HAL
open science

Analyse de front d'onde en plan focal: développement d'algorithmes temps-réel et application au cophasage de télescopes multipupilles imageurs

Isabelle Mocoeur

To cite this version:

Isabelle Mocoeur. Analyse de front d'onde en plan focal: développement d'algorithmes temps-réel et application au cophasage de télescopes multipupilles imageurs. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT : . tel-00429451

HAL Id: tel-00429451

https://theses.hal.science/tel-00429451v1

Submitted on 2 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Centre National d'Etudes Spatiales
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales

THESE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES
DE
L'UNIVERSITE PARIS XI

par

Mlle Isabelle MOCŒUR

ANALYSE DE FRONT D'ONDE EN PLAN FOCAL :

DEVELOPPEMENT D'ALGORITHMES TEMPS-REEL ET APPLICATION AU COPHASAGE DE TELESCOPES MULTIPUPILLES IMAGEURS

soutenue le 1er juillet 2008 devant le jury composé de :

M. Jean Taboury	Président
Mme Sylvie Roques	Rapporteur
M. Vincent Loriette	Rapporteur
M. Denis Mourard	Directeur de thèse
M. Frédéric Cassaing	Encadrant ONERA
M. David Laubier	Examinateur
M. Laurent Mugnier	Invité

A ma Famille,

pour son amour inconditionnel,
son soutien de tous les jours
ainsi que sa foi inébranlable en mon avenir...

Remerciements

Un an quasiment jour pour jour après le jour J, LA date fatidique que chaque thésard redoute mais que tout Docteur se remémore avec une émotion certaine[1] ainsi qu'une légère pointe de nostalgie, voilà que je me décide à finaliser mon manuscrit. Enfin ! S'écrieront en cœur mes proches. Il était temps... Certes, ce délai quelque peu exotique et pas très conventionnel peut paraître étrangement long, mais il m'a permis de prendre le recul nécessaire vis-à-vis du travail effectué au cours de ces quatre années. Maintenant que les articles sont corrigés, l'introduction finalisée et que, sereine, je regarde le chemin parcouru, je repense à tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à l'aboutissement de ma thèse, ou *Chapelle Sixtine* pour les intimes. Et ils sont nombreux !

Tout d'abord, je tiens à remercier Frédéric Cassaing qui m'a suivie pendant cinq ans, depuis les cours du DESS jusqu'à la soutenance. Il m'a non seulement transmis une partie de son expérience en interférométrie mais c'est également grâce à lui que j'ai acquis la rigueur, l'autonomie nécessaire et surtout une véritable indépendance d'esprit.

Ma deuxième pensée est pour Laurent Mugnier, roi des problèmes inverses, expert *Es* décorticage de critères et déroulage de produits matriciels, qui de part nos séances de *brainstorming* et les pistes données a grandement contribué à l'avancée de mes travaux. De plus, ce manuscrit n'aurait pas été tout à fait le même sans ses conseils avisés et sa disponibilité : merci Lolo pour tes relectures *express* !

Je suis également très reconnaissante à Denis Mourard d'avoir bien voulu diriger cette thèse et ce malgré la distance qui nous séparait ; ses remarques sur les budgets d'erreur m'ont été très utiles pour comprendre comment est bâti un instrument. De même, je remercie chaleureusement mes deux rapporteurs, Sylvie Roques et Vincent Loriette, pour leur patience et leur constants encouragements. En acceptant ma décision de reculer la remise du manuscrit de près de six mois et en le relisant chapitre par chapitre (pour ne pas dire morceau par morceau), ils ont fait preuve d'un soutien sans faille.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements à tous les membres du DOTA Châtillon pour leurs bons conseils ainsi que pour leur soutien moral et technique ; travailler avec eux a été très enrichissant, tant sur le plan professionnel que personnel. Mention spéciale à Vincent Michau et Marc Séchaud pour avoir — vaillamment — assisté à mes dernières répétitions de soutenance qui avaient lieu le soir à 18h30 ! Ce fut également un plaisir de côtoyer Vincent Coudé du Foresto qui m'a initiée aux joies de l'observation sur site à travers le suivi en *direct live* des acquisitions réalisées à Cerro Tololo. J'ai des souvenirs mémorables de nos discussions, à interpréter les résultats ou à refaire le monde autour de x

[1] et, curieusement, avec l'étrange sentiment d'avoir vécu ce jour dans un sorte d'état second ou de brouillard, ce dernier ayant eu furieusement tendance à s'épaissir au fur et à mesure que la journée puis la soirée étaient bien entamées, allez-donc savoir pourquoi...

cafés (avec $x \gg 1$). Vincent, il y aura toujours une capsule pour toi dans mon bureau !

Bien entendu, je ne souhaite pas cantonner mes remerciements à la seule sphère professionnelle ; en effet, qu'auraient donné ces quatre années sans les encouragements et le réconfort de mes proches, condition *sine qua non* à la réussite de cette entreprise ? Il y a tout d'abord ma Famille, discrète, mais qui m'a soutenue sans faille et jusqu'au bout, indubitablement persuadée que j'allais réussir et ce malgré mes moments de doute. Je ne les remercierai jamais assez de leur infinie patience, surtout ma mère... Et chapeau bas à mon père, pour avoir non seulement relu la quasi totalité de ce manuscrit mais surtout pour m'avoir transmis la soif de réussir[2] et l'envie d'aller toujours plus loin vers les étoiles...

Evidemment, il y a aussi les amis : ma quasi sœur Marie-copine qui a partagé mes états d'âme, les joies comme les peines ainsi que les moments d'intense euphorie ou de profond abattement ; Anna et Delphine, pour ces inoubliables moments de détente entre filles ; pour finir Carole, mon *alter ego* qui m'a définitivement ouvert les yeux au bout de deux longues années...

Du côté ONERA, je n'oublie pas non plus la *dream-team* de l'époque : Valérie-*S*ecréto*R*, « El » Ryril et Thierry qui ont su m'apporter leurs conseils et surtout me changer les idées. Les fous-rires et les franches parties de rigolade que nous avons eus ensemble ont largement contribué à évacuer le stress accumulé... J'adresse une pensée toute particulière à Valérie pour son incroyable dynamisme et son optimisme à toute épreuve — ma « p'tite bulle de champagne », comme j'aime l'appeler — et en qui j'ai trouvé une véritable amie. Quel bonheur que de s'évader quelques instants pour partager des moments littéraires, artistiques, culinaires... ou de lèche-vitrine ! Merci également à Ryril, qui n'a quasiment pas — ou si peu — bronché lorsque j'ai transformé le bureau en véritable serre tropicale et qui a su, par son sens de la dérision et les parties endiablées de lancer de boulettes (vestiges de feuillets saturés de rouge ou d'équations erronées), me redonner le sourire. De même, je voudrais remercier l'ensemble des thésards pour les soirées coinche-pizza et les sorties que nous avons faites ensemble ; Guillaume, pour sa gentillesse et nos indispensables pauses choco ; Magalie, pour sa disponibilité et sa gaité ; Fred, pour m'avoir donné un certain bouquin rose au tout début de ma thèse, sachant que j'en aurais besoin une fois la tête dans le guidon. Enfin, en tant que *Fraülein Doktor*, je salue chaleureusement Alain, avec qui c'est toujours un immense plaisir de faire un petit tour dans les nuages...

Pour finir, je conseille à tous les moyens suivants, outils indispensables sans lesquels la rédaction de ce manuscrit aurait manqué de saveur : il y a tout d'abord l'excellent dictionnaire des synonymes du CRISCO[3], la banque de dépannage linguistique de l'Office Québécois de la Langue Française[4] ainsi que l'hilarant site de Jorge Cham qui illustre parfaitement et avec un humour bien senti le quotidien de la vie d'un thésard[5]... D'ailleurs, si vous avez toujours un peu de mal à expliquer, devant le regard éberlué de vos proches, en quoi consiste une thèse, je vous incite vivement à vous aider (ou à leur

[2] *Labor omnia vincit improbus*, Virgile, *Géorgiques* I, vers 145 et 146.

[3] Centre de Recherche Inter-langues sur la Signification en COntexte, Université de Caen, http ://www.crisco.unicaen.fr/

[4] Hé non, ce n'est pas une blague : le meilleur site pour connaître l'orthographe des préfixes ou mots composés est bel et bien québécois ! Oubliez votre correcteur d'orthographe habituel : http ://www.oqlf.gouv.qc.ca/ressources/bdl.html

[5] *Piled Higher & Deeper*, http ://www.phdcomics.com/

mettre carrément sous le nez) le texte du *Petit Nicolas en Thèse*[6] !

Et voilà, après ce dernier tour de ronde, il est temps de tourner définitivement la page. j'ai passé quatre années très enrichissantes parmi vous tous, collègues et en même temps amis, tant sur le plan professionnel qu'humain. Ce fut également un privilège rare que de pouvoir travailler avec une équipe aussi reconnue, ouverte et chaleureuse.

Aujourd'hui, c'est avec une pointe de tristesse et pourtant sans regrets que je vous dis au revoir et vous quitte définitivement pour d'autres horizons... Certes, je passe volontairement de l'autre côté du miroir sans un regard en arrière... Mais de tout cœur merci... et vous souhaite bonne continuation ainsi que pleins de bonnes choses pour l'avenir.

Les lecteurs qui le souhaitent peuvent me joindre à l'adresse *mocoeur_astro@orange.fr*

[6]Dessins : J.J. Sempé, Texte : G. Taviot, Formules : Y. Bugeaud - M. Mignotte - F. Normandin, Mise en page : G. Taviot, A. Maes, que vous trouverez sur de nombreux sites à l'aide de votre moteur de recherche préféré.

Analyse de front d'onde en plan focal : développement d'algorithmes temps-réel et application au cophasage de télescopes multipupilles imageurs

La Synthèse d'Ouverture Optique permet d'obtenir la résolution d'un instrument de grand diamètre en faisant interférer les faisceaux issus de plusieurs sous-pupilles de diamètre inférieur. Néanmoins, la difficulté principale de cette méthode réside dans le cophasage de l'instrument, c.-à.-d. dans la mesure puis la correction des aberrations différentielles présentes entre les pupilles. Dans ce contexte, les techniques de type plan focal présentent un avantage certain. Ainsi, le *phase retrieval* et la diversité de phase (basés respectivement sur l'acquisition d'une ou d'au moins deux images dans des conditions de phase différentes) sont aujourd'hui couramment employés avec des instruments monolithiques ; leur applicabilité au cophasage de systèmes multipupilles a également été démontrée en laboratoire. Toutefois, ces estimateurs présentent l'inconvénient d'être itératifs donc potentiellement coûteux en temps de calcul.

Nous nous proposons dans ce manuscrit de développer de nouveaux estimateurs de cophasage qui soient analytiques, permettant ainsi une estimation en temps-réel des aberrations sur objet étendu. Pour cela, nous démontrons qu'en exprimant le critère à minimiser sous forme quadratique nous aboutissons à une estimée simple de la phase recherchée. Nous montrons également que nous pouvons parvenir à l'expression de ce nouveau critère en considérant une approximation affine de la fonction de transfert optique.

Les performances obtenues en simulation révèlent qu'il est possible de fermer une boucle de cophasage à faible flux et par la même occasion de restaurer l'objet observé dans un but d'imagerie. La mise en œuvre expérimentale de l'ensemble des algorithmes (itératifs et analytiques) dans le cadre de différents projets permet d'affirmer que l'approche plan focal peut désormais être utilisée pour cophaser des systèmes multipupilles complexes.

Mots-clés : INTERFEROMETRIE OPTIQUE ; ANALYSE DE SURFACE D'ONDE ; COPHASAGE ; PROBLEMES INVERSES ; PHASE RETRIEVAL ; DIVERSITE DE PHASE ; TEMPS-REEL ; INSTRUMENTATION

Wavefront analysis in the focal plane : development of real-time algorithms and application to the cophasing of phased-array imager telescopes

Optical interferometry allows to reach the resolution of a large instrument by coupling several sub-apertures of lower diameter. However, this method requires a very accurate control of the optical paths, especially the differential aberrations between the apertures (so-called "cophasing" operation). In this context, focal-plane sensing appears to be an advantageous solution with a very simple opto-mechanical setup. The phase retrieval and the phase diversity techniques (based respectively on the acquisition of one or at least two images aberrated with a known phase) are now commonly used with monolithic instruments ; their applicability to the cophasing of phased-array systems have also been demonstrated in laboratory. However, these estimators are iterative and consequently potentially time-consuming.

In this manuscript, we propose new algorithms which are well-suited for real-time cophasing on extended objects. We demonstrate that a quadratic criterion can be derived, which allows to express the solution under a simple analytical form. We also show that the expression of this new criterion can be obtained in the case of small phase perturbations considering a linear expression of the optical transfer function.

The performance we obtained on simulated data demonstrates the possibility of using the analytic algorithms in a closed-loop system at low fluxes and restoring the observed object as well. Experimental validations of both iterative and analytic estimators for various projects confirm that the focal plane approach now can be used for the cophasing of complex phased-array systems.

Keyword : OPTICAL INTERFEROMETRY ; WAVEFRONT ANALYSIS ; COPHASING ; INVERSE PROBLEMS ; PHASE RETRIEVAL ; PHASE DIVERSITY ; REAL-TIME ; INSTRUMENTATION

Table des matières

Principales notations **1**

Introduction générale **5**

1 Haute résolution angulaire et Synthèse d'Ouverture Optique **9**
1.1 Introduction à la Synthèse d'Ouverture Optique 9
1.1.1 Intérêt fondamental 9
1.1.2 La problématique du cophasage 11
1.1.3 Les différents types d'Instruments à Synthèse d'Ouverture Optique 12
1.1.3.1 Implémentations optiques 12
1.1.3.2 Méthodes d'observation 13
1.1.4 Cadre applicatif 15
1.1.5 Budget d'erreur de l'instrument 16
1.2 Optique de Fourier en synthèse d'ouverture 17
1.2.1 Relation d'imagerie 18
1.2.2 Caractéristiques des configurations pupillaires 19
1.2.3 Modélisation de la phase 22
1.2.4 Les dégradations de l'image 24
1.2.5 Effet des modes recherchés sur la fonction de transfert 25
1.3 Cophasage d'un instrument à Synthèse d'Ouverture Optique 27
1.3.1 Les différents capteurs de type plan pupille 27
1.3.1.1 L'analyseur de Shack-Hartmann 27
1.3.1.2 L'analyseur de courbure 28
1.3.1.3 Le filtrage spatial 30
1.3.2 Méthodes de cophasage de type plan focal 31
1.3.2.1 Principe du cophasage par *phase retrieval* 31
1.3.2.2 Principe du cophasage par *diversité de phase* 31
1.3.2.3 Méthodes de mesure retenues dans le cadre de cette thèse 37
1.4 Conclusion du chapitre 37

2 Algorithme de cophasage analytique multiplan sur objet étendu **39**
2.1 Position du problème 39
2.2 Nouvelle méthode de cophasage choisie 40
2.2.1 Critère dans le cas des faibles aberrations 40
2.2.2 Estimation des aberrations 42
2.2.2.1 Minimisation du critère 42

2.2.2.2 Inversion matricielle et filtrage des modes globaux 43
2.3 Linéarisation de la Fonction de Transfert Optique en plan extra-focal 44
2.3.1 Expression générale de la Fonction de Transfert Optique 44
2.3.1.1 L'instrument 44
2.3.1.2 Décomposition de la fonction de transfert 45
2.3.1.3 Expression d'une nouvelle base de mode 47
2.3.2 Expression analytique 48
2.3.2.1 Contribution de la phase de diversité et de la phase incidente . . . 48
2.3.2.2 Les différentes linéarisations possibles 50
2.3.3 Non-unicité de la solution pour les configurations diluées 53
2.4 Estimation de l'objet 54
2.4.1 Réglage des hyperparamètres objet 55
2.4.2 Estimation séquentielle mixte 56
2.5 Conclusion du chapitre 56

3 Algorithmes de cophasage analytiques monoplans sur objet ponctuel 59
3.1 Position du problème 59
3.2 Analyse des modes de la Fonction de Transfert de Phase 60
3.2.1 Présentation de l'estimateur analytique existant 60
3.2.2 Limitations 61
3.2.3 Nouvelle implantation et adaptation aux configurations compactes 62
3.3 Développement d'un nouvel algorithme analytique sur objet ponctuel 63
3.3.1 Apports de la linéarisation globale en plan focal 63
3.3.2 Cas d'une configuration centrosymétrique 65
3.4 Conclusion du chapitre 66

4 Caractérisation de l'estimateur analytique multiplan sur objet étendu 67
4.1 Introduction 67
4.2 Principe des simulations 68
4.2.1 Le logiciel MASTIC, un outil de modélisation et de traitement 68
4.2.1.1 Modèle de formation d'images 68
4.2.1.2 Le traitement des données 70
4.2.2 Choix d'une base canonique 72
4.2.2.1 Aberrations et modes globaux 73
4.2.2.2 Les différentes bases canoniques 73
4.2.3 Conditions de simulation 74
4.2.3.1 La configuration pupillaire 74
4.2.3.2 Les différents tests effectués 75
4.3 Optimisation du capteur de diversité 76
4.3.1 Choix de la diversité 76
4.3.1.1 Nature de l'aberration introduite 77
4.3.1.2 Nombre de plans de diversité 77
4.3.2 Ajustement de la diversité 77
4.3.2.1 Recherche de la défocalisation optimale 78
4.3.2.2 Placement des plans de diversité 78
4.3.3 Estimation des différentes sources d'erreur 80

4.3.3.1 Connaissance de la défocalisation 80
4.3.3.2 Influence des modes supérieurs 82
4.4 Etude des performances de l'estimateur analytique 83
4.4.1 Estimation du piston 83
4.4.1.1 Performances attendues 83
4.4.1.2 Résultats préliminaires 84
4.4.1.3 Amélioration de l'algorithme analytique 85
4.4.1.4 Linéarité 90
4.4.2 Estimation des basculements 91
4.4.2.1 Performances 91
4.4.2.2 Linéarité 93
4.4.3 Influence de l'objet observé sur l'estimation de phase 94
4.4.3.1 Etude du contraste 95
4.4.3.2 Influence du nombre de pixels contenus dans l'image 95
4.4.4 Cas d'une configuration monopupille segmentée 96
4.4.5 Restauration de l'objet 100
4.4.5.1 En fonction du nombre de photons 100
4.4.5.2 Influence du type d'objet observé 100
4.5 Conclusion du chapitre 104

5 Caractérisation des estimateurs analytiques monoplans sur objet ponctuel 105
5.1 Introduction 105
5.2 Principe des simulations 106
5.2.1 Optimisation de l'instrument 106
5.2.1.1 Choix de la configuration pupillaire 106
5.2.1.2 Optimisation de l'amplitude de diversité 107
5.2.2 Conditions de simulation 108
5.2.2.1 Modélisation et traitement des données 108
5.2.2.2 Les différents tests effectués 110
5.3 Etude de l'analyse des modes de phase en plan focal 110
5.3.1 Conditions particulières 111
5.3.2 Résumé des performances 111
5.4 Première caractérisation de l'estimateur FUSCHIA_1 en plan focal 114
5.4.1 Estimation du piston 114
5.4.1.1 Performances 115
5.4.1.2 Linéarité 116
5.4.2 Estimation des basculements 116
5.4.2.1 Performances 117
5.4.2.2 Linéarité 117
5.5 Caractérisation de FUSCHIA_1 en plan extra-focal 119
5.5.1 Estimation du piston 120
5.5.1.1 Performances 120
5.5.1.2 Linéarité 122
5.5.2 Estimation des basculements 123
5.5.2.1 Performances 123
5.5.2.2 Linéarité 125

5.5.3 Influence de la configuration pupillaire . . . 126
5.5.3.1 En fonction de la dilution . . . 127
5.5.3.2 Cas d'un instrument monopupille segmenté . . . 127
5.6 Conclusion du chapitre . . . 131

6 Validations expérimentales sur le banc de test BRISE 135
6.1 Introduction . . . 135
6.2 Présentation du banc BRISE . . . 137
6.2.1 Généralités . . . 137
6.2.2 Description du banc . . . 139
6.2.2.1 Le module source . . . 139
6.2.2.2 Le module de perturbation . . . 141
6.2.2.3 Le module de détection . . . 142
6.2.2.4 Le module de contrôle . . . 143
6.2.2.5 L'instrument visiteur DWARF . . . 144
6.2.3 Mise en œuvre . . . 144
6.2.3.1 Adaptation du modèle direct aux conditions expérimentales . . . 145
6.2.3.2 Les procédures d'alignement . . . 148
6.2.4 Conditions d'expérimentation . . . 151
6.2.4.1 Les différents tests effectués . . . 151
6.2.4.2 Acquisition et traitement des données . . . 152
6.3 Validation dans le cadre de l'imagerie terrestre . . . 154
6.3.1 Conditions spécifiques . . . 154
6.3.2 Estimation du piston . . . 155
6.3.2.1 Performances . . . 155
6.3.2.2 Linéarité . . . 157
6.3.3 Estimation des basculements . . . 162
6.3.3.1 Performances . . . 162
6.3.3.2 Linéarité . . . 164
6.3.4 Conclusion sur le cas imagerie terrestre . . . 165
6.4 Validation dans le cadre du projet DARWIN . . . 166
6.4.1 Conditions spécifiques . . . 167
6.4.2 Estimation du piston . . . 168
6.4.2.1 Performances . . . 168
6.4.2.2 Linéarité . . . 169
6.4.3 Estimation des basculements . . . 173
6.4.3.1 Performances . . . 173
6.4.3.2 Linéarité . . . 174
6.4.4 Estimation des modes supérieurs . . . 176
6.4.5 Conclusion sur l'implémentation de DWARF . . . 179
6.5 Conclusion du chapitre . . . 179

Conclusion générale et perspectives 181
Bilan des travaux . . . 181
Perspectives . . . 182

A Conversion d'aberrations globales en aberrations sur les sous-pupilles **185**
A.1 Etude de la configuration 185
A.2 Décomposition d'un basculement 186
A.3 Décomposition d'une défocalisation 186

B Indétermination de phase en estimation monoplan **189**
B.1 Indétermination en monolithique 189
B.2 Synthèse d'ouverture et centrosymétrie 190
B.3 Levée de l'ambiguïté 192

C Intégration de la fonction de transfert en plan extra-focal **195**
C.1 Calculs préliminaires 195
C.2 Expression du pic d'intercorrélation non aberré $\mathcal{F}_{d,nn'}$ 196
C.3 Expression du pic d'intercorrélation aberré $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$ 197
C.4 Linéarisation de $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$ 198

D Grandeurs statistiques utilisées **201**

E Correspondance entre magnitude et nombre de photo-électrons détectés **203**

F Application des estimateurs FUSCHIA à des données astronomiques réelles **205**
F.1 La caractérisation de sites astronomiques en interférométrie 205
F.2 Le démonstrateur Pistonscope 206
F.3 Observation de l'étoile Sirius sur le site de Cerro Tololo 209

G Liste des publications **211**

H Article *Trait. Signal* **215**

I Article *Opt. Lett.* **227**

J Article *J. Opt. Soc. Am. A* **231**

Bibliographie **248**

Table des figures

1.1 Principe de la Synthèse d'Ouverture Optique. 11
1.2 Les différents types de télescopes à synthèse d'ouverture. 13
1.3 Principales catégories d'instruments de type SOO. 14
1.4 Exemple de budget de qualité de l'instrument. 17
1.5 Relations liant la pupille, la FEP et la FTO. 19
1.6 Illustration de pupilles homothétiques et densifiées. 22
1.7 Illustration des vingt-et-un premiers polynômes de Zernike. 23
1.8 Illustration des modes piston et basculement. 25
1.9 Principe de l'analyseur de Shack-Hartmann. 28
1.10 Principe de l'analyseur de courbure. 29
1.11 Exemple d'implémentation optique d'un analyseur de courbure. 29
1.12 Principe du filtrage spatial. 30
1.13 Principe de la diversité de phase. 32

2.1 Illustration de la zone de recouvrement entre deux sous-pupilles. 46
2.2 Comparaison des FTO exactes et linéarisées à faible phase incidente. 52
2.3 Objet et DSP associée. 55

3.1 Illustration du recouvrement des pics de la FTO. 62
3.2 Erreur globale de restauration du piston en fonction de la dilution. 63
3.3 Images de diversité obtenues en réponse à une défocalisation de $\pm 0{,}5$ rad. 65

4.1 Schéma de principe de MASTIC. 69
4.2 Illustration à une dimension de différentes apodisations. 71
4.3 Illustration de la configuration de référence à trois sous-pupilles. 75
4.4 Erreur totale en piston en fonction de l'amplitude de défocalisation introduite. 79
4.5 Influence du placement des plans de diversité. 80
4.6 Incertitude sur la phase de diversité. 81
4.7 Erreur totale en fonction des modes supérieurs introduits. 82
4.8 Erreur en piston obtenue pour $\phi_a = 0$ avant amélioration de FUSCHIA_2. 85
4.9 Erreur en piston obtenue par FUSCHIA_2 après un filtrage modal sélectif. 87
4.10 Illustration de l'une des composantes en piston de la matrice $\boldsymbol{A}$ pour différents flux. . 88
4.11 Erreur en piston obtenue à phase incidente nulle par FUSCHIA_2 après amélioration. 88
4.12 Performances en piston des estimateurs multiplans pour $\phi_a = 0$. 89
4.13 Performances en piston des estimateurs multiplans pour $\phi_a \simeq \lambda/12$. 89
4.14 Linéarité en piston des estimateurs multiplans. 91

4.15 Performances en basculement des estimateurs multiplans pour $\phi_a = 0$. 92
4.16 Performances en basculement des estimateurs multiplans pour $\phi_a \simeq \lambda/12$. 92
4.17 Linéarité en basculement des estimateurs multiplans. 94
4.18 Erreur obtenue en piston en fonction du contraste de l'objet observé. 96
4.19 Ecart-type en piston en fonction du nombre de pixels contenu dans les images 97
4.20 Télescope segmenté et répétabilité correspondante obtenue en piston. 98
4.21 Cartes de phase vraies/reconstruites par les estimateurs multiplans. 99
4.22 Restauration par FUSCHIA_2 de l'objet observé en fonction du flux. 101
4.23 Différents objets et leur DSP associée. 102
4.24 Erreur de restauration obtenue par FUSCHIA_2 pour différents objets. 103

5.1 Erreur totale en piston en fonction de l'amplitude de défocalisation introduite. 108
5.2 Performances en piston de l'estimateur FUSCHIA_0+ pour $\phi_a = 0$. 112
5.3 Linéarité en piston de l'estimateur FUSCHIA_0+. 112
5.4 Performances en basculement de l'estimateur FUSCHIA_0+ pour $\phi_a = 0$. 113
5.5 Linéarité en piston de l'estimateur FUSCHIA_0+. 114
5.6 Performances en piston de l'estimateur FUSCHIA_1 pour $\phi_a = 0$. 115
5.7 Linéarité en piston obtenue en plan focal par l'estimateur FUSCHIA_1. 117
5.8 Performances en basculement de l'estimateur FUSCHIA_1 pour $\phi_a = 0$. 118
5.9 Images focales obtenues lors de l'application d'une rampe de basculement. 119
5.10 Linéarité en basculement obtenue en plan focal par l'estimateur FUSCHIA_1. 119
5.11 Performances en piston des estimateurs de type SICLOPE pour $\phi_a = 0$. 121
5.12 Performances en piston des estimateurs de type SICLOPE pour $\phi_a \simeq \lambda/12$. 121
5.13 Linéarité en piston des estimateurs monoplans de type SICLOPE. 123
5.14 Performances en basculement des estimateurs de type SICLOPE pour $\phi_a = 0$. 124
5.15 Performances en basculement des estimateurs de type SICLOPE pour $\phi_a \simeq \lambda/12$. . 124
5.16 Images extra-focales obtenues lors de l'application d'une rampe de basculement. . . 125
5.17 Linéarité en basculement des estimateurs monoplans de type SICLOPE. 126
5.18 Influence de la dilution sur la restauration du piston. 128
5.19 Cartes de phase vraies/reconstruites par FUSCHIA_1 en présence d'aberrations. . . . 129
5.20 Performances obtenues par FUSCHIA_1 pour $N_T = 18$ segments. 130
5.21 Cartes de phase vraies/reconstruites par les estimateurs de type SICLOPE. 132

6.1 Schéma de principe du banc BRISE. 138
6.2 Photographie du banc BRISE. 139
6.3 Vue du banc SIROCCO et spectre de la source blanche. 140
6.4 Configuration du miroir composite. 141
6.5 Configurations pupillaires utilisées. 142
6.6 Vue du capteur de cophasage. 143
6.7 Champ de la caméra installée sur BRISE. 143
6.8 Implantation de DWARF sur le banc BRISE. 145
6.9 Orientation de la pupille numérique. 146
6.10 Recherche des homothéties et rotations affectant la pupille expérimentale. 147
6.11 Adéquation entre le modèle direct et les images expérimentales. 149
6.12 Alignement du miroir composite. 150
6.13 Corrélation entre basculement global et déplacement de la FEP. 154

6.14 Ecart-type en piston des estimateurs multiplans obtenu sur le miroir de référence. . . 156
6.15 Performances en piston des estimateurs multiplans (simulation). 157
6.16 Linéarité en piston des estimateurs monoplans (projet SOTISE). 158
6.17 Linéarité en piston des estimateurs multiplans. 159
6.18 Linéarité en piston de l'estimateur FUSCHIA_2 en fonction du flux. 160
6.19 Linéarité en piston obtenue pour différentes largeurs spectrales (projet SOTISE). . . 161
6.20 Ecart-type en basculement des estimateurs multiplans sur le miroir de référence. . . . 162
6.21 Performances en basculement des estimateurs multiplans (simulation). 163
6.22 Linéarité en basculement des estimateurs monoplans (projet SOTISE). 164
6.23 Linéarité en basculement des estimateurs multiplans. 166
6.24 Ecart-type en piston des estimateurs monoplans obtenu sur le miroir de référence. . . 169
6.25 Linéarité en piston (projet DARWIN, plan focal). 170
6.26 Linéarité en piston (projet DARWIN, plan extra-focal). 172
6.27 Linéarité en piston pour différentes largeurs spectrales (projet DARWIN). 173
6.28 Ecart-type en basculement des estimateurs monoplans sur le miroir de référence. . . 174
6.29 Linéarité en basculement (projet DARWIN, plan focal). 176
6.30 Linéarité en basculement (projet DARWIN, plan extra-focal). 176
6.31 Images obtenues lors de la mesure des modes supérieurs (projet DARWIN). 178
6.32 Estimation des modes supérieurs (projet DARWIN). 178

A.1 Schéma d'une configuration multipupille. 185

B.1 Exemple de trois configurations centrosymétriques. 191
B.2 Schéma d'une configuration centrosymétrique. 191
B.3 Images obtenues pour une phase incidente égale à $+\phi_a$, puis $-\phi_a$. 193

C.1 Module et phase de la fonction $G(y)$. 197
C.2 Module et phase de la fonction $H(y)$. 199

F.1 Réponse spectrale de la caméra. 207

Liste des tableaux

1.1 Influence de la configuration pupillaire sur la FEP et la FTO. 21
1.2 Effet d'un piston et d'un basculement sur la FEP et la FTO. 26
1.3 Comparaison entre le Shack-Hartmann, l'analyseur de courbure et la diversité de phase. 38

2.1 Illustration des modes piston et basculements globaux obtenus à phase incidente nulle. 44
2.2 Expression des pseudo-modes $\mathcal{Z}_k^{\pm}$ et résultat de leur intégration. 49
2.3 Jeu aléatoire d'aberrations introduit sur une configuration à trois sous-pupilles. . . . 52
2.4 Effet d'un piston sur la FTO d'une configuration compacte, puis diluée. 54

4.1 Illustration des bases canoniques cohérente et mobile. 74
4.2 Exemple d'aberrations introduites lors de l'optimisation du capteur de diversité. . . . 81
4.3 Jeu aléatoire d'aberrations introduit sur la configuration pupillaire de référence. . . . 85
4.4 Liste des valeurs propres de la matrice à inverser. 86
4.5 Objets obtenus pour différentes valeurs de contraste. 95
4.6 Cœfficients de Zernike utilisés pour simuler les défauts propres d'un monopupille. . . 97
4.7 Liste des hyperparamètres pour trois objets différents. 103

5.1 Aberrations introduites lors de la caractérisation des estimateurs monoplans. 107
5.2 Effet de la troncature des données sur le module de la FTO. 109
5.3 Pistons et basculements introduits sur une configuration à 18 segments. 128

6.1 Liste des principales caractéristiques du banc BRISE. 140
6.2 Aberrations estimées par l'algorithme itératif multiplan sur le miroir de référence. . . 157
6.3 Aberrations estimées par l'algorithme itératif monoplan sur le miroir de référence. . . 170

B.1 Parité des modes piston et basculement. 193
B.2 Images obtenues dans un plan $\pm$ défocalisé, pour une phase incidente $\pm\phi_a$. 194

E.1 Principales caractéristiques de l'instrument DARWIN. 203
E.2 Correspondance magnitude/flux pour DARWIN en bande V. 204
E.3 Correspondance magnitude/flux pour le VLTI en bande K. 204

F.1 Principales caractéristiques de la caméra Prosilica GE680. 207
F.2 Configurations pour un diamètre de sous-pupille égal à 50 mm et 80 mm. 208
F.3 Principales caractéristiques du démonstrateur. 209
F.4 Illustration de l'expérience Pistonscope à l'observatoire de Cerro Tololo. 209

Principales notations

LETTRES LATINES

Notation	*Description*
A	Partie du critère d'estimation dépendant des aberrations recherchées
$a^{\pm}_{knn'}$	Combinaison linéaire des a_{kn} et des $a_{kn'}$
$a_{kn}, \boldsymbol{a}$	Amplitude RMS du $k^{\text{ième}}$ mode sur la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille introduite par la phase incidente recherchée ; vecteur des aberrations a_{kn}
$\mathcal{B}$	Base de l'instrument
B	Expression du critère d'estimation à phase aberrante nulle
$\boldsymbol{b}$	Fréquence spatiale normalisée ou base de la pupille réduite
C	Contraste de l'objet
c	Nombre d'anneaux(approximativement) de la tache de diffraction
$\mathfrak{d}$	Dilution de la configuration pupillaire
$\mathcal{D}$	Diamètre des sous-pupilles
$d^{\pm}_{knn'}$	Combinaison linéaire des d_{kn} et des $d_{kn'}$
d, d'	Indices d'adressage des plans de diversité
$d_{kn}, \boldsymbol{d}$	Amplitude RMS du $k^{\text{ième}}$ mode sur la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille introduite par la phase de diversité ; vecteur des aberrations d_{kn}
e_i	Taille en mètre d'un pixel au plan focal
e^n_k	Somme sur n' des cœfficients $a^{\pm}_{knn'}$
e_p	Taille en mètre d'un pixel dans le plan pupille
$\mathcal{F}_{d,nn'}$	Pic d'intercorrélation nn' obtenu au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité à phase incidente nulle
$\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$	Contribution de la phase incidente au pic d'intercorrélation nn' obtenu dans le $d^{\text{ième}}$ plan de diversité
$F_d, F_{dnn'}$	Fonction de Transfert Optique et pic d'intercorrélation nn' de la FTO obtenus au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité
f	Focale de l'instrument
H	Forme discrétisée de la réponse impulsionnelle
h_d	Fonction d'étalement de point, où réponse impulsionnelle de l'instrument, obtenue au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité
I	Intensité mesurée
Id	Matrice identité
i_d	Image obtenue au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité
$\mathcal{J}$	Fonction réelle intervenant dans le calcul de J

LETTRES LATINES (suite)

J	Module de $\mathcal{F}_{d,nn'}$
j	Complexe : $j^2 = -1$
K	Phase de $\mathcal{F}_{d,nn'}$
k, k'	Indice d'adressage des modes de Zernike
$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$	Critères d'estimation
L, M, N	Fonctions réelles intervenant dans l'expression de $\mathcal{F}_{a,d,nn'}$
L_c	Longueur de cohérence
m	Magnitude apparente
N_{bph}	Nombre de photo-électrons contenus dans l'image
N_d	Nombre de plans de diversité
N_f	Nombre de fréquences sur lesquelles est défini le critère d'estimation
N_i	Largeur de l'image en pixel, supposée carrée
N_p	Taille du support dans lequel la pupille est insérée. En simulation, nous choisissons $N_p = N_i/2$
N_{pix}	Nombre de pixels dans l'image : $N_{\text{pix}} = N_i^2$
N_T	Nombre de sous-pupilles
N_z	Nombre de cœfficients de Zernike recherchés/reconstruits
n, n'	Indices d'adressage des pupilles
o, o_m	Objet et objet moyen
P	Matrice des produits scalaires
p_d, p_{dn}	Transmission complexe de la pupille et de la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité
$\Re$	Opérateur partie réelle
$\mathcal{R}$	Rayon des sous-pupilles
R	Terme de régularisation sur la phase
$\boldsymbol{r}$	Vecteur des coordonnées cartésiennes
$\mathfrak{S}_o$	Densité spectrale de puissance de l'objet
$S_\circ$	Fonction "chapeau chinois" de largeur 4 et de hauteur π
$S_{\between \boldsymbol{b}}$	Zone de recouvrement entre une ouverture circulaire et cette même ouverture translatée d'un vecteur $\boldsymbol{b}$: $S_{\between \boldsymbol{b}} = \iint \Pi(\boldsymbol{x})\Pi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}$
$S_\wedge$	Domaine où le pic nn' de la fonction de transfert est défini
$S_\subset$	Domaine où au moins l'une des fonctions de transfert F_d est non nulle
s	Facteur d'échantillonnage
$\boldsymbol{u}_n$	Coordonnée réduite et normalisée dans la pupille
V	Visibilité des franges d'interférence
$\boldsymbol{v}$	Fréquence spatiale normalisée
$\mathcal{Y}_{knn'}$	$k^{\text{ième}}$ mode de décomposition des aberrations sur le pic nn' de la FTO (hors recouvrement)
Z_k	$k^{\text{ième}}$ mode ortho-normalisé de Zernike
$\mathcal{Z}_k$	$k^{\text{ième}}$ pseudo-mode défini, pour un déplacement $\boldsymbol{b}$ donné, sur la zone de recouvrement $S_{\between \boldsymbol{b}}$ entre deux sous-pupilles

LETTRES GRECQUES ET AUTRES SYMBOLES

Notation	*Description*
α_d	Terme de la Fonction de Transfert Optique qui est affine en les aberrations recherchées au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité
β_d	Partie de la FTO qui est indépendante des aberrations recherchées
γ_k	Cœfficient qui vaut $+1$ si le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Zernike est d'ordre radial pair, -1 sinon
δ	Distribution de Dirac qui vérifie, pour toute fonction f définie et continue au voisinage de zéro, la relation $\int \delta(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = f(0)$
ϵ	Constante proche de zéro, typiquement 10^{-6}
ζ	Degré complexe de cohérence
θ	Coordonnée angulaire
θ_o	Diamètre angulaire de l'objet
κ	Constante proportionnelle au carré du nombre de photons contenus dans l'image
λ	Longueur d'onde d'observation
$\Delta\lambda$	Largeur spectrale
μ	Paramètre caractérisant la régularité de l'objet
ν	Fréquence spatiale
ν_o	Inverse de la taille objet
ξ_i	i^{ième} valeur propre d'une matrice
ρ	Première coordonnée polaire
σ, σ_b	Ecart-type du bruit et bruit de détecteur
τ	Cœfficient caractérisant l'écart-type des estimateurs en radian RMS
ϕ_a	Phase incidente recherchée
ϕ_d	Phase de diversité
φ	Deuxième coordonnée polaire
Ψ	Amplitude du champ électromagnétique
ψ, ψ_n	Phase de la pupille et de la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille
Π	Fonction disque unitaire : $\Pi(\boldsymbol{x}) = 1$ pour $0 \leq \lvert\boldsymbol{x}\rvert \leq 1$, 0 sinon
∇^2	Opérateur Laplacien, égal à la somme de toutes les dérivées partielles non mixtes d'ordre 2 d'un variable dépendante. Ainsi, en coordonnées scalaires, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
^{H}	Hermitien, ou transposée du complexe conjugué
^{t}	Transposée d'un bloc matriciel
$^{-1}$	Fonction réciproque
$\dagger$	Fonction inverse, ou inverse généralisé d'un bloc matriciel
$*$	Conjugaison complexe : $(\boldsymbol{a} + j\boldsymbol{b})^* = \boldsymbol{a} - j\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$
$\tilde{}$	Transformée de Fourier : $\tilde{f}(\boldsymbol{\nu}) = \int f(\boldsymbol{x}) \exp(2j\pi \boldsymbol{r}.\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$
$\hat{}$	Quantité estimée
$\otimes$	Corrélation : $\Big(f \otimes g\Big)(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{y})^* g(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$
$\star$	Convolution : $\Big(f \star g\Big)(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$
$\langle\ \rangle_{S_{\lozenge \boldsymbol{b}}}$	Moyenne décalée sur une sous-pupille : $\langle f \rangle_{S_{\lozenge \boldsymbol{b}}} = \frac{1}{S_{\lozenge \boldsymbol{b}}} \iint \Pi(\boldsymbol{x}) \Pi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}$

ACRONYMES

Notation	*Description*
ALADDIN	Antarctic L-band Astrophysics Discovery Demonstrator for Interferometric Nulling
ASO	Analyseur de Surface d'Onde
BRISE	Banc Reconfigurable d'Imagerie sur Scènes Etendues
CDC	Capteur de Cophasage
DARWIN	Detection and Analysis of Remote Worlds by Interferometric Nulling
DSP	Densité Spectrale de Puissance
DWARF	DarWin AstRonomical Fringe sensor
ELT	Extremely Large Telecope
FEP	Fonction d'Etalement de Point
FFT	Fast Fourier Transform
FTM	Fonction de Transfert de Modulation
FTO	Fonction de Transfert Optique
FTP	Fonction de Transfert de Phase
FUSCHIA	Fast Unambiguous Sensor for CopHasing Interferometric Array
GEO	Geostationnary Earth Orbit
ISOO	Instrument à Synthèse d'Ouverture Optique
MAPJ	Maximum *A Posteriori* Joint
MASTIC	Multiple Aperture Software for Telescope Imaging and Cophasing
MD	Miroir Déformable
OA	Optique Adaptative
RMS	Root Mean Square (en moyenne quadratique)
RSB	Rapport Signal à Bruit (défini par pixel)
SH	Shack-Hartmann
SICLOPE	Single Image with CaLibrated Offset for Phase Estimation
SIROCCO	Système d'Injection Relié à l'Objet, Contrôlant Chaleur et Obturation
SOO	Synthèse d'Ouverture Optique
SOTISE	Satellite d'Observation de la Terre par Interférométrie sur Scènes Etendues
TF	Transformée de Fourier
VLT	Very Large Telescope
VLTI	Very Large Telescope Interferometer

ALGORITHMES

Notation	*Description*
FUSCHIA_0	Analytique, plan focal, sur point source, analyse de la FTP (version 2004)
FUSCHIA_0+	Analytique, plan focal, sur point source, analyse améliorée de la FTP
FUSCHIA_1	Analytique, un plan de diversité, sur point source, critère quadratique
FUSCHIA_2	Analytique, au moins deux plans de diversité, critère quadratique
itératif_1	Itératif, plan focal, sur point source (*phase retrieval* classique)
itératif_2	Itératif, au moins deux plans de diversité (diversité de phase classique)

Introduction générale

Depuis plusieurs dizaines d'années, les astronomes en charge du développement des futures missions pour l'astronomie ou l'observation de la Terre n'ont eu de cesse que d'augmenter le diamètre des collecteurs de leurs instruments pour obtenir des résolutions spatiales de plus en plus importantes. Malheureusement, la fabrication et le lancement dans l'espace de miroirs de diamètre croissant se heurte rapidement à de nombreuses limitations aussi bien technologiques (encombrement, masse) que financières. Dès lors, pour répondre aux problèmes posés par la construction ou l'emploi de miroirs monoblocs géants et pour gagner définitivement en résolution, la Synthèse d'Ouverture Optique apparaît comme une solution séduisante. En effet, cette méthode consiste à synthétiser l'équivalent d'un instrument de grand diamètre en faisant interférer plusieurs télescopes ou miroirs individuels (appelés également sous-pupilles) de diamètre inférieur.

Etant donné que le champ des applications possibles est extrêmement vaste, cette méthode se révèle aujourd'hui comme étant incontournable dans le domaine de la haute résolution angulaire. De fait, plusieurs instruments multipupilles sont actuellement disponibles au sol ou en cours de construction et des projets spatiaux ambitieux et de plus en plus nombreux y font désormais appel. Parmi les applications spatiales, citons le cas de l'observation de la Terre dont l'importance est fondamentale tant sur le plan civil que militaire. Or, si l'observation de notre planète par un télescope monolithique en orbite géostationnaire permet la surveillance en continue d'une zone donnée, elle ne permet pas d'obtenir de haute résolution du fait de l'éloignement de l'orbite, située à environ 36 000 Km. L'utilisation d'instruments à synthèse d'ouverture optique permet de compenser cet éloignement par l'augmentation du diamètre et ainsi d'atteindre des résolutions inégalées de l'ordre du mètre pour cette orbite.

L'une des principales difficultés de la mise en œuvre de tels instruments réside dans la mesure puis la correction à une fraction de longueur d'onde des aberrations présentes entre les sous-pupilles. En effet, quelle que soit la configuration retenue, multipupille ou monopupille segmentée, les performances d'un système à synthèse d'ouverture dépendent principalement de la qualité de mise en phase des miroirs. Le capteur de cophasage chargé de mesurer les aberrations des télescopes est donc un composant clef, en particulier pour la mesure des modes pistons et basculements différentiels spécifiques aux instruments multipupilles.

Cette problématique du cophasage étant relativement nouvelle, la plupart des méthodes d'estimation utilisées à ce jour sont basées sur des procédés d'analyse qui ont été développés à l'origine pour des instruments monolithiques. Dans ce contexte, Cassaing [Cassaing *et al.* (2003b)] à montré que, pour répondre aux besoins en cophasage des interféromètres spatiaux ou de deuxième génération de type VLTI, les techniques de type plan focal présentent un avantage certain de part leur grande polyvalence. En effet, ces techniques qui reposent sur l'analyse de figures d'interférences dans un plan d'imagerie sont optiquement simples à implémenter, ce qui s'avère d'une importance capitale dans le cas d'un système embarqué. De plus, elles peuvent estimer de nombreux modes pour un nombre

important de sous-pupilles et sont sensibles à toutes les aberrations jusqu'au plan focal.

Si la configuration pupillaire est connue, les modes d'intérêt que sont les pistons et basculements différentiels peuvent être déterminés à partir de l'image d'un point source acquise au plan focal. Historiquement, ce fut Gonsalves [Gonsalves (1976)] qui le premier eu l'idée de retrouver les aberrations d'un télescope en mesurant l'intensité d'un objet ponctuel ; par la suite, cette méthode dite du *phase retrieval* fut appliquée au cas multitélescope par Paxman et Fienup [Paxman & Fienup (1988)]. Cependant, elle est inefficace pour les objets résolus et ne permet pas la mesure des aberrations d'ordre supérieur. Pour résoudre ce problème, l'une des rares solutions est d'employer la technique dite de la diversité de phase [Gonsalves (1982)] et qui consiste à utiliser au moins une deuxième image différant de la première par une variation de phase parfaitement connue. La ou les images supplémentaires permettent dès lors de coder l'information de phase de manière différente et par conséquent de lever les indéterminations existantes. Le plus souvent, la perturbation choisie est une défocalisation globale car c'est *de facto* le mode le plus simple à mettre en œuvre. Dans ce contexte, la diversité de phase permet non seulement de mesurer toutes les aberrations d'intérêt mais aussi de les prendre en compte pour faire de la restauration d'objet *a posteriori* [Mugnier *et al.* (2006)].

Le *phase retrieval* et la diversité de phase sont aujourd'hui couramment employés avec des instruments monopupilles pour évaluer le front d'onde incident au voisinage du plan focal [Gonsalves (2001); Blanc *et al.* (2003a)]. Dans le cadre d'instruments multipupilles, les travaux menés par Baron [Baron (2005)] ont permis le développement de plusieurs algorithmes de mesure des pistons et basculements différentiels sur point source ainsi que l'implémentation et la validation en laboratoire d'un estimateur spécifique à l'observation de scènes étendues. Cependant, ces méthodes présentent l'inconvénient d'être itératives et donc potentiellement coûteuses en temps de calcul ; par conséquent, elles sont à l'heure actuelle incompatibles avec les exigences temps-réel d'un système embarqué.

Jusqu'à présent, très peu de travaux spécifiques se sont attachés à réduire le nombre d'itérations nécessaires et encore moins pour des applications à synthèse d'ouverture sur objet étendu. L'objectif de cette thèse est de démontrer que les méthodes de type plan focal peuvent être des solutions rapides et polyvalentes, pouvant s'appliquer avec succès à des mesures de phase en boucle fermée et ainsi répondre parfaitement aux besoins spécifiques des missions d'observation. Pour cela, nous avons cherché à développer de nouveaux estimateurs de cophasage qui soient analytiques, permettant de ce fait une estimation en temps-réel des aberrations que ce soit sur scène étendue ou sur objet ponctuel.

Cette thèse est découpée en six chapitres. Le chapitre 1, qui constitue la première partie du manuscrit, permet d'introduire la problématique générale de notre étude et comprend un certain nombre de rappels indispensables. Tout d'abord, nous proposons une vue d'ensemble des techniques à synthèse d'ouverture puis introduisons les bases de la formation d'images en optique de Fourier. Nous présentons ensuite les diverses méthodes permettant de faire de l'analyse de surface d'onde et justifions le choix des méthodes de type plan focal pour cophaser un instrument à synthèse d'ouverture optique.

La deuxième partie est consacrée au développement analytique de nouveaux algorithmes de cophasage. Dans un premier temps, nous nous attachons au chapitre 2 à obtenir une estimée simple des pistons et basculements différentiels sur scène étendue en exprimant le critère à minimiser sous forme quadratique. Afin d'y parvenir, nous choisissons de privilégier l'hypothèse des faibles phases aberrantes et de linéariser l'expression des pics de la Fonction de Transfert Optique (FTO) en plan extra-focal. Nous nous intéressons ensuite au chapitre 3 au cas particulier de la restauration monoplan sur objet ponctuel ; nous y détaillons les développements effectués s'appuyant sur la mise sous forme affine de la FTO dans un plan quelconque.

La troisième partie de ce mémoire est dédiée à la caractérisation par simulation de ces nouveaux estimateurs. Dans un premier temps, nous déterminons au chapitre 4 l'implémentation optimale du

capteur de cophasage puis évaluons ses propriétés asymptotiques sur scène étendue. Nous examinons également ses performances en fonction de paramètres clef comme le contraste ou la configuration pupillaire sélectionnée et les comparons à celles de l'estimateur itératif correspondant. Enfin, nous nous intéressons au chapitre 5 à l'étude des caractéristiques de reconstruction au voisinage du plan focal dans le cas particulier d'un objet ponctuel.

La dernière partie a pour objectif de valider expérimentalement et dans le cadre de différents projets l'ensemble des estimateurs de type plan focal puis de confronter les résultats correspondants à ceux obtenus par simulation. Tout d'abord, nous commençons le chapitre 6 par la description du banc BRISE, le banc de test de l'ONERA dédié à l'imagerie multitélescope. Nous évaluons ensuite les performances de nos estimateurs dans les conditions spécifiques liées à l'observation de la Terre depuis une orbite géostationnaire. Nous terminons ce chapitre par la présentation des résultats obtenus sur point source lors de la définition du senseur de front d'onde de la mission DARWIN.

Pour finir, la conclusion de ce manuscrit permet de faire le bilan de ces quatre années de recherche ; elle permet également de dire si les méthodes de type plan focal sont à même de répondre pleinement aux besoins en cophasage des futures missions astronomiques ou d'observation terrestre, et avec quelles perspectives.

Chapitre 1

Haute résolution angulaire et Synthèse d'Ouverture Optique

Nature and Nature's laws lay hid in night :
God said, "Let Newton be !" and all was light.
Alexander Pope

Ce chapitre est dédié à la présentation des divers aspects de la Synthèse d'Ouverture Optique (SOO). Tout d'abord, nous y expliquons en section 1.1 le principe ainsi que l'intérêt de cette méthode, et introduisons la problématique du cophasage. Nous rappelons ensuite en section 1.2 les relations fondamentales de l'imagerie ; notamment, nous montrons comment établir, pour un instrument multipupille, l'expression de la Fonction de Transfert Optique (FTO) à partir de l'agencement pupillaire. La section 1.3 traite quant à elle des différents capteurs de cophasage actuellement disponibles sur ce genre d'instruments. Nous y détaillons essentiellement les méthodes dites *plan focal*, et plus particulièrement la technique de la *diversité de phase* pouvant être utilisée pour un cophasage sur objet éventuellement étendu. Enfin, nous justifions le choix des méthodes de cophasage retenues dans le cadre de cette thèse et exposons leurs limites actuelles.

1.1 Introduction à la Synthèse d'Ouverture Optique

1.1.1 Intérêt fondamental

En théorie, la résolution spatiale d'un instrument optique de diamètre $\mathcal{D}$, que l'on peut approximativement définir comme la plus petite séparation angulaire mesurable entre deux objets, est directement reliée à la longueur d'onde d'observation λ par :

$$\theta_o \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{D}} \tag{1.1}$$

Ainsi, depuis l'invention de la lunette astronomique, l'augmentation du diamètre s'est accompagnée d'un net gain en résolution. Cependant, au delà d'un certain seuil, l'instrument devient sensible à la présence d'aberrations optiques qui empêchent d'atteindre la limite de diffraction. Ces perturbations, engendrées sur le trajet du front d'onde incident, peuvent aussi bien provenir du télescope

que du milieu de propagation. Toutefois, dans le cadre d'une observation au sol, ces aberrations sont essentiellement imputables à la turbulence atmosphérique[1] ; dès lors, il existe deux solutions pour s'affranchir au mieux des dégradations dues à l'atmosphère : nous pouvons soit envoyer l'instrument dans l'espace, soit corriger les aberrations par le biais d'une Optique Adaptative (OA). Cette technique consiste en une compensation en temps-réel[2] des perturbations introduites par la turbulence atmosphérique, généralement par réflexion sur un miroir dont la surface est déformée à chaque instant *via* une boucle d'asservissement en fonction des mesures d'un Analyseur de Surface d'Onde (ASO). Ainsi, il devient possible d'atteindre des résolutions avoisinant la limite de diffraction, et ce grâce aux optiques adaptatives les plus perfectionnées, comme le système NAOS (Nasmyth Adaptive Optic System) installé sur le quatrième télescope de huit mètres du Very Large Telescope [Fusco *et al.* (2004)].

Grâce à cette méthode, la turbulence atmosphérique n'est *a fortiori* plus un problème en soi. Cependant, le gain en résolution reste limité du fait des contraintes technologiques actuelles posées par la fabrication des miroirs primaires. En effet, il est actuellement impossible de réaliser des télescopes monoblocs de plus d'une dizaine de mètres de diamètre. Par ailleurs, le coût de construction devient alors prohibitif. Soulignons également que l'envoi dans l'espace de tels miroirs se révèle impossible, du fait de leur encombrement et de leur masse[3].

Pour répondre aux problèmes posés par la construction ou l'emploi de miroirs monolithiques géants et pour gagner un surcroît de résolution, deux méthodes ont été proposées :

- construire un télescope à pupille pleine segmentée en remplaçant le miroir primaire par une mosaïque de segments jointifs plus petits et convenablement alignés ;
- réaliser l'équivalent d'un instrument de grand diamètre $\mathcal{B}$ (voir Fig. 1.1 gauche) en faisant interférer plusieurs télescopes ou miroirs individuels (appelés également *sous-pupilles*) de diamètre $\mathcal{D} \ll \mathcal{B}$, comme représenté Fig. 1.1 milieu ; dans ce cas, la pupille de l'instrument équivalent est donnée par l'agencement de l'ensemble des sous-pupilles. Notons que cette méthode fut envisagée dès 1967 pour réduire les coûts de fabrication des grands télescopes [Meinel (1970)]. Si la couverture fréquentielle de l'instrument n'est pas suffisante (nous verrons en détail cette notion en sous-section 1.2.1), il est possible de la compléter par *Synthèse d'Ouverture Optique*, en déplaçant la pupille par rapport à l'objet observé [Faucherre *et al.* (1989)] comme illustré Fig. 1.1 droite.

Par abus de langage, nous utiliserons dans la suite de ce manuscrit le terme de *Synthèse d'Ouverture Optique* pour désigner un instrument multipupille, voire dans certains cas un télescope segmenté[4]. Par conséquent, un Instrument à Synthèse d'Ouverture Optique (ISOO) désignera indifféremment l'une ou l'autre réalisation.

Appelons *base* la distance entre deux sous-pupilles ou deux segments. La résolution angulaire

[1] En effet, l'atmosphère terrestre est constituée de masses d'air de température variable qui sont constamment en mouvement. Or, ces fluctuations de température engendrent des variations de l'indice de réfraction de l'air et par conséquent des variations aléatoires du chemin optique [Kolmogorov (1941)].

[2] Avec une fréquence de correction comprise entre 250 Hz et 1 kHz.

[3] Rappelons que la version ECA d'Ariane 5, qui est aujourd'hui la version "gros porteur" de cette gamme de lanceur, peut placer en orbite GEO (Geostationnary Earth Orbit) des charges utiles présentant au maximum une masse de 10 tonnes pour un diamètre de 4,57 mètres, moyennant un coût de lancement avoisinant les 130 millions d'euros !

[4] Dans la suite de ce manuscrit, le terme *monolithique* désignera un miroir monobloc ou bimorphe, et le terme de *monopupille segmenté* sera appliqué aux instruments à synthèse d'ouverture dont la pupille, équivalente à celle d'un monolithique (on parle alors de pupille pleine), est composée de plusieurs segments.

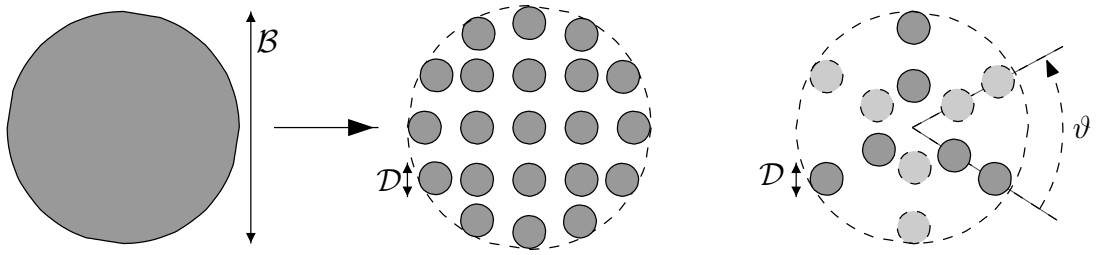


Fig. 1.1 – Principe de la Synthèse d'Ouverture Optique : un instrument de grand diamètre $\mathcal{B}$ (à gauche) est remplacé par un réseau de sous-pupilles de diamètre $\mathcal{D} \ll \mathcal{B}$ (au milieu), complété si besoin par un déplacement des pupilles, par exemple une rotation d'ensemble d'un angle ϑ (à droite).

d'un ISOO est alors donnée par :

$$\theta_o \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{B}} \tag{1.2}$$

où $\mathcal{B}$ désigne la base maximale[5] de l'instrument. Ainsi, il est possible d'atteindre une résolution comparable à celle d'un télescope monolithique de diamètre $\mathcal{B}$ tout en s'affranchissant des contraintes de fabrications posées par les miroirs monoblocs. Notons toutefois que la couverture fréquentielle dépend intrinsèquement de l'arrangement pupillaire choisi ; nous verrons dans la sous-section 1.2.2 les contraintes que cela implique.

La synthèse d'ouverture apparaît donc comme une solution séduisante grâce au gain en résolution qu'elle peut apporter. Cependant, pour que l'instrument ainsi synthétisé soit exploitable, il est nécessaire que les faisceaux issus des différentes sous-pupilles interfèrent de façon stable. Dans la sous-section suivante, nous allons envisager ce problème d'un point de vue purement optique ; en particulier, nous ne traiterons pas de la stabilité mécanique de l'instrument.

1.1.2 La problématique du cophasage

Pour que les rayons lumineux issus des sous-pupilles puissent interférer, leur différence de marche doit être située dans la zone de cohérence ; elle doit donc être inférieure à la longueur de cohérence L_c de la source d'émission. Or, cette quantité est d'autant plus faible que la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la source est importante :

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{1.3}$$

Par conséquent, il sera plus difficile de faire interférer les faisceaux en lumière blanche car cela implique, pour une observation effectuée dans le visible, d'obtenir une différence de marche entre les différents bras de l'interféromètre qui soit typiquement inférieure à quelques microns. L'opération qui consiste alors à ajuster les différents chemins optiques est désignée sous le terme de *cophasage*. Il existe deux moyens de cophaser un ISOO :

- soit par métrologie interne en utilisant une source propre à l'instrument, par exemple un LASER ;
- soit par cophasage externe en se servant directement du flux provenant de l'objet observé.

[5] Cette distance étant définie à partir du centre des sous-pupilles.

Quelle que soit la méthode utilisée, le principe reste généralement le même : les aberrations recherchées sont tout d'abord estimées au moyen d'un Analyseur de Surface d'Onde[6] puis corrigées grâce à un système permettant l'ajustement des chemins optiques (par exemple les actionneurs d'un miroir actif). En pratique, la correction ne concerne pas toutes les aberrations estimées ; nous verrons à la sous-section 1.2.4 lesquelles présentent un intérêt pour la mise en phase des faisceaux.

Le cophasage est réalisé en *boucle fermée* lorsque l'opération (c.-à.-d. l'estimation puis la correction des aberrations) est en permanence active sur l'instrument ; dans ce cas, la mesure s'effectue à partir du résidu d'aberrations résultant du cophasage précédent. Le système fonctionne donc à proximité du point optimal, là où toutes les sous-pupilles sont en phase ; par conséquent, les aberrations à corriger sont faibles. A l'inverse, un système initialement non cophasé est *a priori* loin du point de fonctionnement, voire même en dehors de la zone de cohérence. Des lors, il faut la plupart du temps faire tout d'abord appel à des algorithmes spécifiques pour garantir l'interférence entre les faisceaux. Ce régime de correction partielle, qui consiste à stabiliser la zone de cohérence, sera par la suite appelé *cohérençage*. Nous dirons également que le système est en *boucle ouverte* lorsque la mesure des aberrations est effectuée sans correction ultérieure.

1.1.3 Les différents types d'Instruments à Synthèse d'Ouverture Optique

Après avoir brièvement introduit la notion de synthèse d'ouverture, nous présentons dans cette sous-section les différents types d'instruments utilisant ce principe et nous décrivons, selon la catégorie d'interféromètres considérée, la méthode de détection usuellement associée.

1.1.3.1 Implémentations optiques

Plusieurs implémentations, comme représentées Fig. 1.2, peuvent être envisagées afin de réaliser un ISOO [Cassaing (1997); Rousset *et al.* (2001)] :

- le télescope monopupille, analogue à un monolithique mais dont le primaire est composé de plusieurs miroirs alignés (Fig. 1.2 a). Ainsi, le Keck, situé à Hawaii, utilise un miroir de 10 mètres constitué de 36 segments hexagonaux jointifs de 90 cm de côté [Witebsky *et al.* (1990)]. Ce principe est également utilisé dans l'espace pour déployer des télescopes dont le diamètre équivalent est supérieur à celui de la coiffe du lanceur. C'est notamment le cas pour le James Webb Space Telescope [Clampin *et al.* (2003)], dont le diamètre total est de 6,5 mètres ;
- le réseau de sous-pupilles (Fig. 1.2 b), constitué d'un ensemble de télescopes qui peuvent être mécaniquement solidaires. Par exemple, le Large Binocular Telescope du Mont Graham (Arizona), composé de deux miroirs monopupilles segmentés de 8,4 mètres espacés centre à centre de 14,4 m, a pour but de fournir une image comparable à celle d'un monolithique équivalent [Wagner (2006)]. Ce type d'instruments commence également à être envisagé pour faire de l'imagerie terrestre large champ depuis l'orbite géostationnaire [Mugnier *et al.* (2005)] ;
- enfin citons les interféromètres fibrés (Fig. 1.2 c) pour lesquels les faisceaux sont véhiculés par des fibres optiques monomodes, comme pour le projet 'OHANA (Optical Hawaiian Array for Nanoradian Astronomy) qui consiste en une recombinaison interférométrique des grands télescopes du site de Mauna Kea, à Hawaii [Perrin *et al.* (2004)].

[6] Dans la littérature, ce terme désigne généralement des systèmes d'analyse qui sont spécifiques aux configurations monolithiques. Dès lors, pour les instruments multipupilles, le terme de *capteur de cophasage* est *a priori* le seul terme qui soit réellement approprié pour désigner le dispositif permettant de mesurer les différences de chemin optique. Par abus de langage, nous parlerons néanmoins d'*ASO*, même dans ce cas.

Parmi ces différentes configurations, nous pouvons distinguer trois catégories d'instruments :

- les systèmes de type *Fizeau* (Fig. 1.3 a), formant directement une image de l'objet observé. Cette catégorie, qui recouvre principalement les télescopes segmentés, concerne donc des ISOO imageurs ;
- les systèmes de type *Michelson* (Fig. 1.3 b), basés sur le transport des faisceaux par périscope ou par fibre. Cette configuration ne se prête pas à l'imagerie dont le champ d'observation est supérieur à $\lambda/\mathcal{D}$ (imagerie grand champ) ; elle est plutôt utilisée pour reconstruire un ensemble discret de fréquences spatiales de l'objet [Mugnier *et al.* (2008)]. L'instrument correspondant est alors appelé ISOO *corrélateur* car il mesure, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, la corrélation des champs électromagnétiques entre les sous-pupilles, à l'instar de ce qui est effectué pour le Very Large Interferometer Array (VLTI) situé sur le Mont Paranal ;
- les systèmes Michelson en mode Fizeau, qui permettent de faire de l'imagerie (notamment de l'imagerie terrestre grand champ) à partir de réseaux de télescopes.

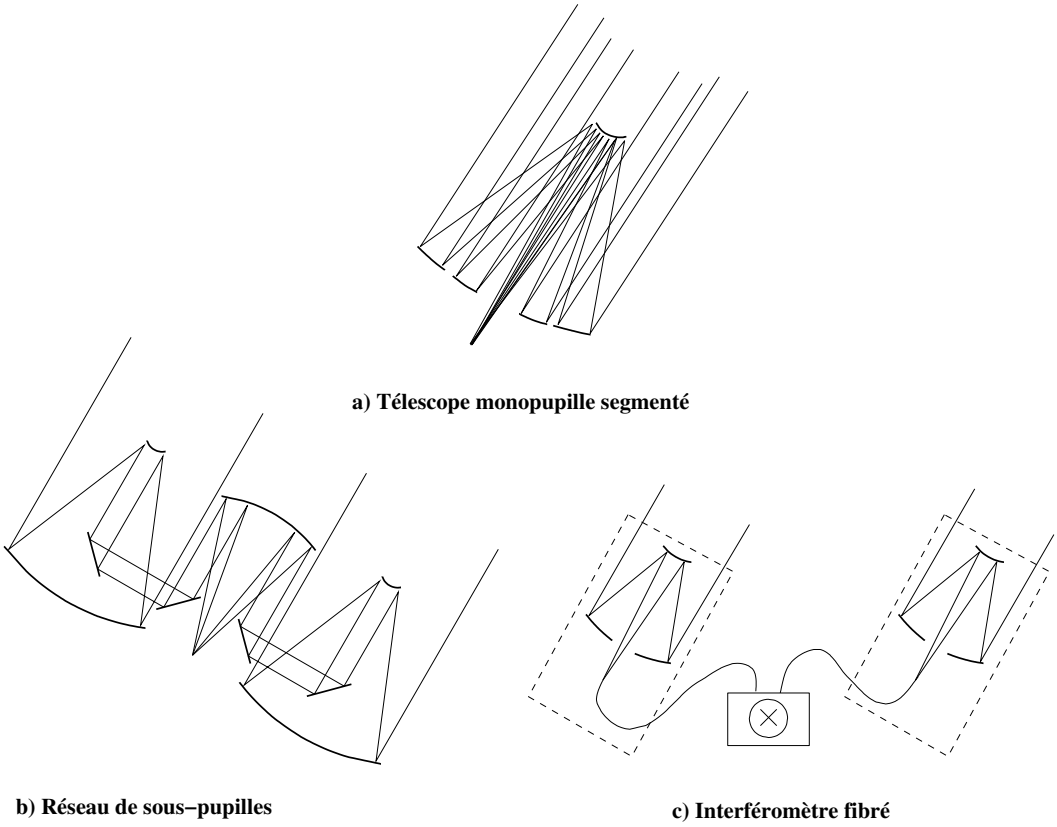
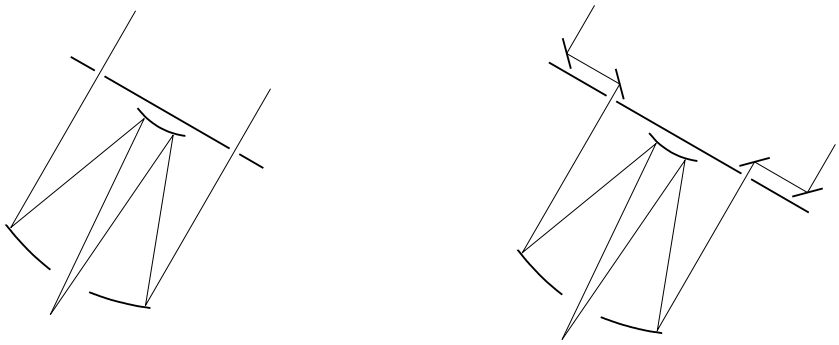


Fig. 1.2 – Les différents types de télescopes à synthèse d'ouverture optique ; a) : les télescopes monopupilles segmentés (de type *Fizeau*), b) : les réseau de sous-pupilles (*Michelson* ou *Fizeau*), c) : les interféromètres fibrés (*Michelson*).

1.1.3.2 Méthodes d'observation

Après avoir présenté les principales catégories d'instruments à synthèse d'ouverture, nous allons nous intéresser dans ce paragraphe au mode opératoire des ISOO corrélateurs et des ISOO imageurs.



a) Interféromètre Stellaire de Fizeau **b) Interféromètre Stellaire de Michelson**

Fig. 1.3 – Les deux principales catégories d'instruments à synthèse d'ouverture : les *Fizeau* (a), généralement utilisés dans un but d'imagerie et les *Michelson* (b), plutôt employés comme corrélateurs.

Pour cela, observons un objet à la longueur d'onde λ. Le champ émis par chaque point du dit-objet se propage de manière isotrope sous forme d'ondes sphériques qui, lorsqu'elles arrivent sur la pupille d'entrée de l'instrument de détection, peuvent être considérées comme planes à condition que l'objet soit suffisamment éloigné. Si la source d'observation est naturelle, l'éclairage est spatialement incohérent ; les ondes sont alors décorrélées de celles émises par les points voisins. Dans ce cas, les distributions d'amplitude $\boldsymbol{\Psi}$ en chaque point de l'objet et de la pupille sont liées, d'après le théorème de Fraunhofer, par une transformée de Fourier. Pour exprimer simplement cette relation, munissons l'espace d'un repère $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, l'axe $\boldsymbol{Z}$ correspondant à la direction de propagation des ondes :

- un point (X, Y, Z) de l'objet est alors décrit par ses cosinus directeurs $x = X/Z$ et $y = Y/Z$;
- en utilisant les coordonnées pupillaires réduites, un point (X', Y') de la pupille placée en $Z = 0$ est décrit par $u = X'/\lambda$ et $v = Y'/\lambda$.

En notant respectivement l'amplitude des champs objet et pupille par $\boldsymbol{\Psi}_z$ et $\boldsymbol{\Psi}_0$, le théorème de Fraunhofer nous donne :

$$\boldsymbol{\Psi}_0 = \mathrm{TF}(\boldsymbol{\Psi}_z) \tag{1.4}$$

où TF désigne la Transformée de Fourier. Par la suite, nous la noterons $\widetilde{\ }$. Les coordonnées $[x\,;\,y]$ et $[u\,;\,v]$ sont donc des grandeurs conjuguées : le plan $[u\,;\,v]$ peut être vu comme un ensemble de dimensions pupillaires exprimées en nombre de longueurs d'onde, ou s'interpréter comme le plan des fréquences spatiales de l'objet (en rad^{-1}).

Dès lors, si nous voulions retrouver $\boldsymbol{\Psi}_z$, il suffirait en théorie d'effectuer une transformée de Fourier inverse à partir du champ $\boldsymbol{\Psi}_0$ collecté dans la pupille :

$$\boldsymbol{\Psi}_z \xrightarrow[\mathrm{TF}]{\text{propagation}} \boldsymbol{\Psi}_0 = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_z \xrightarrow[\mathrm{TF}^{-1}]{\text{imagerie}} \boldsymbol{\Psi}_z \tag{1.5}$$

En pratique cependant, les détecteurs optiques ne sont pas sensibles au champ électrique mais à sa moyenne quadratique ou *intensité*. Ainsi, durant un laps de temps t, un détecteur situé en un point $\boldsymbol{u}_1$ de la pupille ne mesure que $I_1 = \langle|\Psi(\boldsymbol{u_1})|^2\rangle_t$; il est donc possible de déterminer le module du champ $\boldsymbol{\Psi}$, mais pas sa phase. Plusieurs solutions peuvent alors être envisagées, chacune d'entre elles caractérisant un type d'instruments à synthèse d'ouverture optique :

– puisque la propagation à l'infini se traduit par un transformation de Fourier, la première solution, correspondant aux ISOO imageurs, consiste à effectuer optiquement cette opération en réimageant l'objet au plan focal de l'instrument ;
– la deuxième solution consiste quant à elle à faire interférer deux à deux les points de la pupille. Considérons deux faisceaux prélevés en $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$; l'interférogramme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I_{12} =& \langle |\Psi_0(\boldsymbol{u_1}) + \Psi_0(\boldsymbol{u_2})|^2 \rangle_t && (1.6)\\ =& \langle |\Psi_0(\boldsymbol{u_1})|^2 \rangle_t + \langle |\Psi_0(\boldsymbol{u_2})|^2 \rangle_t + \langle \Psi_0(\boldsymbol{u_1})\Psi_0(\boldsymbol{u_2})^* + \Psi_0(\boldsymbol{u_1})^*\Psi_0(\boldsymbol{u_2}) \rangle_t && (1.7)\\ =& I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\zeta_{12}\cos\phi_{12} && (1.8) \end{aligned}$$

où ζ_{12} et ϕ_{12} représentent respectivement le module et la phase du *degré complexe de cohérence* noté $\zeta(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$:

$$\zeta(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \frac{\langle \Psi_0(\boldsymbol{u_1})\Psi_0(\boldsymbol{u_2})^* \rangle_t}{\sqrt{\langle \Psi_0^2(\boldsymbol{u_1}) \rangle_t \langle \Psi_0^2(\boldsymbol{u_2}) \rangle_t}} \tag{1.9}$$

Nous pouvons d'ailleurs remarquer que ζ ne dépend que de la base $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$. L'interféromètre a donc permis de coder le déphasage ϕ_{12} en variation d'intensité. Les instruments qui se servent de la mesure du degré complexe de cohérence (mesure généralement effectuée dans le plan pupille) sont les ISOO corrélateurs. Pour remonter à l'information sur le spectre de l'objet, nous pouvons faire appel au théorème de Zernike - Van Cittert, qui établit que, dans un plan éloigné d'une source quasi monochromatique et spatialement incohérente, la quantité ζ_{12} est égale au module de la transformée de Fourier normalisée de la distribution d'intensité de l'objet :

$$\zeta_{12}(\boldsymbol{b}) = \left| \frac{\widetilde{o}(\boldsymbol{b})}{\widetilde{o}(\boldsymbol{0})} \right| \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{o} = \langle |\boldsymbol{\Psi}_z|^2 \rangle_t \tag{1.10}$$

Ainsi, avec différentes bases $\boldsymbol{b}$, nous sommes en mesure de reconstruire un ensemble discret des fréquences spatiales de l'objet $\boldsymbol{o}$ puis d'estimer sa distribution d'intensité par transformée de Fourier inverse.

Avant de s'intéresser plus avant aux différentes méthodes de cophasage qui existent à l'heure actuelle, nous allons préciser dans la sous-section suivante le type d'instruments qui sera par la suite privilégié au cours de cette thèse.

1.1.4 Cadre applicatif

Le champ d'application des instruments à synthèse d'ouverture optique est extrêmement vaste. Parmi les études spatiales, l'observation de la Terre depuis l'espace se révèle d'une importance capitale, tant sur le plan civil que militaire. Afin d'obtenir une résolution métrique au sol depuis une orbite haute (géostationnaire, par exemple), plusieurs solutions peuvent être envisagées, comme la structure monopupille segmentée ou le réseau de télescopes volant en formation. Cependant, la difficulté principale de ce type d'instruments est que le cophasage, réalisé de manière externe, s'effectue sur des scènes pouvant présenter des caractéristiques très variables (flux plus ou moins important, objet plus ou moins contrasté). Or, la plupart des méthodes d'estimation développées à ce jour, bien qu'efficaces [Mugnier *et al.* (2005)], sont itératives et requièrent des temps de calcul importants. Par conséquent, il n'est actuellement pas possible d'effectuer un cophasage complet et de répondre pleinement aux exigences temps-réel d'un système embarqué. Au cours de cette thèse, notre principal

objectif sera donc de développer des algorithmes rapides afin d'assurer un cophasage potentiellement temps-réel sur scènes étendues.

L'autre application que nous serons appelés à considérer concerne l'observation astronomique d'objets ponctuels, notamment de systèmes stellaires. Dans ce cas, le principal défi consiste à estimer de manière rapide les modes d'intérêt sur des points source dont la magnitude est parfois très faible (entre 10 et 13).

1.1.5 Budget d'erreur de l'instrument

Il existe un nombre non négligeable de facteurs susceptibles de dégrader les performances[7] d'un système d'observation : en effet, ce type d'instruments est généralement constitué de multiples sous-systèmes et présente de nombreux degrés de liberté, source d'aberrations. Pour la quasi-totalité des défauts, la perte en qualité optique ainsi occasionnée, que nous exprimons sous la forme d'un cœfficient d'atténuation η s'apparentant au rapport de Strehl[8], peut être directement reliée à une variance spatiale (ou temporelle) σ_T de l'onde incidente w [Mahajan (1982)] :

$$\eta \simeq \exp\left\{ -\left[\frac{2\pi}{\lambda}\,\sigma_T(w)\right]^2 \right\} \tag{1.11}$$

σ_T étant ici exprimé en valeurs RMS.

Dès lors, pour obtenir une qualité instrumentale correcte, il devient indispensable d'identifier et de maîtriser les différentes sources d'erreur. A cet égard, l'approche la plus judicieuse repose sur une démarche systémique [Harvey & Ftaclas (1990)] : dans un premier temps, un budget d'erreur *global* est attribué à l'instrument, dépendant des exigences de la mission et fixant ainsi le niveau de performances à atteindre. Ce budget est ensuite réparti entre les différents postes d'erreur en fonction de l'état de l'art, de la difficulté technologique, etc., en itérant éventuellement ou en réaffectant différemment les postes si certaines spécifications se révèlent trop difficiles à obtenir.

A première vue, cette répartition du budget en groupe d'erreur peut sembler difficilement envisageable sans une modélisation complète de l'instrument. Toutefois, si nous considérons dans un premier temps que tous les défauts sont soit décorrélés, soit orthogonaux, alors la variance totale peut être simplement obtenue en sommant quadratiquement les différents contributeurs. La Fig. 1.4 est un exemple [Harvey & Ftaclas (1990)] de budget pouvant être réalisé dans le cas d'un instrument imageur pointant sur objet étendu. L'erreur totale, estimée à $\lambda/13$ RMS, est répartie en quatre groupes de défauts : la conception optique, la réalisation des surfaces, l'alignement statique et les perturbations dynamiques. Ces groupes peuvent ensuite être eux-mêmes partagés en sous-groupes, ce qui permet au final d'établir un budget d'erreur complet. Bien entendu, cette distribution n'est en aucun cas figée, mais peut être remodelée en cours d'étude ou de réalisation en conservant une qualité totale identique.

Comme souligné en sous-section 1.1.2, un instrument à synthèse d'ouverture ne pourra être exploité que si les faisceaux issus des différents télescopes interfèrent de façon stable. D'après la Fig. 1.4, l'erreur attribuée au poste de cophasage peut raisonnablement être fixée à $\lambda/37$ RMS. Etant donné que les défauts d'intérêt se trouvent être les pistons et basculements différentiels entre les

[7] Cette baisse de performance étant due à une diminution de la qualité image, et par la même occasion à une diminution du rapport signal-à-bruit.

[8] Le *rapport de Strehl* est défini comme l'intensité centrale de la Réponse Impulsionnelle (notion que nous verrons en sous-section 1.2.1) aberrée, normalisée par l'intensité centrale de la RI sans aberration [Strehl (1902)].

sous-pupilles de l'instrument (voir sous-section 1.2.4), nous pouvons écrire que :

$$\sigma^2_{\text{piston}} + \sigma^2_{\text{basc. } x} + \sigma^2_{\text{basc. } y} = \left(\frac{\lambda}{37}\right)^2 \tag{1.12}$$

Bien que la mesure des pistons se révèle être le point clef du cophasage, nous décidons, pour la suite de ce manuscrit, d'attribuer la même variance de phase aux trois contributeurs de l'Eq. (1.12). Dès lors, nous en déduisons que dans le cadre d'un instrument imageant des scènes étendues (notamment pour un ISOO placé en orbite géostationnaire), la mesure et la correction de chaque type d'aberration différentielle devra être effectuée avec une précision au moins égale à $\lambda/60$.

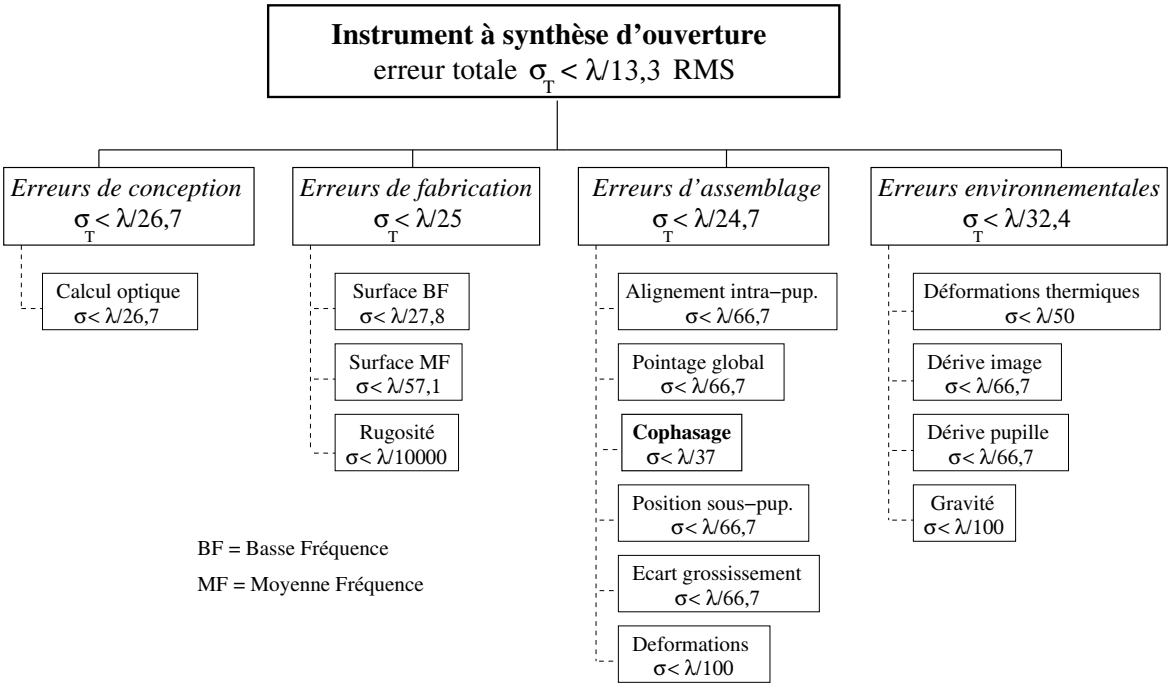


Fig. 1.4 – Exemple de budget de qualité de l'instrument ; les quatres principaux postes d'erreur concernent la conception optique, la réalisation des surfaces, l'alignement statique (d'assemblage) et les perturbations dynamiques.

1.2 Optique de Fourier en synthèse d'ouverture

Nous avons vu dans la sous-section précédente qu'un ISOO effectue une recombinaison interférométrique des faisceaux issus des sous-pupilles collectrices (télescopes ou segments de miroir). Cependant, comme l'instrument est *de facto* très sensible à un désalignement, il nécessite un contrôle en temps-réel des différences de marche entre les sous-pupilles. Ainsi, à la sortie du dispositif de recombinaison des faisceaux, la lumière est classiquement dirigée vers deux systèmes :

- un système "d'imagerie", qui peut être soit un corrélateur soit un plan d'imagerie ;
- un système de cophasage, qui effectue la correction de l'instrument à partir des mesures de déphasage entre les faisceaux, ces mesures étant réalisées avec un ASO dont la fréquence trame est le plus souvent supérieure à la fréquence d'acquisition de la voie imagerie.

Ces deux systèmes ne sont pas forcément distincts : en effet, dans le cas d'un instrument imageur et si la fréquence trame de l'ASO est sensiblement identique à celle de la voie imagerie, il peut être judicieux d'effectuer le cophasage en plan focal afin de simplifier au maximum l'implémentation optique de l'instrument, puisque dans ce cas un analyseur de surface d'onde ne requiert pas ou très peu d'autre optique que le capteur d'imagerie.

Dès lors, nous privilégierons les méthodes de cophasage qui reposent sur le traitement d'images acquises au voisinage du plan focal. Cependant, avant d'expliquer en détail pourquoi nous choisissons ce type de capteur et comment la mesure des aberrations peut alors être effectuée (sujet qui sera abordé dans la section 1.3), nous allons tout d'abord rappeler les relations fondamentales de l'imagerie. Dans cette section, nous expliquons que l'image d'un objet donné contient de l'information non seulement sur cet objet, mais aussi sur les aberrations recherchées, et nous montrons comment établir, pour un instrument multipupille, l'expression de la Fonction de Transfert Optique à partir de la configuration (ou agencement) pupillaire.

1.2.1 Relation d'imagerie

D'après l'Eq. (1.5), le champ $\boldsymbol{\Psi}_0$ collecté par la pupille d'un instrument à synthèse d'ouverture subit une transformée de Fourier par rapport aux distributions d'amplitude de l'objet. Toutefois, n'oublions pas que l'instrument ne récolte du champ que la portion située dans sa pupille, de transmittance $\boldsymbol{p}$. En introduisant la détection quadratique, l'Eq. (1.5) s'écrit alors, pour un éclairage spatialement incohérent :

$$\boldsymbol{\Psi}_z \xrightarrow[\text{TF}]{\text{propagation}} \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_z \xrightarrow[\times \boldsymbol{p}]{\text{filtrage pupillaire}} \boldsymbol{p}\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_z \xrightarrow[\text{TF}^{-1}]{\text{imagerie}} \text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{p}\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_z\right) \xrightarrow[\langle ||^2 \rangle_t]{\text{détection}} I = \left\langle \left| \text{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{p}\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_z\right) \right|^2 \right\rangle_t \tag{1.13}$$

L'Eq. (1.13) montre que le système propagation + instrument, qui permet d'obtenir l'image à partir de l'objet $\boldsymbol{o} = \langle |\boldsymbol{\Psi}_z|^2 \rangle_t$, vérifie des propriétés de linéarité et d'invariance par translation. L'instrument peut alors être entièrement caractérisé par sa Réponse Impulsionnelle $\boldsymbol{h}$, appelée également Fonction d'Etalement de Point (FEP), qui représente la réponse du système à une impulsion de Dirac :

$$\boldsymbol{\Psi}_z = \delta \Rightarrow \boldsymbol{h} = |\text{TF}^{-1}(\boldsymbol{p})|^2 \tag{1.14}$$

La réponse impulsionnelle est donc le module carré de la transformée de Fourier inverse de la fonction pupillaire. En théorie, il suffit alors de connaître la réponse de l'instrument à un point source pour calculer l'image $\boldsymbol{i}$ d'un objet quelconque par le système :

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{o} \star \boldsymbol{h} \quad \text{et} \quad \widetilde{\boldsymbol{i}} = \widetilde{\boldsymbol{o}}\,\widetilde{\boldsymbol{h}} \tag{1.15}$$

où $\star$ représente l'opération de convolution. Bien entendu, cette image est purement théorique ; en pratique, du bruit vient dégrader la détection.

Intéressons nous maintenant à la réponse fréquentielle de l'instrument. Nous appelons Fonction de Transfert Optique (FTO) la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Cette quantité étant le plus souvent complexe, nous désignerons par Fonction de Transfert de Modulation (FTM) le module de la FTO, et par Fonction de Transfert de Phase (FTP) son argument :

$$\text{FTO} = \text{FTM}\,\exp(j\,\text{FTP}) \tag{1.16}$$

où $j^2 = -1$. D'après l'Eq. (1.14) et la Fig. 1.5, la fonction de transfert peut également être vue comme l'autocorrélation de la transmittance pupillaire ; par conséquent, la forme de la pupille conditionne le filtrage spatial effectué sur l'objet. De plus, le support de l'autocorrélation, qui est le double de celui de la pupille, est fini ; l'instrument présente donc une fréquence de coupure f_c au delà de laquelle la transmission est nulle. Dès lors, nous pouvons en conclure que la forme de la pupille est primordiale pour les observations puisqu'elle détermine directement la géométrie de la couverture fréquentielle.

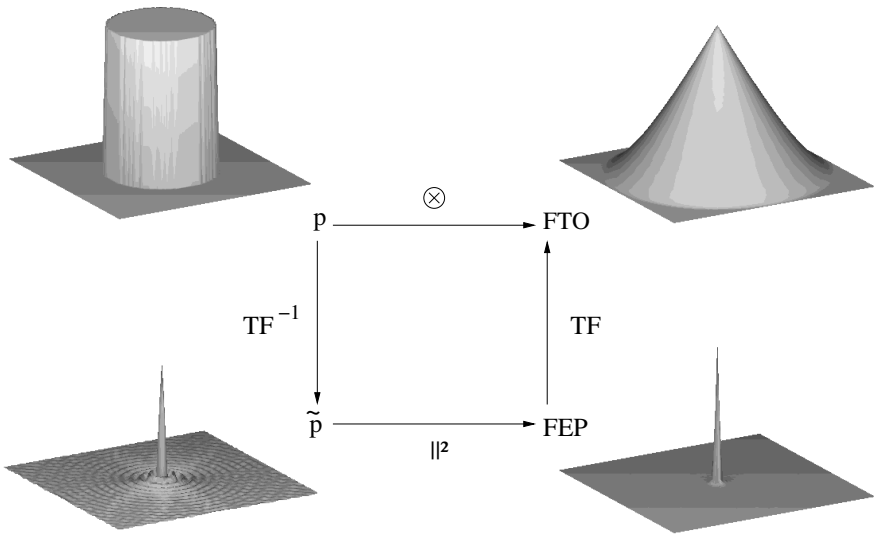


Fig. 1.5 – Relations liant la pupille (en haut à gauche), sa transformée de Fourier inverse (en bas à gauche), la Fonction d'Etalement de Point (en bas à droite) et la Fonction de Transfert Optique (en haut à droite), illustrées dans le cas d'un instrument monolithique à pupille circulaire.

1.2.2 Caractéristiques des configurations pupillaires

Considérons un ISOO dont la configuration pupillaire, affectée d'une phase aberrante $\boldsymbol{\phi}_a$, est composée de N_T sous-pupilles. Chacune d'entre elles correspond soit à l'un des miroirs primaires de l'instrument (dans le cas d'un réseau de télescopes), soit à l'un de ses segments (dans le cas d'un monopupille segmenté). Pour des raisons de simplicité, toutes les sous-pupilles sont supposées sans occultation centrale. Notons $\boldsymbol{p}$ la transmission complexe de la pupille et $\boldsymbol{p}_n$ celle associée à la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille placée en $\boldsymbol{u_n}$ et présentant une phase $\boldsymbol{\phi}_{an}$. Nous avons alors :

$$\boldsymbol{p} = \sum_{n=1}^{N_T} \boldsymbol{p}_n \star \delta_{\boldsymbol{u_n}} \tag{1.17}$$

Par simplicité, supposons que les sous-pupilles sont circulaires de rayon identique et unitaire. Nous pouvons alors écrire que :

$$p_n(\boldsymbol{u}) = \Pi(\boldsymbol{u}) \exp[j\, \phi_{an}(\boldsymbol{u})] \tag{1.18}$$

où $\mathbf{\Pi}$ représente la fonction disque unitaire[9]. La FTO est quant à elle déterminée par l'autocorrélation de $\boldsymbol{p}$, qui fait intervenir une intégrale sur la zone commune entre la pupille n placée en $\boldsymbol{u_n}$ et la pupille n' positionnée en $\boldsymbol{u_{n'}}$:

$$\begin{aligned}
\text{FTO} =& \boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p} && (1.19)\\
=& \frac{1}{N_T} \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} (\boldsymbol{p}_n \otimes \boldsymbol{p}_{n'}) \star \delta_{\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u_{n'}}} && (1.20)\\
=& \frac{1}{N_T} \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} (\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{\Pi}) \star \delta_{\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u_{n'}}} \quad \text{à aberrations nulles} && (1.21)
\end{aligned}$$

D'après l'Eq. (1.21), la fonction de transfert se présente sous la forme d'un pic central (résultant de la somme des N_T autocorrélations des sous-pupilles) entouré de $N_T(N_T - 1)$ pics secondaires provenant de l'intercorrélation entre deux sous-pupilles différentes. Dès lors, aux sous-pupilles n et n' correspondent deux pics satellites, placés respectivement en $\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u_{n'}}$ et en $\boldsymbol{u_{n'}} - \boldsymbol{u_n}$; la FTO présente donc une symétrie centrale, puisqu'à chaque pic correspond son symétrique. Nous pouvons également constater que l'écartement entre les sous-pupilles conditionne la distance entre les pics satellites, et par conséquent la géométrie de la couverture fréquentielle. Pour classer les pupilles ainsi que leurs effets dans le plan des fréquences spatiales, nous utilisons les termes suivants :

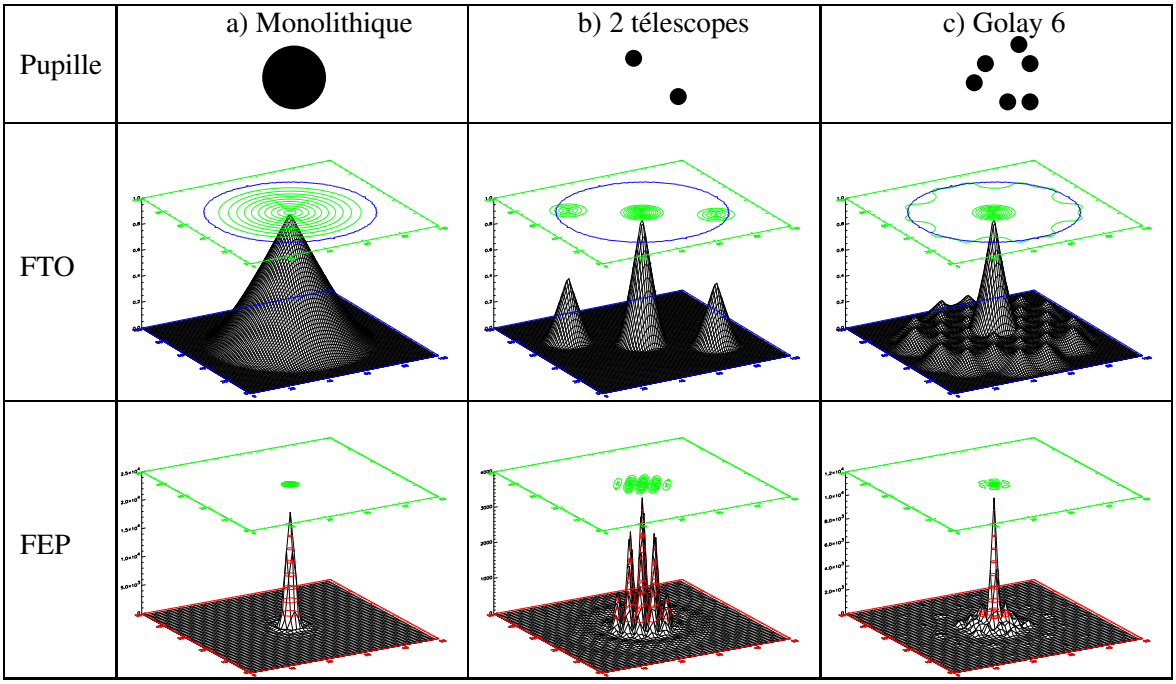
- une pupille non connexe (c.-à.-d. dont les éléments ne sont pas jointifs, ce qui est généralement le cas des réseaux de télescopes) est dite *lacunaire* ;
- lorsque les sous-pupilles sont suffisamment éloignées, les pics de la FTM sont disjoints. Dans ce cas, si la FTO s'annule avant la fréquence de coupure f_c, il existe des fréquences $f < f_c$ non couvertes par l'instrument et la configuration est dite *diluée*. Dans le cas contraire, la configuration est dite *compacte* ;
- une pupille est dite *redondante* lorsque plusieurs paires de sous-pupilles forment une base identique. Les pics de la FTO qui résultent des intercorrélations correspondantes se trouvent ainsi superposés.

Le choix de la configuration pupillaire est donc déterminant pour les observations que l'on souhaite réaliser. En effet, s'il est intéressant d'utiliser des pupilles fortement diluées pour mesurer des diamètres stellaires, ce choix s'avère inapproprié pour faire de l'imagerie de scènes terrestres étant donné que pour ce type d'application toutes les fréquences doivent être idéalement couvertes jusqu'à la fréquence de coupure.

Pour illustrer nos propos précédents, nous avons représenté Tab. 1.1 l'influence de la configuration pupillaire sur la formation d'images à phase incidente nulle. Pour un télescope monolithique à pupille circulaire (colonne de gauche), la FTO est la classique fonction $\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{\Pi}$ en forme de "chapeau chinois". Elle peut cependant être toute autre en synthèse d'ouverture, compte tenu de la grande variété de forme que peut prendre la pupille. Par exemple, dans le cas de la configuration dite *des trous d'Young* (colonne du milieu), c.-à.-d. pour un instrument à deux sous-pupilles, la fonction de transfert se présente sous la forme d'un pic central résultant de l'autocorrélation des sous-pupilles et deux pics satellites qui traduisent l'interférence entre les télescopes. La FEP est donc un réseau d'interférences modulé en amplitude par l'enveloppe de la tache d'Airy. Nous pouvons cependant constater que cette configuration ne couvre les fréquences que selon un seul axe, et ce contrairement à la pupille de type Golay 6 [Golay (1971)] (colonne de droite) qui se caractérise par une couverture quasi-complète du

[9] Cette fonction est définie telle que $\Pi(\boldsymbol{x}) = 1$ pour $0 \leq |\boldsymbol{x}| \leq 1$, 0 sinon.

domaine fréquentiel d'intérêt, bien que les hautes fréquences spatiales soient atténuées par rapport à celle du monolithique.



Tab. 1.1 – Influence de la configuration pupillaire sur la FEP et la FTO.

Jusqu'à présent, nous avions implicitement considéré que la pupille d'entrée de l'instrument était identique à celle qui se trouve en sortie du dispositif de recombinaison et qui sert à définir la réponse impulsionnelle. Cependant, rien n'interdit *a priori* de distinguer ces deux entités. Par exemple, nous pourrions envisager un recombinateur qui densifie la pupille d'entrée (comme dans le cas des hyper-télescopes), voire même qui recombine les sous-pupilles le long d'une même base à l'instar de ce qui est effectué pour l'instrument AMBER (Astronomical Multi BEam combineR) équipant le VLTI.

Toutefois, dans le cadre d'un ISOO imageur, le formalisme convolutif décrit Eq. (1.15) n'est valable que si les pupilles sont strictement *homothétiques*, comme illustré Fig. 1.6. En effet, pour que la réponse impulsionnelle soit invariante, le facteur H de réduction des bases doit être égal au facteur G de réduction des rayons [Traub (1986)]. Dans ce cas, l'instrument est alors en tout point équivalent à un monolithique : il est invariant par translation et son champ est uniquement limité par les aberrations optiques des sous-pupilles. Soulignons toutefois qu'en fonction de l'étendue du champ et de la qualité de surface d'onde voulue, une pupille non homothétique peut être tolérée [Labeyrie (1996)].

Ainsi, de ce qui précède, nous pouvons en déduire que dans le cadre de l'observation de la Terre depuis l'espace (où la source est infiniment étendue), seules des pupilles homothétiques sont à considérer. *A contrario*, l'observation astronomique d'objets quasiment non résolus autorise la densification de la pupille, car cette opération conserve une relation de pseudo-convolution pour de petits champs [Lardière *et al.* (2007)]. Néanmoins, dans le reste de ce manuscrit, nous nous placerons toujours dans un cas homothétique.

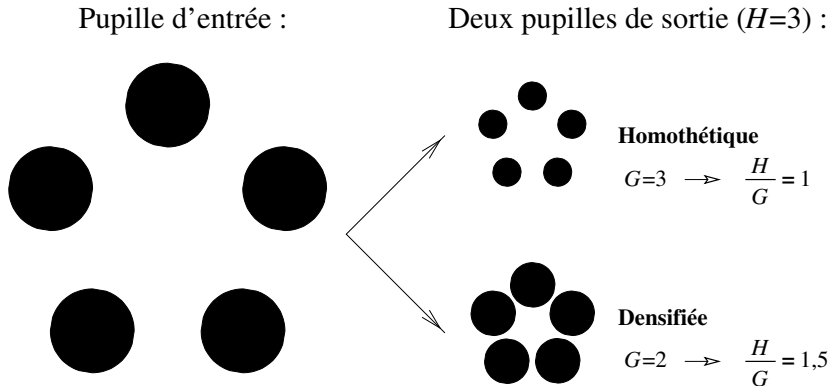


Fig. 1.6 – Illustration de pupilles homothétiques et densifiées.

1.2.3 Modélisation de la phase

Afin d'exprimer la phase incidente $\boldsymbol{\phi}_a$ de façon simple, nous la décomposons sur une base orthonormée de modes $\boldsymbol{Z}_k$ qui est intrinsèquement liée à la forme de la pupille :

$$\phi_a(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k Z_k(\boldsymbol{u}) \quad \text{avec} \quad \langle Z_k(\boldsymbol{u}) Z_{k'}(\boldsymbol{u}) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k', \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.22}$$

où a_k représente l'aberration d'ordre k associée au mode $\boldsymbol{Z}_k$.

La base des polynômes de Zernike telle que définie par Noll [Noll (1976)] se trouve être particulièrement bien adaptée pour la description des modes $\boldsymbol{Z}_k$ dans le cadre d'une configuration circulaire de rayon $\mathcal{R}$. De plus, cette base présente l'avantage d'être normalisée en amplitude et en support ; les polynômes $Z_k(\boldsymbol{u}/\mathcal{R})$ s'expriment alors comme le produit d'une fonction trigonométrique Θ par une fonction polynômiale Γ :

$$Z_k\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\mathcal{R}}\right) = \Gamma_l^m\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)\Theta_l^m(\varphi) \tag{1.23}$$

où $[\rho\,;\,\varphi]$ sont les coordonnées polaires du point situé en $\boldsymbol{u}/\mathcal{R}$ dans le disque unité. l représente le degré radial du polynôme et m son degré azimutal, avec l et m de parité égale et vérifiant $0 \leq m \leq l$.

Γ peut être développé selon les polynômes de Jacobi :

$$\Gamma_l^m\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right) = \sum_{s=0}^{\frac{l-m}{2}} \frac{(-1)^s (l-s)!}{s!(\frac{l+m}{2}-s)!(\frac{l-m}{2}-s)!}\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)^{l-2s} \tag{1.24}$$

La fonction trigonométrique est quant à elle donnée par :

$$\Theta_l^m(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{l+1} & \text{si} \quad m = 0, \\ \sqrt{2(l+1)}\cos(m\varphi) & \text{si} \quad m \neq 0 \quad \text{et si } k \text{ pair}, \\ \sqrt{2(l+1)}\sin(m\varphi) & \text{si} \quad m \neq 0 \quad \text{et si } k \text{ impair} \end{cases} \tag{1.25}$$

Cette base, dont nous avons illustré les vingt-et-un premiers polynômes sur la Fig. 1.7, présente plusieurs avantages :

- elle est normalisée en amplitude et en support. Par conséquent, les cœfficients a_k dans les espaces d'entrée et de sortie du système optique sont identiques ;

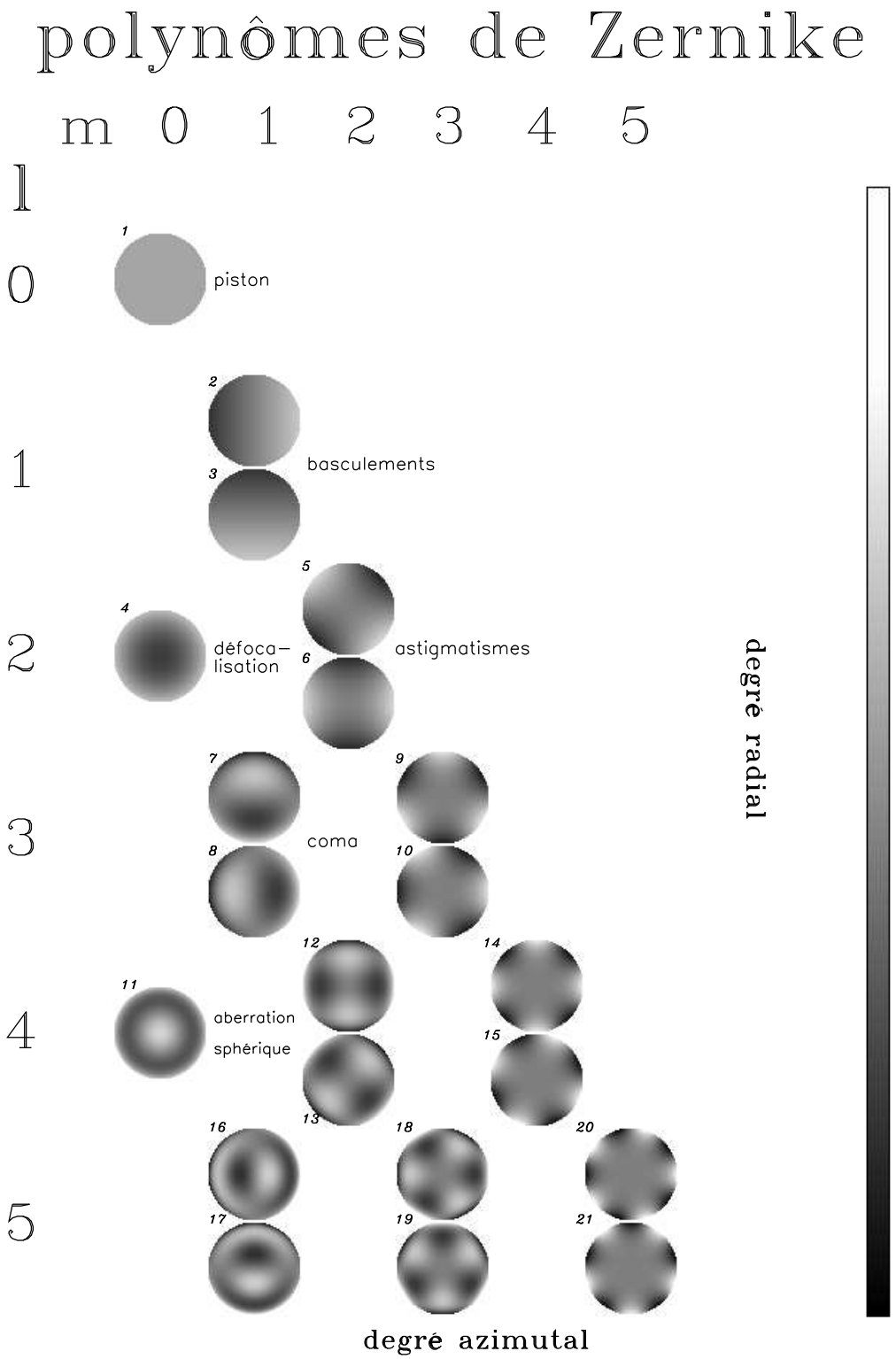


Fig. 1.7 – Illustration des vingt-et-un premiers polynômes de Zernike.

– elle est orthonormée, ce qui permet de calculer directement un cœfficient a_k en projetant la perturbation ϕ_a sur $Z_k(\boldsymbol{u}/\mathcal{R})$;
– les bas ordres radiaux correspondent aux aberrations optiques classiques (basculement, défocalisation, astigmatisme, etc.) ;
– cette expression ainsi que ses dérivées sont analytiques.

Pour un instrument à synthèse d'ouverture, les modes de Zernike dits *globaux*, c.-à.-d. définis sur l'ensemble de la configuration pupillaire, peuvent être décomposés dans la base des sous-pupilles. En effet, la décomposition d'un mode global d'ordre k sur la grande pupille se traduit par une somme de polynômes locaux d'ordre $\{0, \ldots, k\}$ sur les N_T sous-pupilles [Ragazzoni *et al.* (1999)]. A titre d'exemple, nous donnons en annexe A page 185 le résultat de la décomposition d'un basculement et d'une défocalisation globale. Si le diamètre des sous-pupilles est différent, il sera bien entendu indispensable d'utiliser pour chacune d'entre elles une base de décomposition qui leur est propre ; notons toutefois que les changements pour traiter un cas général sont minimes. Nous supposerons cependant, sauf mention contraire, que les sous-pupilles sont de diamètre identique. Ainsi, en considérant des diamètres unitaires, la phase globale ϕ_a est modélisée par :

$$\phi_a(\boldsymbol{u}) = \sum_{n=1}^{N_T} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} a_{kn} Z_k(\boldsymbol{u}) \right] \star \delta_{\boldsymbol{u_n}} \tag{1.26}$$

En reportant cette expression dans les Eq. (1.17) et (1.18), nous obtenons, pour la transmission pupillaire :

$$p(\boldsymbol{u}) = \sum_{n=1}^{N_T} \Pi(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n) \exp\left[j \sum_{k=1}^{+\infty} a_{kn} Z_k(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n) \right] \tag{1.27}$$

1.2.4 Les dégradations de l'image

En pratique, l'image observée au voisinage du plan focal subit plusieurs dégradations comparée à l'image théorique :
– tout d'abord, si l'instrument est au sol, l'image est dégradée par les variations aléatoires du chemin optique résultant de la turbulence atmosphérique ;
– en outre, elle est soumise aux défauts propres de l'instrument. Ces défauts peuvent être dûs à des erreurs de réalisation ou d'assemblage, aux imprécisions d'alignement des composants optiques ou aux vibrations et dérives thermo-élastiques ;
– elle est échantillonnée spatialement par le détecteur ; cette discrétisation ne fera cependant pas perdre d'information si la fréquence d'échantillonnage f_e est supérieure ou égale à deux fois la fréquence de coupure f_c de l'optique (théorème de *Shannon*) ;
– enfin, l'image est également soumise au bruit de photons (de statistique poissonnienne) ainsi qu'au bruit de lecture généré par le capteur et suivant une loi gaussienne de moyenne nulle. Par la suite, nous supposerons que ces deux bruits sont décorrélés d'un pixel à l'autre.

Dans le cadre du cophasage d'un instrument à synthèse d'ouverture, nous allons chercher à mesurer puis corriger les défauts propres de l'instrument. La spécificité de ces aberrations, par rapport à celles engendrées par la turbulence atmosphérique, est leur faible amplitude et leur évolution lente dans le temps (avec une fréquence supérieure au Hertz). Les défauts d'un ISOO sont :
– le piston différentiel ($k = 1$) qui, comme illustré Fig. 1.8 a, correspond à une "marche" entre les sous-pupilles ;

– les basculements différentiels ($k = 2, 3$) représentés Fig. 1.8 b, associés aux défauts de pointage d'une sous-pupille par rapport à la direction visée ;
– le piston moyen sur l'ensemble des pupilles ; cependant, comme ce mode n'a aucune influence optique, il est inutile de le corriger ;
– le basculement global de la pupille, qui est *a priori* dû au mouvement apparent de l'objet ainsi qu'aux vibrations de l'instrument. En général, ce mode est éliminé par des techniques classiques de stabilisation et de pointage. Dès lors, il ne reste ensuite qu'à corriger les écarts de position de chaque sous-pupille par rapport au basculement global.

Ainsi, les défauts à mesurer lors du cophasage sont donc :
– les aberrations de recombinaison, c.-à.-d. les pistons et basculements différentiels entre les sous-pupilles ;
– les ordres supérieurs ($k \geq 4$) sur chaque sous-pupille. Soulignons que leur mesure peut être effectuée à l'aide des techniques de mesure de front d'onde développées pour les télescopes monolithiques.

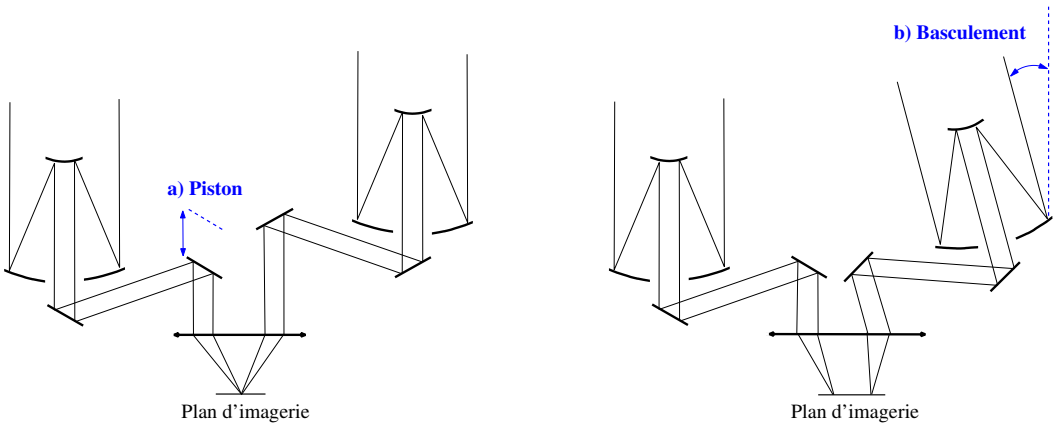


Fig. 1.8 – Illustration des modes piston et basculement.

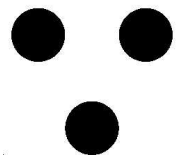
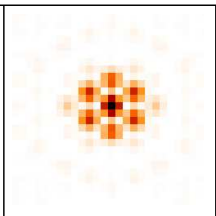
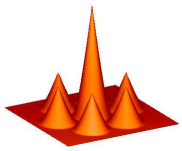
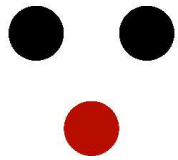
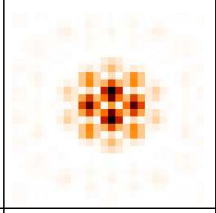
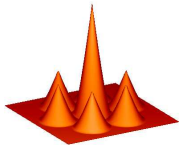
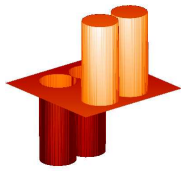
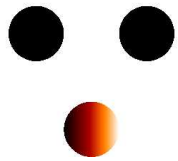
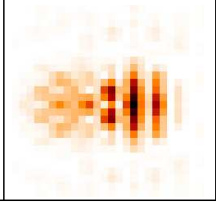
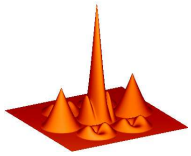
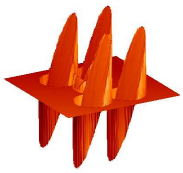
Comme les ASO fonctionnant sur monolithiques permettent de corriger la plupart des aberrations des télescopes individuels, il ne reste au final qu'à mesurer les défauts différentiels entre les sous-pupilles. En première approximation, nous considérerons donc que l'opération de cophasage concerne les modes optiques de bas ordres (piston et basculements).

