'oublie pas non plus tout le reste de la famille, ils se reconnaîtront. Un merci particulier pour Nadia et Aurélie qui seront présentes pour ma soutenance, et aussi à Adèle, ma petite soeur, qui sera bientôt un vrai docteur.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Sous-groupes discrets et Zariski-denses des groupes de Lie	1
Les convexes divisibles sont des objets naturels	2
Les convexes divisibles en tant qu'objet géométrique	2
Les convexes divisibles : résumé des épisodes précédents	3
Problématique de ma thèse : espace des modules de structures projectives proprement convexes	3
Les convexes divisibles et les groupes de Coxeter	4
Les surfaces projectives proprement convexes de volume fini	5
1. Espaces des modules de certains polyèdres projectifs miroirs	7
1.1. Introduction	7
1.2. Notion de polyèdre projectif miroir	9
1.2.1. Les convexes de $\mathbb{P}^+(V)$	9
1.2.2. Les polyèdres projectifs	10
1.2.3. Groupes de Coxeter	10
1.2.4. Polyèdre projectif miroir	11
1.2.4.1. Le théorème de Vinberg	11
1.2.4.2. Combinatoire d'un polyèdre de $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4)$	12
1.2.4.3. Le théorème d'Andreev	13
1.2.4.4. Espaces des modules d'un polyèdre projectif miroir	14
1.3. Résultat	14
1.3.1. Les écimaèdres combinatoires	14
1.3.2. Énoncé du résultat	19
1.3.3. Démonstration des points 2 et 3	21
1.3.4. Plan de la démonstration des points 1) et 4)	23
1.3.5. Les triangles miroirs	24
1.3.6. Les lemmes de coupe	26
1.3.6.1. Lemme d'écimage	27
1.3.6.2. Lemme de non-chevauchement	29
1.3.6.3. Lemme de coupe le long d'un 3-circuit prismatique essentiel	30
1.3.7. La forêt $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ et son orientation	30
1.3.7.1. Classification des arêtes de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$	31
1.3.7.2. Orientation de la forêt $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$	32
1.3.8. Système puits-source de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$	32
1.3.8.1. Orientation d'une arête de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ induite par l'orientation d'un 3-circuit de \mathcal{G}	32
1.3.8.2. Système puits-source de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$	33
1.3.9. Orientation partielle et globale de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ induite par $P \in X_{\mathcal{G}}$ via un système puits-source	33
1.3.9.1. Orientation partielle induite	33

1.3.9.2. Orientation globale induite	33
1.3.9.3. Obstruction	33
1.3.10. Le tétraèdre miroir et les blocs fondamentaux	33
1.3.10.1. Le tétraèdre miroir	34
1.3.10.2. Les blocs fondamentaux	34
1.3.10.3. Les prismes exceptionnels	35
1.3.10.4. Blocs fondamentaux à structure projective fixée	37
1.3.11. Lemme de recollement	37
1.3.12. Explicitation du difféomorphisme	39
1.4. Exemples	41

2. Surface projective convexe de volume fini	45
2.1. Introduction	45
2.1.1. Exemples de convexes divisibles	45
2.1.2. Description des principaux résultats	46
2.2. Géométrie de Hilbert	48
2.2.1. La métrique d'un ouvert proprement convexe	48
2.2.2. La structure finslérienne d'un ouvert proprement convexe	49
2.2.3. Mesure sur un ouvert proprement convexe (dite mesure de Busemann)	49
2.2.4. Un résultat de comparaison	50
2.2.5. Quelques résultats en géométrie de Hilbert plane	50
2.2.5.1. Un résultat sur les ouverts proprement convexes de \mathbb{P}^2	50
2.2.5.2. Un résultat sur les pics	53
2.2.5.3. Minoration de l'aire des triangles idéaux	53
2.3. Dynamique	54
2.3.1. Le cas de \mathbb{P}^1 et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$	55
2.3.2. Classification	55
2.3.3. Résultat élémentaire sur la dynamique	56
2.3.3.1. Dynamique hyperbolique	57
2.3.3.2. Dynamique planaire	58
2.3.3.3. Dynamique quasi-hyperbolique	58
2.3.3.4. Dynamique parabolique	60
2.3.3.5. Dynamique elliptique	60
2.3.4. Calcul du centralisateur d'un élément de Γ dans $\mathrm{Aut}(\Omega)$	60
2.4. Irréductibilité et adhérence de Zariski	62
2.4.1. Irréductibilité	62
2.4.2. Adhérence de Zariski	63
2.5. Existence d'un domaine fondamental convexe	63
2.5.1. Fonction caractéristique d'un cône convexe	63
2.5.2. Existence d'un domaine fondamental convexe	65
2.5.3. Locale finitude à l'infini en dimension 2	67
2.6. Surface projective convexe d'aire finie	70
2.6.1. Structure projective	70
2.6.2. Structure projective proprement convexe	71
2.6.3. Structure projective proprement convexe d'aire finie	71
2.6.4. La théorie des bouts d'un espace topologique	71
2.6.5. Les lacets d'holonomie parabolique ou quasi-hyperbolique sont élémentaires	71
2.6.6. Le groupe fondamental d'une surface de volume fini est de type fini	74
2.6.6.1. Un peu de topologie des surfaces	74
2.6.6.2. Minoration de l'aire d'un pantalon projectif proprement convexe	74
2.6.6.3. Le domaine fondamental est un polyèdre fini	76
2.6.7. Holonomie des lacets élémentaires et volume des composantes élémentaires associées	77

2.6.7.1. Estimation du volume des pics	77
2.6.7.2. L'holonomie des bouts des surfaces projectives proprement convexes de volume fini est parabolique	80
2.7. Applications	81
2.7.1. Stricte convexité	81
2.7.2. Dualité	83
2.7.3. Caractérisation de la finitude du volume en termes d'ensemble limite	85
2.7.4. Unicité de l'ouvert Ω lorsque le volume est fini	86
2.7.5. Discrétude du groupe $\text{Aut}(\Omega)$	87
3. Espaces des modules des surfaces convexes de volume fini	89
3.1. Introduction	89
3.1.1. Présentation des résultats	89
3.2. Préliminaires	91
3.2.1. Définition des surfaces projectives proprement convexes	91
3.2.2. Conséquence facile de la classification des automorphismes des ouverts proprement convexe	92
3.3. Paramétrisation de l'espace des modules	93
3.3.1. Démonstration du quatrième point du théorème 3.3.5	96
3.3.1.1. Construction de l'action de \mathbb{R}^2	97
3.3.1.2. L'action de \mathbb{R}^2 est simplement transitive	98
3.3.2. Démonstration du cinquième point du théorème 3.3.5	99
3.3.2.1. Les pantalons et l'objet combinatoire	99
3.3.2.2. Construction de l'objet combinatoire	100
3.3.2.3. Un lemme de convexité	102
3.3.2.4. Démonstration du lemme 3.3.14	104
3.3.2.5. L'espace $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2	106
3.4. Composantes connexes d'espace de représentations	110
3.4.1. Préliminaires	110
3.4.1.1. Le cas compact	110
3.4.1.2. Espaces de représentations	110
3.4.2. Fermeture de $\beta'_{g,p}$	113
3.4.2.1. Lemmes préliminaires	113
3.4.2.2. Preuve de la fermeture	114
3.4.3. Conclusion	116
Bibliographie	117

Introduction

Ma thèse porte sur l'étude des structures projectives proprement convexe. Ce sujet flirte avec l'étude des sous-groupes discrets et Zariski-denses des groupes de Lie et la géométrie "à la Klein". Détaillons un peu ces points.

Sous-groupes discrets et Zariski-denses des groupes de Lie. — Un des thèmes de cette thèse est la construction de sous-groupes discrets et Zariski-denses dans les groupes de Lie. Il existe essentiellement deux techniques pour construire des groupes discrets dans un groupe de Lie : l'arithmétique et la géométrie. Les groupes arithmétiques, comme leur nom le laisse penser, sont essentiellement les groupes obtenus en prenant les points entiers d'un groupe algébrique. Borel a réussi à montrer le théorème suivant grâce à des constructions arithmétiques et à ce jour, même si la preuve de ce théorème a été simplifiée, elle repose toujours sur les groupes arithmétiques.

Théorème (Borel). — Tout groupe de Lie réductif admet au moins un réseau uniforme et un réseau non-uniforme.

Les réseaux des groupes de Lie semi-simple sont les plus gros sous-groupes discrets dans le sens où la dimension virtuelle cohomologique d'un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie réductif G est majorée par la dimension virtuelle cohomologique de tout réseau uniforme de G , avec égalité si et seulement si Γ est un réseau uniforme de G . Les constructions arithmétiques ne nous intéresseront pas dans cette thèse mais il est essentiel de savoir qu'elles sont indispensables pour construire des sous-groupes discrets.

Les méthodes géométriques pour construire un sous-groupe discret et Zariski-dense d'un groupe de Lie sont très variées, la plus simple est peut-être la construction des groupes de Schottky. Nous ne donnerons pas de définition précise des groupes de Schottky, on peut simplement retenir que ce sont des groupes libres, discrets et souvent Zariski-dense qui sont obtenus en jouant au ping-pong. Et, ce sont les plus petits sous-groupes discrets Zariski-denses au sens où tout sous-groupe Zariski-dense d'un groupe de Lie semi-simple contient un sous-groupe de Schottky Zariski-dense.

Nous allons nous intéresser à des sous-groupes discrets et Zariski-denses de $SL_n(\mathbb{R})$ et plus particulièrement dans cette thèse nous nous concentrerons sur $SL_3(\mathbb{R})$ et $SL_4(\mathbb{R})$.

Le groupe $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'espace projectif réel \mathbb{P}^n . Tout ouvert proprement convexe Ω de l'espace projectif réel \mathbb{P}^n possède une distance naturelle : la distance de Hilbert. Cette distance est préservée par le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ des transformations projectives qui préservent l'ouvert Ω . On obtient ainsi une famille d'espaces métriques très intéressante. L'exemple le plus important de tels ouverts est l'espace hyperbolique réel. Le sous-groupe $SO_{n,1}(\mathbb{R})$ préserve l'intérieur \mathbb{H}^n de l'hypersurface d'équation $\{x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0\}$. L'ouvert \mathbb{H}^n est le modèle projectif de l'espace hyperbolique réel de dimension n .

Les groupes sont au centre de notre intérêt. Nous allons donc nous concentrer sur les ouverts proprement convexes qui possèdent "beaucoup de symétries". L'expression "beaucoup de symétries" n'a bien entendu aucun sens mathématique intrinsèque, nous lui donnerons deux sens différents. Tout d'abord, le cas "cocompact" : on dira qu'un ouvert proprement convexe Ω est *divisible* lorsqu'il existe un groupe discret Γ de transformations projectives qui préservent Ω et tel que le quotient Ω/Γ est compact. Enfin, le cas "covolume fini" : tout ouvert proprement

convexe possède une mesure naturelle préservée par le groupe $\text{Aut}(\Omega)$. On se restreindra à la dimension 2 pour s'intéresser aux surfaces obtenues comme quotient d'un ouvert proprement convexe Ω par un sous-groupe discret Γ de $\text{Aut}(\Omega)$ et qui sont de volume fini pour la mesure héritée de Ω .

Le cas "cocompact" a déjà été beaucoup étudié, alors qu'à ma connaissance le cas "covolume fini" n'avait jamais été étudié avant.

Une première motivation pour l'étude des convexes divisibles peut être le théorème suivant d'Yves Benoist [Beno8] :

Théorème (Benoist). — Soit Ω un convexe divisible irréductible divisé par le groupe Γ , si Ω n'est pas homogène alors Γ est Zariski-dense dans $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ et le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ est discret.

Ainsi, les convexes divisibles permettent de construire des exemples de sous-groupes discrets Zariski-denses dans $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui ne sont ni des réseaux de $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$, ni des groupes de Schottky.

On pourra trouver une définition des convexes divisibles irréductibles dans l'introduction du chapitre 2. Il faut simplement retenir que tout convexe divisible est un produit de convexes divisibles irréductibles et qu'un convexe divisé par un groupe Γ est irréductible si et seulement si le groupe Γ est irréductible. On trouvera aussi une définition de convexe homogène.

Les convexes divisibles sont des objets naturels. — Une seconde motivation réside dans leur aspect naturel que l'on peut formuler de la façon suivante. Soit Γ un groupe discret, on définit :

$$\beta_n(\Gamma) = \left\{ \rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_{n+1}(\mathbb{R})) \left| \begin{array}{l} \rho \text{ est fidèle} \\ \text{Im}(\rho) \text{ est discrète} \\ \text{Im}(\rho) \text{ divise un ouvert } \Omega_\rho \\ \text{proprement convexe} \end{array} \right. \right\}$$

Kozsul a montré que $\beta_n(\Gamma)$ est ouvert dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_{n+1}(\mathbb{R}))$ ([Kos]). Benoist a montré ([Beno6]) que $\beta_n(\Gamma)$ est fermé dans $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_{n+1}(\mathbb{R}))$ si le centre virtuel de Γ est trivial, (la dimension 2 a été faite par Choï et Goldman dans [ChGo] et le cas où Γ est un réseau cocompact de $\text{SO}_{3,1}(\mathbb{R})$ a été fait par Kim In Kang dans [Kim]).

Théorème (Benoist). — Soit Γ un groupe discret dont le centre virtuel est trivial, alors l'espace $\beta_n(\Gamma)$ est une réunion de composantes connexes de $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_{n+1}(\mathbb{R}))$.

Les convexes divisibles en tant qu'objet géométrique. — La construction d'action de groupe discret sur des espaces métriques est au cœur de la géométrie depuis le programme d'Erlangen de Félix Klein. Les exemples classiques de telles actions sont donnés par l'action d'un sous-groupe fini du groupe orthogonal SO_{n+1} sur la sphère euclidienne \mathbb{S}^n , ou par l'action d'un sous-groupe discret du groupe des déplacements de l'espace euclidien \mathbb{E}^n , ou enfin par l'action d'un réseau du groupe $\text{SO}_{n,1}$ sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .

Les groupes discrets qui agissent fidèlement et proprement sur l'espace euclidien ou la sphère euclidienne sont virtuellement abéliens. Par conséquent, ce sont donc des groupes élémentaires du point de vue de la théorie géométrique des groupes. Les groupes proches d'un réseau de $\text{SO}_{n,1}$ sont donc beaucoup plus intéressants.

Une troisième motivation est le théorème suivant d'Yves Benoist ([**Beno9**]) qui montre que les convexes divisibles strictement convexes sont des objets géométriques très proches des espaces hyperboliques.

Théorème (Benoist). — Soit Ω un ouvert proprement convexe divisé par un groupe Γ , l'ouvert Ω est strictement convexe si et seulement si Γ est Gromov-hyperbolique.

Terminons par une quatrième motivation. Le théorème suivant dû à Yves Benoist en dimension 4 ([**Beno1**]) et Misha Kapovich en dimension $n \geq 4$ ([**Kapo**]) montre que les convexes divisibles permettent d'étudier une famille de groupes qui contient strictement les réseaux co-compacts de $SO_{n,1}$.

Théorème (Kapovich). — Pour tout $n \geq 4$, il existe un convexe divisible strictement convexe de dimension n qui n'est pas quasi-isométrique à l'espace hyperbolique réel de dimension n .

Signalons que tout convexe divisible strictement convexe de dimension 2 (resp. 3) est quasi-isométrique à l'espace hyperbolique réel de dimension 2 (resp. 3). En dimension 2, ce fait est évident alors qu'en dimension 3, il l'est beaucoup moins. C'est une conséquence des travaux de Perelman et d'Yves Benoist ([**Beno2**]).

Les convexes divisibles : résumé des épisodes précédents. — Un des points difficiles de la théorie des convexes divisibles est la construction de convexe divisible non homogène.

Les convexes divisibles se divisent en quatre familles obtenues en distinguant le fait d'être homogène ou non, et le fait d'être strictement convexe ou non.

Les convexes divisibles strictement convexe et homogène. — Vinberg a montré que tout convexe divisible strictement convexe et homogène est projectivement équivalent à l'espace hyperbolique réel. Par conséquent, il existe un et un seul convexe divisible strictement convexe et homogène en toute dimension $n \geq 2$.

Les convexes divisibles strictement convexe et non homogène. — L'union des travaux de Kozsul ([**Kos**]) et de Johnson et Millson ([**JoMil**]) permet de montrer qu'il existe des convexes divisibles strictement convexes et non homogènes en toute dimension $n \geq 2$.

Les convexes divisibles irréductibles non strictement convexe et non homogène. — Il est classique que tout convexe divisible irréductible de dimension 2 est strictement convexe. Par contre la généralisation de ce résultat en dimension supérieur est fautive ([**Beno2**]). En effet, Yves Benoist a construit des exemples de convexes divisibles irréductibles non strictement convexes et non homogènes en dimension 3, 4, 5 et 6 ([**Beno1**]). Cette famille de convexe divisible reste la plus difficile à construire en effet on ne sait pas s'il existe des convexes divisibles irréductibles non strictement convexes et non homogènes en dimension supérieure ou égale à 7.

Les convexes divisibles irréductibles non strictement convexe et homogène. — Vinberg a complètement classifié cette famille. On pourra trouver dans l'introduction du chapitre deux une liste décrivant cette famille. Retenons simplement que ces objets n'existent pas en toute dimension et que ce sont les espaces symétriques associés aux groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{H})$ (pour $n \geq 3$) et au groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$.

Problématique de ma thèse : espace des modules de structures projectives proprement convexes. — La problématique principale de ma thèse est la construction de structures projectives proprement convexes et plus précisément l'étude des espaces des modules associées à celles-ci. Elle comporte deux directions différentes. La première en dimension 3, où j'ai étudié

les constructions de convexes divisibles à l'aide des groupes de Coxeter. La seconde en dimension 2 est une première étude du cas où l'on remplace l'hypothèse de compacité du quotient Ω/Γ par une hypothèse de finitude du volume. Détaillons un peu ces deux sujets.

Les convexes divisibles et les groupes de Coxeter. — Vinberg a trouvé une méthode géométrique pour construire des convexes divisibles à l'aide des groupes de Coxeter. Cette méthode est elle-même inspirée par les travaux de Poincaré pour construire des réseaux du groupe des isométries de l'espace hyperbolique réel. Un cas particulier de la méthode de Poincaré consiste à se donner un polyèdre P de \mathbb{H}^n dont les angles entre deux $(n - 1)$ -faces adjacentes est un sous-multiple de π . Le groupe engendré par les réflexions qui fixent les faces de P est alors un groupe de Coxeter, il agit proprement sur \mathbb{H}^n et P est un domaine fondamental.

Vinberg a généralisé cette méthode au cadre projectif de la façon suivante. On se donne un polyèdre proprement convexe P de \mathbb{P}^n et des réflexions qui fixent les faces de P . Cette fois-ci, on a des degrés de liberté pour choisir ces réflexions. Dans ce cas l'hypothèse "les angles dièdres de P sont des sous-multiples de π " devient "le produit de deux réflexions par rapport à des faces adjacentes est conjugué à une rotation d'ordre fini". Dans ce cas, le groupe Γ engendré par ces réflexions est un groupe de Coxeter, qui agit proprement sur un ouvert convexe Ω de \mathbb{P}^n qui contient l'intérieur de P et $P \cap \Omega$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur Ω .

Cette construction motive l'introduction de la notion de polyèdre projectif miroir. Il s'agit de la donnée d'un polyèdre projectif P et de réflexions par rapport aux faces de P . On a alors une notion naturelle d'angle dièdre (on donnera les définitions précises à la section 1.2). Dans le premier chapitre de cette thèse, on s'intéresse au problème suivant : étant donné le graphe d'un polyèdre \mathcal{G} dont les arêtes sont étiquetées par des réels $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$. On cherche à comprendre l'espace des modules $X_{\mathcal{G}}$ des polyèdres projectifs miroirs qui ont la combinatoire fixée par \mathcal{G} , et dont les angles dièdres sont les angles fixés par les étiquettes de \mathcal{G} .

Pour pouvoir décrire la topologie de $X_{\mathcal{G}}$, nous aurons besoin de faire une hypothèse sur la combinatoire du graphe de polyèdre \mathcal{G} . Nous allons définir une sous-classe de graphes de polyèdres : les écimaèdres. De façon imagée, il s'agit des polyèdres obtenus à partir du tétraèdre et par une suite finie de coupes "près d'un sommet" (voir définition 1.3.1). On montrera le théorème suivant :

Théorème (1.3.15). — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté, l'espace $X_{\mathcal{G}}$ est vide ou difféomorphe à la réunion de n copies d'un certain \mathbb{R}^d , où les entiers n et d s'expriment à l'aide de la combinatoire de \mathcal{G} et de ses étiquettes.

On donnera une critère précis et simple pour savoir si $X_{\mathcal{G}}$ est vide ou non. On donnera aussi un système de coordonnées explicite de l'espace $X_{\mathcal{G}}$.

Rappelons que notre objectif est de construire des convexes divisibles. Il est donc essentiel de savoir qu'il existe une infinité d'écimaèdres étiquetés permettant grâce à la méthode de Vinberg de construire des convexes divisibles. On montrera aussi le théorème suivant qui sera un corollaire évident du théorème précédent.

Théorème (Corollaire 1.3.18). — Soient P un écimaèdre hyperbolique de \mathbb{H}^3 compact dont tous les angles dièdres sont aigus ou droits, et \mathcal{G} le graphe de P étiqueté par les angles dièdres

du polyèdre P , alors, l'espace des modules des polyèdres projectifs miroirs qui réalisent \mathcal{G} est difféomorphe à $\mathbb{R}^{e_+ - 3}$, où e_+ est le nombre d'arêtes de P dont l'angle dièdres est différent de $\frac{\pi}{2}$.

Les surfaces projectives proprement convexes de volume fini. — Tout ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^n est naturellement muni d'une distance, la distance de Hilbert, qui vient d'une métrique Finslérienne. Par conséquent, l'ouvert Ω porte une mesure naturelle qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Tous ces objets sont préservés par le groupe $\text{Aut}(\Omega)$. Il est donc naturel de s'intéresser à l'étude des ouverts proprement convexes Ω pour lesquels il existe un sous-groupe discret Γ de $\text{Aut}(\Omega)$ tel que le quotient Ω/Γ est de volume fini. Ces objets n'ont jamais été étudié, nous les étudierons en dimension 2.

Les surfaces projectives proprement convexes compactes ont été beaucoup étudiées notamment par Goldman et Choi. Mon travail a consisté à généraliser un certain nombre de résultats connus dans le cas compact au cas de volume fini. Ce travail est fortement inspiré par la géométrie hyperbolique et les travaux de Goldman.

Un premier résultat est le théorème suivant qui fait apparaître la dichotomie entre le cas homogène et le cas non homogène.

Théorème (2.7.16). — Soient Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ et un ouvert proprement convexe Ω tel que $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$, on suppose que Ω n'est pas un triangle. Alors, on a l'alternative exclusive suivante :

- L'adhérence de Zariski $\overline{\Gamma^{\mathbb{Z}}}$ de Γ est conjuguée au groupe $\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ et Ω est un ellipsoïde et $\text{Aut}(\Omega) = \overline{\Gamma^{\mathbb{Z}}}$.
- Le groupe Γ est Zariski dense dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ et $\text{Aut}(\Omega)$ est un sous-groupe discret de Ω . En particulier, Γ est d'indice fini dans $\text{Aut}(\Omega)$.

Le théorème suivant est une généralisation d'un résultat bien connu en géométrie hyperbolique, les démonstrations sont toujours très proche. L'idée de la démonstration de ce théorème dans le cadre hyperbolique est que l'aire de tout triangle idéal est égale π . Ceci est faux, pour les triangles idéaux des ouverts proprement convexes de \mathbb{P}^2 , mais leurs aires restent minorées par une constante.

Théorème (2.6.18). — Toute surface sans bord admettant une structure projective proprement convexe de volume fini est de type fini.

Le théorème suivant est aussi une généralisation d'un théorème classique de géométrie hyperbolique. Ce théorème est le coeur du chapitre 2 de cette thèse. Il montre en particulier que le fait d'être de volume fini ne dépend que de l'holonomie des lacets élémentaires.

Théorème (2.6.27). — Soit S une surface sans bord et de type fini, une structure projective proprement convexe sur S est de volume fini si et seulement si l'holonomie des lacets élémentaires (Définition 3.3.1) de S est parabolique.

Comme nous travaillons à l'intérieur de la géométrie projective, nous disposons d'une notion de dualité. Il est important de noter que cette notion se comporte bien avec la notion de surface projective proprement convexe de volume fini.

Théorème (2.7.7). — Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω , l'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si l'action de ${}^t\Gamma$ sur l'ouvert dual Ω^* est de covolume fini.

On sait que tout convexe divisible de dimension 2 qui n'est pas un triangle est strictement convexe et son bord est \mathcal{C}^1 . Ceci est encore vrai dans le cadre "covolume fini".

Théorème (Théorèmes 2.7.4 et 2.7.8). — Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω , on suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini et que Ω n'est pas un triangle. Alors, Ω est strictement convexe et le bord $\partial\Omega$ de Ω est \mathcal{C}^1 .

La notion d'ensemble limite est essentielle pour comprendre les sous-groupes discrets linéaires. Cette notion apparaît ici naturellement pour caractériser les actions de covolume fini.

Théorème (2.7.10). — Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω , on suppose que Γ n'est pas virtuellement abélien. Alors, l'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si Γ est de type fini et l'ensemble limite Λ_Γ de Γ vérifie $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.

On peut aussi s'intéresser à l'espace des modules des structures projectives de volume fini sur les surfaces. On verra que l'on peut aussi définir une notion de volume fini sur les surfaces à bords. On peut alors montrer le résultat suivant qui a été démontré par Goldman dans le cas des surfaces compactes sans bord. On notera $\Sigma_{g,p}$ la surface de genre g et à p pointes.

Théorème (3.3.4). — Supposons que la surface $\Sigma_{g,p}$ soit de caractéristique d'Euler strictement négative alors l'espace des modules des structures projectives proprement convexe de volume fini sur la surface $\Sigma_{g,p}$ est homéomorphe à une boule de dimension $16g - 16 + 6p$.

On obtiendra un système de coordonnées à la "Fenchel-Nielsen" sur l'espace des modules. On traitera aussi le cas d'une surface à bord, mais dans ce cas l'espace des modules n'est pas une variété mais un espace topologique stratifié. On donnera une définition précise de cette notion au chapitre 3, pour le moment, on peut se contenter de retenir qu'il s'agit d'une réunion de variétés qui se recollent agréablement.

Pour finir, nous montrerons que les structures projectives proprement convexes de volume fini sont des objets très naturelles.

Théorème (3.4.7). — On se donne une surface sans bord S de caractéristique d'Euler strictement négative. L'espace des modules des structures projectives proprement convexe de volume fini sur la surface S s'identifie à l'une des composantes connexes de l'espace des représentations irréductibles du groupe fondamental de S dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ dont l'holonomie des lacets élémentaires est parabolique, à conjugaison près.

CHAPITRE 1

ESPACES DES MODULES DE CERTAINS POLYÈDRES PROJECTIFS MIROIRS

1.1. Introduction

Un ouvert convexe Ω de l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est dit *divisible* lorsqu'il existe un sous-groupe discret Γ du groupe des transformations projectives $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et agit proprement et cocompactement sur Ω . On dit aussi que Γ *divise* Ω . Vinberg a trouvé une méthode géométrique pour construire des convexes divisibles à l'aide des groupes de Coxeter. Cette méthode a été initiée par Poincaré pour construire des réseaux du groupe des isométries de l'espace hyperbolique réel.

Dans la méthode de Poincaré, on commence par se donner un polyèdre P de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n et une famille d'isométries qui identifie 2 à 2 les $(n-1)$ -faces de P . Si ces isométries vérifient des relations de compatibilité, qui disent que l'on pave bien autour de chaque $(n-2)$ -face, alors le groupe engendré par ces isométries agit proprement sur \mathbb{H}^n et P est un domaine fondamental pour cette action. En particulier, si P est un polyèdre de \mathbb{H}^n dont les angles entre les $(n-1)$ -faces adjacentes sont des sous-multiples de π , alors le groupe engendré par les réflexions qui fixent les faces de P est un groupe de Coxeter ; il agit proprement sur \mathbb{H}^n et P est un domaine fondamental.

Vinberg a généralisé cette méthode au cadre projectif de la façon suivante. On se donne un polyèdre compact P de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et des réflexions qui fixent les faces de P . Cette fois-ci, on a des degrés de liberté pour choisir ces réflexions. L'hypothèse "les angles dièdres de P sont des sous-multiples de π " devient "le produit de deux réflexions par rapport à des faces adjacentes est conjugué à une rotation d'ordre fini". Alors, le groupe Γ engendré par ces réflexions est un groupe de Coxeter, qui agit proprement sur un certain ouvert convexe Ω de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ qui contient $\overset{\circ}{P}$ et $P \cap \Omega$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur Ω .

Cette construction motive l'introduction de la notion de polyèdre projectif miroir. Il s'agit de la donnée d'un polyèdre projectif P et de réflexions par rapport aux faces de P . On a alors une notion naturelle d'angle dièdre (on donnera les définitions précises à la partie 1.2). Dans ce texte, on s'intéresse au problème suivant : étant donné le graphe d'un polyèdre \mathcal{G} dont les arêtes sont étiquetées par des réels $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on cherche à comprendre l'espace des modules $X_{\mathcal{G}}$ des polyèdres projectifs miroirs qui ont la combinatoire de \mathcal{G} , et dont les angles dièdres sont les angles fixés par les étiquettes de \mathcal{G} .

Choi s'est intéressé à ce problème dans [Choi2], sous un angle un peu différent : il fixe un polyèdre projectif P dont il étiquette les arêtes par des réels $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et il cherche à comprendre l'espace des réflexions par rapport aux faces de P qui font de P un polyèdre projectif miroir

dont les angles dièdres sont les étiquettes des arêtes de P . Choi montre sous une hypothèse dite "d'ordonnabilité" que cet espace des modules est une variété lisse dont il sait calculer la dimension. Il faut noter que l'hypothèse d'ordonnabilité de Choi porte non seulement sur la combinatoire du polyèdre P mais aussi sur les étiquettes des arêtes de P .

Pour pouvoir décrire la topologie de $X_{\mathcal{G}}$, nous aurons besoin de faire une hypothèse sur la combinatoire du graphe de polyèdre \mathcal{G} . Nous allons définir une sous-classe de graphes de polyèdres : les écimaèdres. De façon imagée, il s'agit des polyèdres obtenus à partir du tétraèdre et par une suite finie de coupes "près d'un sommet" (voir définition 1.3.1). On montrera le théorème suivant :

Théorème (1.3.15). — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté, l'espace $X_{\mathcal{G}}$ est vide ou difféomorphe à la réunion de n copies d'un certain \mathbb{R}^d , où les entiers n et d s'expriment à l'aide de la combinatoire de \mathcal{G} et de ses étiquettes.

On donnera un critère précis et simple pour savoir si $X_{\mathcal{G}}$ est vide ou non. On donnera aussi un système de coordonnées explicite sur l'espace $X_{\mathcal{G}}$ (Théorème 1.3.64).

Rappelons que notre objectif est de construire des convexes divisibles. Il est donc essentiel de savoir qu'il existe une infinité d'écimaèdres étiquetés permettant grâce à la méthode de Vinberg de construire des convexes divisibles. On montrera aussi le théorème suivant qui sera un corollaire évident du théorème 1.3.15.

Théorème (Corollaire 1.3.18). — Soient P un écimaèdre hyperbolique de \mathbb{H}^3 compact dont tous les angles dièdres sont aigus ou droits, et \mathcal{G} le graphe de P étiqueté par les angles dièdres du polyèdre P , alors, l'espace des modules $X_{\mathcal{G}}$ des polyèdres projectifs miroirs qui réalisent \mathcal{G} est difféomorphe à \mathbb{R}^{e_+-3} , où e_+ est le nombre d'arêtes de P dont l'angle dièdre est différent de $\frac{\pi}{2}$.

Terminons cette introduction en donnant le plan de cet article. La première partie est constituée de rappel et de définition. On rappelle les définitions de polyèdre projectif et de groupe de Coxeter. Ensuite, on définit la notion de polyèdre projectif miroir qui est l'objet central de cet article. Pour motiver cette définition, nous rappelons le théorème de Vinberg. Pour calculer les entiers n et d du théorème 1.3.15, nous introduisons la notion de 3-circuits de \mathcal{G} , il s'agit des triplets (r, s, t) de faces fermées de \mathcal{G} mutuellement adjacentes. Le théorème d'Andreev, qui est un analogue hyperbolique de notre théorème et dont nous rappellerons un énoncé, nous poussent à définir les notions de 3-circuits *prismatiques* (i.e $r \cap s \cap t = \emptyset$), *non prismatiques*, mais aussi les 3-circuits *sphériques*, *affines* et *hyperboliques* selon la somme des angles dièdres $\theta_{r \cap s}$, $\theta_{s \cap t}$ et $\theta_{t \cap r}$; et enfin de 3-circuit *avec angle droit* ou *sans angle droit* selon que l'un des angles $\theta_{r \cap s}$, $\theta_{s \cap t}$ ou $\theta_{t \cap r}$ est droit ou non. Toutes ces notions sont cruciales dans l'étude de la topologie de $X_{\mathcal{G}}$.

Dans la seconde partie, on commence par présenter la notion d'écimaèdre qui sera la seule hypothèse du théorème 1.3.15. On montre que les *écimaèdres* peuvent être obtenus en recollant des *blocs fondamentaux* le long de faces triangulaires. Un bloc fondamental étant un tétraèdre tronqué en un ou plusieurs sommets distincts. Ensuite, on consacre un paragraphe à la présentation du théorème 1.3.15.

Les paragraphes à partir du paragraphe 1.3.3 jusqu'au paragraphe 1.3.11 constitue la démonstration du théorème 1.3.15. On commencera par montrer les points les plus simples du

théorème. Au paragraphe 1.3.5, on montre que l'espace des modules du triangle est homéomorphe à \mathbb{R} (ou à un point s'il y a un angle droit), pour cela on introduit l'invariant R d'un triangle miroir. Cet invariant sera la clé de voûte de la paramétrisation de l'espace $X_{\mathcal{G}}$.

Dans le paragraphe 1.3.6, on construit pour tout 3-circuit prismatique (r, s, t) un plan canonique coupant P à l'intérieur des arêtes communes à r, s, t . Ce plan nous permet de découper géométriquement le polyèdre P , en blocs fondamentaux que nous comprendrons par la suite.

Lorsque le 3-circuit est prismatique, sans angle droit et, affine ou sphérique, l'invariant R ne peut pas appartenir à un intervalle compact. C'est cette obstruction qui est la cause de la non connexité de l'espace $X_{\mathcal{G}}$. Dans les paragraphes 1.3.7, 1.3.8 et 1.3.9, on cherche à ramener l'étude des composantes connexes de $X_{\mathcal{G}}$ à un problème de combinatoire sur des forêts.

Enfin, dans la partie 1.3.10, nous calculons l'espace des modules pour le tétraèdre et pour les blocs fondamentaux. Et, dans la partie 1.3.11 nous décrivons la manière de recoller deux blocs fondamentaux.

On termine la deuxième partie en explicitant au paragraphe 1.3.12 un système de coordonnées sur l'espace des modules des polyèdres projectifs miroirs.

Enfin, la troisième partie décrit des exemples concrets d'espace des modules de polyèdres projectifs miroirs.

Je tiens à remercier Yves Benoist pour m'avoir guidé pendant ce travail, mais aussi pour m'avoir fait découvrir les convexes divisibles. Je remercie aussi Mickaël Crampon pour ses conseils de rédaction.

1.2. Notion de polyèdre projectif miroir

Commençons par donner des définitions précises et par rappeler le théorème de Vinberg. Nous en profiterons pour rappeler le théorème d'Andreev dont le théorème 1.3.15 est un analogue naturel.

1.2.1. Les convexes de $\mathbb{P}^+(V)$. — Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n+1 \geq 3$. Notons $\mathbb{P}^+(V) = \{\text{demi-droites vectorielles de } V\} = (V - \{0\})/\mathbb{R}_+^*$ la sphère projective ; c'est une variété projective difféomorphe à la n -sphère euclidienne usuelle. Le groupe des transformations projectives de $\mathbb{P}^+(V)$ est $\text{SL}^\pm(V) = \{u \in \text{GL}(V) \text{ tel que } \det(u) = \pm 1\} \simeq \text{GL}(V)/\mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.2.1. — Une partie Ω de $\mathbb{P}^+(V)$ est dite *convexe* (resp. *proprement convexe*) s'il existe une carte affine dans laquelle Ω est un convexe (resp. convexe borné). Elle est dite *strictement convexe* si le bord $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ ne contient pas de segments non triviaux. On dit qu'un ouvert convexe est *divisible* s'il existe un sous-groupe discret Γ de $\text{SL}^\pm(V)$ qui préserve Ω , agit proprement sur Ω et tel que le quotient Ω/Γ soit compact. On dit aussi que Γ *divise* Ω .

Pour en savoir plus sur la théorie des convexes divisibles, on pourra consulter la série d'articles de Benoist : [Beno9, Beno8, Beno6, Beno2], pour une étude complète de la dimension 2 on pourra consulter l'article de Goldman : [Gold1].

Donnons tout de suite des exemples de convexes divisibles :

- La sphère projective est un convexe divisible.
- N'importe quel espace affine de dimension n inclus dans $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^{n+1})$ est divisé par le groupe \mathbb{Z}^n ; \mathbb{R}^n est donc un exemple de convexe divisible non proprement convexe.
- On peut construire un autre convexe divisé par \mathbb{Z}^n de la façon suivante. La base canonique de \mathbb{R}^{n+1} définit naturellement un pavage de $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^{n+1})$ en n -simplexes au nombre de 2^{n+1} . Si on note Ω l'intérieur de l'un deux, alors la composante neutre du stabilisateur de Ω dans $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ est le groupe D des matrices diagonales à diagonale strictement positive de déterminant 1. Le groupe D agit proprement et simplement transitivement sur Ω , et l'image Γ de toute représentation fidèle et discrète de \mathbb{Z}^n dans D est un réseau cocompact de D . Ainsi, Γ divise Ω qui est donc un convexe divisible proprement convexe mais non strictement convexe.
- Terminons cette liste d'exemples par la construction d'un convexe divisible strictement convexe. Soient q une forme quadratique sur V de signature $(n, 1)$, et Ω l'une des 2 composantes connexes de l'ouvert $\{[v] \in \mathbb{P}^+(V) \mid q(v) < 0\}$. Il s'agit du modèle projectif de l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^n : il est donc divisé par tous les réseaux cocompacts de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, le groupe des isométries de \mathbb{H}^n .

Nous allons construire dans ce texte des convexes divisibles Ω , divisés par des groupes de Coxeter W , selon une méthode initiée par Vinberg.

1.2.2. Les polyèdres projectifs. — On notera $p : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^+(V)$ la projection naturelle.

Définition 1.2.2. — Un *polyèdre projectif* est un fermé proprement convexe P d'intérieur non vide de $\mathbb{P}^+(V)$ tel qu'il existe un nombre fini de formes linéaires $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ sur V tel que $P = p(\{x \in V \setminus \{0\} \mid \alpha_i(x) \leq 0, i = 1 \dots f\})$.

Pour tout polyèdre projectif P de $\mathbb{P}^+(V)$, on définit une relation d'équivalence \sim_P sur P de la façon suivante :

$$x \sim_P y \Leftrightarrow \text{le segment } [x, y] \text{ se prolonge strictement des deux côtés dans } P$$

Les adhérences des classes d'équivalences de \sim_P s'appellent les *faces* de P . Il est clair que toute face est incluse dans un unique sous-espace projectif maximal. On appelle *dimension* (resp. *codimension*) d'une face la dimension (resp. codimension) de l'unique sous-espace maximal la contenant.

1.2.3. Groupes de Coxeter. — Les groupes de Coxeter seront au coeur de nos motivations ; nous allons donc rappeler quelques définitions.

Définition 1.2.3. — Un *système de Coxeter* est la donnée d'un ensemble fini S et d'une matrice symétrique $M = (M_{st})_{s,t \in S}$ telle que les coefficients diagonaux vérifient $M_{ss} = 1$ et les coefficients non diagonaux vérifient $M_{st} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$. Le cardinal de S s'appelle le *rang* du système de Coxeter (S, M) . À un système de Coxeter, on associe un *groupe de Coxeter* W_S . Il s'agit d'un groupe défini par générateurs et relations. Les générateurs sont les éléments de S et on impose les relations $(st)^{M_{st}} = 1$ pour $s, t \in S$ tels que $M_{st} \neq \infty$.

Avec toute partie S' de S , on peut former le groupe de Coxeter $W_{S'}$ associé au système de Coxeter (S', M') , où M' est la restriction de M à S' . Un corollaire du théorème de Vinberg montre que le morphisme naturel $W_{S'} \rightarrow W_S$ est injectif. Ainsi, $W_{S'}$ peut être identifié avec le

sous-groupe de W_S engendré par la partie S' . On utilisera donc la notation $W_{S'}$ pour désigner ces deux groupes.

1.2.4. Polyèdre projectif miroir. — Dans le cadre projectif, si on se donne un polyèdre projectif, on peut choisir pour chaque face une réflexion qui la préserve. Nous allons nous servir de cette liberté pour construire de nombreux convexes divisibles associés à un groupe de Coxeter.

1.2.4.1. Le théorème de Vinberg. — Le but de ce paragraphe est de rappeler l'énoncé du théorème de Vinberg dont on peut trouver une démonstration dans [Vin3] et dans [Beno7].

Soit P un polyèdre projectif; on note S l'ensemble des faces de codimension 1 de P , et on suppose que $P = p(\{x \in V \setminus \{0\} \mid \alpha_s(x) \leq 0, s \in S\})$. En particulier, pour toute face $s \in S$ et pour tout élément $x \in s$, on a $\alpha_s(x) = 0$. On se donne pour chaque face s de codimension 1, une réflexion projective $\sigma_s = Id - \alpha_s \otimes v_s$ avec $v_s \in V$ et $\alpha_s(v_s) = 2$ qui fixe la face s , et on note Γ le groupe engendré par les réflexions σ_s pour $s \in S$, et $a_{st} = -\alpha_s(v_t)$.

Une étude locale autour des faces de codimension 2 montre que des conditions nécessaires pour que les $\gamma(P)$ pavent une partie de $\mathbb{P}^+(V)$ (c'est à dire que les $\gamma(P)$ soient d'intérieur disjoints) sont les suivantes :

$$\forall s, t \in S, \text{ tels que } \text{codim}(s \cap t) = 2, \text{ on a :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad a_{st} \geq 0 \quad \text{et} \quad (a_{st} = 0 \Leftrightarrow a_{ts} = 0) \\ 2)a) \quad a_{st}a_{ts} \geq 4 \quad \text{ou} \quad b) \quad a_{st}a_{ts} = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{avec } m_{st} \geq 2 \text{ entier} \end{array} \right.$$

Le théorème de Vinberg affirme que ces conditions sont en fait suffisantes.

Nous allons relâcher légèrement la condition (2) en la condition (2') qui autorise les angles à prendre toutes les valeurs dans $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$2')a) \quad a_{st}a_{ts} \geq 4 \quad \text{ou} \quad b) \quad a_{st}a_{ts} = 4 \cos^2(\theta_{st}) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{avec } \theta_{st} \in]0, \frac{\pi}{2}]$$

Définition 1.2.4. — Un *polyèdre projectif miroir* est la donnée d'un polyèdre projectif P et, pour chaque face s de codimension 1 de P , d'une réflexion $\sigma_s = Id - \alpha_s \otimes v_s$ qui fixe s , avec les conventions suivantes : $P = p(\{x \in V \setminus \{0\} \mid \alpha_s(x) \leq 0, s \in S\})$, $\alpha_s(v_s) = 2$ et les conditions (1) et (2'b) sont vérifiées. On dit que l'angle dièdre entre deux faces s et t telles que $\text{codim}(s \cap t) = 2$ est $\theta_{st} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ si $a_{st}a_{ts} = 4 \cos^2(\theta_{st})$.

Remarque 1.2.5. — Il est important de noter que l'on exclut le cas 2')a) de la définition de polyèdre projectif miroir. En effet, la seule définition d'angle dièdre acceptable pour le cas 2')a) serait un angle nul, et ce cas ne nous intéresse pas.

Notations 1. — Soit P un polyèdre miroir, on désignera par la lettre S l'ensemble de ses faces de codimension 1. On s'est donné pour chaque $s \in S$ une réflexion $\sigma_s = Id - \alpha_s \otimes v_s$ telle que $\alpha_s(v_s) = 2$ et $P = p(\{x \in V \setminus \{0\} \mid \alpha_s(x) \leq 0, s \in S\})$. Cette convention de signe détermine un unique couple $([\alpha_s], [v_s]) \in \mathbb{P}^+(V^*) \times \mathbb{P}^+(V)$. On appellera le point $[v_s]$ la *polaire* de la face s . On fera bien attention au fait que le couple (α_s, v_s) n'est pas unique. En effet, si (α_s, v_s) convient alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ le couple $(\lambda^{-1}\alpha_s, \lambda v_s)$ convient aussi. Enfin, si $s, t \in S$ alors on notera μ_{st} la quantité $\alpha_s(v_t)\alpha_t(v_s)$ qui est bien définie. Par définition, si s et t sont deux faces de P telles que $\text{codim}(s \cap t) = 2$ alors $\mu_{st} = 4 \cos^2(\theta_{st})$; dans ce cas on notera $m_{st} = \frac{\pi}{\theta_{st}}$. Ces notations et conventions seront utilisées tout au long de ce texte.

Définition 1.2.6. — Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π . Le système de Coxeter associé à P est le système de Coxeter (S, M) , où S est l'ensemble des faces de codimension 1 de P et pour tout $s, t \in S$, on a $M_{st} = m_{st}$ si les faces s et t vérifient $\text{codim}(s \cap t) = 2$ et $M_{st} = \infty$ sinon. On note W_S le groupe de Coxeter associé au système (S, M) .

Théorème 1.2.7 (Vinberg). — Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π . Soient (S, M) le système de Coxeter associé à P , W_S le groupe de Coxeter associé et Γ le groupe engendré par les $(\sigma_s)_{s \in S}$. Alors,

- a) Les polyèdres $\gamma(P)_{\gamma \in \Gamma}$ paient un convexe Ω de $\mathbb{P}^+(V)$.
- b) Le morphisme $\sigma : W_S \rightarrow \Gamma$ défini par $\sigma(s) = \sigma_s$ est un isomorphisme.
- c) Le groupe Γ est un sous-groupe discret de $\text{SL}^\pm(V)$.
- d) Le groupe Γ agit proprement sur $\overset{\circ}{\Omega}$, l'intérieur de Ω .
- e) L'ensemble Ω est ouvert si et seulement si pour toute face v de P , W_{S_v} est fini, où $S_v = \{s \in S \mid v \subset s\}$.

Remarque 1.2.8. — Lorsque le graphe de Coxeter de W_S est connexe, que W_S est infini et que les v_s engendrent V , alors Ω est proprement convexe (Cela est démontré dans [Beno7]).

Remarque 1.2.9. — Le point e) du théorème de Vinberg et la classification des groupes de Coxeter finis ([Bou]) montrent que si Ω est ouvert et le polyèdre P de dimension 3, alors pour tout sommet v de P le groupe W_{S_v} est de type $(2, 2, n)$ avec $n \geq 2$, ou $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ ou encore $(2, 3, 5)$. En particulier, tout sommet de P doit être de valence 3 pour obtenir un convexe divisible Ω .

1.2.4.2. Combinatoire d'un polyèdre de $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4)$. — On se restreint désormais à la dimension 3 et on appellera une face de codimension 1 (resp. 2, resp. 3) une face (resp. une arête, resp. un sommet). Certaines propriétés combinatoires des polyèdres seront essentielles, nous allons donc donner quelques définitions.

A tout polyèdre P , on associe un graphe \mathcal{G}_P planaire et 3-connexe (i.e \mathcal{G}_P a plus de quatre sommets et \mathcal{G}_P privé de 2 sommets quelconques non adjacents est encore connexe) dont les sommets sont les sommets de P et les arêtes les arêtes de P .

Définition 1.2.10. — Soient P un polyèdre et \mathcal{G} un graphe, on dira que P réalise \mathcal{G} lorsque \mathcal{G} et \mathcal{G}_P sont des graphes planaires isomorphes.

Remarque 1.2.11. — En fait, on peut montrer qu'un graphe est réalisé par un polyèdre si et seulement s'il est planaire et 3-connexe (Théorème de Steinitz, voir le livre [JG]).

Ce qui nous intéresse, c'est de réaliser des polyèdres avec des angles dièdres prescrits ; on en vient donc à la définition suivante :

Définition 1.2.12. — Un graphe étiqueté est la donnée d'un graphe de valence 3, planaire et 3-connexe \mathcal{G} et pour chaque arête e de \mathcal{G} d'un réel $\theta_e \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Remarque 1.2.13. — Un graphe étiqueté \mathcal{G} est en particulier un graphe planaire et 3-connexe, la notion de face de \mathcal{G} est donc bien définie.

Notations 2. — Soit \mathcal{G} un graphe étiqueté, si e est une arête de \mathcal{G} , on désignera par θ_e l'angle associé. De plus, on désignera par μ_e le réel $4 \cos^2(\theta_e)$, et si $\theta_e = \frac{\pi}{m}$, où m est un entier supérieur ou égale à 2 ; on dira que l'arête est d'ordre m . De plus, si s et t désignent deux faces de \mathcal{G} qui partagent une arête alors cette arête sera notée st , et θ_{st} désigne alors l'angle qu'elle porte.

Lorsque l'on étudie l'espace des modules d'un objet mathématique, il est souvent utile d'introduire un marquage.

Définition 1.2.14. — Un graphe étiqueté (resp polyèdre miroir) est dit *marqué* lorsqu'une numérotation de ses faces a été choisie.

Définition 1.2.15. — Soient \mathcal{G} un graphe étiqueté marqué, et P un polyèdre miroir marqué ; on dit que P réalise \mathcal{G} lorsque le polyèdre sous-jacent à P réalise le graphe sous-jacent à \mathcal{G} via une identification qui respecte leur marquage et que les angles dièdres du polyèdre projectif miroir P correspondent aux étiquettes de \mathcal{G} .

Remarque 1.2.16. — Pour alléger la rédaction, on supposera implicitement tout au long de ce texte que tous les graphes étiquetés et tous les polyèdres projectifs miroirs sont marqués.

La notion suivante va permettre de décrire des propriétés combinatoires des polyèdres qui seront essentielles pour la suite.

Définition 1.2.17. — Soit \mathcal{G} un graphe planaire et 3-connexe, un k -circuit orienté (resp k -circuit) Γ de \mathcal{G} est une suite $(f_1, e_1, f_2, e_2, \dots, f_k, e_k)$ définie à permutation circulaire près (resp à permutation circulaire près et à sens de parcours près) tel que :

$$\begin{cases} \text{les } f_i \text{ sont des faces distinctes de } \mathcal{G}, \\ \text{les } e_i \text{ sont des arêtes de } \mathcal{G}, \\ \forall i = 1 \dots k, f_i \cap f_{i+1} = e_i, \text{ où } f_{k+1} = f_1. \end{cases}$$

De plus, si toutes les extrémités des arêtes de Γ sont distinctes, alors on dit que Γ est *prismatique*.

Remarque 1.2.18. — On remarquera que les 3 arêtes d'un 3-circuit non prismatique ont un sommet en commun puisque \mathcal{G} est de valence 3.

Définition 1.2.19. — Soient \mathcal{G} un graphe étiqueté et Γ un k -circuit de \mathcal{G} , on note $(\theta_i)_{i=1 \dots k}$ les angles des arêtes de Γ ; posons $\Sigma = \sum_{i=1 \dots k} \theta_i$.

$$\text{On dira que } \Gamma \text{ est } \begin{cases} \textit{sans angle droit} & \text{si les } \theta_i \text{ sont tous différents de } \frac{\pi}{2} \text{ pour } i = 1 \dots k, \\ \textit{avec angle droit} & \text{si l'un au moins des } \theta_i \text{ est égal à } \frac{\pi}{2} \text{ pour } i = 1 \dots k, \\ \textit{sphérique} & \text{lorsque } \Sigma > (k-2)\pi, \\ \textit{affine} & \text{lorsque } \Sigma = (k-2)\pi, \\ \textit{hyperbolique} & \text{lorsque } \Sigma < (k-2)\pi. \end{cases}$$

1.2.4.3. Le théorème d'Andreev. — L'étude des polyèdres hyperboliques et des polyèdres projectifs miroirs fait apparaître une famille de graphes étiquetés qui nécessite un traitement à part. Il s'agit des graphes étiquetés de la figure 1 que nous appellerons les *prismes exceptionnels* et nous les noterons $\mathcal{G}_{\alpha, \beta, \gamma}$.

Théorème 1.2.20 (Andreev). — Soit \mathcal{G} un graphe étiqueté qui n'est pas le graphe d'un tétraèdre. Alors, il existe un polyèdre compact hyperbolique P qui réalise \mathcal{G} si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- Tout 3-circuit non prismatique de \mathcal{G} est sphérique.
- Tout 3-circuit prismatique de \mathcal{G} est hyperbolique.
- Tout 4-circuit prismatique de \mathcal{G} est hyperbolique.
- \mathcal{G} n'est pas un prisme exceptionnel.

De plus, ce polyèdre est unique à isométrie près.

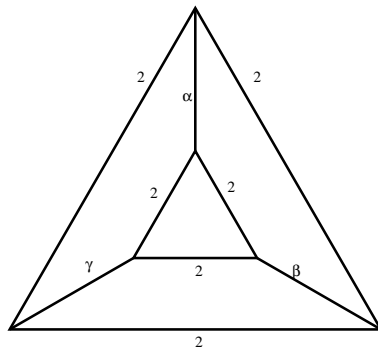


FIGURE 1. Prisme exceptionnel, avec $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \frac{\pi}{2}]$

On peut trouver une démonstration du théorème d'Andreev dans [And] ou [RHD]. On va s'intéresser à présent à un analogue projectif de ce résultat.

1.2.4.4. *Espaces des modules d'un polyèdre projectif miroir.* — Soit \mathcal{G} un graphe étiqueté marqué ; on introduit l'espace suivant :

$$Y_{\mathcal{G}} = \{P \text{ polyèdre projectif miroir marqué tel que } P \text{ réalise } \mathcal{G}\}.$$

Le groupe $\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $Y_{\mathcal{G}}$. On souhaite comprendre l'espace quotient $X_{\mathcal{G}} = Y_{\mathcal{G}}/\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$ que l'on appelle *espace des modules des polyèdres projectifs miroirs marqués qui réalisent \mathcal{G}* .

1.3. Résultat

Dans ce texte, nous nous intéressons exclusivement à une classe très particulière de polyèdres, que nous allons définir et étudier dans toute la partie 1.3.1 ; nous appellerons ces polyèdres les *écimaèdres*.

1.3.1. **Les écimaèdres combinatoires.** — Soient un graphe planaire 3-connexe \mathcal{G} de valence 3 et un sommet v de \mathcal{G} ; on définit un nouveau graphe \mathcal{G}' planaire 3-connexe de valence 3 où le sommet v a été remplacé par un triangle dont les sommets appartiennent aux arêtes issues de v , comme sur la figure 2. Cette opération sera appelée l'*écimage* du graphe \mathcal{G} au sommet v .

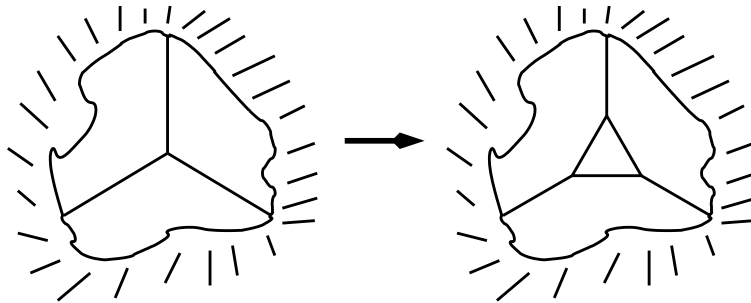


FIGURE 2. Écimage

Définition 1.3.1. — Un graphe \mathcal{G} est un *écimaèdre combinatoire* lorsqu'on peut l'obtenir à partir du graphe du tétraèdre combinatoire (i.e le graphe complet à 4 sommets) et d'un nombre fini d'écimages. Un polyèdre P est un *écimaèdre* si son graphe \mathcal{G}_P est un écimaèdre combinatoire.

