



HAL
open science

Détection numérique de petites imperfections de conductivité en 2D et 3D par une méthode dynamique basée sur l'équation des ondes et le contrôle géométrique

Jean-Baptiste Duval

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Duval. Détection numérique de petites imperfections de conductivité en 2D et 3D par une méthode dynamique basée sur l'équation des ondes et le contrôle géométrique. Mathématiques [math]. Université de Picardie Jules Verne, 2009. Français. NNT : . tel-00429530

HAL Id: tel-00429530

<https://theses.hal.science/tel-00429530>

Submitted on 3 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
UFR DES SCIENCES

THÈSE

pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE
Spécialité : Mathématiques

Détection numérique de petites imperfections de conductivité en 2D et 3D par une méthode dynamique basée sur l'équation des ondes et le contrôle géométrique

présentée et soutenue publiquement le 19 Octobre 2009

par

Jean-Baptiste Duval

Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées
CNRS UMR 6140

Directeur de thèse : Mark Asch

Membres du jury

M. Mark ASCH	<i>Directeur de thèse</i>	Univ. de Picardie, Amiens
M. Jean-Paul CHEHAB	<i>Examinateur</i>	Univ. de Picardie, Amiens
Mlle. Marion DARBAS	<i>Examinateur</i>	Univ. de Picardie, Amiens
M. Laurent DI MENZA	<i>Rapporteur</i>	Univ. de Reims, Reims
M. Olivier GOUBET	<i>Président</i>	Univ. de Picardie, Amiens
M. Ioan IONESCU	<i>Rapporteur</i>	Univ. de Paris XIII, Paris
M. Arnaud MUNCH	<i>Examinateur</i>	Univ. B. Pascal, Clermont-Ferrand

Abstract/Résumé

Abstract

In this thesis, we consider the numerical solution, in two- and three-dimensional bounded domains, of the inverse problem for identifying the location of small-volume, conductivity imperfections in a medium with homogeneous background.

The identification of these inhomogeneities reposes on a dynamic approach based on the wave equation. Our numerical algorithm is based on the coupling of a finite element solution of the wave equation, an exact controllability method and finally a Fourier inversion for localizing the centers of the imperfections. A practical application of this procedure could be the determination of the location of anti-personnel mines or tumours.

Numerical results, in two- and three-dimensions, show the robustness and accuracy of the approach for retrieving randomly placed imperfections from both complete and partial boundary measurements.

Keywords : inverse problem, wave equation, geometrical control, Fourier inversion, finite elements, parallel computing.

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons la solution numérique, dans des domaines bornés bidimensionnels et tridimensionnels, d'un problème inverse pour la localisation d'imperfections de petits volumes contenues dans un domaine sain de conductivité différente que celle des inhomogénéités.

L'identification de ces inhomogénéités repose sur une approche dynamique basée sur l'équation des ondes. Notre algorithme numérique s'appuie sur le couplage d'une solution élément fini de l'équation des ondes, d'une méthode de contrôlabilité exacte et d'une inversion de Fourier pour localiser les centres des imperfections. Une application pratique de cette technique pourrait être la localisation de mines anti-personnel ou de tumeurs.

Des résultats numériques, en deux et trois dimensions, montrent la robustesse et la précision de l'approche pour retrouver des imperfections, placées aléatoirement, à partir de mesures sur la frontière complète ou sur une partie de la frontière.

Mots clés : problème inverse, équation des ondes, contrôle géométrique, méthode d'inversion de Fourier, éléments finis, calcul parallèle.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Mark Asch. Sa disponibilité, ses encouragements, ses compétences et parfois même son mécontentement m'ont permis d'avancer dans le doctorat durant ces trois ans. Grâce à mon directeur de thèse, j'ai pu acquérir une rigueur dans la recherche et un raisonnement constructif.

Je souhaite aussi remercier Marion Darbas avec laquelle j'ai collaboré pour la détection numérique en trois dimensions. Cette collaboration fût un réel plaisir et j'espère avoir encore la chance de collaborer avec elle.

Je remercie Jean-Paul Chehab, Marion Darbas, Laurent Di Menza, Olivier Goubet, Ioan Ionescu et Arnaud Münch de me faire l'honneur de participer à mon jury de thèse. Un merci particulier à Laurent Di Menza et Ioan Ionescu, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Un grand merci à Olivier Goubet, directeur du LAMFA, qui m'a accueilli au sein du laboratoire, ainsi qu'à tous ses membres pour leurs conseils et remarques. Ce fût un vrai bonheur pour moi de vous côtoyer durant ces trois ans. De même, je ne remerciais jamais assez tous mes collègues doctorants pour leurs aides et leurs soutiens. Je ne citerai que que les principaux : Amandine, Benoît, Emilien, Georges, Guillaume, les Julien, Nadir, Stéphanie et Thomas.

Enfin, je remercie chaleureusement mes parents, Véronique et Daniel, mes frères, Quentin et Thibault, ma soeur, Jeanne, mon amie Pauline et ses parents, toute ma nombreuse famille ainsi que tous mes amis proches qui m'ont soutenu, écouté et encouragé pendant ces trois ans.

Table des matières

1	Introduction générale	16
1.1	Introduction	17
1.2	Les problèmes inverses	17
1.3	La théorie du contrôle	19
1.4	Rapide historique	20
1.5	Plan de la thèse	22
2	Théorie de la localisation dynamique pour l'équation des ondes	24
2.1	Notations et présentation du problème inverse	25
2.1.1	Notations	25
2.1.2	Présentation du problème inverse	26
2.2	Procédure d'identification	28
3	L'approche HUM pour la contrôlabilité exacte de frontière	36
3.1	Formulation du problème	37
3.2	Description de HUM	38
3.3	Application de HUM à l'équation des ondes	39
3.4	Un algorithme numérique basé sur HUM	40
3.4.1	Motivation. Description d'un algorithme général de gradient conjugué pour résoudre des problèmes variationnels fortement elliptiques	40
3.4.2	Application de l'algorithme gradient conjugué au contrôle de l'équation des ondes	42
3.4.3	Discrétisation de l'algorithme du Gradient Conjugué en utilisant une technique de filtrage multi-grilles	46
3.5	<i>HUM</i> sur le carré unité : Etude numérique	51
3.5.1	Rappels	51

3.5.2	Critère de convergence et normes discrètes	51
3.5.3	Exemples numériques	53
3.6	Conclusions	62
4	Détection numérique en 2-D et 3-D	64
4.1	Introduction et rappel	65
4.1.1	Introduction	65
4.1.2	Rappel de la procédure d'identification	65
4.2	Discrétisation numérique	66
4.2.1	Discrétisation espace-temps	66
4.2.2	Implémentation parallèle	70
4.3	Méthode de Fourier	71
4.3.1	Échantillonnage	71
4.3.2	Éviter les pièges	76
4.3.3	Une méthode d'échantillonnage exacte	78
4.3.4	Explication des fenêtres FFT	82
4.4	Exemples et tests de calibration	90
4.4.1	Cas 2-D	91
4.4.2	Cas 3-D	97
4.5	Localisation numérique 2-D	99
4.5.1	Détection numérique 2-D depuis tout le bord	101
4.5.2	Localisation dynamique depuis une partie du bord	115
4.5.3	Courbe de performance pour MPI	119
4.5.4	Etude comparative des méthodes utilisées	121
4.6	Localisation numérique en 3-D	126
5	Solution numérique d'un problème inverse pour l'équation des ondes en présence d'imperfections de petit volume	128
5.1	Introduction	130
5.2	Dynamic localization theory	131
5.2.1	Some notation and presentation of the inverse problem	131
5.2.2	The Asymptotic Formula and the Identification Proce- dure	134
5.3	The HUM approach to exact boundary controllability	137
5.3.1	Formulation of the problem	137
5.3.2	Description of the HUM	138
5.3.3	Application of the HUM to the wave equation	139
5.3.4	A numerical algorithm based on the HUM	140

5.4	Numerical discretization of dynamic localization	140
5.4.1	Time-space discretization for the wave equation	140
5.4.2	Parallel implementation	145
5.4.3	Fourier method	145
5.4.4	Résumé of the identification procedure algorithm	150
5.5	Results of the numerical simulations	150
5.5.1	Calibration tests based on the asymptotic formula	151
5.5.2	Numerical Localization of Imperfections in 3D	152
5.6	Conclusion and perspectives	157
6	Conclusions et perspectives	162
6.1	Conclusions	163
6.2	Perspectives	164
A	Problème d'évolution pour une EDP hyperbolique : l'équation des ondes	166
A.1	Introduction - Présentation du problème	167
A.2	Formulation variationnelle du problème	168
A.3	Méthodes Numériques dans le cas hyperbolique :	
	Discrétisations en espace et en temps	169
A.3.1	Semi-discrétisation en espace : Approximation par éléments finis	169
A.3.2	Discrétisation complète en espace et en temps	172

Liste des tableaux

3.1	Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour Exemple 1 .	54
3.2	Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour Exemple 2 .	55
3.3	Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour Exemple 3 .	57
3.4	Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour Exemple 4 .	61
4.1	Caractéristiques des fenêtres les plus utilisées (selon [19]).	85
4.2	Caractéristiques des machines utilisées	100
4.3	Paramètres pour les tests avec une imperfection	101
4.4	Paramètres pour les tests avec PPCM	103
4.5	Paramètres pour les tests avec l'approche Shannon	105
4.6	Paramètres pour PPCM avec trois imperfections	107
4.7	Paramètres pour trois imperfections avec Shannon	109
4.8	Paramètres pour quatre imperfections avec Shannon	112
4.9	Paramètres pour cinq imperfections avec Shannon	114
4.10	Paramètres de discrétisation pour la Section 4.5.3.	116
4.11	Temps de calcul pour les différents contrôles.	116
4.12	Localisation des centres de trois imperfections. Erreurs relatives de localisation.	116
4.13	Localisation des centres de quatre imperfections pour le contrôle Γ_3 . Erreurs relatives de localisation.	118
4.14	Paramètres de discrétisation pour l'étude comparative.	121
4.15	Informations sur les imperfections de l'étude comparative.	121
5.1	Discretization parameters for all numerical simulations.	151
5.2	Localization of the centers of three imperfections. Relative localization errors (total control versus partial control).	156
6.1	Paramètres pour imperfections 2-D et 3-D avec Shannon	163

6.2	Localisation des centres de trois imperfections en 2-D. Erreurs relatives de localisation.	. 164
6.3	Localisation des centres de deux imperfections en 3-D. Erreurs relatives de localisation.	. 164
A.1	Conditions de stabilité de la méthode d'intégration temporelle de Newmark. 176

Table des figures

2.1	Exemple de domaine contenant des imperfections.	26
3.1	Différents tracés de la fonction cut-off utilisée dans HUM.	52
3.2	Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 1).	54
3.3	Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 2).	56
3.4	Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 3).	58
3.5	Condition initial u^0 (haut) et u^1 (bas) (Exemple 4).	60
3.6	Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 4).	60
3.7	Comparaison de (e_h^0, e_h^1) exacte et numérique	61
3.8	$\ g_h\ $ vs. $t \in [0, T]$ obtenue avec BI-GRID pour Exemple 4	62
4.1	Condition (4.3.5) non vérifiée.	74
4.2	Condition (4.3.5) vérifiée pour une imperfection.	75
4.3	Localisation de plusieurs imperfections	76
4.4	Localisation de deux imperfections avec PPCM.	80
4.5	Localisation de deux imperfections avec PPCM.	81
4.6	Localisation de trois imperfections avec PPCM.	82
4.7	FFT d'une onde périodique (gauche) et d'une onde non périodique (droite).	83
4.8	Comparaison du calcul de la FFT d'une onde sinusoïdale avec un échantillonnage non périodique sans (gauche) et avec (droite) fenêtrage.	84
4.9	Formes des fenêtres les plus utilisées.	86
4.10	Localisation d'une imperfection par une fenêtre de type Blackman.	87
4.11	Localisation de deux imperfections par Hamming.	88
4.12	Fenêtre de Hanning pour la localisation de trois imperfections.	89
4.13	Localisation de trois inhomogénéités par la méthode PPCM.	91
4.14	Détection de trois imperfections pour notre formule (4.4.9).	92

4.15	Fonctions fenêtres bidimensionnelles.	93
4.16	Localisation de deux imperfections avec une fenêtre de Blackman.	94
4.17	Localisation de deux imperfections avec une fenêtre de Hanning.	95
4.18	Localisation de trois imperfections avec une fenêtre de Blackman.	96
4.19	Localisation de trois imperfections avec une fenêtre de Hamming.	96
4.20	Visualisation 3-D des trois imperfections $z_1 = (0.55, 0.39, 0.33)$, $z_2 = (0.31, 0.61, 0.55)$ et $z_3 = (0.71, 0.32, 0.63)$	97
4.21	Localisation de trois imperfections en 3-D. Vues dans les plans xy , xz et yz	98
4.22	Fonctions fenêtrage pour la localisation, utilisant la formule asymptotique (4.4.10), de trois imperfections en 3-D.	98
4.23	Visualisation 3-D des trois imperfections $z_1 = (0.20, 0.22, 0.21)$, $z_2 = (0.48, 0.34, 0.52)$ et $z_3 = (0.61, 0.69, 0.78)$ par une fenêtre 3-D de Hamming.	99
4.24	Localisation d'une imperfection $z = (0.60, 0.60)$	102
4.25	Localisation d'une imperfection $z = (0.37, 0.52)$	102
4.26	Détection de deux inhomogénéités avec la méthode d'échantillonnage exacte.	104
4.27	Localisation de deux imperfections $z_1 = (0.64, 0.69)$ et $z_2 = (0.38, 0.43)$ avec PPCM et seuillage $\ (\eta_*, \eta_*)\ = \ (7, 7)\ $	104
4.28	Détection de deux inhomogénéités avec un seuillage $\ (10, 10)\ $	106
4.29	Localisation de deux imperfections avec une fonction de Blackman.	106
4.30	Détection de trois inhomogénéités avec la méthode d'échantillonnage exacte.	108
4.31	Localisation de trois imperfections $z_1 = (0.33, 0.52)$, $z_2 = (0.61, 0.29)$ et $z_3 = (0.69, 0.72)$ avec PPCM.	108
4.32	Localisation de trois imperfections $z_1 = (0.33, 0.52)$, $z_2 = (0.61, 0.29)$ et $z_3 = (0.69, 0.72)$ avec seuillage.	110
4.33	Localisation de trois imperfections $z_1 = (0.33, 0.52)$, $z_2 = (0.61, 0.33)$ et $z_3 = (0.67, 0.69)$ avec fenêtrage.	110
4.34	Détection de trois inhomogénéités dans le carré $(-1, 1)^2$	111
4.35	Localisation de quatre imperfections $z_1 = (0.69, 0.37)$, $z_2 = (0.70, 0.73)$, $z_3 = (0.35, 0.66)$ et $z_4 = (0.43, 0.43)$	113
4.36	Localisation de quatre imperfections $z_1 = (0.23, -0.60)$, $z_2 = (-0.43, -0.40)$, $z_3 = (0.03, 0.18)$ et $z_4 = (-0.43, 0.0)$	113

4.37	Détection de cinq inhomogénéités contenues dans $(-1, 1)^2$.	115
4.38	Localisation de trois imperfections pour un contrôle sur tout le bord.	117
4.39	Localisation de trois imperfections pour un contrôle sur Γ_1 .	117
4.40	Localisation de trois imperfections pour un contrôle sur Γ_2 .	118
4.41	Localisation de quatre imperfections pour le contrôle agissant sur Γ_4 .	119
4.42	Courbe de performance pour la localisation d'une imperfection avec une parallélisation.	120
4.43	Courbe speed-up pour la localisation d'une imperfection avec une parallélisation.	120
4.44	Localisation 2-D avec la méthode PPCM pour trois inhomogénéités.	122
4.45	Localisation de trois imperfections pour la méthode PPCM avec application d'une fonction de Blackman.	123
4.46	Localisation des trois imperfections pour la méthode PPCM avec un seuillage $\ (9, 9)\ $.	123
4.47	Localisation 2-D avec l'approche Shannon pour trois inhomogénéités.	124
4.48	Localisation de trois imperfections avec application d'une fonction de Blackman.	125
4.49	Localisation des trois imperfections avec un seuillage $\ (11, 11)\ $ pour l'approche Shannon.	125
5.1	<i>An example of a 2-D domain containing three imperfections, $z_1 + \alpha B_1, z_2 + \alpha B_2, z_3 + \alpha B_3$.</i>	132
5.2	Exact sampling method for two imperfections, using the asymptotic formula, $z_1 = (0.50, 0.30, 0.70)$ and $z_2 = (0.70, 0.50, 0.50)$.	151
5.3	Shannon sampling approach without truncation, using the asymptotic formula, $z_1 = (0.51, 0.64, 0.32)$, $z_2 = (0.66, 0.32, 0.47)$ and $z_3 = (0.39, 0.49, 0.61)$.	152
5.4	Localization of a single imperfection at $z = (0.25, 0.25, 0.25)$: asymptotic formula (left), asymptotic formula with truncation (center), numerical localization (right) - views of $x - y$ plane at $z = 0.25$.	153
5.5	Localization of three imperfections, centered at $z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$, $z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$, $z_3 = (0.51, 0.47, 0.66)$. Views from the x -, y - and z -directions.	153
5.6	Localization of three imperfections centered at $z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$, $z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$, $z_3 = (0.51, 0.47, 0.66)$. 3D view.	154

- 5.7 Localization of four imperfections, centered at 154
 $z_1 = (0.66, 0.32, 0.47)$, $z_2 = (0.55, 0.71, 0.39)$, $z_3 =$
 $(0.39, 0.63, 0.31)$, $z_4 = (0.71, 0.42, 0.74)$. Views
from the x -, y - and z -directions.
- 5.8 Localization of four imperfections centered at $z_1 =$ 155
 $(0.66, 0.32, 0.47)$, $z_2 = (0.55, 0.71, 0.39)$, $z_3 =$
 $(0.39, 0.63, 0.31)$, $z_4 = (0.71, 0.42, 0.74)$. 3D view.
- 5.9 Localization with limited-view data of three imperfections, . 156
centered at $z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$, $z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$, $z_3 =$
 $(0.51, 0.47, 0.66)$. Views from the x -, y - and z -directions.
- 5.10 Performance curve for the localization of one imperfection . 157
with parallelization.

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1	Introduction	17
1.2	Les problèmes inverses	17
1.3	La théorie du contrôle	19
1.4	Rapide historique	20
1.5	Plan de la thèse	22

1.1 Introduction

Les thèmes abordés dans cette thèse concernent des questions de détection numérique d'inhomogénéités par une méthode de contrôlabilité exacte de frontière pour l'équation des ondes bidimensionnelle et tridimensionnelle.

Ces questions de détection numérique ont été largement étudiées dans le cas d'équations ou de systèmes *stationnaires* (par exemple l'équation de Helmholtz), mais constituent un sujet de recherche récent dans le cadre d'équations ou de systèmes *instationnaires*. Or, ces questions représentent un intérêt certain pour l'imagerie médicale et le contrôle non destructif en général.

1.2 Les problèmes inverses

Deux problèmes sont dits *inverses* l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Cette définition comporte une part d'arbitraire, et fait jouer un rôle symétrique aux deux problèmes considérés. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des *causes* connaissant des *effets*. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

Cette seconde définition montre que nous sommes plus habitués à étudier des problèmes "directs". En effet, depuis Newton la notion de causalité est ancrée dans notre subconscient scientifique, et à un niveau plus prosaïque, nous avons appris à poser, puis à résoudre des problèmes pour lesquels les causes sont données, et l'on cherche les effets. Nous verrons plus loin qu'il est possible de donner un contenu mathématique à la phrase "les mêmes causes produisent les mêmes effets", autrement dit, qu'il est raisonnable d'exiger que le problème direct soit "bien posé". Par contre, il est facile d'imaginer que les mêmes effets puissent provenir de causes différentes. Cette idée contient en germe la principale difficulté de l'étude des problèmes inverses : ils peuvent avoir plusieurs solutions, et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour discriminer entre elles.

Une difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui se traduit par le recours à une grande variété de notions physiques, que mathématiques.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale

de modélisation du phénomène, dite "problème direct" qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes "mal posés".

En effet :

- Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.
- Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.
- Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution.
- La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information *a priori*).
- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données "réelles".

On retrouve des problèmes inverses dans de nombreux domaines scientifiques. Nous pouvons en citer quelques uns :

- l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X,...) ;
- l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques ou magnétiques) ;
- l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques) ;
- le radar (détermination de la forme d'un "obstacle") ;
- l'acoustique sous-marine (même objectif!) ;
- la chimie (détermination des constantes de réaction) ;
- le traitement d'image (restauration d'images floues).

Du point de vue mathématique, ces problèmes se répartissent en deux grands groupes :

- les problèmes linéaires (échographie, traitement d'image,...) qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce ;
- les problèmes non-linéaires, qui sont le plus souvent des questions d'estimation de paramètres dans des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

La seconde catégorie peut elle-même se subdiviser en deux sous-catégories selon que le paramètre que l'on cherche à estimer est un vecteur (de dimension finie) ou une fonction. Le second cas est évidemment plus difficile que le premier, puisqu'il faut en particulier décider de la paramétrisation de cette fonction, avant de résoudre numériquement le problème en dimension finie.

1.3 La théorie du contrôle

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie... L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal ou commande optimale).

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le *contrôle*. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc... Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Une fois le problème de contrôlabilité (existence d'un contrôle) résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère ; on parle alors d'un problème de contrôle optimal. Nous n'avons pas besoin ici de cette notion de contrôle optimale en vue de la détection

numérique d'inhomogénéités. Cependant, cette thématique de recherche est très attrayante, car les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal comme les télécommunications, le raffinage pétrolier, les satellites, etc...

1.4 Rapide historique au sujet de la localisation d'inhomogénéités

Récemment, de nombreux travaux ont été consacrés à l'analyse numérique de localisation d'inhomogénéités (voir [4], [8], [12], [18], [39], [40]), en particulier dans le domaine de la Tomographie par Impédance Electrique (Electrical Impedance Tomography (EIT) en anglais). L'EIT est une technologie initialement conçue pour la caractérisation des sols en géophysique. Elle est également utilisée dans le secteur industriel, notamment pour l'inspection non destructive des matériaux. Sur un autre terrain, elle a démontré son efficacité pour détecter les mines anti-personnel. Dans le domaine biomédical, on commence à exploiter son potentiel dans l'imagerie du cancer, du sein et de la prostate. Toutefois, sa résolution spatiale reste insatisfaisante à cause des caractères non linéaires et mal posés du problème. Dernièrement, H. Ammari et H. Kang ont surmonté dans [6] ces deux difficultés fondamentales dans un cadre asymptotique qui semble être bien adapté non seulement au problème d'imagerie du cancer du sein et de la prostate par impédance électrique, mais également à la détection des mines anti-personnel ou de défauts dans les structures élastiques.

Le modèle de localisation proposé par D.J. Cedio-Fengya, S. Moskow et M.S. Vogelius [18] consiste à identifier des inhomogénéités de petit volume en combinant une formule asymptotique avec un algorithme d'inversion. Typiquement, dans [18], le problème de conductivité est posé dans un domaine borné contenant un nombre fini d'inhomogénéités inconnues de petit volume. L'algorithme d'inversion construit utilise une formule asymptotique (pour des perturbations dans le potentiel de tension), et est basé sur une procédure de minimisation de type moindres carrés pour le calcul des paramètres géométriques des imperfections. Une autre approche de reconstruction de ces petites inhomogénéités, également basée sur une procédure de minimisation non linéaire, est celle qui consiste à imager la conductivité électrique dans le domaine (voir [6]). En regardant le même problème de

conductivité, H. Ammari, S. Moskow et M.S. Vogelius ont proposé dans [8] un procédé de localisation de petites inhomogénéités, où la formule asymptotique de [18] est considérée pour mesurer des perturbations de frontière initiées par des courants électriques appliqués sur le bord du domaine. L'algorithme d'inversion, qu'ils utilisent, consiste à résoudre un système linéaire pour localiser une seule inhomogénéité, ou à calculer une transformée de Fourier discrète inverse d'un échantillon de mesures dans le cas de la localisation de multiples inhomogénéités. L'algorithme d'inversion dans [8] est alors, en contraste avec celui de [18], non itératif et basé sur une des deux méthodes linéaires : la méthode de projection de courants (pour localiser une seule inhomogénéité) ou la méthode d'inversion de Fourier (pour localiser plusieurs inhomogénéités).

D. Volkov a formulé dans [40] un algorithme basé aussi sur la méthode d'inversion de Fourier pour localiser des petites inhomogénéités diélectriques dans un domaine borné bidimensionnel, à partir d'un développement asymptotique (introduit dans [8]) pour l'étude de perturbations dans le champ électrique vérifiant l'équation de Helmholtz. Le développement de cette algorithme est aussi décrit dans [40] pour l'identification d'inhomogénéités diélectriques en trois dimensions, à partir d'un champ lointain à une fréquence fixée.

Dans le contexte de la localisation dans un domaine non-borné, H. Ammari, E. Iakovleva et D. Lesselier ont développé dans [5] un algorithme pour localiser des petites inclusions bidimensionnelles incluses dans un demi-espace à partir de l'amplitude dispersive à une fréquence fixée. Dans [5], le problème continu est posé à l'aide de l'équation d'Helmholtz bidimensionnelle, un développement asymptotique de l'amplitude dispersive est présenté, et l'algorithme d'inversion est essentiellement une méthode pour caractériser le rang d'un opérateur semi-adjoint. Ceci est une méthode linéaire, appelée *MUSIC* (Multiple Signal Classification), généralement utilisée dans la théorie du traitement du signal, et connue pour estimer les fréquences individuelles de signaux multi-harmoniques.

Plus récemment, H. Ammari, M.S. Vogelius et D. Volkov [9] ont introduit un cadre de travail pour la localisation d'inhomogénéités électromagnétiques tridimensionnelles. Ce cadre de travail considère les équations de Maxwell harmoniques en temps dans un domaine borné tridimensionnel contenant un nombre fini d'inhomogénéités inconnues de petit volume, et propose de localiser ces inhomogénéités à partir d'un développement asymptotique de la perturbation dans le champ magnétique de frontière (tangential).

M. Fink a mis au point un procédé physique qui permet à une onde de retourner vers sa source dans le cas d'une propagation non dissipative, le *retournement temporel* - voir [24]. Ce procédé permet de résoudre le problème inverse ou plus clairement le renversement du temps d'une action. Le principe repose sur l'invariance de l'équation de propagation des ondes par renversement du temps : cette invariance autorise une onde à se rétropropager de telle sorte qu'elle peut rejouer la scène *aller* de sa propagation mais à rebours. Le Miroir à Retournement Temporel permet d'enregistrer un champ acoustique sur la surface qui entoure le milieu de propagation puis de réémettre la version retournée temporellement de ce champ et de refocaliser le signal sur le point de l'émission. Grâce à cette technique, un échographe révolutionnaire a vu le jour, *Aixplorer*. Il permet de mesurer avec précision l'élasticité des tissus à l'intérieur du corps humain, il peut donc repérer facilement les régions les plus dures, susceptibles d'être des tumeurs, avec une résolution millimétrique.

Il est important de mentionner qu'en contraste avec la grande variété de papiers consacrés à la localisation numérique bidimensionnelle, nous ne trouvons pas dans la littérature un nombre similaire de références pour la localisation numérique en trois dimensions. Par ailleurs, il n'existe pas à notre connaissance de travaux numériques sur la détection dynamique d'in-homogénéités par une méthode de contrôle géométrique.

Pour conclure sur ce rapide historique, il existe plusieurs algorithmes d'inversion (algorithme variationnel, algorithme de projection de courants, approche par extension méromorphe, algorithme de type diffraction tomographique ou Fourier, algorithme de type multiple signal classification (MUSIC) ou de type retournement temporel) qui sont robustes et performants et qui peuvent être utilisés en temps réel pour retrouver la position de l'in-homogénéité, estimer son volume et avoir une idée sur sa forme géométrique (via la détermination des tenseurs de polarisation généralisés qui lui sont associés). Un travail numérique de comparaison entre quelques uns de ces différents algorithmes de détection a été effectué par M. Asch et S.M. Mefire dans [12].

1.5 Plan de la thèse

A travers cette thèse, nous allons utiliser des espaces de Sobolev L^2 standards de mesures régulières. La notation H^s est utilisée pour ces fonctions qui, ainsi que leurs dérivées d'ordre plus petit ou égal à s , sont dans L^2 . H_0^1

désigne la fermeture de C_0^∞ dans la norme H^1 . Les espaces de Sobolev avec des indices négatifs sont en général définis par dualité, en utilisant un produit scalaire L^2 . Nous avons seulement besoin de deux de ces espaces, H^{-1} , le dual de H_0^1 et H^{-2} , le dual de H_0^2 qui est la fermeture de C_0^∞ en norme H^2 .

Dans le Chapitre 2, nous reprenons les résultats d’Habib Ammari établis dans son article [3]. Ces résultats constituent la clé de voute dans l’identification d’inhomogénéités pour l’équation des ondes bidimensionnelle et se généraliseront pour le cas tridimensionnel. Nous y redonnons les différents théorèmes et propositions nécessaires à la mise en place d’un algorithme de localisation dynamique d’imperfections.

Dans le Chapitre 3, nous rappelons la Méthode d’Unicité de Hilbert (HUM) introduite par J.-L. Lions dans [29], ainsi que l’application numérique de cette méthode pour le contrôle exact de frontière dans le cas de l’équation des ondes. Nous indiquerons également l’algorithme HUM bi-grilles utilisé dans notre procédure d’identification.

Le Chapitre 4, plus appliqué, contient des résultats obtenus pour l’équation des ondes bidimensionnelle. Il est consacré à l’étude plus détaillée de l’algorithme d’identification d’imperfections. Nous y relatons toutes les méthodes et stratégies numériques utilisées durant ces trois ans. De nombreux tests seront présentés pour valider les résultats théoriques du Chapitre 2.

Le Chapitre 5 est une généralisation du cas bidimensionnel au cas tridimensionnel. Ce chapitre fait l’objet d’un article soumis, en collaboration avec Mark Asch et Marion Darbas. Les résultats obtenus dans le Chapitre 4 ont été le point de départ pour tous les calculs en 3D.

Pour terminer, nous ferons certaines conclusions et nous indiquerons quelques perspectives, qui restent nombreuses et variées.

Chapitre 2

Théorie de la localisation dynamique pour l'équation des ondes

Sommaire

2.1	Notations et présentation du problème inverse .	25
2.1.1	Notations	25
2.1.2	Présentation du problème inverse	26
2.2	Procédure d'identification	28

Ce chapitre reprend les résultats contenus dans l'article [3] d'H. Ammari. Nous considérons, pour l'équation des ondes, le problème inverse d'identification de localisations et de certaines propriétés de formes de petites inhomogénéités contenues dans un domaine borné homogène. Cette procédure d'identification d'inhomogénéités se fait à partir de mesures dynamiques de frontière sur une *partie* du bord et pour un intervalle *fini* en temps. L'algorithme de reconstruction proposé se base sur une formule asymptotique construite via la Méthode d'Unicité de Hilbert (HUM) et une méthode d'inversion de Fourier. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont établis en deux et trois dimensions.

2.1 Notations et présentation du problème inverse

2.1.1 Notations

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. Par souci de simplification, $\partial\Omega$, le bord de Ω , est pris C^∞ . Nous notons n la normale (unité) extérieure à $\partial\Omega$. Nous supposons que Ω contient un nombre fini m d'inhomogénéités, chacune de la forme $z_j + \alpha B_j$, où $B_j \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné contenant l'origine. Ainsi le recouvrement total des inhomogénéités prend la forme $B_\alpha = \cup_{j=1}^m (z_j + \alpha B_j)$. Les points $z_j \in \Omega$, $j = 1, \dots, m$, qui déterminent les centres des inhomogénéités, sont supposés vérifier

$$\begin{cases} |z_j - z_l| \geq d_0 > 0 \quad \forall j \neq l, \\ \text{dist}(z_j, \partial\Omega) \geq d_0 > 0 \quad \forall j. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Par conséquent, on en déduit de (2.1.1) que $m \leq \frac{4|\Omega|}{\pi d_0^2}$ en deux dimensions et $m \leq \frac{6|\Omega|}{\pi d_0^3}$ en trois dimensions. De plus, nous supposons aussi que $\alpha > 0$, l'ordre commun des diamètres des inhomogénéités, est suffisamment petit pour qu'elles soient disjointes et que leur distance à $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ soit supérieure à $\frac{d_0}{2}$.

Désormais, nous appelons chacune de ces petites inhomogénéités, une *imperfection*.

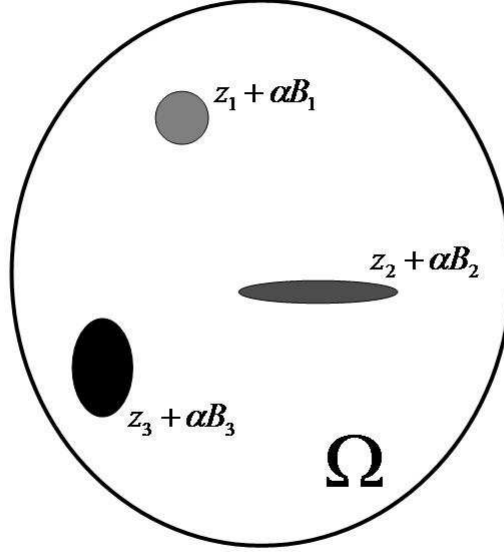


FIG. 2.1 – Exemple de domaine contenant des imperfections.