1.2.5 Effet des modes recherchés sur la fonction de transfert

Intéressons nous maintenant à l'effet des aberrations recherchées sur la réponse impulsionnelle ainsi que sur la fonction de transfert optique. Pour cela, considérons une configuration diluée composée de $N_T = 3$ sous-pupilles identiques, comme illustré Tab. 1.2, et plaçons-nous au plan focal de l'instrument. A phase incidente nulle (ligne du haut), nous pouvons voir que la réponse impulsionnelle se présente sous la forme d'une tache d'Airy à l'intérieur de laquelle se distinguent des zones d'interférences selon un motif hexagonal ; dès lors, la FEP apparaît sous la forme d'une "fleur" de quelques pixels de diamètre. Dans le plan fréquentiel, la FTM est composée d'un pic central normalisé à 1 ainsi que de six pics satellites d'amplitude $1/N_T$ et résultant de l'intercorrélation entre les sous-pupilles n et n'. Nous pouvons également remarquer que la phase de la FTO est quant à elle nulle.

Appliquons maintenant un piston a_{1n} sur la sous-pupille n (ligne du milieu). Cette aberration a pour effet de déplacer les franges d'interférence selon la position de la pupille mobile ; de fait, nous pouvons effectivement observer sur la figure un glissement des franges à la verticale. En ce qui concerne la FTO, nous voyons que son module n'est en rien affecté par un piston. En revanche, si cette aberration est sans effet sur le pic central de la FTP, elle génère une constante de phase sur les pics satellites des bases concernées ; En effet, à chaque paire nn' de sous-pupilles correspondent deux pics, un pour la base nn' et l'autre pour la base $n'n$. Lorsque la configuration est diluée (ce qui implique le non recouvrement des fréquences), ces deux pics sont affectés par des constantes de phases opposées prenant la valeur $\pm(a_{1n} - a_{1n'})$.

Lorsqu'un basculement a_{2n} est appliqué sur l'une des sous-pupilles (ligne du bas), la FEP correspondante se déplace dans le champ de l'image. Les autres réponses impulsionnelles restent pour leur part superposées, formant ainsi des franges d'interférence dont la direction est perpendiculaire à la base des sous-pupilles restées fixes. Nous pouvons également constater que contrairement au piston, un basculement affecte a la fois le module et la phase de la FTO. La FTM se trouve atténuée, tandis que les pics des bases nn et nn' de la FTP sont affectés par des plans de phase. Dans le cadre d'une configuration diluée, le plan généré sur le pic central est approximativement égal à la moyenne des aberrations sur les sous-pupilles, tandis que les pics satellites sont affectés d'un cœfficient $(a_{2n} + a_{2n'})$.

	Aberration	FEP	Fonction de transfert	
			Module	*Phase*
Sans aberration				
Piston				
Basculement				

Tab. 1.2 – Pour une configuration diluée à trois sous-pupilles, illustration en plan focal de la réponse impulsionnelle ainsi que de la fonction de transfert obtenues tout d'abord à aberration nulle (ligne du haut), en présence d'un piston (ligne du milieu) puis d'un basculement (ligne du bas) différentiel.

1.3 Cophasage d'un instrument à Synthèse d'Ouverture Optique

La mesure de front d'onde par un ASO est aujourd'hui un problème bien connu, du moins en ce qui concerne les instruments monolithiques. Afin d'estimer les aberrations recherchées, plusieurs méthodes ont été développées, permettant une correction soit en temps-réel au moyen d'une optique adaptative, soit par traitement *a posteriori* [Mugnier *et al.* (2008)]. Il existe aujourd'hui un grand nombre d'Analyseurs de Surface d'onde [Rousset (1999)], pouvant être classés en deux familles :

- les méthodes dites *plan pupille* utilisent une partie de la lumière incidente détournée au moyen d'une lame séparatrice et reposent sur l'approximation de l'optique géométrique qui stipule que les rayons lumineux sont localement perpendiculaires à la surface d'onde. Puisque la relation entre les aberrations recherchées et les données est linéaire, l'inversion peut être effectuée en temps-réel. De plus, ces méthodes ont l'avantage de fonctionner avec une large bande spectrale ;
- les méthodes dites *plan focal*[10] reposent quant à elles sur l'analyse de figures d'interférence dans un plan d'imagerie. En effet, l'image d'un objet donné contient de l'information non seulement sur cet objet, mais aussi sur la phase recherchée. Par conséquent, ces ASO ne requièrent pas ou peu d'autre optique que le capteur d'imagerie ; ils sont aussi le seul moyen d'être sensible à toutes les aberrations jusqu'au plan focal. Ces méthodes permettent en général d'avoir accès directement à la phase recherchée, mais sont par nature chromatiques.

Quel que soit le type d'ASO choisi, la plupart des méthodes développées sont basées sur l'analyse d'un objet très peu résolu par l'instrument ; elles sont donc bien adaptées à l'observation de points sources. *A contrario*, des techniques spécifiques sont requises dès lors que l'on observe des objets couvrant une bonne partie voire tout le champ de l'instrument comme dans le cas de l'imagerie terrestre depuis l'espace.

Dans cette section, nous présentons les principaux types d'ASO susceptibles d'être utilisés comme capteur de cophasage. Nous expliquons tout d'abord leur fonctionnement, puis nous envisageons leur utilisation pour un cophasage réalisé depuis l'espace sur objet quelconque.

1.3.1 Les différents capteurs de type plan pupille

Parmi les méthodes plan pupille développées, très peu sont susceptibles de mesurer les aberrations différentielles entre les télescopes d'un interféromètre. Nous présentons ici les trois méthodes sélectionnées que sont le Shack-Hartmann, l'analyseur de courbure ainsi que le filtrage spatial.

1.3.1.1 L'analyseur de Shack-Hartmann

Le principe de l'analyseur de Shack-Hartmann, illustré Fig. 1.9, est basé sur la mesure du gradient de la phase aberrante [Platt & Shack (2001)]. Pour un télescope monolithique, le front d'onde est échantillonné par une matrice de micro-lentilles placée dans un plan conjugué de la pupille d'entrée de l'instrument. Au foyer de cette matrice, un ensemble de détecteurs enregistre les imagettes de l'objet obtenues à travers chaque micro-lentille. Or, les déformations du front d'onde induisent un déplacement relatif x de l'image par rapport à une position de référence obtenue à phase incidente nulle. Par conséquent, la mesure de ce déplacement nous donne directement la pente locale α_x du

[10] Il s'agit d'un abus de langage, utilisé par opposition à *plan pupille* : en réalité, ces méthodes peuvent être appliquées au voisinage du plan focal.

front d'onde ϕ_a :

$$\alpha_x = \frac{x}{\mathrm{f}} = \frac{\lambda}{2\pi S}\int_S \frac{\partial \phi_a(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.28}$$

où λ représente la longueur d'onde moyenne d'observation, f la focale des micro-lentilles et S la surface de la sous-pupille considérée. Sur objet ponctuel, le déplacement x est estimé par calcul du centre de gravité. Ces mesures discrètes de pente permettent dès lors de reconstruire la phase incidente ϕ_a à un piston près. Dans le cas d'un objet étendu, chaque micro-lentille forme une image de la scène observée dans son plan focal. Le déplacement de chaque imagette peut alors être estimé par corrélation, du moins si la scène observée est suffisamment contrastée [Michau *et al.* (1992)]. Comme la relation entre les mesures et la phase est linéaire, la résolution du problème inverse est par conséquent simple et rapide. Le Shack-Hartmann est ainsi largement employé dans les boucles d'optique adaptative, notamment en astronomie et en astronomie solaire (où la source est très étendue) du fait de sa sensibilité et du traitement simple des données.

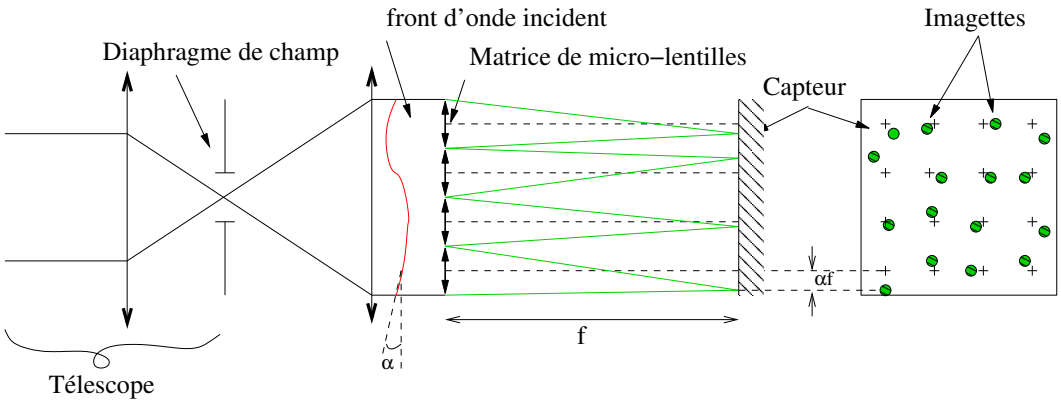


Fig. 1.9 – Principe de l'analyseur de Shack-Hartmann.

Considérons maintenant l'utilisation d'un Shack-Hartmann pour le cophasage d'un réseau de sous-pupilles. Puisque la mesure de basculements différentiels est possible sur objet étendu, il suffit de convertir les pistons en basculements en positionnant les micro-lentilles du Shack-Hartmann à cheval entre les sous-pupilles. Notons que cette technique a été utilisée avec succès pour cophaser le miroir segmenté du Keck [Chanan *et al.* (1986)]. Cependant, l'implémentation d'une telle solution devient optiquement très complexe dès que les sous-pupilles sont non connexes et que leur leur distance centre à centre augmente. Or, pour un instrument spatial, la simplicité de mise en œuvre est un facteur qu'il est impératif de prendre en compte. Cette solution présente donc un intérêt limité et ne sera en conséquence pas retenue dans le cadre du cophasage d'un interféromètre spatial.

1.3.1.2 L'analyseur de courbure

L'analyseur de courbure est basé sur la mesure de la courbure du front d'onde [Roddier (1988); Roddier & Roddier (1993)]. Son principe, illustré Fig. 1.10, repose sur l'approximation de l'optique géométrique : une déformation de la phase ayant une courbure positive entraîne en amont de la pupille une convergence des rayons (ce qui crée une surintensité), ainsi qu'une divergence en aval de la pupille, engendrant ainsi une sous-intensité. La mesure de la différence d'intensité entre deux plans

(situés de part et d'autre de la pupille) normalisée par leur somme permet donc de calculer la courbure du front d'onde indépendamment du flux dans la pupille.

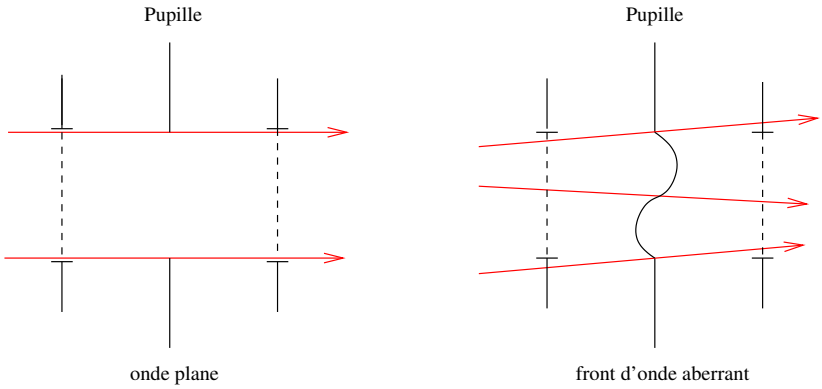


Fig. 1.10 – Principe de l'analyseur de courbure.

Le schéma d'une implémentation optique de cette méthode est présenté Fig. 1.11 : une lentille L de focale f, simulant l'instrument, focalise le front d'onde en son foyer. Deux images défocalisées sont alors enregistrées : l'une dans un plan P_1 situé à la distance l en amont du foyer, l'autre en aval dans un plan P_2 symétrique de P_1 par rapport à ce même foyer. Une lentille de champ L_c de focale $f/2$ assure la symétrie en réimageant la pupille L en L'. En soustrayant les valeurs d'intensité I_1 et I_2 associées à chacun des plans et en normalisant par leur somme, nous obtenons une mesure locale de la convergence (ou divergence selon le cas) du faisceau. Pour un point source, cette mesure nous donne :

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{f(f-l)}{2l}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\phi_a(\rho,\varphi)\delta_c - \nabla^2\phi_a(\rho,\varphi)\right] \tag{1.29}$$

où δ_c est une distribution continue de Dirac sur le pourtour de la pupille et ∇^2 l'opérateur Laplacien.

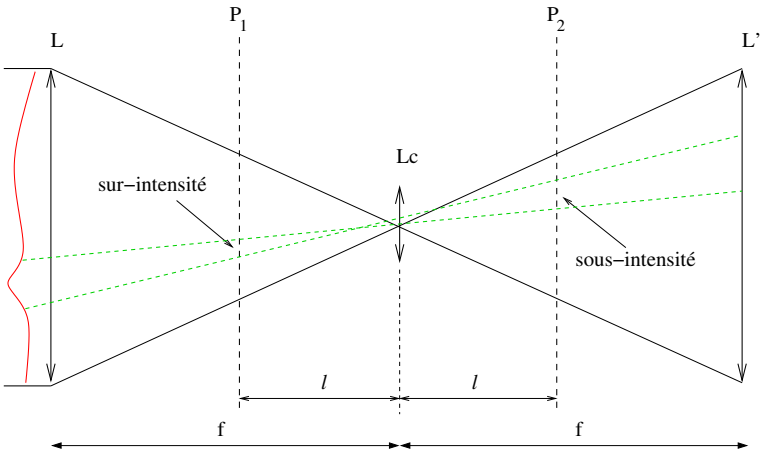


Fig. 1.11 – Exemple d'implémentation optique d'un analyseur de courbure.

D'après l'Eq. (1.29), nous pouvons voir que la sensibilité de l'analyseur diminue lorsque la distance de défocalisation l augmente. En pratique, le choix de l est dicté par plusieurs considérations :

tout d'abord cette distance doit être suffisante pour que l'approximation de l'optique géométrique soit vérifiée, et que l'on puisse négliger les effets liés à la diffraction. De plus, l devra être d'autant plus importante que l'objet est étendu ou que les aberrations recherchées sont de hauts ordres [Roddier (1999)] ; par conséquent, cette méthode est applicable à des objets dont l'étendue est limitée.

1.3.1.3 Le filtrage spatial

De manière générale, l'extension de l'objet est à l'origine de la perte de contraste des franges lors de la recombinaison interférométrique. Or, pour que la mesure du front d'onde effectuée lors d'un cophasage soit optimale, il est nécessaire d'obtenir des interférences ayant une visibilité suffisante. Pour remédier à ce problème, l'une des solutions, illustrée Fig. 1.12, consiste à réduire l'extension spatiale de la source [Cladé (2005)]. Dès lors, l'objet observé est tout d'abord imagé par chaque sous-pupille, puis diaphragmé par un trou de dimension équivalente à celle d'un élément de résolution d'une sous-pupille (soit environ $\lambda/\mathcal{D}$). Les faisceaux sont ensuite recombinés deux à deux. Etant donné qu'il s'agit d'une superposition directe, il y a interférence point par point de la pupille ; par conséquent, le déphasage des ondes qui interfèrent est uniquement dû à la différence de marche entre les faisceaux. L'estimation des aberrations est alors ramenée à une mesure classique de piston par modulation/démodulation.

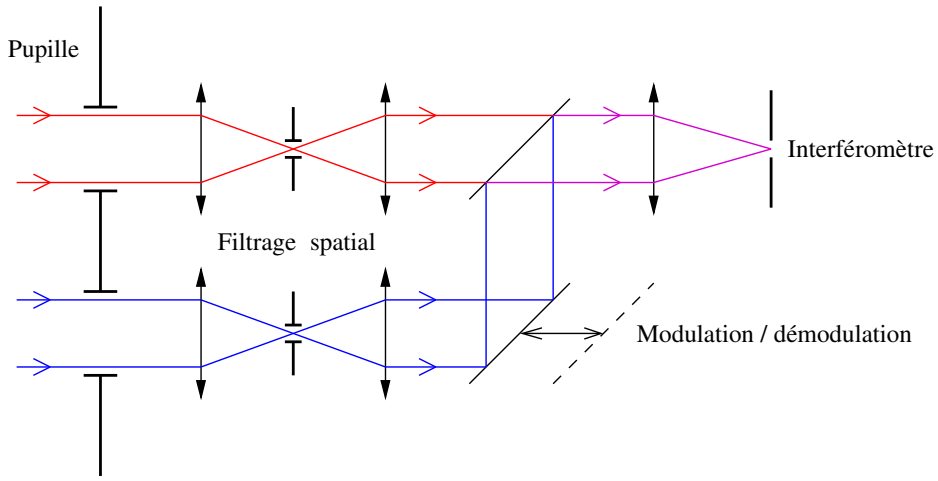


Fig. 1.12 – Principe du filtrage spatial.

L'avantage du filtrage spatial est qu'il ne nécessite pas de calculs numériques complexes puisque de simples détecteurs analogiques monopixels calés sur les franges permettent d'estimer les pistons[11]. Cette méthode a ainsi été envisagée pour le cophasage d'un ISOO à trois sous-pupilles dans le cadre du projet d'observation de la surface du soleil SOLARNET [Damé *et al.* (1998)]. Cependant, elle présente trois inconvénients majeurs : tout d'abord, la perte de flux engendrée par le filtrage spatial est très importante : sur des scènes peu lumineuses (typiquement des scènes étendues), le rapport signal sur bruit sera assez mauvais. De plus, cette technique requiert une recombinaison deux à deux des faisceaux, ce qui s'avère techniquement très difficile lorsque plus de trois télescopes sont impliqués. Enfin, elle ne permet pas de mesurer les basculements mais nécessite tout de même leur correction.

[11]Rappelons qu'un piston différentiel à pour effet de décaler l'interférogramme par rapport à sa position de référence obtenue à phase aberrante nulle.

1.3.2 Méthodes de cophasage de type plan focal

Le principal défaut des méthodes plan pupille décrites ci-dessus est la complexité de leur implémentation optique. Or, si cette limitation ne pose *a priori* pas de problème pour des instruments au sol, elle se révèle totalement dimensionnante pour des interféromètres embarqués. Dans la sous-section suivante, nous présentons deux méthodes simples à mettre en œuvre et reposant sur le traitement d'images acquises au voisinage du plan focal : le *phase retrieval* et la *diversité de phase*.

1.3.2.1 Principe du cophasage par *phase retrieval*

La restauration de phase en plan focal, introduite à l'origine dans le contexte de la microscopie électronique [Gerchberg & Saxton (1972)] puis redécouverte en optique par Gonsalves [Gonsalves (1976)], consiste à estimer les aberrations recherchées à partir de l'observation de l'image focale $\boldsymbol{i}$ d'un objet connu $\boldsymbol{o}$ (typiquement un point source). Tout le problème consiste alors à inverser l'Eq. (1.15) ; la solution généralement utilisée, qui est aussi la plus naturelle, repose sur la minimisation de l'erreur quadratique $\mathcal{L}$ sur les données [Gonsalves (1982)] :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}_a) = ||\boldsymbol{i} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\phi}_a)||^2 \quad \text{et} \quad \widehat{\boldsymbol{\phi}}_a = \arg\min_{\boldsymbol{\phi}_a} \mathcal{L}(\boldsymbol{\phi}_a) \tag{1.30}$$

Cette minimisation est le plus souvent réalisée de manière itérative. Notons toutefois que plusieurs équipes ont tenté d'obtenir un estimateur analytique dans le cadre de faibles aberrations incidentes [Gonsalves (2001); Baron *et al.* (2008)]. Nous reviendrons plus en détail dans le chapitre 3 sur les méthodes développées au cours de ces travaux.

La méthode du *phase retrieval* présente l'avantage d'être optiquement très simple à implémenter par rapport aux méthodes plan pupille. Cependant, dans le cas d'une configuration centrosymétrique[12], des ambiguïtés apparaissent sur le signe de la partie paire de la phase estimée, comme démontré en Annexe B page 189 ; la solution n'est donc pas unique. Soulignons également que cette méthode n'est viable que pour l'observation d'objets connus, donc typiquement pour des objets ponctuels.

1.3.2.2 Principe du cophasage par *diversité de phase*

Généralités Afin de lever l'indétermination intrinsèque sur la partie paire de la phase, Gonsalves [Gonsalves (1982)] a proposé, dans le contexte de l'optique, d'utiliser une deuxième image différant de la première par une variation de phase $\boldsymbol{\phi}_d$ parfaitement connue et contenant au moins une partie paire (voir démonstration Annexe B page 192). Dès lors, cette image supplémentaire permet de coder l'information de phase de manière différente et par conséquent de lever les indéterminations existantes :

$$\begin{aligned} \text{première image :} \quad & \boldsymbol{i_1} = \boldsymbol{h_1} \star \boldsymbol{o} + \boldsymbol{b_1} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{h_1} = \left|\mathrm{TF}^{-1}\left(\boldsymbol{\Pi} \exp j\boldsymbol{\phi}_a\right)\right|^2 \\ \text{deuxième image :} \quad & \boldsymbol{i_2} = \boldsymbol{h_2} \star \boldsymbol{o} + \boldsymbol{b_2} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{h_2} = \left|\mathrm{TF}^{-1}[\boldsymbol{\Pi} \exp j(\boldsymbol{\phi}_a + \boldsymbol{\phi}_d)]\right|^2 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Les deux images $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$ sont ainsi reliées par une relation non linéaire. Dorénavant, nous ferons référence à cette technique sous le nom de *diversité de phase* et nous appellerons *diversité* la phase $\boldsymbol{\phi}_d$ introduite entre les images. Soulignons que cette méthode peut bien entendu être généralisée à plus

[12] Une configuration est dite *centrosymétrique* lorsqu'à chaque sous-pupille n correspond une pupille n' qui lui est symétrique par rapport à l'origine.

de deux plans d'imagerie, du moment que ces derniers ne diffèrent que par une phase connue. Notons également que l'idée même d'utiliser deux images pour déterminer une information de phase à partir d'un seul objet peut être attribuée à Misell [Misell (1973)], à nouveau dans le contexte de la microscopie électronique.

Pour engendrer la phase de diversité, nous pouvons introduire une évolution temporelle du système ; les images sont alors acquises successivement dans le temps. Cependant, la méthode généralement privilégiée consiste à acquérir des images simultanément en des endroits différents. Par conséquent, la diversité est dans ce cas une diversité spatiale. Dès lors, le déphasage entre les deux images peut être produit au moyen d'un élément optique (lentille ou masque de phase). Le plus souvent, la perturbation choisie est une défocalisation globale, car c'est *de facto* le mode qui s'avère être le plus simple à implémenter. Une réalisation possible d'un tel système est illustrée Fig. 1.13, où la première image est acquise au plan focal et la deuxième dans un plan défocalisé d'une quantité ϕ_d.

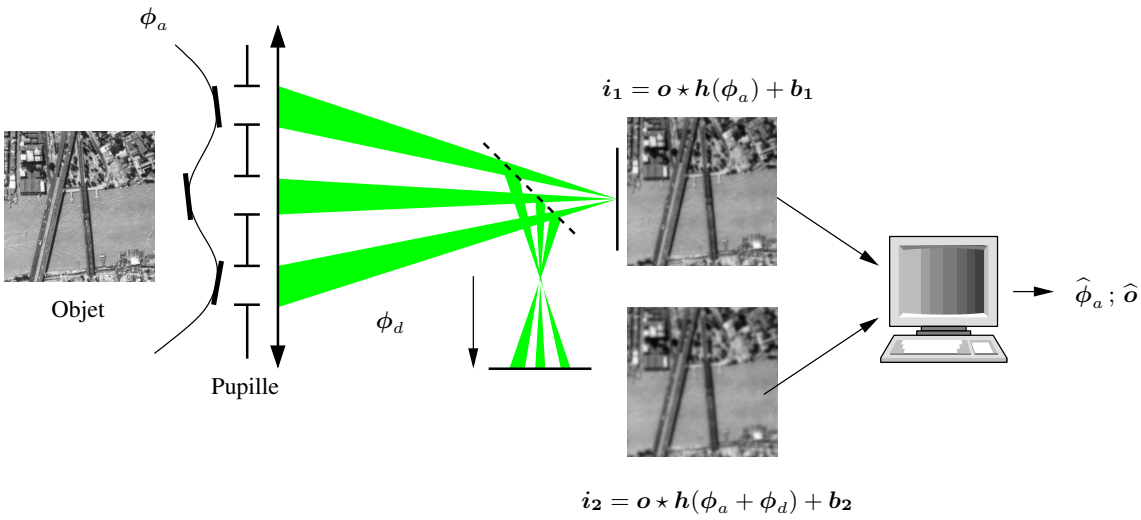


Fig. 1.13 – Principe de la diversité de phase.

Auparavant, nous avions déjà souligné que les méthodes plan focal présentent l'avantage d'être simple à mettre en œuvre optiquement. Cependant, la relation non linéaire qui lie les images à la phase dépend de l'objet observé. Le problème sera donc plus difficile à inverser que dans le cas d'ASO plan pupille. En contrepartie, cette dépendance permet à la diversité de phase d'être utilisée à la fois :

- comme restaurateur d'images ; ainsi, cette technique est notamment employée pour la réduction du *speckle*[13] dans les données en faisant l'acquisition d'un nombre important d'images courte pose et en les réduisant par diversité (technique dite du *Phase Diverse Speckle Reconstruction* [Seldin *et al.* (1997); Zhang *et al.* (2007)] ;
- comme analyseur de surface d'onde pour estimer les aberrations vues par un instrument, notamment dans les cas où il n'est pas possible de rajouter des éléments optiques spécifiques pour effectuer les mesures. L'une des premières applications pratiques de la diversité de phase a été la détermination des aberrations du Hubble Space Telescope [Fienup *et al.* (1993)]. Toutefois, l'objet était connu puisque l'instrument pointait une étoile. Dans ce cas, le problème s'avère être plus simple ; nous parlons alors de *phase-diverse phase retrieval* [Ellerbroek *et al.*

[13]Le *speckle*, ou phénomène de *tavelures*, est caractérisé par une distribution d'intensité qui évolue de manière aléatoire dans le temps.

(1997)]. Aujourd'hui, la méthode de la diversité de phase est utilisée pour estimer les aberrations propres de systèmes optiques seuls [Löfdahl & Duncan (1998); Jefferies *et al.* (2002); Blanc *et al.* (2003a)] ou à travers la turbulence atmosphérique [Kendrick *et al.* (1994); Lee *et al.* (1997); Thelen *et al.* (1999); Baba & Mutoh (2001)], ou encore pour déterminer les aberrations résiduelles d'une boucle d'optique adaptative [Löfdahl *et al.* (2000)].

Dans le domaine de la synthèse d'ouverture optique, la diversité de phase est parfaitement adaptée au cophasage de miroirs segmentés [Löfdahl *et al.* (1998)]. L'application à un réseaux de télescopes est quant à elle apparue un peu plus tardivement [Paxman & Fienup (1988); Seldin *et al.* (2000); Baron *et al.* (2002); Mugnier *et al.* (2005)]. Néanmoins, les réalisations expérimentales restent encore rares dans ce domaine ; ainsi, le Banc Reconfigurable d'Imagerie sur Scènes Etendues de l'ONERA [Cassaing *et al.* (2006)] et le banc Multi Aperture Imaging Array de Lockheed Martin [Zarifis *et al.* (1999)] constituent quelques exemples parmi les bancs expérimentaux qui ont été développés.

Estimation jointe L'estimation de la phase aberrante ϕ_a, voire de l'objet $\boldsymbol{o}$, est généralement basée sur une approche de type moindre-carrés [Gonsalves (1982)] qui revient à minimiser $\mathcal{L}$, la distance aux images $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$:

$$\mathcal{L}(\phi_a, \boldsymbol{o}) = \frac{1}{2\sigma_1^2}||\boldsymbol{i_1} - \boldsymbol{h}(\phi_a) \star \boldsymbol{o}||^2 + \frac{1}{2\sigma_2^2}||\boldsymbol{i_2} - \boldsymbol{h}(\phi_a + \phi_d) \star \boldsymbol{o}||^2 \tag{1.32}$$

où σ_1 et σ_2 représentent les variances de bruit associées aux images $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$. Par la suite, Paxman [Paxman *et al.* (1992)] proposa une estimation au sens du Maximum de Vraisemblance pour un bruit gaussien (retrouvant ainsi l'expression des moindres carrés) et poissonnien. En pratique cependant, l'utilisation de cet estimateur conduit irrévocablement à une amplification du bruit ; il ne permet donc pas d'obtenir une estimation correcte de l'objet et de la phase. Par conséquent, il est nécessaire de régulariser ce problème en introduisant des *a priori* sur les inconnues. Au cours de ces vingt dernières années, différentes méthodes d'estimation ont été développées ; à ce propos, nous invitons le lecteur à consulter le chapitre de Mugnier [Mugnier *et al.* (2006)] pour un historique plus complet de la diversité de phase et des méthodes de résolution généralement employées. Soulignons en particulier les travaux de Blanc [Blanc (2002)], qui propose une interprétation probabiliste de la reconstruction conjointe de l'objet et de la phase, et analyse le comportement statistique ainsi que le réglage de l'ensemble des paramètres liés à l'estimation. Cette méthode, basée sur la recherche du Maximum *A Posteriori* Joint (MAPJ), consiste à choisir l'objet $\boldsymbol{o}$ et la phase ϕ_a qui maximisent la densité f de probabilité jointe des données (donc des images $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$), de l'objet et de la phase :

$$(\widehat{\phi}_a, \widehat{\boldsymbol{o}})_{\text{MAPJ}} = \underset{\boldsymbol{o},\phi_a}{\arg\max}\, f(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{o}, \phi_a; \boldsymbol{\theta}) \tag{1.33}$$

$$= \underset{\boldsymbol{o},\phi_a}{\arg\max} \left[\underbrace{f(\boldsymbol{i}_1|\boldsymbol{o}, \phi_a; \boldsymbol{\theta_n})\, f(\boldsymbol{i}_2|\boldsymbol{o}, \phi_a; \boldsymbol{\theta_n})}_{\text{terme d'attache aux données}} \cdot \underbrace{f(\phi_a; \boldsymbol{\theta}_\phi)}_{\textit{a priori}\text{ sur la phase}} \cdot \underbrace{f(\boldsymbol{o}; \boldsymbol{\theta}_o)}_{\textit{a priori}\text{ sur l'objet}} \right] \tag{1.34}$$

où $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta_n}\,;\, \boldsymbol{\theta_o}\,;\, \boldsymbol{\theta_\phi})$ représente le vecteur des *hyperparamètres*, c.-à.-d. l'ensemble des paramètres autres que $\boldsymbol{o}$ et $\boldsymbol{\phi_a}$ liés à l'estimation. Par simplicité, nous chercherons plutôt en pratique à minimiser l'opposé du logarithme de f.

Comme l'a souligné Mugnier [Mugnier *et al.* (2006)], la majorité des estimateurs utilisés pour la résolution du problème inverse peuvent être décrits par l'Eq. (1.34) même s'ils n'ont pas été mis

initialement en place dans un cadre bayésien. Ainsi, l'estimation au sens du Maximum de Vraisemblance, proposée par Paxman [Paxman *et al.* (1992)], est obtenue en fixant $f(\boldsymbol{\phi}_a;\boldsymbol{\theta}_\phi) = f(\boldsymbol{o};\boldsymbol{\theta}_o) = 1$ dans l'expression (1.34). Notons qu'une première interprétation de l'estimation jointe, de par l'introduction d'une régularisation sur la phase ($f(\boldsymbol{\phi}_a;\boldsymbol{\theta}_\phi) \neq 1$), a été présentée par Vogel et Thelen [Vogel *et al.* (1998); Thelen *et al.* (1999)]. Néanmoins, nous parlerons plutôt dans ce cas d'une estimation de type Maximum de Vraisemblance Généralisée ; en effet, seule l'utilisation de l'information statistique à la fois sur l'objet et les aberrations peut être dénominée sous le terme MAPJ.

En appelant $\boldsymbol{H}$ la matrice correspondant à la convolution discrète de la réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}$, nous pouvons écrire le modèle d'imagerie sous la forme $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{o}$. Intéressons nous alors à chacun des termes de l'Eq. (1.34) :

- *le terme d'attache aux données :* statistiquement, les images $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$ sont indépendantes à objet et phase fixée. Le bruit de photons dont elles sont entachées peut raisonnablement être modélisé par un bruit blanc gaussien homogène dont la variance σ^2 est donnée par le flux total dans l'image ; par simplicité, nous considérerons par la suite que σ^2 est la même pour $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$. Dès lors, en notant $d = (1,2)$ le $d^{\text{ième}}$ plan de diversité, la densité de probabilité $f(\boldsymbol{i}_d, |\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\phi}_a; \boldsymbol{\theta})$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(\boldsymbol{i}_d, |\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\phi}_a; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N_{\text{pix}}/2}} \exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{i_d} - \boldsymbol{H_d o})^t(\boldsymbol{i_d} - \boldsymbol{H_d o})\Big] \tag{1.35}$$

  où N_{pix} représente le nombre de pixels contenus dans l'image et ^{t} l'opérateur transposé. Notons que dans cette équation, le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ des hyperparamètres est réduit à l'expression de σ ;
- *le terme de régularisation sur la phase :* cette opération est généralement effectuée de manière implicite. En effet, en décrivant la phase par sa décomposition tronquée sur les modes de Zernike, nous réduisons automatiquement l'espace des inconnues $\boldsymbol{\phi_a}$. Dans le cadre d'une opération de cophasage classique, seuls quatres polynômes sont utiles : le piston, les deux basculements et le polynôme d'ordre k décrivant la diversité qui, rappelons-le, correspond le plus souvent à une défocalisation (donc à $k = 4$). Selon l'application visée, d'autres régularisations peuvent être effectuées, par exemple dans le cadre d'une observation au sol en tenant compte des connaissances statistiques sur la turbulence [Thelen *et al.* (1999)]. Dans ce cas, les cœfficient turbulents suivent une loi gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance R_a :

$$f(\boldsymbol{\phi}_a;\boldsymbol{\theta}_\phi) = \frac{1}{(2\pi)^{(k-1)/2}\det(R_a)^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^t R_a^{-1}\boldsymbol{a}\Big) \tag{1.36}$$

  où $\boldsymbol{a}$ représente le vecteur des aberrations que l'on souhaite estimer ; les hyperparamètres sont alors déduits de la statistique de Kolmogorov. Notons $-\ln f[\boldsymbol{\phi}_a(\boldsymbol{a});\boldsymbol{\theta}_\phi] = \mathrm{R}(\boldsymbol{a})$ le terme de régularisation sur la phase. Puisque dans notre cas nous nous intéressons aux seules aberrations induites par l'instrument[14], nous choisirons dans la suite de ce manuscrit $\mathrm{R}(\boldsymbol{a}) = 0$;
- *le terme de régularisation sur l'objet :* ce terme dépend d'une paramétrisation *a priori* de la scène observée. Par conséquent, nous choisissons d'associer à l'objet $\boldsymbol{o}$ une loi de probabilité gaussienne de moyenne $\boldsymbol{o_m}$ et de matrice de covariance R_o [Vogel *et al.* (1998); Bucci *et al.*

[14]Ce choix est justifié car nous nous plaçons essentiellement dans un contexte spatial ; par conséquent, nous n'avons pas besoin de chercher des paramètres de phase. Toutefois, pour le cophasage d'instruments monopupilles au sol de très grand diamètre, comme l'European Extremely Large Telecope (E-ELT) composé de 900 segments de diamètre 1,45 m [Gilmozzi & Spyromilio (2007)], il sera nécessaire de prendre en compte l'effet de la turbulence atmosphérique.

(1999)] :

$$f(\boldsymbol{o};\boldsymbol{\theta}_o) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{\text{pix}}/2}\det(R_o)^{1/2}} \exp\Big[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{o}-\boldsymbol{o}_m)^t R_o^{-1}(\boldsymbol{o}-\boldsymbol{o}_m)\Big] \tag{1.37}$$

En reportant dans l'Eq. (1.34) l'expression des trois densités de probabilité explicitées ci-dessus, nous obtenons, pour l'expression[15] du critère MAPJ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{o}) =& -\ln f(\boldsymbol{i_1},\boldsymbol{i_2},\boldsymbol{o},\boldsymbol{\phi}_d;\boldsymbol{\theta})\\ =& N_{\text{pix}}\ln\sigma^2 + \frac{1}{2}\ln\det(R_o) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{o}-\boldsymbol{o}_m)^t R_o^{-1}(\boldsymbol{o}-\boldsymbol{o}_m)\\ &+ \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{i_1}-\boldsymbol{H_1o})^t(\boldsymbol{i_1}-\boldsymbol{H_1o}) + \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{i_2}-\boldsymbol{H_2o})^t(\boldsymbol{i_2}-\boldsymbol{H_2o}) + \text{Cste}\end{aligned} \tag{1.38}$$

$\mathcal{L}$ doit bien entendu être minimisé vis-à-vis de l'objet $\boldsymbol{o}$ et des aberrations $\boldsymbol{a}$. En annulant la dérivée partielle du critère par rapport à $\boldsymbol{o}$, nous obtenons une expression analytique de l'objet à aberrations fixées, qui s'exprime dans le domaine de Fourier comme :

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{i_1}\widetilde{\boldsymbol{h}}_1^*(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{i_2}\widetilde{\boldsymbol{h}}_2^*(\boldsymbol{a}) + \frac{\sigma^2\widetilde{\boldsymbol{o}}_m}{\mathfrak{S}_o}}{|\widetilde{\boldsymbol{h}}_1(\boldsymbol{a})|^2 + |\widetilde{\boldsymbol{h}}_2(\boldsymbol{a})|^2 + \frac{\sigma^2}{\mathfrak{S}_o}} \tag{1.39}$$

où * représente le complexe conjugué. Notons que cette expression, qui s'apparente a un filtre de Wiener-Helstrom [Helstrom (1967)] de par l'emploi du terme $\sigma^2/\mathfrak{S}_o$, ne diverge pas à haute fréquence. En réinjectant l'estimée $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a})$ dans l'expression de $\mathcal{L}$ Eq. (1.38), nous obtenons un nouveau critère $\mathcal{L}_{\text{I}}$ qui ne dépend plus explicitement que de $\boldsymbol{a}$ et qui s'exprime dans le domaine de Fourier discret comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{I}}(\boldsymbol{a}) =& N_{\text{pix}}\ln\sigma^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N_f}\mathfrak{S}_o(\nu) + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{N_f}\frac{\left|\widetilde{i}_2(\nu)\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2}{\left|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \frac{\sigma^2}{\mathfrak{S}_o(\nu)}}\\ &+ \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{N_f}\frac{\frac{\sigma^2}{\mathfrak{S}_o(\nu)}\left[\left|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\widetilde{o}_m(\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\widetilde{o}_m(\nu) - \widetilde{i}_2(\nu)\right|^2\right]}{\left|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \frac{\sigma^2}{\mathfrak{S}_o(\nu)}}\end{aligned} \tag{1.40}$$

où N_f est le nombre de fréquences sur lesquelles est défini le critère. La minimisation de $\mathcal{L}_{\text{I}}$ par rapport aux aberrations est ensuite effectuée le plus souvent de manière itérative. Toutefois, il a été constaté [Blanc (2002)] puis démontré théoriquement [Idier *et al.* (2005)] que les hyperparamètres optimaux vis-à-vis de la phase ne sont pas en adéquation avec ceux liés à l'objet ; il est donc nécessaire de sous-régulariser l'objet pour estimer au mieux les aberrations à fort flux.

Estimation marginale Nous avons vu au paragraphe précédent comment restaurer conjointement la phase incidente ainsi que l'objet observé. Toutefois, la méthode jointe peut présenter plusieurs inconvénients :

[15] Bien entendu, l'expression du critère, que nous détaillons ici pour deux images, peut être généralisée à N_d plans de diversité.

– le nombre d'inconnues à reconstruire n'est pas également réparti entre l'objet et la phase. En effet, dans le cadre d'une opération de cophasage, les aberrations incidentes sont généralement estimées sur quelques modes de Zernike ; au pire, une centaine de mode peut être requise si l'ASO est utilisé pour la reconstruction de front d'onde turbulent. Le nombre d'inconnues liées à l'objet est quant à lui beaucoup plus important, puisqu'il est égal au nombre de pixels dans l'image ; dès lors, il peut facilement atteindre plusieurs milliers ;
– les hyperparamètres optimaux vis-à-vis de la restauration de phase ne sont pas les mêmes que ceux qui optimisent la reconstruction de l'objet [Blanc (2002)]. Il est donc nécessaire de privilégier l'une ou l'autre estimation selon l'application désirée (estimation de front d'onde ou traitement d'image *a posteriori*.

Ces constatations ont amené Blanc [Blanc *et al.* (2003b)] à développer une nouvelle méthode dite *marginale*, basée sur la restauration des seules aberrations. La phase la plus vraisemblable est ainsi reconstruite compte tenu des données, et ce tout en s'affranchissant de l'objet par son intégration hors du problème. Dès lors, ce nouvel estimateur est de type MAP, mais pour les seules aberrations :

$$(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_{\boldsymbol{a}})_{\text{MAP}} = \arg\max_{\boldsymbol{\phi}_a} \int f(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{\phi}_a; \boldsymbol{\theta})\, \mathrm{d}\boldsymbol{o} \tag{1.41}$$

$$= \arg\max_{\boldsymbol{\phi}_a} f(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \boldsymbol{\phi}_a; \boldsymbol{\theta}) \;=\; \arg\max_{\boldsymbol{\phi}_a} f(\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2} | \boldsymbol{\phi}_a; \boldsymbol{\theta}).f(\boldsymbol{\phi}_a; \boldsymbol{\theta}) \tag{1.42}$$

Les principales hypothèses restent cependant inchangées par rapport au cas de l'estimateur joint : le bruit est supposé blanc gaussien stationnaire de variance σ^2 et nous associons un *a priori* gaussien à l'objet, de moyenne $\boldsymbol{o_m}$ et de matrice de covariance R_o. En réalité, puisque nous nous intéressons aux seuls termes dépendant de la phase, le critère marginal $\mathcal{L}^{'}$ ne diffère du critère joint $\mathcal{L}$ que par l'ajout d'un seul terme [Goussard *et al.* (1990); Blanc (2002)] :

$$\mathcal{L}^{'}(\boldsymbol{a}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} \ln \det(R_I) \tag{1.43}$$

où R_I représente la matrice de covariance du vecteur $\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{i_1 i_2})^t$ qui concatène les données. La méthode marginale peut être ou non supervisée, c.-à.-d. que nous pouvons lui fournir les hyperparamètres vrais découlant des informations *a priori* que nous avons sur l'objet observé [Baron (2005)]. Toutefois, la méthode supervisée ne s'avère vraiment utile que pour des objets dont la Densité Spectrale de Puissance (DSP) est connue. Dès lors, dans le cas général, seul le non supervisé est employé. Soulignons que l'estimation marginale peut également servir *a posteriori* à la reconstruction optimale de l'objet, et ce à partir des estimées des aberrations et des hyperparamètres.

L'implémentation du marginal a été réalisée à l'ONERA sur pupille monolithique en 2000 [Blanc *et al.* (2000)] ; de bonnes performances ont ainsi été obtenues sur des données simulées, puis expérimentales. De plus, la comparaison des critères joint/marginal a montré qu'à fort flux, l'erreur sur les estimées commise par l'estimateur marginal devient plus faible que celle du joint, tout en restant à des niveaux de flux comparables. Malheureusement, le marginal s'avère en pratique assez difficile à mettre en œuvre pour l'estimation des aberrations ; en effet, la méthode non supervisée, utilisée sur objet étendu, est relativement coûteuse en temps de calcul car elle nécessite l'estimation de la DSP objet ainsi que de la variance de bruit. Par conséquent, son utilisation reste moins immédiate que celle du critère joint.

1.3.2.3 Méthodes de mesure retenues dans le cadre de cette thèse

Les méthodes plan pupille et plan focal que nous avons présentées dans les paragraphes précédents présentent toutes des avantages leur permettant d'être utilisées comme analyseur de surface d'onde. De part le passé, plusieurs comparaisons plus ou moins exhaustives de ces différentes méthodes ont été réalisées. Ainsi, l'utilisation de l'analyseur de courbure ou de la diversité de phase pour la correction de la turbulence sur objet étendu a été discutée par Fienup [Fienup *et al.* (1998)]. La comparaison entre le Shack-Hartmann et la diversité de phase a quant à elle été effectuée par Ellerbrœk [Ellerbroek *et al.* (1997)]. Enfin, soulignons également les travaux de Tyler, qui a comparé différentes techniques de traitement *a posteriori* d'images corrigées ou non par un système d'OA [Tyler *et al.* (1998)]. Toutes ces études, qui ont été réalisées dans le cadre de la correction de la turbulence sur un télescope monolithique, montrent la supériorité de la diversité de phase, excepté dans les cas faibles flux et pour de fortes aberrations non compensées par optique adaptative.

Dans le cadre du cophasage d'un instrument à synthèse d'ouverture, chacune de ces méthodes (SH, courbure, *phase retrieval* ou diversité de phase) revêt un intérêt. Seul le filtrage spatial n'est clairement pas adapté à ce problème, puisqu'il ne permet en aucun cas de retrouver les basculements propres à chaque sous-pupille. Toutefois, les méthodes de type plan pupille restent difficiles à implémenter dès que le nombre de sous-pupilles augmente [Cassaing *et al.* (2003b)] ; or, cette limitation s'avère critique pour des applications de type spatial. *A contrario*, la diversité de phase permet d'estimer facilement de nombreux ordres d'aberrations et son utilisation sur scène étendue est aisée. De plus, cette méthode présente l'avantage d'être sensible à toutes les aberrations jusqu'au plan focal et permet d'avoir accès directement à la phase recherchée. En revanche, elle est naturellement chromatique ; elle ne peut donc être employée qu'avec des bandes spectrales dont la largeur $\Delta\lambda$ est telle que $\Delta\lambda/\lambda \leq 15\%$ [Meynadier *et al.* (1999)][16].

Ainsi, au vu des éléments sub-mentionnés ci dessus et résumés Tab. 1.3, le choix effectué pour cophaser un réseau de télescopes sera le suivant :

- si la mise en phase s'effectue sur point source et si la configuration est non centrosymétrique, nous utiliserons le *phase retrieval* afin d'estimer les pistons et basculements différentiels sur chaque sous-pupille. Cependant, si la mesure des ordres supérieurs est requise ou si la configuration pupillaire est centrosymétrique, nous privilégierons la diversité de phase ;
- si l'objet observé est une scène étendue, le cophasage sera effectué directement par diversité de phase.

1.4 Conclusion du chapitre

Le développement des futures missions pour l'astronomie ou l'observation de la Terre nécessite des résolutions spatiales importantes, ce qui implique le développement de télescopes de plus en plus grands. Malheureusement, la fabrication et le lancement dans l'espace de miroirs de diamètre croissant se heurte rapidement à de nombreuses limitations, aussi bien technologiques (encombrement, masse) que financières. Dès lors, pour répondre aux problèmes posés par la construction ou l'emploi de miroirs monoblocs géants et pour gagner définitivement en résolution, la Synthèse d'Ouverture Optique apparaît comme une solution séduisante. Etant donné que le champ des applications possibles est extrêmement vaste, cette méthode se révèle aujourd'hui comme étant incontournable dans

[16] A moins de modifier significativement l'algorithme afin de modéliser correctement le phénomène de polychromatisme [Seldin *et al.* (2000)].

	Méthodes plan pupille		Méthodes plan focal
	Shack-Hartmann	Analyseur Courbure	PR / PD
Mesure	pente locale $\frac{\partial \phi_a}{\partial x}, \frac{\partial \phi_a}{\partial y}$	Laplacien $\nabla^2 \phi_a$	images(s)
Relation mesure/phase	linéaire	linéaire	non linéaire
Calibration	oui	non	oui
Mise en œuvre	volumineux	volumineux	simple
Bande spectrale	achromatique	achromatique	chromatique
Support objet	quelconque	objet compact	quelconque
Estimation	ϕ_a	ϕ_a	$\phi_a, \boldsymbol{o}$
temps-réel	oui	oui	en partie

Tab. 1.3 – Comparaison entre les méthodes plan pupille (Shack-Hartmann, analyseur de courbure) et les méthodes plan focal (*phase retrieval* PR / diversité de phase PD) pour l'estimation des aberrations d'un ISOO.

le domaine de la haute résolution angulaire. De fait, plusieurs instruments multipupilles sont actuellement disponibles au sol ou en cours de construction, et des projets spatiaux ambitieux de plus en plus nombreux y font désormais appel.

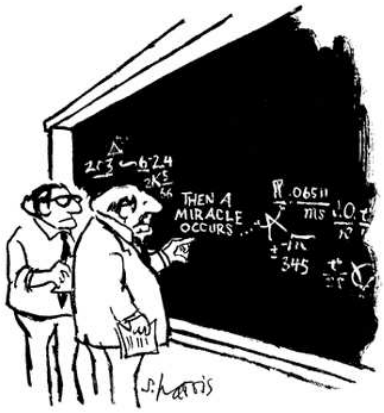
La difficulté principale posée par la synthèse d'ouverture réside dans la mesure puis la correction des aberrations différentielles présentes entre les sous-pupilles de l'instrument. Cette problématique dit du *cophasage* étant relativement nouvelle, la plupart des méthodes d'estimation utilisées à ce jour sont basées sur des procédés d'analyses qui ont été développés à l'origine pour des instruments monolithiques. Dans ce contexte, les techniques de type plan focal présentent un avantage certain ; en effet, elles sont simples à mettre en œuvre optiquement, ce qui s'avère être d'une importance capitale dans le cas d'un système embarqué. De plus, elles peuvent estimer de nombreux ordres pour un nombre important de sous-pupilles et sont sensibles à toutes les aberrations jusqu'au plan focal. Par conséquent, leur grande polyvalence leur permet de répondre aux problématiques diverses et variées posées par les futurs projets terrestres ou spatiaux.

Le *phase retrieval* et la diversité de phase sont aujourd'hui couramment employés avec des instruments monolithiques pour évaluer le front d'onde incident au voisinage du plan focal. Leur applicabilité au cophasage de systèmes multipupilles a également été démontrée en laboratoire. Toutefois, ces méthodes présentent l'inconvénient d'être itératives, et donc potentiellement coûteuses en temps de calcul. Par conséquent, elles ne permettent actuellement pas de répondre pleinement aux exigences temps-réel d'un système embarqué.

Dès lors, nous nous proposons dans cette thèse de développer de nouveaux estimateurs de cophasage qui soient analytiques, permettant ainsi une estimation en temps-réel des aberrations que ce soit sur scène étendue ou sur objet ponctuel. Le développement algorithmique de ces capteurs est présenté aux chapitre 2 et 3. Si leur caractérisation sera effectuée dans un contexte plutôt général (configuration variable, etc.) dans les chapitres 4 puis 5, leur validation expérimentale sera quant à elle réalisée dans le cadre de projets français et européens, projets que nous présenterons au chapitre 6.

Chapitre 2

Développement d'un algorithme de cophasage rapide de type diversité de phase sur objet étendu



"I think you should be more explicit here in step two"

Sydney Harris from *What so funny about Science*

2.1 Position du problème

Nous avons présenté au premier chapitre la problématique du cophasage en plan focal[1] qui consiste à contrôler à une fraction de longueur d'onde les défauts d'alignement entre les sous-pupilles (à savoir principalement les pistons et basculements) d'un instrument multitélescope. Comme les performances de l'instrument synthétisé dépendent directement de la qualité de mise en phase des faisceaux, le capteur de cophasage, chargé de mesurer les aberrations entre les télescopes, est donc un composant clef.

La méthode de la diversité de phase, utilisée à l'origine pour estimer les aberrations d'un télescope monolithique, permet actuellement de mesurer sur objet étendu les aberrations différentielles d'un instrument multipupille avec une erreur inférieure à $\lambda/60$ en laboratoire [Baron (2005)], et ce pour des flux relativement faibles (de l'ordre de 200 photo-électrons par pixel). Toutefois, les méthodes d'estimation associées sont itératives et requièrent des temps de calcul importants qui sont incompatibles avec les exigences temps-réel d'un système embarqué ; en effet, si N_d est le nombre de plans de diversité, $2N_d$ transformées de Fourier sont au minimum effectuées par itération, sachant qu'une dizaine d'itérations sont nécessaires en pratique avec les algorithmes actuels de type gradient conjugué.

[1] Par opposition à plan pupille.

La problématique du cophasage temps-réel[2] sur objet étendu date d'une quinzaine d'années [Kendrick *et al.* (1994)] ; cependant, très peu de recherches ont été effectuées dans ce domaine, et encore moins pour des applications de type SOO. Parmi les travaux effectués, des efforts ont été menés afin de réduire le nombre d'itérations nécessaires, tout d'abord en proposant de meilleurs algorithmes de minimisation du critère d'estimation pour des configurations monolithiques [Vogel *et al.* (1998); Löfdahl & Duncan (1998)], puis par modification du critère utilisé [Scharmer (1999); Löfdahl & Scharmer (2000); Specht *et al.* (2004)]. Toutefois, aucune de ces méthodes ne propose un calcul qui soit réellement en un coup. La mesure de résidus en boucle fermée a parfois été réalisée, comme sur le banc Multi Aperture Imaging Array de Lockheed Martin [Zarifis *et al.* (1999); Seldin *et al.* (2000)], par des algorithmes certes rapides mais qui nécessitent tout de même plusieurs itérations, et sans aucune caractérisation fine des performances du capteur.

Afin de répondre pleinement aux exigences d'un système de cophasage temps-réel, nous nous proposons dans ce chapitre de développer un nouvel estimateur rapide de type diversité de phase qui soit analytique et qui ne nécessite donc aucune itération, et dont le temps de calcul est par conséquent réduit au minimum. Ce nouvel estimateur, développé dans le cadre des faibles phases incidentes, fait partie des algorithmes mis en œuvre à l'ONERA de type FUSCHIA (pour Fast Unambiguous Sensors for CopHasing Interferometric Arrays[3]). Nous l'appellerons donc FUSCHIA_2 puisque deux plans sont au minimum nécessaires pour estimer les aberrations sur objet quelconque[4]. Dans la section 2.2, nous explicitons la méthode choisie, basée sur la construction d'un critère d'estimation qui permet de déterminer les aberrations de manière simple. L'expression de ce nouveau critère n'étant possible qu'en considérant une expression simplifiée de la fonction de transfert optique, nous détaillons en section 2.3 comment nous avons linéarisé les pics de la FTO dans chaque plan image. Nous examinons enfin en section 2.4 le cas particulier de la restauration d'objet, qui intervient lorsque la diversité de phase est utilisée pour faire du traitement d'image *a posteriori* ; nous montrons que l'objet observé peut être restauré par une méthode dite *mixte*, qui utilise à la fois l'estimation de paramètres liés à l'objet ainsi que l'estimation des aberrations différentielles entre les sous-pupilles.

2.2 Nouvelle méthode de cophasage choisie

L'estimation au sens du Maximum *A Posteriori* Joint (MAPJ), couramment utilisée lors d'un cophasage de type plan focal, consiste à choisir l'objet et la phase qui maximisent la densité de probabilité *a posteriori* jointe des données. Cette approche, développée à l'origine pour des instruments monolithiques puis étendue par la suite au cas SOO, permet de cophaser sur des scènes faiblement contrastées nonobstant un temps de calcul important. Cette section a pour objectif de démontrer que sous certaines hypothèses, il est possible d'obtenir un critère d'estimation qui est quadratique en fonction des aberrations, et qui permet par conséquent une estimation analytique, donc rapide, de la phase aberrante.

2.2.1 Critère dans le cas des faibles aberrations

Nous avons présenté au premier chapitre la méthode de reconstruction conjointe de l'objet $\boldsymbol{o}$ et de la phase incidente ϕ_a fondée sur la recherche du MAPJ. Nous avons également souligné le fait

[2] Nous définissons un cophasage comme étant *temps-réel* si la fréquence de correction est supérieure au Hz.
[3] Par définition, les estimateurs FUSCHIA sont fondés sur des méthodes de reconstruction analytiques.
[4] Se référer à l'index des notations page 1 pour la nomenclature des algorithmes.

qu'il était nécessaire d'introduire des *a priori* sur les grandeurs recherchées, par exemple en essayant d'ajuster des modèles paramétriques sur celles-ci, afin de pouvoir estimer correctement les inconnues objet et phase. Dans ce cas, le critère d'estimation correspondant s'exprime dans le plan de Fourier comme [Blanc (2002)] :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{o}) = N_{\text{pix}} \ln \sigma^2 + \sum_{\nu=1}^{N_f} \sum_{d=1}^{N_d} \frac{1}{2\sigma^2} \left| \widetilde{i}_d(\nu) - \widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\nu)\, \widetilde{o}(\nu) \right|^2 + \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{|\widetilde{o}(\nu) - \widetilde{o}_m(\nu)|^2}{2\mathfrak{S}_o(\nu)} + \mathrm{R}(\boldsymbol{a}) \quad (2.1)$$

$\boldsymbol{a}$ étant le vecteur des aberrations a_{kn} que l'on souhaite retrouver, de taille $N_z N_T \times 1$ (N_z modes sur N_T sous-pupilles), N_{pix} le nombre de pixels dans l'image, N_d le nombre de plans de diversité, N_f les fréquences sur lesquelles est défini le critère et $\mathrm{R}(\boldsymbol{a})$ le terme de régularisation sur la phase. Nous rappelons que $\boldsymbol{o_m}$ représente l'objet moyen et $\mathfrak{S}_o$ la densité spectrale de puissance associée à l'objet observé ; l'écart-type du bruit σ est supposé le même dans les N_d plans.

Une façon de limiter l'espace des inconnues $\boldsymbol{a}$, et donc de régulariser la phase, consiste à effectuer la reconstruction sur un nombre limité de polynômes de Zernike (ou de toute autre décomposition modale). En outre, il a été mis en évidence [Blanc (2002)] que les hyperparamètres optimaux vis-à-vis des aberrations, c.-à.-d. ceux qui donnent une estimée de la phase la plus proche de la phase vraie, ne sont pas en adéquation avec ceux liés à l'objet. Cette constatation a permis de démontrer qu'il était nécessaire de sous-régulariser l'objet pour estimer correctement les aberrations à fort flux.

Comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe 1.3.2.2 page 35, l'annulation de la dérivée partielle du critère par rapport à $\boldsymbol{o}$ fournit une expression analytique de l'objet à aberrations fixées, pouvant s'exprimer dans le plan de Fourier sous la forme d'un filtre de Wiener-Helstrom multitrame [Helstrom (1967)]

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a},\nu) = \frac{\left[\sum_{d=1}^{N_d} \widetilde{i}_d(\nu)\widetilde{h}_d^*(\boldsymbol{a},\nu)\right] + \frac{\sigma^2 \widetilde{o}_m(\nu)}{\mathfrak{S}_o(\nu)}}{\left[\sum_{d=1}^{N_d} \left|\widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2\right] + \frac{\sigma^2}{\mathfrak{S}_o(\nu)}} \quad (2.2)$$

$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a})$ est alors optimal au sens du maximum *a posteriori* à phase fixée.

Puisque nous souhaitons retrouver en priorité la phase, nous n'introduisons donc aucune contrainte sur l'objet. Dans ce cas, nous utiliserons l'expression analytique de $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a})$ définie Eq. (2.2) à régularisation quasi-nulle, donc pour un objet moyen $\widetilde{\boldsymbol{o}}_{\boldsymbol{m}} = 0$ et pour un rapport $\sigma^2/\mathfrak{S}_o$ proche de zéro. En pratique, ce rapport ne sera pas exactement égal à zéro mais sera fixé à une constante $\epsilon = 10^{-6}$ afin que l'expression de l'objet $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a})$ ne diverge pas à haute fréquence. Nous pouvons ainsi réinjecter l'estimée $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a})$ dans l'expression du critère Eq. (2.1) ; en considérant $N_d = 2$ plans, nous obtenons :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{\left|\widetilde{i}_2(\nu)\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2}{\left|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \epsilon} + \text{Cste} \quad (2.3)$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ est généralement minimisé itérativement, par exemple par une méthode de type gradient conjugué. Bien que ce critère soit de type myope donc susceptible de présenter des minima locaux, des travaux récents ont montré, en réinterprétant ce critère comme étant à minimum de contraste, qu'il avait de bonnes propriétés statistiques [Idier *et al.* (2005)]. Cependant, la minimisation de l'estimateur $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{a})$ n'est pas simple car fortement non linéaire en $\boldsymbol{a}$. Or, sous l'hypothèse des faibles phases aberrantes, il devient possible d'exprimer ce critère plus simplement en fonction des aberrations :

– en effet, comme souligné à la sous-section 1.2.5 page 25, l'application d'un piston sur une sous-pupille n'a pas d'effet sur le module de la réponse impulsionnelle et l'effet d'un faible basculement reste négligeable au premier ordre en module ; nous pouvons donc approximer le dénominateur de l'Eq. (2.3) par sa valeur à phase aberrante nulle. Ce dernier peut alors être vu comme un terme de pondération ;
– de plus, il est possible de linéariser dans chaque plan l'expression de la fonction de transfert $\widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\nu)$ et de l'exprimer au voisinage de la phase de diversité de manière affine en fonction des aberrations :

$$\widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\nu) \simeq \boldsymbol{\alpha}_d^t(\nu)\,\boldsymbol{a} + \beta_d(\nu) \tag{2.4}$$

où ^{t} désigne l'opérateur transposé ; bien entendu, le produit $\boldsymbol{\alpha}_d^t(\nu)\,\boldsymbol{a}$ est un produit scalaire. $\boldsymbol{\alpha}_d^t$ est donc une matrice de taille $N_f \times N_z N_T$; $\widetilde{\boldsymbol{h}}_d$, $\widetilde{\boldsymbol{i}}_d$ et $\boldsymbol{\beta}_d$ sont quant à eux des vecteurs de taille $N_f \times 1$. Les expressions de $\boldsymbol{\alpha}_d$ et de $\boldsymbol{\beta}_d$ seront détaillées ultérieurement en section 2.3.

Au vu des deux simplifications évoquées ci-dessus, nous obtenons une nouvelle expression du critère qui est quadratique en $\boldsymbol{a}$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{\left|\widetilde{i}_2(\nu)[\boldsymbol{\alpha}_1^t(\nu)\boldsymbol{a}+\beta_1(\nu)] - \widetilde{i}_1(\nu)[\boldsymbol{\alpha}_2^t(\nu)\boldsymbol{a}+\beta_2(\nu)]\right|^2}{\left|\widetilde{h}_1(0,\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(0,\nu)\right|^2 + \epsilon} + \text{Cste} \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{N_f} \left|\boldsymbol{A}(\nu)\boldsymbol{a} - B(\nu)\right|^2 + \text{Cste} \tag{2.6}$$

Avec :

$$\boldsymbol{A}(\nu) = \frac{\widetilde{i}_2(\nu)\boldsymbol{\alpha}_1^t(\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\boldsymbol{\alpha}_2^t(\nu)}{\sqrt{\left|\widetilde{h}_1(0,\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(0,\nu)\right|^2 + \epsilon}} \qquad B(\nu) = \frac{-\widetilde{i}_2(\nu)\beta_1(\nu) + \widetilde{i}_1(\nu)\beta_2(\nu)}{\sqrt{\left|\widetilde{h}_1(0,\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(0,\nu)\right|^2 + \epsilon}} \tag{2.7}$$

$\boldsymbol{A}(\nu)$ est un vecteur de taille $1 \times N_z N_T$ défini pour chaque fréquence ν. L'ensemble de ces vecteurs, concaténés dans la matrice $\boldsymbol{A}$ de taille $N_f \times N_z N_T$, représente la partie du critère dépendant explicitement des aberrations recherchées. $B(\nu)$ est un scalaire et $\boldsymbol{B}$ un vecteur de taille $N_f \times 1$ représentant l'expression du critère à phase incidente nulle. Comme le terme $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}) = ||\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{B}||^2/(2\sigma^2)$ est quadratique (donc convexe), il ne présente pas de minima locaux et la solution en $\boldsymbol{a}$ est unique. Notons également que les expressions du critère données par les Eq. (2.1) et (2.5) sont des formes valables dans un cas général ; la linéarisation de $\widetilde{\boldsymbol{h}}_d$ comme effectuée sous l'hypothèse des faibles phases incidentes peut être utilisée non seulement en diversité de phase sur objet quelconque, mais aussi dans un cadre plus restreint ; pour une utilisation de type *phase retrieval*, la minimisation de l'erreur quadratique sur les données se ramène, comme nous le verrons au chapitre 3 suivant, à une forme similaire pour un seul plan de diversité et pour la donnée de l'image focale d'un point source.

2.2.2 Estimation des aberrations

2.2.2.1 Minimisation du critère

En utilisant l'expression analytique de l'objet et en linéarisant la fonction de transfert dans chaque plan de diversité, nous avons pu nous ramener, grâce aux Eq. (2.5-2.7), à un critère qui est quadratique

en $\boldsymbol{a}$. L'annulation du gradient du critère nous permet alors de retrouver directement les aberrations recherchées sans avoir à recourir à un algorithme de minimisation :

$$\widehat{\boldsymbol{a}} = \left[\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})\right]^\dagger \left[\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{B})\right] \tag{2.8}$$

où $\Re$ désigne l'opérateur partie réelle, ^{H} l'opérateur hermitien et † l'inverse généralisé d'un bloc matriciel.

L'utilisation de ce nouvel estimateur permet de réduire le coût de calcul de façon considérable. En effet, nous avons vu que dans le cas itératif, une dizaine d'itérations sont nécessaires en pratique. Or, avec notre algorithme analytique baptisé FUSCHIA_2, le temps de calcul se résume seulement au temps nécessaire pour calculer les TF des $N_d = 2$ images de diversité ; de fait, l'inversion de la matrice $\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$ n'est pas dimensionnante puisque carrée de taille $N_zN_T \times N_zN_T$: pour la recherche des pistons et basculements d'un instrument à six sous-pupilles, $N_zN_T = 18$, ce qui est bien inférieur au nombre de fréquences sur lesquelles est défini le critère.

2.2.2.2 Inversion matricielle et filtrage des modes globaux

Regardons maintenant de plus près l'inversion de la matrice $\boldsymbol{T} = \Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$. Cette opération peut être effectuée en décomposant la dite matrice, de taille $N_zN_T \times N_zN_T$, en valeurs singulières sous la forme :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}^t \tag{2.9}$$

$\boldsymbol{X}$, qui est diagonale, contient les valeurs singulières $\{\xi_i\}_{i=1\ldots N_zN_T}$ de $\boldsymbol{T}$; $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ contiennent un ensemble de vecteurs de base orthonormés (appelés aussi vecteurs singuliers).

Etant donné que la matrice $\boldsymbol{T}$ se révèle être une matrice hermitienne[5] semi-définie positive, c.-à.-d. pour laquelle $\xi_i \in \mathbb{R}^+$, alors les valeurs singulières et vecteurs singuliers correspondent respectivement aux valeurs propres et vecteurs propres de $\boldsymbol{T}$. $\boldsymbol{U}$ est donc la matrice des modes propres de $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^t$ et $\boldsymbol{W}^t$ sa transposée, sachant que par définition un *mode* est une combinaison de pistons et basculements locaux appliqués sur les sous-pupilles. Toutefois, certains modes, en particulier les modes globaux (que nous avons illustrés Tab. 2.1 à phase incidente nulle), ne présentent aucun intérêt :

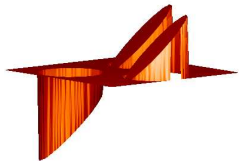
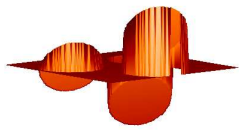
- comme souligné en sous-section 1.2.4 page 24, le mode piston global ne modifie en aucune manière les images. N'ayant pas de sens physique, il est inutile de le rechercher ;
- les deux basculements globaux n'ont que peu de sens sur objet très étendu.

Or, la décomposition en valeurs propres Eq. (2.9) est intéressante car elle permet d'identifier ces trois modes globaux : en effet, un mode qui n'a aucun effet sur la réponse impulsionnelle est associé à une valeur propre nulle. Lorsque nous réalisons l'inversion de la matrice $\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$, il est essentiel de filtrer ces modes particuliers, tout d'abord parce qu'ils ne présentent pas d'intérêt pour la reconstruction de phase, mais aussi parce que leur inversion serait problématique. En effet, le calcul de la matrice inverse nous donne :

$$[\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})]^\dagger = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^\dagger\boldsymbol{U}^t \tag{2.10}$$

Comme $\boldsymbol{X}$ est diagonale, son inverse est égale à la matrice $\boldsymbol{X}^\dagger$ de valeurs propres $\boldsymbol{X}^\dagger_{ii} = 1/\xi_i$. Mais, comme souligné précédemment, nous avons trois modes globaux, impliquant en théorie $\xi_i = 0$. Par conséquent, nous imposerons par la suite les valeurs $1/\xi_i$ correspondantes à zéro. En pratique, cette mise à zéro sera effectuée pour les trois valeurs singulières les plus faibles.

[5] Une matrice hermitienne est une matrice carrée dont les éléments vérifient $c_{ii'} = c^*_{i'i}$. En particulier, une matrice à éléments réels est hermitienne à la condition *sine qua non* d'être symétrique.

Mode global	Piston	Basculement en x	Basculement en y
Illustration			

Tab. 2.1 – Illustration des modes piston et basculements globaux obtenus à phase incidente nulle.

2.3 Linéarisation de la Fonction de Transfert Optique en plan extra-focal

Nous avons vu à la section précédente que pour obtenir un critère d'estimation qui soit quadratique, il fallait exprimer dans chaque plan de diversité la fonction de transfert optique $\widetilde{\boldsymbol{h}}_d$ comme étant affine en fonction des aberrations. Dans cette section, nous détaillons les différentes étapes qui nous ont permis d'obtenir une expression simplifiée de la FTO ; nous montrons également que différentes linéarisations sont possibles selon le type d'aberrations recherchées.

Nous soulignons que les différentes linéarisations de la FTO effectuées en plan de diversité ainsi que la restauration par une méthode purement analytique de la phase aberrante étant des procédés novateurs, une demande de brevet a été déposée [Cassaing *et al.* (2007)].

2.3.1 Expression générale de la Fonction de Transfert Optique

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous placer dans un système de coordonnées tel qu'à chaque fréquence radiale $\boldsymbol{u}$ l'autocorrélation de la pupille s'exprime dans les mêmes coordonnées que la transformée de Fourier de l'image.

2.3.1.1 L'instrument

Nous avons montré au paragraphe 1.3.2.1 page 31 et dans l'annexe B page 189 que pour lever l'ambiguïté de signe due à l'utilisation d'une configuration pupillaire centrosymétrique, la phase de diversité devait au moins inclure un mode global pair. Comme la défocalisation est le mode pair le plus simple à réaliser optiquement, et *de facto* le plus utilisé en pratique, nous choisissons comme phase de diversité des défocalisations globales pures. Avec une diversité paire, n'importe quelle configuration pupillaire (voir annexe B page 192 pour plus de détails) peut *a priori* être utilisée pour le calcul qui va suivre.

Dans cette section, nous allons considérer un instrument à synthèse d'ouverture optique composé de N_T sous-pupilles de rayon $\mathcal{R}_n$; par simplicité d'écriture, nous supposerons que le rayon des sous-pupilles est unitaire. Nous considérons une faible phase incidente $\boldsymbol{\phi}_a$ sur le senseur et nous nous plaçons dans un plan de diversité introduisant une phase $\boldsymbol{\phi}_d$. Dans ce plan, le terme de phase sur la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille s'écrit :

$$\boldsymbol{\psi}_{dn} = \boldsymbol{\phi}_{dn} + \boldsymbol{\phi}_{an} \tag{2.11}$$

Par la suite, $\boldsymbol{p}_{dn}$ désignera la transmission complexe associée à la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité.

La phase $\boldsymbol{\psi}_{dn}$ peut être décomposée dans n'importe quelle base de modes spécifique en fonction de la forme des sous-pupilles (hexagonale, annulaire, etc.) ; Comme nous considérons ici des sous-pupilles de forme circulaire, nous privilégions la base des polynômes de Zernike $\{\boldsymbol{Z}_k\}_{k=1}^{+\infty}$. Les phases $\boldsymbol{\phi}_{dn}$ et $\boldsymbol{\phi}_{an}$ sont alors modélisées par :

$$\phi_{dn}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=1}^{k_{\text{max}}} d_{kn} Z_k(\boldsymbol{u}/\mathcal{R}_n) \qquad \phi_{an}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k'=1}^{k'_{\text{max}}} a_{k'n} Z_{k'}(\boldsymbol{u}/\mathcal{R}_n) \tag{2.12}$$

où d_{kn} et $a_{k'n}$ sont les amplitudes RMS du $k^{\text{ième}}$ et du k' ième mode induits respectivement par $\boldsymbol{\phi}_d$ et $\boldsymbol{\phi}_a$ sur la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille. Comme nous nous intéressons principalement à une problématique de cophasage, donc aux erreurs d'alignement entre les sous-pupilles, nous considérons que la phase aberrante ne génère que des pistons ($k = 1$) et des basculements ($k = 2; 3$) différentiels. De fait, nous prendrons par la suite $k'_{\text{max}} = 3$; la diversité étant une défocalisation, $k_{\text{max}} = 4$.

2.3.1.2 Décomposition de la fonction de transfert

La fonction de transfert optique $\boldsymbol{F}_d$ obtenue au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité est déterminée par l'autocorrélation de la pupille. Cette autocorrélation fait intervenir une intégrale sur la zone commune entre la pupille n placée en $\boldsymbol{u_n}$ et la pupille n' placée en $\boldsymbol{u_{n'}}$ décalée de $\boldsymbol{b}$:

$$F_d(\boldsymbol{b}) = \frac{p_d \otimes p_d\,(\boldsymbol{b})}{p_d \otimes p_d\,(\boldsymbol{0})} = \frac{1}{N_T S_\circ(\boldsymbol{b})} \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} F_{dnn'}(\boldsymbol{b}) \star \delta_{\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u_{n'}}} \tag{2.13}$$

$$\text{sachant que} \quad F_{dnn'}(\boldsymbol{b}) = \Big(p_{dn} \otimes p_{dn'}\Big)(\boldsymbol{b}) \text{ comme précisé en sous-section 1.2.2 page 20} \tag{2.14}$$

et où $\boldsymbol{S}_\circ = \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi}$ est[6] la fonction "chapeau chinois" dont le support est de largeur 4 et de hauteur π ; toutefois, nous normalisons cette dernière à 1. La fonction de transfert se présente sous la forme d'un pic central (résultant de la somme des autocorrélations des sous-pupilles) entouré de $N_T(N_T - 1)$ pics satellites provenant de l'intercorrélation entre deux sous-pupilles différentes. Dans la suite du paragraphe, nous allons nous attacher à analyser comment se décompose l'expression de chaque pic $\boldsymbol{F}_{dnn'}$ de la FTO obtenu au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité.

Pour cela, définissons d'abord la moyenne décalée entre deux sous-pupilles d'une fonction f par :

$$\langle f \rangle_{S_{\emptyset \boldsymbol{b}}} = \frac{1}{S_{\emptyset \boldsymbol{b}}} \iint_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2} \Pi(\boldsymbol{u}) \Pi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}) f(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{u} \tag{2.15}$$

où $S_{\emptyset \boldsymbol{b}}$ est la surface de recouvrement entre une ouverture circulaire et cette même ouverture translatée d'un vecteur $\boldsymbol{b}$ comme représentée Fig. 2.1 :

$$S_{\emptyset \boldsymbol{b}} = \Big(\Pi \otimes \Pi\Big)(\boldsymbol{b}) = \iint_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2} \Pi(\boldsymbol{u}) \Pi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b})\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{u} \tag{2.16}$$

[6] Nous rappelons que $\boldsymbol{\Pi}$ désigne ici la fonction disque unitaire.

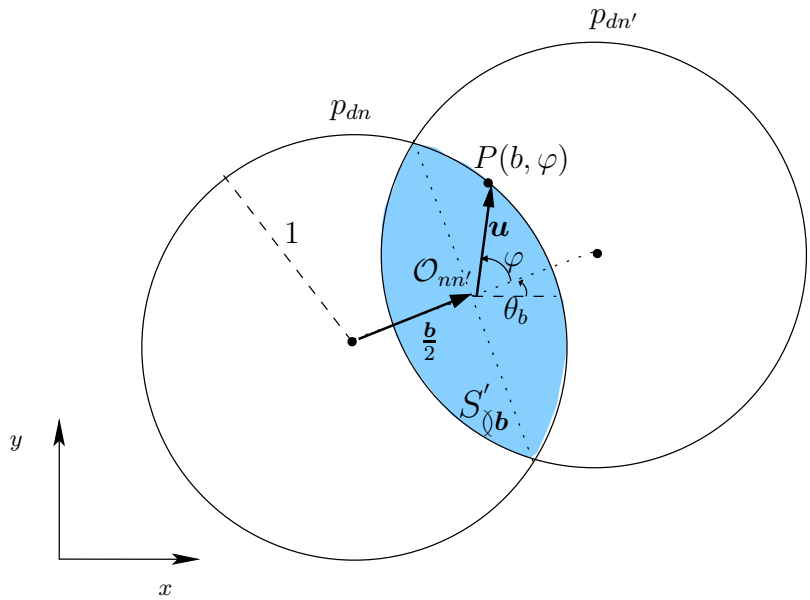


Fig. 2.1 – Illustration de la zone de recouvrement entre deux sous-pupilles.

Avec ces notations, l'intercorrélation nn' peut s'exprimer dans la zone de recouvrement sous la forme :

$$F_{dnn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Big\langle \exp j(\boldsymbol{\phi}_{an} - \boldsymbol{\phi}_{an'} \star \delta_{\boldsymbol{b}}) \, \exp j(\boldsymbol{\phi}_{dn} - \boldsymbol{\phi}_{dn'} \star \delta_{\boldsymbol{b}}) \Big\rangle_{S_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \tag{2.17}$$

$$\triangleq \mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) \, \mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{2.18}$$

avec :

$$\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) = \Big\langle \exp j(\boldsymbol{\phi}_{dn} - \boldsymbol{\phi}_{dn'} * \delta_{\boldsymbol{b}}) \Big\rangle_{S_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \tag{2.19}$$

$$\mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{\Big\langle \exp j(\boldsymbol{\phi}_{an} - \boldsymbol{\phi}_{an'} * \delta_{\boldsymbol{b}}) \exp j(\boldsymbol{\phi}_{dn} - \boldsymbol{\phi}_{dn'} * \delta_{\boldsymbol{b}}) \Big\rangle_{S_{\emptyset\boldsymbol{b}}}}{\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b})} \tag{2.20}$$

Il apparaît que le pic $\boldsymbol{F}_{dnn'}$ résultant de l'intercorrélation de la pupille n avec la pupille n' peut s'écrire comme le produit de deux facteurs ; le premier, noté $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$, représente le pic d'intercorrélation non aberré (à phase incidente nulle) contenant seulement l'effet de la phase de diversité. Le deuxième, noté $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}$, peut être vu comme la moyenne des faibles aberrations sur un domaine non pas uniforme mais pondéré par un terme dépendant de la diversité. Nous verrons par la suite que le facteur $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ est du premier ordre en $\boldsymbol{a}$.

Au final, les fonctions $\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b})$ et $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ se révèlent relativement complexes à expliciter. Nous allons donc nous attacher au paragraphe suivant à les exprimer plus simplement grâce à l'utilisation d'une nouvelle base de modes.

2.3.1.3 Expression d'une nouvelle base de mode

Intéressons-nous au terme $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$. En décomposant la phase de l'intégrande (qui est exclusivement induite par la diversité) sur les modes de Zernike, nous avons :

$$\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) = \iint\limits_{\boldsymbol{u}\in S_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \left\{ \Pi(\boldsymbol{u})\Pi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}) \exp j\Big[\sum_{k=1}^{k_{\max}=4} d_{kn}Z_k(\boldsymbol{u}) - d_{kn'}Z_k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b})\Big] \right\} \mathrm{d}^2\boldsymbol{u} \tag{2.21}$$

En translatant la variable $\boldsymbol{u}$ de $-\boldsymbol{b}/2$, le nouveau domaine d'intégration $S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}$ se retrouve centré sur $\mathcal{O}_{nn'}$ comme illustré Fig. 2.1. Ce domaine est défini en coordonnées polaires pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et pour $0 \leq \rho \leq P(b,\varphi)$, avec :

$$P(b,\varphi) = -\frac{1}{2}b|\cos\varphi| + \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}\sin^2\varphi} \tag{2.22}$$

Or, en se plaçant au centre du domaine d'intercorrélation et en posant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{b}/2)$, nous obtenons :

$$\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) = \iint\limits_{\boldsymbol{v}\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \left\{ \Pi\Big(\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big)\Pi\Big(\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big) \exp j\Big\{ \sum_{k=1}^{k_{\max}=4} [d^+_{knn'}\mathcal{Z}^-_k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}) + d^-_{knn'}\mathcal{Z}^+_j(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})]\Big\} \right\} \mathrm{d}^2\boldsymbol{v} \tag{2.23}$$

Cette décomposition permet de faire intervenir, pour un pic d'intercorrélation nn' donné :

- les aberrations moyennes et différentielles entre les sous-pupilles, notées respectivement $d^+_{knn'}$ et $d^-_{knn'}$:

$$d^+_{knn'} = d_{kn} + d_{kn'} \qquad\qquad d^-_{knn'} = d_{kn} - d_{kn'} \tag{2.24}$$

  L'amplitude du pic d'intercorrélation est ainsi obtenue par combinaison de ces cœfficients $d^+_{knn'}$ et $d^-_{knn'}$;
- les pseudo-modes moyens et différentiels correspondants, $\mathcal{Z}^+_k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$ et $\mathcal{Z}^-_k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$, sont définis comme :

$$\mathcal{Z}^+_k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}\left[Z_k\Big(\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big) + Z_k\Big(\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big)\right] \tag{2.25}$$

$$\mathcal{Z}^-_k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}\left[Z_k\Big(\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big) - Z_k\Big(\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big)\right] \tag{2.26}$$

  $\mathcal{Z}^+_k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$ et $\mathcal{Z}^-_k(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$ sont explicités Tab. 2.2 (deuxième colonne) dans le cas général où $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, sachant que $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{v}$ s'expriment dans le repère (x,y) comme :

$$\boldsymbol{b} = [b_x\,;b_y] \qquad\qquad \boldsymbol{v} = [\rho\cos(\varphi+\theta_b)\,;\rho\sin(\varphi+\theta_b)] \tag{2.27}$$

  Pour chaque pic nn', l'intégration de ces pseudo-modes sur la zone de recouvrement $S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}$ définie pour un décalage fréquentiel $\boldsymbol{b}$ donné, suivie de la sommation sur tous les $\boldsymbol{b}$ possibles, permet d'obtenir une base $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$ de la phase et du module de la fonction de transfert.

Nous avons illustré Tab. 2.2 dans les deux colonnes de droite le résultat de l'intégration de chacun des pseudo-modes $\boldsymbol{\mathcal{Z}}^{\pm}_k$. Plusieurs remarques s'imposent alors :

– la première est que le résultat de l'intégration donne soit un terme de phase, soit un terme de module ;
– nous pouvons remarquer que les trois premiers modes de phase de la fonction de transfert sont égaux au modes de Zernike à une homothétie du support d'un facteur deux près ; par conséquent, ils sont orthogonaux entre eux. Cependant, ce n'est pas le cas pour la défocalisation, bien que le mode de phase correspondant soit très proche du mode de Zernike initial ;
– comme attendu, nous constatons qu'un piston n'a pas d'effet en module ;
– enfin, notons que le pic central de la FTO résultant de l'autocorrélation des sous-pupilles n'est jamais affecté par un mode $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k^+$, étant donné que dans ce cas $d_{knn'}^-$ est nul.

Par la suite, nous allons expliciter les termes $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}$ obtenus au paragraphe 2.3.1.2 dans la nouvelle base explicitée ci-dessus, à savoir la base des pseudo-modes des pics de la FTO. Ensuite, nous linéariserons chaque pic de la fonction de transfert, et plus particulièrement $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}$, afin d'obtenir une relation affine de la FTO par rapport aux aberrations recherchées.

2.3.2 Expression analytique

Lorsque l'opération de cophasage est effectuée en boucle fermée, les aberrations à mesurer doivent être faibles. Cassaing [Cassaing (1997)] et Baron [Baron (2005)] ont montré que dans ce cas, il était possible d'exprimer très simplement la fonction de transfert optique au plan focal (c.-à.-d. à phase de diversité nulle). Dans ce paragraphe, nous allons généraliser ce résultat en démontrant que l'expression de chaque pic de la FTO peut être linéarisée dans un plan défocalisé quelconque pour de faibles phases incidentes.

2.3.2.1 Contribution de la phase de diversité et de la phase incidente recherchée

Effet de la seule phase de diversité Nous avons vu au paragraphe précédent que l'expression du pic d'intercorrélation faisait intervenir les fonctions $d_{knn'}^+\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k^-$ et $d_{knn'}^-\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k^+$. Puisque nous considérons que les sous-pupilles sont de rayon identique, les défocalisations locales introduites par la phase de diversité sont également identiques (voir démonstration en Annexe A page 186). Dès lors, $d_{4nn'}^- = 0$ et $d_{4nn'}^-\boldsymbol{\mathcal{Z}}_4^+$ devient nul. Par conséquent, le terme en ρ^2 introduit par $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_4^+$ disparaît de l'expression du pic d'intercorrélation $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$ induit seulement par la diversité.

En appelant $\boldsymbol{d}_{nn'}$ le vecteur $\{d_{knn'}^{\pm}\}_{k=1,\dots,4}$, nous montrons dans l'annexe C page 196 que $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$ peut alors s'écrire exactement, et ce quelle que soit l'amplitude de la défocalisation de diversité, comme :

$$\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) = J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})\exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \quad \boldsymbol{J}\in\mathbb{R} \tag{2.28}$$

$$\text{avec :}\quad K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) = d_{1nn'}^- - d_{2nn'}^+ b_x - d_{3nn'}^+ b_y \tag{2.29}$$

où $\boldsymbol{J}$ est une fonction réelle explicitée dans l'annexe C page 197. $\boldsymbol{J}$ n'est autre que le module de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$; par conséquent, l'information de phase est entièrement contenue à l'ordre 1 dans le terme $\boldsymbol{K}$ défini Eq. (2.29). Comme attendu d'après le Tab. 2.2, les pistons et basculements locaux dûs à la décomposition de la défocalisation de diversité se traduisent respectivement par l'apparition de constantes et de plans de phase sur la Fonction de Transfert de Phase.

La fonction $\boldsymbol{J}$ peut être calculée numériquement nonobstant un temps de calcul important : en effet, pour chaque décalage $\boldsymbol{b}$ (donc en chaque point du pic d'intercorrélation nn'), $J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})$ est le résultat d'une intégration sur tout le domaine $S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}$. Comme $\boldsymbol{J}$ est le module du pic d'intercorrélation à phase incidente nulle, nous nous servirons en pratique du *modèle direct*, qui calcule l'intercorrélation

Pseudo-mode	Expression	Intégration	
		Module	*Phase*
$\mathcal{Z}_1^+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	1		
$\mathcal{Z}_1^-(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	0		
$\mathcal{Z}_2^+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	$2\rho\cos(\varphi+\theta_b)$		
$\mathcal{Z}_2^-(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	$-b_x$		
$\mathcal{Z}_3^+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	$2\rho\sin(\varphi+\theta_b)$		
$\mathcal{Z}_3^-(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	$-b_y$		
$\mathcal{Z}_4^+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}[4\rho^2+(b_x^2+b_y^2)-2]/2$		
$\mathcal{Z}_4^-(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$	$-2\sqrt{3}[b_x\rho\cos(\varphi+\theta_b)+b_y\rho\sin(\varphi+\theta_b)]$		

Tab. 2.2 – Pour les quatre premiers ordres, expression des pseudo-modes $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k^+$ et $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k^-$ (deuxième colonne) et illustration de la phase (troisième colonne) ainsi que du module (dernière colonne) des modes de la FTO obtenus par intégration des dits pseudo-modes.

par FFT (voir la sous-section 4.2.1 page 68 pour plus de détails sur ce modèle) pour estimer cette fonction de manière rapide.

Effet de la phase incidente Intéressons-nous maintenant au terme $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$ qui dépend de la phase incidente ainsi que de la phase de diversité. Comme pour les termes qui ont été définis Eq. (2.24), nous posons de manière similaire :

$$a^{+}_{knn'} = a_{kn} + a_{kn'} \qquad\qquad a^{-}_{knn'} = a_{kn} - a_{kn'} \tag{2.30}$$

Les calculs intermédiaires étant détaillés dans l'annexe C page 197, nous montrons que l'expression de $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$ est alors donnée par :

$$\mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})}\exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'})] \tag{2.31}$$

$$\text{avec} \quad K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'}) = a^{-}_{1nn'} - a^{+}_{2nn'}b_x - a^{+}_{3nn'}b_y \tag{2.32}$$

où $\boldsymbol{L}$, qui est explicitée dans l'annexe C page 198, est une fonction réelle dépendant de la diversité $d_{nn'}$ et des basculements recherchés. La contribution du piston est donc la même dans tous les plans de diversité, puisqu'il n'affecte pas le module de la fonction de transfert. Nous reviendrons sur les implications d'un tel résultat à la sous-section 2.3.3 suivante. Notons également que d'après l'Eq. (2.31), seul le module du terme $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$ dépend de la diversité ; la contribution des aberrations recherchées à la phase du pic d'intercorrélation nn' est donc la même dans tous les plans N_d. Si, à défocalisation nulle, la contribution de $\boldsymbol{\phi}_a$ au pic nn' est du premier ordre en phase mais seulement du deuxième ordre en module, ses contributions s'avèrent être du premier ordre dans les autres plans de diversité.

Notons que jusqu'à présent, les calculs effectués conduisent à des expressions générales qui sont exactes. Nous allons donc, dans le prochain paragraphe, nous placer dans le cadre des faibles aberrations afin de linéariser l'expression des pics d'intercorrélation de la fonction de transfert. Cette linéarisation concernera donc les termes $L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'})$ et $\exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'})]$.

2.3.2.2 Les différentes linéarisations possibles

Si la phase incidente est faible, il est possible de linéariser l'expression de $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$, et donc *a fortiori* celle du pic nn' de la fonction de transfert (qui rappelons-le est notée $\boldsymbol{F}_{dnn'}$). Nous allons donc chercher à exprimer $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$ en une fonction simple des aberrations recherchées. Selon le type d'aberration que l'on souhaite estimer, la linéarisation peut être effectuée de différentes manières :

Cas du piston seul Si seuls des pistons sont présentement recherchés, l'expression des pics de la fonction de transfert optique est exacte puisque dans ce cas, d'après l'annexe C pages 197-198 :

$$\frac{L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})} = 1 \quad \text{et} \quad K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'}) = a^{-}_{1nn'} \tag{2.33}$$

En revenant à l'Eq. (2.31), nous en déduisons $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$:

$$\mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \exp(ja^{-}_{1nn'}) \tag{2.34}$$

Rappelons que, d'après les Eq. (2.13) et (2.18), l'expression générale de la FTO $\boldsymbol{F}_d$ en plan défocalisé est donnée par :

$$\widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = F_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{2.35}$$

$$= \frac{1}{N_T S_\circ(\boldsymbol{b})} \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} \mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) \mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \star \delta_{\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{u_{n'}}} \tag{2.36}$$

Nous obtenons donc :

$$F_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\alpha}_d^t(\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{a} \tag{2.37}$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{\alpha}_d^t(\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \frac{1}{N_T S_\circ(\boldsymbol{b})} \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} \Big\{ J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \exp[ja^-_{1nn'}] \star \delta_{\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{u_{n'}}} \Big\} \tag{2.38}$$

Cas du piston et des basculements Si l'on recherche les pistons ainsi que les basculements (ou tout ordre supérieur), alors nous pouvons exprimer chaque pic de la fonction de transfert de manière affine en fonction de $\boldsymbol{a}$, ce qui revient à linéariser les fonctions $\exp(j\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{L}$:

$$\frac{L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})} \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'})] \simeq 1 + jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'}) + \frac{M(a^-_{2nn'}\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})} + \frac{N(a^-_{3nn'}\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})} \tag{2.39}$$

La forme détaillée des fonctions $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ ainsi que les calculs intermédiaires permettant d'obtenir ces expressions sont présentés dans l'annexe C page 199. Soulignons tout de même que ces deux termes sont réels puisque $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}$ et que les fonctions $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont toutes trois affines en $\boldsymbol{a}$.

L'expression de la FTO développée au premier ordre au voisinage des aberrations de diversité s'exprime alors comme :

$$F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \simeq \boldsymbol{\alpha}_d^t(\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{a} + \beta_d(\boldsymbol{b}) \tag{2.40}$$

Avec :

$$\boldsymbol{\alpha}_d^t(\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{a} = \frac{1}{N_T S_\circ(\boldsymbol{b})} \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \Big[jJ(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'}) + M(a^-_{2nn'}\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) + N(a^-_{3nn'}\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) \Big] \star \delta_{\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{u_{n'}}} \tag{2.41}$$

$$\beta_d(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{N_T S_\circ(\boldsymbol{b})} \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \star \delta_{\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{u_{n'}}} \tag{2.42}$$

L'intérêt d'écrire la fonction de transfert sous cette forme réside dans sa dépendance affine en fonction de $\boldsymbol{a}$: en effet, cette formulation permet d'exprimer le critère de minimisation comme étant quadratique, et par conséquent de résoudre la dépendance en $\boldsymbol{a}$ de manière simple, comme démontré en section 2.2.

Dans la suite du manuscrit, nous nous placerons toujours dans le cas où pistons et basculements sont recherchés ; nous considérerons donc l'expression linéarisée définie Eq. (2.40). Toutefois, soulignons que l'obtention des matrices $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ s'est avérée être coûteuse en temps de calcul. Or, sachant qu'au voisinage de zéro, nous avons :

$$F_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \simeq \Big(\frac{\partial F_d(0,\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{a}} \Big) \boldsymbol{a} + F_d(0,\boldsymbol{b}) + \sigma(\boldsymbol{a}^2) \tag{2.43}$$

Nous pouvons identifier :

$$\boldsymbol{\alpha}_d^t(\boldsymbol{b}) = \frac{\partial F_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}=0) \qquad \text{et} \qquad \beta_d(\boldsymbol{b}) = F_d(0,\boldsymbol{b}) \tag{2.44}$$

Nous pourrions donc nous servir directement de l'expression des gradients. En pratique, nous utiliserons le modèle direct pour obtenir les termes $\boldsymbol{\alpha}_d$ et $\boldsymbol{\beta}_d$ de manière rapide.

Afin de vérifier la validité de l'Eq. (2.40), nous allons comparer les deux types de fonction de transfert (exact et linéarisé) obtenus par le modèle direct pour une configuration à trois sous-pupilles. A cet égard, nous nous plaçons dans un plan défocalisé de 1 radian et appliquons un jeu aléatoire de faibles pistons et basculements (listé Tab. 2.3) sur l'ensemble de la configuration, de sorte que l'amplitude absolue totale soit de l'ordre de $\lambda/12$ RMS. Chaque FTO est ensuite calculée par appel au modèle direct puis normalisée à 1 en module et en phase.

	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	$-0{,}084$	$-0{,}017$	$0{,}019$
pupille 2	$0{,}161$	$-0{,}018$	$0{,}065$
pupille 3	$-0{,}055$	$0{,}019$	$0{,}092$

Tab. 2.3 – Jeu aléatoire d'aberrations (en rad RMS) introduit sur une configuration à trois sous-pupilles.

Nous avons représenté Fig. 2.2 les profils d'erreur obtenus entre la FTO exacte (illustrée à gauche) et la FTO linéarisée. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que la différence entre les deux FTM (au centre) est faible, puisque inférieure à 2.10^{-2}. Il en va de même en phase où, mis à part pour quelques pixels des zones de recouvrement, la différence est également inférieure à 2.10^{-2} (soit $\lambda/600$ RMS). Nous pouvons donc en conclure que la concordance entre les deux modèles est tout à fait satisfaisante pour de faibles pistons et basculements.

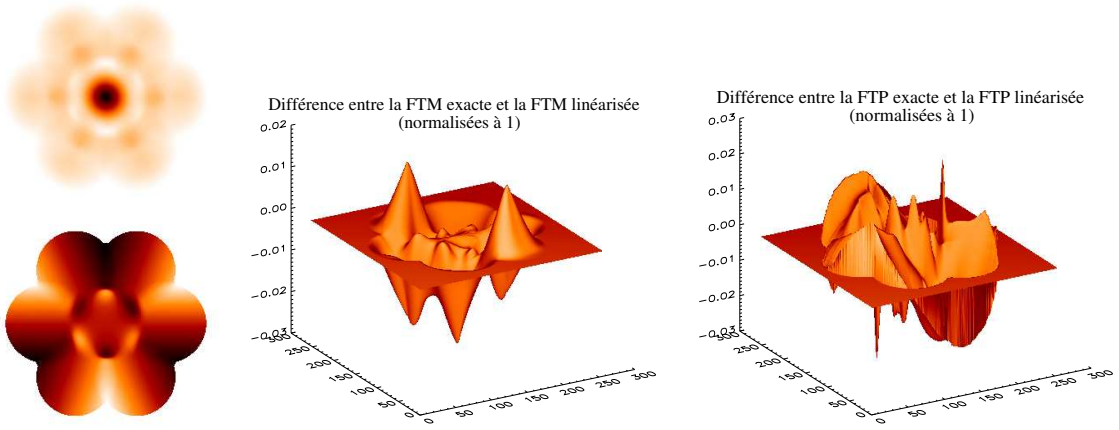


Fig. 2.2 – Comparaison des fonctions de transfert obtenues en plan extra-focal en présence d'une faible phase aberrante : FTO vraie (à gauche, le module étant en haut et la phase en bas), puis différence entre les FTM (au centre) et FTP (à droite) normalisées à 1.

2.3.3 Non-unicité de la solution pour les configurations diluées

A partir de l'expression linéarisée des pics de la fonction de transfert obtenue en plan extra-focal, nous pouvons retrouver de manière analytique la faible phase incidente selon la méthode décrite section 2.2. Rappelons néanmoins que les modes globaux ne peuvent pas être reconstruits, comme stipulé au paragraphe 2.2.2.2. De plus, il n'est pas toujours possible de retrouver le mode piston : en effet, nous avons souligné qu'un piston local n'affectait en rien le module de la fonction de transfert ; ainsi, quelle que soit l'amplitude des aberrations recherchées, nous pouvons rigoureusement écrire le pic d'intercorrélation $F_{dnn'}$ d'après les Eq. (2.28) et (2.31) comme :

$$F_{dnn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'}) \exp\left[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) + K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'})\right] \quad \boldsymbol{L} \text{ ne dépendant pas des pistons} \tag{2.45}$$

$$= \exp(ja^{-}_{1nn'})\Big\{L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'}) \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \exp[j(-a^{+}_{2nn'}b_x - a^{+}_{3nn'}b_y)]\Big\} \tag{2.46}$$

Dans le cas d'une configuration diluée[7], nous obtenons, pour l'expression de la FTO au $d^{\text{ième}}$ plan défocalisé :

$$F_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \Phi_{Z_1}\ F_{d\backslash Z_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{2.47}$$

Avec :

$$\Phi_{Z_1} = \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T} \exp(ja^{-}_{1nn'}) \tag{2.48}$$

$$F_{d\backslash Z_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{N_T S_\circ(\boldsymbol{b})} \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T} L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'}) \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \times \exp[j(-a^{+}_{2nn'}b_x - a^{+}_{3nn'}b_y)] \star \delta_{\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{u_{n'}}} \tag{2.49}$$

où $\boldsymbol{F}_{d\backslash Z_1}$ représente l'expression de la fonction de transfert hors contribution des pistons incidents. Le terme Φ_{Z_1}, qui *a contrario* dépend des seules aberrations de piston, est alors rigoureusement identique dans n'importe quel plan de diversité. Par conséquent, au moins deux couples $[\widehat{\boldsymbol{o}};\widehat{\boldsymbol{a}}]$ sont solutions du problème inverse :

- le couple conventionnel bien sûr, qui est composé de l'objet vrai et de la phase vraie :

$$\widetilde{i}_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \widetilde{o}(\boldsymbol{b})\ \left[\Phi_{Z_1}\ F_{d\backslash Z_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right] \tag{2.50}$$

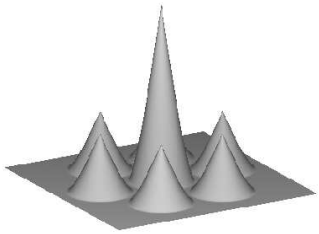
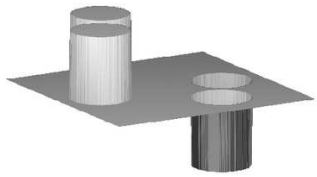
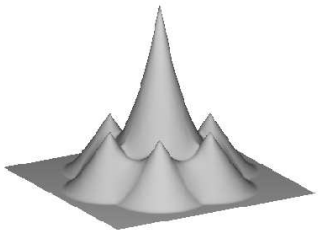
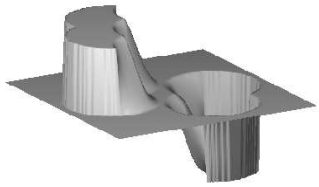
- la deuxième solution est quant à elle composée de l'objet sur lequel sont appliqués les pistons différentiels (ce qui équivaut à un objet aberré), et d'une phase qui, par conséquent, ne prend pas en compte ces aberrations :

$$\widetilde{i}_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \left[\Phi_{Z_1}\ \widetilde{o}(\boldsymbol{b})\right].\, F_{d\backslash Z_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{2.51}$$

[7] Nous rappelons que comme définie en sous-section 1.2.2 page 20, un configuration pupillaire est dite *diluée* s'il existe des fréquences non couvertes par l'instrument avant la fréquence de coupure. Dans le cas contraire, la pupille est dite *compacte*.

Comme ces deux solutions conduisent exactement aux mêmes images de diversité, et ce quel que soit le plan considéré, elles ne peuvent malheureusement pas être distinguées, rendant par la même occasion l'estimation de phase impossible. Soulignons que ce problème avait déjà été constaté avec les algorithmes classiques de type diversité de phase par Baron [Baron *et al.* (2002)].

Toutefois, les pistons différentiels peuvent être correctement estimés si la configuration pupillaire est compacte. Dans ce cas, les pics de la fonction de transfert se chevauchent, faisant ainsi apparaître de nouveaux termes de phase dans la zone de recouvrement, comme illustré Tab. 2.4. Nous avons représenté en haut l'effet d'un piston sur le module et la phase de la fonction de transfert pour une configuration diluée ; nous voyons que le pic central n'est pas modifié, tandis que pour chaque base concernée, les pics satellites sont tous deux affectés d'une marche de phase de signe opposé. Les deux illustrations du bas, qui présentent l'effet d'un piston sur une configuration compacte, démontrent clairement que dans ce cas, ce ne sont plus seulement des constantes de phase qui apparaissent ; en effet, la phase varie dans la zone de recouvrement, ce qui par conséquent rend possible l'estimation des aberrations. La restriction de l'utilisation à une configuration pupillaire compacte n'est cependant

	Module	Phase
Configuration diluée		
Configuration compacte		

Tab. 2.4 – Effet d'un piston sur le module (à gauche) et sur la phase (à droite) de la FTO pour une configuration pupillaire diluée, puis compacte.

pas une limitation en soi puisque l'observation sur objet étendu est essentiellement réalisée dans un but d'imagerie ; Or, comme une pupille d'imagerie doit idéalement permettre la couverture de toutes les fréquences jusqu'à sa fréquence de coupure, elle sera naturellement définie comme étant compacte.

2.4 Estimation de l'objet

Nous avons démontré dans les sections précédentes qu'il était possible d'estimer de manière simple et rapide les faibles phases incidentes. Cependant, c'est l'objet qui s'avère être la grandeur d'intérêt lorsque la diversité de phase est utilisée pour faire du traitement d'image *a posteriori*. Dans

cette sous-section, nous allons voir comment la restauration de la scène observée peut être effectuée rapidement et de manière optimale à partir des aberrations déterminées ultérieurement ainsi que grâce à l'estimation des hyperparamètres liés à l'objet.

2.4.1 Réglage des hyperparamètres objet

Nous avons souligné à la sous-section 2.2.1 que dans le cas ou l'on recherche en priorité la phase aberrante, il n'était pas nécessaire d'introduire d'*a priori* sur les données. Cependant, si la reconstruction de la scène observée est également souhaitée, il a été démontré que l'absence de régularisation [Blanc (2002)] pouvait fortement nuire à la qualité de la restauration objet.

Dans la formulation analytique de l'objet définie Eq. (2.2) à aberrations fixées, le terme $\sigma^2/\mathfrak{S}_o(\nu)$ est employé afin que cette expression et *a fortiori* celle du critère ne divergent pas à haute fréquence. Nous supposons ici que l'écart-type du bruit σ est constant ; pour la DSP de l'objet, nous choisissons le modèle paramétrique suivant [Conan *et al.* (1998); Blanc (2002)] :

$$\mathfrak{S}_o(\nu) = \frac{\kappa}{(\frac{\nu}{\nu_o})^{\mu} + 1} - |\widetilde{o}_m(\nu)|^2 \tag{2.52}$$

où κ est une constante donnée approximativement par le carré du nombre de photons contenus dans l'image, ν_o est l'inverse d'une longueur caractéristique de l'objet et μ caractérise la régularité de ce dernier. Quant à $\boldsymbol{o_m}$, il représente l'objet moyen ; en pratique, nous choisirons le plus souvent $\boldsymbol{o_m} = 0$. La Fig. 2.3 illustre ce modèle paramétrique : la photographie de gauche représente une scène terrestre urbaine ; le graphe de droite représente la moyenne radiale de la Densité Spectrale de Puissance vraie qui lui est associée et celle ajustée sur le modèle paramétrique.

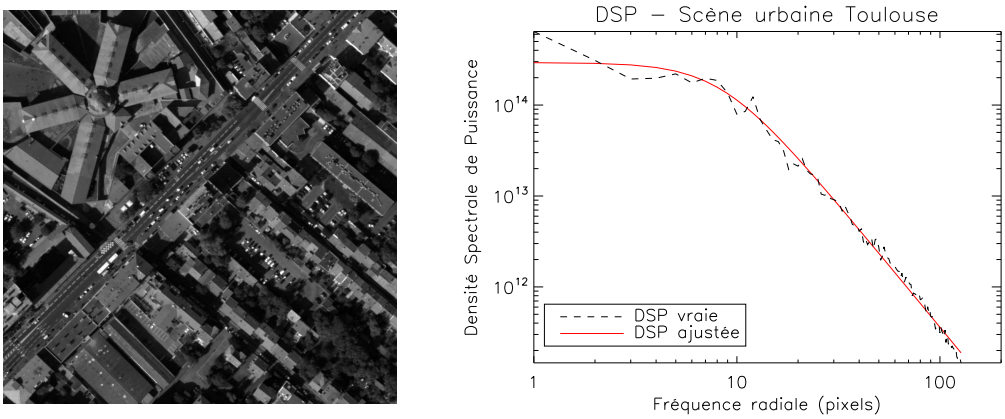


Fig. 2.3 – A gauche, scène urbaine ; à droite, la moyenne radiale de la Densité Spectrale de Puissance vraie associée (en pointillés) et celle ajustée (en trait plein) sur le modèle paramétrique.

De manière générale, le réglage des hyperparamètres peut être effectué automatiquement par maximum de vraisemblance :

- lorsque les aberrations sont connues [Gratadour (2005)] ;
- ou conjointement à l'évaluation de la phase incidente dans le cadre d'une estimation marginale [Blanc *et al.* (2003b)].

Il a été démontré que l'estimation de ces paramètres permettait de bien estimer l'objet observé pour une configuration monolithique dans des conditions de bruit faibles (inférieur à 10 %) et nonobstant

un objet très étendu [Blanc (2002)]. Notons toutefois que les hyperparamètres devront bien sûr être estimés à chaque fois que l'on change d'objet.

2.4.2 Estimation séquentielle mixte

Une fois que la faible phase incidente a été déterminée selon la méthode explicitée à la sous-section 2.2.2, les hyperparamètres liés à l'objet peuvent été ajustés au mieux par maximum de vraisemblance. L'estimation de $\widehat{\boldsymbol{o}}$ est alors effectuée en injectant le vecteur $\widehat{\boldsymbol{a}}$ dans l'Eq. (2.2), non plus pour $\sigma^2/\mathfrak{S}_o = \epsilon$, mais en utilisant les valeurs ajustées des hyperparamètres. Soulignons que les régularisations introduites sur l'objet sont naturellement de plus en plus faibles lorsque le flux augmente. Comme la solution de l'Eq. (2.2) est unique, $\widehat{\boldsymbol{o}}(\widehat{\boldsymbol{a}})$ détermine bel et bien l'objet recherché :

$$\widehat{\widetilde{o}}(\nu) = \sum_{\nu=1}^{N_f} \left\{ \sum_{d=1}^{N_d} \left[\widetilde{i}_d(\nu)\, \widetilde{h}_d^*(\widehat{\widetilde{\boldsymbol{a}}}, \nu) \right] \Big/ \sum_{d'=1}^{N_d} \left[\left| \widetilde{h}_{d'}(\widehat{\widetilde{\boldsymbol{a}}}, \nu) \right|^2 \right] + \frac{\sigma^2}{\mathfrak{S}_o(\nu)} \right\} \tag{2.53}$$

Ainsi, à partir de l'Eq. (2.53), nous obtenons $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}$ en une itération. De plus, en prenant directement en compte dans l'expression de l'objet l'effet des dégradations liées à la phase aberrante, nous sommes en mesure de reconstruire un objet qui est *a fortiori* de meilleure qualité que les images obtenues dans les différents plans de diversité, puisque $\widehat{\boldsymbol{o}}$ est déconvolué des aberrations. Les performances de restauration correspondantes seront étudiées en détail au chapitre 4 page 67 qui traite de la validation par simulation de l'algorithme analytique FUSCHIA_2 sur objet étendu.

2.5 Conclusion du chapitre

L'approche plan focal de type diversité de phase, utilisée afin de cophaser des instruments multipupilles observant une source étendue, présente l'avantage d'être simple à mettre en œuvre optiquement, ce qui est d'une importance cruciale pour tout instrument embarqué notamment dans le domaine spatial. Cependant, les méthodes d'estimation généralement associées sont itératives et requièrent des temps de calcul importants qui sont incompatibles avec les exigences temps-réel d'un système embarqué.

Nous avons proposé dans ce chapitre un nouvel estimateur analytique de type diversité de phase non itératif et donc potentiellement temps-réel. Pour cela, nous avons tout d'abord montré qu'en exprimant le critère à minimiser sous forme quadratique, il était possible d'obtenir une estimée simple de la phase recherchée. Contrairement aux méthodes précédemment développées, ce reconstructeur, baptisé FUSCHIA_2 puisqu'il est utilisé avec au moins deux plans de diversité, ne nécessite le calcul que de 2 FFT pour deux plans de diversité.

Cette estimation analytique utilise une approximation affine de la fonction de transfert optique. La linéarisation de la FTO en plan extra-focal a donc été effectuée, tout d'abord en considérant le cas des pistons seuls, puis en s'attachant à retrouver pistons et basculements différentiels. Les procédés qui permettent la détermination de manière analytique des faibles phases étant novateurs, une demande de brevet a été effectuée [Cassaing *et al.* (2007)]. Soulignons également que cette nouvelle méthode a été remarquée lors du 21ième *Colloque sur le Traitement du Signal et des Images* [Mocœur *et al.* (2007)] et qu'elle fait l'objet d'un article paru en cession spéciale dans la revue *Traitement du Signal* [Mocœur *et al.* (2009a)] ainsi que d'une lettre [Mocœur *et al.* (2009b)] soumise à *Optics Letters* (voir respectivement annexes H page 215 et I page 227).

Enfin, nous avons montré que l'estimateur FUSCHIA_2 permet non seulement d'estimer les faibles aberrations incidentes, mais aussi de restaurer l'objet de façon simple et rapide lorsque ce dernier se trouve être la grandeur d'intérêt. En effet, à partir des aberrations déterminées ultérieurement et grâce à l'ajustement des hyperparamètres objet par maximum de vraisemblance, il est possible de reconstruire une scène qui est *a fortiori* de meilleure qualité que les images obtenues dans les différents plans de diversité.

Après avoir développé dans ce chapitre un algorithme de type diversité de phase permettant l'estimation de la phase aberrante ainsi que de l'objet observé de manière rapide, nous allons nous intéresser, dans le prochain chapitre, au cas particulier de la restauration monoplan sur objet ponctuel.

Chapitre 3

Optimisation et développement d'algorithmes de cophasage rapides de type *phase retrieval* sur objet ponctuel

3.1 Position du problème

Nous avons vu au chapitre précédent que l'algorithme FUSCHIA_2 permet de restaurer de manière rapide la phase incidente ainsi que la scène étendue observée. Il pourrait donc à plus forte raison être utilisé dans le cas particulier d'une observation sur point source, à savoir tout objet dont le diamètre angulaire θ_o est inférieur à la résolution de l'instrument : $\theta_o \ll \lambda/\mathcal{B}$.

Mais si l'objet est connu, nous avons souligné au paragraphe 1.3.2.1 page 31 que la donnée d'une seule image, traditionnellement une image focale, pouvait être suffisante pour faire de la restauration de phase (méthode dite du *phase retrieval*). Cependant, les méthodes d'estimation associées sont également itératives et *a fortiori* coûteuses en temps de calcul.

De part le passé, plusieurs travaux ont été menés en plan focal afin d'obtenir un estimateur de phase analytique sur objet ponctuel dans le cadre des faibles aberrations. En décrivant séparément les contributions paires et impaires de la phase incidente, Gonsalves [Gonsalves (2001)] a réussi à obtenir en une itération une estimée de la partie impaire pour un télescope monolithique. Malheureusement, cette méthode, appliquée à une configuration centrosymétrique, ne permet pas de retrouver de façon certaine le signe de la partie paire. En ce qui concerne les instruments multipupilles, l'une des solutions, que nous avions évoquée au paragraphe 1.3.2.1 page 31, consiste à analyser au plan focal la Fonction de Transfert de Phase (FTP) linéarisée d'une configuration non centrosymétrique. Le reconstructeur associé, développé par Baron au cours de son doctorat [Baron (2005)] et baptisé FUSCHIA_0, est basé sur l'analyse des modes de la FTO par maximum de vraisemblance qui est exacte en piston, mais qui reste approchée en ce qui concerne les basculements. De plus, l'algorithme correspondant a été implémenté à l'origine pour des configurations pupillaires diluées et simplifiées, c.-à.-d. non redondantes, à coordonnées entières et prenant en compte peu de sous-pupilles.

L'objectif de ce chapitre est donc d'obtenir des algorithmes monoplans capables d'effectuer un cophasage sur objet ponctuel de manière rapide dans le cas des faibles phases incidentes, et ce quelle que soit la configuration pupillaire utilisée. Pour commencer, nous allons nous intéresser en section 3.2 à l'analyse des modes de la FTP. Après une brève présentation de l'estimateur FUSCHIA_0 déjà existant ainsi que de ses limitations, nous exposerons les principales améliorations que nous y

avons apportées. Ensuite, nous présenterons en section 3.3 le développement d'un nouvel estimateur plan focal reposant sur la linéarisation des pics de la FTO comme effectuée au chapitre 2 précédent. Nous verrons également comment cette nouvelle méthode, lorsque appliquée dans un plan défocalisé, permet de retrouver sans ambiguïté de signe la partie paire de la phase appliquée sur une configuration centrosymétrique.

3.2 Analyse des modes de la Fonction de Transfert de Phase

L'estimateur analytique FUSCHIA_0 existant, qui est fondé sur une approche de type maximum de vraisemblance, permet d'estimer les pistons[1] et basculements d'une configuration pupillaire diluée non centrosymétrique et dont les rayons des sous-pupilles sont identiques. Dans cette section, nous présentons la méthode proposée par Baron [Baron *et al.* (2008)] pour extraire les cœfficients a_{kn} à partir de la phase de la FTO, puis nous exposons comment nous avons amélioré cet algorithme afin de prendre en compte des configurations pupillaires compactes.

3.2.1 Présentation de l'estimateur analytique existant

Nous avons vu à la sous-section 1.2.5 page 25 que l'application d'un piston sur une sous-pupille n'affecte pas le module de la FTO, tandis qu'elle se traduit au niveau de la FTP par l'apparition d'une constante de phase sur les pics satellites des bases concernées. *A contrario*, un basculement influe à la fois sur le module et la phase de la fonction de transfert. Les pics satellites ainsi que le pic central sont alors affectés par des plans de phase.