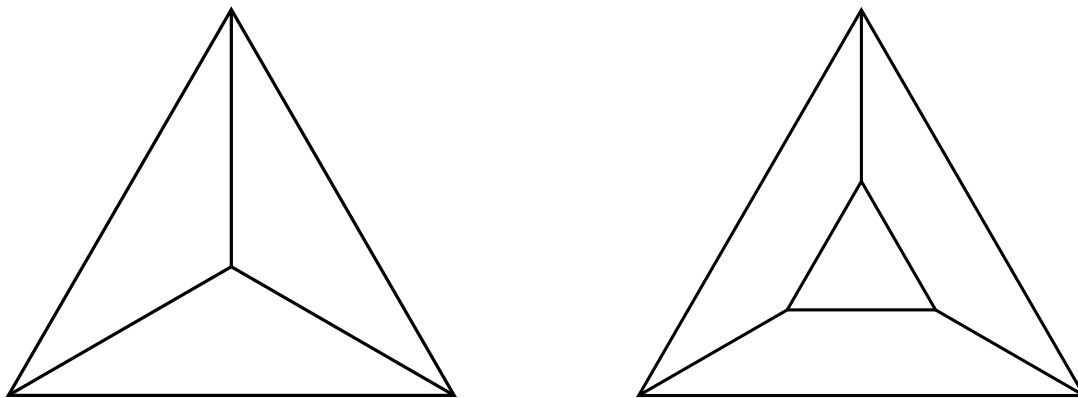


FIGURE 3. Graphes de \mathcal{T}_0 et \mathcal{T}_1

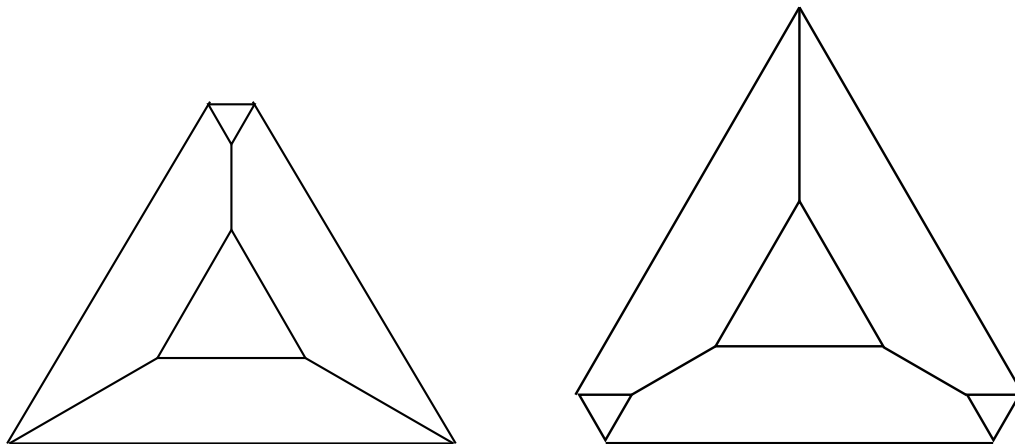


FIGURE 4. Graphes de \mathcal{T}_2 et \mathcal{T}_3

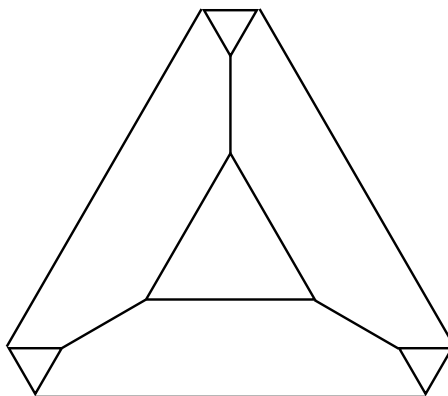


FIGURE 5. Graphe de \mathcal{T}_4

Définition 1.3.2. — Soient \mathcal{G}_1 (resp. \mathcal{G}_2) un polyèdre combinatoire qui possède une face triangulaire \mathcal{T}_1 (resp. \mathcal{T}_2) et une identification ϕ de \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 . Le polyèdre combinatoire \mathcal{G} obtenu en recollant les polyèdres combinatoires \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 le long des faces triangulaires \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 via l'identification ϕ est le polyèdre obtenu en retirant les arêtes et les sommets de \mathcal{T}_1 (resp. \mathcal{T}_2) à \mathcal{G}_1 (resp. \mathcal{G}_2) et en identifiant les 3 arêtes qui n'ont plus qu'un sommet de \mathcal{G}_1 avec les 3 arêtes qui n'ont plus qu'un sommet de \mathcal{G}_2 via ϕ .

Nous allons décomposer les écimaèdres combinatoires en *blocs fondamentaux*. Il s'agit des écimaèdres $(\mathcal{T}_i)_{i=0,\dots,4}$. L'écimaèdre \mathcal{T}_i est obtenu en écimant le tétraèdre combinatoire \mathcal{T}_0 en i sommets distincts. Leurs graphes sont représentés par les figures 3, 4 et 5.

Proposition 1.3.3. — *Tout écimaèdre combinatoire est obtenu en recollant un nombre fini de blocs fondamentaux le long de faces triangulaires. Et, inversement tout polyèdre combinatoire qui est obtenu comme recollement de blocs fondamentaux le long de faces triangulaires est un écimaèdre combinatoire.*

Démonstration. — La démonstration se fait en deux parties et à chaque fois par récurrence.

Commençons par montrer que tout écimaèdre combinatoire \mathcal{G} est obtenu en recollant un nombre fini de blocs fondamentaux le long de faces triangulaires, par récurrence sur le nombre d'écimage subit par \mathcal{G} .

L'initialisation de notre récurrence est évidente. À présent, si \mathcal{G} a subi n écimages alors il est obtenu en écimant un sommet v d'un écimaèdre \mathcal{H} qui est par hypothèse de récurrence obtenu en recollant des blocs fondamentaux $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ en nombre fini. Le sommet v appartient donc à un bloc fondamental \mathcal{B}_{i_0} . Distinguons deux cas, ou bien le sommet v de \mathcal{B}_{i_0} est un sommet du tétraèdre sous-jacent à \mathcal{B}_{i_0} ou bien il est sur face provenant de l'écimage.

Si le sommet v est un sommet du tétraèdre sous-jacent à \mathcal{B}_{i_0} alors l'écimaèdre obtenu en écimant \mathcal{B}_{i_0} au sommet v est encore un bloc fondamental, par conséquent \mathcal{G} est obtenue en recollant un nombre fini de blocs fondamentaux le long de faces triangulaires.

Si le sommet v est sur une face de \mathcal{B}_{i_0} venant de l'écimage alors v est sur une face triangulaire s de \mathcal{B}_{i_0} . Dans ce cas, \mathcal{G} est obtenu en recollant l'une des deux faces triangulaires du bloc fondamental \mathcal{T}_2 avec la face s de \mathcal{H} . Ainsi, \mathcal{G} est obtenu en recollant un nombre fini de blocs fondamentaux le long de faces triangulaires. Ce qui conclut la première partie de la démonstration.

Montrons à présent que tout polyèdre combinatoire qui est obtenu comme recollement de blocs fondamentaux le long de faces triangulaires est un écimaèdre, par récurrence sur le nombre de blocs fondamentaux du recollement.

L'initialisation de notre récurrence est encore évidente. À présent, si le polyèdre combinatoire \mathcal{G} est obtenu en recollant n blocs fondamentaux le long de faces triangulaires, alors par hypothèse de récurrence \mathcal{G} est obtenu en recollant un écimaèdre \mathcal{H} et un bloc fondamental le long d'une face triangulaire s . Par conséquent, le polyèdre \mathcal{G} est obtenu en écimant la face s en 1, 2 ou 3 sommets. C'est donc un écimaèdre. \square

Nous avons d'abord besoin de quelques définitions purement combinatoire.

Définition 1.3.4. — Soient \mathcal{G} un graphe planaire et 3-connexe et Γ un 3-circuit orienté de \mathcal{G} . La *coupe droite* (resp. *gauche*) de \mathcal{G} le long de Γ est le graphe \mathcal{G}_Γ^d (resp. \mathcal{G}_Γ^g) obtenu en retirant tous les sommets et les arêtes de \mathcal{G} à gauche (resp. droite) de Γ et en ajoutant un triangle dont les sommets sont les extrémités des arêtes de Γ qui sont à gauche (resp. droite) de Γ . (Voir figure 6.)

Définition 1.3.5. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre, on dit qu'un 3-circuit prismatique est *combinatoirement essentiel* lorsqu'il ne fait pas le tour d'une face triangulaire.

Remarque 1.3.6. — Maintenant, que l'on sait que tout écimaèdre est obtenu en recollant des blocs fondamentaux le long de faces triangulaires. Il est facile de voir que tout 3-circuit non prismatique de \mathcal{G} est inclus dans un et un seul des blocs fondamentaux qui décomposent \mathcal{G} . Tout 3-circuit prismatique non combinatoirement essentiel de \mathcal{G} est inclus dans un ou deux blocs fondamentaux qui décomposent \mathcal{G} , et s'il est inclus dans 2 alors l'un d'eux est un prisme triangulaire. Enfin, tout 3-circuit prismatique combinatoirement essentiel de \mathcal{G} est inclus dans exactement deux blocs fondamentaux. Pour conséquent, l'ensemble des 3-circuits de \mathcal{G} peut être

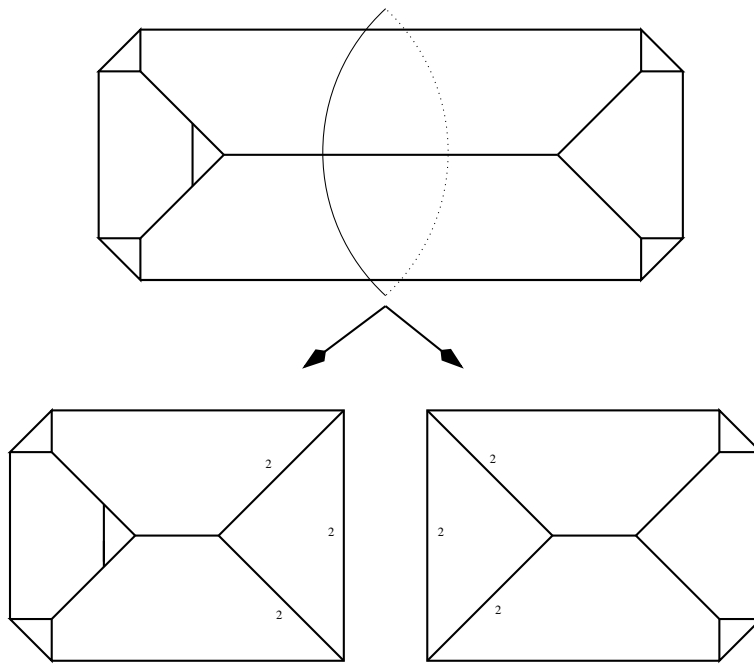


FIGURE 6. Coupe d'un graphe étiqueté

réalisé comme un ensemble de courbe simple, continue, transverse aux arêtes de \mathcal{G} et disjointes. Nous allons découper \mathcal{G} le long de ces courbes.

On a des définitions analogues pour les graphes étiquetés.

Définition 1.3.7. — Soient \mathcal{G} un graphe étiqueté et Γ un 3-circuit orienté de \mathcal{G} ; on définit la *coupe droite* (resp. *gauche*) de \mathcal{G} le long de Γ , comme le graphe étiqueté \mathcal{G}_Γ^d (resp. \mathcal{G}_Γ^g) dont le graphe sous-jacent est la coupe droite (resp. gauche) du graphe sous-jacent à \mathcal{G} , et on étiquette les nouvelles arêtes de \mathcal{G}_Γ^d (resp. \mathcal{G}_Γ^g) par des 2 et les anciennes gardent leurs étiquettes. (Voir figure 6.)

Remarque 1.3.8. — Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le 3-circuit Γ , on allégera les notations \mathcal{G}_Γ^d et \mathcal{G}_Γ^g en notant $\mathcal{G}_\Gamma^d = \mathcal{G}^d$ et $\mathcal{G}_\Gamma^g = \mathcal{G}^g$.

Définition 1.3.9. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté, on dit qu'un 3-circuit prismatique est *essentiel* lorsqu'il ne fait pas le tour d'une face triangulaire dont toutes les arêtes sont d'ordre 2.

Définition 1.3.10. — Un *bloc fondamental étiqueté* est un graphe étiqueté et dont le graphe sous-jacent est un bloc fondamental combinatoire, et les faces triangulaires issues de l'écimage ne possèdent que des arêtes d'ordre 2.

Remarque 1.3.11. — Il faut bien faire attention aux blocs fondamentaux qui sont des prismes triangulaires. En effet, ces derniers possèdent deux faces triangulaires mais une seule de ces deux faces provient de l'écimage. Par conséquent, les blocs fondamentaux qui sont des prismes triangulaires ne possèdent à priori qu'une seule face triangulaire qui porte uniquement des arêtes d'ordre 2.

Tout cela va nous permettre d'associer à tout écimaèdre \mathcal{G} , un arbre $\mathcal{A}_\mathcal{G}$ qui "mémorise" les écimages effectués. Cet arbre permet de coder une partie de la combinatoire de \mathcal{G} .

Nous allons découper \mathcal{G} le long de ces 3-circuits prismatiques. Pour cela, on se donne une famille $(\Gamma_j)_{j \in J}$ de 3-circuits orientés de \mathcal{G} où chaque 3-circuit est représenté exactement une et

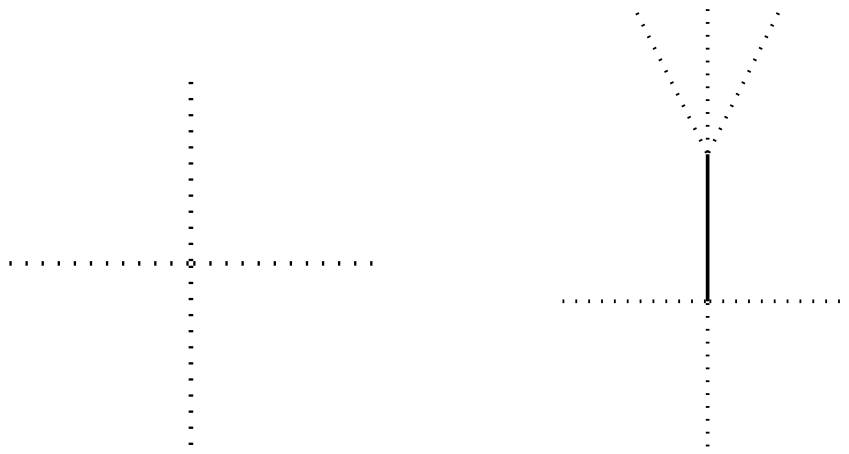


FIGURE 7. L'arbre \mathcal{A}_{T_0} et l'arbre \mathcal{A}_{T_1}

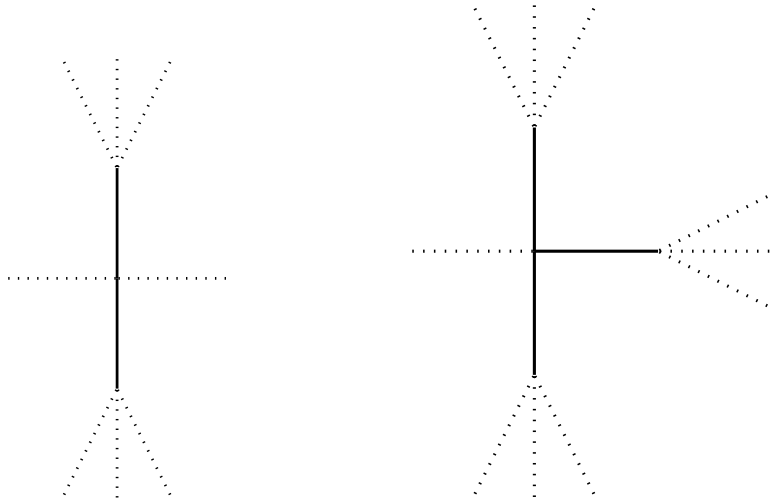


FIGURE 8. L'arbre \mathcal{A}_{T_2} et l'arbre \mathcal{A}_{T_3}

une seule fois. La remarque 1.3.6 montre que si l'on découpe \mathcal{G} le long d'un 3-circuit prismatique Γ_{i_0} de \mathcal{G} alors les 3-circuits $(\Gamma_i)_{i \neq i_0}$ sont des 3-circuits de \mathcal{G}_Γ^d ou bien de \mathcal{G}_Γ^g . On découpe \mathcal{G} le long de tous les 3-circuits $(\Gamma_j)_{j \in J}$ qui sont prismatiques. Les écimaèdres obtenus par ce découpage ne possède aucun 3-circuit prismatique essentiel. Par conséquent, la proposition 1.3.3 nous montre que ce sont des blocs fondamentaux étiquetés.

Définition 1.3.12. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre combinatoire, on se donne une famille $(\Gamma_j)_{j \in J}$ de 3-circuits orientés de \mathcal{G} où chaque 3-circuit est représenté exactement une et une seule fois. L'arbre associé à \mathcal{G} sera noté $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ et il est défini de la façon suivante : les sommets de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ sont les blocs fondamentaux $(\mathcal{B}_i)_{i=1 \dots n+1}$ résultant du découpage de \mathcal{G} le long des 3-circuits prismatiques de la famille $(\Gamma_j)_{j \in J}$ et les sommets de \mathcal{G} . Deux sommets de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ qui sont des blocs fondamentaux \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_j de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ sont reliés par une arête lorsque \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_j partagent un 3-circuit de $(\Gamma_j)_{j \in J}$. Et, un sommet v de \mathcal{G} est relié à un bloc fondamental lorsque v appartient à ce bloc.

On représentera les arêtes extrémales de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ en pointillés, car elles sont en bijection avec les sommets de \mathcal{G} , alors que les arêtes non extrémales sont en bijection avec les 3-circuits prismatiques de \mathcal{G} . De plus, les arêtes extrémales du sous-arbre en trait plein sont en bijection avec les 3-circuits prismatiques non combinatoirement essentiels.

On a représenté les arbres \mathcal{A}_{T_i} pour $i = 1, \dots, 4$ à l'aide des figures 7, 8 et 9.

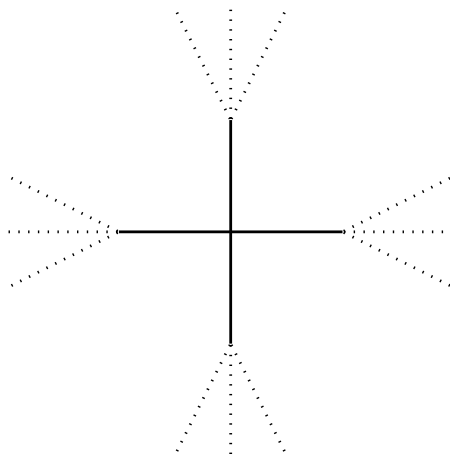


FIGURE 9. L'arbre \mathcal{A}_{T_4}

Remarque 1.3.13. — Il faut bien prendre garde au fait que l'application $\mathcal{G} \mapsto A_{\mathcal{G}}$ n'est pas injective. En revanche, on vérifie facilement que l'image de cette application est l'ensemble des arbres dont les sommets non extrémaux sont de valence 4.

Nous allons montrer que l'on peut construire tous les écimaèdres miroirs dont le graphe sous-jacent n'est pas celui d'un tétraèdre en recollant "des blocs fondamentaux miroirs".

1.3.2. Énoncé du résultat. — Pour énoncer notre résultat, nous avons besoin d'introduire plusieurs quantités associées à \mathcal{G} . Nous allons calculer la dimension attendue de $X_{\mathcal{G}}$ de façon heuristique.

Rappelons que lorsque deux faces adjacentes s et t partagent une arête $s \cap t$ qui porte l'étiquette μ_{st} alors (définition 1.2.4 et notations 1) :

- On a $-\alpha_s(v_t) \geq 0$.
- Si l'arête $s \cap t$ est d'ordre 2 alors les deux équations suivantes doivent être vérifiées :
 $\alpha_s(v_t) = \alpha_t(v_s) = 0$.
- Si l'arête $s \cap t$ n'est pas d'ordre 2 alors une seule équation doit être vérifiée : $\alpha_s(v_t)\alpha_t(v_s) = \mu_{st}$.

On peut voir $X_{\mathcal{G}}$ de la façon suivante : soient S l'ensemble des faces de \mathcal{G} et f le cardinal de S .

1. Nombres d'inconnues : $([\alpha_s], [v_s])_{s \in S} \in (\mathbb{P}^+((\mathbb{R}^4)^*) \times \mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4))^S$ est une variété de dimension $6f$.
2. Nombres d'équations : on a $e + e_2$ équations, où e est le nombre d'arêtes de \mathcal{G} et e_2 le nombre d'arêtes d'ordre 2.
3. Modulo $\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$ qui agit librement et proprement sur $Y_{\mathcal{G}}$ et $\dim(\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})) = 15$.

Donc la dimension attendue de $X_{\mathcal{G}}$ est $d(\mathcal{G}) = 6f - e - e_2 - 15$. Or, \mathcal{G} est de valence 3, il possède donc $\frac{2}{3}e$ sommets. La relation d'Euler montre que $f = \frac{6+e}{3}$, il vient donc $d(\mathcal{G}) = (e - e_2) - 3 = e_+ - 3$, où $e_+ = e - e_2$ est le nombre d'arêtes de \mathcal{G} d'ordre différent de 2.

Définition 1.3.14. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté, on définit les quantités suivantes :

- $d(\mathcal{G}) = e_+ - 3$.
- $n(\mathcal{G})$ est le nombre de 3-circuits affines ou sphériques, prismatiques, sans angle droit \mathcal{G} .
- $m(\mathcal{G})$ est le nombre de 3-circuits affines ou sphériques, prismatiques, avec angle droit \mathcal{G} .

Théorème 1.3.15. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté marqué. Alors,

- 1) Si $m(\mathcal{G}) = 0$ et $d(\mathcal{G}) \geq 0$ et \mathcal{G} n'est pas un prisme exceptionnel alors $X_{\mathcal{G}}$ est difféomorphe à $\kappa(\mathcal{G})$ copies de $\mathbb{R}^{d(\mathcal{G})}$, où $\kappa(\mathcal{G})$ est un entier pair ou égal à 1, qui vérifie $1 \leq \kappa(\mathcal{G}) \leq 2^{n(\mathcal{G})}$.
- 2) Si $m(\mathcal{G}) = 0$ et $d(\mathcal{G}) < 0$ alors on a deux cas :
 - a) Le graphe sous-jacent à \mathcal{G} est un tétraèdre combinatoire et $X_{\mathcal{G}}$ est un singleton.
 - b) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}}$ pour un certain couple (α, β) avec $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ et $X_{\mathcal{G}} = \emptyset$.
- 3) Si $m(\mathcal{G}) > 0$ et $X_{\mathcal{G}} \neq \emptyset$ alors $m(\mathcal{G}) = 1$ et $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}}$ et $X_{\mathcal{G}}$ est un singleton.
- 4) Si $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\alpha, \beta, \gamma}$ est un prisme exceptionnel avec $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ alors
 - a) si $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ alors $X_{\mathcal{G}} = \emptyset$.
 - b) si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ alors $X_{\mathcal{G}}$ est un singleton.
 - c) si $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ alors $\text{Card}(X_{\mathcal{G}}) = 2$.

Remarque 1.3.16. — Il faut bien remarquer que les points 1, 2, 3, et 4 sont disjoints. La seule difficulté est de voir que le cas 4) est disjoint des trois autres. Mais dans le cas 4, on a $m(\mathcal{G}) = 0$, $d(\mathcal{G}) = 0$ et \mathcal{G} est un prisme exceptionnel.

Corollaire 1.3.17. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté marqué alors $X_{\mathcal{G}}$ est une variété qui possède un nombre fini de composante connexe, toutes les composantes connexes de $X_{\mathcal{G}}$ sont homéomorphes à des boules et elles ont toutes la même dimension.

Enfin, l'espace $X_{\mathcal{G}}$ est vide si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :

1. $X_{\mathcal{G}}$ est un prisme exceptionnel dont l'unique 3-circuit prismatique est hyperbolique.
2. $m(\mathcal{G}) \geq 1$ et \mathcal{G} n'est pas un prisme exceptionnel dont l'unique 3-circuit prismatique est affine avec angle droit.

Démonstration. — En effet, si $m(\mathcal{G}) = 0$ alors les cas 1), 2) et 4) du théorème 1.3.15 montre que $X_{\mathcal{G}} = \emptyset$ si et seulement si \mathcal{G} un prisme exceptionnel dont l'unique 3-circuit prismatique est hyperbolique. Et, si $m(\mathcal{G}) \geq 1$ alors c'est le cas 3) du théorème 1.3.15 qui conclut. \square

Corollaire 1.3.18. — Si \mathcal{G} est un écimaèdre étiqueté qui vérifie les conditions du théorème d'Andreev alors $X_{\mathcal{G}}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{d(\mathcal{G})}$.

Démonstration. — Il est clair que $m(\mathcal{G}) = n(\mathcal{G}) = 0$ et que \mathcal{G} n'est pas un prisme exceptionnel, il reste donc à vérifier que $d(\mathcal{G}) \geq 0$, pour appliquer le point 1). Il faut noter que \mathcal{G} n'est pas un tétraèdre puisqu'il vérifie les hypothèses du théorème d'Andreev. Le plus simple est de distinguer deux cas : \mathcal{G} est un prisme ou bien \mathcal{G} n'est ni un tétraèdre, ni un prisme.

Dans le premier cas, il est facile de voir que tout prisme non exceptionnel qui vérifie que $m(\mathcal{G}) = 0$ possède au moins 3 arêtes qui ne sont pas d'ordre 2. Par suite, $d(\mathcal{G}) \geq 0$.

Si \mathcal{G} est un écimaèdre qui n'est ni un tétraèdre, ni un prisme alors \mathcal{G} possède au moins deux 3-circuits prismatiques. Comme \mathcal{G} vérifie les hypothèses du théorème d'Andreev, tout 3-circuit prismatique de \mathcal{G} est hyperbolique et possède donc au plus une seule arête d'ordre 2. L'écimaèdre étiqueté \mathcal{G} possède donc au moins 4 arêtes d'ordre différent de 2. Par suite, $d(\mathcal{G}) \geq 0$. \square

Remarque 1.3.19. — L'hypothèse d'ordonnabilité de Choi est plus faible dans le cas où le graphe \mathcal{G} est trivalent que notre hypothèse selon laquelle \mathcal{G} est un écimaèdre. Nous avons

supposé que les graphes étiquetés étaient des graphes de valence 3, et dans ce cas, on peut montrer que, si \mathcal{G} est un graphe étiqueté ordonnable, alors le graphe sous-jacent à \mathcal{G} est un écimaèdre combinatoire. Mais il existe des graphes planaires et 3-connexes de valence supérieure à 3 qui sont ordonnables (s'ils sont étiquetés correctement). Il faut noter que pour construire un convexe divisible via la méthode de Vinberg, une condition nécessaire (voir la remarque 1.2.9) est que le polyèdre de départ soit de valence 3.

Remarque 1.3.20. — Pour calculer $\kappa(\mathcal{G})$ nous allons retirer certaines arêtes de l'arbre $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ et nous obtiendrons une forêt que l'on notera $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. Puis on introduira la notion d'orientation partielle et d'orientation partielle admissible de la forêt $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ (voir partie 1.3.7). Enfin on démontrera que $\kappa(\mathcal{G})$ est le nombre d'orientations partielles admissibles de la forêt $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ (voir le théorème 1.3.64).

Remarque 1.3.21. — Nous énoncerons à la fin de ce texte le théorème 1.3.64 qui précise la partie 1) du théorème 1.3.15 en donnant une paramétrisation explicite de $X_{\mathcal{G}}$.

Nous allons commencer par les points 2) et 3) qui sont beaucoup plus faciles à montrer. Puis nous attaquerons à la démonstration des points 1) et 4).

1.3.3. Démonstration des points 2 et 3. —

Lemme 1.3.22. — Soit P un polyèdre miroir, soient s et t deux faces distinctes quelconques de P ; alors $-\alpha_s(v_t) \geq 0$ et $-\alpha_s(v_t) = 0$ si et seulement si s et t partagent une arête d'ordre 2.

Démonstration. — Si s et t sont adjacentes alors les conditions 1)-2'b) (définition 1.2.4 et notations 1) montre que dans ce cas le lemme est clair. À présent, soient s et t deux faces non adjacentes de P , et r_1, \dots, r_k les faces de P adjacentes à t . Comme P est un polyèdre proprement convexe, son dual dans $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4)$ est aussi un polyèdre proprement convexe dont les sommets sont les faces de P . Par conséquent, le segment qui relie $[-\alpha_s]$ à $[-\alpha_t]$ traverse l'enveloppe convexe des $([-\alpha_{r_i}])_{i=1, \dots, k}$ dans $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4)$. Par conséquent, $-\alpha_s$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des $(-\alpha_{r_i})_{i=1, \dots, k}$ et de α_t . Les inégalités $-\alpha_{r_i}(v_t) \geq 0$ pour $i = 1 \dots k$ et l'égalité $\alpha_t(v_t) = 2$ entraînent l'inégalité $-\alpha_s(v_t) > 0$. \square

Remarque 1.3.23. — Rappelons que pour tout polyèdre projectif miroir P , pour toute face s de P , la polaire $[v_s]$ de s n'appartient pas à P puisque $-\alpha_s(v_s) < 0$. Le lemme 1.3.22 montre que tout segment projectif issue de $[v_s]$ et rencontrant P , rencontre la face s .

Le lemme suivant démontre le point 3) et un résultat sur les 3-circuits affines ou sphériques, prismatiques qui sera utile à plusieurs reprises.

Lemme 1.3.24. — Soit \mathcal{G} un graphe étiqueté tel que $X_{\mathcal{G}} \neq \emptyset$, alors tout 3-circuit Γ affine ou sphérique, prismatique de \mathcal{G} possède au plus un angle droit. Et s'il en possède un alors \mathcal{G} est le prisme exceptionnel $\mathcal{G}_{\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}}$ pour un certain $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $X_{\mathcal{G}}$ est un singleton.

Démonstration. — Soient P un polyèdre miroir qui réalise \mathcal{G} et Γ un 3-circuit orienté prismatique avec angle droit, affine ou sphérique.

Commençons par numéroter de 1 à 3 les faces qui forment Γ de telle sorte que l'arête adjacente aux faces 1 et 2 soit d'ordre 2. Le 3-circuit Γ est prismatique donc il existe une face à gauche de Γ et une à droite de Γ qu'on numérote 4 et 5. On peut supposer que l'on a la configuration suivante dans une base $(e_j)_{j=1 \dots 4}$ de \mathbb{R}^4 : $\alpha_i = -e_i^*$ pour $i = 1 \dots 4$. On souhaite avoir une forme simple pour la forme linéaire α_5 , nous allons montrer que l'on peut supposer que $\alpha_5 = -e_1^* - e_2^* - e_3^* + e_4^*$. Le stabilisateur des $([\alpha_i])_{i=1 \dots 4}$ est le groupe des matrices diagonales à diagonales strictement positives dans la base $(e_j)_{j=1 \dots 4}$ de \mathbb{R}^4 . La forme linéaire α_5 se décompose dans la base duale

de la base $(e_j)_{j=1\dots 4}$. Il suffit de vérifier que les signes des coefficients de cette décomposition sont les bons. Le polyèdre dual de P est un polyèdre convexe dont les sommets sont les faces de P , par conséquent le segment dans $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4)$ reliant $[-\alpha_4]$ à $[-\alpha_5]$ traverse le triangle dont les sommets sont les points $[-\alpha_1]$, $[-\alpha_2]$ et $[-\alpha_3]$. Par conséquent, α_5 est une combinaison linéaire à coefficient positif de $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, $-\alpha_3$ et α_4 . On peut donc supposer que $\alpha_5 = -e_1^* - e_2^* - e_3^* + e_4^*$. Soient v_{ij} les coordonnées de $(v_i)_{i=1\dots 5}$. On a :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & v_{13} & v_{14} \\ 0 & -2 & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & -2 & v_{34} \end{pmatrix}$$

On rappelle que si les faces i et j sont adjacentes alors $v_{ij}v_{ji} = \mu_{ij} = 4 \cos^2(\theta_{ij})$ (Définition 1.2.4 et notations 1). Le lemme 1.3.22 affirme que $v_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et que les inégalités suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} -\alpha_5(v_1) \geq 0 & \text{c'est-à-dire } v_{13} \geq 2 + v_{14}, \\ -\alpha_5(v_2) \geq 0 & \text{c'est-à-dire } v_{23} \geq 2 + v_{24}, \\ -\alpha_5(v_3) \geq 0 & \text{c'est-à-dire } \frac{\mu_{13}}{v_{13}} + \frac{\mu_{23}}{v_{23}} \geq 2 + v_{34}. \end{cases}$$

Donc $v_{13} \geq 2$ et $v_{23} \geq 2$ et ainsi, $\mu_{13} + \mu_{23} \geq 4$ et donc $\theta_{13} + \theta_{23} \leq \frac{\pi}{2}$. Or, $\theta_{13} + \theta_{23} \geq \frac{\pi}{2}$ (car Γ est affine ou sphérique) donc $\theta_{13} + \theta_{23} = \frac{\pi}{2}$, et $\mu_{13} + \mu_{23} = 4$. Il vient finalement que $v_{13} = v_{23} = 2$, et donc $v_{31} = \frac{\mu_{13}}{2}$ et $v_{32} = \frac{\mu_{23}}{2}$, puis $v_{14} = v_{24} = v_{34} = 0$, et enfin $\alpha_5(v_1) = \alpha_5(v_2) = \alpha_5(v_3) = 0$. Les faces 4 et 5 sont donc adjacentes aux faces 1, 2 et 3, d'après le lemme 1.3.22.

Ainsi, le polyèdre miroir Q obtenu à l'aide des faces 1,2,3,4,5 de P réalise un $\mathcal{G}_{\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}}$ pour $\alpha = \arccos(\sqrt{\frac{\mu_{13}}{2}}) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et le polyèdre Q est clairement unique puisque les coordonnées des vecteurs $(v_i)_{i=1\dots 5}$ ont été calculées explicitement.

Cela montre aussi que si $X_{\mathcal{G}}$ est non vide alors tout 3-circuit prismatique affine ou sphérique avec angle droit est affine. Par conséquent, le polyèdre Q est le polyèdre P lui-même. En effet, si P possédait d'autres faces, alors comme P est un écimaèdre, P posséderait un 3-circuit prismatique sphérique avec angle droit. \square

Maintenant que le point 3) est acquis, on peut montrer le point 2).

Démonstration du point 2. — On a par hypothèse $m(\mathcal{G}) = 0$ (i.e. tout 3-circuit prismatique avec angle droit de \mathcal{G} est hyperbolique). Par conséquent, aucun 3-circuit prismatique de \mathcal{G} ne possède deux angles droits. Mais on a aussi supposé que $d(\mathcal{G}) < 0$, par conséquent $e_+ < 3$. Donc, l'écimaèdre étiqueté \mathcal{G} contient au plus un 3-circuit prismatique.

Les seuls écimaèdres qui possèdent au plus un 3-circuit prismatique sont le tétraèdre combinatoire et le prisme triangulaire combinatoire.

Commençons par le cas où le graphe sous-jacent à \mathcal{G} est un prisme triangulaire combinatoire. On a supposé que $d(\mathcal{G}) < 0$ donc \mathcal{G} possède au moins 7 arêtes d'ordre 2, et comme \mathcal{G} n'a pas de 3-circuit affine ou sphérique, prismatique, avec angle droit ($m(\mathcal{G}) = 0$), \mathcal{G} possède exactement 7 arêtes d'ordre 2, et $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}}$ pour un certain couple $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$ tels que $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. On reprend le calcul de la démonstration du lemme 1.3.24.

On rappelle que dans la démonstration du lemme 1.3.24, on a en particulier calculé l'espace des modules d'un prisme exceptionnel dont l'unique 3-circuit prismatique est à angle droit et affine ou sphérique. À présent, on doit calculer l'espace des modules d'un prisme exceptionnel dont l'unique 3-circuit prismatique est à angle droit et hyperbolique.

On reprend les mêmes notations pour les faces et on suppose toujours que c'est l'arête partagée par les faces 1 et 2 qui est d'ordre 2. On obtient les coordonnées suivantes pour les formes

linéaires $(\alpha_i)_{i=1,\dots,5}$ et les vecteurs $(v_i)_{i=1,\dots,5}$.

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -e_i^*, \quad i = 1, \dots, 4 \\ \alpha_5 &= -e_1^* - e_2^* - e_3^* + e_4^*\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & v_{13} & 0 \\ 0 & -2 & v_{23} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le lemme 1.3.22 affirme que $v_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et que les inégalités suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} -\alpha_5(v_1) \geq 0 & \text{c'est-à-dire } v_{13} \geq 2, \\ -\alpha_5(v_2) \geq 0 & \text{c'est-à-dire } v_{23} \geq 2, \\ -\alpha_5(v_3) \geq 0 & \text{c'est-à-dire } \frac{\mu_{13}}{v_{13}} + \frac{\mu_{23}}{v_{23}} \geq 2. \end{cases}$$

Donc $v_{13} \geq 2$ et $v_{23} \geq 2$ et donc $\frac{\mu_{13}}{v_{13}} + \frac{\mu_{23}}{v_{23}} < 2$, puisque $\mu_{13}, \mu_{23} < 4$, ce qui contredit la troisième inégalité. Il vient que $X_{\mathcal{G}} = \emptyset$.

Il reste le cas où le graphe sous-jacent à \mathcal{G} est un tétraèdre combinatoire. La démonstration de ce point sera faite au paragraphe 1.3.10.1, proposition 1.3.53, où l'on calcule l'espace des modules d'un tétraèdre étiqueté marqué quelconque. \square

Remarque 1.3.25. — On remarquera que le lemme 1.3.24 et le second point du théorème montre le quatrième point du théorème dans le cas, où l'un des angles α, β ou γ est droit.

1.3.4. Plan de la démonstration des points 1) et 4). — A partir de maintenant tous les graphes étiquetés que l'on considère n'ont aucun 3-circuit affine ou sphérique, prismatique, avec angle droit, autrement dit ils vérifient $m(\mathcal{G}) = 0$.

La démonstration se déroule en 6 étapes :

1. Comme les 3-circuits vont jouer un rôle essentiel dans la compréhension des polyèdres miroirs, nous allons commencer par nous intéresser aux triangles miroirs. Dans la partie 1.3.5 on introduit l'invariant R qui paramètre l'espace des modules d'un triangle combinatoire étiqueté.
2. L'idée pour comprendre l'espace $X_{\mathcal{G}}$ est de découper les polyèdres miroirs qui réalisent \mathcal{G} le long de leurs 3-circuits prismatiques essentiels. On obtient ainsi des polyèdres miroirs qui réalisent des blocs fondamentaux. Les démonstrations des lemmes nécessaires à la construction des blocs fondamentaux et des plans pour découper P font l'objet de la partie 1.3.6.
3. Une bonne méthode pour comprendre les composantes connexes de $X_{\mathcal{G}}$ est de parler d'orientation partielle admissible de la forêt $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ qui est une sous-forêt de l'arbre $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$. Nous donnerons les définitions de tout cela dans la partie 1.3.7.
4. Pour que la bijection entre les composantes connexes de $X_{\mathcal{G}}$ et les orientations partielles admissibles de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ soit la plus simple possible, il faut introduire un outil technique : les systèmes puits-source de 3-circuits de \mathcal{G} . Cela sera fait dans la partie 1.3.8.
5. Il faut ensuite comprendre $X_{\mathcal{G}}$ pour les blocs fondamentaux et les prismes exceptionnels sans angle droit, ce qui est fait dans la partie 1.3.10.
6. Enfin, une fois que l'on a découpé P en blocs fondamentaux, il faut comprendre comment on peut les recoller, c'est la partie 1.3.11.

1.3.5. Les triangles miroirs. —

Définition 1.3.26. — On appellera *triangle combinatoire* le graphe complet à 3 sommets. Un triangle *étiqueté* est la donnée d'un triangle combinatoire \mathcal{T} et pour chaque sommet s de \mathcal{T} d'un réel $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Un triangle combinatoire est dit *marqué* lorsque l'on a numéroté ses arêtes de 1 à 3. On a une définition analogue à celle des paragraphes précédents de triangle avec angle droit, sans angle droit, affine, sphérique, hyperbolique, projectif, miroir, marqué et aussi d'espace des modules de triangles miroirs marqués.

Remarque 1.3.27. — Le marquage de \mathcal{T} fournit une orientation naturelle de \mathcal{T} .

Proposition 1.3.28. — Soient \mathcal{T} un triangle étiqueté marqué, et $X_{\mathcal{T}}$ l'espace des modules associé.

- Si \mathcal{T} ne possède aucun sommet d'ordre 2 alors $X_{\mathcal{T}}$ est difféomorphe à \mathbb{R} . De plus, si l'on numérote les arêtes du triangle projectif miroir T via le marquage de \mathcal{T} , alors l'application :

$$T \mapsto R_T = \log \left(\frac{\alpha_1(v_2)\alpha_2(v_3)\alpha_3(v_1)}{\alpha_1(v_3)\alpha_3(v_2)\alpha_2(v_1)} \right)$$

est un difféomorphisme de $X_{\mathcal{T}}$ sur \mathbb{R} .

- Si \mathcal{T} possède un sommet d'ordre 2 alors $X_{\mathcal{T}}$ est un singleton.

Démonstration. — On ne démontre que le cas où tous les sommets sont d'ordre différent de 2, l'autre cas se démontre par un calcul analogue. Numérotons les faces du triangle étiqueté \mathcal{T} de 1 à 3, et notons $(e_i)_{i=1\dots 3}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On peut supposer que $\alpha_i = -e_i^*$. Le stabilisateur de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans $\mathrm{SL}_3^{\pm}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonales, on peut donc supposer que dans la base $(e_i)_{i=1\dots 3}$, le vecteur $v_1 = (-2, \sqrt{\mu_{12}}, \sqrt{\mu_{13}})$. Le stabilisateur de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et v_1 est réduit à l'identité.

On note encore pour tout $i, j = 1, \dots, 3$, $v_{ij} = -\alpha_j(v_i)$, on rappelle que les équations suivantes doivent être vérifiées pour tout $i, j = 1, \dots, 3$: $v_{ij}v_{ji} = \mu_{ij}$ (Définition 1.2.4 et notations 1)

On obtient donc pour un certain $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{12}} & -2 & \sqrt{\mu_{23}}x \\ \sqrt{\mu_{13}} & \frac{\sqrt{\mu_{23}}}{x} & -2 \end{pmatrix}$$

Cela montre que l'application $T \mapsto \log \left(\frac{\alpha_1(v_2)\alpha_2(v_3)\alpha_3(v_1)}{\alpha_1(v_3)\alpha_3(v_2)\alpha_2(v_1)} \right) = -2 \log(x)$ est un difféomorphisme de $X_{\mathcal{T}}$ sur \mathbb{R} . □

Soit \mathcal{T} un triangle étiqueté marqué, les quantités suivantes vont se révéler cruciales dans la suite. On note $\sigma = \mu_{12} + \mu_{23} + \mu_{31}$, $p = \sqrt{\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31}}$. Lorsque \mathcal{T} est sphérique (et sans angle droit, i.e $p > 0$) on définit aussi la quantité $r_{\mathcal{T}} = 2 \log \left(\frac{4 - \sigma + ((4 - \sigma)^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}}{p} \right) > 0$. Il n'est pas clair que la quantité $r_{\mathcal{T}}$ est bien définie mais nous le montrerons dans la démonstration du lemme 1.3.29.

Lemme 1.3.29. — Soient un triangle étiqueté marqué \mathcal{T} avec au plus un angle droit et un triangle miroir marqué T qui réalise \mathcal{T} . On note \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^3 dont l'orientation est opposée à celle de la base antedual du triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

- 1) Si \mathcal{T} est hyperbolique alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) > 0$
 affine sans angle droit et $R_{\mathcal{T}} \neq 0$
 sphérique sans angle droit et $|R_{\mathcal{T}}| > r_{\mathcal{T}}$
- 2) Si \mathcal{T} est affine avec angle droit alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = 0$.
 affine sans angle droit et $R_{\mathcal{T}} = 0$
 sphérique sans angle droit et $|R_{\mathcal{T}}| = r_{\mathcal{T}}$
- 3) Si \mathcal{T} est sphérique sans angle droit et $|R_{\mathcal{T}}| < r_{\mathcal{T}}$ alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) < 0$.
 sphérique avec angle droit

Remarque 1.3.30. — On rappelle que les couples $(\alpha_i, v_i)_{i=1,\dots,3}$ sont bien définis à une constante multiplicative strictement positive près (notations 1). Par conséquent, la valeur de la quantité $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3)$ n'a pas de sens, mais son signe et sa nullité ont un sens.

Démonstration. — Notons $(e_i)_{i=1,\dots,3}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On peut supposer que $\alpha_i = -e_i^*$. La base canonique de \mathbb{R}^3 possède bien une orientation opposée à celle de la base antedual du triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Commençons par le cas où Γ est avec angle droit. On suppose que c'est l'angle entre l'arête 1 et l'arête 2 qui est égale à $\frac{\pi}{2}$. On obtient facilement que :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{\mu_{31}} \\ 0 & -2 & \sqrt{\mu_{23}} \\ \sqrt{\mu_{31}} & \sqrt{\mu_{23}} & -2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $D = \det(v_1, v_2, v_3) = 2(\mu_{23} + \mu_{13} - 4) = 8(\cos^2(\theta_{23}) + \cos^2(\theta_{31}) - 1)$. Par conséquent, $D > 0$ si $\theta_{23} + \theta_{31} < \frac{\pi}{2}$, nul si $\theta_{23} + \theta_{31} = \frac{\pi}{2}$ et $D < 0$ si $\theta_{23} + \theta_{31} > \frac{\pi}{2}$.

On suppose à présent \mathcal{T} sans angle droit et on pose $D = \det(v_1, v_2, v_3)$. Le lemme 1.3.28 montre que

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{\mu_{12}} & \sqrt{\mu_{13}} \\ \sqrt{\mu_{12}} & -2 & \sqrt{\mu_{23}} e^{-\frac{R_{\mathcal{T}}}{2}} \\ \sqrt{\mu_{13}} & \sqrt{\mu_{23}} e^{\frac{R_{\mathcal{T}}}{2}} & -2 \end{pmatrix}$$

On a $D = pe^{\frac{R_{\mathcal{T}}}{2}} + pe^{-\frac{R_{\mathcal{T}}}{2}} + 2(\sigma - 4)$. On pose $P(x) = px^2 - 2(4 - \sigma)x + p$; ainsi $D = e^{-\frac{R_{\mathcal{T}}}{2}} P(e^{\frac{R_{\mathcal{T}}}{2}})$. Si Δ est le discriminant de P , on a $\Delta = 4(\sigma - 4 - p)(\sigma - 4 + p)$. Commençons par remarquer que comme $p > 0$, si les racines de P sont réelles alors elles sont toutes les deux du signe de $4 - \sigma$. Ensuite, un peu de trigonométrie montre que

$$4 - \sigma - p = -16 \cos\left(\frac{\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{12} - \theta_{23} + \theta_{31}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{12} + \theta_{23} - \theta_{31}}{2}\right) \cos\left(\frac{-\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31}}{2}\right).$$

On remarque que comme les angles θ_{ij} sont aigus le produit des 3 derniers membres est strictement positif.

On distingue donc 3 cas :

1. Si \mathcal{T} est sphérique, alors $4 - \sigma - p > 0$, par suite $\Delta > 0$ et $4 - \sigma > 0$. Les racines $u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}^{-1}$ de P sont donc réelles, strictement positives et inverses l'une de l'autre. On peut supposer que $u_{\mathcal{T}} > 1$ et en remarquant que $r_{\mathcal{T}} = 2 \log(u_{\mathcal{T}})$, on obtient donc que la quantité $r_{\mathcal{T}}$ est bien définie, strictement positive. La quantité D est strictement positive si et seulement si $|R_{\mathcal{T}}| > r_{\mathcal{T}}$ et elle est nulle si et seulement si $R_{\mathcal{T}} = r_{\mathcal{T}}$.
2. Si \mathcal{T} est affine, alors $4 - \sigma - p = 0$; par suite $\Delta = 0$ et $4 - \sigma > 0$, et ainsi 1 est racine double. La quantité D est strictement positive si et seulement si $R_{\mathcal{T}} \neq 0$, et nulle sinon.

3. Si \mathcal{T} est hyperbolique, alors $4 - \sigma - p < 0$. Alors soit $4 - \sigma + p \leq 0$ et les racines de P sont strictement négatives ou $4 - \sigma + p > 0$ et les racines de P sont complexes. La quantité D est toujours strictement positive.

□

Notations 3. — Soient \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté marqué, P un polyèdre miroir qui réalise $X_{\mathcal{G}}$ et Γ un 3-circuit orienté de \mathcal{G} . Alors Γ définit un triangle étiqueté marqué \mathcal{T} dont les sommets sont les arêtes traversées par Γ , les arêtes de \mathcal{T} sont les faces traversées par Γ , les étiquettes portées par les sommets sont les étiquettes portées par les arêtes de Γ , et on marque les arêtes à l'aide de l'orientation de Γ .

Lorsque Γ est sans angle droit, on notera $R_{\Gamma}(P)$ le réel $R_{\mathcal{T}}$ introduit dans l'énoncé du lemme 1.3.28 ; si \mathcal{T} est sphérique, on notera r_{Γ} le réel $r_{\mathcal{T}}$ introduit avant le lemme 1.3.29 et si \mathcal{T} est affine, on pose $r_{\Gamma} = 0$. Cette convention nous permettra de ne pas distinguer le cas affine du cas sphérique.

On utilisera une autre convention, si un 3-circuit Γ est avec angle droit alors on pose $R_{\Gamma}(P) = 0$. Cette convention nous permettra de distinguer le cas sans angle droit du cas avec angle droit uniquement lorsque c'est nécessaire.

Enfin, plus généralement, si (f_1, \dots, f_k) est une suite de faces de P , on peut définir la quantité suivante :

$$R_{(f_1, \dots, f_k)}(P) = \log \left(\frac{\alpha_{f_1}(v_{f_2}) \alpha_{f_2}(v_{f_3}) \cdots \alpha_{f_k}(v_{f_1})}{\alpha_{f_1}(v_{f_k}) \alpha_{f_2}(v_{f_1}) \cdots \alpha_{f_k}(v_{f_{k-1}})} \right).$$

Ainsi, lorsque Γ est un 3-circuit orienté, il définit naturellement une suite de faces et l'on retrouve la définition précédente.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on allégera les notations en notant $R_{(f_1, \dots, f_k)}(P) = R_{(f_1, \dots, f_k)}$ et $R_{\Gamma}(P) = R_{\Gamma}$.

1.3.6. Les lemmes de coupe. — On cherche tout d'abord à construire les blocs fondamentaux miroirs en coupant un tétraèdre miroir le long de ses 3-circuits. C'est l'objet des lemmes 1.3.34, 1.3.35 et 1.3.39, des deux prochains paragraphes. Ensuite, on se donne un polyèdre miroir P et on souhaite découper P le long de ses 3-circuits prismatiques essentielles pour obtenir des blocs fondamentaux. Nous allons avoir besoin des définitions suivantes :

Définition 1.3.31. — Soient P un polyèdre miroir et Γ un 3-circuit de P qui traverse les faces r, s, t de P . On désignera par Π_{Γ} le sous-espace projectif engendré par les points polaires $[v_r], [v_s], [v_t]$. On dira que Π_{Γ} coupe P le long de Γ lorsque Π_{Γ} est un plan et l'intersection de Π_{Γ} avec les arêtes de P est incluse dans les arêtes ouvertes le long desquelles se rencontrent les faces r, s, t .

Remarque 1.3.32. — Soient un polyèdre miroir P de $X_{\mathcal{G}}$ et Γ un 3-circuit non essentiel de P . On numérote de 1 à 3 les faces traversées par Γ , et on numérote 4 la face triangulaire dont Γ fait le tour. Nous allons montrer que si Π_{Γ} est un plan alors la réflexion σ_4 est entièrement déterminée par les réflexions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

En effet, comme Γ n'est pas essentiel, les arêtes de la face 4 sont toutes d'ordre 2 (en particulier σ_4 commute avec σ_1, σ_2 et σ_3), par conséquent les points v_1, v_2 et v_3 vérifient $\alpha_4(v_1) = \alpha_4(v_2) = \alpha_4(v_3) = 0$ (définition 1.2.4 et notations 1). Ainsi, le plan projectif définissant la face 4 est le plan projectif Π_{Γ} qui est engendré par les points polaires $[v_1], [v_2]$ et $[v_3]$. Et, la polaire $[v_4]$ de la face 4 vérifient les équations $\alpha_1(v_4) = \alpha_2(v_4) = \alpha_3(v_4) = 0$, c'est donc l'intersection des plans projectifs définis par les faces 1, 2 et 3 (cette intersection est réduite à un point car P est un polyèdre convexe).

Nous allons montrer que, pour tout polyèdre miroir P de X_G et tout 3-circuit prismatique essentiel Γ , Π_Γ est un plan et que ce dernier coupe P le long de Γ . On peut donc définir la coupe droite P_Γ^d (resp. gauche P_Γ^g) de P le long de Γ comme le polyèdre miroir obtenu en retirant les faces et les réflexions par rapport aux faces à gauche (resp. droite) de Γ et en ajoutant l'unique (remarque 1.3.32) réflexion par rapport au plan Π_Γ qui commute avec les réflexions associées aux faces traversées par Γ .

Remarque 1.3.33. — Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le 3-circuit Γ , on allégera les notations P_Γ^d et P_Γ^g en notant $P_\Gamma^d = P^d$ et $P_\Gamma^g = P^g$.

1.3.6.1. Lemme d'écimage. —

Lemme 1.3.34. — Soient P un polyèdre miroir et Γ un 3-circuit orienté de P . Le sous-espace Π_Γ est un plan projectif sauf si les conditions 1)2)3) ou 1)2)3)' ou 1)2)3)'' sont réunies.

- 1) Le polyèdre P est un tétraèdre ou un prisme.
- 2) Les arêtes des faces qui ne sont pas traversées par Γ sont d'ordre 2.
- 3) Le 3-circuit Γ est affine sans angle droit et $R_\Gamma = 0$.
- 3)' Le 3-circuit Γ est sphérique sans angle droit et $|R_\Gamma| = r_\Gamma$.
- 3)'' Le 3-circuit Γ est affine avec angle droit.

Démonstration. — Soient s_1, s_2, s_3 les faces de P traversées par Γ . Soit s_4 une face quelconque de P différente de s_1, s_2, s_3 . On peut supposer que les faces $(s_i)_{i=1,\dots,4}$ sont définies par les formes linéaires $(-e_i^*)_{i=1,\dots,4}$, où $(e_i)_{i=1,\dots,4}$ est une base de \mathbb{R}^4 , car P est un polyèdre convexe. Π_Γ n'est pas un plan projectif si et seulement si la matrice $M = (-\alpha_j(v_i))_{j=1\dots4, i=1\dots3}$ est de rang 2, donc si et seulement si tous les mineurs de taille 3 extraits de la matrice M sont nuls. On a :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & -2 & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & -2 \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} \end{pmatrix}$$

où, les v_{ij} désignent les coordonnées de $(v_i)_{i=1\dots3}$ dans la base $(e_j)_{j=1\dots4}$.

Le mineur obtenu en rayant la dernière ligne donne le déterminant du lemme 1.3.29. Donc, si Π_Γ n'est pas un plan, alors l'une des conditions 3), 3)' ou 3)'' est réalisée.

Calculons à présent le mineur D_1 obtenu en rayant la 1ère ligne :

$$D_1 = v_{12}(v_{23}v_{34} + 2v_{24}) + v_{13}(2v_{34} + v_{32}v_{24}) + v_{14}(4 - \mu_{23}).$$

Le lemme 1.3.22 montre que $v_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$; de plus $\mu_{23} < 4$ et donc $v_{14} = 0$ quand $D_1 = 0$.

De la même façon, le calcul des mineurs obtenus en rayant la 2ème ou la 3ème ligne montre que $v_{24} = v_{34} = 0$. Le lemme 1.3.22 montre donc que la face s_4 est adjacente à s_1, s_2 et s_3 . Les conditions 1) et 2) sont alors réalisées car il y a au plus 2 faces adjacentes simultanément à s_1, s_2 et s_3 . \square

Lemme 1.3.35. — Soient P un polyèdre miroir et Γ un 3-circuit qui entoure un sommet v . On suppose que P n'est pas un tétraèdre dont la face opposée à v ne possède que des arêtes d'ordre 2. On suppose aussi que Π_Γ est un plan projectif et que Γ possède au plus un angle droit. On note P_0 le polyèdre projectif sous-jacent à P .