2.1.2 Présentation du problème inverse

Soit γ_0 la conductivité homogène du milieu, supposée constante pour la suite. Soit γ_j la conductivité constante de la j -ième imperfection, $z_j + \alpha B_j$. Nous introduisons alors la conductivité constante par morceaux

$$\gamma_\alpha(x) = \begin{cases} \gamma_0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \bar{B}_\alpha, \\ \gamma_j & \text{si } x \in z_j + \alpha B_j, j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Considérons le problème aux limites pour l'équation des ondes (scalaire)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\gamma_\alpha \operatorname{grad} u_\alpha) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_\alpha = f & \text{dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_\alpha|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}|_{t=0} = u^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Nous définissons par u la solution de l'équation des ondes en l'absence d'imperfections. Ainsi u vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\gamma_0 \operatorname{grad} u) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = f & \text{dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u^0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Le paramètre $T > 0$ est le temps final d'observation. Les conditions initiales $u^0, u^1 \psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et la condition aux bords $f \in C^\infty(0, T; C^\infty(\partial\Omega))$ vérifient des conditions de compatibilité :

$$\partial_t^{2l} f|_{t=0} = (\gamma_0)^l (\Delta^l \varphi)|_{\partial\Omega} \quad \text{et} \quad \partial_t^{2l+1} f|_{t=0} = (\gamma_0)^l (\Delta^l \psi)|_{\partial\Omega}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Ainsi le problème aux limites initial (2.1.3) a une unique solution dans $C^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$. Le problème de transmission pour l'équation des ondes (2.1.2) a une unique solution faible $u_\alpha \in C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$, voir par exemple [1], [23], [29] ou [38].

Nous notons ν_j la normale (unité) extérieure à $\partial(z_j + \alpha B_j)$ pour $j = 1, \dots, m$ et les indices $+$, $-$ indiquent quand $\partial(z_j + \alpha B_j)$ est approché par l'extérieur ou par l'intérieur, respectivement. Soit $\Gamma \subset \Omega$ une partie donnée, non dégénérée, du bord de $\partial\Omega$. Le but de ce chapitre est de donner la procédure d'identification des imperfections B_α , *i.e.* leur localisation et certaines propriétés géométriques, à partir uniquement de la connaissance des mesures de frontières de $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$ sur $\Gamma \times (0, T)$, *i.e.* sur la partie Γ du bord $\partial\Omega$ et sur l'intervalle fini en temps $(0, T)$. A cette fin, nous présentons une méthode asymptotique proposée par H. Ammari dans [3]. Cette approche est basée sur une moyenne appropriée, utilisant des solutions particulières comme poids. Ces solutions particulières sont construites par une méthode de contrôle (voir Chapitre 3).

La première étape fondamentale de la méthode de reconstruction est la dérivation d'une formule asymptotique pour $\frac{\partial u_\alpha}{\partial \nu_j}|_{\partial(z_j + \alpha B_j)^+}$ en fonction de la solution u dans le milieu sain, de la localisation z_j de l'imperfection $z_j + \alpha B_j$, et de la géométrie de B_j . La seconde étape consiste à utiliser cette formule asymptotique pour écrire une formule intégrale de frontière avec un choix convenable de fonctions tests, via une méthode de contrôle géométrique.

2.2 Procédure d'identification

Avant de définir la procédure d'identification, nous avons besoin d'introduire quelques notations supplémentaires. Pour tout $1 \leq j \leq m$, Φ_j est la solution de

$$\begin{cases} \Delta \Phi_j = 0 \text{ dans } B_j, \text{ et } \mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_j, \\ \Phi_j \text{ est continue à travers } \partial B_j, \\ \gamma_0 \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+ - \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_- = -\nu_j, \\ \lim_{|y| \rightarrow +\infty} |\Phi_j(y)| = 0 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

L'existence et l'unicité de ce Φ_j peuvent être établies en utilisant des potentiels de simple couche avec des densités convenablement choisies ; voir [18].

Considérons $\lambda \in C_0^\infty(\Omega)$ une fonction cut-off telle que $\lambda(x) \equiv 1$ dans un sous-domaine Ω' de Ω qui contient les imperfections B_α . Pour un $\eta \in \mathbb{R}^d$ arbitraire, nous supposons que nous sommes en possession de mesures de frontière de

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \text{ sur } \Gamma \times (0, T),$$

pour

$$u^0(x) \doteq u_\eta^0(x) = e^{i\eta \cdot x}, \quad u^1(x) \doteq u_\eta^1(x) = -i\sqrt{\gamma_0} |\eta| e^{i\eta \cdot x}$$

$$\text{et } f(x, t) \doteq f_\eta(x, t) = e^{i\eta \cdot x - i\sqrt{\gamma_0} |\eta| t}.$$

Ce choix particulier de données pour u^0, u^1 et f implique que la solution u de l'équation des ondes (2.1.3) en l'absence d'imperfections est donnée par

$$u(x, t) = u_\eta(x, t) = e^{i\eta \cdot x - i\sqrt{\gamma_0} |\eta| t} \text{ dans } \Omega \times (0, T).$$

Supposons que T et la partie Γ du bord $\partial\Omega$ sont tels qu'ils contrôlent géométriquement Ω , ce qui signifie que tout rayon de l'optique géométrique commençant à n'importe quel point $x \in \Omega$ au temps $t = 0$ atteint au temps T un point non diffractif ; voir [16]. Alors, $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$, la *Méthode d'Unicité de Hilbert* (HUM)¹ permet de construire un unique $g_\eta \in H_0^1(0, T; L^2(\Gamma))$ tel que l'unique solution faible w_η dans $C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ de

¹Voir Chapitre 3

l'équation des ondes

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \gamma_0 \Delta) w_\eta = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ w_\eta = g_\eta & \text{dans } \Gamma \times (0, T), \\ w_\eta = 0 & \text{dans } \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma} \times (0, T), \\ w_\eta|_{t=0} = \lambda(x)e^{i\eta \cdot x} & \text{dans } H_0^1(\Omega), \\ \partial_t w_\eta|_{t=0} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.2.5)$$

satisfait $w_\eta(T) = \partial_t w_\eta(T) = 0$. Soit $v_{\alpha, \eta} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ définie par

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \gamma_0 \Delta) v_{\alpha, \eta} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v_{\alpha, \eta} = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ v_{\alpha, \eta}|_{t=0} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{j=1}^m i \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_j}\right) \eta \\ \quad \cdot \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1\right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j}|_+\right) e^{i\eta \cdot z_j} \delta_{\partial(z_j + \alpha B_j)} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Puisque $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j}|_+(y) \delta_{\partial(z_j + \alpha B_j)} \in H^{-1}(\Omega)$ pour $j = 1, \dots, m$, l'existence et l'unicité d'une solution $v_{\alpha, \eta}$ peuvent être établies. En effet, nous pouvons prouver que $\frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n} \in H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma))$. Pour se faire, soit θ défini comme

$$\begin{cases} \theta \in H_0^1(\Omega), \\ \gamma_0 \Delta \theta = \sum_{j=1}^m i \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_j}\right) \eta \\ \quad \cdot \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1\right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j}|_+\right) e^{i\eta \cdot z_j} \delta_{\partial(z_j + \alpha B_j)} \in H^{-1}(\Omega) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et introduisons

$$z(x, t) = \int_0^t v_{\alpha, \eta}(x, s) ds + \theta(x) \in L^2(\Omega).$$

Il est facile de voir que z vérifie le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \gamma_0 \Delta) z = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ z = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ z|_{t=0} = \theta & \in H_0^1(\Omega), \\ \frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

car d'après le théorème de Leibniz de dérivation d'une intégrale, nous avons :

$$(\partial_t^2 - \gamma_0 \Delta) z(x, t) = \partial_t v_{\alpha, \eta}(x, t) - \gamma_0 \Delta \theta(x) - \int_0^t \gamma_0 \Delta v_{\alpha, \eta}(x, s) ds$$

par ailleurs en combinant $\partial_t v_{\alpha, \eta}(x, t) = \int_0^t \partial_t^2 v_{\alpha, \eta}(x, s) ds + \partial_t v_{\alpha, \eta}(x, 0)$ et les définitions de $v_{\alpha, \eta}$ et de θ , nous arrivons bien à notre problème aux limites ci-dessus.

Des résultats classiques de régularité donnent

$$\frac{\partial z}{\partial n}|_{\Gamma} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)),$$

et par suite $\frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n}|_{\Gamma} = \partial_t \left(\frac{\partial z}{\partial n}|_{\Gamma} \right) \in H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma))$.

Proposition 1 (Ammari, 2002). *Supposons que Γ et T contrôlent géométriquement Ω . Pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{j=1}^m i \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_j} \right) \eta \cdot \int_{\partial B_j} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+(y) \right) e^{i\alpha \eta \cdot y} ds_j(y) \\ & = -\gamma_0 \int_0^T \int_{\Gamma} g_{\eta} \frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n}. \end{aligned}$$

Ici $\int_0^T \int_{\Gamma} g_{\eta} \frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n}$ est à considérer au sens de la dualité entre $H_0^1(0, T)$ et $H^{-1}(0, T)$. La Proposition 1 est obtenue en multipliant $(\partial_t^2 - \gamma_0 \Delta) v_{\alpha, \eta} = 0$ par w_{η}

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t^2 v_{\alpha, \eta} w_{\eta} - \gamma_0 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta v_{\alpha, \eta} w_{\eta} = 0.$$

Nous appliquons ensuite la formule de Green, nous avons alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t^2 v_{\alpha, \eta} w_{\eta} + \gamma_0 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v_{\alpha, \eta} \cdot \nabla w_{\eta} = \gamma_0 \int_0^T \int_{\Gamma} g_{\eta} \frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n},$$

puis nous intégrons par partie sur $(0, T)$ et nous appliquons une nouvelle fois Green

$$\begin{aligned} -\gamma_0 \int_0^T \int_{\Gamma} g_{\eta} \frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n} & = \alpha \sum_{j=1}^m i \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_j} \right) e^{i\eta \cdot z_j} \eta \\ & \quad \cdot \int_{\Omega} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+ \left(\frac{x - z_j}{\alpha} \right) \right) \delta_{\partial(z_j + \alpha B_j)} e^{i\eta \cdot x} \beta(x) dx, \end{aligned}$$

où l'intégrale de la partie droite est à considérer au sens de la dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$. Ainsi

$$-\gamma_0 \int_0^T \int_{\Gamma} g_{\eta} \frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n} = \alpha \sum_{j=1}^m i \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_j}\right) e^{i\eta \cdot z_j} \eta \cdot \int_{\delta_{\partial(z_j + \alpha B_j)}} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1\right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+ \left(\frac{x - z_j}{\alpha}\right) \right) e^{i\eta \cdot x} ds_j(x),$$

puisque $\beta(x) \equiv 1$ dans un sous-domaine Ω' de Ω qui contient les inhomogénéités B_{α} . Par un changement de variables, l'identité ci-dessus mène à la formule désirée.

En prenant maintenant le développement de Taylor de $e^{i\alpha\eta \cdot y}$ et en ayant à l'esprit que

$$\int_{\partial B_j} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1\right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+(y) \right) ds_j(y) = 0,$$

H. Ammari obtient une formule asymptotique plus convenable.

Proposition 2 (Ammari, 2002). *Supposons que Γ et T contrôlent géométriquement Ω . Pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$, nous avons*

$$\begin{aligned} \alpha^d \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_j}\right) e^{2i\eta \cdot z_j} \eta \cdot \int_{\partial B_j} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1\right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+(y) \right) \eta \cdot y ds_j(y) \\ = \gamma_0 \int_0^T \int_{\Gamma} g_{\eta} \frac{\partial v_{\alpha, \eta}}{\partial n} + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$, soit θ_{η} la solution de l'équation de Volterra de seconde espèce :

$$\begin{cases} \partial_t \theta_{\eta}(x, t) + \int_t^T e^{-i\sqrt{\gamma_0}|\eta|(s-t)} (\theta_{\eta}(x, s) - i\sqrt{\gamma_0}|\eta| \partial_t \theta_{\eta}(x, t)) ds \\ = g_{\eta}(x, t) \\ \text{pour } x \in \Gamma, t \in (0, T), \\ \theta_{\eta}(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma \end{cases} \quad (2.2.6)$$

L'existence et l'unicité de ce θ_{η} dans $H^1(0, T; L^2(\Gamma))$, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$, peuvent être établies en utilisant le noyau résolvant. Puisque $g_{\eta} \in H_0^1(0, T; L^2(\Gamma))$,

la solution θ_η appartient, en fait, à $H^2(0, T; L^2(\Gamma))$. Notons que c'était Yamamoto [43] qui a eu le premier cette idée d'utiliser une telle équation de Volterra pour appliquer le contrôle géométrique pour résoudre des problèmes inverses. Nous notons aussi à partir de la différentiation de (2.2.6) en ce qui concerne t que θ_η est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$\begin{cases} \partial_t \theta_\eta - \theta_\eta = e^{i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} \partial_t (e^{-i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} g_\eta) & \text{pour } x \in \Gamma, t \in (0, T), \\ \theta_\eta(x, 0) = \partial_t \theta_\eta(x, T) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Par conséquent, la fonction θ_η peut être calculée explicitement avec une méthode de variation des constantes. Il ressort de cette observation que θ_η appartient à $H^2(0, T; L^2(\Gamma))$ puisque $g_\eta \in H_0^1(0, T; L^2(\Gamma))$.

Pour identifier les centres ainsi que certaines propriétés des petites imperfections B_α , nous regardons la moyenne des mesures de frontière $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}|_{\Gamma \times (0, T)}$, en utilisant θ_η de l'équation de Volterra (2.2.6) ou, ce qui est équivalent, l'EDO (2.2.7) comme fonction de η .

Nous arrivons au résultat fondamental pour la procédure d'identification.

Théorème 3 (Ammari, 2002). *Soit $\eta \in \mathbb{R}^d$. Soit u_α l'unique solution dans $C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ de l'équation des ondes (2.1.2) avec*

$$\begin{aligned} u^0(x) = u_\eta^0(x) = e^{i\eta \cdot x}, \quad u^1(x) = u_\eta^1(x) = -i\sqrt{\gamma_0}|\eta| e^{i\eta \cdot x} \\ \text{et } f(x, t) = f_\eta(x, t) = e^{i\eta \cdot x - i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t}. \end{aligned}$$

Supposons que Γ et T contrôlent géométriquement Ω . Alors on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Gamma \left[\theta_\eta \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \partial_t \theta_\eta \partial_t \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right] \\ &= - \int_0^T \int_\Gamma e^{i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} \partial_t (e^{-i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} g_\eta) \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \\ &= \alpha^d \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) e^{2i\eta \cdot z_j} [M_j(\eta) \cdot \eta - |\eta|^2 |B_j|] + o(\alpha^d), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

où θ_η est l'unique solution de l'EDO (2.2.7), avec g_η défini comme le contrôle de frontière dans (2.2.5), et M_j est le tenseur de polarisation de B_j , défini

par

$$(M_j)_{k,l} = e_k \cdot \left(\int_{\partial B_j} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+(y) \right) y \cdot e_l ds_j(y) \right). \quad (2.2.9)$$

Ici (e_1, \dots, e_d) est une base orthonormale de \mathbb{R}^d .

Nous sommes maintenant en position pour décrire la procédure d'identification qui est basée sur le Théorème 3. Négligeant le reste dans la formule (2.2.8), on définit $\Lambda_\alpha(\eta)$ par

$$\Lambda_\alpha(\eta) = \int_0^T \int_\Gamma \left[\theta_\eta \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \partial_t \theta_\eta \partial_t \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right].$$

La fonction $\Lambda_\alpha(\eta)$ est calculée par l'approche suivante. Premièrement, nous construisons le contrôle g_η dans (2.2.8) pour un $\eta \in \mathbb{R}^d$ donné par la résolution du problème de contrôle (2.2.5). Ensuite, nous résolvons l'équation des ondes (2.1.2) pour u_α , puis à partir des mesures de bords $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma \times (0,T)}$, nous formons les intégrales qui entrent en jeu dans l'expression (2.2.8) de $\Lambda_\alpha(\eta)$.

Rappelons que la fonction $e^{2i\eta \cdot z_j}$ est exactement la transformée de Fourier (à une constante multiplicative près) d'une fonction de Dirac δ_{-2z_j} (d'une masse ponctuelle située en $-2z_j$). A partir du Théorème 3, il s'ensuit que la fonction $\Lambda_\alpha(\eta)$ est (approximativement) la transformée de Fourier d'une combinaison linéaire de dérivées de points masses, ou

$$\check{\Lambda}_\alpha(x) \approx \alpha^2 \sum_{j=1}^m L_j (\delta_{-2z_j})(x),$$

où L_j est un opérateur différentiel du second ordre aux coefficients constants dont les coefficients dépendent du tenseur de polarisation M_j défini par (2.2.9) et $\check{\Lambda}_\alpha(x)$ représente la transformée de Fourier inverse de $\Lambda_\alpha(\eta)$.

La méthode de reconstruction proposée ici consiste à évaluer des valeurs d'échantillonnage de Λ_α en un certain ensemble discret de points et alors à calculer la transformée de Fourier discrète inverse correspondante. Après un changement d'échelle par $-\frac{1}{2}$, le support de cette transformée de Fourier discrète inverse rapporte la localisation des petites imperfections B_α . En d'autres termes, une fois $\Lambda_\alpha(\eta)$ calculé à partir des mesures dynamiques de frontières sur Γ , nous calculons sa transformée de Fourier inverse. La formule

asymptotique (2.2.8) du Théorème 3 assure que cette transformée de Fourier inverse est une distribution supportée en les centres $(z_j)_{j=1}^m$.

Une fois les localisations connues, on peut calculer les tenseurs de polarisation $(M_j)_{j=1}^m$ en résolvant un système linéaire approprié résultant de (2.2.8). Ces tenseurs de polarisation donnent des idées sur l'orientation et la taille relative des imperfections. Nous souhaitons remarquer qu'à partir du terme d'ordre principal de $\Lambda_\alpha(\eta)$ donné par (2.2.8), nous ne pouvons reconstruire plus en détails les formes des domaines B_j . Des termes de degré élevé dans le développement asymptotique de $\Lambda_\alpha(\eta)$, en ce qui concerne α , sont nécessaires pour reconstruire les domaines B_j avec une haute résolution - voir [6].

Le nombre de points (d'échantillonnage) nécessaire pour une inversion de Fourier discrète précise de $\Lambda_\alpha(\eta)$ s'ensuit du théorème d'échantillonnage de Shannon. Nous avons besoin (conservativement) des valeurs échantillonnées d'ordre $(\frac{h}{\delta})^2$ pour reconstruire, avec une résolution δ , une collection d'imperfections qui s'étend à l'intérieur d'un carré de taille h . Dans le but de simuler des erreurs de mesures de $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$ sur $\Gamma \times (0, T)$, aussi bien que les erreurs inhérentes dans l'approximation (2.2.8) et dans les calculs de g_η, θ_η et $\Lambda_\alpha(\eta)$ (par certaines formules de quadrature), nous pouvons ajouter un bruit aléatoire aux valeurs de $\Lambda_\alpha(\eta)$. Des expériences numériques faites dans [10] pour le problème inverse de conductivité 2D semble suggérer que la méthode est assez stable en ce qui concerne le bruit dans les mesures et des erreurs dans les différentes approximations.

Des formules approchées telles que (2.2.8) représente une approche très prometteuse pour l'identification dynamique de petites imperfections qui sont incluses dans un milieu homogène. En particulier, la méthode peut être étendue pour résoudre le problème d'identification dynamique de petites inclusions rigides ou incompressibles. Formellement, on peut recouvrir ces deux cas en laissant γ_j tendre vers $+\infty$ ou 0 dans (2.2.4) et la formule asymptotique (2.2.8). Rigoureusement, pour assurer que (2.2.8) est encore valide pour des inclusions rigides ou incompressibles, on doit montrer que le terme $o(\alpha^2)$ est uniforme en γ_j quand γ_j tend vers $+\infty$ ou 0. De plus, la méthode rapporte une bonne approximation pour des perturbations de petites amplitudes dans la conductivité ($\gamma_\alpha(x) = \gamma_0 + \alpha\gamma_1(x)$) à partir des mesures de $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$ sur $\Gamma \times (0, T)$. La méthode peut rapporter la transformée de Fourier de la perturbation $\gamma_1(x)$. Ce problème inverse est considéré dans [4].

Finalement, nous souhaitons accentuer le fait que, dans l'algorithme décrit dans ce chapitre, les centres $z_j, j = 1, \dots, m$ des imperfections sont retrouvés

avec une erreur $O(\alpha^{d-1})$, et seuls les tenseurs de polarisation des domaines B_j peuvent être reconstruits. En utilisant des termes de degré supérieur dans le développement asymptotique de $\frac{\partial u_\alpha}{\partial \nu_j} |_{\partial(z_j + \alpha B_j)^+}$, nous serions certainement capables de reconstruire les petites imperfections avec une plus grande résolution à partir des mesures dynamiques de frontières sur une partie du bord et capturer plus de détails sur les géométries des domaines B_j . Ceci nous permettra peut-être d'identifier des imperfections de conductivité assez générales sans restriction sur leurs tailles.

Résumé de la procédure d'identification :

- i) Considérer un nombre fini d'imperfections, $z_j + \alpha B_j$ pour $j = 1, \dots, m$, de conductivité γ_j ;
- ii) Résoudre l'équation des ondes (2.1.2) par une méthode d'éléments finis en espace et différences finies en temps² pour obtenir les mesures de frontière $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$ sur $\Gamma \times (0, T)$;
- iii) Calculer la dérivée normale de la solution u connue dans le milieu sain pour obtenir les mesures de frontière $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur $\Gamma \times (0, T)$;
- iv) Calculer le contrôle g_η de (2.2.5) pour un $\eta \in \mathbb{R}^d$ donné, par une méthode de contrôlabilité, (voir le chapitre suivant) ;
- v) A partir des mesures de frontière de $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ et g_η sur $\Gamma \times (0, T)$, calculer la formule asymptotique (2.2.8) ;
- vi) Appliquer la méthode d'inversion de Fourier³. Cette étape fournit la localisation des imperfections dans le domaine Ω .

■

²Voir Annexe A pour une résolution de l'équation des ondes.

³Cette étape essentielle dans la procédure d'identification sera détaillée dans le Chapitre 4 de cette thèse.

Chapitre 3

L'approche HUM pour la contrôlabilité exacte de frontière

Sommaire

3.1	Formulation du problème	37
3.2	Description de HUM	38
3.3	Application de HUM à l'équation des ondes . .	39
3.4	Un algorithme numérique basé sur HUM	40
3.4.1	Motivation. Description d'un algorithme général de gradient conjugué pour résoudre des problèmes variationnels fortement elliptiques	40
3.4.2	Application de l'algorithme gradient conjugué au contrôle de l'équation des ondes	42
3.4.3	Discretisation de l'algorithme du Gradient Conjugué en utilisant une technique de filtrage multi-grilles .	46
3.5	<i>HUM</i> sur le carré unité : Etude numérique . .	51
3.5.1	Rappels	51
3.5.2	Critère de convergence et normes discrètes	51
3.5.3	Exemples numériques	53
3.6	Conclusions	62

Nous présentons, dans ce chapitre, une méthode de contrôlabilité exacte de frontière pour l'équation des ondes, la *Méthode d'Unicité de Hilbert* (HUM) introduite par J.-L. Lions dans [29]. Le problème de contrôle pour l'équation des ondes a été étudié à de nombreuses reprises (voir [11], [13], [17], [26], etc...) en vue de la théorie sous-jacente et de son implémentation numérique par diverses méthodes numériques (différences finies, éléments finis, éléments finis mixtes, approche spectrale,...). Nous redonnons les principaux résultats, théorèmes, définitions et algorithmes nécessaires à la construction de notre algorithme de contrôle, qui sera incorporé à notre procédure d'identification d'inhomogénéités. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous faisons une étude numérique (dans le cas 2-D) de notre méthode HUM bi-grilles pour obtenir sa validation afin de l'utiliser correctement pour notre problème de détection numérique.

3.1 Formulation du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3 , un domaine borné de frontière $\partial\Omega$, et $\Gamma_0 \subseteq \partial\Omega$. Nous considérons l'équation des ondes avec un contrôle sur une partie du bord,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u^0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u^1 & \text{dans } \Omega, \\ u = \begin{cases} g & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ 0 & \text{sur } \Sigma - \Sigma_0 = \partial\Omega - \Gamma_0 \times (0, T). \end{cases} & \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

En d'autres termes, le "contrôle" g est appliqué sur une partie Γ_0 du bord $\partial\Omega$; il permet de ramener au repos la vibration initiale.

Alors le problème de contrôlabilité exacte est : "Etant donné $T > 0$ et les données initiales $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, peut-on trouver une fonction contrôle $g \in L^2(\Gamma \times (0, T))$ telle que la solution du système (3.1.1) vérifie

$$u(x, T) = \partial_t u(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega?"$$

On sait que, pour que ce problème admette une réponse positive, on doit vérifier deux conditions nécessaires :

- (i) T doit être suffisamment grand (car les ondes se propagent à vitesse finie).
- (ii) Γ_0 doit vérifier la Condition de Contrôle Géométrique.

Remarque : La condition géométrique est remplie, lorsque Γ est le bord de Ω tout entier, le temps étant deux fois le diamètre de Ω ($diam(\Omega) = \sup_{x,y \in \Omega} |x - y|$).

Si (i) et (ii) sont vérifiées, alors le problème de contrôle ci-dessus a au moins une solution $v \in L^2(\Gamma \times (0, T))$. Mais en général la solution n'est pas unique. Avec tous les contrôles possibles, nous pouvons sélectionner celui de norme L^2 minimale. Une méthode systématique et constructive pour calculer un tel contrôle, g , est fournie par la *méthode d'unicité de Hilbert* (HUM) de Lions [29].

Le principal avantage de la méthode HUM est que le contrôle est caractérisé par une formulation variationnelle qui peut être facilement implémentée par un algorithme de Gradient Conjugué.

3.2 Description de HUM

Nous décrivons maintenant HUM pour le contrôle de l'équation des ondes sur une partie du bord de manière assez brève. Pour plus de détails, regarder dans [26] et [29].

Nous notons par

$$E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) , \quad E' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

l'espace des états initiaux pour l'équation d'ondes homogène et le dual de E , respectivement. On définit l'opérateur

$$\Lambda : E \longrightarrow E'$$

comme suit :

1. Prendre $e = \{e^0, e^1\} \in E$ et résoudre de $t = 0$ à $t = T$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) \varphi = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ \varphi|_{t=0} = e^0 , \quad \partial_t \varphi|_{t=0} = e^1 & \text{dans } \Omega. \\ \varphi(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

2. Alors résoudre de $t = T$ à $t = 0$ (backwards)

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) \psi = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ \psi(x, T) = 0 , \quad \partial_t \psi(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial n} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ 0 & \text{sur } \Sigma - \Sigma_0 = \partial\Omega - \Gamma_0 \times (0, T). \end{cases} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

3. Finalement, définir l'opérateur Λ comme

$$\Lambda e = \{\psi_t(0), -\psi(0)\} \in E'.$$

Nous avons le théorème original de J.-L. Lions [29] :

Théorème 4 (J.-L. Lions, 1988). *L'opérateur Λ est linéaire et continue de E dans E' ; par ailleurs, si T est suffisamment grand ($> T_{min} = 2 \|x - x_0\|_{L^\infty(\Omega)}$) et si Γ_0 est du type*

$$\Gamma(x_0) = \{x | x \in \Gamma, (x - x_0) \cdot n_x > 0\}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^2$ est un point arbitraire et n_x est la normale extérieure à Γ en x , alors Λ est un isomorphisme de E dans E' .

Ce précédent théorème peut être interprété plus généralement de manière géométrique :

Théorème 5 (Bardos-Lebeau-Rauch, 1992). *Si tous les géodésiques¹ généralisées de longueur T rencontrent le bord du contrôle Γ_0 , à un point non diffractif alors pour tout u^0, u^1 dans $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on peut trouver un contrôle $g \in L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ qui dirige le système (3.1.1) à partir de u^0, u^1 au temps $t = 0$, jusqu'au repos au temps $t = T$.*

3.3 Application de HUM à l'équation des ondes

Appliquons maintenant le théorème 4 au contrôle de l'équation des ondes (3.1.1). Supposons que

$$u^0 \in L^2(\Omega) , u^1 \in H^{-1}(\Omega)$$

sont donnés. Alors :

1. prendre $f = \{u^1, -u^0\}$ - i.e. nous identifions u avec ψ ;
2. résoudre $\Lambda e = f$ pour obtenir e^0, e^1 , les données initiales pour l'équation des ondes en φ (3.2.2) ;
3. résoudre l'équation des ondes en φ (3.2.2) (progressive en temps) en utilisant e^0, e^1 comme données initiales ;

¹En géométrie, une *géodésique* désigne le chemin le plus court, ou l'un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs, entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique.

4. calculer la dérivée normale de la solution de l'équation des ondes en φ (3.2.2) et poser $g = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Sigma_0}$;
5. résoudre l'équation des ondes en ψ (3.2.3) (rétrograde en temps) en utilisant g comme donnée sur le bord ;
6. finalement, poser $u = \psi$, alors puisque $\psi(x, T) = 0$, $\psi_t(x, T) = 0$ étaient imposées, g (le contrôle) donne la contrôlabilité exacte de frontière avec

$$u(x, T) = \partial_t u(x, T) = 0, \forall x \in \Omega.$$

Nous remarquons que l'opérateur Λ est symétrique et E -elliptique. Ces propriétés impliquent que $\Lambda e = f$ peut être résolu par un algorithme de type gradient conjugué.

3.4 Un algorithme numérique basé sur HUM

Comme nous allons le montrer maintenant, la nature constructive de HUM avec les propriétés favorables de l'opérateur Λ , nous permet de formuler un algorithme numérique basé sur l'utilisation d'une méthode de gradient conjugué avec HUM à sa base. Ceci sera présenté en trois étapes :

1. présentation de la solution du gradient conjugué (**Algorithme du Gradient Conjugué**) ;
2. application de l'algorithme **Gradient Conjugué** au problème de contrôlabilité pour l'équation des ondes basé sur HUM (**Algorithme du Gradient Conjugué pour HUM**) ;
3. discrétisation de l'algorithme **Gradient Conjugué pour HUM** en utilisant une technique multi-grilles (**Gradient Conjugué Bi-grilles**) ;

3.4.1 Motivation. Description d'un algorithme général de gradient conjugué pour résoudre des problèmes variationnels fortement elliptiques

Nous pouvons réécrire le problème $\Lambda e = f$, en prenant $f = \{u^1, -u^0\}$, dans la forme variationnelle suivante :

Trouver $e \in E$ tel que

$$\langle \Lambda e, \check{e} \rangle = \langle \{u^1, -u^0\}, \check{e} \rangle, \quad \forall \check{e} \in E, \quad (3.4.4)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote la dualité entre E et E' . Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Lambda e, \check{e} \rangle &= \int_{\Omega} [\psi_t(x, 0) \check{\varphi}(x, 0) - \psi(x, 0) \check{\varphi}_t(x, 0)] dx \\ &= \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial n} \right] d\Gamma dt, \quad \forall e, \check{e} \in E. \end{aligned}$$

Puisque la fonctionnelle bilinéaire $\langle \Lambda \cdot, \cdot \rangle$ est continue, symétrique, et E-elliptique (i.e. coercive) pour T suffisamment grand, le problème (3.4.4) peut être résolu par un algorithme de gradient conjugué. Allant alors au cas général, nous considérons le problème linéaire variationnel suivant

Trouver $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (3.4.5)$$

où V est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire (\cdot, \cdot) et la norme correspondante $\|\cdot\|$, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue et V-elliptique et $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue.

Avec ces hypothèses, le problème $a(u, v) = L(v)$ admet une unique solution, qui peut être calculé par l'algorithme du Gradient Conjugué suivant :

Algorithme du Gradient Conjugué

• Etape 0 : Initialisation

$$u^0 \in V \text{ donné}; \quad (3.4.6)$$

résoudre alors

$$g^0 \in V, \quad (g^0, v) = a(u^0, v) - L(v) \quad \forall v \in V. \quad (3.4.7)$$

Si $g^0 = 0$, ou si "petit", prendre $u = u^0$; sinon, poser

$$g^0 = w^0. \quad (3.4.8)$$

Alors, pour $n \geq 0$, en supposant que u^n, g^n, w^n soient connus, calculer $u^{n+1}, g^{n+1}, w^{n+1}$ comme suit :

• **Etape 1 : Descente**

Calculer

$$\rho_n = \frac{\|g^n\|^2}{a(w^n, w^n)} \quad (3.4.9)$$

et alors

$$u^{n+1} = u^n - \rho_n w^n. \quad (3.4.10)$$

• **Etape 2 : Test de la convergence et construction d'une nouvelle direction de descente**

Calculer le résidu

$g^{n+1} \in V$, solution de

$$(g^{n+1}, v) = (g^n, v) - \rho_n a(w^n, v) - L(v), \quad \forall v \in V. \quad (3.4.11)$$

Si $g^{n+1} = 0$, ou si "petit", prendre $u = u^{n+1}$; sinon, calculer

$$\gamma_n = \frac{\|g^{n+1}\|^2}{\|g^n\|^2} \quad (3.4.12)$$

et définir la nouvelle direction de descente par

$$w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n w^n. \quad (3.4.13)$$

Mettre $n = n + 1$ et retourner en (3.4.9).

3.4.2 Application de l'algorithme gradient conjugué au contrôle de l'équation des ondes

La méthode HUM se réduit au calcul du contrôle de norme L^2 minimale pour le problème continu (3.1.1) en résolvant $\Lambda e = f$, avec $f = \{-u^1, u^0\}$ donné et $e \in E$. Ici nous adaptions l'algorithme général du Gradient Conjugué décrit ci-dessus pour résoudre ce problème linéaire. Tout d'abord, on décrit l'algorithme au niveau continu.