Cependant, pour de faibles basculements, l'effet d'une aberration d'ordre k (pour $k \in [1, \ldots, 3]$) s'avère être du premier ordre sur la Fonction de Transfert de Phase, alors que la perte de module reste du second ordre. Il peut donc être intéressant de déterminer les aberrations recherchées en privilégiant la FTP. De plus, si les pics de la fonction de transfert ne se recouvrent pas, la phase du pic satellite engendré par l'intercorrélation des sous-pupilles n et n' dépend exclusivement des aberrations présentes sur ces deux sous-pupilles. Le cœfficient de phase correspondant $a^{\pm}_{knn'}$ associé au $k^{\text{ième}}$ mode est alors de la forme $a^{\pm}_{knn'} = a_{kn} \pm a_{kn'}$, comme explicité Eq. (2.30) page 50. Afin de démêler ces deux jeux d'aberrations a_{kn} et $a_{kn'}$ présents sur le pic nn', l'approche la plus naturelle consiste à déterminer quelle combinaison linéaire des $a^{\pm}_{knn'}$ peut nous permettre de les retrouver. Pour une configuration *diluée* composée de N_T sous-pupilles identiques, la restauration de phase peut alors être envisagée en trois étapes :

- calcul de la fonction de transfert à partir d'une image focale $\boldsymbol{i}_0$;
- extraction des cœfficients $a^{\pm}_{knn'}$ grâce au calcul du produit scalaire de la FTP (aux endroits où se trouvent les pics) par les modes $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{knn'}$ de la FTO ;
- combinaison de ces cœfficients et détermination de la phase incidente.

Nous avons choisi dans cette sous-section de ne présenter que l'expression finale des pistons et basculements. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à la deuxième partie de l'article "Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes" qui se trouve en annexe J page 231. Ainsi, d'après les Eq. (21-28) de l'article, le piston sur la sous-pupille n placée en $\boldsymbol{u}_n$ est

[1] Le *phase retrieval*, qui par définition s'utilise traditionnellement au plan focal sur objet ponctuel (donc connu), permet de retrouver les pistons différentiels même quand la configuration pupillaire est diluée, et ce contrairement à la méthode de la diversité de phase (qui elle fonctionne à objet inconnu).

déterminé par [Baron *et al.* (2008)] :

$$\widehat{a}_{1n} = \frac{1}{N_T}\big(\widehat{e_n^1} + \sum_{n'=1}^{N_T} a_{1n'}\big) \tag{3.1}$$

$$= \frac{1}{N_T} \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \mathrm{Arg}\Big[\iint_{\boldsymbol{u} \in S_\wedge} \widetilde{i}_0(\boldsymbol{u}) S_\circ(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'})\Big] \mathrm{d}^2\boldsymbol{u} \quad [\mathrm{mod}\ \ 2\pi] \tag{3.2}$$

$$\text{avec} \quad \widehat{e_n^k} = \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \widehat{a^{\pm}_{knn'}} \tag{3.3}$$

où Arg désigne la prise d'argument ; $\boldsymbol{S}_\circ$ désigne la fonction "chapeau chinois" et représente le module non aberré du pic nn' défini sur le domaine fréquentiel $S_\wedge$.

Les basculements vérifient quant à eux, d'après l'Eq. (34) :

$$\widehat{a}_{kn} = \frac{\widehat{e_n^k}}{N_T - 2} - \frac{1}{2(N_T-1)(N_T-2)} \sum_{n'=1}^{N_T} \widehat{e_{n'}^k} \tag{3.4}$$

L'analyse des modes de la FTP permet donc d'estimer les aberrations incidentes de manière simple. Cependant, nous allons voir à la sous-section suivante que cette méthode présente plusieurs limitations.

3.2.2 Limitations

L'estimateur analytique FUSCHIA_0 a ainsi été développé sur objet ponctuel dans le cadre des faibles basculements incidents ; comme cette méthode implique le non-recouvrement des pics de la FTO, elle est idéale pour un cophasage sur configuration diluée, configuration "généralement" choisie dans les cas où l'observation n'est pas limitée par le rapport signal-à-bruit. Si la configuration est compacte, les pics de la fonction de transfert se recouvrent comme illustré Fig. 3.1, mais pas entièrement ; il est donc en théorie tout de même possible d'effectuer l'estimation sur la zone où il y a *non-recouvrement*[2] (en couleur sur la Fig. 3.1). Cependant, les modes $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{knn'}$ de la FTO servant à l'extraction des cœfficients $a^{\pm}_{knn'}$ sont à l'origine calculés une fois pour toutes pour une forme de sous-pupille bien précise (circulaire, hexagonale, etc.) ; or, limités à la seule zone d'intérêt, ces modes ne sont plus orthogonaux, ce qui nécessite d'en reconstruire de nouveaux pour extraire correctement les $a^{\pm}_{knn'}$.

D'autres limitations sont quant à elles intrinsèquement liées à la méthode choisie :

- bien que l'analyse de la FTO s'avère être exacte en piston, nous nous privons, pour l'estimation des basculements, de l'information apportée par le module ;
- la phase du pic central n'est jamais prise en compte ;
- si, dans le cas d'une configuration faiblement compacte, le rejet des zones de recouvrement ne devrait pas être problématique (puisque dans ce cas, les zones de recouvrement se limitent aux endroits où la FTM est faible, et donc aux zones où le rapport signal-à-bruit est mauvais), il n'en est peut être pas de même à forte compacité car les cœfficients $a^{\pm}_{knn'}$ risquent d'être mal estimés.

[2] Les zones de recouvrement ne seront donc pas prises en compte pour l'estimation des aberrations.

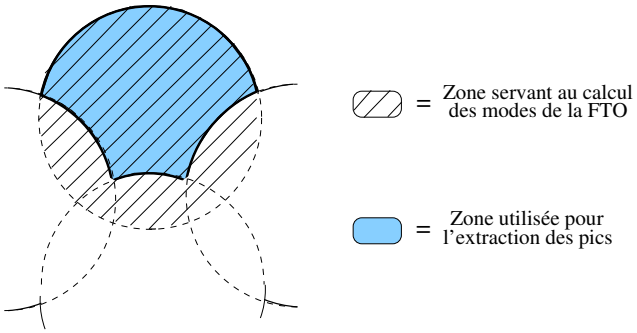


Fig. 3.1 – Pic de la FTO obtenu dans le cas d'une configuration compacte : les zones de recouvrement sont représentées en pointillés, tandis que le reste du pic est illustré sur fond coloré.

Enfin, rappelons que l'implantation pratique de cette méthode a été effectuée pour des configurations simplifiées à coordonnées entières.

3.2.3 Nouvelle implantation et adaptation aux configurations compactes

Afin d'utiliser l'algorithme FUSCHIA_0 existant avec des configurations plus réalistes, nous avons proposé plusieurs améliorations concernant notamment la gestion des coordonnées non entières, des rayons de sous-pupilles différents ou le recentrage du masque servant à appliquer les polynômes de Zernike par rapport au centre du pic d'intercorrélation. La principale modification concerne cependant la gestion du domaine d'estimation : en effet, il est important de conserver une base de décomposition qui soit orthogonale une fois les recouvrements enlevés. Pour cela, deux solutions sont envisageables ; pour chaque pic d'intercorrélation, nous pouvons :

1. réduire le domaine d'intégration au plus grand disque inscrit et ainsi retrouver l'orthogonalité des modes $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{knn'}$ sur ce nouveau support ;
2. conserver le domaine dans son intégralité et calculer une nouvelle base des modes $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{knn'}$ des pics de la FTO qui soit orthogonale à l'ancienne selon la méthode suivante :
   – tout d'abord, nous calculons la matrice des produits scalaires : $\boldsymbol{P}_{nn'} = \boldsymbol{\mathcal{Z}}^t_{nn'}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{nn'}$;
   – la nouvelle base de modes $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{knn'}$ que nous voulons déterminer est telle que : $\mathrm{Id} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}^t_{nn'}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{nn'}$. Nous en déduisons donc que $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{nn'} = \boldsymbol{\mathcal{Z}}_{nn'}\boldsymbol{P}^{\dagger t}_{nn'}$

Comme nous recherchons seulement les trois premiers modes, la donnée de quelques pixels du pic d'intercorrélation est en théorie suffisante pour estimer les pistons et les basculements. Nous avons donc choisi de privilégier la réduction du domaine d'intégration pour les configurations à forte compacité.

Les performances de l'algorithme ainsi amélioré et appelé FUSCHIA_0+ seront étudiées en détails dans le chapitre 5 page 105. Cependant, afin de statuer sur les optimisations proposées dans cette sous-section, nous choisissons d'illustrer le gain obtenu en comparant les performances de restauration en piston des deux algorithmes analytiques correspondants, FUSCHIA_0 et FUSCHIA_0+, en fonction de la dilution. Pour cela, nous appliquons un piston de $0{,}2$ radian sur l'une des sous-pupilles d'une configuration à trois télescopes. Les images du point source, de taille 64×64 pixels, sont simulées à fort flux (5.10^7 photo-électrons par image), et ce pour des dilutions[3] comprises entre $1{,}1$ (là où

[3]La dilution est ici définie comme étant le rapport de la plus petite base $\mathcal{B}$ sur le diamètre commun $\mathcal{D}$ des sous-pupilles.

les sous-pupilles se touchent presque) et 2,2. Le graphe Fig. 3.2 présente l'erreur totale de restauration du piston en radian RMS en fonction de la dilution, sachant que la statistique est effectuée pour des séries de cinquante images (les principales grandeurs statistiques sont explicitées annexe D page 201). Nous pouvons voir que le gain apporté par une meilleure gestion du domaine de recouvrement est important à forte compacité ; en effet, l'erreur d'estimation obtenue avec FUSCHIA_0+ est inférieure à 2 %, alors qu'elle peut atteindre jusqu'à 32 % de la valeur nominale avec l'estimateur FUSCHIA_0. Nous en déduisons donc que les améliorations proposées s'avèrent donc être primordiales lorsque la dilution est faible.

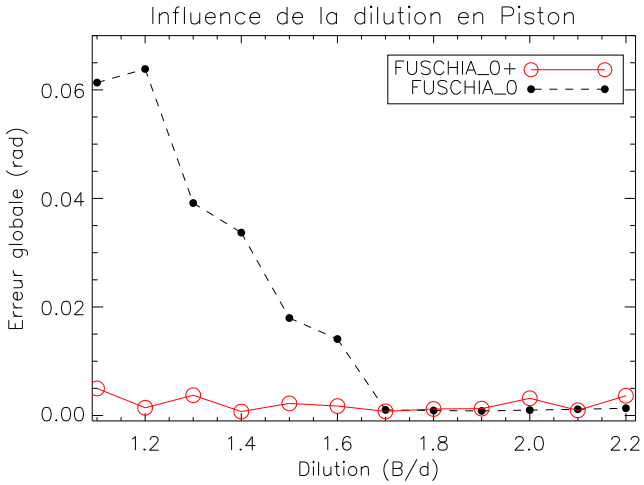


Fig. 3.2 – Erreur globale (en radian RMS) de restauration du piston obtenue en fonction de la dilution avec l'algorithme proposé par Baron, tout d'abord dans sa version de base (en pointillés) puis dans sa version améliorée par nos soins (en trait plein). Les images, de taille 64×64 pixels, sont simulées à fort flux (5.10^7 photo-électrons) avec un piston de 0,2 radian sur l'une des sous-pupilles.

3.3 Développement d'un nouvel algorithme analytique sur objet ponctuel

Nous disposons désormais d'un estimateur qui permet de retrouver de manière rapide les pistons ainsi que les faibles basculements d'une configuration pupillaire compacte non centrosymétrique. Cependant, comme nous l'avions souligné à la sous-section 3.2.1, l'analyse des modes de la fonction de transfert de phase implique le rejet d'une partie de l'information. Nous allons donc nous attacher à développer un nouvel estimateur de cophasage rapide, basé sur la linéarisation des pics de la FTO et prenant en compte toute l'information fréquentielle disponible. Nous verrons également que cette nouvelle méthode peut être appliquée dans un plan défocalisé afin de cophaser un instrument dont la configuration pupillaire est centrosymétrique.

3.3.1 Apports de la linéarisation globale en plan focal

Pour estimer les pistons et basculements d'une configuration pupillaire non centrosymétrique, nous utilisons le critère classique de minimisation de l'erreur quadratique sur les données, mais ra-

mené au plan focal pour un objet ponctuel :

$$\mathcal{L}^{'}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{N_f}\left|\widetilde{i}_0(\nu) - \widetilde{h}_0(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 \tag{3.5}$$

La réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{a})$ étant modélisée avec un flux égal au nombre de photo-électrons présents dans l'image $\boldsymbol{i}_0$.

$\mathcal{L}^{'}$ est traditionnellement minimisé de manière itérative (nous parlerons alors d'une méthode de type *phase retrieval* classique). Afin de disposer d'un algorithme de restauration capable d'estimer les faibles pistons et basculements de manière rapide, et ce tout en utilisant la totalité de l'information fréquentielle disponible, nous choisissons d'appliquer une méthode similaire à celle décrite dans la section 2.2 page 40. Nous exprimons donc le critère $\mathcal{L}^{'}$ sous forme quadratique en linéarisant l'expression des pics de la fonction de transfert comme présenté à la sous-section 2.3.2 page 51. Ainsi, en exprimant $\widetilde{\boldsymbol{h}}_0$ sous la forme $\widetilde{\boldsymbol{h}}_0(\boldsymbol{a},\nu) = \boldsymbol{\alpha}_0^t(\nu)\,\boldsymbol{a} + \beta_d(\nu)$, nous obtenons dans notre cas :

$$\mathcal{L}^{'}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{N_f}\left|\boldsymbol{A}(\nu)\boldsymbol{a} - B(\nu)\right|^2 \tag{3.6}$$

$$\text{avec :}\quad \left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{A}(\nu) & = & -\boldsymbol{\alpha}_0^t(\nu) \\ B(\nu) & = & \beta_d(\nu) - \widetilde{i}_0(\nu) \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Or, d'après les Eq. (2.41) et (2.42) page 51 ramenées au plan focal, nous pouvons exprimer $\boldsymbol{\alpha}_0$ et $\boldsymbol{\beta}_0$ comme :

$$\boldsymbol{\alpha}_0^t(\nu)\,\boldsymbol{a} = \frac{1}{N_T S_\circ(\nu)}\sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T}\left[jJ(\nu,0)K(\nu,\boldsymbol{a}_{nn'}) + M(a_{2nn'}^{-}\nu,0) + N(a_{3nn'}^{-}\nu,0)\right] \star \delta_{\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{u_{n'}}} \tag{3.8}$$

$$\beta_0(\nu) = \frac{1}{N_T S_\circ(\nu)}\sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T} J(\nu,0) \star \delta_{\boldsymbol{u_n}-\boldsymbol{u_{n'}}} \tag{3.9}$$

Ce nouvel estimateur, que nous appellerons FUSCHIA_1 (car valable avec un seul plan de diversité, donc à objet connu), permet de retrouver les faibles aberrations en prenant en compte toute l'information fréquentielle disponible. Toutefois, étant donné que l'obtention des matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ s'avère coûteuse en temps de calcul, nous utiliserons en pratique les Eq. (2.43) et (2.44) page 51 ramenées au plan focal :

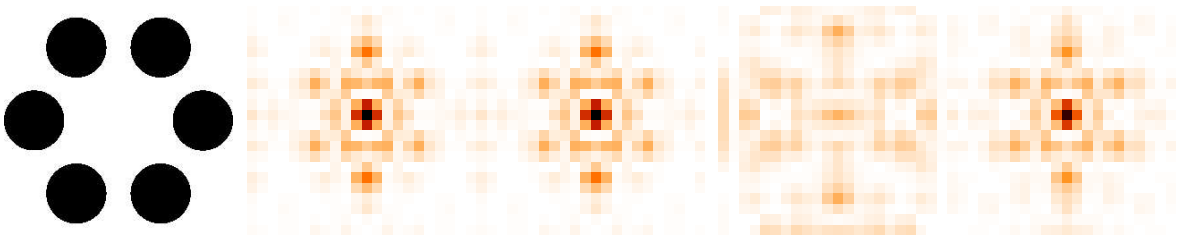
$$\boldsymbol{\alpha}_0^t(\boldsymbol{b}) = \frac{\partial F_0(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}=0) \qquad \text{et} \qquad \beta_0(\boldsymbol{b}) = F_0(0,\boldsymbol{b}) \tag{3.10}$$

Notons également que, contrairement à la méthode reposant sur l'analyse des modes de la FTP, l'estimation des pistons reste ici approchée. Toutefois, ce constat n'est pas une limitation importante, puisque dans le cadre d'une utilisation en boucle fermée les aberrations à estimer sont bien inférieures à 1 rad RMS. De plus, rien n'interdit *a priori* d'estimer si nécessaire les pistons à l'aide de l'algorithme FUSCHIA_0+ ; toutefois, nous nous bornerons dans les chapitres suivants à caractériser chaque algorithme indépendamment des autres reconstructeurs.

3.3.2 Cas d'une configuration centrosymétrique

Les estimateurs FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1 permettent d'estimer les faibles aberrations incidentes, que la configuration pupillaire soit fortement compacte ou diluée. Néanmoins, cantonnés au seul plan focal, ces algorithmes ne permettent pas, de même que toute technique de type *phase retrieval* classique, de retrouver sans ambiguïté de signe les modes globaux pairs d'une configuration centrosymétrique, ainsi que nous l'avons démontré annexe B page 189.

Or, en synthèse d'ouverture, il est tout de même possible d'estimer la phase incidente de manière non ambiguë avec la seule donnée de l'image d'un point source. En effet, nous montrons au paragraphe B.3 page 192 qu'en introduisant une aberration de diversité parfaitement connue, à la condition *sine qua non* que cette dernière présente une composante paire (ce qui est le cas, par exemple, d'une défocalisation globale), la partie paire de la phase incidente peut être retrouvée, et ce quelle que soit la configuration choisie : si les aberrations à mesurer sont petites devant l'aberration de diversité, voire du même ordre de grandeur, alors cette dernière peut être vue comme une porteuse levant l'ambiguïté, comme illustré Fig. 3.3. Cette figure montre, pour une configuration centrosymétrique à six sous-pupilles (en *a*), les images obtenues en réponse à une perturbation de phase ϕ_a égale à une faible défocalisation globale. En (*b*) et (*c*) sont représentées les images obtenues au plan focal, et en (*e*) et (*f*) celles obtenues dans un plan défocalisé de $\phi_d = 1{,}5$ rad RMS ; dans chaque plan, la perturbation est successivement égale à $\phi_a = +0{,}5$ rad puis $-0{,}5$ radian. Nous pouvons constater que la différence entre les deux images focales est très faible, alors que la différence au plan défocalisé est nette. Cette technique, qui s'apparente à du *phase retrieval* dans un plan défocalisé, a récemment été développée avec l'estimateur monoplan itératif sous le nom SICLOPE, pour Single Image with CaLibrated Offset for Phase Estimation [Cassaing & Mugnier (2007)], nonobstant un temps de calcul important.



(a) (b) (c) (d) (e)

Fig. 3.3 – Images d'une configuration à 6 sous-pupilles (représentée en *a*) obtenues en réponse à une faible défocalisation égale à $+0{,}5$ rad RMS puis $-0{,}5$ radian, et ce au plan focal (*b* et *c*), ainsi que dans un plan défocalisé de $1{,}5$ rad (*d* et *e*). Nous remarquons que les images sont identiques en plan focal mais nettement différentes dans le plan défocalisé.

Ainsi, pour que cette méthode rapide puisse être applicable quelle que soit la configuration pupillaire, nous nous proposons d'utiliser la linéarisation comme effectuée au paragraphe précédent pour FUSCHIA_1, mais appliquée dans un plan défocalisé. Dans ce cas, l'expression de $\boldsymbol{A}(\nu)\boldsymbol{a}$ et celle de $B(\nu)$ définies Eq. (3.7) seront calculées pour $\boldsymbol{\alpha}_d^t(\nu)\,\boldsymbol{a}$ et $\beta_d(\nu)$ définis par les Eq. (2.41) et (2.42) page 51.

3.4 Conclusion du chapitre

Lorsque l'objet est connu et que la pupille est non centrosymétrique, la simple donnée de l'image focale suffit à restaurer la phase aberrante. Cette restauration est généralement effectuée à l'aide d'une méthode itérative, donc coûteuse en temps de calcul. Cependant, pour satisfaire aux besoins d'un système de cophasage fonctionnant en boucle fermée, il est souhaitable d'utiliser un senseur analytique permettant l'estimation de faibles aberrations en temps-réel. Or, si la méthode la plus concluante, proposée par Baron [Baron *et al.* (2008)] et fondée sur l'analyse des modes de la FTO par maximum de vraisemblance, permet effectivement de retrouver pistons et faibles basculements, elle n'a été développée à l'origine que pour des configurations diluées voire faiblement compactes.

Afin de disposer d'estimateurs monoplans capables d'effectuer un cophasage rapide sur objet ponctuel, et ce quelle que soit la configuration pupillaire utilisée, nous avons tout d'abord proposé une réimplémentation améliorée de l'algorithme initial de Baron. Cependant, cette méthode est par nature limitée aux seules zones de non-recouvrement des pics de la FTO et à des configurations non centrosymétriques. Afin de prendre en compte toute l'information fréquentielle disponible, nous avons donc choisi de privilégier une méthode de résolution similaire à celle employée sur scènes étendues, en développant un nouvel estimateur baptisé FUSCHIA_1 et basé sur la mise sous forme quadratique du critère classique de minimisation de l'erreur. Pour cela, nous avons utilisé la forme affine de la FTO développée au chapitre 2 précédent, mais ramenée au seul plan focal.

Néanmoins, comme tout estimateur de cophasage utilisé au plan focal, ce nouvel algorithme ne peut retrouver sans ambiguïté de signe la composante paire des modes appliqués sur une configuration centrosymétrique. Pour lever cette ambiguïté, nous introduisons une phase de diversité parfaitement connue et comprenant une partie paire servant de porteuse. L'avantage de cette méthode, outre qu'elle permet de retrouver de manière rapide les faibles aberrations incidentes quelle que soit la configuration pupillaire de l'instrument, est sa simplicité de mise en œuvre ; de plus, l'utilisation d'un seul plan de diversité permet de ne pas diviser le flux disponible.

Nous disposons désormais d'algorithmes analytiques capables d'estimer de manière rapide les faibles aberrations incidentes aussi bien sur scène étendue (estimateur FUSCHIA_2) que sur objet ponctuel (algorithme FUSCHIA_1). Par conséquent, nous allons nous attacher, dans les deux prochains chapitres, à les caractériser par simulation. Les propriétés asymptotiques de FUSCHIA_2 vont ainsi être étudiées dans le chapitre 4 suivant, puis comparées à celles de l'algorithme itératif correspondant. Le chapitre 5 sera quant à lui dédié à l'étude des caractéristiques de reconstruction en plan focal (ou au voisinage du plan focal) dans le cas particulier d'une observation sur objet ponctuel.

Chapitre 4

Caractérisation de l'estimateur analytique de type diversité de phase sur objet étendu

The most exciting phrase to hear in science,
the one that heralds new discoveries,
is not Eureka ! (I found it !)
but rather, "hmm... that's funny..."
Isaac Asimov

4.1 Introduction

Grâce à la mise sous forme quadratique du critère d'estimation réalisée au chapitre 2 page 42, nous disposons désormais d'un estimateur analytique de type diversité de phase. Ce nouvel estimateur, qui est aujourd'hui la seule implémentation de cette méthode sur télescope multipupille à être totalement non itérative, doit permettre de cophaser en boucle fermée et par la même occasion de restaurer l'objet observé pour des applications d'imagerie lorsque les aberrations à estimer sont faibles.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de caractériser les performances de l'algorithme correspondant FUSCHIA_2 sur scène étendue. Pour cela, et afin d'accroître les performances des estimations, il est tout d'abord nécessaire d'optimiser le capteur en sélectionnant judicieusement la phase de diversité que nous allons introduire ; ce n'est qu'après cette opération que nous pourrons évaluer, en fonction des aberrations introduites, la dynamique de notre reconstructeur analytique et quantifier sa précision d'estimation. Cependant, n'oublions pas que la pupille influe directement sur la qualité de l'image obtenue et donc sur l'évaluation de la phase incidente. Par conséquent, il est également déterminant d'optimiser l'instrument à travers le choix de sa configuration pupillaire.

Pour une application sur scène étendue, plusieurs paramètres concernant le type d'objet observé seront aussi à prendre en compte afin d'améliorer les performances. Il s'agit tout d'abord de la taille de la scène : en effet, si les objets présentant une faible extension peuvent facilement être isolés du fond de l'image, les scènes très étendues sont susceptibles de remplir la majeure partie voire la totalité du champ de la caméra. Dans ce cas, il est important d'inclure une gestion des effets de bord dans le traitement des images. Le contraste est également un élément déterminant, généralement non connu à l'avance et qui peut être très disparate : les scènes urbaines sont par nature très contrastées, alors que les scènes dites *naturelles* présentent le plus souvent un contraste relativement faible. Soulignons que la méthode de la diversité de phase, si elle se doit d'être polyvalente, ne sera pas applicable dans

le cas d'un objet étendu uniforme. Bien qu'il n'y ait *de facto* rien à observer sur ce type d'objet, cela démontre qu'il n'existe pas de solution universelle pouvant répondre à tous les cas de figure.

Afin de caractériser au mieux notre estimateur analytique de type diversité de phase, nous présentons tout d'abord en section 4.2 le logiciel MASTIC que nous avons développé pour la simulation d'images multipupilles et le traitement de données ; les conditions de simulation pour l'étude complète de l'estimateur y sont également détaillées. Nous exposons ensuite en section 4.3 comment nous avons optimisé le capteur de diversité ; enfin, nous comparons en 4.4 les performances de l'algorithme FUSCHIA_2 ainsi que son comportement en fonction des paramètres clefs aux résultats obtenus avec l'estimateur itératif correspondant.

4.2 Principe des simulations

Pour caractériser finement les performances d'un estimateur quel qu'il soit en fonction de l'influence de paramètres clefs et de relier les dites performances à celles de futurs instruments spatiaux, il faut être capable de simuler des images "réalistes" qui soient proches de celles que l'on serait susceptible d'obtenir dans des conditions expérimentales. Cette section détaille le modèle de formation d'images que nous avons développé et insiste sur l'importance qu'il revêt dans le processus d'estimation des grandeurs recherchées. Les conditions générales de simulation, qui sont appliquées à la caractérisation de l'estimateur analytique, sont également présentées.

4.2.1 Le logiciel MASTIC, un outil de modélisation et de traitement

Afin de disposer à la fois d'un outil complet de simulation, capable de fournir des images réalistes, et d'une procédure de traitement de données qui soit polyvalente tout en étant simple d'utilisation, nous avons développé un logiciel ouvert au plus grand nombre, baptisé MASTIC (Multiple Aperture Software for Telescope Imaging and Cophasing). Ce code, dont le schéma de principe est représenté sur la Fig. 4.1, est composé de deux parties principales :

- le *modèle direct*, représenté en rouge sur la figure, produit des images à partir d'un objet et d'une phase incidente connue. Les paramètres expérimentaux tels que la configuration pupillaire, la taille N_{pix} de l'image en pixels, la phase de diversité, le nombre N_{bph} de photons contenus dans l'image, etc., sont définis par l'utilisateur et enregistrés dans un fichier *log* ;
- le *problème inverse*, représenté en bleu, permet d'estimer par la méthode du *phase retrieval* ou de la diversité de phase l'objet et/ou les aberrations introduites, et ce à partir d'une ou plusieurs images, du modèle direct connu et des paramètres expérimentaux contenus dans un fichier *log* préalablement renseigné par l'utilisateur. Deux classes d'estimateurs sont disponibles : les algorithmes itératifs, basés sur une minimisation numérique d'un critère d'erreur calculé à partir du modèle direct, et les algorithmes analytiques rapides de type FUSCHIA, basés soit sur une analyse des modes de la FTO par maximum de vraisemblance (FUSCHIA_0, FUSCHIA_0+), soit sur la minimisation d'un critère d'erreur quadratique (FUSCHIA_1 & FUSCHIA_2).

Ces deux modes de fonctionnement principaux sont détaillés dans les paragraphes suivants.

4.2.1.1 Modèle de formation d'images

Echantillonnage de la pupille et des images Pour générer une image carrée de taille $N_{\text{pix}} = N_i^2$ pixels, il faut tout d'abord déterminer le facteur d'échantillonnage s que nous souhaitons appliquer.

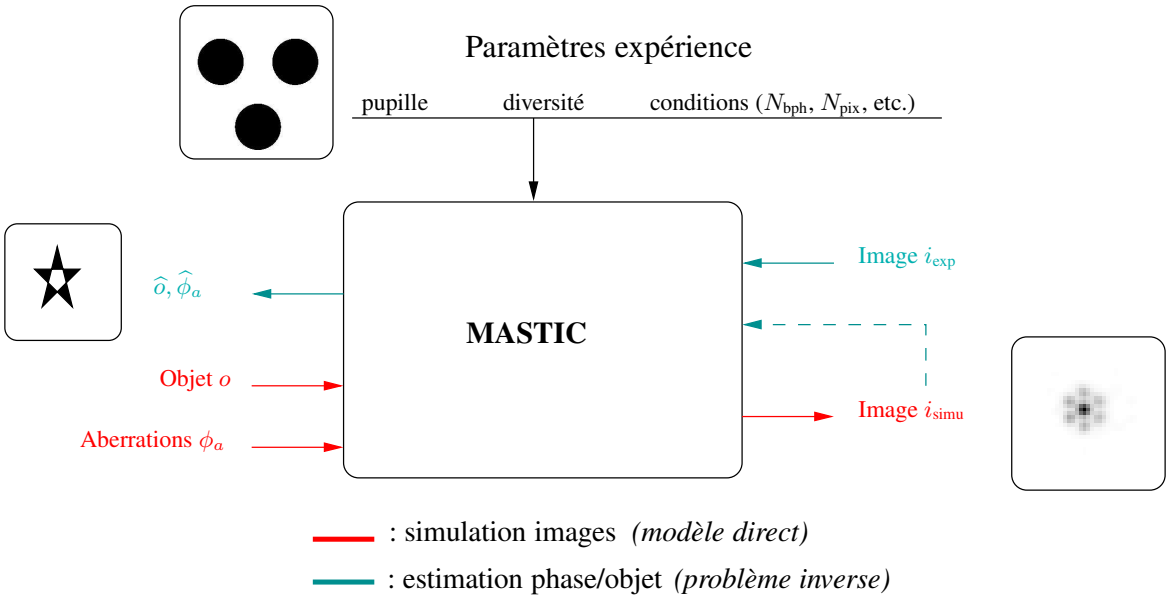


Fig. 4.1 – Schéma de principe de MASTIC : en rouge la création d'images (*modèle direct*), en bleu l'estimation des aberrations et/ou de l'objet observé (*problème inverse*) à partir des paramètres expérimentaux.

Expérimentalement, ce facteur est défini au foyer de l'instrument comme étant la taille en pixel du plus petit élément résolu par la pupille pleine :

$$s = \frac{\lambda \mathrm{f}}{e_i \mathcal{B}} \tag{4.1}$$

où λ est la longueur d'onde d'observation, f la focale de l'instrument, e_i la taille en mètre d'un pixel au foyer et $\mathcal{B}$ le diamètre de la pupille pleine équivalente[1] ; s représente donc le rapport entre la fréquence d'échantillonnage donnée par $1/e_i$ et la fréquence de coupure $\mathcal{B}/(\lambda \mathrm{f})$. Un échantillonnage correct implique que $s \geq 2$ (critère dit *de Shannon-Nyquist*). En simulation, c'est l'utilisateur qui définit s et qui par la même occasion échantillonne non seulement les images, mais aussi la pupille : en effet, ces deux échantillonnages sont liés du fait de l'utilisation de FFT ; dès lors, la manière de numériser la pupille dépend intrinsèquement de l'échantillonnage dans le plan image. La question qui se pose est donc de déterminer correctement la taille $N_p \times N_p$ de la pupille en pixels, et ce afin d'obtenir au plan focal l'échantillonnage image souhaité. e_p étant la taille en mètre d'un pixel dans le plan de la pupille, la valeur du facteur d'échantillonnage est donnée par :

$$s = \frac{e_p N_i}{\mathcal{B}} \tag{4.2}$$

e_p et e_i sont donc liées par la relation :

$$e_p = \frac{\lambda \mathrm{f}}{e_i N_i} \tag{4.3}$$

[1] La pupille pleine est ici définie comme le diamètre circonscrit de l'ensemble des sous-pupilles.

Or, comme la taille N_i de l'image et le facteur d'échantillonnage s sont fixés pour une mesure, N_p l'est aussi : $N_p = N_i/s$. En pratique, puisque l'image est obtenue à partir de la transformée de Fourier discrète inverse de l'amplitude pupillaire, une modélisation correcte de son support est telle que $N_i \geq 2N_p$, et ce afin de ne pas perdre d'information. Par la suite, nous échantillonnerons si possible au moins à Shannon et nous retiendrons pour les simulations $N_i = 2N_p$. De même, le support de l'autocorrélation sera le double de celui de la pupille. Un soin tout particulier a donc été apporté à la pixellisation de la pupille (gestion de coordonnées non entières, etc.)

Calcul de l'image L'image $\boldsymbol{i}$ est obtenue au plan focal par la convolution discrète et bruitée de l'objet $\boldsymbol{o}$ avec la réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}$ de l'instrument. Or, la convolution est une opération coûteuse en temps de calcul. Afin de l'optimiser, nous préférons nous placer le domaine de Fourier où l'image se calcule d'après la relation $\boldsymbol{i} = \mathrm{TF}^{-1}\left(\widetilde{\boldsymbol{o}}\widetilde{\boldsymbol{h}}\right)$; ainsi, il est beaucoup plus rapide de calculer les transformées discrètes de $\boldsymbol{o}$ et de $\boldsymbol{h}$, puis de les multiplier et de revenir ensuite dans le domaine réel.

Modélisation du bruit Afin d'obtenir des images qui soient réalistes, deux types de bruit sont ajoutés au calcul de l'image effectué au paragraphe précédent :

- du bruit de photons, dont la statistique est poissonnienne[2]. Cependant, à moyen et à fort flux, ce bruit peut être approximé par un bruit blanc gaussien dont la variance σ^2 est donnée par le flux en chaque pixel ;
- du bruit de lecture, qui reproduit celui que l'on obtiendrait expérimentalement avec une caméra de détection. C'est donc un bruit blanc gaussien dont l'écart-type, exprimé en électrons, est fixé par l'utilisateur.

Comme nous venons de le voir dans les trois derniers paragraphes, le modèle direct utilisé par le logiciel MASTIC permet de simuler des images réalistes. Cependant, dans le cadre de réalisations expérimentales, ce modèle devra être adapté aux conditions de l'expérience. La calibration du modèle direct et son adéquation avec le modèle physique seront présentés dans le chapitre 6 page 135 qui traite notamment de la validation expérimentale des algorithmes rapides de type FUSCHIA.

4.2.1.2 Le traitement des données

Apodisation des images et bande de garde Afin d'accélérer les temps de calcul, la génération des images ainsi que le traitement des données sont effectués dans le domaine de Fourier discret. Cependant, lorsque l'objet remplit tout le champ de l'instrument, il apparaît fatalement une périodisation implicite des grandeurs concernées ; par exemple, lors de la création d'images par le modèle direct de MASTIC, le bord gauche de l'image peut recevoir du signal provenant du bord droit de l'objet. Cet effet n'est pas gênant en soi si l'on considère des objets astronomiques d'extension finie : en effet, il est possible d'isoler la scène d'intérêt sur fond nul afin que les repliements n'affectent pas la zone

[2]Nous rappelons que la statistique d'événements aléatoires n de moyenne $\bar{n}$ est dite :

- *poissonnienne* si elle suit la loi : $P_P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!}\exp(-\bar{n})$
- *gaussienne* si : $P_G(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[\frac{-(n-\bar{n})^2}{2\sigma^2}]$

Nous rappelons également qu'un bruit blanc est tel que sa densité spectrale de puissance est constante.

utile de l'image. Cependant, le problème reste entier en ce qui concerne l'observation d'objets infiniment étendus, ce qui est le cas de l'imagerie de la Terre depuis l'espace ; le traitement par transformée de Fourier n'est alors plus possible.

Il est donc nécessaire de trouver une solution afin d'éliminer les éventuels problèmes résultant du repliement et ainsi continuer à effectuer les calculs proprement. Dans le cadre d'une estimation conjointe de type diversité de phase, deux méthodes ont été proposées : l'apodisation et la bande de garde. La première, basée sur l'apodisation entière de l'image par une fenêtre de Hanning, a été introduite par Paxman [Paxman & Crippen (1990)]. En suivant la même idée, Löfdhal [Löfdahl & Scharmer (1994)] a ensuite proposé que seuls les bords de l'image soient apodisés grâce à l'utilisation d'une fenêtre de Hanning modifiée. Une telle fenêtre, représentée Fig. 4.2 à une dimension (en points et tirets), permet de n'apodiser que les pixels du bord sur une largeur égale à $1/8$ de la taille de l'image.

Soit $\boldsymbol{E}$ l'erreur sur le critère :

$$E(\nu) = \sum_{d=1}^{N_d} \left| \mathrm{TF}^{-1} \left[\widetilde{i}_d(\nu) - \widetilde{h}_d(\nu)\widetilde{o}(\nu) \right] \right|^2 \tag{4.4}$$

Sans les problèmes de repliement évoqués ci-dessus, l'erreur $\boldsymbol{E}$, obtenue sans bruit et en se plaçant à la valeur vraie des aberrations incidentes, devrait être nulle. Or, il a été démontré [Löfdahl & Scharmer (1994)] que sans apodisation, cette erreur est importante sur tous les points-images. Lors d'une apodisation "classique", elle devient plus faible sur les bords mais reste importante au centre, tandis qu'avec une fenêtre de Hanning modifiée elle est pratiquement nulle au centre. Cette constatation a amené Löfdahl à ne prendre en compte, lors du calcul du critère, que les points les moins entachés d'erreur, c.-à.-d. ceux situés au centre et dont les points-images correspondants n'ont pas été apodisés.

Ce fenêtrage peut cependant être optimisé. Ainsi, notre choix, illustré Fig. 4.2 en trait plein, s'est porté sur une fenêtre de Hamming qui apodise les pixels du bord sur une largeur égale à $1/4$ de la taille de l'image et qui présente l'avantage d'atténuer au maximum les hautes fréquences.

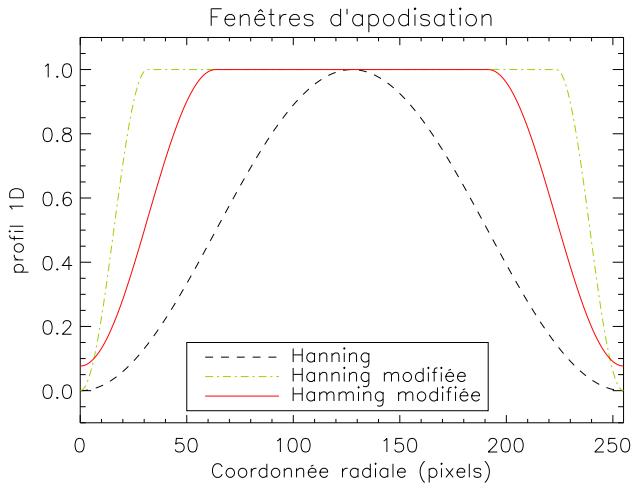


Fig. 4.2 – Illustration à une dimension, sur 256 pixels, des fenêtres de Hanning (en tirets), Hanning modifiée sur une largeur égale à $1/8$ de la taille image (en pointillés plus tirets) et Hamming sur $1/4$ de l'image (en trait plein).

L'apodisation par une fenêtre de Hamming permet donc de minimiser les effets de bord tout en conservant l'expression analytique de l'objet définie Eq. (2.2) page 41 ; ainsi, le traitement des données peut être effectué de manière rapide. Cependant, la partie des mesures apodisées n'est en contrepartie pas utilisée pour l'estimation.

La deuxième méthode de gestion des repliements a été proposée par Seldin [Seldin & Paxman (1994)]. Elle permet de conserver le calcul de l'image par la convolution $\boldsymbol{h} \star \boldsymbol{o}$ dans le domaine de Fourier en ajoutant une bande de zéros (dite *bande de garde*) de largeur N autour de l'objet et de la réponse impulsionnelle, qui sont de taille respectivement égale à $N_o \times N_o$ et $N_h \times N_h$. Pour que la convolution soit calculée correctement, sa taille doit être au minimum égale à la somme des dimensions des supports de ces deux fonctions, soit $N_o + N_h$. Pour que les repliements ne deviennent pas problématiques, la bande de garde doit être de largeur au moins égale à la largeur du support de la réponse impulsionnelle ; par conséquent elle dépend de l'amplitude des aberrations incidentes. Bien sûr, les pixels correspondants ne sont pas à inclure dans le calcul du critère, puisque non associés à une véritable mesure. Par précaution, nous choisissons $N = N_o/2$, ce qui est suffisant pour les tailles image typiques utilisées.

La bande de garde présente l'avantage d'utiliser toutes les données disponibles sans perte d'information. Cependant, son inconvénient est d'augmenter le temps de traitement : en effet, l'expression analytique de l'objet définie Eq. (2.2) page 41 n'est plus valide. La minimisation vis-à-vis de cette grandeur doit alors être effectuée de manière itérative. En pratique et dans la suite de ce manuscrit, nous privilégierons systématiquement la bande de garde pour simuler les images de manière réaliste ; par contre, lors de la reconstruction de phase ou la restauration d'objet, nous choisirons l'apodisation dans un souci d'optimisation du temps de calcul.

Méthode de résolution Une bonne connaissance du modèle direct est indispensable à l'estimation des aberrations recherchées. En effet, ce dernier intervient non seulement pour la production d'images, mais aussi dans la définition du critère lors de la résolution du problème inverse : or, afin de calculer au mieux la réponse impulsionnelle de l'instrument, il est nécessaire de connaître au préalable les conditions de formation des images. Pour que ces deux modèles (direct/inverse) soient les plus proches possibles, nous avons pris soin d'uniformiser la gestion de la configuration pupillaire ; de même, la base de décomposition des aberrations pleine pupille en aberrations sur les sous-pupilles est calculée une fois pour toutes, puis utilisée indifféremment dans l'un ou l'autre cas.

La méthode de résolution du problème inverse est également polyvalente, non limitée aux configurations multipupilles : dans le cas itératif, l'estimation des aberrations s'appuie sur les programmes de Blanc [Blanc (2002)], développés à l'origine pour des pupilles monolithiques. Les calculs propres à l'interférométrie multitélescope, comme ceux de la réponse impulsionnelle ainsi que des gradients, sont effectués par appel au modèle direct de MASTIC.

Enfin, soulignons qu'en ce qui concerne les estimateurs itératifs, l'adaptation du problème inverse au modèle direct, par la gestion rigoureuse de la configuration pupillaire et de la base de décomposition, nous a permis de valider de manière expérimentale l'utilisation des dits algorithmes pour l'estimation des ordres supérieurs, comme nous le verrons au chapitre 6 page 135.

4.2.2 Choix d'une base canonique

Après résolution du problème inverse, les aberrations estimées en sortie du logiciel MASTIC sont exprimées dans la base locale des sous-pupilles sous forme $N_z \times N_T$, soit N_z modes sur N_T télescopes. Malheureusement, sans traitement ultérieur, il n'est pas possible d'affirmer avec certitude

que ces aberrations correspondent bien aux modes d'intérêts recherchés, à savoir les pistons et les basculements différentiels entre les sous-pupilles. Les deux paragraphes suivants expliquent pourquoi il existe plusieurs jeux d'aberrations équivalents pour le cophasage, et justifient le choix de bases modales plus appropriées selon le type de tests effectués afin d'exprimer ces aberrations sous forme unique.

4.2.2.1 Aberrations et modes globaux

Nous avons vu en sous-section 1.2.3 page 24 qu'un mode global d'ordre k défini sur la grande pupille se décompose sur les sous-pupilles en une somme de polynômes d'ordre $\{0, \ldots, k\}$. Ainsi, un piston global se traduit par l'apparition de trois pistons locaux identiques ; de même, les basculements globaux engendrent une combinaison de pistons et basculements locaux. Dès lors, en sortie de nos estimateurs, comment distinguer les aberrations issues de la décomposition des trois premiers modes globaux (qui n'ont pas d'intérêt sur objet étendu) des véritables aberrations présentes sur les sous-pupilles et qui elles, sont recherchées ?

La solution est d'exprimer les aberrations estimées sous forme unique en choisissant des bases modales qui soient plus appropriées.

4.2.2.2 Les différentes bases canoniques

Afin d'interpréter les résultats en sortie d'estimateur de manière non ambiguë, nous choisissons d'introduire une base de décomposition qui, pour un type d'expérience donné, va servir de référence à toutes les décompositions futures. Cette base, dite *canonique*, peut par conséquent prendre différentes formes en fonction de l'application choisie. Il existe donc en réalité plusieurs bases susceptibles d'être utilisées au cours de la caractérisation des algorithmes, dont les effets sont illustrés Tab. 4.1 pour une configuration de type Young :

- la base *cohérente*, qui est la plus naturelle, est celle qui restitue les aberrations hors contributions des trois premiers modes globaux ; il s'agit donc de la base qui permet de retenir les seuls modes d'intérêt. Ainsi, l'application d'un piston sur une sous-pupille sera vu comme la somme d'un piston et d'un basculement global, plus des basculements locaux identiques sur chaque sous-pupille (voir Tab. 4.1 première ligne). Puisque sur objet étendu ces modes globaux sont des modes non vus, cette base sera choisie lors des tests de répétabilité. Par la suite, les aberrations seront dites *canonifiées* lorsque exprimées dans une base canonique ;
- la base *fixe*, où les aberrations d'une sous-pupille considérée comme invariante servent de référence pour l'expression des modes locaux des autres sous-pupilles ;
- la base *mobile*, qui, par opposition à la base fixe, considère que seul la phase d'une sous-pupille varie et qui par conséquent ôte les aberrations globales présentes sur les sous-pupilles invariantes. Ainsi, les modes locaux de la pupille mobile sont privilégiés : en reprenant les aberrations exprimées dans la base canonique cohérente (Tab. 4.1 deuxième ligne), nous obtenons un piston local sur la première sous-pupille. Cette base est idéale pour suivre l'évolution des aberrations sur une pupille en particulier ; elle sera donc choisie pour les tests de linéarité où seule une aberration évolue dans le temps.

Ces trois bases canoniques permettent donc d'exprimer les aberrations de manière unique, et ce en fonction du type d'expérience réalisé. Par conséquent, afin de comparer la phase estimée avec la phase introduite, il est indispensable d'exprimer systématiquement ces deux jeux d'aberrations dans la même base.

Aberration	Base	Résultat
1 2 3 piston local	cohérente	= piston global + basculement global + basculements locaux
piston global + basculement global + basculements locaux	mobile *(pupille 1)*	= 1 piston local

Tab. 4.1 – Illustration des bases canoniques cohérente et mobile.

4.2.3 Conditions de simulation

Les simulations que nous présentons en section 4.4 ont pour objectif d'estimer, à partir d'une phase et d'un objet préalablement connu, la qualité de reconstruction obtenue dans des conditions d'utilisation diverses et variées (grande dynamique de phase, faible flux, etc.). Dans cette sous-section, nous présentons la configuration pupillaire qui sera utilisée pour la caractérisation de la diversité de phase analytique et qui servira aussi bien pour la création d'images que pour la réduction des données avec MASTIC. Nous présentons également les différents tests qui seront effectués dans les sections suivantes.

4.2.3.1 La configuration pupillaire

Le choix de la configuration pupillaire s'avère déterminant pour l'optimisation des performances. En effet, comme souligné en sous-section 1.2.2 page 20, la qualité de l'image obtenue en plan focal (couverture fréquentielle, résolution, etc.) est directement liée au nombre de pupilles mises en jeu ainsi qu'à leur disposition. Par conséquent, la sélection d'une configuration plutôt qu'une autre dépendra essentiellement du type d'applications visées. Ainsi, une pupille diluée, qui ne couvre pas toute les fréquences mais dont la résolution est importante, est parfaitement adaptée à l'interférométrie stellaire. *A contrario*, pour des observations de type plan focal sur objet étendu, le plus souvent réalisées dans un but d'imagerie, une configuration diluée n'est pas intéressante du fait de sa couverture lacunaire ; de plus, nous avons démontré à la sous-section 2.3.3 page 53 que pour ce type de configuration, l'estimation des pistons différentiels par la méthode de la diversité de phase (analytique ou itérative) est tout simplement impossible.

Pour l'imagerie de scènes étendues effectuée en plan focal, Mugnier [Mugnier *et al.* (1996)] a démontré que l'objet reconstruit par un instrument multipupille est d'autant plus proche de l'objet initial que le critère $1/\min|\widetilde{\boldsymbol{h}}|$ est faible. Il est donc important de maximiser les "vallées" entre les pics secondaires et de choisir la configuration dont la FTO est la plus uniforme possible. De plus, nous prenons également soin de sélectionner une configuration non redondante ; en effet, si la pupille est redondante, plusieurs paires de sous-pupilles forment des bases égales. L'une d'entre elles est donc inutile, ce qui implique qu'au moins une pupille n'est pas placée de manière optimale, et qu'à une

fréquence spatiale donnée correspondent plusieurs bases, ce qui complique la reconstruction.

De ce qui précède, la caractérisation de l'algorithme FUSCHIA_2 sur objet étendu va donc être effectuée avec une configuration compacte et non redondante.

Nous choisissons au final une pupille de type Golay 3 [Golay (1971)], composée de trois sous-pupilles identiques disposées au sommet d'un triangle équilatéral comme illustré Fig. 4.3 ; la dilution[3] retenue est de $1{,}4$ afin que les zones de recouvrement soient suffisamment importantes pour permettre l'estimation des pistons différentiels.

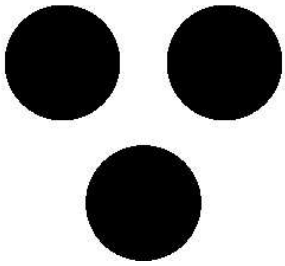


Fig. 4.3 – Illustration de la configuration de référence à trois sous-pupilles, de type Golay 3 et présentant une dilution de $1{,}4$.

4.2.3.2 Les différents tests effectués

Afin de caractériser l'algorithme analytique FUSCHIA_2, deux catégories de tests sont à considérer :

- les tests dits *en configuration opérationnelle de base*, où nous évaluons la linéarité des estimateurs ainsi que leur précision d'estimation en utilisant la configuration pupillaire sélectionnée au paragraphe précédent ainsi qu'un objet de référence ;
- les tests dits *à configuration variable*, où nous étudions l'influence des paramètres clefs tels que le nombre de sous-pupilles où le type d'objet observé.

Les simulations concernant l'optimisation du capteur de diversité seront traitées à part : en effet, elles interviennent logiquement avant la caractérisation des estimateurs mais sont effectuées avec l'objet et la pupille de référence, et dans les conditions citées ci-dessous.

Les images simulées sont de taille 256×256 pixels ; l'objet utilisé dit *de référence* est la scène terrestre urbaine que nous avions représentée avec son spectre sur la Fig. 2.3 page 55. Toutes les images sont échantillonnées à Shannon et sont simulées avec du bruit de photons ainsi qu'un bruit de détecteur d'écart-type $\sigma_b = 10$ électrons par pixel, ce qui correspond au bruit d'une caméra scientifique standard.

Par la suite, nous définirons le Rapport Signal-à-Bruit (RSB) comme étant le rapport *par pixel* du nombre de photons N_{bph} présents dans l'image sur l'écart-type du bruit :

$$\text{RSB} = \frac{N_{\text{bph}} \big/ N_{\text{pix}}}{\sqrt{\frac{N_{\text{bph}}}{N_{\text{pix}}} + \sigma_b^2}} \tag{4.5}$$

[3]Nous rappelons que la dilution est le rapport de la plus petite base $\mathcal{B}$ sur le diamètre commun $\mathcal{D}$ des sous-pupilles.

où N_{pix} est, rappelons-le, le nombre de pixels contenus dans l'image[4]. Pour les simulations effectuées en mode opérationnel de base, deux types de tests sont réalisés :

- des tests de linéarité, où une rampe monomode (piston ou basculement) de grande dynamique et présentant cinquante-et-une valeurs est appliquée sur une seule sous-pupille. Les images sont acquises à fort flux avec un nombre moyen de $N_{\text{bph}} = 5.10^8$ photo-électrons par image (soit un RSB de 86), chaque valeur de la rampe présentant dix points de mesure.
- des tests de répétabilité, où la précision d'estimation des algorithmes est évaluée sur des séries de mesures indépendantes. Ces différentes séries, qui comprennent toutes cinquante mesures, sont générées avec des flux différents allant, sauf mention contraire, de 3.10^6 à 3.10^{10} photo-électrons (phe$^-$) par image, ce qui équivaut à un RSB compris entre 4 et 676. Les tests de répétabilité sont effectués avec ou sans aberration incidente, ce qui sera précisé lors de la présentation des résultats.

En ce qui concerne les tests à configuration variable, tous sont réalisés à fort flux avec $N_{\text{bph}} = 5.10^8$ photo-électrons par image, ce qui est une valeur réaliste dans un contexte d'imagerie.

Les images ainsi simulées seront réduites ultérieurement avec l'algorithme analytique de type diversité de phase puis avec l'estimateur itératif correspondant. Les deux jeux de données obtenus seront ensuite comparés, sachant que les grandeurs statistiques utilisées pour caractériser les performances des estimateurs sont explicitées annexe D page 201.

4.3 Optimisation du capteur de diversité

Pour accroître les performances des estimations et comparer les algorithmes itératif *versus* analytique dans des conditions optimales, il est judicieux d'optimiser dans un premier temps le capteur de diversité en sélectionnant avec soin la phase ϕ_d que nous allons introduire lors des prochaines reconstructions. Dans cette section, nous allons donc choisir la nature de la diversité, son amplitude, mais aussi le nombre de plans utilisés. Nous allons également étudier avec quelle précision il est nécessaire de connaître la diversité introduite ainsi que l'influence des modes supérieurs sur l'estimation de la phase incidente, modes qui ne sont pas corrigés lors d'une opération de cophasage classique.

Par la suite, toutes les simulations que nous présenterons dans cette section seront effectuées dans les conditions décrites à la sous-section 4.2.3 précédente, avec l'objet étendu de référence ainsi que la configuration à trois sous-pupilles de type Golay 3 présentant une dilution de $1{,}4$.

4.3.1 Choix de la diversité

Traditionnellement, la phase de diversité ϕ_d est implémentée sous la forme d'une défocalisation avec une amplitude déterminée *ad hoc*. Pourtant, il est nécessaire de déterminer avec soin la nature de l'aberration introduite car cette dernière influe directement sur la qualité des images produites et *in extenso* sur la qualité de reconstruction. Or, les rares études visant à optimiser ϕ_d ont été effectuées avec des configurations monolithiques et ne discutent guère le choix d'une défocalisation globale de diversité [Löfdahl & Scharmer (1994), Lee *et al.* (1999), Dolne & Schall (2005)]. A notre connaissance, il n'existe pas à ce jour de réels travaux portant sur la nature de la diversité introduite dans le

[4]Par conséquent, le rapport signal-à-bruit total peut s'écrire sous la forme :

$$\text{RSB}_T = \frac{N_{\text{bph}}}{\sqrt{N_{\text{bph}} + N_{\text{pix}}\sigma_b^2}} = \sqrt{N_{\text{pix}}}\,\text{RSB} \tag{4.6}$$

cadre de configurations multipupilles, étant donné que le choix de la diversité est corrélé à la forme de la pupille.

4.3.1.1 Nature de l'aberration introduite

Nous avons souligné au paragraphe 1.3.2.2 page 31 ainsi qu'à l'annexe B page 189 associée que l'indétermination sur le signe de la partie paire de la phase incidente, due à l'utilisation d'une configuration pupillaire centrosymétrique, pouvait être levée au moyen d'une phase de diversité comportant au moins un mode global pair. Pour s'affranchir de cette ambiguïté, le choix le plus naturel se porte sur une défocalisation car c'est *de facto* le mode global pair le plus simple à mettre en œuvre et le plus simple à contrôler. De plus, si la taille du détecteur le permet, les N_d plans de diversité peuvent éventuellement être imagés sur la même caméra, minimisant ainsi les aberrations différentielles entre les voies et réduisant au maximum la taille du capteur ainsi que sa difficulté de conception.

Cependant, l'utilisation de tout autre mode reste théoriquement valable, à condition que ce dernier comporte au moins une composante paire si la configuration pupillaire est centrosymétrique. Pour un instrument multipupille, rien n'interdit de créer une diversité grâce à un mode différentiel. En effet, pourquoi ne pas envisager un ensemble de pistons entre les sous-pupilles ? Cependant, Baron [Baron (2005)] a démontré dans le cadre de son doctorat que ce type de diversité n'était vraiment efficace qu'à faible RSB, là où le bruit de détecteur σ_b devient prédominant. Or, dans un contexte d'imagerie typique, le nombre de photons reçus est en général suffisamment important pour que σ_b soit négligeable ; dans ce cas, la diversité par piston n'est pas intéressante.

Ainsi, pour des raisons de simplicité de conception future, notre choix se portera donc sur une défocalisation globale.

4.3.1.2 Nombre de plans de diversité

En théorie, avec un algorithme de type diversité de phase, l'erreur commise sur l'estimation des aberrations est inversement proportionnelle au nombre de plans N_d mis en jeu [Meynadier (1997)]. De fait, l'expérience de Jefferies [Jefferies *et al.* (2002)], réalisée pour une configuration monolithique et comportant pas moins de sept plans de diversité, a bel et bien démontré une sensible amélioration des performances.

A première vue, l'utilisation d'un nombre conséquent de voies de diversité serait donc tentante. Néanmoins, démultiplier les plans a pour conséquence de diminuer d'autant le rapport signal-à-bruit. En effet, chaque voie est le plus souvent générée à partir d'un même faisceau d'entrée au moyen de lames semi-réfléchissantes ; la séparation de flux est alors d'autant plus importante que le nombre de plans est élevé. De plus, la complexité du montage optique qui en résulte peut s'avérer rédhibitoire, puisque chaque voie nécessite de nombreuses calibrations.

En conséquence, nous allons privilégier pour notre étude sur objet étendu un capteur comprenant deux plans de diversité. Cette configuration minimale sera également utilisée pour les validations expérimentales présentées au chapitre 6 page 135.

4.3.2 Ajustement de la diversité

Après avoir choisi le type de diversité à introduire, c.-à.-d. deux plans différant d'une défocalisation globale, nous allons déterminer quelle configuration du capteur va nous permettre d'optimiser les performances des algorithmes. Dans cette sous-section, nous recherchons tout d'abord l'amplitude idéale, paramètre le plus important au vu de son influence sur les images, puis nous nous penchons

sur le placement des plans de diversité. En effet, rien n'oblige à utiliser le plan focal ; *a priori*, il est possible de placer librement les plans pour une défocalisation donnée.

4.3.2.1 Recherche de la défocalisation optimale

Comme les algorithmes de type diversité de phase exploitent la différence de contraste qui existe entre les images, l'amplitude de défocalisation, qui influe directement sur la qualité de ces dernières, est un paramètre qui peut s'avérer délicat à déterminer. Lorsque deux plans sont très éloignés, les images correspondantes deviennent très différentes les unes des autres. Inversement, si la phase de diversité est très faible, les images (et donc leur contraste) sont quasiment identiques. Or, dans ces deux cas extrêmes, la restauration est difficile à effectuer, ce qui entraîne une dégradation des performances. Il doit donc exister une région intermédiaire où l'estimation est optimale.

Malheureusement, la restauration de phase est également plus difficile à mettre en œuvre lorsque le contraste de la scène observée diminue. Par conséquent, il sera primordial de sélectionner précisément l'amplitude de l'aberration introduite si l'objet est peu contrasté. Plusieurs travaux réalisés avec des configurations monolithiques et visant à optimiser la défocalisation [Löfdahl & Scharmer (1994); Lee *et al.* (1999)] ont montré que, pour des scènes étendues fortement contrastées, la région donnant une estimation proche d'être optimale se situe aux environs de $[\pi\,;4\pi]$ radians crête-à-crête, soit $[0{,}9\,;3{,}6]$ rad RMS. Une étude relativement récente [Dolne *et al.* (2003)] a démontré qu'il existe de multiples régions de contraste qui sont fonction de la défocalisation, et que par conséquent il est possible de calculer analytiquement quelle est la défocalisation optimale.

Afin de déterminer l'évolution des performances en fonction de la défocalisation introduite, nous effectuons un test de simulation en appliquant un piston de $0{,}1$ radian sur l'une des sous-pupilles de la configuration de référence, et ce pour une phase de diversité ϕ_d ayant une amplitude comprise entre $[0{,}2\,;2]$ radians RMS (le premier plan étant le plan focal). Les conditions générales (configuration pupillaire, choix de l'objet, etc.) sont celles décrites à la sous-section 4.2.3. Le résultat, illustré Fig. 4.4, présente l'erreur totale en piston estimée sur l'ensemble des sous-pupilles obtenue avec l'algorithme analytique (en trait plein) et itératif (en pointillés). Les aberrations sont exprimées dans la base canonique mobile de façon à privilégier les modes locaux de la pupille aberrée.

Tout d'abord, nous pouvons remarquer l'existence d'une limite inférieure de défocalisation en dessous de laquelle les performances sont fortement dégradées. Ce seuil se situe aux alentours $0{,}6$ radian pour l'algorithme itératif_2 mais est un peu plus élevé en ce qui concerne l'estimateur analytique FUSCHIA_2 ($0{,}9$ rad). La borne supérieure est localisée vers $1{,}5$ voire 2 rad avec une augmentation de l'erreur bien plus progressive que pour les faibles aberrations de diversité.

En conclusion, pour une scène terrestre urbaine contrastée, la région optimale se situe clairement entre $0{,}9$ et 2 rad, tout algorithme confondu. Par la suite, nous retiendrons la valeur de 1 radian RMS comme étant la valeur de défocalisation de référence.

4.3.2.2 Placement des plans de diversité

Après avoir sélectionné la meilleure amplitude de défocalisation possible, nous allons examiner dans ce paragraphe comment la position des plans de diversité peut influer sur les performances des algorithmes. Pour une défocalisation donnée, il est *a priori* possible de placer les différents plans *ad libitum*. Or, dans la littérature, cette propriété n'est quasiment jamais exploitée.

Pour réaliser une simulation comparative, nous sélectionnons cinq placements différents :

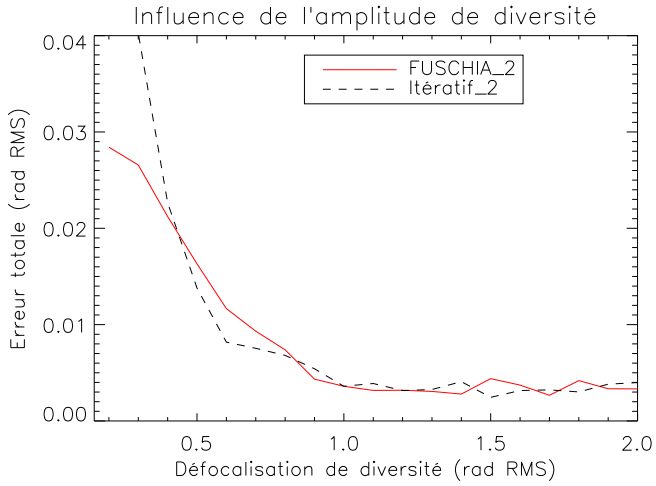


Fig. 4.4 – Erreur totale en piston obtenue pour une configuration à trois sous-pupilles en fonction de l'amplitude de défocalisation introduite.

- la première configuration, qui est celle employée dans la majeure partie des cas, est telle que les images sont acquises au plan focal ($\boldsymbol{\phi}_1 = 0$) et dans un plan défocalisé d'une distance $\boldsymbol{\phi}_2 = L$ rad. De fait, ce placement est avantageux car il permet de contrôler l'image obtenue au foyer de l'instrument ;
- nous choisissons également une configuration où les plans sont positionnés de manière symétrique de part et d'autre du plan focal, en $-L/2$ et $+L/2$; la différence entre les deux réponses impulsionnelles $\boldsymbol{h}_1$ et $\boldsymbol{h}_2$ est alors plus faible que dans le cas précédent. Dès lors, la question qui se pose est de savoir si la diversité de phase est encore capable de fournir des estimations correctes lorsque la différence de contraste entre les images diminue ;
- la troisième configuration, qui est une configuration intermédiaire entre le cas classique plan focal/plan défocalisé et le cas plus exotique décrit ci-dessus, comprend un plan se situant en$-L/3$ et un deuxième en $+2L/3$;
- enfin, nous choisissons deux cas de figure plus fortement défocalisés, en $\boldsymbol{\phi}_1 = 0{,}5$; $\boldsymbol{\phi}_2 = L + 0{,}5$ rad et en $\boldsymbol{\phi}_1 = 1$; $\boldsymbol{\phi}_2 = L + 1$ radian.

Le test comparatif est réalisé à fort flux ($N_{\text{bph}} = 5.10^8$ phe$^-$) pour quatre amplitudes L de diversité comprises entre $0{,}5$ et 2 rad RMS. Pour chacune d'entre elles, nous appliquons un piston de $0{,}1$ rad sur l'une des sous-pupilles de la configuration de référence et effectuons un tirage d'une cinquantaine d'images. Les données ainsi obtenues sont ensuite réduites avec l'algorithme analytique FUSCHIA_2 puis exprimées dans la base canonique mobile.

La Fig. 4.5 présente l'erreur totale en piston obtenue pour chaque valeur de L en fonction de la position des plans de diversité. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que comme attendu, le placement symétrique en $-L/2$; $L/2$ (en triangles) est à éviter lorsque l'amplitude de diversité est égale à $0{,}5$ ou 1 rad RMS. En effet, la différence entre $\boldsymbol{h}_1$ et $\boldsymbol{h}_2$ est alors trop faible pour que l'estimation soit correcte. Dans ce cas, mieux vaut privilégier la configuration classique plan focal/plan extra-focal (en carrés), voire même une configuration plus fortement aberrée telle que 1 ; $L + 1$ rad (en croix). A l'inverse, ces placements s'avèrent inappropriés pour de plus fortes amplitudes de diversité ; dès lors, pour éviter une trop grande différence entre $\boldsymbol{h}_1$ et $\boldsymbol{h}_2$, il est impératif de positionner les plans

de diversité de part et d'autre du plan focal. La configuration la plus intéressante reste toutefois la configuration plan focal/plan défocalisé avec une amplitude de diversité égale à 1 radian RMS.

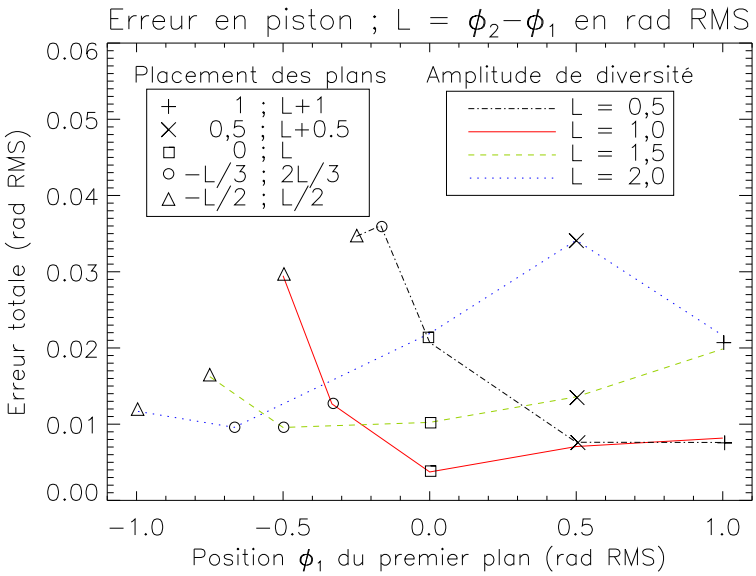


Fig. 4.5 – Influence du placement des plans de diversité pour différentes amplitudes L de défocalisation égales à 0,5 rad (en tirets plus points), 1 radian (en trait plein), 1,5 rad (en tirets) et 2 rad (en points). Pour chacune d'entre elles nous traçons, en fonction de la position du premier plan, l'erreur totale obtenue pour une configuration classique plan focal/plan extra-focal (en carrés) et des configurations plus exotiques (autres symboles).

En conclusion, l'intégralité des expériences visant à valider les capteurs de type diversité de phase sera effectuée à partir de deux plans, le premier étant le plan focal et le deuxième étant défocalisé d'une quantité $L = 1$ radian RMS. De plus, cette configuration offre un avantage supplémentaire puisque qu'elle permet de contrôler les images au foyer de l'instrument.

4.3.3 Estimation des différentes sources d'erreur

Une fois le capteur de diversité optimisé, il est important de déterminer l'influence des différentes sources d'erreur qui sont susceptibles d'affecter les performances de reconstruction. Dans cette sous-section, nous allons donc chercher à identifier la zone de tolérance où les performances de l'algorithme analytique ne sont pas ou peu affectées par la méconnaissance de la phase de diversité ainsi que par le repliement des ordres supérieurs.

4.3.3.1 Connaissance de la défocalisation

Comme la valeur de la phase de diversité introduite est utilisée dans la résolution du problème inverse pour modéliser la formation des images, il est primordial d'évaluer l'impact de la méconnaissance de ce paramètre sur la qualité de restauration. En effet, si l'aberration introduite entre les plans n'est pas parfaitement connue, le problème inverse n'est plus conforme au modèle direct et la phase incidente ne peut plus être correctement estimée.

Afin d'identifier le niveau de précision requis, nous simulons pour $N_{\text{bph}} = 5.10^8$ phe$^-$ des paires d'images focales/défocalisées de $\phi_d = 1$ rad RMS ; un jeu aléatoire de pistons et basculements, listé Tab. 4.2, est appliqué sur l'ensemble des sous-pupilles de sorte que l'amplitude absolue totale soit de l'ordre de $\lambda/5$ RMS, (1,5 radian). Les données sont ensuite réduites par l'algorithme FUSCHIA_2 avec une phase de diversité inexacte allant de 0,7 à 1,3 rad RMS.

	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	−0,251	−0,052	0,056
pupille 2	0,485	−0,053	0,196
pupille 3	−0,164	0,058	0,278

Tab. 4.2 – Jeu aléatoire d'aberrations (en rad RMS) introduit sur la configuration pupillaire de référence.

L'erreur totale ainsi obtenue sur l'ensemble des sous-pupilles pour les différentes valeurs de diversité spécifiées ci-dessus est illustrée Fig. 4.6. Ce graphe démontre clairement que l'incertitude concernant la diversité peut s'avérer critique pour l'évaluation des aberrations recherchées. Avec une phase résiduelle de $\lambda/5$, il est nécessaire de connaître la valeur de la défocalisation introduite à moins de 15 % afin de conserver une erreur inférieure à $\lambda/60$ (soit environ 0,1 radian) telle que spécifiée par le budget d'erreur de l'instrument (voir sous-section 1.1.5 page 16) ; au delà de ce seuil, qui représente l'erreur maximale pouvant être commise sur le cophasage afin qu'un ISOO puisse imager des scènes étendues avec une qualité instrumentale satisfaisante, les performances sont rapidement dégradées. Il sera donc indispensable d'utiliser une procédure de calibration de la défocalisation dans le cadre de tests expérimentaux. Notons toutefois que la diversité de phase itérative permet d'estimer conjointement les résidus de défocalisation et les aberrations recherchées, ce qui en soi est déjà une première étape de calibration.

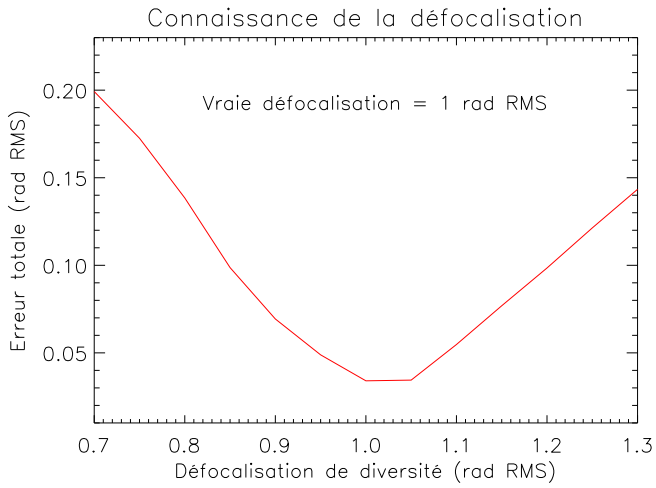


Fig. 4.6 – Pour une amplitude de défocalisation vraie de 1 radian, erreur totale obtenue après réduction des données à partir d'une amplitude inexacte allant de 0,7 à 1,3 rad RMS.

4.3.3.2 Influence des modes supérieurs

Nous avons souligné à la sous-section 1.2.4 page 24 que le cophasage proprement dit concerne la mesure des pistons et basculements différentiels. Cependant, en pratique, les modes dits *supérieurs*[5], qui sont principalement dus au défauts d'alignement intra-pupillaires ainsi qu'aux aberrations et défauts de surface présents sur les différentes optiques de l'instrument, existent bel et bien. Ces résidus concernent principalement les modes Z_5 (astigmatisme) à Z_{11} (aberration sphérique), leur amplitude étant en général du même ordre de grandeur. Or, si les estimateurs itératifs sont désormais capables d'estimer chacun de ces modes, comme nous le verrons au chapitre 6 page 135, nos estimateurs analytiques ne sont *a contrario* pour l'instant pas en mesure d'évaluer l'amplitude des aberrations correspondantes ; ces dernières vont donc avoir tendance à se replier sur les pistons et basculements et par conséquent à dégrader les performances du senseur[6].

Pour déterminer le seuil au delà duquel l'influence des hauts ordres n'est plus négligeable, nous simulons des images en introduisant sur chaque sous-pupille des jeux d'aberrations allant de Z_4 à Z_{11}, tandis que les pistons et basculements locaux restent nuls ; l'amplitude de chacun des modes est alors graduellement augmentée. Les données sont ensuite traitées avec l'algorithme analytique FUSCHIA_2. Le résultat, illustré Fig. 4.7, présente l'erreur totale d'estimation en fonction de l'amplitude moyenne des modes introduits.

Nous pouvons remarquer que l'erreur ainsi estimée augmente quadratiquement avec l'amplitude des modes supérieurs. Ainsi, pour obtenir une erreur qui soit inférieure à 10^{-2} radian RMS soit $\lambda/100$, il est nécessaire que les aberrations ne dépassent pas $\lambda/15$ sur l'ensemble des sous-pupilles, ce qui apparaît comme étant réaliste au vu du budget d'erreur spécifié en sous-section 1.1.5 page 16. Nous verrons dans le chapitre 6 page 135 que cet impératif est bien respecté sur BRISE, le banc de tests de l'ONERA dédié au cophasage multipupille.

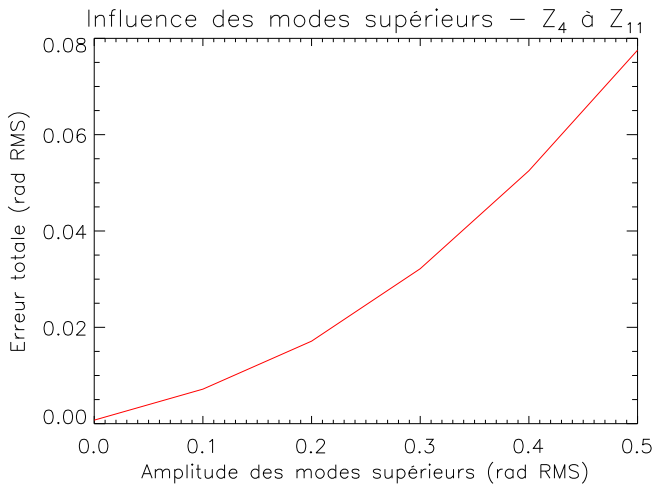


Fig. 4.7 – Erreur totale obtenue en fonction de l'amplitude des modes supérieurs introduits, les dits modes allant de la défocalisation à l'aberration sphérique (en rad RMS).

[5]Nous rappelons que les modes *supérieurs*, ou aberrations de hauts ordres, sont par définition des modes qui sont supérieurs ou égaux à la défocalisation.

[6]A moins que les sous-pupilles soient elles-mêmes constituées d'un nombre important de segments ; dans ce cas, les modes supérieurs peuvent être approximés au premier ordre par leurs composantes en piston et basculements.

4.4 Etude des performances de l'estimateur analytique

Nous nous proposons dans cette section de caractériser les performances de l'estimateur analytique puis de les comparer aux résultats obtenus avec l'algorithme itératif associé. Dans un premier temps, les tests réalisés ont pour objectif de vérifier la validité de FUSCHIA_2 en mode opératoire classique : pour une configuration expérimentale donnée, nous allons étudier les propriétés asymptotiques correspondantes, et ce pour des aberrations plus ou moins importantes et à RSB peu ou prou élevé.

Les tests à configuration variable sont quant à eux réalisés en général à phase incidente nulle afin d'identifier les paramètres critiques et de définir les limites de validité des algorithmes considérés. En effet, le nombre de sous-pupilles mis en jeu ou le type de scène observée sont des facteurs dont l'influence n'a encore jamais vraiment été étudiée en diversité de phase multipupille.

4.4.1 Estimation du piston

Nous allons caractériser la précision d'estimation puis évaluer la capacité de l'estimateur analytique à fonctionner sur de plus ou moins fortes aberrations en piston. Nous rappelons que les conditions générales de simulation sont décrites à la sous-section 4.2.3 et que les grandeurs statistiques utilisées sont présentées dans l'annexe D page 201.

4.4.1.1 Performances attendues

Afin d'évaluer les performances d'estimation de FUSCHIA_2 en fonction du nombre de photons incidents, nous effectuons un test de répétabilité sur des séries de mesures indépendantes. En théorie, l'écart-type σ (en rad RMS) d'une estimation de phase faite à une fréquence spatiale donnée est telle que [Shao & Staelin (1980)] :

$$\sigma \propto \frac{\tau}{\sqrt{N_{\text{pix}}}\,\text{RSB}} \tag{4.7}$$

où RSB est le rapport signal-à-bruit par pixel défini Eq. (4.5) et τ un cœfficient dépendant de la méthode de mesure utilisée ainsi que du contraste des franges d'interférences. Rappelons que de manière générale, les procédures de cophasage interviennent après pointage de l'instrument et accrochage des franges. Or, cette dernière opération de *cohérençage* doit également permettre de se placer près du maximum de l'enveloppe de cohérence. Par la suite, nous considérerons donc que pour un cophasage de type plan focal, le contraste des franges est maximal.

Intéressons nous maintenant de plus près à la signification du cœfficient τ. D'après l'Eq. (4.7), la précision d'estimation est d'autant meilleure que τ est faible. Or, pour une configuration monolithique, il a notamment été démontré [Meynadier *et al.* (1999)] que la variance augmente avec l'ordre des modes de Zernike que l'on recherche. Le paramètre τ doit donc refléter ce comportement ; par conséquent, il est intrinsèquement lié à l'estimateur que l'on souhaite caractériser. Nous verrons plus loin au paragraphe 4.4.3.2 et à la sous-section 4.4.4 que le cœfficient τ est également dépendant des conditions expérimentales, tel que le type d'objet observé.

Les différents régimes d'un estimateur Les Eq. (4.5) et (4.7) indiquent que la valeur de l'écart-type décroît avec le nombre de photo-électrons contenus dans l'image. Notons que l'erreur sur les estimées doit suivre une loi de décroissance identique, le biais étant idéalement nul ou suivant le même

comportement que l'écart-type. A ce titre, nous pouvons en théorie distinguer différents régimes de fonctionnement :

- à moyen et à fort flux le bruit de photons domine ; l'écart sur les estimées évolue en suivant une loi en $1/\sqrt{N_{\text{bph}}}$. Ce régime est en principe le régime nominal en imagerie où les mesures sont généralement réalisées dans des conditions photométriques optimales ;
- à faible flux, le bruit de lecture est prédominant par rapport au bruit de photons ; l'écart-type des estimateurs suit alors une loi en $1/N_{\text{bph}}$. Expérimentalement, l'étendue de ce régime dépend du capteur utilisé. Si son bruit de lecture est insignifiant, alors ce régime sera quasi-inexistant ;
- lorsque le nombre de photons par pixel est très faible, le rapport signal-à-bruit devient trop mauvais pour que la reconstruction de phase soit possible. Les estimées sont alors aléatoirement distribuées sur toute la dynamique des estimateurs, qui est de 2π. Or, l'écart-type associé à ce type de mesure[7] est tel que $\sigma = 2\pi/\sqrt{12}$, soit $1{,}8$ rad ; nous devrions donc observer une saturation aux alentours de cette valeur pour des flux suffisamment faibles.

Nous soulignons qu'il peut exister un quatrième régime de fonctionnement lorsque le rapport signal-à-bruit est considérable : dans ce cas, le bruit numérique de calcul prédomine. Expérimentalement, nous ne serons cependant ni limité par le bruit de calcul ni confronté au régime de saturation apparaissant à faible flux. C'est pourquoi nous présentons dans ce chapitre des simulations de performances pour des flux réalistes et *a priori* accessibles sur banc expérimental.

4.4.1.2 Résultats préliminaires

Afin de vérifier que notre estimateur FUSCHIA_2 suit bien le comportement théorique décrit ci-dessus avec des performances proches de celles de l'estimateur itératif_2, nous testons les deux algorithmes dans les mêmes conditions à aberration incidente nulle, et ce pour une gamme de flux très étendue (RSB allant de 4 à 676). L'erreur totale en piston, estimée sur l'ensemble des sous-pupilles, est illustrée Fig. 4.8 gauche. Puisque les trois premiers modes globaux n'ont pas de sens sur objet étendu, nous avons pris soin de les enlever en privilégiant la base canonique cohérente définie au paragraphe 4.2.2.2, qui restitue les aberrations hors contributions du piston et des basculements globaux. Nous avons également tracé sur la Fig. 4.8 droite l'erreur obtenue en présence d'une faible phase incidente. Les aberrations appliquées sur l'ensemble des sous-pupilles, listées Tab. 4.3, sont telles que l'amplitude absolue totale résultante soit de l'ordre de $\lambda/12$, soit $0{,}53$ rad RMS.

En analysant le graphe représentant l'évolution des performances à phase incidente nulle, nous remarquons que l'erreur obtenue à fort flux avec l'estimateur FUSCHIA_2 (en cercles) est plus importante que celle associée à l'estimateur itératif (en points). Or, puisque nous n'avons pas introduit d'aberration, la mise sous forme affine de la FTO effectuée par l'algorithme analytique est exacte ; dans ce cas, le critère de minimisation est le même pour les deux algorithmes. Par conséquent, ces derniers devraient suivre en régime de bruit de photons une loi identique en $1/\sqrt{N_{\text{bph}}}$. Or, si l'erreur correspondant à l'estimateur analytique devient plus faible lorsque le RSB augmente, elle ne suit malheureusement pas la loi attendue. En ce qui concerne les faibles et moyens flux, nous constatons que les algorithmes ne présentent pas du tout le même comportement ! En effet, lorsque nous diminuons le

[7] En effet, rappelons que la variance associée à la mesure est telle que $\sigma^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}$. Pour une distribution uniforme de largeur p centrée en $\mathrm{p}/2$, nous obtenons :

$$\sigma^2 = \frac{2}{\mathrm{p}} \int_0^{\mathrm{p}/2} \left(x - \frac{\mathrm{p}}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{p}^2}{12} \tag{4.8}$$

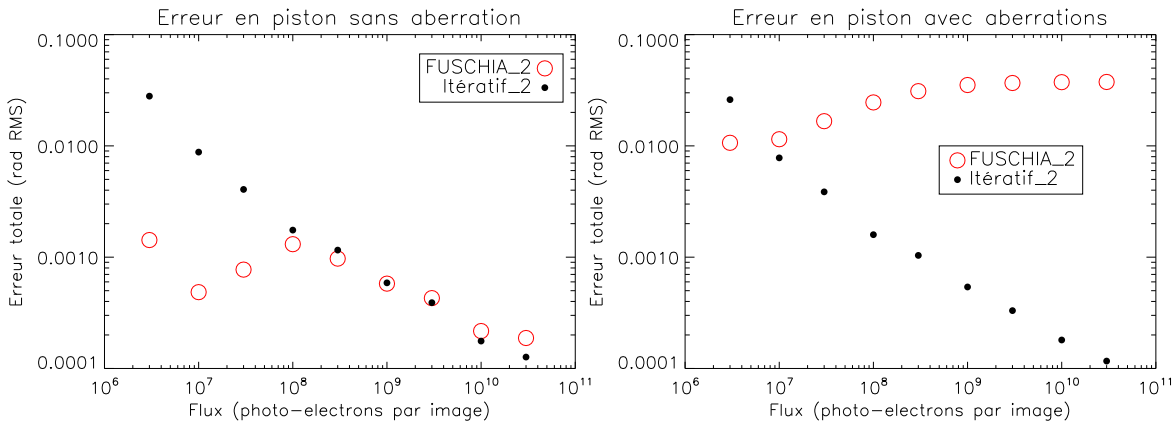


Fig. 4.8 – Performances en piston obtenue avec les estimateurs itératif_2 et FUSCHIA_2 tels que décrits jusqu'ici : l'erreur totale est tout d'abord estimée sur l'ensemble des sous-pupilles à phase aberrante nulle (à gauche), puis en présence d'un jeu aléatoire de pistons et basculements d'amplitude totale $0{,}53$ rad RMS (à droite).

rapport signal-à-bruit, l'erreur correspondant à FUSCHIA_2 diminue également puis remonte brusquement aux alentours de $1{,}5\,.10^{-3}$ radian, alors que pour une restauration itérative elle est comme attendue inversement proportionnelle au nombre de photo-électrons contenus dans l'image. Pire, en présence d'aberrations comme illustré sur le graphe Fig. 4.8 droite, les performances obtenue avec FUSCHIA_2 sont optimales pour 10^7 photo-électrons par image, ce qui correspond à un faible RSB de 10 ; le plus surprenant est que l'erreur augmente par delà cette valeur, et ce pour des flux plus importants !

Au final, l'estimateur analytique FUSCHIA_2 tel que décrit jusqu'à présent ne donne pas du tout les performances escomptées.

	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	$-0{,}084$	$-0{,}017$	$0{,}019$
pupille 2	$0{,}161$	$-0{,}018$	$0{,}065$
pupille 3	$-0{,}055$	$0{,}019$	$0{,}092$

Tab. 4.3 – Jeu aléatoire d'aberrations introduit sur la configuration pupillaire de référence (en rad RMS).

4.4.1.3 Amélioration de l'algorithme analytique

Comment expliquer une telle différence de comportement entre nos deux algorithmes ? Pour cela, revenons dans un premier temps à l'inversion matricielle $[\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})]^\dagger$ définie Eq. (2.8) page 43 lors de la minimisation du critère[8]. Comme explicité au paragraphe 2.2.2.2 page 43, cette opération est effectuée en décomposant le terme $\boldsymbol{T} = \Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$ en valeurs propres/vecteurs propres et en filtrant les modes globaux (qui par définition sont des modes n'ayant pas d'intérêt sur objet étendu) lors de

[8]Nous rappelons que la matrice $\boldsymbol{A}$ représente la réponse du critère à une perturbation de phase ; elle est donc définie pour chaque sous-pupille et pour chaque mode de perturbation.

l'inversion matricielle. En pratique, ce filtrage est effectué pour les trois valeurs singulières les plus faibles. Par comparaison, les valeurs propres normalisées obtenues à la suite d'une estimation réalisée à phase incidente nulle et pour un RSB de 87 sont listées Tab. 4.4.

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9
$1{,}8.10^{-17}$	0,0084	0,0162	0,0725	0,0910	0,1322	0,4495	0,4566	1

Tab. 4.4 – Liste des valeurs propres $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,9}$ de la matrice $[\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})]$ normalisées à $\max(\xi_i) = 1$ pour une estimation effectuée à fort flux et à phase incidente nulle.

Filtrage de la seule valeur propre du piston En effectuant ce filtrage, l'influence des modes globaux n'est pas prise en compte dans le calcul des aberrations. Mais, si dans le cas d'une configuration multipupille la définition d'un piston global n'est pas sujette à caution (toutes les sous-pupilles sont alors affectées d'une même constante de phase), il n'en va pas de même pour les basculements dont l'interprétation est plus délicate. En effet, nous avons vu à la sous-section 4.2.2 qu'un basculement global se décomposait en pistons et basculements locaux sur les sous-pupilles ; or, réciproquement, un piston local (que nous souhaitons estimer) peut être vu comme... la somme de tilt locaux plus un piston et un basculement global ! Au final, les modes basculements globaux sont mal vus, certes, mais apportent tout de même de l'information sur les pistons locaux, ce qui explique pourquoi leur valeur propre ξ_2, ξ_3 Tab. 4.4 n'est pas aussi faible que celle correspondant au piston.

En regard des éléments susmentionnés, nous supprimons le filtrage des basculements globaux initialement mis en œuvre lors de l'inversion de la matrice $\boldsymbol{T}$. Cependant, nous insistons sur le fait qu'une fois les aberrations retrouvées, nous pouvons parfaitement les exprimer dans la base canonique cohérente hors piston et basculement global.

L'évolution des performances en piston ainsi obtenues à phase incidente nulle en ne filtrant que le mode piston est représentée Fig. 4.9. Nous pouvons remarquer que, par comparaison avec le graphe Fig. 4.8 gauche, la mise à zéro de la seule valeur propre correspondant au piston permet de tendre à moyen flux vers les performances de l'algorithme itératif. De plus, la décroissance initialement observée à faible RSB s'en trouve fortement limitée. Nous voyons également que les deux algorithmes n'ont absolument pas le même comportement quand le bruit de détecteur domine. Cette constatation n'est pas surprenante en soi et s'explique simplement par le fait que l'estimateur analytique ne peut retrouver la phase aberrante si le RSB est trop faible ; dans ce cas, les estimées sont toutes distribuées autour de zéro, et ce quelles que soient les aberrations introduites.

Le filtrage modal sélectif permet donc d'obtenir une courbe d'erreur plus proche de celle attendue. Cependant, une décroissance, bien que faible, s'observe toujours lorsque le flux diminue ; de plus, l'erreur associée à FUSCHIA_2 est encore légèrement supérieure à celle obtenue avec l'estimateur itératif pour un RSB > 390.

Filtrage fréquentiel Pour améliorer le comportement de l'estimateur analytique en régime de bruit de détecteur ainsi qu'à très fort flux, reprenons l'expression quadratique du critère de minimisation comme définie Eq. (2.6) page 42. Le terme $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a})$, qui dépend explicitement des aberrations a_{kn} recherchées, dépend également des données observées, et ce de manière linéaire. Ainsi, une forte diminution du nombre de photo-électrons dans l'image se traduit directement par une amplification du bruit dans le terme $\boldsymbol{A}$. Or, nous avions remarqué à la sous-section 2.3.3 page 53 que seule la zone de recouvrement des pics de la FTO est utile pour l'estimation des pistons. Cependant, cette zone est

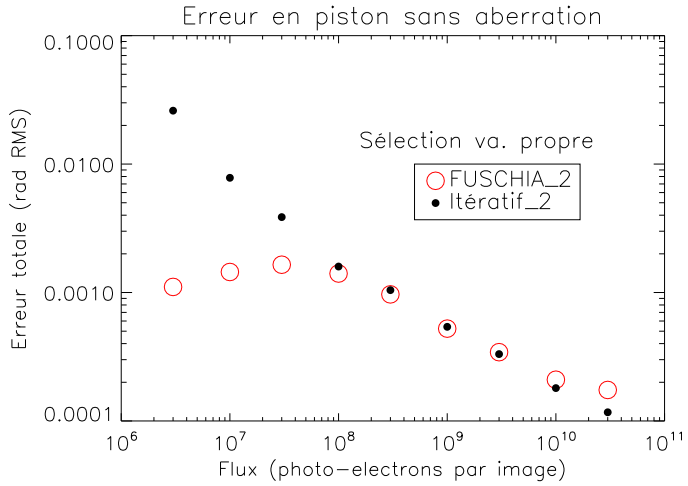


Fig. 4.9 – Erreur en piston obtenue à phase incidente nulle après une première optimisation de FUSCHIA_2 en ne filtrant que la valeur propre du piston.

relativement petite comparée à la surface occupée par l'ensemble des pics de la fonction de transfert ; ainsi, lorsque le RSB diminue, le bruit devient prépondérant dans l'expression en piston de la matrice $\boldsymbol{A}$. Cet effet est illustré Fig. 4.10 :

- le dessin situé à l'extrême gauche représente la Fonction de Transfert de Phase obtenue après application d'un piston sur la sous-pupille $n = 0$. Nous voyons que, comme attendu, cette aberration génère une constante de phase sur les pics satellites des bases concernées (en noir et en blanc). Intéressons-nous maintenant aux zones de recouvrement où la pupille $n = 0$ est impliquée : pour estimer la phase aberrante, seules les zones où la phase varie (représentées en hachuré) seront prises en compte. Dès lors, le reste du domaine fréquentiel se trouve présentement inutile ;
- la figure du milieu illustre la partie réelle du terme $\boldsymbol{A}(a_{1;0})$ (c.-à.-d. la contribution en piston de la pupille 0 à la FTO) obtenue à fort RSB. Nous pouvons remarquer que les zones où la phase varie sont bel et bien prépondérantes et se détachent de façon nette ;
- à l'inverse, lorsque le bruit augmente (voir figure de droite), les zones d'intérêt deviennent difficilement identifiables, rendant par la même occasion l'extraction de phase beaucoup plus délicate.

Afin de maîtriser cette propagation, nous limitons la composante en piston de la matrice $\boldsymbol{A}$ aux seules zones de recouvrement. Afin de vérifier l'apport de cette nouvelle optimisation, nous retraitons les données acquises précédemment sans aberration incidente. En analysant le nouveau graphe d'erreur présenté Fig. 4.11, nous voyons que le filtrage fréquentiel permet d'obtenir à moyen et à fort RSB les mêmes performances que l'estimateur itératif. De plus, la décroissance observée à l'origine pour de faibles flux n'est plus d'actualité ; en régime de bruit de photons, l'estimateur FUSCHIA_2 sature à 3.10^{-3} phe^{-}.

Nous venons de voir dans ce paragraphe que l'optimisation de FUSCHIA_2, de part la mise à zéro de la seule valeur propre associée au piston et de par le filtrage fréquentiel, permet d'obtenir une erreur sur les estimées bien plus proche de la valeur vraie. Nous allons donc maintenant pouvoir comparer l'ensemble des performances correspondant à cette version améliorée de l'algorithme en

présence ou non d'aberrations.

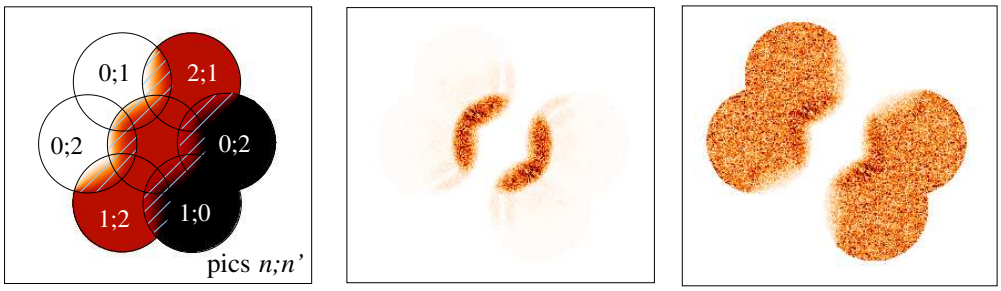


Fig. 4.10 – A gauche : illustration de la FTP obtenue en présence d'un piston sur la sous-pupille $n = 0$. Parmi les pics $0n'$, les zones de recouvrement *utiles* pour la restauration de phase sont illustrées en hachuré. Au milieu : contribution en piston de la pupille 0 à la FTO obtenue à fort RSB, puis à faible RSB (à droite).

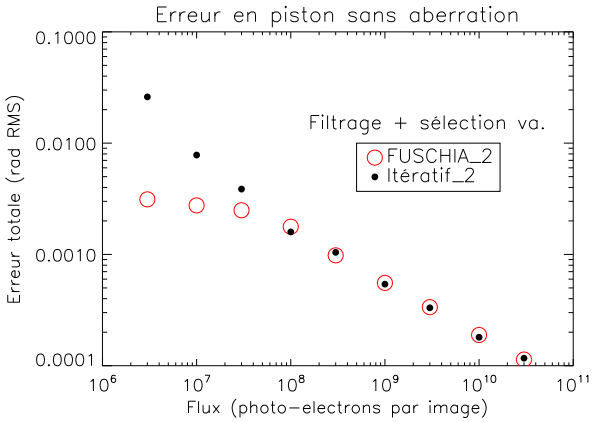


Fig. 4.11 – Erreur en piston obtenue à phase incidente nulle après optimisation de FUSCHIA_2 en ne filtrant que la valeur propre du piston puis en rajoutant, en plus de ce filtrage modal, un filtrage fréquentiel prenant en compte les seules zones de recouvrement.

Comparaison des estimateurs itératif et analytique Les performances obtenues sans aberration incidente avec la version améliorée de l'estimateur analytique FUSCHIA_2 (en cercles) sont portées sur l'ensemble des graphes de la Fig. 4.12 puis comparées dans la base canonique cohérente aux résultats associés à l'estimateur itératif (en points). Nous rappelons au lecteur que nous avons utilisé le même jeu d'images dans les deux cas. Comme attendu, l'écart-type des estimées, illustrée sur le graphe en haut à droite, suit bien une loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ en régime de bruit de photons lorsque le flux est supérieur à 10^7 phe$^-$ (soit pour un RSB > 10). L'ajustement de cette loi nous donne :

- un cœfficient τ égal à 18 pour FUSCHIA_2 ;
- une valeur de τ égale à 16 avec itératif_2.

Ces deux valeurs montrent bien que les performances des deux algorithmes sont très proches à phase incidente nulle pour des flux typiques d'imagerie. La légère différence qui existe entre les cœfficients peut s'expliquer par le nombre relativement réduit de mesures (seulement cinquante) sur

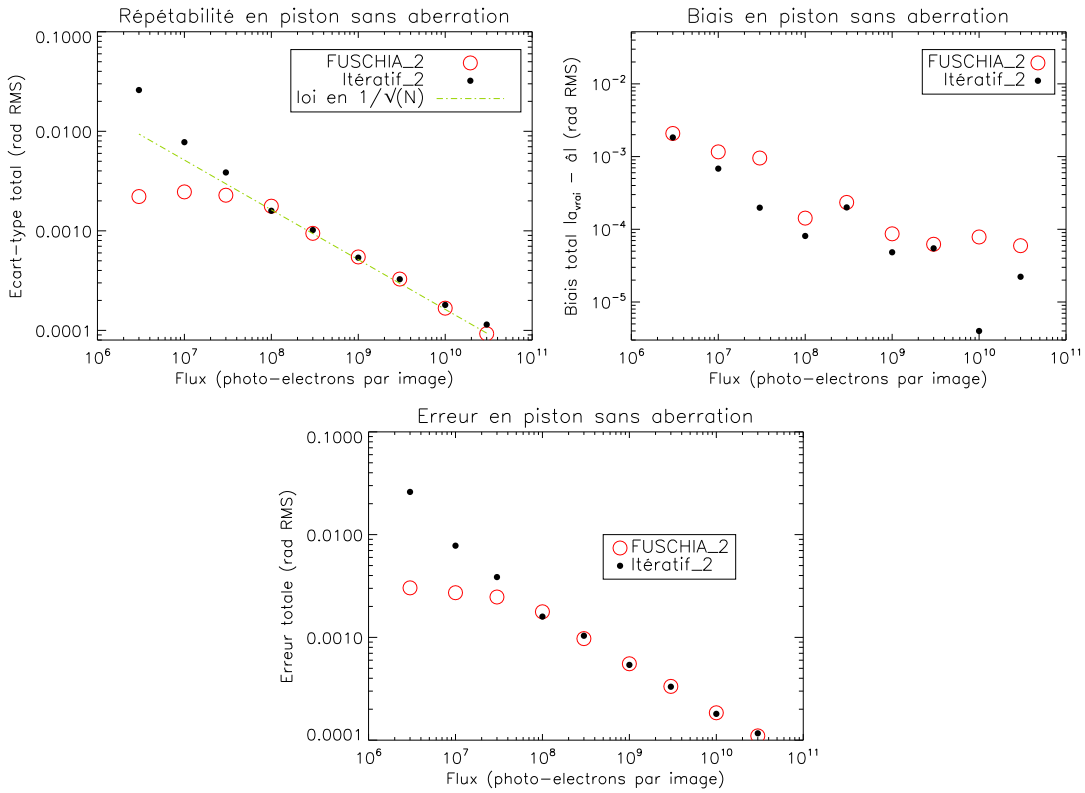


Fig. 4.12 – Performances en piston des estimateurs multiplans après optimisation de FUSCHIA_2 : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle (en rad RMS).

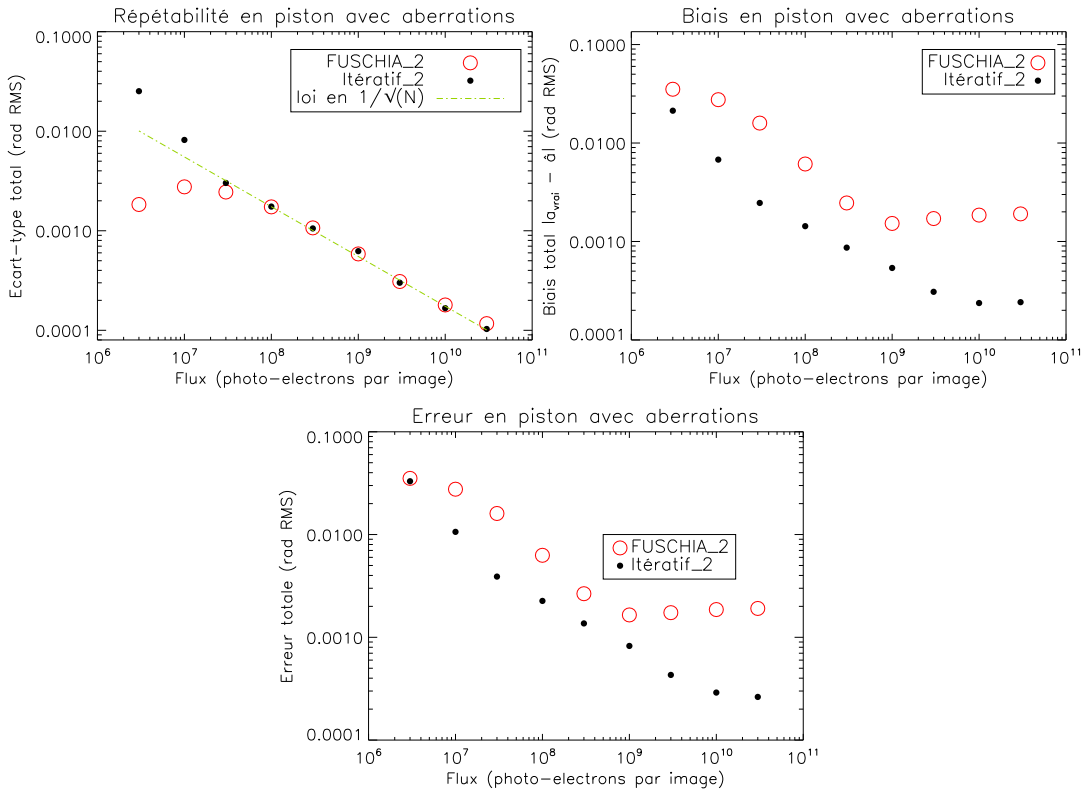


Fig. 4.13 – Performances en piston des estimateurs multiplans après optimisation de FUSCHIA_2 : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations dont l'amplitude absolue totale est de $0{,}53$ rad RMS ($\lambda/12$).

lequel est effectuée la statistique. Pour des flux moins importants, l'allure générale de l'écart-type (et *a fortiori* celle de l'erreur) n'est plus commune à FUSCHIA_2 et à itératif_2 : si, pour ce dernier, l'écart sur les estimations suit une loi en $1/N_{\text{bph}}$, celui associé à l'estimateur analytique atteint au contraire une valeur de saturation égale à $2{,}2\,.10^{-3}$ rad pour des rapports signal-à-bruit inférieurs à 10. En effet, comme nous l'avions déjà souligné précédemment, le flux est trop faible pour que FUSCHIA_2 puisse estimer la phase incidente ; les aberrations retrouvées sont alors toutes distribuées autour de zéro. Nous verrons plus loin au paragraphe 4.4.3.2 que la valeur du plateau correspondant dépend directement du nombre de pixels contenus dans les images. Notons également que la limite entre le régime de bruit de photons et le régime de bruit de détecteur dépend bien entendu de la valeur du bruit de lecture σ_b introduit. En théorie, ce coude devrait apparaître lorsque le flux par pixel est de l'ordre de grandeur de σ_b^2, ce qui équivaut à un nombre de photons total dans l'image égal à $N_{\text{pix}}\sigma_b^2$, soit $6{,}5\,.10^6$ phe$^-$. Enfin, nous pouvons également noter que le biais absolu décroît globalement lorsque le rapport signal-à-bruit augmente. Soulignons qu'en dessous de 10^{-3} rad ce biais n'est plus significatif ; en conséquence, nous pouvons le considérer comme nul.

Après avoir étudié les performances de l'algorithme analytique à phase incidente nulle, nous introduisons un jeu aléatoire d'aberrations (listé Tab. 4.3) dont l'amplitude absolue totale est de $0{,}53$ rad RMS, soit $\lambda/12$. Les graphes Fig. 4.13 présentent l'écart-type, le biais ainsi que l'erreur totale des deux estimateurs, analytique et itératif, obtenus pour l'estimation des pistons. Tout d'abord, nous constatons que la valeur prise par les écart-types est légèrement supérieure au cas idéal à phase incidente nulle. La différence la plus notoire apparaît cependant au niveau du biais : au contraire de l'algorithme itératif dont le biais décroît en fonction du flux, celui associé à FUSCHIA_2 atteint un seuil de 2.10^{-3} rad, soit environ $\lambda/3100$; la restauration est donc effectuée avec une excellente précision, et ce pour $N_{\text{bph}} \geq 10^9$ phe$^-$ (RSB ≥ 123). Nous voyons que même à moyen et faible flux, le biais correspondant est toujours supérieur à celui obtenu avec l'estimateur itératif. Cette observation n'est pas surprenante en soi, puisque la mise sous forme affine de la FTO effectuée par FUSCHIA_2 n'est strictement exacte qu'à phase incidente nulle. Le plateau observé correspond ainsi à la limite mathématique inhérente à notre développement analytique.

En conclusion, nous avons montré qu'une fois optimisé, l'algorithme FUSCHIA_2 présente des performances tout à fait satisfaisantes et assez proches de celles obtenues avec l'estimateur itératif dans les conditions d'utilisation normales d'un système d'imagerie fonctionnant en boucle fermée.

4.4.1.4 Linéarité

Après avoir analysé les performances de FUSCHIA_2 sur de faibles aberrations, nous allons déterminer si, à partir d'une configuration donnée, les estimateurs sont capables de corriger de plus fortes perturbations de phase. Pour cela, nous appliquons sur l'une des sous-pupilles de la configuration de référence une rampe de piston présentant cinquante-et-une valeurs comprises entre $[-2\pi\,;2\pi]$, avec dix points de mesure par valeur. Les données sont ensuite réduites avec les deux algorithmes, analytique et itératif ; les résultats correspondants, illustrés Fig. 4.14, sont exprimés dans la base canonique mobile, ce qui permet de privilégier les modes locaux de la sous-pupille aberrée.

Intéressons-nous tout d'abord au graphe de gauche qui présente les aberrations de piston estimées sur la sous-pupille mobile en fonction de la rampe introduite. Tout d'abord, nous constatons que la reconstruction réalisée par l'algorithme analytique est excellente entre $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$; la rampe est estimée entre ± 1 radian avec une pente de valeur 1 et un biais quasi-nul à l'origine quel que soit l'estimateur considéré. Le graphe de droite, qui trace le biais absolu correspondant à FUSCHIA_2, montre que les aberrations sont surestimées au delà de 1 radian du fait de l'approximation faible

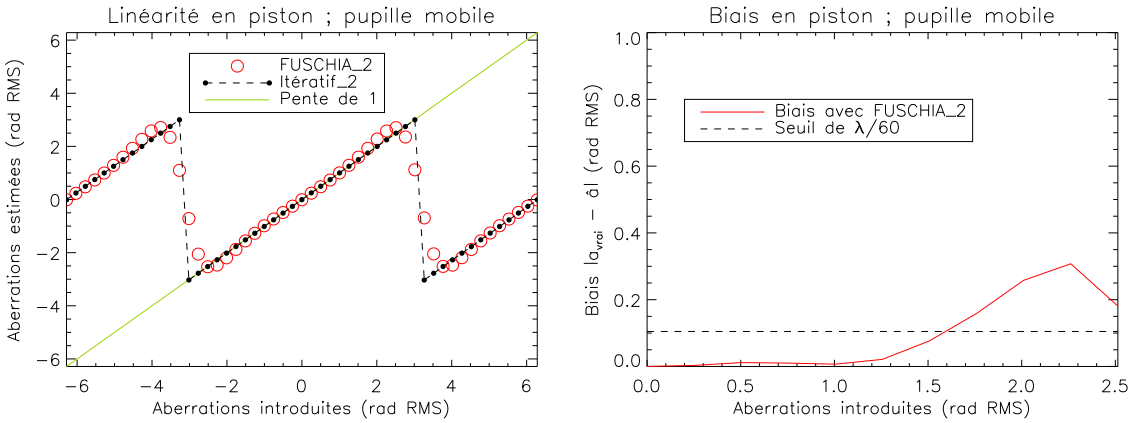


Fig. 4.14 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus par les estimateurs de type diversité de phase en réponse à une rampe de piston de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille (en rad RMS).

phase ; le biais augmente alors très rapidement et dépasse le seuil de précision de $\lambda/60$ RMS (spécifié dans le budget d'erreur en sous-section 1.1.5 page 16) pour $\pi/2$ rad.

Nous constatons également que l'estimateur itératif se replie lorsque la phase incidente est équivalente à $\pm\pi$: de fait, un piston a_{1n} appliqué sur la sous-pupille n a pour effet de déplacer les franges d'interférences selon la position de la pupille mobile ; dès lors, la réponse impulsionnelle obtenue pour $a_{1n} = x$ et celle correspondant à $a_{1n} = x + 2\pi$ sont identiques, à condition tout du moins de rester près du maximum de l'enveloppe de cohérence. De plus, d'après le formalisme décrivant la formation d'une image au foyer d'un instrument, la phase intervient comme argument d'une exponentielle complexe définie à 2π près. Par conséquent, sans procédure de déroulage, l'information de phase ne peut être contenue que dans un domaine compris entre $[-\pi\,;\,\pi]$ *ad maxima*. Ces repliements sont également visibles avec l'algorithme analytique mais, du fait de la dynamique réduite de l'estimateur, apparaissent dès que la phase incidente atteint 2,5 radians.

Au final, l'estimation du piston est validée à fort flux sur l'objet de référence pour des phases aberrantes inférieures à $\pi/2$ rad RMS. Par la suite, nous verrons à la sous-section 4.4.3 que le biais dépend intrinsèquement du type d'objet observé.

4.4.2 Estimation des basculements

Après avoir caractérisé les performances de l'estimateur analytique pour la restauration du piston, nous analysons dans cette sous-section les propriétés asymptotiques obtenues pour l'estimation des basculements.

4.4.2.1 Performances

La précision d'estimation de FUSCHIA_2 pour les basculements est évaluée de la même manière qu'au paragraphe 4.4.1.3, tout d'abord à phase incidente nulle puis en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations appliqué sur l'ensemble des sous-pupilles. Nous avons donc utilisé les mêmes données que précédemment (rappelons que le RSB varie entre 4 et 676). Les graphes de performances correspondants (écart-type, biais et erreur globale) à phase incidente nulle sont représentés Fig. 4.15 dans

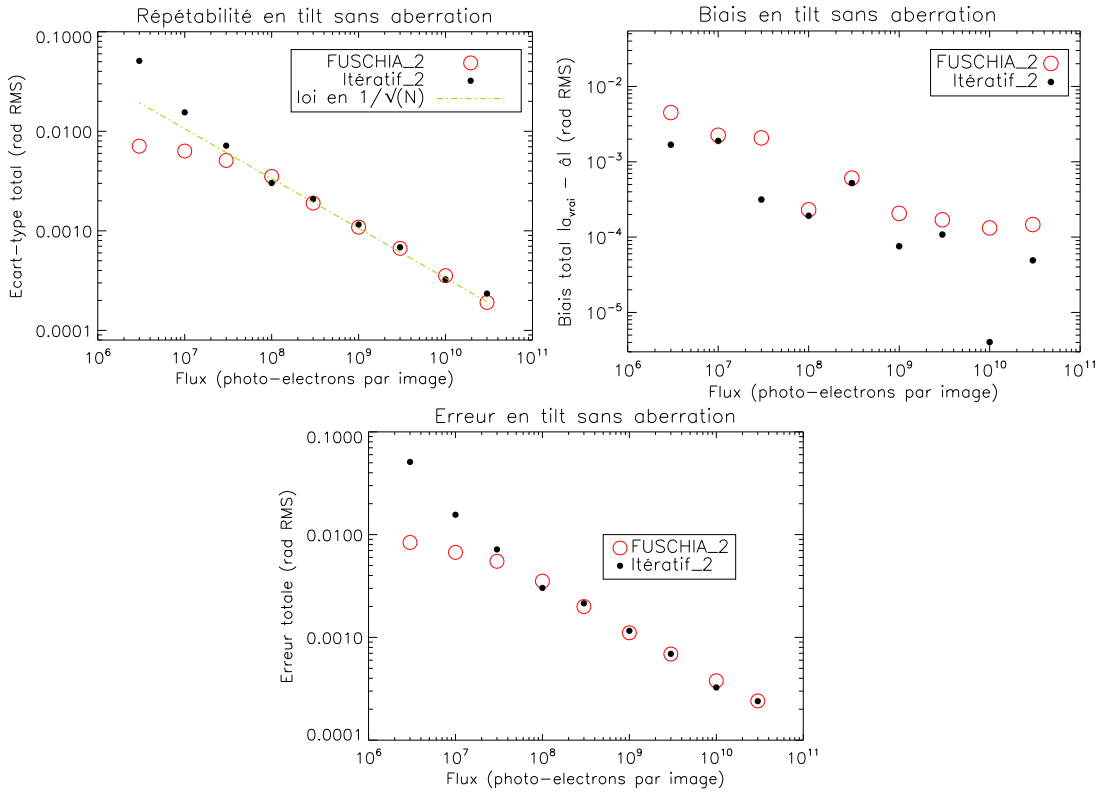


Fig. 4.15 – Performances en basculement des estimateurs multiplans après optimisation de FUSCHIA_2 : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle (en rad RMS).