- 1) Si Γ est hyperbolique alors Π_Γ coupe P_0 le long de Γ .
 affine sans angle droit et $R_\Gamma \neq 0$
 sphérique sans angle droit et $|R_\Gamma| > r_\Gamma$
- 2) Si Γ est affine avec angle droit alors $\Pi_\Gamma \cap P_0 = \{v\}$.
 affine sans angle droit et $R_\Gamma = 0$
 sphérique sans angle droit et $|R_\Gamma| = r_\Gamma$
- 3) Si Γ est sphérique sans angle droit et $|R_\Gamma| < r_\Gamma$ alors $\Pi_\Gamma \cap P_0 = \emptyset$.
 sphérique avec angle droit

Remarque 1.3.36. — Pour alléger, l'énoncé du lemme 1.3.35 nous apportons une précision au cas 3) sous la forme d'une remarque. On numérote les faces de Γ de 1 à 3. On note e_i la i -ème arête fermée traversée par Γ et C le convexe polyédral obtenu à partir de P_0 en oubliant les faces traversées par Γ . On note M_i le point d'intersection du plan Π_Γ avec la droite L_i engendrée par e_i qui est inclus dans C , pour $i = 1, \dots, 3$. Il n'est pas évident que les points $(M_i)_{i=1, \dots, 3}$ sont bien définis mais nous montrerons que c'est le cas. Enfin, on note D_i l'intersection $C \cap L_i$. Nous allons montrer que dans le cas 3), les points M_i sont dans l'intérieur de $D_i \setminus e_i$.

Remarque 1.3.37. — Avant de démontrer ce lemme, on pourra remarquer que ces conditions correspondent aux conditions du lemme 1.3.29.

Démonstration. — Soient $(s_i)_{i=1, \dots, 3}$ les faces de P traversées par Γ et soit s_4 une face quelconque de P . Soit Π_Γ le sous-espace engendré par les points polaires $[v_1], [v_2]$ et $[v_3]$. On a supposé que Π_Γ est un plan projectif.

Comme on travaille dans le revêtement à deux feuillet de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ l'intersections de trois plans en positions génériques est la réunion de deux points opposés. On définit les six points M_1^\pm, M_2^\pm et M_3^\pm , de la façon suivante : $\{M_1^+, M_1^-\} = \Pi_\Gamma \cap \{\alpha_2 = 0\} \cap \{\alpha_3 = 0\}$, $\{M_2^+, M_2^-\} = \Pi_\Gamma \cap \{\alpha_3 = 0\} \cap \{\alpha_1 = 0\}$, $\{M_3^+, M_3^-\} = \Pi_\Gamma \cap \{\alpha_1 = 0\} \cap \{\alpha_2 = 0\}$.

Commençons par vérifier que les points M_1^\pm, M_2^\pm et M_3^\pm sont bien définis. On ne traite que les points M_1^\pm . Il s'agit de montrer que l'ensemble des solutions des équations suivantes est un espace vectoriel de dimension 1.

$$\begin{cases} \alpha_2(xv_1 + yv_2 + zv_3) = 0 \\ \alpha_3(xv_1 + yv_2 + zv_3) = 0 \end{cases}$$

Le calcul explicite de ce système donne :

$$\begin{cases} x\alpha_2(v_1) + 2y + z\alpha_2(v_3) = 0 \\ x\alpha_3(v_1) + y\alpha_3(v_2) + 2z = 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2 puisque $4 - \alpha_2(v_3)\alpha_3(v_2) = 4 - \mu_{23} > 0$. Les points M_1^\pm, M_2^\pm et M_3^\pm sont donc bien définis.

On peut supposer que les $(s_i)_{i=1, \dots, 4}$ sont définies par $\alpha_{s_i} = -e_i^*$ pour $i = 1 \dots 4$ dans une base $(e_i)_{i=1 \dots 4}$ de \mathbb{R}^4 . Ainsi, le plan projectif Π_Γ est défini par une équation de la forme $\{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0\}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Il faut prendre garde au fait que les quantités a, b, c, d sont bien définis à une constante non nul près.

On peut donc supposer que dans la base (e_1, \dots, e_4) on a : $M_1^+ = [-d : 0 : 0 : a]$, $M_2^+ = [0 : -d : 0 : b]$, $M_3^+ = [0 : 0 : -d : c]$ et $M_1^- = [d : 0 : 0 : -a]$, $M_2^- = [0 : d : 0 : -b]$ et $M_3^- = [0 : 0 : d : -c]$. Introduisons la quantité :

$$D = \begin{vmatrix} -2 & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & -2 & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & -2 \end{vmatrix},$$

où les v_{ij} désignent les coordonnées de $(v_i)_{i=1\dots 3}$ dans la base $(e_j)_{j=1\dots 4}$. La quantité D est le déterminant du lemme 1.3.29.

Le plan Π_Γ d'équation $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ est le plan engendré par les vecteurs v_1, v_2 et v_3 . Par conséquent, il existe un $\lambda \neq 0$ tel que pour tout $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{vmatrix} -2 & v_{21} & v_{31} & x \\ v_{12} & -2 & v_{32} & y \\ v_{13} & v_{23} & -2 & z \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & t \end{vmatrix} = \lambda(ax + by + cz + dt)$$

Nous allons distinguer les cas $D > 0$, $D = 0$ et $D < 0$.

Commençons par supposer que $D > 0$. D'après le lemme 1.3.29, cette hypothèse revient à se placer dans le cas 1), on a alors $D = \lambda d \neq 0$. Pour fixer les idées, on suppose à présent que $d = -1$.

Les formules de Cramer permettent de calculer a . On a $aD = v_{14}(4 - \mu_{23}) + v_{24}(2v_{12} + v_{13}v_{32}) + v_{34}(v_{12}v_{23} + 2v_{13})$.

Par hypothèse Γ possède au plus un angle droit donc au plus une seule des quantités v_{12}, v_{13}, v_{23} est nulle. De plus, on a supposé que P n'était pas un tétraèdre où la face opposée à v ne possédait que des arêtes d'ordre 2. Par conséquent, l'une des arêtes de la face 4 n'est pas d'ordre 2. Il vient donc que v_{14} ou v_{24} ou v_{34} est strictement positif. Il est donc clair à présent que $aD > 0$. De la même façon, on obtient que b et c sont strictement positif. En résumé $\alpha_i(M_i^+) < 0$ et $\alpha_4(M_i^-) < 0$ pour $i = 1, \dots, 3$. Ainsi, on obtient que le point M_i^+ est à l'intérieur de l'arête adjacente aux faces $i + 1$ et $i + 2$ (les indices sont calculés modulo 3) du tétraèdre formé par les faces 1,2,3 et 4. Mais la face s_4 est une face quelconque de P . Par conséquent, le point M_i^+ est à l'intérieur de l'arête adjacente aux faces $i + 1$ et $i + 2$ (les indices sont calculés modulo 3) du polyèdre P_0 . Ce qui entraîne que Π_Γ coupe P_0 le long de Γ .

À présent, si $D < 0$ alors le lemme 1.3.29 montre que l'on est dans le cas 3). On suppose encore que $d = -1$. On a encore l'égalité $aD = v_{14}(4 - \mu_{23}) + v_{24}(2v_{12} + v_{13}v_{32}) + v_{34}(v_{12}v_{23} + 2v_{13})$. Cette fois-ci on obtient que $\alpha_4(M_i^-) < 0$ pour $i = 1, \dots, 3$ et $\alpha_i(M_i^-) > 0$ pour $i = 1, \dots, 3$. Ainsi, le point M_i^- n'appartient pas à l'arête adjacente aux faces $i + 1$ et $i + 2$ (les indices sont calculés modulo 3) du tétraèdre formé par les faces 1,2,3 et 4 mais le point M_i^- vérifie $\alpha_4(M_i^-) < 0$. Mais la face s_4 est une face quelconque de P . Par conséquent, le point M_i^- n'appartient pas à l'arête adjacente aux faces $i + 1$ et $i + 2$ (les indices sont calculés modulo 3) du polyèdre P_0 mais il appartient au convexe $C = p(\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha_s(x) \leq 0, s \neq 1, 2, 3\})$. Ce qui entraîne que $\Pi_\Gamma \cap P_0 = \emptyset$ et la remarque 1.3.36.

Enfin, si $D = 0$ alors le lemme 1.3.29 montre que l'on est dans le cas 2), mais dans ce cas, on a $d = 0$, et par suite les ensembles $\{M_i^+, M_i^-\}$ (pour $i = 1, \dots, 3$) sont confondus et égaux à $\{\pm v\}$. Ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque 1.3.38. — Il est important de noter que cette étude est exhaustive

1.3.6.2. Lemme de non-chevauchement. —

Lemme 1.3.39. — Soient P un polyèdre miroir, u, v deux sommets de P reliés par une arête e . Soit Γ_u (resp. Γ_v) un 3-circuit qui entoure u (resp. v). On suppose que Π_{Γ_u} (resp. Π_{Γ_v}) coupe P le long de Γ_u (resp. Γ_v). Si P_0 désigne le polyèdre projectif sous-jacent à P , alors $P_0 \cap \Pi_{\Gamma_u} \cap \Pi_{\Gamma_v} = \emptyset$.

Démonstration. — On peut supposer que l'arête e est adjacente aux faces 1 et 2, et que u (resp. v) est le sommet partagé par les faces 1, 2 et 3 (resp. 4). On peut supposer que la face i du polyèdre P est donné par la forme linéaire $\alpha_i = -e_i^*$, pour $i = 1, \dots, 4$, où $(e_i)_{i=1..4}$ est une base de \mathbb{R}^4 . Soit $D = \Pi_{\Gamma_u} \cap \Pi_{\Gamma_v}$ la droite projective de $\mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4)$ qui contient v_1 et v_2 . On peut la paramétrer par $[x : y] \in \mathbb{P}^+(\mathbb{R}^2) \mapsto [xv_1 + yv_2] \in \mathbb{P}^+(\mathbb{R}^4)$. On notera v_{ij} la quantité $v_{ij} = -\alpha_j(v_i)$, et on rappelle que si $i \neq j$ alors $v_{ij} \geq 0$ (lemme 1.3.22).

Supposons que $P_0 \cap \Pi_{\Gamma_u} \cap \Pi_{\Gamma_v} \neq \emptyset$; alors il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ tels que :

$$\begin{cases} -\alpha_3([xv_1 + yv_2]) = xv_{13} + yv_{23} \geq 0 \\ -\alpha_4([xv_1 + yv_2]) = xv_{14} + yv_{24} \geq 0 \\ -\alpha_1([xv_1 + yv_2]) = -2x + yv_{21} \geq 0 \\ -\alpha_2([xv_1 + yv_2]) = xv_{12} - 2y \geq 0 \end{cases}$$

Nous allons montrer que ceci est absurde. Pour cela commençons par montrer que x ou y est positif ou nul.

Supposons que x et y sont strictement négatifs. Alors $v_{13} = v_{23} = v_{14} = v_{24} = 0$, ce qui entraîne que $\theta_{13} = \theta_{23} = \theta_{14} = \theta_{24} = \frac{\pi}{2}$, donc Γ_u et Γ_v sont sphériques avec angle droit. Le lemme 1.3.35 montre qu'alors, les intersections de Π_{Γ_u} et Π_{Γ_v} avec P sont vides, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc x ou y est positif ou nul.

Montrons à présent que x et y sont positifs ou nuls en distinguant les cas $\theta_{12} \neq \frac{\pi}{2}$ et $\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$.

Si $\theta_{12} \neq \frac{\pi}{2}$, alors les deux dernières inégalités montrent que x et y sont positifs ou nuls puisqu'alors v_{12} et v_{21} sont strictement positifs.

Si $\theta_{12} = \frac{\pi}{2}$, alors $v_{12} = v_{21} = 0$ et par suite, x et y sont négatifs ou nuls. Il vient que x ou y est nul. Supposons que $x = 0$. Alors y est strictement négatif et par conséquent $v_{23} = v_{24} = 0$. Par suite, $\theta_{23} = \theta_{24} = \frac{\pi}{2}$, donc Γ_u et Γ_v sont sphériques avec angle droit. Le lemme 1.3.35 montre qu'alors, les intersections de Π_{Γ_u} et Π_{Γ_v} avec P sont vides, ce qui est contraire à notre hypothèse. Il en est de même si on suppose que $y = 0$, donc x et y sont positifs ou nuls.

Dans tous les cas, il vient que x ou y est strictement positif, et donc les deux dernières inégalités montrent que x, y, v_{12} et v_{21} sont strictement positifs, et enfin que $v_{12}v_{21} = \mu_{12} \geq 4$, ce qui contredit le fait que $\theta_{12} > 0$. \square

1.3.6.3. *Lemme de coupe le long d'un 3-circuit prismatique essentiel.* —

Lemme 1.3.40. — *Soient P un polyèdre miroir et Γ un 3-circuit prismatique essentiel. Alors Π_Γ coupe P le long de Γ .*

Démonstration. — Comme P possède un 3-circuit essentiel, P n'est ni un tétraèdre, ni un prisme et par conséquent, le lemme 1.3.34 permet d'affirmer que Π_Γ est un plan. On suppose que les faces traversées par Γ sont numérotées de 1 à 3. On se donne une face adjacente à l'une des faces 1, 2 ou 3, et on la numérote 4.

On note e_i l'arête adjacente aux faces $i + 1$ et $i + 2$. On note D_i l'intersection entre la droite engendrée par e_i et l'espace affine $p(\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha_4(x) < 0\})$. On note M_i le point d'intersection du plan Π_Γ avec D_i (les indices sont calculés modulo 3). Le lemme 1.3.35 est exhaustif, ainsi en utilisant la remarque 1.3.36, on distingue trois cas :

- Le point M_i appartient à l'intérieur de e_i , pour $i = 1, \dots, 3$.
- Les points M_i sont égaux et égaux à l'intersection des arêtes $(e_i)_{i=1,\dots,3}$.
- Les points M_i appartiennent à l'intérieur de $D_i \setminus e_i$, pour $i = 1, \dots, 3$.

Comme Γ est prismatique essentiel et on peut choisir la face 4 à gauche comme à droite du 3-circuit Γ . Par conséquent, seul le premier cas peut être réalisé, Π_Γ coupe P le long de Γ . \square

1.3.7. **La forêt \mathcal{F}_G et son orientation.** —

1.3.7.1. *Classification des arêtes de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$.* — Nous sommes à présent en mesure de définir l'ensemble $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$ des valeurs possibles à priori pour la quantité R_{Γ} .

- | | | | | | |
|----|--|------------------|-----------------|-------|--|
| 1. | Γ est affine ou sphérique | avec angle droit | prismatique | alors | $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}} := \emptyset$ |
| 2. | $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ est hyperbolique} \\ \Gamma \text{ est affine ou sphérique} \end{array} \right.$ | avec angle droit | quelconque | alors | $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}} := \{0\}$ |
| | | avec angle droit | non prismatique | | |
| 3. | $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ est hyperbolique} \\ \Gamma \text{ est affine ou sphérique} \end{array} \right.$ | sans angle droit | quelconque | alors | $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}} := \mathbb{R}$ |
| | | sans angle droit | non prismatique | | |
| 4. | Γ est affine ou sphérique | sans angle droit | prismatique | alors | $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}} := \mathbb{R} - [-r_{\Gamma}, r_{\Gamma}]$ |

Remarque 1.3.41. — On rappelle que lorsque le 3-circuit Γ est affine sans angle droit on utilise la convention $r_{\Gamma} = 0$ (voir notations 3).

Ces notations sont justifiées par les propositions suivantes :

Proposition 1.3.42. — Soient \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté et P un polyèdre miroir qui réalise \mathcal{G} . Soit v un sommet de \mathcal{G} , on note Γ le 3-circuit orienté qui entoure le sommet v et tel que la coupe gauche \mathcal{G}_{Γ}^g ne contient pas le sommet v . Alors, Π_{Γ} coupe P le long de Γ si et seulement si $R_{\Gamma}(P) \in I_{\Gamma}^{\mathcal{G}^g}$.

Démonstration. — Cette proposition est essentiellement une simple relecture du lemme 1.3.35. Pour appliquer le lemme 1.3.35 il suffit de vérifier que Π_{Γ} est un plan dès que $R_{\Gamma}(P) \in I_{\Gamma}^{\mathcal{G}^g}$. Seul deux cas pose problème d'après le lemme 1.3.34.

1. Si \mathcal{G} est un tétraèdre alors le lemme 1.3.34 montre que Π_{Γ} est un plan dès que $R_{\Gamma}(P) \in I_{\Gamma}^{\mathcal{G}^g}$.
2. Si \mathcal{G} est un prisme exceptionnel alors pour tout sommet v de P , on a $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}^g} = \emptyset$.

□

Proposition 1.3.43. — Soient \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté qui vérifie $m(\mathcal{G}) = 0$ et qui n'est pas un prisme exceptionnel, P un polyèdre miroir qui réalise \mathcal{G} et Γ un 3-circuit orienté de \mathcal{G} alors $R_{\Gamma}(P) \in I_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$.

Démonstration. — Il faut distinguer les 4 cas de la définition de $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$. Le cas 1) ne peut pas apparaître puisque on a supposé $m(\mathcal{G}) = 0$. Si Γ est du type 2 de la classification alors on a la convention $R_{\Gamma}(P) = 0$ (notations 3). Si Γ est de type 3 alors il n'y a rien à montrer. Enfin, si Γ est de type 4, dans ce cas un des deux polyèdres combinatoires étiquetés \mathcal{G}_{Γ}^g ou \mathcal{G}_{Γ}^d n'est pas un tétraèdre car Γ est prismatique. Supposons que \mathcal{G}_{Γ}^g n'est pas un tétraèdre et notons \mathcal{Q} le polyèdre combinatoire étiqueté obtenu en collant un tétraèdre sur la face triangulaire de \mathcal{G}_{Γ}^g dont Γ fait le tour (autrement dit que \mathcal{Q} est le polyèdre combinatoire obtenu à partir de \mathcal{G}_{Γ}^g en oubliant la face dont Γ fait le tour dans \mathcal{G}_{Γ}^g). On note Q le polyèdre obtenu à partir de P par le même procédé.

Si le 3-circuit Γ de \mathcal{G} est essentiel alors le lemme 1.3.40 montre que Π_{Γ} coupe P le long de Γ . En particulier, Π_{Γ} coupe Q le long de Γ .

Si le 3-circuit Γ de \mathcal{G} n'est pas essentiel alors pour montrer que Π_{Γ} coupe Q le long de Γ . Il suffit de montrer que Π_{Γ} est un plan. Le lemme 1.3.34 conclut car Γ est prismatique et \mathcal{G} n'est pas un prisme exceptionnel.

Ainsi, le lemme 1.3.35 appliqué à Q montre que $R_{\Gamma}(P) \in I_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$.

□

Si \mathcal{G} est un écimaèdre étiqueté, alors les arêtes de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ sont par définition en bijection avec les 3-circuits de \mathcal{G} . On a donc une définition naturelle d'arête affine, sphérique, hyperbolique, sans angle droit, avec angle droit, prismatique et enfin, non prismatique.

Remarque 1.3.44. — On rappelle que l'on suppose toujours, depuis le paragraphe 2.3.8, que tout écimaèdre étiqueté vérifie $m(\mathcal{G}) = 0$; il n'y a donc pas d'arête du type 1 de la classification que l'on vient de donner dans $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$.

Définition 1.3.45. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté. La forêt associée à \mathcal{G} est la forêt obtenue en supprimant les arêtes avec angle droit de l'arbre $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ (i.e. les arêtes de type 2 de la classification). Les arêtes (resp. les 3-circuits de \mathcal{G}) de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ se séparent en deux familles via la classification énoncée plus haut :

- les arêtes (resp. les 3-circuits) hyperboliques sans angle droit quelconques et les arêtes (resp. les 3-circuits) affines ou sphériques sans angle droit non-prismatiques ;
- les arêtes (resp. les 3-circuits) affines ou sphériques sans angle droit prismatiques que nous désignerons dorénavant par le terme *spéciales* (resp. *spéciaux*).

1.3.7.2. *Orientation de la forêt $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.* —

Définition 1.3.46. — Soit \mathcal{F} une forêt orientée. On dira qu'un sommet s de \mathcal{F} est un *puits* (resp. une *source*) lorsque toutes les arêtes incidentes à s possèdent le même but (resp. la même source).

Définition 1.3.47. — Soient \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté, et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ la forêt associée.

- Une *orientation globale admissible* de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ est une orientation de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ qui ne contient aucun sommet de valence 4 qui soit un puits ou une source.
- Une *orientation partielle* de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ est une orientation de toutes les arêtes spéciales de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.
- Une *orientation partielle admissible* de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ est une orientation partielle de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ telle qu'il existe une orientation globale admissible de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ qui la prolonge.

Nous allons voir que si \mathcal{G} est un écimaèdre étiqueté alors les composantes connexes de $X_{\mathcal{G}}$ sont en bijection avec les orientations partielles admissibles de la forêt $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. Cette bijection est construite à l'aide du signe des quantités $R_{\Gamma}(P)$, où Γ est un 3-circuit orienté spécial de \mathcal{G} et P un polyèdre projectif miroir qui réalise \mathcal{G} . Pour uniformiser la construction de cette bijection, il faut choisir correctement un système de 3-circuits orientés. Nous appellerons ces systèmes les systèmes puits-source de 3-circuits et nous allons les définir dès à présent.

1.3.8. Système puits-source de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$. —

1.3.8.1. *Orientation d'une arête de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ induite par l'orientation d'un 3-circuit de \mathcal{G} .* — Chaque arête e de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ définit une tripartition des arêtes de \mathcal{G} : $\{e\}$ et les deux composantes connexes de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} - \{e\}$. Le choix d'une orientation de l'arête e permet de distinguer les deux composantes connexes de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} - \{e\}$. On a celle donnée par le but de l'arête orientée e et celle donnée par sa source.

De même, chaque 3-circuit Γ de \mathcal{G} définit une tripartition des 3-circuits de \mathcal{G} . Le choix d'une orientation du 3-circuit Γ permet de les distinguer. On a le 3-circuit Γ , les 3-circuits de \mathcal{G} à droite de Γ et les 3-circuits de \mathcal{G} à gauche de Γ .

Il est évident que la bijection entre les 3-circuits de \mathcal{G} et les arêtes de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ respecte cette tripartition. On a donc une définition naturelle d'orientation d'une arête de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ induite par l'orientation d'un 3-circuit de \mathcal{G} .

Définition 1.3.48. — Soient \mathcal{G} un graphe étiqueté, Γ un 3-circuit orienté de \mathcal{G} et e l'arête correspondante de l'arbre $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$. On dira que e est orienté dans le *sens* (resp. *sens contraire*) de Γ lorsque l'orientation de e est telle que la composante connexe de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} - \{e\}$ donnée par le but (resp. la source) de l'arête orientée e correspond aux 3-circuits de \mathcal{G} à droite de Γ .

1.3.8.2. *Système puits-source de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$.* —

Définition 1.3.49. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté, un *système puits-source de 3-circuits de \mathcal{G}* est le choix d'une orientation de chaque 3-circuit de \mathcal{G} , de telle sorte que si toutes les arêtes de l'arbre $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ sont orientées dans le sens des 3-circuits orientés choisis, alors tous les sommets de $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ sont des puits ou des sources.

Remarque 1.3.50. — Puisque le graphe $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ est un arbre, il est clair que tout écimaèdre étiqueté \mathcal{G} possède exactement deux systèmes puits-sources inverses l'un de l'autre.

1.3.9. Orientation partielle et globale de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ induite par $P \in X_{\mathcal{G}}$ via un système puits-source. —

1.3.9.1. *Orientation partielle induite.* —

Définition 1.3.51. — Soient \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté et P un polyèdre miroir qui réalise \mathcal{G} . On suppose que l'on s'est donné un système puits-source de 3-circuits de \mathcal{G} . L'*orientation partielle de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ induite par P* est l'orientation obtenue en orientant toute arête spéciale e de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ dans le sens de Γ (l'unique 3-circuit orienté correspondant à e via notre système puits-source), lorsque $R_{\Gamma}(P) > 0$ et dans le sens contraire lorsque $R_{\Gamma}(P) < 0$.

Remarque 1.3.52. — Il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition précédente. En effet, si Γ est un 3-circuit spécial de \mathcal{G} , alors $R_{\Gamma}(P) \neq 0$.

1.3.9.2. *Orientation globale induite.* — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté. On se donne un système puits-source de 3-circuits orientés de \mathcal{G} . Supposons à présent que pour tout 3-circuit sans angle droit Γ de \mathcal{G} , on ait $R_{\Gamma}(P) \neq 0$. Alors on peut définir de façon analogue une *orientation globale de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ induite par P* via notre système puits-source.

1.3.9.3. *Obstruction.* — Il faut bien faire attention au fait que toutes les orientations globales ou partielles de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ ne peuvent pas être induites par des polyèdres miroirs.

En effet, si on note, pour chaque sommet s de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ de valence 4, $(\Gamma_i^s)_{i=1..4}$ les quatre 3-circuits orientés via notre système puits-source, qui correspondent aux arêtes de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ incidentes à s , et si P est un polyèdre miroir qui réalise \mathcal{G} , alors la définition même des $(R_{\Gamma_i^s}(P))_{i=1..4}$ (voir notations 3) montrent qu'ils vérifient la relation suivante :

$$R_{\Gamma_1^s} + R_{\Gamma_2^s} + R_{\Gamma_3^s} + R_{\Gamma_4^s} = 0. \quad (*)$$

Par conséquent, aucune orientation induite partielle ou globale ne peut posséder de sommet de valence 4 qui soit un puits ou une source, ce qui explique la définition d'orientation partielle ou globale *admissible*.

Nous allons montrer que les composantes connexes de $X_{\mathcal{G}}$ sont en bijection avec les orientations partielles admissibles de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

1.3.10. Le tétraèdre miroir et les blocs fondamentaux. —

1.3.10.1. *Le tétraèdre miroir.* — La proposition suivante donne une paramétrisation de l'espace $X_{\mathcal{G}}$ lorsque \mathcal{G} est un tétraèdre combinatoire étiqueté. Cette proposition conclut la démonstration du point 2)a) du théorème 1.3.15 et est le point de départ pour l'étude des blocs fondamentaux.

Proposition 1.3.53. — *Soit \mathcal{G} un tétraèdre combinatoire étiqueté marqué. Alors $X_{\mathcal{G}}$ est diffeomorphe à $\mathbb{R}^{d(\mathcal{G})}$ si $d(\mathcal{G}) \geq 0$ et est un singleton sinon.*

- *Cas 1 : Si toutes les arêtes de \mathcal{G} sont d'ordre différent de 2, on choisit un système puits-source de 3-circuits de \mathcal{G} , $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$. L'application $P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto (R_{\Gamma_1}, R_{\Gamma_2}, R_{\Gamma_3}, R_{\Gamma_4}) \in \{(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0\}$ est un difféomorphisme.*
- *Cas 2 : Si une seule arête de \mathcal{G} est d'ordre 2, alors \mathcal{G} possède exactement deux 3-circuits orientés (à orientation près) sans angle droit Γ_1 et Γ_2 . L'application $P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto (R_{\Gamma_1}, R_{\Gamma_2}) \in \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme.*
- *Cas 3 : Si exactement 2 arêtes de \mathcal{G} sont d'ordre 2, et si elles sont sur la même face, alors \mathcal{G} possède exactement un 3-circuit orienté (à orientation près) Γ sans angle droit. L'application $P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto R_{\Gamma} \in \mathbb{R}$ est un difféomorphisme.*
- *Cas 4 : Si exactement 2 arêtes de \mathcal{G} sont d'ordre 2, et si elles ne sont pas sur la même face, alors il existe un unique 4-circuit sans angle droit Γ de \mathcal{G} (à orientation près). L'application $P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto R_{\Gamma} \in \mathbb{R}$ est un difféomorphisme.*
- *Cas 5 : Si au moins 3 arêtes de \mathcal{G} sont d'ordre 2, alors $X_{\mathcal{G}}$ est un singleton.*

Démonstration. — On ne démontre la proposition que lorsque \mathcal{G} ne possède pas d'arête d'ordre 2, les autres cas se démontrent de façon analogue. Soit P un tétraèdre qui réalise $X_{\mathcal{G}}$. On procède comme pour le triangle étiqueté (proposition 1.3.28). On note $(e_i)_{i=1\dots 4}$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . On peut supposer que $\alpha_i = -e_i^*$ pour $i = 1\dots 4$ et $v_1 = (-2, \sqrt{\mu_{12}}, \sqrt{\mu_{13}}, \sqrt{\mu_{14}})$. Le stabilisateur de $\alpha_1, \dots, \alpha_4, v_1$ est réduit à l'identité. On rappelle que les notations mises en place au paragraphe notations 1 fournissent les équation suivantes sur v_2, v_3, v_4 :

$$\begin{aligned} \alpha_i(v_i) &= 2 && \text{pour } i = 1, \dots, 4 \\ \alpha_i(v_j)\alpha_j(v_i) &= \mu_{ij} && \text{pour } i, j = 1, \dots, 4 \text{ et } i \neq j \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient les coordonnées des vecteurs v_2, v_3 et v_4 .

$$v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{12}} \\ -2 \\ \sqrt{\mu_{23}}x \\ \frac{\sqrt{\mu_{24}}}{y} \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{13}} \\ \frac{\sqrt{\mu_{23}}}{x} \\ -2 \\ \sqrt{\mu_{34}}z \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{14}} \\ \sqrt{\mu_{24}}y \\ \frac{\sqrt{\mu_{34}}}{z} \\ -2 \end{pmatrix}$$

avec $x, y, z > 0$. On a alors : $R_{\Gamma_1} = -2 \ln(xyz)$, $R_{\Gamma_2} = 2 \ln(z)$, $R_{\Gamma_3} = 2 \ln(y)$ et $R_{\Gamma_4} = 2 \ln(x)$. Ce qui montre le résultat. \square

1.3.10.2. *Les blocs fondamentaux.* —

Proposition 1.3.54. — *Soit \mathcal{G} un bloc fondamental étiqueté qui n'est pas un prisme exceptionnel et tel que $m(\mathcal{G}) = 0$. On se donne un système puits-source de 3-circuits de \mathcal{G} et on note $(\Gamma_i)_{i=1\dots 4}$ les quatre 3-circuits de \mathcal{G} de notre système puits-source qui viennent du tétraèdre \mathcal{T} sous-jacent à \mathcal{G} .*

L'application $\varphi : P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto Q \in X_{\mathcal{T}}$, où Q est le tétraèdre miroir sous-jacent à P , est un difféomorphisme sur son image $\{Q \in X_{\mathcal{T}} \mid \forall i = 1, \dots, 4, R_{\Gamma_i}(Q) \in I_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}}\}$. En particulier, $X_{\mathcal{G}}$ est difféomorphe à $\kappa(\mathcal{G})$ copies de $\mathbb{R}^{d(\mathcal{G})}$ où $\kappa(\mathcal{G})$ est le nombre d'orientations partielles admissibles de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

Démonstration. — Soit P un polyèdre miroir de $X_{\mathcal{G}}$. Comme \mathcal{G} n'est pas un prisme exceptionnel, le lemme 1.3.34 montre que pour tout 3-circuit prismatique Γ de \mathcal{G} , Π_{Γ} est un plan.

Commençons par montrer que l'application $\varphi : P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto Q \in X_{\mathcal{T}}$ le tétraèdre sous-jacent est injective. On appellera faces tronquées les faces de P qui ne sont pas des faces de Q . Les faces tronquées sont des faces triangulaires où toutes les arêtes sont d'ordre 2. La remarque 1.3.32 nous montre que la réflexion par rapport à une face tronquée s est entièrement déterminée par les réflexions par rapport aux faces adjacentes à s .

Montrons ensuite que l'image de φ est incluse dans $\{Q \in X_{\mathcal{T}} \mid \forall i = 1, \dots, 4, R_{\Gamma_i}(Q) \in I_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}}\}$. C'est exactement le contenu de la proposition 1.3.43.

Ensuite, il faut montrer que l'image de φ est exactement $\{Q \in X_{\mathcal{T}} \mid \forall i = 1, \dots, 4, R_{\Gamma_i}(Q) \in I_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}}\}$. Donnons-nous un tétraèdre $Q \in X_{\mathcal{T}}$ qui vérifie que $\forall i = 1, \dots, 4, R_{\Gamma_i}(Q) \in I_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}}$, alors la proposition 1.3.42 nous montre si Γ_i est prismatique et $R_{\Gamma_i}(Q) \in I_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}}$ alors le plan Π_{Γ_i} coupe Q le long de Γ_i . Enfin, le lemme 1.3.39 nous montre que les nouvelles faces créées par ces écimages ne se chevauchent pas, par conséquent il existe un polyèdre miroir $P \in X_{\mathcal{G}}$ tel que $\varphi(P) = Q$.

Enfin, il ne nous reste plus qu'à montrer que l'inverse de φ est continue. Mais, il s'agit simplement de voir que la réflexion par rapport à une face tronquée s dépend continuellement des réflexions par rapport aux faces adjacentes à s . Et, cela est clair à la vue de la remarque 1.3.32.

Comme $m(\mathcal{G}) = 0$ tous les ensembles $I_{\Gamma_i}^{\mathcal{G}}$ sont non vides (remarque 1.3.44) et ainsi la proposition 1.3.53 montre que E est une réunion d'ouverts convexes disjoints, naturellement indexée par les orientations partielles admissibles de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. \square

Pour illustrer cette proposition on donne un tableau dont les entrées en colonnes indiquent le nombre de 3-circuit affine ou sphérique, sans angle droit et prismatique de \mathcal{G} . Les entrées en lignes indiquent de quel écimaèdre \mathcal{G} il s'agit (on rappelle que \mathcal{T}_i est le tétraèdre écimé en i sommets distincts). Les sorties sont les nombres $\kappa(\mathcal{G})$ correspondant.

	\mathcal{T}_0	\mathcal{T}_1	\mathcal{T}_2	\mathcal{T}_3	\mathcal{T}_4
0	1	1	1	1	1
1		2	2	2	2
2			4	4	4
3				8	8
4					14

1.3.10.3. *Les prismes exceptionnels.* — Nous avons déjà traité le cas des prismes exceptionnels avec angles droits à l'aide du lemme 1.3.24 et du second point du théorème 1.3.15.

Proposition 1.3.55. — Soit \mathcal{G} un prisme exceptionnel sans angle droit. On note Γ l'unique 3-circuit prismatique de \mathcal{G} .

- Si Γ est sphérique, alors $\text{Card}(X_{\mathcal{G}}) = 2$.
- Si Γ est affine, alors $X_{\mathcal{G}}$ est un singleton.
- Si Γ est hyperbolique, alors $X_{\mathcal{G}} = \emptyset$.

Démonstration. — On numérote les faces de l'unique 3-circuit prismatique Γ de \mathcal{G} de 1 à 3, et on numérote les deux autres faces 4 et 5. Les mêmes arguments que ceux de la démonstration de la proposition 1.3.24 montre que l'on peut supposer que l'on a la configuration suivante dans

une base $(e_i)_{i=1\dots 4}$ de \mathbb{R}^4 : $\alpha_i = -e_i^*$ pour $i = 1\dots 4$ et $\alpha_5 = -e_1^* - e_2^* - e_3^* + e_4^*$. Enfin, pour simplifier la discussion, on suppose que $\mu_{31} \geq \mu_{12}$.

On obtient ainsi que X_G est homéomorphe à :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{12}, v_{23}, v_{31} > 0 \\ (v_{12}, v_{23}, v_{31}) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que :} \\ v_{12} + \frac{\mu_{13}}{v_{31}} = 2 \\ v_{23} + \frac{\mu_{12}}{v_{12}} = 2 \\ v_{31} + \frac{\mu_{23}}{v_{23}} = 2 \end{array} \right\}.$$

Ainsi, si on pose $x = v_{12}$ et que l'on substitue les quantité v_{31} et v_{23} dans la dernière ligne du système précédent, alors on obtient que X_G est en bijection avec les racines de $f(x) = \frac{\mu_{31}}{2-x} + \frac{\mu_{23}}{2-\frac{\mu_{12}}{x}} - 2$ qui appartient à l'intervalle $]\frac{\mu_{12}}{2}, 2[$.

On pose $\sigma = -\frac{\mu_{23} + \mu_{31} - \mu_{12} - 4}{4 - \mu_{23}}$ et $p = \frac{\mu_{12}(4 - \mu_{31})}{4 - \mu_{23}}$. On est ainsi ramené à l'étude du polynôme $Q = x^2 - 2\sigma x + p$ sur $]\frac{\mu_{12}}{2}, 2[$. On pose alors $Y = x - \sigma$, $\delta = \sigma^2 - p$, $u = \frac{\mu_{12}}{2} - \sigma$ et $v = 2 - \sigma$. On est ainsi ramené à l'étude du polynôme $R = Y^2 - \delta$ sur $]u, v[$.

Le discriminant δ de R est égal à

$$\delta = \frac{(4 - \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{23} - \sqrt{\mu_{31}\mu_{12}\mu_{23}})(4 - \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{23} + \sqrt{\mu_{31}\mu_{12}\mu_{23}})}{(4 - \mu_{23})^2}.$$

Comme dans la preuve du lemme 1.3.29, on a :

$$4 - \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{23} - \sqrt{\mu_{31}\mu_{12}\mu_{23}} = -16 \cos\left(\frac{\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{12} - \theta_{23} + \theta_{31}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{12} + \theta_{23} - \theta_{31}}{2}\right) \cos\left(\frac{-\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31}}{2}\right).$$

On remarque que, comme les angles sont aigus, le produit des 3 derniers membres est strictement positif.

On rappelle que par définition $\mu_{ij} = 4 \cos^2(\theta_{ij})$, où $0 < \theta_{ij} < \frac{\pi}{2}$ car on a supposé que $m(\mathcal{G}) = 0$ (i.e. Γ sans angle droit). Nous allons montrer les inégalités suivantes (qui formeront le système (S_1)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{4 - \mu_{23} + \mu_{31} - \mu_{12}}{4 - \mu_{23}} \geq 0 \\ u^2 - \delta = \frac{\mu_{12}\mu_{23}(4 - \mu_{12})}{4(4 - \mu_{23})} > 0 \\ v^2 - \delta = \frac{\mu_{31}(4 - \mu_{12})}{4 - \mu_{23}} > 0 \\ \frac{\mu_{12}\mu_{23}}{2} < \sqrt{\mu_{31}\mu_{12}\mu_{23}} \end{array} \right.$$

Ces quatre inégalités viennent de l'hypothèse $\mu_{12} \leq \mu_{31}$ et des inégalités $0 < \mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31} < 4$.

Le signe de la quantité $D = 4 - \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{23} - \sqrt{\mu_{31}\mu_{12}\mu_{23}}$ est cruciale dans cette preuve.

Pour conclure, il faut distinguer 2 cas :

1) Γ est sphérique (i.e. $D > 0$) ou affine (i.e. $D = 0$). On calcule

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \geq 0 \\ -u = \frac{4 - \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{23} + \frac{\mu_{12}\mu_{23}}{2}}{4 - \mu_{23}} \geq 0 \end{array} \right.$$

Ces deux inégalités sont évidentes puisque qu'on a supposé que $D \geq 0$.

Donc si Γ est sphérique, alors $u < -\sqrt{\delta} < \sqrt{\delta} < v$ donc R possède 2 racines sur l'intervalle $]u, v[$, et si Γ est affine, alors R possède une racine double sur l'intervalle $]u, v[$.

2) Si Γ est hyperbolique (i.e. $D < 0$), alors il faut de nouveau distinguer 2 cas, posons $\overline{D} = 4 - \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{23} + \sqrt{\mu_{31}\mu_{12}\mu_{23}}$:

a) Si $\overline{D} > 0$ alors $\delta < 0$ et les racines de R sont complexes.

b) Si $\overline{D} \leq 0$ alors $-u(4 - \mu_{23}) < \overline{D} \leq 0$, puisque la quatrième inégalité du système S_1 entraîne l'inégalité suivante : $4 - \mu_{31} - \mu_{12} - \mu_{23} + \frac{\mu_{12}\mu_{23}}{2} < \overline{D} \leq 0$.

On a $\sqrt{\delta} < u < v$: les racines de R sont réelles mais à l'extérieur de $]u, v[$. \square

1.3.10.4. *Blocs fondamentaux à structure projective fixée.* — Dans ce paragraphe, on cherche à comprendre l'espace des modules d'un bloc fondamental \mathcal{G} dont la structure projective d'un triangle est fixée.

Notations 4. — Soit \mathcal{G} un bloc fondamental étiqueté marqué, on suppose que l'on s'est donné un système puits-source de 3-circuits de \mathcal{G} . Soit Γ un 3-circuit prismatique orienté de \mathcal{G} . On se donne $r \in I_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$ et on pose $X_{\mathcal{G}}^r = \{P \in X_{\mathcal{G}} \mid R_{\Gamma} = r\}$.

On dira qu'une orientation de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ est *compatible avec r* lorsque r appartient à la composante connexe de $I_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$ donnée par l'orientation de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

Corollaire 1.3.56. — *Soit \mathcal{G} un bloc fondamental étiqueté qui n'est pas un prisme exceptionnel et tel que $m(\mathcal{G}) = 0$, muni d'un système puits-source. Soit Γ un 3-circuit prismatique de \mathcal{G} orienté via le système puits-source, et $r \in I_{\Gamma}^{\mathcal{G}}$.*

Alors, $X_{\mathcal{G}}^r$ est difféomorphe à $\kappa(\mathcal{G}, \Gamma, r)$ copies de $\mathbb{R}^{d(\mathcal{G})-1}$ où $\kappa(\mathcal{G}, \Gamma, r)$ est le nombre d'orientations partielles admissibles de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ compatibles avec r .

Démonstration. — L'idée de la démonstration est que les propositions 1.3.53 et 1.3.54 nous fournissent une paramétrisation de l'espace $X_{\mathcal{G}}$ uniquement à l'aide des quantités $(R_{\Gamma_i})_{i=1,\dots,4}$ où les $(\Gamma_i)_{i=1,\dots,4}$ sont les 3-circuits du tétraèdre étiqueté \mathcal{T} sous-jacent à \mathcal{G} de notre système puits-source.

On peut remarquer que comme $m(\mathcal{G}) = 0$ et que \mathcal{G} n'est pas un prisme exceptionnel, le tétraèdre étiqueté \mathcal{T} possède au plus 3 arêtes d'ordre 2. On obtient facilement le résultat, en distinguant les cas \mathcal{T} ne possède aucune arête d'ordre 2, une seule arête d'ordre 2, deux arêtes opposées d'ordre 2, deux arêtes non opposées d'ordre 2 ou exactement 3 arêtes d'ordre 2. \square

Remarque 1.3.57. — Il est facile de voir que comme \mathcal{G} est un bloc fondamental, $\kappa(\mathcal{G}, \Gamma, r) = 2^{l(\mathcal{G}, \Gamma)}$, où $l(\mathcal{G}, \Gamma)$ est le nombre de 3-circuit affine ou sphérique, sans angle droit et prismatique de \mathcal{G} différent de Γ . En particulier, $\kappa(\mathcal{G}, \Gamma, r)$ ne dépend pas de r , on le notera donc $\kappa(\mathcal{G}, \Gamma)$.

1.3.11. Lemme de recollement. — On cherche à présent à comprendre comment coller 2 polyèdres miroir le long d'une face triangulaire dont les arêtes sont d'ordre 2.

Notations 5. — Comme il y a plusieurs polyèdres en jeu dans le lemme qui suit, on notera $R_{\Gamma}(P)$ la quantité que l'on notait habituellement R_{Γ} associée à un 3-circuit orienté Γ de P .

Lemme 1.3.58. — *Soit \mathcal{G} un graphe étiqueté tel que $m(\mathcal{G}) = 0$ et $d(\mathcal{G}) \geq 0$. On suppose que \mathcal{G} possède un 3-circuit orienté prismatique essentiel Γ . On note \mathcal{G}_{Γ}^d et \mathcal{G}_{Γ}^g les coupes droite et gauche de \mathcal{G} par rapport à Γ .*

On suppose que \mathcal{G}_{Γ}^d est un bloc fondamental étiqueté.

Soient s une face traversée par Γ , l une face de \mathcal{G} à gauche de Γ , et enfin d une face de \mathcal{G} à droite de Γ . On suppose que si l (resp. d) et s sont adjacentes alors l'arête commune n'est pas d'ordre 2. On suppose aussi qu'aucune des faces l et d ne fait partie de Γ .

Alors l'application $\phi : P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto (P_{\Gamma}^g, R_{(l,s,d)}) \in X_{\mathcal{G}_{\Gamma}^g} \times \mathbb{R}$ est une fibration dont les fibres $\phi^{-1}(Q, r)$ s'identifient à $E_{Q,r} = \{R \in X_{\mathcal{G}_{\Gamma}^d} \mid R_{\Gamma}(R) = R_{\Gamma}(Q)\} = X_{\mathcal{G}_{\Gamma}^d}^{R_{\Gamma}(Q)}$.

Remarque 1.3.59. — On rappelle que l'on peut définir la quantité $R_{(l,s,d)}$ pour n'importe qu'elle triplet de faces ordonnées (notations 3). Il est essentiel de remarquer que les faces l, s, d ne forment pas un 3-circuit.

Remarque 1.3.60. — Pour mesurer le paramètre de recollement on a besoin de trois faces l, s, d . Pour que la quantité $R_{(l,s,d)}$ soit non nul, on impose la condition si l (resp. d) et s sont adjacentes alors l'arête commune n'est pas d'ordre 2. Et, pour mesurer effectivement le

recollement, on impose qu'aucune des faces l et d ne fait partie de Γ . Comme $m(\Gamma) = 0$ et que Γ n'est pas un prisme exceptionnel, on peut toujours trouver un tel triplet.

Remarque 1.3.61. — L'ensemble $E_{Q,r}$ est diffeomorphe à $\kappa(\mathcal{G}_\Gamma^d, \Gamma)$ copies de $\mathbb{R}^{d(\mathcal{G}_\Gamma^d)-1}$, d'après le corollaire 1.3.56. On verra qu'il ne dépend pas de r .

Démonstration. — On remarque pour commencer que \mathcal{G}^d ne peut être un prisme exceptionnel car Γ est essentiel. Soit F le sous-fibré du fibré $X_{\mathcal{G}^g} \times \mathbb{R} \times X_{\mathcal{G}^d}$ de base $X_{\mathcal{G}^g} \times \mathbb{R}$ dont la fibre au-dessus du point (P^g, r) est l'espace $\{P^d \in X_{\mathcal{G}^d} \mid R_\Gamma(P^g) = R_\Gamma(P^d)\}$ (le corollaire 1.3.56 montre que les fibres sont diffeomorphes deux à deux). Le lemme 1.3.40 fournit une application naturelle $\psi : P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto (P^g, R_{(l,s,d)}, P^d) \in F \subset X_{\mathcal{G}^g} \times \mathbb{R} \times X_{\mathcal{G}^d}$ et on a bien $R_\Gamma(P^g) = R_\Gamma(P^d)$, donc ψ est bien définie. On note π la projection $\pi : F \rightarrow X_{\mathcal{G}^g} \times \mathbb{R}$ donnée par l'oubli de la troisième coordonnée, on a $\phi = \pi \circ \psi$. Nous allons montrer que ψ est un diffeomorphisme, ce qui montrera la proposition.

On peut construire l'application réciproque de ψ comme suit.

Soit $(Q, r, R) \in F$, nous allons construire un polyèdre P tel que $\psi(P) = (Q, r, R)$. On commence par choisir une normalisation pour les faces de Q et R . On peut numéroter les faces traversées par Γ de 1 à 3. Si on note $(e_i)_{i=1\dots 4}$ une base de \mathbb{R}^4 , alors on peut supposer que les faces traversées par Γ sont définies par les formes linéaires $-e_i^*$ pour $i = 1\dots 3$, que la face s est aussi la face 1, et que le plan Π_Γ est défini par la forme linéaire $-e_4^*$. Les mêmes arguments que ceux de la démonstration de la proposition 1.3.24 montre qu'on peut aussi supposer que la face l est définie par $-e_1^* - e_2^* - e_3^* - e_4^*$, que la face d est définie par $-\lambda_1 e_1^* - \lambda_2 e_2^* - \lambda_3 e_3^* + \lambda_4 e_4^*$, avec $\lambda_i > 0$ pour $i = 1, \dots, 4$.

Les réflexions par rapport aux faces 1 (resp. 2 resp. 3) des polyèdres miroirs Q et R sont les mêmes, car $R_\Gamma(Q) = R_\Gamma(R)$. On appellera face 4 de Q et R , la face définie par le plan Π_Γ .

On peut alors construire le polyèdre miroir P dont les faces et les réflexions sont les faces et les réflexions de Q ou R moins la face de Q entourée par Γ et la face de R entourée par Γ . Mais on peut en construire d'autres. En effet, pour tout $\lambda > 0$, considérons l'élément g_λ de $SL_4(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est :

$$g_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda^{-3} \end{pmatrix}.$$

L'hyperplan propre de σ_i est le noyau de $\alpha_i = -e_i^*$, pour $i = 1, \dots, 3$. Et, le vecteur propre v_i de σ_i appartient au noyau de la forme linéaire $-e_4^*$, pour $i = 1, \dots, 3$. L'élément g_λ commute donc avec les réflexions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. De plus, toute élément $g \in SL_4(\mathbb{R})$ qui commute avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et qui fixe la face 4 de Q et R est un g_λ avec $\lambda > 0$.

On peut construire un polyèdre miroir $P^\lambda \in X_{\mathcal{G}}$ dont les réflexions à gauche de Γ sont les réflexions de Q et les réflexions à droite de Γ sont les conjuguées des réflexions de R par g_λ . Comme g_λ commute avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, cette définition n'est pas ambiguë. Et il est clair que les polyèdres P^λ sont convexes. De plus, si on a un polyèdre P' qui vérifie $P_\Gamma'^g = Q$ et $P_\Gamma'^d = R$, alors il existe un unique $\lambda > 0$ tel que P' et P^λ soient équivalents. Nous allons relier les quantités r et λ .

Résumons les coordonnées des différentes quantités, on met le symbole λ en exposant pour signaler que ces quantités sont attachées au polyèdre P^λ (p.ex : v_i^λ et α_i^λ). Pour faciliter les calculs on note u_l (resp. w_l) la projection de v_l sur l'hyperplan engendré par e_1, e_2, e_3 (resp. la droite engendré par e_4). Et, on note u_d (resp. w_d) la projection de v_d sur l'hyperplan engendré par e_1, e_2, e_3 (resp. la droite engendré par e_4).

$$\begin{cases} \alpha_l^\lambda = & (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4 \\ \alpha_s^\lambda = & \alpha_s \\ \alpha_d^\lambda = & \lambda^{-1}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3) - \lambda^3\lambda_4\alpha_4 \end{cases} \quad \begin{cases} v_l^\lambda = & u_l + w_l \\ v_s^\lambda = & v_s \\ v_d^\lambda = & \lambda u_d + \lambda^{-3}w_d \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à montrer qu'il existe un unique réel $\lambda > 0$ tel que $R_{(l,s,d)}(P_\lambda) = r$, et cela résulte du calcul suivant :

$$\exp\left(\frac{R_{l,s,d}(P_\lambda)}{2}\right) = \frac{\alpha_l^\lambda(v_s^\lambda)\alpha_s^\lambda(v_d^\lambda)\alpha_d^\lambda(v_l^\lambda)}{\alpha_l^\lambda(v_d^\lambda)\alpha_d^\lambda(v_s^\lambda)\alpha_s^\lambda(v_l^\lambda)} = K \frac{a + \lambda^4 b}{c + \lambda^{-4} d},$$

Pour cela on fait le calcul suivant :

$$\begin{cases} \alpha_l^\lambda(v_s^\lambda) = & \alpha_l(v_s) & < 0 \\ \alpha_s^\lambda(v_d^\lambda) = & \lambda\alpha_s(v_d) & < 0 \\ \alpha_d^\lambda(v_l^\lambda) = & \lambda^{-1}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3)(u_l) - \lambda^3\lambda_4\alpha_4(w_l) \\ \alpha_l^\lambda(v_d^\lambda) = & \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(u_d) + \lambda^{-3}\alpha_4(w_d) \\ \alpha_d^\lambda(v_s^\lambda) = & \lambda^{-1}\alpha_d(v_s) & < 0 \\ \alpha_s^\lambda(v_l^\lambda) = & \alpha_s(v_l) & < 0 \end{cases}$$

Avant de définir K, a, b, c, d , justifions ces calculs. Pour les égalités, il s'agit simplement de calculer, en ce rappelant que $\alpha_4(v_s) = 0$ car la face 4 est la face définissant le plan Π_Γ . On a aussi par définition $\alpha_4(u_l) = \alpha_4(u_d) = 0$ et $\alpha_i(w_l) = \alpha_i(w_d) = 0$, pour $i = 1, \dots, 3$. Pour les inégalités, elles résultent simplement du lemme 1.3.22. À présent, on pose :

$$\begin{cases} K = & \frac{\alpha_l(v_s)\alpha_s(v_d)}{\alpha_d(v_s)\alpha_s(v_l)} & > 0 \\ a = & -(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3)(u_l) & > 0 \\ b = & \lambda_4\alpha_4(w_l) & > 0 \\ c = & -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(u_d) & > 0 \\ d = & -\alpha_4(w_d) & > 0. \end{cases}$$

Il faut vérifier que les quantités K, a, b, c, d sont strictement positives. Pour K , c'est une conséquence des inégalité précédentes. Ensuite, il faut remarquer que α_4 défini la face 4 du polyèdre P^d , alors que c'est $-\alpha_4$ qui défini la face 4 du polyèdre P^g . Par conséquent, $\alpha_4(w_d) = \alpha_4(v_d) < 0$ et $\alpha_4(w_l) = \alpha_4(v_l) > 0$. Il nous reste à montrer que a et c sont strictement positifs. Mais, le lemme 1.3.22 montre que $\alpha_i(u_l) = \alpha_i(v_l) < 0$ et $\alpha_i(u_d) = \alpha_i(v_d) < 0$ pour $i = 1, \dots, 3$.

Par conséquent, comme la fonction $\lambda > 0 \mapsto K \frac{a + \lambda^4 b}{c + \lambda^{-4} d}$ est continue, strictement croissante et tend vers 0 en 0, et vers $+\infty$ en $+\infty$. Il existe un unique réel $\lambda > 0$ tel que $R_{(l,s,d)}(P_\lambda) = r$. De plus, il est clair λ dépend continument de r .

On définit ainsi $\zeta : (Q, r, R) \in F \mapsto P_\lambda \in X_G$, où P_λ est l'unique polyèdre projectif miroir tel que $P_\lambda^d = Q$, $P_\lambda^g = R$ et $R_{l,s,d}(P_\lambda) = r$. La fonction ζ est continue et il est clair que les applications ζ et ψ sont inverses l'une de l'autre. Ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 1.3.62. — Ce lemme montre que X_G est une variété et qu'elle est de dimension $d(\mathcal{G})$. Il s'agit d'une récurrence sur le nombre de 3-circuits prismatiques essentiels de \mathcal{G} . Le cas initial est trivial, et sinon on choisit un 3-circuit orienté prismatique essentiel Γ tel que \mathcal{G}_Γ^d est un bloc fondamental. Le lemme 1.3.58 et l'hypothèse de récurrence montrent que X_G est une variété de dimension $d(\mathcal{G}_\Gamma^g) + (d(\mathcal{G}_\Gamma^d) - 1) + 1 = d(\mathcal{G})$.

1.3.12. Explicitation du difféomorphisme. — On peut construire explicitement le difféomorphisme entre X_G et les copies de $\mathbb{R}^{d(\mathcal{G})}$. Pour cela, introduisons les notations suivantes :

1. On commence par se donner un système puits-source \mathcal{S} de 3-circuits de \mathcal{G} .

2. On note V l'ensemble des sommets de valence 4 de la forêt \mathcal{F}_G . Si $s \in V$, alors on note $(\Gamma_i^s)_{i=1\dots 4}$ une suite des quatre 3-circuits de \mathcal{S} qui correspondent aux arêtes incidentes de s .
3. On note C_3 la partie de \mathcal{S} formée des 3-circuits sans angle droit de \mathcal{G} , et on pose

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^{C_3} \left| \begin{array}{l} \forall \Gamma \in C_3, \quad x_\Gamma \in I_\Gamma^G \\ \text{et} \\ \forall s \in V, \quad \sum_{i=1\dots 4} x_{\Gamma_i^s} = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Cet espace E est une réunion d'ouverts convexes disjoints indexée naturellement par les orientations partielles de \mathcal{F}_G . On note \mathcal{E} la partie de E qui correspond aux orientations partielles admissibles de \mathcal{F}_G .