Prenons

$$V = E,$$

$$a(., .) = \langle \Lambda., . \rangle, \quad L : \check{e} \longrightarrow \langle u^1, -u^0, \check{e} \rangle .$$

Nous notons par

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

l'opérateur d'Alembertien.

Algorithme du Gradient Conjugué pour HUM

• Etape 0 : Initialisation

Choisir une valeur positive pour le critère d'arrêt ϵ , et donner des données initiales

$$e_0^0 \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad e_0^1 \in L^2(\Omega). \quad (3.4.14)$$

Résoudre

$$\begin{cases} \square \varphi_0 = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ \varphi_0 = 0 & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T), \\ \varphi_0(x, t = 0) = e_0^0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}(x, t = 0) = e_0^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.4.15)$$

et

$$\begin{cases} \square \psi_0 = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ \psi_0(x, T) = 0, \quad \partial_t \psi_0(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_0 = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ 0 & \text{sur } \Sigma - \Sigma_0 = \partial\Omega - \Gamma_0 \times (0, T). \end{cases} \end{cases} \quad (3.4.16)$$

Calculer $g_0 = \{g_0^0, g_0^1\} \in E$, comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta g_0^0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial t}(0) - u^1 & \text{dans } \Omega, \\ g_0^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.17)$$

et

$$g_0^1 = u^0 - \psi_0(0). \quad (3.4.18)$$

Si $g_0 = 0$, ou si "petit", prendre $e = e_0$; sinon, poser

$$w_0 = g_0. \quad (3.4.19)$$

Alors pour $n \geq 0$, supposons que $e_n, \varphi_n, \psi_n, g_n, w_n$ sont connus, calculer $e_{n+1}, \varphi_{n+1}, \psi_{n+1}, g_{n+1}, w_{n+1}$ comme suit :

• **Etape 1 : Descente**

Résoudre

$$\begin{cases} \square \bar{\varphi}_n = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ \bar{\varphi}_n(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T), \\ \bar{\varphi}_n(x, t = 0) = w_n^0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial t}(x, t = 0) = w_n^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.4.20)$$

et

$$\begin{cases} \square \bar{\psi}_n = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ \bar{\psi}_n(x, T) = 0, \quad \partial_t \bar{\psi}_n(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi_0 = \begin{cases} \frac{\partial \bar{\varphi}_n}{\partial n} & \text{sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ 0 & \text{sur } \Sigma - \Sigma_0 = \partial\Omega - \Gamma_0 \times (0, T). \end{cases} \end{cases} \quad (3.4.21)$$

Calculer $\bar{g}_n = \{\bar{g}_n^0, \bar{g}_n^1\} \in E$, comme suit

$$\begin{cases} -\Delta \bar{g}_n^0 = \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial t}(0) & \text{dans } \Omega, \\ \bar{g}_n^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.22)$$

et

$$\bar{g}_n^1 = -\bar{\psi}_n(0). \quad (3.4.23)$$

Ensuite calculer

$$\rho_n = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla g_n^0|^2 + |g_n^1|^2) dx}{\int_{\Omega} (\nabla \bar{g}_n^0 \cdot \nabla w_n^0 + \bar{g}_n^1 w_n^1) dx}. \quad (3.4.24)$$

Une fois ρ_n connu, calculer

$$e_{n+1} = e_n - \rho_n w_n, \quad (3.4.25)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \rho_n \bar{\varphi}_n, \quad (3.4.26)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \rho_n \bar{\psi}_n, \quad (3.4.27)$$

$$g_{n+1} = g_n - \rho_n \bar{g}_n. \quad (3.4.28)$$

Le nouveau résidu est donné par :

$$residual = \frac{\|g_{n+1}\|_{H_0^1 \times L^2}}{\|g_0\|_{H_0^1 \times L^2}}. \quad (3.4.29)$$

• **Etape 2 : Test de convergence et construction d'une nouvelle direction de descente**

Si $g_{n+1} = 0$, ou si "petit" (résidu $<$ *tolérance*), prendre $e = e_{n+1}$, $\varphi = \varphi_{n+1}$, $\psi = \psi_{n+1}$; sinon, calculer

$$\gamma_n = \frac{\int_{\Omega} (|\nabla g_{n+1}^0|^2 + |g_{n+1}^1|^2) dx}{\int_{\Omega} (|\nabla g_n^0|^2 + |g_n^1|^2) dx} \quad (3.4.30)$$

et définir la nouvelle direction de descente par

$$w_{n+1} = g_{n+1} + \gamma_n w_n. \quad (3.4.31)$$

Poser $n = n + 1$ et retourner en (3.4.20).

Remarque : Notons que dans l'algorithme du gradient conjugué ci-dessus, nous cherchons (par minimisation du résidu) les bonnes conditions initiales, e^0, e^1 de l'équation des ondes en φ - pas celles de notre équation des ondes originale en u . Une fois que nous avons obtenu ces conditions initiales, nous pouvons résoudre l'équation des ondes en φ et calculer le contrôle $g = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Sigma_0}$ pour l'équation des ondes en ψ . Cependant, nous imposons les conditions

$$\psi(x, T) = \psi_t(x, T) = 0.$$

Ainsi la solution de l'équation des ondes en ψ , en utilisant la valeur *convergée* de g , nous donnera la contrôlabilité exacte par simple identification avec l'équation des ondes en u . Le seul rôle joué par les conditions initiales de u est dans le calcul du résidu dans la zero-ième itération du gradient conjugué - voir ci-dessus (3.4.17) - (3.4.18).

3.4.3 Discrétisation de l'algorithme du Gradient Conjugué en utilisant une technique de filtrage multi-grilles

La discrétisation de l'algorithme ci-dessus va subir de nombreuses métamorphoses. La raison de cela est le fait qu'une discrétisation directe mène à un problème discret *mal posé*. De nombreuses tentatives ont été effectuées dans le but de remédier à ce problème (voir l'article [26] et l'analyse de [44]). La tentative la plus aboutie a été formulée par Glowinski et utilise une technique de filtrage multi-grilles inspirée d'un problème similaire qui survient dans la solution numérique du problème de *Stokes*. Nous présentons maintenant une implémentation par éléments finis de cette technique.

Le côté *mal posé* vient des composantes hautes fréquences de la solution du problème discret

$$\Lambda_{h,\Delta t} e_h = f_h. \quad (3.4.32)$$

Le remède est d'éliminer les composantes de petite longueur d'onde des conditions initiales de l'équation des ondes φ en les définissant sur une grille grossière de deux fois la taille initiale, $2h$. Nous avons besoin de définir deux opérateurs pour le passage de grille à grille :

- un opérateur d'interpolation I_{2h}^h , qui s'applique de la grille grossière à la grille fine :

$$I_{2h}^h : \Omega^{2h} \longrightarrow \Omega^h;$$

- un opérateur d'injection I_h^{2h} , qui s'applique de la grille fine à la grille grossière :

$$I_h^{2h} : \Omega^h \longrightarrow \Omega^{2h}.$$

Les espaces discrets fondamentaux

Nous supposons pour simplifier que Ω est un domaine polygonal de \mathbb{R}^d . Soient T_h et T_{2h} deux triangulations régulières classiques d'élément fini, une fine (T_h) et une grossière (T_{2h}), vérifiant :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K = \bigcup_{K' \in T_{2h}} K' \quad (3.4.33)$$

et soient h et $2h$ la plus grande longueur des arêtes de T_h et de T_{2h} , respectivement.

Nous définissons ensuite les espaces discrets suivants :

$$\begin{aligned} V^h &= \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in Q_1, \forall K \in T_h\} \\ V^{2h} &= \{v_{2h} \mid v_{2h} \in C^0(\bar{\Omega}), v_{2h}|_{K'} \in Q_1, \forall K' \in T_{2h}\} \\ V_0^h &= V^h \cap H_0^1(\Omega) = \{v_h \mid v_h \in V^h, v_h|_\Gamma = 0\} \\ V_0^{2h} &= V^{2h} \cap H_0^1(\Omega) = \{v_{2h} \mid v_{2h} \in V^{2h}, v_{2h}|_\Gamma = 0\} \end{aligned}$$

Finalement posons

$$(u, v)_h = \int_{\Omega} uv \, dx dy \quad \text{et} \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy$$

L'algorithme discret pour le HUM BI-GRID est alors :

Algorithme du Gradient Conjugué Bi-grilles

Etape 0 : Initialisation

- e_0^0, e_0^1 sont donnés sur la grille *grossière* ;
- Résoudre l'équation des ondes discrète (directe) pour $n = 0, 1, \dots, N$, sur la grille *fine*

$$\begin{cases} \varphi_0^{n+1} \in V_0^h, \\ \left(\frac{\varphi_0^{n+1} + \varphi_0^{n-1} - 2\varphi_0^n}{|\Delta t|^2}, v_h \right)_h + a(\varphi_0^n, v_h) = 0, \quad v_h \in V_0^h; \end{cases} \quad (3.4.34)$$

initialisée par $\varphi_0^0 = I_{2h}^h e_0^0$ et $\varphi_0^1 - \varphi_0^0 = (2\Delta t)I_{2h}^h e_0^1$, et stocker $\varphi_0^N, \varphi_0^{N+1}$.

- Pour $n = N, N-1, \dots, 0$, calculer $\varphi_0^n, \frac{\partial \varphi_0^n}{\partial n}, \psi_0^{n-1}$ par intégration en temps (*rétrograde*) comme suit :

- si $n = N$, calculer $\frac{\partial \varphi_0^N}{\partial n}$;
- sinon si $n < N$, calculer en premier φ_0^n en résolvant pour un pas de temps (*rétrograde*) sur la grille *fine*

$$\begin{cases} \varphi_0^n \in V_0^h, \\ \left(\frac{\varphi_0^n + \varphi_0^{n+2} - 2\varphi_0^{n+1}}{|\Delta t|^2}, v_h \right)_h + a(\varphi_0^{n+1}, v_h) = 0, \quad v_h \in V_0^h; \end{cases} \quad (3.4.35)$$

initialisée par les valeurs stockées φ_0^N et φ_0^{N+1} , et ensuite calculer $\frac{\partial \varphi_0^n}{\partial n}$;

- fin si ;

- résoudre

$$\begin{cases} \psi_0^{n-1} \in V_0^h, \\ \left(\frac{\psi_0^{n-1} + \psi_0^{n+1} - 2\psi_0^n}{|\Delta t|^2}, v_h \right)_h + a(\psi_0^n, v_h) = 0, \quad v_h \in V_0^h; \\ \psi_0^n = \frac{\partial \varphi_0^n}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.4.36)$$

initialisée par

$$\psi_0^N = 0 \quad \text{et} \quad \psi_0^{N+1} - \psi_0^N = 0;$$

- Calculer le résidu $g_0 = \{g_0^0, g_0^1\} \in V_0^{2h} \times V_0^{2h}$, en
- résolvant sur la grille *grossière*

$$\begin{cases} g_0^0 \in V_0^{2h}; v_{2h} \in V_0^{2h}, \\ a(g_0^0, v_{2h}) = \left(I_h^{2h} \frac{\psi_0^1 - \psi_0^0}{\Delta t}, v_{2h} \right)_{2h} - (I_h^{2h} u^1, v_{2h})_{2h}, \end{cases} \quad (3.4.37)$$

- alors poser

$$g_0^1 = I_h^{2h} u^0 - I_h^{2h} \psi_0^0. \quad (3.4.38)$$

• Si $\mathbf{g}_0 = 0$, ou si "petit", poser $\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_0$ et STOP; sinon, poser la première direction de recherche $\mathbf{w}_0 = \mathbf{g}_0$ ("steepest descent").

Ensuite pour $k \geq 0$, en supposant que $\mathbf{e}_k, \mathbf{g}_k, \mathbf{w}_k$ sont connus, calculer les itérations suivantes $\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{g}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}$ comme suit :

Etape 1 : Descente

• Résoudre l'équation des ondes discrète (directe) pour $\bar{\varphi}_k^n, n = 0, 1, \dots, N$, sur la grille *fine*

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_k^{n+1} \in V_0^h, \\ \left(\frac{\bar{\varphi}_k^{n+1} + \bar{\varphi}_k^{n-1} - 2\bar{\varphi}_k^n}{|\Delta t|^2}, v_h \right)_h + a(\bar{\varphi}_k^n, v_h) = 0, \quad v_h \in V_0^h; \end{cases} \quad (3.4.39)$$

initialisée par

$$\bar{\varphi}_k^0 = I_{2h}^h w_k^0 \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_k^1 - \bar{\varphi}_k^{-1} = (2\Delta t) I_{2h}^h w_k^1,$$

et stocker $\bar{\varphi}_k^N, \bar{\varphi}_k^{N+1}$;

• Pour $n = N, N-1, \dots, 0$, calculer $\bar{\varphi}_k^n, \frac{\partial \bar{\varphi}_k^n}{\partial n}, \bar{\psi}_k^{n-1}$ par intégration en temps (*rétrograde*), comme suit :

- si $n = N$, calculer $\frac{\partial \bar{\varphi}_k^N}{\partial n}$;
- sinon si $n < N$, calculer en premier $\bar{\varphi}_k^n$ en résolvant pour un pas de temps (*rétrograde*) sur la grille *fine*

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_0^n \in V_0^h, \\ \left(\frac{\bar{\varphi}_k^n + \bar{\varphi}_k^{n+2} - 2\bar{\varphi}_k^{n+1}}{|\Delta t|^2}, v_h \right)_h + a(\bar{\varphi}_k^{n+1}, v_h) = 0, \quad v_h \in V_0^h; \end{cases} \quad (3.4.40)$$

initialisée par les valeurs stockées $\bar{\varphi}_k^N$ et $\bar{\varphi}_k^{N+1}$, et ensuite calculer $\frac{\partial \bar{\varphi}_k^n}{\partial n}$.

- fin si ;
- résoudre

$$\begin{cases} \bar{\psi}_k^{n-1} \in V_0^h, \\ \left(\frac{\bar{\psi}_k^{n-1} + \bar{\psi}_k^{n+1} - 2\bar{\psi}_k^n}{|\Delta t|^2}, v_h \right)_h + a(\bar{\psi}_k^n, v_h) = 0, \quad v_h \in V_0^h; \\ \bar{\psi}_k^n = \frac{\partial \bar{\varphi}_k^n}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (3.4.41)$$

initialisée par

$$\bar{\psi}_k^N = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\psi}_k^{N+1} - \bar{\psi}_0^N = 0;$$

- Calculer le résidu $\bar{\mathbf{g}}_k = \{\bar{g}_k^0, \bar{g}_k^1\} \in V_0^{2h} \times V_0^{2h}$, en
- résolvant sur la grille *grossière*

$$\begin{cases} \bar{g}_k^0 \in V_0^{2h}; v_{2h} \in V_0^{2h}, \\ a(\bar{g}_k^0, v_{2h}) = \left(I_h^{2h} \frac{\bar{\psi}_k^1 - \bar{\psi}_k^0}{\Delta t}, v_{2h} \right)_{2h}, \end{cases} \quad (3.4.42)$$

- ensuite en posant

$$\bar{g}_k^1 = -I_h^{2h} \bar{\psi}_k^0; \quad (3.4.43)$$

- Calculer ensuite la direction de recherche en calculant

$$\rho_k = \frac{\int_{\Omega} \left(|\nabla g_k^0|^2 + |g_k^1|^2 \right) dx}{\int_{\Omega} (\nabla \bar{g}_k^0 \cdot \nabla w_k^0 + \bar{g}_k^1 w_k^1) dx} \quad (3.4.44)$$

- Une fois ρ_k connu, calculer les quantités

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}_k - \rho_k \mathbf{w}_k, \quad (3.4.45)$$

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \rho_k \bar{\varphi}_k, \quad (3.4.46)$$

$$\psi_{k+1} = \psi_k - \rho_k \bar{\psi}_k, \quad (3.4.47)$$

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k - \rho_k \bar{\mathbf{g}}_k. \quad (3.4.48)$$

Etape 2 : Test de convergence et nouvelle direction de descente

- Si $\mathbf{g}_{k+1} = 0$, ou si *petit*, poser $\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_{k+1}$, $\varphi_h = \varphi_{k+1}$, $\psi_h = \psi_{k+1}$ et STOP ;

- Sinon
 - calculer

$$\gamma_k = \frac{\int_{\Omega} \left(|\nabla g_{k+1}^0|^2 + |g_{k+1}^1|^2 \right) dx}{\int_{\Omega} \left(|\nabla g_k^0|^2 + |g_k^1|^2 \right) dx} \quad (3.4.49)$$

- définir la nouvelle direction de recherche conjuguée comme

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{g}_{k+1} + \gamma_k \mathbf{w}_k; \quad (3.4.50)$$

- Poser $k = k + 1$ et retourner à l'étape 1.

Remarques : Nous répétons ici deux remarques basiques faites dans [25] concernant la complexité de l'algorithme discret ci-dessus :

1. "... L'algorithme ci-dessus semble être un petit peu compliqué à première vue [...] mais en fait la seule partie non triviale est la solution (sur la grille grossière) des problèmes discrets de Dirichlet (3.4.37) et (3.4.42)". Une caractéristique intéressante de l'algorithme est que l'intégration simultanée rétrograde des deux équations discrètes d'ondes pour φ et ψ fournit une économie de place mémoire dans l'ordinateur. Le stockage sera plus important pour T grand et sera d'une nécessité absolue pour des problèmes 3D.

2. La remarque précédente montre aussi l'intérêt de l'approche *HUM* d'un point de vue calculatoire. Dans le problème original de contrôle, l'inconnu est le contrôle g qui est définie sur $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$; utilisant *HUM*, l'inconnu est la solution \mathbf{e} de $\Lambda \mathbf{e} = f$ qui est approchée par \mathbf{e}_h et est substantiellement plus petite en termes de mémoire requise.

3.5 HUM sur le carré unité : Etude numérique

Avant de présenter les résultats numériques, nous allons donner succinctement la définition des normes utilisées dans les calculs d'erreurs, puis nous discuterons du critère de convergence de la méthode, ainsi que des normes discrètes utilisées.

3.5.1 Rappels

Nous introduisons tout d'abord les notations suivantes pour les normes :

- $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ est la norme $L^2(\Omega)$;
- $|\cdot|_{1,\Omega}$ est la norme $H_0^1(\Omega)$; $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ est la norme $H^1(\Omega)$;
- $\|\cdot\|_{-1,\Omega}$ est la norme $H^{-1}(\Omega)$, où $|v|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|v\|_{-1,\Omega} = |w|_{1,\Omega}$, où $w \in H_0^1(\Omega)$ est la solution du problème de Dirichlet $-\Delta w = v$ dans Ω , $w = 0$ sur Γ .

3.5.2 Critère de convergence et normes discrètes

1. L'algorithme du gradient conjugué est initialisé par $e_0^0 = e_0^1 = 0$. En d'autres termes, la donnée initiale de la solution e_h est zéro.
2. Le critère d'arrêt : nous utilisons

$$\frac{\int_{\Omega} \left(|\nabla g_{k+1}^0|^2 + |g_{k+1}^1|^2 \right) dx}{\int_{\Omega} \left(|\nabla g_0^0|^2 + |g_0^1|^2 \right) dx} \leq \epsilon$$

où ϵ dépend de la précision de la machine. Dans nos calculs, on utilise $\epsilon = 10^{-6}, 10^{-8}$. Dans les cas avec des données initiales oscillantes, nous réduisons cette tolérance à 10^{-5} .

3. Dans les Tables, nous notons par u_h^0 et u_h^1 les valeurs calculées des conditions initiales u^0 et u^1 . En fait, ce sont les analogues discrets des valeurs convergées de $\psi(0)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}(0)$. Nous notons par e_h^0 et e_h^1 les valeurs calculées (convergées) des conditions initiales e^0 et e^1 .
4. Nous utilisons des versions discrètes des normes définies précédemment, qui sont calculées par une règle de quadrature de type trapèze à partir de la solution numérique discrétisée.

5. La quantité $\|g\|_{2,\Sigma}$ est la norme L^2 du contrôle sur le temps de $\|g(t)\|_{L^2(\Gamma)}$ (où g est la fonction contrôle à déterminer) - Cette dernière fonction est tracée en fonction du temps et montre comment l'énergie du contrôle évolue.
6. Les deux quantités $\frac{\|u_h(T)\|_{2,\Omega}}{\|u_h(0)\|_{2,\Omega}}$ et $\|u_t(T)\|_{-1,\Omega}$ sont obtenues en résolvant l'équation des ondes originale pour u , en commençant avec les données initiales données et en employant le contrôle de frontière exacte, g , qui a été calculé par l'algorithme. Elles montrent comment le contrôle calculé atteint l'état *terminal* désiré $u(x, T) = u_t(x, T) = 0$.
7. Notre motivation pour l'utilisation de *fonctions cut-off*, comme celle de la figure 3.1 (b), est qu'en pratique il est difficile de penser que le contrôle peut être appliqué instantanément au temps $t = 0$: un petit délai aura lieu.

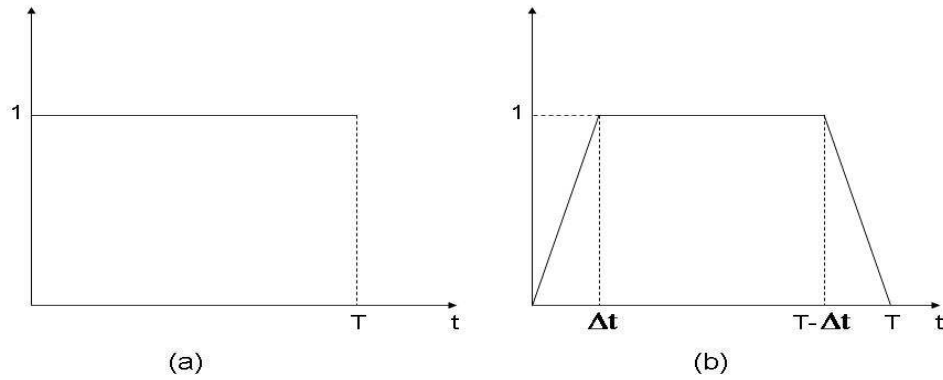


FIG. 3.1 – Différents tracés de la fonction cut-off utilisée dans HUM.

Similairement, la suppression du contrôle de frontière ne peut pas être fait immédiatement, expliquant le comportement à $t = T$ de la fonction *cut-off* de la figure 3.1 (b). Dans nos simulations numériques, nous avons utilisé la fonction *cut-off* de la figure 3.1 (b).

3.5.3 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons un certain nombre d'expériences numériques pour des conditions initiales différentes, mais nous utilisons toujours une méthode de Newmark² avec les paramètres $\beta = \frac{1}{4}$ et $\delta = 0$. Chacun de ces exemples est défini sur le carré unité. Pour calculer le contrôle, nous avons utilisé la méthode de *HUM* présentée précédemment qui réduit le problème de contrôle à la détermination d'une suite de conditions initiales (e^0, e^1) d'une équation d'onde progressive. L'algorithme itératif du gradient conjugué est utilisé avec l'initialisation $(e^0, e^1) = (0, 0)$. Nous supposons que la convergence est obtenue quand le résidu relatif est plus petit qu'un $\epsilon > 0$ donné.

Exemple 1 : Conditions initiales régulières

Nous considérons sur le carré unité les conditions initiales suivantes

$$u^0(x, y) = 10 \sin(\pi x) \sin(\pi y) ; \quad u^1(x, y) = 0; \quad (x, y) \in (0, 1)^2. \quad (3.5.51)$$

Nous supposons que le contrôle est actif sur $\Gamma_1 = \{(x, 1) : 0 < x < 1\} \cup \{(1, y) : 0 < y < 1\}$. Le temps auquel nous voulons que la solution soit stabilisée est prise égal à $T = 3 > 2\sqrt{2}$. Finalement, nous prenons $\epsilon = 1.e - 06$. En outre, nous rappelons que le schéma BI-GRID est stable sous la condition $\Delta t \leq h/\sqrt{2}$ (voir Annexe A). Nous décrivons dans la figure ci-dessous la norme $\|g_h\|_{L^2(\Gamma)}$ en fonction du temps. La méthode BI-GRID produit de bons résultats en peu d'itérations.

²voir Annexe A.

Pas Maillage	$h = \frac{1}{8}$	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$	$h = \frac{1}{102}$
Pas temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Nb d'itérations	5	5	4	4	4
$\ e_h^0\ _{0,\Omega}$	0.0791026	0.0351821	0.015714	0.0139754	0.0160854
$\ e_h^0\ _{1,\Omega}$	0.389507	0.18742	0.127949	0.124443	0.130721
$\ e_h^1\ _{0,\Omega}$	1.93352	1.94312	1.93605	1.94323	1.94522
$\frac{\ u^0 - u_h^0\ _{0,\Omega}}{\ u^0\ _{0,\Omega}}$	4.1×10^{-2}	3.6×10^{-3}	1.1×10^{-3}	6.6×10^{-4}	6.2×10^{-4}
$\ u_h^1\ _{-1,\Omega}$	0.139035	0.0549563	0.0243796	0.0110221	0.005086
$\frac{\ u_h(T)\ _{0,\Omega}}{\ u_h(0)\ _{0,\Omega}}$	0.0327554	0.0100263	4.3×10^{-3}	1.8×10^{-3}	8.2×10^{-4}
$\ u_t(T)\ _{-1,\Omega}$	0.117575	0.0378059	0.013585	7.2×10^{-3}	4.3×10^{-3}
$\ g_h\ _{2,\Sigma}$	3.11402	3.06502	3.04898	3.04929	3.05

TAB. 3.1 – Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour des conditions initiales régulières et des valeurs différentes de h (Exemple 1).

Dans la figure ci-dessous, nous avons décrit le tracé du résidu du gradient conjugué (en haut à gauche), le graphe de l'énergie (en haut à droite) et les graphes des normes du contrôle (avec et sans carré, en bas).

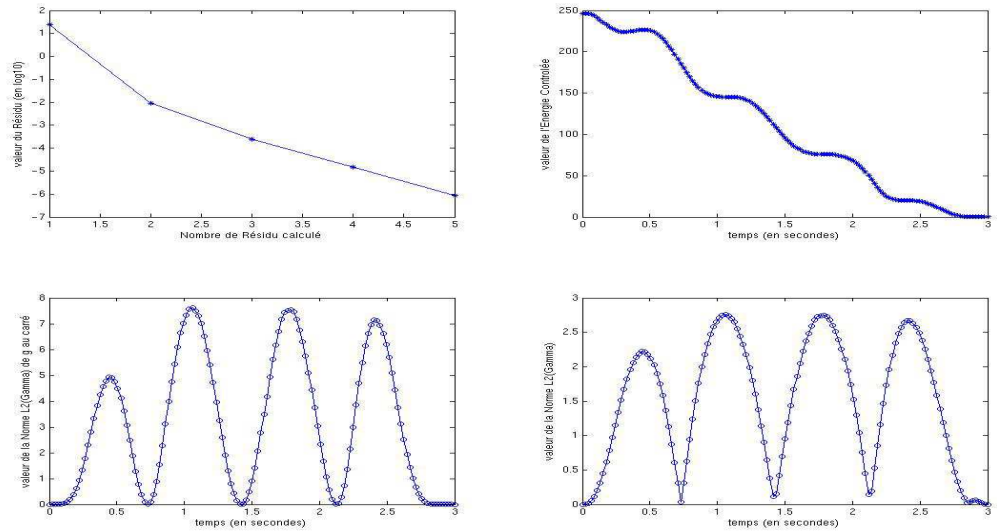


FIG. 3.2 – Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 1).

Exemple 2 : Conditions initiales irrégulières - Discontinuité de la position initiale

Dans ce deuxième exemple, nous considérons une situation plus singulière avec une condition initiale discontinue u^0 . Plus précisément, nous considérons, encore sur le carré unité $(0, 1)^2$, les fonctions suivantes

$$u^0(x, y) = \begin{cases} 40 & \text{si } (x, y) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; u^1(x, y) = 0 \quad (3.5.52)$$

Nous supposons que le contrôle est actif sur $\Gamma_1 = \{(x, 1) : 0 < x < 1\} \cup \{(1, y) : 0 < y < 1\}$ et nous prenons $T = 3 > 2\sqrt{2}$ et $\epsilon = 1.e - 06$.

Pas Maillage	$h = \frac{1}{8}$	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$	$h = \frac{1}{102}$
Pas temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Nb d'itérations	8	8	8	7	7
$\ e_h^0\ _{0,\Omega}$	0.199385	0.130374	0.0887119	0.0935635	0.0932021
$\ e_h^0\ _{1,\Omega}$	2.35813	1.88889	1.36014	1.22461	1.12666
$\ e_h^1\ _{0,\Omega}$	4.00134	6.04182	4.91324	5.39078	5.22464
$\frac{\ u^0 - u_h^0\ _{0,\Omega}}{\ u^0\ _{0,\Omega}}$	0.507409	0.418109	0.265759	0.18585	0.15264
$\ u_h^1\ _{-1,\Omega}$	0.694683	0.831586	0.551424	0.414996	0.336839
$\frac{\ u_h(T)\ _{0,\Omega}}{\ u_h(0)\ _{0,\Omega}}$	0.804113	0.32463	0.237266	0.16793	0.129609
$\ u_t(T)\ _{-1,\Omega}$	2.62982	3.0269	2.58778	1.54586	1.25757
$\ g_h\ _{2,\Sigma}$	6.03455	9.20906	7.60342	8.36248	8.12837

TAB. 3.2 – Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour des conditions initiales irrégulières et des valeurs différentes pour h (Exemple 2).

Dans la figure ci-dessous, nous avons décrit le tracé du résidu du gradient conjugué (en haut à gauche), le graphe de l'énergie (en haut à droite) et les graphes des normes du contrôle (avec et sans carré, en bas).

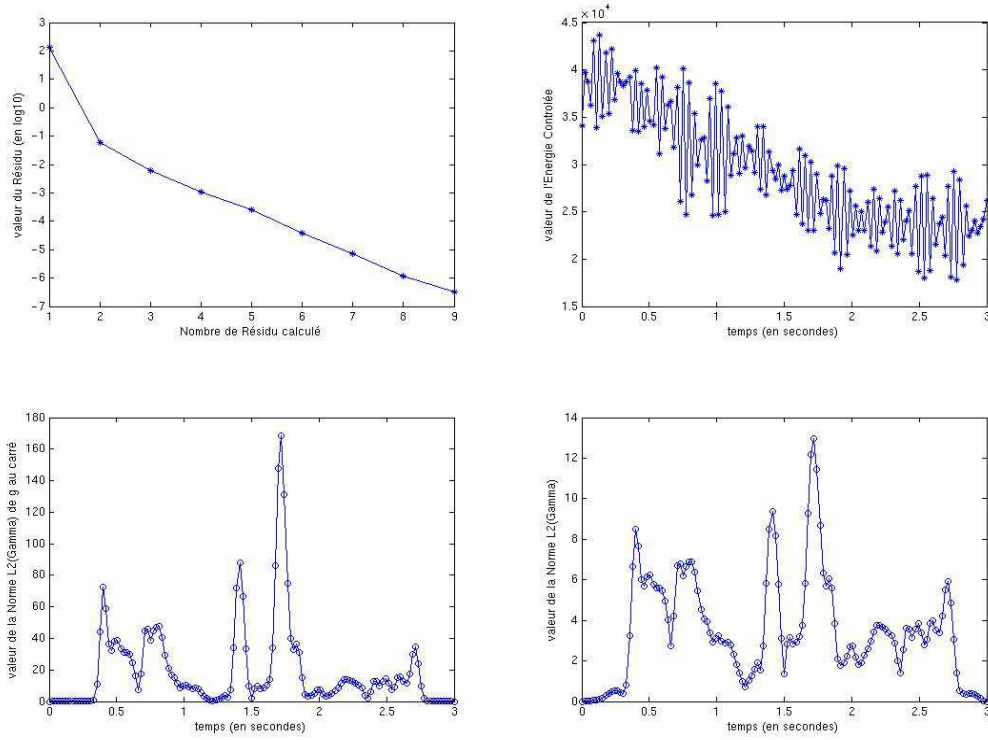


FIG. 3.3 – Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 2).

Les résultats résumés dans la Table 3.2 indiquent que le contrôle obtenu, pour une position initiale u^0 discontinue, ne conduit pas la solution au repos au temps T contrairement au cas de données régulières. Dans le précédent exemple, la situation était différente, la condition initiale u^0 étant continue. Nous observons également que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence est presque le double que pour des données initiales régulières et cela pour le même ε . Dans notre cas, la procédure bi-grilles n'a aucun effet régularisant sur la position initiale irrégulière u^0 (la projection de u^0 sur le maillage grossier est toujours discontinue pour un saut indépendant de h), et par conséquent le contrôle obtenu n'est pas le bon. Afin de remédier à cette situation, il faut utiliser des méthodes d'ordre plus élevé - voir [13].

Exemple 3 : Conditions initiales régulières propageantes

Dans ce troisième exemple, nous prenons une condition initiale propageante u^0 , c'est-à-dire une fonction exponentielle. Plus précisément, nous considérons, encore sur le carré unité $(0, 1)^2$, les fonctions suivantes

$$u^0(x, y) = e^{-64[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}; \quad u^1(x, y) = 0, \quad (3.5.53)$$

Dans nos calculs, nous avons pris le couple $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ et nous avons supposé que le contrôle est actif sur Γ tout entier et nous prenons $T = 3 > 2\sqrt{2}$ et $\epsilon = 1.e - 08$.