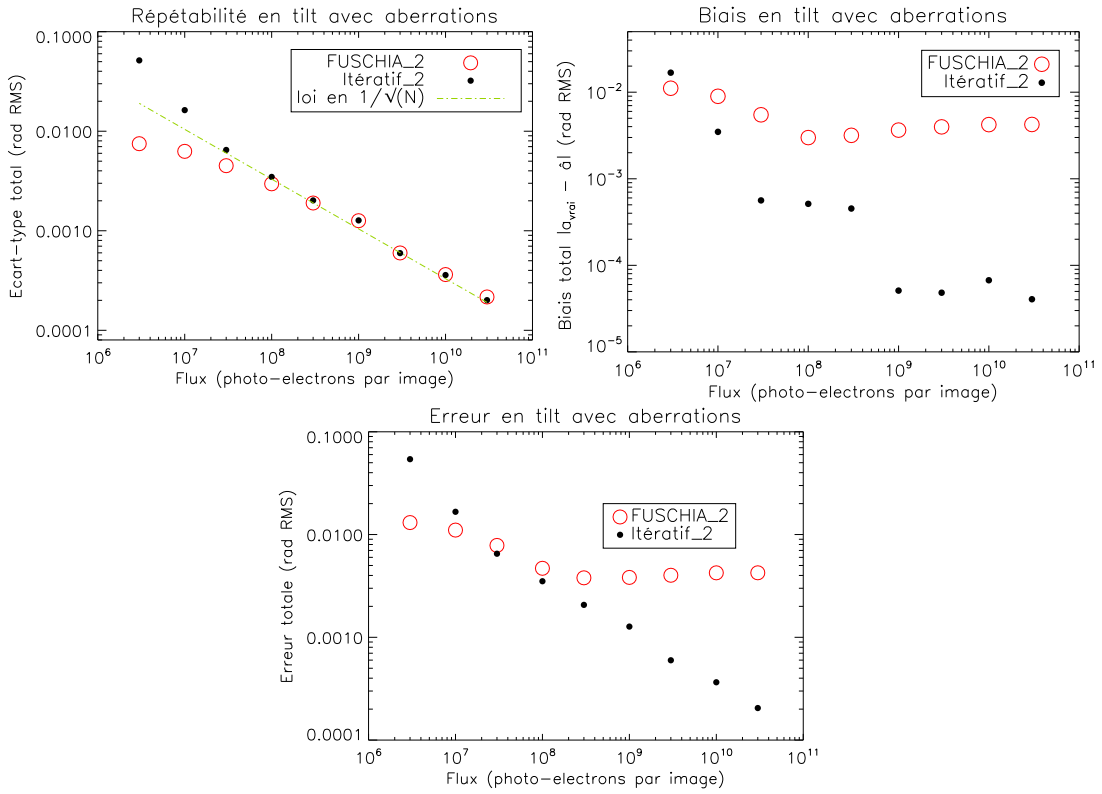


Fig. 4.16 – Performances en basculement des estimateurs multiplans après optimisation de FUSCHIA_2 : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations dont l'amplitude absolue totale est de $0{,}53$ rad RMS ($\lambda/12$).

la base canonique cohérente, donc hors contribution des modes globaux. Comme attendu, les performances de nos deux algorithmes sont globalement identiques en régime de bruit de photons lorsque le flux est supérieur à 10^7 phe$^-$, soit pour un RSB > 10 ; l'écart-type des estimées suit alors la loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$, avec un cœfficient τ très proche dans les deux cas :

- pour FUSCHIA_2, $\tau = 36$;
- tandis qu'avec itératif_2, $\tau = 34$.

Cependant, nous pouvons remarquer de façon générale que quel que soit l'algorithme étudié, l'écart-type en basculement est plus important que celui obtenu en piston. Ce résultat corrobore les observations faites sur télescope monolithique [Meynadier *et al.* (1999)] selon lesquelles l'écart-type augmente avec l'ordre du mode estimé.

Lorsque le flux diminue et que le RSB est inférieur à 10, le bruit de détecteur devient prédominant. Alors que dans ce cas l'erreur et l'écart-type correspondant à l'algorithme itératif augmentent de façon inversement proportionnelle en $1/N_{\text{bph}}$, l'estimateur analytique sature quant à lui à la valeur de 7.10^{-3} rad RMS (soit environ $\lambda/900$). En effet, comme nous l'avions déjà souligné au paragraphe 4.4.1.3 lors de l'étude en piston, la restauration par FUSCHIA_2 devient impossible dès que le RSB est trop faible ; les estimées sont alors toutes distribuées autour de zéro. Nous pouvons également noter que le biais décroît globalement avec le flux ; là encore, soulignons qu'en dessous de 10^{-3} rad les valeurs ne sont plus significatives. Nous pouvons donc considérer que le biais est quasi-nul.

Nous avons tracé sur la Fig. 4.16 les performances en basculement obtenues en présence d'un jeu aléatoire de faibles aberrations listées Tab. 4.3 page 85. La valeur des écart-types ainsi calculés est légèrement supérieure au cas précédent à phase incidente nulle. Cette constatation n'est pas surprenante en soi, étant donné que le module de la FTO s'affaisse en présence d'aberrations (hormis dans le cas de pistons purs) ; par conséquent, le RSB par pixel à tendance à diminuer. Nous pouvons également remarquer que le biais associé à FUSCHIA_2 atteint la valeur limite de 4.10^{-3} rad RMS (environ $\lambda/1600$) inhérente à la linéarisation dès que le flux est supérieur à 10^8 phe$^-$, soit pour un RSB > 38 ; l'erreur est dès lors dominée par le biais. Dans le cas où le rapport signal-à-bruit est inférieur à 38, le biais augmente rapidement pour finalement atteindre la valeur de 10^{-2} rad à bas flux.

Nous avons montré dans ce paragraphe que l'estimateur analytique FUSCHIA_2 présente des performances un peu moins bonnes en basculement qu'en piston. Cependant, les performances atteintes demeurent tout à fait satisfaisantes en présence de faibles aberrations.

4.4.2.2 Linéarité

Afin d'étudier la linéarité à fort flux, nous appliquons sur une sous-pupille une rampe de basculement présentant cinquante-et-une valeurs comprises entre $[-2\pi\,;\,2\pi]$ avec dix points de mesure par valeur. L'image correspondant à la FEP mobile se déplace alors dans le champ, tandis que les deux autres restent superposées. Les données sont ensuite successivement réduites avec les algorithmes itératif et analytique. Les estimées, que nous exprimons dans la base canonique mobile, sont portées Fig. 4.17 gauche, tandis que le graphe de droite illustre le biais obtenu sur la sous-pupille mobile par l'algorithme FUSCHIA_2.

Examinons dans un premier temps le graphe de gauche. Nous pouvons remarquer que l'estimateur analytique retrouve parfaitement les aberrations introduites entre $\pm 0{,}5$ rad RMS. La rampe est alors reconstruite avec une pente égale à 1 pour un biais que nous pouvons considérer comme nul à l'origine. Le graphe de droite montre que le biais augmente rapidement dès que l'aberration incidente est supérieure à $0{,}5$ radian, et dépasse le seuil de précision de $\lambda/60$ pour $0{,}9$ radian RMS.

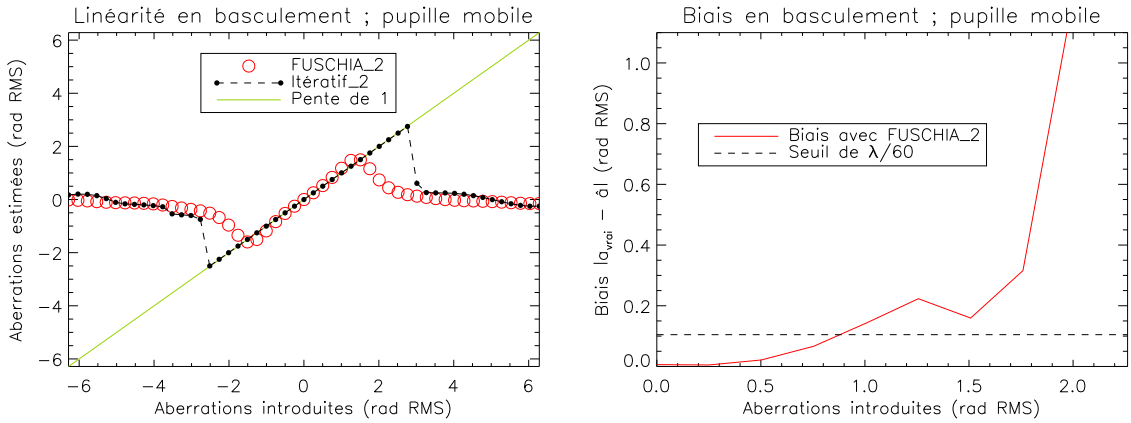


Fig. 4.17 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus par les estimateurs de type diversité de phase en réponse à une rampe de basculement de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille (en rad RMS).

Nous pouvons également remarquer que si l'amplitude du mode est supérieure à $2{,}5$ rad (soit $0{,}4\lambda$) alors l'estimateur itératif peine à retrouver correctement l'aberration introduite. En effet, lorsque le basculement incident est égal à $0{,}4\lambda$, l'anneau noir de la FEP mobile vient se placer au centre des franges créées par les FEP fixes ; la visibilité de l'image diminue alors fortement. Cependant, l'estimation n'est pas forcément impossible. Pour augmenter la dynamique de l'estimateur itératif, une solution serait d'initialiser la recherche de la phase en chaque point de la rampe à la valeur vraie, ou tout du moins à la valeur précédemment reconstruite.

Au final, la dynamique en basculement des deux estimateurs est assez faible. Toutefois, ce comportement n'est pas problématique dans le cadre d'un cophasage en boucle fermée. Notons également que, contrairement au cas du piston où les faibles aberrations pouvaient être reconstruites *modulo* π, les algorithmes ne peuvent pas estimer les basculements au delà de leur zone de validité initiale. Or, puisque ce domaine est restreint, il sera nécessaire, lors de validations expérimentales, de réaliser un préalignement des FEP avant d'estimer les basculements différentiels résiduels (opération de cohérençage).

4.4.3 Influence de l'objet observé sur l'estimation de phase

Jusqu'à présent, nous avons caractérisé les propriétés asymptotiques de l'estimateur FUSCHIA_2 en fonction du flux total contenus dans les images, et ce pour un nombre de données bien défini (rappelons que les images sont toutes de taille 256×256 pixels). Or, deux autres paramètres sont à prendre en compte lorsque l'on considère un objet très étendu[9] : son contraste et son extension. Nous allons donc, dans cette sous-section, analyser l'influence de ces paramètres sur la qualité d'estimation des pistons et basculements différentiels.

[9]Par définition, un objet qui est dit *très étendu* remplit une bonne partie voire tout le champ de la caméra.

4.4.3.1 Etude du contraste

Le contraste de Michelson, noté C, est défini par [Michelson (1927)] :

$$C = \frac{L_{\text{max}} - L_{\text{min}}}{L_{\text{max}} + L_{\text{min}}} \tag{4.9}$$

où L_{max} et L_{max} sont respectivement les valeurs maximales et minimales de la luminance objet.

En théorie, ce paramètre influe directement sur la répétabilité de l'estimateur ; la restauration de phase devrait donc être d'autant meilleure que le contraste est élevé. Afin de déterminer la loi de variation correspondante, nous simulons, en utilisant la scène urbaine de référence, onze objets caractérisés par un contraste différent allant de $0{,}1$ (objet quasi-uniforme) à 1 (contraste maximal). Une partie de ces objets est représentée Tab. 4.5. Nous effectuons ensuite pour chaque objet une série de mesures indépendantes (de taille 256×256 pixels) à phase incidente nulle pour un flux de 5.10^8 phe$^-$ par image (ce qui équivaut à un RSB de 86). Les aberrations sont ensuite successivement déterminées par les estimateurs FUSCHIA_2 et itératif_2.

Contraste	1	0,75	0,5	0,25	0,15
Images					

Tab. 4.5 – Médaillon de 81×81 pixels correspondants aux objets obtenus pour différentes valeurs de contraste.

Etant donné qu'à fort flux le biais peut être considéré comme nul à l'origine comme nous l'avons démontré au paragraphe 4.4.1.3 page 88, l'erreur sur les estimées présente exactement le même comportement que l'écart-type. La Fig. 4.18 représente dès lors, pour chaque estimateur de type diversité de phase (analytique en cercles et itératif en points), l'erreur en piston calculée sur l'ensemble des sous-pupilles en fonction du contraste de l'objet observé. Tout d'abord, nous pouvons constater que pour des scènes vérifiant $C \geq 0{,}3$, qui sont par conséquent moyennement ou fortement contrastées, les performances de l'algorithme analytique sont identiques à celles de l'estimateur itératif et suivent une loi en $1/C$. Lorsque l'objet est quasi-uniforme, l'écart-type associé à FUSCHIA_2 ne suit plus cette loi. Le contraste est alors trop faible pour que l'estimation de phase soit effectuée ; par conséquent, les aberrations estimées par FUSCHIA_2 restent distribuées autour de zéro. Pour l'observation de scènes quasi-uniformes (mer, désert, etc.), il sera nécessaire de redimensionner le capteur pour obtenir les performances désirées, par exemple en allongeant le temps de pose ou, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, en augmentant le nombre de pixels contenus dans l'image.

4.4.3.2 Influence du nombre de pixels contenus dans l'image

Le nombre de pixels N_{pix} contenus dans l'image influence directement la qualité de reconstruction. En effet, si nous diminuons la taille image, la quantité de données devient moins importante. Par contre, le nombre d'aberrations à reconstruire, qui est très faible par rapport à N_{pix}, reste constant.

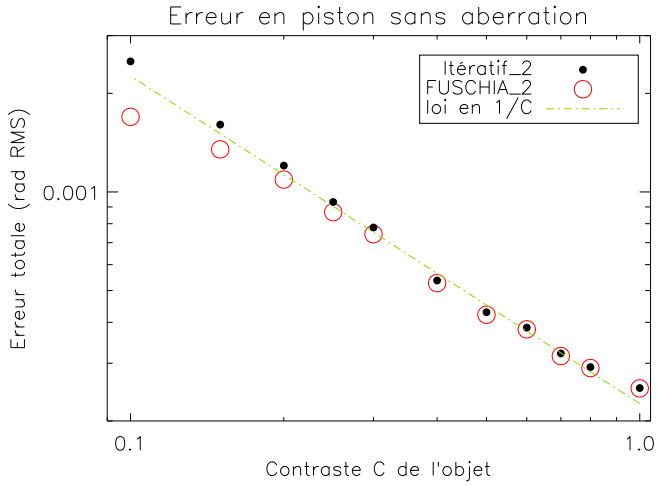


Fig. 4.18 – Erreur en piston obtenue à fort flux($N_{\text{bph}} = 5.10^8$ phe$^-$) et pour une phase incidente nulle par les algorithmes FUSCHIA_2 (en cercles) et itératif_2 (en points) en fonction du contraste C de la scène observée.

Dès lors, il y a diminution du rapport données/inconnues, ce qui doit en théorie entraîner une augmentation de la dispersion des résultats et donc une dégradation de l'écart-type. Afin de quantifier l'évolution des performances en fonction de N_{pix}, nous simulons, à partir de l'objet de référence, des images carrées de taille 256×256 pixels, 128×128 pixels et 64×64 pixels. Pour chaque type d'image ainsi obtenu, nous effectuons un test de répétabilité avec l'estimateur analytique FUSCHIA_2 en reproduisant le point de fonctionnement d'un système idéal sans aberration incidente.

La Fig. 4.19 illustre l'évolution en piston de l'écart-type σ en fonction du flux total contenu dans les images. Tout d'abord, nous constatons que quelle que soit la taille de ces dernières, la valeur de σ est sensiblement identique pour un flux donné dans des conditions où le rapport signal-à-bruit par pixel est important. En effet, en régime de bruit de photons, il est normal d'avoir plus de flux sur moins de pixels à flux total constant et *vice versa*. Par contre, à faible rapport signal-à-bruit, l'écart-type augmente lorsque la taille de l'image diminue, tout en restant constant en fonction du flux. Nous pouvons remarquer le plateau correspondant intervient dès que le RSB est inférieur à 10. Ainsi, il apparaît respectivement aux alentours de 10^7 photo-électrons pour $N_{\text{pix}} = 256^2$, vers $2{,}5\,.10^6$ phe$^-$ pour $N_{\text{pix}} = 128^2$ et aux alentours de 7.10^5 phe$^-$@ $N_{\text{pix}} = 64^2$. Notons également que comme attendu d'après l'Eq. (4.7), il existe un facteur 2 entre chaque valeur du palier ; l'écart-type est donc bel et bien en $1/\sqrt{N_{\text{pix}}}$.

Nous venons de voir que l'augmentation de la taille des images permet d'obtenir une sensible amélioration asymptotique de l'écart-type. Cependant, ce gain de performance sur l'estimation de phase se fera au détriment de la puissance du processeur ou du temps nécessaire pour traiter les données. Dans ce cas, il sera important, en fonction de l'application considérée, de trouver un compromis entre le niveau de performance visé et la cadence de calcul que l'on souhaite obtenir.

4.4.4 Cas d'une configuration monopupille segmentée

Nous avons souligné au paragraphe 4.2.3.1 que le choix de la configuration pupillaire peut s'avérer déterminant pour l'optimisation des performances d'estimation, la qualité des images obtenues

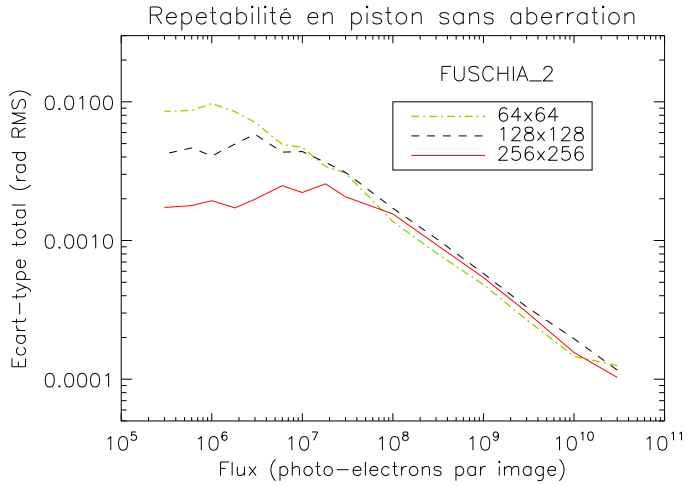


Fig. 4.19 – Ecart-type total en piston obtenu à phase incidente nulle par l'estimateur FUSCHIA_2 en fonction du flux total dans les images pour $N_{\text{pix}} = 64 \times 64$ pixels (en tirets plus pointillés), $N_{\text{pix}} = 128 \times 128$ (en tirets) et pour $N_{\text{pix}} = 256 \times 256$ pixels (en trait plein).

étant directement liée à la couverture fréquentielle ainsi qu'au nombre de sous-pupilles mises en jeu. Dès lors, nous pouvons nous poser la question de savoir si la diversité de phase est encore capable d'estimer correctement les aberrations incidentes dans le cas où l'instrument n'est plus un ISOO multipupille, mais un télescope monopupille segmenté. En effet, ce type de configuration présente la particularité d'être composé d'un très grand nombre de segments (ce qui peut dégrader la reconstruction) fortement rapprochés (ce qui implique une très forte compacité et donc une importante redondance fréquentielle).

Afin de statuer sur ce type de configuration, nous avons effectué, dans le cadre d'un contrat CNES, une étude de faisabilité portant sur un télescope déployable en orbite géostationnaire. Pour cela, nous avons modélisé un instrument à dix-huit segments circulaires et présentant une dilution de 1,15 comme illustré sur la Fig. 4.20 gauche. Nous avons ensuite introduit une phase incidente pouvant être associée aux défauts propres de l'instrument. Les cœfficients de Zernike globaux correspondants, allant de la défocalisation (Z_4) à la coma triple (Z_{10}), sont listés Tab. 4.6. Nous simulons alors avec ces cœfficients des séries d'une cinquantaine d'images pour des flux allant de 3.10^6 photo-électrons à 3.10^{10} phe$^-$ (soit pour un RSB allant de 4 à 676).

aberration a_k	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
amplitude (radian RMS)	−0,093	0,051	0,096	0,210	−0,150	0,039	−0,12

Tab. 4.6 – Valeurs des cœfficients de Zernike utilisés pour simuler les défauts propres d'un instrument monopupille segmenté.

Nous traitons ensuite les données correspondantes avec l'algorithme analytique FUSCHIA_2. Contrairement à l'estimateur itératif, ce dernier ne peut certes pas estimer directement la phase incidente, composée exclusivement de modes supérieurs. Cependant, n'oublions pas que les aberrations a_k recherchées se décomposent localement sur les sous-pupilles en aberrations d'ordre inférieur ou égal à k. De plus, le nombre de segments constituant l'instrument étant relativement important, nous

pouvons considérer que la phase incidente est essentiellement composée au premier ordre de pistons et basculements locaux.

Le graphe Fig. 4.20 droite illustre donc l'écart-type total en piston estimé pour les segments les plus proches du centre (en cercles sur la figure) ainsi que les segments les plus éloignés (en triangles). A titre de comparaison, nous avons également représenté les dispersions (en tirets et tirets plus pointillés) obtenues avec l'algorithme itératif lorsque seuls les pistons et basculements sont recherchés.

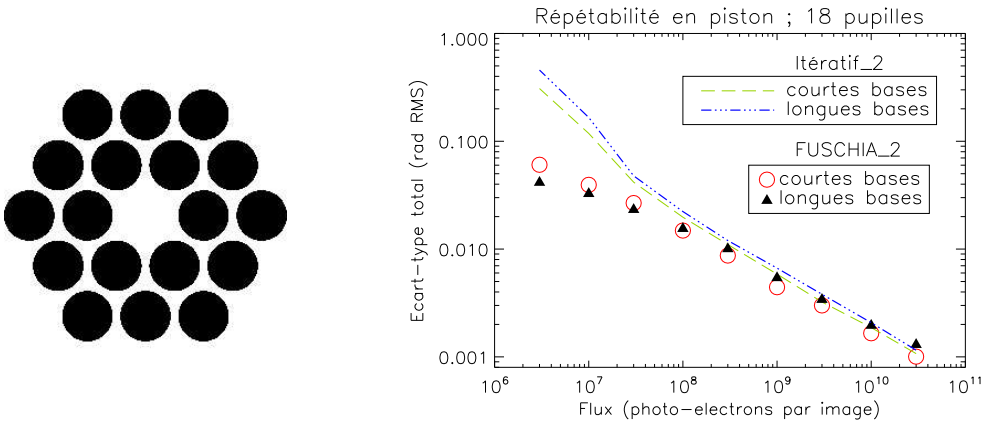


Fig. 4.20 – A gauche, représentation d'un télescope segmenté. A droite, illustration, pour une phase incidente composée de modes supérieurs, de la répétabilité en piston obtenue par l'algorithme analytique FUSCHIA_2 (en symboles) et par l'estimateur itératif (en traits) pour les segments les plus proches du centre, puis pour les plus éloignés.

Tout d'abord, nous voyons qu'en régime de bruit de photons (donc à moyen et à fort flux), les dispersions estimées suivent toutes une loi en $1/\sqrt{N_{\text{bph}}}$. Les performances de l'algorithme analytique sont alors légèrement inférieures à celles de l'estimateur itératif. Cette faible différence peut s'expliquer par le nombre relativement réduit de tirages (seulement cinquante) effectués. Nous pouvons également remarquer que l'aberration de piston est mieux estimée sur les bases courtes que sur les bases longues. Cependant, concernant FUSCHIA_2, ce résultat tend à s'inverser dès que le bruit de détecteur domine. Notons également que de manière générale, les valeurs prises par l'écart-type sont ici plus importantes que celles obtenues avec un nombre moindre de sous-pupilles.

Néanmoins, l'estimation des aberrations reste de bonne qualité à fort flux, comme nous pouvons le voir Fig. 4.21. En effet, la carte de phase reconstruite par l'estimateur itératif (deuxième ligne à gauche) pour $N_{\text{bph}} = 5.10^8$ phe$^-$, soit pour un rapport signal-à-bruit de 86, est visuellement quasi-identique à la carte de phase vraie (en haut). La différence entre les deux cartes est faible, essentiellement comprise entre $\pm 0{,}1$ rad *cc* (c.-à.-d. crête-à-crête) pour une amplitude initiale comprise entre $\pm 0{,}9$ rad *cc*. La carte reconstruite à partir des estimations de FUSCHIA_2 (deuxième ligne à gauche) est quand à elle assez proche de la carte de phase vraie. Nous pouvons donc en conclure que les algorithmes de cophasage de type diversité de phase peuvent être utilisés sur configuration monopupille segmentée. De plus, il est possible d'estimer, si le nombre de segments est suffisamment important, les faibles pistons et basculements résultant des défauts de l'instrument de manière rapide.

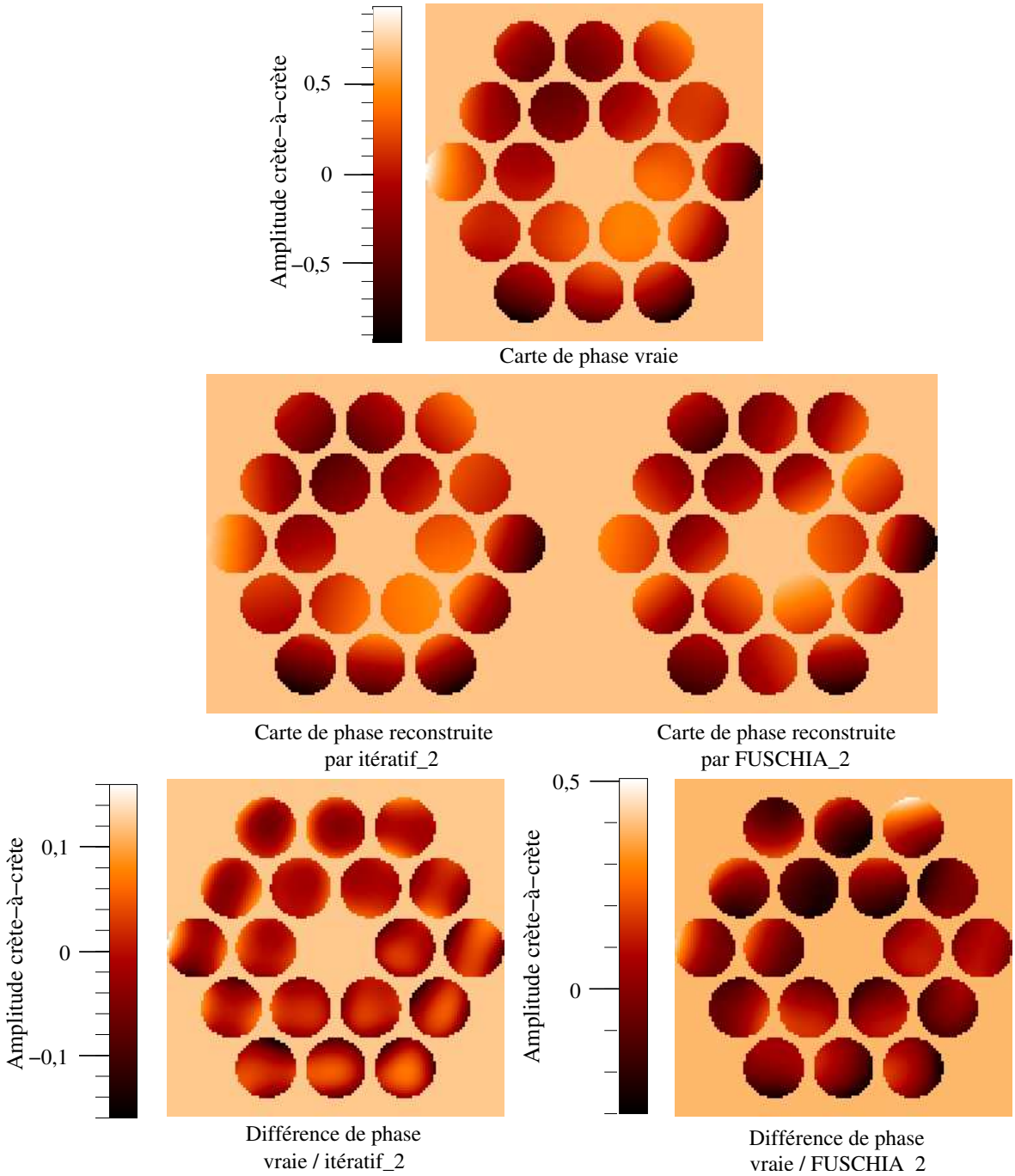


Fig. 4.21 – Comparaison, pour une configuration monopupille à dix-huit segments et pour un flux $N_{\text{bph}} = 5.10^8$ phe$^-$, de la phase incidente vraie composée de modes supérieurs (en haut), de celle reconstruite par les estimateurs itératif_2 (deuxième ligne à gauche) et FUSCHIA_2 (deuxième ligne à droite), cette dernière n'étant composée que de pistons et basculements. Les différences obtenues entre la carte vraie et les cartes reconstruites sont illustrées ligne du bas.

4.4.5 Restauration de l'objet

Après avoir caractérisé la précision d'estimation des algorithmes en piston et basculement, nous analysons dans cette sous-section la capacité de FUSCHIA_2 à restaurer l'objet observé en fonction du flux incident dans les images. Nous allons également déterminer si la nature de la scène observée influe sur la qualité de l'objet reconstruit.

4.4.5.1 En fonction du nombre de photons

Afin d'évaluer dans des conditions réalistes la précision de reconstruction en fonction du nombre de photons incidents, nous effectuons un test de répétabilité en prenant soin d'appliquer de faibles pistons et basculements sur les sous-pupilles de notre configuration de référence. Les conditions expérimentales sont donc les mêmes que pour les tests de répétabilité précédents ; le jeu aléatoire d'aberrations explicité Tab. 4.3 page 85 est appliqué pour une gamme de flux comprise entre 10^6 et 10^9 photo-électrons. Dans un premier temps, la phase incidente est estimée avec FUSCHIA_2 sur des séries de cinquante mesures indépendantes pour chaque nombre de photo-électrons donné. Les hyperparamètres liés à l'objet sont ensuite ajustés au mieux par maximum de vraisemblance selon le modèle de DSP explicité Eq. (2.52) page 55. Pour la scène de référence et pour le flux le plus important, nous obtenons :

$$\kappa = 2{,}87.10^{15} \qquad \nu_o = 0{,}58 \qquad \mu = 4{,}48 \tag{4.10}$$

L'objet est ensuite estimé en injectant les hyperparamètres et la phase estimée dans l'Eq. (2.2).

La Fig. 4.22 compare, sur une zone de 81×81 pixels, l'objet vrai à l'objet moyen $\widehat{\boldsymbol{o}}$ estimé pour quatre valeurs de flux différentes ; les images focale et extra-focale aberrées obtenues à fort flux sont également représentées. Tout d'abord, en régime de bruit de photons, nous pouvons remarquer que l'objet moyen est de meilleure qualité que l'objet estimé $\widehat{\boldsymbol{o}}$. Ce dernier est alors très proche de l'objet vrai, avec une erreur de 1 % pour 10^9 phe$^-$ (ce qui équivaut à un RSB de 123) et seulement de 5 % pour 10^8 phe$^-$ (RSB $= 38$) sachant que l'erreur de reconstruction est calculée pour un objet vrai déterminé sans bruit et sans aberration incidente. Lorsque le flux diminue, l'erreur d'estimation augmente, comme attendu. Cependant, elle n'est que de 17 % pour 10^7 phe$^-$ par image (soit à la limite entre le régime de bruit de photons et le régime de bruit de détecteur). La restauration de l'objet reste tout de même visuellement de bonne qualité, comme nous pouvons le constater sur la figure. Si nous réduisons le flux jusqu'à ce que le RSB soit très faible (à 10^6 phe$^-$ le rapport signal-à-bruit vaut 1), les images deviennent totalement dominées par le bruit ; par conséquent, la restauration devrait être impossible. Or, bien que l'objet reconstruit soit très "mou" avec une erreur de 78 %, nous pouvons distinguer les composantes basses fréquences de l'objet.

Au final, nous avons vu que la restauration d'objet est tout à fait possible en présence de faibles aberrations. La scène reconstruite, très proche de l'objet observé, s'avère être de meilleure qualité que les images acquises à moyen et à fort flux (ce qui correspond aux conditions normales d'utilisation d'un système d'imagerie). Lorsque les conditions de RSB deviennent particulièrement mauvaises, l'objet estimé est dégradé ; cependant, les éléments très basse fréquence restent encore identifiables.

4.4.5.2 Influence du type d'objet observé

La qualité de restauration dépend intrinsèquement de la nature même de l'objet observé. Par exemple, un objet uniforme induit au voisinage du plan focal des images qui sont également uniformes, rendant par la même occasion l'estimation de phase impossible. Afin de déterminer quel type

d'objet est susceptible d'être le mieux restauré, nous sélectionnons trois scènes présentant des caractéristiques spectrales bien différentes. Ainsi, d'après la Fig. 4.23 qui illustre ces objets, la scène *Toulouse* (en haut) présente bien plus de hautes fréquences que l'objet *Saturne* (en bas).

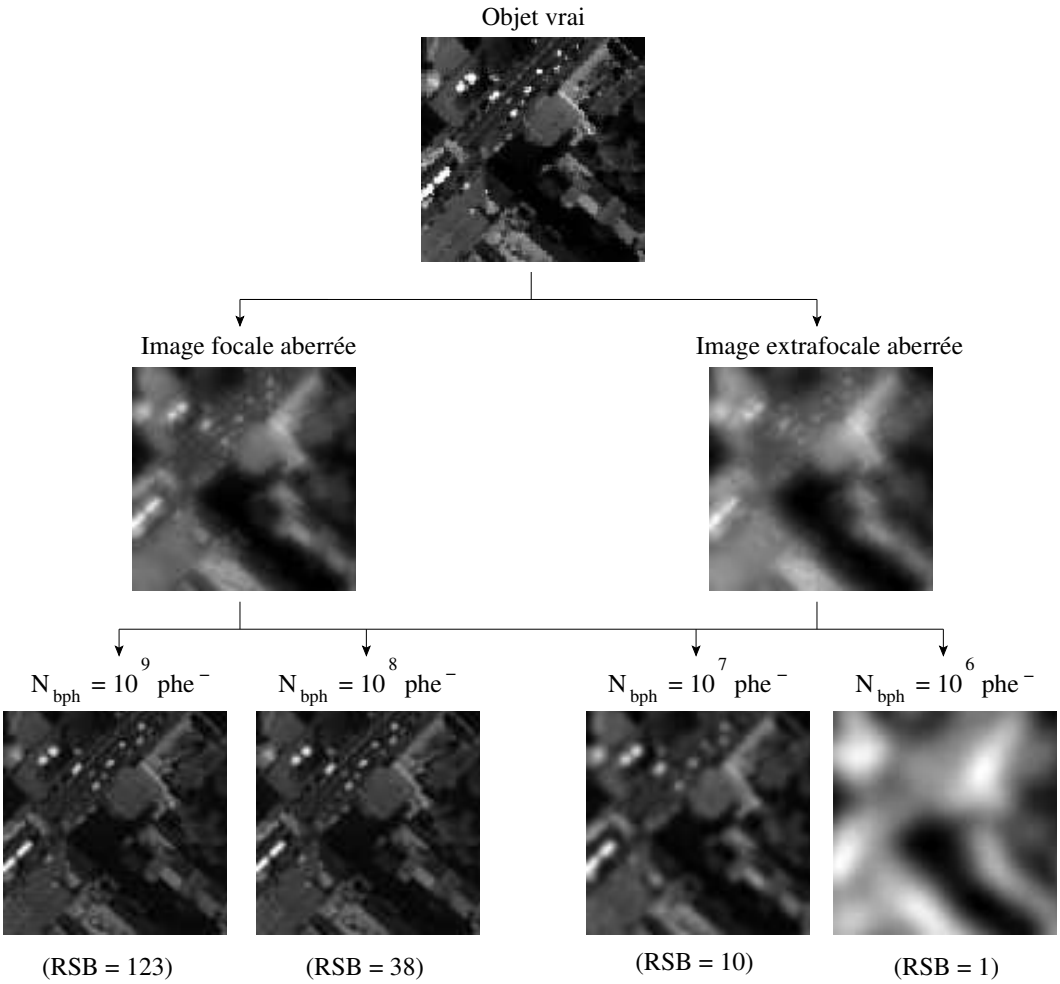
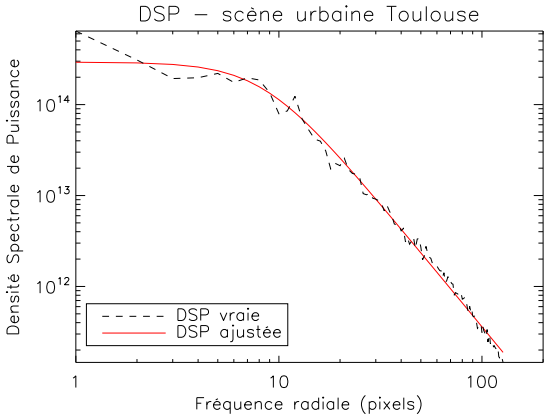
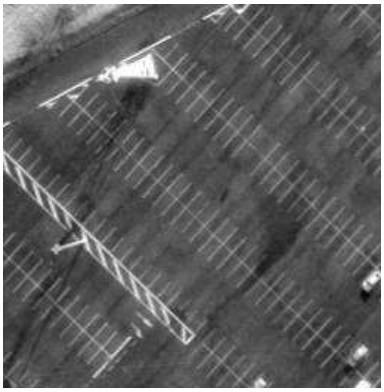


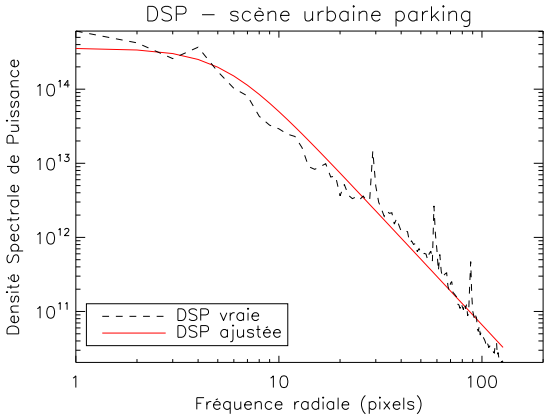
Fig. 4.22 – Objet moyen estimé par FUSCHIA_2 en fonction du flux en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations : médaillon de l'objet vrai sur 81×81 pixels (en haut), images focale/extra-focale correspondantes à fort flux (ligne du milieu) et objet moyen estimé (en bas) avec une erreur de 1 % à 10^9 phe$^-$, 5 % à 10^8 phe$^-$, 17 % à 10^7 phe$^-$ et 78 % à 10^6 phe$^-$ (de gauche à droite).

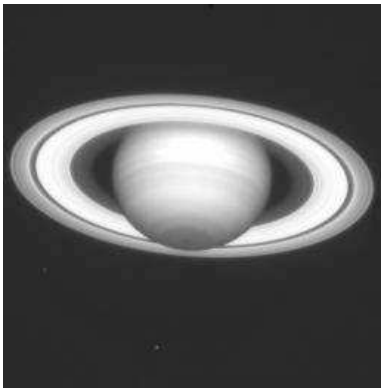
Les performances de restauration de l'algorithme analytique FUSCHIA_2 sont testées pour chacun de ces trois objets en présence de notre jeu de faibles aberrations (listées Tab. 4.3) et pour des flux compris entre 10^6 phe$^-$ et 3.10^{10} phe$^-$ par image. Nous déterminons tout d'abord les aberrations incidentes puis évaluons par maximum de vraisemblance la DSP de l'objet selon le modèle décrit Eq. (2.52) page 55. D'après ce modèle, l'hyperparamètre μ traduit la régularité de l'objet ; dès lors, plus la scène est riche en hautes fréquences, plus μ sera faible. D'après la valeur des hyperparamètres obtenus pour $N_{\text{bph}} = 5.10^8$ phe$^-$ et listés Tab. 4.7, nous voyons que l'objet *Saturne* est bien celui qui présente le moins de hautes fréquences ; *a contrario*, la scène *Toulouse* s'avère être la plus détaillée.

L'objet $\boldsymbol{o}$ est déterminé en injectant les hyperparamètres ajustés ainsi que la phase estimée dans









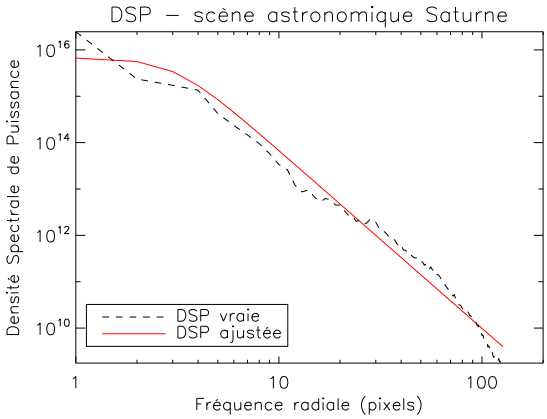


Fig. 4.23 – Trois objets (à gauche) représentés avec leur Densité Spectrale de Puissance vraie (à droite en pointillés) et celle ajustée sur le modèle paramétrique (à droite en trait plein).

Objet	κ	ν_o	μ
Toulouse	$7{,}24\,.10^{13}$	0,47	3,69
Parking	$2{,}94\,.10^{13}$	0,45	3,80
Saturne	$4{,}02\,.10^{12}$	0,55	4,17

Tab. 4.7 – Liste des hyperparamètres associés aux objets *Toulouse*, *Parking* et *Saturne* ajustés à fort flux pour $N_{\text{bph}} = 5.10^8$ phe$^-$ en présence de faibles pistons et basculements dont l'amplitude absolue totale est de 0,53 rad RMS (soit $\lambda/12$).

l'expression analytique de $\boldsymbol{o}$ définie Eq. (2.2) page 41. La Fig. 4.24 représente l'erreur de reconstruction obtenue par l'algorithme analytique FUSCHIA_2 pour chaque scène en fonction du flux présent dans les images. En régime de bruit de photons ($N_{\text{bph}} > 5.10^7$ phe$^-$), la restauration est de meilleure qualité pour les objets présentant des caractéristiques hautes fréquences accrues. Ainsi, pour un flux de 10^8 phe$^-$ par image (RSB $= 38$), l'erreur associée aux scènes *Toulouse*, *Parking* et *Saturne* est respectivement de l'ordre de 5 %, 7 % et 10 %. Notons toutefois qu'en régime de bruit de détecteur, c'est l'inverse qui se produit. En effet, les images sont alors tellement bruitées que l'objet devient "mou" ; seules les basses fréquences sont encore identifiables. Or, la scène astronomique *Saturne* ne présente que peu de hautes fréquences ; par conséquent, sa restauration devient de meilleure qualité que celles associées aux scènes terrestres urbaines. Ce régime n'a cependant pas d'intérêt pour des applications d'imagerie pure car le rapport signal-à-bruit y est trop faible ; l'erreur d'estimation dépasse alors les 20 % dans tous les cas.

Nous avons montré que la qualité de restauration est d'autant meilleure que l'objet observé est riche en hautes fréquences. Toutefois, l'estimation de l'objet est également très satisfaisante (inférieure à 10 %) même pour des scènes peu contrastées. La diversité de phase analytique est donc une solution polyvalente pouvant être utilisée pour des scènes présentant des caractéristiques très différentes.

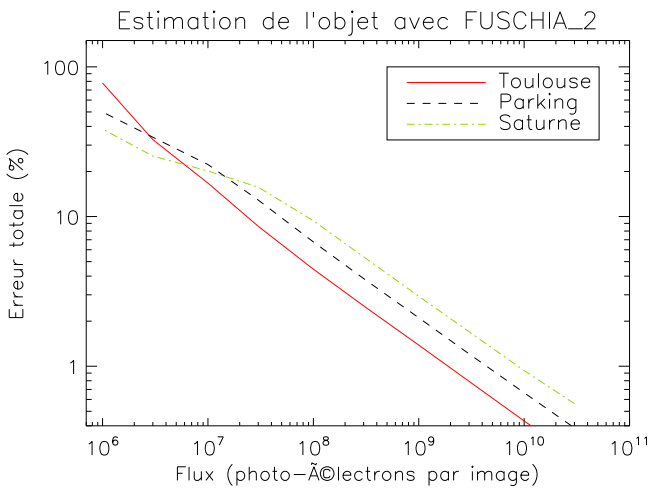


Fig. 4.24 – Erreur de restauration obtenue par FUSCHIA_2 pour les objets *Toulouse* (en trait plein), *Parking* (en tirets) et *Saturne* (en tirets plus pointillés).

4.5 Conclusion du chapitre

Le principe de la diversité de phase analytique a été développé afin de satisfaire aux exigences temps-réel des systèmes de cophasage embarqués. Nous avons tout d'abord montré dans ce chapitre comment sélectionner au mieux la phase de diversité à introduire afin que la mesure des faibles pistons et basculements soit la plus efficace possible. Les différentes sources d'erreur susceptibles de dégrader les estimations, comme l'incertitude de défocalisation, ont été identifiées et leurs effets chiffrés.

Dès lors, nous avons effectué des mesures de performances afin de valider le principe du capteur analytique et de démonter sa réelle efficacité à cophaser en boucle fermée. Il en est ressorti que la réponse de l'estimateur est tout à fait conforme à nos espérances ; en effet, sur une scène urbaine contrastée et pour un flux typique d'imagerie (RSB $= 86$), l'estimateur FUSCHIA_2 peut retrouver des aberrations de piston comprises entre $\pm\pi/2$ rad RMS et des basculements vérifiant $|a_{2n}| \leq 0{,}9$ radian avec une précision de $\lambda/60$ (soit environ $0{,}1$ rad RMS). Nous avons également montré qu'il est possible de fermer la boucle d'un système de cophasage à faible flux pour un RSB > 10, et par la même occasion de restaurer l'objet observé dans un but d'imagerie. Par la suite, nous avons étudié l'influence de paramètres clefs, comme la nature de l'objet observé où l'organisation de la couverture fréquentielle. Nous avons ainsi démontré qu'il est possible de mesurer correctement les aberrations recherchées sur un nombre important de sous-pupilles et même d'évaluer l'impact des défauts propres à l'instrument en estimant les piston et basculements issus de la décomposition des modes supérieurs sur les sous-pupilles.

Au final, nous avons mis en évidence la capacité de la diversité de phase analytique à répondre entièrement aux besoins en cophasage des futures missions spatiales. Dans le prochain chapitre, nous allons nous intéresser à caractériser les estimateurs analytiques monoplans dédiés à la restauration de phase sur objet ponctuel.

Chapitre 5

Caractérisation des estimateurs analytiques monoplans sur objet ponctuel

5.1 Introduction

La problématique de l'estimation de phase sur objet ponctuel se rencontre dans de nombreux domaines, notamment pour la calibration de composants optiques, l'observation d'objets astronomiques non résolus par les sous-pupilles d'un réseau de télescopes ou pour réaliser le cophasage d'instruments au moyen d'une métrologie interne. Dès lors, le développement de senseurs de front d'onde adaptés à ces nombreuses applications, loin d'être un cas particulier, présente de réels enjeux. Par conséquent, bien que cette problématique ne constitue pas le cœur de notre thèse, nous nous y sommes intéressés du fait des vastes champs d'applications possibles.

Dans le cadre du cophasage d'un système à synthèse d'ouverture, les aberrations d'intérêt concernent principalement les pistons et basculements différentiels présents entre les différents bras de l'instrument. La mesure de ces défauts en temps réel sur point source est un problème aujourd'hui bien connu en interférométrie ; cependant, la plupart des solutions développées à ce jour reposent sur une recombinaison des faisceaux en plan pupille et s'avèrent optiquement difficiles à mettre en œuvre dès que le nombre de sous-pupilles dépasse quelques unités. Pour effectuer un cophasage rapide au voisinage du plan focal, nous pourrions utiliser l'estimateur analytique de type diversité de phase développé à l'origine pour des objets non connus à l'avance. En effet, nous avons montré au chapitre 4 que cet estimateur était tout à fait approprié pour fermer une boucle de cophasage sur scènes étendues, et *a fortiori* sur objet ponctuel : dans ce cas, le problème se simplifie considérablement car seules les inconnues liées à la phase subsistent.

Toutefois, puisque l'objet est ponctuel, nous décidons de privilégier les méthodes spécifiques que nous avons améliorées ou développées au chapitre 3. Les estimateurs correspondants, qui ne nécessitent qu'un seul plan image et sont fondés sur une approche de type maximum de vraisemblance, reposent sur l'analyse des modes de la fonction de transfert au plan focal (algorithme FUSCHIA_0+) ou sur un développement limité de la FTO dans un plan quelconque (algorithme FUSCHIA_1).

Dans ce chapitre, nous nous proposons de caractériser le comportement des estimateurs monoplans. Pour commencer, nous présentons en section 5.2 la configuration instrumentale choisie et nous détaillons les conditions de simulation. Nous résumons ensuite en section 5.3 les performances associées à FUSCHIA_0+ en plan focal et les comparons aux résultats obtenus avec l'estimateur itératif de type *phase retrieval* classique. La caractérisation de FUSCHIA_1 a quant à elle lieu en deux temps.

Etant donné que cet estimateur peut être utilisé quelle que soit la position du plan image[1], nous confrontons tout d'abord en section 5.4 ses performances plan focal à celles de FUSCHIA_0+. Enfin, nous nous intéressons en section 5.5 aux propriétés asymptotiques de FUSCHIA_1 en plan extra-focal et analysons son comportement en fonction de paramètres clefs comme la dilution pupillaire ou le nombre de segments mis en jeu.

5.2 Principe des simulations

Afin de caractériser au mieux les algorithmes analytiques monoplans FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1, il est nécessaire d'optimiser au préalable la configuration de l'instrument et plus particulièrement sa géométrie pupillaire. En effet, nous avons souligné en sous-section 1.2.2 page 19 que le choix de la pupille conditionne la qualité des images obtenues au voisinage du plan focal et s'avère par conséquent déterminant pour l'optimisation des performances. Nous présentons également dans cette section les conditions générales de simulation et détaillons les principaux tests effectués lors de la validation des estimateurs.

5.2.1 Optimisation de l'instrument

Dans un premier temps, nous allons sélectionner la pupille qui servira de référence pour la caractérisation des estimateurs mono-images. La configuration choisie sera appliquée aussi bien au plan focal pour la validation de FUSCHIA_0+ que dans un plan défocalisé lors de la caractérisation de FUSCHIA_1. A cette occasion, nous déterminons également avec soin l'amplitude de diversité introduite en plan extra-focal de façon à analyser le comportement de cet estimateur dans des conditions optimales.

5.2.1.1 Choix de la configuration pupillaire

Contrairement aux méthodes fondées sur la diversité de phase, les techniques de type *phase retrieval* classique, utilisées traditionnellement à partir de la donnée d'une image acquise au plan focal, ne permettent pas toujours de retrouver tous les modes d'intérêt avec certitude. En effet, nous avons démontré à l'annexe B page 189 que si la configuration pupillaire est redondante (donc centrosymétrique), alors il existe une ambiguïté de signe sur la partie paire de la phase estimée. Etant donné que ce type de configuration n'autorise pas la restauration des basculements différentiels de façon certaine, leur utilisation pour la caractérisation de FUSCHIA_0+ sera donc exclue. De plus, comme l'emploi d'un nombre conséquent de sous-pupilles est susceptible de complexifier la restauration de phase, nous limiterons l'instrument à seulement trois télescopes.

Au final, nous choisissons de privilégier une configuration semblable à celle utilisée au chapitre précédent lors des validations sur scènes étendues (à savoir une configuration de type Golay 3) mais en prenant une dilution différente. En effet, contrairement au cas multiplan, la pupille n'a pas besoin d'être obligatoirement compacte pour que l'estimation des pistons différentiels soit possible. De plus, les observations sur objet ponctuel se font rarement dans un but d'imagerie. Par conséquent, nous optons pour une dilution de 2, plus appropriée à l'observation monoplan d'objets non résolus ; ainsi, la pupille est optimale car elle n'est ni compacte, ce qui serait présentement inutile, ni trop diluée, ce qui ferait baisser le rapport signal-à-bruit.

[1] A condition que la phase de diversité introduite présente une partie paire si la configuration pupillaire est non redondante (donc non centrosymétrique), comme expliqué au paragraphe 1.3.2.2 page 31.

Contrairement à l'estimateur FUSCHIA_0+, l'algorithme FUSCHIA_1 peut quant à lui être directement employé dans un plan quelconque. Puisque nous avons choisi de le caractériser en section 5.4 à partir d'images acquises en plan extra-focal, les ambiguïtés de signe qui entachaient la partie paire de la phase n'ont plus lieu d'être (voir démonstration annexe B page 192) ; la contrainte de non-centrosymétrie qui pesait sur la configuration pupillaire est, de fait, levée. Néanmoins, par souci de simplicité, nous utiliserons (sauf mention contraire) pour l'ensemble des caractérisations de FUSCHIA_1 la même configuration pupillaire que définie précédemment.

5.2.1.2 Optimisation de l'amplitude de diversité

Comme nous l'avons déjà souligné, l'algorithme FUSCHIA_0+ n'est valable qu'au plan focal de l'instrument ; dès lors, son utilisation se révèle immédiate et ne nécessite pas de calibration préalable. *A contrario*, l'estimation des aberrations incidentes par FUSCHIA_1, qui peut être effectuée quelle que soit la position du plan image, nécessite d'ajuster la phase ϕ_d introduite afin d'optimiser les performances de restauration hors plan focal. De part sa simplicité de mise en œuvre, nous avons décidé de sélectionner comme diversité une défocalisation globale ; reste alors à déterminer son amplitude idéale. Cet ajustement peut toutefois s'avérer délicat : en effet, dans un plan défocalisé, le RSB par pixel diminue. De plus, si la valeur de ϕ_d est trop importante, les FEP de chaque sous-pupille ne sont plus parfaitement superposées ; la visibilité des franges est donc moindre et le front d'onde incident devient plus difficile à évaluer.

Afin de déterminer quelle sera par la suite la meilleure amplitude de défocalisation à introduire, nous effectuons un test de simulation en utilisant la configuration pupillaire de type Golay 3 sélectionnée au paragraphe 5.2.1.1 précédent. Nous appliquons alors sur l'ensemble des sous-pupilles un jeu aléatoire de faibles pistons et basculements (listés Tab. 5.1) tel que l'amplitude absolue totale des aberrations soit de l'ordre de $\lambda/12$ RMS (environ 0,53 rad). Les images, générées pour une phase de diversité ϕ_d comprise entre 0,2 et 2,9 radians RMS, sont réduites avec l'algorithme analytique FUSCHIA_1 puis avec l'estimateur itératif correspondant[2] (estimateur que nous nommerons par la suite itératif_1).

	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	$-0{,}084$	$-0{,}017$	0,019
pupille 2	0,161	$-0{,}018$	0,065
pupille 3	$-0{,}055$	0,019	0,092

Tab. 5.1 – Jeu aléatoire d'aberrations a_{kn} (en rad RMS) introduit sur les n sous-pupilles de la configuration de référence tel que l'amplitude absolue totale soit de l'ordre de $\lambda/12$ RMS sur l'ensemble des sous-pupilles et de $\lambda/21$ pour les seules aberrations de piston.

L'erreur totale en piston ainsi obtenue sur l'ensemble des sous-pupilles est illustrée Fig. 5.1 gauche. Tout d'abord, nous pouvons constater que la limite supérieure au delà de laquelle l'estimation du piston se dégrade est située aux alentours de $\phi_d = 1{,}5$ radians pour nos deux estimateurs ; l'image correspondante, représentée Fig. 5.1 droite, montre que ce seuil est atteint lorsque les FEP commencent à se distinguer les unes des autres. Pour $\phi_d > 1{,}1$ radians, le comportement des algorithmes se différencie : si l'erreur associée à itératif_1 augmente de façon continue, celle correspondant à

[2]Nous rappelons que cet estimateur, basé sur la minimisation itérative du critère d'erreur défini Eq. (3.5) page 64, s'apparente à du *phase retrieval* classique mais pour un plan image quelconque (plan focal ou non).

FUSCHIA_1 diminue à partir de 2,4 rad RMS, là où la diversité est tellement importante que les FEP se séparent (voir Fig. 5.1 extrême droite). Dans ce cas, l'algorithme analytique peine à retrouver les aberrations introduites ; les estimées se retrouvent progressivement distribuées autour de zéro. L'estimation de phase reste toutefois de bonne qualité puisque les aberrations sont estimées avec moins de 10% d'erreur (rappelons que l'amplitude absolue totale des aberration de piston est de 0,3 rad RMS). Pour $\phi_d \leq 1{,}5$ radians, nous restons relativement peu sensible à la défocalisation introduite ; nous pouvons également remarquer que comme attendu, il n'y a pas vraiment de limite inférieure puisque la configuration choisie est non centrosymétrique.

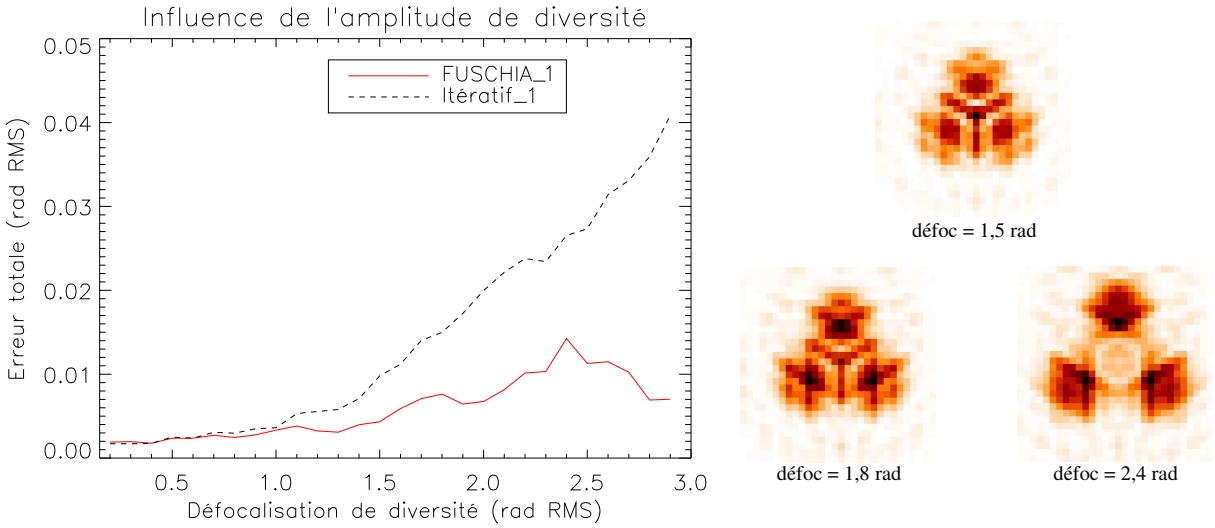


Fig. 5.1 – A gauche : Erreur totale en piston obtenue par les estimateurs analytique FUSCHIA_1 (en trait plein) et itératif_1 (en pointillés) en fonction de l'amplitude de défocalisation ϕ_d introduite. A droite : images correspondantes générées pour différentes valeurs de ϕ_d (en rad RMS).

En conclusion, la région optimale associée à la configuration pupillaire de type Golay 3 précédemment sélectionnée se situe en deçà de 1,5 radians pour nos deux algorithmes FUSCHIA_1 et itératif_1. Afin d'être en mesure de maximiser la dynamique d'entrée de l'estimateur ($\phi_a < \phi_d$), nous choisirons par la suite $\phi_d = 1{,}5$ rad RMS comme valeur de référence lors des validations en plan extra-focal.

5.2.2 Conditions de simulation

Nous détaillons dans cette sous-section les conditions générales qui seront appliquées pour la création d'images ainsi que pour la réduction des données sur objet ponctuel. Nous présentons également les différents tests de simulation qui seront effectués dans les sections suivantes lors de la caractérisation des algorithmes analytiques FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1.

5.2.2.1 Modélisation et traitement des données

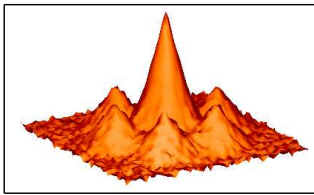
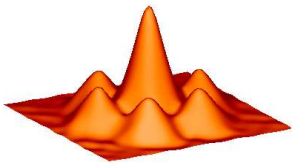
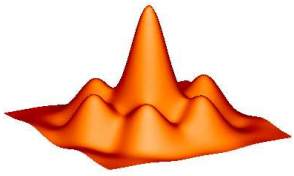
Formation des images De même que pour la simulation d'images étendues, la modélisation de données point source est effectuée avec le logiciel MASTIC présenté en sous-section 4.2.1 page 68. Puisque l'objet de référence est ici un objet ponctuel, les images de type plan focal sont directement

obtenues par le calcul de la réponse impulsionnelle du système, ici échantillonnée à Shannon. Bien entendu, nous rajoutons au calcul théorique du bruit de photons ainsi que du bruit de lecture pour que ces données soient réalistes.

Traitement des données L'estimation des aberrations recherchées ne demande *a priori* pas de traitement particulier. En effet, la périodisation implicite des images, qui intervient dans le domaine de Fourier lors du calcul de la réponse impulsionnelle, n'est pas forcément gênante dans le cas d'un objet ponctuel : si la taille du support est suffisamment importante pour isoler la FEP sur fond nul, les repliements n'affectent pas la zone utile de l'image. Dès lors, contrairement au cas objet étendu, il n'y a *a fortiori* pas besoin d'apodiser les données, à condition de simuler des images dont la largeur est au moins deux fois supérieure à celle de la réponse impulsionnelle (qui vaut typiquement une à deux dizaines de pixels).

Puisque seule une partie de la FEP sert réellement à l'estimation des aberrations, le reste de l'image (à fond noir) est inutile et représente *de facto* une source de bruit susceptible de dégrader les performances à faible RSB. Afin de limiter ce phénomène, nous imposons à zéro la zone non utile de l'image ; étant donné que les pixels tronqués ne correspondent pas à de vraies mesures, nous prenons soin de ne pas les inclure dans le calcul du critère. Par la suite, nous ferons référence à cette opération sous le nom de *troncature* ou *césure* des données.

Toute la difficulté de la troncature réside dans la détermination de la largeur N_c de la zone utile. En effet, la taille de la réponse impulsionnelle varie en fonction de la phase incidente ; elle est d'autant plus importante que l'ordre des aberrations est élevé. Afin que la valeur attribuée à N_c ne soit ni trop importante, ce qui serait inutile, ni trop petite, ce qui nous ferait perdre une partie des données, il faut déterminer quelle est, pour une sous-pupille donnée, la taille du champ angulaire θ nécessaire à l'estimation des aberrations. Etant donné que les sous-pupilles ont un diamètre identique $\mathcal{D}$, ce champ est tel que $\theta = c\lambda/\mathcal{D}$ où c vaut typiquement quelques unités. Nous obtenons donc $N_c = c\lambda \mathrm{f}/\mathcal{D}$ où f est la focale de l'instrument. Or, tronquer les données dans le plan image revient à modifier l'échantillonnage des pics de la FTO dans le plan de Fourier. Dès lors, effectuer une troncature à $c = x$ revient à échantillonner les pics de la FTO sur x points. Nous avons illustré cet effet Tab. 5.2 à phase aberrante nulle, à partir de la configuration pupillaire de référence et pour des images de taille 64×64 pixels. Tout d'abord, la FTO est représentée sans césure (à gauche), puis pour $c = 6$ (au centre) et enfin pour $c = 4$ (à droite). *A priori* dans un cas idéal, fixer c à 6 devrait suffire pour retrouver les basculements. Rappelons que cette opération n'a d'intérêt que pour les faibles RSB et que dans le cas contraire elle est inutile.

	sans troncature	$c = 6$	$c = 4$
Module FTO			

Tab. 5.2 – Effet de la troncature des données sur la FTO : pour une phase aberrante nulle, la fonction de transfert de modulation est tout d'abord représentée sans césure (à gauche), puis pour $c = 6$ (au centre) et enfin pour $c = 4$ (à droite).

5.2.2.2 Les différents tests effectués

Pour caractériser les algorithmes analytiques FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1, nous suivons le même protocole que celui présenté au chapitre 4 page 75. A partir de la configuration instrumentale définie en sous-section 5.2.1, nous caractérisons dans un premier temps les performances nominales des estimateurs en fonction du RSB puis évaluons leur domaine de validité. Dans le cadre de la validation de FUSCHIA_1 en plan extra-focal, nous nous intéressons également à l'influence de la configuration pupillaire en étudiant le comportement des algorithmes en fonction de la dilution ainsi que du nombre de sous-pupilles mises en jeu.

Toutes les images, de taille 64×64 pixels, sont échantillonnées à Shannon et simulées avec du bruit de photons ainsi qu'un bruit de détecteur d'écart-type $\sigma_b = 10$ électrons par pixel ; l'objet-type est bien entendu un Dirac. Dès lors, nous effectuons en *configuration opérationnelle de base* (c.-à.-d. avec la configuration instrumentale de référence) :

- des tests de linéarité pour lesquels nous appliquons sur une sous-pupille une rampe monomode (piston puis basculement) de grande dynamique présentant dix points de mesure par valeur ;
- des tests de répétabilité où la précision d'estimation des algorithmes est évaluée sur des séries de mesures indépendantes pour une large gamme de flux.

Les tests à *configuration variable*, qui permettent d'étudier l'influence des paramètres clefs tel que la dilution, sont quant à eux réalisés à fort RSB. Par la suite, nous donnerons le détails des simulations (valeurs de flux, *etc.*) au fur et à mesure des validations.

Après leur génération, les données sont successivement réduites par l'estimateur analytique de notre choix et par l'algorithme itératif correspondant. Les aberrations ainsi estimées peuvent alors être comparées[3] aux aberrations introduites dans la base canonique la plus appropriée, comme explicité en sous-section 4.2.2 page 72. A ce titre, soulignons que cette base diffère selon le type d'objet considéré : en effet, si les basculements globaux n'ont pas d'intérêt sur objet étendu, il n'en va pas de même sur objet ponctuel où un tel basculement se traduit par un déplacement global de la figure d'interférence dans le champ de l'image. Deux constatations s'imposent alors :

- pour les tests de répétabilité, où aucun mode n'est privilégié par rapport aux autres, s'affranchir des basculements globaux reviendrait à éliminer une partie de l'information. Par conséquent, nous ne pouvons plus utiliser la base canonique cohérente ;
- la base mobile reste la base de référence pour suivre l'évolution des aberrations lors des tests de linéarité, étant donné que nous favorisons dans ce cas un mode en particulier.

5.3 Caractérisation de l'algorithme FUSCHIA_0+ basé sur l'analyse des modes de phase en plan focal

Nous étudions dans cette section les performances de l'estimateur amélioré FUSCHIA_0+ basé sur l'analyse des modes de la FTO en plan focal par maximum de vraisemblance. Dans un premier temps, nous détaillons les conditions spécifiques de simulation (gamme de flux, dynamique des rampes d'aberrations appliquées). Nous explicitons ensuite les résultats obtenus en piston et basculement puis les comparons aux performances associées à l'estimateur itératif de type *phase retrieval* classique.

[3] Nous rappelons que les grandeurs statistiques utilisées pour caractériser les performances des estimateurs sont explicitées annexe D page 201.

5.3.1 Conditions particulières

Afin de valider la nouvelle implémentation de l'estimateur FUSCHIA_0+, nous allons caractériser sa réponse en fonction de l'amplitude des aberrations introduites puis déterminer ses performances à flux variable. Les conditions générales de ces simulations sont celles décrites au paragraphe 5.2.2.2 ; cependant, nous précisons que :

- la longueur d'onde de référence choisie est $\lambda = 650$ nm ;
- la rampe appliquée durant les tests de linéarité est une rampe de grande dynamique présentant trente-et-une valeurs comprises entre $[-\lambda\,;\lambda]$ avec dix points de mesure par valeur. Les données correspondantes sont simulées avec des flux de l'ordre de 10^5 photo-électrons par image ;
- les tests de répétabilité sont quant à eux effectués sur des séries d'une centaine de mesures indépendantes pour des flux allant de 10^3 à 10^7 photo-électrons par image. Ces différentes séries sont tout d'abord générées à phase incidente nulle, puis en présence d'un piston (respectivement d'un basculement) d'amplitude $\lambda/6$ RMS sur l'une des sous-pupilles.

Enfin, nous précisons également que les données seront tronquées à $c \simeq 4$ pour l'étude en piston et à $c \simeq 6$ lors de la validation en basculement.

5.3.2 Résumé des performances

Nous signalons que la caractérisation au plan focal de l'algorithme analytique FUSCHIA_0+ ainsi que la comparaison de ses performances avec celles obtenues par l'estimateur itératif_1 ont fait l'objet d'une section dans l'article "Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes" de Baron [Baron *et al.* (2008)]. Cet article étant disponible en annexe J, nous avons choisi de ne résumer ici que les principaux résultats afférents à la section *Numerical validations* et invitons le lecteur à se reporter directement aux pages 238-240 de l'annexe correspondante pour plus de détails[4]. Nous soulignons également que dans un souci d'homogénéité du manuscrit, les résultats sont ici exprimés en radian RMS, contrairement à ce qui est présenté dans l'article.

Estimation des pistons Nous avons tout d'abord représenté sur la Fig. 5.2 l'écart-type (à gauche) ainsi que le biais total en piston (à droite) obtenus sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle en fonction du flux dans les images. Nous voyons que comme attendu, l'écart sur les estimées suit bien une loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ en régime de bruit de photons pour $N_{\text{bph}} \geq 3.10^4$ phe$^-$. Les performances des deux estimateurs, analytique et itératif, sont alors identiques avec un ajustement τ égal à 1,4 dans les deux cas. Le biais correspondant, qui suit la même loi de décroissance, demeure très faible et peut donc être considéré comme nul à l'origine. De façon générale, les performances obtenues successivement à phase incidente nulle puis en présence d'une aberration de piston (Fig. 6 dans l'article) se révèlent quasi-similaires ; le biais demeure très faible et ce même en régime de bruit de détecteur. Soulignons également que l'erreur totale passe en dessous du seuil de $\lambda/650$ (soit 0,01 rad ou 1 nm RMS) pour un flux de 3.10^4 photo-électrons par image, ce qui correspond[5] à un RSB de 10.

Le test de linéarité illustré Fig. 5.3 montre que les deux estimateurs ont un domaine de linéarité qui est parfaitement identique en régime de bruit de photons. Ce résultat n'est pas surprenant en soi, étant donné que l'extraction des modes de phase comme réalisée par FUSCHIA_0+ est exacte en

[4] Dans l'article, l'algorithme FUSCHIA_0+ est simplement référencé sous le nom FUSCHIA.

[5] Nous rappelons que d'après la définition Eq. (4.5) page 75, le terme *RSB*, qui désigne le rapport signal-à-bruit *par pixel*, est calculé pour un nombre N_{pix} de pixels significatif. Ce nombre correspond ici à la taille "utile" de la tache de diffraction, soit $N_{\text{pix}} = 14 \times 14$ pixels.

piston. De plus, avec une dilution pupillaire égale à 2, les zones de recouvrement des pics de la FTO sont inexistantes et n'engendrent pas de perte d'information. L'algorithme analytique et l'estimateur itératif correspondant sont donc parfaitement linéaires entre $[-\pi\,;\pi]$ RMS ; au delà, la phase estimée se replie à 2π près. Au final, l'estimation du piston s'avère tout à fait satisfaisante dans ce domaine de linéarité ; la rampe est alors reconstruite avec une pente égale à 1,03 par l'estimateur analytique et avec un bruit bien inférieur au seuil de $\lambda/60$ spécifié en sous-section 1.1.5 page 16 par le budget d'erreur de l'instrument.

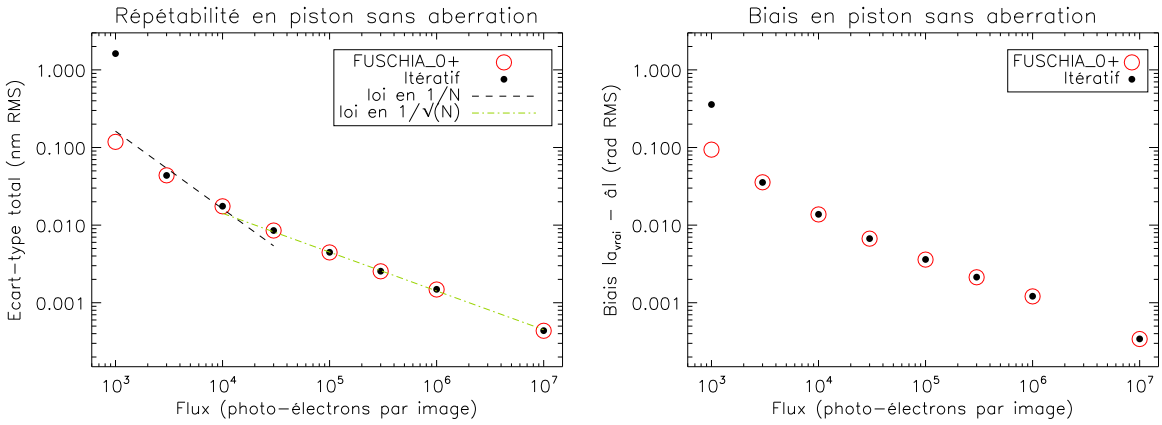


Fig. 5.2 – Ecart-type (à gauche) et biais total (à droite) en piston estimés sur l'ensemble des sous-pupilles (en rad RMS) à phase incidente nulle par l'estimateur itératif de type *phase retrieval* classique (en points) et par l'algorithme analytique FUSCHIA_0+ (en cercles).

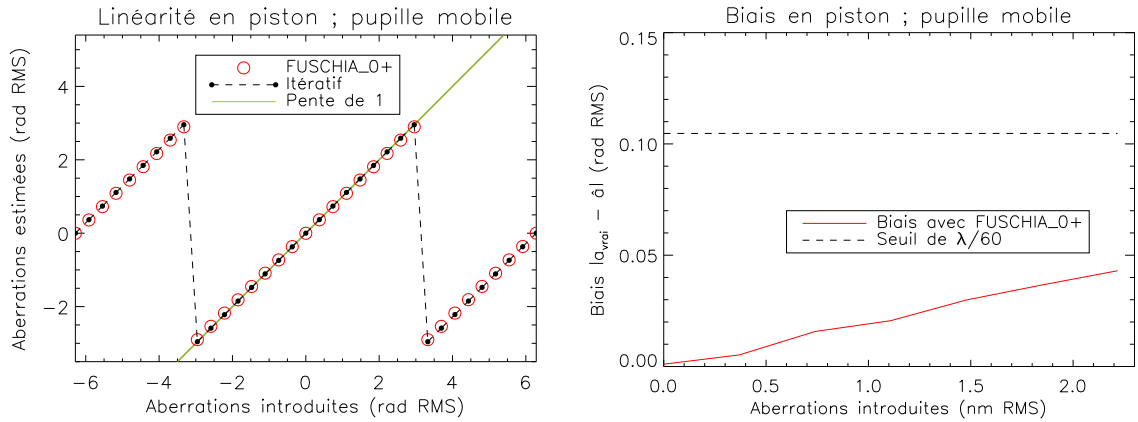


Fig. 5.3 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en plan focal par l'estimateur analytique FUSCHIA_0+.

Estimation des basculements Intéressons-nous aux graphes Fig. 5.4 qui illustrent les performances en basculement des estimateurs FUSCHIA_0+ et itératif_1 à phase incidente nulle. En régime de bruit de photons, les performances de nos deux estimateurs sont quasi-identiques ; les écart-types suivent la loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ avec un ajustement de τ respectivement égal à 2,9 et 2,7 pour les algorithmes

analytique et itératif. Comme attendu, ces cœfficients sont plus importants que ceux obtenus en piston, ce qui confirme que l'écart-type augmente avec l'ordre du mode estimé. Pour de très faibles flux tels que $N_{\text{bph}} < 3.10^{-3}$ phe^{-}, soit pour un RSB < 1, le comportement des algorithmes devient différent. Si l'estimation itérative suit une loi en $1/N_{\text{bph}}$, celle associée à l'estimateur analytique sature à $1{,}8\,.10^{-1}$ rad RMS ; le rapport signal-à-bruit devient alors trop mauvais pour que la reconstruction de phase soit possible avec FUSCHIA_0+. Enfin, soulignons qu'en présence d'un basculement de $\lambda/6$, l'erreur correspondant à l'estimateur analytique atteint un plateau de 5.10^{-2} radian à fort flux (soit $\lambda/130$). En effet, rappelons que, contrairement au cas du piston, l'extraction des modes de phase réalisée par FUSCHIA_0+ n'est pas exacte en basculement ; ce plateau correspond donc à l'erreur mathématique introduite par la seule extraction des modes de phase.

D'après la Fig. 5.5, l'estimateur itératif, dont la recherche de la phase a été initialisée en chaque point de la rampe à la valeur précédemment reconstruite, présente un domaine de validité qui est sensiblement le même pour le piston et les basculements ; là encore, la phase aberrante est restituée entre $\pm\pi$ RMS avec un biais subnanométrique. En revanche, l'algorithme analytique (en cercles) demeure linéaire sur un domaine plus restreint. En effet, pour $|a_{2n}| \geq \pi/2$ rad RMS, l'amplitude crête-à-crête du basculement dépasse la valeur de 2π ; la phase de la FTO se replie partiellement et son extraction, qui n'intègre pas de procédure de déroulage de la phase, n'est plus effectuée convenablement. Toutefois, la rampe est très bien reconstruite dans le domaine de linéarité compris entre $[-1{,}9\,;\,1{,}9]$ rad RMS ; la rampe est alors reconstruite entre $\pm\pi/2$ avec une pente de $1{,}04$ et un biais que nous pouvons considérer comme nul à l'origine.

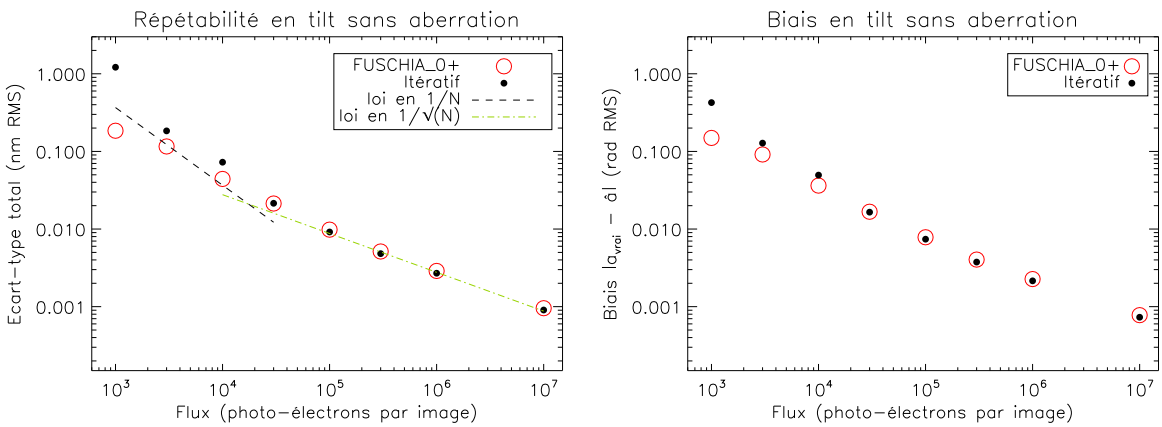


Fig. 5.4 – Ecart-type (à gauche) et biais total (à droite) en basculement estimés sur l'ensemble des sous-pupilles en rad RMS à phase incidente nulle par l'estimateur itératif de type *phase retrieval* classique (en points) et par l'algorithme analytique FUSCHIA_0+ (en cercles).

Les excellents résultats que nous avons obtenus montrent que les performances des deux estimateurs sont sensiblement les mêmes pour de faibles basculements et ce quelle que soit l'amplitude du piston introduit. FUSCHIA_0+, dont la fréquence de calcul est environ vingt fois plus élevée que celle de l'algorithme itératif, peut donc *a fortiori* être utilisé pour fermer une boucle de cophasage en plan focal sur objet ponctuel à condition que la configuration pupillaire soit non redondante donc non centrosymétrique.

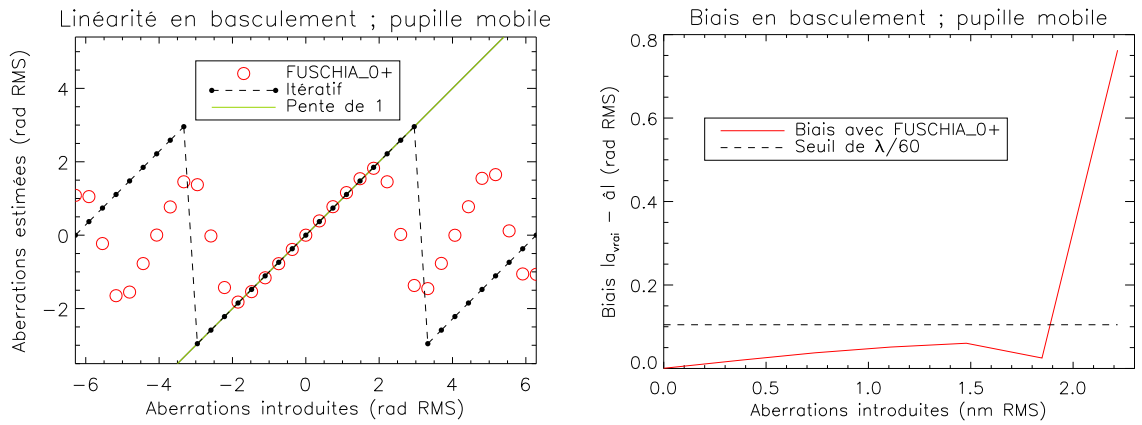


Fig. 5.5 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en plan focal par l'estimateur analytique FUSCHIA_0+.

5.4 Première caractérisation en plan focal de l'estimateur analytique FUSCHIA_1 basé sur la linéarisation de la Fonction de transfert optique

Nous avons vu à la section précédente que l'estimateur FUSCHIA_0+ permet d'estimer les pistons ainsi que les faibles basculements de manière efficace. Cependant, comme souligné en section 3.2 page 60, cette méthode présente plusieurs limitations importantes (restriction au seul plan focal, rejet des zones de recouvrement de la FTO). Dès lors, afin de disposer d'un algorithme permettant de s'affranchir de ces limitations, nous allons nous intéresser à la caractérisation de l'estimateur FUSCHIA_1. En effet, cet estimateur, fondé sur une approche de type maximum de vraisemblance avec mise sous forme affine de la FTO, doit permettre de cophaser de manière rapide et dans un plan de diversité quelconque n'importe quel type d'ISOO en prenant en compte toute l'information de phase disponible.

Puisque FUSCHIA_1 peut être utilisé quelle que soit la position du plan image, nous allons dans cette section confronter ses performances plan focal à celles de l'estimateur analytique FUSCHIA_0+. Les simulations sont donc effectuées dans les mêmes conditions que celles décrites en section 5.3 ; ainsi, à partir de la configuration pupillaire de référence, nous analysons tout d'abord les propriétés asymptotiques de l'estimateur à phase incidente nulle puis déterminons son domaine de validité. Nous précisons que toutes les données sont tronquées à $c \simeq 6$ afin de traiter indifféremment le cas du piston et celui du basculement.

5.4.1 Estimation du piston

Nous allons étudier dans cette sous-section les performances en piston obtenues en plan focal par l'estimateur analytique FUSCHIA_1. Les résultats seront comparés à ceux de l'algorithme itératif correspondant puis aux performances obtenues par FUSCHIA_0+ et telles que décrites en sous-section 5.3.2.

5.4.1.1 Performances

Afin d'étudier le comportement de l'estimateur FUSCHIA_1 en fonction du nombre de photons incidents, nous effectuons un test de répétabilité sur des séries de mesures indépendantes. Les données correspondantes, qui comprennent toutes cinquante images de taille 64×64 pixels, sont générées pour des flux allant de 10^3 à 10^7 photo-électrons. Puisque la taille "utile" de la tache de diffraction est de 14×14 pixels, le rapport signal-à-bruit correspondant est compris entre $0{,}5$ et 225. La réduction de ces données plan focal est ensuite successivement effectuée par FUSCHIA_1 puis par l'algorithme itératif_1. Les aberrations reconstruites sont alors exprimées hors contribution du piston moyen comme expliqué au paragraphe 5.2.2.2 ; en effet, contrairement au cas objet étendu, nous avons pris soin de ne pas ôter les basculements globaux puisque ces derniers contiennent de l'information qu'il est essentiel de considérer sur objet ponctuel.

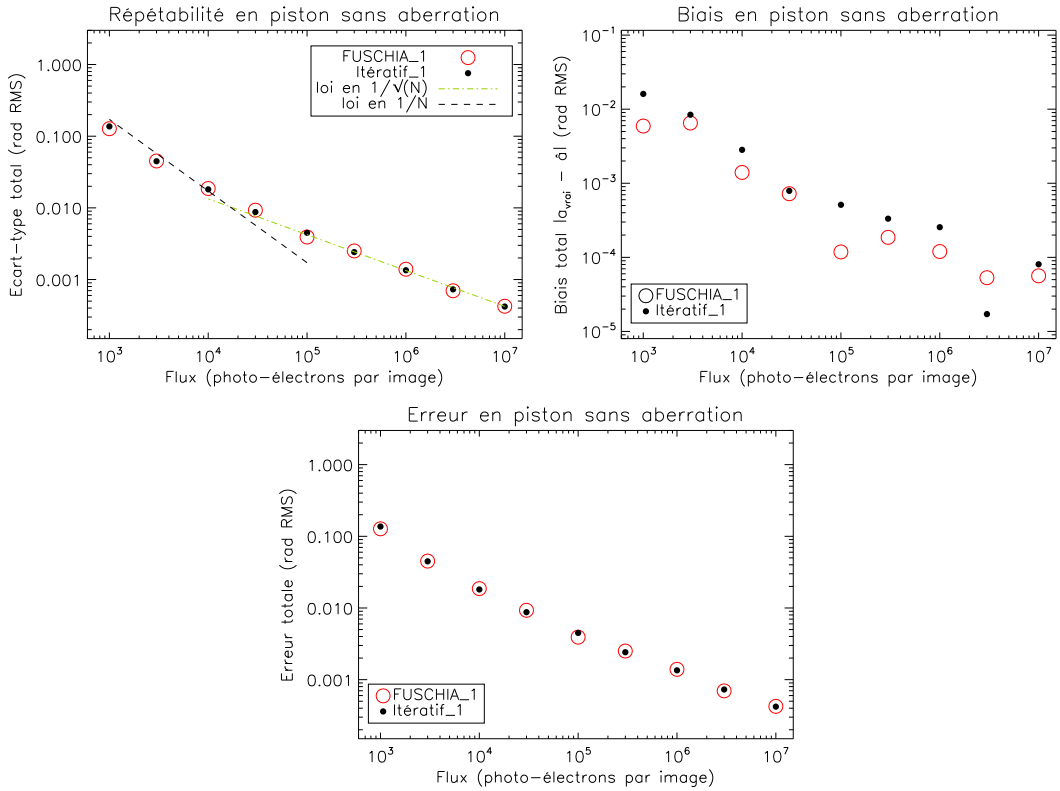


Fig. 5.6 – Performances en piston obtenues en plan focal par les estimateurs monoplans FUSCHIA_1 et itératif_1 : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle (en rad RMS).

Nous avons représenté Fig. 5.6 les graphes de performances (écart-type, biais, erreur totale) obtenus sur l'ensemble des sous-pupilles par FUSCHIA_1 et itératif_1 (respectivement en cercles et points) en fonction du flux incident contenu dans les images. Tout d'abord, nous pouvons constater que les résultats associés à nos deux estimateurs sont quasi-identiques. En régime de bruit de photons pour des flux $N_{\text{bph}} \geq 3.10^4$ phe$^-$ (soit pour un RSB ≥ 9), l'écart-type σ des estimées suit la loi attendue en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ avec un ajustement de τ égal à $1{,}4$ dans les deux cas. Nous voyons également que le biais décroît globalement en fonction du flux ; étant donné que les grandeurs statistiques sont

calculées sur un nombre relativement restreint de mesure (seulement cinquante), nous considérons que le biais n'est plus significatif en dessous de 10^{-3} rad ; par conséquent, ce dernier peut être considéré comme nul à l'origine en régime de bruit de photons. Pour des flux moins importants, l'allure générale de l'écart-type (et celle de l'erreur) s'avère la encore commune à nos deux estimateurs et suit une loi en $1/N_{\text{bph}}$.

Nous avons démontré que l'estimateur FUSCHIA_1, fondé sur une approche de type maximum de vraisemblance avec mise sous forme affine de la FTO, présente les mêmes propriétés asymptotiques en piston que l'estimateur itératif correspondant. Or, les résultats obtenus sont également très proches de ceux présentés en sous-section 5.3.2 lors de la caractérisation de FUSCHIA_0+. Nous pouvons donc en conclure que la fermeture d'une boucle de cophasage (idéalement à phase incidente nulle) à partir d'images point source acquises au plan focal pourra être effectuée indifféremment avec FUSCHIA_0+ ou FUSCHIA_1 en utilisant la configuration pupillaire de référence.

5.4.1.2 Linéarité

Après avoir étudié les performances nominales de l'estimateur FUSCHIA_1 à phase incidente nulle, nous allons déterminer si ce dernier est capable de corriger de plus ou moins fortes perturbations de phase. Dès lors, nous effectuons un test de linéarité en appliquant sur l'une des sous-pupilles de la configuration de référence une rampe de basculement d'amplitude $[-2\pi\,;\,2\pi]$ rad RMS présentant cinquante-et-une valeurs avec dix points de mesure par valeur. Les images plan focal correspondantes, générées pour un flux de 10^6 phe$^-$ soit pour un RSB de 70, sont ensuite successivement réduites par l'estimateur analytique FUSCHIA_1 puis par l'algorithme itératif_1.

La Fig. 5.7 illustre l'évolution du piston sur la sous-pupille mobile (à gauche) ainsi le biais correspondant (à droite) pour chacun de deux estimateurs. Nous rappelons que lors d'un test de linéarité, les aberrations sont exprimées dans la base canonique mobile de façon à privilégier les modes locaux de la sous-pupille aberrée. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que les aberrations de piston sont bien estimées par FUSCHIA_1 entre $\pm 1{,}2$ radians. Au delà, l'amplitude des aberrations introduites devient trop importante pour que la spécification de $\lambda/60$ fixée par le budget d'erreur en sous-section 1.1.5 page 16 soit respectée ; l'approximation faible phase n'est donc plus valide. Comme souligné au paragraphe 4.4.1.4 page 90, ce domaine est défini en piston à 2π près, à conditions toutefois de rester près du maximum de l'enveloppe de cohérence. Nous pouvons également noter que comme attendu, la zone de validité s'avère plus restreinte que celle associée aux estimateurs itératif_1 et FUSCHIA_0+ pour lesquels l'extraction du piston s'avère exacte. Néanmoins, cette restriction n'est pas un problème en soi étant donné que dans le cadre d'une application en boucle fermée les aberrations à estimer sont largement inférieures à 1 rad RMS.

En conclusion, nous utiliserons indifféremment les algorithmes analytiques FUSCHIA_0+ ou FUSCHIA_1 pour estimer de faibles aberrations de piston. Cependant, nous privilégierons l'estimateur FUSCHIA_0+ si la perturbation se révèle plus importante.

5.4.2 Estimation des basculements

Nous nous intéressons dans cette sous-section aux propriétés asymptotiques de l'estimateur FUSCHIA_1 pour l'estimation des basculements. Nous étudions tout d'abord ses performances en fonction du rapport signal-à-bruit puis déterminons l'amplitude de son domaine de validité.

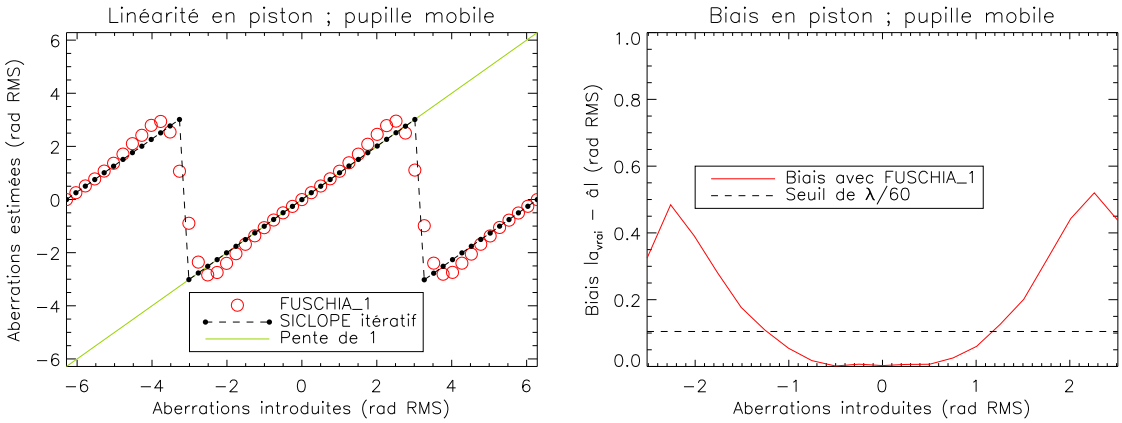


Fig. 5.7 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en plan focal par l'estimateur monoplan FUSCHIA_1 en réponse à une rampe de piston de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille.

5.4.2.1 Performances

Pour déterminer les propriétés asymptotiques de l'estimateur FUSCHIA_1 en plan focal à phase incidente nulle, nous utilisons les mêmes données que celles ayant déjà servi au paragraphe 5.4.1.1 lors de la caractérisation en piston. Les graphes de performances ainsi obtenus sur l'ensemble des sous-pupilles (écart-type, biais, erreur totale) sont illustrés Fig. 5.8 hors contribution du piston moyen. Dans un premier temps, nous vérifions que les performances de nos deux algorithmes (FUSCHIA_1 en cercles et itératif_1 en points) sont globalement identiques quel que soit le flux contenu dans les images. En régime de bruit de photons pour des flux supérieurs à 3.10^4 phe$^-$, l'écart-type sur les estimées suit une loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ dont l'ajustement nous donne :

- un cœfficient τ égal à 2,8 pour l'estimateur analytique ;
- une valeur de $\tau = 2{,}7$ avec FUSCHIA_1.

Comme attendu, la dispersion est légèrement plus importante en piston qu'en basculement (moins de 20 %). Nous pouvons également remarquer que le cœfficient τ associé à FUSCHIA_1 est plus faible que celui correspondant à FUSCHIA_0+ : en effet, d'après les résultats du paragraphe 5.3.2, $\tau = 2{,}9$ dans ce dernier cas. Enfin, notons également que le biais, qui décroît globalement en fonction du flux, peut être considéré comme nul à l'origine en régime de bruit de photons.

Au final, nous avons montré dans ce paragraphe que l'ensemble des estimateurs monoplans présentent des performances en piston qui s'avèrent globalement identiques à phase incidente nulle. Dès lors, les algorithmes analytiques FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1 pourront être utilisés au plan focal de l'instrument pour fermer une boucle de cophasage à condition que la configuration pupillaire soit non redondante donc non centrosymétrique.

5.4.2.2 Linéarité

Intéressons-nous maintenant au domaine de validité de nos estimateurs monoplans. Pour savoir dans quelle mesure l'approximation faible phase reste valable, nous appliquons sur l'une des sous-pupilles de la configuration de référence une rampe de basculement présentant cinquante-et-une valeurs comprises entre $[-2\pi\,;\,2\pi]$ rad RMS avec dix points de mesure par valeur. Nous avons repré-

senté sur la Fig. 5.9 quelques unes de ces images générées pour un flux de 10^6 photo-électrons ; la

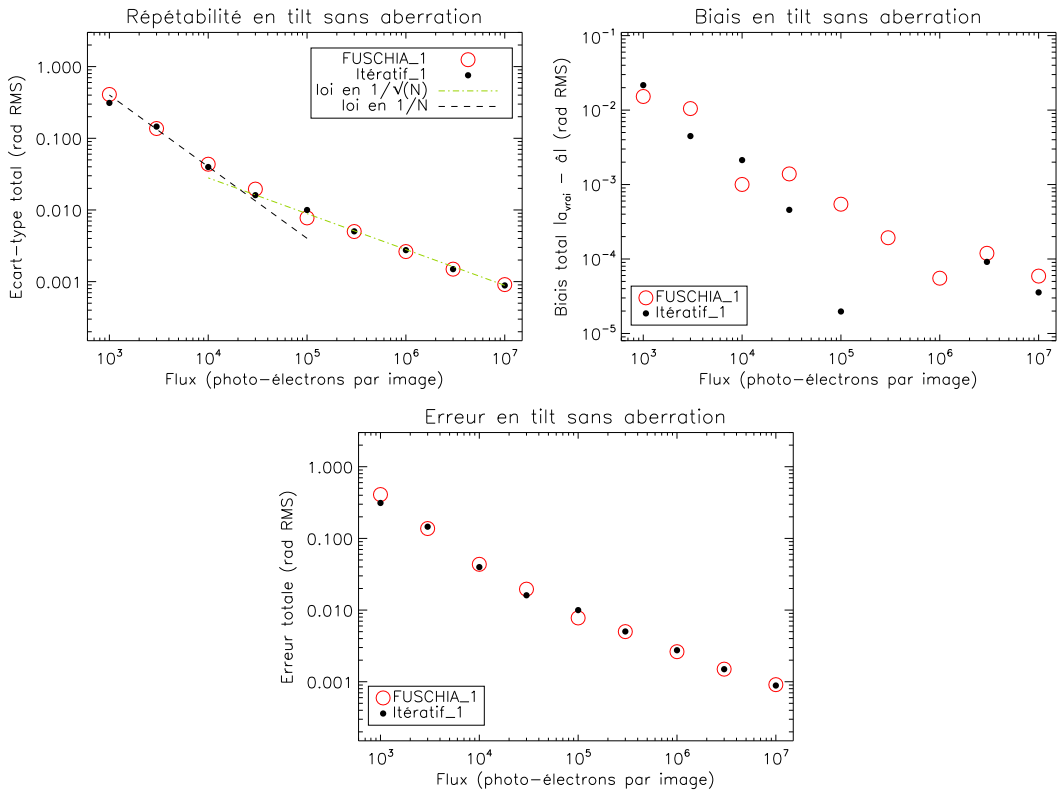


Fig. 5.8 – Performances en basculement obtenues en plan focal par les estimateurs monoplans FUSCHIA_1 et itératif_1 : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle (en rad RMS).

FEP associée à la sous-pupille mobile se déplace alors dans le champ de l'image tandis que les deux autres restent superposées et créent des franges d'Young. Ces données sont ensuite traitées par les estimateurs FUSCHIA_1 et itératif_1 ; bien entendu, les résultats correspondants, illustrés Fig. 5.10, sont exprimés dans la base canonique mobile afin de privilégier les modes locaux de la sous-pupille aberrée.

Examinons tout d'abord le graphe Fig. 5.10 gauche qui illustre le basculement estimé sur la sous-pupille mobile en fonction de l'amplitude de la rampe introduite. Etant donné que nous n'avons pas initialisé la recherche de la phase à la valeur précédemment reconstruite, l'estimateur itératif_1 (en points) peine à retrouver correctement l'aberration introduite si l'amplitude du mode est supérieure à $2{,}5$ rad (soit $0{,}4\lambda$). Nous pouvons également remarquer que l'estimateur analytique retrouve parfaitement les aberrations introduites entre $\pm 1{,}25$ rad RMS ; la rampe est alors estimée entre $\pm 0{,}75$ radian avec une pente de valeur $1{,}02$ et un biais quasi-nul à l'origine. Le graphe Fig. 5.10 droite montre que le biais augmente rapidement dès que l'aberration incidente est supérieure à $0{,}5$ radian et dépasse le seuil de précision de $\lambda/60$ pour $1{,}25$ radian RMS. Dès lors, nous considérons que l'estimation des basculements n'est plus valide au delà de cette valeur. Ce domaine de validité s'avère légèrement plus restreint que celui correspondant à FUSCHIA_0+ ; en effet, d'après le paragraphe 5.3.2, ce dernier est compris entre $[-\pi/2\,;\pi/2]$ rad RMS mais présente une précision d'estimation qui est moins bonne

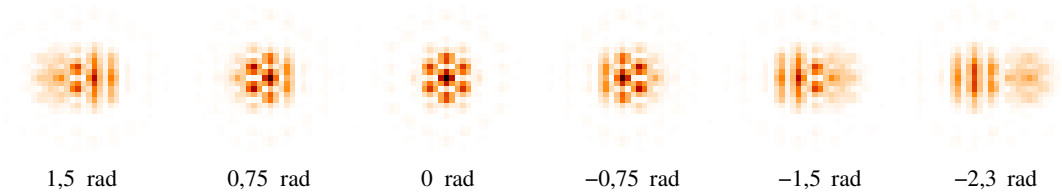


Fig. 5.9 – Illustration du déplacement de la FEP observé en plan focal lors de l'application d'une rampe de basculement.

que celle de FUSCHIA_1 dès que $|a_{2n}| \leq 0{,}8$ rad. De plus, la restriction du domaine n'est pas gênante dans le cadre d'un cophasage en boucle fermée puisque dans ce cas les aberrations à estimer sont inférieure à 1 radian RMS.

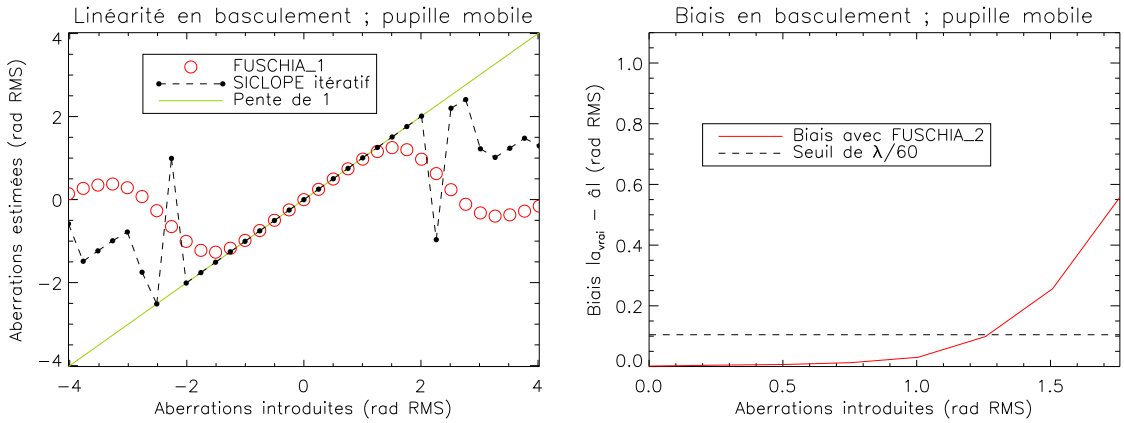


Fig. 5.10 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en plan focal par l'estimateur monoplan FUSCHIA_1 en réponse à une rampe de basculement de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille.

Au final, nous avons montré que l'estimateur FUSCHIA_1 utilisé au plan focal présente des performances tout à fait satisfaisantes en basculement. Etant donné que pour les faibles aberrations la précision d'estimation se révèle meilleure que celle associée à FUSCHIA_0+, nous privilégierons FUSCHIA_1 lors d'un cophasage en boucle fermée.

5.5 Caractérisation de l'estimateur analytique FUSCHIA_1 en plan extra-focal

Nous avons vu dans les sections précédentes que les estimateurs FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1 sont tout à fait appropriés pour fermer une boucle de cophasage à partir d'images acquises au plan focal de l'instrument. Malheureusement, la restriction au seul plan focal ne permet pas de retrouver de façon certaine le signe de la partie paire de la phase incidente lorsque la configuration pupillaire est centrosymétrique. Dès lors, afin de disposer d'un algorithme de cophasage rapide qui puisse s'affranchir de cette limitation, nous allons nous intéresser à la caractérisation de l'estimateur FUSCHIA_1 en plan extra-focal. Cet estimateur, qui peut être utilisé quelle que soit la position du plan image et

s'apparente aux méthodes de type SICLOPE[6] et permet de fait de lever l'indétermination de signe existante.

Les validations présentées ici revêtent un intérêt non seulement pour l'estimateur analytique, mais aussi vis-à-vis de l'algorithme itératif puisque les performances de ce dernier n'ont encore jamais vraiment été étudiées hors plan focal. Pour chaque estimateur, les tests sont effectués en deux temps : nous étudions tout d'abord les propriétés asymptotiques obtenues avec la configuration instrumentale de référence, puis nous nous penchons sur l'influence des paramètres clefs que sont la dilution pupillaire ainsi que le nombre de sous-pupilles mises en jeu. Enfin, précisons que toutes les données sont tronquées à $c \simeq 6$ afin de traiter indifféremment le cas du piston et celui du basculement.

5.5.1 Estimation du piston

Cette sous-section est dédiée à l'analyse du comportement en piston des estimateurs monoplans de type SICLOPE. Nous vérifions dans un premier temps la qualité de reconstruction obtenue en fonction du rapport signal-à-bruit puis nous déterminons l'amplitude des différents domaines de linéarité.

5.5.1.1 Performances

Afin d'étudier les performances des estimateurs en fonction du RSB, nous effectuons un test de répétabilité sur des séries d'une cinquantaine de mesures indépendantes. Ces différentes séries, obtenues dans un cas idéal à phase incidente nulle, sont générées avec des flux allant de 10^3 à 10^7 phe$^-$. Bien que les images soient de taille 64×64 pixels, le nombre N_{pix} de pixels significatifs est de 400 ; en effet, nous pouvons constater, à partir de la Fig. 5.1 droite acquise dans des conditions expérimentales identiques, que la partie utile de la FEP tient bel et bien dans un carré de 20×20 pixels de côté. Les données sont ensuite successivement réduites avec l'estimateur analytique puis avec l'algorithme itératif. Les aberrations sont exprimées hors contribution du piston moyen comme expliqué au paragraphe 5.2.2.2.

La Fig. 5.11 compare les performances en piston obtenues par l'estimateur analytique FUSCHIA_1 (en cercles) aux résultats associés à l'algorithme itératif_1 (en points). Chacune des grandeurs représentées (l'écart-type à gauche, le biais à droite et l'erreur globale en bas) est calculée sur l'ensemble des sous-pupilles puis exprimée en radians RMS en fonction du flux incident dans les images. Nous pouvons remarquer que les performances de nos deux algorithmes sont globalement identiques, et ce quel que soit le régime photométrique considéré :

- pour des flux supérieurs à 10^5 phe$^-$, l'écart-type σ suit bien une loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ telle que définie Eq. (4.7) page 83. Son ajustement est très proche dans les deux cas, puisque τ est égal à 2,2 avec FUSCHIA_1 tandis que pour l'estimateur itératif_1, $\tau = 2{,}1$;
- en régime de bruit de détecteur, qui apparaît pour des flux inférieurs à 4.10^4 photo-électrons soit pour un RSB $\leq$ 7, les performances sont sensiblement identiques et suivent une loi en $1/N_{\text{bph}}$.

Nous pouvons remarquer que les performances obtenues dans un plan de diversité sont légèrement inférieures à celles obtenues au plan focal (nous rappelons que d'après le paragraphe 5.4.1.1, $\tau = 1{,}4$ dans ce cas). Cette constatation n'est pas surprenante en soi puisque pour un nombre de photo-électrons donné le RSB est plus faible en plan extra-focal. Enfin, notons également que le biais, qui décroît en fonction du flux dans les images, présente des valeurs qui s'avèrent être similaires quel

[6]Nous rappelons que la technique dite SICLOPE s'apparente à du *phase retrieval*, mais dans un plan de diversité autre que le plan focal.

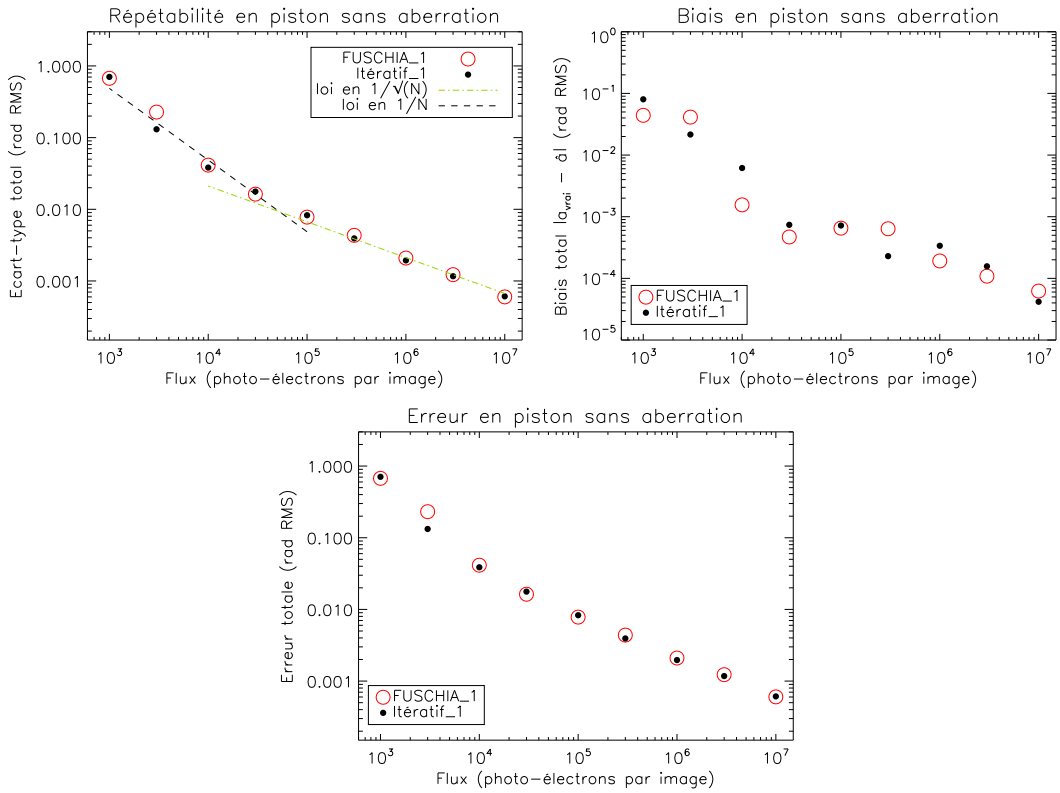


Fig. 5.11 – Performances en piston des estimateurs monoplans de type SICLOPE : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle (en rad RMS).

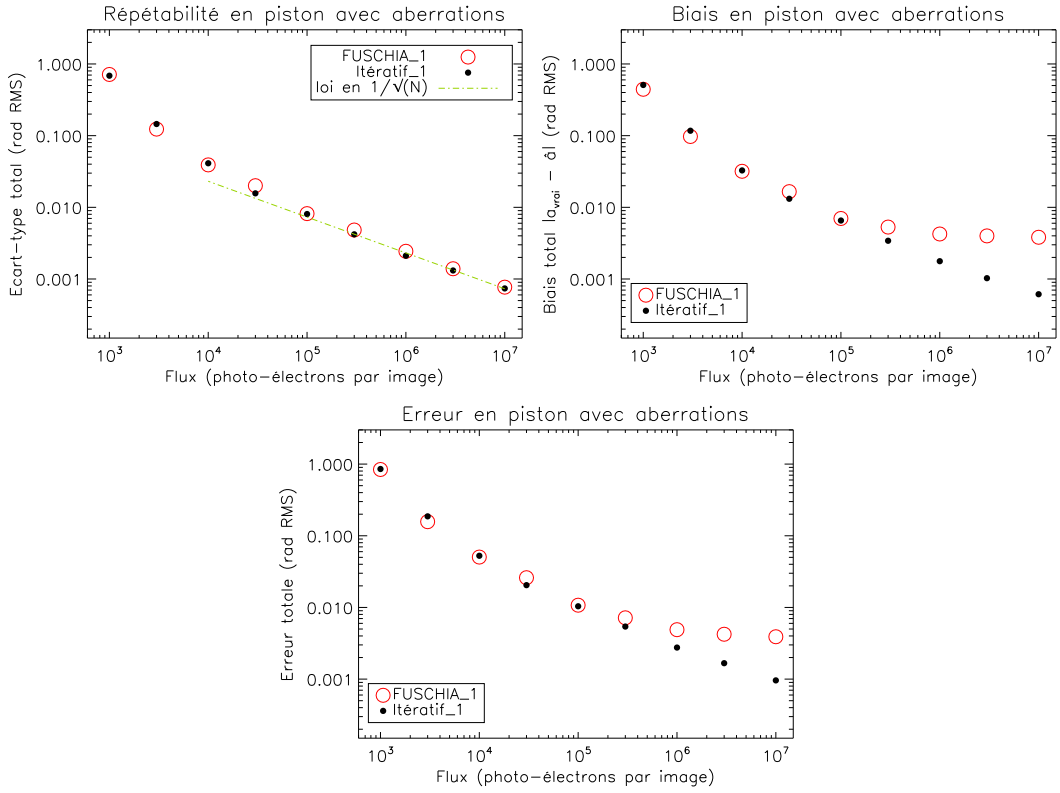


Fig. 5.12 – Performances en piston des estimateurs monoplans de type SICLOPE : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations dont l'amplitude absolue totale est de 0,53 rad RMS ($\lambda/12$).

que soit l'estimateur considéré. En dessous de 10^{-3} rad ce biais n'est plus significatif compte tenu du faible nombre d'images (seulement cinquante) sur lesquelles est effectuée la statistique.

Nous nous intéressons maintenant au comportement de nos deux algorithmes lorsque la phase incidente est non nulle. Pour cela, nous introduisons sur l'ensemble des sous-pupilles un jeu aléatoire de faibles pistons et basculements. Les aberrations correspondantes, dont l'amplitude absolue totale est de l'ordre de $\lambda/12$ soit $0{,}53$ rad RMS, ont déjà été employées pour la caractérisation de l'estimateur FUSCHIA_2 sur objet étendu et sont listées Tab. 4.3 page 85. Les données sont simulées dans les mêmes conditions que décrites au paragraphe précédent puis réduites avec FUSCHIA_1 et itératif_1 ; l'écart-type, le biais ainsi que l'erreur totale obtenus en piston sont représentés Fig. 5.12. D'après le graphe de gauche, la valeur prise par les écart-types est plus élevée comparée au cas idéal à phase incidente nulle. Nous pouvons également constater que le biais associé à FUSCHIA_1, s'il décroît toujours en fonction du flux en régime de détecteur, atteint un palier de $3{,}5\,.10^{-3}$ rad dès que le flux devient supérieur à 10^5 photo-électrons, soit pour un RSB > 13. Ce palier, qui est dû à l'approximation réalisée lors de la linéarisation de la FTO à l'ordre 1, montre la limite mathématique inhérente à cet estimateur. Néanmoins, l'ensemble des performances reste tout à fait satisfaisant. Au final, nous en concluons que l'algorithme analytique FUSCHIA_1 peut donc être utilisé en plan extra-focal pour estimer de faibles pistons lors d'un cophasage effectué sur objet ponctuel.

5.5.1.2 Linéarité

Après avoir étudié les performances nominales de l'estimateur analytique dans les conditions d'utilisation en boucle fermée, nous allons déterminer l'étendue de son domaine de validité et vérifier que sa réponse est bien linéaire en fonction des aberrations introduites. Pour cela, nous appliquons sur l'une des sous-pupilles une rampe de piston d'amplitude $[-2\pi\,;2\pi]$ rad RMS présentant cinquante-et-une valeurs, avec dix points de mesure par valeur. Les images correspondantes sont simulées à fort flux pour $N_{\text{bph}} = 10^6$ phe$^-$ (soit pour un RSB de 49) ; les données sont ensuite réduites avec les deux algorithmes, analytique et itératif. Puisque l'envoi d'une rampe favorise une sous-pupille en particulier, nous décidons d'exprimer les aberrations en sortie d'estimateur dans la base canonique mobile ; ainsi, les modes locaux de la sous-pupille aberrée se trouvent privilégiés et sont exprimés dans la même base que les aberrations incidentes.

La Fig. 5.13 gauche représente le piston obtenu sur la sous-pupille mobile par FUSCHIA_1 (en cercles) et itératif_1 (en points) en fonction de l'amplitude de la rampe introduite. Tout d'abord, nous constatons que quel que soit l'estimateur considéré, la phase estimée se replie comme attendu en $\pm\pi$. Cependant, si l'estimateur itératif est bien linéaire entre $[-\pi\,;\pi]$ radians, le domaine de validité associé à l'estimateur analytique est quant à lui plus restreint. D'après le graphe Fig. 5.13 droite, nous voyons que le biais correspondant augmente très rapidement dès que l'aberration incidente devient supérieure en valeur absolue à $0{,}5$ radian. Le seuil de précision, que nous avions fixé à $\lambda/60$ dans le budget d'erreur présenté en sous-section 1.1.5 page 16, est franchi entre $1{,}1$ et $1{,}4$ rad ; dès lors, nous considérons qu'au delà, l'estimation n'est plus valide. Notons que contrairement aux résultats obtenus au plan focal, le domaine n'est plus exactement symétrique du fait de la défocalisation introduite (nous privilégions alors une direction en particulier). Enfin, soulignons que la reconstruction est très satisfaisante dans la zone de linéarité : les aberrations de piston comprises entre $\pm 0{,}5$ radian sont restituées dans tous les cas avec une pente égale à 1 et un biais que nous pouvons considérer comme nul à l'origine.

En conclusion, l'estimation du piston est validée en régime de bruit de photons pour des aberrations $|a_{1n}| \leq 1{,}1$ rad RMS.