4. On note C'_3 la partie de \mathcal{S} formée des 3-circuits prismatiques essentiels de \mathcal{G} . Pour tout élément Γ de C'_3 , on choisit une face s_Γ de Γ , une face s_Γ^d à droite de Γ , et enfin une face s_Γ^g à gauche de Γ . On suppose que si s_Γ^g (resp. s_Γ^d) et s_Γ sont adjacentes alors l'arête commune n'est pas d'ordre 2, et qu'aucune des faces s_Γ^g et s_Γ^d ne fait partie de Γ .
5. On note C_4 l'ensemble des sommets de \mathcal{A}_G dont le bloc fondamental correspondant vient d'un tétraèdre T qui possède exactement 2 arêtes d'ordre 2 qui ne sont pas sur la même face de T . A tout élément $s \in C_4$ est associé un unique 4-circuit orienté (à orientation près) noté Δ_s .
6. On note \mathcal{M}_G l'espace $\mathcal{E} \times \mathbb{R}^{C_4} \times \mathbb{R}^{C'_3}$.

Remarque 1.3.63. — Soit \mathcal{G} est un écimaèdre étiqueté. Si s est un sommet de \mathcal{A}_G , et si on note \mathcal{B}_s le bloc fondamental associé à s alors on a une projection naturelle $p_s : \mathcal{M}_G \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}_s}$. Il est clair que cette application est surjective.

On a un énoncé plus précis que le théorème 1.3.15.

Théorème 1.3.64. — Soit \mathcal{G} un écimaèdre étiqueté qui n'est pas un prisme exceptionnel et tel que $m(\mathcal{G}) = 0$ et $d(\mathcal{G}) \geq 0$, avec les notations introduites ci-dessus. L'application

$$\phi_G : X_G \longrightarrow E \times \mathbb{R}^{C_4} \times \mathbb{R}^{C'_3}$$

$$P \longmapsto \left((R_\Gamma)_{\Gamma \in C_3}, (R_{\Delta_s})_{s \in C_4}, (R_{(s_\Gamma^g, s_\Gamma, s_\Gamma^d)})_{\Gamma \in C'_3} \right)$$

est un difféomorphisme sur \mathcal{M}_G . En particulier, les composantes connexes de X_G sont en bijection avec les orientations partielles admissibles de \mathcal{F}_G , et, X_G s'identifie à une réunion d'ouverts convexes d'un espace vectoriel de dimension $d(\mathcal{G})$.

Démonstration. — Ce théorème a déjà été démontré lorsque \mathcal{G} est un bloc fondamental ou un tétraèdre : il s'agit des propositions 1.3.53 et 1.3.54. Nous allons procéder par étapes.

Commençons par montrer que ϕ_G est injective. Pour cela, il suffit de procéder par récurrence sur le nombre de 3-circuits prismatiques essentiels de \mathcal{G} . Si \mathcal{G} ne possède pas de tel 3-circuit, alors \mathcal{G} est un bloc fondamental ou un tétraèdre et le théorème est démontré dans ce cas. Si \mathcal{G} possède un 3-circuit prismatique essentiel alors \mathcal{G} possède un 3-circuit orienté prismatique essentiel Γ tel que \mathcal{G}_Γ^d soit un bloc fondamental. Le lemme de collage (lemme 1.3.58), l'hypothèse de récurrence et la proposition 1.3.54 montrent que tout polyèdre $P \in X_G$ est entièrement déterminé par $\phi_G(P)$. Donc ϕ_G est injective.

Montrons à présent que l'image de ϕ_G contient \mathcal{M}_G . Soit $m \in \mathcal{M}_G$. Pour tout sommet s de \mathcal{A}_G , on note \mathcal{B}_s le bloc fondamental étiqueté de \mathcal{G} correspondant au sommet s . Le lemme 1.3.58 montre qu'il existe un $P \in X_G$ tel que $\phi_G(P) = m$ si et seulement si pour tout sommet s de \mathcal{A}_G il existe un bloc fondamental $B_s \in X_{\mathcal{B}_s}$ tel que $\phi_{\mathcal{B}_s}(B_s) = p_s(y)$, où p_s désigne la projection

naturelle $p_s : \mathcal{M}_{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}_s}$. La proposition 1.3.54 et le fait que toute orientation partielle admissible de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ induit une orientation partielle admissible de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_s}$ montrent l'existence de tels blocs fondamentaux. La surjectivité de p_s permet de conclure que $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ est inclus dans l'image de $\phi_{\mathcal{G}}$.

Il faut montrer à présent que l'image de $\phi_{\mathcal{G}}$ est incluse dans $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$. Soit $P \in X_{\mathcal{G}}$, montrons que P définit naturellement une orientation partielle admissible. Si pour tout 3-circuit sans angle droit de Γ , on a $R_{\Gamma}(P) \neq 0$, alors on a vu au paragraphe 1.3.9, qu'un tel polyèdre définit une orientation globale admissible de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ et donc une unique orientation partielle admissible de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. Si l'un des 3-circuits sans angle droit de Γ vérifie $R_{\Gamma}(P) = 0$ alors nous allons modifier légèrement la structure de notre polyèdre P . Le lemme 1.3.58 montre que $X_{\mathcal{G}}$ est une variété et on a vu que $\phi_{\mathcal{G}}$ est injective donc l'image de $\phi_{\mathcal{G}}$ est ouverte par le théorème de l'image ouverte. On peut donc supposer que pour tout 3-circuit sans angle droit de Γ , on a $R_{\Gamma}(P) \neq 0$.

Il faut à présent montrer la continuité de l'application réciproque. On a déjà vu que avec la proposition 1.3.53 et la proposition 1.3.54 que les réflexions par rapport aux faces des blocs fondamentaux dépendaient continuellement des quantités R_{Γ} pour $\Gamma \in C_3$. Il ne reste plus qu'à vérifier que les réflexions dépendent continuellement du paramètre de recollement. On a vu durant la démonstration du lemme 1.3.58 que les réflexions dépendaient continuellement de ce paramètre. Ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque 1.3.65. — Il est à présent clair que $\kappa(\mathcal{G})$ est un entier pair ou égal à 1, qui vérifie $1 \leq \kappa(\mathcal{G}) \leq 2^{n(\mathcal{G})}$. En effet, si on possède une orientation partielle admissible alors l'orientation obtenue en renversant toutes les flèches est aussi admissible.

1.4. Exemples

On donne ici quelques exemples de calcul du nombre de composantes connexes de $X_{\mathcal{G}}$. Les figures sont décomposées en trois parties : le graphe combinatoire associé à \mathcal{G} et l'arbre associé, que l'on a représenté deux fois.

Pour rendre les figures lisibles, nos exemples vérifient tous les hypothèses suivantes : les arêtes extrémales sont sphériques avec angle droit et les arêtes non extrémales sont sans angle droit.

Enfin, on a inscrit sur les arêtes la nature géométrique de l'arête, en utilisant les abréviations suivantes : a = affine et h = hyperbolique.

On désignera par κ_1 (resp. κ_2) le nombre de composantes connexes de l'espace des modules associé à n'importe quel graphe étiqueté qui vient du graphe étiqueté dessiné et dont les 3-circuits vérifient les hypothèses données par les étiquettes des arêtes de l'arbre dessiné à gauche (resp. droite).

Rappelons qu'avec les notations que l'on vient de mettre en place, se donner une orientation partielle c'est orienter les arêtes marquées a. Se donner une orientation partielle admissible c'est se donner une orientation partielle, tel qu'il existe une orientation des arêtes marquées h tel que l'arbre ainsi orienté ne possède aucun puits et aucune source.

1) L'arbre \mathcal{A}_1 ne possède aucune arête marquée h par conséquent, il n'y a aucune arête à orienter d'où $\kappa_1 = 1$.

2) L'arbre \mathcal{A}_2 possède 4 arêtes marquées a par conséquent, il y a $2^4 = 16$ orientations partielles. Si on oriente toutes ces arêtes vers l'intérieur (resp. l'extérieur) alors on obtient un puits (resp. une source). Il est facile de voir que ce sont les seules orientations partielles non admissibles. On a donc $\kappa_2 = 16 - 2 = 14$.

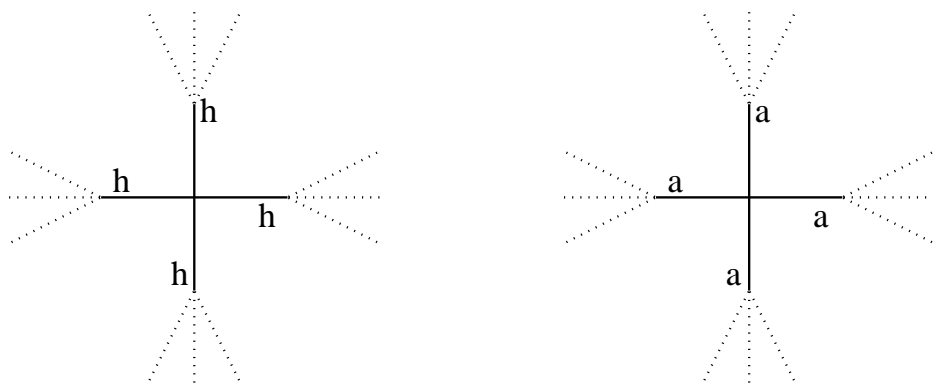
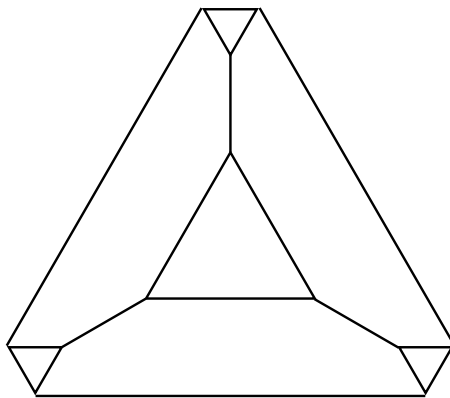


FIGURE 10. $\kappa_1 = 1$ et $\kappa_2 = 14$

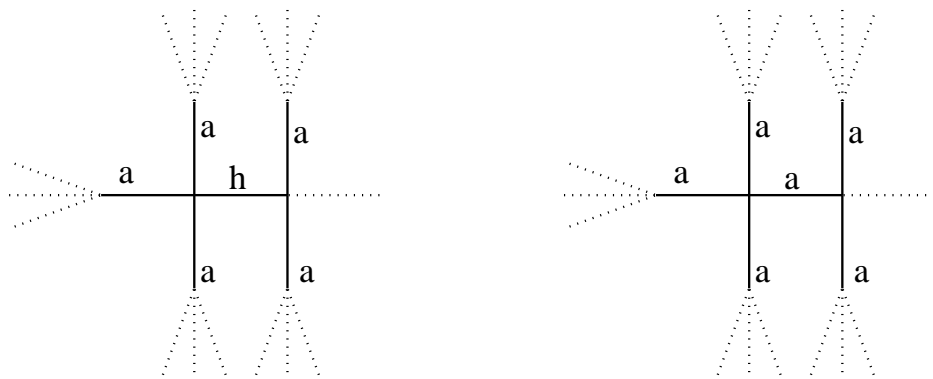


FIGURE 11. $\kappa_1 = 2^5 = 32$ et $\kappa_2 = 14 \cdot 2^2 = 56$

1) L'arbre \mathcal{A}_1 possède 5 arêtes marqués a par conséquent, il y a $2^5 = 32$ orientations partielles. Il est facile de voir que toutes ces orientations partielles sont admissibles. On a donc $\kappa_1 = 2^5 = 32$.

2) L'arbre \mathcal{A}_2 possède 6 arêtes marqués a par conséquent, il y a $2^6 = 64$ orientations partielles. Mais, elles ne sont pas toutes admissibles. Se donner une orientation partielle admissible de \mathcal{A}_2 , c'est se donner une orientation partielle admissible du sous-arbre formé des 4 arêtes marqués a qui ont un sommet en commun, puis se donner n'importe quelle orientation pour les 2 arêtes restantes. On a donc $\kappa_2 = 14 \cdot 2^2 = 56$.

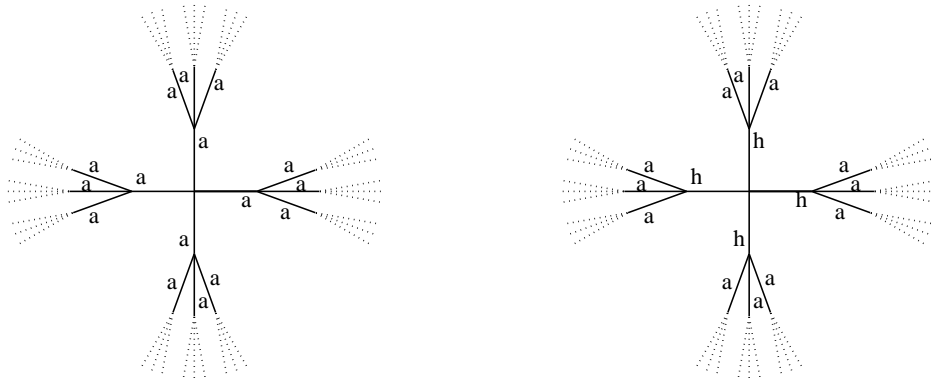
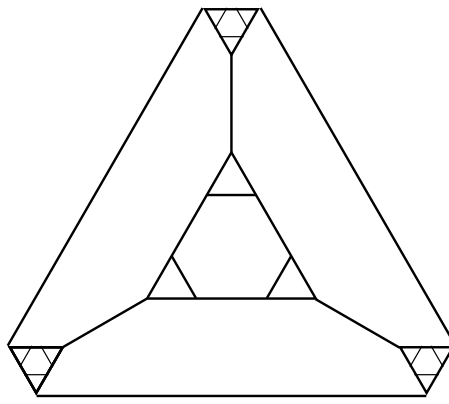


FIGURE 12. $\kappa_1 = 14 \cdot 7^4 = 33\,614$ et $\kappa_2 = 2^{12} - 2 = 4\,094$

1) L'arbre \mathcal{A}_1 possède 16 arêtes marqués a par conséquent, il y a $2^{16} = 65\,536$ orientations partielles. Mais, elles ne sont pas toutes admissibles. Se donner une orientation partielle admissible de \mathcal{A}_1 , c'est se donner une orientation partielle admissible du sous-arbre formé des 4 arêtes marqués a qui ont un sommet en commun, au centre de \mathcal{A}_1 , puis se donner l'une des 7 orientations partielles admissibles pour chacun des 4 groupes de 3 arêtes restantes. On a donc $\kappa_1 = 14 \cdot 7^4 = 33\,614$.

2) L'arbre \mathcal{A}_2 possède 12 arêtes marqués a par conséquent, il y a $2^{12} = 4\,096$ orientations partielles. Mais, elles ne sont pas toutes admissibles. En effet, si l'on oriente toutes les arêtes marqués a vers l'intérieur (resp. l'extérieur), alors on doit orienter toutes les arêtes marqués h vers l'extérieur (resp. l'intérieur). Il est facile de voir que ce sont les deux seules orientations partielles non admissibles.

CHAPITRE 2

SURFACE PROJECTIVE CONVEXE DE VOLUME FINI

2.1. Introduction

2.1.1. Exemples de convexes divisibles. — Soit \mathcal{C} une partie de l'espace projectif réel \mathbb{P}^n , on dira que \mathcal{C} est *convexe* lorsque l'intersection de \mathcal{C} avec toute droite de \mathbb{P}^n est connexe. Une partie convexe \mathcal{C} est dite *proprement convexe* lorsqu'il existe un ouvert affine contenant l'adhérence $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} . Elle est dite *strictement convexe* lorsque tout segment inclus dans le bord $\partial\mathcal{C}$ de \mathcal{C} est trivial.

Le but de ce texte est d'étudier les ouverts proprement convexes Ω de \mathbb{P}^n qui possèdent "beaucoup de symétries". Un cas qui a été beaucoup étudié est celui où "beaucoup de symétrie" signifie qu'il existe un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que le quotient Ω/Γ est compact. De tels ouverts s'appellent des *convexes divisibles* et on dit alors que Γ *divise* Ω . Nous allons dans ce texte remplacer l'hypothèse de compacité du quotient Ω/Γ par une hypothèse de "finitude de volume", et nous restreindre à la dimension 2. Mais commençons par donner des exemples du cas compact.

L'exemple le plus simple de convexe divisible est le simplexe. Toute base \mathcal{B} de \mathbb{R}^{n+1} définit un pavage de \mathbb{P}^n en 2^n simplexes. La composante neutre du stabilisateur de chaque simplexe ouvert est le groupe D des matrices diagonales dans la base \mathcal{B} à coefficients positifs. D est un groupe de Lie abélien isomorphe à \mathbb{R}^n qui agit simplement transitivement sur chaque simplexe ouvert S . Tout réseau de D divise donc S . On vient donc de construire un convexe divisible non strictement convexe. On remarque que dans cet exemple tout groupe qui divise S agit de façon réductible sur \mathbb{R}^{n+1} , et S est réductible au sens suivant.

Un ouvert proprement convexe Ω est *réductible* si l'une des deux composantes connexes C de $\pi^{-1}(\Omega)$ (π est la projection naturelle $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$) est *réductible*. Ce qui signifie qu'il existe une décomposition $\mathbb{R}^{n+1} = E_1 \oplus E_2$ non triviale et des cônes convexes C_1 de E_1 et C_2 de E_2 tel que $C = C_1 + C_2$. Sinon, on dit qu'ils sont *irréductibles*. Vey a montré dans [Vey] que tout convexe divisible se décompose en un produit de convexes divisibles irréductibles. On s'intéresse donc avant tout aux convexes divisibles irréductibles.

Parmi les convexes divisibles il y a une famille qui se distingue des autres, celles des convexes divisibles homogènes c'est-à-dire ceux pour lesquels le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ des transformations de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préserve Ω agit transitivement. Les travaux de Koecher, Vinberg et Borel ont permis de classifier les convexes divisibles homogènes. Voici la liste des convexes divisibles irréductibles homogènes :

Les espaces hyperboliques $\mathbb{H}^n = \pi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 > 0 \text{ et } x_{n+1} > 0\})$ forment la liste complète (avec $n \geq 1$) des convexes divisibles strictement convexes et homogènes. Le groupe d'automorphisme de \mathbb{H}^n est bien entendu $SO_{n,1}(\mathbb{R})$. On remarquera qu'en toute dimension $n \geq 1$, il existe un unique convexe divisible strictement convexe et homogène.

Il existe quatre familles de convexes divisibles irréductibles non strictement convexes et homogènes. En voici la liste avec $n \geq 2$:

- $\Pi_n(\mathbb{R}) = \pi(\{ \text{Les matrices réelles } (n+1) \times (n+1) \text{ symétriques définies positives} \})$, il est de dimension $m = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ et son groupe d'automorphisme est $SL_{n+1}(\mathbb{R})$.
- $\Pi_n(\mathbb{C}) = \pi(\{ \text{Les matrices complexes } (n+1) \times (n+1) \text{ symétriques définies positives} \})$, il est de dimension $m = n^2 - 1$ et son groupe d'automorphisme est $SL_{n+1}(\mathbb{C})$.
- $\Pi_n(\mathbb{H}) = \pi(\{ \text{Les matrices quarternioniques } (n+1) \times (n+1) \text{ symétriques définies positives} \})$, il est de dimension $m = (2n+1)(n-1)$ et son groupe d'automorphisme est $SL_{n+1}(\mathbb{H})$.
- $\Pi_3(\mathbb{O})$ un convexe "exceptionnel" de dimension 26 et tel que $\text{Lie}(\text{Aut}(\Pi_3(\mathbb{O}))) = \mathfrak{e}_{6(-26)}$.

Par conséquent, contrairement au cas strictement convexe, il n'existe pas de convexe divisible irréductible non strictement convexe et homogène en toute dimension.

Expliquons succinctement l'histoire de cette classification. À la fin des années 50, Koecher et Vinberg ont classifié les ouverts proprement convexes symétriques de \mathbb{P}^m ([**Vin**]). Dans les années 60, Borel a montré dans [**Bor**] que tout groupe réductif contient un réseau cocompact. On peut déduire de cela que tout ouvert Ω proprement convexe et symétrique est divisible, puisque si Ω est symétrique alors le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ est un groupe réductif qui agit transitivement et proprement sur Ω . Le dernier pas vers la classification des convexes divisibles homogènes a été fait par Vinberg ([**Vin2**]) qui a classifié les ouverts proprement convexes homogènes. Il résulte de cette classification que tout ouvert proprement convexe homogène est symétrique si et seulement si le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ est unimodulaire. Par conséquent, tout ouvert proprement convexe homogène est divisible si et seulement si il est symétrique.

Kac et Vinberg ont construit les premiers exemples de convexe divisible strictement convexe et non homogène dans [**KaV**] à l'aide de groupe de Coxeter. Johnson et Millson ont construit en toute dimension $n \geq 2$ des convexes divisibles irréductibles, strictement convexes et non homogènes ([**JoMil**]) en déformant des réseaux cocompacts de $SO_{n,1}(\mathbb{R})$. Kapovich et Benoist ont construit (Benoist pour $n = 4$ dans [**Beno1**] et Kapovich pour $n \geq 4$ dans [**Kapo**]) des convexes divisibles strictement convexes, non homogènes et non quasi-isométriques à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n en toute dimension $n \geq 4$.

2.1.2. Description des principaux résultats. — Revenons au but de ce texte. Tout ouvert proprement convexe est naturellement muni d'une métrique Finslérienne (distance de Hilbert) et de la mesure associée (mesure de Buseman). Le but de ce texte est d'étudier les ouverts proprement convexe de \mathbb{P}^2 pour lesquels il existe un sous-groupe discret Γ de $SL_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que le quotient Ω/Γ muni de la mesure μ héritée de la mesure de Buseman soit de volume fini.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 2.1.1. — (Corollaire 2.4.5) Soit Γ un sous-groupe discret de $SL_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 . Si $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$ et Ω n'est pas un triangle alors l'adhérence de Zariski de Γ est :

- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ ou
- Un conjugué de $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.1.2. — (Théorème 2.6.18) Toute surface admettant une structure projective proprement convexe de volume fini est de type fini.

Théorème 2.1.3. — (Corollaire 2.6.28) Soit S une surface sans bord et de type fini, une structure projective proprement convexe sur S est de volume fini si et seulement si l'holonomie des lacets élémentaires (Définition 3.3.1) de S est parabolique.

On obtiendra ensuite les résultats suivants :

Théorème 2.1.4. — (Théorème 2.7.7) Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω , l'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si l'action de ${}^t\Gamma$ sur l'ouvert dual Ω^* est de covolume fini.

Théorème 2.1.5. — (Corollaire 2.7.4 et théorème 2.7.8) Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω , on suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini et que Ω n'est pas un triangle. Alors, Ω est strictement convexe et le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1 .

Théorème 2.1.6. — (Théorème 2.7.10) Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω , on suppose que Γ n'est pas virtuellement abélien. Alors, l'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si Γ est de type fini et l'ensemble limite Λ_Γ de Γ vérifie $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.

Cette étude permet d'obtenir sur l'espace des structures projectives marquées proprement convexes de volume fini sur la surface de genre g avec p pointes un système de coordonnées à la Fenchel-Nielsen qui montre que cet espace est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16+6p}$. Ce système de coordonnées généralise celui employé par Goldman dans le cas compact ([Gold1]). Cette étude sera soumise très prochainement.

Voici le plan de ce texte. La première partie est une introduction à la géométrie de Hilbert. Les démonstration de certains théorèmes peuvent être trouvés dans [CVV1, CVV2, Beno3]. On donne quand même les démonstrations de certains théorèmes pour faciliter la lecture de ce texte. Cette partie a pour but de définir la mesure de Buseman et de donner des exemples de parties de volume fini et infini pour celle-ci.

Dans la seconde partie, on étudie la dynamique d'un élément de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe. Cette partie constitue une étude élémentaire mais essentiel pour nos résultats.

Dans la troisième partie on montre le théorème 2.1.1. Le point clé étant de montrer l'irréductibilité du groupe Γ .

Le but de la quatrième partie est de donner une courte démonstration d'un théorème de Lee ([JL]). Ce théorème assure l'existence d'un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action d'un groupe discret sur un ouvert proprement convexe. Ce résultat est le point de départ de l'étude des surfaces projectives proprement convexes de volume fini. On introduit aussi la notion de secteur qui permettra d'étudier les surfaces projectives proprement convexes à l'infini.

L'objet de la cinquième partie est de montrer les théorèmes 2.1.2 et 2.1.3. Pour cela, on utilise abondamment les parties 2 et 4. On commencera par définir précisément les notions de surface projective, surface projective proprement convexe et surface projective proprement convexe de volume fini. Ensuite, on montrera le théorème 2.1.2, en utilisant une minoration uniforme de l'aire de tout triangle idéal. Enfin, on montre le théorème 2.1.3, les outils essentiels sont le théorème de Lee, la notion de secteur et les estimations de volume de la partie 2.2.

La sixième partie a pour but de montrer les théorèmes 2.1.4, 2.1.5, 2.1.6. Pour montrer la stricte convexité on utilise la même idée que dans le cas compact mais on a besoin de raffinement. Ensuite, on définit la notion de surface duale, le théorème 2.1.5 suit. Cette dualité permettra de montrer que Ω est à bord C^1 . Enfin, on montrera le théorème 2.1.6.

Je remercie Yves Benoist pour ses nombreux conseils et nos nombreuses discussions sur ce sujet. Je remercie aussi Constantin Vernicos pour ces réponses toujours très rapides à mes questions. Enfin, je remercie aussi Benjamin Favetto et Mathieu Cossutta, l'un pour ces conseils de rédaction et l'autre pour quelques discussions autour de ce sujet.

2.2. Géométrie de Hilbert

Cette partie constitue une introduction à la géométrie de Hilbert. Un exposé plus complet peut être trouvé dans les articles [CVV1, CVV2, Beno3].

2.2.1. La métrique d'un ouvert proprement convexe. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^n , Hilbert a introduit sur de tels ouverts une distance, la distance de Hilbert, définie de la façon suivante :

Soient $x \neq y \in \Omega$, on note p, q les points d'intersection de la droite (xy) et du bord $\partial\Omega$ de Ω tels que x est entre p et y , et y est entre x et q (voir figure 1). On pose :

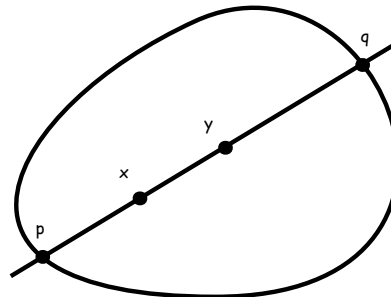


FIGURE 1. La distance de Hilbert

$$d_{\Omega}(x, y) = \ln([p : x : y : q]) = \ln \left(\frac{\|p-y\| \cdot \|q-x\|}{\|p-x\| \cdot \|q-y\|} \right) \quad \text{et} \quad d_{\Omega}(x, x) = 0$$

- $[p : x : y : q]$ désigne le birapport des points p, x, y, q .
- $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne quelconque sur un ouvert affine A qui contient l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω .

Remarque 1. — Il est clair que d_{Ω} ne dépend ni du choix de A , ni du choix de la norme euclidienne sur A .

Fait 1. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^n ,

- d_Ω est une distance sur Ω .
- (Ω, d_Ω) est un espace métrique complet.
- La topologie induite par d_Ω coïncide avec celle induite par \mathbb{P}^n .
- Le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ des transformations projectives de $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préservent Ω est un sous-groupe fermé de $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui agit par isométrie sur (Ω, d_Ω) . Il agit donc proprement sur Ω .

On peut trouver une démonstration de cet énoncé dans [Beno3].

2.2.2. La structure finslérienne d'un ouvert proprement convexe. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^n , la métrique de Hilbert d_Ω est induite par une structure finslérienne sur l'ouvert Ω . On identifie le fibré tangent $T\Omega$ de Ω à $\Omega \times A$.

Soient $x \in \Omega$ et $v \in A$, on note p^+ (resp. p^-) le point d'intersection de la demi-droite définie par x et v (resp. $-v$) avec $\partial\Omega$.

On pose : $\|v\|_x = \left(\frac{1}{\|x-p^-\|} + \frac{1}{\|x-p^+\|} \right) \|v\|$.

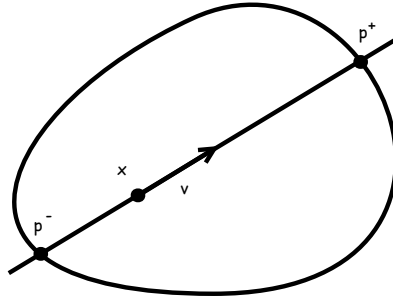


FIGURE 2. La métrique de Hilbert

Fait 2. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^n et A un ouvert affine qui contient $\overline{\Omega}$,

- la distance induite par la métrique finslérienne $\|\cdot\|$ est la distance d_Ω .
- Autrement dit on a les formules suivantes :
 - $\|v\|_x = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_\Omega(x, x+tv)$, où $v \in A$, $t \in \mathbb{R}$ assez petit.
 - $d_\Omega(x, y) = \inf \int_0^1 \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} dt$, où l'inf est pris sur les chemins σ de classe \mathcal{C}^1 tel que $\sigma(0) = x$ et $\sigma(1) = y$.

Remarque 2. — La quantité $\|v\|_x$ est donc indépendante du choix de A et de $\|\cdot\|_A$.

2.2.3. Mesure sur un ouvert proprement convexe (dite mesure de Busemann). — Nous allons construire une mesure borélienne μ_Ω sur Ω , de la même façon que l'on construit une mesure borélienne sur une variété riemannienne.

Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^n , on note :

- $B_x(1) = \{v \in T_x\Omega \mid \|v\|_x < 1\}$
- Vol est la mesure de Lebesgue sur A normalisée pour avoir $\text{Vol}(\{v \in A \mid \|v\| < 1\}) = 1$.

On peut à présent définir la mesure μ_Ω . Pour tout borélien $\mathcal{A} \subset \Omega \subset A$, on pose :

$$\mu_\Omega(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{d\text{Vol}(x)}{\text{Vol}(B_x(1))}$$

La mesure μ_Ω est indépendante du choix de A et de $\|\cdot\|$, car c'est la mesure de Hausdorff de (Ω, d_Ω) (Exemple 5.5.13 [BBI]). (Pour une introduction aux mesures de Hausdorff, on pourra regarder [BBI]). La mesure μ_Ω est donc $\text{Aut}(\Omega)$ -invariante.

2.2.4. Un résultat de comparaison. — Dans la proposition suivante, il y a deux ouverts en jeu, on ajoute donc aux notations introduites précédemment le symbole de l'ouvert auxquelles elles correspondent (ex : $\|v\|_x^\Omega$, p_Ω^- , $B_x^\Omega(1)$, etc...).

Proposition 2.2.1. — Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts proprement convexes de \mathbb{P}^n tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors :

- Les métriques finslériennes de Ω_1 et Ω_2 vérifient : $\|v\|_x^{\Omega_2} \leq \|v\|_x^{\Omega_1}$ pour tout $x \in \Omega_1$ et tout $v \in T_x\Omega_1 = T_x\Omega_2$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $p_{\Omega_1}^+ = p_{\Omega_2}^+$ et $p_{\Omega_1}^- = p_{\Omega_2}^-$.
- $\forall x, y \in \Omega_1$, on a $d_{\Omega_2}(x, y) \leq d_{\Omega_1}(x, y)$.
- $\forall x \in \Omega_1$, on a $B_x^{\Omega_1}(1) \subset B_x^{\Omega_2}(1)$ avec égalité si et seulement si $\Omega_1 = \Omega_2$.
- Pour tout borélien \mathcal{A} de Ω_1 , on a $\mu_{\Omega_2}(\mathcal{A}) \leq \mu_{\Omega_1}(\mathcal{A})$.

2.2.5. Quelques résultats en géométrie de Hilbert plane. —

2.2.5.1. *Un résultat sur les ouverts proprement convexes de \mathbb{P}^2 .* — On souhaite montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.2. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et s un point du bord $\partial\Omega$ de Ω , alors, pour tout voisinage V de s dans $\overline{\Omega}$, on a $\mu_\Omega(V \cap \Omega) = \infty$.

Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un point $x \in \Omega$, on notera $D_x^\Omega(\varepsilon)$ le disque de centre $x \in \Omega$ et rayon $\varepsilon > 0$: $D_x^\Omega(\varepsilon) = \{y \in \Omega \mid d_\Omega(x, y) < \varepsilon\}$. L'idée est de construire une infinité de disques disjoints de rayon constant inclus dans $V \cap \Omega$. La démonstration se passe en deux étapes. On commence par montrer (lemme 2.2.4) que le volume des disques de rayon ε est uniformément minoré. Ensuite, on construit une suite de disques disjoints inclus dans $V \cap \Omega$.

Nous allons avoir besoin du théorème suivant dû à Benzécri ([Ben]). On munit l'ensemble $\mathcal{E} = \{(\Omega, x) \mid \Omega \text{ est un ouvert proprement convexe de } \mathbb{P}^2 \text{ et } x \in \Omega\}$ de la topologie de Hausdorff.

Théorème 2.2.3 (Benzécri). — L'action de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(\Omega, x) \mid \Omega \text{ est un ouvert proprement convexe de } \mathbb{P}^2 \text{ et } x \in \Omega\}$ est propre et cocompacte.

On obtient la proposition suivante :

Lemme 2.2.4. — Le volume minimum d'un disque de rayon ε d'un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 est strictement positif. Autrement dit :

$$\inf_{(\Omega, x) \in \mathcal{E}} \mu_\Omega(D_x^\Omega(\varepsilon)) > 0$$

Démonstration. — La fonction qui a $(\Omega, x) \in \mathcal{E}$ associe $\mu_\Omega(D_x^\Omega(\varepsilon))$ est continue et $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ -invariante. Par conséquent, le théorème 2.2.3 montre que l'infimum de cette fonction est atteint sur \mathcal{E} . C'est ce qu'il fallait montrer. \square

À présent, nous allons chercher à évaluer la taille euclidienne des disques de Ω .

Lemme 2.2.5. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un point $s \in \partial\Omega$, on choisit une carte affine A contenant $\overline{\Omega}$. On se donne D_0 une droite de \mathbb{P}^2 passant par s tel que $\Omega \cap D = \emptyset$. On considère un point $x \in \Omega$. On note D_1 la droite parallèle à D_0 (dans la carte A) passant par x . On note D_∞ une droite parallèle (dans la carte A) à D_0 qui ne rencontre pas Ω . Enfin, on note D_e la droite parallèle (dans la carte A) à D_0 et tel que le birapport du quadruplet de droites $(D_0, D_1, D_e, D_\infty)$ est égale à $e = \exp(1)$. Pour terminer, on note B la composante connexe de $\Omega - D_e$ qui contient x . Alors, $D_x^\Omega(1)$ est inclus dans B .

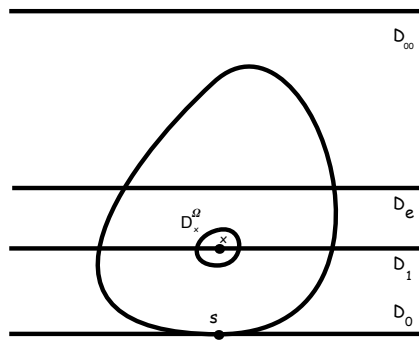


FIGURE 3. Démonstration du lemme 2.2.5

Démonstration. — La figure 3 peut aider à suivre cette démonstration.

Pour montrer ce lemme, il faut utiliser la proposition 2.2.1. On choisit pour Ω_2 n'importe quel rectangle contenant Ω , délimité par les droites D_0 et D_∞ et tel que les côtés donnés par D_0 et D_∞ sont des côtés opposés de Ω_2 . La proposition 2.2.1 montre que $D_x^\Omega(1) \subset D_x^{\Omega_2}(1)$. Par conséquent, il suffit de montrer que $D_x^{\Omega_2}(1)$ est inclus entre les droites D_e et D_0 . Mais Ω_2 est un rectangle, par conséquent, comme la distance de Hilbert est défini en terme de birapport, il est clair que $D_x^{\Omega_2}(1)$ est inclus dans un rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux de Ω_2 et inclus entre les droites D_e et D_0 . \square

On peut à présent montrer la proposition 2.2.2 lorsque s possède un voisinage V dans \mathbb{P}^2 tel que $V \cap \partial\Omega$ ne contient aucun segment non trivial.

Lemme 2.2.6. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un point s du bord $\partial\Omega$ qui possède un voisinage V dans \mathbb{P}^2 tel que $V \cap \partial\Omega$ ne contient aucun segment non trivial; alors, pour tout voisinage V de s dans $\overline{\Omega}$, on a $\mu_\Omega(V \cap \Omega) = \infty$.*

Démonstration. — Nous allons construire une infinité de disque de rayon 1 dans $V \cap \Omega$. On se donne un point x de $V \cap \Omega$ et on considère le segment $[x, s[$ inclus dans Ω . Ce segment fournit une géodésique λ de longueur infini que l'on paramètre par la longueur d'arc pour la métrique de Hilbert. Par conséquent, si on note $x_n = \lambda(3n)$ alors les disques $D_n = D_{x_n}^\Omega(1)$ sont disjoints. Il reste à comprendre pourquoi ils sont inclus dans $V \cap \Omega$ pour n assez grand.

On se donne D_s une droite de \mathbb{P}^2 passant par s tel que $\Omega \cap D_s = \emptyset$. On note D_n la droite parallèle à D_s passant par $\lambda(3n - 1)$ et on note B_n la composante connexe de $\Omega - D_n$ qui contient x_n . Si V est un voisinage de s dans \mathbb{P}^2 tel que $V \cap \partial\Omega$ ne contient aucun segment non trivial alors B_n est inclus dans V pour n assez grand.

De plus, le lemme 2.2.5 montre que les disques de centre x_n et de rayon 1 sont inclus dans B_n pour n assez grand. L'ensemble $V \cap \Omega$ contient donc une infinité de disques disjoints et leur volume est uniformément minoré par le lemme 2.2.4. L'ensemble $V \cap \Omega$ est donc de volume infini. \square

Il faut à présent traiter le cas contraire : s'il existe un voisinage de s dans \mathbb{P}^2 qui contient un segment du bord de Ω alors il existe un point $s' \in V \cap \partial\Omega$ tel que s' appartient à l'intérieur d'un segment de Ω . Il reste donc à montrer le lemme suivant pour terminer la démonstration de la proposition 2.2.2.

Lemme 2.2.7. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un point s du bord $\partial\Omega$, on suppose que s est sur l'intérieur d'un segment S du bord de Ω ; alors, pour tout voisinage V de s dans $\overline{\Omega}$, on a $\mu_\Omega(V \cap \Omega) = \infty$.*

Démonstration. — La figure 4 peut aider à suivre la démonstration.

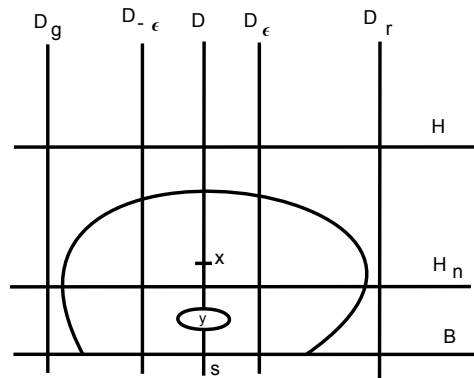


FIGURE 4. Démonstration du lemme 2.2.7

Dans ce cas, on ne peut pas (en général) trouver une infinité de disques de rayon 1, mais nous allons construire une infinité de disques disjoints de rayon ε dans $V \cap \Omega$, avec ε assez petit. On se donne un point x de $V \cap \Omega$ et on considère le segment $[x, s]$ inclus dans Ω . Ce segment fournit une géodésique λ de longueur infini que l'on paramètre par la longueur d'arc pour la métrique de Hilbert. On définit la suite $x_n = \lambda(3n)$. Si $\varepsilon < 1$ alors les disques $D_n = D_{x_n}^\Omega(\varepsilon)$ sont disjoints.

Il reste à comprendre pourquoi ils sont inclus dans $V \cap \Omega$ pour n assez grand, si ε est assez petit. Le lemme 2.2.5 montre que ces disques tendent, lorsque n tend vers l'infini, vers un sous-segment S' de S . Comme S' peut ne pas être trivial il faut prendre ε assez petit pour que les disques D_n soient dans $V \cap \Omega$ pour n assez grand. On va utiliser la même idée que pour le lemme 2.2.5 mais cette fois-ci, au lieu de pousser les D_n vers le bord de Ω . Nous allons contrôler leur taille dans le sens "parallèle" au segment S du bord de Ω .

Pour cela, on note D la droite passant par x et s . On se donne une carte affine A contenant $\bar{\Omega}$. On considère $D_g, D_\varepsilon, D_{-\varepsilon}$ et D_r quatre droites parallèles (dans la carte affine A) à D et tel que :

- Les droites D_r et D_g ne se rencontrent pas Ω .
- Le birapport de $(D_g, D, D_\varepsilon, D_r)$ est égale à e^ε
- Le birapport de $(D_g, D_{-\varepsilon}, D, D_r)$ est égale à $e^{-\varepsilon}$.

Il faut aussi une droite B passant pas s et n'intersectant pas Ω , ainsi qu'une droite H parallèle à B et n'intersectant pas Ω . L'ouvert Ω est donc inclus dans le quadrilatère Ω_2 délimité par les droites H, D_r, B, D_g . Comme la distance de Hilbert est défini en terme de birapport, il vient que tout disque $D_y^{\Omega_2}(\varepsilon)$ de Ω_2 de centre $y \in]x, s[$ et de rayon ε est inclus dans le quadrilatère délimité par les droites $H, D_\varepsilon, B, D_{-\varepsilon}$.

Il est essentiel de remarquer que lorsque ε tend vers 0, les droites D_ε et $D_{-\varepsilon}$ convergent vers D .

Pour conclure, notons H_n une droite parallèle à H et passant par $\lambda(3n - 1)$. La proposition 2.2.1 et le lemme 2.2.5 montre que les disques D_n de Ω de centre x_n et de rayon ε sont inclus dans le quadrilatère délimité par les droites $H_n, D_\varepsilon, B, D_{-\varepsilon}$. Par conséquent, si l'on choisit ε assez petit alors les disques D_n sont inclus dans $V \cap \Omega$, pour n assez grand.

Leur volume est uniformément minoré par le lemme 2.2.4. L'ensemble $V \cap \Omega$ est donc de volume infini. □

2.2.5.2. *Un résultat sur les pics.* — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un point $p \in \partial\Omega$, l'ensemble des droites de \mathbb{P}^2 concourantes en p et tel que $D \cap \Omega = \emptyset$ est un segment fermé E_p de $(\mathbb{P}^2)^*$. On a la dichotomie suivante :

- L'ensemble E_p est un singleton dans ce cas $\partial\Omega$ est C^1 en p , et l'unique droite de E_p est la *tangente* au bord $\partial\Omega$ de Ω en p .
- Sinon, $\partial\Omega$ n'est pas C^1 en p , et les points extrémaux du segment E_p sont les *demi-tangentes* à $\partial\Omega$ en p .

Définition 2.2.8. — Soient $0 < \alpha < 1$, Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et p un point C^1 du bord $\partial\Omega$ de Ω , on dit que p est $C^{1,\alpha}$ lorsqu'il existe $K > 0$ et V un voisinage de p dans $\partial\Omega$ tel que $\forall y \in V$, $d_{\mathbb{E}}(y, T_x\Omega) \leq Kd_{\mathbb{E}}(x, y)^\alpha$, où $d_{\mathbb{E}}$ est une distance euclidienne sur un ouvert affine contenant $\overline{\Omega}$.

Définition 2.2.9. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 , un *pic* P est un triangle ouvert de Ω qui possède un et un seul sommet sur le bord $\partial\Omega$ de Ω , on appelle ce sommet *le sommet à l'infini* de P .

Théorème 2.2.10 (CVV). — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 .

- Tout pic de Ω dont le sommet à l'infini est un point non C^1 du bord $\partial\Omega$ de Ω est de volume infini.
- Tout pic de Ω dont le sommet à l'infini est un point $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha > 0$ du bord $\partial\Omega$ de Ω est de volume fini.

Remarque 3. — Nous n'utiliserons pas le second point. Mais il illustre bien l'importance de la régularité dans l'estimation du volume des pics, qui sera essentielle dans ce texte. On pourra trouver une démonstration dans [CVV1] du premier et du second point. Nous donnons une démonstration du premier point pour la commodité du lecteur.

Nous allons utiliser la proposition 2.2.1 et le lemme suivant.

Lemme 2.2.11. — Soit Ω_0 l'ouvert proprement convexe de \mathbb{R}^2 défini par $\Omega_0 = \{(x, y) \mid x, y > 0\}$, tout pic dont le sommet à l'infini est l'origine $(0, 0)$ est de volume infini pour μ_{Ω_0} .

Démonstration. — L'homothétie γ de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre l'origine préserve Ω_0 . Soit P un pic de Ω_0 dont le sommet à l'infini est l'origine. On note D la droite engendré par le côté opposé à l'origine de P , et A le quadrilatère fermé délimité par les côtés de P contenant l'origine, la droite D et la droite γD . Ainsi, $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n A$. Par conséquent, comme γ préserve la mesure μ_{Ω_0} et que $\mu_{\Omega_0}(A) > 0$. Il vient que $\mu_{\Omega_0}(P) = \infty$. \square

Démonstration du premier point du théorème 2.2.10. — Il reste simplement à remarquer que si p est un point non C^1 de $\partial\Omega$ alors Ω est inclus dans un triangle dont l'un des sommets est p . Comme l'ouvert $\{(x, y) \mid x, y > 0\}$ est un triangle, la proposition 2.2.1 et le lemme précédent montre que tout pic de Ω dont le sommet à l'infini est le point P est de volume infini. \square

2.2.5.3. *Minoration de l'aire des triangles idéaux.* —

Définition 2.2.12. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 , un *triangle idéal* de Ω est un triangle ouvert dont les sommets appartiennent au bord de Ω .

Théorème 2.2.13 (CVV). — Il existe une constante strictement positive $C_{\mathbb{P}^2}$ tel que pour tout ouvert Ω proprement convexe de \mathbb{P}^2 et tout triangle idéal Δ de Ω on ait $\mu_{\Omega}(\Delta) \geq C_{\mathbb{P}^2} > 0$.

Démonstration. — On note $(p_i)_{i=1\dots 3}$ les sommets de Δ . On considère $(D_i)_{i=1\dots 3}$ trois droites de \mathbb{P}^2 tel que $D_i \cap \Omega = \emptyset$ et $p_i \in D_i$. Les droites $(D_i)_{i=1\dots 3}$ définissent quatre triangles ouverts de \mathbb{P}^2 . Un seul d'entre eux contient l'ouvert Ω , on le note T . La proposition 2.2.1 montre que $\mu_\Omega(\Delta) \geq \mu_T(\Delta)$. Le lemme 2.2.14 qui suit conclut la démonstration. \square

Lemme 2.2.14. — *Soit T un triangle de \mathbb{P}^2 , il existe une constante strictement positive $C_{\mathbb{P}^2}$ telle que pour tout triangle idéal Δ de T on ait $\mu_T(\Delta) \geq C_{\mathbb{P}^2}$.*

Démonstration. — La figure 5 peut aider à suivre la démonstration.

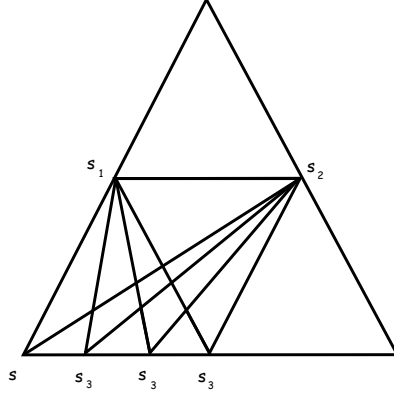


FIGURE 5. Démonstration du lemme 2.2.14

On peut supposer que $T = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid x, y, z \text{ sont de même signe}\}$. Le groupe D des matrices diagonales à diagonale strictement positive préserve T . Commençons par remarquer que la proposition 2.2.2 montre que tout triangle idéal qui possède deux sommets sur le même côté de T est de volume infini. De même, tout triangle idéal qui possède un sommet en commun avec les sommets de T est aussi de volume infini d'après le théorème 2.2.10. On peut donc supposer que les sommets de Δ sont sur chacun des trois côtés ouverts de T .

Le groupe D agit transitivement sur chaque côté ouvert de T . Mieux, le stabilisateur d'un point de l'intérieur d'un côté ouvert de T agit encore transitivement sur chacun des deux autres côtés ouverts. On peut donc supposer que les sommets s_1, s_2 et s_3 du triangle idéal Δ ont pour coordonnées $s_1 = [1 : 1 : 0]$, $s_2 = [0 : 1 : 1]$ et enfin $s_3 = [x : 0 : 1]$, où $x > 0$. On note Δ_x ce triangle.

Comme $\mu_T(\Delta_x)$ dépend de façon continue de x , il suffit de montrer que le volume de Δ_x admet une limite infinie lorsque x tend vers 0, pour conclure notre démonstration. Le point s_3 tend vers le point $s = [0 : 0 : 1]$ lorsque x tend vers 0. On note Δ' le triangle inclus dans Δ et de sommet s, s_1, s_2 , et Δ'_x le triangle intersection $\Delta'_x = \Delta_x \cap \Delta'$. La famille des triangles Δ'_x croit lorsque x décroît vers 0 et elle converge vers le triangle Δ' . Le théorème 2.2.2 montre que le volume de Δ' est infini et le lemme de Fatou montre que le volume de Δ'_x tend vers l'infini lorsque x tend vers 0. Mais les Δ'_x sont inclus dans Δ_x . La conclusion est donc claire. \square

Remarque 4. — On peut montrer que l'aire minimale pour un triangle idéal du triangle T est atteinte pour le triangle Δ_x avec $x = 1$, et son aire est (avec les normalisations que l'on a choisi) $\frac{\pi^3}{24}$, voir [CVV1].

2.3. Dynamique

Dans cette partie nous allons étudier les différentes dynamiques possibles pour un élément γ de $SL_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe.

Remarque 5. — On munit l'ensemble des fermés de \mathbb{P}^2 de la topologie de Hausdorff héritée de la topologie de \mathbb{P}^2 . Ainsi, toutes les convergences de suites de fermés utilisées dans le reste du texte sont au sens de la topologie de Hausdorff.

2.3.1. Le cas de \mathbb{P}^1 et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. — On rappelle sans démonstration la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. — Soit $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, l'élément γ fait partie de l'une des quatre familles suivantes :

- La famille des éléments dits hyperboliques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda\mu = 1 \text{ et } \lambda > \mu > 0$$

- La famille des éléments dits paraboliques qui sont conjugués à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La famille des éléments dits elliptiques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{où, } 0 < \theta < 2\pi$$

- La famille composée uniquement de l'identité.

Définition 2.3.2. — Soient $\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et D une droite de \mathbb{P}^2 stable par γ , on dira que l'action de γ sur D est de type hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique) lorsque γ restreint à cette droite est un élément hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique).

2.3.2. Classification. — La proposition suivante est démontrée dans [Choi]. On reproduit ici une démonstration pour la commodité du lecteur.

Proposition 2.3.3. — Soit Ω un ouvert proprement convexe et un élément $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, γ fait partie de l'une des six familles suivantes :

- La famille des éléments dits hyperboliques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^- \end{pmatrix} \quad \text{où, } \lambda^+ > \lambda^0 > \lambda^- > 0 \\ \text{et } \lambda^+ \lambda^0 \lambda^- = 1.$$

- La famille des éléments dits planaires qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{où, } \alpha, \beta > 0, \alpha^2 \beta = 1 \\ \text{et } \alpha, \beta \neq 1.$$

- La famille des éléments dits quasi-hyperboliques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{où, } \alpha, \beta > 0, \alpha^2 \beta = 1 \\ \text{et } \alpha, \beta \neq 1.$$

– La famille des éléments dits paraboliques qui sont conjugués à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– La famille des éléments dits elliptiques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{Où, } 0 < \theta < 2\pi.$$

– La famille composée uniquement de L'identité :

Démonstration. — Soit $\gamma \in \text{SL}_3(\mathbb{R})$ on notera $\text{Sp}(\gamma)$ le spectre de γ , pour montrer ce lemme il suffit de montrer 3 points :

- Si $\text{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{R}$ et $\text{Sp}(\gamma) \not\subset \{1, -1\}$ alors on a $\text{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- Si $\text{Sp}(\gamma) \subset \{1, -1\}$ alors γ est diagonalisable ou parabolique.
- Si $\text{Sp}(\gamma) \not\subset \mathbb{R}$ alors l'unique valeur propre réelle de γ est 1.

Commençons par montrer le premier point. On considère une valeur propre λ de γ de valeur absolue maximale, comme $\text{Sp}(\gamma) \not\subset \{1, -1\}$ on a $|\lambda| > 1$. On note E la réunion des points et droites stables de γ . L'ensemble $\mathbb{P}^2 - E$ est un ouvert dense, par conséquent il existe un point $x \in (\mathbb{P}^2 - E) \cap \Omega$. Si $\lambda < 0$, le segment $[\gamma^{2n}(x), \gamma^{2n+1}(x)]$ converge vers une droite de \mathbb{P}^2 , ce qui est absurde car Ω est proprement convexe, donc $\lambda > 0$. En appliquant ce raisonnement à γ^{-1} on obtient que les valeurs propres de valeur absolue maximale et minimale sont positives et par conséquent, comme $\gamma \in \text{SL}_3(\mathbb{R})$, on a $\text{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Montrons à présent le deuxième point. Il s'agit de montrer que γ ne peut pas être conjugué à l'une des 2 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où, $u = 1$ ou $u = -1$. Supposons qu'il existe un tel $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$. Quitte à travailler avec γ^2 on peut supposer que $u = 1$. Alors, il existe une unique droite D composée de points fixes pour γ . Et, γ possède un unique point fixe $v \in D$ tel que l'action de γ sur toute droite D' passant par v est parabolique si $D' \neq D$. L'élément γ ne préserve donc aucun convexe proprement convexe de \mathbb{P}^2 .

Enfin, montrons le dernier point. Si le spectre de γ n'est pas réel alors γ est conjugué à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & r \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ 0 & r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{où, } 0 < \theta < 2\pi \text{ et } \theta \neq \pi.$$

L'élément γ possède un unique point fixe v et $\mathbb{P}^2 - \{v\}$ est une réunion d'ellipses disjointes permutées par γ . Par conséquent γ préserve un convexe proprement convexe si et seulement si les ellipses sont globalement préservées par γ , c'est à dire si et seulement si l'unique valeur propre réelle de γ est 1. □

2.3.3. Résultat élémentaire sur la dynamique. — Les résultats suivants ont déjà été présenté dans [Gold1] ou [Choi].

2.3.3.1. *Dynamique hyperbolique.* — Soit γ un élément hyperbolique de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^- \end{pmatrix} \quad \text{Où, } \lambda^+ > \lambda^0 > \lambda^- > 0 \\ \text{et } \lambda^+ \lambda^0 \lambda^- = 1.$$

On note :

- p_γ^+ le point propre de \mathbb{P}^2 associé à la valeur propre λ^+ .
- p_γ^0 le point propre de \mathbb{P}^2 associé à la valeur propre λ^0 .
- p_γ^- le point propre de \mathbb{P}^2 associé à la valeur propre λ^- .
- $D_\gamma^{+,-}$ la droite stable de \mathbb{P}^2 associée aux valeurs propres λ^+, λ^- .
- $D_\gamma^{+,0}$ la droite stable de \mathbb{P}^2 associée aux valeurs propres λ^+, λ^0 .
- $D_\gamma^{-,0}$ la droite stable de \mathbb{P}^2 associée aux valeurs propres λ^-, λ^0 .

Remarque 6. — Tout au long de ce texte, l'indice γ pour désigner un espace stable de γ sera omis si le contexte est clair.

Proposition 2.3.4. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément hyperbolique $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, alors, on a $p^+, p^- \in \partial\Omega$ et $p^0 \notin \Omega$.

Démonstration. — Tout d'abord il est clair que $p^+, p^0, p^- \notin \Omega$ puisque $\mathrm{Aut}(\Omega)$ agit proprement sur Ω . Ensuite pour tout $x \in \Omega$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n x = p^+$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} \gamma^n x = p^-$ donc $p^+, p^- \in \partial\Omega$. \square

On peut à présent définir l'axe d'un élément hyperbolique qui agit sur un ouvert proprement convexe.

Définition 2.3.5. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément hyperbolique $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, l'axe de γ que l'on notera $\mathrm{Axe}(\gamma)$ est le segment ouvert de la droite $(p^- p^+)$ qui est inclus dans $\overline{\Omega}$ et dont les extrémités sont p^- et p^+ .

Définition 2.3.6. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un élément hyperbolique γ de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. On suppose que $p^0 \in \partial\Omega$. Alors, on note $[p^+, p^0]$ (resp. $[p^-, p^0]$) le segment ouvert de la droite $(p^+ p^0)$ (resp. $(p^- p^0)$) inclus dans $\overline{\Omega}$. On les appelle les *axes secondaires* de γ .