Pas Maillage	$h = \frac{1}{4}$	$h = \frac{1}{8}$	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$	$h = \frac{1}{102}$
Pas temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Nb d'itérations	5	12	10	7	5	5
$\ e_h^0\ _{0,\Omega}$	0.00765	0.002303	0.000618	0.000386	0.000369	0.000387
$\ e_h^0\ _{1,\Omega}$	0.03828	0.02596	0.00950	0.00483	0.00329	0.00288
$\ e_h^1\ _{0,\Omega}$	0.08578	0.0470	0.03069	0.029541	0.029285	0.029205
$\frac{\ u^0 - u_h^0\ _{0,\Omega}}{\ u^0\ _{0,\Omega}}$	1.8104	0.4283	0.0368	0.00438	0.000322	0.000117
$\ u_h^1\ _{-1,\Omega}$	0.010633	0.011065	0.002214	0.001395	0.000433	0.000207
$\frac{\ u_h(T)\ _{0,\Omega}}{\ u_h(0)\ _{0,\Omega}}$	0.77812	0.3257	0.038474	0.007832	0.00213	0.001083
$\ u_t(T)\ _{-1,\Omega}$	0.09894	0.02056	0.003057	0.001185	0.000307	0.000127
$\ g_h\ _{2,\Sigma}$	0.22792	0.1079	0.06909	0.066918	0.06629	0.066147

TAB. 3.3 – Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour des conditions initiales propageantes et des valeurs différentes pour h (Exemple 3).

Dans la figure ci-dessous, nous avons décrit le tracé du résidu du gradient conjugué (en haut à gauche), le graphe de l'énergie (en haut à droite) et les graphes des normes du contrôle (avec et sans carré, en bas).

Nous observons, pour ce test, que le contrôle trouvé conduit la solution au repos au temps T . En particulier, les quantités $\frac{\|u^0 - u_h^0\|_{0,\Omega}}{\|u^0\|_{0,\Omega}}$, $\|u_h^1\|_{-1,\Omega}$ et $\frac{\|u_h(T)\|_{0,\Omega}}{\|u_h(0)\|_{0,\Omega}}$ convergent vers zéro quand h tend vers zéro. Ce constat est similaire à celui obtenu pour l'Exemple 1 dans le cas de données initiales régulières. En d'autres termes, ces résultats sont adéquats à nos attentes.

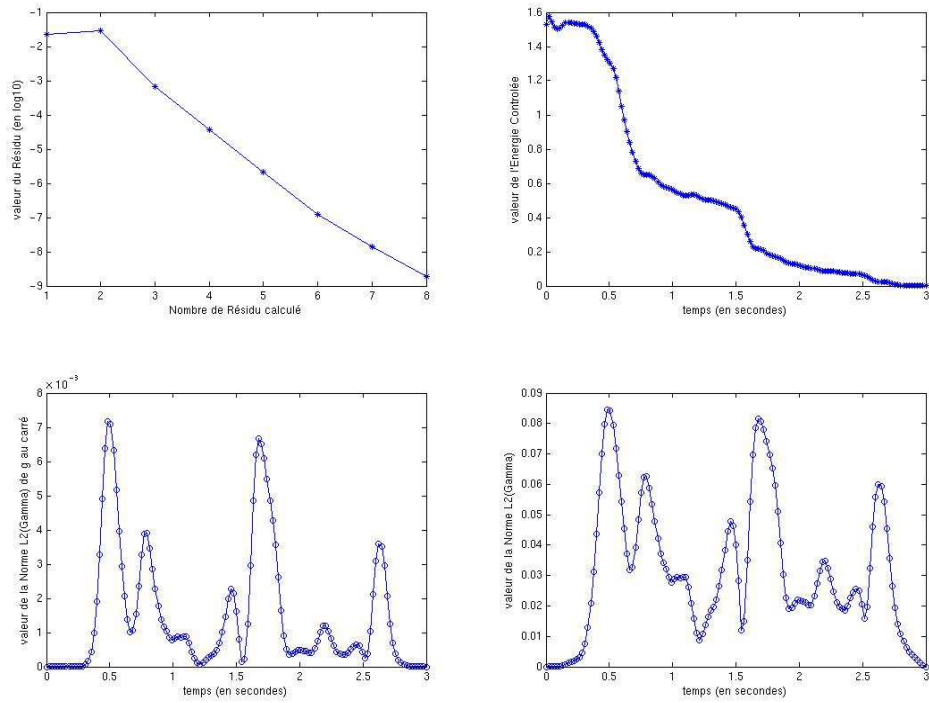


FIG. 3.4 – Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 3).

Exemple 4 : Conditions initiales irrégulières - Discontinuité de la vitesse initial

Encore sur le carré unité, nous considérons maintenant des conditions initiales moins régulières :

$$u^0(x, y) = \phi_0(x, y, 0) + \phi_1(x, y, 0), \quad (3.5.54)$$

$$u^1(x, y) = \frac{\partial \phi_0}{\partial t}(x, y, 0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(x, y, 0), \quad (3.5.55)$$

avec

$$\phi_0(x, y, t) = -\pi\sqrt{2} \cos\left(\pi\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\right) \left(\sin(\pi x) \cos(2\pi y) + \cos(2\pi x) \sin(\pi y)\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\phi_1(x, y, t) &= 4\pi(T-t) \sin\left(\pi\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{28}{3\sqrt{2}} \sin(\pi\sqrt{2}(t-T)) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\
&+ 4 \sin(\pi x) \sum_{p \geq 3, p \text{ impair}} \frac{p}{p^2 - 1} \left[\frac{2}{\sqrt{1+p^2}} \sin(\pi\sqrt{1+p^2}(t-T)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\sqrt{2}}{p^2 - 4} \cos\left(\pi\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\right) \right] \sin(p\pi y) \\
&+ 4 \sin(\pi y) \sum_{p \geq 3, p \text{ impair}} \frac{p}{p^2 - 1} \left[\frac{2}{\sqrt{1+p^2}} \sin(\pi\sqrt{1+p^2}(t-T)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\sqrt{2}}{p^2 - 4} \cos\left(\pi\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\right) \right] \sin(p\pi x)
\end{aligned}$$

avec $T = \frac{1}{\sqrt{2}}(n + \frac{3}{4})$ (ici $n = 3$). Ces conditions initiales irrégulières introduites par Glowinski, Li et Lions [26] sont bien connues pour produire de fausses oscillations et des effets numériques pathologiques. Nous rappelons que u^0 est une fonction Lipschitz n'appartenant pas à $C^1(\bar{\Omega})$ alors que u^1 appartient à $L^{+\infty}$ mais pas à $C^0(\bar{\Omega})$. Les fonctions u^0 et u^1 sont décrites sur la Figure 3.5.

Le principal avantage est que la solution analytique est connue. Plus précisément, les conditions initiales (e^0, e^1) de l'équation des ondes sont données par :

$$e^0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad , \quad e^1(x, y) = \pi\sqrt{2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (3.5.56)$$

menant à la solution

$$\varphi(x, y, t) = \sqrt{2} \cos\left(\pi\sqrt{2}\left(t - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\right) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (3.5.57)$$

et alors à l'expression analytique du contrôle $g = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma}$ agissant sur la frontière toute entière Γ . La norme L^2 du contrôle en ce qui concerne le temps est représentée à la figure 3.8.

Nous considérons ici différents ϵ , qui seront détaillés dans le tableau des résultats. La figure 3.7 décrit l'approximation (e_h^0, e_h^1) obtenue pour (e^0, e^1) .

La figure 3.8 décrit l'évolution du contrôle numérique en norme $L^2(\Gamma)$ en ce qui concerne le temps dans $[0, T]$ obtenue pour BI-GRID.

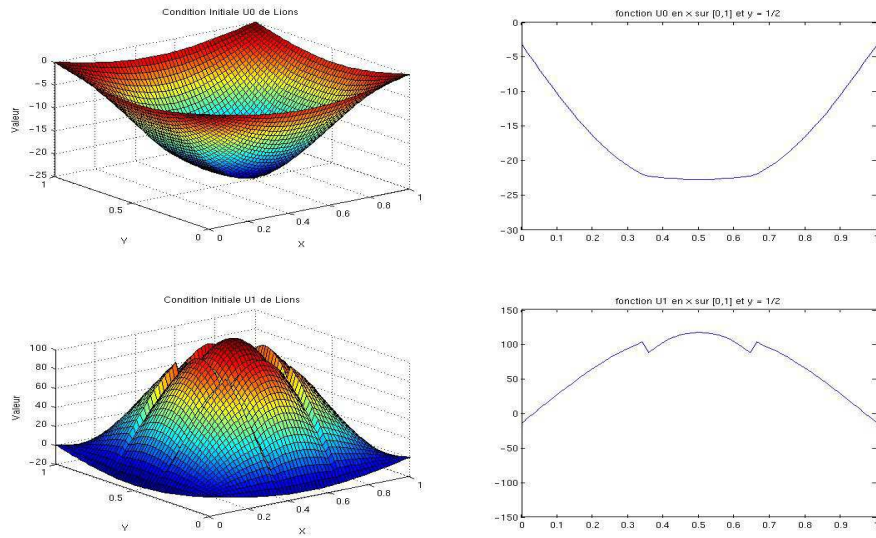


FIG. 3.5 – Condition initial u^0 (haut) et u^1 (bas) (Exemple 4).

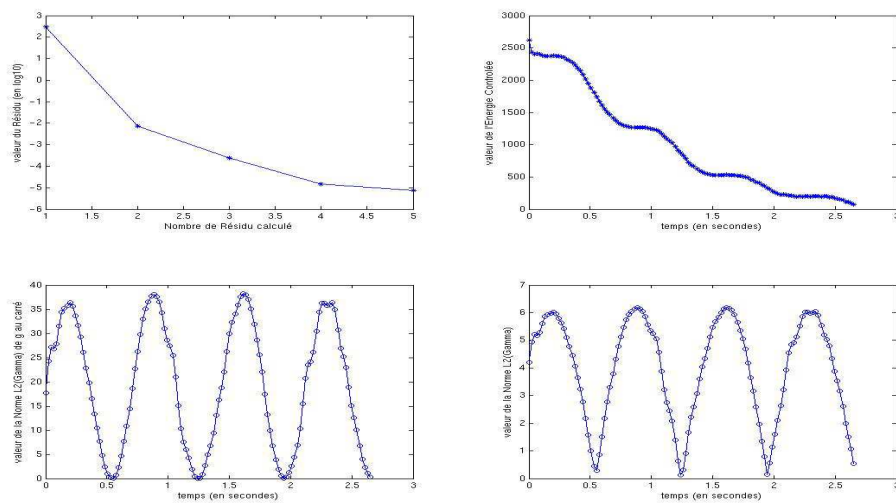


FIG. 3.6 – Représentation des graphes pour $h = 1/32$ (Exemple 4).

Pas Maillage	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$	$h = \frac{1}{64}$	$h = \frac{1}{102}$	$h = \frac{1}{102}$
Pas temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Critère ϵ	$1.e - 05$	$1.e - 06$	$1.e - 07$	$1.e - 06$	$1.e - 07$
Nb d'itérations	4	4	12	4	11
$\frac{\ e^0 - e_h^0\ _{0,\Omega}}{\ e^0\ _{0,\Omega}}$	0.0606849	0.00995675	0.00956373	0.0220988	0.0216298
$\frac{\ e^0 - e_h^0\ _{1,\Omega}}{\ e^0\ _{1,\Omega}}$	0.0765947	0.027936	0.0351155	0.02783	0.0335945
$\frac{\ e^1 - e_h^1\ _{0,\Omega}}{\ e^1\ _{0,\Omega}}$	0.0998045	0.0756765	0.151082	0.0691148	0.161201
$\frac{\ u^0 - u_h^0\ _{0,\Omega}}{\ u^0\ _{0,\Omega}}$	0.0216589	0.0118858	0.0351155	0.00979851	0.0433632
$\frac{\ u^1 - u_h^1\ _{-1,\Omega}}{\ u^1\ _{-1,\Omega}}$	0.0393988	0.0102581	0.0254589	0.01187	0.0308774
$\frac{\ u_h(T)\ _{0,\Omega}}{\ u_h(0)\ _{0,\Omega}}$	0.0267875	0.00968071	0.0249061	0.0102611	0.0344916
$\ u_t(T)\ _{-1,\Omega}$	0.362724	0.114551	0.313136	0.121784	0.420346
$\ g_h\ _{2,\Sigma}$	7.18995	7.35213	7.36315	7.30957	7.3227
$\ g - g_h\ _{2,\Sigma}$	0.461719	0.324526	0.427732	0.332067	0.465487

TAB. 3.4 – Résultats obtenus pour HUM avec BI-GRID pour les conditions initiales de Glowinski-Li-Lions et des valeurs différentes pour h (Exemple 4)

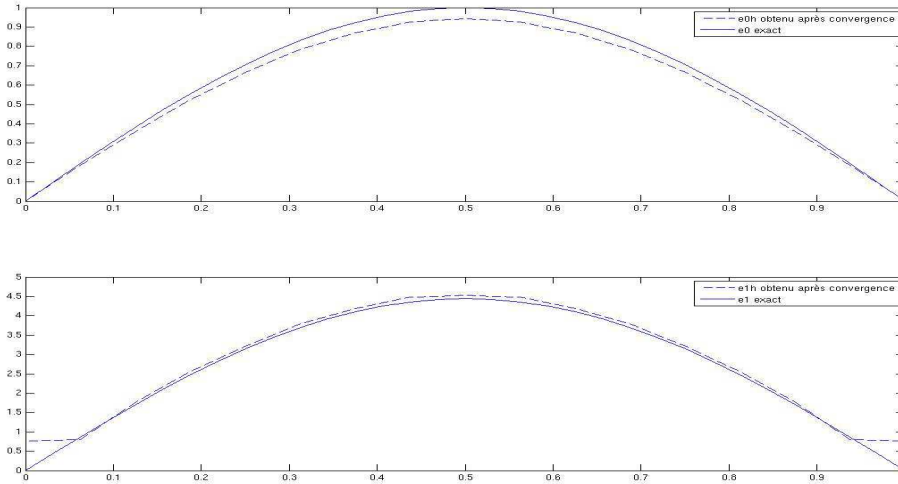


FIG. 3.7 – $e_h^0(x, y = \frac{1}{2})$ et $e_h^1(x, y = \frac{1}{2})$ en fonction de $x \in [0, 1]$ obtenu avec BI-BRID : exacte(-) et numérique(-); $h = 1/32$ et $\Delta t = h/\sqrt{2}$ (Exemple 4).

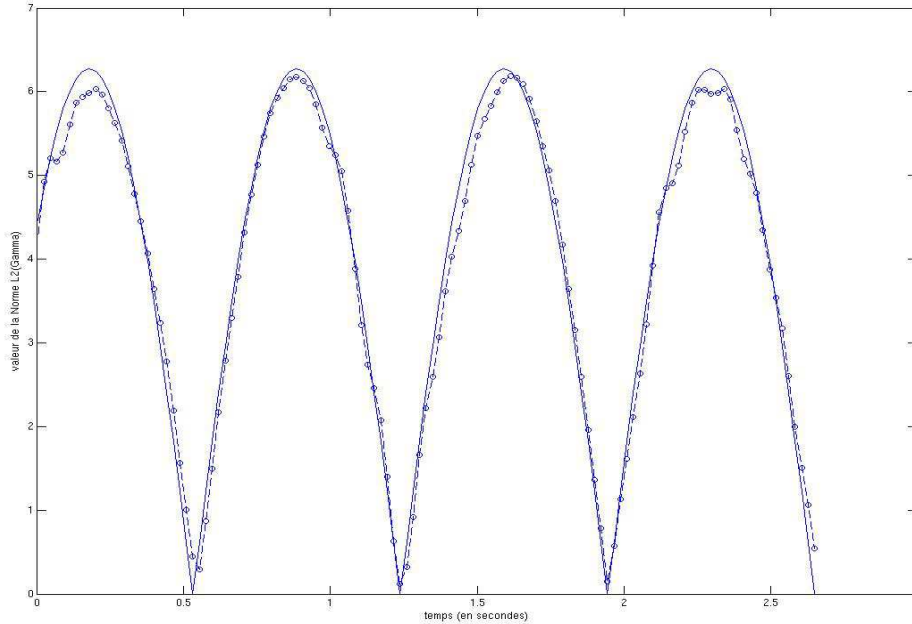


FIG. 3.8 – $\|g_h\|$ vs. $t \in [0, T]$ obtenue avec BI-GRID : exacte(-) et numérique(-o-) ; pour $h = 1/32$ (Exemple 4).

3.6 Conclusions

Grâce aux tests effectués dans la section précédente, nous avons pu étalonner notre algorithme pour différents types de données initiales, mais surtout le valider en comparant nos résultats avec ceux de Glowinski-Li-Lions dans [26]. Par suite, le HUM couplé avec la méthode bi-grilles fournit un algorithme robuste et précis pour le calcul de la fonction de contrôle de frontière g . Maintenant que nous avons des outils efficaces pour la contrôlabilité géométrique de frontière, nous pouvons aborder la détection numérique de petites imperfections au moyen de notre procédure d'identification établie au Chapitre 2.

Chapitre 4

Détection numérique en deux et trois dimensions

Sommaire

4.1	Introduction et rappel	65
4.1.1	Introduction	65
4.1.2	Rappel de la procédure d'identification	65
4.2	Discretisation numérique	66
4.2.1	Discretisation espace-temps	66
4.2.2	Implémentation parallèle	70
4.3	Méthode de Fourier	71
4.3.1	Échantillonnage	71
4.3.2	Éviter les pièges	76
4.3.3	Une méthode d'échantillonnage exacte	78
4.3.4	Explication des fenêtres FFT	82
4.4	Exemples et tests de calibration	90
4.4.1	Cas 2-D	91
4.4.2	Cas 3-D	97
4.5	Localisation numérique 2-D	99
4.5.1	Détection numérique 2-D depuis tout le bord	101
4.5.2	Localisation dynamique depuis une partie du bord	115
4.5.3	Courbe de performance pour MPI	119
4.5.4	Etude comparative des méthodes utilisées	121
4.6	Localisation numérique en 3-D	126

4.1 Introduction et rappel

4.1.1 Introduction

Ce chapitre est une implémentation numérique directe de la théorie de la localisation dynamique pour l'équation des ondes initiée par H. Ammari dans [3] et présentée dans le Chapitre 2. Nous y présentons les discrétisations en espace et en temps utilisées pour l'équation des ondes, les différentes techniques et astuces pour la méthode d'inversion de Fourier, des calculs de calibration sur la formule asymptotique (2.2.8) en 2-D et 3-D, ainsi que de nombreux résultats numériques en deux dimensions (voir Chapitre 5 pour trois dimensions) pour la localisation de une à plusieurs imperfections à partir de mesures sur une partie du bord ou sur le bord tout entier. Pour finir, nous ferons une étude comparative, pour trois imperfections fixées, des méthodes utilisées dans ce chapitre.

4.1.2 Rappel de la procédure d'identification

Nous réécrivons ici le processus d'identification de plusieurs imperfections.

Etape 1 : Initialisation

Considérer Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de conductivité γ_0 et qui contient un nombre fini d'imperfections, $z_j + \alpha B_j$ pour $j = 1, \dots, m$, de conductivité γ_j .

Etape 2 : Calcul de Λ_α

Pour η dans \mathbb{R}^d

- i) Résoudre l'équation des ondes (2.1.2) pour avoir $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$ sur $\Gamma \times (0, T)$;¹
- ii) Calculer la dérivée normale de la solution u connue dans le milieu sain pour obtenir $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur $\Gamma \times (0, T)$;
- iii) Calculer le contrôle g_η de (2.2.5) par une méthode HUM bi-grid;²
- iv) Évaluer l'intégrale de frontière (2.2.8).

Etape 3 : Localisation des centres des imperfections

Application de la méthode d'inversion de Fourier, qui sera étudiée plus en détails dans la suite de cette partie.

¹Voir Annexe A pour une résolution et une discrétisation de l'équation des ondes.

²Voir Chapitre 3 pour une illustration de cette méthode.

4.2 Discrétisation numérique de l'algorithme de localisation dynamique

Dans cette section, nous présentons la discrétisation numérique de notre problème d'identification. Tout d'abord, nous décrivons la méthode d'éléments finis et la méthode des différences finies en temps utilisées pour résoudre les différentes équations des ondes contenues dans ce problème de détection. Puis nous discuterons de la parallélisation de notre procédure d'identification. La méthode d'inversion de Fourier sera vue en détails dans la section suivante.

Nous ne redécrivons pas ici la discrétisation numérique de la méthode HUM bi-grid, vu au Chapitre 3 (le lecteur intéressé pourra consulter [11] ou [17]), ainsi que l'évaluation de l'intégrale de frontière (2.2.8) qui est basée sur des formules de quadrature classiques.

4.2.1 Discrétisation espace-temps pour l'équation des ondes

Dans cette sous-section, nous montrons que la méthode des éléments finis est bien adaptée à la résolution numérique de l'équation des ondes : nous combinons éléments finis pour la discrétisation en espace et différences finies pour la discrétisation en temps. Ceci sera utilisé pour résoudre le problème de contrôle (2.2.5) pour g_η et l'équation des ondes inhomogène (2.1.2) pour u_α .

Semi-discrétisation en espace : Approximation par éléments finis

Premièrement, nous considérons l'équation des ondes générale suivante, avec une condition de Dirichlet sur le bord, définie sur $\Omega \times (0, T)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u(x, t) - \nabla \cdot (\gamma(x) \nabla (u(x, t))) = f(x, t) & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = g(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, t = 0) = u^0(x) & \forall x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, t = 0) = u^1(x) & \forall x \in \Omega, \end{array} \right. (4.2.1)$$

avec $f \in L^2(L^2(\Omega); (0, T))$, $g \in H_0^1(\partial\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. On suppose que $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, et que $u^0, u^1 \in H^1(\Omega)$. En outre, on considère la fonction g comme dérivable en temps et vérifiant des conditions de compatibilité avec u^0 et u^1 .

En pratique, pour travailler dans l'espace homogène $H_0^1(\Omega)$, nous utilisons une technique de relèvement sur la fonction g , définie comme suit. Pour simplifier, nous réécrivons la partie elliptique (spatial) de (4.2.1) comme

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous étendons g à tout Ω , qui sera noté \tilde{g} , et cherchons des solutions $\tilde{u} = u - \tilde{g}$ de l'équation homogène

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{u} = f - \mathcal{L}\tilde{g} & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans le sens faible, le problème devient : *Trouver* $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ *telle que*

$$a(\tilde{u}, v) = (f, v) - a(\tilde{g}, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où $(., .)$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $a(., .)$ est la forme bilinéaire elliptique donnée par

$$a(u, v) = (\gamma \nabla u, \nabla v).$$

La solution existe, d'après le lemme de Lax-Milgram, si $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$, qui d'après le théorème de Trace est vrai si $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Une fois \tilde{u} connu, nous recouvrons facilement u à partir de la définition, $u = \tilde{u} + \tilde{g}$.

Pour le maillage en éléments finis, nous considérons des maillages de forme régulière, \mathcal{T}_h , qui partitionne le domaine Ω en un ensemble d'éléments disjoints $\{K\}$, tel que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$. Les éléments sont des rectangles (en 2-D) ou des parallélépipèdes (en 3-D), alignés avec les axes de coordonnées. Ces formes géométriques sont nécessaires pour l'implémentation de l'algorithme bi-grilles. Le diamètre d'un élément K est noté par h_K et la taille du maillage h est donnée par $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. Nous définissons le sous-espace suivant de $H_0^1(\Omega)$ sur le maillage,

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } v_h|_K \in Q_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

où Q_1 représente l'espace des polynômes de degré au moins un dans chacune des d variables, donc engendré par $\{1, x, y, xy\}$ si $d = 2$, et par $\{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz\}$ si $d = 3$.

Une approximation possible d'éléments finis est alors donnée par : *Trouver* $\tilde{u}_h \in V_h$ *telle que*

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = (f, v_h) - a(\tilde{g}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Cependant, cette approximation n'est pas très pratique, ce qui est dû à la difficulté de construction de l'opérateur d'extension, $g \longrightarrow \tilde{g}$. Nous supposons ainsi que g n'appartient pas seulement à $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ mais aussi à $C^0(\Omega)$. Nous notons par I l'ensemble des noeuds internes (les noeuds n'appartenant pas à $\Gamma = \partial\Omega$) et par J l'ensemble des noeuds sur la frontière. Leur cardinalité est respectivement N_I et N_J . Maintenant nous posons

$$V_h^* = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h(x_i) = g(x_i), i = 1, \dots, N_I \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } v_h|_K \in Q_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

et le problème approché se lit alors : *Trouver $u_h \in V_h^*$ telle que*

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Mais nous pouvons décomposer tout $u_h \in V_h^*$ comme

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{N_I} \tilde{u}_h(x_i, t) \omega_i + \sum_{j=1}^{N_J} g(x_j, t) \tilde{\omega}_j = z_h + \tilde{g}_h$$

ω et $\tilde{\omega}$ sont les fonctions de base relatives aux noeuds internes et frontières, respectivement. Nous notons que $z_h \in V_h$ et $\tilde{g}_h \in V_h^*$. Finalement le problème peut être réécrit dans une forme symétrique comme : *Trouver $z_h \in V_h$ telle que*

$$a(z_h, v_h) = (f, v_h) - a(\tilde{g}_h, v_h) = (\tilde{f}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Un élément v_h de V_h s'écrira comme

$$\forall x \in \Omega, v_h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_I} v_h(x_i) \omega_i(x),$$

où les ω_i sont des fonctions de base Q_1 associées aux noeuds internes.

Retournons maintenant à l'équation des ondes (4.2.1), nous pouvons écrire la forme faible complète comme : *Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$, avec $u|_{t=0} = u^0$ et $\partial_t u|_{t=0} = u^1$ telle que*

$$\langle \partial_t^2 u, v \rangle + a(u, v) = (f, v) - a(\tilde{g}_h, v_h) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad 0 < t < T,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. L'approximation semi-discrète en éléments finis est alors : *Trouver $u_h \in V_h \times [0, T]$ telle que*

$$\begin{aligned} \langle \partial_t^2 u_h, v_h \rangle + a(u_h, v_h) &= (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad 0 < t < T \\ u_h|_{t=0} &= P_h u^0, \\ \partial_t u_h|_{t=0} &= P_h u^1, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

où P_h décrit la projection L^2 sur V_h et la forme bilinéaire discrète sur $V_h \times V_h$ est donnée par

$$a(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \gamma \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Ecrivant,

$$\partial_t^2 u_h(x, t) = \sum_{i \in I} u''(x_i, t) \omega_i(x),$$

nous obtenons le système linéaire du second ordre d'équations différentielles ordinaires pour la discrétisation de (4.2.1) par la méthode des éléments finis (4.2.2),

$$\begin{cases} MU_h''(t) + KU_h(t) = B_h & 0 < t \leq T \\ U_h(0) = U_h^0 \text{ et } U_h'(0) = V_h^0 \text{ donnés.} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

où $U_h^0 = P_h u^0$ et $V_h^0 = P_h u^1$. La matrice de masse, M , a les coefficients

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i(x) \omega_j(x) \, dx, \quad 0 \leq i, j \leq N_I,$$

la matrice de raideur, K , a les coefficients

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \gamma(x) \nabla \omega_i(x) \nabla \omega_j(x) \, dx, \quad 0 \leq i, j \leq N_I$$

et $B_h \in \mathbb{C}^{N_I}$ le vecteur second membre de coefficients

$$(B_h)_j = \int_{\Omega} f(x_j, t) \omega_j(x) \, dx - \sum_{j=1}^{N_J} K_{ij} g(x_j, t) - \sum_{j=1}^{N_J} M_{ij} \partial_t^2 g(x_j, t).$$

Discrétisation complète en espace-temps

Pour discrétiser (4.2.3) en temps, nous utilisons le schéma de Newmark (voir [37], [42]) et l'Annexe A. Ce schéma fournit une approche générale et nous permet de passer d'un schéma explicite à un schéma implicite. Soient $\Delta t > 0$ le pas de temps et $\{t^n\}_{0 \leq n \leq N}$ une subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N + 1$ points. Plus précisément, on pose $N = \frac{T}{\Delta t}$, $t^n = n\Delta t$, $\forall 0 \leq n \leq N$, soit $t^N = T$. Notons $U_h(t^n) = U_h^n$ et $B_h(t^n) = B_h^n$.

Nous avons le schéma de Newmark suivant : *Trouver des approximations* $\{U_h^n\}_n$ de U_h^n telles que

$$(M + \beta\Delta t^2 K)U_h^{n+1} = [2M - \Delta t^2(1 - 2\beta + \delta)K] U_h^n - [M + \Delta t^2(\beta - \delta)K] U_h^{n-1} + \Delta t^2 R_h,$$

pour $n = 1, \dots, N - 1$. Ici $\beta \geq 0$ et $\delta \geq 0$ sont les paramètres de Newmark,

$$R_h = \beta B_h^{n+1} + (1 - 2\beta + \delta) B_h^n + (\beta - \delta) B_h^{n-1}$$

et B_h est le second membre du système matriciel (4.2.3).

Remarque : Nous rappelons que pour $\delta = 0$, le schéma de Newmark est d'ordre deux en temps, alors qu'il se réduit à l'ordre un pour $\delta > \frac{1}{2}$. Quand $\beta = 0$ et $\delta = 0$, nous obtenons un schéma explicite qui correspond au schéma standard saute-mouton. Quand $\beta = \frac{1}{4}$ et $\delta = 0$, nous avons un schéma implicite, inconditionnellement stable.

Dans les calculs, nous avons utilisé le schéma implicite, inconditionnellement stable, pour la solution de l'équation des ondes (2.1.2) avec des imperfections et pour les équations des ondes dans le problème de contrôle (2.2.5).

4.2.2 Implémentation parallèle

Dans le but de réduire le temps CPU nécessaire pour notre algorithme d'identification, nous avons utilisé des commandes *Message Passing Interface* (MPI) pour une implémentation parallèle en *Fortran 90*. Deux niveaux de parallélisation sont possibles :

- une grossière, où nous exploitons les commandes MPI pour boucler sur les différentes valeurs de $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$;
- et une fine, où les solveurs linéaires sont parallélisés en utilisant le package PETSc [15].

Dans le premier cas, la vitesse de calcul sera linéaire en fonction du nombre de processeurs. Dans le second cas, on s'attend à une vitesse de calcul super-linéaire.

4.3 Méthode de Fourier

4.3.1 Échantillonnage

La localisation des centres, z_j , $j = 1, \dots, m$, requiert que nous calculions numériquement la transformée de Fourier inverse de l'intégrale de frontière, $\Lambda_\alpha(\eta)$, puisque nous voulons recouvrir des dérivées de masses de Dirac - voir Chapitre 2 Section 2.3. Un cadre de travail théorique pour le nombre de points d'échantillonnage nécessaires est fourni par le théorème de Shannon

Théorème 6 (Shannon). *Si la transformée de Fourier d'une fonction $h(\tau)$ est zéro pour toutes fréquences plus grandes qu'une fréquence critique f_c (la fréquence de Nyquist), alors la fonction continue $h(\tau)$ peut être uniquement déterminée à partir de la connaissance de ses valeurs échantillonnées par la formule*

$$h(\tau) = \Theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n\Theta) \frac{\sin(2\pi f_c(\tau - n\Theta))}{\pi(\tau - n\Theta)}$$

où $\Theta = \frac{1}{2f_c}$ et $\frac{1}{\Theta}$ est connu comme étant le taux d'échantillonnage de Nyquist.

D'après ce théorème, il s'ensuit les deux faits suivants :

- (i) Si les imperfections sont connues comme étant contenues dans un carré/cube de côté $2M$, nous devons échantillonner $\Lambda_\alpha(\eta)$ avec un pas $\Delta\eta = \frac{1}{2M}$.
- (ii) Si nous échantillonons dans un domaine $|\eta| < \eta_{\max}$, alors la résolution sera au moins $\delta = \frac{1}{2\eta_{\max}}$.

Ainsi nous avons besoin de $N_\delta = \left(\frac{2M}{\delta}\right)^d$, $d = 2, 3$, valeurs échantillonnées de $\Lambda_\alpha(\eta)$ pour reconstruire, à une résolution δ , un ensemble d'inhomogénéités contenues à l'intérieur du carré/cube de taille $2M$. Cela implique, par conséquent, $(4M\eta_{\max})^d$ points d'échantillonnage.