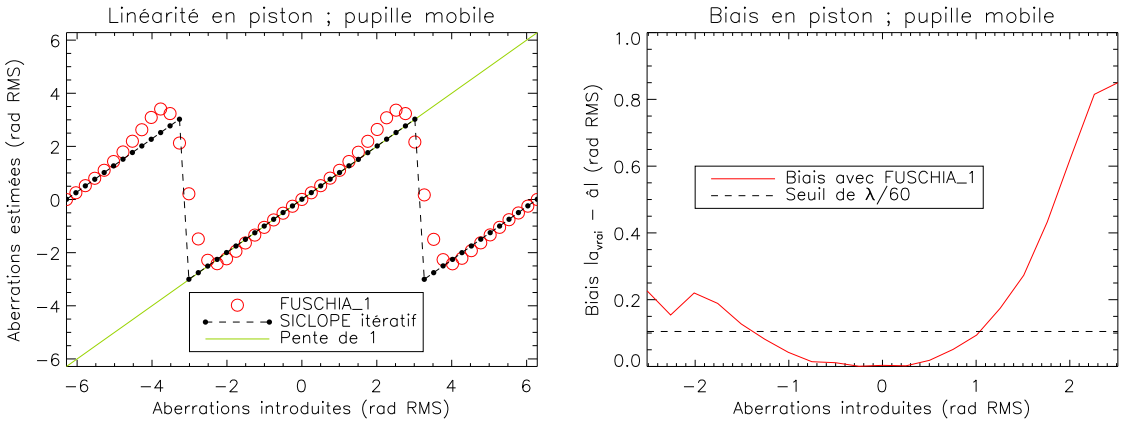


Fig. 5.13 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus par les estimateurs monoplans de type SICLOPE en réponse à une rampe de piston de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille.

5.5.2 Estimation des basculements

Nous présentons dans cette sous-section les performances obtenues pour la restauration des basculements. Nous nous penchons tout d'abord sur l'évolution des propriétés asymptotiques en fonction du rapport signal-à-bruit puis nous caractérisons le domaine de linéarité de chaque algorithme.

5.5.2.1 Performances

Pour évaluer la précision d'estimation propre à FUSCHIA_1 et itératif_1, nous nous plaçons volontairement dans des conditions identiques à celles décrites au paragraphe 5.5.1.1 ; nous utilisons *de facto* les mêmes données. Nous rappelons que les images correspondantes ont tout d'abord été générées sans aberration, puis en présence de faibles pistons et basculements pour des flux allant de 10^3 à 10^7 photo-électrons. Ces données sont successivement traitées par les deux estimateurs, itératif et analytique, les résultats ainsi obtenus étant bien entendu exprimés hors contribution du piston moyen.

Nous avons représenté Fig. 5.14 l'ensemble des performances (écart-type, biais, erreur) associées à la mesure des basculements dans un cas idéal à phase incidente nulle. Tout d'abord, nous vérifions que les propriétés asymptotiques de l'algorithme analytique (en cercles) sont très proches des résultats obtenus avec l'estimateur itératif (en points). Ainsi, les deux biais sont du même ordre de grandeur, les variations observées étant imputables au nombre relativement réduit de mesures. Les valeurs prises par l'écart-type σ sont quant à elles un peu plus élevées dans le cas de FUSCHIA_1 mais restent cependant comparables aux résultats obtenus avec itératif_1 :

- en régime de bruit de photons, σ suit une loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$, avec un cœfficient τ respectivement égal à 1,6 pour l'algorithme analytique et 1,9 pour l'estimateur itératif ;
- en régime de bruit de détecteur, pour des flux inférieurs à 3.10^4 phe$^-$ (pour un RSB $\leq$ 6), l'écart-type est caractérisé dans les deux cas par une loi en $\tau^{'}/N_{\text{bph}}$.

Nous pouvons également remarquer que pour les deux estimateurs, les performances en basculements sont similaires à celles obtenues en piston. Au final, les algorithmes de type FUSCHIA présentent donc des propriétés qui s'avèrent être tout à fait satisfaisantes à phase incidente nulle.

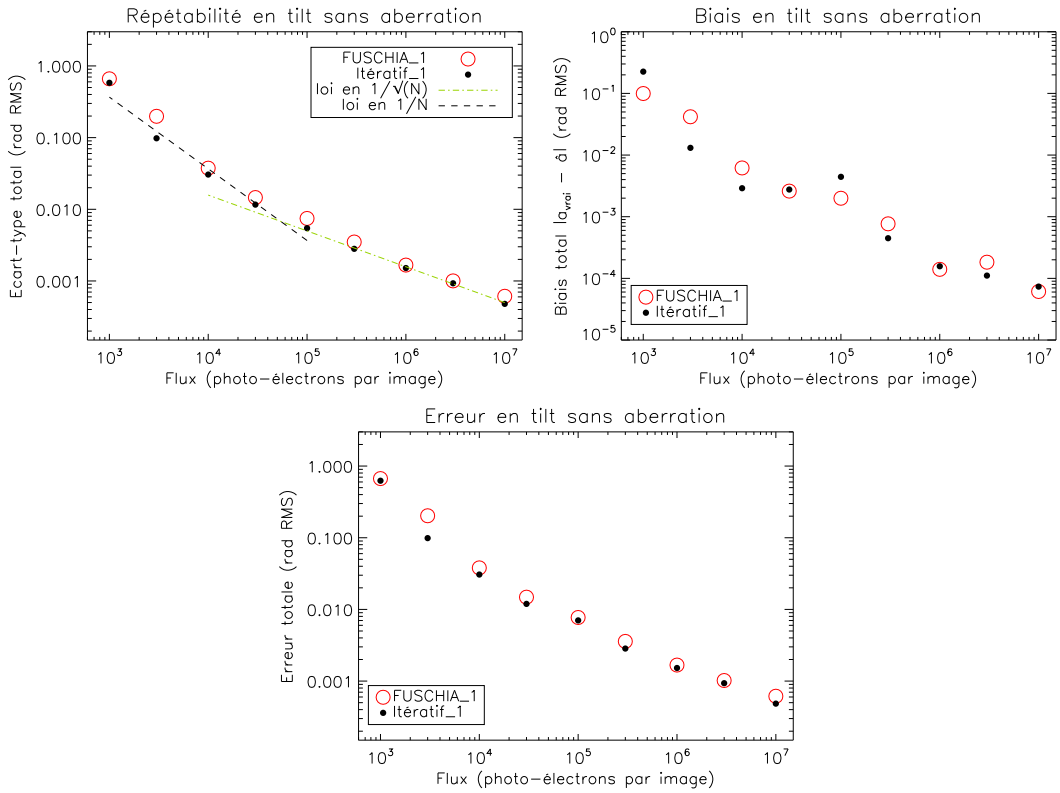


Fig. 5.14 – Performances en basculement des estimateurs monoplans de type SICLOPE : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle (en rad RMS).

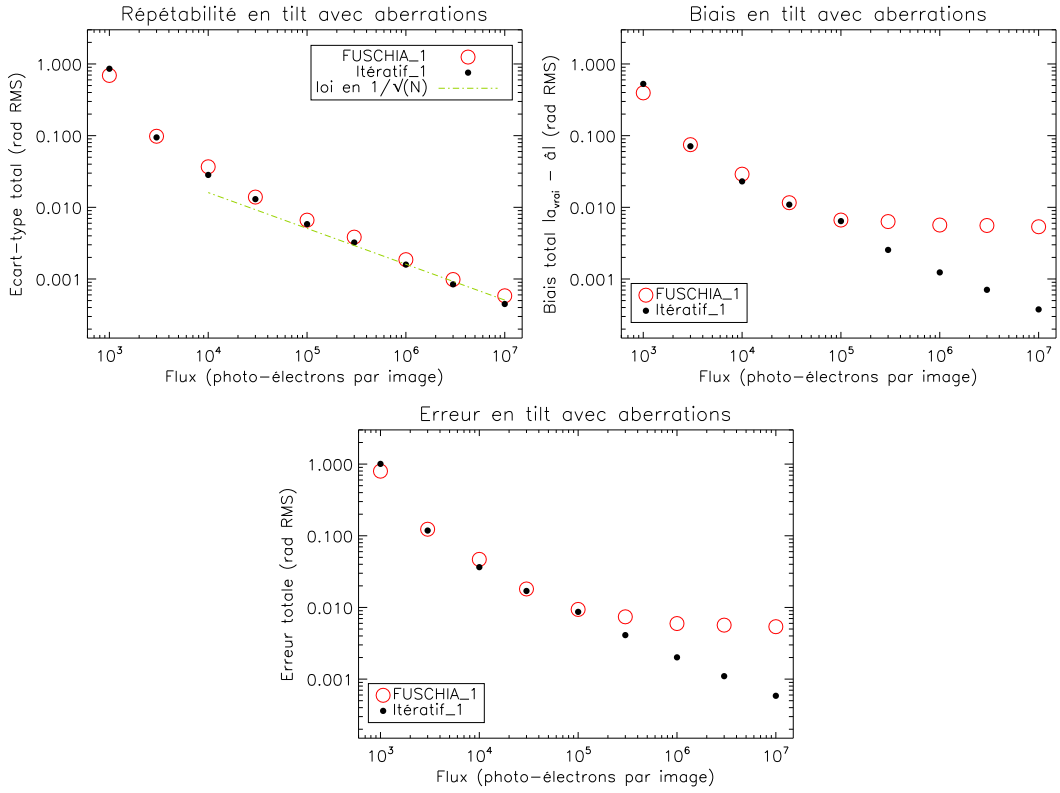


Fig. 5.15 – Performances en basculement des estimateurs monoplans de type SICLOPE : écart-type, biais et erreur totale estimés sur l'ensemble des sous-pupilles en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations dont l'amplitude totale est de 0,53 rad RMS ($\lambda/12$).

Intéressons-nous maintenant au comportement de nos deux estimateurs en présence de faibles aberrations. Pour cela, nous avons représenté sur la Fig. 5.15 l'écart-type, le biais ainsi que l'erreur totale obtenus en basculement après application de notre faible jeu de pistons/basculements listés Tab. 4.3 page 85. Comme attendu, l'erreur associée à l'algorithme FUSCHIA_1 se retrouve dominée par le biais en régime de bruit de photons et atteint une valeur limite due à l'approximation réalisée lors de la linéarisation à l'ordre 1 de la FTO. Le seuil correspondant, qui est égal à 5.10^{-3} rad, apparaît clairement dès que le flux devient supérieur à 10^5 photo-électrons, soit pour un RSB > 13. L'allure générale de l'écart-type est quant à elle sensiblement identique au premier cas à phase incidente nulle.

En conclusion, l'ensemble des performances de l'estimateur analytique FUSCHIA_1 est tout à fait conforme à nos attentes, avec des propriétés asymptotiques qui s'avèrent être similaires en piston et en basculement. Nous pouvons donc en déduire que cet estimateur peut très bien être utilisé en plan extra-focal pour la fermeture d'une boucle de cophasage sur objet ponctuel.

5.5.2.2 Linéarité

Afin de déterminer dans quelle mesure l'approximation des faibles phases reste valable pour l'estimation des basculements, nous effectuons un test de linéarité en procédant de façon identique au cas du piston décrit au paragraphe 5.5.1.2. Nous appliquons sur l'une des sous-pupilles une rampe de basculement de grande amplitude, caractérisée par cinquante-et-une valeurs allant de $[-2\pi\,;2\pi]$ rad RMS et présentant dix points de mesure par valeur. La Fig. 5.16, qui illustre quelques unes des images ainsi obtenues pour un flux de $N_{\text{bph}} = 10^6$ phe$^-$ (soit pour un RSB de 49), montre que la FEP associée à la sous-pupille mobile se déplace dans le champ de l'image ; cependant, contrairement à ce qui est observé en plan focal, les trois réponses impulsionnelles ne sont jamais superposées, ce décalage étant dû à la défocalisation de diversité introduite. Ces données sont ensuite successivement réduites par les estimateurs analytique et itératif, les résultats obtenus étant exprimés dans la base canonique mobile.

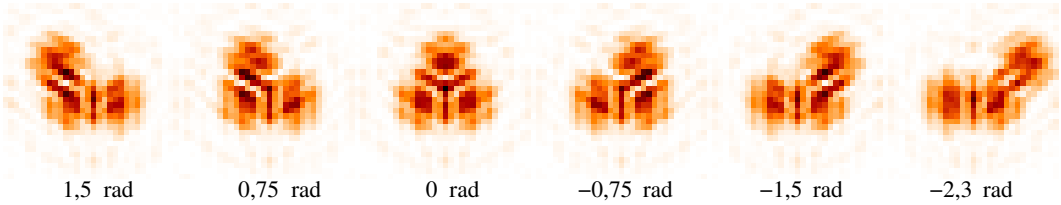


Fig. 5.16 – Illustration du déplacement de la FEP observé en plan extra-focal lors de l'application d'une rampe de basculement.

Nous avons représenté sur la Fig. 5.17 gauche le basculement estimé sur la pupille mobile en fonction de l'amplitude de l'aberration introduite. Tout d'abord, nous pouvons constater que l'estimateur itératif (en points) retrouve difficilement la valeur attendue dès que $|a_{2n}| \geq 2{,}5$ rad RMS (soit $0,4\lambda$). Cette constatation n'est pas surprenante en soi : en effet, nous avions déjà signalé lors de la validation sur objet étendu au paragraphe 4.4.2.2 page 93 que la visibilité des franges décroissait fortement à partir de ce seuil. De plus, lors de la reconstruction itérative, la valeur d'initialisation de la phase est par défaut la phase nulle. Etant donné que nous recherchons des aberrations qui sont relativement éloignées de ce point de départ, l'estimateur ne converge plus vers la solution attendue mais tombe dans un minimum local du critère. Pour obtenir une reconstruction fidèle à nos attentes, l'une des solutions serait d'initialiser la recherche de la phase incidente non pas à zéro mais à la valeur

précédemment reconstruite.

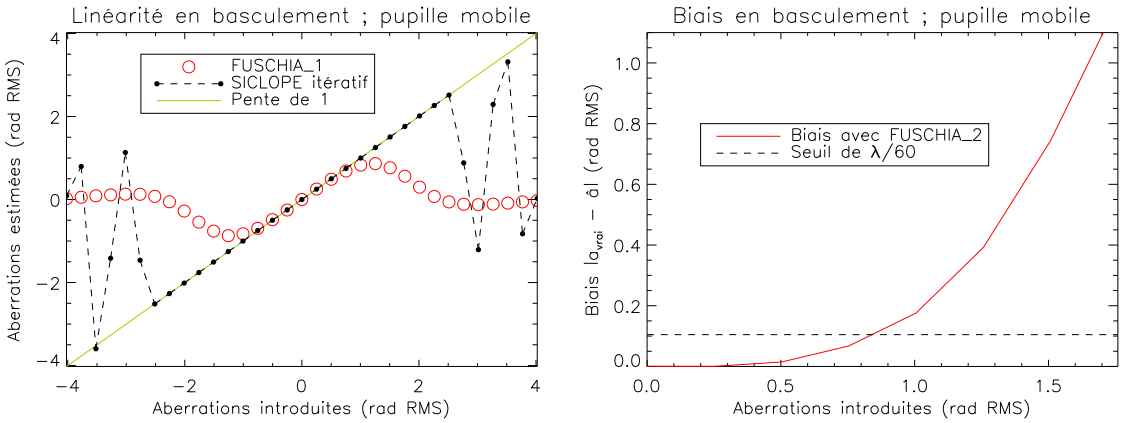


Fig. 5.17 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus par les estimateurs monoplans de type SICLOPE en réponse à une rampe de basculement de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille.

Intéressons-nous maintenant au comportement de l'estimateur analytique FUSCHIA_1 (en cercles). D'après la Fig. 5.17 gauche, nous voyons que son domaine de validité est plus restreint. En effet, la phase reconstruite est fortement sous-estimée au delà de 1 rad ; elle tombe même à zéro dès que l'amplitude incidente $|a_{2n}|$ dépasse 2,5 radians, seuil à partir duquel la visibilité décroît fortement. Cette observation est confirmée par le graphe Fig. 5.17 droite qui représente l'évolution du biais obtenu par l'estimateur analytique sur la pupille mobile. Nous pouvons remarquer que ce dernier augmente rapidement après 0,5 radian et fini par dépasser le seuil de précision de $\lambda/60$ dès que les basculements atteignent 0,85 rad RMS. Au delà, nous considérons que l'estimation n'est plus suffisamment précise pour être valide. Nous pouvons également constater que le domaine de validité est plus petit que celui obtenu par FUSCHIA_1 en plan focal du fait de la baisse du rapport signal-à-bruit inhérente aux images acquises en plan extra-focal.

Nous venons de voir que la dynamique en basculement des estimateurs analytique et itératif est relativement faible comparée à celle obtenue en piston. Toutefois, comme nous l'avions déjà signalé lors de la validation sur objet étendu page 94, cette restriction du domaine n'est pas problématique, puisque dans le cadre d'un cophasage en boucle fermée les aberrations à corriger sont par nature de faible amplitude. La reconstruction s'avère excellente dans la zone de linéarité : les aberrations comprises entre $\pm 0{,}5$ rad sont estimées avec une pente égale à 1 quel que soit l'estimateur considéré et pour un biais quasi-nul à l'origine. Nous pouvons dès lors en conclure que l'algorithme analytique est parfaitement adapté aux besoins d'un système fonctionnant en boucle fermée.

5.5.3 Influence de la configuration pupillaire

Nous avons vu dans les sous-sections précédentes que la restauration des pistons et basculements effectuée en plan extra-focal par les estimateurs monoplans était tout à fait satisfaisante. Toutefois, l'optimisation des performances ainsi obtenues est directement liée au choix de la configuration pupillaire. En effet, la qualité des images, et par conséquent la capacité même de reconstruction, sont entre autres déterminées par le nombre ainsi que par l'arrangement relatif des sous-pupilles. Dans cette section, nous allons donc étudier l'influence de la dilution, et déterminer si l'emploi d'un nombre

conséquent de télescopes est susceptible de dégrader fortement les performances de nos deux algorithmes FUSCHIA_1 et itératif_1.

5.5.3.1 En fonction de la dilution

Contrairement au cophasage réalisé sur scènes étendues, la mesure de front d'onde sur objet ponctuel peut *a priori* être effectuée en plan extra-focal quelle que soit la configuration pupillaire, que cette dernière soit compacte ou non. Dès lors, le choix de la dilution dépendra essentiellement des observations que l'on souhaite réaliser et de la finalité même de l'instrument. Ainsi, une configuration fortement diluée pourra s'avérer intéressante dans les cas où l'acquisition n'est pas limitée par le RSB. Cette situation, qui peut nous paraître à première vue assez exotique du point de vue du cophasage, est en réalité relativement courante en interférométrie stellaire.

Afin de déterminer si la dilution pupillaire joue une rôle important ou non dans l'optimisation des performances sur objet ponctuel, nous simulons douze configurations de type Golay 3 dont la dilution $\mathfrak{d}$ est comprise entre 1 et 5. Pour chacune d'entre elles, nous appliquons en plan extra-focal notre traditionnel jeu de faibles aberrations tel que défini Tab. 4.3 page 85. Nous soulignons que la phase incidente est ici suffisamment petite pour que les performances ne soient pas dominées par le biais de linéarité. Les images correspondantes, obtenues en régime de bruit de photons pour un flux de $N_{\text{bph}} = 10^6$ phe$^-$, sont ensuite successivement traitées par l'algorithme analytique FUSCHIA_1 et par l'algorithme itératif correspondant.

La Fig. 5.18 représente l'erreur totale en piston obtenue par nos deux estimateurs en fonction de la dilution, sachant que pour une configuration donnée la statistique est effectuée sur une dizaine d'images. Tout d'abord, nous pouvons constater que pour $\mathfrak{d} = 1{,}4$ rad nous retrouvons bien l'erreur obtenue précédemment lors du test de répétabilité effectué au paragraphe 5.5.1.1. Nous voyons également que l'erreur associée à FUSCHIA_1 (en cercles), qui est légèrement plus importante que celle correspondant à itératif_1 (en points), augmente avec la compacité. En effet, si la configuration est compacte, il y a redondance fréquentielle ; une fréquence spatiale peut donc être associée à plusieurs bases, ce qui complique la reconstruction. Toutefois, cette dernière reste de très bonne qualité avec une erreur totale inférieure à 10^{-2} rad pour $\mathfrak{d} < 2$. Lorsque la dilution est importante ($\mathfrak{d} > 4$), le RSB diminue ; l'erreur augmente de manière progressive mais reste là encore tout à fait acceptable, se situant en dessous de 5.10^{-3} rad RMS. En conclusion, un ISOO à trois sous-pupilles pointant un objet ponctuel peut être cophasé par les estimateurs de SICLOPE quelle que soit sa dilution pupillaire.

5.5.3.2 Cas d'un instrument monopupille segmenté

Nous avons montré que pour une configuration non redondante présentant un faible nombre de sous-pupilles, l'estimation de phase en plan extra-focal était relativement peu sensible à la dilution introduite. Dès lors, un réseau de télescopes dont la configuration est fortement compacte sera cophasé avec autant de précision qu'un instrument à pupille diluée ou dont la couverture fréquentielle est lacunaire. Ces conclusions ne sont toutefois valables que dans le cas des ISOO multipupilles, ce qui implique un nombre restreint de télescopes (puisqu'en pratique, l'observation d'objet ponctuel se fait rarement dans un but d'imagerie) et une configuration plus ou moins diluée. Or, une partie des instruments d'observation se compose en réalité de systèmes monopupilles segmentés. Dans ce cas, le nombre de sous-pupilles se trouve[7] "démultiplié", les segments sont fortement rapprochés voire

[7]Rappelons que ce nombre peut aller de quelques dizaines pour les télescopes classiques dont le diamètre est de l'ordre de dix mètres, à plus de neuf cents dans les cas des futurs ELT !

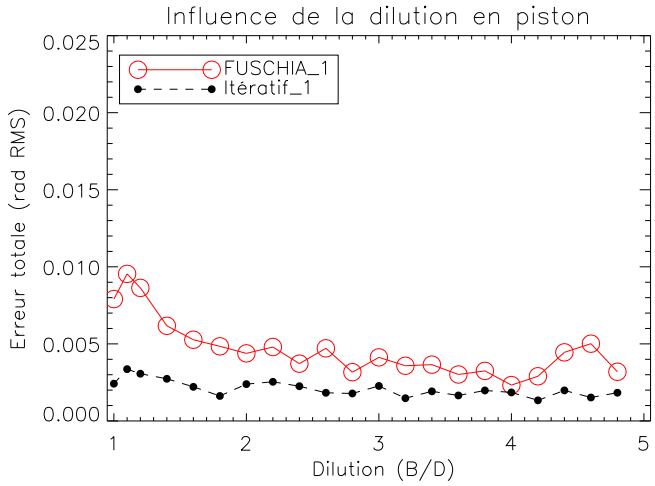


Fig. 5.18 – Erreur en piston obtenue à fort flux par FUSCHIA_1 (en cercles) et itératif_1 (en points) en fonction de la dilution, et ce pour un jeu aléatoire de faibles pistons et basculements dont l'amplitude totale est de $0{,}53$ rad RMS (soit $\lambda/12$).

connexes (ce qui induit un fort recouvrement fréquentiel) et la configuration est généralement centrosymétrique. Sommes nous en mesure de cophaser un tel instrument, alors que ce dernier présente autant de caractéristiques susceptibles de dégrader les performances d'estimation ?

Afin d'apporter un élément de réponse à cette question, nous effectuons un test de répétabilité en utilisant la configuration monopupille décrite au paragraphe 4.4.4 page 98, composée de 18 segments tels que $\mathfrak{d} = 1{,}15$ et vérifiant la propriété de centrosymétrie. Nous introduisons sur cette configuration un jeu aléatoire de faibles pistons et basculements, comme représenté Fig. 5.19 haut et listé Tab. 5.3, afin de reproduire les conditions d'un cophasage en boucle fermée. A partir de ces cœfficients, nous simulons des séries d'une cinquantaines d'images indépendantes de taille 128×128 pixels et ce pour un nombre N_{bph} de photons allant de 10^3 à 10^7 phe$^-$; bien entendu, la phase de diversité introduite vaut toujours $1{,}5$ rad RMS. Les données correspondantes sont ensuite traitées par nos deux estimateurs de type SICLOPE (analytique et itératif).

	a_{1n}	a_{2n}	a_{3n}
pupille 1	$-0{,}084$	$-0{,}017$	$0{,}019$
pupille 2	$0{,}161$	$-0{,}018$	$0{,}065$
pupille 3	$-0{,}055$	$0{,}019$	$0{,}093$
pupille 4	$0{,}120$	$0{,}153$	$-0{,}136$
pupille 5	$0{,}005$	$0{,}102$	$-0{,}123$
pupille 6	$0{,}071$	$0{,}087$	$-0{,}080$
pupille 7	$0{,}033$	$0{,}021$	$-0{,}017$
pupille 8	$-0{,}032$	$-0{,}030$	$0{,}052$
pupille 9	$-0{,}223$	$0{,}026$	$-0{,}009$

	a_{1n}	a_{2n}	a_{3n}
pupille 10	$-0{,}165$	$0{,}029$	$0{,}030$
pupille 11	$0{,}111$	$0{,}074$	$-0{,}016$
pupille 12	$-0{,}060$	$0{,}066$	$-0{,}003$
pupille 13	$0{,}116$	$-0{,}109$	$0{,}082$
pupille 14	$-0{,}141$	$0{,}052$	$-0{,}073$
pupille 15	$0{,}032$	$-0{,}004$	$-0{,}087$
pupille 16	$0{,}077$	$0{,}001$	$-0{,}089$
pupille 17	$-0{,}065$	$-0{,}001$	$0{,}188$
pupille 18	$-0{,}248$	$-0{,}168$	$-0{,}076$

Tab. 5.3 – Jeu aléatoire de pistons et basculements introduit sur la configuration monopupille à 18 segments (en rad RMS).

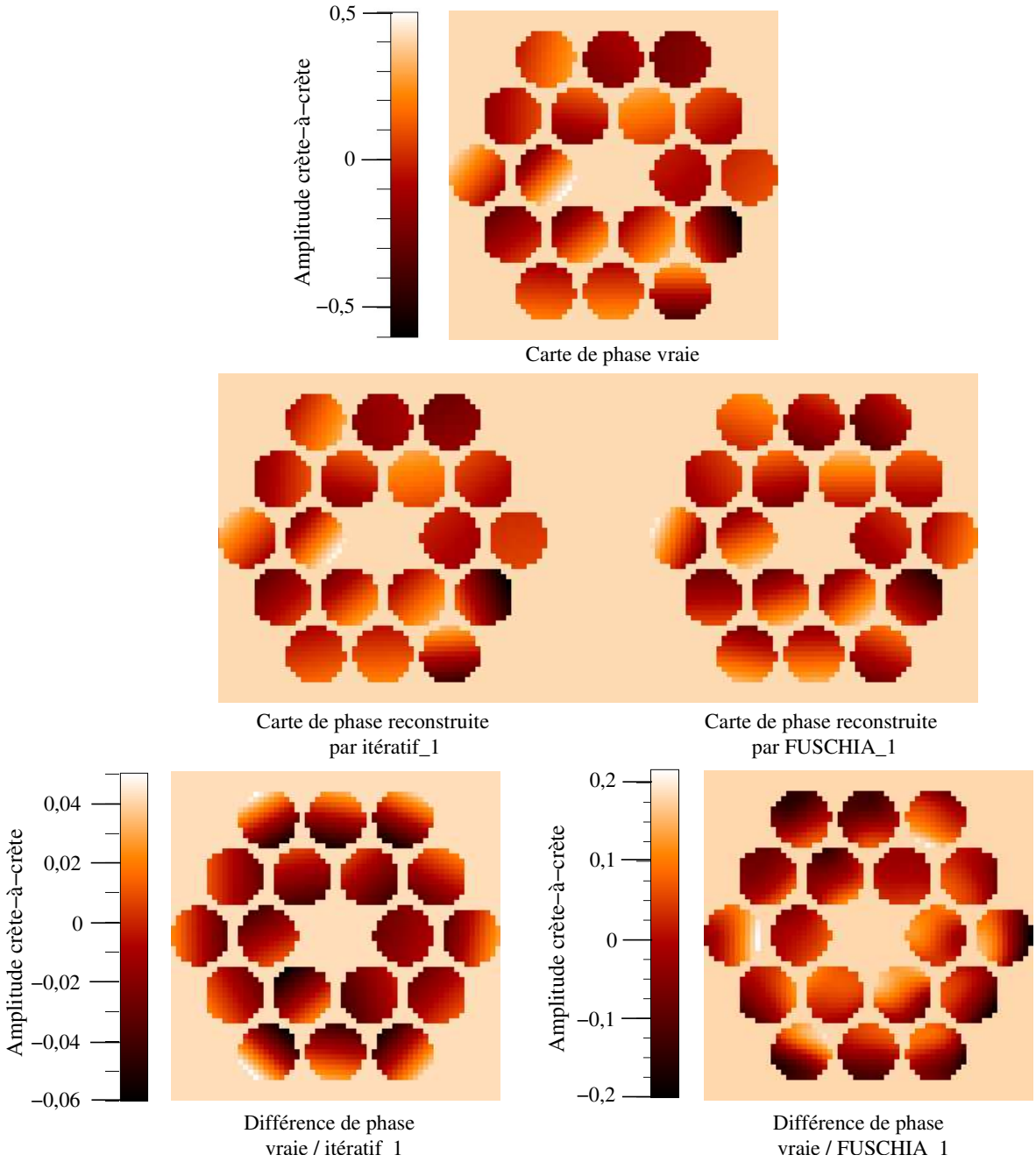


Fig. 5.19 – Comparaison, pour une configuration monopupille à 18 segments, de la carte de phase vraie (à gauche) ainsi que de la carte de phase reconstruite par l'estimateur FUSCHIA_1 (à droite) composées toutes deux de faibles pistons et basculements.

Nous avons représenté sur la Fig. 5.20 gauche l'écart-type total σ obtenu en piston sur l'ensemble des sous-pupilles par l'algorithme analytique FUSCHIA_1 (en cercles) ainsi que par l'estimateur itératif_1 (en points). Les estimées correspondantes suivent toujours une loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ en régime de bruit de photons et présentent des performances quasi-identiques ; l'ajustement de cette loi est très proche dans les deux cas, vu que τ est égal à $4{,}6$ pour FUSCHIA_1 et vaut $4{,}9$ pour l'estimateur itératif. Ces cœfficients nous confirment que la dispersion augmente bien avec le nombre N_T de sous-pupilles, puisqu'ils prennent une valeur plus importante comparé à un cas où N_T est restreint. Cependant, l'augmentation se révèle relativement limitée et reste du même ordre de grandeur que celle correspondant à un cophasage à trois sous-pupilles. L'erreur totale associée aux mesures, que nous avons représentée Fig. 5.20 droite, montre que l'estimation atteint un palier limite en régime de bruit de photons quel que soit l'algorithme considéré. Or, si pour FUSCHIA_1 ce phénomène peut être imputé aux approximations faible phase, nous en déduisons, pour l'estimateur itératif_1, que l'existence de ce palier est due à l'emploi d'un nombre important de sous-pupilles. L'erreur reste néanmoins relativement faible dans les deux cas, atteignant $1{,}3.10^{-2}$ rad RMS pour l'estimateur analytique et 4.10^{-3} radian avec l'algorithme itératif. Ce résultat est confirmé Fig. 5.19 (au milieu et en bas) qui illustre la carte de phase reconstruite par l'estimateur analytique FUSCHIA_1. Nous remarquons que les aberrations sont dans l'ensemble bien reconstruites et sans indétermination de signe bien que la configuration soit redondante.

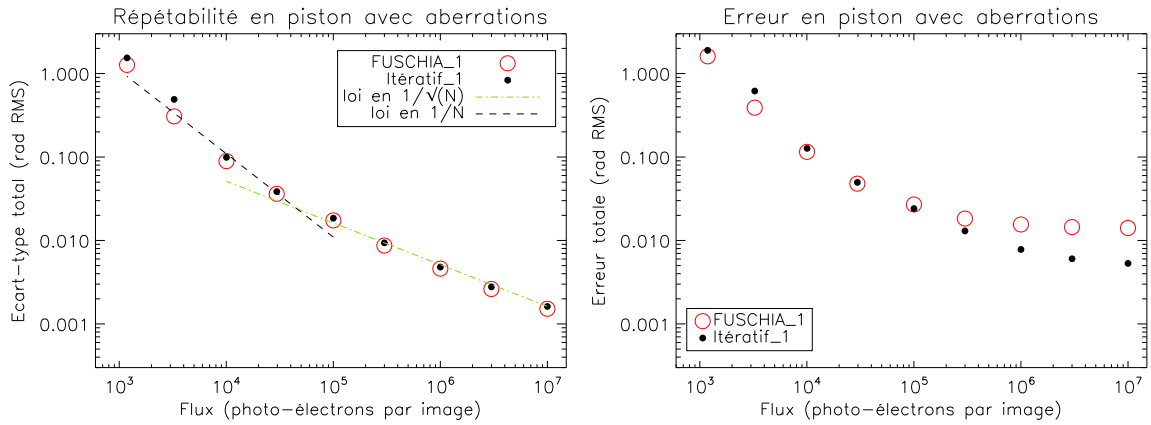


Fig. 5.20 – Ecart-type (à gauche) et erreur totale (à droite) en piston obtenus par les estimateurs de type SICLOPE pour une configuration monopupille à $N_T = 18$ segments sur laquelle est appliquée un jeu de faibles pistons et basculements.

Dès lors, au vu de ces résultats, nous pouvons en conclure que nos deux algorithmes de type SICLOPE sont tout à fait adaptés au cophasage de télescopes monopupilles segmentés, dont la configuration est par définition fortement compacte et le plus souvent centrosymétrique. Toutefois, la mise en phase de tels instruments n'est vraiment d'actualité que pour les télescopes au sol d'un diamètre de plus d'une dizaine de mètres ou dans le cadre de systèmes déployables en orbite. Sur les plus petits télescopes, les aberrations d'intérêt sont principalement imputables aux défauts propres de l'instrument (hors aberrations de recombinaison) où à la turbulence atmosphérique et sont par nature d'ordre supérieur ou égal à la défocalisation ($k \geq 4$). Deux questions se posent alors :

- savoir si l'algorithme itératif est capable d'estimer correctement ces modes supérieurs ;
- vérifier que l'algorithme analytique peut approximer au mieux la phase vraie en estimant les

pistons et basculements issus de sa décomposition sur les sous-pupilles[8].

Afin de statuer sur ces questions, nous appliquons sur notre configuration à 18 segments un jeu de faibles modes supérieurs allant de la défocalisation (Z_4) à la coma triple (Z_{10}) et tel que défini Tab. 4.6 page 97. Nous simulons avec ces cœfficients et pour un flux de 10^6 phe$^-$ dix images de taille 128×128 pixels. Les données correspondantes sont ensuite traitées avec l'algorithme itératif, pour lequel la recherche est effectuée sur dix modes, et par l'algorithme analytique, qui par définition ne recherche que les pistons et basculements issus de la décomposition des modes globaux sur les sous-pupilles.

La Fig. 5.21 représente la carte de phase vraie appliquée (en haut), celle reconstruite par itératif_1 (à gauche) ainsi que la carte composée des seuls pistons et basculements locaux estimés par FUSCHIA_1 (à droite). Les performances de l'estimateur itératif sont excellentes, avec une erreur totale inférieure à 8.10^{-3} rad RMS. L'estimation des aberrations par FUSCHIA_1 est quant à elle assez proche de la phase vraie ; l'estimation reste de bonne qualité, avec une erreur $< 3.10^{-2}$ radian. Dès lors, nous en déduisons qu'il est possible, si le nombre de segments est suffisamment important, de reconstruire de manière rapide les faibles pistons et basculements issus de la décomposition des modes globaux sur les sous-pupilles. Ce résultat ouvre de nombreuses perspectives : en effet, l'estimateur analytique n'est plus limité aux seules opérations de cophasage d'un interféromètre multipupille, mais peut potentiellement servir à estimer en temps-réel les défauts de phase (dûs à la turbulence, aux dérives thermiques, etc.) d'un instrument monopupille à partir des données acquises par un Analyseur de Surface d'Onde situé au voisinage du plan focal.

5.6 Conclusion du chapitre

Afin de répondre aux exigences temps-réel des futurs instruments à synthèse d'ouverture sur objet ponctuel, nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la caractérisation des méthodes de type FUSCHIA basées soit sur une analyse des modes de la FTO par maximum de vraisemblance au plan focal (FUSCHIA_0+), soit sur la minimisation d'un critère d'erreur quadratique avec mise sous forme affine de la FTO dans un plan image quelconque (FUSCHIA_1).

Nous avons analysé dans un premier temps les performances obtenues au plan focal par nos estimateurs dans le cas d'une configuration non redondante donc non centrosymétrique. Il est apparu que ces derniers s'avèrent tout à fait appropriés pour estimer les faibles aberrations lors d'une opération de cophasage en boucle fermée. En régime de bruit de photons (soit pour $N_{\text{bph}} \geq 3.10^4$ phe$^-$), l'estimateur FUSCHIA_0+ peut retrouver des pistons compris entre $\pm\pi$ rad RMS et des basculements vérifiant $|a_{2n}| \leq \pi/2$ radians avec une précision de $\lambda/60$ (soit environ 0,1 rad RMS). Le domaine de validité de FUSCHIA_1 est quant à lui plus restreint du fait de l'approximation faible phase. Cependant, bien qu'il soit compris entre $\pm 1{,}2$ radians quelles que soient les aberrations considérées, sa précision d'estimation est meilleure en basculement lorsque $|a_{2n}| \leq 0{,}8$ rad. Son utilisation s'avère donc plus intéressante dans le cadre d'un cophasage en boucle fermée.

La mesure rapide des faibles pistons et basculements différentiels d'un instrument à synthèse d'ouverture est donc réalisable en plan focal grâce aux estimateurs FUSCHIA_0+ ou FUSCHIA_1. Cependant, l'utilisation de ce plan particulier ne permet pas de retrouver de façon certaine le signe de la partie paire de la phase incidente lorsque la configuration est centrosymétrique. Dès lors, nous avons montré que l'utilisation de FUSCHIA_1 dans un plan défocalisé permettait de s'affranchir de

[8]Nous rappelons qu'un mode d'ordre k se traduit par une somme de polynômes locaux d'ordre $\{0, \ldots, k\}$ sur les N_T sous-pupilles [Ragazzoni *et al.* (1999)] et s'approxime à l'ordre 1 par ses composantes en pistons et basculements.

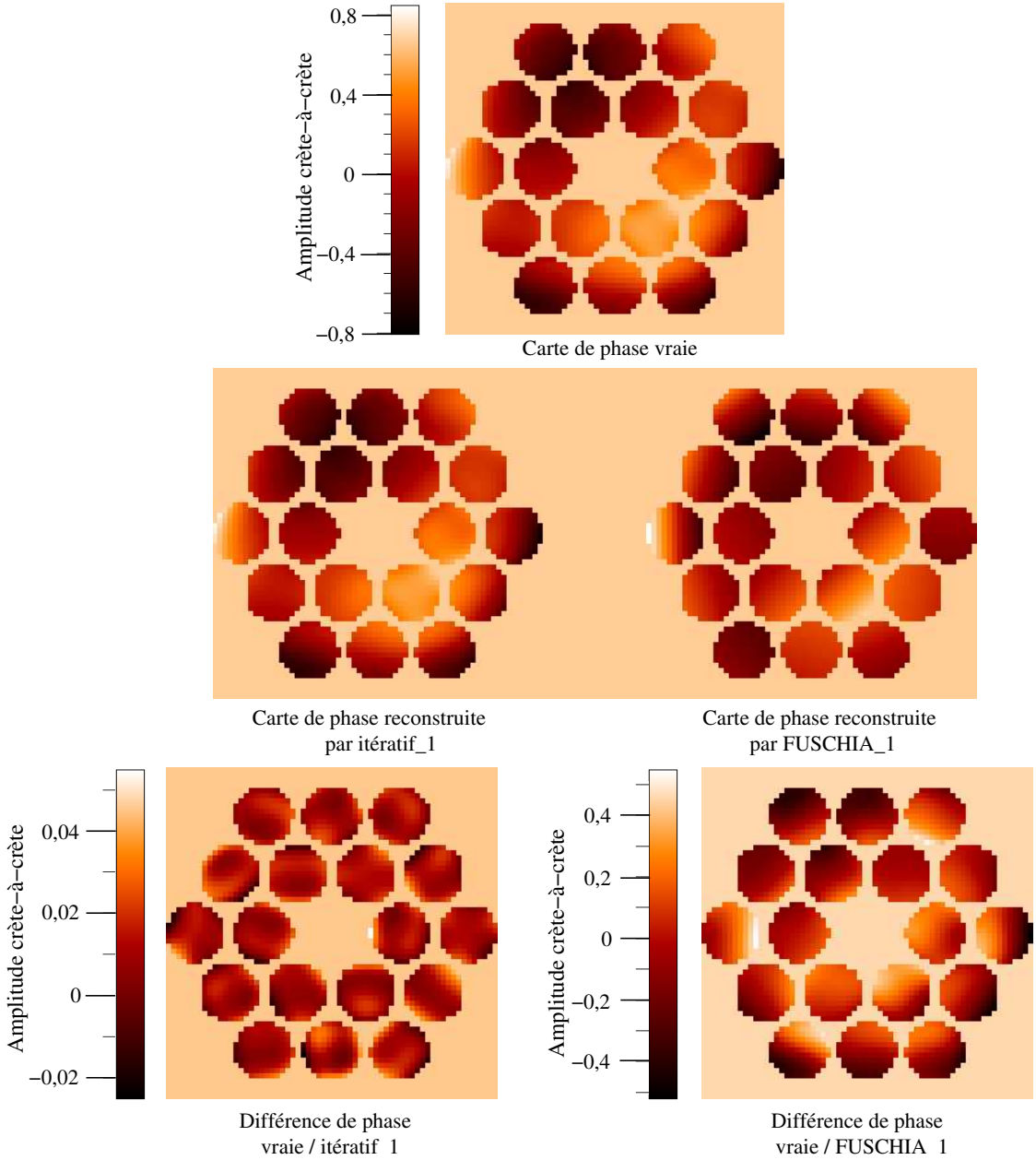


Fig. 5.21 – Comparaison, pour une configuration monopupille à dix-huit segments, de la carte de phase vraie composée de modes supérieurs (en haut), de celle reconstruite par l'estimateur itératif (à gauche) puis analytique (à droite), cette dernière n'étant composée que de pistons et basculements.

cette limitation. Utilisé en plan extra-focal, cet estimateur peut retrouver avec une précision de $\lambda/60$ RMS les pistons et basculements compris respectivement entre $\pm 1{,}1$ rad et $\pm 0{,}85$ radian en régime de bruit de photons pour $N_{\text{bph}} \geq 3.10^4$ phe$^-$. Par la suite, nous avons étudié l'influence de paramètres clefs comme l'organisation de la couverture fréquentielle. Il en est ressorti que l'estimation de phase en plan extra-focal était relativement peu sensible à la dilution introduite. De plus, dans le cadre d'une configuration monopupille segmentée, il est possible d'évaluer l'impact des défauts propres à l'instrument en estimant les piston et basculements issus de la décomposition des modes supérieurs sur les sous-pupilles.

Au final, la gamme des estimateurs de type FUSCHIA permet de cophaser sur point source et en temps réel n'importe quel type d'instrument à synthèse d'ouverture optique. Dans le prochain chapitre, nous allons nous intéresser à caractériser expérimentalement l'ensemble de ces estimateurs dans le cadre de différents projets et à les confronter aux performances obtenues avec les algorithmes itératifs.

Chapitre 6

Validations expérimentales sur le banc de test BRISE

6.1 Introduction

Les simulations que nous avons effectuées au cours des deux derniers chapitres nous ont permis d'identifier les performances optimales pouvant être atteintes par l'ensemble des capteurs de type plan focal dont nous disposons aujourd'hui à l'ONERA. En outre, nous avons également démontré la capacité des estimateurs analytiques à fermer une boucle de cophasage aussi bien sur scène étendue que sur objet ponctuel. Néanmoins, il est indispensable de confronter l'ensemble de ces résultats à ceux obtenus dans des conditions réelles puisque dans ce cas la mesure de front d'onde dépend *in fine* de l'adéquation entre le modèle direct (qui décrit la formation des images et qui est utilisé lors de la résolution du problème inverse) et le modèle de l'expérience.

Dès lors, l'exploitation de données acquises sur banc expérimental se révèle incontournable. Afin d'analyser le comportement de nos estimateurs et d'être en mesure de les relier directement aux performances des futurs instruments spatiaux, l'ONERA a développé et mis en œuvre BRISE, un banc de tests dédié à l'étude des méthodes de type plan focal. La problématique du cophasage étant relativement récente, très peu de laboratoires se sont lancés dans la conception de bancs imageurs à synthèse d'ouverture et encore moins pour des applications dédiées à l'observation de scènes étendues[1]. Parmi les quelques réalisations expérimentales qui ont été développées au cours de ces vingt dernières années, citons principalement, indépendamment de BRISE :

- le tout premier banc dédié à l'étude de systèmes multitélescopes, Phasar, qui permit de démontrer que les pistons et basculements mesurés sur objet ponctuel pouvaient être corrigés par les actuateurs d'une boucle de contrôle [Fender & Carreras (1988)] ;
- le Multipurpose Multiple Telescope Testbed (MMTT), directement inspiré de Phasar et destiné à valider le principe de l'imagerie grand champ par synthèse d'ouverture pour des objets quasiment non résolus [De Hainaut *et al.* (1995)] ;
- le banc SOLARNET, qui cherche à prouver la faisabilité du cophasage par filtrage spatial dans le cadre de projets dédiés à l'observation de la surface du soleil [Damé *et al.* (1998)] ;
- le Multi Aperture Imaging Array [Zarifis *et al.* (1999); Seldin *et al.* (2000)], qui servit à confirmer l'applicabilité de la diversité de phase pour le cophasage de télescopes sur objets étendus ;

[1] Nous considérons ici des instruments constitués d'un réseau de télescopes et non des configurations monopupilles segmentées.

– le banc STAR-9 de Lockheed Martin, destiné exclusivement au cophasage de scènes terrestres par diversité de phase [Kendrick *et al.* (2006)] ;
– enfin, citons le banc SIRIUS, démonstrateur de VIDA[2], qui explore le concept de pupille densifiée permettant l'identification des aberrations différentielles par la mesure directe de distributions d'intensité au plan focal [Patru *et al.* (2008)].

Ces différentes réalisations ont permis d'approfondir l'étude du cophasage et d'identifier les limites des différentes méthodes sélectionnées. Toutefois, aucune caractérisation fine des capteurs (étude des performances en fonction du flux, détermination des zones de linéarité, identification des paramètres clefs, *etc.*) n'a encore vraiment été effectuée à notre connaissance ; de plus, si la mesure de résidus en boucle fermée a parfois été réalisée, ce fut là encore à titre démonstratif sans étude approfondie.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'utiliser le banc BRISE pour effectuer la validation de l'ensemble des estimateurs dont nous disposons actuellement ; les tests effectués vont donc servir à :
– actualiser l'ensemble des performances des estimateurs itératifs de type *phase retrieval*/diversité de phase. En effet, bien que cette étude ait été menée à l'origine en 2004 avec des résultats plutôt encourageants [Baron (2005)], la mise en place du logiciel MASTIC, qui permet une gestion optimale de la configuration pupillaire ainsi qu'une parfaite adéquation entre modèle direct/problème inverse, devrait nous conduire à une nette amélioration des performances ;
– vérifier que, contrairement aux résultats obtenus précédemment sur BRISE, la mesure des modes supérieurs par les estimateurs itératifs est désormais possible ;
– valider le principe du cophasage par les méthodes de type SICLOPE qui s'apparentent à du *phase retrieval* dans un plan de diversité quelconque (hors plan focal) ;
– et pour finir, caractériser les estimateurs analytiques que nous avons développés.

Les validations que nous présentons dans ce chapitre ont la particularité d'être effectuées dans le cadre de différents projets ; par conséquent, nous pourrons dores et déjà juger si les performances de nos estimateurs sont en mesure de satisfaire aux besoins des futures missions spatiales :
– l'étude SOTISE (pour Satellite d'Observation de la Terre par Interférométrie sur Scènes Etendues) a pour cadre l'observation de scènes terrestres depuis l'orbite géostationnaire. Son objectif est d'étudier la faisabilité d'un système spatial multitélescope pouvant atteindre une résolution métrique au sol. Financé principalement par la DGA avec participation du CNES, cet instrument imageur grand champ devra être cophasé de telle sorte que l'erreur totale commise sur l'estimation des aberrations soit inférieure à $\lambda/60$ RMS [Sorrente *et al.* (2003)].
– le second champ d'application concerne l'observation de systèmes stellaires. Dans ce contexte, le projet DARWIN (Detection and Analysis of Remote Worlds by Interferometric Nulling), projet de grande envergure étudié par l'ESA, a pour but l'identification de planètes telluriques extra-solaires susceptibles d'abriter la vie. La détection de ces planètes est cependant extrêmement difficile du fait de la présence d'une étoile proche qui s'avère beaucoup plus lumineuse (au moins d'un facteur 10^6). Pour répondre à ce problème, une solution consiste à faire du *nulling*, c.-à.-d. éteindre la lumière de l'étoile par interférométrie destructive. La configuration retenue pour DARWIN est un ensemble de quatre satellites volant en formation espacés d'une base maximale de cinq cents mètres composé de trois satellites collecteurs (présentant chacun un miroir primaire de 3 m de diamètre) plus un satellite combinateur. La mise en œuvre d'un

[2]VIDA, ou Vlti Imaging with a Densified Array, est un instrument imageur proposé pour le VLTI et dont l'objectif est de recombiner les faisceaux des quatre télescopes principaux à l'aide de fibres monomodes selon la technique de la pupille densifiée, ou *hypertélescope*, et ce afin d'obtenir au foyer de l'interféromètre une image à très haute résolution angulaire qui soit directement exploitable.

tel système rencontre plusieurs difficultés majeures, notamment au niveau de la stabilisation en position des satellites et de leur cophasage optique. Pour atteindre le niveau de *nulling* requis, la mesure des aberrations différentielles devra être effectuée avec une précision inférieure à $\lambda/650$ RMS sur un point source astronomique [Cassaing *et al.* (2003a)], et ce pour des magnitudes[3] comprises entre 8 et 12.

L'objectif de ce chapitre est donc de caractériser expérimentalement l'ensemble des estimateurs de type plan focal, de confronter les résultats correspondant à ceux obtenus par simulation et de vérifier si les niveaux de performances atteints permettent de répondre pleinement aux spécifications des différents projets. Nous commençons tout d'abord par présenter en section 6.2 le banc de tests BRISE en détaillant la fonctionnalité de ses différents modules et en décrivant les procédures d'alignement nécessaires à sa bonne utilisation. Nous comparons ensuite en section 6.3 les propriétés asymptotiques des estimateurs itératifs et analytiques dans le cadre de l'étude SOTISE. Enfin, nous nous intéressons en section 6.4 aux résultats obtenus dans le cas où l'objet observé se révèle être un objet ponctuel (projet DARWIN).

6.2 Présentation du banc BRISE

La mesure et la correction des aberrations différentielles entre les sous-pupilles d'un instrument à synthèse d'ouverture est une étape fondamentale qui assure une interférence stable entre les faisceaux et *in fine* l'exploitation pur et simple du système. Dans ce contexte, le banc de test BRISE (Banc Reconfigurable d'Imagerie sur Scènes Etendues) a été conçu et mis en œuvre à l'ONERA afin d'évaluer les performances de différents capteurs de cophasage adaptés aux cas de la SOO. Ce banc, opérationnel depuis 2004, permet de simuler un instrument à plusieurs sous-pupilles et d'introduire des aberrations parfaitement calibrées en piston et basculement sur le trajet des faisceaux. Pensé à l'origine pour être le plus ouvert possible, BRISE peut aussi bien être utilisé pour caractériser des capteurs propres à l'imagerie de scènes étendues que pour faire de l'interférométrie stellaire [Cassaing *et al.* (2006)].

Dans cette section, nous donnons tout d'abord une description détaillée du banc et décrivons la fonctionnalité de ses différents modules. Nous identifions ensuite les éléments qu'il est nécessaire de prendre en compte afin de paramétrer correctement le modèle direct en fonction des conditions expérimentales et donnons les procédures d'alignement telles que décrites par Baron [Baron (2005)]. Enfin, nous présentons les conditions générales des expériences et détaillons les principaux tests effectués lors de la validation des estimateurs.

6.2.1 Généralités

Le banc de test BRISE, dont le schéma de principe est représenté Fig. 6.1, est principalement composé de quatre modules distincts :

– un module source, qui délivre un objet ponctuel (REF) servant également de référence et/ou une scène étendue (EXT) selon le type d'applications que l'on souhaite étudier ;

[3] La magnitude m, qui permet de mesurer la luminosité d'un objet céleste, s'exprime comme :

$$m = -2{,}5 \log f + \text{Cste} \tag{6.1}$$

où f est le flux reçu dans la pupille (en W/m^2).

– un module de perturbation, servant à définir la configuration pupillaire et à introduire des aberrations de piston/basculement parfaitement calibrées grâce à un Miroir Déformable (MD) ;
– un module de détection, qui comprend le capteur de cophasage ainsi qu'un détecteur permettant d'acquérir simultanément les images des deux objets dans le ou les plans de diversité sélectionnés ;
– un module de contrôle, qui permet de piloter les expériences.

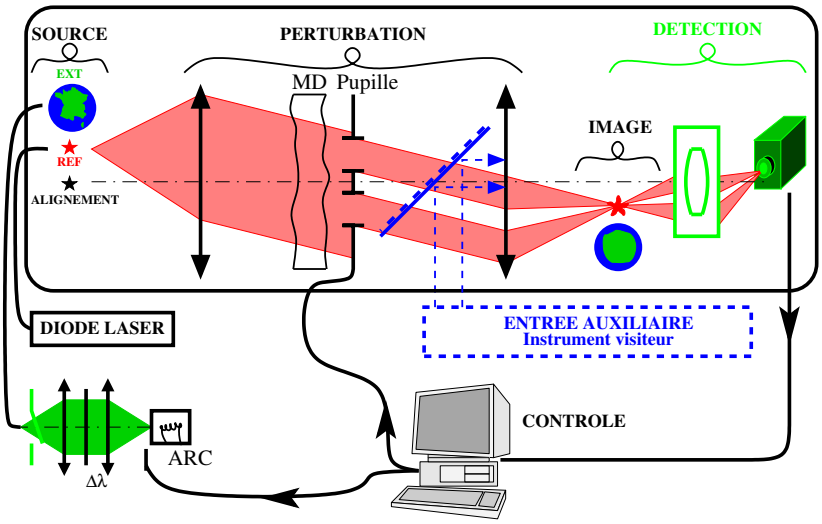


Fig. 6.1 – Schéma de principe du banc BRISE.

Notons que des entrées/sorties auxiliaires ont également été prévues afin d'accueillir des instruments visiteurs à condition que ces derniers soient adaptés aux principales caractéristiques du banc (faisceaux collimatés, hauteur spécifique).

Etant donné que BRISE doit permettre la mesure de faibles aberrations avec une répétabilité inférieure à $\lambda/60$ RMS sur scènes étendues, il est indispensable d'identifier et de réduire les principales sources d'erreurs susceptibles de limiter les performances des capteurs. Dès lors, le banc a été conçu pour que les faisceaux issus des deux objets soient angulairement le plus proche possible, ce qui permet d'utiliser des optiques communes et ainsi de réduire l'effet des vibrations et de minimiser au maximum les aberrations de champ[4]. De plus, un soin tout particulier a été apporté au contrôle de l'environnement :

– le trajet optique est protégé des effets de la turbulence par un capot métallique qui recouvre la totalité du banc (illustré Fig. 6.2) et par des plaques de séparation qui permettent de limiter les volumes nécessaires au passage des faisceaux. En outre, ces protections sont entièrement peintes en noir pour minimiser les effets de lumière parasite sur le banc ;
– afin d'amortir de manière significative les vibrations extérieures transmises par le sol, BRISE est monté sur une table à vérins pneumatiques dont la fréquence de coupure de 1 Hz est bien adaptée aux modes propres du laboratoire qui ont été mesurés entre 10 et 30 Hz ;
– le local où est installé le banc est stabilisé en température au degré près de façon à restreindre les effets de dilatation mécanique dûs aux variations thermiques ;

[4]L'apparition de ces aberrations, appelée également *phénomène d'anisoplanétisme*, est dû à la décorrélation angulaire du front d'onde engendrée par la turbulence atmosphérique ainsi que par certaines aberrations optiques évoluant avec le champ.

– la table est installée dans un caisson préexistant afin d'ajouter un niveau supplémentaire d'isolation. En effet, des mesures ont montré que ce dispositif permet de réduire par quatre les variations de température sur un cycle journalier. De plus, le caisson apporte également une isolation lumineuse et phonique. Enfin, notons que toutes les électroniques de puissance ont été déportées à l'extérieur afin de ne pas évacuer de chaleur vers le banc.

Ces contrôles drastiques de vibration et de température permettent de minimiser la dérive des aberrations au cours de temps. Au final, la stabilité nanométrique est même atteinte, tout du moins pour des mesures dont le temps d'acquisition est inférieur à la dizaine de secondes [Cassaing *et al.* (2006)].

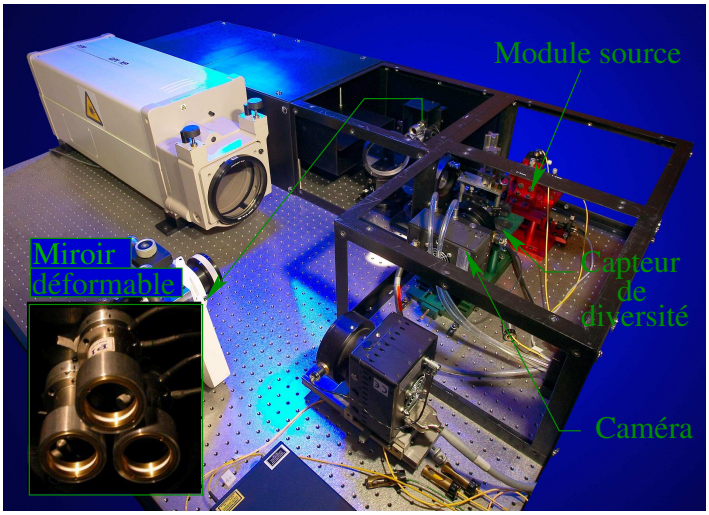


Fig. 6.2 – Photographie du banc BRISE avec vue de la table à vérins pneumatiques, du capot métallique ainsi que des principaux éléments que sont le module source, le miroir déformable et le capteur de cophasage.

Les principales caractéristiques de BRISE sont listées Tab. 6.1. Soulignons que la conception optique de BRISE a été optimisée pour la bande spectrale $[0{,}53\,;\,0{,}83]$ µm ; toutefois, il est possible d'exploiter le banc sur un plus vaste domaine, entre $[0{,}4\,;\,1{,}5]$ µmsi nécessaire.

6.2.2 Description du banc

Nous présentons dans cette sous-section les principaux modules qui constituent le banc et expliquons leur fonctionnement. Pour accéder à une description plus détaillée de BRISE et de ses fonctionnalités, le lecteur pourra se reporter à l'article de Sorrente [Sorrente *et al.* (2004)] ou au manuscrit de Baron [Baron (2005)].

6.2.2.1 Le module source

Le module source permet de délivrer simultanément deux objets, un objet étendu qui reproduit une scène terrestre ou astronomique, ainsi qu'un objet ponctuel qui simule une source stellaire et faisant également office de référence afin de contrôler les aberrations introduites sur le banc. Comme souligné précédemment, les faisceaux correspondants aux deux objets sont angulairement très proches, ce qui permet d'utiliser les mêmes optiques et par conséquent de limiter au maximum les aberrations différentielles entre les voies.

Paramètre	Valeur
Bande spectrale maximale	[0,4 ; 1,5] µm
Longueur d'onde de la source de référence	0,635 µm
Largeur des scènes étendues	$\simeq$ 256 pixels
Diamètre maximal de la configuration pupillaire	$\simeq$ 60 mm
Amplitude maximale des perturbations introduites	$\simeq \pm 4$ µm
Champ de la caméra	1317 $\times$ 1035 pixels
Hauteur d'axe	160 mm

Tab. 6.1 – Liste des principales caractéristiques du banc BRISE.

L'objet ponctuel et la scène étendue sont éclairés par deux sources lumineuses distinctes situées à l'extérieur du caisson de façon à éviter toute diffusion de chaleur. L'alimentation du module source est effectuée par un banc annexe, SIROCCO (Système d'Injection Relié à l'Objet, Contrôlant Chaleur et Obturation), qui permet de réaliser les couplages des sources dans des fibres optiques comme illustré Fig. 6.3 gauche. Des densités et des filtres interférentiels peuvent également être insérés sur le banc afin de sélectionner la longueur d'onde de travail ou de limiter le flux injecté dans les fibres ; comme ces éléments sont placés sur le trajet d'un faisceau collimaté entre les deux lentilles couplant la lampe et l'extrémité de la fibre, ils n'engendrent pas de perturbations au niveau du chemin optique.

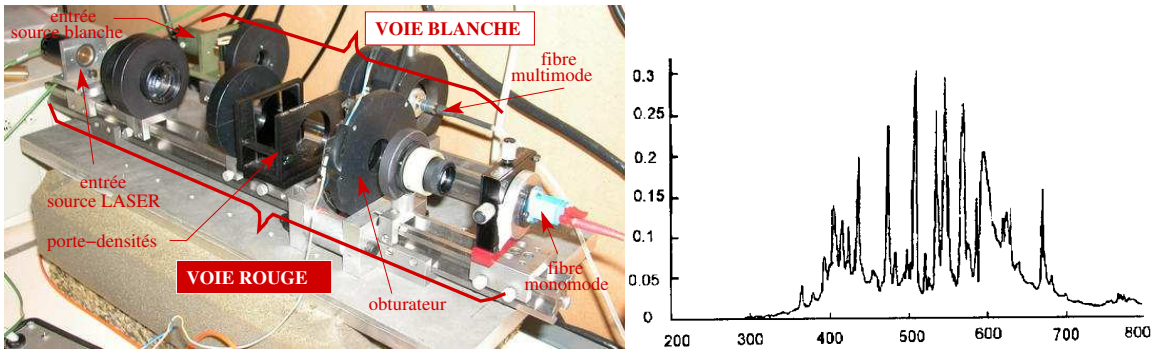


Fig. 6.3 – A gauche : vue du banc SIROCCO et du couplage sources/fibres optiques ; à droite : distribution spectrale de la source blanche en fonction de la longueur d'onde (nm).

Comme nous pouvons le voir sur la Fig. 6.3 gauche, le banc SIROCCO est composé de deux sous-modules :

- une voie dite *blanche* dédiée à l'éclairage de scènes étendues grâce à une fibre optique multimode reliée à une lampe à arc dont la distribution spectrale est représentée Fig. 6.3 droite ;
- une voie dite *rouge* qui simule une source ponctuelle au moyen d'une fibre optique monomode. Par défaut, cette fibre est reliée à une source LASER He-Ne émettant à 632,8 nm mais peut aussi être utilisée avec la lampe à arc.

Les émulsions photographiques éclairées par SIROCCO reproduisent soit des scènes terrestres, soit des objets astronomiques étendus voire même des mires de test. Les scènes terrestres choisies sont des vues aériennes urbaines présentant des contrastes ainsi que des densités spectrales diverses et variées. Toutefois, nous définirons comme scène de référence la vue de Toulouse illustrée Fig. 2.3 page 55 avec son spectre théorique ayant servi lors des validations par simulation. Etant donné que

les capteurs de cophasage que nous souhaitons caractériser sont chromatiques, l'emploi de filtres interférentiels apparaît nécessaire pour sélectionner la largeur de la bande spectrale de travail. Par la suite, nous emploierons des filtres dont la longueur d'onde est centrée sur 650 nm.

6.2.2.2 Le module de perturbation

Le module de perturbation permet de sélectionner une configuration pupillaire (monolithique ou multipupille) et d'y introduire une phase aberrante parfaitement calibrée. Les deux faisceaux en provenance du module source sont collimatés par une parabole hors-axe puis envoyés sur une lame semi-réfléchissante qui distribue le flux à la fois sur un miroir plan de diamètre 60 mm nous servant de miroir de référence ainsi que sur un miroir déformable composite introduisant des aberrations de piston et basculement. Chacun de ces miroirs possède un support permettant d'y insérer un masque afin de sélectionner la configuration pupillaire de notre choix.

Le miroir composite dit *déformable* (MD) est l'un des éléments clef du banc BRISE. Au vu des ASO spécifiques que nous souhaitons étudier, il est nécessaire que ce miroir puisse introduire des pistons et basculements absolus ayant une amplitude de plusieurs longueurs d'onde. Or, les MD habituels, dont la surface est continue, ne peuvent introduire de pistons sans ajouter des modes d'ordre supérieur. Par conséquent, l'ONERA a conçu un miroir segmenté spécifique représenté Fig. 6.4 gauche et constitué de trois miroirs plans de diamètre $\mathcal{D} = 21$ mm. Deux d'entre eux sont montés sur des montures actives commandables en piston et basculement, tandis que le troisième est un élément passif fixé sur un support de même taille et de même matériau. Chaque monture, qui possède trois actionneurs piézo-électriques placés à cent vingts degrés les uns des autres comme illustré Fig. 6.4 droite, bénéficie d'un contrôle nanométrique en boucle fermée sur une jauge de contrainte interne afin d'éviter les dérives inhérentes aux cales piézo-électriques.

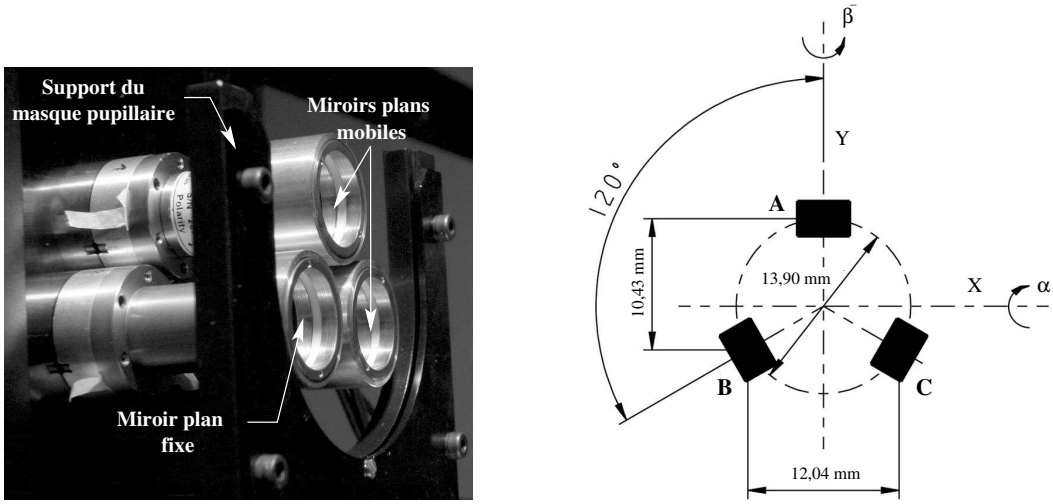


Fig. 6.4 – A gauche : photographie du miroir composite. A droite : schéma illustrant la configuration des actionneurs piézo-électriques sur chaque monture.

La course maximale des actionneurs, qui est d'environ 12 µm, est proportionnelle aux tensions appliquées comprises entre 0 et 10 Volts. Dès lors, pour commander chaque miroir plan, il est indispensable d'établir la matrice de commande reliant les tensions aux aberrations qu'elles induisent en piston et basculement. Comme les supports sur lesquels les miroirs sont placés ne sont pas parfaits, il sera

également nécessaire d'effectuer l'alignement de ces dits-miroirs avant d'envisager une quelconque utilisation du miroir composite (procédure dont nous parlerons en détail au paragraphe 6.2.3.2).

Chacun des miroirs de BRISE (le composite ou le monolithique de référence) possède un support monté devant sa surface réfléchissante, ce qui permet d'y insérer un masque et de sélectionner la configuration pupillaire de notre choix. La configuration de référence, représentée Fig. 6.5 gauche, fournit une pupille compacte ayant une dilution de 1,62 permettant de faire de l'imagerie. Ce masque, qui est légèrement plus petit que la pupille physique du miroir composite (le diamètre des sous-pupilles étant de 20 mm), est celui qui servira à la totalité des validations expérimentales présentées dans ce chapitre. L'alignement optique des différents modules est quant à lui réalisé sur le miroir de référence avec le masque présenté Fig. 6.5 droite qui est circonscrit à la pupille utile. D'autres masques présentant un plus grand nombre de sous-pupilles sont également disponibles. Toutefois, ils ne seront pas utilisés étant donné que notre objectif est pour l'instant de valider expérimentalement le principe même du cophasage.

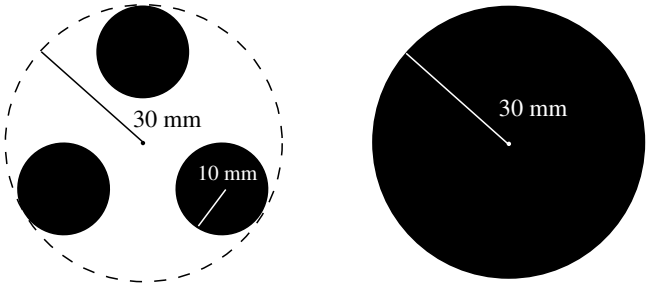


Fig. 6.5 – Configurations pupillaires utilisées.

6.2.2.3 Le module de détection

L'élément principal du module de détection de BRISE est le Capteur De Cophasage (CDC). Ce dernier, basé sur le principe de la diversité de phase, comprend deux voies d'imagerie :

- une voie focale, ce qui permet également d'utiliser les estimateurs de type *phase retrieval* ;
- une voie extra-focale pouvant en outre servir lors des caractérisations de type SICLOPE.

L'entrée du capteur illustrée Fig. 6.6 correspond au plan focal intermédiaire où les faisceaux issus des deux objets sont réimagés en sortie du module de perturbation ; la séparation des rayons lumineux en deux se fait dans le faisceau collimaté au moyen d'une conjugaison foyer-infini-foyer. L'aberration de diversité est introduite sur le banc à l'aide d'une vis micrométrique qui translate la lentille imageant cette voie sur la caméra. Par la suite, la valeur de défocalisation retenue sera de 1 rad RMS. Dès lors, les images focales/extra-focales sont enregistrées simultanément sur une caméra grâce à un cube séparateur ainsi qu'à des miroirs placés dans les optiques de relais. Une lentille supplémentaire peut également être insérée pour réimager la pupille afin de contrôler l'homogénéité d'éclairement et pour s'assurer du bon alignement des faisceaux. De plus, le champ de la caméra se révèle suffisamment large pour collecter les images des deux objets (point source et objet étendu) dont les faisceaux sont angulairement très proches. Au final, ce sont donc quatre images qui peuvent être acquises sur la caméra, comme représenté Fig. 6.7, avec une séparation verticale des objets et horizontale pour les voies d'acquisition. Soulignons également que l'échantillonnage des images respecte le critère de Shannon, ce que nous verrons au paragraphe 6.2.3.1.

Enfin notons que la présence sur BRISE de l'ensemble CDC + caméra permet de toujours disposer d'un capteur de cophasage interne pouvant être utilisé pour contrôler la forme du miroir composite lors de tests effectués avec un autre capteur placé en sortie visiteur.

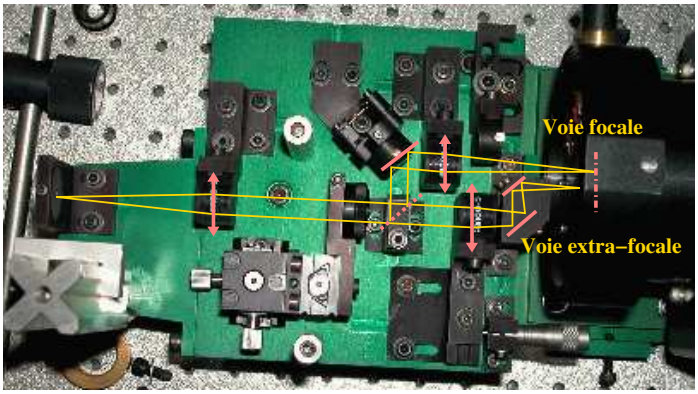


Fig. 6.6 – Vue du capteur de cophasage par le dessus.

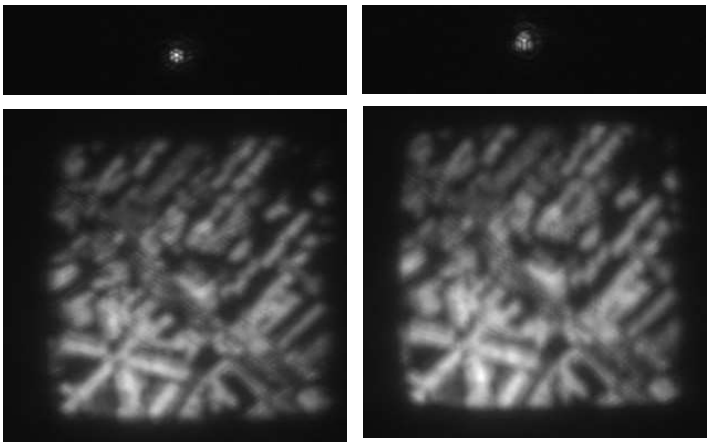


Fig. 6.7 – Images focales (à gauche) puis extra-focales (à droite) obtenues à partir du point source (en haut) ainsi que de la scène étendue de référence (à droite) pour une configuration à trois sous-pupilles.

6.2.2.4 Le module de contrôle

L'objectif principal du module de contrôle est de piloter la caméra ainsi que le miroir composite de manière synchrone. Trois ordinateurs montés sur un réseau interne à l'extérieur du caisson permettent de mener à bien cette opération :

- un premier PC contrôle l'envoi des tensions au miroir composite sachant que chacun des deux miroirs mobiles est activé par trois actuateurs piézo-électriques ;
- un deuxième PC gère l'acquisition d'images ;
- enfin, les données sont transférées sur une station Solaris et enregistrées sur un disque local avec un accès externe. Cette station sert également à définir les nombreux paramètres expérimentaux

(temps d'exposition, nombre d'images, *etc.*) grâce à une interface graphique et les enregistre dans un fichier *log*.

Deux modes opératoires sont couramment employés lors de validations expérimentales. Dans le mode dit de *mesure*, un motif quelconque de modulation est appliqué ; les images acquises sont alors traitées hors connexion grâce au logiciel MASTIC. Nous rappelons que ce dernier, décrit en sous-section 4.2.1 page 68, permet d'estimer les aberrations introduites à partir du modèle direct connu et du fichier *log* préalablement renseigné par l'utilisateur. Les images peuvent bien entendu être traitées par les méthodes itératives classiques ou bien par les méthodes analytiques de type FUSCHIA. Le *mode de commande* permet quant à lui d'envoyer un jeu de tensions prédéfini et d'analyser automatiquement les images correspondantes par appel à MASTIC. Ce mode est essentiellement utilisé afin d'obtenir les tensions incrémentales à appliquer lors de la mise à plat du miroir composite (voir paragraphe 6.2.3.2 pour plus de détails sur cette opération).

6.2.2.5 L'instrument visiteur DWARF

Suite à un appel d'offres lancé par l'ESA, l'entreprise allemande Kayser-Threde a été sélectionnée pour réaliser et concevoir le senseur de front d'onde de la mission DARWIN. L'ONERA fut chargé par la suite d'identifer la configuration instrumentale la plus appropriée. Etant donné que le capteur doit permettre le cophasage en temps réel des télescopes et la mesure des aberrations de hauts ordres, il s'est avéré que la solution adéquate était un capteur plan focal. Dès lors, afin de quantifier les performances des algorithmes de type *phase retrieval* et diversité de phase dans le cadre de ce projet en particulier (les conditions d'utilisation des algorithmes seront précisées en sous-section 6.4.1), Kayser-Threde a conçu un démonstrateur installé en tant qu'instrument visiteur sur le banc BRISE, le DarWin AstRonomical Fringe sensor. DWARF est constitué d'un télescope suivi d'un générateur de défocus délivrant deux images, l'une dans le plan focal du télescope et l'autre subissant une défocalisation parfaitement connue. La prise d'images se fait ensuite grâce à une caméra CCD placée au plan focal. L'ensemble de ce système, adapté à la géométrie de BRISE, est situé derrière la sortie afocale du banc comme illustré Fig. 6.8 ; un miroir à quarante-cinq degrés placé en amont permet alors de renvoyer les faisceaux issus du banc vers l'entrée du télescope.

La caméra de DWARF, qui se substitue au module de détection de BRISE, enregistre les images en se déclenchant sur un signal interne ou externe. En mode interne, DWARF est utilisé avec le miroir de référence, tandis que le mode externe est requis afin de synchroniser la caméra avec le miroir composite de BRISE dès que nous souhaitons introduire des aberrations parfaitement calibrées ; l'acquisition des images s'effectue ainsi après application des tensions au miroir composite.

6.2.3 Mise en œuvre du banc

Plusieurs procédures de calibration s'avèrent nécessaires avant que nous soyons en mesure de valider expérimentalement les méthodes de cophasage dont nous disposons. En effet, il faut pouvoir introduire sur le banc des aberrations parfaitement calibrées afin de les comparer aux aberrations estimées par les capteurs d'intérêt. En outre, il est impératif de connaître le flux présent dans les images expérimentales de manière à relier les résultats obtenus aux performances des futurs instruments astronomiques ou spatiaux. Dès lors, avant de réaliser les premières validations, nous devons :

– établir la matrice de commande Volts/nanomètres du miroir composite permettant la conversion des défauts à introduire (exprimés en nm) en tensions à appliquer sur chaque miroir mobile ;

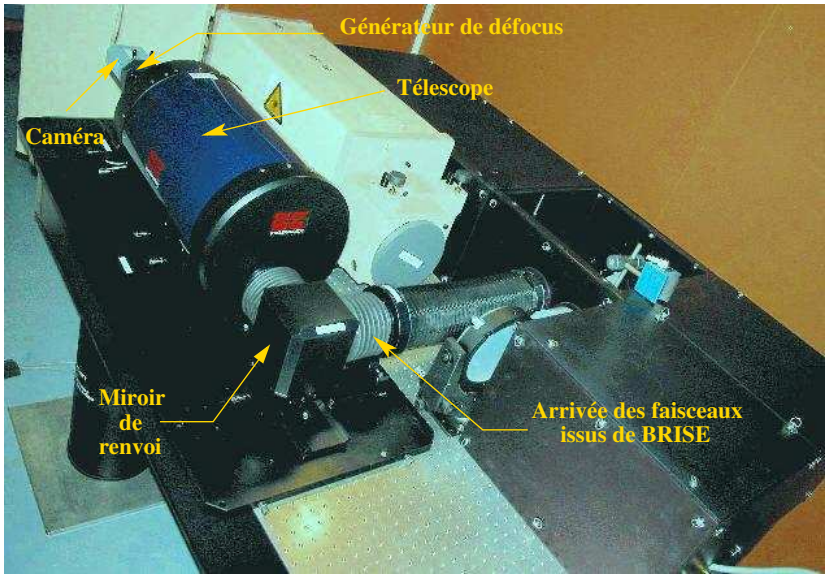


Fig. 6.8 – Illustration de l'implantation de DWARF situé en face du miroir composite de BRISE, la continuité du bafflage étant assurée à l'aide de connecteurs souples.

– effectuer la calibration photométrique des caméras d'imagerie pour déterminer la relation entre le flux exprimé à l'origine en ADU (*Analog to Digital Units*) et le nombre de photo-électrons effectivement détecté.

Mais exécuter ces opérations ne suffit pas. En effet, il est également primordial d'adapter le modèle direct numérique aux conditions de l'expérience afin que ce dernier soit le plus proche possible des images acquises sur le banc. De plus, nous rappelons que les procédures de cophasage n'interviennent qu'après stabilisation de la zone de cohérence et accrochage des franges d'interférence. Or, lors de la première mise en route du banc, les miroirs se trouvent dans une position totalement arbitraire. Pour permettre aux estimateurs de cophasage de fonctionner correctement, nous devons *de facto* réaliser au préalable un cohérençage, c.-à.-d. un préalignement du miroir composite de BRISE.

Dans cette sous-section, nous décrivons les différentes étapes qui permettent d'adapter le modèle direct aux conditions expérimentales et présentons les techniques dont nous disposons pour aligner le banc. Ce n'est qu'une fois ces étapes franchies que nous pourrons caractériser les performances expérimentales de nos capteurs de cophasage. L'implémentation de ces procédures, auxquelles nous avons personnellement participé en 2004 et 2005, est explicitée en détail dans la thèse de Baron [Baron (2005)].

6.2.3.1 Adaptation du modèle direct aux conditions expérimentales

Une bonne connaissance du modèle direct s'avère indispensable pour estimer correctement les aberrations recherchées. En effet, ce modèle intervient lors de la résolution du problème inverse à travers le calcul de la réponse impulsionnelle de l'instrument. Les estimateurs itératifs de type *phase retrieval* ou diversité de phase y font même appel à chaque itération pour déterminer l'image théorique. Dès lors, pour obtenir des images réalistes comparables à celles obtenues sur BRISE, nous devons entre autre prendre en compte le pas pixel, la longueur d'onde d'observation, le facteur d'échantillonnage présent sur le banc ainsi que la forme et l'orientation de la pupille.

Orientation de la pupille numérique Pour obtenir un modèle direct qui soit conforme aux conditions du banc, il est nécessaire de déterminer en premier lieu les orientations respectives du masque pupillaire ainsi que de la pupille numérique vue par les caméras d'imagerie. Etant donné que le trajet des rayons lumineux diffère selon que nous utilisons le miroir composite ou le miroir de référence, nous allons devoir considérer deux pupilles numériques pour chaque caméra.

Lors des mesures, nous prenons comme axes de référence les axes x et y du détecteur. En partant du plan pupille situé devant le miroir composite (représenté Fig. 6.9 gauche) et en étudiant le trajet des faisceaux lumineux jusqu'en sortie du CDC, nous en déduisons que la configuration vue par la caméra de BRISE est celle illustrée Fig. 6.9 milieu. Cette configuration a subi deux symétries, une horizontale et une verticale, dues à la présence d'un foyer intermédiaire sur le trajet des faisceaux.

Intéressons-nous maintenant aux mesures effectuées à partir du miroir de référence. Ce dernier étant tourné de quatre-vingt-dix degrés par rapport au miroir composite, il suffit d'effectuer une symétrie verticale de la pupille numérique correspondant au MD pour obtenir la configuration recherchée (représentée Fig. 6.9 droite).

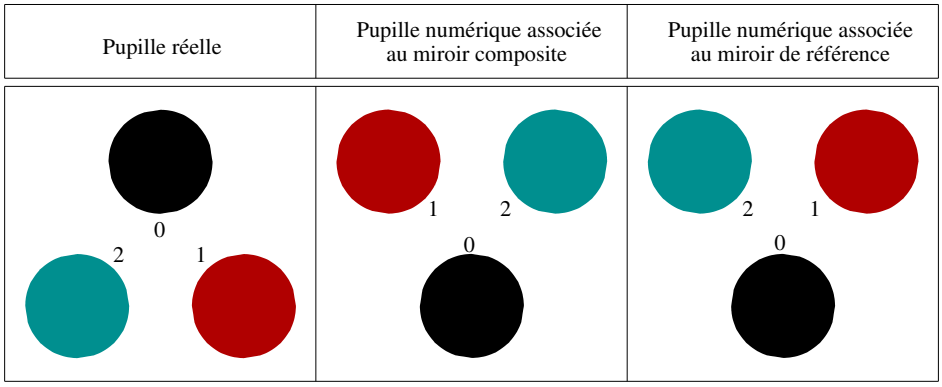


Fig. 6.9 – Orientation des pupilles réelles et numériques sur BRISE. A gauche : masque pupillaire vu de face ; au milieu : pupille numérique correspondant au miroir composite ; à droite : pupille numérique associée au miroir de référence.

Calibration de la pupille numérique Nous avions déjà souligné au paragraphe 4.2.1.1 page 68 que le facteur d'échantillonnage s défini Eq. (4.1) sert non seulement à échantillonner les images mais aussi la pupille numérique. Etant donné que la taille $N_i \times N_i$ de l'image en pixels et le facteur s sont fixés pour une mesure, la taille $N_p \times N_p$ de la pupille l'est aussi : $N_p = N_i/s$. En pratique, il suffit d'effectuer une homothétie de la pupille réelle d'un facteur $N_p/\mathcal{B}$ pour obtenir la pupille numérique, $\mathcal{B}$ étant le diamètre de la pupille pleine équivalente. Le critère de Shannon est largement respecté sur BRISE ; pour une longueur d'onde d'observation fixée à $\lambda = 650$ nm et un diamètre de pupille pleine équivalent à $\mathcal{B} = 60$ mm, nous trouvons $s = 2{,}4$ sachant que la focale du banc est égale à $\mathrm{f} = 1490$ mm et qu'un pixel de la caméra vérifie $e_i = 6{,}8$ µm.

Cette méthode, bien que simple à implémenter, n'utilise que des paramètres déterminés *a priori* et fait malheureusement abstraction des éventuels défauts d'alignement du banc ainsi que des erreurs dues à la réalisation des surfaces optiques. En excluant la présence d'inhomogénéité d'éclairement dans la pupille, nous pouvons considérer que ces défauts entraînent principalement des effets d'homothétie $\mathrm{t}_\circ$ et de rotation $\vartheta_\circ$ du plan pupille. Dès lors, pour tenir compte de ces effets, il est préférable

de déterminer directement la pupille numérique à partir de données expérimentales. Vu que le rapport de la base de la configuration sur le diamètre d'une sous-pupille (ou rapport $\mathcal{B}/\mathcal{D}$) est conservé, nous partons de la connaissance du masque pupillaire auquel nous appliquons une homothétie $\mathfrak{t}$ et une rotation d'angle ϑ. Nous comparons ensuite la fonction de transfert optique $\widetilde{\boldsymbol{h}}(\mathfrak{t},\vartheta)$ déterminée à phase incidente nulle au plan focal par le modèle direct à l'image $i_\circ$ d'un point source acquise expérimentalement :

$$\mathcal{L}_\circ(\mathfrak{t},\vartheta) = \left\| |\widetilde{\boldsymbol{h}}_\circ(\mathfrak{t},\vartheta)| - |\widetilde{\boldsymbol{i}}_\circ| \right\|^2 \tag{6.2}$$

Le minimum du critère $\mathcal{L}_\circ$ est obtenu *ipso facto* lorsque le module de la fonction de transfert calculé à partir du masque pupillaire correspond à la FTM des images expérimentales, soit *a priori* pour $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ et pour $\vartheta = \vartheta_0$. La Fig. 6.10, qui illustre la pupille réelle théorique (à gauche) ainsi que la pupille estimée numériquement (à droite), montre que cette dernière subit une très légère rotation évaluée ici à 2,5 degrés.

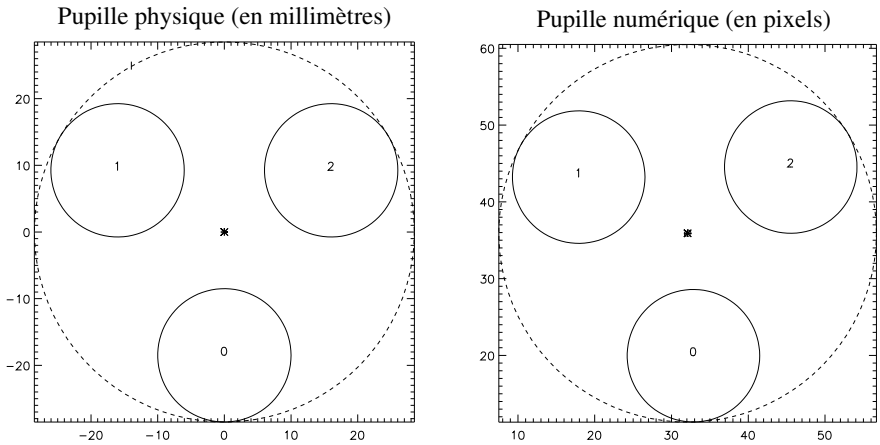


Fig. 6.10 – Recherche de la pupille expérimentale : la pupille physique est représentée à gauche (unités en millimètres), tandis que la figure de droite représente la pupille expérimentale obtenue en pixels après estimation des homothéties/rotations.

Adéquation entre le modèle direct et le modèle expérimental Si tous les paramètres expérimentaux ont été correctement identifiés et estimés, alors modèle direct et modèle expérimental doivent être parfaitement conformes. Afin de le vérifier, nous appliquons sur la configuration de référence à trois sous-pupilles un jeu de pistons et basculements connus puis comparons les images simulées aux images expérimentales dans le cas d'un objet ponctuel. La Fig. 6.11 représente les données obtenues par le modèle direct dans les deux plans, focal et extra-focal (respectivement première et troisième ligne), ainsi que les images expérimentales correspondantes (deuxième et quatrième ligne) :

– dans la première colonne, aucune aberration n'est appliquée. L'image focale se rapporte alors à une situation de cophasage classique. En plan extra-focal, nous voyons que les trois réponses impulsionnelles subissent non seulement un élargissement mais aussi un déplacement dans la direction définie par le vecteur joignant l'axe optique au centre de leur sous-pupille respective. La figure d'interférence correspondante prend donc une forme de "Y". Pour finir, nous vérifions également que les FEP expérimentales et simulées sont quasi-identiques ;

- nous introduisons ensuite un piston de $\lambda/4$ radians sur la sous-pupille 0 (pupille du bas d'après la Fig. 6.9 milieu), ce qui a pour effet de déplacer les franges d'interférence selon la position de la pupille mobile ;
- les images de la troisième colonne permettent quant à elles de s'assurer que l'extinction de la frange centrale à bien lieu pour un piston de $\lambda/2$. Nous pouvons ainsi contrôler finement l'amplitude introduite et vérifier si les modèles, direct et expérimental, sont bel et bien conformes en piston. En contrepartie, il est impossible de savoir dans quel sens se sont déplacées les franges, information qui est apportée par la deuxième colonne ;
- nous nous intéressons ensuite aux effets d'un basculement en appliquant un angle de $\vartheta = 2{,}44\lambda/\mathcal{D}$ soit $a_2 = 0{,}61\lambda$ RMS sur la pupille 0. Cette aberration a pour effet de déplacer la FEP correspondante de telle sorte que son premier anneau noir soit tangent à celui des deux autres réponses impulsionnelles restées superposées, tandis que l'interférence entre les sous-pupilles 1 et 2 crée des franges d'Young perpendiculaires à la base (qui est ici horizontale). Nous pouvons également remarquer que le déplacement engendré dans le plan extra-focal n'est pas purement horizontal. En effet, ce plan est un intermédiaire entre le plan focal où la FEP se déplace selon l'axe horizontal et le plan pupille où les réponses impulsionnelles sont totalement séparées et placées à soixante degrés les unes des autres. Etant donné que les images simulées sont en parfaite adéquation avec les images expérimentales, nous pouvons en déduire que l'amplitude ainsi que l'orientation du basculement sont correctes ;
- les images de la cinquième colonne ont été réalisées en appliquant un basculement de même amplitude que celui de la quatrième colonne mais pour une direction orthogonale, ce qui permet de distinguer l'effet des basculements en x et en y ;
- enfin, nous appliquons respectivement pour les colonnes six, sept, huit et neuf le même jeu d'aberrations que pour les colonnes deux, trois, quatre et cinq en privilégiant cette fois la sous-pupille N° 2. Dès lors, la direction de déplacement des FEP ainsi que l'orientation des franges d'Young s'en trouvent changées ; toutefois, les amplitudes restent les mêmes.

En appliquant ces déformations d'étalonnage, nous avons pu vérifier le sens de déplacement des réponses impulsionnelles et quantifier les amplitudes correspondantes. Or, il apparaît que les images simulées sont fortement identiques aux images expérimentales obtenues sur BRISE ; ces résultats démontrent donc que la calibration du miroir composite est effective et que la paramétrisation du modèle direct est bel et bien conforme à nos attentes.

6.2.3.2 Les procédures d'alignement

Puisque nous disposons désormais d'un banc ainsi que d'un modèle direct parfaitement calibrés, nous allons pouvoir corriger les aberrations intrinsèques de BRISE introduites initialement par le miroir composite. En effet, lors de leur mise sous tension originelle, les miroirs plans composant le MD se trouvent dans une position arbitraire. Etant donné que les algorithmes de cophasage que nous souhaitons caractériser possèdent une dynamique de $\lambda/6$ RMS *ad minimum*, il est nécessaire, avant de les utiliser, de réaliser un cohérençage du miroir composite pour se placer au moins à $\lambda/3$ du cophasage parfait. En pratique, nous chercherons même à nous situer au plus près du maximum de l'enveloppe de cohérence afin de comparer au mieux les aberrations introduites à celles estimées par nos algorithmes. Cette "mise à plat" s'effectue en trois étapes : nous effectuons tout d'abord l'alignement des miroirs en basculement, puis en piston ; enfin, nous réalisons un alignement plus précis de manière à s'affranchir au maximum des aberrations différentielles présentes entre les miroirs.

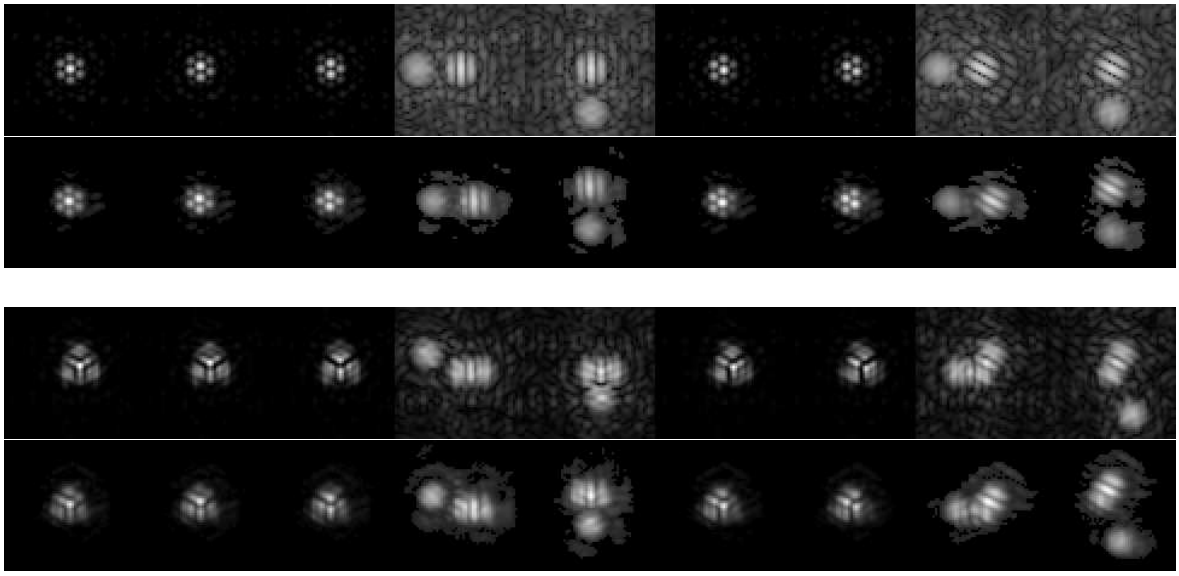


Fig. 6.11 – Vérification, pour un jeu d'aberrations préétabli, de la concordance entre les images simulées (lignes 1 et 3) et expérimentales (lignes 2 et 4) obtenues successivement au plan focal (lignes 1 et 2) puis dans un plan défocalisé (lignes 3 et 4).

Alignement en basculement Lorsque le miroir composite est mis pour la première fois sous tension, les basculements différentiels sont tels que le phénomène d'interférence n'est pas vérifié. L'image de la scène observée résulte dès lors de la somme des images individuelles obtenues par les trois miroirs plans. Dans le cas d'un objet ponctuel, les données acquises au plan focal sont composées de trois réponses impulsionnelles distinctes comme illustré Fig. 6.12 (a).

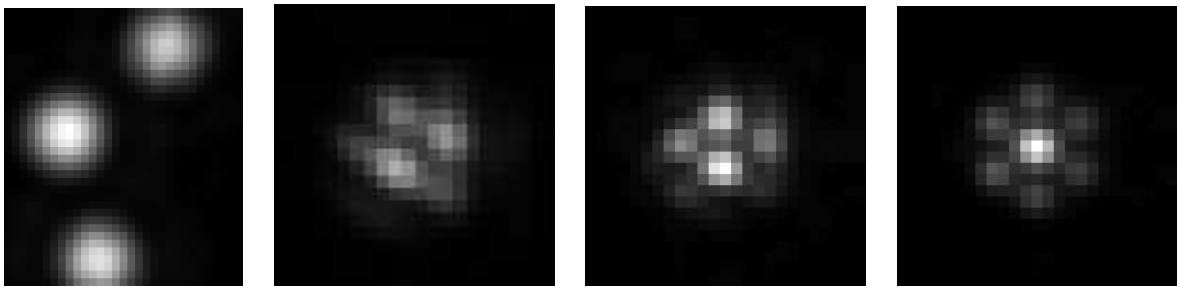
En premier lieu, nous devons calculer les tensions à appliquer aux actionneurs pour superposer les trois FEP et ainsi corriger les basculements différentiels. Etant donné que nous avons déjà déterminé les matrices de commande intermédiaires en pixels/tensions pour les deux miroirs mobiles, cet alignement s'avère relativement simple à mettre en œuvre. Il suffit pour cela :

- de déterminer dans un premier temps la position du centre de gravité de chaque réponse impulsionnelle ;
- puis de calculer la distance en pixels entre les FEP mobiles et celle correspondant au miroir plan fixe ;
- de convertir ces distances en tensions grâce aux matrices de commandes intermédiaires ;
- enfin, d'appliquer les tensions opposées pour que les réponses impulsionnelles associées aux miroirs mobiles se superposent à la FEP du miroir fixe.

Cette méthode, qui se révèle relativement fiable et dont le résultat est représenté Fig. 6.12 (b), permet de se placer à moins d'un λ RMS en basculement (généralement à $\lambda/5$) et donc d'accrocher les franges d'interférence. Cependant, cet alignement seul n'est pas suffisant ; en effet, pour utiliser au mieux les algorithmes de cophasage dont nous disposons, il est préférable de maximiser le contraste des franges d'interférence, ce qui implique de se placer près du maximum de l'enveloppe de cohérence et donc de minimiser les pistons différentiels entre les miroirs plans. Cette position présente également un deuxième avantage : en effet, les faibles aberrations de piston seront par la suite estimées dans l'absolu et non à 2π près.

Alignement en piston La méthode de minimisation des pistons se base sur l'analyse en lumière blanche des visibilités des images focales d'un objet ponctuel. A chaque paire de sous-pupilles correspond une base de l'interféromètre et donc une visibilité V définie dans le domaine de Fourier comme étant le rapport de l'intégrale du pic haute fréquence (c.-à.-d. de l'un des pics satellites) sur l'intégrale du pic basse fréquence (le pic central). Or, V est maximale lorsque le piston différentiel est nul. Dès lors, nous allons rechercher pour chaque sous-pupille mobile le maximum de visibilité sur la base sous-pupille mobile/sous-pupille fixe. Pour réaliser cette opération, nous appliquons une rampe de piston sur le premier miroir mobile et envoyons simultanément la rampe opposée sur le second ; le piston moyen reste donc inchangé. Nous acquérons ensuite une image en chaque point de la rampe et déterminons la visibilité correspondante. La recherche du maximum est ensuite effectuée par ajustement de la courbe de visibilité sur une gaussienne. L'application des tensions correspondantes permet dès lors de minimiser les pistons différentiels entre les sous-pupilles et de se placer à moins de $\lambda/5$ RMS du point de cophasage idéal comme représenté Fig. 6.12 (c).

Alignement fin (cophasage) Les aberrations résiduelles sont désormais suffisamment faibles pour que nous puissions utiliser les estimateurs de cophasage aussi bien sur objet ponctuel que sur scène étendue. Cependant, si nous voulons comparer au mieux les aberrations introduites aux aberrations estimées, il est nécessaire d'aligner plus finement l'ensemble. Pour cela, nous estimons la phase résiduelle grâce à l'estimateur itératif de type *phase retrieval* classique à partir de la donnée de l'image focale d'un point source. L'envoi des tensions correspondantes permet ensuite d'approcher au mieux le point de cophasage nul comme illustré Fig. 6.12 (d). Soulignons toutefois que l'alignement final ne nous place pas exactement au point zéro. En effet, ni les aberrations de hauts ordres, ni l'incertitude sur la valeur de focalisation, ni même la forme réelle de l'objet (qui est une fibre monomode et non un Dirac) ne sont pris en compte. Cependant, le cophasage se révèle tout à fait satisfaisant et stable dans le temps avec une phase résiduelle à moins de $\lambda/100$ RMS.



(a) (b) (c) (d)

Fig. 6.12 – Alignement du miroir composite. De gauche à droite : situation de départ, alignement en basculement, minimisation des pistons et pour finir alignement fin.

Les trois procédures d'alignement décrites ci-dessus ont permis de se placer au plus près du point de fonctionnement d'un interféromètre. Etant donné que le banc BRISE et son miroir composite sont désormais opérationnels, nous allons pouvoir étudier les performances de l'ensemble des capteurs de cophasage dont nous disposons aujourd'hui à l'ONERA.

6.2.4 Conditions d'expérimentation

Nous détaillons dans cette sous-section les différents tests qui seront effectués lors des validations expérimentales et présentons les conditions générales (choix de la pupille, sélection des filtres spectraux) valables aussi bien dans le cadre de l'imagerie terrestre que du projet DARWIN. Nous décrivons également les modalités de traitement qui seront appliquées lors de la modélisation des images, que ce soit sur objet ponctuel ou sur scène étendue, ainsi qu'au moment de la réduction des données expérimentales.

6.2.4.1 Les différents tests effectués

Afin de caractériser l'ensemble des estimateurs de cophasage dont nous disposons, nous effectuons deux types de tests en utilisant pour chacun d'entre eux la même configuration instrumentale. Dans un premier temps, nous évaluons la répétabilité des algorithmes en fonction du rapport signal-à-bruit puis déterminons leur domaine de linéarité à fort flux. Etant donné que notre objectif est d'entériner l'emploi des méthodes plan focal en tant qu'ASO, nous ne nous intéressons ici qu'à la seule restauration de phase.

L'ensemble des validations est effectué avec le masque pupillaire de référence comportant trois sous-pupilles tel qu'illustré Fig. 6.5 gauche et présentant une dilution de $1{,}62$. En ce qui concerne les caractérisations sur objet étendu, nous privilégions l'émulsion photographique de la ville de Toulouse dont l'épreuve théorique Fig. 2.3 page 55 a été employée lors des simulations au chapitre 4. Comme nous l'avions souligné au paragraphe 6.2.2.3 lors de la présentation du banc, les plans d'imagerie sont au nombre de deux ; signalons que la disposition correspondante (plan focal/plan défocalisé) est avantageuse car elle nous permet de contrôler les images au foyer de l'instrument. Au vu des optimisations instrumentales effectuées en sous-section 4.3.2 page 77 et 5.2.1.1 page 106, nous choisissons comme diversité une défocalisation de 1 rad RMS.

Les données sont de taille 64×64 pixels sur objet ponctuel et de taille 256×256 pixels sur scène étendue. Sauf mention contraire, les tests sont tous effectués en lumière blanche au moyen de filtres interférentiels centrés aux alentours de 650 nm, et ce quel que soit l'objet observé. Les conditions spécifiques propres à chaque projet (photométrie, etc.) seront indiquées au fur et à mesure des validations, de même que la valeur du bruit de lecture inhérent à chaque caméra d'imagerie. Cependant, nous pouvons dores et déjà signaler que :

- les tests de linéarité sont effectués en envoyant une rampe monomode (piston puis basculement) de grande dynamique sur une sous-pupille. Ces essais ont non seulement pour objectif d'identifier le domaine de validité des algorithmes, mais aussi de déterminer quelle est l'influence de la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la source sur l'estimation des aberrations vu que les méthodes plan focal sont naturellement chromatiques. Nous employons donc successivement trois filtres tels que $\Delta\lambda$ soit respectivement égal à 10 nm, 40 nm et 80 nm. Ces tests, réalisés avec le miroir composite, sont bien entendu effectués après la mise à plat de ce dernier. Dans le cadre du projet DARWIN, nous nous intéressons également à l'estimation des aberrations d'ordres supérieurs allant de la défocalisation à l'aberration sphérique. Etant donné qu'il n'y a pas de miroir bimorphe disponible sur le banc, nous effectuerons l'estimation de ces aberrations à partir d'une plaque de verre dont les déformations ont été calibrées (voir sous-section 6.4.4 pour plus de détails) ;
- nous évaluons également la répétabilité de nos algorithmes au voisinage de la phase nulle pour différentes valeurs de flux sur des séries de mesures indépendantes. Nous privilégions dès lors

l'emploi du miroir de référence, ce qui permet également de nous affranchir du bruit des actuateurs du miroir composite et d'éviter tout risque de dérive sur les images longue pose. Les images sont éclairées en source blanche avec le filtre de largeur 40 nm de longueur d'onde centrale 650 nm. L'intensité de la source étant difficilement réglable, nous faisons varier le flux en changeant uniquement le temps d'exposition et en prenant soin de couvrir tout le domaine photométrique linéaire de la caméra.

Afin de comparer au mieux les aberrations introduites aux aberrations estimées, nous exprimons l'ensemble des résultats dans la base base canonique la plus appropriée. Comme souligné en sous-section 4.2.2 page 72, cette base diffère suivant la nature de l'objet observé et selon le type de tests effectué :

- nous rappelons que la base canonique cohérente permet de restituer les aberrations hors contribution des trois premiers modes globaux. Puisque ces modes n'ont alors pas d'intérêt, nous choisissons de privilégier la base cohérente pour les tests de répétabilité effectués sur scène étendue ;
- pour les tests de linéarité, nous utiliserons systématiquement la base fixe. En effet, cette dernière reste idéale pour suivre l'évolution des aberrations sur une sous-pupille en particulier.

6.2.4.2 Acquisition et traitement des données

Acquisition et recentrage des images Comme nous l'avons souligné précédemment, l'acquisition des images expérimentales se fait après alignement du miroir composite. Etant donné que BRISE est stabilisé en température et en vibration, cette opération n'est effectuée qu'une fois par jour au moment de la mise en route du banc.

Lors des mesures par diversité de phase, les images focales et extra-focales sont acquises simultanément, la deuxième différant en théorie de la première par une variation de phase parfaitement connue. En pratique cependant, les aberrations différentielles présentes *de facto* entre les plans d'imagerie peuvent également être imputables aux défauts de fabrication des optiques ainsi qu'aux différentes erreurs d'alignement. Dès lors, la phase différentielle présente entre les voies d'imagerie résulte de trois contributions principales :

- citons tout d'abord la phase de diversité globale introduite par l'utilisateur. Grâce aux procédures de calibration dont nous disposons, la valeur de la diversité peut être estimée à 10^{-2} radian RMS près [Baron (2005)]. De plus, en effectuant régulièrement des étalonnages, nous pouvons nous affranchir d'une éventuelle dérive temporelle. Par conséquent, les erreurs introduites par une relative méconnaissance de la diversité sont très faibles et peuvent être négligées ;
- viennent ensuite les basculements différentiels dûs aux erreurs de positionnement relatif entre les images. En effet, nous rappelons que les données focales et extra-focales sont à l'origine imagées sur le même détecteur ; leur extraction est effectuée *a posteriori* par l'utilisateur qui choisit *de visu* le fenêtrage le plus approprié. Or, si le choix des fenêtres peut être réalisé au pixel près sur point source, il s'avère beaucoup moins précis sur scène étendue. La présence de basculements différentiels, qui est directement liée aux choix des fenêtres d'extraction, traduit donc simplement le fait que les positions relatives des images sur la caméra ne sont pas parfaitement connues ;
- enfin, signalons la présence d'aberrations de hauts ordres (supérieures à la défocalisation) induites par les erreurs de fabrication et d'assemblage. Etant donné que le banc a été conçu pour limiter ces aberrations, leur contribution s'avère mineure ; de fait, nous n'en tiendrons pas compte dans la suite de ce manuscrit.

Au final, les aberrations différentielles non désirées sont essentiellement dues aux choix des fenêtres de mesure. Malheureusement, les basculements qui en découlent ne peuvent être négligés ; en effet, un décalage d'un pixel est équivalent[5] à un basculement différentiel global de $\pi/(2s)$ rad RMS comme illustré Fig. 6.13. Cette aberration, qui se décompose en pistons et basculements sur les sous-pupilles, se révèle suffisamment importante pour conduire à des estimations de phase erronées ; Par conséquent, nous devons absolument effectuer un recalage subpixellique des données avant d'utiliser nos algorithmes de type diversité de phase. Cette opération s'effectue en deux étapes :

- nous effectuons tout d'abord un premier recentrage au pixel près en calculant l'intercorrélation entre les deux images, focale et extra-focale (notée respectivement $\boldsymbol{i}_0$ et $\boldsymbol{i}_d$) ;
- puis nous déterminons les décalages résiduels en x et y en minimisant le critère de type maximum de vraisemblance suivant [Gratadour *et al.* (2005)] :

$$\mathcal{L}(x,y) = \left\| \widetilde{\boldsymbol{i}}_0 - \widetilde{\boldsymbol{i}}_d(x,y) \right\|^2 \tag{6.5}$$

Grâce à cette méthode, nous pouvons recaler les images de manière précise à 5.10^{-2} radian près et ramener les aberrations différentielles dans la dynamique des estimateurs de diversité. Notons qu'une fois recalés, les basculements résiduels peuvent être estimés par l'algorithme de diversité de phase itératif conjointement aux aberrations recherchées présentes sur chaque sous-pupille. Il suffit pour cela de calculer le gradient du critère $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ défini Eq. (2.3) page 41 par rapport aux cœfficients A_2, A_3 définis sur la grande pupille et responsables de la phase différentielle entre les voies. Or, nous rappelons qu'un polynôme d'ordre k se décompose sur l'ensemble des sous-pupilles en une somme de polynômes d'ordre $\{0,\ldots,k\}$ de cœfficients a_{kn} (voir annexe A page 185) ; par conséquent, le gradient par rapport à A_k se décompose lui aussi en une somme de gradients par rapport aux a_{kn}. Ces derniers ayant déjà été estimés, l'estimation des basculements différentiels se révèle en fin de compte assez simple à réaliser. Notons que cette recherche n'est pour l'instant effective qu'avec le seul estimateur itératif. Toutefois, nous pourrions également la mettre en œuvre avec l'algorithme analytique en suivant le même mode opératoire que décrit ci-dessus.

Traitement des données Le traitement des données est bien entendu réalisé grâce au logiciel MASTIC. Pour chaque test, nous veillons à déterminer au préalable la pupille numérique selon la méthode explicitée au paragraphe 6.2.3.1 à partir de la donnée de l'image focale du point source. La modélisation de la réponse impulsionnelle, qui est effectuée à partir de cette pupille pixellisée, est alors optimale. Tout comme en simulation, nous apodiserons systématiquement les images de scènes étendues ; les données correspondant à l'objet ponctuel seront quant à elles tronquées à faible RSB. Enfin,

[5] Admettons qu'un basculement en x de la pupille engendre un déplacement horizontal de la réponse impulsionnelle sur le détecteur. D'après la Fig. 6.13, un décalage d'un pixel peut être associé à un angle ϑ tel que :

$$\tan\vartheta = \frac{\delta}{\mathcal{B}} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\lambda}{2\pi}\phi \tag{6.3}$$

où $\mathcal{B}$ représente le diamètre de la pupille pleine équivalente et δ la différence de marche maximale correspondante en bord de pupille. Etant donné qu'un basculement en x vérifie $Z_2 = 2\rho\cos\varphi$, nous en déduisons que l'amplitude maximale associée vaut $\phi = 4a_2$ crête-à-crête. Mais ϑ vérifie également $\tan\vartheta = e_i/\mathrm{f}$ où e_i représente la taille d'un pixel caméra et f la focale du banc. En faisant apparaître le facteur d'échantillonnage s donné par l'Eq.(4.1) page 69, nous obtenons :

$$\tan\vartheta = \frac{\lambda}{s\mathcal{B}} \tag{6.4}$$

En identifiant les deux expressions de $\tan\vartheta$, nous aboutissons à $a_2 = \pi/(2s)$.

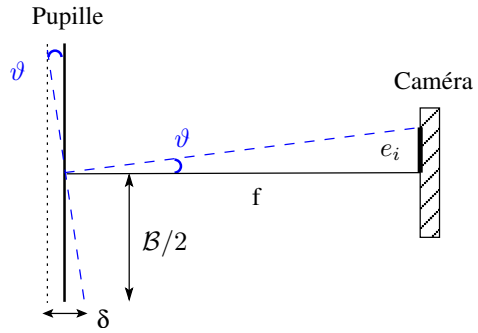


Fig. 6.13 – Illustration de la corrélation entre un basculement global dans la pupille et un déplacement de la réponse impulsionnelle au foyer de l'instrument.

nous soulignons qu'il ne sera pas nécessaire d'introduire d'*a priori* sur les données puisque dans le cadre de l'imagerie terrestre et du projet DARWIN, nous nous intéressons à la seule estimation de la phase incidente.

6.3 Validation dans le cadre de l'imagerie terrestre

Nous nous proposons dans cette section d'effectuer la validation expérimentale de nos algorithmes de cophasage dans le cadre de l'observation de la Terre depuis une orbite géostationnaire. Les tests que nous présentons ici revêtent une double importance : en effet, ils vont nous permettre de caractériser la réponse des estimateurs dans les conditions idéales d'un laboratoire mais aussi de vérifier si les niveaux de performances atteints répondent pleinement aux objectifs des futurs instruments multipupilles imageurs.

Nous présentons dans un premier temps les conditions spécifiques à l'observation de scènes étendues (projet SOTISE). Nous analysons ensuite les propriétés asymptotiques des algorithmes à partir de la configuration pupillaire de référence puis déterminons leur domaine de validité en piston et basculement selon les dispositions stipulées en sous-section 6.2.4.

Attention : nous soulignons que le banc BRISE n'ayant pas été disponible en 2007, nous réutilisons des images que nous avions acquises au début de ce doctorat en 2004 dans le cadre des premières campagnes de tests SOTISE visant à caractériser l'estimateur itératif dans sa version d'origine.

6.3.1 Conditions spécifiques

Nous avons décrit au paragraphe 6.2.4.1 les différents tests qui vont être effectués lors de la caractérisation expérimentale des algorithmes. Etant donné que nous insérons le masque pupillaire au niveau du module de perturbation, seule une partie du faisceau collimaté (dont l'ouverture est ici de 60 mm) est réellement utile, ce qui entraîne des pertes de flux importantes. Dès lors, il est nécessaire de choisir des temps de pose de plusieurs centaines de secondes si nous voulons obtenir des rapports signal-à-bruit importants. Malheureusement, il s'avère que l'éclairement délivré par la lampe à arc varie dans ce cas d'une image à l'autre. Par conséquent, nous privilégierons toujours des temps d'acquisition inférieurs à la minute et donc des gammes de RSB plus restreintes que celles utilisées en simulation. Dans le cas de l'observation de scènes étendues, nous précisons également que :

- l'ensemble des données est acquis avec la caméra d'imagerie de BRISE dont le bruit de détecteur présente un écart-type de 34 électrons par pixel ;
- l'objet d'intérêt étant une scène terrestre étendue, nous privilégions *de facto* le cophasage par diversité de phase. Dès lors, nous allons nous attacher à caractériser les performances de l'estimateur analytique FUSCHIA_2 et à les comparer systématiquement aux résultats obtenus avec l'algorithme itératif associé ;
- d'après les spécifications critiques, les aberrations différentielles de piston et basculement devront être retrouvées avec une erreur inférieure à $\lambda/60$ RMS [Sorrente *et al.* (2003)] ;
- l'évaluation de la répétabilité est effectuée sur des séries indépendantes de trente-cinq mesures pour des flux allant de 9.10^6 à $3{,}5\,.10^8$ phe$^-$ par image, soit pour un RSB compris entre 4 et 66. Au final, la dynamique choisie s'avère peu étendue du fait de la limitation du temps de pose ;
- les rampes de piston et basculement, de grande dynamique, sont appliquées à moyen flux pour $N_{\text{bph}} \simeq 3.10^8$ photo-électrons par image (RSB $= 60$). Ces dernières présentent vingt-et-une valeurs comprises entre $[-0{,}8\lambda\,;\,0{,}8\lambda]$ RMS avec trois points de mesure par valeur.
- enfin, étant donné que nous avons la possibilité d'enregistrer les images étendues et celles associées à l'objet ponctuel, nous effectuons les tests de linéarité sur les deux capteurs. Ainsi, nous allons pouvoir confronter la restauration des aberrations par diversité de phase sur scène étendue à celle effectuée au moyen des estimateurs de type *phase retrieval* en plan focal (itératif_2 et FUSCHIA_2 *versus* itératif_1 et FUSCHIA_1).