Définition 2.3.7. — Soit $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ une courbe simple continue, on dit que c est une *courbe convexe* lorsque la composante connexe orientable de $\mathbb{P}^2 - c(\mathbb{S}^1)$ est un ouvert proprement convexe.

La figure 6 illustre la dynamique d'un élément hyperbolique.

Proposition 2.3.8. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément hyperbolique $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$.

- Si $p^0 \notin \overline{\Omega}$ et $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ alors
 - $\partial\Omega$ est C^1 en p^+ et en p^- .
 - $p^0 = T_{p^+} \partial\Omega \cap T_{p^-} \partial\Omega$.
- Si $p^0 \notin \overline{\Omega}$ et $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ alors
 - $\partial\Omega$ n'est pas C^1 en p^+ et en p^- .
 - Les demi-tangentes à $\partial\Omega$ en p^+ sont $(p^+ p^-)$ et $(p^+ p^0)$.
 - Les demi-tangentes à $\partial\Omega$ en p^- sont $(p^+ p^-)$ et $(p^- p^0)$.
- Si $p^0 \in \overline{\Omega}$ et $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ alors
 - $[p^+, p^0]$ et $[p^-, p^0] \subset \partial\Omega$.
 - $\partial\Omega$ est C^1 en p^+, p^- et $p^0 = T_{p^+} \partial\Omega \cap T_{p^-} \partial\Omega$.

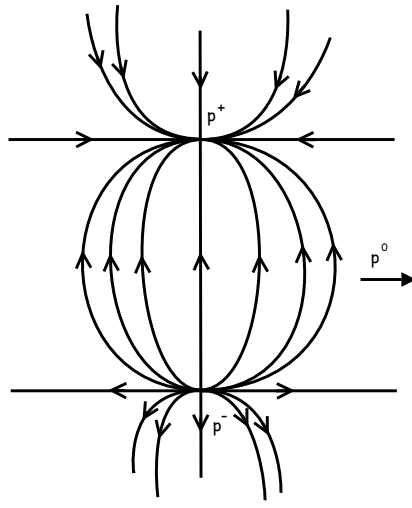


FIGURE 6. Dynamique d'un élément hyperbolique

- Si $p^0 \in \bar{\Omega}$ et $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ alors
 - $[p^+, p^0]$ et $[p^-, p^0] \subset \partial\Omega$.
 - Ω est un triangle dont les sommets sont p^+, p^0, p^- .

Démonstration. — Les points p^+, p^0 et p^- définissent un pavage de \mathbb{P}^2 en quatre triangles fermés. Soient T_1 et T_2 les deux triangles de cette partition tels que $T_1 \cap T_2 = \text{Axe}(\gamma)$, et $x_1 \in \overset{\circ}{T}_1$ et $x_2 \in \overset{\circ}{T}_2$, la courbe obtenue en concaténant la courbe $(\gamma^t x_1)_{t \in \mathbb{R}}$ et la courbe $(\gamma^{-s} x_2)_{s \in \mathbb{R}}$ et en ajoutant les points limites p^+ et p^- définit une courbe \mathcal{C} convexe analytique en dehors des points p^+ et p^- . \mathcal{C} est C^{1, α^+} en p^+ et C^{1, α^-} en p^- , où $\alpha^+ = \frac{\ln(\lambda^+) - \ln(\lambda^0)}{\ln(\lambda^0) - \ln(\lambda^-)} > 0$ et $\alpha^- = (\alpha^+)^{-1}$. On tire facilement de tout ceci les conclusions de la proposition. \square

2.3.3.2. *Dynamique planaire.* — Soit γ un élément planaire de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où, } \alpha, \beta > 0, \alpha^2 \beta = 1 \\ \text{et } \alpha, \beta \neq 1. \end{array}$$

On note :

- p_γ le point propre de \mathbb{P}^2 associé à la valeur propre β .
- D_γ la droite stable de \mathbb{P}^2 associée à la valeur propre α .

La dynamique des éléments planaires étant extrêmement simple, on obtient facilement la proposition suivante.

Proposition 2.3.9. — Soit Ω un ouvert proprement convexe et un élément planaire $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$, alors, Ω est un triangle dont l'un des sommets est p_γ et le côté de Ω opposé à p_γ est inclus dans la droite D_γ .

2.3.3.3. *Dynamique quasi-hyperbolique.* — Soit γ un élément quasi-hyperbolique de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Où, } \alpha, \beta > 0, \alpha^2 \beta = 1 \\ \text{et } \alpha, \beta \neq 1. \end{array}$$

On note :

- p_γ^1 le point propre de \mathbb{P}^2 associé à la valeur propre β .
- p_γ^2 le point propre de \mathbb{P}^2 associé à la valeur propre α .
- D_γ la droite stable de \mathbb{P}^2 associée à la valeur propre α .

On peut définir l'axe d'un élément quasi-hyperbolique qui agit sur un ouvert proprement convexe de la même façon que pour un élément hyperbolique. La même démonstration que dans le cas hyperbolique donne la proposition suivante :

Proposition 2.3.10. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément quasi-hyperbolique $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$, alors, on a $p^1, p^2 \in \partial\Omega$.

Définition 2.3.11. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément quasi-hyperbolique $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$, l'axe de γ que l'on notera $\text{Axe}(\gamma)$ est le segment ouvert de la droite $(p^1 p^2)$ qui est inclus dans $\overline{\Omega}$ et dont les extrémités sont p^1 et p^2 .

La figure 7 illustre la dynamique d'un élément quasi-hyperbolique

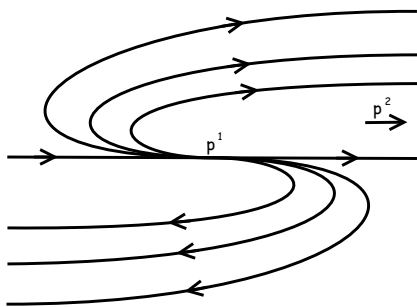


FIGURE 7. Dynamique d'un élément quasi-hyperbolique

Proposition 2.3.12. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément quasi-hyperbolique $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$. Alors,

- $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$.
- $\partial\Omega$ n'est pas C^1 en p^2 et les demi-tangentes à $\partial\Omega$ en p^2 sont $(p^1 p^2)$ et D .
- $\partial\Omega$ est C^1 en p^1 et $T_{p^1}\partial\Omega = (p^1 p^2)$.

Démonstration. — On procède comme pour l'étude de la dynamique d'un élément hyperbolique. La droite $(p^1 p^2)$ et la droite D définissent un pavage en deux parties de \mathbb{P}^2 . L'action de γ sur D est parabolique et l'action de γ sur $(p^1 p^2)$ est hyperbolique. Les points p^1 et p^2 définissent deux segments S_1 et S_2 de la droite $(p^1 p^2)$ dont les extrémités sont p^1 et p^2 . Soit $x \in \mathbb{P}^2 - (D \cup (p^1 p^2))$, la courbe $(\gamma^t x)_{t \in \mathbb{R}}$ a pour limite les points p^1 et p^2 lorsque t tend vers $\pm\infty$. Si on ajoute le segment S_1 ou bien S_2 à cette courbe on obtient une courbe \mathcal{C} convexe et analytique en dehors des points p^1 et p^2 . La courbe \mathcal{C} n'est pas C^1 en p^2 et admet comme demi-tangentes en p^2 , les droites D et $(p^1 p^2)$. La courbe \mathcal{C} est C^1 en p^1 et sa tangente est la droite $(p^1 p^2)$. Il faut aussi remarquer que si $y \in \mathbb{P}^2 - (D \cup (p^1 p^2))$ est dans l'autre composante connexe de $\mathbb{P}^2 - (D \cup (p^1 p^2))$, alors la courbe obtenue par le même procédé, mais en ajoutant l'autre segment est une courbe convexe analytique en dehors des points p^1 et p^2 . On tire facilement de ceci les conclusions de la proposition. \square

2.3.3.4. *Dynamique parabolique.* — Soit γ un élément parabolique de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note :

- p_γ l'unique point fixe de γ sur \mathbb{P}^2 .
- D_γ l'unique droite fixe de γ sur \mathbb{P}^2 .

La figure 8 illustre la dynamique d'un élément parabolique.

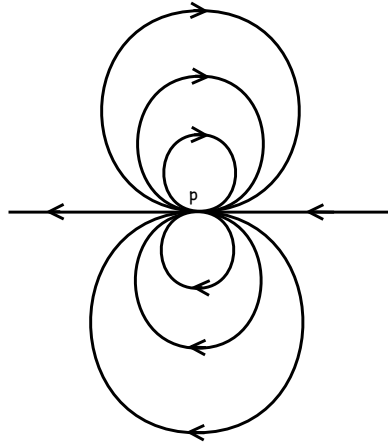


FIGURE 8. Dynamique d'un élément parabolique

Proposition 2.3.13. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément parabolique $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ alors

- $p \in \partial\Omega$.
- $\partial\Omega$ est C^1 en p .
- $T_p\partial\Omega = D$.
- p n'appartient pas à un segment non trivial du bord de Ω .

Démonstration. — On procède comme pour l'étude des éléments hyperbolique et quasi-hyperbolique. Soit $x \notin D$, la courbe \mathcal{C} obtenue en ajoutant le point p à la courbe $(\gamma^t x)_{t \in \mathbb{R}}$ définit une courbe convexe analytique (la courbe \mathcal{C} est en fait une ellipse). \square

2.3.3.5. *Dynamique elliptique.* — On ne se soucie pas des éléments elliptiques car le lemme de Selberg permet de s'en débarrasser à peu de frais. On rappelle ici un énoncé de celui-ci.

Lemme 2.3.14 (Selberg). — Tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est virtuellement sans torsion, c'est à dire possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion.

2.3.4. Calcul du centralisateur d'un élément de Γ dans $\mathrm{Aut}(\Omega)$. —

Lemme 2.3.15. — Soient γ, δ des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient que :

- les éléments γ, δ sont hyperboliques tels que $\{p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0\} = \{p_\delta^+, p_\delta^-, p_\delta^0\}$.
- Ou bien, les éléments γ, δ sont paraboliques tels que $p_\gamma = p_\delta$ et $D_\gamma = D_\delta$.
- Ou bien, les éléments γ et δ sont quasi-hyperboliques tels que $p_\gamma^1 = p_\delta^1$ et $p_\gamma^2 = p_\delta^2$.

Si le groupe $\langle \gamma, \delta \rangle$ est discret et préserve un ouvert proprement convexe qui n'est pas un triangle alors le groupe $\langle \gamma, \delta \rangle$ est cyclique infini.

Démonstration. — Dans les trois cas, un calcul simple montre que le commutateur $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$ de γ et δ est la matrice identité ou une matrice conjuguée à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition 2.3.3 montre que le dernier cas est impossible donc γ et δ commutent. Pour conclure, on peut considérer la composante connexe de l'adhérence de Zariski A du groupe $\langle \gamma, \delta \rangle$ qui est un groupe de Lie abélien. On a donc deux possibilités :

– A est isomorphe à \mathbb{R}^2 .

- Si les éléments γ, δ sont hyperboliques alors A est conjugué au groupe suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ et } \alpha\beta\gamma = 1 \right\}$$

- Si les éléments γ, δ sont quasi-hyperboliques alors A est conjugué au groupe suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \gamma > 0, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha^2\gamma = 1 \right\}$$

- Si les éléments γ, δ sont paraboliques alors A est conjugué au groupe suivant :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

– A est isomorphe à \mathbb{R}

Dans le second cas, comme le groupe $\langle \gamma, \delta \rangle$ est un sous-groupe discret de A , donc le groupe $\langle \gamma, \delta \rangle$ est cyclique. Pour conclure, il suffit donc de montrer que le premier cas est absurde. Pour cela, il suffit de remarquer que A agit simplement transitivement sur :

- Chacune des quatre composantes connexes de $\mathbb{P}^2 - (D_\gamma^{+,-} \cup D_\gamma^{+,0} \cup D_\gamma^{0,-})$ si γ est hyperbolique.
- Chacune des deux composantes connexes de $\mathbb{P}^2 - (D_\gamma \cup (p_\gamma^1 p_\gamma^2))$ si γ est quasi-hyperbolique.
- $\mathbb{P}^2 - D_\gamma$ si γ est parabolique.

On note X l'une de ces composantes connexes. Comme le groupe $\Gamma = \langle \gamma, \delta \rangle$ est Zariski-dense dans A , c'est un réseau cocompact de A , car A est un groupe de Lie abélien. L'enveloppe convexe de toute orbite d'un point de X est alors égale à X . Par conséquent, si γ et δ sont hyperboliques alors tout ouvert proprement convexe préservé par Γ est un triangle, ce qui est absurde. Et sinon Γ ne peut pas préserver d'ouvert proprement convexe, ce qui est absurde. \square

Définition 2.3.16. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et $\gamma, \delta \in \text{Aut}(\Omega)$, on dira que γ et δ ont les mêmes caractéristiques géométriques s'ils font partie d'un même groupe à un paramètre de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$. Ceci entraîne qu'ils ont les mêmes points fixes et droites fixes.

Proposition 2.3.17. — Soit Ω un ouvert proprement convexe qui n'est pas un triangle, le centralisateur d'un élément hyperbolique (resp. quasi-hyperbolique, resp. parabolique, resp. elliptique d'ordre différent de 2) γ dans $\text{Aut}(\Omega)$ est le sous-groupe des éléments hyperboliques (resp. quasi-hyperboliques, resp. paraboliques, resp. elliptiques) de $\text{Aut}(\Omega)$ qui ont les mêmes caractéristiques géométriques que γ .

Démonstration. — Soit $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$, rappelons que, comme Ω n'est pas un triangle, $\text{Aut}(\Omega)$ ne contient pas d'élément planaire. Raisonnons au cas par cas.

- Si γ est hyperbolique alors le centralisateur de γ dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dans la même base que γ , et le lemme 2.3.15 permet de conclure.
- Si γ est elliptique alors comme γ n'est pas d'ordre 2, le centralisateur de γ dans Γ est l'ensemble des éléments elliptiques de Γ qui ont les mêmes espaces stables. Or, l'ensemble des éléments elliptiques de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un plan P et une droite D avec $D \not\subset P$ est un groupe de Lie de dimension 1. C'est ce qu'il fallait démontrer.
- Si γ est quasi-hyperbolique alors un simple calcul montre que le centralisateur de γ dans $\text{Aut}(\Omega)$ est l'ensemble des éléments quasi-hyperboliques δ qui vérifient $p_\gamma^1 = p_\delta^1$ et $p_\gamma^2 = p_\delta^2$. Le lemme 2.3.15 conclut la démonstration.
- Si γ est parabolique alors un simple calcul montre que le centralisateur de γ dans $\text{Aut}(\Omega)$ est l'ensemble des éléments paraboliques qui vérifient $p_\gamma = p_\delta$ et $D_\gamma = D_\delta$. Par conséquent le lemme 2.3.15 conclut la démonstration une nouvelle fois.

□

2.4. Irréductibilité et adhérence de Zariski

2.4.1. Irréductibilité. — On reproduit pour la commodité du lecteur la démonstration de la proposition suivante dû à Goldman dans [Gold1].

Proposition 2.4.1 (Goldman). — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 , si Γ n'est pas virtuellement abélien alors Γ est irréductible.*

Démonstration. — Supposons que Γ n'est pas irréductible, nous allons montrer que Γ est virtuellement abélien. Alors le groupe Γ fixe un point ou une droite de \mathbb{P}^2 . Par dualité, on peut supposer que Γ fixe un point $p \in \mathbb{P}^2$. Il faut distinguer 2 cas.

- Si $p \in \Omega$ alors, comme Γ agit proprement sur Ω , Γ est fini.
- Si $p \notin \Omega$ alors Γ ne contient aucun élément elliptique, par conséquent Γ est sans torsion. À présent, le faisceau \mathcal{F} des droites concourantes en p est préservé par Γ . La projection de \mathcal{F} sur la surface $S = \Omega/\Gamma$ est un feuilletage de dimension 1 sans point singulier. La surface S est donc un cylindre ou un tore. Le groupe Γ est donc abélien.

□

Lemme 2.4.2. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 . Si Γ est virtuellement abélien et $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$ alors Ω est un triangle, Γ contient une copie de \mathbb{Z}^2 d'indice fini et Ω/Γ est compact.*

Démonstration. — On peut supposer que Γ est abélien. L'espace Ω/Γ est de volume fini par conséquent Γ contient un élément d'ordre infini. Pour faciliter la discussion, il est commode de distinguer le cas où Ω est un triangle, du cas où Ω n'est pas un triangle.

Dans le premier cas, le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ est un groupe de Lie abélien isomorphe à \mathbb{R}^2 qui agit simplement transitivement sur Ω . Par conséquent, $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$ si et seulement si Γ est un réseau de $\text{Aut}(\Omega)$. Il est clair que ceci entraîne que Ω/Γ est compact et que Γ contient une copie de \mathbb{Z}^2 d'indice fini.

Enfin il faut montrer que le second cas est absurde. On peut utiliser la proposition 2.3.17. Celle-ci montre que le centralisateur dans $\text{Aut}(\Omega)$ d'un élément hyperbolique (resp. parabolique, resp. quasi-hyperbolique) est un élément hyperbolique (resp. parabolique, resp. quasi-hyperbolique) qui possède les mêmes caractéristiques géométriques. Il est donc clair que Γ est isomorphe à \mathbb{Z} .

À présent, nous allons construire un domaine fondamental convexe F pour l'action de Γ sur Ω . Pour cela, on considère un générateur γ de Γ et on note un point fixe de $\gamma : p \in \partial\Omega$. On considère une droite D passant par p et tel que $\Omega \cap D \neq \emptyset$. On définit F comme l'adhérence d'une composante connexe de $\Omega - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n D$. L'ensemble F est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur Ω et il contient un voisinage d'un point du bord de Ω . Il est donc clair que F est de volume infini par le théorème 2.2.2. \square

Corollaire 2.4.3. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 . Si $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$ et Ω n'est pas un triangle alors Γ est irréductible.*

2.4.2. Adhérence de Zariski. —

Proposition 2.4.4. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$, si Γ est infini et irréductible alors l'adhérence de Zariski de Γ est :*

- $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ ou
- Un conjugué de $\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Tout sous-groupe Zariski-fermé et irréductible de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ est :

- $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ ou
- un conjugué de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ ou
- un conjugué de $\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, comme l'adhérence de Zariski de Γ est un sous-groupe de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ Zariski-fermé, irréductible et non borné. On obtient le résultat voulu. \square

Corollaire 2.4.5. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 , si $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$ et Ω n'est pas un triangle alors l'adhérence de Zariski de Γ est :*

- $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ ou
- un conjugué de $\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2.5. Existence d'un domaine fondamental convexe

L'existence d'un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action d'un sous-groupe discret de $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^n est dû à Jaejeong Lee ([**JL**]). Nous donnons ici une courte démonstration de ce résultat.

2.5.1. Fonction caractéristique d'un cône convexe. — Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin de nous placer dans un cadre vectoriel. Rappelons donc quelques définitions.

Définition 2.5.1. — Un cône de \mathbb{R}^{n+1} est une partie invariante par les homothéties linéaires de rapport positifs. Un cône convexe est dit *proprement convexe* s'il ne contient pas de droite affine.

Soit C un cône ouvert proprement convexe, on note $C^* = \{f \in (\mathbb{R}^{n+1})^* \mid \forall v \in \overline{C} - \{0\}, f(v) > 0\}$ le cône dual de C . C^* est un cône ouvert proprement convexe de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. Les points 1 à 5 du lemme suivant sont tirés d'un article de Vinberg [**Vin**].

Lemme 2.5.2. — Soit C un cône proprement convexe de \mathbb{R}^n , on considère l'application suivante appelée fonction caractéristique de C .

$$\begin{aligned} \varphi_C : C &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto \int_{C^*} e^{-f(M)} df \end{aligned}$$

1. La fonction φ_C est bien définie.
2. La fonction φ_C est analytique.
3. La fonction φ_C est une submersion.
4. Le hessien de φ_C est défini positif.
5. $\lim_{M \rightarrow M_\infty \in \partial C} \varphi_C(M) = +\infty$.
6. $\forall M \in C, \forall v \in \overline{C}, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi_C(M + \lambda v) = 0$.

Démonstration. —

1. Soit $M \in C$ fixé, on note $\Omega_M = \{f \in C^* \mid f(M) = 1\}$, E l'espace vectoriel engendré par Ω_M et Vol_E la mesure de Lebesgue canonique du sous-espace E de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. La propre convexité de C entraîne que Ω_M est une partie compacte de E , le calcul suivant conclut.

$$\int_{C^*} e^{-f(M)} df = \int_{\Omega_M} \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-\lambda} d\lambda \right) d\text{Vol}_E = \text{Vol}_E(\Omega_M) < +\infty.$$

2. C'est clair.
3. Le calcul de $d\varphi_C$ est immédiat et donne :

$$\begin{aligned} d\varphi_C : C &\rightarrow (\mathbb{R}^{n+1})^* \\ M &\mapsto \int_{C^*} f e^{-f(M)} df \end{aligned}$$

Donc φ_C est une submersion.

4. Le calcul de $d^2\varphi_C$ est lui aussi immédiat et donne :

$$\begin{aligned} d^2\varphi_C : C &\rightarrow \text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}) \\ M &\mapsto (u, v) \mapsto \int_{C^*} f(u)f(v)e^{-f(M)} df \end{aligned}$$

où $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ désigne l'espace des formes bilinéaires symétriques sur \mathbb{R}^{n+1} . Donc le hessien de φ_C est défini positif.

5. Soit $M_\infty \in \partial C$, il existe $f \in \partial C^*$ tel que $f(M_\infty) = 0$. On considère un compact d'intérieur non vide K inclus dans C^* et on définit le sous-ensemble $L = K + \{\lambda f\}_{\lambda > 0} \subset C^*$. Enfin, on note $c = \sup_{f \in K} \{f(M_\infty)\}$. Le calcul suivant permet de conclure.

$$\lim_{M \rightarrow M_\infty \in \partial C} \varphi_C(M) \geq \varphi_C(M_\infty) \geq \int_L e^{-f(M_\infty)} df \geq \int_L e^{-c} df = +\infty$$

La première inégalité est une conséquence du lemme de Fatou, les autres sont triviales.

6. Soient $M \in C$ et $v \in \overline{C}$, $\varphi_C(M + \lambda v) = \int_{C^*} e^{-\lambda f(v)} e^{-f(M)} df$, l'intégrand est dominé par $M \mapsto e^{-f(M)}$ qui est intégrable et il tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Le théorème de convergence dominée entraîne que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi_C(M + \lambda v) = 0$.

□

Définition 2.5.3. — Soit Σ une hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} , on dit que Σ est *localement convexe* (resp. *localement strictement convexe*) lorsque tout point de Σ possède un voisinage dans Σ qui est une partie du bord d'un convexe (resp. d'un convexe strictement convexe) de \mathbb{R}^{n+1} .

Remarque 7. — Soit Σ une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ localement strictement convexe, pour tout point p de Σ , et tout ouvert V de \mathbb{R}^{n+1} suffisamment petit contenant p , $V - \Sigma$ possède deux composantes connexes. La stricte convexité permet de définir la composante intérieure et

la composante extérieure. En particulier, pour tout point p de Σ , on peut donner un sens à la phrase "le vecteur $\overrightarrow{0p}$ pointe vers l'extérieur (resp. l'intérieur) de Σ ".

Définition 2.5.4. — Soit Σ une hypersurface localement strictement convexe de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, on dit que Σ est *radiale* si pour point p de Σ le vecteur $\overrightarrow{0p}$ pointe vers l'intérieur de Σ .

Remarque 8. — Toute hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ localement strictement convexe, radiale et propre est le bord d'un ouvert strictement convexe de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Définition 2.5.5. — Soient Σ une hypersurface localement strictement convexe, radiale et propre de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et C un cône ouvert convexe de \mathbb{R}^{n+1} , on dit que Σ est asymptote au cône C lorsque :

- Le cône C contient Σ .
- Toute demi-droite affine ouverte issue d'un point du bord ∂C de C et incluse dans C intersecte Σ .

Remarque 9. — On peut remarquer que la dernière condition est équivalente au fait que l'hyperplan affine tangent à Σ en un point x converge vers un hyperplan vectorel tangent à ∂C le bord de C , lorsque la droite engendrée par x converge dans \mathbb{P}^n vers une droite incluse dans ∂C .

Soit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ la projection naturelle, le lemme 2.5.2 donne le corollaire suivant.

Corollaire 2.5.6. — Soit C un cône ouvert proprement convexe de \mathbb{R}^{n+1} , pour tout $m > 0$, l'hypersurface $\varphi_C^{-1}(m)$ est une hypersurface fermée de \mathbb{R}^{n+1} , strictement convexe, radiale, propre et asymptote au cône C . De plus, toute application linéaire de déterminant 1 qui préserve C , préserve φ_C et donc aussi les hypersurfaces $(\varphi_C^{-1}(m))_{m \in \mathbb{R}_+^*}$.

2.5.2. Existence d'un domaine fondamental convexe. —

Définition 2.5.7. — Soient X un espace topologique et Γ un groupe qui agit sur X par homéomorphisme, on dit qu'une partie fermée $D \subset X$ est un *domaine fondamental pour l'action de Γ sur X* lorsque :

- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D = X$.
- $\forall \gamma \neq 1, \gamma \overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$.

De plus, un domaine fondamental D pour l'action de Γ sur X est dit *localement fini* lorsque :

- $\forall K$ compact de X , $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Nous allons construire un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur Ω . Pour cela on introduit les objets suivants. On note C l'une des deux composantes connexes de $\pi^{-1}(\Omega)$. On pose $\varphi = \varphi_C$ la fonction caractéristique de C . Le groupe Γ agit sur C en préservant les lignes de niveau de φ . On note $\Sigma = \varphi^{-1}(1)$, c'est une hypersurface préservée par Γ .

Enfin, on définit ψ_X pour $X \in \Sigma$ la forme linéaire sur \mathbb{R}^{n+1} qui donne l'équation de l'hyperplan vectoriel tangent à Σ en X et qui vérifie $\psi_X(X) = 1$. Autrement dit, on a $\psi_X = \frac{d\varphi_X}{d\varphi_X(X)}$.

Définition 2.5.8. — On reprend les notations introduites. Soit $X_0 \in \Sigma$ dont le stabilisateur dans Γ est trivial, le *domaine de Dirichlet-Lee pour l'action de Γ sur Σ basé en X_0* est, l'ensemble :

$$D_{X_0} = \{X \in \Sigma \mid \forall \gamma \neq 1, \psi_{X_0}(X) \leq \psi_{X_0}(\gamma X)\}$$

Si on note $x_0 = \pi(X_0)$, on a une définition naturelle du *domaine de Dirichlet-Lee pour l'action de Γ sur Ω basé en x_0* , il s'agit de l'ensemble $\Delta_{x_0} = \pi(D_{X_0})$.

Théorème 2.5.9 (Lee). — Soient Γ un sous-groupe discret de $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^n et un point x_0 dont le stabilisateur dans Γ est trivial. Le domaine de Dirichlet-Lee pour l'action de Γ sur Ω basé en x_0 est un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur Ω .

Pour montrer le théorème de Lee, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 2.5.10. — Pour tout $X_0, X \in \Sigma$, $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \psi_{X_0}(\gamma X) = +\infty$.

Démonstration. — Le lemme 2.5.2 montre que l'hypersurface localement strictement convexe, radiale et propre Σ est asymptote au cône proprement convexe C . Par conséquent, l'intersection du cône C avec tout demi-espace de la forme $\{\psi_{X_0} \leq c\}$, où $c \in \mathbb{R}$ est une partie bornée de \mathbb{R}^{n+1} . Mais, il est clair que le point γX tend vers l'infini lorsque γ tend vers l'infini. Ceci conclut la démonstration du lemme. \square

Pour le second lemme, il faut introduire plusieurs objets. Soit $X \in \Sigma$, on note T_X l'hyperplan affine tangent à Σ en X , il est donné par l'équation $\psi_X = 1$. Si $X \in \Sigma$ et $\gamma \in \Gamma$, alors on note μ_X^γ la forme linéaire $\psi_X - \psi_X \circ \gamma$. Et on note H_X^γ l'hyperplan vectoriel $\mu_X^\gamma = 0$, et si $x = \pi(X)$, on note M_x^γ son image dans \mathbb{P}^2 .

Nous aurons aussi besoin d'une définition.

Définition 2.5.11. — Soient C un ouvert convexe de \mathbb{R}^{n+1} et $X \in \partial C$, un *hyperplan d'appui* à C en X est un hyperplan affine de \mathbb{R}^{n+1} contenant le point X mais ne rencontrant pas C .

Soient Ω un ouvert convexe de \mathbb{P}^n et $x \in \partial\Omega$, un *hyperplan d'appui* à Ω en x est un hyperplan projectif de \mathbb{P}^n contenant le point x mais ne rencontrant pas Ω .

Lemme 2.5.12. — Soient $(\gamma_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_p = \infty$ et $x_0 \in \Omega$, on suppose que la suite $\gamma_p x_0$ converge vers un point $x_\infty \in \partial\Omega$. Alors, la suite des hyperplans $M_{x_0}^{\gamma_p}$ converge vers un hyperplan d'appui M_∞ à Ω en x_∞ .

Démonstration. — La figure 9 peut aider à suivre la démonstration.

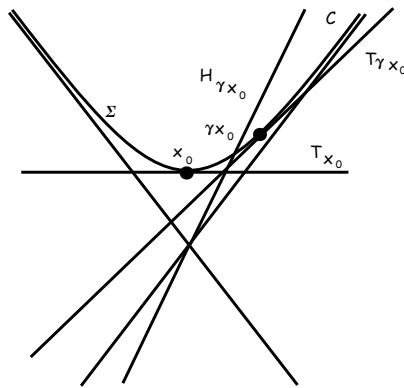


FIGURE 9. Démonstration du lemme 2.5.12

On note X_0 le point de Σ tel que $\pi(X_0) = x_0$. Tout d'abord, l'hypersurface Σ est asymptote au cône convexe C par conséquent les hyperplans affines $T_{\gamma_p X_0}$ convergent vers un hyperplan vectoriel T de \mathbb{R}^{n+1} qui est un hyperplan d'appui à C contenant la droite x_∞ . On veut montrer que la suite d'hyperplan vectoriel $\pi^{-1}(M_{x_0}^{\gamma_p}) = H_{X_0}^{\gamma_p}$ converge aussi vers T .

Commençons par remarquer que $\pi^{-1}(M_{x_0}^{\gamma p}) = H_{X_0}^{\gamma p} = \text{Vect}(T_{X_0} \cap T_{\gamma p X_0})$. En effet, l'intersection $T_{X_0} \cap T_{\gamma p X_0}$ est incluse dans $H_{X_0}^{\gamma p}$ et les hyperplans affines T_{X_0} et $T_{\gamma p X_0}$ ne sont pas parallèles donc $\dim(T_{X_0} \cap T_{\gamma p X_0}) = n - 1$.

Ainsi, la suite $(H_{X_0}^{\gamma p})_{p \in \mathbb{N}}$ a donc la même limite que la suite $(T_{\gamma p X_0})_{p \in \mathbb{N}}$ et puisque l'hyperplan affine $(T_{\gamma p X_0})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers l'hyperplan vectoriel T , on a donc démontré que la suite $(H_{X_0}^{\gamma p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers un hyperplan d'appui au cône convexe C . Ce qui conclut la démonstration. \square

On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.5.13. — *Pour tout $x_0 \in \Omega$, la famille des hyperplans $\{M_{x_0}^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ est localement finie dans Ω .*

Démonstration du théorème 2.5.9. — L'ensemble Δ_{x_0} est clairement une partie convexe de Ω puisqu'elle est obtenue comme intersection de demi-espaces de Ω . Pour montrer que c'est un domaine fondamental il suffit de montrer que $\inf_{\gamma \in \Gamma} \{\psi_{X_0}(\gamma X)\}$ est atteint pour tout $X \in \Sigma$. Ceci est une conséquence directe du lemme 2.5.10. La partie Δ_{x_0} est donc un domaine fondamental convexe, il est localement fini car la famille des hyperplans $M_{x_0}^\gamma$ est localement finie dans Ω (corollaire 2.5.13). \square

Proposition 2.5.14. — *Soient un espace localement compact X et un groupe discret Γ qui agit par homéomorphisme sur X . Supposons qu'il existe un domaine fondamental D localement fini pour l'action de Γ sur X . L'application naturelle $p : D \rightarrow X/\Gamma$ est propre.*

Démonstration. — On va montrer que l'image réciproque de toute suite convergente est une suite incluse dans un compact de X . Soient une suite de points $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X/\Gamma)^\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in X/\Gamma$ et une suite $t_n \in D$ telle que $p(t_n) = s_n$, il existe des éléments $\gamma_n \in \Gamma$ tels que la suite $(\gamma_n t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $t \in D$ qui vérifie $p(t) = s$. Par conséquent si on considère K un voisinage compact de t alors pour n assez grand on a $\gamma_n D \cap K \neq \emptyset$. L'ensemble D est un domaine fondamental localement fini, il n'y a donc qu'un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$ qui vérifient $\gamma D \cap K \neq \emptyset$. Par conséquent, la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est finie et la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans un compact de X . \square

2.5.3. Locale finitude à l'infini en dimension 2. —

Remarque 10. — Dans cette partie on se place en dimension 2. De plus, à partir de maintenant si A est une partie de Ω on désignera par \overline{A} son adhérence dans \mathbb{P}^2 et $\overline{A} \cap \Omega$ son adhérence dans Ω . De cette façon, on évitera toute ambiguïté.

Définition 2.5.15. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un élément γ de $\text{Aut}(\Omega)$, un *secteur* de γ est l'adhérence dans Ω de l'enveloppe convexe dans Ω de l'orbite d'une partie compacte non vide de Ω sous l'action de γ .

La forme des secteurs est très variable suivant la dynamique de l'élément γ . On étudie dans la proposition suivante de façon exhaustive la forme de ces derniers. La démonstration de cette proposition est une simple conséquence de l'étude de la dynamique des éléments de $\text{Aut}(\Omega)$ faite dans la partie 2.3.

La figure 10 illustre la proposition suivante.

Proposition 2.5.16. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et un élément γ de Γ .*

- *Si γ est hyperbolique et $Axe(\gamma) \subset \Omega$ alors tout secteur de γ est un fermé \mathcal{F} de Ω , γ -stable, convexe et tel que $\mathcal{F} \supset Axe(\gamma)$.*

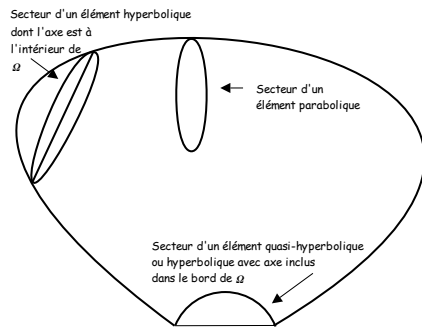


FIGURE 10. Forme des secteurs

- Si γ est hyperbolique, $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ et $p^0 \notin \partial\Omega$ alors tout secteur de γ est un fermé \mathcal{F} de Ω , γ -stable, convexe tel que $\overline{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega = \overline{\text{Axe}(\gamma)}$.
- Si γ est quasi-hyperbolique alors tout secteur de γ est un fermé \mathcal{F} de Ω , γ -stable, convexe et tel que $\overline{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega = \overline{\text{Axe}(\gamma)}$.
- Si γ est parabolique alors tout secteur de γ est un fermé \mathcal{F} de Ω , γ -stable, convexe et tel que $\overline{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega = \{p_\gamma\}$.
- Si γ est elliptique alors tout secteur de γ est un fermé de Ω , γ -stable et convexe.

La proposition suivante décrit la propriété essentielle des secteurs.

Proposition 2.5.17. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un élément γ de $\text{Aut}(\Omega)$, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ sont deux secteurs de γ alors $\langle \gamma \rangle$ agit cocompactement sur $\overline{\mathcal{F}} - \overline{\mathcal{F}'} \cap \Omega$.

Démonstration. — Une étude exhaustive en distinguant les cas :

- l'élément γ est hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \Omega$,
- l'élément γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$,
- l'élément γ est parabolique,
- l'élément γ est elliptique,

rend cette proposition claire. □

Proposition 2.5.18. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 , on se donne un domaine Dirichlet-Lee D pour l'action de Γ sur Ω . Soient $\gamma \in \Gamma$ et \mathcal{F} un secteur de γ , alors le domaine D ne rencontre qu'un nombre fini d'images $(\delta\mathcal{F})_{\delta \in \Gamma}$.

Nous allons avoir besoin d'un lemme préliminaire.

Lemme 2.5.19. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 , on se donne un domaine de Dirichlet-Lee D pour l'action de Γ sur Ω . On suppose que D n'est pas une partie compacte de Ω . Soit $\gamma \in \Gamma$, il existe un secteur \mathcal{F}_0 de γ tel qu'aucune image $(\delta D)_{\delta \in \Gamma}$ n'est incluse dans \mathcal{F}_0 .

Démonstration. — Commençons par remarquer que ce lemme est évident si l'intersection $\overline{D} \cap \partial\Omega$ possède au moins deux composantes connexes. Dans ce cas, il est clair qu'aucun secteur de γ contient un domaine fondamental convexe.

Ensuite, si un secteur \mathcal{F} contient un domaine fondamental non compact alors γ n'est ni elliptique, ni hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \Omega$.

On suppose à présent que $\overline{D} \cap \partial\Omega$ possède une seule composante connexe. Supposons aussi qu'il existe un secteur \mathcal{F} de γ qui contient le domaine fondamental D . Nous allons montrer qu'il existe un secteur \mathcal{F}_0 de γ inclus dans \mathcal{F} qui ne contient aucune image de D . Il faut traiter

les cas γ parabolique, γ quasi-hyperbolique, ou γ hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$. On ne fait que le cas γ parabolique. Les autres cas sont analogues.

Si un domaine fondamental convexe D est inclus dans la différence $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ de deux secteurs d'un élément γ alors la convexité de D entraîne que D est compact. Donc si un secteur \mathcal{F} de γ contient un domaine fondamental D alors tout secteur \mathcal{F}_0 de γ inclus dans \mathcal{F} rencontre le domaine fondamental D . Comme l'intersection de l'adhérence des secteurs de γ est le point fixe p_γ de l'élément parabolique γ , on a $\overline{D} \cap \partial\Omega = \{p_\gamma\}$.

Raisonnons par l'absurde. S'il n'existe pas de secteur \mathcal{F}_0 qui ne contient aucune image de D , alors il existe une suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de secteur de γ décroissante tel que l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \emptyset$ et une suite de domaine fondamental $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $D_n \subset \mathcal{F}_n$ et $D_n \not\subset \mathcal{F}_{n+1}$. Les domaines D_n (qui sont tous différents) vérifient tous que $\overline{D_n} \cap \partial\Omega$ est le point fixe de γ . On peut supposer quitte à appliquer une puissance de γ que le domaine D_{n+1} est "entre" le domaine D_n et le domaine γD_n . Par conséquent, la famille des droites donnés par les côtés des domaines $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas localement fini, ce qui contredit le lemme 2.5.13. \square

Démonstration de la proposition 2.5.18. — La proposition 2.5.14 montre que si le quotient Ω/Γ est compact alors tout domaine fondamental localement fini est compact. Par conséquent, la conclusion de la proposition 2.5.18 est une simple conséquence du fait que D est un domaine localement fini lorsque Ω/Γ est compact. On suppose donc que le quotient Ω/Γ n'est pas compact.

Il existe alors d'après le lemme 2.5.19 un secteur $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ qui ne contient aucun domaine fondamental. Le groupe $\langle \gamma \rangle$ agit cocompactement sur $V = (\overline{\mathcal{F} - \mathcal{F}_0}) \cap \Omega$. On note E un domaine fondamental compact pour cette action.

Si un élément $\delta \in \Gamma$ est tel que $\delta^{-1}D \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ alors il vérifie $\delta^{-1}D \cap V \neq \emptyset$, car sinon on aurait $\delta^{-1}D \subset \mathcal{F}_0$ et ceci contredit notre hypothèse sur \mathcal{F}_0 .

Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma^n \delta^{-1}D \cap E \neq \emptyset$. Or, D est un domaine fondamental localement fini donc l'ensemble $\{\delta \in \Gamma \mid \delta^{-1}D \cap E \neq \emptyset\}$ est fini. Notons $\{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ ces éléments.

On vient donc de montrer que si un élément $\delta \in \Gamma$ est tel que $D \cap \delta\mathcal{F} \neq \emptyset$ alors il existe $i = 1 \dots r$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\delta = \delta_i \gamma^n$. Or, le secteur \mathcal{F} est γ -invariant par conséquent D rencontre un nombre fini d'image $(\delta\mathcal{F})_{\delta \in \Gamma}$. \square

On rappelle la définition d'élément primitif.

Définition 2.5.20. — Soient Γ un groupe et $\gamma \in \Gamma$, on dit que γ est *primitif* lorsque l'existence d'un élément $\delta \in \Gamma$ et d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = \delta^n$ entraîne $\delta = \gamma$ et $n = 1$ ou $\delta = \gamma^{-1}$ et $n = -1$.

Les lemmes suivants seront cruciaux dans la partie suivante pour montrer le lemme 2.6.11.

Lemme 2.5.21. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 , pour tout élément primitif γ de Γ et pour tout secteur \mathcal{F} de γ , il existe un nombre fini d'éléments h_1, \dots, h_N de Γ tel que $\{\delta \in \Gamma \mid \delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\} \subset \{\delta \in \Gamma \mid \exists n, p \in \mathbb{Z}, \exists i = 1, \dots, N, \delta = \gamma^n h_i \gamma^p\}$.

Démonstration. — On se donne un domaine de Dirichlet-Lee D pour l'action de Γ sur Ω (théorème 2.5.9) qui rencontre \mathcal{F} . La proposition 2.5.18 montre que D rencontre un nombre fini d'image de \mathcal{F} . On peut les écrire $g_1\mathcal{F}, \dots, g_r\mathcal{F}$, où $g_i \in \Gamma$ pour $i = 1 \dots r$ et $g_1 = Id$.

Comme γ est primitif, on a $\mathcal{F} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}, i=1 \dots r} \gamma^n g_i^{-1} D$. Par conséquent, si $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ et un $i_0 = 1 \dots r$ tel que $g_{i_0} \gamma^{n_0} \delta\mathcal{F} \cap D \neq \emptyset$, par conséquent il existe $n_1 \in \mathbb{Z}$

et $i_1 = 1 \dots r$ tel que $g_{i_0} \gamma^{n_0} \delta = g_{i_1} \gamma^{n_1}$. Autrement dit, $\delta = \gamma^{-n_0} g_{i_0}^{-1} g_{i_1} \gamma^{n_1}$, c'est ce qu'il fallait montrer. \square

Lemme 2.5.22. — Soient Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^2 , un élément $\gamma \in \Gamma$ et \mathcal{F} un secteur de γ , pour tout élément δ de Γ on a l'alternative suivante :

- $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ est compact ou bien
- $\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}$.

Démonstration. — Une étude exhaustive en distinguant les différentes dynamiques de l'élément γ rend ce lemme clair. \square

2.6. Surface projective convexe d'aire finie

Tout au long de ce texte, une surface est une variété connexe orientable de dimension 2, avec éventuellement des bords. Si S est une surface on notera son bord ∂S . On note \mathbb{E} un demi-espace affine fermé de \mathbb{P}^2 .

2.6.1. Structure projective. —

Définition 2.6.1. — Soit S une surface, une *structure projective réelle à bord géodésique* est la donnée d'un atlas maximal $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}$ sur S tel que les fonctions de transitions $\varphi_{\mathcal{U}} \circ \varphi_{\mathcal{V}}^{-1}$ sont des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, pour tous ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} de l'atlas de S tel que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Remarque 11. — Par définition d'un structure projective réelle à bord géodésique sur une surface S , on a pour tout ouvert \mathcal{U} de l'atlas tel que $\mathcal{U} \cap \partial S \neq \emptyset$ et pour toute composante connexe B de $\mathcal{U} \cap \partial S$, $\varphi_{\mathcal{U}}(B)$ est inclus dans une droite de \mathbb{P}^2 .

Définition 2.6.2. — Un *isomorphisme* entre deux surfaces munies de structures projectives à bords géodésiques est un difféomorphisme qui, lu dans les cartes, est donné par des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Définition 2.6.3. — Soit S une surface, une *structure projective à bord géodésique marquée sur S* est la donnée d'un difféomorphisme $\varphi : S \rightarrow S'$ où S' est une surface projective à bord géodésique.

Deux structures projectives à bord géodésiques marquées sur S , $\varphi_1 : S \rightarrow S_1$ et $\varphi_2 : S \rightarrow S_2$ sont dites *isotopiques* lorsqu'il existe un isomorphisme $h : S_1 \rightarrow S_2$ tel que $\varphi_2^{-1} \circ h \circ \varphi_1 : S \rightarrow S$ est un difféomorphisme isotope à l'identité. On note $\mathbb{P}(S)$ l'ensemble des structures projectives à bord géodésique marquées sur S modulo isotopie.

A tout élément de $\mathbb{P}(S)$, on peut associer deux objets :

- Un difféomorphisme local $dev : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$ appelée *développante*, où \tilde{S} est le revêtement universel de S .
- Une représentation $hol : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ appelée *holonomie*.

De plus, la développante est $\pi_1(S)$ -équivariante, c'est à dire que $\forall x \in \tilde{S}, \forall \gamma \in \pi_1(S)$ on a $dev(\gamma x) = hol(\gamma)dev(x)$. Enfin, le couple (dev, hol) est unique au sens où si (dev', hol') est une autre telle paire alors il existe un $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ tel que $dev' = g \circ dev$ et $hol' = g \circ hol \circ g^{-1}$.

On pourra consulter l'article [Gold1] pour avoir plus de détails sur le couple développante et holonomie.

Remarque 12. — À partir de maintenant toutes les structures projectives seront implicitement supposées marquées et à bord géodésiques.

2.6.2. Structure projective proprement convexe. —

Définition 2.6.4. — Soit S une surface, une structure projective est dite *convexe* (resp. *proprement convexe*) sur S lorsque la développante est un difféomorphisme sur une partie convexe (resp. *proprement convexe*) de \mathbb{P}^2 . On note $\beta(S)$ l'ensemble des structures projectives proprement convexes sur S modulo isotopie.

2.6.3. Structure projective proprement convexe d'aire finie. — Soit S une surface projective proprement convexe, l'application développante permet d'identifier le revêtement universel \tilde{S} de S à une partie \mathcal{C} proprement convexe de \mathbb{P}^2 . On notera $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ le revêtement universel de S . On a construit au paragraphe 3.3 sur l'intérieur $\Omega = \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} une distance d_Ω et une mesure μ_Ω qui sont invariantes sous l'action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de S sur Ω . Par conséquent, il existe une unique distance d_S et une unique mesure μ_S sur $\overset{\circ}{S}$ l'intérieur de S telles que :

- Pour tout $x, y \in \overset{\circ}{S}$, $d_S(x, y) = \inf_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{E}} d_\Omega(\tilde{x}, \tilde{y})$, où $\mathcal{E} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega^2 \mid \pi(\tilde{x}) = x \text{ et } \pi(\tilde{y}) = y\}$
- $\forall \mathcal{A}$ borélien de Ω , si $\pi : \Omega \rightarrow \overset{\circ}{S}$ restreinte à \mathcal{A} est injective alors $\mu_S(\pi(\mathcal{A})) = \mu_\Omega(\mathcal{A})$.

Définition 2.6.5. — Soit S une surface, on dit qu'une structure projective proprement convexe sur S est de *volume fini* lorsque pour tout fermé F de l'intérieur $\overset{\circ}{S}$ de S , on a $\mu_S(F) < \infty$. On note $\beta_f(S)$ l'ensemble des structures projectives marquées proprement convexes de volume fini sur S modulo isotopie.

2.6.4. La théorie des bouts d'un espace topologique. — On rappelle quelques définitions de la théorie des bouts d'un espace topologique.

Définition 2.6.6. — Soit X un espace topologique localement compact, une *base de voisinages d'un bout de X* est une suite décroissante d'ouverts connexes de X qui sort de tout compact. Deux bases de voisinages d'un bout de X , $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont dites *équivalentes* si pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, il existe $N, M \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \subset V_n$ et $V_M \subset U_m$. Les classes d'équivalence de base de voisinages de bout de X forment un ensemble appelé *l'espace des bouts de X* et dont les éléments sont *les bouts de X* .

Remarque 13. — Cet ensemble possède une topologie naturelle. On la construit de la façon suivante. Pour tout compact K de X on définit \mathcal{U}_K l'ensemble des bouts de X qui sont ultimement inclus dans $X - K$. Les composantes connexes des \mathcal{U}_K forment une base de la topologie de l'espace des bouts de X .

2.6.5. Les lacets d'holonomie parabolique ou quasi-hyperbolique sont élémentaires. — Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 2.6.7. — *Soit S une surface projective proprement convexe dont le groupe fondamental n'est pas virtuellement abélien alors aucun lacet tracé sur S ne possède une holonomie planaire.*

Démonstration. — La dynamique des éléments plans montre que si l'holonomie d'un élément de $\pi_1(S)$ est planaire alors Ω est un triangle (proposition 2.3.9). Par conséquent, le groupe $\text{Aut}(\Omega)$ est isomorphe à \mathbb{R}^2 et donc abélien. Il vient que $\pi_1(S)$ est virtuellement abélien, ce qui contredit l'hypothèse sur la topologie de S . □

Définition 2.6.8. — Soit S une surface, on dit qu'un lacet tracé sur S , $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ est *simple* s'il est injectif. On dit qu'un lacet simple c tracé sur S est *élémentaire* si $S - c$ possède deux composantes connexes et l'une d'elles est un cylindre. Lorsque S n'est pas un cylindre, on appellera l'adhérence de la composante homéomorphe à un cylindre *la composante élémentaire associée à c* .

Remarque 14. — Soient S une surface et c un lacet élémentaire tracé sur S alors on a l'alternative suivante :

- La composante élémentaire associée à c est un cylindre avec un bord. On dira alors que c fait le tour d'un bout.
- La composante élémentaire associée à c est un cylindre avec deux bords. Dans ce cas c est librement homotope à une composante connexe du bord de S .

Les propositions suivantes sont très classiques en géométrie hyperbolique. On ne montre que la première.

Proposition 2.6.9. — Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. On note $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S , où \mathcal{C} est une partie proprement convexe de \mathbb{P}^2 . L'intérieur de \mathcal{C} sera noté Ω . Alors, tout lacet simple tracé sur S dont l'holonomie est hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ est librement homotope à une géodésique simple.

Démonstration. — On note Γ l'image du groupe fondamental de S dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$. On choisit $\gamma \in \Gamma$ qui représente $\text{Hol}(c)$ et on note \tilde{c} le relevé correspondant de c . Il est clair que l'on a les convergences suivantes $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{c}(t) = p_\gamma^+$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{c}(t) = p_\gamma^-$. Le chemin \tilde{c} est donc homotope via une homotopie γ -équivariante à une et une seule géodésique de $\Omega : \text{Axe}(\gamma)$. La projection de cette homotopie sur la surface S donne le résultat souhaité. \square

La même démonstration que dans le cas hyperbolique donne la proposition suivante :

Proposition 2.6.10. — Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. On note $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S , où \mathcal{C} est une partie proprement convexe de \mathbb{P}^2 . L'intérieur de \mathcal{C} sera noté Ω . Soient c_1 et c_2 sont deux lacets simples tracés sur S dont l'holonomie est hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \Omega$, on note λ_1 (resp. λ_2) l'unique géodésique homotope à c_1 (resp. c_2). Si c_1 est simple alors λ_1 est simple. Si les lacets c_1 et c_2 ne s'intersectent pas alors les géodésiques λ_1 et λ_2 ne s'intersectent pas.

Lemme 2.6.11. — Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Soit c un lacet simple tracé sur S , il existe un secteur \mathcal{F} de $\text{Hol}(c)$ tel que l'application naturelle de $\mathcal{F}/\langle \text{Hol}(c) \rangle \rightarrow S$ est une injection.

Démonstration. — On pose $\gamma = \text{Hol}(c)$. Le lemme 2.5.21 montre qu'il existe des éléments g_j pour $j = 1 \dots N$ tel que si $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $j_0 = 1 \dots N$ tel que $\delta\mathcal{F} = \gamma^n g_{j_0} \mathcal{F}$.

De plus, le lemme 2.5.22 montre que si $g_j \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ ($j = 1 \dots N$) alors cette intersection est ou bien \mathcal{F} ou une partie compacte de Ω . Il faut à présent distinguer les deux cas suivants :

- Si γ est hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ ou quasi-hyperbolique ou parabolique alors comme les g_j sont en nombre fini, on peut trouver un secteur \mathcal{F}_0 inclus dans \mathcal{F} tel que $g_j \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ si et seulement si $g_j \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$.
- Si γ est hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ alors on peut supposer d'après le lemme 2.6.9 que c est la géodésique simple donné par l'axe de γ . Le secteur \mathcal{F} est un voisinage de l'axe de γ . De plus, comme c est une géodésique simple le lemme 2.6.10 montre que les relevés de

c ne s'intersectent pas. Par conséquent, comme les g_j sont en nombre fini, on peut trouver un secteur \mathcal{F}_0 inclus dans \mathcal{F} tel que $g_j\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ si et seulement si $g_j\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$.

Dans tous les cas, on obtient que pour tout $\delta \in \Gamma$, $\delta\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ si et seulement si $\delta \in \langle \gamma \rangle$. \square

Proposition 2.6.12. — *Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Soit c un lacet simple tracé sur S , on note $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S . On note \mathring{S} l'intérieur de S .*

- *Si l'holonomie de c est parabolique alors c fait le tour d'un bout B et l'image de tout secteur de $\text{Hol}(c)$ dans S contient un voisinage du bout B .*
- *Si l'holonomie de c est quasi-hyperbolique alors c est élémentaire et l'image de tout secteur de $\text{Hol}(c)$ dans S contient un voisinage du bout correspondant dans la surface \mathring{S} .*
- *Si l'holonomie de c est hyperbolique et $\text{Axe}(\text{Hol}(c)) \subset \partial\mathcal{C}$ alors c est élémentaire et l'image de tout secteur de $\text{Hol}(c)$ dans S contient un voisinage du bout correspondant dans la surface \mathring{S} .*
- *Si l'holonomie de c est hyperbolique, $\text{Axe}(\text{Hol}(c)) \subset \mathring{\mathcal{C}}$ et $p_{\text{Hol}(c)}^0 \in \partial\mathcal{C}$ alors c est élémentaire et l'image dans S de la réunion de n'importe quel secteur de $\text{Hol}(c)$ et de l'unique triangle inclus dans \mathcal{C} défini par les points fixes de $\text{Hol}(c)$ contient un voisinage du bout correspondant dans la surface \mathring{S} .*

En particulier, si c n'est pas élémentaire alors l'holonomie de c est hyperbolique, $\text{Axe}(\text{Hol}(c)) \subset \mathring{\mathcal{C}}$ et $p_{\text{Hol}(c)}^0 \notin \partial\mathcal{C}$.

Démonstration. — On note Ω l'intérieur de \mathcal{C} . On considère $\gamma = \text{Hol}(c)$ et on note \mathcal{F} un secteur de γ tel que l'application naturelle de $\mathcal{F}/\langle \gamma \rangle \rightarrow S$ est une injection. L'existence d'un tel secteur est assuré par le lemme 2.6.11.

Commençons par le cas γ est parabolique. Construisons un domaine fondamental pour l'action de γ sur \mathcal{F} . On considère une droite L passant par p_γ . L'adhérence D' dans Ω de n'importe quelle composante connexe de $\mathcal{F} - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n L$ est un domaine fondamental pour l'action de γ sur \mathcal{F} . Le domaine fondamental D' est l'intersection d'un triangle fermé de \mathbb{P}^2 et de \mathcal{F} . De plus son adhérence dans \mathbb{P}^2 contient le point p_γ . L'image de $\mathcal{F}/\langle \gamma \rangle$ dans S est donc un cylindre qui contient un voisinage d'un bout B de la surface S et le lacet c fait le tour du bout B .