Une autre possibilité est une approche plus calculatoire étudiée par D. Volkov dans sa thèse [41]. Pour simplifier, supposons que $d = 2$ et examinons notre donnée $\Lambda_\alpha(\eta)$ dans sa forme la plus condensée

$$\Lambda(\eta) = e^{2iz \cdot \eta} \quad (4.3.4)$$

pour une seule imperfection $z = (z_1, z_2)$. Nous échantillons maintenant η dans le domaine $[-\eta_{\max}, \eta_{\max}] \times [-\eta_{\max}, \eta_{\max}]$, uniformément avec n^2 points et avec un pas de discrétisation $\Delta\eta = \frac{2\eta_{\max}}{n+1}$. Nous obtenons l'approximation discrète,

$$\Lambda_h(\eta) = e^{[2iz_1(-\eta_{\max}+(k-1)\Delta\eta)+2iz_2(-\eta_{\max}+(l-1)\Delta\eta)]}, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Il est tout à fait naturel d'utiliser un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) pour ce type de problème. La transformée de Fourier inverse discrète (IDFT) appliquée à cette quantité nous rapporte

$$\Lambda_h(\eta) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e^{[2iz_1(-\eta_{\max}+(k-1)\Delta\eta)+2iz_2(-\eta_{\max}+(l-1)\Delta\eta)]} e^{[2i\pi(\frac{k-1}{n}(r-1))+2i\pi(\frac{l-1}{n}(s-1))]}$$

pour tout $1 \leq r, s \leq n$. Pour bien comprendre le mécanisme, restreignons nous à la première coordonnée :

$$\Lambda_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{[2iz_1(-\eta_{\max}+(k-1)\Delta\eta)]} e^{[2i\pi(\frac{k-1}{n}(r-1))]}$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$\begin{aligned} |\Lambda_1| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{[2iz_1(-\eta_{\max}+(k-1)\Delta\eta)]} e^{[2i\pi(\frac{k-1}{n}(r-1))]} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \frac{\sin(2\eta_{\max}z_1)}{\sin\left(\pi\left[\frac{z_1\Delta\eta}{\pi} + \frac{r-1}{n}\right]\right)} \right| \end{aligned}$$

Pour n grand ($n \rightarrow \infty$), $|\Lambda_1| \rightarrow 0$ sauf si la quantité dans le dénominateur est égale à zéro. Ceci aura lieu quand $\sin(k\pi) = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ce qui veut dire que $(\frac{z_1 \Delta \eta}{\pi} + \frac{r-1}{n})$ doit être proche d'un entier. Ainsi, seul le signe de z_1 est fixé, dans le but d'approcher seulement une valeur entière (et ainsi observer un seul pic dans la transformée de Fourier), la condition suivante doit être vérifiée :

$$\left| \frac{z \Delta \eta}{\pi} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \frac{r-1}{n} \leq 1.$$

Une autre condition raisonnable pour des imperfections vivant dans le carré $[-a, a]^2$ est

$$\frac{a \Delta \eta}{\pi} \cong \frac{1}{3} \tag{4.3.5}$$

Il est clair que le plus grand n est, le meilleur, $\frac{r-1}{n}$ approchera n'importe quel nombre entre 0 et 1 pour un r convenable. Par conséquent, notre stratégie consiste à fixer $\Delta \eta$ d'après (4.3.5) et d'augmenter simultanément les valeurs de n et de $\eta_{\max} = \frac{n \Delta \eta}{2}$ pour une meilleure précision. Noter que grâce aux propriétés multiplicatives de l'exponentielle, il est possible de traiter indépendamment chaque coordonnée. Notons aussi que la donnée $|\eta|^2 e^{2i\eta \cdot z}$ correspond à la différentiation en z des sommes ci-dessus. Nous supposons aussi que nous sommes capable de traiter plusieurs imperfections suffisamment éloignées entre elles parce que $\left| \frac{1}{n} \frac{\sin(2\eta_{\max} z_1)}{\sin(\pi [\frac{z_1 \Delta \eta}{\pi} + \frac{r-1}{n}])} \right|$ a clairement un seul pic si la condition (4.3.5) est vérifiée ou est sinon très plat.

Nous exposons maintenant des exemples liés à cette dernière technique, ce qui permettra aux lecteurs d'avoir une meilleure compréhension de la méthode pour la suite du chapitre. Dans toutes les Figures, nous traçons les lignes de niveau de la transformée de Fourier calculée.

Exemple 1 : Condition (4.3.5) non vérifiée

Prenons une seule inhomogénéité centrée en $z = (-12, -12)$ et supposons que nous échantillons $0.2 |\eta|^2 e^{2i\eta \cdot z}$ avec $\eta_{\max} = 3$ et $n = 30$. D'après la Figure 4.1, il semble que l'imperfection soit localisée au point (4,4).

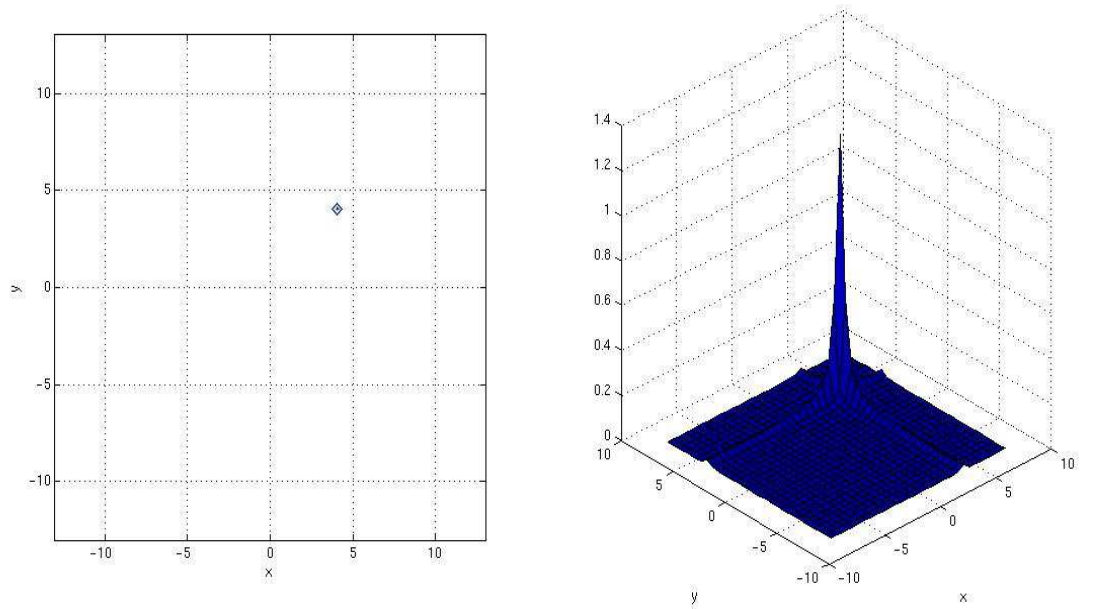


FIG. 4.1 – Condition (4.3.5) non vérifiée.

Exemple 2 : Condition (4.3.5) vérifiée pour une imperfection

Dans cette seconde expérience, nous reprenons la même donnée que l'exemple 1. Supposons qu'il y ait une imperfection dans le carré $[-13, 13]^2$ et que nous sommes conscient de la condition (4.3.5) ainsi pour $n = 30$ nous choisissons $\eta_{\max} = \frac{15\pi}{39}$. Le résultat de cette deuxième simulation est montré dans la Figure 4.2.

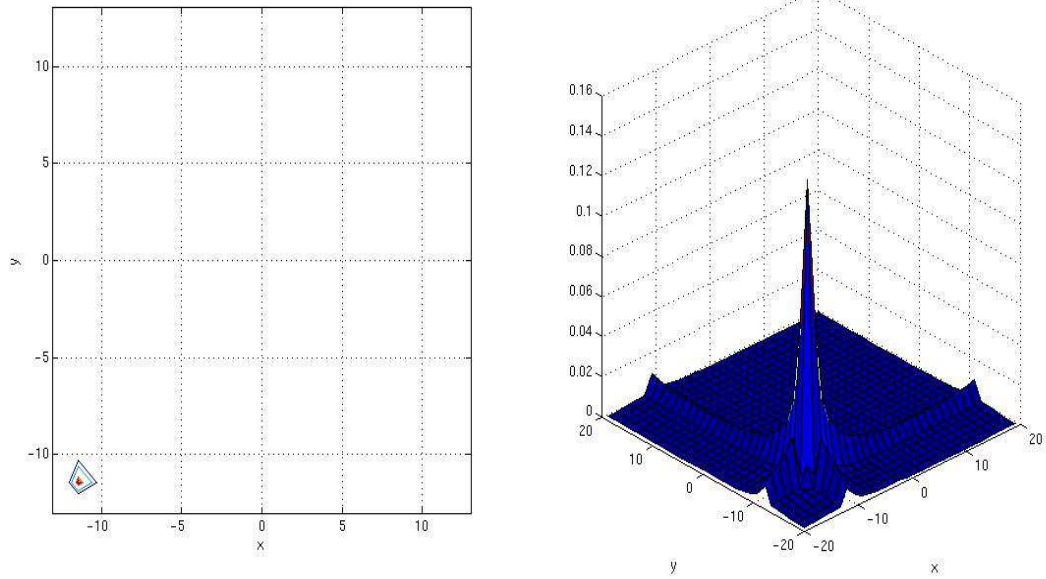


FIG. 4.2 – Condition (4.3.5) vérifiée pour une imperfection.

Exemple 3 : Pour plusieurs imperfections

Nous supposons que toutes les inhomogénéités sont dans $[-6, 6]^2$. Prenons cinq imperfections $z_1 = (1, 1)$, $z_2 = (-2, 2)$, $z_3 = (3, 3)$, $z_4 = (1, -5)$, $z_5 = (5, -3)$ et nous échantillons la quantité $\sum_{j=1}^5 (i - 2|\eta|^2) e^{2i\eta \cdot z}$. La Figure 4.3 montre le recouvrement des localisations des imperfections avec $n = 120$ et $\eta_{\max} = \frac{10\pi}{3}$.

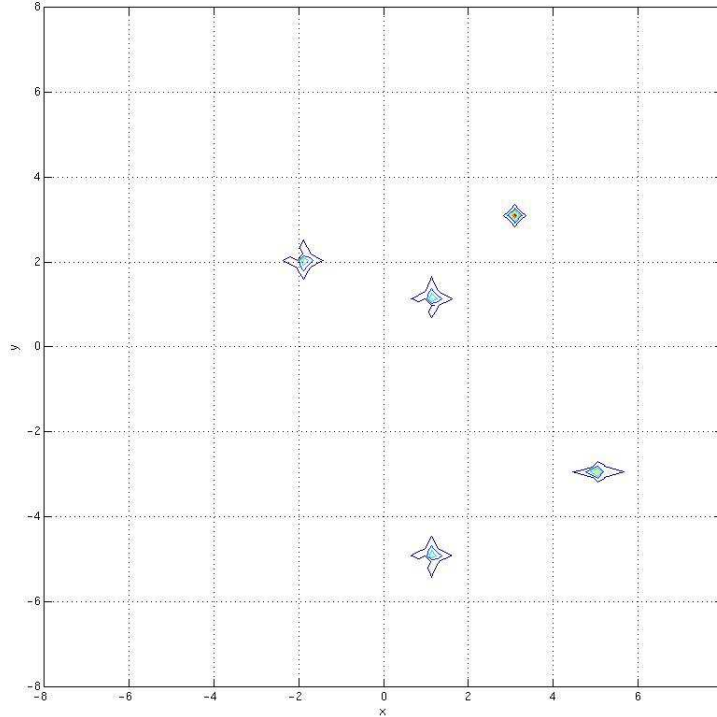


FIG. 4.3 – Localisation de plusieurs imperfections pour $\sum_{j=1}^5 (i - 2|\eta|^2) e^{2i\eta \cdot z}$.

4.3.2 Éviter les pièges

L'évaluation numérique des transformées de Fourier de fonctions générales comporte de nombreux petits pièges. Cela peut être considéré comme étant dû à deux causes principales : la définition de la transformée de Fourier et l'échantillonnage de la fonction à transformer.

La définition de la transformée de Fourier, et son inverse, impose un choix de constantes de normalisations. Ce choix doit aussi correspondre précisément avec la définition de l'algorithme de la FFT.

Definition 7. La transformée de Fourier d'une fonction $h(t)$ est définie comme

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

et la transformée de Fourier inverse par

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df.$$

Notons que l'algorithme de FFT, que nous utilisons dans le post-traitement (Matlab[®]), utilise cette convention et que, la définition permet d'éviter la nécessité de constantes de normalisation. En particulier, en utilisant cette convention, nous avons le résultat suivant pour la transformée de Fourier d'une fonction delta de Dirac : Si

$$h(t) = Ae^{i2\pi f_0 t} = A \cos(2\pi f_0 t) + iA \sin(2\pi f_0 t),$$

où A est une constante réelle, alors

$$H(f) = A\delta(f - f_0).$$

Une fois le problème de la définition résolu, tous les autres problèmes rencontrés sont dûs à l'échantillonnage.

La première étape, quand on détermine l'intervalle d'échantillonnage, est de respecter la *périodicité* de la fonction. Si l'échantillonnage en temps n'est pas un multiple exact d'une période, un *rippling effect* se produit. En fait, si une fonction périodique est échantillonnée et tronquée à un entier qui n'est pas un multiple de la période, alors les transformées de Fourier discrète et continue résultantes différeront considérablement.

Des *aliasings*³ ont lieu quand la fréquence d'échantillonnage est trop fine (ou l'échantillonnage en temps est trop grossier) et nous obtenons un chevauchement de répliques périodiques de très hautes fréquences de la fonction transformée. Si l'intervalle d'échantillonnage en temps est choisi comme étant la moitié de la réciprocity de la composante de plus haute fréquence, alors les aliasings ne se produisent pas.

³effet visuel indésirable provoqué par l'insuffisance de la définition ou par un filtrage inadéquat des contours d'objets, et qui prend habituellement la forme de dentelures et de contours brisés.

Finalement, *tronquer* la fonction (ce qui implique la multiplication par une fonction seuil), introduira un phénomène de Gibbs⁴. Cela peut être évité en élargissant l'intervalle d'échantillonnage total, mais nous devons être prudent pour ne pas avoir un pas d'échantillonnage trop grand, sinon des aliasings réapparaîtront.

Le concept le plus important à garder à l'esprit est que la transformée de Fourier discrète implique la périodicité dans le domaine temporel et fréquentiel. Si nous respectons le fait que les N valeurs échantillonnées de la fonction dans le domaine temporel représentent un échantillonnage simple d'une fonction périodique, alors l'application de la transformée de Fourier discrète donnera peu de surprises.

4.3.3 Une méthode d'échantillonnage exacte

Nous proposons, dans cette sous-section, une autre approche pour la détection d'inhomogénéités. Cette méthode se base sur le *plus petit commun multiple* (PPCM). Pour cela, nous reprenons la formule (4.3.4) pour plusieurs imperfections :

$$\Lambda(\eta) = \sum_{j=1}^m e^{2iz_j \cdot \eta}, \quad (4.3.6)$$

avec z_j le centre de la j -ième imperfection appartenant au carré $[-a, a] \times [-a, a]$.

Dans le but de bien échantillonner Λ , nous étudions la périodicité de la fonction $\eta \mapsto e^{2iz \cdot \eta}$ pour une imperfection. On pose $z = \left(\frac{p}{D}, \frac{q}{D}\right)$ où p et q sont des entiers et D est la précision de localisation (en général $D = 10, 20, \dots$). Nous constatons que cette fonction est (T_x, T_y) -périodique avec $T_x = \frac{\pi D}{p}$ et $T_y = \frac{\pi D}{q}$.

Maintenant si nous avons deux inhomogénéités de centres $z_1 = \left(\frac{p_1}{D}, \frac{q_1}{D}\right)$ et $z_2 = \left(\frac{p_2}{D}, \frac{q_2}{D}\right)$, notre fonction devient $\eta \mapsto e^{2iz_1 \cdot \eta} + e^{2iz_2 \cdot \eta}$ et cette dernière est (T_1, T_2) -périodique. Pour trouver T_1 et T_2 , il suffit de résoudre un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} k_1 T_{x_1} = l_1 T_{x_2} = T_1 \\ k_2 T_{y_1} = l_2 T_{y_2} = T_2 \end{cases} \quad (4.3.7)$$

⁴Ce phénomène est un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité de la fonction.

où (T_{x_1}, T_{y_1}) est la période de la fonction $\eta \mapsto e^{2iz_1 \cdot \eta}$ et (T_{x_2}, T_{y_2}) est la période de la fonction $\eta \mapsto e^{2iz_2 \cdot \eta}$.

Après quelques calculs ⁵, nous obtenons

$$T_1 = \pi D \times \frac{1}{\text{PGCD}(p_1, p_2)} = \frac{\pi D \text{PPCM}(p_1, p_2)}{p_1 p_2}$$

$$T_2 = \pi D \times \frac{1}{\text{PGCD}(q_1, q_2)} = \frac{\pi D \text{PPCM}(q_1, q_2)}{q_1 q_2}$$

De même, nous indiquons les pas d'échantillonnage en η :

$$\Delta\eta_1 = \frac{\pi D}{2 \text{PPCM}(p_1, p_2)} \quad \text{et} \quad \Delta\eta_2 = \frac{\pi D}{2 \text{PPCM}(q_1, q_2)}$$

Par conséquent, les nombres de points d'échantillonnage nécessaires sont :

$$N_{e_x} = \frac{T_1}{\Delta\eta_1} = \frac{2 (\text{PPCM}(p_1, p_2))^2}{p_1 p_2} \leq 2 \text{PPCM}(p_1, p_2)$$

$$N_{e_y} = \frac{T_2}{\Delta\eta_2} = \frac{2 (\text{PPCM}(q_1, q_2))^2}{q_1 q_2} \leq 2 \text{PPCM}(q_1, q_2)$$

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour bien échantillonner Λ . Regardons quelques exemples numériques basés sur cette technique. Dans toutes les figures, nous traçons les lignes de niveau de la transformée de Fourier de $\Lambda(\eta)$.

Exemple 1 : Deux imperfections

En considérant $\Lambda(\eta) = \sum_{j=1}^2 e^{2iz_j \cdot \eta}$ comme fonction à échantillonner sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$, nous posons $z_1 = (-0.4, -0.4)$ et $z_2 = (0.6, 0.6)$ les centres des deux inhomogénéités. Après quelques calculs, nous obtenons qu'il faut 24×24 points d'échantillonnage pour une précision de localisation $D = 10$. Malgré un faible nombre de points d'échantillonnage, nous détectons correctement ces deux imperfections, (cf. Figure 4.4).

⁵Nous utilisons la formule suivante :
 $\text{PPCM}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{PGCD}(a, b)}$ si a et b non nuls.

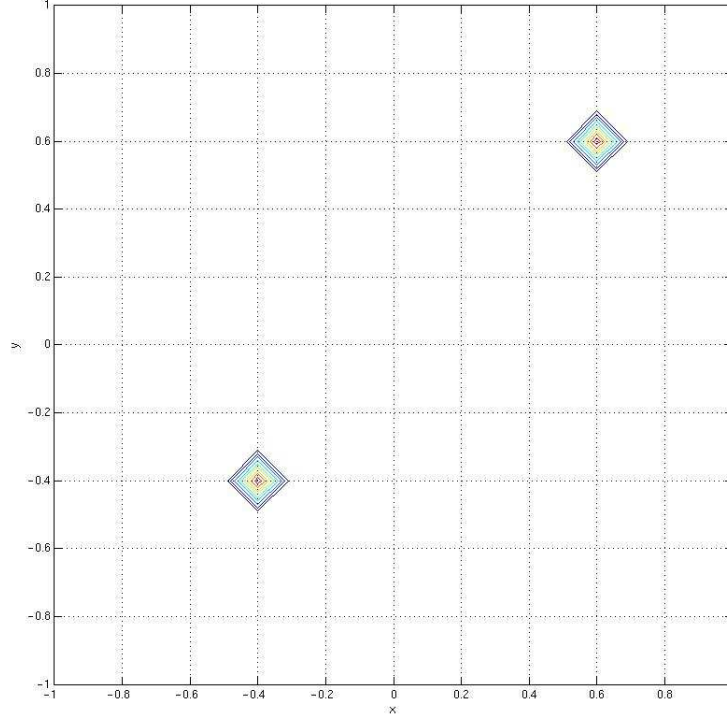


FIG. 4.4 – Localisation de deux imperfections avec PPCM.

Exemple 2 : Deux imperfections

Nous choisissons les centres des imperfections comme étant $z_1 = (0.58, 0.63)$ et $z_2 = (0.39, 0.27)$. Par conséquent on travaille dans le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$. La précision de localisation sera $D = 40$. Comme dans l'Exemple 1, nous prenons $\Lambda(\eta) = \sum_{j=1}^2 e^{2iz_j \cdot \eta}$. Grâce aux calculs ci-dessus, nous obtenons que le nombre de points d'échantillonnage nécessaires est 736×550 . La Figure 4.5 rend compte de ce résultat.

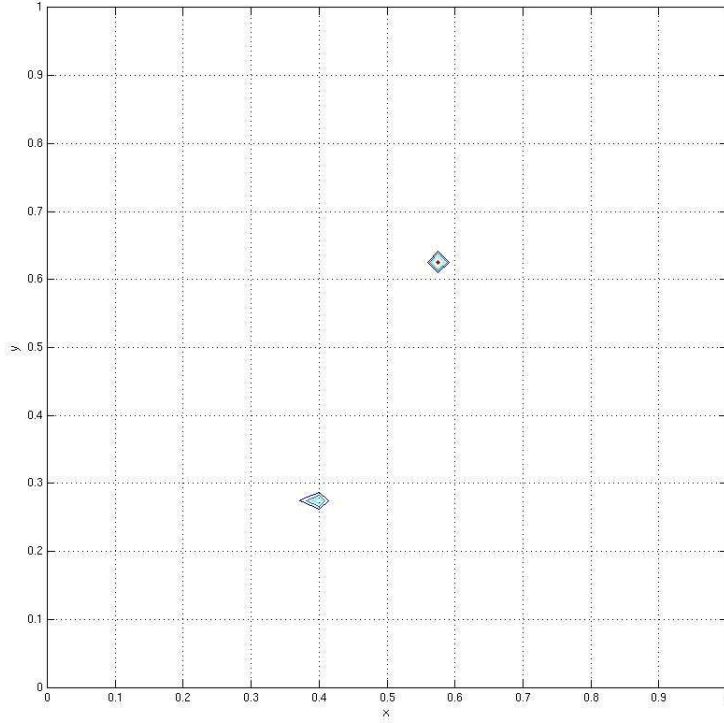


FIG. 4.5 – Localisation de deux imperfections avec PPCM.

Exemple 3 : Trois imperfections

$\Lambda(\eta) = \sum_{j=1}^3 |\eta|^2 e^{2iz_j \cdot \eta}$ sera la fonction à échantillonner. Pour cela, nous fixons $D = 40$ et prenons $z_1 = (0.29, 0.43)$, $z_2 = (0.51, 0.59)$, $z_3 = (0.68, 0.40)$. Ainsi le nombre total de points nécessaires à un bon échantillonnage est 1080×1632 . Nous observons bien nos trois imperfections sur la Figure 4.6.

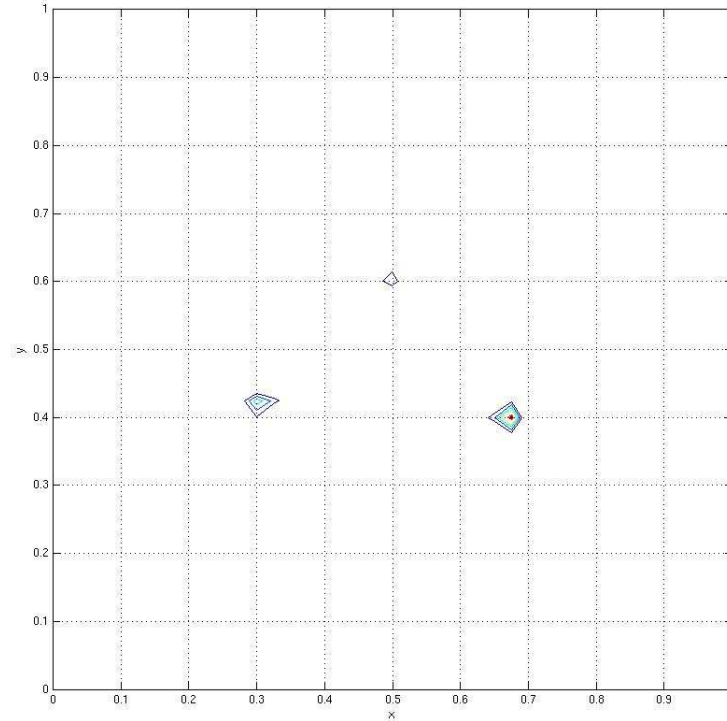


FIG. 4.6 – Localisation de trois imperfections avec PPCM.

4.3.4 Explication des fenêtres FFT

Introduction - Définition

Le fenêtrage est une technique servant à découper une section des données à mesurer, afin de minimiser les distorsions qui provoquent une “fuite spectrale” de la FFT. En utilisant correctement des fonctions de fenêtrage, la résolution spectrale des résultats dans le domaine fréquentiel s’en trouvera accrue.

La FFT, ou transformée de Fourier rapide, applique une transformée de Fourier à un ensemble de fréquences discrètes, à partir d’un signal du domaine temporel échantillonné de manière discrète sur un intervalle de temps fini. L’intervalle étant fini, la FFT a tendance à ne pas être très sélective du point de vue de la fréquence.

La fuite spectrale

Le calcul de la FFT suppose qu'un signal soit périodique dans chaque bloc de données. Quand la FFT d'un signal est calculée sur un intervalle de troncature qui ne respecte pas la périodicité, le spectre résultant en fréquence souffre de fuite. La Figure 4.7 illustre l'effet de perte. Le graphique en haut à gauche montre une onde sinusoïdale d'amplitude 1.0 qui est périodique dans la fenêtre en temps. La FFT résultante (en bas à gauche) montre un pic étroit sur l'axe des fréquences avec une hauteur de 1.0 comme attendu. Le graphique en haut à droite montre une onde sinusoïdale qui n'est pas périodique dans la fenêtre en temps, et on s'aperçoit (en bas à droite) qu'il y a une perte dans la FFT. L'amplitude est plus petite que la valeur 1.0 souhaitée et l'énergie du signal est plus dispersée.

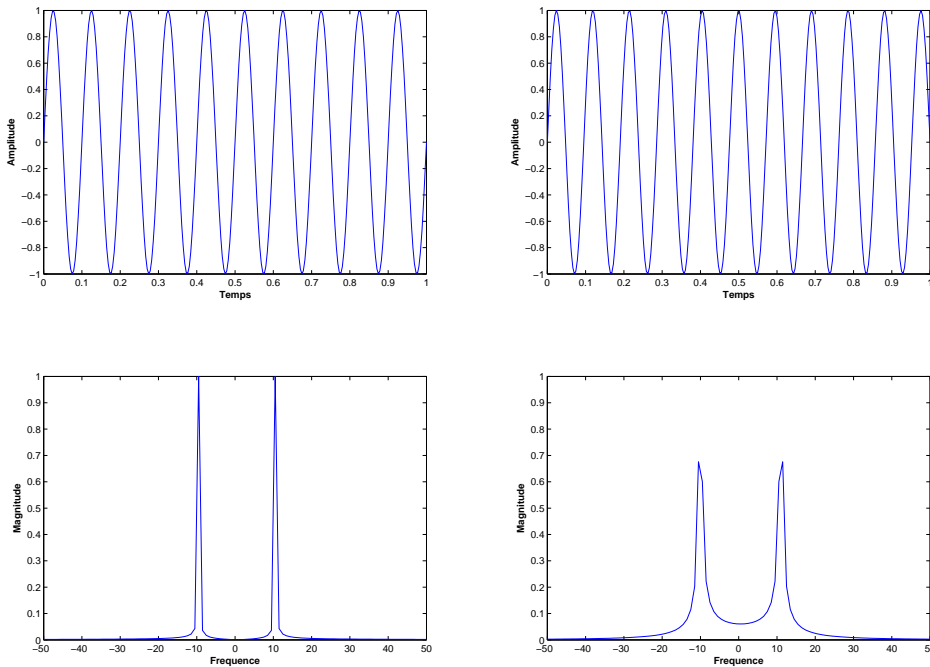


FIG. 4.7 – FFT d'une onde périodique (gauche) et d'une onde non périodique (droite).

Le fenêtrage réduit la fuite

Puisque la plupart des signaux ne sont pas périodiques, une fenêtre doit être appliquée pour corriger la fuite. Une fenêtre se construit de la façon suivante : elle vaut exactement zéro au début et à la fin du bloc de données et possède une forme spéciale entre les deux extrémités. On multiplie alors le bloc de données en temps par la fenêtre forçant le signal à devenir périodique. Un facteur spécial de pondération doit aussi être appliqué pour corriger complètement l'amplitude du signal de la FFT.

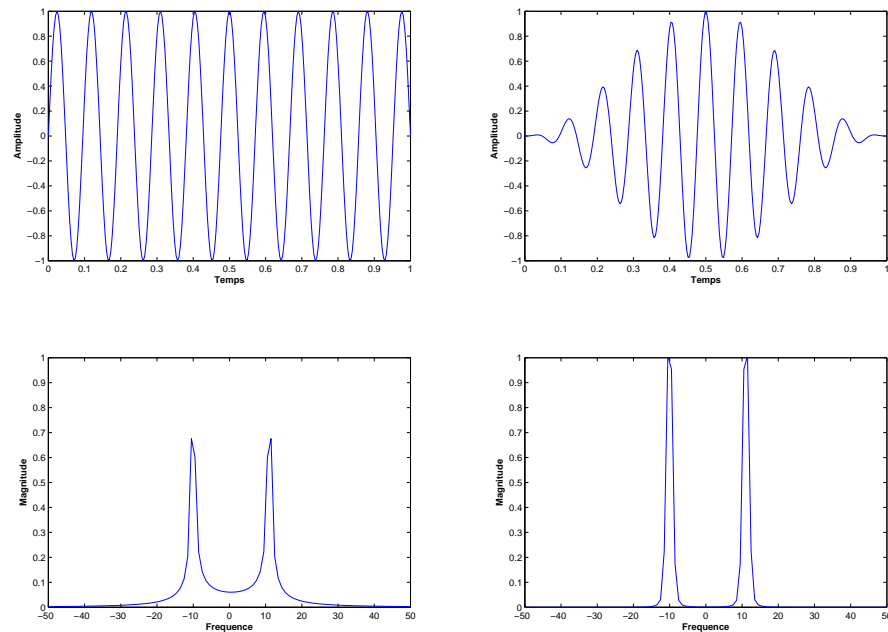


FIG. 4.8 – Comparaison du calcul de la FFT d'une onde sinusoïdale avec un échantillonnage non périodique sans (gauche) et avec (droite) fenêtrage.

La Figure 4.8 montre la réduction de la fuite en appliquant une fenêtre de Hanning à une onde sinusoïdale non périodique. Le graphe en haut à gauche décrit une onde sinusoïdale non périodique dans la fenêtre en temps, ce qui implique une perte dans la FFT (en bas à gauche). Lorsqu'une fenêtre de

Hanning (cf. Figure 4.9) est appliquée (en haut à droite), alors cette perte est réduite dans la FFT (en bas à droite). Remarquer que nous n'avons pas exactement la même forme que la FFT de l'onde sinusoïdale périodique de la Figure 4.7, mais les erreurs d'amplitude et de fréquence résultantes de la fuite sont corrigées. Une fonction de fenêtrage minimise l'effet de fuite pour mieux représenter le spectre fréquentiel de la donnée.

Les fonctions de fenêtrage sont plus facilement comprises dans le domaine temporel. Cependant, elles sont souvent implémentées dans le domaine fréquentiel. Mathématiquement, il n'y a aucune différence quand le fenêtrage est appliqué dans les domaines fréquentiels ou temporels, bien que la procédure mathématique soit quelque peu différente.

Choisir une fonction fenêtrage

Les fenêtres réduisent les effets de perte mais elles ne peuvent pas éliminer entièrement les fuites spectrales. En effet, elles changent seulement la forme de la fuite. De plus, chaque type de fenêtre affecte le spectre de manière légèrement différente. De nombreux fenêtrages ont été proposés, chacun avec ses avantages et ses inconvénients. Certaines sont plus efficaces pour des types spécifiques de signaux comme aléatoire ou sinusoïdal. Certains améliorent la résolution fréquentielle, i.e., ils la construisent plus facilement pour détecter la fréquence exacte d'un pic dans le spectre. Certains améliorent la précision de l'amplitude, i.e., ils indiquent plus précisément le niveau du pic. Il faudra alors choisir selon l'application souhaitée un fenêtrage adapté.

Fenêtre	Meilleur pour ces types de signaux	Résolution fréquentielle	Fuite spectrale	Précision de l'amplitude du pic
Barlett	Aléatoire	Bon	Raisonnable	Raisonnable
Blackman	Aléatoire ou mélangé	Pauvre	Très bon	Bon
Flat Top	Sinusoidal	Pauvre	Bon	Très bon
Hanning	Aléatoire	Bon	Bon	Raisonnable
Hamming	Aléatoire	Bon	Raisonnable	Raisonnable
Tukey	Aléatoire	Bon	Pauvre	Pauvre

TAB. 4.1 – Caractéristiques des fenêtres les plus utilisées (selon [19]).

Nous avons listé dans le Tableau 4.9 ci-dessus les types de fenêtres les plus utilisées et donné leurs caractéristiques. Cette table pourra être utilisée pour choisir la meilleure fonction fenêtrage pour chaque application.