6.3.2 Estimation du piston

Nous nous intéressons dans cette sous-section aux performances en piston obtenues par nos différents algorithmes. Nous vérifions tout d'abord leur comportement en fonction du rapport signal-à-bruit à faible phase incidente puis déterminons l'étendue de leur domaine de validité.

6.3.2.1 Performances

Afin d'étudier le comportement des estimateurs de type diversité de phase dans les conditions nominales d'utilisation en boucle fermée, nous effectuons un test de répétabilité en nous servant du miroir de référence comme explicité au paragraphe 6.2.4.1. Les données correspondantes sont ensuite successivement traitées par l'algorithme analytique FUSCHIA_2 puis avec l'estimateur itératif_2. Etant donné que l'objet d'intérêt est une scène étendue, nous prenons soin d'exprimer les aberrations dans la base canonique cohérente donc hors contribution du piston et des basculements moyens.

La Fig. 6.14 illustre l'écart-type total σ obtenu en piston sur l'ensemble des sous-pupilles en fonction du flux incident N_{bph} contenu dans les images. Tout d'abord, nous pouvons constater qu'à moyen flux, l'écart-type suit comme attendu une loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$. Cependant, l'ajustement de cette loi se révèle très disparate selon l'algorithme considéré ; en effet, nous obtenons :

- un cœfficient τ égal à 41 pour l'estimateur itératif ;
- tandis que τ est égal à 7 avec FUSCHIA_2.

De plus, nous constatons que les aberrations telles qu'estimées par nos deux algorithmes ne prennent absolument pas les mêmes valeurs. En effet, si l'amplitude absolue totale des aberrations de piston telle qu'estimée par itératif_2 atteint 0,24 rad (soit $\lambda/26$), celle associée à FUSCHIA_2 se révèle bien plus faible avec une valeur de 0,07 rad (ce qui équivaut à $\lambda/90$ RMS) pour le flux le plus élevé. En réalité, nous nous apercevons que l'algorithme analytique peine à retrouver la phase incidente, ce qui explique pourquoi les estimées sont toutes distribuées autour de zéro avec une répétabilité bien plus

faible que celle associée à l'estimateur itératif.

Etant donné que nous avons effectué cette expérience à faible et moyen flux, de telles différences de comportement observées sur toute la gamme de RSB peuvent paraître très surprenantes au premier abord. De fait, les simulations effectuées au chapitre 4 page 88 ont montré que la disparité de comportement entre nos deux algorithmes n'apparaissait (du moins pour la répétabilité) qu'en deçà de 10^8 photo-électrons (RSB $<$ 29). Toutefois, n'oublions pas que les validations expérimentales sont présentement effectuées avec une configuration pupillaire dont la dilution $\mathfrak{d}$, égale à 1,62, s'avère plus élevée que celle ayant servie lors des simulations. Or, augmenter la dilution revient à diminuer la surface de recouvrement des pics de la fonction de transfert ; dans ce cas, la zone utile à l'estimation des aberrations est *de facto* plus restreinte et de surcroît affectée d'un poids fréquentiel plus faible.

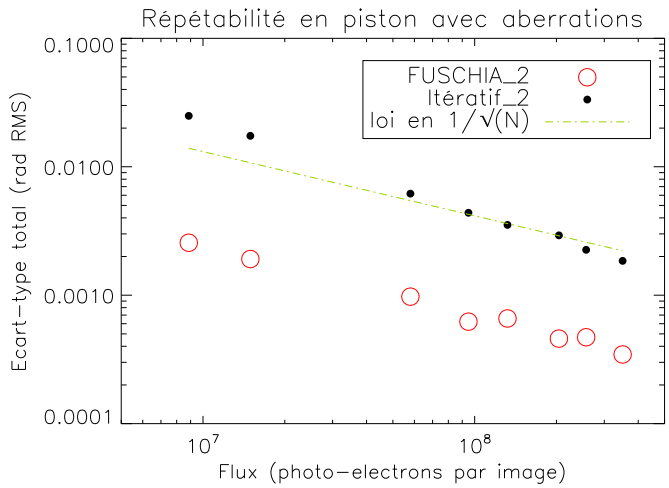


Fig. 6.14 – Ecart-type en piston estimé sur l'ensemble des sous-pupilles par les estimateurs de type diversité de phase FUSCHIA_2 (en cercles) et itératif_2 (en points), les mesures étant effectuées à partir du miroir de référence donc à faible phase incidente.

Au final, la configuration pupillaire de référence telle que définie à l'origine sur BRISE ne permet pas une restauration correcte des pistons par FUSCHIA_2 pour les flux sélectionnés en 2004. Nous rappelons qu'à l'époque, nous n'avons pu acquérir de données à plus fort RSB du fait des variations d'éclairement de la lampe à arc comme expliqué en sous-section 6.3.1. Or, nous subodorons qu'une augmentation du rapport signal-à-bruit devrait être suffisante pour que l'estimation des aberrations soit effectuée de manière convenable. Afin de le vérifier, nous simulons un test de répétabilité sur des séries de trente-cinq images en veillant à reproduire une configuration instrumentale la plus proche possible de celle observée sur le banc. Les données, de taille 256×256 pixels, sont ainsi générées à partir de la pupille numérique déterminée expérimentalement et pour des flux allant de 3.10^6 à 10^{10} photo-électrons ($1 \leq$ RSB ≤ 389). Le bruit de détecteur sélectionné correspond bien entendu à celui de la caméra d'imagerie. Enfin, nous soulignons que la phase introduite sur la pupille se rapporte aux aberrations estimées antérieurement par l'algorithme itératif à moyen flux. Ces aberrations, dont l'amplitude absolue totale est de l'ordre de $\lambda/5{,}5$ soit de 1,17 rad RMS, sont listées Tab. 6.2.

La Fig. 6.15 illustre l'écart-type σ en piston obtenu par les algorithmes FUSCHIA_2 et itératif_2 en fonction du flux présent dans les données (à gauche) ainsi que le biais correspondant estimé sur chaque sous-pupille (à droite). Bien entendu, l'ensemble des résultats est exprimé hors contribu-

	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	$-0{,}113$	$0{,}240$	$0{,}078$
pupille 2	$0{,}081$	$0{,}004$	$-0{,}474$
pupille 3	$0{,}032$	$-0{,}150$	$-0{,}233$

Tab. 6.2 – Aberrations du miroir de référence estimées par l'algorithme itératif_2 pour un flux de $N_{\text{bph}} = 2{,}5\,.10^8$ photo-électrons par image.

tion des trois premiers modes globaux. D'après le graphe de gauche, nous constatons que les valeurs prises par l'écart-type associé à l'estimateur analytique se trouvent en deçà de celles correspondant à itératif_2 lorsque le flux est inférieur à 3.10^8 phe$^-$. Dans ce cas, le biais présent sur chaque sous-pupille se révèle terriblement important, atteignant même à bas flux $\simeq$ 100 % de la valeur initiale ($N_{\text{bph}} \leq 3.10^7$) sur chaque sous-pupille ! En revanche, le biais diminue sensiblement dès que le nombre de photo-électrons dépasse 3.10^8 phe$^-$ par image. Comme attendu, l'écart-type correspondant à FUSCHIA_2 est alors légèrement plus important que celui associé à l'algorithme itératif du fait de l'approximation faible phase. Ces résultats corroborent l'hypothèse selon laquelle l'estimation des pistons ne peut être effectuée que dans le cas où le RSB de la zone de recouvrement est suffisamment important. Par conséquent, plus la compacité diminue, plus il faut augmenter le flux présent dans les images pour espérer retrouver les pistons présents sur chaque sous-pupille.

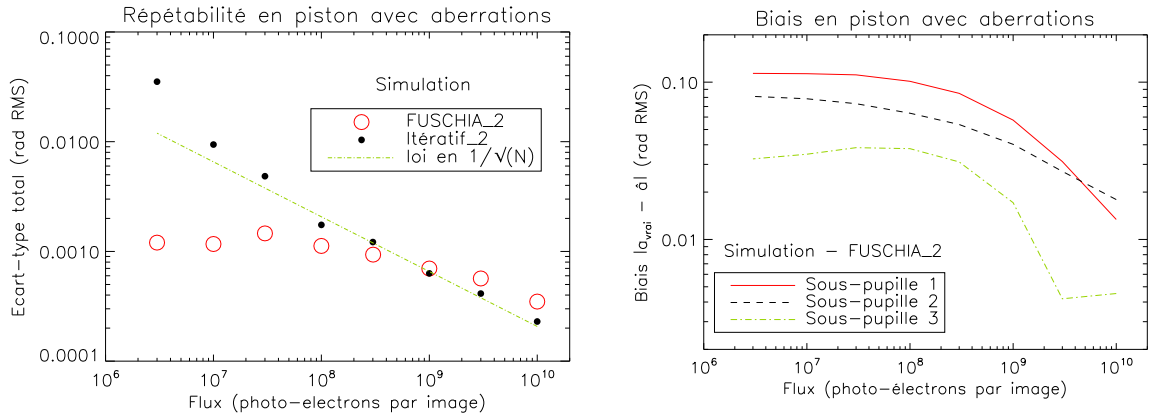


Fig. 6.15 – Ecart-type en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en simulation par les estimateurs de type diversité de phase dans des conditions les plus proches de celles observées sur le banc (aberrations du miroir de référence, pupille déterminée à partir des données expérimentales, *etc.*).

6.3.2.2 Linéarité

Après avoir étudié les performances de nos estimateurs à faible phase incidente, nous allons évaluer l'étendue de leur domaine de validité et déterminer dans quelle mesure leur réponse reste linéaire. A cet égard, nous effectuons plusieurs séries de tests en appliquant une rampe de piston de grande dynamique sur une sous-pupille, tout d'abord en conservant une largeur spectrale restreinte puis en augmentant progressivement la valeur de cette dernière. Nous rappelons que selon les dispositions prises en sous-section 6.3.1, l'ensemble des expériences est effectuée pour un flux moyen d'environ

4.10^8 photo-électrons par image (RSB $\simeq 71$ sur scène étendue). Nous soulignons également que les estimées sont naturellement exprimées dans la base canonique mobile de façon à privilégier les modes de la sous-pupille aberrée.

Sur objet ponctuel Etant donné que nous disposons des images focales correspondant au point source, nous décidons d'effectuer une première validation en nous servant des estimateurs analytique et itératif de type *phase retrieval*. En effet, ces différents algorithmes se déduisent directement du cas général diversité de phase où l'objet est inconnu et où le nombre de plans de diversité est au minimum égal à 2. Dès lors, nous réduisons successivement les données point source acquises avec le filtre de largeur $\Delta\lambda = 40$ nm pour $N_{\text{bph}} \simeq 7.10^5$ phe$^-$ (ce qui correspond à un RSB de 52 sur 14×14 pixels) en faisant appel à l'estimateur analytique FUSCHIA_1 puis en utilisant l'algorithme itératif_1. Les résultats sont portés Fig. 6.16 ; le graphe de gauche représente l'évolution des aberrations de piston estimées par nos deux algorithmes sur la sous-pupille mobile tandis que le biais correspondant est illustré sur le graphe de droite.

Tout d'abord, nous pouvons constater que l'estimation de la phase incidente telle qu'effectuée par FUSCHIA_1 (en points) s'avère excellente avec une pente de 1,03 entre $[-\pi\,;\,\pi]$ rad. De plus, la phase se replie bel et bien en $\pm\pi$ comme attendu. Nous voyons également que le biais associé est globalement inférieur au seuil de précision de $\lambda/60$ RMS spécifié en sous-section 6.3.1, bien que les valeurs correspondantes apparaissent comme relativement dispersées. Cette constatation n'est pas surprenante en soi, étant donné que pour des raisons de taille mémoire la statistique n'est effectuée que sur trois images. Dans l'absolu, il faudrait disposer d'au moins dix images par point de mesure pour que le biais puisse être évalué plus précisément. Les valeurs dont nous disposons ne sont cependant pas sans intérêt et nous renseignent malgré tout sur l'évolution générale de cette grandeur.

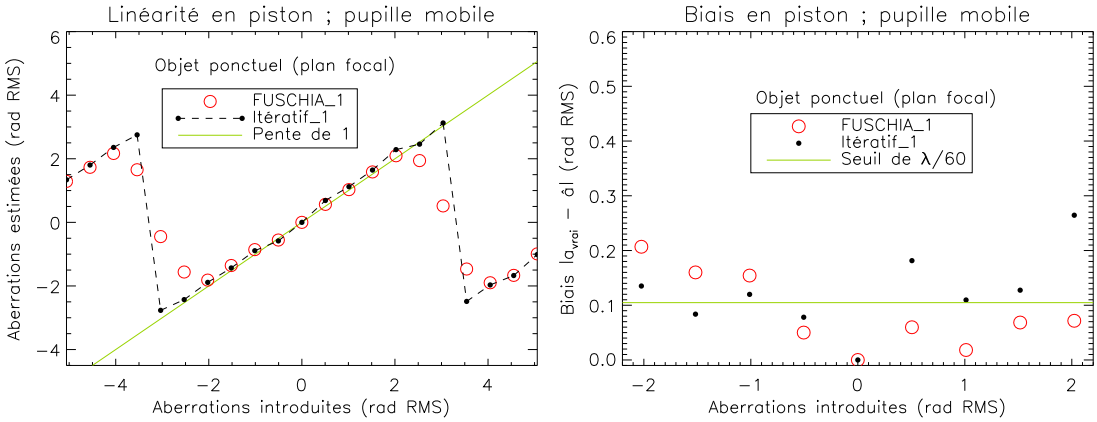


Fig. 6.16 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus au plan focal sur objet ponctuel par les estimateurs de type *phase retrieval* en réponse à une rampe de piston de grande dynamique, la largeur du filtre interférométrique étant de 40 nm (soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$).

Intéressons-nous maintenant aux résultats obtenus par l'algorithme analytique (en cercles). Ce dernier présente un domaine de validité légèrement inférieur dû non seulement à l'approximation faible phase, mais aussi certainement aux aberrations résiduelles : l'alignement des miroirs n'étant pas parfait, ces aberrations s'ajoutent à celles introduites volontairement durant le test de linéarité et participent au repliement de la phase. La rampe de piston est cependant bien restituée entre

$[-\pi/2\,;\,\pi/2]$ rad avec une pente de 0,96. La encore, le biais associé, calculé dans cet intervalle, peut être considéré comme inférieur au seuil critique de $\lambda/60$ RMS. Nous pouvons donc en conclure que les estimateurs FUSCHIA_1 et itératif_1 sont parfaitement indiqués pour estimer les aberrations de piston en régime de bruit de photons, et ce à partir de la donnée d'une image focale d'un objet ponctuel.

Sur scène étendue Puisque l'estimation des pistons par les méthodes de type *phase retrieval* a été validée au paragraphe précédent, nous allons pouvoir analyser les performances de restauration obtenues dans le cas où l'objet observé est une scène terrestre. Les données correspondantes, de taille 256×256 pixels, sont acquises à l'aide de la caméra d'imagerie de BRISE juste après les images point source ; au vu de la grande stabilité du banc, nous pouvons considérer que les conditions d'expérimentation (pupille numérique, aberrations appliquées) sont identiques. Ces données sont alors tour à tour réduites par nos deux estimateurs de type diversité de phase, l'analytique FUSCHIA_2 et l'itératif dénommé itératif_2.

Nous avons illustré sur la Fig. 6.17 gauche les résultats de chaque estimateur en fonction de l'amplitude de la rampe introduite. En premier lieu, nous constatons que la reconstruction telle qu'effectuée par l'algorithme itératif (en points) est très satisfaisante ; de fait, les pistons sont restitués dans le domaine de linéarité, compris entre $\pm\pi$ rad, avec une pente de 1,04. D'après le graphe Fig. 6.17 droite représentant le biais associé aux mesures, nous nous apercevons là encore que la statistique est effectuée sur un nombre trop restreint de données pour que chaque valeur soit interprétée *ad litteram*. Le biais reste cependant relativement proche du seuil de $\lambda/60$ RMS tel que déterminé en sous-section 6.3.1. Enfin, nous soulignons que la mise en place du logiciel MASTIC, de part la gestion rigoureuse du modèle direct et plus particulièrement de la pupille numérique, nous a permis d'améliorer fortement la précision d'estimation. En effet, en utilisant la version de l'algorithme itératif telle qu'arrêtée en 2004, la rampe est restituée avec une pente de 0,79. Le gain en performance, de près de 20 %, est donc indéniable.

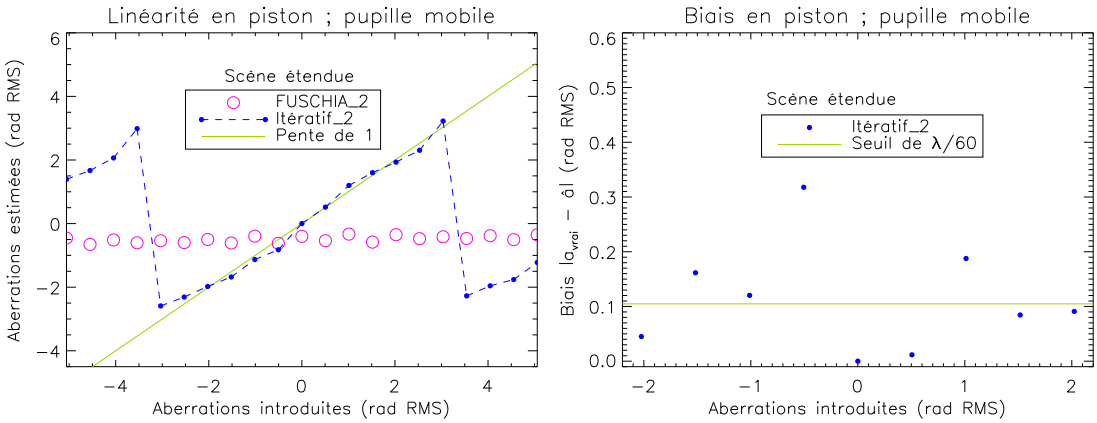


Fig. 6.17 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus sur scène étendue par les estimateurs de type diversité de phase en réponse à une rampe de piston de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille, le filtre étant de largeur $\Delta\lambda = 40$ nm.

Regardons maintenant les résultats obtenus par l'estimateur analytique. Nous voyons que les estimées correspondantes sont toutes distribuées autour de zéro ; par conséquent, FUSCHIA_2 ne re-

trouve en aucun cas la rampe introduite ! Ce comportement, bien que déroutant au premier abord, est en réalité tout à fait logique. En effet, le flux contenu dans les images, qui rappelons-le ont été acquises en 2004, est en moyenne égal à 3.10^8 phe$^-$. Or, nous avons explicitement démontré au paragraphe 6.3.2.1 traitant des tests de répétabilité que ce niveau de photométrie n'est pas suffisant pour retrouver les pistons compte tenu de la faible compacité de notre configuration pupillaire. Si nous nous référons à la Fig. 6.15 droite, nous voyons que dans ce cas l'erreur de restauration faible phase atteint plus de 90 % sur l'ensemble des sous-pupilles. L'estimation des pistons étant impossible, l'algorithme analytique ressort automatiquement une valeur proche de zéro.

D'après les conclusions auxquelles nous avons abouti au paragraphe 6.3.2.1, il est indispensable d'augmenter le flux présent dans la zone de recouvrement des pics de la FTO si nous voulons estimer les pistons de manière convenable. Afin de vérifier cette affirmation, nous simulons le test de linéarité précédent en veillant à reproduire des conditions qui soient le plus proche possibles de celle observées expérimentalement. Les images sont ensuite générées pour deux niveaux de photométrie :

- un premier à 10^8 phe$^-$ du même ordre de grandeur que celui mesuré sur le banc ;
- un deuxième égal à 10^{10} photo-électrons et qui, d'après le graphe Fig. 6.15 droite, devrait être suffisant pour permettre l'estimation des faibles aberrations.

Les aberrations ainsi estimées par FUSCHIA_2, que nous avons portées sur le graphe Fig. 6.18 en fonction de l'amplitude de la rampe introduite, montrent clairement que le comportement expérimental observé à moyen flux est bien reproduit ; les pistons correspondants (en triangles creux) sont tous distribués autour de zéro. Mais surtout, nous constatons que l'augmentation du rapport signal-à-bruit permet de retrouver la phase incidente. La rampe de piston introduite est ainsi estimée entre ± 2 radians avec une pente de 0,93. Nous pouvons donc en conclure que l'estimateur analytique peut être utilisé pour fermer une boucle de cophasage sur objet étendu, le niveau de flux requis dépendant directement de la dilution introduite.

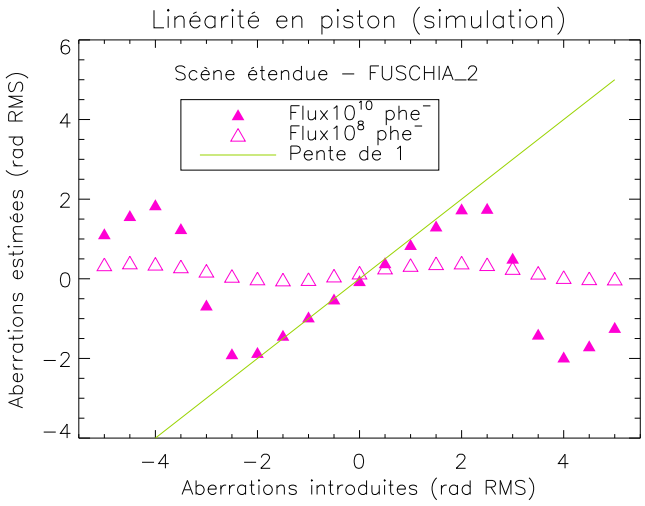


Fig. 6.18 – Linéarité en piston obtenue en simulation par l'estimateur analytique FUSCHIA_2 en fonction du flux contenu dans les images, les données étant générées dans des conditions les plus proches possibles de celles observées expérimentalement.

Sur scène étendue en fonction de la largeur spectrale Etant donné que nos méthodes de restauration sont chromatiques, il est indispensable de réduire la largeur spectrale de la source d'émission, ce qui équivaut à limiter le nombre de photons utilisables. Jusqu'à présent, nous avons évalué les performances de nos deux algorithmes de diversité de phase sans nous soucier de l'influence de cette largeur $\Delta\lambda$. Or, une baisse de la photométrie induit automatiquement une diminution de la répétabilité et donc une plus grande incertitude sur la valeur des estimées. Dans le cadre d'un cophasage temps-réel, toute la difficulté sera de trouver un compris entre la précision d'estimation voulue (qui est directement liée au flux critique disponible) et les effets polychromatiques introduits par la largeur spectrale. Afin de déterminer dans quelle mesure nos estimateurs restent utilisables, nous effectuons le test de linéarité comme décrit précédemment et pour un nombre de photons similaire en augmentant la largeur du filtre interférométrique. Nous passons ainsi de $\Delta\lambda = 40$ nm (soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$) à $\Delta\lambda = 80$ nm. Notons que le filtre le plus étroit dont nous disposons, de largeur 10 nm, n'a pu être utilisé : le temps d'exposition requis en lumière blanche était alors trop important (plusieurs minutes) pour que, dans une même trame, l'éclairement reste constant d'une image à l'autre.

La Fig. 6.19 illustre pour chaque valeur de $\Delta\lambda$ les aberrations de piston telles que restaurées par l'algorithme itératif_2 en fonction de l'amplitude de la rampe introduite. D'après ce graphe, nous voyons que la largeur spectrale influe sur les performances de manière significative. En effet, la phase incidente est estimée entre $[\pi\,;\,\pi]$ rad avec une pente de 1,03 lorsque $\Delta\lambda = 40$ nm. Pour une largeur de bande deux fois plus importante, les aberrations sont certes retrouvées mais avec une pente de 0,64 (calculée entre ± 2 rad). Puisque le biais est proportionnel à l'amplitude du piston introduit, nous en déduisons que l'estimation des aberrations peut être effectuée avec le filtre de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/8$ à condition de calibrer le biais ou que celles-ci soient proches de zéro. Cette conclusion s'avère très intéressante, car nous allons pouvoir augmenter sensiblement la photométrie (notamment dans le cadre d'un cophasage temps-réel où le RSB est un point critique vu que le temps d'acquisition est limité) sans perturber le fonctionnement de l'estimateur.

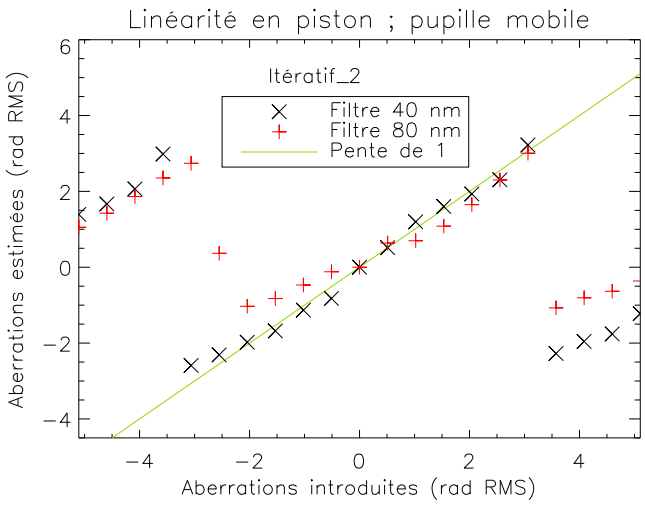


Fig. 6.19 – Linéarité en piston obtenue par l'estimateur itératif_2 sur scène étendue pour une largeur spectrale telle que $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$ (symboles $\times$) puis $1/8$ (symboles $+$).

6.3.3 Estimation des basculements

Après avoir étudié les propriétés asymptotiques de nos estimateurs pour la restauration des pistons, nous nous intéressons dans cette sous-section à leur comportement en basculement. Pour ce faire, nous évaluons leurs performances à faible phase incidente puis déterminons leur domaine de linéarité en fonction de l'amplitude de l'aberration introduite. Nous soulignons que ces validations revêtent un intérêt tout particulier non seulement pour l'estimateur analytique FUSCHIA_2 mais aussi pour l'algorithme itératif correspondant étant donné que ce dernier n'a encore jamais été caractérisé en basculement.

6.3.3.1 Performances

Pour analyser la précision des algorithmes de diversité de phase en fonction du rapport signal-à-bruit, nous utilisons les mêmes images que celles ayant servi au paragraphe 6.3.2.1 et datant de 2004. Nous rappelons que ces dernières, de taille 256×256 pixels, sont obtenues à partir du miroir de référence en utilisant le filtre interférométrique de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$. La réduction des données est ensuite effectuée avec FUSCHIA_2 puis avec l'estimateur itératif_2 ; l'objet étant une scène terrestre, les résultats sont exprimés hors contribution des trois premiers modes globaux.

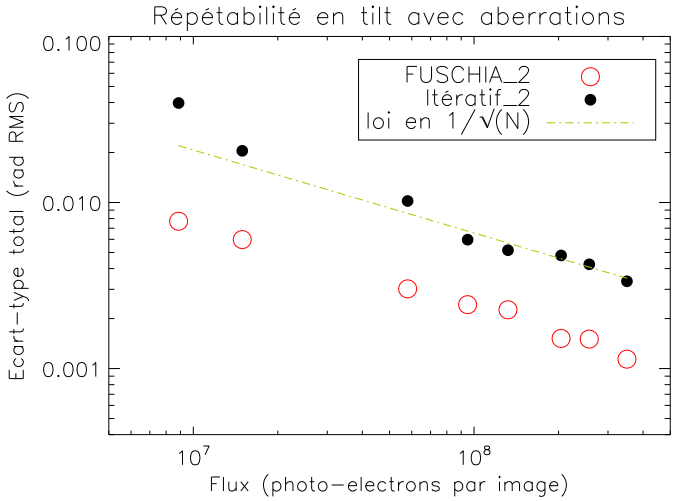


Fig. 6.20 – Ecart-type en basculement estimé sur l'ensemble des sous-pupilles par les estimateurs de type diversité de phase FUSCHIA_2 (en cercles) et itératif_2 (en points), les mesures étant effectuées à partir du miroir de référence donc à faible phase incidente.

L'écart-type total σ en basculement, calculé sur l'ensemble des sous-pupilles pour chaque estimateur, est illustré Fig. 6.20 en fonction du flux N_{bph} contenu dans les images. Nous voyons tout d'abord que les répétabilités augmentent avec l'ordre du mode estimé, confirmant ainsi ce que nous avions observé en simulation au paragraphe 4.4.2.1 page 91. Ces dernières suivent toujours en régime de bruit de photons la loi attendue en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$; cependant, l'ajustement de cette loi diffère d'un estimateur à l'autre. Ainsi, le cœfficient τ est égal à 23 pour FUSCHIA_2 et vaut 65 avec itératif_2. La répétabilité associée à l'algorithme analytique étant meilleure, nous retrouvons le même comportement que celui observé en piston, ce qui est assez déconcertant : en effet, la restauration des aberrations par FUSCHIA_2 est *a priori* effective, contrairement au cas du piston, puisque non limitée aux seules zones

de recouvrement des pics de la FTO. L'étude des estimées correspondantes, dont l'amplitude absolue totale en basculement est de 0,79 rad RMS (et de 0,17 rad avec itératif_2) pour $N_{\text{bph}} = 3{,}5\,.10^8$ phe$^-$, nous confirme d'ailleurs cette hypothèse ; dans le cas contraire, les résultats auraient tous été distribués autour de zéro. Nous pouvons donc raisonnablement supposer que l'estimation des basculements est affectée par la valeur de la dilution $\mathfrak{d}$. En effet, la taille de la pupille numérique est déterminée par le facteur d'échantillonnage et par la taille des images (voir paragraphe 4.2.1.1 page 68). Ces quantités étant fixées, augmenter $\mathfrak{d}$ revient à diminuer le diamètre des pics de la FTO ; par conséquent, l'estimation de la phase incidente est effectuée sur un nombre de fréquences plus restreint.

Dès lors, nous pourrions envisager d'augmenter le RSB afin de palier à la restriction du domaine fréquentiel. Afin de vérifier dans quelle mesure une augmentation de la photométrie est susceptible d'améliorer les performances de restauration, nous simulons un test de répétabilité en reproduisant au mieux les conditions expérimentales observées sur le banc. Nous réutilisons pour cela les images que nous avions générées au paragraphe 6.3.2.1 en présence d'une faible phase incidente et dont les cœfficients sont listés Tab. 6.2. La Fig. 6.21 gauche représente l'écart-type σ en basculement calculé sur l'ensemble des sous-pupilles et obtenu après réduction des données par FUSCHIA_2 (en cercles) et itératif_2 (en points). Nous voyons que le comportement observé initialement sur données expérimentales (qui, rappelons-le, ont été acquises pour $9.10^6 \leq N_{\text{bph}} \leq 3{,}5\,.10^8$ phe$^-$ par image) est bien reproduit : les valeurs de σ suivent bel et bien la loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ entre 3.10^7 et 3.10^8 photo-électrons avec une plus faible valeur de τ dans le cas de l'estimateur analytique. D'après le graphe Fig. 6.21 droite illustrant le biais obtenu sur chaque sous-pupille, les aberrations sont estimées avec une erreur moyenne de 20 % pour le flux expérimental le plus important (soit $3{,}5\,.10^8$ phe$^-$). Lorsque le niveau de photométrie augmente, nous voyons que le biais diminue sensiblement ; l'écart-type correspondant à FUSCHIA_2 finit par adopter le comportement attendu et présente des valeurs de répétabilité plus élevées que celles associées à l'estimateur itératif. Au final, nous pouvons en conclure que la dilution, qui s'avère critique pour l'estimation des pistons telle qu'opérée par FUSCHIA_2, influe également mais dans une moindre mesure la restauration des basculements. Il sera donc nécessaire d'augmenter légèrement le nombre de photo-électrons contenus dans les images dans le cas d'une configuration faiblement compacte si nous voulons obtenir une précision identique à celle que l'on obtiendrait avec une pupille connexe.

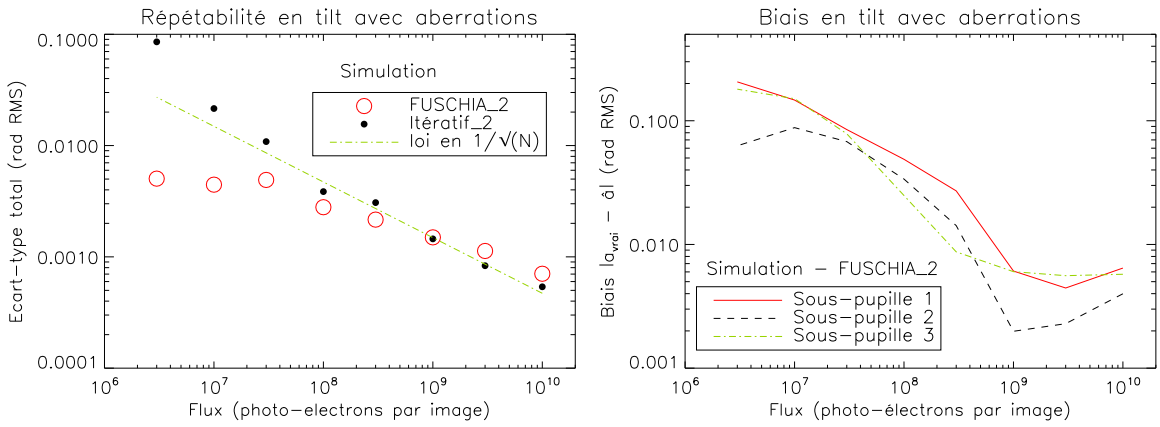


Fig. 6.21 – Ecart-type en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en simulation par les estimateurs de type diversité de phase dans des conditions les plus proches de celles observées sur le banc.

6.3.3.2 Linéarité

Nous allons maintenant vérifier si nos estimateurs sont à même de corriger de plus grandes perturbations de phase et déterminer jusqu'à quel point le développement affine des pics de la FTO en les aberrations reste valable. Pour cela, nous appliquons sur l'une des sous-pupilles de la configuration de référence une rampe de basculement présentant vingt-et-une valeurs comprises entre ± 5 rad RMS avec trois points de mesure par valeur. Tout comme dans le cas du piston, nous prenons soin d'enregistrer les données correspondantes non seulement sur scène étendue mais aussi sur objet ponctuel, et ce de façon à effectuer une première validation de nos algorithmes au plan focal. L'ensemble de ces données est acquis en lumière blanche avec le filtre centré sur 650 nm de largeur $\Delta\lambda = 40$ nm, puis traité par les estimateurs analytique puis itératif appropriés (*phase retrieval* ou diversité de phase). Enfin, nous précisons que tous les résultats sont exprimés dans la base canonique mobile de manière à pouvoir les comparer directement aux aberrations introduites.

Sur objet ponctuel Avant d'analyser les performances de nos estimateurs multiplans sur scène étendue, nous nous intéressons au préalable à la caractérisation des algorithmes monoplans sur point source. Les données, que nous avons acquises au plan focal à fort flux pour $N_{\text{Nbph}} \simeq 7.10^5$ photo-électrons et de taille 64×64 pixels, sont dès lors réduites par les algorithmes FUSCHIA_1 puis itératif_1. Les basculements estimés sont portés sur le graphe Fig. 6.22 droite, tandis que le graphe de gauche illustre le biais correspondant obtenu sur la sous-pupille mobile.

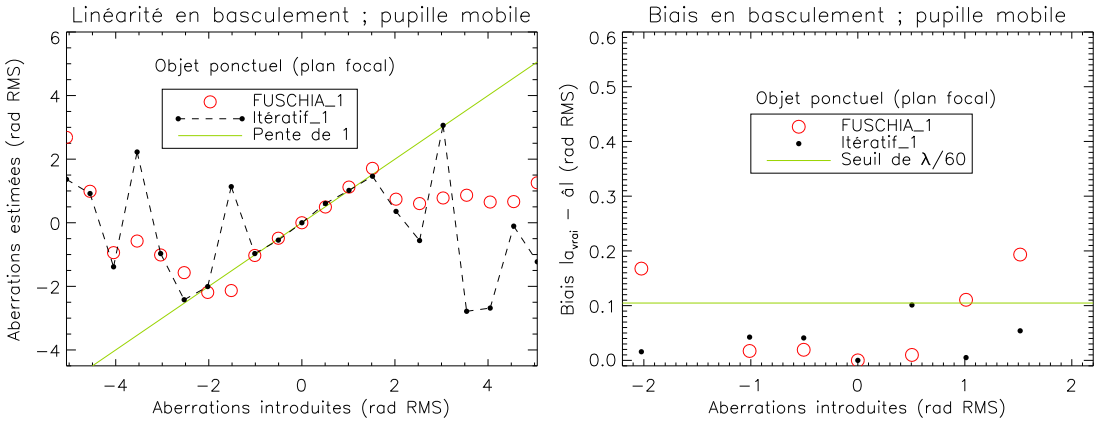


Fig. 6.22 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus au plan focal sur objet ponctuel par les estimateurs de type *phase retrieval* en réponse à une rampe de basculement de grande dynamique, la largeur du filtre interférométrique étant de 40 nm (soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$).

Tout d'abord, nous voyons que l'estimateur itératif (en points) retrouve les aberrations introduites de manière tout à fait satisfaisante dans un domaine compris entre $[-2\,;\,2]$ rad RMS environ et avec un biais inférieur au seuil de précision de $\lambda/60$ tel que spécifié en sous-section 6.3.1 ; la rampe est ainsi reconstruite avec une pente que nous pouvons considérer comme unitaire entre ± 1 radian. *A contrario*, l'algorithme peine à estimer la valeur attendue au delà de 2 rad RMS. Cette observation, que nous avions déjà relevée au paragraphe 4.4.2.2 page 93, n'est pas surprenante puisque la visibilité des franges d'interférence décroît fortement dès que $|a_{2n}| \geq 2{,}5$ radians. En effet, la FEP mobile se détache totalement des autres FEP restées fixes. De plus, les aberrations introduites sont alors très éloignées du point d'initialisation de recherche de la phase, qui est par défaut la phase nulle. Dès

lors, l'estimateur ne converge plus vers la valeur attendue mais tombe dans un minimum local du critère. Néanmoins, ce comportement n'est pas gênant en soi, vu que dans le cadre d'une opération de cophasage à proprement dite les sous-pupilles ont déjà été ramenées à moins de $\lambda/4$ RMS du point de fonctionnement parfait par différentes procédure d'alignement. L'algorithme itératif_1 est donc en réalité parfaitement opérationnel.

Examinons les résultats obtenus avec l'estimateur analytique (en cercles). D'après le graphe Fig. 6.22 gauche, nous voyons que son domaine de validité est plus restreint que celui de l'algorithme itératif du fait de l'approximation faible phase ; les aberrations sont même fortement sous-estimées à partir de $1{,}5$ rad RMS. La restauration de phase s'avère cependant de très bonne qualité entre $[-1\,;\,1]$ rad : la rampe est alors reconstruite avec une pente de valeur $1{,}04$ ainsi qu'un biais inférieur à $\lambda/60$. Nous pouvons donc en conclure que l'estimateur FUSCHIA_1 peut très bien être utilisé au plan focal pour clore une boucle de cophasage à fort flux.

Sur scène étendue Etant donné que la validité de nos estimateurs monoplans a été démontrée au paragraphe précédent, nous allons pouvoir nous pencher sur les performances obtenues lorsque l'objet d'intérêt est un objet étendu. L'acquisition des images de diversité correspondantes, de taille 256×256 pixels, est effectuée à moyen flux pour $N_{\text{Nbph}} \simeq 3.10^8$ phe$^-$, ce qui correspond à un RSB de 60. Le traitement de ces données est ensuite successivement effectué par l'algorithme analytique multiplan FUSCHIA_2 puis par l'estimateur itératif_2.

Les graphes de la Fig. 6.23, qui illustrent les résultats ainsi obtenus, montrent tout d'abord la valeur des aberrations estimées sur la sous-pupille mobile en fonction de la rampe introduite (à gauche) puis tracent le biais correspondant aux mesures (à droite). Nous constatons que les domaines de linéarité sont à peu près identiques à ceux observés précédemment sur objet ponctuel. Ainsi, la reconstruction telle qu'effectuée par itératif_2 est excellente entre $\pm 1{,}5$ radians RMS, avec une pente de $0{,}98$ et un biais que nous pouvons considérer comme étant en deçà de $\lambda/60$. Ce dernier présente certes des valeurs relativement dispersées en raison du faible nombre de mesures (seulement trois) dont nous disposons pour effectuer la statistique ; toutefois, nous pouvons raisonnablement affirmer que cet estimateur satisfait aux exigences de l'étude SOTISE. L'algorithme analytique retrouve quant à lui les aberrations dans un domaine compris entre $[-1\,;\,1]$ rad RMS. La rampe étant estimée avec une pente de $1{,}05$ pour un biais inférieur à $\lambda/60$, nous en concluons qu'il est à même d'être utilisé pour fermer une boucle de cophasage sur scène étendue.

6.3.4 Conclusion sur l'implémentation d'un capteur dédié à l'imagerie terrestre

Les résultats obtenus dans cette section nous ont permis d'évaluer les performances de nos capteurs de cophasage dans le cadre d'un instrument imageur grand champ. Au cours des validations effectuées, nous avons identifié plusieurs paramètres qui s'avèrent déterminants pour l'optimisation de ces performances ; il s'agit :

- du nombre de photo-électrons contenus dans les images, défini par le temps d'exposition ;
- du facteur de dilution, qui s'avère surtout critique pour la recherche des pistons puisque dans ce cas l'estimation n'est effectuée qu'à partir de la seule zone de recouvrement des pics de la FTO. Or, plus la compacité diminue, plus ce domaine devient restreint. Dans le cas de l'estimateur analytique, nous avons souligné que cette restriction s'accompagne également d'une baisse du rapport signal-à-bruit et donc d'une diminution de la précision d'estimation. Dès lors, augmenter le niveau de photométrie dans les images suffit à restaurer les pistons de manière convenable. Cette observation ne devrait cependant pas être restrictive en soi étant donné que les observa-

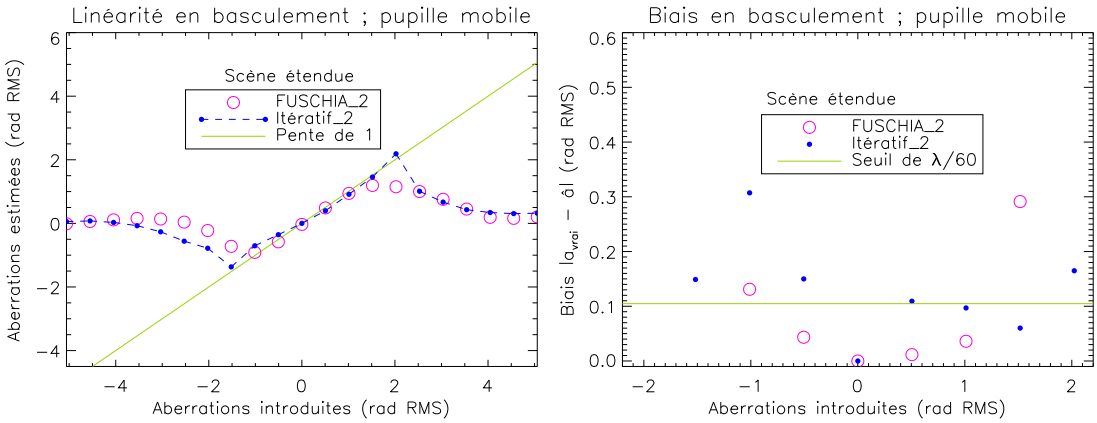


Fig. 6.23 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus sur scène étendue par les estimateurs de diversité de phase en réponse à une rampe de basculement de grande dynamique, le filtre étant de largeur $\Delta\lambda = 40$ nm.

tions réalisées dans un contexte d'imagerie sont généralement effectuées à fort RSB ; même si le capteur de cophasage tourne dix fois plus rapidement, le rapport signal-à-bruit devrait être suffisant pour que la mesure des pistons et basculements différentiels soit effective ;

– enfin, nous soulignons que nos méthodes étant par nature chromatiques, les performances d'estimation sont directement liées à la largeur de la bande spectrale. Si cette dernière est trop importante, elle induit des effets polychromatiques qui dégradent la reconstruction de la phase incidente. Une largeur trop petite entraîne quant à elle une baisse de la photométrie et donc une diminution de la répétabilité. Au cours des validations effectuées, nous avons montré qu'un filtre de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$ était bien adapté, ce qui permet une estimation tout à fait satisfaisante sans sacrifier un nombre trop important de photo-électrons.

Au final nous avons démontré, à partir d'images acquises en 2004, que le concept de capteur de cophasage de type plan focal permettait d'atteindre une précision de mesure de $\lambda/60$ RMS, ce qui s'avère largement suffisant pour un instrument dédié à l'observation de la terre depuis une orbite géostationnaire. L'algorithme itératif_2 peut ainsi retrouver des aberrations de piston comprises entre $\pm\pi$ radians ainsi que des basculements tels que $|a_{2n}| \leq 2$ rad RMS, et ce pour des flux typiques d'imagerie. Enfin, nous avons également montré que le comportement de l'estimateur analytique FUSCHIA_2 est linéaire autour de zéro et que ce dernier peut très bien être utilisé pour fermer une boucle de cophasage, à condition que le nombre de photo-électrons contenus dans les images soit suffisant (ce qui est normalement le cas dans un contexte d'imagerie). Nous pouvons donc en conclure que nos estimateurs de cophasage sont à même de répondre aux besoins d'un instrument tel que SOTISE.

6.4 Validation dans le cadre du projet DARWIN

Après avoir étudié les performances de nos algorithmes dans le cadre d'un instrument imageur dédié à l'observation de scènes étendues, nous nous intéressons dans cette section à leur caractérisation sur objet ponctuel. Les tests effectués vont non seulement nous permettre d'analyser les propriétés asymptotiques obtenues au plan focal de même que dans un plan défocalisé, mais aussi de vérifier si

nos estimateurs atteignent les spécifications requises par un interféromètre spatial à l'instar de DARWIN.

Ainsi, après avoir précisé les conditions spécifiques de ce projet, nous étudions les performances obtenues en piston et basculement puis effectuons une première caractérisation de la mesure des ordres supérieurs allant de la défocalisation à l'aberration sphérique. Là encore, nous précisons que les images utilisées ont été acquises en 2004 lors des toutes premières validations des estimateurs itératif et analytique[6] dans leur version d'origine. Enfin, nous soulignons qu'une partie des tests effectués au plan focal à fait l'objet d'une section dans l'article "Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes" de Baron [Baron *et al.* (2008)]. Ce papier étant disponible en annexe J page 231, nous invitons le lecteur à se reporter directement à la section intitulée *Experimental validation* page 240 pour plus de détails[7].

6.4.1 Conditions spécifiques

Pour atteindre le niveau de *nulling* (ou d'extinction) requis par la mission DARWIN, il est nécessaire de disposer d'un système de cophasage qui soit stable au nanomètre près et qui puisse opérer en temps-réel. Le capteur DWARF devra donc mesurer précisément de nombreux modes sur objet ponctuel et pour des magnitudes équivalentes allant de 8 à 12. La longueur d'onde de travail choisie étant fixée à $\lambda = 650$ nm, les spécifications critiques telles que définies par l'ONERA sont les suivantes [Cassaing *et al.* (2003a)] :

- les pistons et basculements doivent respectivement être estimés avec une répétabilité meilleure que 0,75 nm ($\lambda/860$) et 1,21 nm RMS (soit $\lambda/540$), et ce à une fréquence d'au moins 10 Hz ;
- les contraintes sur les aberrations de hauts ordres sont quant à elles beaucoup plus relâchées. En effet, les huit premiers modes supérieurs (allant de la défocalisation à l'aberration sphérique) ne requièrent pas d'estimation en temps-réel, mais doivent être déterminés avec une répétabilité meilleure que 10 nm.

Etant donné que la mission DARWIN sera vraisemblablement composée de trois télescopes collecteurs, nous choisissons comme masque pupillaire la configuration de référence définie précédemment de type Golay 3 et présentant une dilution de 1,62. Puisque la pupille est *de facto* non centrosymétrique et que la mise en phase s'effectue sur objet ponctuel, nous utiliserons l'ensemble de nos algorithmes monoplans afin d'estimer les pistons et basculements sur chaque sous-pupille. En revanche, la mesure des modes supérieurs s'effectuera par diversité de phase, voire même avec l'estimateur itératif de type SICLOPE. Au cours de chaque test, nous veillerons à comparer systématiquement les méthodes analytiques aux algorithmes itératifs correspondants. Le principe général de ces validations est décrit au paragraphe 6.2.4.1 ; cependant dans le cadre de DARWIN, nous précisons que :

- la caméra d'imagerie, qui se situe derrière le démonstrateur DWARF (voir Fig. 6.8), présente un bruit de détecteur relativement faible d'écart-type 8,5 électrons par pixel ;
- étant donné que le tube du télescope présente une occultation centrale importante, la pupille a été placée hors-axe. Par conséquent, le centre de la configuration n'est plus défini par la rencontre des trois vecteurs joignant l'axe optique au centre des sous-pupilles mais se trouve excentré par rapport à cette position ;

[6] Il s'agit ici de l'estimateur FUSCHIA_0 (basé sur l'analyse des modes de la FTO au plan focal par maximum de vraisemblance) tel que développé par Baron et amélioré ultérieurement par nos soins.

[7] Dans un souci d'homogénéité du manuscrit, les résultats présentés dans ce chapitre sont exprimés en radian RMS, contrairement à l'article où l'unité de base est le nanomètre RMS.

- les tests de répétabilité sont effectués pour des séries de quatre-vingt-dix mesures de taille 64×64 pixels ; la gamme de flux choisie, qui couvre une bonne partie de la dynamique de la caméra, s'étend de $6{,}1\,.10^3$ à $1{,}4\,.10^6$ phe$^-$ par image (ce qui correspond à un RSB allant de 3 à 84 pour 14×14 pixels significatifs). Grâce à ces tests photométriques, nous allons pouvoir déterminer si nos estimateurs sont capables d'effectuer un cophasage sur des étoiles de faible magnitude[8] tout en respectant les spécifications décrites ci-dessus ;
- les tests de linéarité sont quant à eux réalisés à fort flux pour un nombre moyen de photo-électrons supérieur à 10^6 phe$^-$ (soit RSB ≥ 70). Les rampes de piston et basculement que nous envoyons présentent chacune trente-et-une valeurs comprises respectivement entre $\pm 0{,}77\lambda$ et $\pm 0{,}38\lambda$ RMS. Puisque nous avons la possibilité d'enregistrer simultanément les images focales et extra-focales, nous comparerons systématiquement les aberrations estimées par les algorithmes de type *phase retrieval* aux résultats obtenus avec les capteurs de type SICLOPE ;
- enfin, étant donné que nous ne disposons pas sur le banc de miroir déformable qui permettrait d'appliquer des rampes de hauts ordres, nous effectuons la mesure des modes supérieurs à partir d'une plaque de verre dont les déformations sont calibrées en parallèle. Les images correspondantes, de taille 256×256 pixels, sont acquises en lumière blanche avec le filtre de largeur 40 nm et pour un flux tel que $N_{\text{bph}} = 10^6$ phe$^-$.

6.4.2 Estimation du piston

Nous nous proposons dans cette sous-section de caractériser les performances de l'ensemble des estimateurs monoplans, que ce soit à partir de données acquises au plan focal ou dans un plan défocalisé. Dans un premier temps, nous étudions leurs propriétés asymptotiques en fonction du nombre de photo-électrons contenus dans les images, puis nous déterminons l'étendue de leur domaine de linéarité.

6.4.2.1 Performances

Pour étudier le comportement de nos algorithmes en présence d'une faible phase incidente, nous effectuons un test de répétabilité sur une série de quatre-vingt-dix mesures indépendantes dans les conditions telles que définies en sous-section 6.4.1. Les données, que nous avons acquises au plan focal à partir du miroir de référence, sont ensuite traitées par l'ensemble de nos algorithmes monoplans. Ces estimateurs, basés sur une approche de type Maximum de Vraisemblance (MV), reposent soit sur l'analyse des modes de la fonction de transfert optique au plan focal (FUSCHIA_0+), soit sur la minimisation d'un critère d'erreur quadratique avec mise sous forme affine de la FTO (FUSCHIA_1), soit sur la minimisation itérative du critère classique de type MV (itératif_1). Etant donné que les basculements globaux présentent un intérêt sur objet ponctuel, nous ne pouvons pas exprimer les résultats correspondants dans la base canonique cohérente ; dès lors, nous prenons soin de restituer les aberrations hors contribution du seul piston moyen.

La Fig. 6.24 représente l'écart-type total σ en piston déterminé sur l'ensemble des sous-pupilles par les différents algorithmes en fonction du flux N_{bph} contenu dans les données. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que les valeurs prises par σ sont pratiquement similaires quel que soit l'estimateur considéré. En régime de bruit de photons pour des flux supérieurs à 3.10^4 phe$^-$ (RSB ≥ 10), l'écart-type suit la loi attendue en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ avec un cœfficient τ respectivement égal à 5,6 pour l'estimateur

[8] La correspondance entre la magnitude apparente et le nombre de photo-électrons détectés entre autre par l'instrument DARWIN est décrite en annexe E page 203.

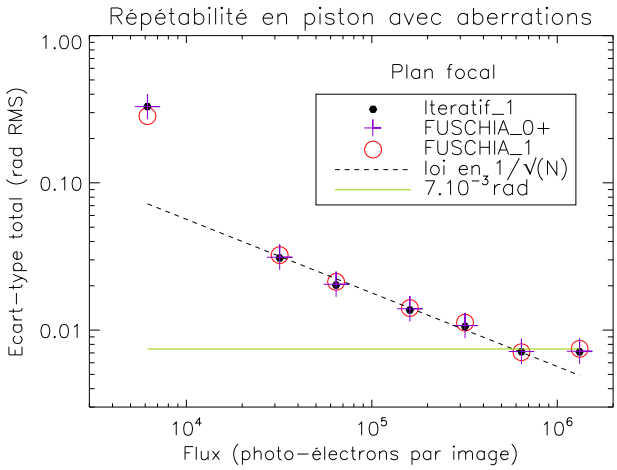


Fig. 6.24 – Ecart-type en piston estimé sur l'ensemble des sous-pupilles par les estimateurs monoplans FUSCHIA_0+ (en croix), FUSCHIA_1 (en cercles) et itératif_1 (en points), les mesures étant effectuées à partir du miroir de référence donc à faible phase incidente.

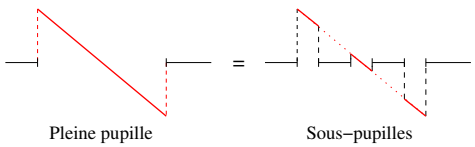
itératif_1 (en points), 5,8 pour FUSCHIA_1 (en cercles) et 5,7 pour FUSCHIA_0+ (en croix). Nous voyons également que la précision d'estimation requise en piston, qui est de $\lambda/860$ soit 7.10^{-3} rad, est atteinte pour un flux d'environ 6.10^5 photo-électrons par image, ce qui correspond à un rapport signal-à-bruit de 55. D'après l'annexe E page 203, la magnitude apparente limite des étoiles sur lesquelles nous pouvons effectuer les mesures de cophasage est comprise entre 8 et 9.

Au premier abord, ces dernières valeurs ne semblent pas très élevées bien que respectant les spécifications requises par l'instrument. En analysant les aberrations estimées à fort flux (qui sont globalement identiques quel que soit l'estimateur considéré) listées Tab. 6.3, nous nous rendons compte de l'existence de basculements globaux[9]. Soit A_2 et A_3 les cœfficients associés. En effectuant le produit scalaire des aberrations estimées par la décomposition des modes de Zernike Z_2 , Z_3 sur les sous-pupilles, nous trouvons $A_2 = A_3 \simeq 0{,}2$ radian RMS. Dans le cas d'un système réel, ces aberrations, qui sont *a priori* dues aux mouvements apparents de l'objet ainsi qu'aux vibrations de l'instrument, seront corrigées par des techniques de pointage très précises. Dès lors, les pistons locaux résultant de la décomposition de ces modes sur les sous-pupilles seront négligeables ; les variations de phase observées d'une image à l'autre devraient donc être plus faibles et la répétabilité d'autant meilleure. Au final, nous pouvons ainsi espérer gagner un ordre de magnitude.

6.4.2.2 Linéarité

Nous allons maintenant déterminer quelle est l'étendue du domaine de validité de nos algorithmes monoplans. Pour cela, nous appliquons une rampe de grande dynamique sur l'une des sous-pupilles

[9]Nous rappelons qu'un basculement se décompose essentiellement en piston sur les sous-pupilles comme illustré ci-dessous à deux dimensions :



	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	$-0{,}302$	$0{,}086$	$0{,}255$
pupille 2	$0{,}427$	$0{,}004$	$-0{,}453$
pupille 3	$-0{,}125$	$-0{,}075$	$-0{,}310$

Tab. 6.3 – Aberrations du miroir de référence estimées par l'algorithme itératif_1 (en rad RMS).

de la configuration de référence pour un RSB $\geq$ 70. Le principe et les conditions des validations étant respectivement explicités au paragraphe 6.2.4.1 et en sous-section 6.4.1, nous rappellerons simplement que la rampe présente trente-et-une valeurs comprises entre $[-0{,}77\lambda\,;\,0{,}77\lambda]$ (soit entre $\pm 4{,}8$ radians). Dans un premier temps, nous effectuons le test de linéarité avec le filtre interférentiel de largeur $\Delta\lambda = 40$ nm (ce qui correspond à $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$) puis comparons les résultats plan focal à ceux obtenus dans un plan défocalisé. Nous nous intéressons ensuite à l'influence de la largeur spectrale et vérifions pour quelles valeurs de $\Delta\lambda$ nos estimateurs restent valables.

Au plan focal Pour effectuer la réduction des images acquises au plan focal avec le filtre de largeur 40 nm, nous faisons appel à l'ensemble de nos estimateurs de type *phase retrieval*. Nous nous servons ainsi des deux algorithmes analytiques FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1 puis utilisons l'estimateur itératif correspondant. Les résultats, que nous exprimons dans la base canonique mobile, sont portés sur le graphe Fig. 6.25 gauche tandis que le graphe de droite illustre le biais obtenu sur la sous-pupille mobile en fonction de l'amplitude de la rampe introduite.

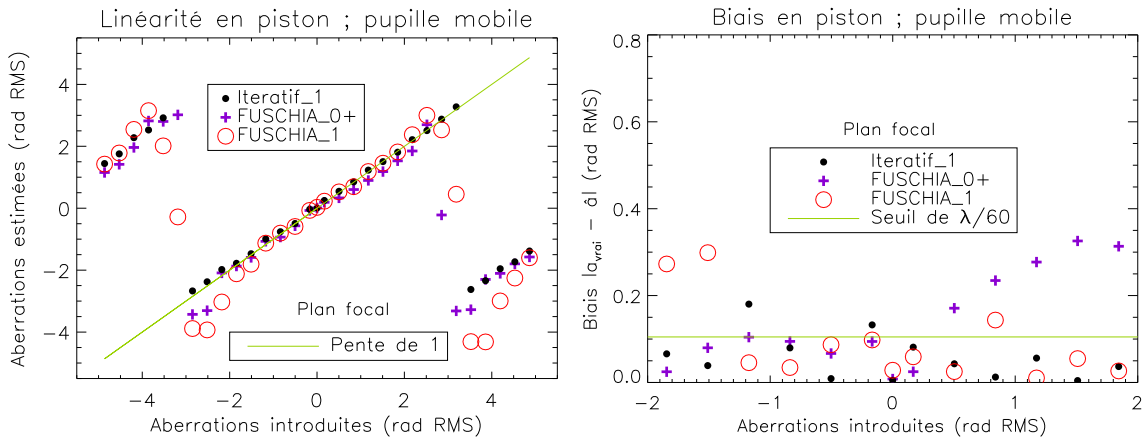


Fig. 6.25 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus au plan focal sur objet ponctuel par les estimateurs de type *phase retrieval* en réponse à une rampe de piston de grande dynamique, la largeur du filtre interférométrique étant de 40 nm (soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$).

D'après le graphe de gauche, nous voyons que quel que soit l'estimateur considéré, les pistons se replient en $\pm\pi$ comme attendu. De plus, les aberrations sont dans l'ensemble assez bien restituées. La reconstruction telle qu'effectuée par itératif_1 (en points) s'avère excellente entre $[-\pi\,;\,\pi]$ rad avec une pente de 0,97 et un biais qui, d'après le graphe de droite, peut être considéré comme en dessous du seuil de précision[10] de $\lambda/60$. Le domaine de validité des estimateurs analytiques s'avère quant à lui

[10]Le biais ne fait théoriquement l'objet d'aucune spécification particulière. Toutefois, nous avons décidé de fixer un seuil arbitraire à $\lambda/60$ RMS de façon à comparer les résultats obtenus par nos différents estimateurs.

plus restreint. En effet, nous pouvons remarquer que l'algorithme FUSCHIA_1 (en cercles) surestime les pistons lorsque $|a_{1n}| > 1{,}5$ radians du fait de l'approximation faible phase. La restauration reste cependant de très bonne qualité entre $[-1{,}5\,;\,1{,}5]$ rad puisque la rampe est restituée avec une pente de $0{,}97$ pour un biais qui se situe en deçà de la limite de précision fixée. Analysons maintenant le comportement de l'estimateur FUSCHIA_0+. Nous pouvons constater que la zone de linéarité, comprise entre ± 2 radians, n'est pas exactement symétrique ; la rampe introduite est alors estimée avec une pente qui n'est plus "que" de $0{,}91$. Toutefois, nous soulignons que la restauration de phase est là encore satisfaisante.

En conclusion, nous pouvons en déduire que nos estimateurs monoplans sont tout à fait appropriés pour mesurer au plan focal et à fort flux les pistons présents sur les sous-pupilles d'un instrument à synthèse d'ouverture. L'estimateur itératif sera de préférence utilisé afin d'évaluer de fortes aberrations (à 2π près), tandis que nous privilégierons les algorithmes FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1 pour fermer une boucle de cophasage en temps-réel sur objet ponctuel.

Dans un plan défocalisé Nous avions souligné en sous-section 3.3.2 page 65 que, contrairement à l'estimateur FUSCHIA_0+, les algorithmes itératif_1 et FUSCHIA_1 pouvaient très bien être utilisés dans un plan image quelconque[11] de façon à lever les indéterminations de signe inhérentes aux configurations centrosymétriques (voir annexe B page 192 pour plus de détails). Etant donné qu'au cours des tests de linéarité nous avons acquis des images extra-focales, nous décidons de les utiliser afin d'effectuer une première validation des estimateurs monoplans de type SICLOPE. Nous soulignons que cette étude présente un intérêt tout particulier puisque ces méthodes n'ont encore jamais vraiment été caractérisés sur banc expérimental.

Les données extra-focales, acquises en régime de bruit de photons pour $N_{\text{bph}} \simeq 3{,}5\,.10^6$ phe$^-$ et de taille 64×64 pixels, sont donc successivement réduites par FUSCHIA_1 puis par itératif_1. La Fig. 6.26 illustre les aberrations ainsi estimées dans la base canonique mobile en fonction de l'amplitude de la rampe introduite. Tout d'abord, nous pouvons remarquer que l'estimateur itératif retrouve parfaitement là encore la rampe introduite entre $[-2{,}5\,;\,3]$ radians avec une pente de 1. Cette observation est confirmée par le graphe de droite puisque le biais correspondant est inférieur au seuil de précision de $\lambda/60$. Nous pouvons également constater que le domaine de linéarité n'est pas tout à fait symétrique par rapport au cas plan focal. Ce résultat, qui peut être imputable à la défocalisation introduite (nous privilégions alors une direction en particulier), n'est cependant pas gênant en soi puisque les procédures de cohérençage, qui permettent de se placer près du maximum de l'enveloppe de cohérence, limite *de facto* les aberrations résiduelles à moins de $\lambda/3$ RMS.

Analysons les résultats obtenus pas l'estimateur analytique FUSCHIA_1. Tout d'abord, nous voyons que les aberrations comprises entre $[-1{,}5\,;\,1{,}5]$ radians sont un peu moins bien estimées en comparaison du plan focal. Cette différence peut très bien s'expliquer par une incertitude sur la valeur de la défocalisation introduite : au contraire de l'algorithme itératif qui peut estimer les défocalisations présentes sur les sous-pupilles, l'estimateur FUSCHIA_1 ne restaure que les trois premiers modes de Zernike. Dès lors, si la défocalisation introduite dans le modèle direct n'est pas strictement identique à celle présente sur le banc, les estimations seront moins précises. Nous pouvons cependant remarquer que la phase incidente est tout de même assez bien estimée entre ± 1 radian, avec une pente de $1{,}05$ et un biais proche du seuil de $\lambda/60$ tel que spécifié au paragraphe précédent. Enfin, nous rappelons que les valeurs prises par le biais sont ici calculées à partir d'une seule image. Dans

[11] A condition que la phase de diversité ainsi introduite présente au moins une partie paire, comme expliqué en annexe B page 192.

l'idéal, il aurait fallu que la statistique soit effectuée sur un minimum d'une dizaine de données pour être vraiment précise.

Nous avons montré dans ce paragraphe que les algorithmes monoplans, utilisés traditionnellement au plan focal, sont également opérationnels en plan défocalisé. L'estimateur analytique FUSCHIA_1 est ainsi à même de fermer une boucle de cophasage à fort flux avec un biais de 0,1 radian pour des pistons tels que $|a_{1n}| \leq 1$ rad RMS.

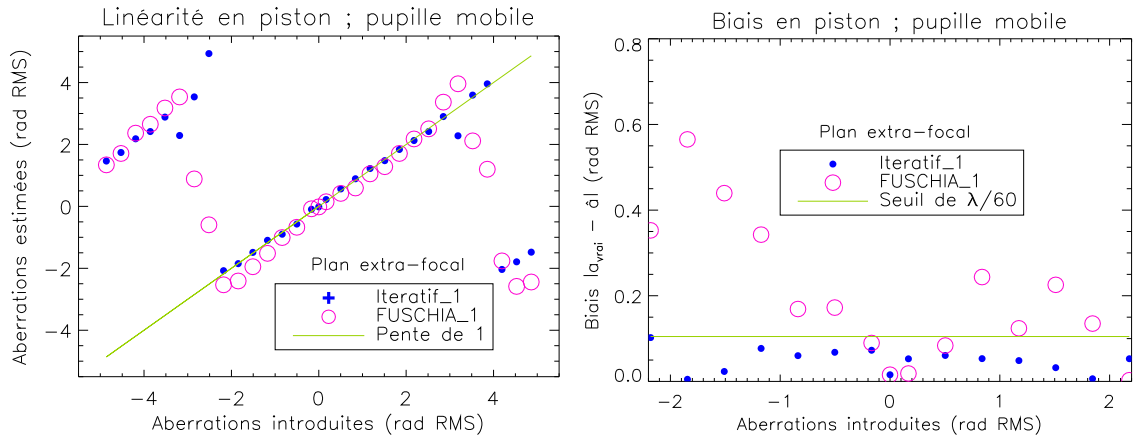


Fig. 6.26 – Linéarité en piston (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en plan extra-focal sur objet ponctuel par les estimateurs de type SICLOPE en réponse à une rampe de piston de grande dynamique, la largeur du filtre interférométrique étant de 40 nm (soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$).

Au plan focal en fonction de la largeur spectrale Intéressons-nous maintenant à l'influence de la largeur spectrale $\Delta\lambda$. Nous avions déjà souligné au paragraphe 6.3.2.2 lors des validations sur scène étendue que nos estimateurs étant naturellement chromatiques, il s'avère indispensable de déterminer dans quelle mesure les effets polychromatiques induits par $\Delta\lambda$ restent négligeables. Pour répondre à cette question, nous effectuons le même test de linéarité que décrit précédemment en utilisant deux autres filtres centrés sur 650 nm de largeur respectivement égale à 10 nm (ce qui équivaut à $\Delta\lambda/\lambda = 1/65$) et 80 nm ($\Delta\lambda/\lambda = 1/8$). Bien entendu, nous veillons à modifier le temps d'acquisition de façon à conserver un nombre de photo-électrons qui soit relativement constant d'une série de mesures à l'autre. Les données ainsi obtenues au plan focal, qui rappelons-le datent de 2004, sont ensuite traitées par l'algorithme analytique FUSCHIA_1 ; les résultats, exprimés dans la base canonique mobile, sont portés Fig. 6.27 gauche tandis que le graphe de droite illustre le biais correspondant pour chaque valeur de $\Delta\lambda$.

Tout d'abord, nous pouvons constater que la largeur de la bande spectrale influe directement sur l'étendue du domaine de linéarité. En effet, si les aberrations comprises entre $\pm 1{,}5$ rad sont bien restituées avec une pente de 0,97 pour $\Delta\lambda = 40$ nm (symboles $\times$), elles sont automatiquement surestimées lorsque le filtre est deux fois plus large (symboles $+$). La rampe est certes retrouvée, mais avec une pente de 1,21. Soulignons toutefois que l'influence du polychromatisme s'avère moins importante que dans le cas où l'objet observé est une scène étendue. En première approximation, nous pouvons même considérer que $\Delta\lambda$ affecte peu l'estimation des pistons lorsque $|a_{1n}| \leq 1$ radian puisque le biais correspondant reste très proche du seuil de précision fixé à $\lambda/60$. En outre, les aberrations de plus forte amplitude peuvent être correctement restituées à condition de calibrer le biais et d'introduire un

gain lors de l'estimation. Pour le filtre le plus étroit (symboles ◊), il apparaît que le biais de mesure s'avère légèrement plus important comparé au cas où $\Delta\lambda = 40$ nm. En analysant le flux contenu dans les données, nous nous sommes rendu compte que le nombre de photo-électrons correspondant était trois fois moins important que pour les autres séries de mesure. Malgré ces conditions, nous constatons que la rampe est tout de même bien estimée avec une pente de $1{,}05$ entre $\pm 1{,}2$ rad. Nous pouvons donc en conclure qu'il est possible de fermer une boucle de cophasage avec FUSCHIA_1 en augmentant sensiblement la photométrie, puisque ce dernier peut être utilisé avec de larges filtres tels que $\Delta\lambda/\lambda \leq 1/8$.

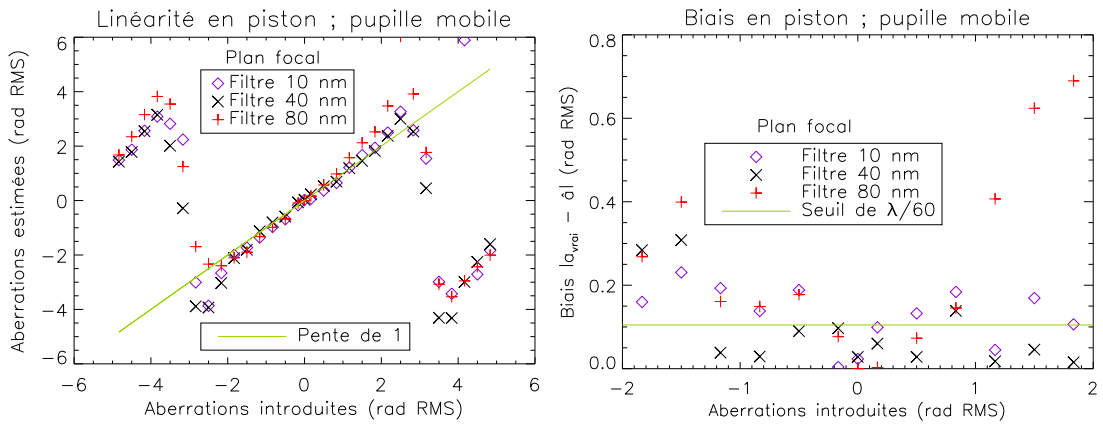


Fig. 6.27 – Linéarité en piston obtenue au plan focal par l'estimateur analytique FUSCHIA_1 pour une largeur spectrale telle que $\Delta\lambda/\lambda = 1/65$ (symboles ◊) puis $1/16$ (symboles $\times$) et enfin $1/8$ (symboles $+$).

6.4.3 Estimation des basculements

Après avoir étudié les performances en piston de nos estimateurs monoplans, nous nous proposons dans cette sous-section d'analyser leurs propriétés asymptotiques pour la restauration des basculements. A cet effet, nous nous penchons tout d'abord sur l'influence du rapport signal-à-bruit, puis déterminons l'amplitude de leur domaine de linéarité.

6.4.3.1 Performances

Le comportement de chaque algorithme en fonction du niveau de flux est déterminé à partir du miroir de référence. En pratique, nous nous plaçons dans les mêmes conditions que celles décrites au paragraphe 6.4.2.1. De fait, nous utilisons les mêmes données. Nous rappelons que les séries d'images correspondantes, de taille 64×64 pixels, ont été acquises en 2004 au plan focal avec le filtre de largeur $\Delta\lambda = 40$ nm et pour un nombre de photo-électrons compris entre $6{,}1\,.10^3$ et $1{,}4\,.10^6$ phe$^-$. Ces différentes séries sont ensuite traitées par les estimateurs analytiques FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1, puis par l'algorithme itératif_1. Etant donné que l'objet d'intérêt est ici un objet ponctuel, nous veillons à exprimer les aberrations ainsi estimées hors contribution du piston moyen.

La Fig. 6.28 représente les performances de chaque estimateur calculées sur l'ensemble des sous-pupilles en fonction du nombre N_{bph} de photo-électrons contenus dans les données. Tout d'abord,

nous pouvons remarquer que pour des flux supérieurs ou égaux à 3.10^4 phe$^-$ par image, l'écart-type σ suit comme attendu la loi en $\tau/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ avec un ajustement tel que :

- τ soit égal à 2,6 pour l'estimateur itératif (en points) ;
- $\tau = 4{,}7$ avec FUSCHIA_1 (en cercles) ;
- tandis que pour FUSCHIA_0+, nous obtenons $\tau = 5{,}5$ (en croix).

Il apparaît que les valeurs prises par l'écart-type, qui sont comparables aux résultats de simulation obtenus au paragraphe 5.4.2.1 page 117, sont sans surprise moins importantes dans le cas de l'estimateur itératif. Nous constatons également que la précision d'estimation de $1{,}1\,.10^{-2}$ rad (soit $\lambda/540$ RMS) requise par la mission DARWIN est atteinte pour des niveaux de flux assez faibles vérifiant $N_{\text{bph}} = 5.10^4$ phe$^-$ pour itératif_1, $N_{\text{bph}} = 1{,}5\,.10^5$ phe$^-$ pour l'algorithme analytique FUSCHIA_1 et $N_{\text{bph}} = 2.10^5$ phe$^-$ avec l'estimateur analytique FUSCHIA_0+. D'après l'annexe E page 203, de telles mesures de cophasage peuvent être effectuées sur des étoiles de plus basse magnitude apparente comprise entre 11 et 12 pour l'estimateur le plus performant ainsi qu'entre 10 et 11 avec l'algorithme FUSCHIA_1. De manière concrète, le senseur DWARF pourra viser la quasi-totalité des étoiles cibles prévues à l'heure actuelle en considérant la configuration envisagée par DARWIN décrite dans l'annexe E. De plus, ces mesures de répétabilité mettent en évidence la possibilité de fermer une boucle de cophasage en temps-réel dans le visible avec une précision de l'ordre du nanomètre, et ce à l'aide d'un système relativement simple ne faisant intervenir qu'un seul plan image.

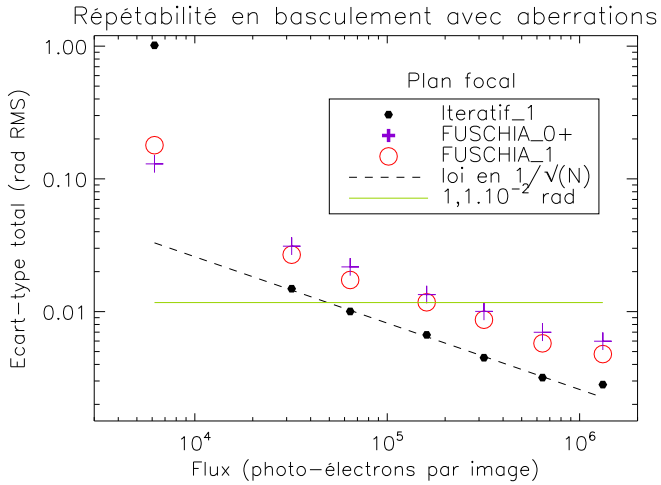


Fig. 6.28 – Ecart-type en basculement estimé au plan focal sur l'ensemble des sous-pupilles par les estimateurs monoplans FUSCHIA_0+ (en croix), FUSCHIA_1 (en cercles) et itératif_1 (en points), les mesures étant effectuées à partir du miroir de référence donc à faible phase incidente.

6.4.3.2 Linéarité

Après avoir étudié le comportement de nos algorithmes en présence d'une faible phase incidente, nous allons déterminer si ces derniers sont capables de restaurer de plus fortes perturbations. Pour cela, nous appliquons une rampe de basculement d'amplitude $[-0{,}4\,;\,0{,}4]$ rad sur l'une des sous-pupilles de la configuration de référence tel que spécifié en sous-section 6.4.1. Les données correspondantes, acquises à fort flux pour $N_{\text{bph}} \geq 10^6$ phe$^-$ (soit pour RSB ≥ 70) et avec le filtre interférentiel

de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$, sont ensuite traitées par l'ensemble de nos estimateurs monoplans. Tout comme dans le cas du piston, nous effectuons une première validation au plan focal puis comparons les résultats à ceux obtenus dans le plan défocalisé. Nous précisons que les aberrations ainsi estimées sont exprimées dans la base canonique mobile de façon à privilégier les modes de la sous-pupille aberrée.

Au plan focal La réduction des images acquises au plan focal est effectuée par les trois algorithmes de type *phase retrieval* dont nous disposons : nous faisons ainsi successivement appel aux estimateurs analytiques FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1, puis à l'estimateur itératif correspondant. Les basculements estimés sur la sous-pupille mobile sont représentés Fig. 6.29 gauche en fonction de l'amplitude de la rampe introduite, tandis que le graphe de droite illustre le biais associé aux mesures. Tout d'abord, nous voyons que l'algorithme itératif_1 retrouve bien l'ensemble des aberrations introduites. En effet, la rampe est reconstruite sur toute sa dynamique entre $\pm 2{,}4$ rad avec une pente de $0{,}94$ et un biais qui se trouve en deçà du seuil de précision (que nous avions arbitrairement fixé à $\lambda/60$ RMS) pour $|a_{2n}| \leq 0{,}7$ radian.

Comme attendu, le domaine de validité des estimateurs analytiques s'avère plus restreint. La reconstruction telle qu'effectuée par FUSCHIA_0+ reste linéaire entre $\pm 1{,}1$ rad, tandis que l'algorithme FUSCHIA_1 retrouve les basculements compris entre $[-0{,}9\,;\,0{,}9]$ rad. Dans les deux cas, la rampe est estimée avec une pente de $1{,}2$ et un biais proche du seuil de $0{,}1$ rad. Bien que tout à fait acceptables, ces résultats s'avèrent un peu moins bons comparés à ceux obtenus au paragraphe 6.3.3.2. Nous rappelons que lors de ce premier test de linéarité, la rampe de basculement avait été retrouvée entre $\pm 1{,}5$ rad RMS avec une pente respectivement égale à $1,04$ pour l'estimateur FUSCHIA_1 et 1 pour l'algorithme FUSCHIA_1. *A priori*, cette différence peut être imputée aux erreurs de calibration de la pupille numérique. En effet, nous avons déjà souligné que, contrairement à la pupille BRISE, la pupille de DWARF se trouve trouve hors-axe. Or, en 2004, date à laquelle nous avons acquis les données, la distance du centre de la pupille à l'axe optique n'a pas été estimée précisément mais à quelques millimètres près (pour une distance évaluée à 95 mm). De plus, il aurait été préférable que la rampe envoyée comporte plusieurs points de mesure par valeur de façon à ce que les estimations soient plus précises. Néanmoins, nous pouvons tout de même conclure que la restauration des basculements à partir d'images focales est tout à fait possible dans le cadre de DWARF. En outre, les algorithmes analytiques FUSCHIA_0+ et FUSCHIA_1 peuvent très bien être utilisés en régime de bruit de photons pour retrouver de faibles aberrations de basculement en temps réel à fort flux.

Dans un plan défocalisé Puisque nous avons évalué l'étendue du domaine de linéarité de chaque estimateur de type *phase retrieval* au plan focal, intéressons-nous maintenant aux performances de restauration obtenues en plan défocalisé. Les données correspondantes, acquises à fort flux ($N_{\text{bph}} \geq 10^6$ phe$^-$) en même temps que les images focales, sont successivement réduites par les estimateurs itératif_1 et FUSCHIA_1. Les basculements ainsi estimés sont bien entendu exprimés dans la base canonique mobile puis illustrés Fig. 6.30 gauche, tandis que le graphe de droite représente le biais correspondant obtenu sur la sous-pupille aberrée. Là encore, nous constatons que le domaine de validité de l'estimateur itératif couvre toute la dynamique de la rampe introduite. Les basculements sont même un peu mieux restitués que dans le cas plan focal étudié précédemment, avec une pente de $1{,}05$ et un biais qui se trouve en dessous du seuil de précision de $\lambda/60$ RMS (soit $0{,}1$ rad) pour $|a_{2n}| \lesssim 2$ radians.

Regardons les résultats associés à l'estimateur analytique FUSCHIA_1. Nous voyons que la reconstruction est effectuée sur un domaine qui est similaire à celui observé au plan focal ; la rampe est

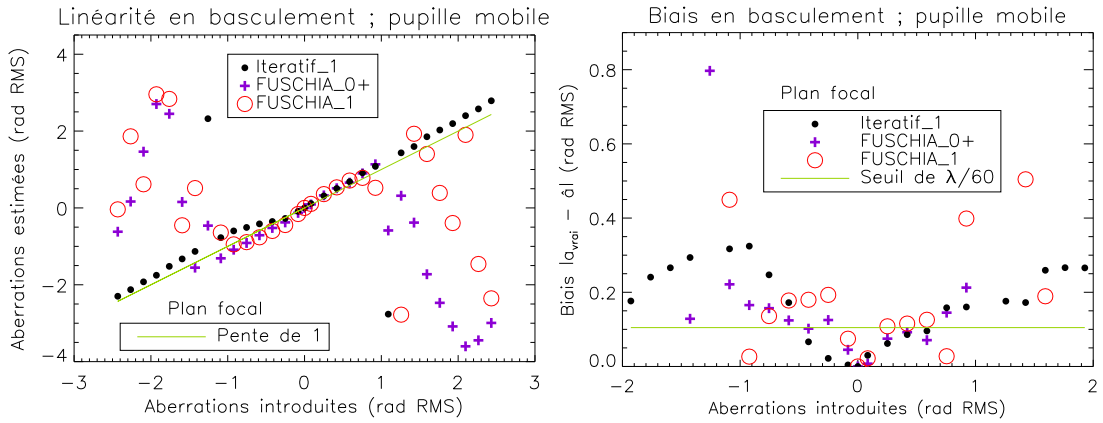


Fig. 6.29 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus au plan focal sur objet ponctuel par les estimateurs de type *phase retrieval* en réponse à une rampe de basculement de grande dynamique,la largeur du filtre interférométrique étant de 40 nm (soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$.

ainsi estimée entre $[-0{,}9\,;\ 0{,}9]$ rad avec une pente de $1{,}18$ et pour un biais qui s'avère de nouveau très proche du seuil de $0{,}1$ rad RMS. Au premier abord, ce domaine peut paraître assez limité ; toutefois, cette restriction n'est pas problématique puisque dans le cadre d'un cophasage en boucle fermée les aberrations à estimer sont pas nature de faible amplitude. Au final, nous en concluons que les estimateurs monoplans de type SICLOPE, c.-à.-d. utilisés dans un plan de diversité autre que le plan focal, sont à même de restaurer les basculements d'un instrument multipupille à fort flux.

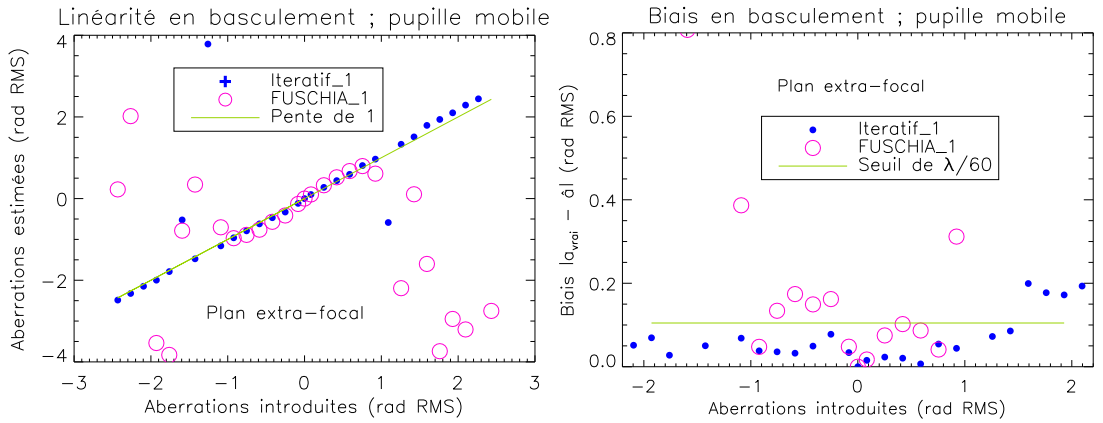


Fig. 6.30 – Linéarité en basculement (à gauche) et biais associé (à droite) obtenus en plan extra-focal sur objet ponctuel par les estimateurs de type SICLOPE en réponse à une rampe de basculement de grande dynamique, la largeur du filtre interférométrique étant de 40 nm (soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$).

6.4.4 Estimation des modes supérieurs

Jusqu'à présent, nous nous sommes exclusivement intéressés à la restitution des pistons et basculements présents sur les sous-pupilles du système. Etant donné que les analyseurs de surface d'onde

fonctionnant sur monolithique permettent de corriger la plupart des aberrations des télescopes individuels, seule la mesure des modes optiques de bas ordres[12] est de fait requise lors du cophasage d'un ISOO. Néanmoins dans le cadre du projet DARWIN, nous allons également nous pencher sur l'estimation des modes allant de la défocalisation (Z_4) à l'aberration sphérique (Z_{11}). D'après les spécifications décrites en sous-section 6.4.1, ces derniers doivent être déterminés avec une répétabilité meilleure que 10 nm. Puisque nos estimateurs analytiques ne sont pas pour l'instant en mesure de restituer d'autres aberrations que les pistons et basculements, nous privilégions les méthodes itératives dont nous disposons. En effet, la gestion rigoureuse du modèle direct de MASTIC (voir sous-section 4.2.1 page 68 pour plus de détails) et son adaptation aux conditions expérimentales devrait nous permettre de retrouver les modes supérieurs, ce qui n'était pas envisageable avec la version des algorithmes telle qu'arrêtée en 2004. Ainsi, nous allons tout d'abord utiliser l'estimateur de diversité de phase itératif_2 puis employer l'algorithme monoplan itératif_1 de type SICLOPE qui s'apparente à du *phase retrieval*, mais dans un plan défocalisé.

Afin d'analyser le comportement de nos estimateurs pour la restauration des hauts ordres, nous décidons d'effectuer un test de linéarité dans des conditions de fort RSB. L'idéal serait donc de procéder de la mêmes manière qu'aux paragraphes 6.4.2.2 et 6.4.3.2 traitant des validations en piston/basculement et d'envoyer à l'aide d'un miroir bimorphe des rampes de modes supérieurs parfaitement calibrées. Etant donné que cette classe de miroir n'est pas disponible sur le banc BRISE, nous effectuons cette validation sur le miroir de référence (REF) à partir d'une lame de verre que nous insérons sur le trajet des faisceaux, la configuration pupillaire sélectionnée étant bien entendu celle à trois sous-pupilles utilisée jusqu'à présent. La plaque de verre n'ayant pas été préalablement calibrée, nous procédons de la manière suivante :

- tout d'abord nous déterminons, à partir d'une série de dix images acquises avec la caméra de DWARF, le front d'onde ψ_{ref} présent naturellement sur le miroir en utilisant nos deux algorithmes de cophasage cités ci-dessus. Les données correspondantes, de taille 256×256 pixels, sont générées en lumière blanche à fort flux pour $N_{\text{bph}} = 2.10^6$ phe$^-$ et avec le filtre de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/16$;
- cette mesure est ensuite effectuée en faisant appel à un interféromètre ZYGO (de type *Michelson*) placé en autocollimation devant la sortie visiteur du banc et qui va nous servir de référence pour l'ensemble des calibrations ;
- puis nous insérons une lame de verre juste devant le miroir et le plus près possible du plan pupille. Le nouveau front d'onde ψ_{aberr} est alors mesuré à l'aide des estimateurs itératif_1 et itératif_2 de la même manière qu'à l'étape N°1 ; les données, dont une illustration est donnée Fig. 6.31, sont acquises dans des conditions identiques ;
- nous évaluons également le front d'onde aberré à l'aide de l'interféromètre ZYGO ;
- enfin, nous déterminons pour chaque type de mesure (ZYGO/algorithmes) la phase différentielle $\psi_{\text{aberr}} - \psi_{\text{ref}}$ correspondant au front d'onde introduit par la plaque de verre. Dès lors, les résultats doivent en toute rigueur être identiques d'un jeu de données à l'autre.

La Fig. 6.32 compare pour chaque sous-pupille les aberrations ainsi estimées par les algorithmes itératif_1 (en cercles) et itératif_2 (en points) aux aberrations retrouvées par le ZYGO (en trait). Tout d'abord, nous voyons que la concordance entre les trois types de mesure s'avère de très bonne qualité, et ce quel que soit le mode considéré. En outre, la restauration telle qu'effectuée par l'estimateur monoplan est excellente, avec une erreur inférieure à 10 % dans quasiment tous les cas. Nous soulignons

[12]Nous rappelons que les modes *de bas ordres* désignent les pistons et basculements. *A contrario*, les modes dits *supérieurs* (ou aberrations de hauts ordres) désignent des modes qui sont supérieurs ou égaux à la défocalisation.

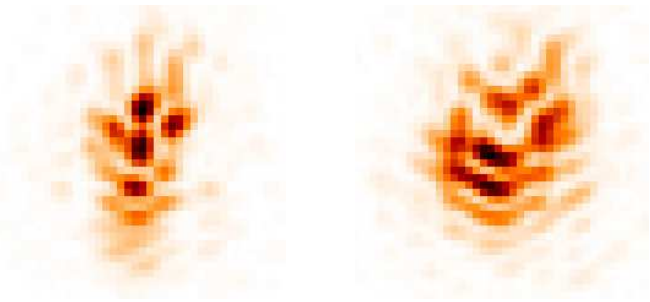


Fig. 6.31 – Image focale (à gauche) et extra-focale (à droite) acquises sur la caméra de DWARF à partir de la plaque de verre aberrée.

également que les résultats obtenus, qui montrent clairement que les sous-pupilles sont dominées par un astigmatisme (mode z_6), ont été confirmée par l'interférogramme du ZYGO. Nous pouvons donc en conclure que grâce à la mise en place rigoureuse du logiciel MASTIC, nos algorithmes itératifs sont désormais capables de restituer les modes supérieurs résultant d'un défaut d'alignement ou de conception des optiques. Simples à mettre en œuve, ils peuvent donc se substituer dans ce cas aux ASO classiques, qui nécessitent *a contrario* une implémentation assez lourde puisque utilisés derrière chaque sous-pupille. Il restera par la suite à déterminer l'amplitude exacte du domaine de validité de chacun des estimateurs pour savoir si ces derniers sont capables de corriger de plus fortes perturbations de phase, comme par exemple de la turbulence atmosphérique.

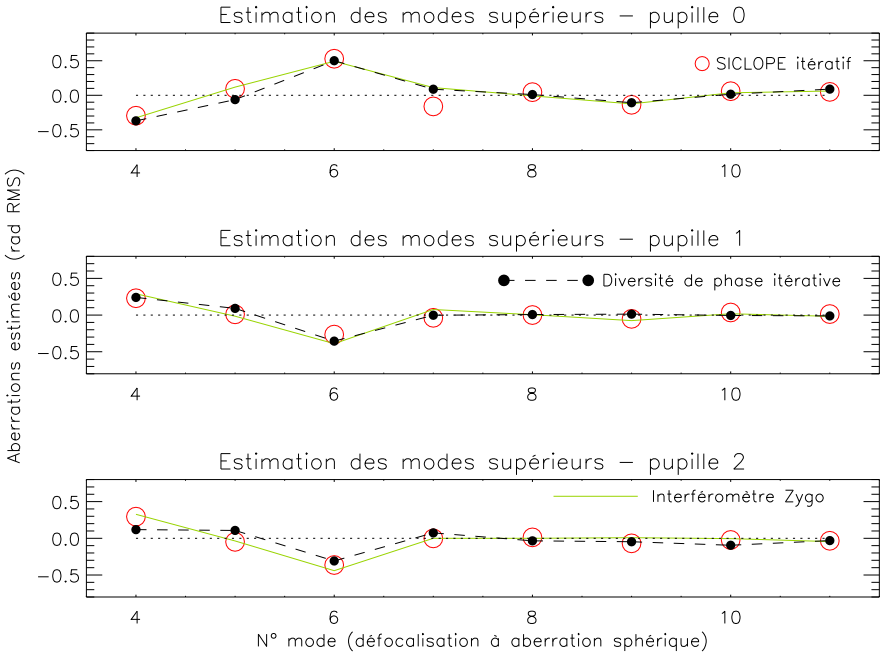


Fig. 6.32 – Estimation sur objet ponctuel des modes supérieurs d'un plaque de verre aberrée allant de la défocalisation (Z_4) à l'aberration sphérique (Z_{11}). Les données sont successivement traitées par l'estimateur de diversité de phase itératif (en points) et par l'algorithme monoplan de type SICLOPE (en cercles) puis comparées aux résultats d'un ZYGO (interféromètre de type *Michelson*).

6.4.5 Conclusion sur l'implémentation de DWARF

Nous nous sommes attachés dans cette section à caractériser nos différentes méthodes de cophasage de type plan focal dans le cadre d'instruments dédiés à l'observation stellaire. En réutilisant des données acquises à l'origine en 2004, nous avons montré qu'il était possible d'estimer les pistons et basculements différentiels d'un instrument multipupille avec un seul plan de mesure, et ce quelle que soit la position de ce dernier.

Pour des flux vérifiant $N_{\text{bph}} \geq 3.10^4$ phe$^-$ par image, les algorithmes analytiques de type FUSCHIA, basés soit sur une analyse des modes de la FTO (FUSCHIA_0+) soit sur la minimisation d'un critère d'erreur quadratique (FUSCHIA_1), s'avèrent tout à fait capables de retrouver au plan focal des aberrations de piston vérifiant $|a_{1n}| \leq 1{,}5$ rad et des basculements compris entre ± 1 radians RMS avec une précision de $\lambda/60$. Bien que ces méthodes soient par nature chromatiques, nos avons montré qu'elles restaient linéaires pour une large bande spectrale ($\Delta\lambda/\lambda = 1/8$). De plus, nous avons vérifié que dans des conditions d'utilisation nominale en boucle fermée, nos estimateurs pouvaient atteindre les spécifications de cophasage requises (répétabilité de $\lambda/860$ en piston et de $\lambda/540$ RMS en basculement) pour des étoiles de magnitude apparente limite respectivement égale à 8 et 10.

Nous nous sommes également intéressés à la caractérisation de l'algorithme analytique FUSCHIA_1 en plan défocalisé. Les résultats correspondants, qui apparaissent comme étant quasi-identiques à ceux obtenus au plan focal, montrent qu'il est possible de s'affranchir des ambiguïtés de signe inhérentes aux pupilles centrosymétriques et par conséquent d'évaluer les pistons/basculements différentiels quelle que soit la configuration pupillaire.

Enfin, l'estimation des ordres supérieurs allant de la défocalisation à l'aberration sphérique a également été effectuée. Bien que nous ne disposions pas de miroir déformable nous permettant d'introduire des rampes parfaitement calibrées, nous avons pu démontrer que la mesure de ces aberrations par des méthodes itératives avec une précision de $\lambda/60$ RMS était possible, non seulement en utilisant la diversité de phase, mais aussi en n'employant qu'un seul plan de diversité (hors plan focal).

Nous pouvons donc en conclure que la gamme des estimateurs monoplans permet de répondre aux besoins en piston/basculement requis par les missions d'observation pointant un objet ponctuel. Dès lors, il est possible de cophaser sur point source et en temps-réel un instrument multipupille quelle que soit sa configuration pupillaire[13]. En outre, au vu de leur simplicité de mise en œuvre, ces méthodes présentent un avantage incontesté dans le cas d'un cophasage réalisé par métrologie interne.

6.5 Conclusion du chapitre

Les techniques de cophasage de type plan focal, basées sur l'analyse d'images acquises à proximité du foyer de l'instrument, ont été développées pour répondre aux exigences croissantes des futurs instruments d'observation. Ainsi, les méthodes telles que le *phase retrieval* ou la diversité de phase apparaissent comme étant particulièrement bien adaptées car elles permettent *a priori* de mesurer de nombreux modes sur un nombre conséquent de sous-pupilles, et ce tout en étant simple à mettre en œuvre optiquement.

Afin de vérifier si les performances de nos estimateurs sont susceptibles de satisfaire l'ensemble des besoins requis, nous avons effectué dans ce chapitre leur validation expérimentale sur BRISE, le banc de tests de l'ONERA dédié à l'imagerie multitélescope. Pour cela, nous avons tout d'abord

[13] Nous avons considéré dans ce chapitre des instruments multipupilles dont la configuration est par définition limitée à quelques voire à une dizaine de sous-pupilles. Nous ne parlons pas ici des configurations monopupilles qui sont généralement composées de plusieurs dizaines voire plusieurs centaines de segments.

identifié les paramètres qu'il est nécessaire de prendre en compte afin d'adapter le modèle direct aux conditions de l'expérience ; nous avons également décrit les procédures d'alignement servant à se placer dans la dynamique des estimateurs que nous souhaitons caractériser, c.-à.-d. à moins de $\lambda/3$ du point de cophasage parfait. Une fois ces étapes franchies, le banc est opérationnel et les mesures réalisables.

Nous avons ensuite effectué la caractérisation des estimateurs plan focal dans le cadre de différentes études. A partir de données acquises en 2004, nous avons montré que l'ensemble des algorithmes multiplans permettait d'atteindre en régime de bruit de photons une précision de mesure de $\lambda/60$ RMS sur objet étendu et de restaurer des aberrations telles que $|a_{1n}| \leq 1{,}5$ rad et $|a_{2n}| \leq 2$ rad RMS. Nous avons également montré que le facteur de dilution pouvait s'avérer critique pour l'optimisation des performances sur objet étendu : dans le cas de l'estimateur analytique, une baisse de la compacité implique une diminution de la précision d'estimation. Dès lors, il est indispensable d'augmenter le niveau de photométrie de façon à retrouver la phase incidente de manière convenable. Toutefois, les niveaux de performances atteints s'avèrent tout à fait satisfaisant et démontrent que les estimateurs multiplans sont aptes à mesurer les aberrations différentielles d'un instrument imageur dédié à l'observation terrestre.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la caractérisation des estimateurs monoplans sur point source. Les différentes validations, effectuées dans le cadre du projet DARWIN, ont montré que les pistons et basculements compris respectivement entre $\pm 1{,}5$ radians et ± 1 rad pouvaient être estimés aussi bien en plan focal que dans un plan défocalisé avec une répétabilité de l'ordre de $\lambda/600$ RMS. Nos algorithmes permettent donc de répondre pleinement aux exigences de la mission pour des étoiles de magnitude apparente limite comprise entre 8 et 10 ; nous pouvons également en déduire que leur excellente répétabilité les rend susceptibles d'être exploités dans le cadre de projets encore plus exigeants.

Au final, nous avons monté la capacité de nos estimateurs à répondre pleinement aux divers besoins en cophasage posés pas les missions de demain. En outre, il s'avère que l'ensemble des algorithmes analytiques est à même de fermer une boucle de cophasage en temps réel quel que soit le type d'instruments multipupilles considéré, sous réserve d'avoir un niveau de photométrie suffisant. Nous pouvons donc en conclure que l'approche plan focal est une solution polyvalente à fort flux, permettant de s'adapter à la plupart des situations.

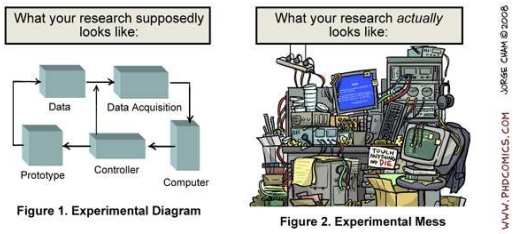


Figure 1. Experimental Diagram

Figure 2. Experimental Mess

Conclusion générale et perspectives

Bilan des travaux

La Synthèse d'Ouverture Optique permet d'obtenir la résolution d'un instrument de grand diamètre en recombinant interférométriquement plusieurs sous-pupilles de diamètre inférieur. Etant donné que le champ des applications possibles est extrêmement vaste, cette méthode se révèle aujourd'hui d'une grande importance dans le domaine de la haute résolution angulaire. Néanmoins, l'une des principales difficultés de mise en œuvre des systèmes correspondants réside dans leur cophasage, c.-à.-d. dans la mesure puis la correction des aberrations différentielles présentes entre les sous-pupilles de l'instrument. Dans ce contexte, les techniques de type plan focal telles que le *phase retrieval* ou la diversité de phase montrent un avantage certain ; en effet, elles permettent d'estimer de nombreux ordres sur un nombre important de sous-pupilles et ce quelque soit le support de l'objet observé. De plus, elles ont l'avantage d'être simples à implémenter optiquement, ce qui s'avère d'une importance capitale dans le cas d'un système embarqué. Malheureusement, ces méthodes présentent l'inconvénient d'être itératives et donc potentiellement coûteuses en temps de calcul. Or jusqu'à présent, très peu de travaux spécifiques se sont attachés à réduire le nombre d'itérations nécessaires et encore moins pour des applications de type SOO sur scène étendue. Le principal objectif de cette thèse a donc été de développer de nouveaux estimateurs de cophasage qui soient analytiques, permettant ainsi une estimation rapide de la phase recherchée.

Dans un premier temps, nous avons montré qu'il était possible d'obtenir une estimée simple des pistons et basculements différentiels en exprimant le critère à minimiser sous forme quadratique. Pour parvenir à l'expression de ce nouveau critère, nous avons été amené à linéariser l'expression des pics de la fonction de transfert dans le cadre des faibles phases incidentes. Contrairement aux méthodes précédemment développées sur scènes étendues, ce reconstructeur, baptisé FUSCHIA_2 puisque utilisé avec au moins $N_d = 2$ plans de diversité, ne nécessite principalement le calcul que de N_d FFT ; le coût des opérations a donc été significativement réduit. De plus, FUSCHIA_2 permet non seulement d'estimer de faibles aberrations incidentes mais aussi de restaurer l'objet de façon simple et rapide lorsque ce dernier se trouve être la grandeur d'intérêt.

Après avoir mené à bien les calculs analytiques permettant l'implémentation de cette méthode, nous nous sommes intéressés au cas particulier de la restauration monoplan sur objet ponctuel. Afin de disposer là encore d'algorithmes de cophasage rapides, nous avons tout d'abord amélioré l'estimateur de Baron [Baron *et al.* (2008)] valable pour les configurations non redondantes et basé sur l'analyse au plan focal des modes de la FTO par maximum de vraisemblance. Pour être en mesure de cophaser tous types de configuration, nous avons par la suite développé une méthode de résolution similaire à celle employée sur scène étendue et s'appuyant sur la mise sous forme affine de la FTO dans un plan quelconque. Lorqu'utilisé dans un plan défocalisé, cet estimateur, nommé FUSCHIA_1, permet de retrouver de manière rapide les faibles aberrations incidentes et ce quelle que soit la configuration de

l'instrument.

La caractérisation de ces différents estimateurs a ensuite été effectuée par simulation. Il en est ressorti que la diversité de phase analytique était capable de retrouver de manière rapide de faibles pistons et basculements sur scène contrastée avec une précision de $\lambda/60$ nm RMS pour un RSB > 10 et par la même occasion de restaurer l'objet observé dans un but d'imagerie. Dans le cas d'un objet ponctuel, nous avons montré que l'utilisation de FUSCHIA_1 dans un plan défocalisé permettait de s'affranchir des limitations inhérentes aux configurations centrosymétriques ; dès lors, il devient possible de retrouver en régime de bruit de photons ($N_{\text{bph}} > 3.10^4$ phe$^-$) et avec une précision de $\lambda/60$ nm RMS de faibles aberrations quelle que soit la configuration de l'instrument et quelle que soit sa dilution.

Pour finir, nous nous sommes intéressés à la mise en œuvre expérimentale de FUSCHIA_1 et de FUSCHIA_2 dans le cadre de différents projets sur le banc BRISE, le banc de tests de l'ONERA dédié à l'imagerie multitélescope. A partir de données acquises en 2004, nous avons identifié le facteur de dilution et la largeur de la bande spectrale comme étant des paramètres pouvant s'avérer critiques pour l'optimisation des performances sur scène étendue. Toutefois, les niveaux de performances atteints se sont avérés satisfaisants ; en effet, nous avons montré que l'ensemble des estimateurs permettait de cophaser le banc à fort flux avec les précisions spécifiées, c.-à.-d. avec une erreur de $\lambda/60$ sur scène étendue et une précision de $\lambda/600$ sur point source. Nous avons mis en évidence la capacité de la diversité de phase analytique à mesurer de manière rapide les aberrations différentielles d'un instrument imageur dédié à l'observation terrestre, et avons prouvé qu'une estimation monoplan était à même de répondre aux besoins en cophasage des futures missions astronomiques. Au final, nous pouvons en conclure que les capteurs de type plan focal sont à même de répondre aux besoins en cophasage des futures mission de demain, et ce de manière rapide.

Perspectives

Bien que les performances de nos estimateurs aient été validées avec succès dans le cadre de futures missions spatiales, plusieurs études complémentaires pourront par la suite être effectuées sur BRISE. Ainsi, il sera indispensable de déterminer précisément le comportement de FUSCHIA_2 en fonction du facteur de dilution si nous voulons être en mesure de dimensionner plus finement des systèmes dédiés à l'observation terrestre ou astronomique. De façon générale, plusieurs améliorations seront également requises à plus long terme :

- tout d'abord, il serait souhaitable de ne pas approximer le dénominateur du critère à phase nulle mais au contraire de prendre en compte l'influence des faibles phases incidentes ; en effet, cette modification devrait permettre à FUSCHIA_2 d'estimer de faibles aberrations en régime de bruit de détecteur, ce qui n'est pas possible à l'heure actuelle ;
- nous pourrions développer des algorithmes polychromatiques afin d'acquérir des images à large spectre et ainsi augmenter le niveau de photométrie dans les données :
- il serait également intéressant de ne pas se limiter à des sous-pupilles circulaires mais d'effectuer les développements analytiques pour des formes hexagonales de façon à s'adapter au cas particulier des configurations segmentées où les sous-pupilles sont jointives. Les premières études que nous avons effectuées sur ce type d'instruments ont montré que le cophasage d'une vingtaine de segments circulaires était tout à fait réalisables. Reste cependant à déterminer les performances des estimateurs dans le cas extrême des futurs ELT pour un millier de sous-pupilles en présence de turbulence atmosphérique ;

– enfin, nous pourrions effectuer une validation de nos estimateurs sur des données acquises non plus en laboratoire mais sur site, ce qui permettrait de prendre en compte le milieu environnant comme par exemple les effets dûs à la turbulence atmosphérique ou aux vibrations du système (Voir annexe F page 205 pour une première approche).

Les travaux que nous avons présentés dans ce manuscrit ouvrent également de nombreuses perspectives. Une fois que les études successives auront permis d'obtenir des capteurs analytiques fonctionnant en bande large pour un grand nombre de sous-pupilles, il sera dès lors possible de les installer directement dans le plan focal d'un instrument imageur à grand champ. Cette perspective s'avère très séduisante car elle permettrait de cophaser rapidement n'importe quel type de système à synthèse d'ouverture et ce quelle que soit la forme de la pupille ou de l'objet observé. De plus, les développements réalisés permettent désormais d'envisager de nouvelles applications pour la diversité de phase et le *phase retrieval*. En effet, ces méthodes analytiques peuvent très bien être appliquées dans des domaines nécessitant une reconstruction rapide du front d'onde, comme par exemple la spectroscopie. Enfin, soulignons que l'apport de ces méthodes peut également être envisagé dans les cas où la restauration rapide de l'objet est prioritaire, comme dans les optiques grand public.

Annexe A

Exemple de conversion d'aberrations pleine pupille en aberrations sur les sous-pupilles

Considérons un instrument de diamètre $\mathcal{B}$ composé de N_T sous-pupilles identiques de diamètre $\mathcal{D}$, comme illustré Fig. A.1. D'après Ragazzoni [Ragazzoni *et al.* (1999)], tout polynôme de Zernike $\boldsymbol{Z}_k$ d'ordre k, exprimé dans la base de la grande pupille p, peut se décomposer sur l'ensemble des sous-pupilles en une somme de polynômes locaux d'ordre $\{0, \ldots, k\}$. Dans cette annexe, nous illustrons ce principe en donnant la décomposition des basculements ainsi que de la défocalisation globale sur une configuration quelconque. Pour une ébauche de la décomposition analytique des modes supérieurs, le lecteur pourra se référer à la thèse de Baron [Baron (2005)].

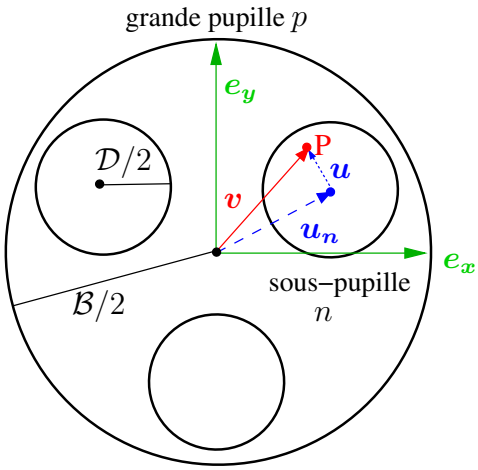


Fig. A.1 – Schéma d'une configuration multipupille.

A.1 Etude de la configuration

Soit $\boldsymbol{u}$ le vecteur position *normalisé* (en coordonnées polaires) dans le repère de la sous-pupille n placée à la position $\boldsymbol{u}_n$ de coordonnées cartésiennes $[X_n\,;\,Y_n]$ et appelons $\boldsymbol{v}$ le vecteur position

normalisé associé à la grande pupille. D'après la Fig. A.1, la position du point P est donnée par :

$$\frac{\mathcal{B}}{2}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_n + \frac{\mathcal{D}}{2}\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \frac{2}{\mathcal{B}}\boldsymbol{u}_n + \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}\boldsymbol{u} \tag{A.1}$$

sachant que dans le repère $(\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y})$, le vecteur $\boldsymbol{v}$ s'exprime comme :

$$\boldsymbol{v} = [\rho\cos\varphi\,;\ \rho\sin\varphi] \tag{A.2}$$

Appelons $\boldsymbol{Z}_k$ les modes de Zernike globaux d'amplitude A_k et $\boldsymbol{z}_k$ les modes exprimés dans la base de la sous-pupille n de cœfficient a_k. Selon Ragazzoni, nous pouvons écrire que, sur la sous-pupille n :

$$A_k\, Z_k(\boldsymbol{v}) = \sum_{k'=0}^{k} a_{k'n} z_{k'}(\boldsymbol{u}) \tag{A.3}$$

A.2 Décomposition d'un basculement

D'après les Eq. (1.23-1.25) page 22, l'expression des basculements sur la grande pupille est donnée par :

$$Z_2(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}.\boldsymbol{e_x} \qquad \text{et} \qquad Z_3(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}.\boldsymbol{e_y} \tag{A.4}$$

En substituant dans ces deux équations l'expression de $\boldsymbol{v}$ donnée Eq. (A.1), nous obtenons pour la pupille n :

$$A_2 Z_2(\boldsymbol{v}) = A_2\Big[\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}\, z_2(\boldsymbol{u}) + \frac{4}{\mathcal{B}} X_n\, z_1(\boldsymbol{u})\Big] \quad \text{d'où} \begin{cases} a_{1n} = & 4A_2X_n/\mathcal{B} \\ a_{2n} = & A_2\mathcal{D}/\mathcal{B} \end{cases} \tag{A.5}$$

et :

$$A_3 Z_3(\boldsymbol{v}) = A_3\Big[\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}\, z_3(\boldsymbol{u}) + \frac{4}{\mathcal{B}} Y_n\, z_1(\boldsymbol{u})\Big] \quad \text{d'où} \begin{cases} a_{1n} = & 4A_3Y_n/\mathcal{B} \\ a_{2n} = & 0 \\ a_{3n} = & A_3\mathcal{D}/\mathcal{B} \end{cases} \tag{A.6}$$

Nous pouvons constater que le mode de décomposition au plus haut ordre ne dépend que du rapport des diamètres $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ ainsi que du cœfficient A_2 ou A_3.

A.3 Décomposition d'une défocalisation

Reprenons la configuration pupillaire décrite par la Fig. A.1. Dans la base de la grande pupille, une défocalisation globale s'exprime comme :

$$Z_4(\boldsymbol{v}) = \sqrt{3}(2\rho^2 - 1) \tag{A.7}$$

Or, d'après l'Eq. (A.1), le terme ρ^2 s'exprime comme :

$$\rho^2 = \frac{4}{\mathcal{B}^2}\boldsymbol{u}_n^2 + \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{B}^2}\boldsymbol{u}^2 + \frac{4\mathcal{D}}{\mathcal{B}^2}\boldsymbol{u}_n.\boldsymbol{u} \tag{A.8}$$

En introduisant cette expression dans l'Eq. (A.7), nous obtenons, pour la décomposition de la défocalisation sur la sous-pupille n :

$$\begin{aligned} A_4 Z_4(\boldsymbol{v}) = & A_4 \Big\{ \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{B}^2} z_4(\boldsymbol{u}) + \frac{4\sqrt{3}\mathcal{D}}{\mathcal{B}^2} \Big[Y_n \, z_3(\boldsymbol{u}) + X_n \, z_2(\boldsymbol{u}) \Big] \\ & + \Big[\frac{8\sqrt{3}}{\mathcal{B}^2} u_n^2 + \sqrt{3} \Big(\frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{B}^2} - 1 \Big) \Big] z_1(\boldsymbol{u}) \Big\} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Nous pouvons en déduire que :

$$a_{1n} = A_4 \Big[\frac{8\sqrt{3}}{\mathcal{B}^2} u_n^2 + \sqrt{3} \Big(\frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{B}^2} - 1 \Big) \Big] \qquad a_{2n} = \frac{4 A_4 \sqrt{3}\mathcal{D}}{\mathcal{B}^2} X_n \tag{A.10}$$

$$a_{3n} = \frac{4 A_4 \sqrt{3}\mathcal{D}}{\mathcal{B}^2} Y_n \qquad a_{4n} = \frac{A_4 \mathcal{D}^2}{\mathcal{B}^2} \tag{A.11}$$

Là encore, nous pouvons remarquer que le terme d'ordre 4 ne dépend que du rapport des diamètres et du cœfficient A_4. Par la suite, nous utiliserons l'expression (A.9) afin de décomposer l'expression de la fonction de transfert dans un plan défocalisé.

Annexe B

Indétermination de phase dans le cadre d'une estimation monoplan

Avec une configuration pupillaire quelconque, il n'est pas toujours possible d'estimer correctement les aberrations recherchées à partir de la seule donnée de l'image focale d'un point source. Le but de cette annexe est donc de déterminer quels sont les modes que nous pouvons identifier sans ambiguïté dans le cadre d'une estimation monoplan.

Dans un premier temps, nous rappelons que si la configuration est monolithique, il existe une ambiguïté de signe sur la partie paire de la phase [Blanc (2002)] ; l'estimation de tous les modes par le *phase retrieval* est alors impossible. Etant donné que la description de la phase est différente selon que la configuration pupillaire est monolithique ou non, nous détaillerons dans une deuxième partie comment sont définis les modes pairs et impairs en synthèse d'ouverture dans le cas d'une configuration centrosymétrique. Enfin, nous montrerons comment l'ambiguïté sur la partie paire peut au final être levée en se plaçant dans un plan de diversité.