Ensuite, on peut traiter en même temps les cas, où γ est quasi-hyperbolique, ou hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\mathcal{C}$. On procède de la même façon. Construisons un domaine fondamental pour l'action de γ sur \mathcal{F} . On note p^+ le point attractif de γ et p^- le point répulsif de γ . L'axe de γ est le segment d'extrémité p^+ et p^- inclus dans $\partial\Omega$. On considère une droite L qui intersecte $\text{Axe}(\gamma)$ sur son intérieur. L'action de γ sur $\partial\Omega$ vérifie que pour tout $x \in \partial\Omega$ différent de p^+, p^- , le point γx appartient à la composante connexe V de $\partial\Omega - \{p^+, p^-\}$ qui contient x . Et, le point γx appartient à la composante connexe de $V - \{x\}$ qui contient p^+ dans son adhérence. Par conséquent, les droites L et γL ne s'intersectent pas dans Ω . Il vient donc que l'adhérence D' dans Ω de n'importe quelle composante connexe de $\mathcal{F} - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n L$ est un domaine fondamental pour l'action de γ sur \mathcal{F} . Le domaine fondamental D' contient un sous-segment non trivial de $\text{Axe}(\gamma)$. L'image de $\mathcal{F}/\langle \gamma \rangle$ dans S est donc un cylindre qui contient un voisinage d'un bout B de la surface \mathring{S} et le lacet c est fait le tour de ce bout.

Enfin, il faut traiter le cas où γ est hyperbolique avec $\text{Axe}(\gamma) \subset \mathring{\mathcal{C}}$ et $p_\gamma^0 \in \partial\mathcal{C}$. La difficulté de ce cas vient du fait que cette fois-ci les secteurs de γ "ne vont pas jusqu'à l'infini". On considère la partie $\tilde{\mathcal{F}}$ de Ω obtenue en ajoutant à \mathcal{F} le triangle ouvert inclus dans Ω défini par les points $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$. Pour appliquer le même raisonnement que précédemment il faut montrer que l'application naturelle de $\tilde{\mathcal{F}}/\langle \gamma \rangle$ vers S est injective. Comme \mathcal{F} est un voisinage de $\text{Axe}(\gamma)$

et que pour tout élément $\delta \in \Gamma$ si $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ alors $\delta \in \langle \gamma \rangle$. Il est clair que $\tilde{\mathcal{F}}$ vérifie aussi que pour tout élément $\delta \in \Gamma$ si $\delta\tilde{\mathcal{F}} \cap \tilde{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ alors $\delta \in \langle \gamma \rangle$. Il reste à construire un domaine fondamental pour l'action de γ sur $\tilde{\mathcal{F}}$. Pour cela on considère une droite L passant par p_γ^0 . L'adhérence D' dans Ω de n'importe quelle composante connexe de $\tilde{\mathcal{F}} - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n L$ est un domaine fondamental pour l'action de γ sur \mathcal{F} . Le point p_γ^0 est adhérent au domaine fondamental D' . L'image de $\mathcal{F}/\langle \gamma \rangle$ dans S est donc un cylindre qui contient un voisinage d'un bout B de la surface \hat{S} et le lacet c fait le tour de ce bout. \square

2.6.6. Le groupe fondamental d'une surface de volume fini est de type fini. —

2.6.6.1. *Un peu de topologie des surfaces.* — On note P la surface à bord obtenue en retirant 3 disques ouverts disjoints à la sphère euclidienne \mathbb{S}^2 .

Définition 2.6.13. — Soit S une surface, un *pantalon de S* est une sous-surface à bord de S homéomorphe à P . Un *pantalon non élémentaire de S* est un pantalon de S dont le bord définit 3 lacets non élémentaires.

Richards a classifié les surfaces en construisant des invariants à l'aide de l'espace des bouts de celles-ci ([Rich]). Il résulte de cette classification la proposition suivante.

Proposition 2.6.14. — *Soit S une surface, on a l'alternative suivante :*

- *L'espace des bouts de S est infini.*
- *L'espace des bouts de S est fini mais S contient une infinité de pantalons non élémentaires deux à deux disjoints.*
- *La surface S est de type fini.*

Définition 2.6.15. — Soit S une surface projective proprement convexe, un *pantalon de S à bord géodésique* est un pantalon P de S tel que le bord de P est défini par trois géodésiques non élémentaires de S .

Les propositions 2.6.9, 2.6.10 et la proposition 2.6.12 donne la proposition suivante :

Proposition 2.6.16. — *Soit S une surface projective proprement convexe, tout pantalon non élémentaire de S est homotope à un unique pantalon à bord géodésique. Si P_1 et P_2 sont deux pantalons non élémentaires de S disjoints alors les uniques pantalons homotopes à P_1 et P_2 sont aussi disjoints.*

2.6.6.2. *Minoration de l'aire d'un pantalon projectif proprement convexe.* — Pour montrer que l'aire de tout pantalon à bord géodésique est minorée par une constante universelle, nous allons chercher des triangles idéaux, pour cela on utilise des "chemins en spirales".

Proposition 2.6.17. — *Il existe une constante universelle $K_{\mathbb{P}^2} > 0$ telle que pour toute surface S projective proprement convexe et tout pantalon non élémentaire P à bord géodésique inclus dans S , on ait : $\mu_S(P) \geq K_{\mathbb{P}^2} > 0$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que tout pantalon est la réunion de deux triangles idéaux. Pour cela on utilise une construction de Goldman ([Gold1]). On part de la figure 11.

Commençons par donner une définition précise de la figure 11 d'un point de vue topologique via la géométrie hyperbolique. On munit la surface S d'une structure hyperbolique. On note $\lambda_1^{\mathbb{H}}$, $\lambda_2^{\mathbb{H}}$ et $\lambda_3^{\mathbb{H}}$ les géodésiques données par le bord de P , et orienté comme sur la figure 11. Le chemin l_i est l'unique géodésique qui s'accumule sur les géodésiques $\lambda_{i+1}^{\mathbb{H}}$ et $\lambda_{i+2}^{\mathbb{H}}$ (Les indices sont calculés modulo 3).

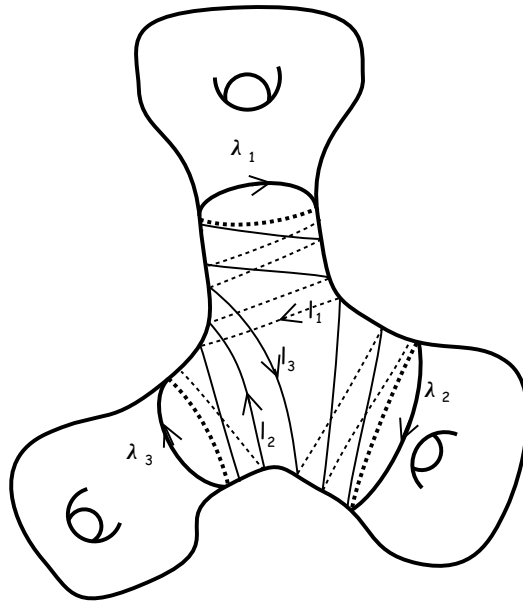


FIGURE 11. Démonstration de la proposition 2.6.17

Nous allons montrer que dans le cas projectif la situation est analogue. On note \mathcal{C} la partie proprement convexe donné par la développante de S et $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ le revêtement universel associé. On note λ_1 , λ_2 et λ_3 les géodésiques données par le bord de P , et orienté comme sur la figure 11.

Les chemins l_1 , l_2 et l_3 se relèvent en des chemins simples \tilde{l}_1 , \tilde{l}_2 et \tilde{l}_3 tracé sur le revêtement universel \tilde{P} de P . Chacun des chemins \tilde{l}_i vérifient que $\tilde{P} - \tilde{l}_i$ possède deux composantes connexes. Ces chemins et leurs images par le groupe fondamental Γ de P définissent une triangulation de \tilde{P} (triangulation de Faray). Deux triangles fermés adjacents de cette triangulation définissent un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \tilde{P} .

Nous allons montrer que chacun de ces chemins peuvent être supposés géodésiques. On note γ_1 (resp. γ_2 resp. γ_3) les représentants de l'holonomie des lacets λ_1 (resp. λ_2 resp. λ_3) donnés par le choix du point base x_0 sur P . Ils vérifient la relation $\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = 1$.

On note $\tilde{\lambda}_1$ (resp. $\tilde{\lambda}_2$, resp. $\tilde{\lambda}_3$) un relevé de λ_1 , (resp. λ_2 resp. λ_3). On peut supposer que $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ et $\tilde{\lambda}_3$ bordent la même composante connexe \mathcal{U} de $\pi^{-1}(P)$. La partie \mathcal{U} de \mathcal{C} est convexe puisque c'est l'intersection de l'intérieur Ω de \mathcal{C} et d'une infinité de demi-espaces définis par les relevés de λ_1 , λ_2 et λ_3 qui bordent \mathcal{U} . Ainsi, le convexe \mathcal{U} est le revêtement universel du pantalon P .

Comme P est un pantalon non élémentaire, la proposition 2.6.12 montre que γ_1 , γ_2 et γ_3 sont hyperboliques et leurs axes principaux sont inclus dans Ω . Notre choix d'orientation fait que les points $p_{\gamma_1}^-, p_{\gamma_1}^+, p_{\gamma_2}^-, p_{\gamma_2}^+, p_{\gamma_3}^-, p_{\gamma_3}^+ \in \partial\Omega$ sont sur $\partial\Omega$ dans cet ordre. Les axes de γ_1 , γ_2 et γ_3 sont inclus dans le bord de \mathcal{U} . Tout relevé du chemin l_3 converge en $+\infty$ vers le point $p_{\gamma_1}^-$ et en $-\infty$ vers le point $p_{\gamma_2}^-$. On peut donc supposer que le chemin \tilde{l}_3 est le segment ouvert d'extrémité $p_{\gamma_1}^-$ et $p_{\gamma_2}^-$ qui est inclus dans \mathcal{U} . De la même façon, on peut supposer que \tilde{l}_1 est le segment ouvert d'extrémité $p_{\gamma_2}^-$ et $p_{\gamma_3}^-$ inclus dans \mathcal{U} et \tilde{l}_2 le segment ouvert d'extrémité $p_{\gamma_3}^-$ et $p_{\gamma_1}^-$ inclus dans \mathcal{U} . La triangulation topologique de \tilde{P} peut donc être réalisée dans \mathcal{U} par des géodésiques.

On note T le triangle idéal fermé dans Ω de sommets $p_{\gamma_1}^-, p_{\gamma_2}^-, p_{\gamma_3}^-$ et $T' = \gamma_1 T$. Ces deux triangles sont inclus dans \mathcal{U} car \mathcal{U} est convexe. Le groupe fondamental de P est le groupe Γ'

engendré par γ_1, γ_2 et γ_3 . Par conséquent, $T \cup T'$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ' sur l'intérieur de \mathcal{U} . La proposition 2.2.13 conclut notre démonstration. \square

On obtient donc la proposition suivante :

Théorème 2.6.18. — *Tout surface S projective proprement convexe de volume fini est de type fini (i.e le groupe fondamental $\pi_1(S)$ de S est de type fini).*

Démonstration. — L'application développante permet d'identifier S au quotient d'une partie proprement convexe \mathcal{C} par un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Commençons par faire le cas où S est une surface sans bord. Le théorème 2.5.9 montre que l'action de Γ sur l'ouvert $\Omega = \mathcal{C}$ admet un domaine fondamental D convexe et localement fini. Si $\overline{D} \cap \partial\Omega$ admet un nombre infini de composante connexe, D contient une infinité de triangles idéaux disjoints. La proposition 2.2.13 montre que l'aire de chacun de ces triangles est minorée par une constante strictement positive. La surface S est donc de volume infini. Par conséquent, $\overline{D} \cap \partial\Omega$ admet un nombre fini de composantes connexes et la surface S possède donc un nombre fini de bouts. La proposition 2.6.14 montre qu'il suffit donc de montrer que la surface S ne peut contenir une infinité de pantalons non élémentaires disjoints. Les propositions 2.6.16 et 2.6.17 montre que S contient un nombre fini de pantalons non élémentaires.

Supposons à présent que S est une surface à bord. Le théorème 2.5.9 montre que l'action de Γ sur l'intérieur Ω de \mathcal{C} admet un domaine fondamental convexe et localement fini. Commençons par montrer que $\overline{D} \cap \partial\Omega$ possède un nombre fini de composante connexe. Sinon, comme dans le cas sans bord, le domaine D contient une infinité de triangles idéaux disjoints. Le problème dans le cas avec bord est que la projection de ces triangles n'est pas un fermé inclus dans l'intérieur de S . Mais, on peut retirer un petit voisinage de chaque sommet et ainsi on peut construire une infinité d'hexagones disjoints inclus dans D et de volume supérieure à $C_{\mathbb{P}^2}/2$ et ces hexagones se projettent sur un fermé de \mathring{S} . Par conséquent, $\overline{D} \cap \partial\Omega$ admet un nombre fini de composantes connexes et la surface \mathring{S} possède donc un nombre fini de bouts. Son genre est fini pour les mêmes raisons que dans le cas sans bord. \square

2.6.6.3. *Le domaine fondamental est un polyèdre fini.* —

Définition 2.6.19. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 , un *polyèdre* (resp. *polyèdre fini*) de Ω est un fermé d'intérieur non vide défini comme l'intersection d'une famille (resp. famille fini) de demi-espaces de Ω .

Proposition 2.6.20. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω , on suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini. Alors, tout domaine fondamental de Dirichlet-Lee est un polyèdre fini.*

Démonstration. — Le théorème 2.6.18 montre que la surface Ω/Γ est une surface de type fini, en particulier elle possède un nombre fini de bout. Soit D un domaine fondamental de Dirichlet-Lee, on sait que D est un polyèdre. La démonstration se fait en trois étapes.

Tout d'abord le nombre de composantes connexes de $\overline{D} \cap \partial\Omega$ est fini. Sinon on pourrait construire une infinité de triangles idéaux disjoints deux à deux inclus dans D . Et, la proposition 2.2.13 montre qu'alors D est de volume infini.

De plus, la proposition 2.2.2 montre si l'une des composantes connexes de $\overline{D} \cap \partial\Omega$ n'est pas réduite à un point. Alors D est de volume infini.

Comme D est un domaine fondamental localement fini. Il ne reste plus qu'à montrer que pour tout point $x_\infty \in \overline{D} \cap \partial\Omega$, il existe un voisinage V de x_∞ tel que V ne rencontre qu'un nombre fini de faces de D .

Soit $x_\infty \in \overline{D} \cap \partial\Omega$, et x_0 un point de D , la projection du segment $]x_0, x_\infty[$ sur la surface Ω/Γ est une demi-géodésique λ non bornée et simple. On note $\tilde{\lambda}$ le segment $]x_0, x_\infty[$ paramétré par la longueur d'arc pour la distance de Hilbert. La proposition 2.5.14 montre qu'il existe une suite t_n tendant vers l'infini et un bout B de S tel que la suite $(\lambda(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est ultimement incluse dans le bout B . Nous allons montrer qu'en fait λ est ultimement inclus dans le bout B . Au bout B de Ω/Γ est associé un lacet élémentaire c , bien défini à homotopie près et à orientation près. On choisit un élément γ qui représente l'holonomie de c .

On note \mathcal{F} un secteur de γ tel que l'application naturelle de $\mathcal{F}/\langle\gamma\rangle$ vers S est injective (lemme 2.6.11). La proposition 2.6.12 montre que $\mathcal{F}/\langle\gamma\rangle$ contient un voisinage du bout B , sauf si γ est hyperbolique et $p_\gamma^0 \in \Omega$. Dans ce cas, on note $\tilde{\mathcal{F}}$ l'union de \mathcal{F} et de l'unique triangle inclus dans Ω défini par les points $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$. On peut donc toujours supposer qu'il existe un fermé convexe $\tilde{\mathcal{F}}$ tel que l'application naturelle de $\tilde{\mathcal{F}}/\langle\gamma\rangle$ vers S est injective (lemme 2.6.11) et que son image contient un voisinage du bout B de S .

Il existe donc un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, il existe un élément $\delta_n \in \Gamma$ tel que $\delta_n \tilde{\lambda}(t_n) \in \tilde{\mathcal{F}}$. Le domaine D ne rencontre qu'un nombre fini d'images de $\tilde{\mathcal{F}}$, quitte à extraire et à conjuguer γ , on peut donc supposer que la suite $\tilde{\lambda}(t_n)$ est ultimement incluse dans $\tilde{\mathcal{F}}$. Or, $\tilde{\lambda}$ est une demi-géodésique incluse dans D et $\tilde{\mathcal{F}}$ est convexe donc $\tilde{\mathcal{F}}$ contient ultimement $\tilde{\lambda}$.

Le domaine D rencontre un nombre fini d'image du fermé $\tilde{\mathcal{F}}$. Il existe donc un voisinage de x_∞ qui ne rencontre qu'un nombre fini de côtés de D . C'est ce qu'il fallait montrer. \square

2.6.7. Holonomie des lacets élémentaires et volume des composantes élémentaires associées. —

2.6.7.1. Estimation du volume des pics. —

Proposition 2.6.21. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et P un pic de Ω , on suppose que le sommet à l'infini de P est fixé par un élément γ non trivial de $\text{Aut}(\Omega)$. Alors,

- Si γ est parabolique alors $\mu_\Omega(P) < \infty$.
- Si γ est quasi-hyperbolique alors $\mu_\Omega(P) = \infty$
- Si γ est hyperbolique et $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ alors $\mu_\Omega(P) = \infty$.

Nous allons montrer cette proposition à l'aide de plusieurs lemmes.

Lemme 2.6.22. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et P un pic de Ω , on suppose que le sommet p de P qui appartient au bord $\partial\Omega$ de Ω est sur une ellipse \mathcal{E} dont l'intérieur (i.e la composante connexe orientable de $\mathbb{P}^2 - \mathcal{E}$) est dans Ω . Alors, $\mu_\Omega(P) < \infty$.

Démonstration. — On note E l'intérieur de \mathcal{E} . Il est clair que l'on peut supposer que $P \subset E$. La proposition 2.2.1 montre que $\mu_\Omega(P) \leq \mu_E(P)$. Comme toute ellipse est projectivement équivalente au disque hyperbolique, on est donc ramené à montrer que tout pic du disque hyperbolique est de volume fini, mais ceci est clair. \square

Lemme 2.6.23. — Soit $\gamma \in \text{SL}_3(\mathbb{R})$ un élément parabolique, l'élément γ préserve un faisceau d'ellipses tangentes à la droite D_γ au point p_γ .

Démonstration. — On peut supposer que l'élément γ est donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on utilise les coordonnées x, y, z alors l'élément γ préserve les polynômes z et $y^2 - z(y + 2x)$. Par conséquent, l'élément γ préserve le faisceaux d'ellipses d'équation $\{\lambda z + \mu(y^2 - z(y + 2x)) =$

$0\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}$. Ces ellipses ont pour point commun le point $p_\gamma = [1 : 0 : 0]$ et leurs tangentes en p_γ est la droite D_γ d'équation $z = 0$. \square

Démonstration. — de la proposition 2.6.21 dans le cas parabolique. La première chose à remarquer est que la proposition 2.3.13 montre que $\partial\Omega$ est \mathcal{C}^1 en p . On note D la tangente à $\partial\Omega$ en p . Le lemme 2.6.23 montre que l'élément γ préserve un faisceau d'ellipses $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ tangentes à la droite D au point p . L'unique point commun des ellipses $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ est le point p , leurs tangentes en ce point est la droite D . Nous allons montrer que l'intérieur de l'une de ces ellipses est inclus dans Ω , ce qui conclura la démonstration grâce au lemme 2.6.22.

On se place dans une carte affine \mathcal{A} qui contient $\overline{\Omega}$, on munit cette carte d'un produit scalaire qui fait du faisceau d'ellipses tangentes $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ un faisceau de cercles tangents. On note A la droite perpendiculaire à la droite D pour le produit scalaire choisi. La droite A est donc perpendiculaire à chacun des cercles $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$. On notera l'image de A par γ , $A' = \gamma A$.

Soit $x \in A \cap \Omega$, on note T_x la tangente en x à l'unique cercle \mathcal{E}_i passant par x . À présent, les droites A , A' et T_x définissent 4 triangles fermés de \mathbb{P}^2 , on note \mathcal{T}_x celui qui est borné dans la carte affine \mathcal{A} . Il est clair que le triangle \mathcal{T}_x est inclus dans Ω si x est suffisamment proche de p et dans Ω . On se donne donc un tel point x , on va montrer que l'intérieur de l'unique cercle \mathcal{E}_i passant par x est inclus dans Ω .

Pour cela, il suffit de remarquer que la famille des $(\gamma^t x)_{0 \leq t \leq 1}$ est incluse dans \mathcal{T}_x et donc dans Ω . L'ouvert Ω est γ -invariant par conséquent l'orbite $(\gamma^t x)_{t \in \mathbb{R}}$ est incluse dans Ω , et cette orbite est l'unique cercle \mathcal{E}_i passant par x privé du point p . \square

Démonstration. — de la proposition 2.6.21 dans le cas hyperbolique et le cas quasi-hyperbolique avec $p = p_\gamma^2$. Ce cas là est beaucoup plus facile. En effet, si γ est hyperbolique et $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ la proposition 2.3.8 montre que les points p_γ^+ et p_γ^- ne sont pas des points \mathcal{C}^1 de $\partial\Omega$. Et, si γ est quasi-hyperbolique alors la proposition 2.3.12 montre que $\partial\Omega$ n'est pas \mathcal{C}^1 en p_γ^2 . Par conséquent $\mu_\Omega(P) = \infty$ par le théorème 2.2.10. \square

Il reste le cas où γ est quasi-hyperbolique et $p = p_\gamma^1$. Pour cela, on a besoin de connaître l'allure de l'orbite d'un point $x \in \mathbb{P}^2$ sous l'action d'un élément quasi-hyperbolique. Soit un élément γ quasi-hyperbolique, on peut supposer que γ est donné par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Où, $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha^2 \beta = 1$. Nous allons donner les équations des orbites d'un point de \mathbb{P}^2 sous l'action du groupe à un paramètre engendré par γ . Pour cela, on se place dans la carte affine : $A = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0\}$. L'action de γ dans cette carte est donné par :

$$(X, Y) \mapsto \left(\frac{\alpha}{\beta} X + \frac{\alpha}{\beta} Y, \frac{\alpha}{\beta} Y \right)$$

Si $Y_0 \neq 0$, un calcul simple montre que l'équation de l'orbite du point $(X_0, Y_0) \in A$ est :

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} + \frac{Y}{X_0} \frac{\ln(\frac{Y}{Y_0})}{\ln(\frac{\alpha}{\beta})}$$

Si $Y_0 = 0$, l'équation de l'orbite du point $(X_0, Y_0) \in A$ est la droite :

$$Y = 0$$

Nous allons avoir besoin du lemme ci-dessous pour estimer l'aire d'un pic dont le sommet à l'infini est le p_γ^1 d'un élément quasi-hyperbolique.

Lemme 2.6.24. — On considère l'ouvert Ω_0 de \mathbb{R}^2 défini par $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > x \ln(x)\}$. Tout pic de Ω_0 dont le sommet à l'infini est le point $(0, 0)$ est de volume infini pour la mesure de Busemann associée à l'ouvert Ω_0 .

Démonstration. — L'ouvert Ω_0 est un ouvert convexe qui ne contient pas de droite affine, c'est donc un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 . Soit $(x, y) \in \Omega_0$, commençons par évaluer le volume de la boule $B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1)$. On identifie l'espace tangent à Ω_0 en (x, y) à l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 .

La première chose à remarquer est que Ω_0 est inclus dans l'ouvert proprement convexe $\Omega'_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Par conséquent, $B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1)$ est incluse dans la bande $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -x < u < x\}$.

De plus, un calcul simple montre que le vecteur $u = (0, y - f(x))$ appartient au bord de la boule $B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1)$.

Enfin, la boule $B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1)$ est symétrique par rapport à l'origine. Par conséquent, les tangentes à $\partial B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1)$ en u et $-u$ sont parallèles. Il vient que le volume de $B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1)$ vérifie :

$$\text{Vol}(B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1)) \leq 4x(y - f(x))$$

Le volume d'un pic $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \epsilon, ax < y < bx\}$ avec $0 < a < b$ et $\epsilon > 0$ est donné par :

$$\begin{aligned} \mu_{\Omega_0}(P) &= \int_0^\epsilon \int_{ax}^{bx} \frac{1}{\text{Vol}(B_{(x,y)}^{\Omega_0}(1))} dy dx \geq \int_0^\epsilon \int_{ax}^{bx} \frac{1}{4x(y-f(x))} dy dx \\ &\geq \int_0^\epsilon \frac{1}{4x} \ln \left(\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)} \right) dx = \infty \end{aligned}$$

La quantité $\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{4x} \ln \left(\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)} \right)$ et $x \mapsto -\frac{b-a}{4x \ln(x)}$ sont équivalentes et positives au voisinage de 0. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^\epsilon \frac{1}{4x} \ln \left(\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)} \right) dx$ est infini car l'intégrale $\int_0^\epsilon -\frac{b-a}{4x \ln(x)} dx$ est infini. \square

À présent, nous allons utiliser la proposition 2.2.1 et le lemme 2.6.24 pour montrer la proposition 2.6.21 dans le cas quasi-hyperbolique.

Démonstration. — de la proposition 2.6.21 dans le cas quasi-hyperbolique avec $p = p_\gamma^1$. On rappelle que l'élément γ possède deux droites stables. Ces deux droites définissent une partition de \mathbb{P}^2 en deux demi-espaces fermés. On a vu au lemme 2.3.12 que Ω était inclus dans l'un de ces deux demi-espaces ouverts, on note A celui qui le contient. Nous allons montrer qu'il existe un point $x \in A$ tel que l'orbite de x sous l'action du groupe à un paramètre H engendré par γ n'intersecte pas Ω .

Commençons par voir pourquoi l'existence d'un tel point permet de conclure. Soit $x \in A$ tel que l'orbite \mathcal{O} de x sous l'action H n'intersecte pas Ω . L'union de l'orbite \mathcal{O} et de l'adhérence de l'axe de γ forment une courbe convexe qui définit un ouvert proprement convexe projectivement équivalent à l'ouvert proprement convexe Ω_0 du lemme 2.6.24. La proposition 2.2.1 et le lemme 2.6.24 montrent que tout pic de γ dont le sommet à l'infini est stabilisé par un élément quasi-hyperbolique est de volume infini.

Montrons à présent qu'un tel point x existe. Il suffit de trouver un point $x \in A$ tel que l'ensemble $(\gamma^t x)_{0 \leq t \leq 1}$ est inclus dans $A - \Omega$. Pour cela on considère une droite quelconque D passant par p_γ^1 et son image D' par γ . On se donne un point $x \in D \cap A$, et on considère le segment S inclus dans A et défini par les points x et p_γ^1 . La région $R = \{y \in A \mid \exists t, 0 \leq t \leq 1, \exists z \in S, \text{ tel que } y = \gamma^t(z)\}$ est une partie convexe dont le bord est formé de trois courbes. Une incluse dans D , une autre dans D' et la dernière est la courbe $(\gamma^t x)_{0 \leq t \leq 1}$. On note \mathcal{T}_x le triangle fermé de A défini par les points $p_\gamma^1, x, \gamma x$. Il est clair que l'on peut trouver un $x \in A$

tel que le côté de \mathcal{T}_x opposé à p_γ^1 est inclus dans $A - \Omega$. Par conséquent, si on se donne un tel x alors la courbe $(\gamma^t x)_{0 \leq t \leq 1}$ est incluse dans $A - \Omega$. \square

2.6.7.2. *L'holonomie des bouts des surfaces projectives proprement convexes de volume fini est parabolique.* —

Définition 2.6.25. — Soient \mathcal{C} une partie proprement convexe et $\Omega = \mathring{\mathcal{C}}$, on appelle bord réel de \mathcal{C} la partie $\mathcal{C} \cap \partial\Omega$, on le note $\partial_r\mathcal{C}$.

Proposition 2.6.26. — *Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Soit c un lacet élémentaire tracé sur S , on note $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S .*

- *Si c fait le tour d'un bout et l'holonomie de c est hyperbolique ou quasi-hyperbolique alors le volume de la composante élémentaire associée à c est infini.*
- *Si c fait le tour d'un bout et l'holonomie de c est parabolique alors le volume de la composante élémentaire associée à c est fini.*
- *Si c est librement homotope à une composante connexe du bord de S alors l'holonomie de c est :*
 - *ou quasi-hyperbolique avec $\text{Axe}(\text{Hol}(c)) \subset \partial_r\mathcal{C}$*
 - *ou hyperbolique avec $\text{Axe}(\text{Hol}(c)) \subset \partial_r\mathcal{C}$*
 - *ou hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\mathcal{C}$ et l'un des axes secondaires de γ est inclus dans $\partial_r\mathcal{C}$.*

Démonstration. — On note $\gamma = \text{Hol}(c)$. On sait par le théorème 2.5.9 qu'il existe un domaine fondamental D convexe et localement fini pour l'action du groupe fondamental Γ de S sur l'intérieur Ω de \mathcal{C} . La proposition 2.6.12 montre qu'il existe un fermé γ -invariant et convexe $\tilde{\mathcal{F}}$ de Ω tel l'application naturelle de $\tilde{\mathcal{F}}/\langle\gamma\rangle$ vers S est injective et son image est une composante élémentaire associée à un lacet homotope à c . Le lemme 2.5.18 montre que D rencontre un nombre fini d'image de $\tilde{\mathcal{F}}$. On les note $\delta_i\tilde{\mathcal{F}}$ avec $\delta_i \in \Gamma$ et $\delta_1 = Id$. Le volume de $\tilde{\mathcal{F}}/\langle\gamma\rangle$ est égale au volume de $(\bigcup_{i=1\dots r} \delta_i^{-1}D) \cap \tilde{\mathcal{F}}$.

Il reste donc à estimer le volume des $\delta_i^{-1}D \cap \tilde{\mathcal{F}}$ pour $i = 1\dots r$. Il est clair qu'il suffit de calculer le volume de $D \cap \tilde{\mathcal{F}}$. Traitons les 3 cas séparément :

- Si c fait le tour d'un bout et l'holonomie de c est hyperbolique ou quasi-hyperbolique alors on a deux cas à distinguer.
 - Les deux faces du polygone D incluse dans $\tilde{\mathcal{F}}$ ont une extrémité commune p appartenant à $\overline{\Omega}$. Dans ce cas, le point p est fixé par γ et la proposition 2.6.21 montre que la composante élémentaire associée à c est de volume infini.
 - Les deux faces du polygone D incluse dans $\tilde{\mathcal{F}}$ n'ont pas d'extrémité commune appartenant à $\overline{\Omega}$. Dans ce cas, c'est le théorème 2.2.2 qui montre que la composante élémentaire associée à c est de volume infini.
- Si c fait le tour d'un bout et l'holonomie de c est parabolique alors les deux faces du polygone D incluse dans $\tilde{\mathcal{F}}$ s'intersectent en p_γ le point fixe de γ . Dans ce cas la proposition 2.6.21 montre que la composante élémentaire associée à c est de volume fini.
- Si c est librement homotope à une composante connexe L du bord de S alors on a vu que l'holonomie de c ne peut-être parabolique (proposition 2.6.12). La surface S est une surface projective à bord géodésique par conséquent tout relevé de L est un segment T inclus dans le bord de \mathcal{C} et préservé par γ . Si γ est quasi-hyperbolique alors il n'y a rien à montrer car $\text{Axe}(\gamma)$ est l'unique segment préservé par γ inclus dans $\partial\mathcal{C}$. On suppose donc que γ est hyperbolique. Il vient que si p_γ^0 n'appartient pas à $\partial\Omega$ alors T est nécessairement l'axe principal de γ , car dans ce cas $\text{Axe}(\gamma)$ est l'unique segment préservé par γ inclus

dans $\partial\mathcal{C}$. Et, si p_γ^0 appartient à $\partial\Omega$ alors les axes secondaires de γ sont les seuls segments préservés par γ et inclus dans $\partial\mathcal{C}$. Ils ne peuvent pas être tous les deux inclus dans $\partial\mathcal{C}$ cas sinon le quotient ne sera pas une surface. Par conséquent, T est l'un des deux axes secondaires de γ . □

On peut à présent montrer le résultat principal de cet article.

Théorème 2.6.27. — *Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Alors, cette structure est de volume fini si et seulement si la surface S est de type fini et l'holonomie de tous les lacets qui font le tour d'un bout est parabolique.*

Démonstration. — Supposons que l'on s'est donné une structure projective proprement convexe sur S de volume fini. Alors, la surface S est de type fini d'après le théorème 2.6.18, et l'holonomie de chaque bout est parabolique d'après la proposition 2.6.26.

Supposons à présent que S est de type fini et que l'holonomie de tous les bouts de S est paraboliques. La proposition 2.6.26 montre que la surface S est de volume fini. □

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.6.28. — *Soit S une surface sans bord, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Alors, cette structure est de volume fini si et seulement si la surface S est de type fini et l'holonomie de tous les lacets élémentaires est parabolique.*

Proposition 2.6.29. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω , si Γ contient un élément quasi-hyperbolique alors l'action de Γ sur Ω est de covolume infini.*

Démonstration. — Supposons que le groupe Γ contienne un élément γ quasi-hyperbolique. La proposition 2.6.12 montre que le lacet correspondant à γ sur la surface Ω/Γ est élémentaire. Par conséquent, la proposition 2.6.26 montre que Ω/Γ est de volume infini. □

2.7. Applications

2.7.1. Stricte convexité. — Le but de cette partie est d'étudier la stricte-convexité de l'ouvert Ω . Nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 2.7.1. — *Soient \mathcal{C} une partie proprement convexe et un sous-groupe sans torsion discret Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve \mathcal{C} et tel que le quotient $S = \mathcal{C}/\Gamma$ est une surface à bord géodésique. Soient x_0 un point de l'intérieur Ω de \mathcal{C} et un point x_∞ de $\partial\Omega$. On note $\tilde{\lambda}$ le segment $[x_0, x_\infty[$ paramétré par la longueur d'arc (pour la distance de Hilbert) et λ la demi-géodésique obtenue en projetant $\tilde{\lambda}$ sur S . Si la demi-géodésique λ est ultimement incluse dans un bout B de \mathring{S} alors il existe $\gamma \in \Gamma$ représentant l'holonomie du bout B tel que :*

- si γ n'est pas hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ alors $\tilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans tout secteur de γ .
- si γ est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ alors $\tilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans la réunion de tout secteur de γ et de l'unique triangle T_γ inclus dans \mathcal{C} défini par les points $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$.

Démonstration. — On considère un lacet simple c qui fait le tour du bout B de S et l'élément $\gamma = \mathrm{Hol}(c)$. On note \mathcal{F} un secteur de γ . La proposition 2.6.12 montre que si γ n'est pas hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ alors $\mathcal{F}/\langle\gamma\rangle$ est un voisinage du bout B . Elle montre aussi que si γ est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ alors pour obtenir un voisinage du bout B . On peut prendre la projection de la réunion de \mathcal{F} et du triangle T_γ défini par les points $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$.

Comme \mathcal{F} ou $\mathcal{F} \cup T_\gamma$ est convexe et que la demi-géodésique λ converge vers le bout B de S . Quitte à conjuguer γ on peut supposer que λ est inclus dans \mathcal{F} . \square

On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.7.2. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un sous-groupe discret Γ qui préserve Ω . On suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini. On se donne un domaine fondamental D convexe et localement fini. Soient x_0 un point de Ω et x_∞ un point de $\partial\Omega$. On note S la surface Ω/Γ , $\tilde{\lambda}$ le segment $[x_0, x_\infty[$ paramétré par la longueur d'arc et λ la demi-géodésique obtenue en projetant $\tilde{\lambda}$ sur S . Si la demi-géodésique λ est ultimement incluse dans un bout B de S alors il existe $\delta \in \Gamma$ et un $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, $\lambda(t) \in \delta D$. En particulier, x_∞ est le point fixe d'un élément parabolique de Γ qui représente l'holonomie du bout B .

Démonstration. — Le corollaire 2.6.28 montre que l'holonomie de tous les lacets élémentaires de S est parabolique. L'intersection de l'adhérence de tous les secteurs d'un élément parabolique ne contient qu'un seul point du bord de Ω : le point fixe de cet élément parabolique. Par conséquent, le point x_∞ est le point fixe d'un élément parabolique de Γ . Il vient que le segment $[x_0, x_\infty[$ est ultimement inclus dans un domaine fondamental. \square

On peut à présent montrer le théorème suivant :

Théorème 2.7.3. — Soient \mathcal{C} une partie proprement convexe et Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve \mathcal{C} . On suppose que le quotient \mathcal{C}/Γ est une surface projective à bord géodésique et que \mathcal{C} n'est pas un triangle. Alors, tout segment maximal non trivial de $\partial\mathcal{C}$ est préservé par un élément non parabolique de Γ qui correspond à un lacet élémentaire de \mathcal{C}/Γ .

L'ingrédient crucial de cette preuve est le théorème 2.2.3 dû à Benzécri que l'on a déjà utilisé dans la partie 2.2.

Démonstration du théorème 2.7.3. — Le théorème 2.6.18 montre que Γ est de type fini. On note Ω l'intérieur de \mathcal{C} . On obtient ainsi $\mathring{S} = \Omega/\Gamma$ une surface projective convexe sans bord et de type fini. Supposons qu'il existe un segment s non trivial et maximal inclus dans le bord $\partial\mathcal{C}$ de \mathcal{C} . Soit $(e_i)_{i=1\dots 3}$ une base de \mathbb{R}^3 . On peut supposer que les extrémités de s sont les points $[e_2]$ et $[e_3]$ et que $[e_1] \notin \overline{\Omega}$. On considère les éléments :

$$g_t = \begin{pmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_t \Omega$ est un triangle T dont les sommets sont e_1, e_2 et e_3 .

Soit $x_0 \in \Omega \cap T$, on considère la famille $\tilde{\lambda}_t = (g_t^{-1} x_0)_{t \geq 0}$ qui est dans $\Omega \cap T$ si t est assez grand. Il est essentiel de remarquer que la famille $(\tilde{\lambda}_t)_{t > 0}$ est un segment ouvert dont l'une des extrémités est x_0 et l'autre est dans s . Soit D un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur Ω contenant le point x_0 . On note λ_t la projection de $\tilde{\lambda}_t$ sur \mathring{S} . La surface \mathring{S} est homéomorphe à la surface compacte Σ_g de genre g à laquelle on a retiré p points $x_i, i = 1\dots p$. On considère des disques ouverts B_i de centre x_i et suffisamment petit pour être disjoints deux à deux. On note K' le complémentaire de ces disques et K le compact correspondant dans \mathring{S} . On a l'alternative :

1. Ou la demi-géodésique λ est ultimement incluse dans un bout B de S .
2. Ou alors, il existe une suite de réels $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et tel que $\lambda(t_n) \in K$.

1. Commençons par traiter le second cas. Dans ce cas, il existe une famille $\gamma_{t_n} \in \Gamma$ tel que $\gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x_0$ appartienne à une partie compacte de D . Quitte à extraire on peut supposer que la suite $(\gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x_0)_{n \geq 0}$ converge vers un point $x_\infty \in D$. On a donc les convergences suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Omega, \gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x) = (\Omega, x_\infty) \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} g_{t_n} \gamma_{t_n}^{-1} (\Omega, \gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x) = (T, x)$$

Le théorème 2.2.3 montre que la suite $(g_{t_n} \gamma_{t_n}^{-1})_{t_n \geq 0}$ est bornée, ce qui montre que Ω est un triangle, ce qui est absurde.

2. Il reste donc à traiter le premier cas. Il peut être utile de remarquer que si on fait l'hypothèse plus forte que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini alors le corollaire 2.7.2 montre que la limite de $\tilde{\lambda}_t$ en $+\infty$ qui est un point du segment s devrait être fixée par un élément parabolique, ce qui est absurde. Mais revenons, au cas général, on note γ un représentant de l'holonomie du bout B . La proposition 2.6.26 montre qu'il faut distinguer quatre cas :
 - L'élément γ est parabolique.
 - L'élément γ est quasi-hyperbolique.
 - L'élément γ est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \notin \partial\Omega$ et $\text{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$.
 - L'élément γ est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ et l'un des axes secondaires de γ est inclus dans $\partial\Omega$.

Dans les trois premier cas, le lemme 2.7.1 montre qu'il existe un secteur \mathcal{F} de γ tel que la géodésique $\tilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans \mathcal{F} . Le deuxième et troisième cas se traite de la même façon. On commence par le cas où γ est parabolique.

- Si γ est parabolique alors tout secteur de γ ne possède qu'un point adhérence sur le bord de Ω , à savoir le point fixe de γ . Par conséquent, x_∞ est fixée par γ . Or, le lemme 2.3.13 montre que le point fixe d'un élément parabolique ne peut-être sur un segment non trivial du bord de Ω . Ce cas ne peut donc pas se produire.
- Si γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique avec $p_\gamma^0 \notin \partial\Omega$ alors l'adhérence de tout secteur de γ contient l'axe de γ . Par conséquent, le segment s est l'axe de γ . C'est ce que l'on voulait montrer.
- Si γ est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ alors d'après le lemme 2.7.1, la géodésique $\tilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans la réunion $\tilde{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} et de l'unique triangle inclus dans \mathcal{C} définit par les points $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$. Par conséquent, Le segment s est l'un des deux axes secondaires de γ .

□

Corollaire 2.7.4. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un sous-groupe discret sans torsion Γ qui préserve Ω . On suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini et que Ω n'est pas un triangle. Alors, Ω est strictement convexe.

Démonstration. — Tout segment maximal et non trivial du bord de Ω est stabilisé par un élément non parabolique $\gamma \in \Gamma$ (théorème 2.7.3) qui correspond à un lacet élémentaire tracé sur Ω/Γ . Mais le théorème 2.6.28 montre que l'holonomie de tout lacet élémentaire de Ω/Γ est parabolique. L'ouvert Ω est donc strictement convexe. □

2.7.2. Dualité. — Soit S une surface sans bord. Nous allons définir une opération de dualité sur l'espace $\beta(S)$ et nous allons voir que cette opération préserve le sous-espace $\beta_f(S)$.

Définition 2.7.5. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 . On note Ω^* l'ouvert convexe de $(\mathbb{P}^2)^* : \Omega^* = \{\mathbb{R}f \in (\mathbb{P}^2)^* \mid \forall \mathbb{R}v \in \overline{\Omega}, f(v) \neq 0\}$. C'est un ouvert proprement convexe. On l'appelle *le dual de Ω* .

Pour faire passer cette notion de dualité au niveau des surfaces nous allons avoir besoin d'une application $\text{Aut}(\Omega)$ -équivariante $\theta_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega^*$. On rappelle ici une construction dû à Vinberg d'une telle application.

Soit C un des deux cônes ouverts proprement convexe de \mathbb{R}^3 dont l'image dans \mathbb{P}^2 est Ω . On va de nouveau utiliser la fonction caractéristique de C . On note $C^* = \{f \in \mathbb{R}^{3*} \mid \forall v \in \overline{C} - \{0\}, f(v) > 0\}$ le cône dual de C . Son image dans $(\mathbb{P}^2)^*$ est Ω^* . Pour tout $v \in C$, on définit $v^* \in C^*$ par la formule suivante :

$$v^* = \frac{\int_{C^*} f e^{-f(v)} df}{\int_{C^*} e^{-f(v)} df}$$

Le point v^* est le centre de gravité du convexe $\{f \in C^* \mid f(v) = 3\}$. On définit donc $x^* = \theta_\Omega(x)$ comme la droite engendré par l'image v^* de n'importe quel générateur $v \in C$ de la droite $x \in \Omega$.

Remarque 15. — Il est vrai que $\Omega^{**} = \Omega$ via l'identification naturel entre un espace vectoriel et son bidual. Par contre, l'application $\theta_{\Omega^*} \circ \theta_\Omega \neq Id$ en général. On pourra consulter [Beno4] pour un contre-exemple.

On obtient ainsi la définition suivante :

Définition 2.7.6. — Soient S une surface sans bord et un point base $x_0 \in S$. Notons π_1 le groupe fondamental de S basé en x_0 . On munit S d'une structure projective proprement convexe via une développante $d : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$ et une holonomie $\rho : \pi_1 \rightarrow \text{SL}_3(\mathbb{R})$. La surface duale de S , noté S^* est la surface projective proprement convexe défini par la développante $d^* = \theta_\Omega \circ d : \tilde{S} \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$ et l'holonomie ρ^* est la représentation duale de la représentation ρ . En particulier, la surface projective proprement convexe S^* s'identifie au quotient Ω^*/Γ^t . On notera θ_S l'homéomorphisme induit par θ_Ω entre S et S^* .

Théorème 2.7.7. — Soit S une surface sans bord. On munit S d'une structure projective convexe. Alors, S est de volume fini si et seulement si S^* est de volume fini.

Démonstration. — Le théorème 2.6.28 montre qu'une surface projective proprement convexe est de volume fini si et seulement si l'holonomie de chaque bout est parabolique. Soit γ un lacet qui fait le tour d'un bout de S . Le lacet $\theta_S(\gamma)$ fait le tour d'un bout de S^* . L'holonomie $\rho(\gamma)$ de γ est parabolique si et seulement si l'holonomie $\rho^*(\gamma) = {}^t \gamma^{-1}$ de $\theta_S(\gamma)$ est parabolique. Le fait d'être de volume fini est donc stable par dualité. \square

Le fait suivant est très classique.

Fait 3. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 alors le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1 si et seulement si Ω^* est strictement convexe.

Théorème 2.7.8. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et un sous-groupe discret sans torsion Γ non virtuellement abélien de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω . On suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini. Alors, Ω est à bord C^1 .

Démonstration. — L'action de Γ sur Ω est de covolume fini. La proposition 2.7.7 montre que l'action dual du groupe Γ sur l'ouvert dual Ω^* de Ω est de covolume fini. Par conséquent, le corollaire 2.7.4 affirme que l'ouvert Ω^* est strictement convexe. Le fait 3 permet de conclure que le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1 . \square

2.7.3. Caractérisation de la finitude du volume en termes d'ensemble limite. —

Définition 2.7.9. — Lorsque Γ est sous-groupe discret irréductible de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, on peut définir Λ_Γ l'ensemble limite de Γ , c'est le plus petit fermé invariant non vide de \mathbb{P}^2 .

Remarque 16. — Le corollaire 2.4.3 montre que l'ensemble limite Λ_Γ est bien défini dès que Γ n'est pas virtuellement abélien. De plus, l'ensemble limite est l'adhérence de l'ensemble des points fixes attractifs des éléments hyperboliques de Γ ([Beno5]). Il est clair que $\Lambda_\Gamma \subset \partial\Omega$.

Théorème 2.7.10. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret non virtuellement abélien de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω . Alors, l'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si Γ est de type fini et $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.

Démonstration. — Remarquons que Ω n'est pas un triangle puisque Γ n'est pas virtuellement abélien. Commençons par supposer que $\Lambda_\Gamma \neq \partial\Omega$ et montrons que $\mu(\Omega/\Gamma) = \infty$. L'intérieur K de l'enveloppe convexe de Λ_Γ est invariante par Γ et $\Omega - K$ est non vide puisque Ω est strictement convexe (corollaire 2.7.4). Par conséquent, les composantes connexes de $\Omega - K$ sont permutées par Γ et leur stabilisateur est soit trivial, soit engendré par un élément hyperbolique. Dans tous les cas, la proposition 2.2.2 montre que $\mu(\Omega/\Gamma) = \infty$.

Supposons à présent que $\mu(\Omega/\Gamma) = \infty$ et Γ est de type fini. On peut supposer que Γ est sans torsion puisque Γ est de type fini. Le corollaire 2.6.28 montre que l'holonomie de l'un des bouts de la surface sans bord et de type fini Ω/Γ est hyperbolique ou quasi-hyperbolique. Par conséquent, si on considère c un lacet autour de l'un de ces bouts. La réunion E des relevés de la composante élémentaire associée à c est un fermé de Ω préservé par Γ . La partie $(\partial\Omega - \overline{E^{\mathbb{P}^2}})^{\mathbb{P}^2}$ est un fermé Γ -invariant. Il est différent de $\partial\Omega$ car $\mathrm{Hol}(c)$ n'est pas parabolique. Donc $\Lambda_\Gamma \neq \partial\Omega$. \square

Remarque 17. — L'hypothèse Γ type fini est essentielle comme le montre la construction classique suivante. Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret non virtuellement abélien et sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω tel que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini. La proposition 2.6.18 montre que Γ est ou un groupe libre non abélien de type fini ou isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte de genre supérieur ou égale à 2. Par conséquent, le groupe dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ de Γ est un sous-groupe d'indice infini de Γ . Son action sur Ω n'est donc pas de covolume fini. Mais, l'ensemble limite $\Lambda_{[\Gamma, \Gamma]}$ est Γ -invariant car $[\Gamma, \Gamma]$ est distingué dans Γ , par conséquent $\Lambda_{[\Gamma, \Gamma]} = \Lambda_\Gamma$. Ceci ne contredit pas notre théorème puisqu'il est bien connu que $[\Gamma, \Gamma]$ n'est pas de type fini.

Proposition 2.7.11. — Soit Γ un sous-groupe discret non virtuellement abélien, sans torsion et de type fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe de Ω . On considère l'enveloppe convexe \mathcal{C} dans $\overline{\Omega} - \Lambda_\Gamma$ de Λ_Γ l'ensemble limite de Γ . La surface \mathcal{C}/Γ est de volume fini.

Démonstration. — Par définition, l'intérieur \mathcal{U} de \mathcal{C} est le plus petit ouvert convexe de \mathbb{P}^2 préservé par Γ . La partie \mathcal{C} est le convexe obtenu en ajoutant à \mathcal{U} les axes des éléments hyperbolique et quasi-hyperbolique de Γ qui représente un lacet qui fait le tour d'un bout de Ω/Γ d'holonomie hyperbolique ou quasi-hyperbolique. Par conséquent, tous les bouts de la surface \mathcal{C}/Γ ont une holonomie parabolique et l'holonomie des composantes connexes du bord de \mathcal{C}/Γ est hyperbolique ou quasi-hyperbolique. La proposition 2.6.26 montre que la surface \mathcal{C}/Γ est de volume fini. \square

2.7.4. Unicité de l'ouvert Ω lorsque le volume est fini. —

Proposition 2.7.12. — Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe un ouvert proprement convexe Ω tel que $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$ et que Ω n'est pas un triangle. Alors, Ω est l'unique ouvert convexe de \mathbb{P}^2 sur lequel Γ agit proprement.

Démonstration. — Soit $F = \overline{\{x \in \mathbb{P}^2 \mid \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma x = x\}}$, commençons par montrer que $F = \mathbb{P}^2 - \Omega$. On sait d'après [Beno5] que pour tout couple de points $(x^+, x^-) \in \Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$, il existe une suite d'éléments hyperboliques $\gamma_n \in \Gamma$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\gamma_n}^+ = x^+$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\gamma_n}^- = x^-$. La proposition 2.3.8 montre que le point $p_{\gamma_n}^0$ est l'intersection des tangentes à $\partial\Omega$ en $p_{\gamma_n}^+$ et $p_{\gamma_n}^-$. Le théorème 2.7.10 montre que $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$. Par conséquent, comme le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1 (proposition 2.7.8), l'ensemble $\{p_\gamma^0 \mid \gamma \in \Gamma \text{ hyperbolique}\}$ est dense dans $\mathbb{P}^2 - \Omega$. Par conséquent, si Ω' est un ouvert sur lequel Γ agit proprement alors $\Omega' \subset \Omega$. Il reste à remarquer que l'enveloppe convexe de toute orbite d'un point de Ω est Ω lui-même. L'adhérence de toute orbite d'un point quelconque de Ω contient l'ensemble limite Λ_Γ , or $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$. Ainsi, le seul ouvert convexe Γ -invariant de \mathbb{P}^2 est Ω . \square

Cette proposition montre que l'holonomie d'une structure projective proprement convexe de volume fini sur une surface sans bord caractérise cette structure. On obtient facilement le corollaire suivant :

Corollaire 2.7.13. — Soient S une surface de type fini sans bord, et ρ une représentation du groupe fondamental de S , il existe au plus une structure projective proprement convexe de volume fini sur la surface S dont l'holonomie est ρ .

Remarque 18. — Ce théorème est faux pour les surfaces à bord. En effet, considérons une surface à bord S de type fini et donnons nous une structure projective proprement convexe de volume fini sur S . On note \mathcal{C} la partie proprement convexe de \mathbb{P}^2 donné par la développante de cette structure et Ω l'intérieur de \mathcal{C} . Considérons un lacet c homotope à une composante connexe L du bord, on a trois cas à distinguer (proposition 2.6.12) :

- L'élément $\mathrm{Hol}(c)$ est quasi-hyperbolique,
- L'élément $\mathrm{Hol}(c)$ est hyperbolique et $\mathrm{Axe}(\mathrm{Hol}(c)) \subset \partial\mathcal{C}$,
- L'élément $\mathrm{Hol}(c)$ est hyperbolique et $\mathrm{Axe}(\mathrm{Hol}(c)) \subset \Omega$.

Tout relevé du bord L est un segment inclus dans $\partial\mathcal{C}$ préservé par un conjugué de $\mathrm{Hol}(c)$. Par conséquent, dans les deux premiers cas, le bord L de S est la projection de l'axe principal de $\mathrm{Hol}(c)$ sur la surface S . Et, dans le troisième cas, le bord L est la projection de l'un des deux axes secondaires de $\mathrm{Hol}(c)$.

Par conséquent, étant donné une structure projective proprement convexe de volume fini sur une surface à bord S . Notons n_h le nombre de composantes connexes du bord de S dont l'holonomie est hyperbolique, le paragraphe précédent montre que l'on peut construire au moins 3^{n_h} structures projectives proprement convexe de volume fini sur la surface S qui ont la même holonomie que \mathcal{S} . Et, le théorème 2.6.26 montre qu'il n'y en a pas d'autres.

Pour résoudre ce problème dans le but d'étudier l'espace des modules des structures projectives proprement convexe de volume fini sur les surfaces à bord, on introduit la notion de surface à bord géodésique principal.

Définition 2.7.14. — Une structure projective proprement convexe sur une surface à bord S est dite à *bord géodésique principal* lorsqu'elle est à bord géodésique et toute composante connexe L du bord de S qui a une holonomie hyperbolique est la projection de l'axe principal de cette holonomie.

La proposition suivante est à présent évidente.

Proposition 2.7.15. — Soient S une surface de type fini, et ρ une représentation du groupe fondamental de S , il existe au plus une structure projective proprement convexe de volume fini à bord géodésique principal sur la surface S dont l'holonomie est ρ .

2.7.5. Discrétude du groupe $\text{Aut}(\Omega)$. —

Théorème 2.7.16. — Soient Γ un sous-groupe discret de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ et Ω un ouvert proprement convexe tel que $\mu(\Omega/\Gamma) < \infty$, on suppose que Ω n'est pas un triangle. Alors, on a l'alternative exclusive suivante :

- L'adhérence de Zariski $\overline{\Gamma^{\mathbb{Z}}}$ de Γ est conjuguée au groupe $\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ et Ω est un ellipsoïde et $\text{Aut}(\Omega) = \overline{\Gamma^{\mathbb{Z}}}$.
- Le groupe Γ est Zariski dense dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ et $\text{Aut}(\Omega)$ est un sous-groupe discret de Ω . En particulier, Γ est d'indice fini dans $\text{Aut}(\Omega)$.

Démonstration. — Supposons que l'adhérence de Zariski de Γ est conjuguée au groupe $\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ par conséquent, le groupe Γ préserve une ellipse. La proposition 2.7.12 montre que Ω est cet ellipsoïde.

Si l'adhérence de Zariski de Γ n'est conjuguée pas au groupe $\text{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ alors le corollaire 2.4.5 montre que Γ est Zariski dense. Le lemme 2.7.17 montre que $\text{Aut}(\Omega)$ est un sous-groupe discret ou dense de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$. Or, il préserve Ω il ne peut donc pas être dense. \square

Lemme 2.7.17. — Soit H un sous-groupe Zariski dense de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$, on a l'alternative suivante :

- Le groupe H est discret, ou bien
- Le groupe H est dense.

Démonstration. — Ce lemme est vrai plus généralement pour les sous-groupes Zariski dense d'un groupe algébrique quasi-simple. La composante neutre de G de l'adhérence (pour la topologie usuelle) de H est un sous-groupe fermé, connexe de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ qui est normalisé par H , et donc par $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ puisque H est Zariski dense. Par conséquent, comme $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ est simple. On obtient que :

- $G = \{1\}$, ou bien
- $G = \text{SL}_3(\mathbb{R})$.

\square

Ce théorème entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 2.7.18. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 , on suppose qu'il existe Γ_1 et Γ_2 tel que $\mu(\Omega/\Gamma_1) < \infty$ et $\mu(\Omega/\Gamma_2) < \infty$. On suppose de plus que Ω/Γ_1 est compact et que Ω/Γ_2 n'est pas compact. Alors, Ω est un ellipsoïde.