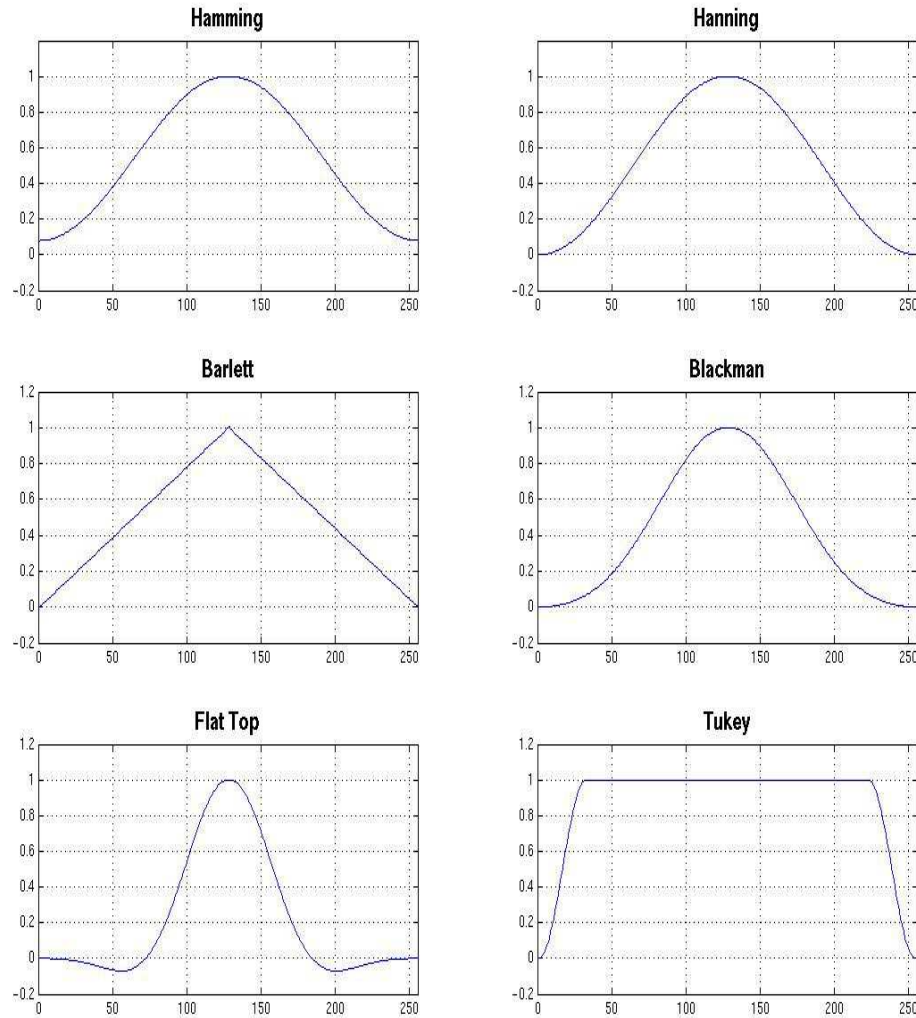


FIG. 4.9 – Formes des fenêtres les plus utilisées.

Notons que l'inconvénient principal du fenêtrage est l'atténuation du spectre au début et à la fin du signal. Ceci est compensé en prenant plus de mesures et peut coûter cher en temps de calcul.

Pour conclure sur cette méthode, toutes FFT basées sur des mesures supposent que le signal est périodique dans la fenêtre de temps. Quand le signal mesuré n'est pas périodique, alors des fuites spectrales ont lieu. Une fenêtre FFT peut être appliquée pour réduire les effets de fuites. Parmi ces nombreux choix de fonctions de fenêtrage, chacune possède des applications spécifiques. Nous devons dans un premier temps comprendre les effets de fuite, pour pouvoir ensuite trouver la fenêtre adaptée à chaque cas.

Comme pour les méthodes expliquées précédemment, nous illustrons nos propos par quelques exemples numériques pour la détection numérique.

Exemple 1 : Fenêtre de Blackman pour une imperfection

Dans un premier temps, nous étudions le cas d'une imperfection $z = (-0.43, 0.68)$ contenue dans le domaine $[-1, 1] \times [-1, 1]$ pour la fonction $\Lambda(\eta) = e^{2iz_j \cdot \eta}$. Nous posons $n = 64$ nombre de points d'échantillonnage et $\eta_{\max} = 11$. La Figure 4.10 montre le résultat obtenu en appliquant une fenêtre de type Blackman à notre fonction échantillonnée.

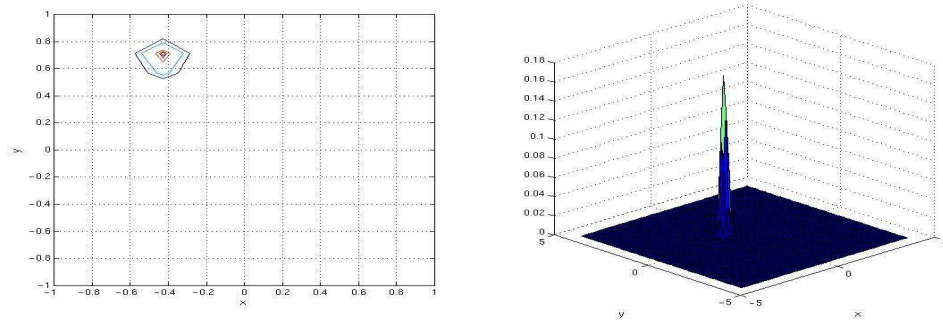


FIG. 4.10 – Localisation d'une imperfection par une fenêtre de type Blackman.

Exemple 2 : Deux imperfections avec Hamming

Nous considérons deux imperfections de centres $z_1 = (0.47, 0.29)$ et $z_2 = (0.39, 0.58)$ vivant dans $[0, 1] \times [0, 1]$. $\Lambda(\eta) = \sum_{j=1}^2 |\eta| e^{2iz_j \cdot \eta}$ sera la fonction à échantillonner. Les paramètres d'échantillonnage sont $n = 128$ et $\eta_{\max} = 23$. Une fois $\Lambda(\eta)$ échantillonnée, nous lui appliquons une fonction fenêtrage de Hamming. La Figure 4.11 rend compte de ce résultat.

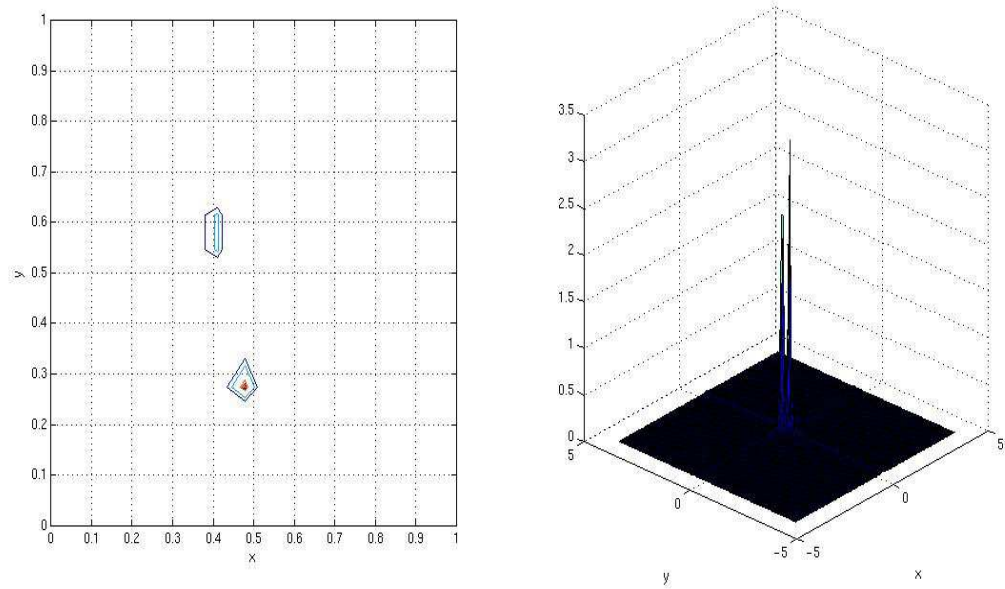


FIG. 4.11 – Localisation de deux imperfections par Hamming.

Exemple 3 : Détection numérique de trois imperfections par une fonction fenêtre de Hanning

Dans ce dernier exemple, nous utiliserons la fonction $\Lambda(\eta) = \sum_{j=1}^3 \left(1 - \frac{|\eta|^2}{2}\right) \times e^{2iz_j \cdot \eta}$ avec des inhomogénéités situées en $z_1 = (0.21, 0.17)$, $z_2 = (0.69, -0.08)$ et $z_3 = (-0.33, -0.56)$. Par suite, le domaine contenant ces imperfections est $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Nous échantillons maintenant η dans le domaine $[-33, 33] \times [-33, 33]$, uniformément avec 128^2 points. Ensuite nous multiplions notre fonction échantillonnée par une fenêtre bidimensionnelle de Hanning. D'après la Figure 4.12, les trois imperfections sont détectées.

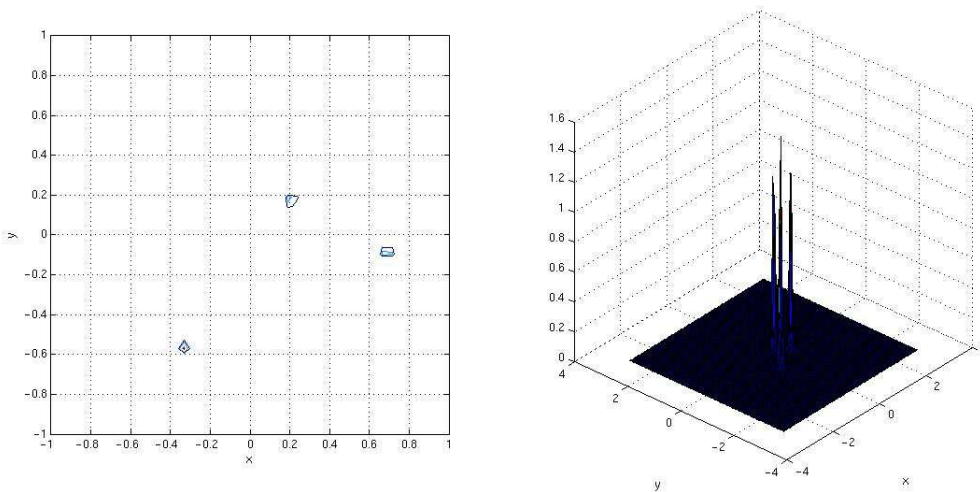


FIG. 4.12 – Fenêtre de Hanning pour la localisation de trois imperfections.

4.4 Exemples et tests de calibration basés sur la formule asymptotique (2.2.8)

Nous rappelons tout d'abord notre formule asymptotique (2.2.8), en négligeant le reste $o(\alpha^d)$

$$\Lambda_\alpha(\eta) = \alpha^d \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) e^{2i\eta \cdot z_j} [M_j(\eta) \cdot \eta - |\eta|^2 |B_j|] \quad (4.4.8)$$

- où :
- α = ordre commun de l'amplitude des diamètres des imperfections ;
 - γ_0 = conductivité du domaine sain ;
 - γ_j = conductivité des imperfections, $j = 1, \dots, m$;
 - $(M_j)_{k,l} = e_k \cdot \left(\int_{\partial B_j} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j} \Big|_+(y) \right) y \cdot e_l ds_j(y) \right)$
= tenseur de polarisation de B_j ;
 - B_j = domaine borné contenant l'origine, $j = 1, \dots, m$;
 - z_j = centre des imperfections, $j = 1, \dots, m$;

Supposons maintenant que toutes les imperfections sont des cercles ou des sphères. Alors, nous avons une formule explicite pour M_j et la formule (4.4.8) devient en deux dimensions :

$$\Lambda_\alpha(\eta) = \alpha^2 \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) e^{2i\eta \cdot z_j} \left[\frac{\pi \alpha^2}{2 \frac{\gamma_0}{\gamma_j} + 1} \cdot \eta - \pi \alpha^2 |\eta|^2 \right], \quad (4.4.9)$$

et en trois dimensions :

$$\Lambda_\alpha(\eta) = \alpha^3 \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) e^{2i\eta \cdot z_j} \left[\frac{\frac{4\pi \alpha^3}{3}}{2 \frac{\gamma_0}{\gamma_j} + 1} \cdot \eta - \frac{4\pi \alpha^3}{3} |\eta|^2 \right]. \quad (4.4.10)$$

Cette formule sera systématiquement utilisée dans le but de tester les stratégies d'échantillonnage et de choisir les paramètres d'échantillonnage, *avant* le lancement des simulations complètes de localisation. Nous présentons, dans cette section, quelques exemples et tests effectués en 2-D et 3-D qui montrent la robustesse et la précision inhérente de cette formule.

Trois stratégies d'échantillonnage vont être testées :

- (1) Une stratégie d'échantillonnage périodique qui suppose *a priori* la connaissance des centres des imperfections.
- (2) Un cheminement de Shannon basé sur l'analyse de [41] et [10].
- (3) Une approche fenêtrage qui compare les fonctions de Blackman, Hamming et Hanning.

4.4.1 Cas 2-D

Test à partir de la méthode PPCM

Nous échantillons notre formule asymptotique (4.4.9) pour trois imperfections se situant en $z_1 = (0.26, 0.34)$, $z_2 = (0.39, 0.68)$ et $z_3 = (0.71, 0.52)$, toutes de conductivité $\gamma_j = 2$, $j = 1, 2, 3$. Par suite, on suppose que les z_j , $j = 1, 2, 3$, vivent dans le carré $[0, 1]^2$ de conductivité $\gamma_0 = 1$. L'ordre commun des rayons des imperfections est $\alpha = 0.03$. D'après la Section 4.2.3., nous trouvons qu'il faut 560×140 points d'échantillonnage pour $D = 20$ la précision de localisation. Nous obtenons la Figure 4.13 suivante.

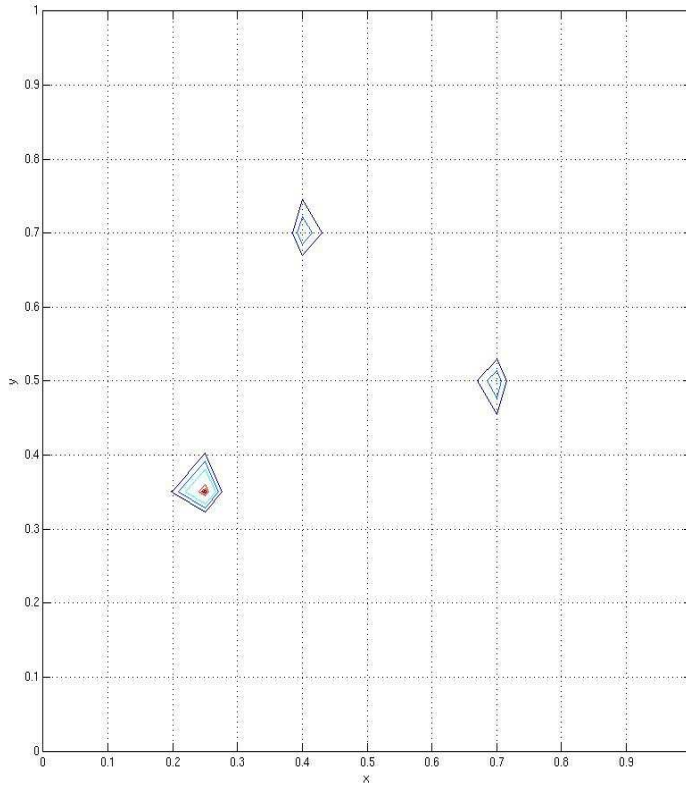


FIG. 4.13 – Localisation de trois inhomogénéités par la méthode PPCM.

Exemple lié à l'approche de Shannon

Nous cherchons à localiser trois inhomogénéités $z_1 = (0.64, 0.69)$, $z_2 = (0.78, 0.71)$ et $z_3 = (0.51, 0.76)$ de rayon $\alpha = 0.03$ pour notre formule (4.4.9). On suppose que ces imperfections vivent dans $[0, 1]^2$. Nous posons la conductivité du domaine sain à $\gamma_0 = 1$ et les conductivités des imperfections à $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2$. Pour ce qui est de l'échantillonnage, nous posons $n = 128$ et $\eta_{\max} = 53$. La figure 4.14 montre le résultat obtenu.

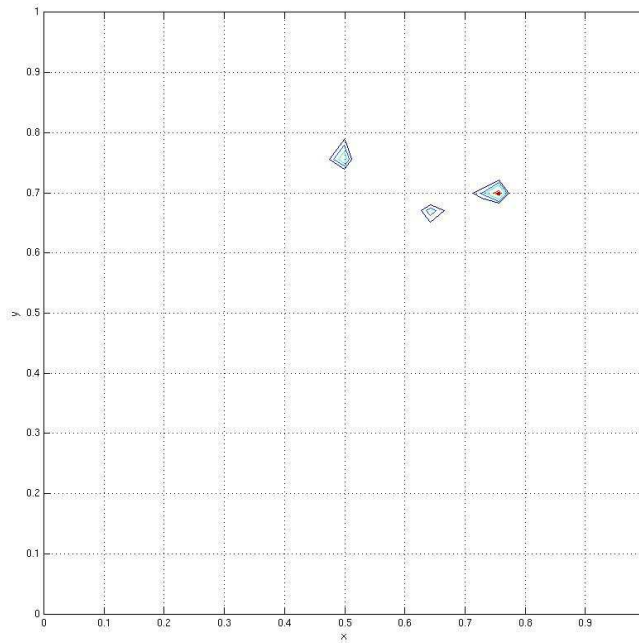


FIG. 4.14 – Détection de trois imperfections pour notre formule (4.4.9).

Tests pour le fenêtrage

Comme nous l'avons expliqué précédemment, les fenêtres sont des outils adaptés à notre problème de détection. Effectivement ne connaissant pas à priori la périodicité de notre signal, nous utilisons différentes fonctions de fenêtrage bidimensionnelles (voir Figure 4.15) pour périodiser notre signal et ainsi obtenir une localisation efficace de nos imperfections.

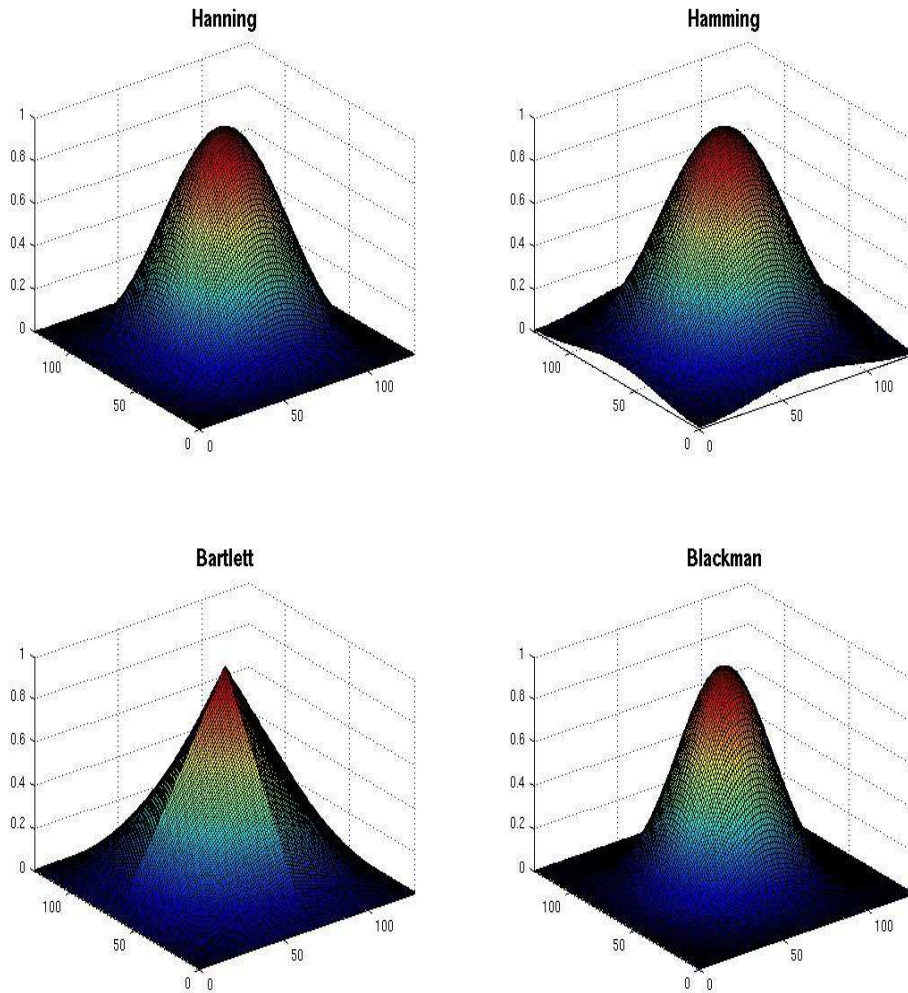


FIG. 4.15 – Fonctions fenêtres bidimensionnelles.

La procédure de détection est exactement celle décrite dans la Section 4.2.3.. Nous échantillons notre fonction par l'approche faite par D. Volkov. Une fois la fonction échantillonnée, nous lui appliquons un fenêtrage.

Les Figures 4.16 et 4.17 illustrent l'application de deux fenêtres : Blackman et Hanning, pour deux inhomogénéités de rayon $\alpha = 0.01$ situées en

$z_1 = (0.33, 0.52)$ et $z_2 = (0.61, 0.33)$ appartenant au domaine $[0, 1] \times [0, 1]$. La conductivité à l'intérieur du domaine sera $\gamma_0 = 1$ et dans celle des imperfections de $\gamma_j = 10$. Concernant les paramètres d'échantillonnage, nous prenons 128×128 points avec $\eta_{\max} = 23$.

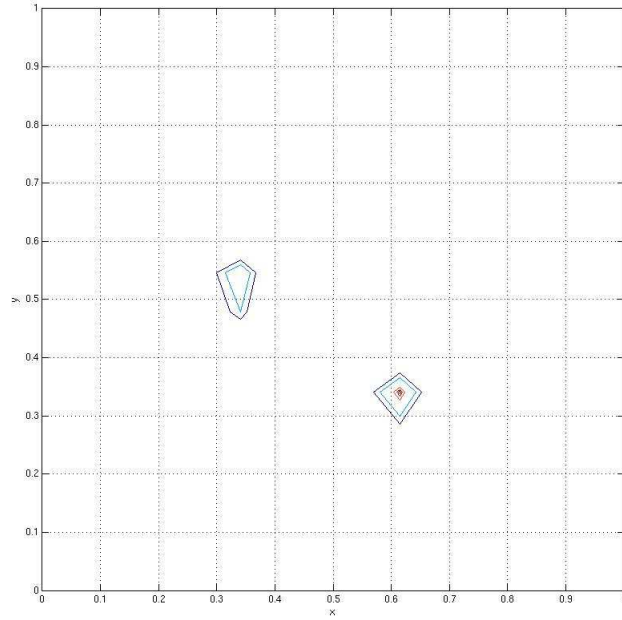


FIG. 4.16 – Localisation de deux imperfections avec une fenêtre de Blackman.

Nous fixons maintenant trois impuretés $z_1 = (0.49, 0.21)$, $z_2 = (0.65, 0.37)$ et $z_3 = (0.28, 0.74)$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$, chacune de rayon $\alpha = 0.01$. La conductivité à l'intérieur du domaine sera $\gamma_0 = 1$ et dans les imperfections de $\gamma_j = 5$. Nous prenons 128×128 points d'échantillonnage avec $\eta_{\max} = 33$. Nous appliquons deux fenêtres : Blackman (Figure 4.18) et Hamming (Figure 4.19).

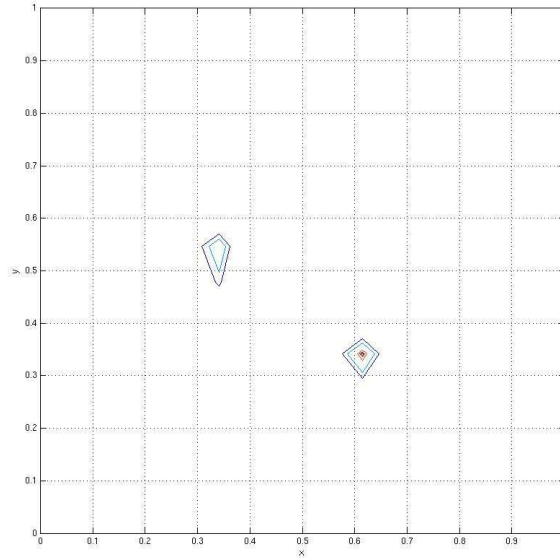


FIG. 4.17 – Localisation de deux imperfections avec une fenêtre de Hanning.

A partir de ces tests 2-D sur la formule (4.4.9), nous arrivons à certains constats. Premièrement, la méthode exacte basée sur le PPCM améliore la précision de localisation des imperfections, mais au prix d'un grand nombre de mesures. Par ailleurs cette méthode a besoin de la connaissance *a priori* des centres des inhomogénéités. Les deux autres méthodes ont elles aussi besoin d'un grand nombre de mesures, mais ce nombre est petit par rapport à celui nécessaire pour la méthode PPCM. La précision de localisation reste très satisfaisante pour ces deux dernières stratégies.

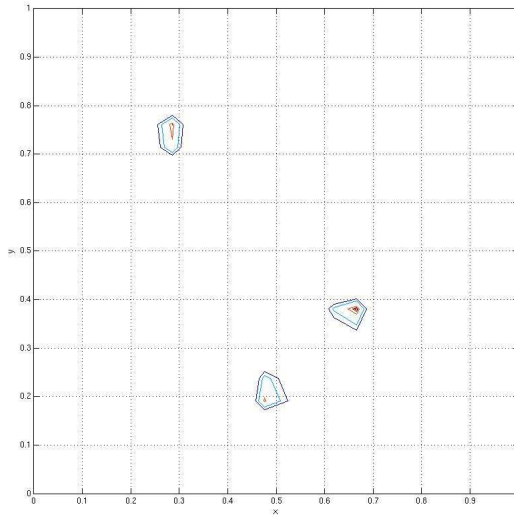


FIG. 4.18 – Localisation de trois imperfections avec une fenêtre de Blackman.

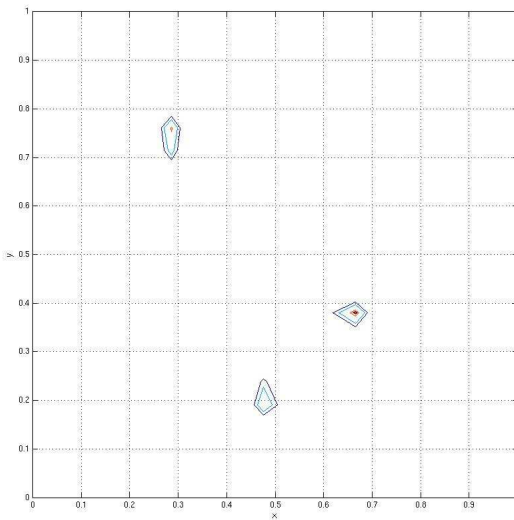


FIG. 4.19 – Localisation de trois imperfections avec une fenêtre de Hamming.

4.4.2 Cas 3-D

Suite aux conclusions faites pour le cas 2-D, nous avons décidé d'éliminer la méthode exacte (PPCM) du cas 3-D, car cette méthode sera trop coûteuse en temps de calcul et en mémoire. Ainsi nous avons illustré deux tests effectués sur la formule (4.4.10). Le premier utilise l'analyse étudiée dans [41] pour le domaine $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ de conductivité $\gamma_0 = 1$ contenant trois inhomogénéités $z_1 = (0.55, 0.39, 0.33)$, $z_2 = (0.31, 0.61, 0.55)$ et $z_3 = (0.71, 0.32, 0.63)$, toutes de conductivité $\gamma_j = 10$ et de rayon $\alpha = 0.03$. Pour détecter ces imperfections, nous avons eu besoin de $64 \times 64 \times 64$ points d'échantillonnage et de poser $\eta_{\max} = 15$. La Figure 4.21 représente la localisation des trois imperfections avec projection sur les plans xy (à gauche), xz (au centre) et yz (à droite). La localisation en trois dimensions peut être vue sur la Figure 4.20.

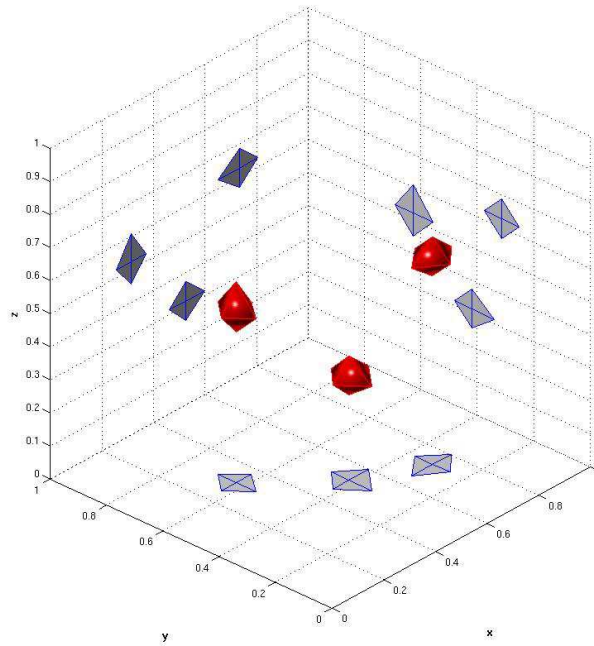


FIG. 4.20 – Visualisation 3-D des trois imperfections $z_1 = (0.55, 0.39, 0.33)$, $z_2 = (0.31, 0.61, 0.55)$ et $z_3 = (0.71, 0.32, 0.63)$.

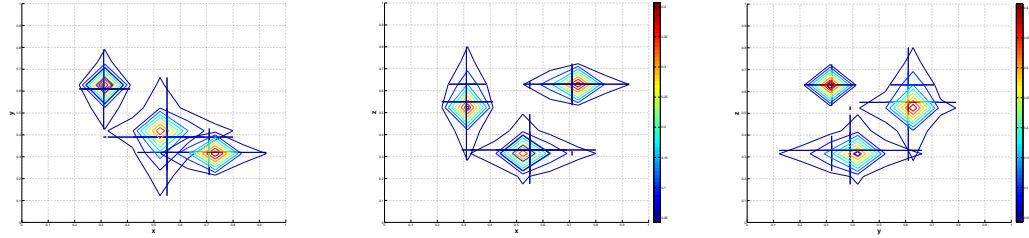


FIG. 4.21 – Localisation de trois imperfections en 3-D. Vues dans les plans xy , xz et yz .

Le deuxième exemple utilise la même technique appliquée ci-dessus, mais nous appliquons en plus une fenêtre tridimensionnelle de Hamming. La Figure 4.22 montre la détection des imperfections $z_1 = (0.20, 0.22, 0.21)$, $z_2 = (0.48, 0.34, 0.52)$ et $z_3 = (0.61, 0.69, 0.78)$ sur les plans xy , xz et yz . Par suite le domaine contenant les z_j , $j = 1, 2, 3$, sera $[0, 1]^3$ avec la conductivité $\gamma_0 = 1$. La conductivité des impuretés sera de 10 et leur rayon sera de 0.03. Nous avons considéré 64^3 points d'échantillonnage pour $\eta_{\max} = 23$. Puis nous avons appliqué à notre fonction échantillonnée une fenêtre 3-D de type Hamming. La figure 4.23 décrit notre localisation numérique en trois dimensions.

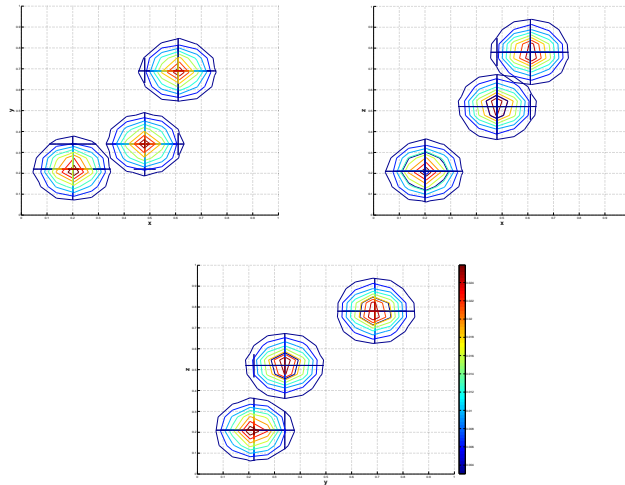


FIG. 4.22 – Fonctions fenêtrage pour la localisation, utilisant la formule asymptotique (4.4.10), de trois imperfections en 3-D.

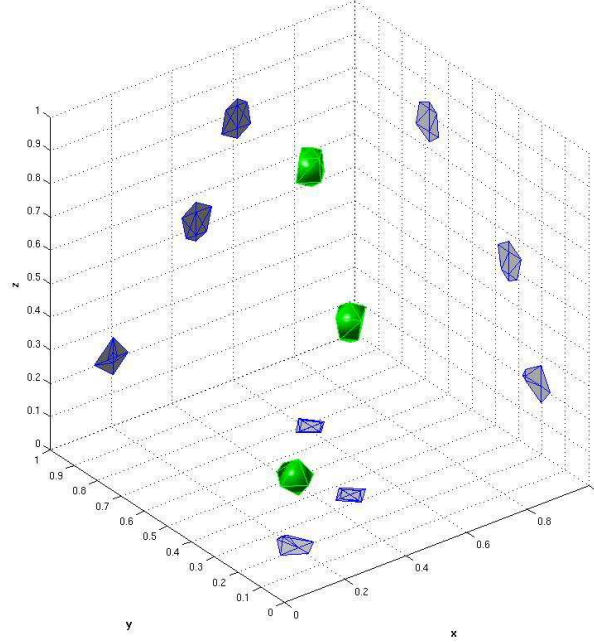


FIG. 4.23 – Visualisation 3-D des trois imperfections $z_1 = (0.20, 0.22, 0.21)$, $z_2 = (0.48, 0.34, 0.52)$ et $z_3 = (0.61, 0.69, 0.78)$ par une fenêtre 3-D de Hamming.