B.1 Indétermination en monolithique

L'autocorrélation d'une fonction $\boldsymbol{f}$ quelconque est donnée par :

$$(f \otimes f)(\boldsymbol{x}) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{y}) f^*(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^2\boldsymbol{y} \tag{B.1}$$

Soit $\boldsymbol{f'}$ définie telle que $f'(\boldsymbol{y}) = f^*(-\boldsymbol{y})$ avec * désignant le complexe conjugué. Il apparaît alors que :

$$\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f'} \otimes \boldsymbol{f'} \tag{B.2}$$

Il n'est donc pas toujours possible d'estimer $\boldsymbol{f}$ sans ambiguïté à partir de la seule donnée de l'autocorrélation.

Examinons le cas d'un instrument dont la configuration pupillaire est monolithique. Soit $\boldsymbol{\psi}_p$ et $\boldsymbol{\psi}_i$ les parties paires et impaires de la phase pupillaire $\boldsymbol{\psi}$; La transmission complexe $\boldsymbol{p}$ de la pupille (supposée ici circulaire) s'exprime alors comme :

$$p(\boldsymbol{x}) = \Pi(\boldsymbol{x}) \exp j[\psi(\boldsymbol{x})] = \Pi(\boldsymbol{x}) \exp j[\psi_p(\boldsymbol{x}) + \psi_i(\boldsymbol{x})] \tag{B.3}$$

Nous définissons alors l'amplitude $\boldsymbol{p'}$ suivante :

$$p'(\boldsymbol{x}) = p^*(-\boldsymbol{x}) = \Pi^*(-\boldsymbol{x}) \exp[j\psi_p(\boldsymbol{x}) - j\psi_i(\boldsymbol{x})]^* \tag{B.4}$$

Nous rappelons que $\boldsymbol{\Pi}$ caractérise ici la fonction disque unitaire. Comme le module de $p'(\boldsymbol{x})$ est par nature réel, $\Pi(\boldsymbol{x})$ est également réel et $\Pi^*(\boldsymbol{x}) = \Pi(\boldsymbol{x})$. De plus, $\Pi(-\boldsymbol{x}) = \Pi(\boldsymbol{x})$ par définition. Pour une configuration centrosymétrique (comme illustrée Fig. B.1), nous avons donc :

$$p'(\boldsymbol{x}) = \Pi(\boldsymbol{x}) \exp j[-\psi_p(\boldsymbol{x}) + \psi_i(\boldsymbol{x})] \tag{B.5}$$

En utilisant la propriété Eq. (B.2) de l'autocorrélation, il apparaît que :

$$\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p'} \otimes \boldsymbol{p'} \tag{B.6}$$

Les phases $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_p + \boldsymbol{\psi}_i$ et $\boldsymbol{\psi'} = -\boldsymbol{\psi}_p + \boldsymbol{\psi}_i$ produisent la même autocorrélation, et donc la même fonction de transfert. Il est donc impossible de distinguer les deux jeux d'aberrations sans ambiguïté de signe lorsque $\boldsymbol{\psi}_p \neq 0$.

Considérons maintenant une pupille monolithique circulaire de rayon $\mathcal{R}$. La phase est alors décomposée sur la base des polynômes de Zernike $\boldsymbol{Z}_k$ avec une amplitude associée a_{kn}. Cette base est telle que :

$$Z_k\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\mathcal{R}}\right) = \Gamma_l^m\left(\frac{\rho}{\mathcal{R}}\right)\Theta_l^m(\varphi) \quad \text{avec} \quad \Theta_l^m(\varphi) = \sqrt{2(n+1)}\left[\begin{array}{c}\cos\\ \sin\end{array}\right]\left[m\varphi\left(\frac{r}{\mathcal{R}}\right)\right] \tag{B.7}$$

D'après la sous-section 1.2.3 page 22, la fonction Γ_l^m est une fonction paire ; la parité de $\boldsymbol{Z}_k$ dépend donc de celle de $\Theta_l^m(\varphi)$. Or, l et m sont de même parité et $m\varphi(-\frac{\boldsymbol{r}}{\mathcal{R}}) = m\varphi(\frac{\boldsymbol{r}}{\mathcal{R}}) + m\pi$, ce qui implique que $\boldsymbol{Z}_k$ est pair lorsque l, m sont pairs et réciproquement. Par conséquent, avec une seule image, il y a indétermination de signe sur les modes de Zernike globaux d'ordre radial pair (piston, défocalisation, etc.) ; les cœfficients $[a_{k,\text{pair}}; a_{k,\text{impair}}]$ et $[-a_{k,\text{pair}}; a_{k,\text{impair}}]$ donnent donc la même fonction de transfert.

B.2 Synthèse d'ouverture et centrosymétrie

Après avoir identifié l'ambiguïté de signe qui existe sur les modes pairs d'un monolithique, nous allons déterminer comment se traduit cette indétermination dans le cadre d'une configuration multi-pupille centrosymétrique (illustrée Fig. B.1).

Une telle configuration implique qu'à chaque sous-pupille n placée à la position $\boldsymbol{u_n}$ correspond une pupille n' qui lui est symétrique par rapport à l'origine et placée en $\boldsymbol{u_{n'}} = -\boldsymbol{u_n}$, comme représenté Fig. B.2. Nous pouvons alors classer les pupilles de telle sorte que $\forall n \in [1, \ldots, N_T/2]$ est associée sa symétrique $n' \in [1, \ldots, N_T/2]$. Dans le cas où le nombre de pupilles est impair, alors il existe une pupille n_0 au centre de la configuration telle que $\boldsymbol{b} = \vec{0}$, et qui est par conséquent sa propre symétrique.

Pour un instrument à synthèse d'ouverture, les modes de Zernike globaux peuvent être décomposés dans la base des sous-pupilles. Rappelons que la décomposition d'un mode global d'ordre k sur la grande pupille se traduit par une somme de polynômes locaux d'ordre $\{0, \ldots, k\}$ sur les N_T sous-pupilles [Ragazzoni *et al.* (1999)].

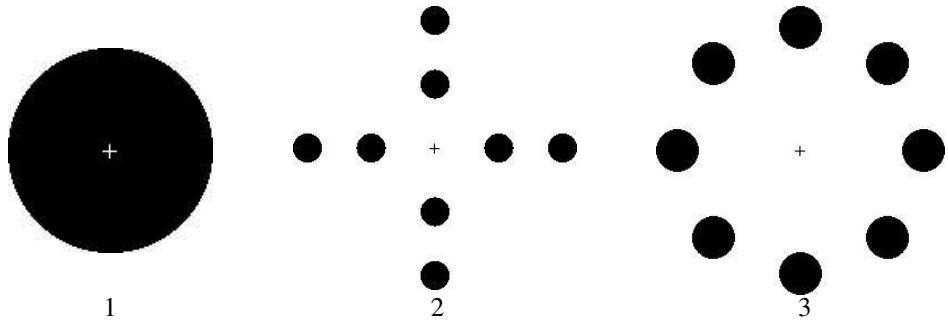


Fig. B.1 – Exemple de trois configurations centrosymétriques.

Le mode global $\boldsymbol{Z}_k$ est tel que :

$$Z_k(-\boldsymbol{b}) = \gamma_k Z_k(\boldsymbol{b}) \quad \text{avec :} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{u} \quad \text{et} \quad \gamma_k = \begin{cases} +1 & \text{si } \boldsymbol{Z}_k \text{ d'ordre radial pair,} \\ -1 & \text{si } \boldsymbol{Z}_k \text{ d'ordre radial impair.} \end{cases} \tag{B.8}$$

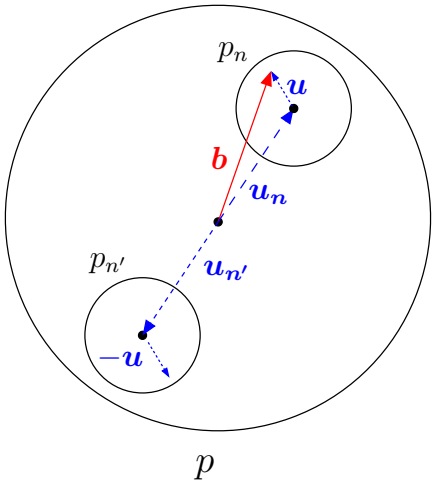


Fig. B.2 – Schéma d'une configuration centrosymétrique.

Nous avons vu à la section B.1 précédente qu'il y avait ambiguïté de signe sur la partie paire ψ_p de la phase. En configuration multipupille, ψ_p se décompose comme :

$$\psi_p(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{N_T} a_{kn} Z_k(\boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{u}) \qquad \text{et} \qquad \psi_p(-\boldsymbol{u}) = \sum_{n=1}^{N_T} a_{kn} Z_k(-\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u}) \tag{B.9}$$

En classant les pupilles, nous obtenons alors :

$$\psi_p(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[\sum_{n=1}^{N_T/2} a_{kn} z_k(\boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{u}) + \sum_{n'=1}^{N_T/2} a_{kn} z_k(\boldsymbol{u'_n} + \boldsymbol{u}) \Big] \tag{B.10}$$

$$\psi_p(-\boldsymbol{u}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[\sum_{n=1}^{N_T/2} a_{kn} z_k(-\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u}) + \sum_{n'=1}^{N_T/2} a_{kn} z_k(-\boldsymbol{u'_n} - \boldsymbol{u}) \Big] \tag{B.11}$$

Or, d'après l'Eq. (B.8), nous pouvons écrire que :

$$\sum_{n=1}^{N_T/2} a_{kn} z_k(-\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{u}) = \sum_{n'=1}^{N_T/2} \gamma_k a_{kn'} z_k(\boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{u}) \tag{B.12}$$

$$\text{et} \sum_{n'=1}^{N_T/2} a_{kn'} z_k(-\boldsymbol{u'_n} - \boldsymbol{u}) = \sum_{n=1}^{N_T/2} \gamma_k a_{kn} z_k(-\boldsymbol{u_n} + \boldsymbol{u}) \tag{B.13}$$

Ainsi, en identifiant les Eq. (B.10), (B.12) et (B.13), nous obtenons la relation $a_{kn} = \gamma_k a_{kn'}$. Par conséquent, nous constatons que :

- les cœfficients pairs locaux vérifient la relation $a_{kn'} = +a_{kn}$;
- les cœfficients impairs locaux vérifient quant à eux $a_{kn'} = -a_{kn}$.

Nous en déduisons donc que si un mode global pair est appliqué sur une configuration multipupille centrosymétrique, nous ne pourrons retrouver que les modes locaux impairs.

Regardons ce que les Eq. (B.12) et. (B.13) impliquent au niveau des modes différentiels. D'après ces deux équations, pour un Zernike de parité donné, le mode différentiel correspondant entre deux sous-pupilles est équivalent à un mode global de parité inverse. Ainsi, deux pistons identiques engendrent un mode global pair, mais deux pistons différents forment un mode global impair. Pour les basculements, c'est l'opposé qui se produit. Cette propriété est illustrée Tab. B.1 dans le cas d'une configuration de type Young. Dès lors, les configurations centrosymétriques permettent de retrouver les pistons différentiels sans ambiguïté de signe, mais pas les basculements, puisque ces derniers sont équivalents à un mode global pair.

Au final, nous en déduisons que les configurations centrosymétriques sont inadaptées pour le cophasage en plan focal de type *phase retrieval* d'un instrument à synthèse d'ouverture.

Nous allons cependant démontrer dans la section suivante que dans certains cas, cette ambiguïté peut être levée pour une observation monoplan de type SOO.

B.3 Levée de l'ambiguïté

Gonsalves [Gonsalves (1976)] a démontré que l'indétermination qui existe sur la partie paire de la phase pouvait être levée grâce à l'utilisation d'une deuxième image. Soit $\boldsymbol{\phi}_a$ la phase recherchée, $\boldsymbol{\phi}_d$ la phase de diversité introduite et $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi}_a + \boldsymbol{\phi}_d$ la phase résultante obtenue au $d^{\text{ième}}$ plan de diversité. La partie paire de $\boldsymbol{\psi}$ peut s'écrire, à cause de l'ambiguïté de signe inhérente, comme :

$$\boldsymbol{\psi}_p = \boldsymbol{\phi}_{p,a} + \boldsymbol{\phi}_{p,d} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{\psi}_p = -\boldsymbol{\phi}_{p,a} + \boldsymbol{\phi}_{p,d} \tag{B.14}$$

Puisque $\boldsymbol{\phi}_{p,d}$ est parfaitement connue, le signe de sa partie paire n'est pas sujette à caution. Nous rappelons que si la phase recherchée est nulle, alors le signe de $\boldsymbol{\psi}_p$ est bien entendu celui de la

Mode de Zernike	Piston *mode pair*	Basculement *mode impair*
Aberration globale	*est paire*	*est impaire*
Aberration différentielle	*est impaire*	*est paire*

Tab. B.1 – Parité des modes piston et basculement.

phase de diversité. Dans un cas général, les valeurs $\phi_{p,a} + \phi_{p,d}$ et $-\phi_{p,a} + \phi_{p,d}$ sont distinctes, à condition que le terme $\phi_{p,d}$ ne soit pas nul. Au final, l'introduction d'une aberration supplémentaire parfaitement connue et comprenant une partie paire permet donc de coder l'information sur la phase recherchée de manière différente. Ce principe, qui est l'essence même de la diversité de phase, rend possible l'estimation des aberrations de manière non ambiguë sur objet quelconque mais nécessite l'utilisation d'au moins deux plans. Comme la défocalisation est le mode pair global le plus simple à réaliser optiquement, c'est *de facto* le mode qui est couramment utilisé pour introduire une diversité.

Lorsque l'objet est connu, il devient possible de lever l'ambiguïté sur la partie paire de la phase avec un seul plan, à condition que la phase introduite soit bien choisie. Prenons l'exemple d'une configuration centrosymétrique à six sous-pupilles, comme illustrée Fig. B.3 (à gauche). Lorsque nous appliquons une phase incidente ϕ_a paire, ici une défocalisation globale, les images obtenues pour $+\phi_a$ (au centre) et $-\phi_a$ (à droite) sont identiques, comme attendu.

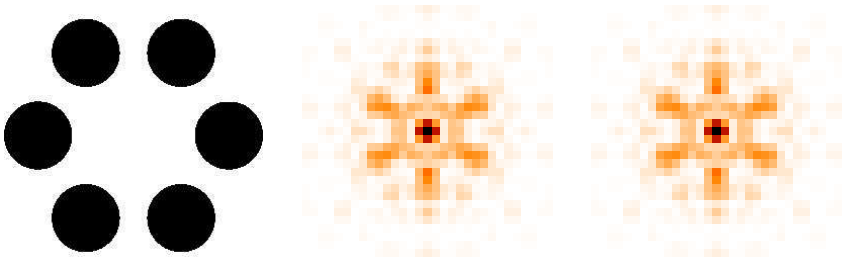
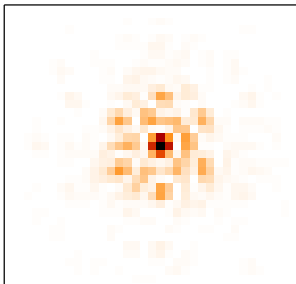
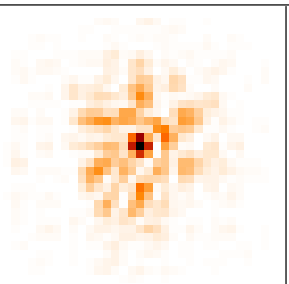
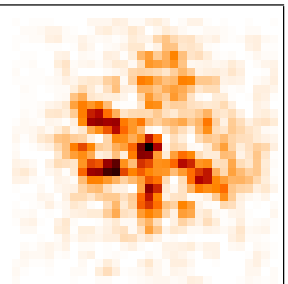
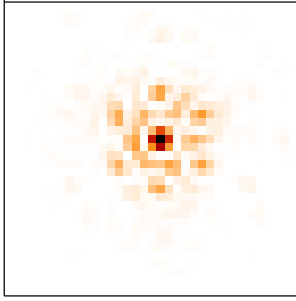
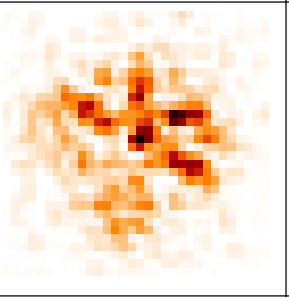
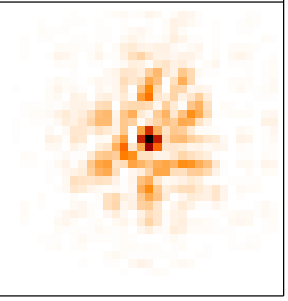


Fig. B.3 – Images d'un point source obtenues pour une configuration centrosymétrique à six sous-pupilles (à gauche) lorsqu'une phase incidente paire de 1,5 rad RMS est appliquée dans un sens (au centre) puis dans l'autre (à droite).

Cependant, lorsqu'une diversité ϕ_d est introduite, nous avons montré que les valeurs $\phi_{p,a} + \phi_{p,d}$ et $-\phi_{p,a} + \phi_{p,d}$ étaient distinctes. Si l'objet observé est un point source et si les aberrations à mesurer sont du même ordre de grandeur que l'amplitude de diversité, alors l'indétermination de signe

est supprimée, comme représenté Tab. B.2. Sur la configuration précédente à six sous-pupilles, une défocalisation globale ϕ_a est alternativement appliquée dans les deux sens ($+\phi_a$ ligne du haut, $-\phi_a$ ligne du bas), et ce en plan focal (colonne de gauche), puis dans un plan successivement défocalisé de $1{,}4$ rad (au centre) et de $-1{,}4$ rad (à droite). Nous constatons que la différence entre les images focales correspondantes est faible. En revanche, les images défocalisées sont nettement différentes et permettent donc d'estimer le signe de l'aberration introduite.

	Plan focal	Plan défocalisé $+\phi_d$	Plan défocalisé $-\phi_d$
Phase $+\phi_a$			
Phase $-\phi_a$			

Tab. B.2 – Images obtenues pour une phase incidente $+\phi_a$ (haut) et $-\phi_a$ (bas), et ce en plan focal (à gauche), puis dans un plan successivement défocalisé de $+\phi_d = 1{,}4$ rad RMS (au centre) et de $-\phi_d$ (à droite).

La phase de diversité peut ainsi être vue comme une porteuse permettant de s'affranchir des ambiguïtés de signe. Les avantages à n'utiliser qu'un seul plan sont multiples : tout d'abord, au niveau de la conception optique, puisque le capteur est plus simple à mettre en œuvre ; ensuite, l'utilisation de plusieurs plans dégrade sensiblement le rapport signal-à-bruit. L'utilisation d'un plan unique permet donc de limiter les pertes de flux.

Annexe C

Intégration de la fonction de transfert en plan extra-focal

Nous présentons dans cette annexe les calculs intermédiaires qui permettent d'obtenir en sous-section 2.3.2 page 48 l'expression des contributions de la phase de diversité et de la phase incidente au pic d'intercorrélation généré par les sous-pupilles n et n'. Nous utilisons les mêmes notations qu'en section 2.3 ; par conséquent, ces contributions seront respectivement notées $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}$.

C.1 Calculs préliminaires

Soit I_l l'expression suivante :

$$I_l = \int x^l \exp j(\mathrm{a}x + \mathrm{b})\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad l \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

La relation de récurrence de I_l nous donne, pour $l \geq 1$:

$$I_l = \frac{x^l}{j\mathrm{a}} \exp j(\mathrm{a}x + \mathrm{b}) - \frac{l}{j\mathrm{a}} I_{l-1} \tag{C.2}$$

Le calcul de I_0 étant simple, nous obtenons donc, pour les trois premiers éléments de cette série :

$$I_0 = \frac{1}{j\mathrm{a}} \exp j(\mathrm{a}x + \mathrm{b}) \tag{C.3}$$

$$I_1 = \frac{1 - j\mathrm{a}x}{\mathrm{a}^2} \exp j(\mathrm{a}x + \mathrm{b}) \tag{C.4}$$

$$I_2 = \frac{2j + 2\mathrm{a}x - j\mathrm{a}^2x^2}{\mathrm{a}^3} \exp j(\mathrm{a}x + \mathrm{b}) \tag{C.5}$$

C.2 Expression du pic d'intercorrélation non aberré $\mathcal{F}_{d,nn'}$

Tout d'abord, nous rappelons que d'après l'Eq. (2.23) page 47, le pic d'intercorrélation non aberré dépendant seulement des aberrations de diversité s'exprime comme :

$$\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) = \iint\limits_{\boldsymbol{v}\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \left\{ \Pi\Big(\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big)\Pi\Big(\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}\Big) \exp j\Big\{ \sum_{k=1}^{k_{\max}=4} \Big[d^{+}_{knn'}\mathcal{Z}^{-}_{k}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}) + d^{-}_{knn'}\mathcal{Z}^{+}_{j}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b}) \Big] \Big\} \right\} \mathrm{d}^2\boldsymbol{v} \tag{C.6}$$

En explicitant les pseudo-modes de phase $\mathcal{Z}^{+}_{k}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$, $\mathcal{Z}^{-}_{k}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b})$ définis en $\boldsymbol{b}$ (voir Tab. 2.2 page 49) et intégrés sur la zone de recouvrement $S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}$ entre les deux sous-pupilles n et n', nous obtenons :

$$\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) = \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \exp[j\rho\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)]\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \tag{C.7}$$

$$\text{avec :}\quad \mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi) = (2d^{-}_{2nn'} - 2d^{+}_{4nn'}\sqrt{3}\,b_x)\cos(\varphi+\theta_b) + (2d^{-}_{3nn'} - 2d^{+}_{4nn'}\sqrt{3}\,b_y)\sin(\varphi+\theta_b) \tag{C.8}$$

$$K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) = d^{-}_{1nn'} - d^{+}_{2nn'}b_x - d^{+}_{3nn'}b_y \tag{C.9}$$

Il s'agit donc maintenant d'expliciter l'intégrale de $\mathcal{J}$ sur le domaine $S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}$ afin de connaître l'allure de cette fonction. En nous référant à la définition de I_l Eq. (C.1), nous pouvons remarquer que l'intégrale que nous souhaitons caractériser est de la forme $\iint \exp j[\mathrm{a}(\varphi)\rho]\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$, et que son intégration sur ρ est de type I_1. ρ étant intégré de 0 à P, nous posons[1] :

$$y = \mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)P(b,\varphi) \tag{C.10}$$

Nous obtenons alors :

$$\iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \exp[j\rho\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)]\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi}\Big\{\frac{P^2(b,\varphi)}{2}G[y(\varphi)]\Big\}\,\mathrm{d}\varphi \tag{C.11}$$

$$\text{avec}\quad G(y) = 2\frac{(1-jy)\exp(jy)-1}{y^2} \tag{C.12}$$

Nous pouvons ensuite effectuer un développement limité pour les faibles valeurs de y. En pratique, pour éviter que le calcul numérique de G (illustré Fig. C.1) ne diverge, nous introduisons une constante ε telle que :

$$G(y) \simeq \frac{2(1-jy)\exp(jy)-2}{y^2+\varepsilon} + \varepsilon \quad \text{avec :}\quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } y < 10^{-2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{C.13}$$

Après avoir exprimé l'intégration sur ρ de la fonction $\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)$, regardons comment s'exprime l'intégrale sur φ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\varphi} P^2G[y(\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{2}\int_{\varphi} 2P^2\frac{\exp(jy)(1-jy)-1}{y^2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi} 2P^2\frac{(\cos y + y\sin y - 1) + j(\sin y - y\cos y)}{y^2}\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{C.14}$$

[1] Nous rappelons que, d'après le § 2.3.1.3 page 47, P est tel que $P(b,\varphi) = -\frac{1}{2}b|\cos\varphi| + \sqrt{1-\frac{b^2}{4}\sin^2\varphi}$

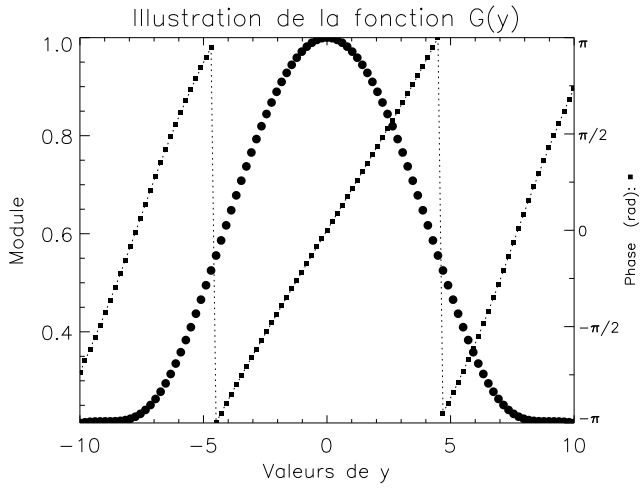


Fig. C.1 – Module et phase de la fonction $G(y)$.

Pour φ variant de 0 à 2π, la fonction $\sin y - y\cos y$ est impaire et son intégration est donc nulle ; l'intégration de la partie réelle de l'Eq. (C.14), dont le résultat est noté $\boldsymbol{J}$, se fait ensuite de manière numérique. Au final, nous pouvons écrire, avec $\Re$ désignant l'opérateur partie réelle, que :

$$\mathcal{F}_{d,nn'}(\boldsymbol{b}) = J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})\exp j[K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})] \tag{C.15}$$

$$\text{avec}\quad J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) = \Re\Big(\int_{\varphi}\Big\{\frac{P^2(b,\varphi)}{2}G[y(\varphi)]\Big\}\,\mathrm{d}\varphi\Big) \tag{C.16}$$

$$= \int_{\varphi}\Big\{\frac{\cos[\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)P(b,\varphi)]}{\mathcal{J}^2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)} \tag{C.17}$$

$$+\frac{\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)P(b,\varphi)\sin[\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)P(b,\varphi)]-1}{\mathcal{J}^2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)}\Big\}\,\mathrm{d}\varphi \quad \in \mathbb{R}$$

$\boldsymbol{J}$, dont l'expression décrite Eq. (C.17) est exacte, n'est autre que le module du pic d'intercorrélation à phase incidente nulle. Nous avons donc exprimé dans cette section $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$ de manière simple mais néanmoins exacte.

C.3 Expression du pic d'intercorrélation aberré $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$

En se plaçant au centre du domaine de recouvrement $S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}$, le terme $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$, qui représente la moyenne des faibles aberrations sur un domaine non pas uniforme mais pondéré par une fonction dépendant de la diversité, s'écrit, d'après le Tab. 2.2 page 49 et l'Eq. (2.20) page 46, comme :

$$\mathfrak{F}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \exp[jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'})]\ \times \tag{C.18}$$

$$\frac{\iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}}\exp j\Big[\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)\rho + 2a^{-}_{2nn'}\rho\cos(\varphi+\theta_b) + 2a^{-}_{3nn'}\rho\sin(\varphi+\theta_b)\Big]\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}}\exp j[\rho\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)]\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}$$

$$\text{avec}\quad K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'}) = a^{-}_{1nn'} - a^{+}_{2nn'}b_x - a^{+}_{3nn'}b_y \tag{C.19}$$

Tout comme l'expression de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{d,nn'}$ Eq. (C.7), le numérateur du terme $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}$ est de la forme $\iint \exp j[\mathrm{a}(\varphi)\rho]\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$ et présente le même type de dépendance en fonction de $\cos(\varphi+\theta_b)$ et de $\sin(\varphi+\theta_b)$. Or, nous avons démontré à la section précédente que l'intégration d'une telle expression conduisait à une forme purement réelle. Nous en déduisons donc que le numérateur (noté $\boldsymbol{L}$) de l'Eq. (C.18) est également réel ; au final, nous obtenons donc :

$$\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})}\exp j[K(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'})] \quad \boldsymbol{L},\boldsymbol{J}\in\mathbb{R} \tag{C.20}$$

$$\text{avec :}\quad L(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\boldsymbol{a}_{nn'}) = \iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \exp j\Big[\rho\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi) + 2a^-_{2nn'}\rho\cos(\varphi+\theta_b) + 2a^-_{3nn'}\rho\sin(\varphi+\theta_b)\Big]\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \tag{C.21}$$

$\boldsymbol{L}$ dépend donc de la diversité ainsi que des basculements recherchés, mais pas des pistons incidents.

C.4 Linéarisation de $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}$

Dans le cas où les aberrations $\boldsymbol{a}$ recherchées sont faibles, nous pouvons linéariser l'expression de $\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}$ et plus particulièrement les termes $\exp(j\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{L}$ respectivement définis Eq. (C.19) et (C.21) :

$$\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{a,d,nn'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \simeq 1 + jK(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{nn'}) + \frac{M(a^-_{2nn'},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})} + \frac{N(a^-_{3nn'},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})}{J(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'})} \tag{C.22}$$

Avec :

$$M(a^-_{2nn'},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) = j\,2a^-_{2nn'}\iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \cos(\varphi+\theta_b)\rho^2\exp[j\rho\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)]\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \tag{C.23}$$

$$N(a^-_{3nn'},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'}) = j\,2a^-_{3nn'}\iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \sin(\varphi+\theta_b)\rho^2\exp[j\rho\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)]\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \tag{C.24}$$

Notons que puisque $\boldsymbol{L}$ est réel, sa forme linéarisée, et *a fortiori* celle de $\boldsymbol{M}$ et de $\boldsymbol{N}$, sont également réelles.

$\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont deux fonctions de la forme $\iint \exp j[\mathrm{a}(\varphi)\rho]\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$. Leur intégration sur ρ étant de type I_2, nous obtenons, pour $0\le\rho\le P$ et en posant $y=\mathcal{J}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)P(b,\varphi)$:

$$\iint_{\rho,\varphi\in S'_{\emptyset\boldsymbol{b}}} \exp j[\rho\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}_{nn'},\varphi)]\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \int_\varphi \Big\{P^3(b,\varphi)H[y(\varphi)]\Big\}\,\mathrm{d}\varphi \tag{C.25}$$

$$\text{avec :}\quad H(y) = 2\frac{(\frac{-jy^2}{2}+y+j)\exp(jy)-j}{y^3} \tag{C.26}$$

Nous effectuons un développement limité pour les faibles valeurs de y ; la fonction correspondante, que nous avons tracée sur le graphe de la Fig. C.2, s'exprime alors comme :

$$H(y) \simeq \frac{2\exp(jy)[\frac{-jy^2}{2}+y+j]-2j}{y^3+\varepsilon} + \varepsilon\frac{1}{3} + \varepsilon\frac{jy}{4} - \varepsilon\frac{y^2}{12} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } y < 5.10^{-2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{C.27}$$

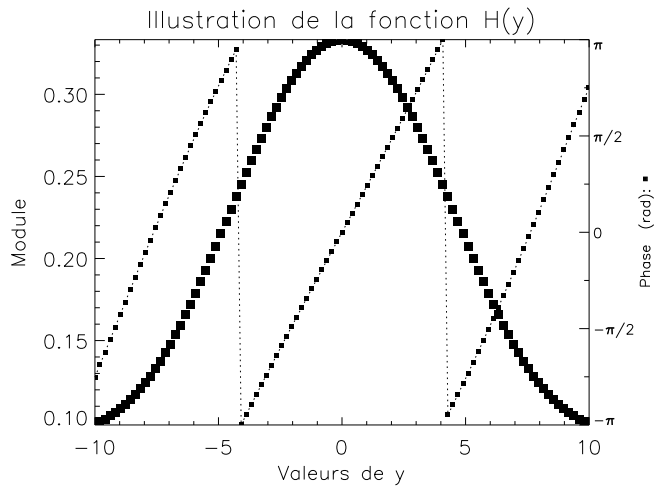


Fig. C.2 – Module et phase de la fonction $H(y)$.

$\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont donc de la forme :

$$M(a^-_{2nn'}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}_{nn'}) = 2a^-_{2nn'} \int_\varphi j \cos(\varphi + \theta_b) P^3(b, \varphi) H[y(\varphi)] \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.28}$$

$$N(a^-_{2nn'}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}_{nn'}) = 2a^-_{3nn'} \int_\varphi j \sin(\varphi + \theta_b) P^3(b, \varphi) H[y(\varphi)] \, \mathrm{d}\varphi \tag{C.29}$$

L'intégration sur φ peut se faire ensuite de manière numérique.

Nous avons vu dans cette annexe qu'il est possible d'exprimer simplement l'intercorrélation de la pupille n avec la pupille n', et ce notamment grâce à la linéarisation du terme $\mathfrak{F}_{a,d,nn'}$, qui représente la moyenne des faibles aberrations sur un domaine pondéré par un terme dépendant de la diversité.

Annexe D

Grandeurs statistiques utilisées

Cette annexe rappelle la définition des différentes grandeurs statistiques utilisées lors de la caractérisation des estimateurs. Soit $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ les N réalisations indépendantes associées à la variable aléatoire x.

Tout d'abord, nous définissons la moyenne arithmétique $\bar{x}$ comme :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \tag{D.1}$$

Le biais Δ associé à l'estimateur $\widehat{x}$ représente l'écart entre la moyenne estimée et la valeur vraie x_{vrai} :

$$\Delta = \bar{x} - x_{\text{vrai}} \tag{D.2}$$

La variance (appelée aussi moyenne quadratique) informe sur la dispersion des valeurs estimées autour de la valeur moyenne ; sa racine carrée, notée σ, est appelée écart-type :

$$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} \tag{D.3}$$

L'écart Quadratique Moyen (EQM) est défini comme étant la moyenne du carré de l'erreur d'estimation ; il s'agit donc de la dispersion des valeurs estimées autour de la valeur vraie :

$$\text{EQM} = \Delta^2 + \sigma^2 = \overline{(x - x_{\text{vrai}})}^2 \tag{D.4}$$

L'écart quadratique moyen minimal n'est autre que la variance de x.

Par la suite, nous appellerons couramment *erreur* la racine carrée de l'écart quadratique moyen. Comme il est plus parlant d'utiliser des grandeurs s'exprimant en radians plutôt qu'en radians-carrés, nous utiliserons de préférence l'écart-type et l'erreur plutôt que la variance et l'EQM.

Annexe E

Correspondance entre magnitude et nombre de photo-électrons détectés

Soit m la magnitude apparente de l'étoile observée par un instrument à synthèse d'ouverture optique composé de N_T sous-pupilles présentant chacune une surface collectrice S_{tel}. Le nombre total N_{bph} de photo-électrons détectés au foyer du système est alors donné par :

$$N_{\text{bph}} = \frac{N_T\, e_0\, 10^{-\frac{m}{2,5}}\, S_{\text{tel}}\, \Delta\lambda\, \nu\, \tau}{\mathfrak{h}c \big/ \lambda_0} \tag{E.1}$$

où e_0 est l'éclairement monochromatique de référence pour la bande d'observation sélectionnée de largeur $\Delta\lambda$ et de longueur d'onde centrale λ_0 ; ν représente la transmission de l'instrument (détecteur inclus), τ le temps d'intégration, c la vitesse de la lumière et $\mathfrak{h}$ la constante de Planck.

A partir de l'Eq. (E.1) et des paramètres instrumentaux définis par le système, nous pouvons en déduire la correspondance entre magnitude apparente et nombre de photo-électrons détectés. A titre d'exemple, nous avons listé Tab. E.1 la valeur des paramètres utilisés dans le cas de l'instrument DARWIN, sachant que le cophasage est effectué dans le visible.

Paramètre	Notation	Valeur
Nombre de télescopes	N_T	3
Diamètre des télescopes	$\mathcal{D}_{\text{tel}}$	1,5 m
Eclairement de référence	e_0	$3{,}92\,.10^{-8}$ W.m^{-2}.µm^{-1}
Largeur de la bande V	$\Delta\lambda$	0,089 µm
Longueur d'onde centrale	λ_0	550.10^{-9} m
Transmission globale de l'instrument	ν	0,25
Temps d'intégration	τ	0,1 s
Vitesse de la lumière	c	3.10^{8} m.s^{-1}
Constante de Planck	$\mathfrak{h}$	$6{,}62\,.10^{-34}$ J.s

Tab. E.1 – Principales caractéristiques de l'instrument DARWIN.

La correspondance magnitude/photométrie est listée Tab. E.2 pour la bande V. Toutefois, ces résultats sont à considérer avec circonspection. En effet, les magnitudes sont calculées sur toute la largeur de la bande visible, alors que les validations effectuées sur DWARF ont été réalisées avec une

longueur d'onde centrale de 650 nm et des filtres interférentiels de largeur maximale $\Delta\lambda = 80$ nm. Par conséquent, ce bilan nous renseigne seulement sur l'ordre de grandeur entre magnitude et flux, et ne doit pas être interprété *stricto sensu*.

Magnitude (en bande V)	8	9	10	11	12	13
Nombre de photo-électrons	8.10^5	$3{,}2\,.10^5$	$1{,}2\,.10^5$	$5{,}1\,.10^4$	2.10^4	$8{,}1\,.10^3$

Tab. E.2 – Correspondance entre magnitude et nombre de photo-électrons détectés pour une observation effectuée en bande V par un instrument de type DARWIN.

Intéressons-nous maintenant à un instrument de type VLTI fonctionnant dans le proche infrarouge. En recombinant en bande K les quatre télescopes principaux présentant un diamètre utile de 8 m, nous obtenons la correspondance telle que listée Tab. E.3.

Magnitude (en bande K)	8	9	10	11	12	13
Nombre de photo-électrons	$5{,}5\,.10^6$	$2{,}2\,.10^6$	$8{,}7\,.10^5$	$3{,}4\,.10^5$	$1{,}4\,.10^5$	$5{,}6\,.10^4$

Tab. E.3 – Correspondance entre magnitude et nombre de photo-électrons détectés pour une observation effectuée en bande K ($e_0 = 3{,}9\,.10^{-10}$ W.m^{-2}.µm^{-1}, $\lambda_0 = 2{,}2\,.10^{-6}$ m, $\Delta\lambda = 0{,}4$ µm) par un instrument de type VLTI.

Annexe F

Application des estimateurs FUSCHIA à des données astronomiques réelles

La mise en œuvre expérimentale des algorithmes de type FUSCHIA sur le banc BRISE a non seulement permis de valider leur utilisation pour le cophasage d'instruments multipupilles, mais aussi d'identifier certains paramètres pouvant s'avérer critiques pour l'optimisation des performances (voir chapitre 6 page 172). Cependant, si nous voulons être en mesure de dimensionner finement des systèmes dédiés à l'observation astronomique, il est indispensable de caractériser le comportement de nos estimateurs en présence de perturbations dues au milieu environnant. En effet, dans le cadre d'instruments réels au sol, il intervient plusieurs composantes dont les effets n'ont pour l'instant pas été pris en compte, comme la turbulence atmosphérique ou les vibrations du système.

Nous nous sommes donc intéressés à l'analyse de données réelles et à la mise en place de la chaine de traitement appropriée. Nous présentons dans cette annexe l'implémentation d'un démonstrateur dans le cadre de la caractérisation de sites en interférométrie. La première section est dédiée à la présentation du contexte ; nous y exposons notamment les avantages d'utiliser la reconstruction en plan focal pour déterminer les paramètres liés à la turbulence atmosphérique. Nous détaillons ensuite dans la deuxième section les caractéristiques de notre démonstrateur. Enfin, nous terminons par l'acquisition d'images et le traitement des premières données obtenues lors d'une campagne de mesure effectuée à l'Observatoire de Cerro Tololo en 2006.

F.1 La caractérisation de sites astronomiques en interférométrie

L'atmosphère terrestre est constituée de masses d'air de température variable qui sont constamment en mouvement. Or, la propagation d'ondes optiques à travers le milieu atmosphérique est affectée par cette turbulence qui conduit à une dégradation des images obtenues au foyer des télescopes terrestres. L'optique adaptative permet, grâce à un miroir déformable, de suffisamment corriger les variations du front d'onde pour que les plus grands télescopes actuels (dont les diamètres sont compris entre 8 et 10 mètres) soient limités par la seule diffraction.

En principe, l'optique adaptative peut également compenser les fluctuations des différences de phase entre les pupilles d'entrée d'un interféromètre. Mais cette correction est aujourd'hui tout juste rendue possible vu que les vitesses de compensation sont encore insuffisantes. En règle générale, les temps d'exposition utilisés lors d'observations interférométriques doivent être suffisamment courts pour immobiliser les mouvements de la turbulence, ce qui conduit à une perte considérable en sensi-

bilité. Si nous pouvions découvrir des sites où la turbulence est plus lente, les systèmes de correction par optique adaptative seraient alors assez rapides pour suivre les fluctuations et la sensibilité des interféromètres en serait considérablement améliorée.

La turbulence atmosphérique est caractérisée par plusieurs paramètres dont l'un des éléments essentiels est le temps de cohérence τ_0. Il est défini de telle manière qu'en un lieu donné, au bout de τ_0, la variation des fluctuations temporelles de phase dues à la turbulence soit égale à 1 rad^2. Ce paramètre permet de déterminer la sensibilité des interféromètres ; il s'avère cependant difficile à évaluer car dépendant de la vitesse de la turbulence. C'est pourquoi les campagnes actuelles de sélection de sites s'appuient principalement sur la mesure du paramètre de Fried[1].

Deux méthodes nouvelles pourraient *a priori* être utilisées dans le cadre de la mesure du temps de cohérence :

- la méthode FADE, développée par Kellerer [Kellerer & Tokovinin (2007)] qui consiste à défocaliser l'image d'une étoile et d'en faire un anneau diffus grâce à une obscuration centrale. Une lentille avec une aberration sphérique est ensuite placée sur le trajet du faisceau pour transformer ce premier anneau en un anneau fin. Les effets de la turbulence atmosphérique se traduisent alors au premier ordre par des variations temporelles du rayon de l'anneau dont la vitesse et l'amplitude sont reliées au temps de cohérence dans le cadre d'un modèle de Kolmogorov de la turbulence ;
- notre propre méthode d'estimation FUSCHIA qui, de part l'estimation des aberrations différentielles, vise à remonter à la constante de temps du piston c.-à.-d. à la phase moyenne sur la pupille. Ce procédé a l'avantage de ne pas nécessiter d'implantation optique particulière puisqu'une simple caméra d'imagerie installée au voisinage du plan focal suffit à l'acquisition des données. En outre, il permet d'estimer les différentes valeurs des cœfficients des polynômes de Zernike et donc de vérifier la validité du modèle de Kolmogorov.

Ces deux méthodes ont été expérimentées lors d'une campagne de mesure effectuée à l'observatoire de Cerro Tololo au Chili, du 29 Octobre au 2 Novembre 2006. La section suivante décrit le démonstrateur que nous avons conçu dans le cadre de cette campagne d'observation.

F.2 Le démonstrateur Pistonscope

Afin de pouvoir tester simultanément les méthodes FADE et FUSCHIA, nous avons conçu le démonstrateur Pistonscope à partir des éléments d'acquisition définis pour FADE. Il s'agit :

- d'un télescope Celestron CGE de 356 mm de diamètre, comportant une obscuration centrale de $0,321$ soit $114,3$ mm et de focale 3910 mm ;
- d'une caméra scientifique à lecture rapide, modèle Proscilica GE680 dont les principales caractéristiques sont présentées Tab. F.1 et Fig. F.1.

Choix des filtres

Etant donné que nos algorithmes d'estimation sont monochromatiques, il est impératif de réduire la largeur spectrale du domaine d'acquisition ce qui équivaut à limiter le nombre de photons utilisables. Toute la difficulté est donc de trouver un compromis entre les effets polychromatiques induits par

[1] Ce paramètre noté r_0 rend compte de la force totale de la turbulence atmosphérique rencontrée par un front d'onde à la traversée de différentes couches dans une direction d'observation donnée. Il est équivalent au diamètre d'un miroir pour lequel les pertes en résolution dues à la diffraction et à la turbulence sont tout juste égales.

Résolution	640 × 680 pixels
Taille pixel	7,4 × 7,4 µm
RON	14 phe$^-$
Gain	0 à 24 dB
Temps d'exposition	10^{-5} à 60 secondes

Tab. F.1 – Principales caractéristiques de la caméra Prosilica GE680.

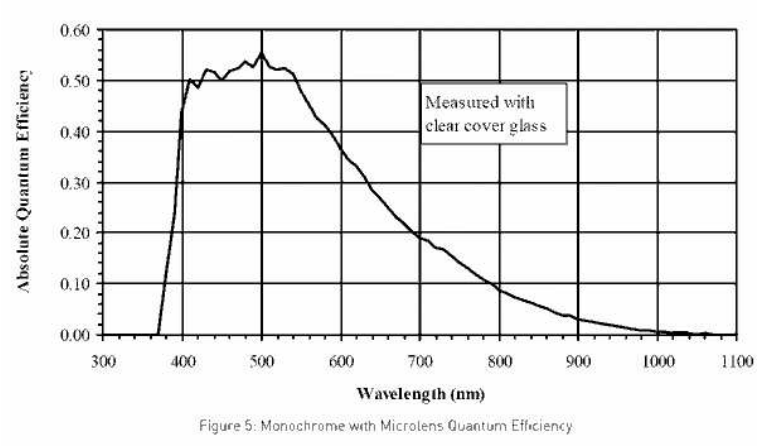


Fig. F.1 – Réponse spectrale de la caméra.

la largeur de la bande spectrale et la précision d'estimation voulue qui est directement liée au flux disponible. Or, ce dernier paramètre s'avère critique puisque les temps d'acquisition doivent nécessairement être très courts (inférieurs à la milliseconde) pour figer la turbulence.

Le filtre qui a été sélectionné pour les observations de Cerro Tololo est un filtre bleu clair centré sur 471 nm, présentant 80 % de transmission en moyenne et de largeur 139 mm soit $\Delta\lambda/\lambda = 1/3{,}5$. Or, d'après les validations expérimentales effectuées ultérieurement en 2007 (voir chapitre 6 page 172), nous avons montré que les pistons et basculements sont retrouvés avec une précision de $\lambda/60$ nm RMS pour un filtre de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/12$ et surestimés de 20 % avec un filtre de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/8$. Néanmoins dans ce dernier cas, l'estimation reste possible à condition d'appliquer un gain correctif. Etant données les limitations dues à la largeur du filtre, une deuxième campagne d'observation a été prévue pour fin 2007. Dans ce cadre, nous avons choisi de privilégier un filtre dont la largeur est telle que $1/12 \leq \Delta\lambda/\lambda \leq 1/8$ et dont la transmission est la plus élevée possible. Le filtre sélectionné est un filtre quasi-rectangulaire de largeur à mi-hauteur 50 nm, centré sur 524 nm et présentant 85 % de transmission en moyenne.

Définition des masques pupillaires

La deuxième étape de la conception du démonstrateur consiste à sélectionner les configurations pupillaires qui seront appliquées lors des mesures. Ce choix est effectué en fonction :

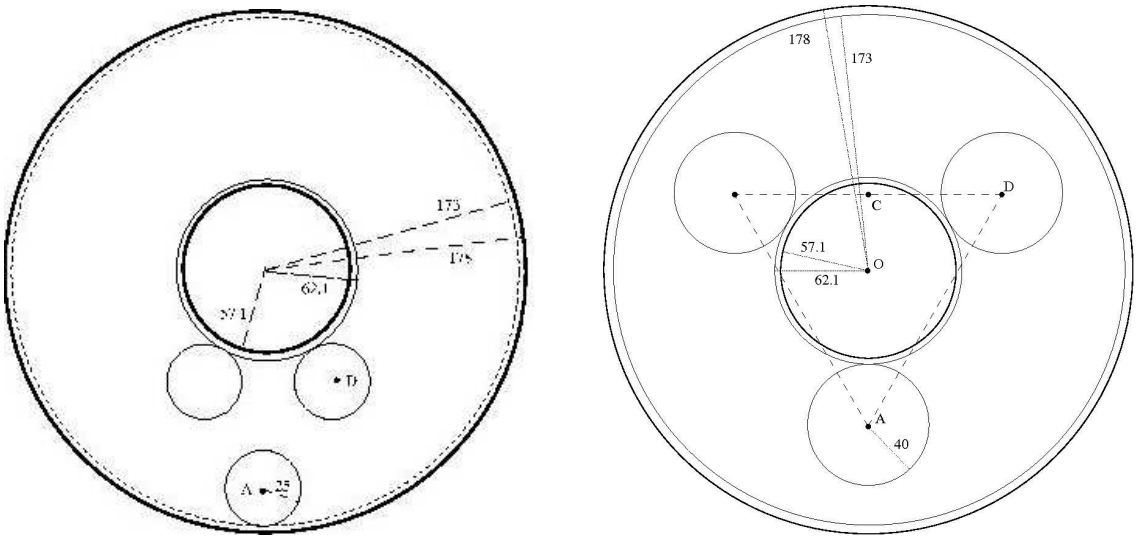
- du *seeing* du site, défini par λ/r_0. En pratique, cette valeur va conditionner le diamètre des sous-pupilles ;
- du facteur d'échantillonnage s voulu. Idéalement, ce facteur, qui est défini au foyer de l'ins-

trument comme étant la taille en pixel du plus petit élément résolu par la pupille pleine (voir Eq. (4.1) page 69), doit respecter le critère de Shannon-Nyquist ($s \geq 2$) ;
– du niveau de photométrie souhaité, qui doit être le plus élevé possible afin d'obtenir la meilleure résolution d'estimation.

Ces trois critères nous ont amenés à sélectionner deux configurations. La première, illustrée Fig. F.2 gauche et que nous nommons M1, est décentrée par rapport à l'axe optique du télescope et présente un diamètre de sous-pupille de 50 mm. Pour un r_0 équivalent et une longueur d'onde centrale λ de 471 nm (qui est celle du filtre bleu clair), la valeur de *seeing* associée[2] est de 1,9 arcsec. Le diamètre de la pupille pleine équivalente étant de 132 mm, nous en déduisons un facteur d'échantillonnage s égal à 1,88.

La deuxième configuration notée M2 et représentée Fig. F.2 droite est constituée de trois sous-pupilles de diamètre 80 mm placées de part et d'autre de l'obscuration centrale du télescope. La base de la pupille pleine étant de 257 mm, nous en déduisons un *seeing* équivalent de 1,2 arcsec et un facteur d'échantillonnage de 0,9. L'image se trouvant fortement sous-échantillonnée, nous décidons d'utiliser cette configuration avec une lentille de Barlow[3] X3.

En pratique, ces deux configurations seront simulées à l'aide d'un masque en acier fixé au niveau de la pupille d'entrée du télescope.



Tab. F.2 – Configurations pour un diamètre de sous-pupille égal à 50 mm (M1, à gauche) et 80 mm (M2, à droite).

Nous avons également effectué un bilan photométrique pour ces deux configurations. Sachant que la transmission de l'ensemble filtre + caméra est de 30 % en moyenne pour le filtre bleu clair, nous estimons à 15 % la transmission globale de l'instrument. Le nombre de photo-électrons N_{bph} détectés par la caméra est calculé pour une étoile de magnitude[4] 0. Sachant que la relation entre magnitude et

[2]Nous rappelons que 1 arcsec $= 5\mu$rad.

[3]Une lentille de Barlow (du nom de son inventeur Peter Barlow) est une lentille divergente permettant de multiplier artificiellement la distance focale d'un instrument.

[4]La magnitude m, qui permet de mesurer la luminosité d'un objet céleste, s'exprime comme :

$$m = -2{,}5 \log f + \text{Cste} \tag{F.1}$$

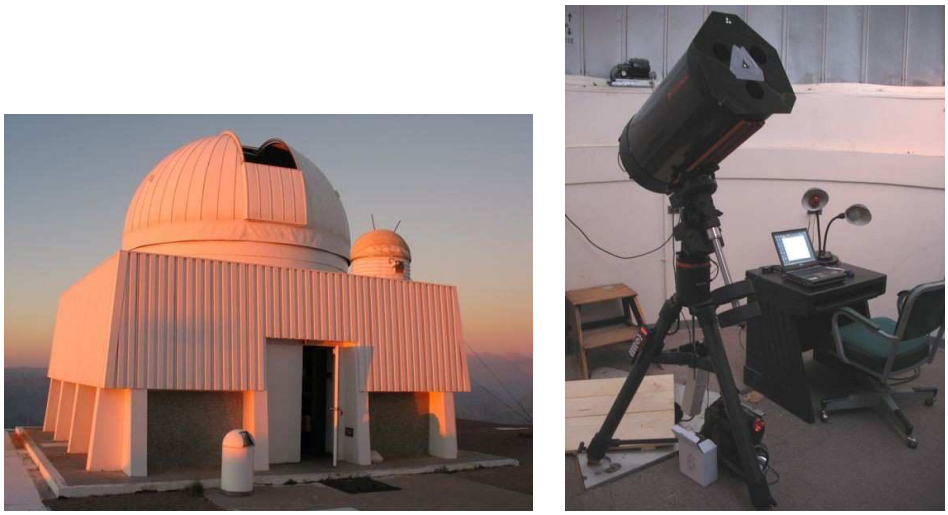
nombre de photo-électrons est décrite en annexe E page 203 et que les principales caractéristiques du démonstrateur sont listées Tab. F.3, nous obtenons des niveaux de photométrie de référence tels que $N_{\text{bph}} = 1{,}30.10^7$ par seconde pour la configuration M1 et $3{,}33.10^7$ pour la configuration M2.

Paramètre	Valeur
Nombre de télescopes	3
Eclairement de référence	$6{,}81\,.10^{-8}$ W.m^{-2}.µm^{-1}
Surface collectrice M1	$1{,}96.10^{-3}$ m^2
Surface collectrice M2	$5{,}01.10^{-3}$ m^2
Largeur de la bande B	0,098 µm
Longueur d'onde centrale	440.10^{-9} m
Transmission globale de l'instrument	0,15
Temps d'intégration	1 s
Vitesse de la lumière	3.10^8 m.s^{-1}
Constante de Planck	$6{,}62\,.10^{-34}$ J.s

Tab. F.3 – Principales caractéristiques du démonstrateur.

F.3 Observation de l'étoile Sirius sur le site de Cerro Tololo

Le démonstrateur Pistonscope est testé à partir de données acquises lors de la campagne d'observation menée par Kellerer et Coudé Du Foresto sur le site de Cerro Tololo en octobre 2006 (voir Fig. F.4). L'étoile pointée est l'étoile Sirius de magnitude apparente $-1{,}44$. Pour chaque masque, des séries de 200 à 3000 images ont été réalisées avec un temps de pause moyen de 1 milliseconde. De plus, entre chaque série de données, une acquisition du fond du ciel a été effectuée.



Tab. F.4 – Illustration de l'expérience Pistonscope à l'observatoire de Cerro Tololo.

où f est le flux reçu dans la pupille (en W/m^2).

Avant d'estimer les aberrations présentes sur chaque sous-pupille, il est nécessaire de pré-traiter les données. Cette opération comporte :

- l'estimation du bruit de détecteur et du bruit du fond du ciel ;
- la correction du fond du ciel et du *flat* par la caméra d'imagerie ;
- la correction des pixels morts ou aberrants par l'application d'un filtre médian ;
- la conversion de l'image en photo-électrons, sachant que le facteur de conversion de la caméra est de $2{,}86$ phoe$^-$/ADU et que le gain est de $10^{X/10}$ pour une amplification de X dB.

Une fois les données nettoyées, nous pouvons réduire chaque série de mesure à l'aide de l'estimateur FUSCHIA_1 et de l'algorithme itératif correspondant. La configuration M2 étant décalée par rapport à l'axe optique du télescope, nous veillons à recentrer la pupille numérique correspondante pour ne pas introduire de basculement global supplémentaire.

Lors de la réduction des données, nous nous sommes aperçus que les résultats obtenus par les deux algorithmes ne concordaient absolument pas. Or, les validations expérimentales menées ultérieurement sur le banc BRISE ont montré qu'un filtre de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/8$ induisait une erreur d'estimation de près de 20 %. Etant donné que les images ont été acquises avec le filtre bleu clair de largeur $\Delta\lambda/\lambda = 1/3{,}5$, nous en concluons que les effets polychromatiques sont trop importants pour que la reconstruction par l'un ou l'autre des estimateurs soit valide.

Dès lors, une deuxième campagne de test avait été prévue à l'origine pour le mois de novembre 2007, les mesures devant être effectuée avec le filtre étroit décrit en section F.2. Malheureusement, cette campagne a été avortée. A l'avenir, il sera nécessaire d'acquérir des données réelles afin de prendre en compte les effets dûs au milieu environnant.

Annexe G

Liste des publications

Revues à comité de lecture

Mocœur, I., Mugnier, L., & Cassaing, F., 2009a. Estimation des défauts d'alignement d'un instrument multipupille par Diversité de Phase temps-réel. *Trait. Signal* **26** 1, 305–314.

Mocœur, I., Mugnier, L., & Cassaing, F., 2009b. Real-time Wave Front sensing method by Phase Diversity. *Opt. Lett.*, soumis.

Baron, F., **Mocœur, I.**, Cassaing, F., & Mugnier, L., 2008. Unambiguous Phase Retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 5, 1000–1015.

Conférences

Mocœur, I., Mugnier, L. M., & Cassaing, F., 2007. Amélioration des performances d'imagerie d'un télescope multipupille par Diversité de Phase temps-réel. Dans *21ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images,* Actes du colloque GRETSI, Gr. de Rech. et d'Et. du Trait. du Sign. et des Im., Troyes, France.

Mocœur, I., Cassaing, F., Baron, F., Hofer, S., & Thiele, H., 2006. DARWIN fringe sensor : experimental results on the BRISE bench. Dans *Advances in Stellar Interferometry* (J. D. Monnier, M. Schöller & W. C. Danchi, eds.), volume 6268 de *SPIE proceedings series,* Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Orlando, USA.

Mocœur, I., Cassaing, F., Baron, F., Hofer, S., & Thiele, H., 2006. DARWIN fringe sensor : experimental results on the BRISE bench. Dans *Visions for infrared Astronomy* (V. Coudé du Foresto, D. Rouan, & G. Rousset, eds.), volume 6 [1–4] de *Instrumentation mesure métrologie,* pp. 327–330, Lavoisier, Paris, France.

Mocœur, I., Cassaing, F., Baron, F., Mugnier, L. M., Rousset, G., Sorrente, B., & Blanc, A., 2005. Multi-telescope interferometer cophasing for astronomy. Dans *Semaine de l'astrophysique*

française, pp. 255–258, EDP Sciences, Soc. Franc. d'Astro. et d'Astro., Strasgourg, France.

Cassaing, F., Mugnier, L. M., **Mocœur, I.**, Fleury, B., & Michau, V., 2007. ASO focaux et télescopes multi-pupilles : un gain en compacité et/ou en complexité. Dans *Premières Journées Recherche Industrie de l'Optique Adaptative,* Assoc. Franc. des Ind. de l'Optique et de la Photonique & Soc. Franc. d'Optique, Arcachon, France.

Cassaing, F., Sorrente, B., Mugnier, L., Rousset, G., Michau, V., **Mocœur, I.**, & Baron, F., 2006. BRISE : a multipurpose bench for cophasing sensors. Dans *Advances in Stellar Interferometry* (J. D. Monnier, M. Schöller, & W. C. Danchi, eds.), volume 6268 de *SPIE proceedings series,* Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., Orlando, USA.

Cassaing, F., Sorrente, B., Mugnier, L., Rousset, G., Michau, V., **Mocœur, I.**, & Baron, F., 2006. BRISE : a multipurpose bench for cophasing sensors. Dans *Visions for infrared Astronomy* (V. Coudé du Foresto, D. Rouan, & G. Rousset, eds.), volume 6 [1–4] de *Instrumentation mesure métrologie,* pp. 309–312, Lavoisier, Paris, France.

Cassaing, F., Baron, F., Fleury, B., **Mocœur, I.** , Mugnier, L. M., Rousset, G., & Sorrente, B., 2005. Multiple-beam fringe tracking for the VLTI. Dans *The Power of Optical/IR Interferometry : Recent Scientific Results and 2nd Generation VLTI Instrumentation* (A. Chelli & F. Delplancke, eds.), ESO Astrophysics Symposia, Springer Verlag, Garching, Germany.

Delavaquerie, E., Meimon, S., Cassaing, F., **Mocœur, I.**, Fusco, T., Mugnier, L. & Michau, V., 2008. Cophasing segmented mirrors using a phase diversity algorithm : preliminary results. Dans *2nd International Conference on Optical Complex Systems,* Cannes, France.

Mugnier, L., Cassaing, F., Rousset, G., Baron, F., Michau, V., **Mocœur, I.**, Sorrente, B., & Velluet, M.-T., 2005. Continuous High-Resolution Earth Observation with Multiple Aperture Optical Telescopes. Dans *Proceedings of the OPTRO 2005 International Symposium,* Assoc. Aéro. et Astro. de France, Paris, France.

Sorrente, B., Cassaing, F., **Mocœur, I.**, Mugnier, L., Baron, F., & Rousset, G., 2005. BRISE : bench for testing cophasing sensors in multi-telescope interferometry. Dans *1st International Conference on Optical Complex Systems,* Marseille, France.

Thiele, H., Hofer, S., Stuffler, T., Cassaing, F., **Mocœur, I.**, Mugnier, L., Barillot, M., Salvadé, Y., & Zayer, I., 2006. Technological aspects and results from the DARWIN Fringe Sensor Predevelopment. Dans *Sixth International Conference on Space Optics,* volume 621 de *ESA Special Publication*, ESA, ESA/ESTEC Noordwijk, The Netherlands.

Brevet et rapports techniques

Cassaing, F., **Mocœur, I.**, & Mugnier, L., 2007. Procédé d'estimation d'au moins une déformation du front d'onde d'un système optique ou d'un objet observé par le système optique et dispositif

associé. Demande de brevêt en cours d'examen.

Cassaing, F. & **Mocœur, I.**, 2004. TN6 : DWARF BreadBoard Test Results. Rapport Technique 4/07708 DOTA, ONERA.

Cassaing, F., Mugnier, M., Sorrente, B., Baron, F., & **Mocœur, I.**, 2004. Synthèse d'ouverture optique pour satellite d'observation : rapport final des tâches 1.6, 2.2 et 3.4. Rapport Technique 6/05254 DOTA, ONERA.

Annexe H

Article *Trait. Signal*

Estimation des défauts d'alignement d'un instrument multipupille par Diversité de Phase temps-réel

Cet article a été publié dans la revue *Traitement du Signal* (paru en 2009 dans le volume **26** numéro 1 pages 305–314).

Estimation des défauts d'alignement d'un instrument multipupille par Diversité de Phase temps-réel

Cophasing a phased-array telescope by real-time Phase Diversity method

Isabelle Mocœur [1,2], Laurent Mugnier [1], Frédéric Cassaing [1]

[1] Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, 29, Avenue de la Division Leclerc – BP 72, 92322 Châtillon cedex, France

[2] Centre National d'Études Spatiales, 18 avenue Edouard Belin, 31401 Toulouse Cedex 4, France

Isabelle.Mocœur@onera.fr, Laurent.Mugnier@onera.fr, Frederic.Cassaing@onera.fr

Manuscrit reçu le

Résumé et mots clés

Le cophasage d'un instrument multipupille nécessite la mesure des aberrations spécifiques que sont les pistons et basculements différentiels entre les sous-pupilles. La Diversité de Phase est une méthode qui s'avère être bien adaptée pour estimer de telles aberrations, notamment sur objet étendu ; toutefois, les algorithmes associés requièrent des temps de calcul importants et sont incompatibles avec les besoins temps-réel d'un système fonctionnant en boucle fermée. Dans cet article, nous démontrons qu'un estimateur analytique peut être obtenu dans l'hypothèse des faibles phases aberrantes grâce à une approximation judicieuse qui rend le critère à minimiser quadratique. Nous validons ensuite cet estimateur par simulation et comparons ses performances à celles obtenues avec un algorithme itératif conventionnel. Les résultats obtenus démontrent qu'il est tout à fait possible de fermer une boucle de cophasage à faible flux et par la même occasion de restaurer l'objet observé dans un but d'imagerie.

Interférométrie, Problèmes inverses, Fonction de transfert optique, Diversité de Phase, Analyse de front d'onde.

Abstract and key words

Optical interferometry allows to reach the resolution of a large instrument by coupling several subapertures of lower diameter. However, this method requires a very accurate control of the optical path, especially the differential aberrations between the apertures (so-called "cophasing" operation). In this context, focal-plane sensing, based on aberration retrieval from focal-plane intensity measurements, appears to be an advantageous solution with a very simple opto-mechanical setup.

When the aperture function is known, differential aberrations can be determined with a single focal image of an unresolved source source using a non centro-symmetric pupil. However, in a general case (extended object or any aperture configuration), the sole focal-plane image is not sufficient to retrieve piston and tip/tilt without ambiguity. The Phase Diversity method introduced in optic by Gonsalves [Gonsalves (1982)] is then usually applied, using at least a second image differing by a known phase, conventionally a small defocus. This method is now routinely used for the calibration of monolithic instruments. However, the corresponding algorithms are iterative and consequently time-consuming. The objective of this paper is to present a new algorithm which is analytic and consequently well-suited for real-time cophasing on extended object. To do that, we first begin to explain the principle of Phase Diversity. During these last

20 years, different methods have been developped to retrieve both the aberrations $\widehat{a}$ and the observed object $\widehat{o}$ [Mugnier *et al.* (2006)]. The conventional processing is based on the joint *a posteriori* estimation of $(\widehat{a};\widehat{o})$ that are most compatible with the measurements by using statistical information on the data [Blanc (2002)]. The corresponding criterion Eq. (8) and Eq. (10) is convenienly minimized by an iterative conjugated gradient method ; but although this classical iterative estimator is optimal in term of performance, it is time consuming since it requires at least ten iterations to converge, each iteration representing $2N_d$ FFT to compute (where N_d is the number of images acquired by diversity).
In order to have an analytic Phase Diverity algorithm, we express the classical criterion under the small phase assumption. Then :
– we approximate the denominator of Eq. (11) at $a = 0$;
– we linearize the expression of its numerator, obtaining an affine expression according to the aberrations.
The new expression of the criterion Eq. (13) is then quadratic and the derivation of its gradient with respect to the aberrations lead to a unique solution as shown Eq. (15).
The resulting algorithm is much faster than the iterative, requiring only N_d FFT. In order to sudy its properties, various simulations are made. It appears that our new algorithm can estimate piston aberrations $\leqslant |\pi/2|$ rad RMS with an error of $\lambda/60$ (figure [3]). Furthermore, it can be used to restore the observed object as well for a signal-to-noise ratio > 10 (figure [6]). In conclusion, our results demonstrate that the analytic algorithm is appropriate for the cophasing of phased array telescopes in closed-loop.

Interferometry, Inverse problems, Optical transfer functions, Phase Diversity, Wave-front sensing.

S

1. Introduction

Le développement des futures missions pour l'astronomie ou l'observation de la Terre nécessite des résolutions spatiales importantes, ce qui implique le développement de télescopes de plus en plus grands. Malheureusement, la fabrication et le lancement dans l'espace de miroirs de diamètre croissant se heurte rapidement à de nombreuses limitations, aussi bien technologiques (encombrement, masse) que financières. Dès lors, pour répondre aux problèmes posés par la construction ou l'emploi de miroirs monoblocs géants et pour gagner définitivement en résolution, l'imagerie multipupille (ou synthèse d'ouverture optique) apparaît comme une solution séduisante. Etant donné que le champ des applications possibles est extrêmement vaste, cette méthode se révèle aujourd'hui comme étant incontournable dans le domaine de la haute résolution angulaire.
Cependant, la principale difficulté posée par la synthèse d'ouverture réside dans le cophasage, c.-à.-d. la mesure puis la correction à une fraction de longueur d'onde des aberrations spécifiques que sont les pistons et les basculements différentiels de l'instrument synthétisé. Ces aberrations sont illustrées figure [1] dans le cas d'un instrument à trois sous-pupilles : un piston équivaut à une marche (donc à une phase constante) entre les pupilles tandis qu'un basculement correspond à l'inclinaison de l'une d'entre elles par rapport à la direction de visée (donc à un plan de phase).

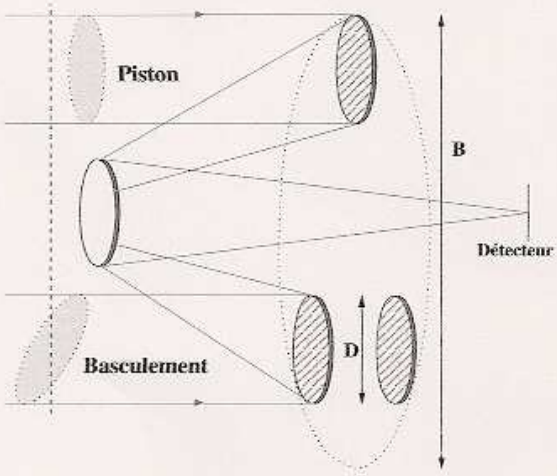


Figure 1. Instrument à trois sous-pupilles et ses aberrations différentielles.

Si l'objet est résolu, la seule donnée de l'image focale est insuffisante pour retrouver sans ambiguïté les pistons et basculements différentiels. Pour résoudre ce problème, l'une des rares solutions est la Diversité de Phase introduite en optique par Gonsalves [Gonsalves (1982)], qui propose d'utiliser au moins une deuxième image différant de la première par une variation

de phase parfaitement connue. Dès lors, les images supplémentaires permettent de coder l'information de phase de manière différente et par conséquent de lever les indéterminations existantes. Le plus souvent, la perturbation choisie est une défocalisation globale, car c'est *de facto* le mode le plus simple à mettre en œuvre.

Dans ce contexte, la Diversité de Phase permet non seulement de mesurer toutes les aberrations d'intérêt, mais aussi de les prendre en compte pour faire de la restauration d'objet *a posteriori*. Elle permet également de recombiner l'intégralité des sous-pupilles en une seule trame, et ce avec un design opto-mécanique simple. De plus, cette méthode est sensible à toutes les aberrations jusqu'au plan focal. Par conséquent, la Diversité de Phase est envisagée pour nombre de futurs grands projets terrestres ou spatiaux. Parmi ceux-ci, citons DARWIN, un interféromètre spatial dédié à la recherche de planètes extra-solaires [Fridlund (2004), Mocœur *et al.* (2006)], ou les ELT, télescopes géants segmentés d'un diamètre de 30 à 60 mètres [Gilmozzi & Spyromilio (2007)]. L'observation de la Terre depuis une orbite géostationnaire est également une application envisagée [Mugnier *et al.* (2004), Mugnier *et al.* (2005)].

Toutefois, les méthodes d'estimation associées présentent l'inconvénient d'être itératives et donc potentiellement coûteuses en temps de calcul. Par conséquent, elles ne permettent pas actuellement de répondre pleinement aux besoins temps-réel d'un système embarqué. Nous nous proposons dans cette article de développer un estimateur analytique qui soit compatible avec les exigences d'un système de cophasage temps-réel. Tout d'abord, nous rappelons en section 2 les relations fondamentales de l'imagerie puis détaillons le principe de la Diversité de Phase. Nous présentons ensuite en section 3 un nouveau critère d'estimation qui est quadratique, permettant ainsi l'expression des aberrations de manière simple. Enfin, la section 4 est consacrée à la caractérisation par simulation de ce nouvel estimateur et à la comparaison de ses performances avec celles obtenues par un estimateur itératif conventionnel.

2. La diversité de phase

2.1. Formation des images

Considérons un instrument dont la configuration pupillaire (agencement des pupilles), affectée d'une phase aberrante ϕ_a, est composée de N_T sous-pupilles circulaires. Notons $\boldsymbol{p}$ la transmission complexe de la pupille et $\boldsymbol{p}_n$ celle associée à la $n^{\text{ième}}$ sous-pupille placée en $\boldsymbol{u}$ et présentant une phase ϕ_{an}. Nous avons alors :

$$p = \sum_{n=1}^{N_T} \boldsymbol{p}_n \star \delta_{\boldsymbol{u}_n} \tag{1}$$

où $\star$ représente l'opération de convolution. Par simplicité, nous supposons que les sous-pupilles sont circulaires de rayon R_n identique et unitaire. Afin d'exprimer la phase incidente de façon simple, nous la décomposons dans une base orthonormée de modes $\boldsymbol{Z}_k$ qui est intrinsèquement liée à la forme des sous-pupilles. En se plaçant dans la base des polynômes de Zernike [Noll (1976)], particulièrement bien adaptée pour la description des modes dans le cadre de sous-pupilles circulaires, la transmission complexe s'écrit :

$$p(\boldsymbol{u}) = \sum_{n=1}^{N_T} \Pi(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n) \exp\left[j \sum_{k=1}^{k_{max}} a_{kn} Z_k(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n) \right] \tag{2}$$

où $j^2 = -1$ et où a_{kn} représente l'amplitude RMS de l'aberration d'ordre k associée au mode $\boldsymbol{Z}_k$ sur la sous-pupille n. Comme nous nous intéressons seulement aux aberrations de pistons ($k = 1$) et basculements ($k = 2,3$), nous considérerons par la suite que $k_{max} = 3$ et noterons $\boldsymbol{a}$ le vecteur des aberrations que l'on souhaite retrouver, de taille $k_{max} N_T \times 1$:

$$\boldsymbol{a} = \{a_{kn}\}_{\substack{k \in \{1,2,3\} \\ n \in \{1,\ldots,N_T\}}} \tag{3}$$

En notant TF l'opération Transformée de Fourier, la réponse impulsionnelle $\boldsymbol{h}$ de l'instrument est :

$$\boldsymbol{h} = |\mathrm{TF}^{-1}(\boldsymbol{p})|^2 \tag{4}$$

Nous noterons $\widetilde{\boldsymbol{h}}$ la TF de $\boldsymbol{h}$, et nous l'approximerons par une transformée de Fourier rapide ; $\widetilde{\boldsymbol{h}}$ sera communément appelée Fonction de Transfert Optique (FTO).

Au plan focal, l'image $\boldsymbol{i}$ observée est modélisée par la convolution discrète et bruitée de $\boldsymbol{h}$ avec l'objet observé $\boldsymbol{o}$, ces deux quantités étant considérées comme discrétisées :

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{o},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) \star \boldsymbol{o} + \boldsymbol{b} \tag{5}$$

où $\boldsymbol{b}$ est un bruit blanc que nous supposerons par la suite Gaussien stationnaire. Dans cet article, nous considérons pour la Diversité de Phase deux images $\boldsymbol{i}_1$ et $\boldsymbol{i}_2$, la première étant acquise au plan focal, la deuxième dans un plan défocalisé d'une quantité ϕ_d. Les réponses impulsionnelles sont alors liées par :

$$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) \text{ et } \boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a} + \phi_d) \tag{6}$$

2.2. Inversion du problème

L'estimation des aberrations a ainsi que de l'objet o est généralement basée sur une approche de type moindre-carrés, qui revient à minimiser le critère suivant :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{o}) = \frac{1}{2\sigma^2}\|\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{a}) \star \boldsymbol{o}\|^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\|\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{a}) \star \boldsymbol{o}\|^2 \tag{7}$$

où σ représente la variance de bruit, que nous supposons identique pour les deux images $\boldsymbol{i}_1$ et $\boldsymbol{i}_2$. En pratique cependant, l'utilisation de cet estimateur conduit le plus souvent à une amplifi-

cation du bruit et ne permet pas d'obtenir une estimation correcte de l'objet et de la phase. Par conséquent, il est nécessaire de régulariser ce problème en introduisant des *a priori* sur les inconnues. Au cours de ces vingt dernières années, différentes méthodes d'estimation ont été développées [Mugnier *et al.* (2006)]; parmi ces méthodes, la recherche du Maximum *A Posteriori* Joint (MAPJ) consiste à choisir l'objet $\boldsymbol{o}$ et les aberrations $\boldsymbol{a}$ qui maximisent la densité de probabilité jointe des données (donc des images $\boldsymbol{i_1}$ et $\boldsymbol{i_2}$), de l'objet et de la phase. Dans le cas d'un bruit blanc Gaussien et pour une régularisation quadratique de la scène observée par Densité Spectrale de Puissance (DSP), le critère d'estimation correspondant s'exprime dans le domaine de Fourier discret comme [Blanc (2002)]:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{o}) = N_{\text{pix}} \ln \sigma^2 + \sum_{\nu=1}^{N_f} \sum_{d=1}^{2} \frac{1}{2\sigma^2} \left| \widetilde{i}_d(\nu) - \widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\nu)\, \widetilde{o}(\nu) \right|^2$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{|\widetilde{o}(\nu) - \widetilde{o}_m(\nu)|^2}{2S_o(\nu)} + \mathrm{R}(\boldsymbol{a}) \qquad (8)$$

N_{pix} étant le nombre de pixels dans l'image, N_f les fréquences sur lesquelles est défini le critère (sachant qu'ici $N_f = N_{\text{pix}}$) et $\mathrm{R}(\boldsymbol{a})$ le terme de régularisation sur la phase ; $\boldsymbol{o_m}$ représente l'objet moyen et $\boldsymbol{S_o}$ la DSP associée à l'objet observé.

Le critère $\mathcal{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{o})$ doit bien entendu être minimisé vis-à-vis de l'objet $\boldsymbol{o}$ et des aberrations $\boldsymbol{a}$. Or, il est possible d'exprimer la solution en $\widetilde{\boldsymbol{o}}$ à phase aberrante fixée sous la forme d'un filtre de Wiener multitrame en annulant la dérivée partielle du critère par rapport à $\boldsymbol{o}$:

$$\widehat{\widetilde{o}}(\boldsymbol{a},\nu) = \frac{\widetilde{i}_1(\nu)\widetilde{h}_1^*(\boldsymbol{a},\nu) + \widetilde{i}_2(\nu)\widetilde{h}_2^*(\boldsymbol{a},\nu) + \dfrac{\sigma^2 \widetilde{o}_m(\nu)}{S_o(\nu)}}{|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)|^2 + |\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} \qquad (9)$$

l'exposant * désigne ici le complexe conjugué. En réinjectant l'estimée $\widehat{\widetilde{o}}(\boldsymbol{a})$ dans l'expression de $\mathcal{L}$ Eq. (8), nous obtenons un nouveau critère $\mathcal{L}_1$ qui ne dépend plus explicitement que de la phase :

$$\mathcal{L}_1(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{\left|\widetilde{i}_2(\nu)\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2}{\left|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} + \mathrm{R}(\boldsymbol{a}) \qquad (10)$$

$$+ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{\frac{\sigma^2}{S_o(\nu)} \left[|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\widetilde{o}_m(\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)|^2 + |\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\widetilde{o}_m(\nu) - \widetilde{i}_2(\nu)|^2 \right]}{\left|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} + \text{Cste}$$

Bien que $\mathcal{L}_1$ soit de type myope donc *a priori* susceptible de présenter des minima locaux, des travaux récents ont montré qu'il avait de bonnes propriétés statistiques. En effet, en réinterprétant ce critère comme étant à minimum de contraste, Idier *et al.* [Idier *et al.* (2005)] ont démontré que $\mathcal{L}_1$ converge vers la valeur vraie lorsque le nombre de données augmente.

Étant donné que la reconstruction est effectuée pour $k_{max} = 3$ polynômes de Zernike, l'espace des inconnues $\boldsymbol{a}$ est limité. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire de contraintes supplémentaires sur la phase ; par conséquent, nous posons $\mathrm{R}(\boldsymbol{a}) = 0$. De plus, il a été constaté [Blanc (2002)] que les hyperparamètres optimaux vis-à-vis des aberrations, c.-à.-d. ceux qui donnent une estimée de la phase la plus proche de la phase vraie, ne sont pas en adéquation avec ceux liés à l'objet et qu'il est nécessaire de sous-régulariser ce dernier pour estimer au mieux les aberrations à fort flux. Idier *et al.* [Idier *et al.* (2005)] ont par la suite démontré théoriquement que l'estimateur sous-régularisé en objet était consistant pour l'estimation de la phase. Dès lors, nous utilisons l'expression analytique de $\widehat{\widetilde{o}}(\boldsymbol{a})$ définie Eq. (9) à régularisation quasi-nulle, donc pour un objet moyen $\widetilde{\boldsymbol{o}}_{\boldsymbol{m}} = 0$ et pour un rapport $\sigma^2/S_o(\nu)$ proche de zéro. En pratique, ce rapport ne sera pas exactement égal à zéro mais sera fixé à une constante, typiquement $\varepsilon = 10^{-6}$ afin que l'expression de l'objet $\widehat{\widetilde{o}}(\boldsymbol{a})$ ne diverge pas à haute fréquence. Nous obtenons ainsi, pour le critère $\mathcal{L}_1(\boldsymbol{a})$:

$$\mathcal{L}_1(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_f} \frac{\left|\widetilde{i}_2(\nu)\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2}{\left|\widetilde{h}_1(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(\boldsymbol{a},\nu)\right|^2 + \varepsilon} + \text{Cste} \qquad (11)$$

$\mathcal{L}_1$ est généralement minimisé itérativement, par exemple par une méthode de type gradient conjugué. Par conséquent, les coûts de calcul sont importants : si N_d est le nombre d'images acquises par diversité (ici, $N_d = 2$), $2N_d$ transformées de Fourier sont au minimum effectuées par itération, sachant qu'une dizaine d'itérations sont nécessaires en pratique.

3. L'estimateur analytique

3.1 Expression du critère pour une faible phase incidente

Afin d'obtenir un algorithme de type Diversité de Phase qui soit compatible avec les exigences d'un système de cophasage temps-réel, nous nous plaçons dans l'hypothèse des faibles phases aberrantes, qui a déjà été utilisée avec succès pour le développement d'un algorithme analytique de cophasage sur point source en plan focal [Baron *et al.* (2008)]. Dans le cadre de cette hypothèse, il devient possible d'exprimer plus simplement le critère $\mathcal{L}_1(\boldsymbol{a})$:

- en approximant le dénominateur de l'Eq. (11) par sa valeur à phase aberrante nulle. Ce dernier peut alors être vu comme un terme de pondération ;
- en linéarisant dans chaque plan l'expression de la fonction de transfert $\widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\nu)$ et en l'exprimant de manière affine en fonction des aberrations :

$$\widetilde{h}_d(\boldsymbol{a},\nu) = \alpha_d(\nu)\,\boldsymbol{a} + \beta_d(\nu) \qquad (12)$$

sachant que le produit $\alpha_d(\nu)\,\boldsymbol{a}$ est ici un produit scalaire. α_d est donc une matrice de taille $N_f \times k_{\max}N_T$; $\widetilde{\boldsymbol{h}}_d$, $\widetilde{\boldsymbol{i}}_d$ et β_d sont quant à eux des vecteurs colonne de longueur N_f.
Au vu des deux simplifications évoquées ci-dessus, nous obtenons une nouvelle expression du critère qui est quadratique en $\boldsymbol{a}$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\nu=1}^{N_f}\left|\boldsymbol{A}(\nu)\boldsymbol{a} - B(\nu)\right|^2 + \mathrm{Cste} \tag{13}$$

Avec :

$$\boldsymbol{A}(\nu) = \frac{\widetilde{i}_2(\nu)\alpha_1(\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\alpha_2(\nu)}{\sqrt{\left|\widetilde{h}_1(0,\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(0,\nu)\right|^2 + \varepsilon}}$$

$$B(\nu) = \frac{-\widetilde{i}_2(\nu)\beta_1(\nu) + \widetilde{i}_1(\nu)\beta_2(\nu)}{\sqrt{\left|\widetilde{h}_1(0,\nu)\right|^2 + \left|\widetilde{h}_2(0,\nu)\right|^2 + \varepsilon}} \tag{14}$$

$\boldsymbol{A}(\nu)$ est un vecteur ligne de longueur $k_{\max}N_T$ défini pour chaque fréquence ν. L'ensemble de ces vecteurs, concaténés dans la matrice $\boldsymbol{A}$ de taille $N_f \times k_{\max}N_T$, représente la partie du critère dépendant explicitement des aberrations recherchées. $B(\nu)$ est un scalaire et $\boldsymbol{B}$ un vecteur colonne de longueur N_f représentant l'expression du critère à phase incidente nulle. Comme le terme $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{B}\|^2/(2\sigma^2)$ est quadratique (donc convexe), il ne présente pas de minima locaux et la solution en $\boldsymbol{a}$ est unique.

3.2 Estimation des aberrations

En utilisant l'expression analytique de l'objet et en linéarisant la fonction de transfert dans chaque plan de diversité, nous avons pu nous ramener à un critère qui est quadratique en $\boldsymbol{a}$. L'annulation du gradient de ce critère nous permet alors de retrouver directement les aberrations recherchées sans avoir à recourir à un algorithme de minimisation :

$$\widehat{\boldsymbol{a}} = \left[\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})\right]^{\dagger}\left[\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{B})\right] \tag{15}$$

où $\Re$ désigne l'opérateur partie réelle, ^{H} l'opérateur hermitien et † l'inverse généralisé d'une matrice. Avec ce nouvel estimateur analytique, le coût de calcul est bien moins important que dans le cas itératif. En effet, il se résume seulement au temps nécessaire pour calculer les transformées de Fourier des $N_d = 2$ images de diversité. De fait, l'inversion de la matrice $\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$ n'est pas dimensionnante puisque carrée de taille $k_{\max}N_T \times k_{\max}N_T$, soit $k_{\max}N_T = 9$ pour un instrument à 3 sous-pupilles.
Regardons maintenant de plus près l'inversion de la matrice $\boldsymbol{T} = \Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$. Étant donné que cette matrice se révèle être une matrice réelle, hermitienne semi-définie positive, c.-à.-d. pour laquelle l'ensemble des valeurs singulières $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,k_{\max}N_T} \in \mathbb{R}^+$, alors elle peut être décomposée en valeurs propres et vecteurs propres :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^t \tag{16}$$

$\boldsymbol{X}$, qui est diagonale, contient les valeurs propres ; $\boldsymbol{U}$ est la matrice des modes propres de $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^t$, sachant que par définition un *mode* est une combinaison de pistons et basculements locaux appliqués sur les sous-pupilles. Toutefois, le mode piston global, qui correspond à une phase constante sur l'ensemble des sous-pupilles, ne modifie en aucune manière les images et n'a pas de sens physique. Il est donc inutile de le rechercher. Comme $\boldsymbol{X}$ est diagonale, son inverse est égale à la matrice $\boldsymbol{X}^\dagger$ de valeurs propres $\boldsymbol{X}^\dagger_{ii} = 1/\xi_i$. Afin de filtrer le mode piston global, nous imposons la valeur $1/\xi_i$ correspondante à zéro.

3.3 Restauration de l'objet

Nous avons démontré qu'il était possible d'estimer de manière simple et rapide les faibles phases incidentes. Cependant, c'est l'objet qui s'avère être la grandeur d'intérêt lorsque la diversité de phase est utilisée pour faire du traitement d'image *a posteriori*. Nous avons souligné à la sous-section 2.2 que dans le cas où l'on recherche en priorité la phase aberrante, il n'était pas nécessaire d'introduire d'*a priori* sur les données. Cependant, si la reconstruction de la scène observée est souhaitée, l'absence de régularisation nuit fortement à la qualité de la restauration objet. Dès lors, pour la DSP de l'objet, nous choisissons le modèle paramétrique suivant [Conan *et al.* (1998), Blanc (2002)] à trois paramètres :

$$S_o(\nu) = \frac{\kappa}{(\frac{\nu}{\nu_o})^{\mu} + 1} \tag{17}$$

où κ est une constante, ν_o l'inverse d'une longueur caractéristique de l'objet et où μ caractérise la régularité de ce dernier.
Une fois que la faible phase incidente a été déterminée selon la méthode explicitée en sous-section 3.2, les hyperparamètres liés à l'objet peuvent été ajustés au mieux par maximum de vraisemblance [Blanc *et al.* (2003), Gratadour *et al.* (2006)]. L'estimation de $\widehat{\boldsymbol{o}}$ est alors effectuée en injectant le vecteur $\widehat{\boldsymbol{a}}$ dans l'Eq. (9), non plus pour $\sigma^2/S_o(\nu) = \varepsilon$, mais en utilisant les valeurs ajustées des hyperparamètres $(\sigma, \kappa, \nu_o, \mu)$. Nous obtenons alors la solution unique $\widehat{\boldsymbol{o}}$ en une itération.

4. Validation par simulation

4.1 Configuration expérimentale

L'ensemble des simulations présentées dans cette section sont effectuées avec deux plans de diversité, l'un étant le plan focal

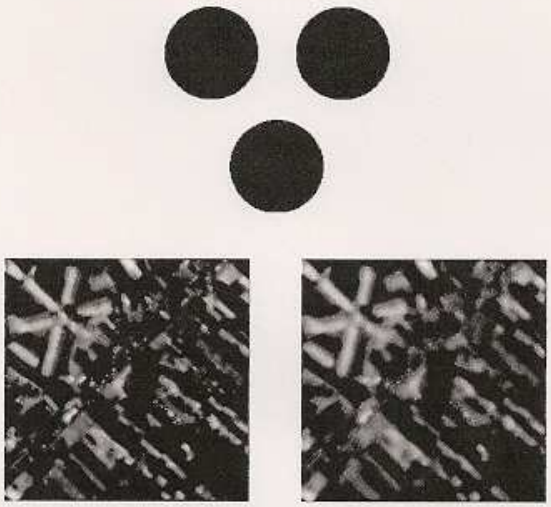


Figure 2. Configuration à trois sous-pupilles (haut) et image focale (en bas à gauche) puis extra-focale (en bas à droite) correspondantes obtenues à phase incidente nulle.

et l'autre étant défocalisé de 1 radian RMS. Sauf mention contraire, la configuration pupillaire est composée de trois sous-pupilles identiques disposées au sommet d'un triangle équilatéral comme illustré en haut de la figure [2]. L'objet utilisé est représentatif d'un scène terrestre urbaine ; les images, de taille 256×256 pixels (voir figure [2] bas), sont échantillonnées à Shannon et comportent du bruit de photons ainsi que l'équivalent d'un bruit de lecture d'écart-type $\sigma_b = 10$ électrons par pixel.

Par la suite, nous définirons le Rapport Signal-à-Bruit (RSB) comme étant le rapport par pixel de la valeur moyenne du nombre de photons N_{bph} sur l'écart-type du bruit :

$$\text{RSB} = \frac{N_{\text{bph}} \big/ N_{\text{pix}}}{\sqrt{\frac{N_{\text{bph}}}{N_{\text{pix}}} + \sigma_b^2}} \tag{18}$$

4.2 Estimation de la phase incidente

Afin d'analyser les performances de l'estimateur analytique et de les comparer à celles obtenues avec l'algorithme itératif, deux types de tests sont réalisés :

- un test de linéarité, où une rampe de piston comprise entre $\pm 2\pi$ et présentant 51 valeurs est appliquée sur une seule sous-pupille. Les images sont acquises à fort flux avec un nombre moyen de $N_{\text{bph}} = 5 \cdot 10^8$ photo-électrons par image (soit pour un RSB de 87), chaque valeur de la rampe présentant dix points de mesure ;
- des tests de répétabilité, où la précision des algorithmes est évaluée sur des séries de mesures indépendantes. Ces différentes séries, qui comprennent toutes cinquante mesures, sont générées avec des flux différents allant de $3 \cdot 10^6$ à $3 \cdot 10^{10}$ photo-électrons (phe$^-$) par image ($4 \leqslant \text{RSB} \leqslant 676$).

Pour déterminer la dynamique de notre estimateur, nous effectuons le test de linéarité décrit ci-dessus. Les graphes figure [3], qui illustrent les aberrations de piston estimées sur la sous-pupille mobile en fonction de la rampe introduite (en haut) ainsi que le biais correspondant (en bas), montrent que la reconstruction réalisée par l'algorithme analytique est excellente entre $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$, avec une précision en-deçà du seuil de $\lambda/60$ [Harvey & Ftaclas (1990)] et un biais quasi-nul à l'origine. De plus, la rampe est reconstruite entre ± 1 radian avec une pente de valeur 1 quel que soit l'algorithme considéré. Comme attendu, nous voyons que le biais augmente rapidement au-delà de 1 rad du fait de l'approximation faible phase. Nous pouvons également constater que l'estimateur itératif se replie en $\pm\pi$: étant donné que notre modèle d'imagerie est chromatique, l'information de phase ne peut être contenue que dans un domaine défini à $[2\pi]$ près. (Notons que pour s'affranchir de ce phénomène, il est possible d'envisager une approche polychromatique

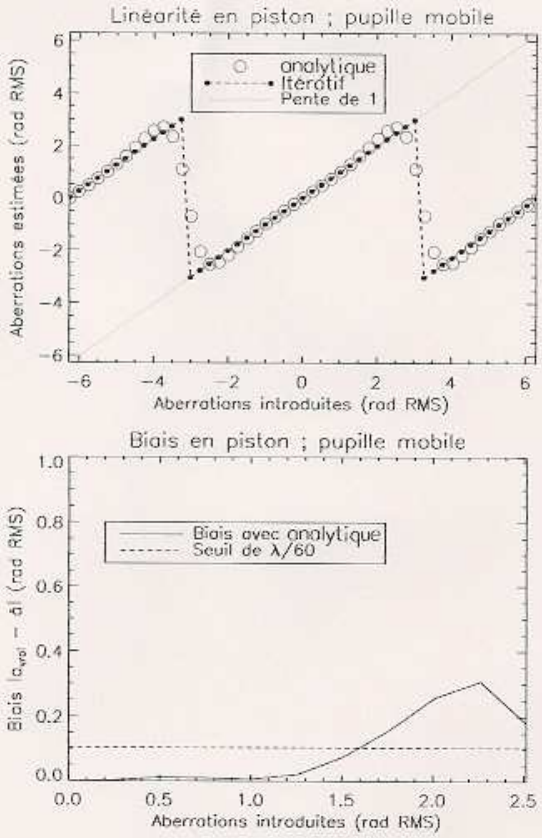


Figure 3. Linéarité en piston (en haut) et biais associé (en bas) obtenus en réponse à une rampe de piston de grande dynamique appliquée sur une sous-pupille.

[Seldin *et al.* (2006)] ou de privilégier un algorithme de déroulage de la phase [Ghiglia & Pritt (1998)]). Ces repliements sont également visibles avec l'algorithme analytique mais, du fait de la dynamique réduite de l'estimateur, apparaissent dès que la phase incidente atteint 2,5 radians.

Pour le test de répétabilité, nous reproduisons dans un premier temps le point de fonctionnement d'un système idéal en boucle fermée, c.-à.-d. à aberration incidente nulle. Le graphe de la figure [4] représente l'erreur totale obtenue en piston et calculée sur l'ensemble des sous-pupilles. Étant donné que le biais peut être considéré comme nul à l'origine quelque soit le flux, l'erreur des estimées (en cercles pour l'estimateur analytique, en points pour l'algorithme itératif) présente exactement le même comportement que l'écart-type ; elle suit comme attendu une même loi en $1/\sqrt{N_{\text{bph}}}$ en régime de bruit de photons, lorsque le flux est supérieur à 10^7 phe$^-$ (soit pour un RSB > 10). Pour des flux moins importants, l'allure générale de l'écart-type (et celle de l'erreur) n'est plus commune : si, pour l'algorithme itératif, l'écart sur les estimations suit une loi en $1/N_{\text{bph}}$, celui associé à l'estimateur analytique atteint au contraire une valeur de saturation égale à $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ rad RMS. En effet, l'algorithme analytique ne peut retrouver la phase aberrante si le RSB est trop faible ; dans ce cas, les estimées sont toutes distribuées autour de zéro.

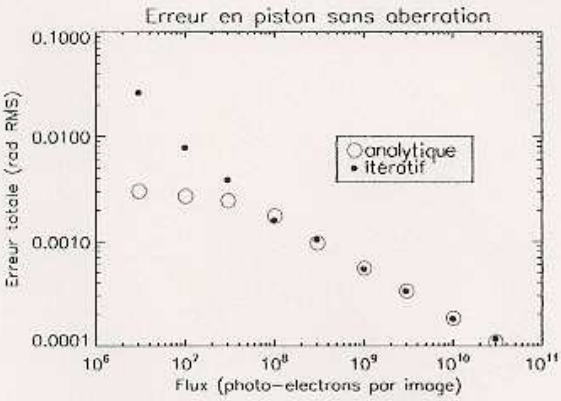


Figure 4. Erreur totale estimée en piston sur l'ensemble des sous-pupilles à phase incidente nulle.

Tableau 1. Jeu aléatoire d'aberrations introduit sur la configuration pupillaire de référence (exprimées en rad RMS).

	piston	basculement en x	basculement en y
pupille 1	−0,084	−0,017	0,019
pupille 2	0,161	−0,018	0,065
pupille 3	−0,055	0,019	0,092

Après avoir étudié les performances de l'algorithme analytique dans les conditions de fonctionnement nominales, nous appliquons sur l'ensemble des sous-pupilles un jeu aléatoire de faibles aberrations listées tableau [1].

Les graphes figure [5] présentent l'écart-type (en haut) ainsi que l'erreur totale (en bas) obtenus pour les deux estimateurs. Tout d'abord, nous constatons que la valeur prise par les écart-types est légèrement supérieure au cas idéal à phase incidente nulle. La différence la plus notable apparaît cependant au niveau de l'erreur : au contraire de l'algorithme itératif dont l'erreur décroît en fonction du flux, celle associée à l'estimateur analytique atteint un seuil de $2 \cdot 10^{-3}$ rad. Cette observation n'est pas surprenante en soi, puisque l'approximation affine de la FTO n'est valable que pour une phase incidente proche de zéro. Le plateau observé est ainsi dû à la limite mathématique inhérente à notre développement analytique. L'estimation des aberrations est cependant effectuée en régime de bruit de photons avec une excellente précision, puisque l'erreur se trouve toujours en dessous de la valeur $3 \cdot 10^{-2}$ rad, soit $\lambda/200$ (qui correspond à 10 % de l'amplitude absolue totale introduite en piston).

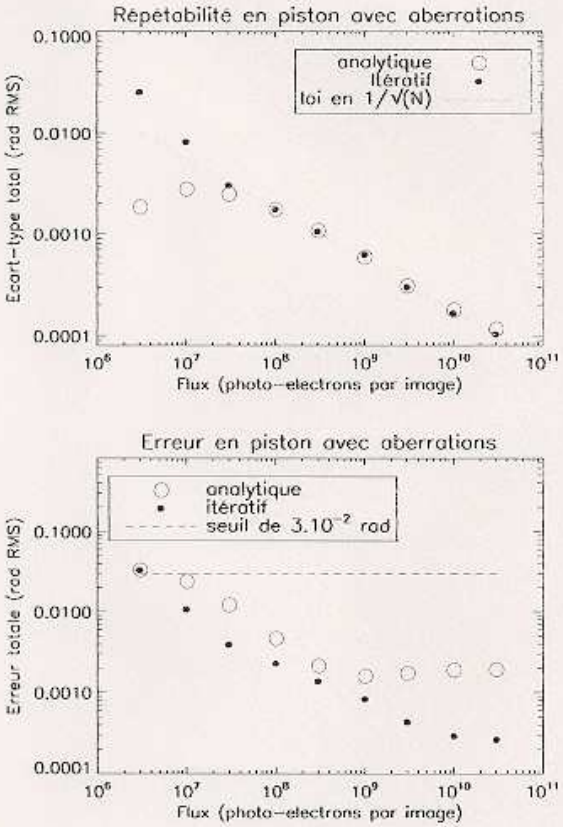


Figure 5. Écart-type (en haut) et erreur totale (en bas) estimés en piston sur l'ensemble des sous-pupilles en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations.

4.2.1 Restauration de l'objet

Afin d'évaluer la validité de notre estimateur analytique pour la restauration d'objet, nous nous plaçons dans des conditions réalistes en appliquant sur l'ensemble des sous-pupilles notre jeu de faibles aberrations listé tableau [1]. Nous effectuons alors un test de répétabilité pour des séries d'une cinquantaine d'images et pour quatre flux variant de 10^6 phe$^-$ (RSB = 1) à 10^9 phe$^-$ (RSB = 123). La figure [6] compare, sur une zone de 81 × 81 pixels, l'objet vrai (en haut) à l'objet moyen $\widehat{o}$ estimé pour quatre valeurs de flux différentes (en bas); les images focales et extra-focales aberrées obtenues à fort flux sont également représentées (au milieu). En régime de bruit de photons, nous pouvons remarquer que l'objet moyen est de meilleure qualité que l'objet estimé $\widehat{o}$. Ce dernier est alors très proche de l'objet vrai, avec une erreur de reconstruction de 1 % pour 10^9 phe$^-$ et seulement de 4 % pour 10^8 phe$^-$. L'objet reconstruit est même de meilleure qualité que l'objet vrai filtré par le système à trois sous-pupilles à aberrations nulles (voir figure [2] bas). Lorsque le flux diminue, l'erreur d'estimation augmente, comme attendu. La restauration de l'objet reste tout de même de bonne qualité pour $N_{bph} = 10^7$ phe$^-$, comme nous pouvons le constater sur la figure. Si nous réduisons le flux jusqu'à ce que le RSB soit très faible (à 10^6 phe$^-$), les images deviennent totalement dominées par le bruit; par conséquent, la restauration devrait être impossible. Or, bien que l'objet reconstruit soit «très mou» avec une erreur de 78 %, nous pouvons distinguer les composantes basses fréquences de l'objet.

5. Conclusion et perspectives

La problématique du cophasage, qui consiste à mesurer et contrôler à une fraction de longueur d'onde les défauts d'alignement entre les sous-pupilles (à savoir les pistons et basculements) d'un instrument multitélescope, est une opération délicate. Dans ce contexte, la Diversité de Phase est une solution

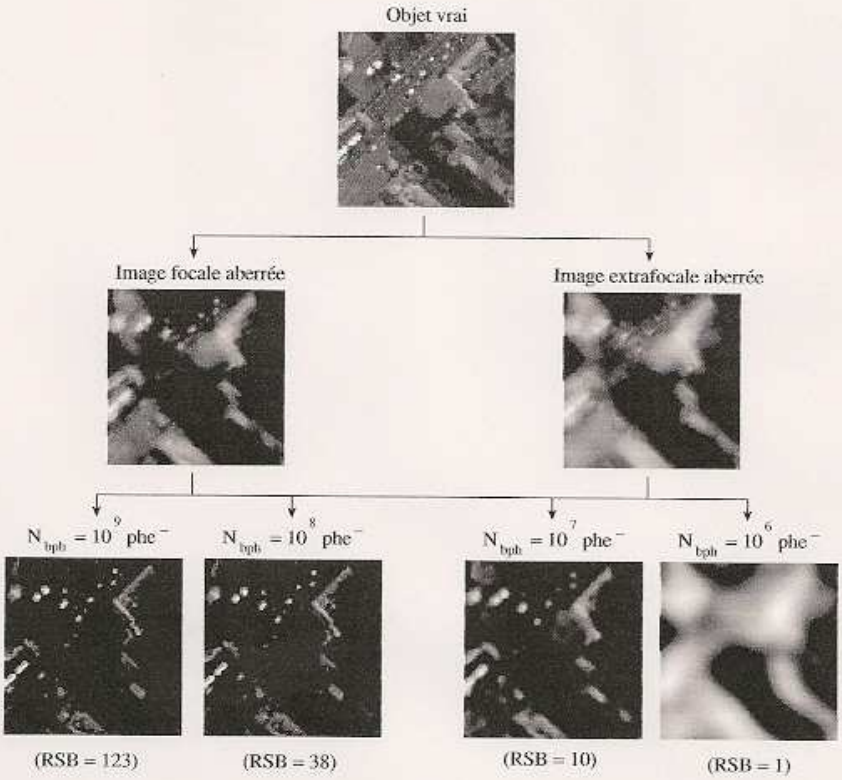


Figure 6. Objet moyen estimé en fonction du flux en présence d'un jeu aléatoire d'aberrations : médaillon de l'objet vrai sur 81 × 81 pixels (en haut), images focales/extra-focales bruitées correspondantes obtenues à fort flux (ligne du milieu) et objet moyen estimé (en bas).

séduisante. Cependant, les algorithmes classiques associés à cette méthode sont itératifs et demandent un coût de calcul important.

Dès lors, nous avons développé un estimateur analytique, donc potentiellement temps-réel, de type Diversité de Phase valable dans l'hypothèse des faibles aberrations. Sous cette hypothèse, nous avons pu approximer le critère à minimiser comme étant quadratique et ainsi obtenir une estimée simple des aberrations. Les simulations effectuées ont montré que ce nouvel algorithme pouvait estimer des aberrations de piston inférieures à $\pi/2$ rad RMS avec une précision de $\lambda/60$, et qu'il permettait de restaurer l'objet observé pour un RSB > 10. Dès lors, dans le cas d'un système réel, il peut être intéressant de coupler les méthodes itératives et analytiques, en estimant dans un premier temps les fortes aberrations à l'aide de l'algorithme itératif puis en maitenenant cette position grâce à l'estimateur analytique utilisé en boucle fermée.

Par la suite, après avoir caractérisé notre estimateur en fonction de paramètres clefs comme le type de scène observée ou le nombre de pupilles utilisées, nous pourrons le valider expérimentalement.

Références

[Baron *et al.* (2008)] F. BARON, I. MOCŒUR, F. CASSAING, et L. MUGNIER, «Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes.» *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 20 # 5, p. 1000-1015, 2008.

[Blanc *et al.* (2003)] A. BLANC, L. M. MUGNIER, et J. IDIER, «Marginal estimation of aberrations and image Restoration by use of phase diversity.» *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 20 # 6, p. 1035-1045, 2003.

[Blanc (2002)] A. BLANC, *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apports de la diversité de phase*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 2002.

[Conan *et al.* (1998)] J. M. CONAN, L. M. MUGNIER, T. FUSCO, V. MICHAU, et G. ROUSSET, «Myopic Deconvolution of Adaptive Optics Images by use of Object and Point Spread Function Power Spectra.» *Appl. Opt.* Vol. 37 # 21, p. 4614-4622, 1998.

[Fridlund (2004)] C. V. M. FRIDLUND, «The Darwin mission.» *Adv. in Sp. R.*, Vol. 34, p. 613-617.

[Ghiglia et Pritt (1998)] D. C. GHIGLIA, et M. D. PRITT, 1998. *Two-Dimensional Phase Unwrapping: Theory, Algorithms, and Software*. Wiley-Interscience, 2004.

[Gilmozzi et Spyromilio (2007)] R. GILMOZZI, et J. SPYROMILIO, «The European Extremely Large Telescope (E-ELT).» *ESO Messenger*, Vol. 127, p. 11-19, 2007.

[Gonsalves (1982)] R. A. GONSALVES, «Phase retrieval and diversity in adaptive optics.», *Opt. Eng.* Vol. 21 # 5, p. 829-832, 1982.

[Gratadour *et al.* (2006)] D. GRATADOUR, D. ROUAN, L. M. MUGNIER, T. FUSCO, Y. CLENET, E. GENDRON, et F. LACOMBE, «Near-IR AO dissection of the core of NGC 1068 with NaCo.» *Astron. Astrophys.* Vol. 446 # 3, p. 813-825, 2006.

[Harvey et Ftaclas (1990)] J. E. HARVEY, et C. FTACLAS, «Fundamental limitations on off-axis performance of phased telescope arrays.» *Advanced technology optical telescopes IV*, (L. D. BARR, ed.), *SPIE proceedings series*, vol. 1236, p. 390-405, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng, 1990.

[Idier *et al.* (2005)] J. IDIER, L. MUGNIER, et A. BLANC, 2005. «Statistical behavior of joint least square estimation in the phase diversity context.», *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 14 #12, p. 2107-2116.

[Mocœur *et al.* (2006)] I. MOCŒUR, F. CASSAING, F. BARON, S. HOFER, et H. THIELE, «DARWIN fringe sensor: experimental results on the BRISE bench.», *Advances in Stellar Interferometry* (J. D. MONNIER, M. SCHOLLER, et W.C. DANCHI, eds.), *SPIE proceedings series*, vol. 6268, *Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng*, 2006.

[Mugnier *et al.* (2006)] L. M. MUGNIER, A. BLANC, et J. IDIER, «Phase Diversity: a Technique for Wave-Front Sensing and for Diffraction-Limited Imaging.», *Advances in Imaging and Electron Physics*, (P. HAWKES, ed.), vol. 141, chapitre 1, p. 1-76, Elsevier, 2006.

[Mugnier *et al.* (2005)] L. MUGNIER, F. CASSAING, G. ROUSSET, F. BARON, V. MICHAU, I. MOCŒUR, B. SORRENTE, et M.-T. VELLUET, «Continuous High-Resolution Earth Observation with Multiple Aperture Optical Telescopes.», *Proceedings of the OPTRO 2005 International Symposium*, Assoc. Aéro. et Astro. de France, 2005.

[Mugnier *et al.* (2004)] L. MUGNIER, F. CASSAING, B. SORRENTE, F. BARON, M.-T. VELLUET, V. MICHAU, et G. ROUSSET, «Multiple-Aperture Optical Telescopes: some key issues for Earth observation from a GEO orbit.», *5th International Conference On Space Optics*, Vol. SP-554, p. 181-187, CNES/ESA, 2004.

[Noll (1976)] R. J. NOLL, «Zernike polynomials and atmospheric turbulence.», *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 66 #3, p. 207-211, 1976.

[Seldin *et al.*, (2006)] J. H. SELDIN, R. G. PAXMAN, V. G. ZARIFIS, L. BENSON, et R. E. STONE, «Closed-loop wavefront sensing for a sparse-aperture multitelescope array using broadband phase diversity.», *Imaging Technology and Telescopes* (J. W. BILBRO, J. B. BRECKINRIDGE, R. A. CARRERAS, S. R. CZYZAK, M. J. ECKART, R. D. FIETE, et P. S. IDELL, eds.), *SPIE proceedings series*, vol. 4091, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng, 2000.

Isabelle **Mocœur**

Isabelle Mocoeur received the Ph.D. degree in Astronomy and Instrumentation from the University of Paris-Sud, Orsay, France, in 2008. Her main subjects of interest are optical interferometry, real-time wave front sensing and cophasing.

Laurent **Mugnier**

Laurent Mugnier graduated from Ecole Polytechnique, France, in 1988. He received his PhD in 1992 from Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST), France, for his work on the digital reconstruction of incoherent-light holograms. In 1994 he joined ONERA, where he is currently senior research scientist in the field of inverse problems and high resolution optical imaging.

His current research interests include image reconstruction and wave front-sensing, in particular for adaptive-optics corrected imaging through turbulence, for retinal imaging, for Earth observation and for optical interferometry in astronomy.

His publications include five contributions to reference books and 30 papers in peer-reviewed international journals.

Frédéric **Cassaing**

Dr F. Cassaing works for 20 years in multiple-aperture optics. His main activities are the design and the cophasing of coherent arrays, including theoretical analysis, laboratory and in-situ experiments. Main results are the cophasing of I2T telescopes in 1994 (first time in Europe), nanometric phase tracking for the Persee nulling experiment, the concept for the VLTI/PRIMA/FSU fringe sensor and focal-plane wave front sensing from unresolved or resolved sources.

Annexe I

Article *Opt. Lett.*

Real-time Wave Front sensing method by Phase Diversity

Cet article a été soumis à la revue *Optics Letters*.

Real-time Wave Front sensing method by Phase Diversity

Isabelle Mocœur,[1,2,*] Laurent Mugnier,[1] and Frédéric Cassaing[1]

[1] *Office National d'Etudes et de Recherche Aérospatiales, Optics Department, BP 72, 92322 Châtillon Cedex, France*

[2] *Centre National d'Etudes Spatiales, 18 Avenue Edouard Belin, 31401 Toulouse Cedex 4, France*

[*] *Corresponding author: mocoeur_astro@orange.fr*

Compiled July 1, 2009

High-resolution optical systems require a very accurate control of the optical paths. For the measurement of aberrations on extended objects, several iterative Phase Diversity algorithms have been developed, based on aberration estimation from focal plane intensity measurements. Here we present an analytical estimator in the case of small aberrations. Under this assumption, a quadratic criterion is derived, which allows us to express the solution (phase & object) under a simple analytical form. We also compare the performance of our algorithm with the iterative Phase Diversity, demonstrating that the analytic etimator is appropriate for closed-loop operation. © 2009 Optical Society of America

OCIS codes: 010.7350, 100.3190, 110.5100, 100.1830, 100.3020

The image $\boldsymbol{i}$ recorded at the focal plane of an instrument is modeled by the discrete and noisy convolution of the Point Spread Function (PSF) $\boldsymbol{h}$ with the object $\boldsymbol{o}$, which defines the so-called *direct model*. Generally, the PSF is degraded by aberrations $\boldsymbol{a} = \{a_1, \cdots a_k\}$ such as turbulence; therefore, these aberrations must be estimated in order to be corrected. The *Phase Diversity* technique [1] uses simultaneous acquisition of the focal plane image and at least a second image differing by a known set of aberrations $\boldsymbol{a_d}$, conventionally a small defocus. In this letter, we consider two images, $\boldsymbol{i_1}$ and $\boldsymbol{i_2}$; the first one is acquired at the focal plane whereas the second one is obtained in a plane defocused by a distance d. The corresponding PSFs are then given by $\boldsymbol{h_1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a})$ and $\boldsymbol{h_2} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a_d})$.

To retrieve both the aberrations and the object that are most compatible with the measurements, Gonsalves [1] first proposed to use a least-square approach; an extension of this method is the joint Maximum *A Posteriori* estimation of $(\widehat{\boldsymbol{a}}, \widehat{\boldsymbol{o}})$ that are most compatible with the measurements by using statistical information on the data [2,3]. If the noise is assumed to be a stationary white Gaussian distribution with constant variance σ^2, the criterion J_{I} to be minimized, proportional to the quadratic difference between the Fourier Transforms of both the images and the PSF, can be written in the Fourier domain as:

$$J_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}) = N_\nu \ln \sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_\nu} \sum_{d=1}^{2} \left| \widetilde{\boldsymbol{i_d}}(\nu) - \boldsymbol{s_d}(\boldsymbol{a}, \nu) \widetilde{\boldsymbol{o}}(\nu) \right|^2 + \sum_{\nu=1}^{N_\nu} \frac{|\widetilde{\boldsymbol{o}}(\nu) - \widetilde{\boldsymbol{o}}_{\boldsymbol{m}}(\nu)|^2}{2 S_o(\nu)} + \mathrm{R}(\boldsymbol{a}) \quad (1)$$

where $\widetilde{\ }$ denotes Fourier transformation and where $\boldsymbol{s}$, which is the Fourier Transform of $\boldsymbol{h}$, is the Optical Transfer Function (OTF). N_ν is the number of pixels in the image and d the dth diversity plane (1 for focal plane, 2 for extrafocal); the two last terms can be used to introduce possible prior knowledge on the aberrations and/or on the object: S_o is the power spectral density model of $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{o_m}$ the mean object and $\mathrm{R}(\boldsymbol{a})$ the phase regularization term. Here we choose $\boldsymbol{o_m} = 0$ and $\mathrm{R}(\boldsymbol{a}) = 0$ for simplicity.

Criterion J_{I} must be minimized with respect to both the object $\boldsymbol{o}$ and the aberrations $\boldsymbol{a}$. However, while the object is unknown, it can be estimated for given aberrations:

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{o}}}(\boldsymbol{a}, \nu) = \frac{\widetilde{\boldsymbol{i_1}}(\nu) \boldsymbol{s_1^*}(\boldsymbol{a}, \nu) + \widetilde{\boldsymbol{i_2}}(\nu) \boldsymbol{s_2^*}(\boldsymbol{a}, \nu)}{|\boldsymbol{s_1}(\boldsymbol{a}, \nu)|^2 + |\boldsymbol{s_2}(\boldsymbol{a}, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} \quad (2)$$

Then, by introducing the estimated object of Eq. (2) into Eq. (1), we obtain a criterion which explicitly depends on the aberrations only:

$$J_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_\nu} \frac{\left| \widetilde{\boldsymbol{i_1}}(\nu) \boldsymbol{s_2}(\boldsymbol{a}, \nu) - \widetilde{\boldsymbol{i_2}}(\nu) \boldsymbol{s_1}(\boldsymbol{a}, \nu) \right|^2}{|\boldsymbol{s_1}(\boldsymbol{a}, \nu)|^2 + |\boldsymbol{s_2}(\boldsymbol{a}, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}} + \mathrm{Cst} \quad (3)$$

To derive the aberrations $\boldsymbol{a}$, J_{II} is usually minimized by an iterative gradient-based method. But although iterative estimators are optimal in terms of performance [4], they are time-consuming since each iteration costs $2N_d$ FFTs where N_d is the number of diversity planes (here $N_d = 2$).

During the last 15 years, efforts have been made towards non-iterative algorithms. Firstly by proposing better numerical algorithms [5, 6], then by modifying the criterion used to estimated the aberrations from the data [7,8]. However, none of these methods is really single iteration since each of them requires at least two iterations to converge [7, 9].

In order to derive an analytical solution for the aberrations, we use the small phase assumption in the two following ways [10]:

- we consider the denominator Eq. (3) as a weighting term, at $\boldsymbol{a} = 0$ for instance (or at the last estimated value for $\boldsymbol{a}$).
- we linearize the expression of the OTF in each diversity plane, obtaining an affine expression of $\boldsymbol{s_1}$ and $\boldsymbol{s_2}$ according to $\boldsymbol{a}$ for each frequency ν:

$$\widetilde{h}_d(\boldsymbol{a}, \nu) = \boldsymbol{\alpha}_d(\nu)\, \boldsymbol{a} + \beta_d(\nu) \tag{4}$$

where $\boldsymbol{\alpha}_d(\nu)$ is a row vector of size $k_{\max}$ and $\beta_d(\nu)$ a scalar.