Démonstration. — Tout d'abord, il est clair que Ω n'est pas un triangle puisque Ω/Γ_2 n'est pas compact. Ensuite, si Ω n'est pas un ellipsoïde alors le théorème 2.7.16 montre que Γ_1 et Γ_2 sont des sous-groupes d'indice fini de $\text{Aut}(\Omega)$ par conséquent $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_1 et Γ_2 . Il est vient que $\Omega/\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ devrait être compact et non compact, ce qui est absurde. \square

CHAPITRE 3

ESPACES DES MODULES DES SURFACES CONVEXES DE VOLUME FINI

3.1. Introduction

3.1.1. Présentation des résultats. — Soit \mathcal{C} une partie de l'espace projectif réel \mathbb{P}^n , on dira que \mathcal{C} est *convexe* lorsque l'intersection de \mathcal{C} avec toute droite de \mathbb{P}^n est connexe. Une partie convexe \mathcal{C} est dite *proprement convexe* lorsqu'il existe un ouvert affine contenant l'adhérence $\overline{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} . Elle est dite *strictement convexe* lorsque tout segment inclus dans le bord $\partial\mathcal{C}$ de \mathcal{C} est trivial.

Une structure projective proprement convexe sur une variété sans bord M est un homéomorphisme entre M et le quotient d'un ouvert proprement convexe Ω de \mathbb{P}^n par un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préserve Ω . De tels structures sur les variétés compactes ont été étudiées ces dernières années par Benoist, Choi, Goldman, Labourie et Loftin [**Beno1**, **Beno2**, **Beno5**, **Beno6**, **Gold1**, **ChGo**, **Lab**, **Loft1**].

L'ensemble des structures projectives proprement convexes de volume fini à isotopie près sur une surface à bord S possède une topologie naturelle (on fera une hypothèse technique sur la géométrie du bord pour simplifier notre étude). Nous allons étudier l'espace des modules des structures projectives proprement convexes à bord géodésique principal et de volume fini sur S , on notera cet espace $\beta_f(S)$. Goldman a montré que si S est une surface sans bord, compact et de genre $g \geq 2$ alors l'espace $\beta_f(S)$ est homéomorphe à une boule de dimension $16g - 16$. On notera $\Sigma_{g,p}$ la surface de genre g et à p pointes. Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème (3.3.4). — Supposons que la surface $\Sigma_{g,p}$ soit de caractéristique d'Euler strictement négative alors l'espace des modules des structures projectives proprement convexes de volume fini sur la surface $\Sigma_{g,p}$ est homéomorphe à une boule de dimension $16g - 16 + 6p$.

Si S est une surface à bord avec un bord non trivial alors l'espace $\beta_f(S)$ n'est pas une variété mais une variété à bord topologique dont nous décomposerons le bord en strates. Le système de coordonnées introduit sur l'espace $\beta_f(S)$ est une généralisation du système de coordonnées utilisé par Goldman pour étudier cet espace dans le cas compact. Le système de coordonnées de Goldman étant lui-même une généralisation du système de coordonnées utilisé par Fenchel et Nielsen pour étudier l'espace des modules des structures hyperboliques sur une surface.

Dans le chapitre 2, on a donné des caractérisations du fait qu'une structure projective proprement convexe est de volume fini. On a notamment montré qu'une structure projective proprement convexe à bord géodésique sur une surface à bord de type fini S est de volume fini si et seulement si l'holonomie des lacets élémentaires non homotopes à une composante connexe

du bord de S est parabolique.

Ainsi, le chapitre 2 permet de faire le lien entre l'espace $\beta_f(\Sigma_{g,p})$ et un espace de représentations du groupe fondamental de $\Sigma_{g,p}$ étudié par Fock et Goncharov. En effet, l'holonomie fournit une application de l'espace $\beta_f(\Sigma_{g,p})$ vers l'espace des représentations du groupe fondamental de $\Sigma_{g,p}$ suivant :

$$\beta'_{Para}(\pi_1(\Sigma_{g,p})) = \left\{ \begin{array}{l} \rho \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,p}), \text{SL}_3(\mathbb{R})) \\ \rho \text{ est fidèle,} \\ \text{Im}(\rho) \text{ est discrète,} \\ \text{Im}(\rho) \text{ préserve un ouvert proprement} \\ \text{convexe } \Omega_\rho, \\ \text{le quotient } \Omega_\rho/\Gamma \text{ est homéomorphe à } \Sigma_{g,p}, \\ \text{l'holonomie des lacets élémentaires de } \pi_1(\Sigma_{g,p}) \text{ est parabolique.} \end{array} \right.$$

On verra que le groupe $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ agit librement et proprement sur $\beta'_{Para}(\pi_1(\Sigma_{g,p}))$, on note $\beta_{Para}(\pi_1(\Sigma_{g,p}))$ l'espace quotient. On a montré dans le chapitre 2, que l'application naturelle donnée par l'holonomie de l'espace $\beta_f(\Sigma_{g,p})$ vers l'espace $\beta_{Para}(\pi_1(\Sigma_{g,p}))$ est injective, c'est donc un homéomorphisme. Fock et Goncharov ont montré dans [FoGo] que l'espace $\beta_{Para}(\pi_1(\Sigma_{g,p}))$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16+6p}$. Le fait que $\beta_f(\Sigma_{g,p})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16+6p}$ n'est donc pas nouveau. Mais nous donnons ici un nouveau système de coordonnées "à la Fenchel-Nielsen" et nous gérons aussi le cas d'une surface à bord.

Nous allons aussi montrer que les structures projectives proprement convexes de volume fini sont des objets naturels. Pour cela, nous montrerons le théorème suivant :

Théorème (3.4.7). — On se donne une surface sans bord S de caractéristique d'Euler strictement négative. L'espace des modules des structures projectives proprement convexe de volume fini sur la surface S s'identifie à l'une des composantes connexes de l'espace des représentations irréductibles du groupe fondamental de S dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ dont l'holonomie des lacets élémentaires est parabolique, à conjugaison près.

Terminons cette introduction en donnant le plan de ce texte. La partie 3.2 est un rappel des définitions de surfaces projectives, projectives proprement convexes, marquées, à bord géodésique, à bord géodésique principal. On définit ensuite la topologie de l'espace $\beta_f(S)$. On termine cette partie en donnant des conséquences faciles de la classification des automorphismes des ouverts proprement convexes (paragraphe 3.2.2).

Dans la seconde partie, on démontre les théorèmes 3.3.4 et 3.3.5. La démonstration se déroule en deux parties. On commence dans la partie 3.3.1 par étudier le recollement d'une surface projective proprement convexe le long d'un lacet. Ce résultat a été montré par Goldman, mais nous reproduisons une preuve pour la commodité du lecteur. Enfin, nous calculons l'espaces des modules des pantalons dont les classes de conjugaison de l'holonomie des bords est fixée. L'idée de départ est dû à Goldman, il s'agit de découper un pantalon à l'aide de deux triangles "en spirales". Cette idée permet de construire une bijection entre les pantalons projectifs proprement convexes et un objet combinatoire. La démonstration de Goldman de ce point nécessite de nouveau argument pour passer au cas non compact. Enfin, on termine cette partie en calculant, l'espace des modules de l'objet combinatoire. Cette partie est une généralisation facile de la

preuve de Goldman.

Dans la troisième partie, on démontre le théorème 3.4.7. La démonstration de ce théorème se fait en deux parties. Il faut montrer la fermeture et l'ouverture de l'espace $\beta_f(S)$ dans l'espace des représentations du groupe fondamental de S qui sont irréductibles et dont l'holonomie d'un lacet élémentaire est parabolique. La démonstration de la fermeture est très proche du travail de Choi et Goldman qui montre dans [ChGo], la fermeture de $\beta_f(S)$ dans l'espace des représentations du groupe fondamental de S , lorsque S est une surface compacte de genre supérieure ou égale à 2. Pour conclure comme le théorème 3.3.4 montre que $\beta_f(S)$ est homéomorphe à une boule, nous utiliserons le théorème d'invariance du domaine de Brouwer pour montrer l'ouverture.

3.2. Préliminaires

3.2.1. Définition des surfaces projectives proprement convexes. — Tout au long de ce texte une *surface* sera une variété connexe orientable de dimension 2 à bord. On note \mathbb{E} un demi-espace affine fermé de \mathbb{P}^2 .

Une *structure projective réelle* sur une surface S est la donnée d'un atlas maximal $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}$ sur S tel que les fonctions de transitions $\varphi_{\mathcal{U}} \circ \varphi_{\mathcal{V}}^{-1}$ sont des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, pour tous ouverts \mathcal{U} et \mathcal{V} de l'atlas de S tel que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Un *isomorphisme* entre deux surfaces munies de structures projectives est un homéomorphisme qui, lu dans les cartes, est donné par des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

La donnée d'une structure projective sur une surface S est équivalente à la donnée :

1. d'un homéomorphisme local $dev : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$ appelée *développante*, où \tilde{S} est le revêtement universel de S ,
2. d'une représentation $hol : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ appelée *holonomie* tel que la développante est $\pi_1(S)$ -équivariante (i.e pour tout $x \in \tilde{S}$, et pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$ on a $dev(\gamma x) = hol(\gamma)dev(x)$).

De plus, deux structures projectives données par les couples (dev, hol) et (dev', hol') sont isomorphes si et seulement si il existe un élément $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ tel que $dev' = g \circ dev$ et $hol' = g \circ hol \circ g^{-1}$.

Lorsqu'on s'intéresse à l'ensemble des structures sur une surface à équivalence près, il faut faire attention à introduire la bonne relation d'équivalence sur l'ensemble des structures en question. A première vue, on pourrait penser que la bonne relation d'équivalence est tout simplement l'existence d'un isomorphisme. Mais, si on introduit cette relation, alors l'espace quotient n'est en général pas une variété. C'est pourquoi on introduit la notion de surface marquée et la notion d'isotopie.

Définition 3.2.1. — Soit S une surface, une *structure projective marquée sur S* est la donnée d'un homéomorphisme $\varphi : S \rightarrow S'$ où S' est une surface projective. On note $\mathbb{P}'(S)$ l'ensemble des structures projectives marquées sur S .

Deux structures projectives marquées sur S , $\varphi_1 : S \rightarrow S_1$ et $\varphi_2 : S \rightarrow S_2$ sont dites *isotopiques* lorsqu'il existe un isomorphisme $h : S_1 \rightarrow S_2$ tel que $\varphi_2^{-1} \circ h \circ \varphi_1 : S \rightarrow S$ est un homéomorphisme isotope à l'identité. On note $\mathbb{P}(S)$ l'ensemble des structures projectives marquées sur S modulo isotopie.

On peut à présent définir une topologie sur l'ensemble des structures projectives marquées sur la surface S . On introduit l'espace :

$$\mathcal{D}'(S) = \left\{ (dev, hol) \left| \begin{array}{l} dev : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2 \text{ est un homéomorphisme local} \\ hol : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \\ dev \text{ est } \pi_1(S) \text{ - équivariante} \end{array} \right. \right\}$$

Les espaces \tilde{S} , \mathbb{P}^2 , $\pi_1(S)$ et $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ sont des espaces topologiques localement compacts. On munit l'ensemble des applications continues entre deux espaces localement compacts de la topologie compact-ouvert. Ainsi, l'espace $\mathcal{D}'(S)$ est munie d'une topologie. Le groupe $\mathrm{Homeo}_0(S)$ des homéomorphismes isotopes à l'identité agit naturellement sur $\mathcal{D}'(S)$. Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ agit aussi naturellement sur $\mathcal{D}'(S)$. Ces deux actions commutent. L'espace quotient est l'espace $\mathbb{P}(S)$ des structures projectives marquées sur S à isotopie près. On le munit de la topologie quotient.

On ne s'intéresse qu'à un certain type de structure projective : les structures projectives proprement convexes.

Définition 3.2.2. — Soit S une surface, une structure projective est dite *proprement convexe* sur S lorsque la développante est un homéomorphisme sur une partie \mathcal{C} proprement convexe de \mathbb{P}^2 . On note $\beta(S)$ l'ensemble des structures projectives proprement convexes sur S modulo isotopie.

Comme on souhaite comprendre le cas des surfaces à bord, il faut faire une hypothèse sur la géométrie du bord. Une structure projective sur S est dite *à bord géodésique* lorsque pour tout ouvert \mathcal{U} de l'atlas tel que $\mathcal{U} \cap \partial S \neq \emptyset$ et pour toute composante connexe B de $\mathcal{U} \cap \partial S$, $\varphi_{\mathcal{U}}(B)$ est inclus dans une droite de \mathbb{P}^2 . Ainsi, tout relevé d'une composante connexe \mathcal{B} du bord de S est un segment s ouvert de \mathbb{P}^2 préservé par un élément $\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, qui est l'holonomie d'un lacet librement homotope à la composante connexe \mathcal{B} du bord de S . On dira que le bord \mathcal{B} est *à bord géodésique principal* lorsque γ est un élément hyperbolique ou quasi-hyperbolique de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et l'une des extrémités de s est un point attractif de γ et l'autre un point répulsif.

Soit S une surface projective proprement convexe, l'application développante permet d'identifier le revêtement universel \tilde{S} de S à une partie \mathcal{C} proprement convexe de \mathbb{P}^2 . On notera $\pi : \mathcal{C} \rightarrow S$ le revêtement universel de S . L'intérieur Ω de \mathcal{C} est naturellement muni d'une mesure μ_{Ω} invariante sous l'action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de S . Par conséquent, il existe une unique mesure μ_S sur l'intérieur $\overset{\circ}{S}$ de S telle que pour tout borélien \mathcal{A} de Ω , si $\pi : \Omega \rightarrow \overset{\circ}{S}$ restreinte à \mathcal{A} est injective alors $\mu_S(\pi(\mathcal{A})) = \mu_{\Omega}(\mathcal{A})$.

Définition 3.2.3. — Soit S une surface, on dit qu'une structure projective proprement convexe sur S est de *volume fini* lorsque pour tout fermé F de l'intérieur $\overset{\circ}{S}$ de S , on a $\mu_S(F) < \infty$. On note $\beta_f(S)$ l'espace des modules des structures projectives marquées proprement convexes à bord géodésique principal de volume fini sur S .

3.2.2. Conséquence facile de la classification des automorphismes des ouverts proprement convexe. — Les propositions suivantes sont des conséquences évidentes des propositions de la deuxième partie du chapitre 2.

Proposition 3.2.4. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ d'ordre infini, alors, la trace de γ est supérieure ou égale à 3 avec égalité si et seulement si γ est parabolique ou l'élément identité.

On introduit les sous-ensembles de \mathbb{R}^2 suivants :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= \{(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \lambda < 1, \frac{2}{\sqrt{\lambda}} < \tau < \lambda + \lambda^{-2}\} \\
\mathfrak{R}_{QH\text{ non } C^1} &= \{(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \lambda < 1, \tau = \lambda + \lambda^{-2}\} \\
\mathfrak{R}_{QH C^1} &= \{(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \lambda < 1, \tau = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\} \\
\mathfrak{R}_P &= \{(1, 2)\} \\
\widehat{\mathfrak{R}} &= \mathfrak{R} \cup \mathfrak{R}_{QH\text{ non } C^1} \cup \mathfrak{R}_{QH C^1}
\end{aligned}$$

On pourra remarquer que \mathfrak{R} est un ouvert de \mathbb{R}^2 homéomorphe à \mathbb{R}^2 dont le bord est la réunion des 2 sous-variétés $\mathfrak{R}_{QH\text{ non } C^1}$ et $\mathfrak{R}_{QH C^1}$ homéomorphes à \mathbb{R} et du point \mathfrak{R}_P .

Enfin, l'espace $\widehat{\mathfrak{R}}$ est une variété à bord homéomorphe à $[0, 1] \times \mathbb{R}$.

Définition 3.2.5. — Soit $\gamma \in \text{SL}_3(\mathbb{R})$ dont le spectre est réel et strictement positif, on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les valeurs propres de γ . On notera $\lambda(\gamma) = \lambda_1$ la plus petite valeur propre de γ et $\tau(\gamma) = \lambda_2 + \lambda_3$ la somme des deux autres.

La proposition suivante est alors une simple conséquence de la classification des automorphismes des ouverts proprement convexes.

Proposition 3.2.6. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de \mathbb{P}^2 et $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$, on suppose que γ possède un point fixe $p \in \partial\Omega$. On suppose de plus que si γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique alors p est un point fixe répulsif. Alors le spectre de γ est réel, strictement positif et on a :

- L'élément γ est hyperbolique si et seulement si $(\lambda(\gamma), \tau(\gamma)) \in \mathfrak{R}$
- L'élément γ est quasi-hyperbolique et p n'est pas un point C^1 de $\partial\Omega$ si et seulement si $(\lambda(\gamma), \tau(\gamma)) \in \mathfrak{R}_{QH\text{ non } C^1}$
- L'élément γ est quasi-hyperbolique et p est un point C^1 de $\partial\Omega$ si et seulement si $(\lambda(\gamma), \tau(\gamma)) \in \mathfrak{R}_{QH C^1}$
- L'élément γ est parabolique si et seulement si $(\lambda(\gamma), \tau(\gamma)) \in \mathfrak{R}_P$

3.3. Paramétrisation de l'espace des modules

Dans cette partie, nous allons expliquer la méthode que nous allons suivre pour montrer le théorème 3.1.1, ainsi que sa version dans le cadre des surfaces à bord. On termine en donnant les théorèmes de paramétrisation de l'espace des modules des structures projectives proprement convexes de volume fini sur une surface sans bord et à bord. Nous allons à présent rappeler quelques définitions élémentaires de topologie des surfaces.

Définition 3.3.1. — Soit S une surface, on dit qu'un lacet tracé sur S , $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ est *simple* s'il est injectif. On dit qu'un lacet simple c tracé sur S est *élémentaire* si $S - c$ possède deux composantes connexes et l'une d'elles est un cylindre. Lorsque S n'est pas un cylindre, on appellera l'adhérence de la composante homéomorphe à un cylindre *la composante élémentaire associée à c* .

Remarque 19. — Soient S une surface et c un lacet élémentaire tracé sur S , alors on a l'alternative suivante :

- La composante élémentaire associée à c est un cylindre sans bord. On dira alors que c *fait le tour d'un bout*.
- La composante élémentaire associée à c est un cylindre avec un bord. Dans ce cas c est librement homotope à une composante connexe du bord de S .

Tout au long de ce texte, on notera $\Sigma_{g,b,p}$ la surface obtenue en retirant b disques ouverts disjoints et p points distincts à la surface de genre g (on suppose bien sûr aussi que les points n'appartiennent pas à l'adhérence des disques que l'on retirent).

Le théorème suivant est le point de départ de notre étude. Il caractérise le fait qu'une structure projective est de volume fini en terme d'holonomie.

Théorème (2.6.27). — Une structure projective proprement convexe à bord géodésique principal sur la surface $\Sigma_{g,b,p}$ est de volume fini si et seulement si l'holonomie des lacets qui font le tour d'un bout est parabolique et l'holonomie des lacets élémentaires homotopes à une composante connexe du bord est hyperbolique ou quasi-hyperbolique.

On rappelle la proposition suivante qui a été démontré dans le second chapitre.

Théorème (Proposition 2.6.12). — Soit S une surface, on munit S d'une structure projective convexe et on note Ω l'intérieur de la partie proprement convexe donné par la développante de la structure projective de S . L'holonomie de tout lacet non élémentaire est un élément hyperbolique qui vérifie que $p_\gamma^0 \notin \partial\Omega$.

On rappelle brièvement la définition d'une décomposition en pantalon.

Définition 3.3.2. — Soit S une surface, une famille de lacets $(c_i)_{i \in I}$ de S est une *décomposition en pantalon* de S lorsque les $(c_i)_{i \in I}$ sont des lacets simples, deux à deux disjoints et les composantes connexes de S privée de la réunion des $(c_i)_{i \in I}$ sont des pantalons ouverts.

Pour paramétrer l'espace des modules des structures projectives de volume fini sur une surface S , nous allons utiliser une décomposition en pantalon de la surface à l'aide d'un ensemble fini de lacets $(c_i)_{i \in I}$. Dans le cas d'une surface de Riemann, on voit apparaître deux types de paramètres : la classe de conjugaison de l'holonomie des lacets $(c_i)_{i \in I}$ et un paramètre de twist le long de chacun des $(c_i)_{i \in I}$. Dans le cas projective convexe, les choses se compliquent un peu. Tout d'abord la classe de conjugaison de l'holonomie des lacets $(c_i)_{i \in I}$ et le paramètre de twist le long de chacun des $(c_i)_{i \in I}$ ne sont plus mesurés à l'aide d'un nombre réel mais à l'aide d'un élément de \mathbb{R}^2 . Et aussi, alors qu'il existe un et un seul pantalon hyperbolique dont les bords sont de longueur fixée, l'espace des modules des pantalons projectifs proprement convexes dont les classes de conjugaison de l'holonomie des bords est fixée est homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

Lorsque qu'on découpe une surface à bord S en pantalon, on obtient trois types d'holonomie pour les lacets élémentaires des pantalons :

- Les lacets qui viennent d'un lacet non élémentaire dans S , l'holonomie de ces lacets est hyperbolique.
- Les lacets qui font le tour d'un bout de S , l'holonomie de ces lacets est parabolique.
- Les lacets homotopes à une composante connexe du bord de S , l'holonomie de ces lacets est hyperbolique ou quasi-hyperbolique.

Définition 3.3.3. — Un *pantalon avec mémoire* est une surface $\Sigma_{0,b,p}$, avec $b + p = 3$, ainsi que la donnée pour chacun des bords d'une orientation et de l'un des mots suivants : {coupure, bord}. On note $P_{i,j,k}^*$ le pantalon avec mémoire qui possède i bords marqués "coupure", j bords marqués "bord" et k pointes. On a une définition naturelle de $\beta_f(P_{i,j,k}^*)$: il s'agit de l'espace des modules des structures projectives convexes marquées de volume fini sur la surface $\Sigma_{0,i+j,k}$ telle que l'holonomie des bords marqués "coupure" est hyperbolique.

Soient $\Sigma_{g,b,p}$ une surface de caractéristique d'Euler strictement négative et une famille de lacets $(c_i)_{i \in I}$ de S qui définit une décomposition en pantalon de S , on note $(P_j)_{j \in J}$ l'ensemble

des pantalons obtenus. On se donne une famille $(b_k)_{k=1,\dots,b}$ de lacets élémentaires homotopes à une composante connexe du bord de S telle que toutes les composantes connexes du bord sont représentées une et une seule fois. On notera P_j^* le pantalon avec mémoire associé à P_j de la façon suivante :

- Les bords de P_j qui viennent d'un lacet non élémentaire de S sont marqués "coupures".
- Les bords de P_j qui viennent d'un lacet élémentaire de S sont marqués "bords".

L'orientation des bords de P_j est l'orientation donnée par les lacets $(c_i)_{i \in I}$ et $(b_k)_{k=1,\dots,b}$.

On peut à présent énoncer notre paramétrisation de l'espace des modules. Commençons par énoncer le théorème dans le cas sans bord.

Théorème 3.3.4. — Soient $\Sigma_{g,0,p}$ une surface sans bord de caractéristique d'Euler strictement négative et une famille de lacets $(c_i)_{i \in I}$ de S qui définit une décomposition en pantalon de S , on note $(P_j)_{j \in J}$ l'ensemble des pantalons avec mémoire obtenus. Alors,

1. Les lacets $(c_i)_{i \in I}$ ne sont pas élémentaires.
2. $|I| = 3g - 3 + p$ et $|J| = -\chi(\Sigma_{g,b,p}) = 2g - 2 + p$.
3. L'holonomie des c_i pour $i \in I$ est hyperbolique.
4. L'application naturelle $\beta_f(\Sigma_{g,0,p}) \rightarrow \prod_{j \in J} \beta_f(P_j^*)$ est une fibration qui admet une action simplement transitive préservant les fibres du groupe $(\mathbb{R}^2)^I$.
5. On note $(c_j^r)_{r=1\dots l_j}$ la sous-famille de $(c_i)_{i \in I}$ des l_j lacets élémentaires du pantalon P_j homotopes à une composante connexe du bord du pantalon P_j . L'application :

$$\begin{array}{ccc} \beta_f(P_j^*) & \rightarrow & \mathfrak{R}^{l_j} \\ \mathcal{P} & \mapsto & (\lambda(\text{Hol}(c_j^r)), \tau(\text{Hol}(c_j^r)))_{r=1\dots l_j} \end{array}$$

est une fibration dont les fibres sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .

6. En particulier, $\beta_f(\Sigma_{g,0,p})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16+6p}$.

On donne à présent l'énoncé dans le cas à bord.

Théorème 3.3.5. — Soient $\Sigma_{g,b,p}$ une surface à bord de caractéristique d'Euler strictement négative et une famille de lacets $(c_i)_{i \in I}$ de S qui définit une décomposition en pantalon de S , on note $(b_k)_{k=1,\dots,b}$ une famille de lacets élémentaires homotopes à une composante connexe du bord de S telle que toutes les composantes connexes du bord sont représentées une et une seule fois. On note $(P_j^*)_{j \in J}$ l'ensemble des pantalons avec mémoire obtenus. Alors,

1. Les lacets $(c_i)_{i \in I}$ ne sont pas élémentaires.
2. $|I| = 3g - 3 + p + b$ et $|J| = -\chi(\Sigma_{g,b,p}) = 2g - 2 + p + b$.
3. L'holonomie des c_i pour $i \in I$ est hyperbolique.
4. L'application naturelle $\beta_f(\Sigma_{g,b,p}) \rightarrow \prod_{j \in J} \beta_f(P_j^*)$ est une fibration qui admet une action simplement transitive préservant les fibres du groupe $(\mathbb{R}^2)^I$.
5. On note $(c_j^r)_{r=1\dots l_j}$ la sous-famille de $(c_i)_{i \in I}$ des l_j lacets élémentaires du pantalon P_j qui sont homotopes à une composante connexe du bord du pantalon P_j marqué "coupure". On note $(b_j^s)_{s=1\dots m_j}$ la sous-famille de $(b_k)_{k=1,\dots,b}$ des m_j lacets élémentaires du pantalon P_j qui sont homotopes à une composante connexe du bord du pantalon P_j marqué "bord". L'application :

$$\begin{array}{ccc} \beta_f(P_j^*) & \rightarrow & \mathfrak{R}^{l_j} \times \widehat{\mathfrak{R}}^{m_j} \\ \mathcal{P} & \mapsto & (\lambda(\text{Hol}(c_j^r)), \tau(\text{Hol}(c_j^r)))_{r=1\dots l_j} \times (\lambda(\text{Hol}(b_j^s)), \tau(\text{Hol}(b_j^s)))_{s=1\dots m_j} \end{array}$$

est une fibration dont les fibres sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 .

6. En particulier, $\beta_f(\Sigma_{g,b,p})$ est une variété topologique à bord de dimension $16g - 16 + 6p + 8b$ homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16+6p+7b} \times [0, 1]^b$.

La démonstration de ce théorème va nécessiter plusieurs lemmes. Mais commençons plutôt par donner les étapes de la démonstration. Les deux premiers points sont des résultats classiques de topologie des surfaces. Le troisième point est une conséquence du premier point et de la proposition 3.3. Le quatrième point est un résultat de Goldman ([**Gold1**]) dont nous donnons une démonstration au paragraphe 3.3.1 pour la commodité du lecteur. Le cinquième point est le point le plus technique, l'idée vient de Goldman ([**Gold1**]) mais cette fois-ci, nous aurons besoin d'un réel travail pour pouvoir utiliser ces idées, on verra cela au paragraphe 3.3.2. Le sixième et dernier point est une simple conséquence des points 4. et 5. et du calcul suivant.

- L'holonomie des $(c_i)_{i \in I}$ donne $|I|$ éléments de \mathfrak{R} , soit $2(3g - 3 + p)$ paramètres.
- Dans le cas avec bord, les bords fournissent b éléments de $\widehat{\mathfrak{R}}$.
- Les pantalons $(P_j)_{j \in J}$ donnent deux paramètres chacun, soit $2(2g - 2 + p)$ paramètres.
- Le recollement de deux pantalons le long d'un c_i fournit deux paramètres, soit $2(3g - 3 + p)$ paramètres.
- Bilan : l'espace des modules est homéomorphe à $\mathfrak{R}^I \times \widehat{\mathfrak{R}}^b \times (\mathbb{R}^2)^J \times (\mathbb{R}^2)^I$ qui est une variété topologique à bord de dimension $2(3g - 3 + p) + 2b + 2(2g - 2 + p) + 2(3g - 3 + p) = 16g - 16 + 8b + 6p$.

Remarque 20. — Décrivons un peu la structure de $\beta_f(\Sigma_{g,b,p})$. L'intérieur de $\beta_f(\Sigma_{g,b,p})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16+8b+6p}$. Il s'agit des structures pour lesquels l'holonomie des lacets homotopes à une composante connexe du bord est hyperbolique.

Plus généralement, on peut décomposer $\beta_f(\Sigma_{g,b,p})$ en une réunion de variétés lisses (strates) toutes homéomorphes à des boules. Et, si $d \leq b$ l'espace $\beta_f(\Sigma_{g,b,p})$ possède $2^d \times C_b^d$ strates de codimension d . En effet, la réunion des strates de codimension d est l'ensemble des structures dont l'holonomie de d lacets homotopes à une composante connexe du bord est quasi-hyperbolique. Choisir une strate de dimension d , c'est donc choisir d lacets parmi les lacets $(b_k)_{k=1,\dots,b}$ et ensuite pour chacun d'eux choisir si le point fixe répulsif de l'holonomie est C^1 ou non. Il n'y a pas de strate de codimension d , si $d > b$. Enfin, on peut remarquer que l'adhérence des strates de codimension d est l'ensemble des strates de codimension $d' \geq d$.

3.3.1. Démonstration du quatrième point du théorème 3.3.5. — Le but de ce paragraphe est de montrer le quatrième point du théorème 3.3.5. Commençons par rappeler quelques propositions classiques de géométrie hyperbolique qui sont encore vrai dans pour les surfaces projectives proprement convexes.

Proposition 3.3.6. — *Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Alors, tout lacet simple non élémentaire tracé sur S est librement homotope à une géodésique simple.*

Proposition 3.3.7. — *Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Soient c_1 et c_2 deux lacets simples et non élémentaires tracés sur S , on note λ_1 (resp. λ_2) l'unique géodésique librement homotope à c_1 (resp. c_2). Si c_1 est simple alors λ_1 est simple. Si les lacets c_1 et c_2 ne s'intersectent pas, alors les géodésiques λ_1 et λ_2 ne s'intersectent pas.*

Les démonstrations sont identiques à celle du monde hyperbolique. On peut les trouver dans [**Gold1**] ou dans le chapitre 2.

On considère une surface S et c un lacet simple et non élémentaire tracé sur S . On note $S|c$ la surface topologique obtenue en retirant c à S et en ajoutant deux bords correspondants à

c . Cela est possible car S est orientable. On note $\beta_f(S|c^*)$ l'espace des modules des structures projectives de volume fini sur la surface $S|c$ tel que les holonomies des deux bords correspondants à c sont hyperboliques et conjuguées.

Il y a une application naturelle de $\varphi|_c : \beta_f(S) \rightarrow \beta_f(S|c^*)$. Expliquons sa construction de façon succincte. On considère une surface projective proprement convexe $\mathcal{S} \in \beta_f(S)$, elle est donnée par un homéomorphisme de S vers le quotient d'une partie proprement convexe \mathcal{C} de \mathbb{P}^2 par un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve \mathcal{C} . Le lacet c est librement homotope à une géodésique de \mathcal{S} , on peut donc supposer que tout relevé de c à \mathcal{C} est un segment ouvert de \mathcal{C} dont les extrémités sont sur le bord de \mathcal{C} . On choisit un relevé λ de c , comme le lacet c est simple, les images de λ par Γ ne s'intersectent pas.

Pour construire $\varphi|_c$, il faut distinguer deux cas : la surface $S|c$ est connexe ou bien la surface $S|c$ possède deux composantes connexes. Dans le premier cas, on note \mathcal{C}'_c une composante connexe de $\mathcal{C} - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\lambda$. On note $\Gamma|_c$ le stabilisateur dans Γ de \mathcal{C}'_c . On note $\mathcal{C}|_c$ le convexe obtenu en ajoutant à \mathcal{C}'_c les relevés de c qui bordent \mathcal{C}'_c . Le couple $(\mathcal{C}|_c, \Gamma|_c)$ fournit la structure voulue sur $S|c$, celle-ci est clairement proprement convexe et elle est de volume fini d'après le théorème 3.3.

Dans le second cas, on note \mathcal{C}'^1_c et \mathcal{C}'^2_c les composantes connexes de $\mathcal{C} - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\lambda$ qui bordent λ . On note $\Gamma^1|_c$ (resp. $\Gamma^2|_c$) le stabilisateur dans Γ de \mathcal{C}'^1_c (resp. \mathcal{C}'^2_c). On note $\mathcal{C}^1|_c$ (resp. $\mathcal{C}^2|_c$) le convexe obtenu en ajoutant à \mathcal{C}'^1_c (resp. \mathcal{C}'^2_c) les relevés de c qui bordent \mathcal{C}'^1_c (resp. \mathcal{C}'^2_c). Les couples $(\mathcal{C}^1|_c, \Gamma^1|_c)$ et $(\mathcal{C}^2|_c, \Gamma^2|_c)$ fournissent la structure voulue sur $S|c$, celle-ci est clairement proprement convexe et elle est de volume fini d'après le théorème 3.3.

On peut à présent énoncer la proposition 3.3.8 dont le point 4. est une conséquence évidente.

Proposition 3.3.8. — *Soient S une surface et c un lacet simple et non élémentaire de S , l'application naturelle de $\varphi|_c : \beta_f(S) \rightarrow \beta_f(S|c^*)$ est une fibration qui admet une action simplement transitive du groupe \mathbb{R}^2 sur ces fibres.*

Dans le paragraphe 3.3.1.1 nous allons construire cette action et dans le paragraphe 3.3.1.2 nous montrerons que cette action est simplement transitive.

3.3.1.1. Construction de l'action de \mathbb{R}^2 . — On reprend les notations du paragraphe précédent. On sait que l'holonomie γ de c est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \notin \mathcal{C}$. On peut supposer que l'élément γ est donné par une matrice diagonale à diagonale strictement positive et que les entrées de la diagonale de γ sont ordonnées par ordre croissant.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on définit les deux matrices suivantes :

$$T^u = \begin{pmatrix} e^{-u} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^u \end{pmatrix} \quad U^v = \begin{pmatrix} e^{-v} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2v} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-v} \end{pmatrix}$$

La composante neutre du centralisateur de γ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est le groupe D isomorphe à \mathbb{R}^2 donné par $D = \{T^u U^v \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$. Nous allons définir une action de D sur $\beta_f(S)$ qui préserve la fibration $\varphi|_c : \beta_f(S) \rightarrow \beta_f(S|c^*)$.

On se donne deux réels u et v et on va construire une nouvelle structure projective proprement convexe sur S . On note dev_0 la développante de \mathcal{S} et ρ_0 son holonomie. Il faut distinguer

deux cas : la surface $S|c$ est connexe ou bien la surface $S|c$ possède deux composantes connexes.

On commence par le second cas car il est plus facile à visualiser. On note \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}'_2 les deux composantes connexes de $\mathcal{C} - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\lambda$ qui bordent λ . On note Γ_1 (resp. Γ_2) le stabilisateur dans Γ de \mathcal{C}'_1 (resp. \mathcal{C}'_2). Le groupe Γ est le produit amalgamé du groupe Γ_1 et Γ_2 le long du groupe engendré par γ . La nouvelle holonomie $\rho_{u,v}$ est définie de la façon suivante :

- Si $\delta \in \Gamma_1$ alors on pose $\rho_{u,v}(\delta) = \rho_0(\delta)$.
- Si $\delta \in \Gamma_2$ alors on pose $\rho_{u,v}(\delta) = T^u U^v \rho_0(\delta) U^{-v} T^{-u}$.
- Cette définition n'est pas ambiguë car $T^u U^v$ commute avec γ .

La nouvelle développante est l'unique homéomorphisme $\rho_{u,v}$ -équivariant qui prolonge l'application $dev_{u,v} : \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ suivante :

- Si $x \in \mathcal{C}'_1$ alors on pose $dev_{u,v}(x) = dev_0(x)$.
- Si $x \in \mathcal{C}'_2$ alors on pose $dev_{u,v}(x) = T^u U^v dev_0(x)$.
- L'existence et l'unicité du prolongement de $dev_{u,v}$ à $\mathcal{C} = \tilde{S}$ est évidente.

Dans le premier cas, on note \mathcal{C}' une composante connexe de $\mathcal{C} - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\lambda$. On note Γ' le stabilisateur dans Γ de \mathcal{C}' . Enfin, on note α un élément de Γ qui correspond à un chemin simple tracé sur $S|c$ reliant les deux bords de $S|c$ correspondant à c . Nous allons modifier la développante dev_0 de S ainsi que son holonomie ρ_0 . Le groupe Γ est l'HNN-extension de Γ' relativement à α . La nouvelle holonomie $\rho_{u,v}$ est définie de la façon suivante :

- Si $\delta \in \Gamma'$ alors on pose $\rho_{u,v}(\delta) = \rho_0(\delta)$.
- On pose $\rho_{u,v}(\alpha) = T^u U^v \rho_0(\alpha)$.
- Cette définition ne dépend pas du choix de l'élément α car $T^u U^v$ commute avec le groupe engendré par γ .

La nouvelle développante est l'unique homéomorphisme $\rho_{u,v}$ -équivariant qui prolonge l'application $dev_{u,v}|_{\mathcal{C}'} = dev_0|_{\mathcal{C}'}$.

On a ainsi défini pour tout lacet simple non élémentaire c tracé sur la surface projective proprement convexe $\mathcal{S} \in \beta_f(S)$ une action du centralisateur D de $\text{Hol}(c)$ sur \mathcal{S} .

Comme D est isomorphe à \mathbb{R}^2 , nous venons de construire pour tout lacet simple non élémentaire c tracé sur la surface topologique S une action de \mathbb{R}^2 sur $\beta_f(S)$ qui préserve la fibration $\varphi|_c : \beta_f(S) \rightarrow \beta_f(S|c^*)$. Ainsi, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tout lacet simple tracé sur S et pour toute surface projective proprement convexe $\mathcal{S} \in \beta_f(S)$, on notera $\mathcal{S}^{(u,v)}$ la surface projective proprement convexe de volume fini obtenue par l'action de (u, v) sur \mathcal{S} que l'on vient de définir. Cette action de \mathbb{R}^2 sur $\beta_f(S)$ est libre. En effet, il est clair que $\rho_{u,v} \neq \rho_0$ pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ (Il suffit de distinguer les cas $S|c$ connexe et $S|c$ non connexe).

3.3.1.2. L'action de \mathbb{R}^2 est simplement transitive. — Nous allons montrer le lemme suivant qui conclut la démonstration de la proposition 3.3.8.

Lemme 3.3.9. — *Soient S une surface, c un lacet simple non élémentaire de S et \mathcal{S} et \mathcal{T} deux surfaces projectives proprement convexes de $\beta_f(S)$ telles que $\varphi|_c(\mathcal{S}) = \varphi|_c(\mathcal{T})$, alors il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{T} = \mathcal{S}^{(u,v)}$.*

Démonstration. — Comme l'action de \mathbb{R}^2 sur $\beta_f(S)$ est libre, il n'y a que l'existence à montrer. On ne fait que le cas où $S|c$ possède deux composantes connexes, l'autre cas est analogue. On note \mathcal{C}_S^1 et \mathcal{C}_S^2 (resp. \mathcal{C}_T^1 et \mathcal{C}_T^2) les parties proprement convexes associées aux deux composantes

connexes de \mathcal{S} (resp. \mathcal{T}) données par la développante de sa structure projective. On suppose bien sûr que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^1$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^1$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^2$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^2$) correspondent à la même composante connexe de $S|c$.

L'hypothèse $\varphi|_c(\mathcal{S}) = \varphi|_c(\mathcal{T})$ entraîne que les parties proprement convexes $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^1$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^1$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^2$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^2$) sont projectivement équivalentes.

On peut supposer que l'holonomie γ de c pour ces 4 structures projectives est donnée par une matrice diagonale à diagonale strictement positive, et que les entrées de la diagonale de γ sont rangées par ordre croissant. Les points $p_{\gamma}^+, p_{\gamma}^-, p_{\gamma}^0$ sont donc les mêmes pour ces 4 structures, ils définissent un pavage de \mathbb{P}^2 par 4 triangles fermés. Deux de ces triangles bordent l'axe de γ , on les note Δ_1 et Δ_2 . La dynamique des éléments hyperboliques montre que, quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^1$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^1$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^2$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^2$) sont inclus dans Δ_1 (resp. Δ_2).

Les parties proprement convexes $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^1$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^1$ sont projectivement équivalentes. On peut donc supposer que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^1 = \mathcal{C}_{\mathcal{T}}^1$. De même, les parties proprement convexes $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^2$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^2$ sont projectivement équivalentes. Par conséquent, il existe une transformation projective f qui identifie $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^2$ sur $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^2$. On peut supposer que celle-ci préserve l'axe de γ . Par conséquent, elle doit aussi préserver le point p_{γ}^0 puisque c'est l'intersection des demi-tangentes (différentes de l'axe de γ) à $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}^2$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}^2$ aux points p_{γ}^+ et p_{γ}^- . Par conséquent, la transformation projective f fixe les points $p_{\gamma}^+, p_{\gamma}^-$ et p_{γ}^0 , c'est donc un élément du centralisateur de γ . De fait, l'élément f appartient au groupe D , et la structure \mathcal{T} sur la surface topologique S est obtenue par l'action de f sur \mathcal{S} . C'est ce qu'il fallait montrer. \square

3.3.2. Démonstration du cinquième point du théorème 3.3.5. —

3.3.2.1. *Les pantalons et l'objet combinatoire.* — Pour éviter les confusions sur l'objet désigné par le mot triangle, on utilisera la convention suivante : un *triangle fermé* est un fermé d'une carte affine qui est l'intersection de trois demi-plans fermés en position générique. Un *triangle ouvert* est l'intérieur (qui est toujours non vide) d'un triangle fermé. Un *triangle épointé* est un triangle fermé sans ses sommets. Un *triangle topologique* est l'image d'un triangle épointé par un homéomorphisme.

L'idée de Goldman est la suivante : nous allons associer à tout pantalon projectif proprement convexe \mathcal{P} un objet combinatoire, à savoir quatre triangles dont la réunion est un hexagone, muni de trois applications projectives qui identifient certains triangles entre eux (Voir figure 1). Le groupe Γ engendré par ces trois applications est isomorphe au groupe libre à 2 générateurs. La réunion des quatre triangles épointés et de leurs images sous Γ forment un ouvert Ω proprement convexe. Le quotient Ω/Γ est le pantalon \mathcal{P} .

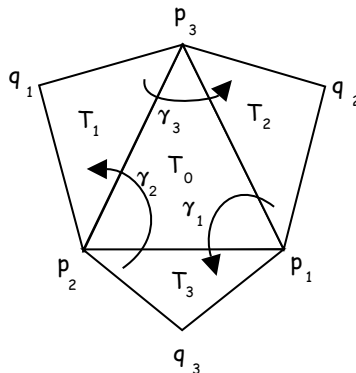


FIGURE 1. *L'hexagone*

La démonstration se fait en trois parties. On commence par construire à partir d'un pantalon projectif proprement convexe l'objet combinatoire (paragraphe 3.3.2.2). Ensuite, on montre que, si l'on part de l'objet combinatoire, alors on obtient bien un pantalon projectif proprement convexe (paragraphe 3.3.2.3). Enfin, on calcule l'espace des modules de cet objet combinatoire (paragraphe 3.3.2.5).

On souhaite comprendre l'espace des modules des pantalons projectifs proprement convexes dont les classes de conjugaison des holonomies des lacets élémentaires sont fixées. On introduit donc l'espace suivant, on se donne $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et on pose :

$$\mathcal{Q}'_{\delta_1, \delta_2, \delta_3} = \left\{ \begin{array}{l} (T_0, T_1, T_2, T_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \text{ tel que :} \\ 1. T_0, T_1, T_2, T_3 \text{ sont des triangles épointés et le triangle } T_0 \\ \text{intersecte } T_1, T_2, T_3 \text{ le long de ses 3 arêtes} \\ 2. \bigcup_{i=0, \dots, 3} \overline{T_i} \text{ est un hexagone} \\ \text{convexe qui possède exactement 6 côtés} \\ 3. \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 = 1 \\ 4. \gamma_1(T_2) = T_3, \gamma_2(T_3) = T_1, \gamma_3(T_1) = T_2 \\ 5. \text{L'élément } \gamma_i \text{ est conjugué à } \delta_i \text{ dans } \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}), \text{ pour } i = 1, \dots, 3. \end{array} \right.$$

L'action naturelle de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{Q}'_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ est libre et propre : on s'intéresse à l'espace quotient $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3} = \mathcal{Q}'_{\delta_1, \delta_2, \delta_3} / \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui sont hyperboliques, quasi-hyperboliques ou paraboliques. Soit P la surface $\Sigma_{0,3,0}$, on numérote les composantes connexes du bord de P de 1 à 3. On choisit aussi une orientation de chacun des bords. On note $P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ le pantalon à bord obtenue à partir de P en retirant le bord i lorsque l'élément δ_i est parabolique. On notera $\beta_f(P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$ l'espace des modules des structures projectives proprement convexes sur le pantalon $P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ tel que l'holonomie du lacet élémentaire orienté numéroté i est conjuguée à δ_i , pour $i = 1, \dots, 3$.

Les deux prochains paragraphes sont consacrés à la démonstration de cette proposition.

Proposition 3.3.10. — *Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ trois éléments hyperboliques, quasi-hyperboliques ou paraboliques de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, l'espace $\beta_f(P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$ est homéomorphe à $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$.*

3.3.2.2. Construction de l'objet combinatoire. — Soit $\mathcal{P} \in \beta_f(P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$, nous allons découper l'intérieur de \mathcal{P} à l'aide de deux triangles idéaux épointés. Pour cela on utilise les dessins de la figure 2. La figure 3 résume la construction de l'objet combinatoire.

La forme des chemins l_1, l_2, l_3 dépend de l'holonomie du bout. Nous allons montrer que l'on peut supposer que ces chemins sont des géodésiques simples et qu'elles ne s'intersectent pas.

Commençons par analyser ces dessins d'un point de vue topologique, on note S l'intérieur de $P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$. Les chemins l_1, l_2 et l_3 se relèvent en des chemins simples \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 et \tilde{l}_3 tracés sur le revêtement universel \tilde{S} de S . Chacun des chemins \tilde{l}_i vérifie que $\tilde{S} - \tilde{l}_i$ possède deux composantes connexes. Ces chemins et leurs images par le groupe fondamental Γ de S définissent une

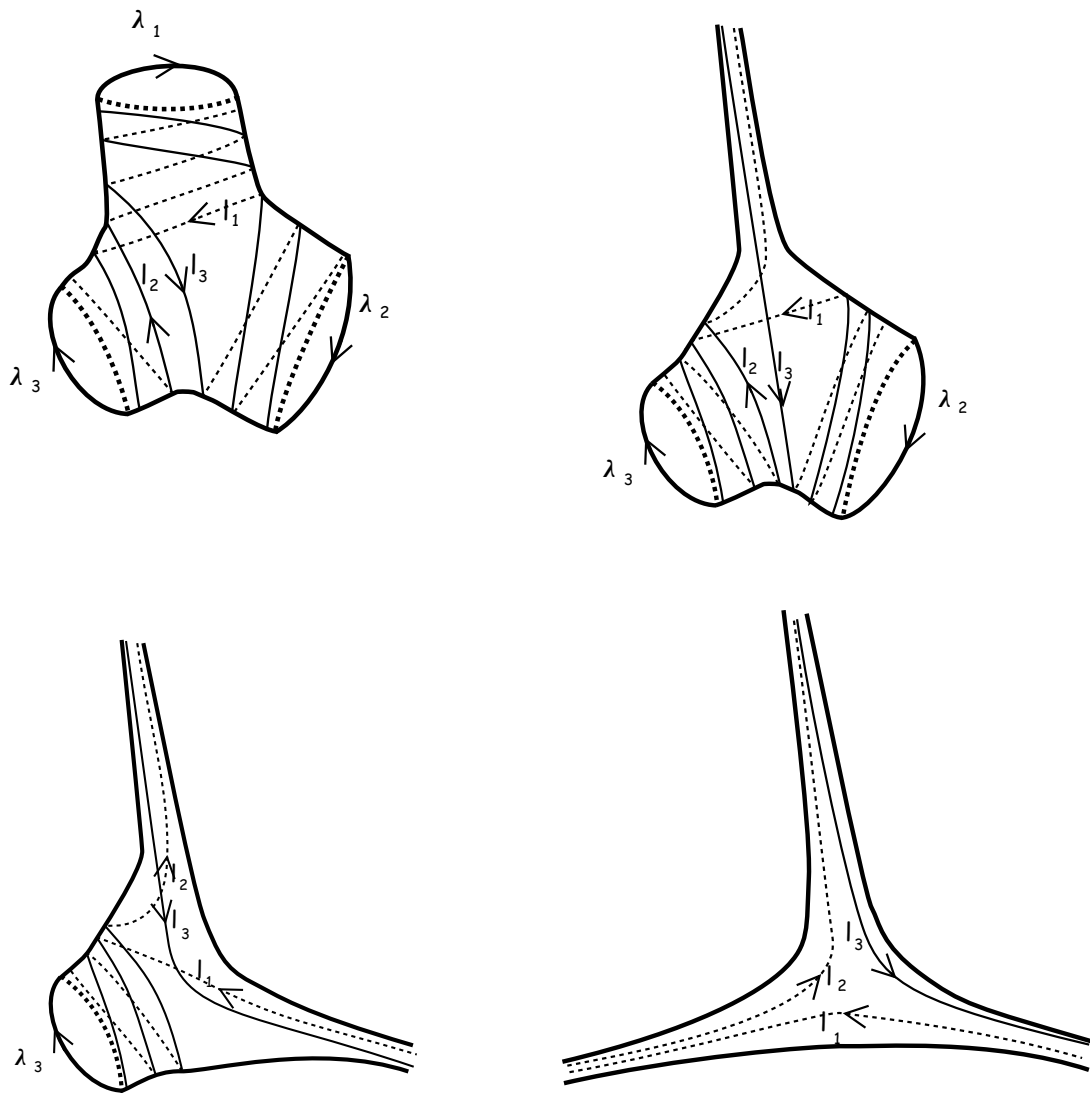


FIGURE 2. Pantalons avec zéro, une, deux et enfin trois pointes

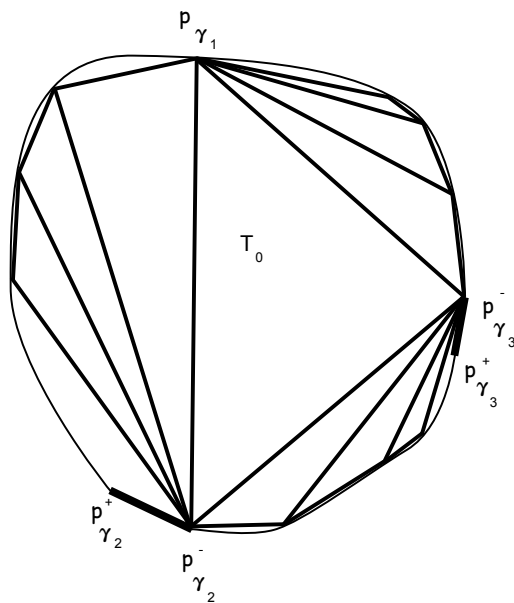


FIGURE 3. Revêtement universel d'un pantalon projectif proprement convexe

triangulation de \tilde{S} . Deux triangles topologiques adjacents définissent un domaine fondamental pour l'action de Γ sur \tilde{S} .

Nous allons montrer que chacun de ces chemins peut être supposé géodésique. Pour simplifier la discussion, on ne fait que le cas où δ_1 est parabolique et δ_2, δ_3 hyperbolique. Les autres cas se traitent de façon analogue. On note \mathcal{C} le revêtement universel de \mathcal{P} donné par la développante de \mathcal{P} . L'ensemble \mathcal{C} est un convexe proprement convexe de \mathbb{P}^2 . On note γ_1 (resp. γ_2 resp. γ_3) les représentants de l'holonomie des lacets λ_1 (resp. λ_2 resp. λ_3) donnés par le choix du point base x_0 sur \mathcal{P} comme sur le dessin 4. Ils vérifient la relation $\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = 1$.

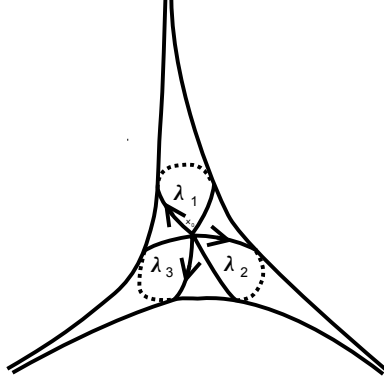


FIGURE 4

Les axes de γ_2 et γ_3 sont inclus dans le bord de \mathcal{C} . L'un des relevés \tilde{l}_3 du chemin l_3 converge en $-\infty$ vers le point p_{γ_1} et en $+\infty$ vers le point $p_{\gamma_2}^-$. On peut donc supposer que le chemin \tilde{l}_3 est le segment ouvert d'extrémité p_{γ_1} et $p_{\gamma_2}^-$ qui est inclus dans \mathcal{C} . De la même façon, on peut supposer que \tilde{l}_1 est le segment ouvert d'extrémités $p_{\gamma_2}^-$ et $p_{\gamma_3}^-$ inclus dans \mathcal{C} et \tilde{l}_2 le segment ouvert d'extrémités $p_{\gamma_3}^-$ et p_{γ_1} inclus dans \mathcal{C} . La triangulation topologique de \tilde{S} peut donc être réalisée dans Ω l'intérieur de \mathcal{C} par des géodésiques qui ne s'intersectent pas. On note T_0 l'unique triangle époincé inclus dans \mathcal{C} défini par les points $p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}^-, p_{\gamma_3}^-$. Les composantes connexes de Ω privé des images des segments $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$ sous l'action du groupe fondamental Γ de \mathcal{P} sont des triangles ouverts. On note T_i le triangle époincé qui borde \tilde{l}_i , pour $i = 1, \dots, 3$.

L'action de Γ sur Ω admet pour domaine fondamental la réunion de T_0 et de n'importe quel T_i pour $i = 1, \dots, 3$. Les identifications sont données par les éléments γ_1, γ_2 et γ_3 .

La réunion des triangles époincés T_0, T_1, T_2, T_3 est un hexagone convexe car les triangles T_0, T_1, T_2, T_3 ont leurs sommets sur le bord de l'ouvert proprement convexe Ω . Cet hexagone possède six côtés car, s'il possédait deux côtés consécutifs sur la même droite, alors la réunion de ces deux cotés serait incluse dans le bord de \mathcal{C} ; or elle est incluse dans son intérieur puisqu'il s'agit de relevés des chemins l_1, l_2, l_3 .

On vient donc de construire une application de $\beta_f(P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$ vers $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$. Le paragraphe suivant a pour but de construire l'application réciproque.

La seule difficulté est de montrer que si l'on se donne un point de $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, alors l'ensemble obtenu en prenant la réunion des images des triangles époincés T_0, T_1, T_2, T_3 sous l'action du groupe engendré par les éléments $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ est un ouvert proprement convexe Ω .

3.3.2.3. Un lemme de convexité. — L'objet de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.3.11. — Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ des éléments hyperboliques, quasi-hyperboliques ou paraboliques, et $(T_0, T_1, T_2, T_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, on note Γ le groupe engendré par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et Ω la réunion des triangles $\gamma T_0, \gamma T_1, \gamma T_2, \gamma T_3$ pour $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble Ω est un ouvert proprement convexe, le groupe Γ est isomorphe au groupe libre à deux générateurs et le quotient Ω/Γ est un pantalon projectif proprement convexe dont l'holonomie des lacets élémentaires est conjuguée à $\delta_1^\pm, \delta_2^\pm, \delta_3^\pm$.

Remarque 21. — C'est cette partie de la démonstration du théorème 3.3.5 qui diffère radicalement de la démonstration de Goldman pour le cas compact. Nous allons montrer cette proposition "à la main", alors que dans le cas compact, Goldman réussit à utiliser un résultat de Kozsul pour montrer cette proposition.

Pour montrer cette proposition nous allons introduire un espace abstrait X obtenu de la façon suivante : on considère \tilde{X} la réunion disjointe des triangles $\gamma T_0, \gamma T_1, \gamma T_2, \gamma T_3$ pour $\gamma \in \Gamma$.

On introduit une relation d'équivalence \sim sur \tilde{X} . Commençons par la définir sur les réunions disjointes $T_{i+2} \amalg \gamma_i T_{i+1}$, pour $i = 1, \dots, 3$ (les indices étant calculés modulo 3). Soient $x, y \in T_{i+2} \amalg \gamma_i T_{i+1}$, on a $x \sim y$ lorsque :

$$(x \in T_{i+2} \text{ et } y \in \gamma_i T_{i+1} \text{ et } y = x)$$

Soient $x, y \in \tilde{X}$ on a $x \sim y$ lorsqu'il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma x \sim \gamma y$. On note p l'application naturelle $p : X \rightarrow \mathbb{P}^2$, elle permet de définir la notion de segment dans X .