4.5 Localisation numérique d'imperfections en 2-D

Nous présentons ici des résultats numériques de notre algorithme d'identification décrit dans les Sections 4.1 et 4.2. Dans tous les tests, nous prenons le domaine Ω comme étant soit le carré unité $[0, 1]^2$, soit le carré $[-1, 1]^2$. La fonction cut-off, β , est égale à 1 sur un sous-domaine $\Omega' = (0.2, 0.8)^2$ si $\Omega = (0, 1)^2$ ou $\Omega' = (-0.8, 0.8)^2$ si $\Omega = (-1, 1)^2$. La conductivité γ_0 du domaine sain Ω sera toujours égale à 1. Nous utilisons des éléments finis Q_1 en espace et un schéma de Newmark inconditionnellement stable pour la discrétisation en temps avec $\beta = \frac{1}{4}$ et $\delta = 0$ - voir Section 4.2.1. Le pas de discrétisation spatial, h , et le pas de temps, Δt , seront indiqués dans les tables

des exemples, ainsi que le critère d'arrêt, ε , de la méthode HUM bi-grid. Les paramètres de Fourier dépendent de la géométrie considérée (nombre d'inhomogénéités et localisation de chaque imperfection) et de la résolution requise. Nous noterons par N_e le nombre de points d'échantillonnage en Fourier pour chaque composante. Dans toutes les figures, nous représentons les contours de la transformée de Fourier inverse, $\hat{\Lambda}_\alpha$.

Dans la Table 4.2, nous résumons les caractéristiques principales des machines utilisées pour effectuer les tests numériques, qui seront présentés dans la suite.

Machine	Marque	CPU	Mémoire	Fréquence	Nombre total de processeurs
A	DELL power edge	Xeon PIII	4 Go de RAM	3.06 Ghz	2
B	SGI-ALTIX 450	Itanium 2	72 Go de RAM	1.7 Ghz	36

TAB. 4.2 – Résumé des caractéristiques principales des machines utilisées pour les tests numériques.

Avant de donner des résultats numériques 2D, nous devons indiquer une remarque importante pour nos méthodes d'échantillonnage. Pour des grandes valeurs de η_{\max} , nous commençons à observer des instabilités dues aux termes exponentiels oscillatoires dans la formule asymptotique qui deviennent hautement oscillatoire. Dans le but de contrôler ces oscillations, nous nous inspirons de [12], et nous imposons la troncature $\|\eta\| \leq \|(\eta_*, \eta_*)^T\|$. Puis nous posons la quantité $\Lambda_\alpha(\eta) = 0$ pour toutes les autres valeurs de η . Nous nommerons aussi cette technique, *seuillage*.

Basés sur les tests de calibration de la Section 4.4.1., nous montrons maintenant les résultats de la procédure numérique de localisation, suivant les étapes énoncées dans la Section 4.1.2. Nous présentons d'abord des résultats dûs à la méthode d'échantillonnage exacte. Ensuite nous donnons quelques résultats pour l'approche d'échantillonnage de Shannon. Puis nous exposons quelques figures pour un contrôle agissant sur une partie Γ du bord $\partial\Omega$. Avant de conclure, nous indiquons une courbe de performance pour une localisation parallélisée de notre code. Enfin nous ferons une étude comparative des techniques utilisées jusque-là pour cibler quelle méthode sera appliquée au cas 3D.

Nota : Les petits carrés rouges et jaunes, visibles sur certaines des figures, représentent respectivement les centres effectifs et calculés des imperfections.

4.5.1 Détection numérique 2-D pour un contrôle sur toute la frontière

Dans cette sous-section, nous présentons nos résultats numériques en deux dimensions pour un contrôle opérant sur tout le bord du domaine Ω . Les tests exposés permettent de détecter de une à cinq imperfections grâce aux méthodes expliquées dans les sections précédentes. Pour chaque exemple, nous précisons les paramètres de discrétisation et d'échantillonnage, ainsi que les coordonnées des inhomogénéités dans une table pour une meilleure lisibilité des tests.

Une imperfection

Pour les deux tests suivants, nous avons appliqué l'approche de Shannon, puisque la méthode exacte du PPCM nécessite au moins deux imperfections. Les paramètres pour ces deux exemples sont indiqués dans la Table 4.3.

Figure n°	4.24	4.25
Ω	$(0, 1) \times (0, 1)$	$(0, 1) \times (0, 1)$
Ω'	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$
ε	10^{-6}	10^{-6}
Pas du Maillage	$h = \frac{1}{32}$	$h = \frac{1}{64}$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$	$T = 3$
Imperfections	$z = (0.60, 0.60)$	$z = (0.37, 0.52)$
Rayons des z	$\alpha = 0.03$	$\alpha = 0.04$
Conductivité	$\gamma_1 = 10$	$\gamma_1 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$Ne = 32$ $\eta_{max} = 3$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$	$Ne = 16$ $\eta_{max} = 5$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$

TAB. 4.3 – Paramètres pour les tests avec une imperfection.

Les Figures 4.24 et 4.25 montrent une très bonne localisation pour une imperfection avec des temps de calcul d'environ 4 heures et 72 heures, respectivement. Ces deux tests ont été effectués sur la machine A.

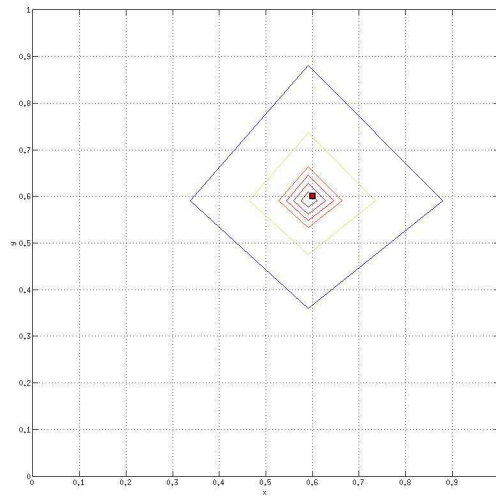


FIG. 4.24 – Localisation d'une imperfection $z = (0.60, 0.60)$.

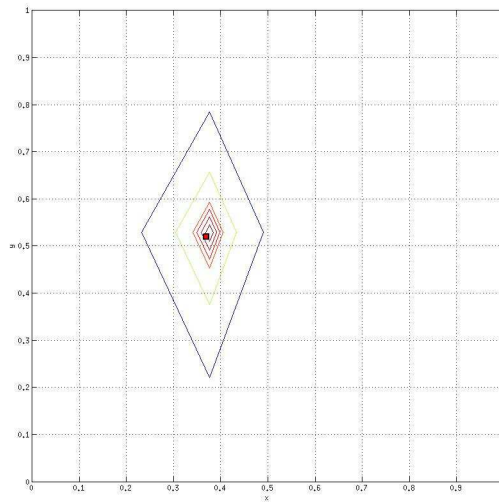


FIG. 4.25 – Localisation d'une imperfection $z = (0.37, 0.52)$.

Deux imperfections

Cette sous-section va se diviser en deux parties. Dans la première partie, nous présentons deux exemples pour la localisation de deux imperfections avec la méthode d'échantillonnage exacte. Les paramètres d'échantillonnage et de discrétisation sont introduits dans la Table 4.4. Nous constatons, dans la Figure 4.26, que les deux inhomogénéités sont bien détectées, malgré un relativement faible nombre de points d'échantillonnage en Fourier. Ceci vient de la régularité des coordonnées des imperfections $(0.30, 0.30)$ et $(0.70, 0.70)$. Nous avons parallélisé cet exemple sur *six* processeurs (voir Section 4.5.3) et nous avons obtenu un temps de calcul de 422 secondes avec la machine B. La Figure 4.27 a été réalisée en seillant par $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(7, 7)\|$ notre fonction $\Lambda_\alpha(\eta)$. Ce précédent test a été exécuté sur la machine A pendant environ 6 heures.

Figure n°	4.26	4.27
Ω	$(0, 1) \times (0, 1)$	$(0, 1) \times (0, 1)$
Ω'	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$
ε	10^{-6}	10^{-6}
Pas du maillage	$h = 1/16$	$h = 1/16$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$	$T = 3$
Imperfections	$z_1 = (0.30, 0.30)$ $z_2 = (0.70, 0.70)$	$z_1 = (0.64, 0.69)$ $z_2 = (0.38, 0.43)$
Rayons des z_j	$\alpha = 0.03$	$\alpha = 0.04$
Conductivité	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$D = 10$ $Ne_x = 42$ $Ne_y = 42$ $\Delta\eta_x = \frac{D\pi}{Ne_x}$ $\Delta\eta_y = \frac{D\pi}{Ne_y}$	$D = 20$ $Ne_x = 208$ $Ne_y = 252$ $\Delta\eta_x = \frac{D\pi}{Ne_x}$ $\Delta\eta_y = \frac{D\pi}{Ne_y}$

TAB. 4.4 – Paramètres pour les tests avec PPCM contenant deux imperfections.

Pour terminer, nous commençons déjà à constater que la méthode PPCM nécessite un nombre élevé de mesures, alors que nous sommes simplement

dans le cas de deux imperfections.

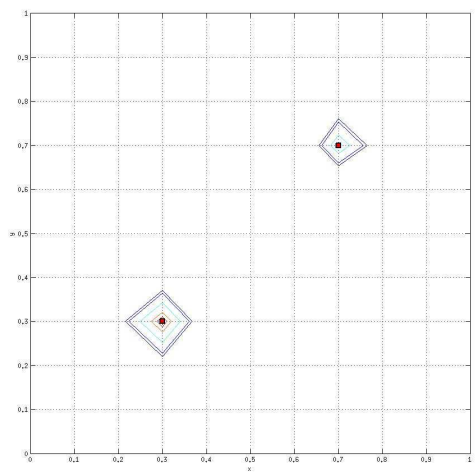


FIG. 4.26 – Détection de deux inhomogénéités avec la méthode d'échantillonnage exacte.

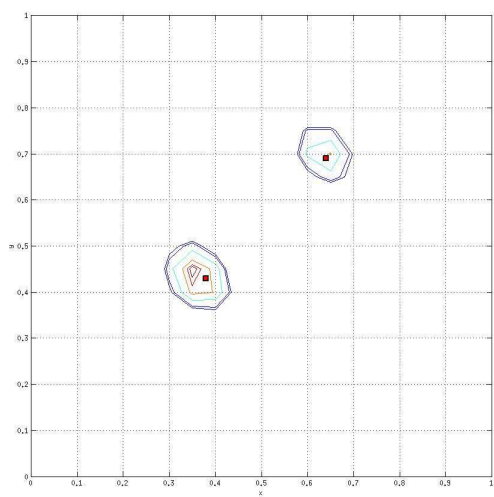


FIG. 4.27 – Localisation de deux imperfections $z_1 = (0.64, 0.69)$ et $z_2 = (0.38, 0.43)$ avec PPCM et seuillage $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(7, 7)\|$.

Dans la deuxième partie de cette sous-section, nous exposons deux tests avec l'approche de Shannon. Un seuillage $\|(10, 10)\|$ et un fenêtrage de type Blackman ont été appliqués pour les Figures 4.28 et 4.29, respectivement. Les temps de calcul sur la machine A pour ces deux tests sont de 18 heures et 48 heures, respectivement. Les données utilisées pour ces deux simulations sont visibles dans la Table 4.5.

Figure n°	4.28	4.29
Ω	$(0, 1) \times (0, 1)$	$(0, 1) \times (0, 1)$
Ω'	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$
ε	10^{-6}	10^{-6}
Pas du Maillage	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{16}$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$	$T = 3$
Imperfections	$z_1 = (0.75, 0.64)$ $z_2 = (0.57, 0.41)$	$z_1 = (0.33, 0.52)$ $z_2 = (0.61, 0.33)$
Rayons des z_j	$\alpha = 0.03$	$\alpha = 0.03$
Conductivité	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$Ne = 256$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$	$Ne = 128$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$

TAB. 4.5 – Paramètres pour les tests avec l'approche de Shannon contenant deux imperfections.

La détection numérique pour ces deux exemples reste très correcte. Par ailleurs, le fenêtrage semble être une technique qui fonctionne pour notre donnée échantillonnée. Nous reverrons cette méthode pour trois imperfections. Pour le moment, nous ne pouvons pas comparer les méthodes utilisées ici, car nous ne sommes en présence que de deux inhomogénéités et les seuillages effectués n'ont pas la même valeur, malgré cela le temps de calcul pour ces deux séries de tests sont très différents.

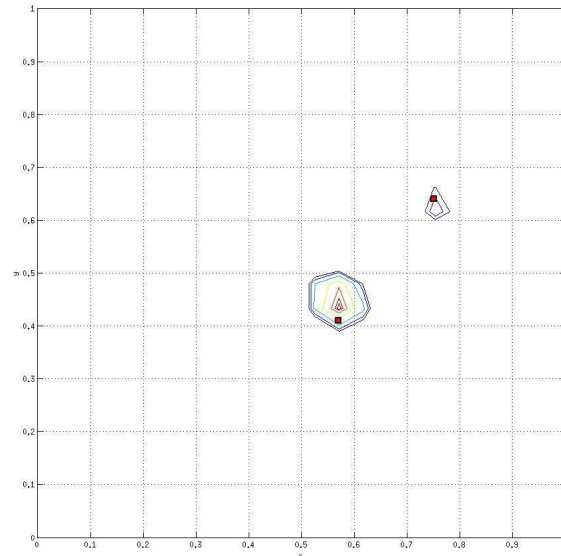


FIG. 4.28 – Détection de deux inhomogénéités avec un seuillage $\| (10, 10) \|$.

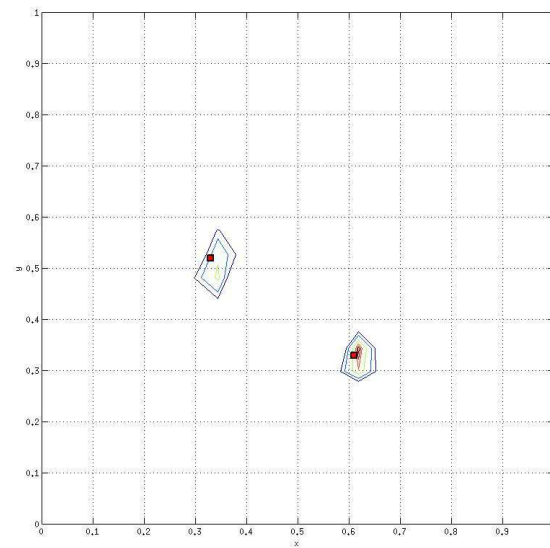


FIG. 4.29 – Localisation de deux imperfections avec une fonction de Blackman.

Trois imperfections

Nous passons maintenant aux exemples pour trois imperfections. Comme dans les sous-sections précédentes, nous indiquons les paramètres utilisés pour la méthode d'échantillonnage dans la Table 4.6. Pour la Figure 4.30, nous avons simplement appliqué la méthode PPCM, puisque les coordonnées des inhomogénéités sont assez régulières. Par contre lors du test de la Figure 4.31, nous avons dû effectuer un seuillage $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(8, 8)\|$.

Figure n°	4.30	4.31
Ω	$(0, 1) \times (0, 1)$	$(0, 1) \times (0, 1)$
Ω'	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$	$(0.2, 0.8) \times (0.2, 0.8)$
ε	10^{-6}	10^{-6}
Pas du Maillage	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{16}$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$	$T = 3$
Imperfections	$z_1 = (0.30, 0.40)$ $z_2 = (0.40, 0.70)$ $z_3 = (0.60, 0.50)$	$z_1 = (0.33, 0.52)$ $z_2 = (0.61, 0.29)$ $z_3 = (0.69, 0.72)$
Rayons des z_j	$\alpha = 0.03$	$\alpha = 0.04$
Conductivité	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$D = 10$ $Ne_x = 24$ $Ne_y = 280$ $\Delta\eta_x = \frac{D\pi}{Ne_x}$ $\Delta\eta_y = \frac{D\pi}{Ne_y}$	$D = 20$ $Ne_x = 420$ $Ne_y = 168$ $\Delta\eta_x = \frac{D\pi}{Ne_x}$ $\Delta\eta_y = \frac{D\pi}{Ne_y}$

TAB. 4.6 – Paramètres pour les tests avec PPCM contenant trois imperfections.

Le temps de calcul pour ces deux tests demeure conséquent : environ 8 heures pour le premier (machine A) et 11 heures pour le second (machine A). Mais la localisation numérique reste satisfaisante, surtout pour le premier exemple.

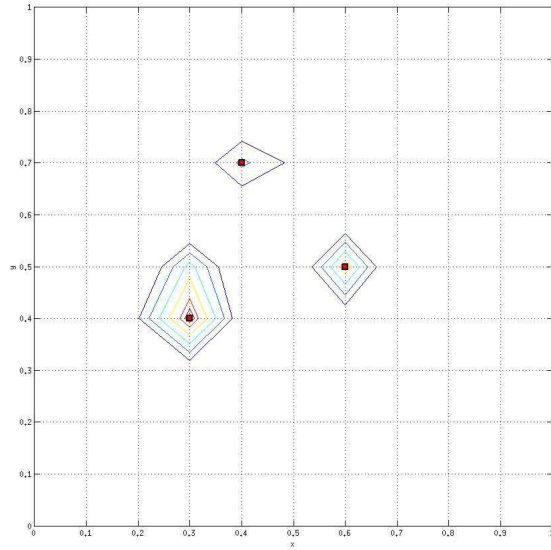


FIG. 4.30 – Détection de trois inhomogénéités avec la méthode d'échantillonnage exacte.

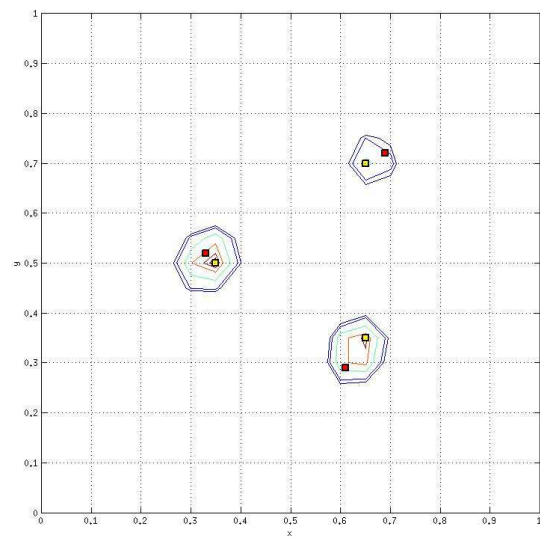


FIG. 4.31 – Localisation de trois imperfections $z_1 = (0.33, 0.52)$, $z_2 = (0.61, 0.29)$ et $z_3 = (0.69, 0.72)$ avec PPCM.

Nous présentons, à présent, trois simulations numériques pour l'approche de type Shannon - voir Table 4.7. Les deux premières permettent de localiser trois imperfections dans le domaine $(0, 1)^2$ pour un seuillage $\|(11, 11)\|$ (Figure 4.32) et une fonction fenêtre de Blackman (Figure 4.33), tous deux avec $Ne = 128$. Tandis que le dernier test localise trois inhomogénéités dans le carré $(-1, 1)^2$ grâce à un seuillage $\|(11, 11)\|$ et $Ne = 256$ - voir Figure 4.34.

Figure n°	4.32	4.33	4.34
Ω	$(0, 1)^2$	$(0, 1)^2$	$(-1, 1)^2$
Ω'	$(0.2, 0.8)^2$	$(0.2, 0.8)^2$	$(-0.8, 0.8)^2$
ε	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
Pas du Maillage	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{16}$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$	$T = 3$	$T = 3$
Imperfections	$z_1 = (0.33, 0.52)$ $z_2 = (0.61, 0.29)$ $z_3 = (0.69, 0.72)$	$z_1 = (0.33, 0.52)$ $z_2 = (0.61, 0.33)$ $z_3 = (0.67, 0.69)$	$z_1 = (0.33, 0.52)$ $z_2 = (-0.74, 0.35)$ $z_3 = (-0.38, 0.62)$
Rayons des z_j	$\alpha = 0.04$	$\alpha = 0.04$	$\alpha = 0.03$
Conductivité	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$Ne = 128$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$	$Ne = 128$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$	$Ne = 256$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$

TAB. 4.7 – Paramètres pour les tests avec l'approche de Shannon contenant trois imperfections.

Le temps de calcul sur la machine A pour ces trois exemples va en croissant, car le premier test exige 4 heures de calcul, le second 11 heures et le dernier 37 heures. Ces temps sont réalistes puisque pour le seuillage, l'algorithme ne calcule pas tous les coefficients de notre Λ_α , contrairement au fenêtrage et enfin le dernier test est effectué sur un domaine qui est équivalent à quatre fois le domaine de base $(0, 1)^2$ et le nombre de points d'échantillonnage Ne est le double des deux premiers tests.

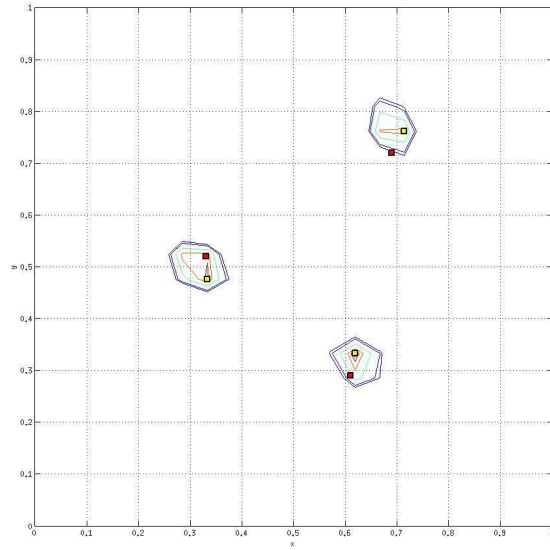


FIG. 4.32 – Localisation de trois imperfections $z_1 = (0.33, 0.52)$, $z_2 = (0.61, 0.29)$ et $z_3 = (0.69, 0.72)$ avec seuillage.

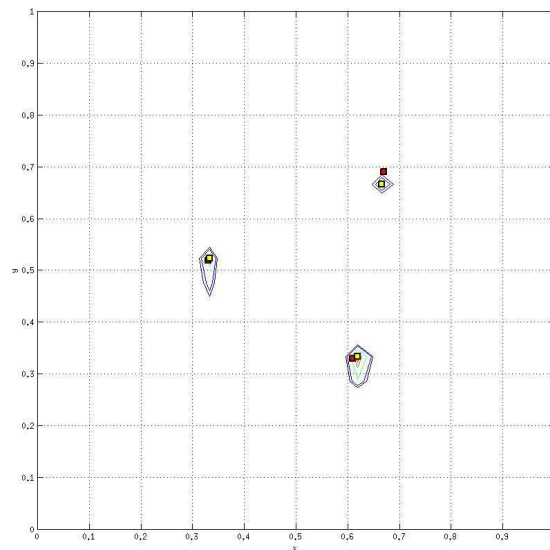


FIG. 4.33 – Localisation de trois imperfections $z_1 = (0.33, 0.52)$, $z_2 = (0.61, 0.33)$ et $z_3 = (0.67, 0.69)$ avec fenêtrage.

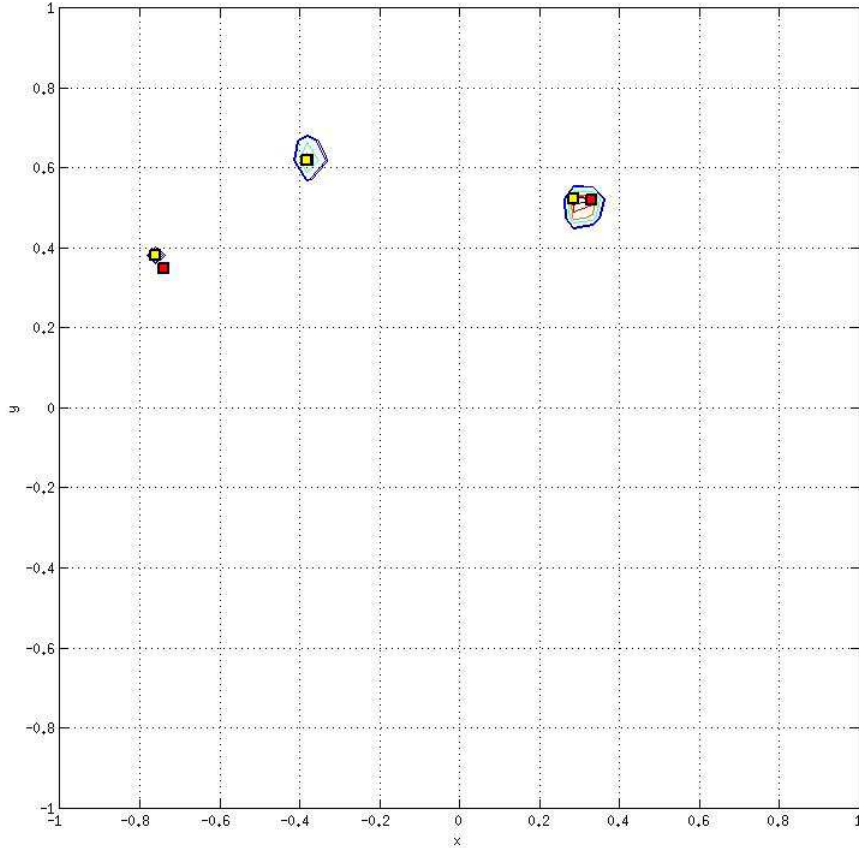


FIG. 4.34 – Détection de trois inhomogénéités dans le carré $(-1, 1)^2$.

Quatre imperfections

A partir de quatre imperfections, nous avons mis de côté la méthode d'échantillonnage exacte, ainsi que la technique de fenêtrage, car ces stratégies demandent un temps de calcul trop important. Par conséquent, nous n'utilisons pour ces deux tests que l'approche de Shannon avec un seuillage $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(10, 10)\|$. Les informations sur ces deux exemples sont notées dans le Tableau 4.8.

Figure n°	4.35	4.36
Ω	$(0, 1)^2$	$(-1, 1)^2$
Ω'	$(0.2, 0.8)^2$	$(-0.8, 0.8)^2$
ε	10^{-6}	10^{-6}
Pas du Maillage	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{16}$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$	$T = 3$
Imperfections	$z_1 = (0.69, 0.37)$ $z_2 = (0.70, 0.73)$ $z_3 = (0.35, 0.66)$ $z_4 = (0.43, 0.43)$	$z_1 = (0.23, 0.60)$ $z_2 = (-0.43, -0.40)$ $z_3 = (0.03, 0.18)$ $z_4 = (-0.43, 0.0)$
Rayons des z_j	$\alpha = 0.03$	$\alpha = 0.03$
Conductivité	$\gamma_1 = 5$ $\gamma_2 = 5$ $\gamma_3 = 5$ $\gamma_4 = 5$	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$ $\gamma_4 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$Ne = 128$ $\eta_{max} = 63$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$	$Ne = 256$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$

TAB. 4.8 – Paramètres pour les tests avec l'approche de Shannon contenant quatre imperfections.

La première interprétation de ces résultats montre que notre algorithme d'identification localise correctement quatre imperfections, voir les Figures 4.35 et 4.36. Les temps de calculs pour ces deux tests sur la machine A sont de : 30 minutes pour la Figure 4.35 et 29 heures pour la Figure 4.36.

Cinq imperfections

Pour terminer sur ces tests numériques dont le contrôle agit sur sur toute la frontière $\partial\Omega$, nous donnons un dernier résultat obtenu pour cinq imperfections vivant dans le domaine $(-1, 1)^2$ - voir Table 4.9. La méthode, qui nous a permis de localiser ces impuretés, est l'approche de Shannon avec un seuillage $\|(10, 10)\|$.

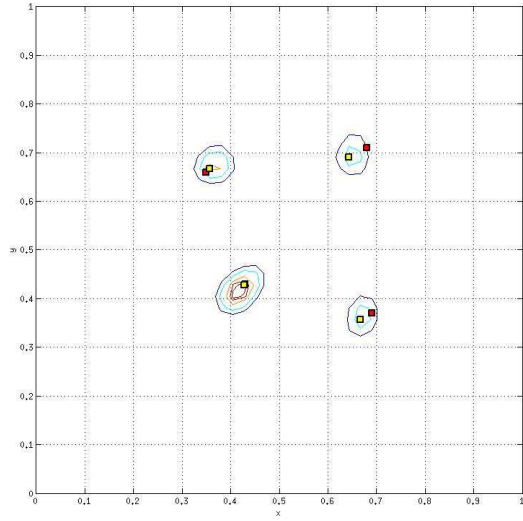


FIG. 4.35 – Localisation de quatre imperfections $z_1 = (0.69, 0.37)$, $z_2 = (0.70, 0.73)$, $z_3 = (0.35, 0.66)$ et $z_4 = (0.43, 0.43)$.

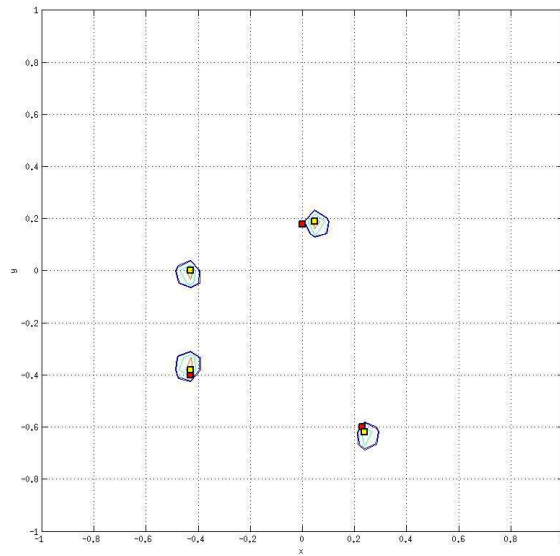


FIG. 4.36 – Localisation de quatre imperfections $z_1 = (0.23, -0.60)$, $z_2 = (-0.43, -0.40)$, $z_3 = (0.03, 0.18)$ et $z_4 = (-0.43, 0.0)$.

Figure n°	4.37
Ω	$(-1, 1)^2$
Ω'	$(-0.8, 0.8)^2$
ε	10^{-6}
Pas du Maillage	$h = \frac{1}{16}$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$
Imperfections	$z_1 = (0.63, 0.26)$ $z_2 = (0.09, 0.27)$ $z_3 = (-0.71, -0.15)$ $z_4 = (-0.65, 0.41)$ $z_5 = (-0.23, 0.53)$
Rayons des z_j	$\alpha = 0.03$
Conductivité	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$ $\gamma_4 = 10$ $\gamma_5 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$Ne = 256$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$

TAB. 4.9 – Paramètres pour les tests avec l'approche de Shannon contenant cinq imperfections.

Le temps de calcul nécessaire pour détecter ces inhomogénéités est d'environ 2 jours sur la machine A avec un processeur. Mais contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'approche de Shannon avec seuillage reste la méthode la plus fiable et la plus efficace par rapport aux autres méthodes.

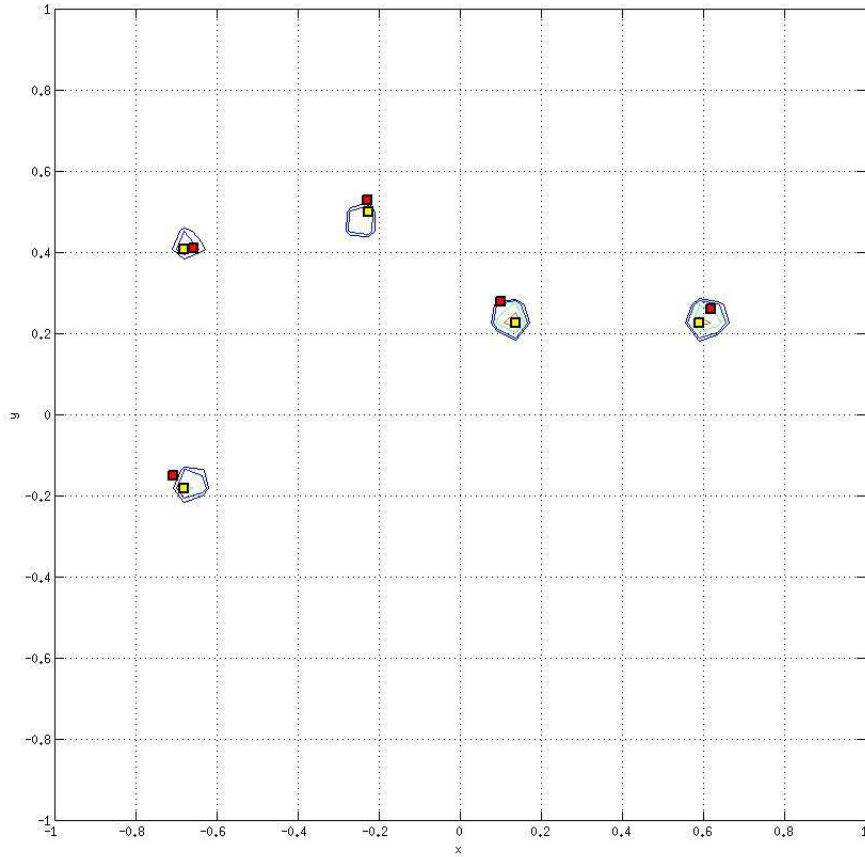


FIG. 4.37 – Détection de cinq inhomogénéités contenues dans $(-1, 1)^2$.

4.5.2 Localisation dynamique depuis une partie du bord

Puisque la méthode HUM nous permet de contrôler sur une partie de la frontière, nous pouvons simuler des cas où la donnée est seulement déterminée sur un sous-ensemble de $\partial\Omega$. Dans ce cas, la causalité de l'équation des ondes impliquera le besoin d'un temps de contrôle, T , plus long et l'éventualité d'une augmentation du nombre d'itérations requises pour l'algorithme HUM. Une présentation détaillée de ce phénomène peut être trouvée dans [11].