We obtain a new expression of the criterion which is quadratic and can be written as:

$$J_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\nu=1}^{N_\nu} \Big| \boldsymbol{A}(\nu)\boldsymbol{a} - B(\nu) \Big|^2 + \mathrm{Cst}\,, \tag{5}$$

with:

$$\boldsymbol{A}(\nu) = \frac{\widetilde{i}_2(\nu)\boldsymbol{\alpha}_1(\nu) - \widetilde{i}_1(\nu)\boldsymbol{\alpha}_2(\nu)}{\sqrt{\Big|s_1(0,\nu)\Big|^2 + \Big|s_2(0,\nu)\Big|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}}}\,, \tag{6}$$

and

$$B(\nu) = \frac{-\widetilde{i}_2(\nu)\beta_1(\nu) + \widetilde{i}_1(\nu)\beta_2(\nu)}{\sqrt{\Big|s_1(0,\nu)\Big|^2 + \Big|s_2(0,\nu)\Big|^2 + \frac{\sigma^2}{S_o(\nu)}}}\,. \tag{7}$$

We define the matrix $\boldsymbol{A}$ of size $N_\nu \times k_{\max}$ as the stack of all row vectors $\boldsymbol{A}(\nu)$ of Eq. (6). Similarly we define vector $\boldsymbol{B}$ of size N_ν as the stack of the scalar $B(\nu)$ of Eq. (7). Eq. (5) can be then rewritten as:

$$J_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2\sigma^2} \Big\| \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{B} \Big\|^2 + \mathrm{Cst} \tag{8}$$

To minimize $J_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{a})$, its gradient is derived with respect to the aberrations, which leads to a linear equation depending on $\boldsymbol{a}$. The resulting aberration vector is given by:

$$\widehat{\boldsymbol{a}} = \Big[\Re\Big(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\Big)\Big]^\dagger \Re\Big(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{B}\Big) \tag{9}$$

with $\Re$ the real part operator and $\dagger$ the generalized inverse of a matrix.

The resulting algorithm is much faster than the iterative one, requiring only $N_d = 2$ FFTs. The inversion of the $\Re(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A})$ matrix is not critical since it's a square matrix of size $k_{\max} \ll N_\nu$.

Once the phase has been computed, the object can be then restored as well by introducing $\widehat{\boldsymbol{a}}$ in Eq. (2).

To study the properties of the analytical estimator, we consider the specific low order aberrations of a phased array optical system which are the positionning errors between the apertures, namely the pistons and tip/tilt. In order to solve the *inverse problem*, we suppose that the instrument pupil is composed by N_T identical apertures. Each aperture n has a complex transmission $\boldsymbol{p_n}$, its phase being expanded on an ortho-normalized basis, here a set of $k_{\max}$ scaled Zernike polynomials $\boldsymbol{Z_k}$:

$$\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{u}) \exp\left[j \sum_{k=1}^{k_{\max}} a_{kn} \boldsymbol{Z_k}(\boldsymbol{u}) \right] \tag{10}$$

where its modulus is described by the disk function $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad 0 \le |\boldsymbol{u}| \le R_n, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{11}$$

In Eq. (10), $j^2 = -1$ and a_{kn} is the RMS amplitude of the kth mode over the nth sub-aperture. The corresponding aberration vector $\boldsymbol{a}$ is of size $N_T k_{\max}$. As we only deal with piston ($k = 1$) and tip/tilt ($k = 2, 3$), we will consider $k_{\max} = 3$ in the following.

Two kind of tests are reported here with two observation planes, one at $\boldsymbol{a_d} = 0$ and the other with a 1 radian RMS defocus. The object is an urban scene; monochromatic images of size $N_{\mathrm{pix}} = 256 \times 256$ pixels are simulated with photon noise plus a read-out-noise of 10 electrons per pixel and are sampled at the Shannon rate. The Signal-to-Noise Ratio (SNR) is defined as the ratio between the mean value of the photon number and the noise standard deviation (per pixel).

Using three apertures in an equilateral configuration, we first consider a piston linearity test, applying at high flux (SNR = 87) a 51-point ramp of $[-2\pi, +2\pi]$ on a given sub-aperture. One pair of the corresponding images is represented Fig.1.

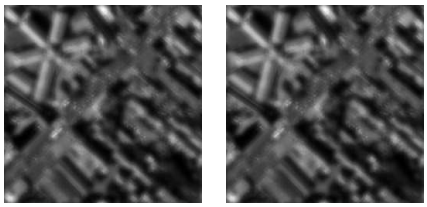


Fig. 1. Focal (left) and extrafocal (right) images obtained when a piston of 1 radian is applied on a sub-aperture.

The graph Fig. 2 compares, for the aberrated sub-aperture, the piston estimated by our analytical method and the iterative algorithm with the introduced piston. First, we note that the reconstruction made with the analytic algorithm is excellent between $[-\pi/2\,;\,\pi/2]$ with an accuracy below $\lambda/60$ and a bias almost zero ($< 10^{-3}$ rad) at the origin. In addition, the piston is reconstructed between ± 1 radian with slope coefficients equal to 1 whatever the algorithm considered. Beyond 1 rad, where the small phase assumption is no longer valid, the bias increases rapidly. We also note that near $\boldsymbol{a} = \pm\pi$, a wrapping occurs: since our imaging model

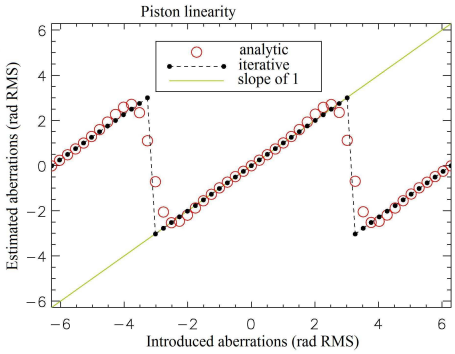


Fig. 2. Piston linearity obtained when a piston ramp is applied on an sub-aperture.

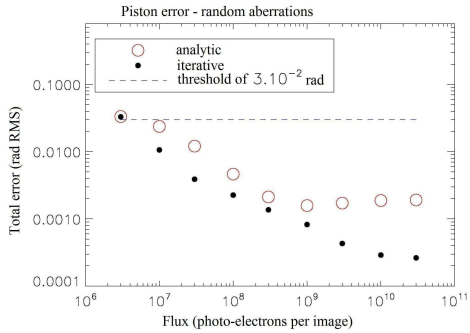


Fig. 3. Error estimated over the sub-apertures when a set of random aberrations is applied.

is monochromatic, phase information is obtained only modulo 2π.

In order to test phase estimation in a case of small phase perturbation, we apply to all sub apertures a set of random piston and tip/tilt listed in Tab. 1 (wich total absolute amplitude is equal to 0.53 rad RMS *i.e.* $\lambda/12$) for different levels of source brightness. For each data set, increasing fluxes are considered, ranging from $N_{\text{bph}} = 3{\cdot}10^6$ phe$^-$ per image (SNR = 4) to $3{\cdot}10^{10}$ phe$^-$ (SNR = 677). For each level, a data set of fifty images is simulated.

	piston	tip	tilt
sub aperture 1	$-0,084$	$-0,017$	$0,019$
sub aperture 2	$0,161$	$-0,018$	$0,065$
sub aperture 3	$-0,055$	$0,019$	$0,092$

Table 1. Piston and tip/tilt aberrations applied over the configuration (rad RMS).

Fig. 3 presents the total RMS error obtained by both estimators versus the level of source brightness. Between $3 \cdot 10^6$ phe$^-$ and $1 \cdot 10^9$ phe$^-$, the two algorithms present the same behavior, following a law in $1/\sqrt{N_{\text{bph}}}$. For higher flux, the error associated with the analytic algorithm remains constant around $2 \cdot 10^{-3}$ rad. This observation is not surprising since the affine approximation of the OTF is only valid for aberrations close to zero. The plateau we observe is then due to the inherent approximation of the linearization we made. However, the aberration estimations accuracy in the photon noise regime remains better than $3 \cdot 10^{-2}$ rad or $\lambda/200$ (equivalent to 10 % of the total absolute amplitude introduced in piston), which is suitable for many applications.

As a conclusion, we have developed, under the small phase assumption, a non-iterative focal plane algorithm for the Phase Diversity wave-front sensor which requires only 2 FFTs. This algorithm can typically estimate piston aberrations up to $|\pi/2|$ rad RMS with an error of $\lambda/60$ and can be used for real-time correction of phase disturbances.

References

1. R. A. Gonsalves, "Phase retrieval and diversity in adaptive optics, " Opt. Eng. **5** Vol. 21, pp. 829-832 (1982).
2. O. M. Bucci, A. Capozzolo and G. D'Elia, "Regularizing strategy for image restoration and wave-front sensing by phase diversity," J. Opt. Soc. Am. A **7** Vol. 16, pp. 1759-1769 (1999).
3. A. Blanc, L. M. Mugnier and J. Idier, " Marginal estimation of aberrations and image Restoration by use of phase diversity," J. Opt. Soc. Am. A **6** Vol. 20, pp. 1035-1045 (2003).
4. L. M. Mugnier, A. Blanc and J. Idier, "Phase Diversity: a Technique for Wave-Front Sensing and for Diffraction-Limited Imaging," in *Advances in Imaging and Electron Physics* Vol. 141, P. Hawkes, ed., pp. 1-76 (Elsevier, 2006).
5. M. G. Löfdahl and A. L. Duncan, "Fast phase diversity wavefront sensor for mirror control," Proc. SPIE **3353**, pp. 952-963 (1998).
6. C. R. Vogel, T. Chan and R. Plemmons, "Fast algorithms for phase-diversity-based blind deconvolution," Proc. SPIE **3353**, pp. 994-1005 (1998).
7. G. B. Scharmer, "Object-independent Fast phase-diversity," in *High resolution solar physics: Theory, observations and techniques* T. R. Rimmele, K. S. Balasubramaniam and R. R. Radick, eds., ASP conferences Series **183**, pp. 330-341 (1999).
8. M. G. Löfdahl and G. B. Scharmer, "A predictor approach to closed-loop phase-diversity wavefront sensing," Proc. SPIE **4013**, pp. 737-748 (2000).
9. Seldin, J., Paxman, R., Zarifis, V., Benson, L., & Stone, R., "Closed-loop wavefront sensing for a sparse-aperture, phased-array telescope using broadband phase diversity," Proc. SPIE **401**, pp. 48–63 (2000).
10. I. Mocœur, L. M. Mugnier and F. Cassaing, "Amélioration des performances d'imagerie d'un télescope multi pupilles par Diversité de Phase temps-réel," in *21ième Colloque GRETSI*, 2007.

Annexe J

Article *J. Opt. Soc. Am. A*

Unambiguous Phase Retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes

Cet article a été publié dans le *Journal of the Optical Society of America A* (paru en mai 2008 dans le volume **20** numéro 5 pages 1000–1015).

1000 J. Opt. Soc. Am. A/Vol. 25, No. 5/May 2008 Baron *et al.*

Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes

Fabien Baron,[1,3,*] Isabelle Mocœur,[1,2] Frédéric Cassaing,[1] and Laurent M. Mugnier[1]

[1]*Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, Optics Department, BP 72, 92322 Châtillon cedex, France*
[2]*Centre National d'Etudes Spatiales, 18 avenue Edouard Belin, 31401 Toulouse Cedex 4, France*
[3]*Current address: Cavendish Laboratory, University of Cambridge, Cambridge CB3 0HE, UK*
[*]*Corresponding author: baron@mrao.cam.ac.uk*

Received August 10, 2007; revised January 4, 2008; accepted January 24, 2008;
posted February 27, 2008 (Doc. ID 86344); published April 9, 2008

Cophasing a multiple-aperture optical telescope (MAOT) or optical interferometer requires the knowledge of the tips/tilts and of the differential pistons on its subapertures. In this paper we demonstrate in the case of a point source object that a single focal-plane image is sufficient for MAOT cophasing. Adopting a least-square approach allows us to derive an analytic estimator of the subaperture aberrations, provided that these are small enough (typically for closed-loop operation) and that the pupil is diluted noncentrosymmetric. We then provide the validation of this estimator by simulations as well as a performance comparison with a more conventional iterative algorithm of phase retrieval. Finally, we present the experimental validation of both estimators on a laboratory test bench; our results, especially subnanometric repeatability, demonstrate that focal-plane sensors are appropriate for the cophasing of phased array telescopes. © 2008 Optical Society of America

OCIS codes: 010.7350, 100.5070, 110.5100, 100.3190, 120.3180.

1. INTRODUCTION

Multiple-aperture optical telescopes (MAOTs) are made of a collection of subapertures, coherently combined in order to reach the diffraction limit of a single monolithic telescope whose aperture would cover the subapertures. MAOTs are now currently used for astronomy, to provide milliarcsecond resolution thanks to ground-based stellar interferometers with hectometric baselines [1–3]. Similar instruments are under study for space missions, particularly in the context of the search for exolife [4,5]. MAOTs can also be considered for wide-field space telescopes, when the primary is deployed after launch because it does not fit in the rocket fairing. Examples are the James Webb Space Telescope for astronomy [6] or multiple-aperture arrays for Earth observation from a geostationary orbit [7].

Performance of optical instruments can be degraded by phase perturbations. This is particularly the case of MAOTs, operating at the diffraction limit with very long baselines or with subpupils that are not mechanically tied together with optical precision. Perturbations include quasi-static positioning errors or high-frequency contributors such as vibrations or propagation through the turbulent atmosphere. To increase the signal-to-noise ratio (SNR) of the collected data, it is necessary to cophase the array, i.e., to stabilize optical paths at zero optical path difference when interferometric data is recorded. As real-time correction over each subaperture can be performed with adaptive optics [8], the very specific issue raised by MAOTs is the correction of the differential piston/tip/tilt errors between the subapertures, as illustrated by Fig. 1. Thus the most critical component of an interferometer is the cophasing sensor, the goal of which is to measure those modes.

Many correction devices can be considered, such as tip/tilt mirrors and delay lines in each arm, or a global deformable mirror. An obvious solution is to use a dedicated tip/tilt sensor for each subaperture and a classical interferometric (pairwise) piston sensor. But the complexity of this solution quickly increases with the number of subapertures, and the local tip/tilt measurements must be linked together.

Another solution is to retrieve aberrations from focal-plane intensity measurements, an old idea first introduced by Gerchberg and Saxton [9] in the electron microscopy context and then rediscovered by Gonsalves [10].

Phase retrieval estimators use a single focal-plane image of an unresolved source observed through the instrument to reconstruct the aberrated phase, coded in the pupil transmittance. Analytic expression of the phase solution can be derived in specifically crafted experiments, such as when one has images taken with and without an exponential filter in the pupil plane [11]. However, in general, one has to rely on iterative methods to estimate the aberrations that are most compatible with the known constraints in the pupil plane and the measured images. Successful approaches include gradient-search algorithms [12], where a least-square (LS) criterion is minimized as a function of the unknown aberrations, and iterative Fourier-transform algorithms [10,13], where the estimates are Fourier-transformed back and forth to ensure compatibility with the data.

Phase retrieval has been shown for a centrosymmetric pupil to lead to a theoretical ambiguity on the sign of the even part of the phase [10,14,15]. In practice for monolithic instruments, the obscurations can be sufficiently asymmetric to allow phase retrieval to be used. Such is the particular case of the Hubble telescope: The telescope

1084-7529/08/051000-16/$15.00 © 2008 Optical Society of America

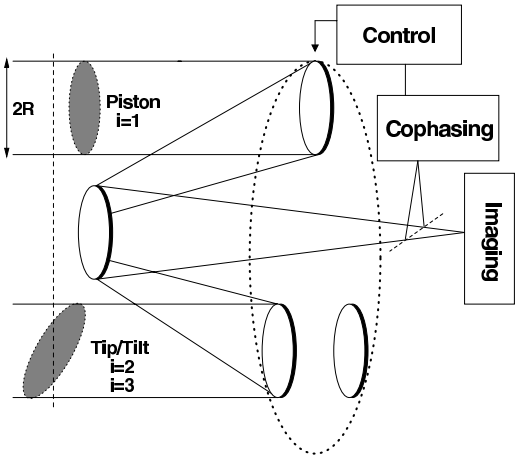


Fig. 1. Piston and tip/tilt on a MAOT.

being already in orbit, its aberrations were characterized with the blurred images of unresolved stars [16,17].

In the most general case (unknown object or any pupil configuration), it is possible to remove the sign ambiguity by using at least a second image differing by a known phase, conventionally a small defocus [18]. This phase-diversity method is usually applied for the phase measurement on extended objects (see Mugnier *et al.* [19] for a recent review of phase diversity). Aberration measurement by phase diversity is now routinely used for the calibration of monolithic instruments [20] and has been extended to MAOTs [21–23]. While phase diversity is optically very easy to implement, it requires considerable computing power for real-time correction, as it is most often based on an iterative algorithm. Efforts in making phase diversity faster have thus been made: better numerical algorithms [24,25], modified error metric used to estimate the aberrations and object from the data [26–28], and the promising research of an analytical solution [29].

For a point source object however, one does not need the full generality of the phase diversity. The simpler phase retrieval can be used with a noncentrosymmetric aperture to retrieve the aberrated phase without ambiguity. Since MAOT pupils may be noncentrosymmetric, phase retrieval becomes an interesting solution, as the image of an unresolved source is often available. This source can be an off-axis star or an internal source and can be used for real-time cophasing or as a complementary tool for periodic calibration.

The objective of this paper is to present two focal-plane wavefront estimators, which determine simultaneously the pistons/tips/tilts on all the subapertures of a MAOT with a noncentrosymmetric pupil from the sole focal-plane image of an unresolved source. In Section 2, the image formation process is described in Fourier space, leading to the derivation of the aberrated optical transfer function (OTF). In Section 3 a LS analysis is adopted for its good statistical properties [30], and a first conventional estimator is recalled, based on an iterative algorithm. In the case of a diluted nonredundant pupil and when subaperture aberrations are small, a second estimator requiring only a single Fourier transform—and thus particularly suited for real time cophasing—is derived. The theoretical performance of both estimators is then analyzed by simulations in Section 4. Finally, an experimental validation on the ONERA laboratory test bench BRISE allows us to compare in Section 5 the algorithms on experimental data for the DarWin [31] AstRonomical Fringe sensor (DWARF) validation.

2. EFFECT OF ABERRATIONS ON THE IMAGE OF AN UNRESOLVED SOURCE

A. Direct Model

The following model assumes monochromatic light and point source objects, although most of the calculations could be extended to known or centrosymmetric objects and to wide wavebands. The image $\boldsymbol{i}$ recorded by a detector is then simply the sampled point-spread function (PSF) corrupted by noise.

To simplify notation, the MAOT pupil is assumed to be formed by N_T circular subapertures of identical diameters (Fig. 1). To implement a phase-retrieval algorithm the pupil has to be sampled, and the coordinate choice we make is such that the PSF computed from the sampled pupil matches the experimental PSF. This fixes the scaling factor of the pupil and in practice the radius R (in pixels) of each subaperture.

Each subaperture n is also characterized by the coordinate of its center $\boldsymbol{u}_n$ and by its complex transmission $\boldsymbol{p}_n$. The total pupil transmission can then be written as

$$\boldsymbol{p} = \sum_{n=1}^{N_T} \boldsymbol{p}_n \star \delta_{\boldsymbol{u}_n}, \tag{1}$$

where $\delta_{\boldsymbol{u}_n}$ denotes a shift by the vector $\boldsymbol{u}_n$.

An extensive treatment of the problem would require the use of a different transmission function for each subaperture, which would allow us to take the obscurations (secondary mirrors, spiders) into account. However, for clarity of exposition, all obscurations will be neglected in the following and all transmissions will be assumed equal to unity. The modulus of the subaperture transmission $\boldsymbol{p}_n$ is then described by the disk function $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{u}) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \le |\boldsymbol{u}| \le R \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}. \tag{2}$$

The phase of $\boldsymbol{p}_n$ is expanded on a local basis of scaled Zernike polynomials [32] so that

$$\boldsymbol{p}_n(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{u}) \exp\left[j \sum_{k=1}^{k_{\max}} a_{kn} \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}) \right], \tag{3}$$

where $j^2=-1$ and a_{kn} is the rms amplitude in radians of the mode of order k on the subaperture n. As all apertures have the same radius, they share the same modes. Since the MAOT-specific aberrations are pistons ($k=1$) and tips/tilts ($k=\{2,3\}$), we will consider $k_{\max}=3$.

B. OTF Characteristics

The autocorrelation $\boldsymbol{s}$ of the pupil is given by

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{p} \otimes \boldsymbol{p})(\boldsymbol{u}) = \sum_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{R}^2} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'), \tag{4}$$

and $\boldsymbol{s}$ will be called for convenience the OTF, although it is not normalized and even though the considered optical system does not need to be shift invariant. If we express explicitly the OTF as a function of the subaperture transmissions, we get

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s} &= \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T} (\boldsymbol{p}_n \star \delta_{\boldsymbol{u}_n}) \otimes (\boldsymbol{p}_{n'} \star \delta_{\boldsymbol{u}_{n'}}) \\ &= \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T} (\boldsymbol{p}_n \otimes \boldsymbol{p}_{n'}) \star \delta_{\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_{n'}}.\end{aligned} \tag{5}$$

Equation (5) demonstrates that the OTF is composed of a central peak (the zero-frequency peak) surrounded by $N_T(N_T-1)$ satellite peaks. Each pair of subapertures defines one baseline, to which correspond two symmetric peaks in the OTF. Figure 2 (top row) shows, for example, the real OTF obtained from a pupil in an equilateral-triangle layout and without aberrations. In presence of aberrations, the peaks are complex, but as the PSF is real, the OTF has Hermitian symmetry.

From Eq. (5) and Eq. (3) it is clear that the OTF is nonlinear with respect to the $\{a_{kn}\}$ coefficients, which explains the difficulty of the phase-retrieval problem.

Two aberration estimators will be derived in the following. For one of these, one of the main assumptions will be that all considered phases are small compared with 2π rad. This will allow us to simplify this nonlinear problem. The small phase assumption is a realistic case for a cophasing sensor mostly used in closed loop. However, additional procedures may first be required to lock the system, i.e., to achieve a nearly cophased state (see the related discussion in Subsection 5.D).

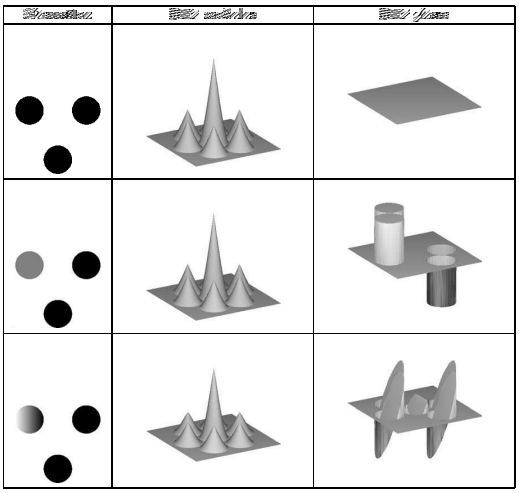


Fig. 2. Shapes of the OTF modulus and phase for no aberration (first row), a piston (second row), a tilt (third row) on one aperture.

Under the assumption of small phases, it is demonstrated in Appendix A that

$$\boldsymbol{s} \approx \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T} \boldsymbol{\Lambda} \exp\left(j\sum_{k=1}^{3} \alpha_{nn'}^k \boldsymbol{\mathcal{Z}}_k\right) \star \delta_{\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_{n'}}, \tag{6}$$

where $\boldsymbol{\Lambda} \triangleq \boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi}$ is the autocorrelation of the subaperture, which describes an OTF peak without aberration, and where by definition

$$\alpha_{nn'}^k \triangleq a_{kn} + \epsilon_k a_{kn'}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k(\boldsymbol{u}) \triangleq \frac{1}{2}\int\int_{\boldsymbol{u}' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{u})} \{\boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}') - \epsilon_k \boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})\}\mathrm{d}\boldsymbol{u}', \tag{8}$$

where $\mathcal{S}(\boldsymbol{u})$ is the overlapping area between a subaperture and itself translated by $\boldsymbol{u}$, and with $\epsilon_k = 1$ if the radial order of $\boldsymbol{Z}_k$ is odd, and $\epsilon_k = -1$ if it is even.

Equation (6) allows us to understand the behavior of the OTF modulus and phase. When all subaperture aberrations are null, the phase of the OTF, called the phase transfer function (PTF), is null (Fig. 2, top row). In the presence of aberrations, the OTF modulus is not affected at first order; only the PTF is.

The shape of the perturbation in the PTF is then determined by the $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$ modes. Fig. 2 (center and bottom rows) presents the effects of simple aberrations in the pupil. When a piston (Fig. 2, center) or a tilt (Fig. 2, right) are applied to a single subaperture, $2(N_T-1)$ satellite peaks are affected. If these peaks do not overlap (see further on for a discussion on this), the OTF modulus is strictly unaffected in the piston case and barely changes in the tilt case. In the PTF a piston aberration creates phase offsets, while a tilt aberration creates phase planes. Equation (8) confirms that the first three PTF modes, the $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$ modes, are similar to Zernike modes, $\boldsymbol{Z}_k$, but with a double support. Thus the first $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$ modes are mutually orthogonal, which means piston measurements do not interfere with tip/tilt ones.

The amplitude of the perturbation in the PTF is measured by the coefficients $\alpha_{nn'}^k$. For a piston (a mode of even radial order), it is equal to the differential aberration amplitudes between the two considered subapertures. Consequently, the piston amplitudes are antisymmetric; i.e., symmetric peaks are affected by opposite amplitudes. In contrast, for a tip or tilt (modes of odd radial order), the amplitudes of the modes are symmetric. Both peaks are affected by the same amplitude, equal to the total of the subaperture aberration amplitudes.

Thus, as long as the OTF peaks do not overlap, Eq. (7) indicates that the phase of a satellite peak nn' and of its symmetric counterpart $n'n$ is determined entirely by the aberrations on the two subapertures n and n' (whose intercorrelation forms the peak). The phase of the peaks formed by the intercorrelation of the subaperture n or n' with another subaperture will also depend on one of these aberration sets, but not on both. To disentangle the two intricated sets on the peak nn', a natural idea is to check whether any kind of linear combination of the $\alpha_{nn'}^k$ can allow us to retrieve all the aberrations.

This kind of approach requires the OTF peaks not to overlap, and consequently we will restrict the following

sections to pupils with nonoverlapping peaks (cases of peak overlapping will be discussed in Subsection 3.B.4).

3. LEAST-SQUARE ESTIMATORS

The next subsections establish the construction of two aberration estimators based on a LS approach. They allow us to retrieve all aberrations on every subaperture from one single focal image. The first estimator is a well-known [21] iterative algorithm normally based on a two-image analysis, which we will further demonstrate to work with only one image. It will also serve as a reference in simulations. The second estimator is our analytical estimator FUSCHIA (Fast Unambiguous Sensor for CopHasing Interferometric Arrays).

Both estimators use the classic LS criterion L, proportional to the squared difference between the discrete Fourier transform (noted by a tilde) of the image and the OTF. In the following the noise on the image will be assumed white. If it is also additive and of Gaussian distribution, then the LS approach is equivalent to a maximum-likelihood approach. Otherwise, for other types of noise, the LS criterion still allows one to minimize the distance between those quantities. The criterion is written as

$$L(\boldsymbol{a}) = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}} \frac{1}{2\sigma^2}|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) - \tilde{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{u})|^2, \tag{9}$$

where $\boldsymbol{a}$ is the aberration vector and σ^2 is the variance of the noise on the image. The sum is computed on the support of the OTF, the frequency domain $\mathcal{D}$ (bounded by the OTF cutoff frequency).

The vector $\hat{\boldsymbol{a}}$ of the estimated aberrations contains the aberrations that are solutions of the phase-retrieval problem, defined as the aberrations that minimize L:

$$\forall (k,n) \frac{\partial L}{\partial a_{kn}}(\hat{\boldsymbol{a}}) = 0. \tag{10}$$

If the real and imaginary part operators are respectively noted $\Re$ and $\Im$, then the classic expression [22] of the criterion gradient with respect to the a_{kn} coefficient is expressed as

$$\frac{\partial L}{\partial a_{kn}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}} \Re\left\{(\boldsymbol{s} - \tilde{\boldsymbol{i}})\frac{\partial \boldsymbol{s}^*}{\partial a_{kn}}\right\}. \tag{11}$$

A. Iterative Estimator

Using Eq. (11), the criterion can be effectively minimized by a gradient-based iterative method, such as the conjugated-gradient method.

A brief overview of the procedure is given here. The initial data are the focal image, the geometry of the input pupil, and a starting point of the aberration estimates. At each iteration, the current image is computed from the point source and the current phase estimates. The algorithm modifies the aberrations so as to decrease the gradients; then these aberrations become the current phase estimates. This process is repeated until the gradient values drop below a user-defined threshold. Iterative algorithms require several (typically 10–30) iterations to converge to the final aberrations, each iteration representing 2 fast Fourier transforms (FFTs) to compute. This estimator has been successfully implemented, and while its performance is excellent (see Section 4) as it achieves optimal data reconstruction in the LS sense, it inconveniently requires many FFTs to do so.

B. Proposed Analytical Estimator

In this section, we will use the small-phase approximation of the OTF from Eq. (5), in order to obtain an estimator based on an analytical formulation. This estimator uses much less processing power than the iterative algorithm previously described.

1. Gradient and LS Criterion in Small Phases

Let $\mathcal{D}_0$ be the support of the OTF central peak. We will split the computation of the criterion in Eq. (9) into two parts: one computed over $\mathcal{D}_0$ and the other over the rest of the frequencies ($\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0$). The central peak contains mixed information on only the incoherent images of all subapertures, while the useful interferometric information resides within the high-frequency satellite peaks. To keep the following calculations in this paper tractable, the part of the criterion computed on the central peak will be dismissed. The new criterion L' is then

$$L'(\boldsymbol{a}) = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0} \frac{1}{2\sigma^2}|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) - \tilde{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{u})|^2. \tag{12}$$

Note that the minimization of L' is sufficient to derive all useful information for MAOT cophasing, i.e., information about the individual aberrations on the subapertures. The gradient to minimize with respect to a_{kn} is

$$\frac{\partial L'}{\partial a_{kn}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_0} \Re\left\{(\boldsymbol{s} - \tilde{\boldsymbol{i}})\frac{\partial \boldsymbol{s}^*}{\partial a_{kn}}\right\}. \tag{13}$$

Equation (13) shows that the gradient of the criterion depends on the gradient of the conjugated OTF. The frequencies at which the OTF is constant with respect to a_{kn} do not contribute to the gradient of the criterion. Thus to compute the right-hand term of Eq. (13) we need only express $\boldsymbol{s}_{kn}$, defined as the part of the OTF that depends on this coefficient a_{kn}. As Eq. (6) demonstrates, $\boldsymbol{s}_{kn}$ is a sum of (N_T-1) pairs of peaks:

$$\boldsymbol{s}_{kn} = \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N_T} \left\{\left[\boldsymbol{\Lambda}\exp\left(j\sum_{k'=1}^{3}\alpha_{nn'}^{k'}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k'}\right)\right] \star \delta_{\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}_{n'}} + \left[\boldsymbol{\Lambda}\exp\left(j\sum_{k''=1}^{3}\alpha_{n'n}^{k''}\boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k''}\right)\right] \star \delta_{\boldsymbol{u}_{n'}-\boldsymbol{u}_n}\right\}. \tag{14}$$

Then the gradient of $\boldsymbol{s}^*$ with respect to the a_{kn} coefficient is

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}^*}{\partial a_{kn}} = -j \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N_T} \left\{ \left[\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \boldsymbol{\Lambda} \exp\left(-j \sum_{k'=1}^{3} \alpha_{nn'}^{k'} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k'} \right) \right] \star \delta_{\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_{n'}} + \left[\epsilon_k \boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \boldsymbol{\Lambda} \exp\left(-j \sum_{k''=1}^{3} \alpha_{n'n}^{k''} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k''} \right) \right] \star \delta_{\boldsymbol{u}_{n'} - \boldsymbol{u}_n} \right\}, \quad (15)$$

with $\epsilon_k = 1$ if $\boldsymbol{Z}_k$ is of odd radial order and $\epsilon_k = -1$ otherwise because of Eq. (7).

Let us call $\mathcal{D}_{nn'}$ the support of the frequency peak corresponding to the baseline vector nn'. As the pupil configuration is diluted and nonredundant, the product of the OTF by its conjugated derivative is nonzero only on $\mathcal{D}_{nn'}$ and $\mathcal{D}_{n'n}$ domains. Moreover, this product is imaginary as the exponential terms simplify:

$$\boldsymbol{s} \frac{\partial \boldsymbol{s}^*}{\partial a_{kn}} = -j \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N_T} (\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \boldsymbol{\Lambda}^2 \star \delta_{\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_{n'}} + \epsilon_k \boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \boldsymbol{\Lambda}^2 \star \delta_{\boldsymbol{u}_{n'} - \boldsymbol{u}_n}). \quad (16)$$

As the real part of this expression is null, Eq. (13) becomes

$$\frac{\partial L'}{\partial a_{kn}} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0} \Re \left\{ \tilde{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{u}) \frac{\partial \boldsymbol{s}^*}{\partial a_{kn}}(\boldsymbol{u}) \right\}. \quad (17)$$

The aberrations solution verifies the equation

$$\forall (k,n), \quad \frac{\partial L'}{\partial a_{kn}}(\widehat{a_{kn}}) = 0. \quad (18)$$

Then we explicitly express the gradient as in Eq. (15):

$$\sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0} \Im \left\{ \tilde{\boldsymbol{i}} \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N_T} \left[\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \boldsymbol{\Lambda} \exp\left(-j \sum_{k'=1}^{3} \widehat{\alpha_{nn'}^{k'}} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k'} \right) \right] \star \delta_{\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_{n'}} + \left[\epsilon_k \boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \boldsymbol{\Lambda} \exp\left(-j \sum_{k''=1}^{3} \widehat{\alpha_{nn'}^{k''}} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k''} \right) \right] \star \delta_{\boldsymbol{u}_{n'} - \boldsymbol{u}_n} \right\} (\boldsymbol{u}) = 0. \quad (19)$$

Using the Hermitian symmetry of $\tilde{\boldsymbol{i}}$, the centrosymmetry of $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k$, and the sign of ϵ_k, it can be shown that the second term of the sum is equal to the first one. As a consequence, only half the peaks need to be considered when looking for the estimates, and we have

$$\forall n, \quad \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0} \Im \left\{ \tilde{\boldsymbol{i}} \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N_T} \left[\boldsymbol{\mathcal{Z}}_k \boldsymbol{\Lambda} \exp\left(-j \sum_{k'=1}^{3} \times \widehat{\alpha_{nn'}^{k'}} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_{k'} \right) \right] \star \delta_{\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_{n'}} \right\} (\boldsymbol{u}) = 0. \quad (20)$$

The following two sections distinguish the specific case where pistons are the only aberrations on the subapertures from the more general case of pistons mixed with tip/tilts. In both cases we will show that the subaperture aberration a_{kn} can be retrieved from the sum β_n^k defined by

$$\beta_n^k = \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N_T} \alpha_{nn'}^k, \quad (21)$$

and from the average aberration a_k over the subapertures:

$$a_k = \frac{1}{N_T} \sum_{n'=1}^{N_T} a_{kn'}. \quad (22)$$

2. *FUSCHIA for the Piston-Only Case*

Let us consider the case when aberrations are only pistons. Using Eq. (7), Eq. (21), and Eq. (22) with $\epsilon_k = -1$, β_n^1 is

$$\beta_n^1 = N_T (a_{1n} - a_1). \quad (23)$$

Then the aberration a_{1n} is

$$a_{1n} = a_1 + \beta_n^1 / N_T. \quad (24)$$

While a_1 is unknown and cannot be determined, this is not a problem for the purpose of MAOT cophasing, as the knowledge of a global piston is not relevant. In practice, a_1 is arbitrarily fixed at a convenient value, generally zero.

To retrieve the aberration a_{1n}, β_n^1 has to be computed. This will be done by computing the coefficients $\alpha_{nn'}^1$ using Eq. (20). Note that as Eq. (6) and Eq. (15) are exact, Eq. (20) is. It is also further simplified as the function $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_1$ is real, constant, and equal to unity. When aberrations are only pistons, Eq. (20) then simply becomes

$$\forall n, \quad \sum_{\substack{n'=1\\ n'\neq n}}^{N_T} \Im \left\{ \exp(-j \widehat{\alpha_{nn'}^1}) \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} \tilde{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \right\} = 0. \quad (25)$$

As all $\mathcal{D}_{nn'}$ are nonoverlapping frequency domains, this means the sum is null at all frequencies if and only if all its terms are

$$\forall n, \forall n' \neq n \quad \mathrm{Arg}\left[\exp(-j \widehat{\alpha_{nn'}^1}) \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} \tilde{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \right] = 0 \quad [\mathrm{mod}\ \pi], \quad (26)$$

which becomes

$$\forall n, \forall n' \neq n \quad -\widehat{\alpha_{nn'}^1} + \mathrm{Arg}\left[\sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} \tilde{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \right] = 0 \quad [\mathrm{mod}\ \pi]. \quad (27)$$

Using the result of Eq. (24), $\hat{a}_{1n}$ is finally given by

$$\hat{a}_{1n} = \frac{1}{N_T} \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \mathrm{Arg}\left[\sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} \tilde{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \right] \quad [\mathrm{mod}\, 2\pi]. \tag{28}$$

In Eq. (28), only the modulo 2π solutions are kept since the other solutions of Eq. (18) correspond to maxima of the L' criterion when $\boldsymbol{s}$ and $\tilde{\boldsymbol{i}}$ are phase opposite, as demonstrated by Eq. (12). Therefore, there is only a single solution in the nonambiguous piston range $]-\pi, \pi]$ for the piston on each subaperture n, explicitly given as a function of the image. Let us recall that $\boldsymbol{i}$ is the image of an unresolved source, so $\tilde{\boldsymbol{i}}$ is very close to the OTF $\boldsymbol{s}$. Thus the physical meaning of Eq. (28) is that the phase is extracted from each OTF peak with a weighting factor equal to the modulus $\boldsymbol{\Lambda}$ of an unaberrated peak. This means in particular a higher phase contribution near the center of the peak, where the signal-to-noise ratio is higher.

3. FUSCHIA for Mixed Pistons and Tilts

With aberrations other than pistons, the phase terms within the exponential of Eq. (20) vary over $\mathcal{D}_{nn'}$. For small aberrations however, the exponential can be expanded into a Taylor series. Equation (6) shows that the modulus of $\tilde{\boldsymbol{i}}$ on each peak is equal to $\boldsymbol{\Lambda}$ on the first order. Let Φ be the phase of $\tilde{\boldsymbol{i}}$. Then Eq. (20) becomes

$$\forall n, \quad \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} \Im\left\{ [\Lambda^2 \mathcal{Z}_k](\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \times \left[1 + j\Phi(\boldsymbol{u}) - j \sum_{k'=1}^{3} \hat{\alpha}_{nn'}^{k'} \mathcal{Z}_{k'}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \right] \right\} \approx 0, \tag{29}$$

which simplifies into

$$\forall n, \quad \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} \Phi(\boldsymbol{u})[\Lambda^2 \mathcal{Z}_k](\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \approx \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \sum_{k'=1}^{3} \hat{\alpha}_{nn'}^{k'} \left[\sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} [\Lambda^2 \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{k'}](\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'}) \right]. \tag{30}$$

The integral of $\Lambda^2 \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{k'}$ on each frequency domain $\mathcal{D}_{nn'}$ is independent of n or n'. Even with the Λ^2 weighting, $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3$ is still an orthogonal basis, so that $\Lambda^2 \mathcal{Z}_k \mathcal{Z}_{k'}$ is nonzero if and only if $k'=k$. Thus Eq. (30) allows us to estimate β_n^k, defined in Eq. (21), as

$$\forall n, \quad \widehat{\beta_n^k} = \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \hat{\alpha}_{nn'}^k \approx \frac{\sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} \Phi(\boldsymbol{u})[\Lambda^2 \mathcal{Z}_k](\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'})}{\sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_T} \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_{nn'}} [\Lambda^2 \mathcal{Z}_k^2](\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{u}_{n'})}. \tag{31}$$

From β_n^k the pistons can be retrieved as described Subsection 3.B.2. Since the tips or tilts are Zernike modes of odd radial order, Eq. (7) implies that

$$\beta_n^k = (N_T - 2)a_{kn} + N_T a_k. \tag{32}$$

To compute a_k we perform a closure by summing all $\beta_{n'}^k$ on all apertures n':

$$\sum_{n'=1}^{N_T} \beta_{n'}^k = 2N_T(N_T - 1)a_k. \tag{33}$$

Finally, the aberration k on the subaperture n is given by

$$\hat{a}_{kn} = \frac{\widehat{\beta_n^k}}{N_T - 2} - \frac{1}{2(N_T - 1)(N_T - 2)} \sum_{n'=1}^{N_T} \widehat{\beta_{n'}^k}. \tag{34}$$

Equations (31) and (34) allow us to retrieve all tip/tilt aberrations on each subaperture without ambiguity. One of FUSCHIA's major strengths resides in the fact that Eqs. (28), (34), and (31) require the computation of only one FFT to retrieve both the pistons and the tips/tilts. Consequently FUSCHIA brings a major speed improvement over the iterative solution, being on average 20 times faster.

Equation (34) is defined only if $N_T \geq 3$. This may seem a rather surprising result since $N_T=2$ allows one to measure piston, as demonstrated by Eq. (24) and well established with the Young setup. This results from the fact that for $N_T=2$ the pupil is centrosymmetric, and so the even part of the phase cannot be retrieved. This raises no problem for piston, as the average piston (even mode) is already known to be not seen and thus is not solved for. But the differential piston (odd mode) can be correctly estimated. A similar situation occurs for tip/tilt, which can be better illustrated from the focal-plane data: If a similar tip/tilt is applied on both apertures, then both PSFs shift by the same amount, leading to a global linear phase in the OTF argument. But if opposite tips/tilts are applied, then two identical separated PSFs are observed. It is possible to derive the absolute value of the tip/tilt from the distance between the two PSFs. More precisely, this measurement involves only the OTF modulus, since the image is also centrosymmetric and thus the phase of the OTF is zero. But it is not possible to guess to which aperture belongs each PSF from the sole focal-plane image and thus to estimate the tip/tilt sign. The first example shows that the average tip/tilt (coefficient $\alpha_{12}^{k+}, k \in \{1,2\}$ in Appendix A) can be estimated, since it is linked to an odd mode, and

the second example confirms that the sign of the differential tilt (coefficient $a_{12}^{k}, k \in \{1,2\}$) cannot be estimated, because the differential tip/tilt is an even mode. The full measurement was possible in the first example because there was no differential tip/tilt. Since the general case is a combination of average and differential tips/tilts, the lack of the differential estimation prevents us from estimating the individual tips/tilts.

4. Case of Compact Pupil Configurations

So far we have assumed that the peaks in the OTF do not overlap. This restriction means in practice that some spatial frequencies will be missed by the MAOT, which is bad for instantaneous imaging of extended objects. However, the instrument may take advantage of aperture synthesis by rotation to complete its frequency coverage. Many interferometers are also not designed primarily for direct imaging purposes and rely on image reconstruction software.

In practice, however, one may have to work with an instrument whose pupil configuration has its OTF peaks overlapping. This may arise in two cases. The first case is when the pupil is redundant. More than one pair of apertures then form an identical baseline, thus contributing to the exact same spatial frequency peak. The phases cannot then be easily disentangled (FUSCHIA would not be used). The second case is when peaks overlap but not totally. This happens in particular for compact pupil configurations meant for imaging, whose OTFs do not reach zero inside defined frequency domains of interest. As FUSCHIA is dedicated to cophasing or fringe-tracking instruments and is not directly used for science measurements, the pupil can sometimes be optically remapped into a diluted pupil. If not, it may still be possible to use FUSCHIA, though not optimally. If the peak overlap takes place in the outer periphery of the peaks, then the central unambiguous part of the peaks can be extracted and used with success in place of the whole peaks. Our experimental data in Section 5 were in fact processed with this procedure.

4. NUMERICAL VALIDATIONS

In this section are presented the results of simulations comparing both LS estimators (FUSCHIA and the iterative retrieval method). The typical performance in closed and open loop is analyzed, as well as the algorithm linearity when confronted by piston and tip/tilt ramps.

A. Conditions of Simulations

A complete simulation environment has been developed to validate and to compare both estimators. It is able to compute the focal-plane image of any observed object viewed through an interferometric instrument of a given input pupil.

All simulations are performed with a wavelength λ of 650 nm. The object is a point source, while the chosen pupil, shown on Fig. 2, is an equilateral triangle. The dilution factor, defined as the shortest baseline divided by the subaperture diameter, is chosen equal to 2 (the minimum dilution for such a diluted pupil). This choice reflects a compromise between the need to have a diluted pupil for the analytical algorithm to work optimally and maintaining a decent spatial frequency coverage.

Images with 64×64 pixels are simulated at increasing fluxes. As the object is a point source, most of the flux is concentrated on a small zone of the image. Only this zone of interest (typically 14×14 pixels) is used for analysis. The total flux per frame ranges from 10^2 to 10^7 photoelectrons. Photon noise is added, as well as a typical read-out noise of standard deviation $\sigma_d = 10.0$ electrons per pixel. One hundred images are simulated for every flux, each one corresponding to a different noise outcome. Both estimators are fed these images as well as the input pupil. Note that as the iterative estimator is meant to be used for cophasing purposes, the starting aberrations for its initialization are chosen null in all cases. The estimator computes the subaperture aberration estimates. Finally, the statistical errors (standard deviations and mean errors) are computed for each aberration on each subaperture.

B. Results and Analysis

1. Linearity

The linearity results, obtained from piston and tilt ramps of $[-\lambda, \lambda]$ with a flux of 10^5 photoelectrons per frame, are presented on Fig. 3.

For piston, both estimators behave linearly on the domain $[-\lambda/2, \lambda/2]$, with a wrapping of λ when the modulus of the amplitude increases beyond $\lambda/2$. This is a classical result for monochromatic piston estimation. On each linear part the slope for both curves is unity. As no approximation is realized in the piston-only case, FUSCHIA and the iterative estimator produce identical results (to machine precision), as expected. In contrast, in the tilt linearity test, while the iterative estimator is linear on the whole domain $[-\lambda/2, \lambda/2]$, FUSCHIA remains linear only on a limited domain that roughly corresponds to $[-0.3\lambda, 0.3\lambda]$. The main reason for the shape of the plot outside this domain is not the failure of the small-phase approximation (though this plays a minor role) but phase wrapping. The phase of the OTF is indeed explicitly extracted by a very simple routine (arctangent). As the amplitude of the tilt mode across an aperture is $4a_{kn}$, when a_{kn} is greater than $\lambda/4$, the amplitude exceeds λ. The phase derived by arctangent is then partially wrapped. The implementation of an unwrapping procedure is planned for future simulations. Note that the iterative estimator does not suffer from this problem, as the phase is not explicitly extracted by the algorithm. In practice the domain limitation for the tilt estimation should not constitute a major problem when cophasing an instrument, as the aberrations to correct should already be smaller than 0.3λ.

FUSCHIA for tilts requires the validity of the small-phase approximation; thus the slope of FUSCHIA's curve within the linear domain is not exactly unity. Figure 3(c) shows the remaining bias to be smaller than $\lambda/80$. For a cophasing system in closed loop this implies only that more FUSCHIA iterations will be needed to correct the aberrations. This might, however, constitute an issue in open loop.

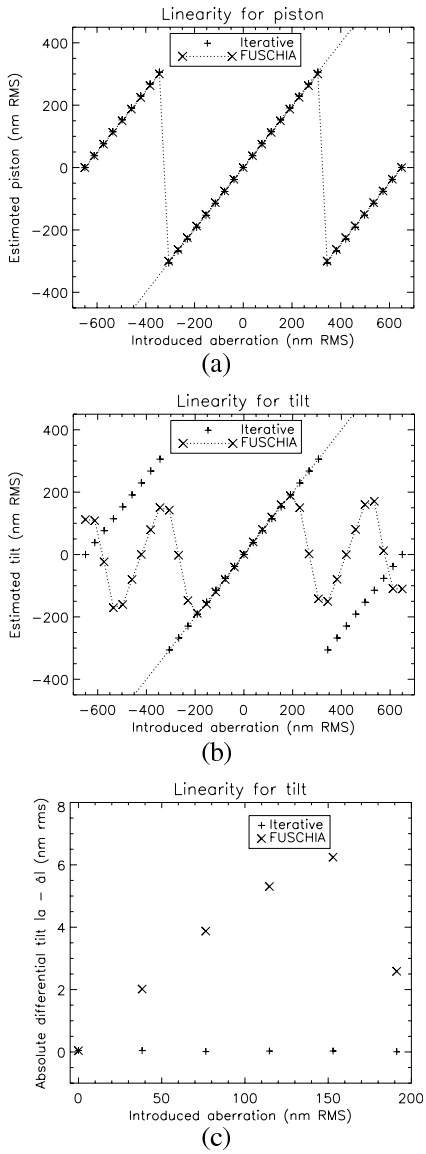


Fig. 3. Responses of FUSCHIA and of the iterative estimator to a piston ramp (a) and a tilt ramp (b). The tilt estimation is slightly biased for FUSCHIA in the linear domain due to the approximated nature of the algorithm (c).

2. Performance and Comparison of the Two Estimators

Figures 4 and 5 allow us to examine the accuracy (error) and repeatability (standard deviation) of each estimator in the absence of aberrations. The performance in such a case is representative of what could be expected in a closed loop.

The mean error and the standard deviation curves are extremely similar, as the bias is very low. Within our flux range the bias is insignificant (zero) in the piston estimation test, and it remains under 0.1 nm for fluxes higher than 10^4 photoelectrons per frame in the tilt estimation test. The repeatability performance is very good, as the

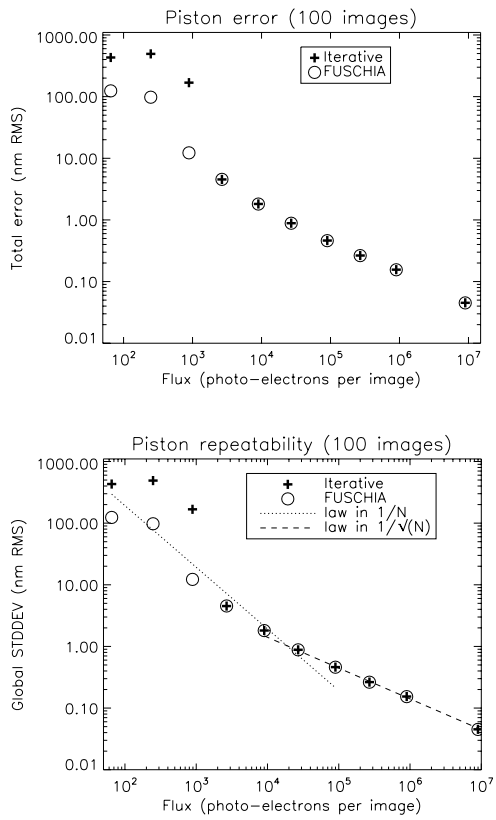


Fig. 4. Error and standard deviation on piston estimates for FUSCHIA and the iterative estimator (no aperture aberrations).

standard deviations are below 1.0 nm rms for fluxes higher than 2×10^4 photoelectrons per frame in the piston case and 10^5 photoelectrons per frame in the tilt case.

The shape of the standard deviation curves is typical of this type of phase estimation. Within the flux range of $[10^2, 10^7]$ photoelectrons per frame chosen for our figures, the standard deviation σ (in nanometers) theoretically follows the equation [33]:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\gamma}{\mathrm{SNR}\sqrt{n_{\mathrm{pix}}}} \tag{35}$$

where the γ coefficient is a constant coefficient expressed in radians measuring the global performance of the algorithm, n_{pix} the number of pixels per frame (here 14×14), and SNR is the signal-to-noise-ratio per pixel defined by

$$\mathrm{SNR} = \frac{N/n_{\mathrm{pix}}}{\sqrt{N/n_{\mathrm{pix}} + \sigma_d^2}}, \tag{36}$$

with N the total flux per frame in photoelectrons. The relative importance of the parameters N/n_{pix} and σ_d determines the regime of the estimator. When the flux is lower than 1.3×10^4 photoelectrons per frame, the noise is dominated by the detector noise and σ is proportional to $1/N$. For fluxes higher than 1.3×10^4 photoelectrons per frame, the Poissonnian photon noise becomes dominant

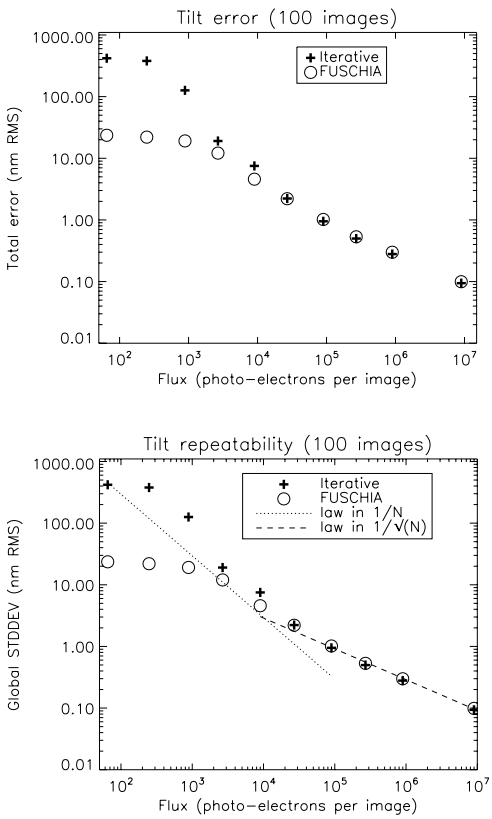


Fig. 5. Error and standard deviation on tilt estimates for FUSCHIA and the iterative estimator (no aperture aberrations).

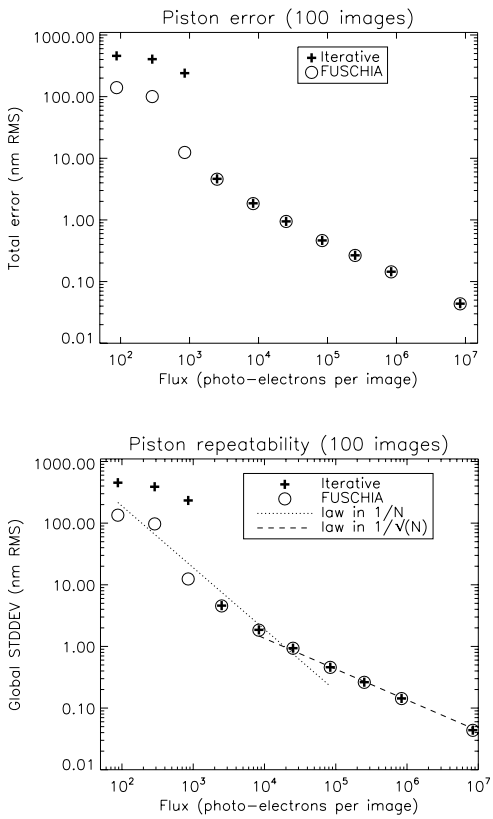


Fig. 6. Error and standard deviation on piston estimates for FUSCHIA and the iterative estimator (aperture aberrations of $\lambda/6$).

and σ is proportional to $1/\sqrt{N}$. This change of slope from 1 to 1/2 is especially visible on Fig. 4(b). The γ coefficients derived in the photon regime range are identical for the two estimators, about 1.3 rad on the piston curves and 2.6 rad on the tilt ones. These results prove that tilt is generally more difficult to estimate than piston. They also confirm that the analytical estimator performs similarly to the iterative one for cophasing purposes. The behavior of both estimators in open loop is depicted by Fig. 6 (resp. Fig. 7), which corresponds to simulations done with a piston (resp. a tilt) of $\lambda/6$. On one hand, the piston estimations are nearly unchanged, and the γ coefficient remains at 1.3 for both estimators.

On the other hand, the tilt results show a strong discrepancy between the estimators. As underlined previously in the linearity test, the bias of the analytical estimator is not zero in open loop. Figure 7(c) shows that as the flux increases, the bias of the analytical estimator reaches a plateau at 1.0 nm. This results in a nearly constant mean error of about 2 nm for fluxes higher than 2×10^4 photoelectrons per frame. The error of the iterative estimator, however, behaves as in the previous case, going as low as 0.01 nm at 10^7 photoelectrons per frame. The repeatabilities are indeed still very good for both estimators, as the γ coefficient for the tilt curve is 2.2 for the iterative estimator, though it goes up to about 3.3 for FUSCHIA.

Thus, overall, the iterative estimator is more adapted to open-loop systems, while FUSCHIA is particularly suited to closed-loop ones.

5. EXPERIMENTAL VALIDATION

A. BRISE Bench

In order to evaluate the performance of focal-plane cophasing sensors, ONERA has built a multipurpose bench called BRISE [34,35] (Banc Reconfigurable d'Imagerie sur Scènes Etendues). It includes mainly a segmented mirror that can introduce calibrated piston/tip/tilt aberrations, a focal-plane sensor, and both an extended scene and a reference point source.

The experimental validation of the iterative and the FUSCHIA estimators was done with the BRISE internal wavefront sensor and with DARWIN's fringe sensor breadboard, DWARF, installed on the bench [DARWIN is a future European Space Agency (ESA) mission dedicated to the search for life signs on Earthlike planets]. The concept, selected by ONERA, is based on a combination telescope that focuses the three beams of the instrument on a focal-plane camera. Differential piston and tip/tilt are estimated with phase retrieval algorithms. The breadboard we used on the bench was developed for ESA by Kayser-Threde/ONERA/Alcatel Alenia Space [36,37]. In Subsec-

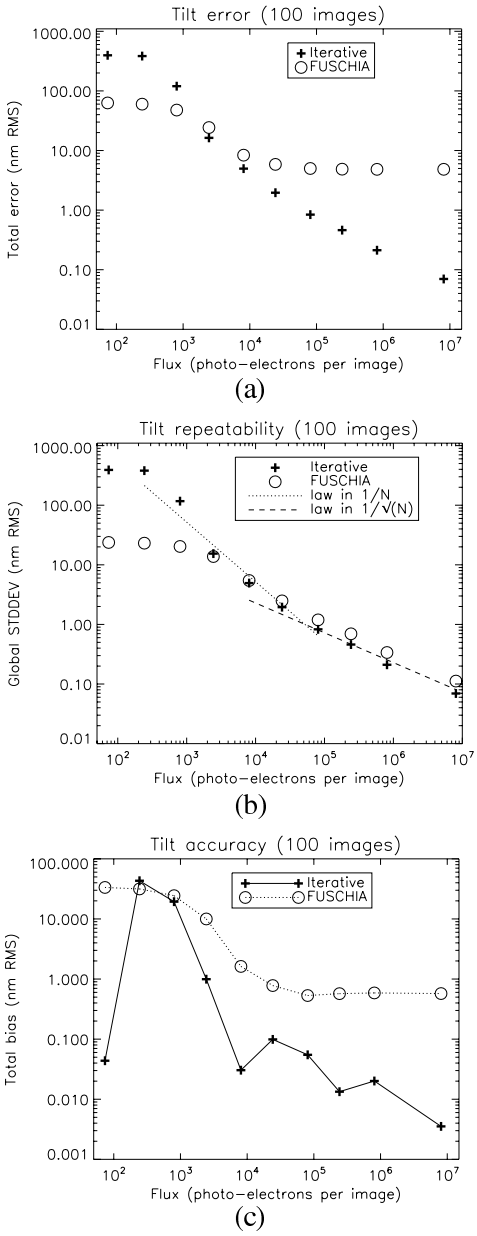


Fig. 7. Error, standard deviation, and bias on tilt estimates for FUSCHIA and the iterative estimator (aperture aberrations of $\lambda/6$).

tions 5.B and 5.D we present critical steps for the test-bed calibration before we detail in Subsections 5.E and 5.F the experimental results obtained with DWARF on BRISE.

B. Accordance between the Numerical and the Physical Models

The direct model allows image simulation from the known experimental parameters (object, pupil configuration, wavelength, etc). It is used to model the experiment, particularly to evaluate the influence of the various noises and experimental parameters on the cophasing sensor performance. But it is also used in the phase-estimation algorithms for the resolution of the inverse problem (phase reconstruction from the image). Therefore, the direct model must be as close as possible to the physical model; the previously listed parameters must be estimated accurately. Since the most critical parameter is the numerical pupil, i.e., the 2D support in pixels over which the Zernike phase screens are applied, it must match the experimental one. Its estimation at a given wavelength is made by a LS fit between the experimental OTF derived from the image $\boldsymbol{i}$ of the nearly unaberrated source and a theoretical OTF depending on parameters due to alignment and sampling defaults.

The numerical pupil can then be used for both image simulation and aberration estimation. Thus, to verify the accordance between the direct and experimental models, we apply a sequence of Zernike mode of interest on a given subaperture (as illustrated Fig. 8), and we compare the images obtained by simulation and by experiment. First, in the first row, images are taken without aberration. Then, in the second row a piston of $\lambda/2$ is introduced on a subaperture, which makes the fringes shift in the direction of this aperture. Last, in the third row, an angular tilt of $2.44\lambda/D$ is applied on one aperture, which produces a PSF shift in the focal plane such that its first dark ring is tangent to one of the other two superimposed PSFs. The Young fringes we can see are perpendicular to their baseline.

C. BRISE Characterization

Another critical issue is the bench stability. Therefore, special care has been taken to control errors that could limit the performance. In order to characterize the bench

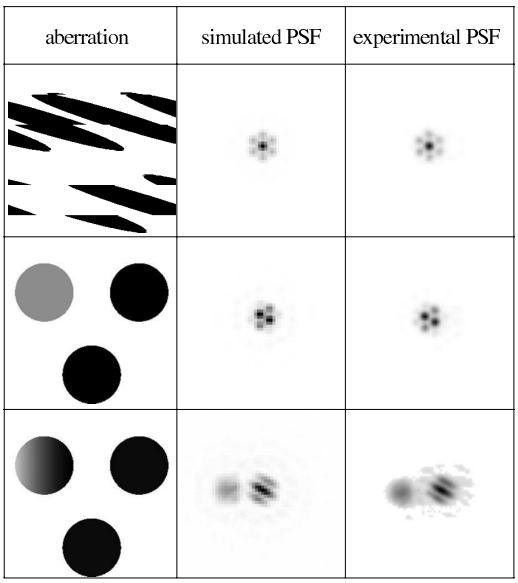


Fig. 8. Agreement between the experimental (right column) and the direct model (center column) in response to a given perturbation (left column).

stability, we studied the temporal evolution of the estimated pistons, using both the deformable mirror and a planar mirror. The corresponding images are simultaneously recorded on the camera, as illustrated on Fig. 9(a). Measurements are made at high flux with an exposure time representative of the BRISE acquisition; estimated aberrations are computed with the FUSCHIA algorithm. Figure 9(b) plots the piston temporal evolution on the planar mirror; it shows a global tilt oscillation at 2 Hz with subnanometric amplitude. We can see in Fig. 9(c) that using the deformable mirror, this oscillation is perturbed due to the positioning noise introduced by the mobile mirror platforms, which is less than 3 nm. However, in each case, there is no temporal drift, even with more significant exposure time; repeatability tests can be performed. They will be made with the planar mirror, which corresponds to the operating condition in closed loop (phase perturbation near zero) and which does not have positioning noise.

D. Conditions of the Experiment

For this experimental validation of both DWARF and our estimators, we have selected a noncentrosymmetric configuration, composed of three subapertures in an equilateral configuration with a dilution of 1.62. The configuration is therefore compact. FUSCHIA was developed assuming that the OTF peaks are separated, but as underlined previously at the end of Section 2, the overlaps in the OTF will be rejected for the moment: Each peak will be reduced to the largest disk inscribed in the integration domain, so that the $\mathcal{Z}_k$ modes calculated on this field remain mutually orthogonal.

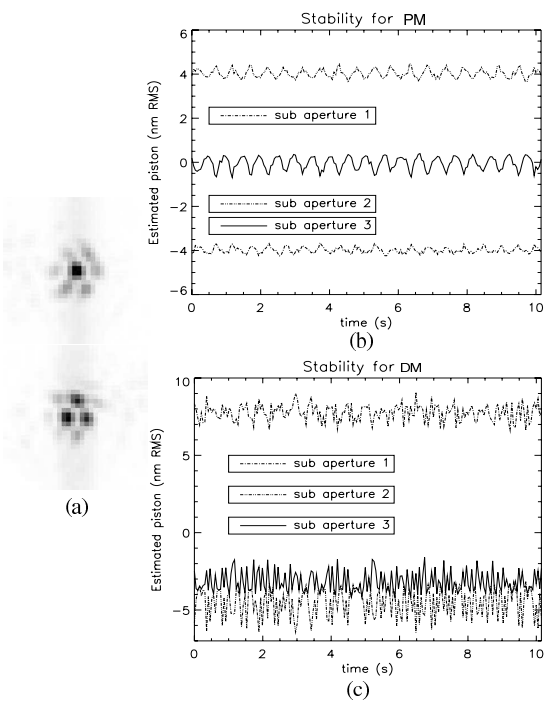


Fig. 9. Bench stability: (a) PSFs obtained with the planar (top) and deformable mirror (bottom), with the corresponding temporal evolution (b) and (c).

As FUSCHIA is a closed-loop estimator, the following procedures are used to reach an initial nearly cophased state where residual pistons and tips/tilts are lower than 2π rad. While the tips/tilts are uncorrected, N_T distinct PSFs are visible on the detector, each PSF corresponding to a subaperture. Precisely superimposing all PSFs directly allows to reduce all differential tips/tilts below 2π rad. Then by slowly increasing or decreasing the optical path difference associated with each subaperture, we can scan for fringes. When fringes are obtained, a conventional algorithm is used to find the central fringe by maximizing the peak modulus in the OTF. Once this fringe is secured, FUSCHIA can be used. Note that in the general case where pistons and tips/tilts fluctuate simultaneously, fringe scanning as described may become difficult, and more robust algorithms are recommended.

For all the tests presented in this section, we record small images of size 64×64 pixels at $\lambda_c=650$ nm, with respect to the Shannon–Nyquist sampling of the images at the focal plane. Two kinds of tests are performed:

- For the linearity test, we apply a sequence of 31 values of a single Zernike mode, piston or tilt, acquiring images at hight flux ($>6\times 10^5$ photo-electrons). Because diffraction is chromatic, focal-plane images are affected by the bandwidth, whereas our model is monochromatic; the spectral band is then an important parameter to optimize. We thus perform several acquisitions, for the reference point source illuminated with the arc lamp and different spectral filters of width 10 nm (so-called F_1), 40 nm (F_2), and 80 nm (F_3) centered on λ_c.
- In the case of the repeatability test, increasing fluxes are considered, ranging from 1.5×10^4 photo-electrons per image (SNR=3) to 1.4×10^6 photo-electrons (SNR=82). For each level, a data set of 90 images is acquired using the arc lamp and the F_2 filter. Since its flux is constant, the luminosity is changed by adjusting the exposure time, covering the whole possible dynamic range of the camera. We use the planar mirror, ensuring that we are near the zero optical path difference (OPD) and avoiding mechanical noise introduced by the piezo-electric platforms of the deformable mirror.

For each test, we first acquire a reference image without phase perturbation to estimate the numerical pupil. Then, aberrations are introduced and retrieved using both the iterative and the analytic estimators.

E. Validation of Piston Estimators

1. Linearity

To check the correct behavior of our phase-retrieval estimators, we first consider linearity tests, applying at high flux (SNR>70) a 30-point piston ramp of [−500 nm, +500 nm] on a given subaperture with the BRISE deformable mirror; some of the corresponding images are shown Fig. 10(a). Figure 10(b) presents, for the mobile subaperture, the piston estimated with the analytic algorithm FUSCHIA using the three filters. We note that near roughly $-\lambda_c/2$ and $+\lambda_c/2$, wrapping occurs due to the intrinsic modulo 2π dynamic range of the estimator. Be-

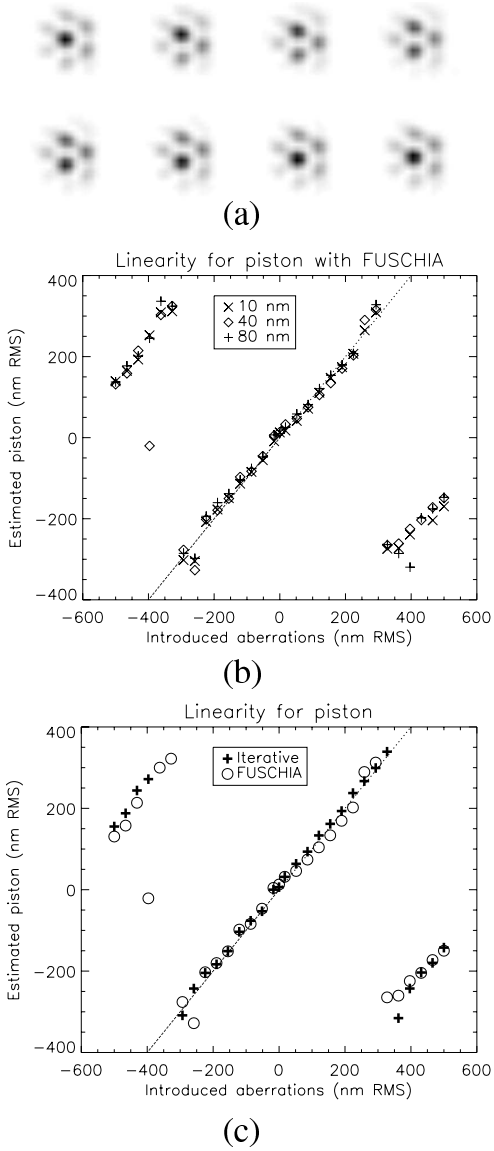


Fig. 10. Linearity of piston estimators: (a) PSFs obtained during a piston scan, from $-\lambda_c$ to $-\lambda_c/2$; (b) piston estimated with FUSCHIA for different bandwidths; (c) comparison between FUSCHIA and the iterative algorithm for the 40 nm bandwidth.

tween these two wrappings, the linearity is excellent, with the slope coefficients close to 1 for each spectral band (0.91 for F_3, 0.96 for F_1 and F_2). The smallest error is obtained with F_1: It is equal to 8 nm, whereas it is equal to 11 nm and 10 nm for F_2 and $F3$, respectively. But with a small band, the number of photons collected is less important, and consequently the repeatability will decrease. There is thus an optimal bandwidth, resulting from a compromise between accuracy and repeatability; we chose the 40-nm-width filter for the next tests. However, we underline that piston cophasing on large spectral band (80 nm at 650 nm, i.e., $\Delta\lambda=\lambda_c/8$) is possible with our monochromatic model. For much wider bandwidth, cophasing operation is possible by explicitly modeling the chromatic dependence [38].

Figure 10(c) shows the piston linearity obtained with the two focal-plane estimators, selecting the images obtained with the 40 nm bandwidth. In each case the piston is quite well reconstructed with slope coefficients close to 1 (0.96 for FUSCHIA, 0.99 for the iterative algorithm) as specified, since no approximation is made for piston. Real-time correction is thus possible in closed loop.

2. Repeatability

Figure 11 presents the piston repeatability for different levels of source brightness. For each data set, the standard deviation of estimated piston is plotted versus the flux N in photo-electrons per image, after the global piston has been removed. First, we note that FUSCHIA and the iterative algorithm give identical results as expected. The graph also shows that in the photon-noise regime, the γ coefficients of Eq. (35) are 4.5 for both estimators. We also note that piston estimation is dominated by the detector noise at the lower flux; the boundary between the two regimes lies around 1.5×10^4 photo-electrons.

With $\sigma_d=8.5$ electrons for DWARF, the number of valid pixels n_{pix} is in reality equivalent to 14×14 pixels, which means that SNR=6. Finally, the 0.75 nm repeatability specified for DWARF is reached with approximatively 5×10^5 photo-electrons per image, which correspond to SNR=50.

F. Validation of Tilt Estimators

1. Linearity

To study the tilt linearity, we apply a 30-point tilt ramp going from −250 nm to 250 nm at high flux (SNR>70); some of the PSFs obtained during the scan are illustrated on Fig. 12(a). On Fig. 12(b) we present the tilt estimated by FUSCHIA for the three spectral filters F_1, F_2, and F_3. First, we note that beyond $|\lambda_c/4|$, the tilt is not well reconstructed because the three PSFs no longer superimpose. In the validity domain, results obtained with the different filters are similar, with a slope coefficient of 1.15 in each

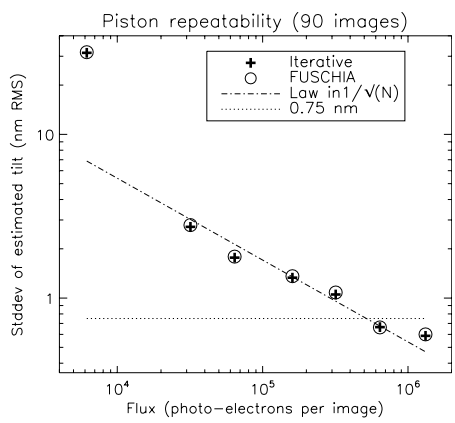


Fig. 11. Piston repeatability estimated with FUSCHIA and the iterative algorithm.

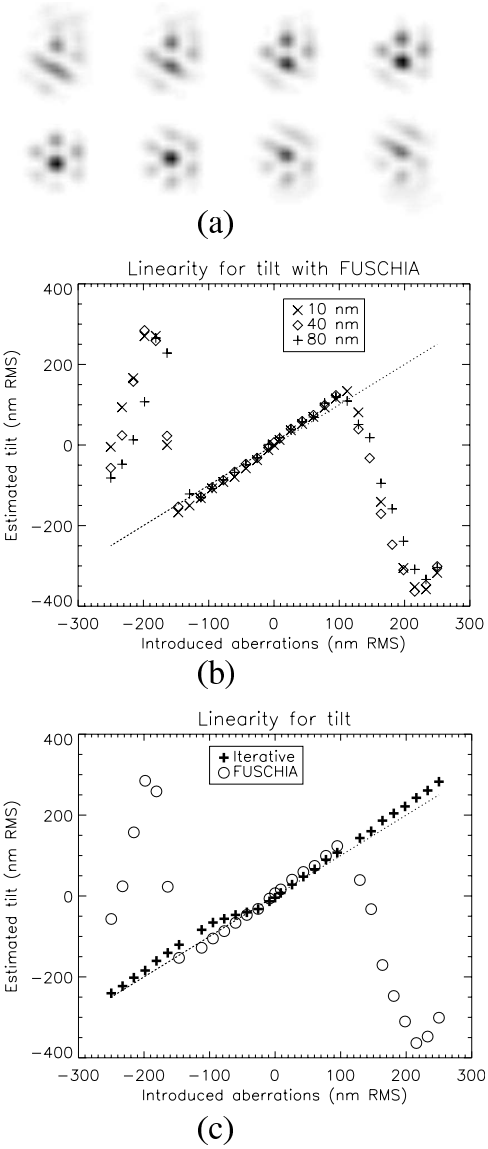


Fig. 12. Linearity of tilt estimators: (a) PSFs obtained during a tilt scan, here illustrated from $-\lambda_c/3$ to $+\lambda_c/7$; (b) tilt estimated with FUSCHIA for different bandwidths; (c) comparison between FUSCHIA and the iterative algorithm for the 40 nm bandwidth.

case. Real-time tilt correction for small aberrations (i.e., $<|\lambda_c/4|$) is thus possible, also with large spectral band with $\Delta\lambda=\lambda_c/8$.

Figure 12(c) compares the two focal-plane estimators computed on the images acquired with the 40 nm bandwidth. When the amplitude of the perturbation is greater than $\lambda_c/4$, the iterative algorithm is initialized to the true aberrations in order to avoid local minima; in this case, tilt estimation is still possible, in contrast to estimation made with FUSCHIA: Although the three PSFs no longer superimpose, fringes created by the second ring of the tilted PSF are sufficient to correctly estimate the tip/tilt with a slope coefficient of 0.93 for the iterative estimator.

2. Repeatability

Figure 13 presents the standard deviation of estimated tilt with FUSCHIA and the iterative algorithm. We note that in the photon-noise regime, aberrations follow the $\gamma/N^{-0.5}$ law but with different coefficients: $\gamma=2.5$ with the iterative algorithm, whereas γ is equal to 4.3 using FUSCHIA. This is due partially to the suboptimal use of FUSCHIA with a compact pupil: since we reject the outer parts of the OTF peaks, not all data are entirely used.

Furthermore, there are static aberrations on the reference mirror, whose values of tilt aberrations lie between $\lambda/600$ and $\lambda/15$, and FUSCHIA performance was shown to degrade as the value of tilt aberration increases.

Nevertheless, tip/tilt sensing at low flux is possible; with the iterative estimator, the 1.21 nm repeatability specified for DWARF is reached for 3.3×10^4 photo-electrons, which corresponds to a SNR of 11; using FUSCHIA, it is obtained for 1.6×10^5 photo-electrons (SNR =27). As expected, the detector noise dominates under 1.4×10^4 photo-electrons (i.e., SNR$\leq$6).

6. CONCLUSION AND OPEN ISSUES

The cophasing of a MAOT requires the estimation of the piston and tip/tilt on each subaperture of its pupil. Focal-plane approaches, such as phase diversity, now constitute serious alternatives to pupil-plane methods. Phase diversity, however, is not very much used for cophasing, as it requires the analysis of two images and its conventional implementation is slow due to its iterative nature.

In this paper we have shown that a single focal image is sufficient for MAOT cophasing as long as the pupil is nonredundant and preferably diluted (even though slightly compact ones may still be used). Adopting a LS approach, we have derived an initial first phase-retrieval estimator. Based on a conventional iterative gradient-descent algorithm, its behavior and performance are typical of current focal-plane solutions. Then under the further assumption of small phases, we have also derived an analytical expression of the piston and tip/tilt aberrations on each subaperture and consequently a second estimator (FUSCHIA). Both algorithms were validated by simulations. Their performance in closed loop are shown to be

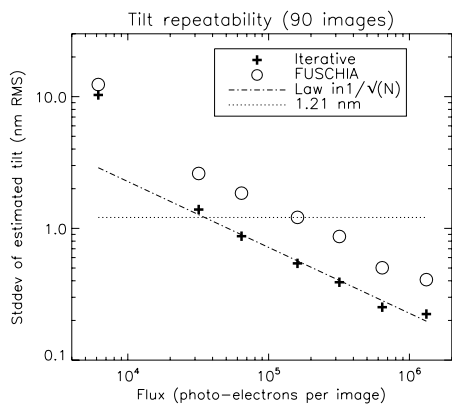


Fig. 13. Tilt repeatability estimated with FUSCHIA and the iterative algorithm.

extremely close, and excellent overall (<1.0 nm error on the piston and tilt estimates for a flux greater 10^5 photoelectrons per pixel). The best use of FUSCHIA is in closed loop or in open loop for piston estimation in conjunction with the iterative estimator for tilt estimation. FUSCHIA is about 20 times faster than the iterative estimator and thus particularly suitable for real-time cophasing.

Experimental validations were also carried out on the ONERA laboratory test bench BRISE, a multipurpose test bed for cophasing sensors. Results show that using FUSCHIA or the iterative algorithm, piston can be estimated on spectral band of width $\lambda/8$ with a subnanometric repeatability reached for a SNR of 50. Tilt is reconstructed as long as the PSFs are superimposed; beyond this domain, FUSCHIA does not work. Between $[-\lambda/4, +\lambda/4]$, nanometric performance is obtained for a SNR respectively equal to 27 and 11 for FUSCHIA and the iterative algorithm. This demonstrates than an accurate real-time piston/tip/tilt correction is possible.

A rather simple cophasing sensor, composed of a focusing device, a fast focal-plane detector, and a standard computer, can thus be used to cophase a number of parallel optical beams with respect to piston and tip/tilt. Such a simple setup minimizes the number of auxiliary optics and thus the need for calibrating the differential paths. This cophasing sensor can be used near the beam combiner of a stellar interferometer, which nowadays typically includes four to eight subapertures (with adaptive optics when required). While designed for the maximum number of beams, the sensor can also operate with a smaller number of beams without any hardware change. Another application is the control of a wide-field MAOT with a pupil made of distributed circular subapertures (such as the MAOT described in Mesrine *et al.* [7]), using only the existing focal-plane detector and an unresolved source (star or calibration source in the object plane).

Focal-plane cophasing sensors are most probably bound to become as widely used as pupil-plane ones as they overcome their initial limitations. In particular, the methods presented in this paper can be generalized to allow the treatment of wide-spectral-bandwidth data. New developments on analytical phase diversity [29] are also a very promising alternative for future real-time cophasing systems.

APPENDIX A: APPROXIMATED OTF AND PTF EXPRESSIONS FOR SMALL ABERRATIONS

The following is a summary of several of F. Cassaing's theoretical results developed in his Ph.D. thesis [39], which have been used in the derivation of the FUSCHIA estimator. They demonstrate the existence of a modal expression of the OTF that is similar to the expression of the pupil transmission using Zernike modes.

Equation (4) shows that the OTF is the sum of $N_T \times N_T$ subaperture correlations $\boldsymbol{p}_n \otimes \boldsymbol{p}_{n'}$, with $\{n,n'\} \in [1 \ldots N_T]$. If $\boldsymbol{\phi}_n$ is the phase on the subaperture n, then

$$(\boldsymbol{p}_n \otimes \boldsymbol{p}_{n'})(\boldsymbol{u}) = \int\int_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{R}^2} \Pi(\boldsymbol{u}')\Pi(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})\exp j[\boldsymbol{\phi}_n(\boldsymbol{u}') - \boldsymbol{\phi}_{n'}(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\boldsymbol{u}'. \tag{A1}$$

Let us call $\mathcal{S}(\boldsymbol{u})$ the overlapping area between the subaperture n and itself translated by $\boldsymbol{u}$. The product $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{u}')\Pi(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})$ is null outside this area. For clarity of further calculations, we will assume this product to be unity inside $\mathcal{S}(\boldsymbol{u})$ (i.e., transmissions are unity). Note then that Eq. (A1) is a sum of phasors. If the subaperture phases $\boldsymbol{\phi}_n$ and $\boldsymbol{\phi}_{n'}$ are small, then this sum can be approximated by a phasor whose phase is $\Phi_{nn'}(\boldsymbol{u})$,

$$\begin{aligned}\Phi_{nn'}(\boldsymbol{u}) &= \int\int_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{R}^2} \Pi(\boldsymbol{u}')\Pi(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})[\boldsymbol{\phi}_n(\boldsymbol{u}') - \boldsymbol{\phi}_{n'}(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\boldsymbol{u}' \\ &= \int\int_{\boldsymbol{u}' \in \mathcal{S}(u)} [\boldsymbol{\phi}_n(\boldsymbol{u}') - \boldsymbol{\phi}_{n'}(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\boldsymbol{u}',\end{aligned} \tag{A2}$$

and whose modulus is $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u})$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\Pi} \otimes \boldsymbol{\Pi})(\boldsymbol{u}) &= \int\int_{\boldsymbol{u}' \in \mathbb{R}^2} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}' \\ &= \int\int_{\boldsymbol{u}' \in S(u)} 1\mathrm{d}\boldsymbol{u}'.\end{aligned} \tag{A3}$$

This approximation means that the OTF is considered to be the product of the unperturbed OTF $\boldsymbol{\Lambda}$ by a phase function, while the effects of the aberrations on the OTF modulus are neglected:

$$(\boldsymbol{p}_n \otimes \boldsymbol{p}_{n'})(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{u})\exp[j\Phi_{nn'}(\boldsymbol{u})]. \tag{A4}$$

Expanding the phase on Zernike modes as in Eq. (3) leads to

$$\Phi_{nn'}(\boldsymbol{u}) = \int\int_{\boldsymbol{u}' \in \mathcal{S}(u)} \sum_{k=1}^{3} [a_{kn}\boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}') - a_{kn'}\boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\boldsymbol{u}' \tag{A5}$$

$$= \int\int_{\boldsymbol{u}' \in \mathcal{S}(u)} \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{a_{kn} - a_{kn'}}{2}[\boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}') + \boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})] + \frac{a_{kn} + a_{kn'}}{2}[\boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}') - \boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})] \right\}\mathrm{d}\boldsymbol{u}' \tag{A6}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} (\alpha_{nn'}^{k+}\boldsymbol{Z}_k^- + \alpha_{nn'}^{k-}\boldsymbol{Z}_k^+)(\boldsymbol{u}), \tag{A7}$$

where the following notation has been used:

$$\alpha_{nn'}^{k\pm} = a_{kn} \pm a_{kn'}, \tag{A8}$$

$$\mathcal{Z}_k^{\pm}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int\int_{\boldsymbol{u}'\in\mathcal{S}(u)} [\boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}') \pm \boldsymbol{Z}_k(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u})]\mathrm{d}\boldsymbol{u}'. \quad \text{(A9)}$$

Due to the properties of Zernike polynomials, it can be shown that if the radial order of Zernike polynomial $\boldsymbol{Z}_k$ is even, then $\mathcal{Z}_k^- = 0$; and if it is odd, $\mathcal{Z}_k^+ = 0$. Consequently, we will redefine $\mathcal{Z}_k$ as the non-null corresponding polynomials and $\alpha_{nn'}^k$ as the corresponding coefficient. Thus, if $\boldsymbol{Z}_k$ is of even radial order,

$$\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k^+, \quad \alpha_{nn'}^k = \alpha_{nn'}^{k-}. \quad \text{(A10)}$$

Otherwise, $\boldsymbol{Z}_k$ is of odd radial order:

$$\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k^-, \quad \alpha_{nn'}^k = \alpha_{nn'}^{k+}. \quad \text{(A11)}$$

With this notation and Eq. (4), the final approximated expression of the OTF for small aberrations becomes

$$s \approx \sum_{n=1}^{N_T}\sum_{n'=1}^{N_T} \boldsymbol{\Lambda} \exp\left(j\sum_{k=1}^{3} \alpha_{nn'}^k \mathcal{Z}_k\right) \star \delta_{\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_{n'}}. \quad \text{(A12)}$$

It can be shown that those new modes $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, and $\mathcal{Z}_3$ are proportional to the Zernike modes $\boldsymbol{Z}_1$, $\boldsymbol{Z}_2$, and $\boldsymbol{Z}_3$ scaled to a double support. Consequently, Eq. (A12) is very similar to the expression of the transmission in the pupil plane:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{n=1}^{N_T} \boldsymbol{\Pi} \exp\left(j\sum_{k=1}^{3} a_{kn}\boldsymbol{Z}_k\right) \star \delta_{\boldsymbol{u}_n}. \quad \text{(A13)}$$

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Gerard Rousset, whose ideas on phase retrieval ultimately led us to the development of this paper. We thank DGA/SPOTI for the financial support of the BRISE development and ESA for supporting DWARF. We are grateful to Stefan Hofer, Helke Schmidt, and Hans Thiele (Kayser-Threde) for manufacturing the DWARF breadboard and for fruitful discussions. Finally, we thank CNES and ONERA, who financed the first and second authors during their Ph.D. theses.

REFERENCES

1. VLTI website, http://www.eso.org/projects/vlti.
2. KECK website, http://planetquest.jpl.nasa.gov/Keck/keck_index.html.
3. OHANA website, http://www.cfht.hawaii.edu/~lai/ohana.html.
4. DARWIN website, http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=28.
5. TPF website, http://planetquest.jpl.nasa.gov/TPF/tpf_index.html.
6. JWST website, http://www.jwst.nasa.gov.
7. M. Mesrine, E. Thomas, S. Garin, P. Blanc, C. Alis, F. Cassaing, and D. Laubier, "High resolution Earth observation from Geostationary orbit by optical aperture synthesis," in *Sixth International Conference on Space Optics, Proceedings of ESA/CNES ISCO 2006*, A. Wilson, ed., CDROM, ESA SP-621 (2006).
8. NAOS website, http://www.eso.org/instruments/naco.
9. R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures," Optik (Stuttgart) **35**, 237–246 (1972).
10. R. A. Gonsalves, "Phase retrieval from modulus data," J. Opt. Soc. Am. **66**, 961–964 (1976).
11. J. G. Walker, "The phase retrieval problem: a solution based on zero location by exponential apodization," Opt. Acta **28**, 735–738 (1981).
12. J. R. Fienup, "Phase retrieval algorithms: a comparison," Appl. Opt. **21**, 2758–2769 (1982).
13. J. N. Cederquist, J. R. Fienup, C. C. Wackerman, S. R. Robinson, and D. Kryskowski, "Wave-front phase estimation from Fourier intensity measurements," J. Opt. Soc. Am. A **6**, 1020–1026 (1989).
14. R. A. Gonsalves, "Small-phase solution to the phase retrieval problem," Opt. Lett. **26**, 684–685 (2001).
15. A. Blanc, "Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images: apports de la diversité de phase," Ph.D. thesis (Université Paris XI Orsay, 2002).
16. J. R. Fienup, "Phase-retrieval algorithms for a complicated optical system," Appl. Opt. **32**, 1737–1746 (1993).
17. J. R. Fienup, J. C. Marron, T. J. Schulz, and J. H. Seldin, "Hubble space telescope characterized by using phase retrieval algorithms," Appl. Opt. **32**, 1747–1768 (1993).
18. R. A. Gonsalves, "Phase retrieval and diversity in adaptive optics," Opt. Eng. (Bellingham) **21**, 829–832 (1982).
19. L. M. Mugnier, A. Blanc, and J. Idier, "Phase diversity: a technique for wave-front sensing and for diffraction-limited imaging," in *Advances in Imaging and Electron Physics*, P. Hawkes, ed. (Elvesier, 2006), Vol. 20, pp. 1–76.
20. A. Blanc, T. Fusco, M. Hartung, L. M. Mugnier, and G. Rousset, "Calibration of NAOS and CONICA static aberrations. Application of the phase diversity technique," Astron. Astrophys. **399**, 373–383 (2003).
21. R. G. Paxman and J. R. Fienup, "Optical misalignment sensing and image reconstruction using phase diversity," J. Opt. Soc. Am. A **5**, 914–923 (1988).
22. R. G. Paxman, T. J. Schultz, and J. R. Fienup, "Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity," J. Opt. Soc. Am. A **9**, 1072–1085 (1992).
23. F. Baron, "Définition et test d'un capteur de cophasage sur télescope multipupilles: application à la détection d'exoplanètes et à l'observation de la Terre," Ph.D. thesis (Ecole Doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Ile de France, 2005).
24. C. R. Vogel, T. Chan, and R. Plemmons, "Fast algorithms for phase-diversity-based blind deconvolution," Proc. SPIE **3353**, 994–1005 (1998).
25. M. G. Löfdahl, A. L. Duncan, and G. B. Scharmer, "Fast phase diversity wavefront sensor for mirror control," Proc. SPIE **3353**, 952–963 (1998).
26. R. L. Kendrick, D. S. Acton, and A. L. Duncan, "Phase-diversity wave-front sensor for imaging systems," Appl. Opt. **33**, 6533–6546 (1994).
27. G. B. Scharmer, "Object-independent fast phase-diversity," in *High Resolution Solar Physics: Theory, Observations and Techniques*, T. R. Rimmele, K. S. Balasubramaniam, and R. R. Radick, eds., Vol. 183 of Astron. Soc. Pacific Conf. Series (1999), pp. 330–341.
28. M. G. Löfdahl and G. B. Scharmer, "A predictor approach for closed-loop phase diversity wavefront sensing," Proc. SPIE **4013**, 737–748 (2000).
29. I. Mocœur, L. M. Mugnier, and F. Cassaing, "Cophasage de télescopes multi pupilles sur scènes étendues par diversité de phase temps-réel," presented at la 26ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images, September 11–14, 2007, Troyes, France. Available from the authors: mugnier@onera.fr.
30. J. Idier, L. M. Mugnier, and A. Blanc, "Statistical behavior of joint least square estimation in the phase diversity context," IEEE Trans. Image Process. **14**, 2107–2116 (2005).
31. C. V. M. Fridlund, "The DARWIN mission," Adv. Space Res. **34**, 613–617 (2004).
32. R. J. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," J. Opt. Soc. Am. **66**, 207–211 (1976).
33. F. Cassaing, "Optical path difference sensors," C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. IV **21**, 87–98 (2001).
34. B. Sorrente, F. Cassaing, F. Baron, C. Coudrain, B. Fleury, F. Mendez, V. Michau, L. Mugnier, G. Rousset, L. Rousset-Rouvière, and M.-T. Velluet, "Multiple-aperture optical

telescopes: cophasing sensor test-bed," in *Proceedings of the 5th International Conference on Space Optics*, B. Warmbein, ed., Vol. SP-554 (ESA, 2004), pp. 479–484.

35. F. Cassaing, B. Sorrente, L. Mugnier, G. Rousset, V. Michau, I. Mocœur, and F. Baron, "BRISE: a multipurpose bench for cophasing sensors," Proc. SPIE **6268**, 626834 (2006).
36. F. Cassaing, F. Baron, E. Schmidt, S. Hofer, L. M. Mugnier, M. Barillot, G. Rousset, T. Stuffler, and Y. Salvadé, "DARWIN Fringe Sensor (DWARF): Concept study," in *Proceedings of the Conference on Towards Other Earths: DARWIN/TPF and the Search for Extrasolar Terrestrial Planets*, M. Fridlund, T. Henning, and H. Lacoste, eds., Vol. SP-539 (ESA, 2003), pp. 389–392.
37. E. Schmidt, F. Cassaing, S. Hofer, M. Barillot, F. Baron, L. M. Mugnier, G. Rousset, and T. Stuffler, "DARWIN Fringe Sensor (DWARF): breadboard development," in *Proceedings of the Conference on Towards Other Earths: DARWIN/TPF and the Search for Extrasolar Terrestrial Planets*, M. Fridlund, T. Henning, and H. Lacoste, eds., Vol. SP-539, (ESA, 2003), pp. 575–577.
38. J. H. Seldin, R. G. Paxman, V. G. Zarifis, L. Benson, and R. E. Stone, "Closed-loop wavefront sensing for a sparse-aperture, phased-array telescope using broadband phase diversity," Proc. SPIE **4091**, 48–63 (2000).
39. F. Cassaing, "Analyse d'un instrument à synthèse d'ouverture optique: méthodes de cophasage et imagerie à haute résolution angulaire," Ph.D. thesis (Université Paris XI Orsay, 1997).

Bibliographie

Baba, N. & Mutoh, K., 2001. Measurement of telescope aberrations through atmospheric turbulence by use of phase diversity. *Appl. Opt.* **40** 4, 544–552.

Baron, F., 2005. *Définition et test d'un capteur de cophasage sur télescope multi-pupilles : application à la détection d'exoplanètes et à l'observation de la Terre*. Thèse de doctorat, Université Paris VI Pierre et Marie Curie.

Baron, F., Cassaing, F., Blanc, A., & Laubier, D., 2002. Cophasing a wide field multiple-aperture array by phase-diversity : influence of aperture redundancy and dilution. Dans *Interferometry in Space* (M. Shao, ed.), volume 4852 de *SPIE proceedings series*, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Baron, F., Mocœur, I., Cassaing, F., & Mugnier, L., 2008. Unambiguous phase retrieval as a cophasing sensor for phased array telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 5, 1000–1015.

Blanc, A., 2002. *Identification de réponse impulsionnelle et restauration d'images : apports de la diversité de phase*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay.

Blanc, A., Fusco, T., Hartung, M., Mugnier, L. M., & Rousset, G., 2003a. Calibration of NAOS and CONICA static aberrations. Application of the phase diversity technique. *Astron. Astrophys.* **399**, 373–383.

Blanc, A., Idier, J., & Mugnier, L. M., 2000. Novel estimator for the aberrations of a space telescope by phase diversity. Dans *UV, Optical, and IR Space Telescopes and Instruments* (J. B. Breckinridge & P. Jakobsen, eds.), volume 4013 de *SPIE proceedings series*, pp. 728–736, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Blanc, A., Mugnier, L. M., & Idier, J., 2003b. Marginal estimation of aberrations and image restoration by use of phase diversity. *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 6, 1035–1045.

Bucci, O. M., Capozzoli, A., & D'Elia, G., 1999. Regularizing strategy for image restoration and wave-front sensing by phase diversity. *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 7, 1759–1768.

Cassaing, F., 1997. *Analyse d'un instrument à synthèse d'ouverture optique : méthodes de cophasage et imagerie à haute résolution angulaire*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay.

Cassaing, F., Baron, F., Mugnier, L., & Rousset, G., 2003a. TN1 : Critical assessment and conceptual design. Rapport Technique 1/07708 DOTA, ONERA.

Cassaing, F., Baron, F., Schmidt, E., Hofer, S., Mugnier, L. M., Barillot, M., Rousset, G., Stuffler, T., & Salvadé, Y., 2003b. DARWIN Fringe Sensor (DWARF) : Concept Study. Dans *Proceedings of*

the Conference on Towards Other Earths : DARWIN/TPF and the Search for Extrasolar Terrestrial Planets (M. Fridlund, T. Henning, & H. Lacoste, eds.), volume SP-539 de *ESA Special Publication*, pp. 389–392, ESA.

Cassaing, F., Mocœur, I., & Mugnier, L., 2007. Procédé d'estimation d'au moins une déformation du front d'onde d'un système optique ou d'un objet observé par le système optique et dispositif associé. Demande de brevet en cours d'examen.

Cassaing, F. & Mugnier, L., 2007. Procédé d'analyse de surface d'onde et dispositif associé. Demande de brevet en cours d'examen.

Cassaing, F., Sorrente, B., Mugnier, L., Rousset, G., Michau, V., Mocœur, I., & Baron, F., 2006. BRISE : a multipurpose bench for cophasing sensors. Dans *Advances in Stellar Interferometry* (J. D. Monnier, M. Schöller, & W. C. Danchi, eds.), volume 6268 de *SPIE proceedings series*, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Chanan, G. A., Nelson, J. E., & Mast, T. S., 1986. Segment alignment for the Keck Telescope primary mirror. Dans *Advanced technology optical telescopes III* (L. D. Barr, ed.), volume 628 de *SPIE proceedings series*, pp. 466–470, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Cladé, S., 2005. *Synthèse d'ouverture optique pour l'observation à haute résolution du Soleil : étude des systèmes de correction de front d'onde et de filtrage spectral de l'instrument*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay.

Clampin, M., Atkinson, C., Feinberg, L., Hayden, W., Lightsey, P., Mountain, M., & Texter, S., 2003. Status of the JWST Observatory Design. Dans *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 35, p. 1408, Am. Astr. Soc.

Conan, J. M., Mugnier, L. M., Fusco, T., Michau, V., & Rousset, G., 1998. Myopic Deconvolution of Adaptive Optics Images by use of Object and Point Spread Function Power Spectra. *Appl. Opt.* **37** 21, 4614–4622.

Damé, L., Derrien, M., Kozlowski, M., & Merdjane, M., 1998. High Resolution Solar Physics by Interferometry : SOLARNET. Dans *Crossroads for European Solar and Heliospheric Physics. Recent Achievements and Future Mission Possibilities*, volume 417 de *ESA Special Publication*, pp. 109–131, ESA.

De Hainaut, C. R., Duneman, D. C., Dymale, R. C., Blea, J. P., O'Neil, B. D., & Hines, C. E., 1995. Wide field performance of a phased array telescope. *Opt. Eng.* **34** 3, 876–880.

Dolne, J. J. & Schall, H. B., 2005. Fundamental performance bounds of phase diversity blind deconvolution algorithm for various diversity polynomials, noise statistics, and scene size. Dans *Atmospheric Propagation II* (C. Y. Young & G. C. Gilbreath, eds.), volume 5793 de *SPIE proceedings series*, pp. 118–128, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Dolne, J. J., Tansey, R. J., Black, K. A., Deville, J. H., Cunningham, P. R., Widen, K. C., & Idell, P. S., 2003. Practical issues in wave-front sensing by use of phase diversity. *Appl. Opt.* **42**, 5284–5289.

Ellerbroek, B. L., Thelen, B. J., Lee, D. J., Carrara, D. A., & Paxman, R. G., 1997. Comparison of Shack-Hartmann wavefront sensing and phase-diverse phase retrieval. Dans *Adaptive Optics and*

Applications I (R. K. Tyson & R. Q. Fugate, eds.), volume 3126 de *SPIE proceedings series*, pp. 307–320, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Faucherre, M., Merkle, F., & Vakili, F., 1989. Beam combination in aperture synthesis from space : field of view limitations and (u,v) plane coverage optimisation. Dans *New technologies for astronomy* (J.-P. Swings, ed.), volume 1130 de *SPIE proceedings series*, pp. 138–145, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Fender, J. & Carreras, R. A., 1988. Demonstration of an optically phased telescope array. *Opt. Eng.* **27** 9, 706–711.

Fienup, J. R., Marron, J. C., Schulz, T. J., & Seldin, J. H., 1993. Hubble Space Telescope characterized by using phase-retrieval algorithms. *Appl. Opt.* **32** 10, 1747–1767.

Fienup, J. R., Thelen, B. J., Paxman, R. G., & Carrara, D. A., 1998. Comparison of phase diversity and curvature wavefront sensing. Dans *Adaptive Optical System Technologies* (D. Bonaccini & R. K. Tyson, eds.), volume 3353 de *SPIE proceedings series*, pp. 930–940, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Fusco, T., *et al.*, 2004. NAOS performance characterization and turbulence parametres estimation using closed-loop data. Dans *Advancements in Adaptive Optics* (D. B. Calia, B. L. Ellerbroek, & R. Ragazzoni, eds.), volume 5490 de *SPIE proceedings series*, pp. 118–129, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Gerchberg, R. W. & Saxton, W. O., 1972. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik* **35**, 237–246.

Gilmozzi, R. & Spyromilio, J., 2007. The European Extremely Large Telescope (E-ELT). *ESO Messenger* **127**, 11–19.

Golay, M. J. E., 1971. Letters to the Editor : Point Arrays Having Compact, Nonredundant Autocorrelations. *J. Opt. Soc. Am.* **61** 2, 272–273.

Gonsalves, R. A., 1976. Phase retrieval from modulus data. *J. Opt. Soc. Am.* **66** 9, 961–964.

Gonsalves, R. A., 1982. Phase retrieval and diversity in adaptive optics. *Opt. Eng.* **21** 5, 829–832.

Gonsalves, R. A., 2001. Small-phase solution to the phase-retrieval problem. *Opt. Lett.* **26** 10, 684–685.

Goussard, Y., Demoment, G., & Idier, J., 1990. A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike. Dans *15th International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, IEEE proceedings series, pp. 1547–1550, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.

Gratadour, D., 2005. *Optique adaptative, traitement d'image et étude des noyaux actifs de galaxie*. Thèse de doctorat, Université Paris VII Denis Diderot.

Gratadour, D., Mugnier, L. M., & Rouan, D., 2005. Sub-pixel image registration with a maximum likelihood estimator. *Astron. Astrophys.* **443**, 357–365.

Harvey, J. E. & Ftaclas, C., 1990. Fundamental limitations on off-axis performance of phased telescope arrays. Dans *Advanced technology optical telescopes IV* (L. D. Barr, ed.), volume 1236 de *SPIE proceedings series*, pp. 390–405, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Helstrom, C. W., 1967. Image restauration by the Method of Least Square. *J. Opt. Soc. Am.* **57** 3, 297–303.

Idier, J., Mugnier, L., & Blanc, A., 2005. Statistical behavior of joint least square estimation in the phase diversity context. *IEEE Trans. Image Processing* **14** 12, 2107–2116.

Jefferies, S. M., Lloyd-Hart, M., Hege, E. K., & Georges, J., 2002. Sensing Wave-Front Amplitude and Phase with Phase Diversity. *Appl. Opt.* **41** 11, 2095–2102.

Kellerer, A. & Tokovinin, A., 2007. Atmospheric coherence time in interferometry : definition and measurement. *Astron. Astrophys.* **461**, 775–781.

Kendrick, R. L., Acton, D. S., & Duncan, A. L., 1994. Phase-diversity wave-front sensor for imaging systems. *Appl. Opt.* **33** 27, 6533–6546.

Kendrick, R. L., *et al.*, 2006. Wide-field Fizeau imaging telescope : experimental results. *Appl. Opt.* **45** 18, 4235–4240.

Kolmogorov, A. N., 1941. Local structure of turbulence in incompressible fluids with very high Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **30** 4, 301–305.

Labeyrie, A., 1996. Resolved imaging of extra-solar planets with future 10-100 km optical interferometric arrays. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **118**, 517–524.

Lardière, O., Martinache, F., & Patru, F., 2007. Direct imaging with highly diluted apertures - I. Field-of-view limitations. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **375**, 977–988.

Lee, D. J., Roggemann, M. C., & Welsh, B. M., 1999. Cramer-Rao analysis of phase-diverse wavefront sensing. *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 5, 1005–1015.

Lee, D. J., Welsh, B. M., Roggemann, M. C., & Ellerbroek, B. L., 1997. Diagnosing unknown aberrations in an adaptive optics system by use of phase diversity. *Opt. Lett.* **22** 13, 952–954.

Löfdahl, M. G. & Duncan, A. L., 1998. Fast phase diversity wavefront sensor for mirror control. Dans *Adaptative Optical System Technologies* (D. Bonaccini & R. K. Tyson, eds.), volume 3353 de *SPIE proceedings series*, pp. 952–963, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Löfdahl, M. G., Kendrick, R. L., Harwit, A., Mitchell, K. E., Duncan, A. L., Seldin, J. H., Paxman, R. G., & Acton, D. S., 1998. Phase diversity experiment to measure piston misalignment on the segmented primary mirror of the Keck II Telescope. Dans *Space Telescopes and Instruments V* (P. Y. Bely & J. B. Breckinridge, eds.), volume 3356 de *SPIE proceedings series*, pp. 1190–1201, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Löfdahl, M. G. & Scharmer, G. B., 1994. Wavefront sensing and image restoration from focused and defocused solar images. *Astron. Astrophys.* **107**, 243–264.

Löfdahl, M. G. & Scharmer, G. B., 2000. A predictor approach to closed-loop phase-diversity wavefront sensing. Dans *UV, optical and IR space telescopes and instruments* (J. B. Breckinreidge & P. Jakobsen, eds.), volume 4013 de *SPIE proceedings series*, pp. 737–748, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Löfdahl, M. G., Scharmer, G. B., & Wei, W., 2000. Calibration of a deformable mirror and Strehl ratio measurements by use of phase diversity. *Appl. Opt.* **39** 1, 94–103.

Mahajan, V. N., 1982. Strehl ratio for primary aberrations : some analytical results for circular and annular pupils. *J. Opt. Soc. Am.* **72** 9, 1258–1266.

Meinel, A. B., 1970. Aperture Synthesis Using Independent Telescopes. *Appl. Opt.* **9** 11, 2501–2504.

Meynadier, L., 1997. *Analyse de surface d'onde pour le contrôle actif d'un télescope spatial*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis.

Meynadier, L., Michau, V., Velluet, M.-T., Conan, J.-M., Mugnier, L. M., & Rousset, G., 1999. Noise propagation in wave-front sensing with phase diversity. *Appl. Opt.* **38** 23, 4967–4979.

Michau, V., Rousset, G., & Fontanella, J.-C., 1992. Wavefront sensing from extended sources. Dans *Real Time and Post Facto Solar Image Correction* (R. R. Radick, ed.), volume 13 de *NSO/SP Summer Workshop Series*, pp. 124–128, National Solar Observatory/Sacramento Peak.

Michelson, A., 1927. *Studies in Optics*. Chicago University Press, Chicago.

Misell, D. L., 1973. An examination of an iterative method for the solution of the phase problem in optics and electron optics : I. Test calculations. *J. Phys. D : Appl. Phys.* **6**, 2200–2216.

Mocœur, I., Mugnier, L., & Cassaing, F., 2009a. Estimation des défauts d'alignement d'un instrument multipupille par Diversité de Phase temps-réel. *Trait. Signal* **26** 1, 305–314.

Mocœur, I., Mugnier, L., & Cassaing, F., 2009b. Real-time Wave Front sensing method by Phase Diversity. soumis à la revue *Opt. Lett.*

Mocœur, I., Mugnier, L. M., & Cassaing, F., 2007. Amélioration des performances d'imagerie d'un télescope multi-pupilles par Diversité de Phase temps-réel. Dans *21ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*, Actes du colloque GRETSI, Gr. de Rech. et d'Et. du Trait. du Sign. et des Im.

Mugnier, L., Cassaing, F., Rousset, G., Baron, F., Michau, V., Mocœur, I., Sorrente, B., & Velluet, M.-T., 2005. Continuous High-Resolution Earth Observation with Multiple Aperture Optical Telescopes. Dans *Proceedings of the OPTRO 2005 International Symposium*, Assoc. Aéro. et Astro. de France.

Mugnier, L. M., Blanc, A., & Idier, J., 2006. Phase Diversity : a Technique for Wave-Front Sensing and for Diffraction-Limited Imaging. Dans *Advances in Imaging and Electron Physics* (P. Hawkes, ed.), volume 141, chapitre 1, pp. 1–76, Elsevier.

Mugnier, L. M., Le Besnerais, G., & Meimon, S., 2008. Inverse problems in optical imaging through atmospheric turbulence. Dans *Bayesian Approach for Inverse Problems* (J. Idier, ed.), chapitre 10, ISTE, London.

Mugnier, L. M., Rousset, G., & Cassaing, F., 1996. Aperture Configuration Optimality Criterion for Phased Arrays of Optical Telescopes. *J. Opt. Soc. Am. A* **13** 12, 2367–2374.

Noll, R. J., 1976. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.* **66** 3, 207–211.

Patru, F., *et al.*, 2008. First results from a laboratory hypertelescope using single-mode fibers. *Astron. Astrophys.* **477**, 345–352.

Paxman, R. G. & Crippen, S. L., 1990. Aberration correction for phased-array telescopes using phase diversity. Dans *Digital Image Synthesis and Inverse Optics* (A. F. Gmitro, P. S. Idell, & I. J. Lahaie, eds.), volume 1351 de *SPIE proceedings series*, pp. 787–797, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Paxman, R. G. & Fienup, J. R., 1988. Optical misalignment sensing and image reconstruction using phase diversity. *J. Opt. Soc. Am. A* **5** 6, 914–923.

Paxman, R. G., Schulz, T. J., & Fienup, J. R., 1992. Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity. *J. Opt. Soc. Am. A* **9** 7, 1072–1085.

Perrin, G. S., *et al.*, 2004. 'OHANA. Dans *New Frontiers in Stellar Interferometry* (W. A. Traub, ed.), volume 5491 de *SPIE proceedings series*, pp. 391–404, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Platt, B. C. & Shack, R., 2001. History and Principles of Shack-Harmtann Wavefront Sensing. *J. Refr. Surg. Suppl. Ser.* **17**, 573–577.

Ragazzoni, R., Marchetti, E., & Rigaut, F., 1999. Modal tomography for adaptive optics. *Astron. Astrophys.* **342**, 53–56.

Roddier, C. & Roddier, F., 1993. Wave-front reconstruction from defocused images and testing of ground based optical telescope. *J. Opt. Soc. Am. A* **10** 5, 957–965.

Roddier, F., 1988. Passive versus active methods in optical interferometry. Dans *High-Resolution Imaging by Interferometry* (F. Merkle, ed.), volume 29 de *ESO Conference and Workshop Proceedings*, pp. 565–574, Eur. South. Obs.

Roddier, F., 1999. *Adaptive Optics in Astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge.

Rousset, G., 1999. Wave-front sensors. Dans *Adaptive Optics in Astronomy*, chapitre 5, pp. 91–130, Cambridge University Press, Cambridge.

Rousset, G., Mugnier, L. M., Cassaing, F., & Sorrente, B., 2001. Imaging with Multi-Aperture Optical Telescopes and an application. *Compte Rendu Acad. des Sciences* **Série IV, tome 2** 1, 17–25.

Scharmer, G. B., 1999. Object-independent Fast phase-diversity. Dans *High resolution solar physics : Theory, observations and techniques* (T. R. Rimmele, K. S. Balasubramaniam, & R. R. Radick, eds.), volume 183 de *ASP conferences Series*, pp. 330–341, Pub. Astron. Soc. Pacific.

Seldin, J. H. & Paxman, R. G., 1994. Phase-diverse speckle reconstruction of solar data. Dans *Image Reconstruction and Restoration* (T. Schulz & D. Snyder, eds.), volume 2302 de *SPIE proceedings series*, pp. 268–280, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Seldin, J. H., Paxman, R. G., Zarifis, V. G., Benson, L., & Stone, R. E., 2000. Closed-loop wavefront sensing for a sparse-aperture, phased-array telescope using broadband phase diversity. Dans *Imaging technology and telescopes* (J. Bilbro, J. Breckinridge, R. Carreras, S. Czyzak, M. Eckart, R. Fiete, & P. Idell, eds.), volume 4091 de *SPIE proceedings series*, pp. 48–63, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Seldin, J. H., Reiley, M. F., Paxman, R. G., Stribling, B. E., Ellerbroeck, B. L., & Johnston, D. C., 1997. Space-object identification using phase-diverse speckle. Dans *Imaging reconstruction and restoration II* (T. Schultz, ed.), volume 3170 de *SPIE proceedings series*, pp. 2–15, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Shao, M. & Staelin, D. H., 1980. First fringe measurements with a phase-tracking stellar interferometer. *Appl. Opt.* **19**, 1519–1522.

Sorrente, B., Cassaing, F., Fleury, B., Coudrain, C., Mugnier, L., & Mendez, F., 2003. Synthèse d'ouverture optique pour satellite d'observation : rapport final des tâches 1.1 à 1.4. Rapport Technique 2/05254 DOTA, ONERA.

Sorrente, B., *et al.*, 2004. Multiple-Aperture Optical Telescopes : cophasing sensor testbed. Dans *5th International Conference On Space Optics*, volume SP-554 de *ESA Special Publication*, pp. 479–484, CNES/ESA, ESA, Toulouse, France.

Specht, D. F., Kendrick, R. L., & Zarifis, V. G., 2004. Fast phase diversity wavefront correction using a neural network. United States Patent n° 6,787,747.

Strehl, K., 1902. Über Luftschlieren und Zonenfehler. *Zeitschrift für Instrumentenkunde* **22**, 213–217.

Thelen, B. J., Paxman, R. G., Carrara, D. A., & Seldin, J. H., 1999. Maximum a posteriori estimation of fixed aberrations, dynamic aberrations, and the object from phase-diverse speckle data. *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 5, 1016–1025.

Traub, W. A., 1986. Combining beams from separated telescopes. *Appl. Opt.* **25** 4, 528–532.

Tyler, D. W., *et al.*, 1998. Comparison of image reconstruction algorithms using adaptive optics instrumentation. Dans *Adaptive Optical System Technologies*, volume 3353 de *SPIE proceedings series*, pp. 160–171, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Vogel, C. R., Chan, T., & Plemmons, R., 1998. Fast algorithms for phase-diversity-based blind deconvolution. Dans *Adaptative Optical System Technologies* (D. Bonaccini & R. K. Tyson, eds.), volume 3353 de *SPIE proceedings series*, pp. 994–1005, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Wagner, R. M., 2006. An overview of instrumentation for the Large Binocular Telescope. Dans *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy.* (I. S. McLean & M. Iye, eds.), volume 6269 de *SPIE proceedings series*, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Witebsky, C., Minor, R. H., Veklerov, E., & Jared, R. C., 1990. Alignment and calibration of the W.M. Keck Telescope segmented primary mirror. Dans *Advanced technology optical telescopes IV* (L. D. Barr, ed.), volume 1236 de *SPIE proceedings series*, pp. 1052–1060, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.

Zarifis, V., *et al.*, 1999. The Multi Aperture Imaging Array. Dans *Working on the fringe : optical and IR Interferometry from Ground and Space* (S. C. Unwin & R. V. Stachnik, eds.), volume 194 de *ASP conferences Series*, pp. 278–285, Pub. Astron. Soc. Pacific.

Zhang, A., Wang, T., Li, Z., Zhang, J., & Liang, B., 2007. Algorithm study of phase diverse speckle corrective technique. Dans *Fundamental Problems of Optoelectronics and Microelectronics III* (Y. N. Kulchin, J. Ou, O. B. Vitrik, & Z. Zhou, eds.), volume 6595 de *SPIE proceedings series*, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.