Définition 3.3.12. — Un *segment dans X* est une application continue $s : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $p \circ s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^2$ est une application injective dont l'image est un segment de longueur strictement inférieure à π , pour la métrique euclidienne canonique de \mathbb{P}^2 .

Les sous-ensembles de X de la forme $\gamma T_0, \gamma T_1, \gamma T_2, \gamma T_3$ pour $\gamma \in \Gamma$ seront appelés les *cellules* de X . Leurs intérieurs seront appelés les *cellules ouvertes* de X .

Définition 3.3.13. — Une partie C de X est dite *convexe* lorsque pour tout $x, y \in C$, il existe un segment d'extrémités x et y inclus dans C .

Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 3.3.14. — *L'ensemble X est convexe.*

La démonstration de ce lemme est le coeur de la démonstration de la proposition 3.3.11. On lui consacrera donc le paragraphe suivant. Mais commençons par montrer pourquoi ce lemme permet de conclure. Le lemme suivant est évident.

Lemme 3.3.15. — *La restriction de p à la réunion de deux cellules adjacentes est un homéomorphisme sur son image.*

Lemme 3.3.16. — *La restriction de p à toute partie convexe C de X est injective et l'image $p(C)$ est un convexe de \mathbb{P}^2 .*

Démonstration. — Soient $x, y \in C$, il existe un segment dans X d'extrémités x et y ; par conséquent l'image $p(C)$ est un convexe de \mathbb{P}^2 . Si les points x et y vérifient $p(x) = p(y)$, alors $x = y$ puisque par définition un segment est une application injective. \square

Démonstration de la proposition 3.3.11. — Les lemmes 3.3.14 et 3.3.16 montrent que l'application p est injective. De plus, c'est un homéomorphisme local d'après le lemme 3.3.15. Par conséquent, c'est un homéomorphisme sur son image Ω . L'ensemble Ω est donc un ouvert convexe.

Le groupe Γ préserve l'ouvert Ω . Un domaine fondamental pour cette action est la réunion de deux cellules adjacentes. Et les identifications faites par Γ montrent que le quotient est un pantalon. Par conséquent, le groupe Γ est un groupe libre à 2 générateurs. Et l'holonomie des lacets élémentaires est conjuguées à $\delta_1^\pm, \delta_2^\pm, \delta_3^\pm$.

Il reste à montrer que l'ouvert Ω est proprement convexe. Si l'ouvert Ω n'était pas proprement convexe alors le groupe Γ préserverait un point ou une droite de \mathbb{P}^2 . Nous allons montrer que les droites et les points fixes de γ_1 ne sont pas préservés par γ_2 et γ_3 . Pour simplifier la discussion on ne fait que le cas où les γ_i sont hyperboliques. Les autres cas sont des "dégénérescences" de ce cas. Les droites des côtés de T_0 définissent un pavage en 4 triangles fermés de \mathbb{P}^2 . Le point $p_{\gamma_i}^+$ pour $i = 1, \dots, 3$ ne peut pas appartenir au triangle fermé dont l'intersection avec le triangle fermé $\overline{T_0}$ est le point $p_{\gamma_i}^-$ et le côté opposé au point $p_{\gamma_i}^-$, car sinon $p_{\gamma_i}^- \in \Omega$. Par conséquent, les points $(p_{\gamma_i}^+)_{i=1, \dots, 3}$ sont dans les intérieurs des triangles de ce pavage. De plus, il est facile de voir que si $i \neq j$, alors $p_{\gamma_i}^+$ et $p_{\gamma_j}^+$ ne sont pas dans le même triangle. On note T_{γ_i} le triangle ouvert avec $p_{\gamma_i}^+ \in T_{\gamma_i}$, pour $i = 1, \dots, 3$. Le point $p_{\gamma_i}^0$ est sur la droite tangente au bord $\partial\Omega$ de Ω au point $p_{\gamma_i}^-$, par conséquent le point $p_{\gamma_i}^0$ appartient aussi au triangle T_{γ_i} . Ainsi, il n'y a aucun point et aucune droite de \mathbb{P}^2 qui sont fixés par les trois éléments $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. \square

3.3.2.4. Démonstration du lemme 3.3.14. — Les composantes connexes du bord des cellules de X seront appelées les murs de X . Soient C_1, C_2 deux cellules de X , on note $\mathcal{C}_{C_1, C_2} = \{(x, y) \in C_1 \times C_2 \mid \text{il existe un segment dans } X \text{ d'extrémités } x \text{ et } y\}$. Nous allons montrer que \mathcal{C}_{C_1, C_2} est ouvert et fermé dans $C_1 \times C_2$. Le point difficile étant la fermeture.

Lemme 3.3.17. — \mathcal{C}_{C_1, C_2} est ouvert dans $C_1 \times C_2$.

Démonstration. — Soit $(x, y) \in \mathcal{C}_{C_1, C_2}$, il existe un segment s reliant x à y . Comme l'image d'un segment est compact elle est incluse dans un nombre fini de cellules de X . On note $(x^i)_{i=1 \dots N}$ les points d'intersections du segment $[x, y]$ avec les murs de X numérotés via la paramétrisation de $[x, y]$. On pose $x^0 = x$ et $x^{N+1} = y$. Comme chaque cellule est convexe, il existe des voisinages V_{x^i} de x^i (pour $i = 1, \dots, N + 1$) dans X tels que l'enveloppe convexe dans chaque cellule des couples $(V_{x^i}, V_{x^{i+1}})$ contienne un voisinage convexe du segment $[x^i, x^{i+1}]$ inclus dans la cellule contenant $[x^i, x^{i+1}]$. Comme la réunion de deux cellules adjacentes est convexe, la réunion de ces voisinages contient un voisinage convexe de $[x, y]$. \square

On souhaite à présent montrer le lemme suivant.

Lemme 3.3.18. — \mathcal{C}_{C_1, C_2} est fermé dans $C_1 \times C_2$.

Les lemmes 3.3.16 et 3.3.15 montrent que p est un homéomorphisme local. On peut donc munir X de la métrique riemannienne induite par la métrique riemannienne canonique de \mathbb{P}^2 . Le complété de X pour cette distance sera noté \overline{X} .

Lemme 3.3.19. — Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments d'extrémités $x_n \in C_1$ et $y_n \in C_2$, le segment s_n traverse N_n murs $M_1^n, \dots, M_{N_n}^n$ de X (ordonnés par la paramétrisation de s_n). On note $(x_n^i)_{i=1 \dots N_n}$ les points d'intersection de s_n avec les murs de X (ordonnés via la paramétrisation de s_n). Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans X et la suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans X et converge dans \overline{X} vers x_∞^1 , alors, si n est assez grand, la suite N_n est constante égale à N , les suites M_1^n, \dots, M_N^n sont constantes et il existe un $\gamma \in \Gamma$ et une cellule C' adjacente à C_1 tels que $s_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n(C_1 \cup C')$ et y_n tend vers x_∞^1 .

Démonstration. — Quitte à extraire on peut supposer que les suites M_1^n et M_2^n sont constantes car les cellules de X ont un nombre fini de côtés. On note C' la cellule adjacente à C_1 et telle

que $C_1 \cap C' = M_1^n$ et C'' la cellule adjacente à C' et telle que $C' \cap C'' = M_2^n$. Il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma C_1 = C''$.

Comme γ est hyperbolique ou quasi-hyperbolique ou parabolique, l'ensemble $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n(C_1 \cup C')$ est un convexe de X (voir la figure 5).

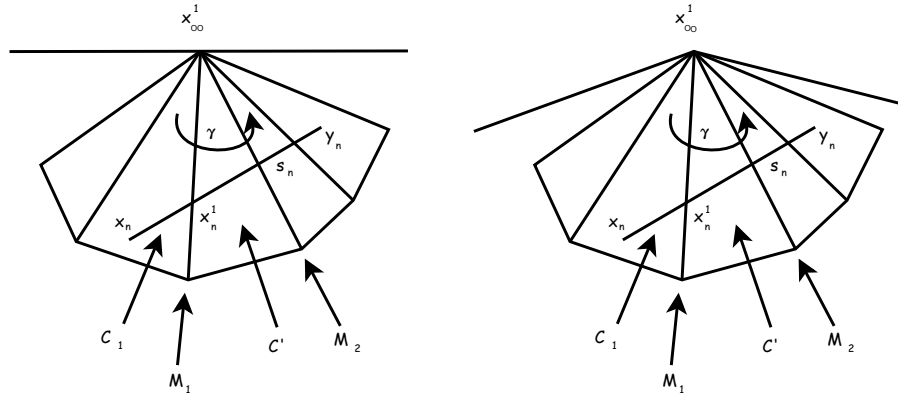


FIGURE 5. Le cas parabolique et le cas hyperbolique ou quasi-hyperbolique

On note $M^{2i-1} = \gamma^{i-1}M^1$ et $M^{2i} = \gamma^{i-1}M^2$, pour $i \geq 1$. Il est clair que si n est assez grand alors $x_n^i \in M^i$, pour $i \geq 1$ et $x_n^i \in M^i$ converge vers x_∞^1 . Donc la cellule C_2 est de la forme $\gamma^n C_1$ ou $\gamma^n C'$ pour un $n \in \mathbb{N}$. La suite N_n est donc constante égale à un certain N et les suites M_1^n, \dots, M_N^n sont constantes et y_n tend vers x_∞^1 . \square

On peut à présent montrer le lemme 3.3.18.

Démonstration du lemme 3.3.18. — Soit $(x_n, y_n) \in \mathcal{C}_{C_1, C_2}$ une suite qui converge dans $C_1 \times C_2$ vers le couple (x, y) . Il existe un segment s_n dans X reliant x_n à y_n . On note $(x_n^i)_{i=1 \dots N_n}$ les points d'intersection de s_n avec les murs de X (numérotés via la paramétrisation de s_n). Nous allons montrer par l'absurde que les suites $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent dans X .

On a deux cas à distinguer :

- Toutes les suites $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent. En particulier, la suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans X , quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge dans \overline{X} ; et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans X .
- Il existe un $i_0 = 2, \dots, N$ tel que la suite $(x_n^{i_0})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans X mais sous-converge dans \overline{X} et la suite $(x_n^{i_0-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans X .

Dans le premier cas, le lemme 3.3.19 montre que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, ce qui est absurde. Dans le second cas, le lemme 3.3.19 appliqué aux segments $[x_n^{i_0-1}, y_n]$ montre que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Ce qui est absurde. Donc, les suites $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Par conséquent, les points x et y sont reliés par une réunion finie de segments qui vérifie de plus que sa restriction à la réunion de deux cellules adjacentes est un segment. Ce chemin est donc un segment. \square

On peut à présent montrer le lemme 3.3.14

Démonstration du lemme 3.3.14. — Les lemmes 3.3.17 et 3.3.18 montrent que si $\mathcal{C}_{C_1, C_2} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{C}_{C_1, C_2} = C_1 \times C_2$. On peut définir le graphe \mathcal{A} dont les sommets sont les cellules de X et deux sommets de \mathcal{A} sont reliés si les cellules correspondantes bordent un même mur. Une simple récurrence sur la distance dans le graphe \mathcal{A} à une cellule de départ C_0 montre que, pour

tout n , la réunion des cellules à distance inférieure ou égale à n de C_0 est une partie convexe. On pourra remarquer que le graphe \mathcal{A} est l'arbre infini de valence 3. \square

3.3.2.5. L'espace $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . —

Proposition 3.3.20. — Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ trois éléments hyperboliques, quasi-hyperboliques ou paraboliques de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, l'espace $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

La démonstration de cette proposition est l'objet des deux prochains paragraphes. Cette démonstration est une légère généralisation de celle de Goldman ([Gold1]) qui ne traite pas les cas où les δ_i sont paraboliques ou quasi-hyperboliques.

3.3.2.5.1. Paramétrisation de l'hexagone. — On commence par introduire l'espace suivant :

$$\mathcal{H}' = \left\{ \begin{array}{l} (T_0, T_1, T_2, T_3) \text{ tel que :} \\ 1. T_0, T_1, T_2, T_3 \text{ sont des triangles épointés et le triangle } T_0 \\ \text{intersecte } T_1, T_2, T_3 \text{ le long de ces 3 arêtes} \\ 2. \bigcup_{i=0, \dots, 3} \overline{T}_i \text{ est un hexagone} \\ \text{convexe a exactement 6 côtés} \end{array} \right\}$$

Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ agit proprement et librement sur \mathcal{H}' , on note \mathcal{H} le quotient $\mathcal{H}'/\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Nous allons montrer le lemme suivant.

Lemme 3.3.21. — L'espace \mathcal{H} est homéomorphe à \mathbb{R}^4 .

Démonstration. — Les notations sont les mêmes que celles de la figure 1. Commençons par nommer les sommets du triangle T_0 . On notera p_1 l'intersection de $\overline{T}_0, \overline{T}_2$ et \overline{T}_3 , p_2 l'intersection de $\overline{T}_0, \overline{T}_3$ et \overline{T}_1 et p_3 l'intersection de $\overline{T}_0, \overline{T}_1$ et \overline{T}_2 . On peut supposer que leurs coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} p_1 &= [1 : 0 : 0] \\ p_2 &= [0 : 1 : 0] \\ p_3 &= [0 : 0 : 1] \end{cases}$$

On notera q_1 le sommet de T_1 qui n'intersecte pas \overline{T}_0 , q_2 le sommet de T_2 qui n'intersecte pas \overline{T}_0 et q_3 le sommet de T_3 qui n'intersecte pas \overline{T}_0 .

$$\begin{cases} q_1 &= [-1 : b_1 : c_1] \\ q_2 &= [a_2 : -1 : c_2] \\ q_3 &= [a_3 : b_3 : -1] \end{cases}$$

Où, les quantités $b_1, c_1, a_2, c_2, a_3, b_3$ sont strictement positives. Le stabilisateur de p_1, p_2, p_3 dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est le groupe D des matrices diagonales à diagonale strictement positive. On considère l'élément g donné par la matrice suivante :

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

Où, les quantités λ, μ, ν sont strictement positives. L'action de g sur \mathcal{H}' fixe les points $(p_i)_{i=1, \dots, 3}$. Son action sur les points $(q_i)_{i=1, \dots, 3}$ s'écrit de la façon suivante :

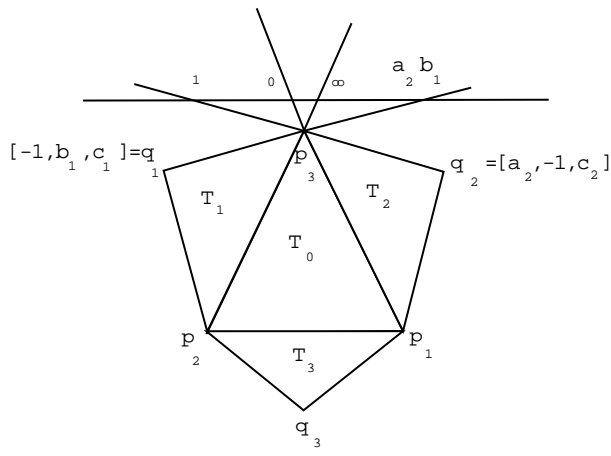


FIGURE 6

$$\begin{cases} b_1 \mapsto \frac{\mu}{\lambda} b_1 \\ c_1 \mapsto \frac{\nu}{\lambda} c_1 \\ a_2 \mapsto \frac{\Delta}{\mu} a_2 \\ c_2 \mapsto \frac{\nu}{\mu} c_2 \\ a_3 \mapsto \frac{\lambda}{\nu} a_3 \\ b_3 \mapsto \frac{\mu}{\nu} b_3 \end{cases}$$

On notera ρ_i le birapport des 4 droites concourantes en p_i définies par les triangles T_0, T_1, T_2, T_3 . On a :

$$\begin{cases} \rho_1 = b_3 c_2 \\ \rho_2 = c_1 a_3 \\ \rho_3 = a_2 b_1 \end{cases}$$

L'hexagone $\bigcup_{i=0, \dots, 3} \overline{T_i}$ est convexe qui possède exactement six côtés si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, 3$, $\rho_i > 1$. On définit en plus les quantités suivantes qui sont D -invariantes :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_2 b_3 c_1 \\ \sigma_2 = a_3 b_1 c_2 \end{cases}$$

Elles vérifient : $\sigma_1 \sigma_2 = \rho_1 \rho_2 \rho_3$. C'est ce qu'il fallait montrer. On a même le lemme plus précis suivant. \square

Lemme 3.3.22. — Il existe des applications continues $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2$ de l'espace \mathcal{H} vers \mathbb{R} telles que l'application $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{I}$ est un homéomorphisme, où $\mathcal{I} = \{(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^5 \mid \rho_1, \rho_2, \rho_3 > 1, \sigma_1, \sigma_2 > 0, \sigma_1 \sigma_2 = \rho_1 \rho_2 \rho_3\}$

3.3.2.5.2. Paramétrisation des éléments γ_i . — Nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.23. — Soient T et T' deux triangles ouverts disjoints de \mathbb{P}^2 qui ont un sommet p en commun et un élément γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui fixe p , tel que $\gamma T = T'$. Si le spectre de γ est réel positif alors γ est hyperbolique ou quasi-hyperbolique ou parabolique.

Démonstration. — Il suffit de montrer que γ ne peut pas être conjugué à l'une des deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

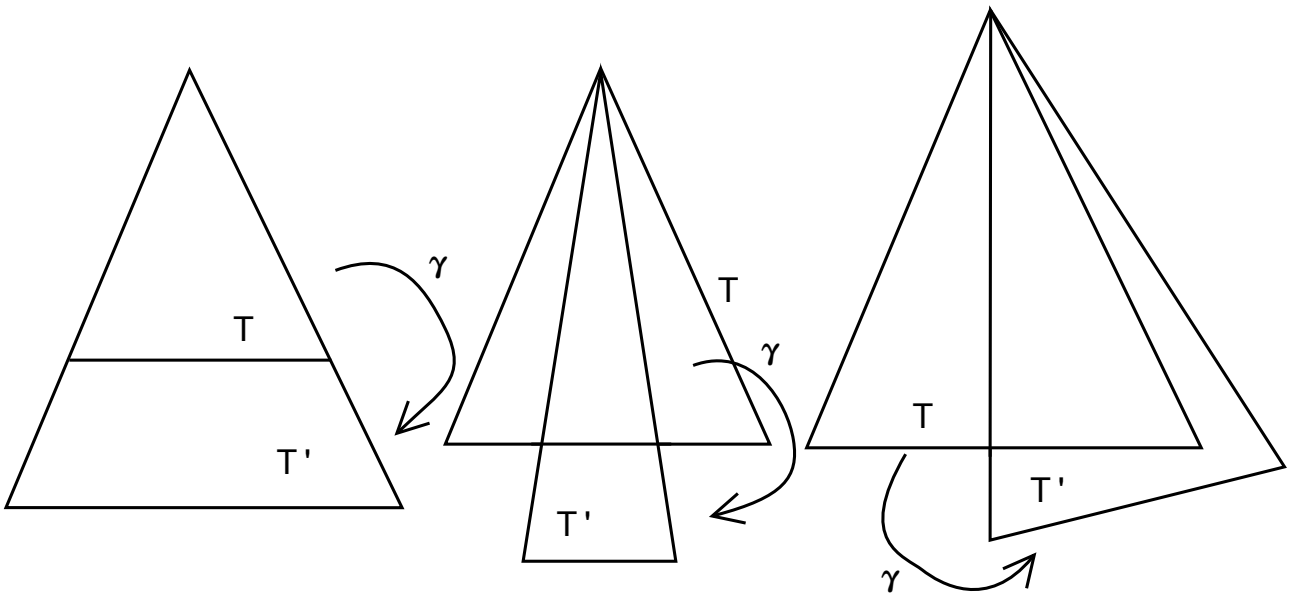


FIGURE 7. Toutes les situations possibles si γ est conjugué à A ou B

où $\alpha > 1$.

Il est facile de voir que l'image de tout triangle ouvert T par un élément conjugué à l'une de ces deux matrices qui fixe un sommet de T est un triangle T' tel que l'intersection $T \cap T'$ est non vide. \square

On peut à présent montrer la proposition suivante :

Proposition 3.3.24. — *Il existe des applications continues $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2, \kappa_1, \mu_1, \nu_1, \kappa_2, \mu_2, \nu_2, \kappa_3, \mu_3, \nu_3$ de l'espace $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ vers \mathbb{R} telles que l'application $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2, \kappa_1, \mu_1, \nu_1, \kappa_2, \mu_2, \nu_2, \kappa_3, \mu_3, \nu_3) : \mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3} \rightarrow \mathcal{E}$ est un homéomorphisme, où*

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \sigma_1, \sigma_2, \kappa_1, \mu_1, \nu_1, \kappa_2, \mu_2, \nu_2, \kappa_3, \mu_3, \nu_3) \in \mathbb{R}^{14} \text{ tel que :} \\ \rho_1, \rho_2, \rho_3 > 1, \sigma_1, \sigma_2 > 0 \\ \kappa_1, \mu_1, \nu_1, \kappa_2, \mu_2, \nu_2, \kappa_3, \mu_3, \nu_3 > 0 \\ 1. \sigma_1 \sigma_2 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \\ 2. \kappa_1 \mu_1 \nu_1 = \kappa_2 \mu_2 \nu_2 = \kappa_3 \mu_3 \nu_3 = 1 \\ 3. \kappa_1 \nu_2 \mu_3 = \kappa_2 \nu_3 \mu_1 = \kappa_3 \nu_1 \mu_2 = 1 \\ 4. \kappa_i = \lambda(\delta_i), \text{ pour } i = 1, \dots, 3. \\ 5. -\mu_i + \nu_i(\rho_i - 1) = \tau(\delta_i), \text{ pour } i = 1, \dots, 3. \end{array} \right\}.$$

Démonstration. — On se donne $(T_0, T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{H}$ et on cherche γ_1 (resp. γ_2 resp. γ_3) conjugué à δ_1 (resp. δ_2 resp. δ_3) telle que $\gamma_1(T_2) = T_3$, $\gamma_2(T_3) = T_1$, $\gamma_3(T_1) = T_2$ et tel que $\gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 = 1$. Nous allons avoir besoin de travailler dans \mathbb{R}^3 plutôt que dans \mathbb{P}^2 . On notera e_i un relevé de p_i et f_i un relevé de q_i , pour $i = 1, \dots, 3$. On peut supposer que l'on a :

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1) \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = (-1, b_1, c_1) \\ f_2 = (a_2, -1, c_2) \\ f_3 = (a_3, b_3, -1) \end{cases}$$

Il existe donc des réels $\kappa_1, \mu_1, \nu_1, \kappa_2, \mu_2, \nu_2, \kappa_3, \mu_3, \nu_3 > 0$ tels que :

$$\begin{cases} \gamma_1(e_1) = \kappa_1 e_1 \\ \gamma_1(f_2) = \mu_1 e_2 \\ \gamma_1(e_3) = \nu_1 f_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_2(e_2) = \kappa_2 e_2 \\ \gamma_2(f_3) = \mu_2 e_3 \\ \gamma_2(e_1) = \nu_2 f_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_3(e_3) = \kappa_3 e_3 \\ \gamma_3(f_1) = \mu_3 e_1 \\ \gamma_3(e_2) = \nu_3 f_2 \end{cases}$$

On peut donc écrire les matrices de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ dans la base (e_1, e_2, e_3) :

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \nu_1 c_2 a_3 + \kappa_1 a_2 & \nu_1 a_3 \\ 0 & \nu_1 c_2 b_3 - \mu_1 & \nu_1 b_3 \\ 0 & -\nu_1 c_2 & -\nu_1 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} -\nu_2 & 0 & -\nu_2 a_3 \\ \nu_2 b_1 & \kappa_2 & \nu_2 a_3 b_1 + \kappa_2 b_3 \\ \nu_2 c_1 & 0 & \nu_2 a_3 c_1 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} \nu_3 b_1 a_2 - \mu_3 & \nu_3 a_2 & 0 \\ -\nu_3 b_1 & -\nu_3 & 0 \\ \nu_3 b_1 c_2 + \kappa_3 c_1 & \nu_3 c_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}$$

On peut calculer le déterminant de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, on trouve :

$$\det(\gamma_1) = \kappa_1 \mu_1 \nu_1, \det(\gamma_2) = \kappa_2 \mu_2 \nu_2, \det(\gamma_3) = \kappa_3 \mu_3 \nu_3$$

De plus, il est clair que le produit $\gamma_3 \gamma_2 \gamma_1$ vérifie :

$$\gamma_3 \gamma_2 \gamma_1(e_1) = (\kappa_1 \nu_2 \mu_3) e_1, \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1(f_2) = (\kappa_2 \nu_3 \mu_1) f_2, \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1(e_3) = (\kappa_3 \nu_1 \mu_2) e_3$$

Il vient que le produit $\gamma_3 \gamma_2 \gamma_1$ vérifie $\gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 = 1$ si et seulement si $\kappa_1 \nu_2 \mu_3 = \kappa_2 \nu_3 \mu_1 = \kappa_3 \nu_1 \mu_2 = 1$.

Il reste à comprendre la condition " γ_i est conjuguée à δ_i " pour $i = 1, \dots, 3$. Nous allons montrer que l'élément γ_i est conjugué à δ_i pour $i = 1, \dots, 3$ si et seulement si $\kappa_i = \lambda(\delta_i)$ et $-\mu_i + \nu_i(\rho_i - 1) = \tau(\delta_i)$ pour $i = 1, \dots, 3$.

Supposons que $\kappa_i = \lambda(\delta_i)$ et $-\mu_i + \nu_i(\rho_i - 1) = \tau(\delta_i)$ pour $i = 1, \dots, 3$. Alors un calcul facile montre que le spectre de γ_i est réel positif. Par conséquent, le lemme 3.3.23 montre que γ_i est hyperbolique ou quasi-hyperbolique ou parabolique. La proposition 3.3.11 montre que les éléments γ_1, γ_2 et γ_3 préservent un ouvert proprement convexe. La proposition 3.2.6 montre que l'élément γ_i est conjugué à l'élément δ_i pour $i = 1, \dots, 3$ puisque $\lambda(\gamma_i) = \kappa_i = \lambda(\delta_i)$ et $\tau(\gamma_i) = -\mu_i + \nu_i(\rho_i - 1) = \tau(\delta_i)$.

Supposons à présent que γ_i est conjuguée à δ_i pour $i = 1, \dots, 3$ alors clairement $\lambda(\gamma_i) = \kappa_i = \lambda(\delta_i)$ et $\tau(\gamma_i) = -\mu_i + \nu_i(\rho_i - 1) = \tau(\delta_i)$ pour $i = 1, \dots, 3$. \square

Démonstration de la proposition 3.3.20. — La proposition 3.3.24 montre qu'il ne reste plus qu'à montrer que \mathcal{E} est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . On pose $\lambda_i = \lambda(\delta_i)$ et $\tau_i = \tau(\delta_i)$, pour $i=1, \dots, 3$. On commence par résoudre les équations (2.), (3.), (4.), elles forment un système de 6 équations qui se ramène facilement à un système d'équations linéaire de rang 5, on obtient :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \lambda_1 & \mu_1 &= \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2}} s & \nu_1 &= \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3}} s^{-1} \\ \nu_2 &= \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2 \lambda_1}} s^{-1} & \kappa_2 &= \lambda_2 & \mu_2 &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3}} s \\ \mu_3 &= \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_3 \lambda_1}} s & \nu_3 &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_3 \lambda_2}} s^{-1} & \kappa_3 &= \lambda_3 \end{aligned}$$

Avec un paramètre s qui vérifie $s > 0$. On peut à présent résoudre les équations (5.), on obtient pour $i = 1 \dots 3$:

$$\rho_i = 1 + \frac{\tau_i + \gamma_i}{\beta_i} = 1 + \frac{\tau_i + \sqrt{\frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_i \lambda_{i+1}} s}}{\sqrt{\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i \lambda_{i+2}} s^{-1}}} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_i \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}}} \tau_i s + \frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1}} s^2$$

Pour finir, il faut résoudre (1.), on obtient :

$$\sigma_1 = t\rho_2 \text{ et } \sigma_2 = \frac{\rho_1\rho_3}{t}$$

Avec un paramètre t qui vérifie $t > 0$. □

La proposition 3.3.10 montre que $\beta_f(P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$ est homéomorphe à $\mathcal{Q}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$, on a donc le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.25. — *Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ des éléments hyperboliques, quasi-hyperboliques ou paraboliques alors l'espace $\beta_f(P_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 .*

Ceci conclut la démonstration du cinquième point du théorème 3.3.5 et par conséquent sa démonstration aussi.

3.4. Composantes connexes d'espace de représentations

3.4.1. Préliminaires. —

3.4.1.1. Le cas compact. — Le but de cette partie est de montrer que les structures projectives proprement convexes sont en fait des objets très naturels. Précisons notre pensée en donnant le théorème suivant qui montre que les structures projectives proprement convexes sur les surfaces compactes sont des objets naturels.

Théorème 3.4.1 (Koszul-Choi-Goldman). — *L'espace des modules des structures projectives proprement convexes sur une surface compacte S est une composante connexe de l'espace des représentations, à conjugaison près, du groupe fondamental de S dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.*

L'ouverture de l'espace des modules des structures projectives proprement convexes sur une surface compacte a été démontrée par Koszul dans [Kos]. Choi et Goldman ont montré dans [ChGo] que cet espace est fermé. Goldman a montré dans [Gold1] que cet espace est connexe.

3.4.1.2. Espaces de représentations. — Nous allons montrer un résultat analogue dans le cas non compact. Comme le groupe fondamental d'une surface de type fini non compacte est un groupe libre, on ne peut pas espérer avoir ce genre de résultat en prenant l'ensemble des représentations en entier.

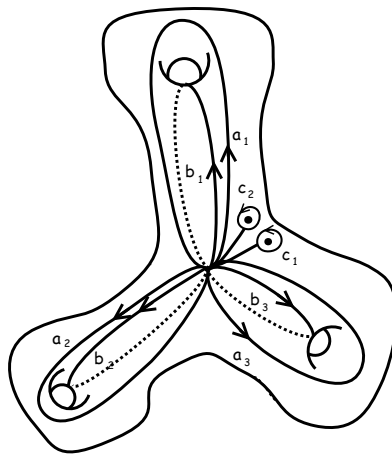


FIGURE 8

Pour avoir une présentation du groupe fondamental de la surface $\Sigma_{g,p}$, on se donne un point base x_0 de $\Sigma_{g,p}$ et on peut choisir $2g + p$ lacets $(a_i)_{i=1\dots g}$, $(b_i)_{i=1\dots g}$ et $(c_j)_{j=1\dots p}$ comme sur la figure 8, de cet façon les lacets $(a_i)_{i=1\dots g}$ et $(b_i)_{i=1\dots g}$ font le tour des anses de $\Sigma_{g,p}$, alors que les

lacets $(c_j)_{j=1..p}$ font le tour des pointes de $\Sigma_{g,p}$, ainsi, le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_{g,p})$ de $\Sigma_{g,p}$ admet alors la présentation :

$$\pi_1(\Sigma_{g,p}) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_p \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] c_1 \cdots c_p = 1 \rangle$$

Dans la suite du texte on suppose que p est un entier supérieur ou égal à 1. Le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_{g,p})$ de $\Sigma_{g,p}$ est alors un groupe libre à $2g + p - 1$ générateurs. Les lacets élémentaires (à orientation près) de $\Sigma_{g,p}$ sont donnés par les éléments $(c_j)_{j=1,\dots,p}$ de $\pi_1(\Sigma_{g,p})$, on gardera cette notation tout au long du texte.

Le lemme suivant qui est très classique sera utile.

Lemme 3.4.2. — Soit $P = \{\gamma \in \text{SL}_3(\mathbb{R}) \mid \gamma \text{ est parabolique}\}$, l'ensemble P des éléments paraboliques de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ de dimension 6.

Démonstration. — Commençons par remarquer que $P = \{\gamma \in \text{SL}_3(\mathbb{R}) \mid (\gamma - 1)^3 = 0 \text{ et } (\gamma - 1)^2 \neq 0\}$. L'ensemble P est donc un ouvert de Zariski du fermé de Zariski $\{\gamma \in \text{SL}_3(\mathbb{R}) \mid (\gamma - 1)^3 = 0\}$. Par conséquent P est une variété algébrique. Le groupe $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ agit par conjugaison sur P et cette action est transitive. Il vient que P est une variété algébrique lisse. Le stabilisateur Stab de la matrice :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$$

est le groupe :

$$\text{Stab} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'ensemble P est donc une sous-variété de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ de dimension $8-2=6$. □

On considère les quatre espaces suivants :

$$H = \text{SL}_3(\mathbb{R})^{2g+p}$$

$$H_P = \text{SL}_3(\mathbb{R})^{2g} \times P^p$$

$$H^{irr} = \left\{ (A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_p) \in H \mid \begin{array}{l} \text{Le groupe engendré par} \\ (A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_p) \\ \text{est irréductible} \end{array} \right\}$$

$$H_P^{irr} = \left\{ (A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_p) \in H_P \mid \begin{array}{l} \text{Le groupe engendré par} \\ (A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_p) \\ \text{est irréductible} \end{array} \right\}$$

Ces espaces sont des sous-variétés. Pour le premier, ce fait est évident. Pour le second, le lemme 3.4.2 rend ce fait évident. L'espace H^{irr} (resp. H_P^{irr}) est un ouvert de H (resp. H_P) par conséquent c'est une variété.

On définit sur H l'application différentiable $R : H \rightarrow \text{SL}_3(\mathbb{R})$ donné par :

$$R : (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_p) \mapsto [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] c_1 \cdots c_p$$

L'image réciproque de $\{1\}$ par R dans H s'identifie naturellement avec l'espace des représentations du groupe fondamental de $\Sigma_{g,p}$ dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$. L'identification est obtenue par l'évaluation d'une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma_{g,p}) \rightarrow \text{SL}_3(\mathbb{R})$ sur les éléments $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_p$.

On dira qu'une représentation de $\Sigma_{g,p}$ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ *conserve les paraboliques* lorsque l'image des lacets $(c_j)_{j=1..p}$ est parabolique.

Bien entendu, l'image réciproque de $\{1\}$ par R dans H_P (resp. H^{irr} resp. H_P^{irr}) s'identifie naturellement avec l'espace des représentations qui conservent les paraboliques (resp. irréductibles resp. irréductibles et qui conservent les paraboliques) du groupe fondamental de $\Sigma_{g,p}$.

On notera $Hom_P^{irr} = R_{|H_P^{irr}}^{-1}\{1\}$ l'ensemble des représentations irréductibles du groupe fondamental de $\Sigma_{g,p}$ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui conservent les paraboliques.

Goldman a montré le lemme suivant grâce au calcul de Fox dans [Gold3].

Lemme 3.4.3. — *L'application $R : H_P \rightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ donné par :*

$$R : (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_p) \mapsto [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] c_1 \cdots c_p$$

est une application différentiable dont le rang au point $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_p)$ est égale à la codimension du centralisateur du groupe engendré par $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_p$ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Corollaire 3.4.4. — *L'espace Hom_P^{irr} est une variété de dimension $16g + 6p - 8$.*

Démonstration. — Le lemme 3.4.2 montre l'espace H_P est une variété de dimension $8 \times 2g + 6 \times p$. Le sous-ensemble H_P^{irr} de H_P est un ouvert et donc une sous-variété de H_P de même dimension. Le lemme 3.4.3 montre que le sous-ensemble $Hom_P^{irr} = R_{|H_P^{irr}}^{-1}\{1\}$ est une sous-variété de H_P^{irr} de dimension $8 \times 2g + 6 \times p - 8 = 16g + 6p - 8$. \square

On peut trouver une démonstration de Goldman de la proposition suivante dans [Gold1].

Proposition 3.4.5. — *Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ agit proprement et librement sur l'espace H^{irr} .*

Le corollaire suivant est à présent clair.

Corollaire 3.4.6. — *Le quotient $R_P^{irr} = Hom_P^{irr} / \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est une variété de dimension $16g - 16 + 6p$.*

On s'intéresse à l'espace suivant :

$$\beta'_{g,p} = \left\{ \begin{array}{l} \rho : \pi_1(\Sigma_{g,p}) \rightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \\ \left. \begin{array}{l} \rho \text{ est fidèle et discrète,} \\ \rho \text{ préserve un ouvert proprement convexe } \Omega_\rho, \\ \forall j = 1, \dots, p, \rho(c_j) \text{ est parabolique,} \\ \Omega_\rho / \rho(\pi_1(\Sigma_{g,p})) \text{ est homéomorphe à la surface } \Sigma_{g,p}. \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

L'holonomie d'une structure projective proprement convexe fournit une application de $\beta_f(\Sigma_{g,p}) \rightarrow \beta_{g,p} = \beta'_{g,p} / \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Cette application est un homéomorphisme. En effet, il est clair qu'elle est continue et le corollaire 2.7.13 montre qu'elle est injective. La surjectivité n'est pas complètement évidente. En effet, l'identification $\varphi : \Sigma_{g,p} \rightarrow \Omega_\rho / \rho(\pi_1(\Sigma_{g,p}))$ fournit une représentation ρ' de $\pi_1(\Sigma_{g,p})$ vers $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve l'ouvert Ω_ρ . Mais, l'automorphisme $\rho^{-1} \circ \rho' : \pi_1(\Sigma_{g,p}) \rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,p})$ n'a aucune raison d'être intérieur. Le théorème de Nielsen montre que quitte à composer φ à la source par un homéomorphisme on peut supposer que $\rho^{-1} \circ \rho : \pi_1(\Sigma_{g,p}) \rightarrow \pi_1(\Sigma_{g,p})$ est intérieur.

De plus, la proposition 2.4.1 du chapitre deux montre que $\beta_{g,p} \subset R_P^{irr}$. Le théorème suivant montre que les structures projectives proprement convexe de volume fini sont des objets naturels.

Théorème 3.4.7. — *L'ensemble $\beta_{g,p}$ est une composante connexe de R_P^{irr} .*

La démonstration de ce théorème se déroule en deux parties. On commence par montrer que $\beta_{g,p}$ est un fermé de R_P^{irr} . Ensuite, comme la topologie de $\beta_{g,p}$ est connue nous utiliserons le théorème d'invariance du domaine pour montrer que $\beta_{g,p}$ est un ouvert de R_P^{irr} .

3.4.2. Fermeture de $\beta'_{g,p}$. — Nous consacrons cette partie à la démonstration de la fermeture. Cet exposé est inspiré de l'article [ChGo] qui traite le cas compact. Leur démonstration contient beaucoup d'idées mais ne gère pas le cas non compact.

Proposition 3.4.8. — *L'espace $\beta'_{g,p}$ est un fermé de $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_{g,p}), \text{SL}_3(\mathbb{R}))$.*

3.4.2.1. *Lemmes préliminaires.* — On aura besoin du lemme suivant dû à Goldman et Millson [GoMi] :

Lemme 3.4.9 (Goldman-Millson). — *Soient Γ un groupe de type fini n'admettant pas de sous-groupe distingué nilpotent infini et G un groupe de Lie, alors l'ensemble des morphismes fidèles et discrets de Γ vers G est fermé dans l'ensemble des morphismes de Γ vers G .*

On rappelle le lemme suivant que l'on a énoncé au début de ce texte.

Lemme 3.4.10. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe et $\gamma \in \text{Aut}(\Omega)$ d'ordre infini alors $\text{Tr}(\gamma) \geq 3$.*

Lemme 3.4.11. — *Soit ρ une représentation fidèle et discrète d'un groupe libre non abélien Γ dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$, si ρ n'est pas irréductible alors il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $\text{Tr}(\gamma) < 1$.*

Démonstration. — Supposons que la représentation ρ n'est pas irréductible alors il existe une droite D ou un plan Π préservé par ρ . On note G le stabilisateur dans $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ de cette droite ou de ce plan. Le groupe G est de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Dans les deux cas, on a un morphisme $\varphi : G \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\gamma \in [G, G]$ on a $\text{Tr}(\gamma) = 1 + \text{Tr}(\varphi(\gamma))$. Le sous-groupe $\rho([\Gamma, \Gamma])$ de $\text{SL}_3(\mathbb{R})$ est un sous-groupe libre et discret d'un conjugué du groupe spécial affine de \mathbb{R}^2 ou $(\mathbb{R}^2)^*$. Par conséquent, la représentation $\varphi \circ \rho : \Gamma \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R})$ restreinte à $[\Gamma, \Gamma]$ est fidèle et discrète. Le groupe $\varphi \circ \rho([\Gamma, \Gamma])$ est donc un sous-groupe libre non abélien et discret de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Le lemme 3.4.12 qui suit conclut la démonstration. \square

Ce lemme est démontré dans [ChGo].

Lemme 3.4.12. — *Tout groupe libre non abélien et discret de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ possède des éléments dont la trace est strictement négative.*

Le lemme suivant est aussi démontré dans [ChGo].

Lemme 3.4.13. — Soient (X, d) un espace métrique compact et une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'homéomorphismes uniformément lipschitziens de X , on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément γ_n préserve un fermé F_n . On suppose que les fermés F_n convergent vers un fermé F de X pour la topologie de Hausdorff. Enfin, on suppose que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers un homéomorphisme γ de X . Alors, γ préserve F .

Démonstration. — Soit $y \in F$, il faut montrer que $\gamma y \in F$. On se donne un réel $\varepsilon > 0$.

La suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers γ , par conséquent il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > N_1, \forall x \in X, d(\gamma_n x, \gamma x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Les homéomorphismes $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont uniformément lipschitziens, par conséquent, il existe un $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in X, d(\gamma_n x, \gamma_n y) < C d(x, y)$$

La suite F_n converge pour la topologie de Hausdorff vers le fermé F par conséquent, il existe une suite $y_n \in F_n$ telle que y_n converge vers y . Il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > N_2, d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2C}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} d(\gamma y, \gamma_n y_n) &\leq d(\gamma y, \gamma_n y) + d(\gamma_n y, \gamma_n y_n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + C \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dès que n est supérieur à N_1 et N_2 . La suite $(\gamma_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de F_n converge donc vers γy . Le point γy est donc dans F . \square

3.4.2.2. *Preuve de la fermeture.* —

Lemme 3.4.14. — L'ensemble des représentations discrètes, fidèles, irréductibles et qui préservent un ouvert proprement convexe d'un groupe libre Γ non abélien dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est fermé dans l'espace des représentations de Γ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit une suite ρ_n de représentations de Γ qui converge vers une représentation ρ_∞ de Γ . Le lemme 3.4.9 montre que ρ_∞ est fidèle et discrète.

Commençons par montrer que la représentation ρ_∞ est irréductible. Le lemme 3.4.10 montre que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{Tr}(\rho_n(\gamma)) \geq 3$. Par conséquent, comme la trace est une fonction continue, on a pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mathrm{Tr}(\rho_\infty(\gamma)) \geq 3$. Le lemme 3.4.11 montre que la représentation ρ_∞ est irréductible.

Montrons à présent que ρ_∞ préserve un ouvert proprement convexe Ω_∞ . Pour tout n , la représentation ρ_n préserve un ouvert Ω_{ρ_n} proprement convexe de \mathbb{P}^2 . On considère la 2-sphère euclidienne \mathbb{S}^2 et on note $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ le revêtement universel canonique de \mathbb{P}^2 . L'ouvert $\pi^{-1}(\Omega_{\rho_n})$ possède deux composantes connexes. On note Ω'_{ρ_n} l'une d'elles.

On munit \mathbb{S}^2 de la topologie de Hausdorff via sa métrique euclidienne canonique, l'ensemble des compacts de \mathbb{S}^2 forment un espace compact. Et, l'ensemble des fermés convexes de \mathbb{S}^2 est un fermé de cet espace. On peut donc supposer, quitte à extraire, que la suite des fermés convexes $\overline{\Omega'_{\rho_n}}$ converge vers un fermé convexe C_∞ de \mathbb{S}^2 .

Pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, la suite des $\rho_n(\gamma)$ est uniformément lipschitzienne puisque cette suite est convergente dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Le lemme 3.4.13 montre que C_∞ est ρ_∞ -invariant. On a quatre possibilités pour le convexe fermé C_∞ :

- Le convexe C_∞ est proprement convexe et d'intérieur non vide,

- Le convexe C_∞ est un segment,
- Le convexe C_∞ est un point,
- Le convexe C_∞ n'est pas proprement convexe.

On va montrer que seul le premier cas est possible. Pour cela remarquons que dans les trois autres cas il existe une droite D de \mathbb{R}^3 ou un plan Π de \mathbb{R}^3 qui est invariant sous ρ_∞ . Par conséquent dans ces trois cas, la représentation ρ_∞ n'est pas irréductible. Ce qui est absurde. \square

Pour montrer la proposition 3.4.8. Il ne nous reste plus qu'à montrer que le quotient $S_\infty = \Omega_\infty / \rho_\infty(\pi_1(\Sigma_{g,p}))$ est homéomorphe à $\Sigma_{g,p}$. C'est le point où la démonstration diffère du cas compact, en effet dans le cas compact le groupe fondamental caractérise la topologie de la surface.

Démonstration de la proposition 3.4.8. — Soit une suite $\rho_n \in \beta'_{g,p}$ de représentations qui converge vers une représentation ρ_∞ . Le lemme 3.4.14 montre que ρ_∞ est fidèle, discrète, irréductible et préserve un ouvert proprement convexe Ω_∞ .

Pour cela, on se donne une triangulation idéale \mathcal{T} de la surface topologique $S = \Sigma_{g,p}$. Le relèvement de \mathcal{T} fournit une triangulation $\tilde{\mathcal{T}}$ de la surface topologique \tilde{S} . On note $dev_n : \tilde{S} \rightarrow \Omega_n$ la développante associée à ρ_n .

Comme la développante dev_n est un homéomorphisme sur un ouvert proprement convexe et l'holonomie de tous les bouts de la surface $S_n = \Omega_n / \rho_n(\pi_1(\Sigma_{g,p}))$ est parabolique, l'image par dev_n de tout relevé du bord d'un triangle topologique de $\tilde{\mathcal{T}}$ converge en $+\infty$ (resp. $-\infty$) vers un point de $\partial\Omega_n$ qui est fixé par un élément parabolique de Γ_n . Ainsi, si λ est un côté d'un des triangles de la triangulation $\tilde{\mathcal{T}}$, on notera $\lambda_n =]dev_n(\lambda)(-\infty), dev_n(\lambda)(+\infty)[$. De plus, les images par dev_n de deux relevés quelconques λ^1, λ^2 qui bordent le même triangle de $\tilde{\mathcal{T}}$ ont la même limite en $+\infty$ ou bien $-\infty$. On a donc construit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à $\tilde{\mathcal{T}}$ une triangulation idéale et géodésique $\tilde{\mathcal{T}}_n$ de l'ouvert Ω_n préservé par $\rho_n(\Gamma)$. Si \tilde{T} désigne un triangle de $\tilde{\mathcal{T}}$ alors on notera \tilde{T}_n le triangle correspondant dans la triangulation $\tilde{\mathcal{T}}_n$ de l'ouvert Ω_n . Nous allons montrer que la suite de triangulation $(\tilde{\mathcal{T}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous-converge vers une triangulation idéale et géodésique de Ω_∞ préservée par $\rho_\infty(\Gamma)$.

La suite des ouverts proprement convexes Ω_n converge vers l'ouvert proprement convexe Ω_∞ . Pour tout triangle topologique \tilde{T}_i de \mathcal{T} , on fixe un relevé de \tilde{T}_i . Soit $i_0 = 1, \dots, N$, on se donne λ un des 3 côtés du triangle $\tilde{T}_{i_0} \subset \tilde{S}$. Nous allons montrer que, quitte à extraire, la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un segment non trivial de Ω_∞ . Il est évident, que quitte à extraire, la suite des segments fermés $(\overline{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un segment de C_∞ . Mais il n'est pas clair que ce segment n'est pas réduit à un point. Nous allons montrer que cette possibilité est absurde.

Supposons qu'il existe un segment $\tilde{\lambda}$ tel que la suite de segment $\overline{\lambda_n}$ converge vers un point p_∞ de $\partial\Omega_\infty$. Quitte à extraire, on peut alors supposer que l'une des deux composantes connexes $\widetilde{S_{moit}}$ de la surface $\tilde{S} - \tilde{\lambda}$ vérifie que, pour tout triangle \tilde{T} de la triangulation $\tilde{\mathcal{T}}$, si \tilde{T} est inclus dans $\widetilde{S_{moit}}$ alors \tilde{T}_n converge vers le point p_∞ .

Pour tout $i = 1, \dots, N$, l'orbite sous Γ du triangle topologique $\tilde{T}_i \subset \tilde{S}$ intersecte l'ouvert $\widetilde{S_{moit}}$. Par conséquent, pour tout triangle topologique \tilde{T} de $\tilde{\mathcal{T}}$ la suite $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point de $\partial\Omega_\infty$. On considère le triangle topologique \tilde{T}' qui bordent $\tilde{\lambda}$ et qui n'est pas contenu dans $\widetilde{S_{moit}}$. La suite $(\tilde{T}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point, et ce point est p_∞ puisque le segment $\overline{\lambda_n}$ converge vers le point p_∞ .

Pour montrer que ce raisonnement entraîne que, pour tout triangle topologique \tilde{T} de notre triangulation $\tilde{\mathcal{T}}$, la suite $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point p_∞ , on peut introduire le graphe dual \mathcal{G} de la triangulation $\tilde{\mathcal{T}}$ sur \tilde{S} . En faisant une récurrence sur la distance de graphe d'un triangle topologique \tilde{T} de la triangulation $\tilde{\mathcal{T}}$ à \tilde{T}' , on obtient facilement le résultat.

Par conséquent, comme la représentation ρ_∞ est la limite des représentations ρ_n , on a que ρ_∞ fixe le point p_∞ , ce qui est absurde puisque cette représentation est irréductible. On vient donc de montrer que pour tout $i = 1, \dots, N$, et pour tout côté λ du triangle $\tilde{T}_i \subset \tilde{S}$, la géodésique λ_n de Ω_n converge vers une géodésique de Ω_∞ . Par conséquent, la triangulation $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous-converge vers une triangulation de Ω_∞ préservée par $\rho_\infty(\Gamma)$. La surface S_∞ est donc homéomorphe à la surface $\Sigma_{g,p}$. \square

3.4.3. Conclusion. — On est à présent en mesure de montrer le théorème 3.4.7. Pour cela, on rappelle le théorème de l'invariance du domaine du à Brouwer.

Théorème 3.4.15 (Brouwer, invariance du domaine). — *Soient M, N deux variétés de même dimension et $i : M \rightarrow N$ une injection continue. Si M est connexe et l'image de i est fermée alors i est un homéomorphisme de M vers une composante connexe de N .*

Démonstration du théorème 3.4.7. — L'application naturelle de $\beta_{g,p}$ vers R_P^{irr} est une injection continue. La proposition 3.4.8 montre que son image est fermée par conséquent le théorème 3.4.15 conclut la démonstration. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [And] E.M. Andreev. *On convex polyhedra in Lobacevskii spaces*. Math. USSR Sbornik, (1970) 10 : p 413-440.
- [Bear] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [Beno1] Yves Benoist. *Convexes hyperboliques et quasiisométries*. Geometriae Dedicata 122 (2006) p.109-134.
- [Beno2] Yves Benoist. *Convexes divisibles IV*. Invent. Math. 164 (2006) p.249-278.
- [Beno3] Yves Benoist. *Sous-groupes discrets des groupes de Lie*. 1997 European Summer School in Group Theory, Luminy July 7-18.
- [Beno4] Yves Benoist. *Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques*. Publ. Math. IHES 97 (2003) p.181-237
- [Beno5] Yves Benoist. *Automorphismes des cônes convexes*. Invent. Math. 141 (2000) p.149-193.
- [Beno6] Yves Benoist. *Convexes Divisibles III*. Annales Scientifiques de l'ENS 38 (2005) p. 793-832.
- [Beno7] Yves Benoist. *Five lectures in semisimple Lie groups*, Lecture one. École d'été à Grenoble 2004.
- [Beno8] Yves Benoist. *Convexes Divisibles II*, Duke Math. Journ. 120 (2003) p97-120.
- [Beno9] Yves Benoist. *Convexes Divisibles I*, in Algebraic groups and arithmetic, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. 17 (2004) p.339-374.
- [Ben] Jean-Paul Benzécri. *Sur les variétés localement affines et localement projectives*. Bulletin de la Société Mathématique de France, 88 (1960), p.229-332.
- [Bor] Armand Borel. *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*. Topology 2 (1963) p.111-122.
- [BBI] Dimitri Burago, Yuri Burago et Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*. Gte S in M, 33, AMS (2001).
- [Bou] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5 et 6.
- [Choi] Suhyoung Choi. *Convex decompositions of real projective surfaces. II : Admissible decompositions*. J. Differential Geom. 40 (1994), 239-283.
- [Choi2] Suhyoung Choi. *The deformation spaces of projective structures on 3-dimensional Coxeter Orbifolds*, Geometriae Dedicata 119 (Vol 1) (2006) p 69-90.

- [ChGo] Suhyoung Choi, William Goldman. *Convex real projective structures on closed surfaces are closed*. Proc. Am. Math. Soc. 118 (1993) p.657-661.
- [CVV1] Bruno Colbois, Constantin Vernicos et Patrick Verovic. *L'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert*. L'enseignement mathématique, 50 203-237 (2004).
- [CVV2] Bruno Colbois, Constantin Vernicos et Patrick Verovic. *Area of ideal triangles and Gromov Hyperbolicity in Hilbert Geometry*. Illinois Journal of Math., A paraître.
- [FoGo] V.V. Fock, A.B. Goncharov. *Moduli spaces of convex projective structures on surfaces*. To appear in Advances in Math.
- [Gold1] William Goldman. *Convex real projective structures on compact surfaces*. J. Differential Geom. 31 (1990), 791-845.
- [Gold2] William Goldman. *Projective geometry on manifolds*. Lecture notes given at the University of Maryland in the Spring semester of 1988.
- [Gold3] William Goldman. *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*. Advances in Mathematics 54, 200-225 (1984).
- [GoMi] William Goldman, John Millson. *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space*. Invent. Math. 88 (1987), 495-520.
- [Kim] In Kang Kim. *Rigidity and deformation spaces of strictly convex real projective structures on compact manifolds*, Journal. Diff. Geo. 58 (2001) p.189-218.
- [JL] Jaejeong Lee. *Convex fundamental domains for properly convex real projective structures*. preprint.
- [JoMil] D. Johnson et John Millson. *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds*. Discrete groups in Geometry and Analysis, Progr. Math 67, Birkhäuser, Boston, 1984, 48-106.
- [JG] Jürgen Richter-Gebert. *Realization spaces of polytopes* Number 1643 in Lecture notes in mathematics. 1996.
- [KaV] Victor Kac et Èrnest Borisovich Vinberg. *Quasi-homogeneous cones*. Math. Notes 1 (1967) p.231-235.
- [Kos] J.L.Koszul. *Déformation des connexions localement plates*. Ann. Inst. Fourier 18 (1968) p.103-114.
- [Kapo] Misha Kapovich. *Convex projective structures on Gromov-Thurston manifolds*. Geometry and Topology, Vol. 11 (2007) p. 1777-1830.
- [Lab] François Labourie. *Flat Projective Structures on Surfaces and Cubic Holomorphic Differentials*. Pure and Applied Mathematics Quaterly 3, 1057–1099 (2007).
- [Loft1] John Loftin. *Affine Spheres and Convex RP^n -Manifolds*. Amer. J. Math. 123, 255-274 (2001).
- [Loft2] John Loftin. *The Compactification of the Moduli Space of Convex RP^2 Surfaces I*. J. Differential Geom. Volume 68, Number 2 (2004), 223-276.
- [Rich] I. Richards. *On the Classification of noncompact surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963) 259-269.
- [RHD] Roland K. W. Roeder John H. Hubbard and William D. Dunbar. *Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra*. Les Annales de l'Institut Fourier, 57(3) :825-882, 2007.

- [Vey] Jacques Vey. *Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants*. Anna Scuola Normale Superiore di Pisa, 24 (1970), p. 641-665.
- [Vin] Èrnest Borisovich Vinberg. *The theory of convex homogeneous cones*. Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1963) p. 340-403.
- [Vin2] Èrnest Borisovich Vinberg. *The structure group of automorphisms of a homogeneous convex cone*. Trans. Amer. Math. Soc. , 13 (1965) pp. 63-93.
- [Vin3] Èrnest Borisovich Vinberg. *Discrete linear groups generated by reflections*. Math, USSR Izvestija 5 (1971) p 1083-1119.