Dans un premier temps, nous comparons les résultats obtenus pour différents contrôles géométriques :

- (1) un contrôle sur tout le bord du domaine Ω ;
- (2) un contrôle sur trois côtés :
 $\Gamma_1 = \{y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{x = 1, 0 \leq y < 1\} \cup \{y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$;
- (3) un contrôle sur deux côtés adjacents :
 $\Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < 1\} \cup \{y = 0, 0 \leq x < 1\}$;

Ces trois tests sont effectués pour trois imperfections de rayon $\alpha = 0.03$ et de conductivité égale à 10. Les paramètres de discrétisation en espace et en temps sont fixés dans la Table 4.10. Nous avons posé $N_e = 128$ et $\eta_{\max} = 65$ comme paramètres d'échantillonnage en Fourier et défini un seuillage $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(12, 12)\|$.

Ω	Ω'	T	h	Δt	ε
$(0, 1)^2$	$(0.2, 0.8)^2$	$3 > 2\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{h}{\sqrt{2}}$	10^{-6}

TAB. 4.10 – Paramètres de discrétisation pour la Section 4.5.3.

Dans les Figures 4.39 et 4.40, nous notons que les inhomogénéités sont encore bien détectées, comme pour la Figure 4.38. Par contre, le temps de calcul augmente si l'on réduit la partie contrôlable - voir Table 4.11, ceci est dû à un plus grand nombre d'itérations pour arriver à la convergence de l'algorithme (HUM Bi-Grid). Les erreurs relatives pour la localisation des centres sont données dans la Table 4.12.

Temps pour le contrôle total	Temps pour le contrôle Γ_1	Temps pour le contrôle Γ_2
2201 secondes	4551 secondes	5376 secondes

TAB. 4.11 – Temps de calcul pour les différents contrôles.

Centres théoriques	Contrôle total	Contrôle Γ_1	Contrôle Γ_2
$z_1 = (0.43, 0.39)$	0.0107	0.0410	0.0107
$z_2 = (0.32, 0.67)$	0.0232	0.0232	0.0661
$z_3 = (0.73, 0.58)$	0.0298	0.0113	0.0298

TAB. 4.12 – Localisation des centres de trois imperfections. Erreurs relatives de localisation.

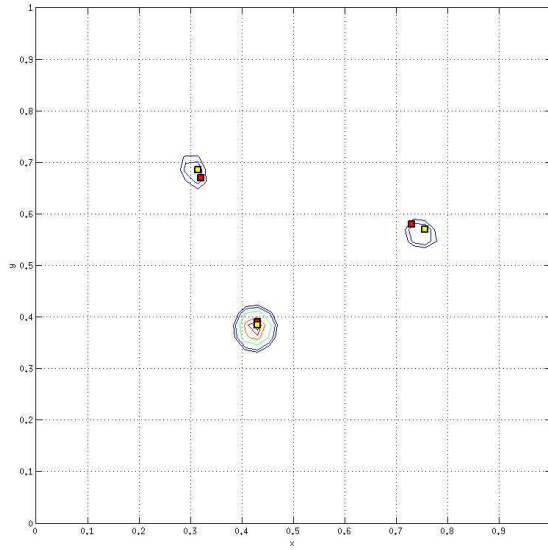


FIG. 4.38 – Localisation de trois imperfections pour un contrôle sur tout le bord.

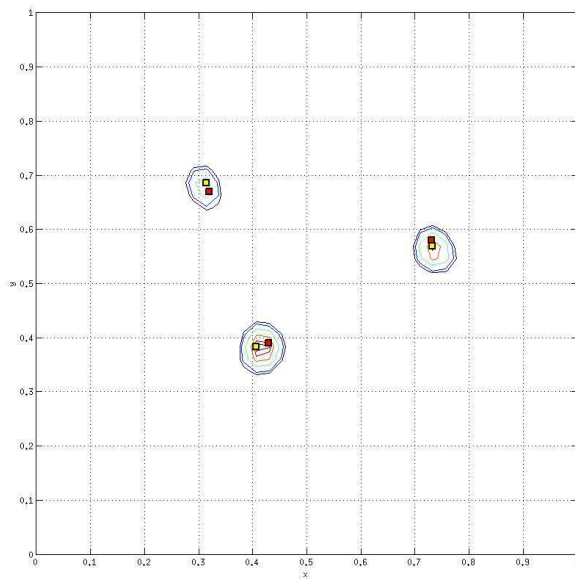


FIG. 4.39 – Localisation de trois imperfections pour un contrôle sur Γ_1 .

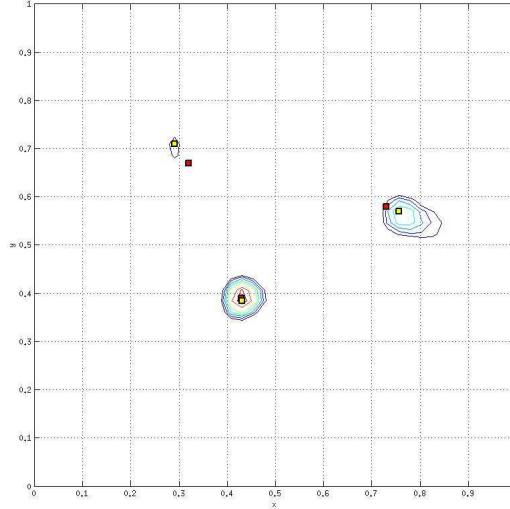


FIG. 4.40 – Localisation de trois imperfections pour un contrôle sur Γ_2 .

Dans un second temps, nous regardons le cas d'un contrôle sur $\Gamma_3 = \{y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{x = 0, 0 < y \leq 1\} \cup \{y = 1, 0 < x \leq 1\}$ pour quatre inhomogénéités - voir Table 4.13. Toutes ces imperfections ont un rayon $\alpha = 0.03$ et une conductivité $\gamma_j = 10$, $j = 1, 2, 3, 4$. Les paramètres de discrétisation spatial et temporel restent inchangés à la Table 4.10. A l'inverse les paramètres d'échantillonnage sont remaniés, puisque l'on prend $\eta_{\max} = 33$ et $N_e = 256$, mais le seuillage est fixé à $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(11, 11)\|$. Nous remarquons que toutes les imperfections sont bien localisées, mis à part une imperfection, z_4 , qui est un peu moins prononcée. Les *centres calculés* sont obtenus par interpolation et lissage dûs à l'algorithme de "contour" de Matlab.

Centres théoriques	Centres calculés	Erreurs relatives
$z_1 = (0.33, 0.64)$	$z_1^c = (0.34, 0.61)$	0.0374
$z_2 = (0.44, 0.31)$	$z_2^c = (0.43, 0.34)$	0.0611
$z_3 = (0.60, 0.51)$	$z_3^c = (0.61, 0.52)$	0.0277
$z_4 = (0.72, 0.71)$	$z_4^c = (0.75, 0.70)$	0.0327

TAB. 4.13 – Localisation des centres de quatre imperfections pour le contrôle Γ_3 . Erreurs relatives de localisation.

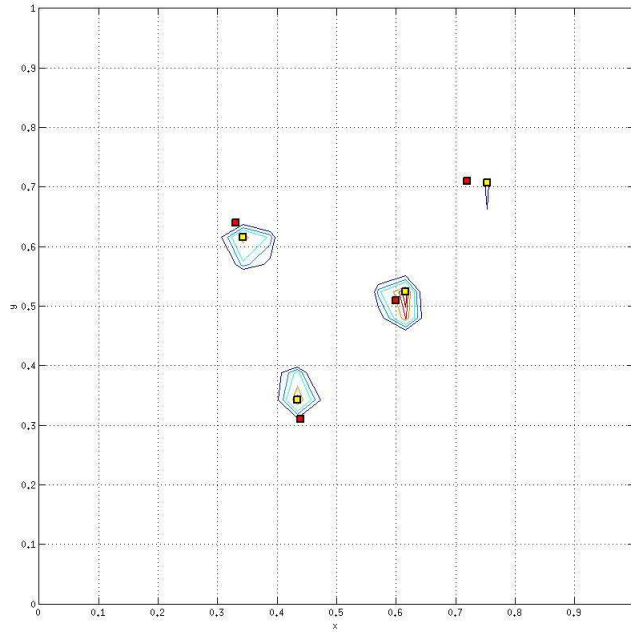


FIG. 4.41 – Localisation de quatre imperfections pour le contrôle agissant sur Γ_4 .

Ces résultats sont très importants, puisqu'ils montrent le potentiel de notre algorithme pour traiter des cas plus réalistes en plus de la robustesse et de la précision de cet algorithme.

4.5.3 Courbe de performance pour une localisation parallélisée

Nous présentons dans la Figure 4.42 un graphe du temps CPU en fonction du nombre de processeurs et dans la Figure 4.43 un graphe du speed-up⁶ pour la machine B en fonction du nombre de processeurs. Pour ce calcul 2D, nous avons pris $h = 1/32$ et $N_e = 16$, ainsi 1024 points dans l'espace $x - y$, 135

⁶Le *speed-up* est défini comme étant le rapport entre le temps nécessaire pour faire fonctionner un algorithme parallèle sur un processeur et celui pris pour le faire tourner sur N processeurs.

pas de temps et 16×16 points d'échantillonnage dans l'espace de Fourier étaient nécessaires pour ce test. Nous observons pour ce test que chaque fois que nous multiplions par deux le nombre de processeurs nous obtenons approximativement un temps CPU (en secondes) divisé par deux, ce qui nous fait penser que si nous avions utilisé 32 processeurs, nous aurions obtenu un temps CPU d'environ 461 secondes.

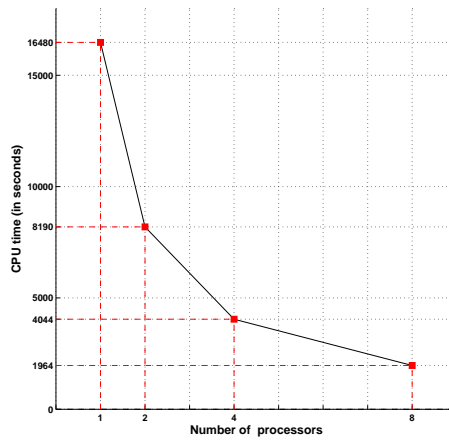


FIG. 4.42 – Courbe de performance pour la localisation d'une imperfection avec une parallélisation.

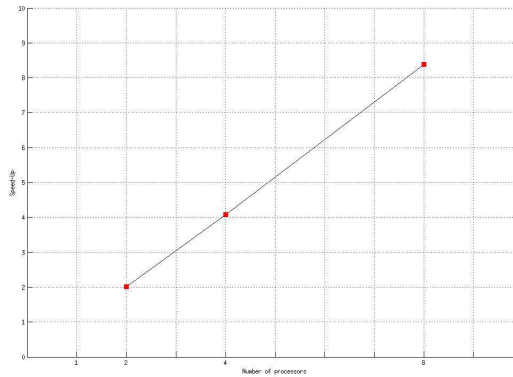


FIG. 4.43 – Courbe speed-up pour la localisation d'une imperfection avec une parallélisation.

4.5.4 Etude comparative des méthodes utilisées

Dans cette sous-section, nous allons comparer les différentes méthodes introduites dans les sections précédentes. Cette étude a été exécutée sur la machine A. Pour cela, nous fixons les paramètres de discrétisation contenus dans le Tableau 4.14 pour toutes les simulations numériques, ainsi que le centre, le rayon et la conductivité des imperfections (voir Tableau 4.15). Le contrôle agira sur tout le bord du domaine.

Ω	Ω'	T	h	Δt	ε
$(0, 1)^2$	$(0.2, 0.8)^2$	$3 > 2\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{h}{\sqrt{2}}$	10^{-6}

TAB. 4.14 – Paramètres de discrétisation pour l'étude comparative.

Les techniques utilisées pour effectuer cette comparaison sont les suivantes :

- PPCM ;
- PPCM avec un seuillage ;
- PPCM avec un fenêtrage ;
- Approche de Shannon ;
- Approche de Shannon avec un seuillage ;
- Approche de Shannon avec un fenêtrage ;

Centres des imperfections	$z_1 = (0.63, 0.28)$	$z_2 = (0.39, 0.66)$	$z_3 = (0.73, 0.65)$
Rayon des z_j	$\alpha = 0.03$		
Conductivité des z_j	$\gamma_1 = 10$	$\gamma_2 = 10$	$\gamma_3 = 10$

TAB. 4.15 – Informations sur les imperfections de l'étude comparative.

Nous étudions d'abord les résultats numériques pour la méthode PPCM. En ce qui concerne les paramètres d'échantillonnage, la précision de localisation est fixée à $D = 20$, nous avons par conséquent 3120×156 points

d'échantillonnage. La Figure 4.44 montre le résultat de la détection sans appliquer de fenêtrage ni de seuillage. On constate qu'aucune imperfection n'a été localisée.

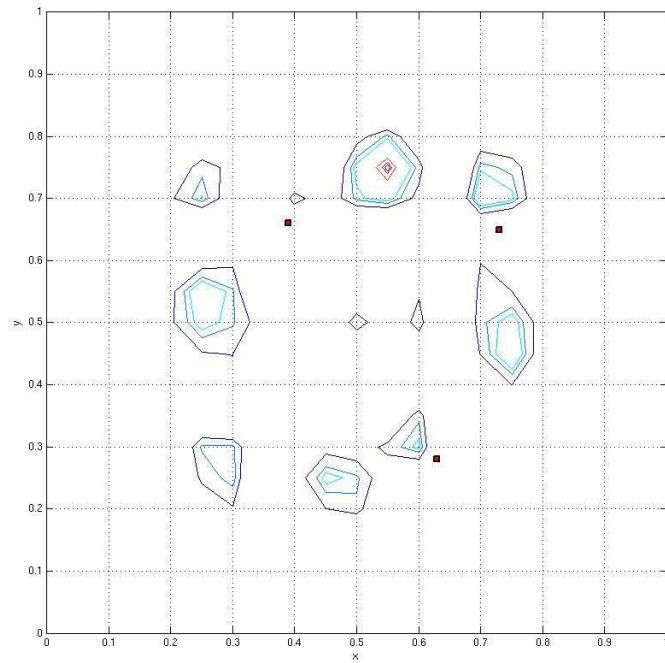


FIG. 4.44 – Localisation 2-D avec la méthode PPCM pour trois inhomogénéités.

Maintenant nous reprenons exactement la même donnée, mais cette fois-ci nous la multiplions par une fenêtre de type Blackman. Et là grâce à l'application d'une fenêtre, nous retrouvons le centre des imperfections à une distance moyenne de 5×10^{-2} - voir Figure 4.45. Le temps de calcul, qui a été nécessaire pour ce test, est d'environ 13 jours pour un processeur.

Ensuite la troisième simulation réalisée pour le PPCM a été exécutée pour un seuillage $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(9, 9)\|$, de ce fait le temps de calcul devient plus raisonnable, environ 2 jours. La localisation des centres z_j , $j = 1, 2, 3$, reste inchangée par rapport au fenêtrage (voir Figure 4.46).

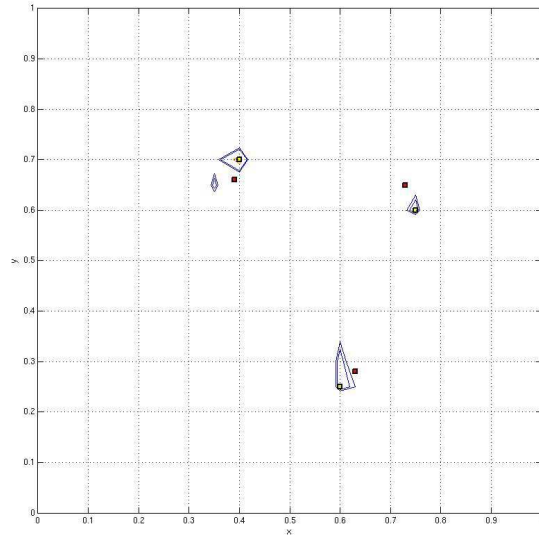


FIG. 4.45 – Localisation de trois imperfections pour la méthode PPCM avec application d'une fonction de Blackman.

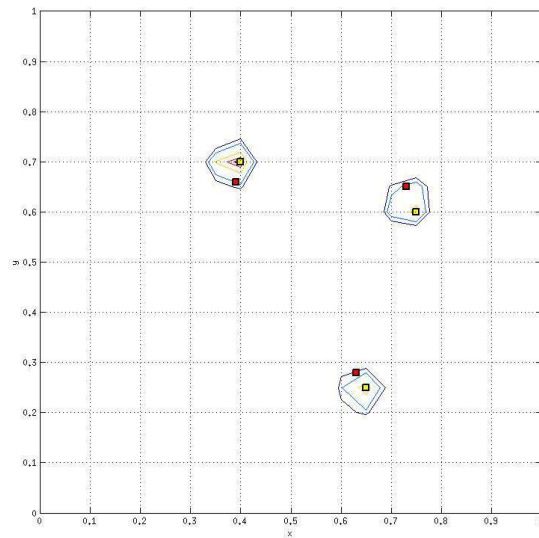


FIG. 4.46 – Localisation des trois imperfections pour la méthode PPCM avec un seuillage $\|(9, 9)\|$.

Pour finir cette étude comparative sur les différentes méthodes utilisées en deux dimensions, nous regardons l'approche de Shannon. Les paramètres d'échantillonnage vont nettement différer des tests effectués pour la méthode exacte du PPCM, puisque nous utilisons 256×256 points d'échantillonnage pour $\eta_{\max} = 33$. Comme c'était le cas pour le PPCM, l'approche de Shannon seule ne permet pas de détecter les trois impuretés (voir Figure 4.47).

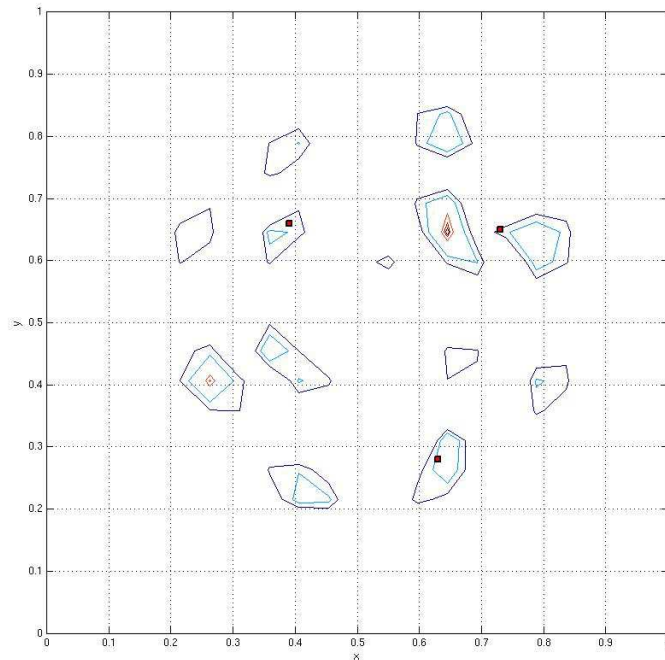


FIG. 4.47 – Localisation 2-D avec l'approche Shannon pour trois inhomogénéités.

Toutefois, en appliquant une fenêtre de Blackman à notre donnée échantillonnée, nous retrouvons l'emplacement de nos imperfections - Figure 4.48. Nous avons eu besoin d'environ 2 jours de calcul pour obtenir ces deux résultats.

Mais regardons maintenant le résultat pour un seuillage $\|(\eta_*, \eta_*)\| = \|(9, 9)\|$ avec les mêmes paramètres d'échantillonnage. La Figure 4.49 montre la simulation obtenue pour ce seuillage avec un temps de calcul d'environ 7 heures. Les centres z_j demeurent encore bien localisés.

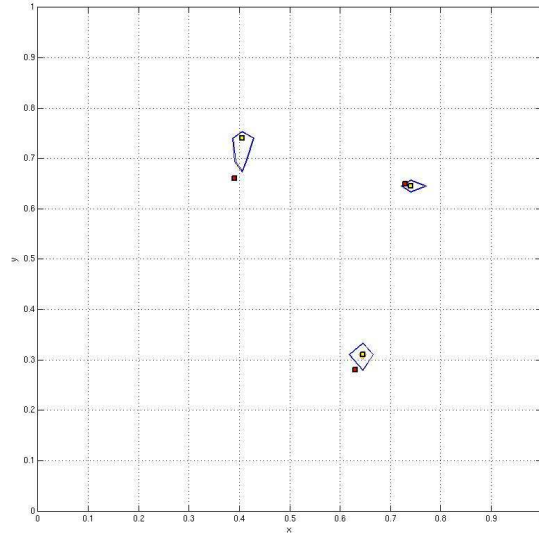


FIG. 4.48 – Localisation de trois imperfections avec application d'une fonction de Blackman.

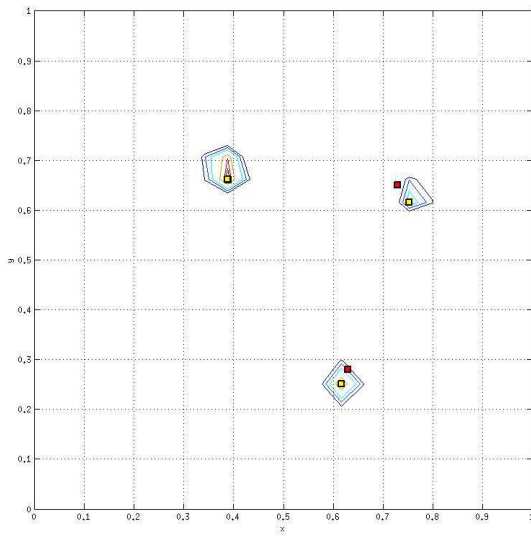


FIG. 4.49 – Localisation des trois imperfections avec un seuillage $\|(11, 11)\|$ pour l'approche Shannon.

Au vue de cette étude pour le cas bidimensionnel, un constat nous saute aux yeux : la méthode utilisant le PPCM est bien trop coûteuse en temps de calcul, même avec un seuillage, malgré une précision de localisation légèrement meilleure à celle de l'approche Shannon. Ainsi une méthode efficace, que ce soit en temps de calcul ou en précision, sera l'approche de Shannon avec un seuillage. Ainsi pour le cas 3-D, nous avons privilégié cette méthode de calcul avec seuillage.

4.6 Localisation numérique en 3-D

Dans cette section, nous ne présenterons pas de résultats numériques 3-D. Ces derniers pouvant être vus dans le Chapitre 5, dans lequel nous indiquons quelques tests numériques basés sur les exemples de calibration effectués dans la sous-section 4.4.2. Les résultats obtenus proviennent essentiellement d'échantillonnages de type Shannon et avec un contrôle agissant sur une partie ou sur l'intégralité du bord. Tous les tests 3-D ont été effectués sur la machine B.

Chapitre 5

Solution numérique d'un
problème inverse pour
l'équation des ondes en
présence d'imperfections de
petit volume

Sommaire

5.1	Introduction	130
5.2	Dynamic localization theory	131
5.2.1	Some notation and presentation of the inverse problem	131
5.2.2	The Asymptotic Formula and the Identification Procedure	134
5.3	The HUM approach to exact boundary controllability	137
5.3.1	Formulation of the problem	137
5.3.2	Description of the HUM	138
5.3.3	Application of the HUM to the wave equation	139
5.3.4	A numerical algorithm based on the HUM	140
5.4	Numerical discretization of dynamic localization	140
5.4.1	Time-space discretization for the wave equation	140
5.4.2	Parallel implementation	145
5.4.3	Fourier method	145
5.4.4	Résumé of the identification procedure algorithm	150
5.5	Results of the numerical simulations	150
5.5.1	Calibration tests based on the asymptotic formula	151
5.5.2	Numerical Localization of Imperfections in 3D	152
5.6	Conclusion and perspectives	157

Ce chapitre reproduit l'article soumis [10] et dans lequel les calculs numériques de détection en 3-D ont été présentés.

5.1 Introduction

The localization of small imperfections is of great importance since there are numerous practical applications, particularly in the fields of medical imaging and nondestructive testing of materials. Generally, when we seek to localize an imperfection contained in a bounded domain, we need to solve an inverse problem for retrieving the geometry of the inhomogeneity.

The determination of conductivity profiles from knowledge of boundary measurements has received a great deal of attention (see, for example, [2], [3], [8] and [27]). However, the reconstruction of imperfections within a dynamical (i.e. time-dependent) framework has not been widely investigated. The present paper is a first attempt to implement an effective *numerical* method to determine the location of small-sized, conductivity imperfections inside a homogeneous medium from dynamical measurements on a *part* of the boundary. In imaging, this is known as “limited-view data”.

The inverse problem considered in this paper is more complicated from the mathematical point of view and more interesting from the point of view of applications than the one solved in [8] and [27] because one often cannot get measurements for all t or on the whole boundary, and so one cannot, by taking a Fourier transform in the time variable, reduce our dynamic inverse problem to the Helmholtz equation considered in [8] and [27]. Previous numerical investigations have concentrated on time independent equations with full data - see for example, [6, 7, 10].

This article is based on three sources : the Hilbert Uniqueness Method (HUM) formulated by J.-L. Lions - see [29]; the numerical application of the above method to exact boundary control of the wave equation by R. Glowinski *et.al.* - see [26]; the theoretical results of the problem of detection for the wave equation by H. Ammari - see [3].

This paper is structured as follows. We begin, in Section 5.2, by defining some notation and then formulate the inverse initial boundary value problem. We also recall the identification procedure by the Fourier method. In Section 5.3, we recall the numerical algorithm for the Hilbert Uniqueness Method of J.-L. Lions [29]. We present the numerical method used for the dynamic detection problem in Section 5.4. Then numerical results obtained from simu-

lations are shown in Section 5.5. Finally, some conclusions and perspectives are reported in the last section.

5.2 Dynamic localization theory

In this part, we recall the different results contained in the article of H. Ammari (see [3] for the full details) on which the numerical algorithm and the subsequent simulations will be based.

5.2.1 Some notation and presentation of the inverse problem

Some notation

Let Ω be a bounded, smooth subdomain of \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, with for simplicity, a smooth boundary $\partial\Omega$, with n denoting the outward unit normal to $\partial\Omega$. We suppose that Ω contains a finite number m of inhomogeneities, each of the form $z_j + \alpha B_j$, where $B_j \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded, smooth domain containing the origin. This gives a collection of inhomogeneities of the form $B_\alpha = \cup_{j=1}^m (z_j + \alpha B_j)$. The points $z_j \in \Omega$, $j = 1, \dots, m$ that define the locations of the inhomogeneities are assumed to satisfy two distance conditions :

$$\begin{cases} |z_j - z_l| \geq d_0 > 0 \quad \forall j \neq l, \\ \text{dist}(z_j, \partial\Omega) \geq d_0 > 0 \quad \forall j. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

We also assume that $\alpha > 0$, the common order of magnitude of the diameters of the inhomogeneities, is sufficiently small so that these are disjoint and their distance to $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ is larger than $\frac{d_0}{2}$.

Presentation of the inverse problem

Let γ_0 denote the conductivity of the background medium which, for simplicity, we shall assume is constant. Let γ_j be the constant conductivity of the j -th inhomogeneity, $z_j + \alpha B_j$. We define the piecewise constant conductivity

$$\gamma_\alpha(x) = \begin{cases} \gamma_0, & \text{if } x \in \Omega \setminus \bar{B}_\alpha \\ \gamma_j, & \text{if } x \in z_j + \alpha B_j. \end{cases}$$

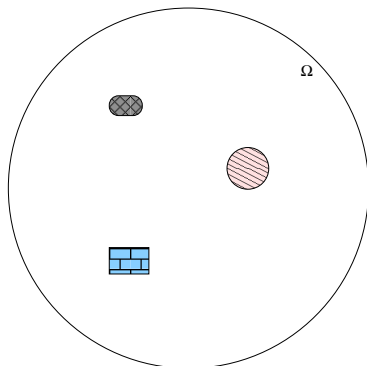


FIG. 5.1 – An example of a 2-D domain containing three imperfections, $z_1 + \alpha B_1$, $z_2 + \alpha B_2$, $z_3 + \alpha B_3$.

Consider the initial boundary value problem for the wave equation, in the presence of the inhomogeneities,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\gamma_\alpha \nabla u_\alpha) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u_\alpha = f & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_\alpha|_{t=0} = u^0, \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Define u to be the solution of the wave equation in the absence of any inhomogeneities, satisfying

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\gamma_0 \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = f & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u^0, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Here $T > 0$ is a final observation time, and the initial conditions $\varphi, \psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ and the boundary condition $f \in C^\infty(0, T; C^\infty(\partial\Omega))$ are subject to the compatibility conditions at the initial time,

$$\partial_t^{2l} f|_{t=0} = (\gamma_0)^l (\Delta^l u^0)|_{\partial\Omega} \quad \text{and} \quad \partial_t^{2l+1} f|_{t=0} = (\gamma_0)^l (\Delta^l u^1)|_{\partial\Omega}, \quad l = 1, 2, \dots$$

These ensure that the initial boundary value problem (5.2.3) has a unique solution in $C^\infty([0, T] \times \Omega)$; see [23]. The transmission problem for the wave

equation (5.2.2) has a unique weak solution $u_\alpha \in C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$; see, for example, [29]. Moreover, it can be shown that $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ belongs to $L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$.

We employ standard L^2 -based Sobolev spaces to measure function regularity. The notation H^s denotes those functions which, along with all their derivatives of order less than or equal to s , are in L^2 . In particular, H_0^1 denotes the closure of C_0^∞ in the norm H^1 . Sobolev spaces with negative indices are defined by duality, using an L^2 -inner product. We shall only need one such space, namely, H^{-1} , which is defined as the dual of H_0^1 .

The aim of this paper is to determine numerically the centers of the imperfections from the knowledge of boundary measurements of

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_c \times (0, T),$$

where $\Gamma_c \subset \partial\Omega$ is a part of the boundary that must satisfy certain geometrical constraints, and $(0, T)$ is the finite time-interval during which the measurements are recorded. It is also possible to compute certain properties of the shapes of the inhomogeneities B_α , though this is not treated here. For this purpose, H. Ammari, in [3], has developed an asymptotic method based on appropriate averaging of dynamic boundary measurements, using particular background solutions as weights. These particular solutions are constructed, when measurements are available on all or a part of the boundary of the domain, by the control method of Section 5.3.

The first fundamental step in the design of the reconstruction method is the derivation of an *asymptotic formula* for $\frac{\partial u_\alpha}{\partial \nu_j}|_{\partial(z_j + \alpha B_j)^+}$ on the outer boundaries of the imperfections, in terms of the reference solution u , the location z_j of the imperfection $z_j + \alpha B_j$, and the geometry of B_j . The next step is the use of this asymptotic formula to derive integral boundary formulae with a judicious choice of test functions and is based on the geometrical control method and the solution of Volterra-type integral equations. We will show that these boundary integral formulae form the basis of very effective numerical identification algorithms, as was predicted in [3]. We note that an analogous approach may be applied to the full (time-dependent) Maxwell equations with small imperfections of different electric permittivity or magnetic permeability (or both) - see [10] for the time-harmonic case.

5.2.2 The Asymptotic Formula and the Identification Procedure

Following [3], we let $\beta \in C_0^\infty(\Omega)$ be a cutoff function such that $\beta(x) \equiv 1$ in a subdomain Ω' of Ω that contains the inhomogeneities B_α . For an arbitrary $\eta \in \mathbb{R}^d$, we assume that we are in possession of the boundary measurements of

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_c \times (0, T)$$

for

$$u^0(x) = e^{i\eta \cdot x}, \quad u^1(x) = -i\sqrt{\gamma_0}|\eta| e^{i\eta \cdot x} \quad \text{and} \quad f(x, t) = e^{i\eta \cdot x - i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t}. \quad (5.2.4)$$

This particular choice of plane wave data u^0 , u^1 and f implies that the background solution u of the wave equation (5.2.3), in the absence of any inhomogeneity, is given by

$$u(x, t) = u_\eta(x, t) = e^{i\eta \cdot x - i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \quad (5.2.5)$$

Suppose that T and the part Γ_c of the boundary $\partial\Omega$ are such that they geometrically control Ω , which roughly means that every geometrical optic ray, starting at any point $x \in \Omega$ at time $t = 0$, hits Γ_c before time T at a non-diffractive point - see [9], [13]. Then from [29], it follows that for any $\eta \in \mathbb{R}^d$, we can construct by the Hilbert uniqueness method (HUM), a unique $g_\eta \in H_0^1(0, T; L^2(\Gamma))$ in such a way that the unique weak solution w_η in $C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$ of the wave equation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\gamma_0 \nabla w_\eta) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ w_\eta = g_\eta & \text{in } \Gamma_c \times (0, T), \\ w_\eta = 0 & \text{in } \partial\Omega \setminus \Gamma_c \times (0, T), \\ w_\eta|_{t=0} = \beta(x)e^{i\eta \cdot x} & \in H_0^1(\Omega), \\ \left. \frac{\partial w_\eta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.2.6)$$

satisfies $w_\eta(T) = \partial_t w_\eta(T) = 0$.

Next, for any $\eta \in \mathbb{R}^d$, let θ_η be the solution to the Volterra equation of the second kind :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_\eta(x, t)}{\partial t} + \int_t^T e^{-i\sqrt{\gamma_0}|\eta|(s-t)} \left(\theta_\eta(x, s) - i\sqrt{\gamma_0}|\eta| \frac{\partial \theta_\eta(x, t)}{\partial t} \right) ds \\ = g_\eta(x, t) \quad \text{for } x \in \Gamma_c, t \in (0, T), \\ \theta_\eta(x, 0) = 0 \quad \text{for } x \in \Gamma_c. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

The existence and uniqueness of this θ_η in $H^1(0, T; L^2(\Gamma_c))$, for any $\eta \in \mathbb{R}^d$, can be established using the resolvent kernel. Since $g_\eta \in H_0^1(0, T; L^2(\Gamma_c))$, the solution θ_η belongs, in fact, to $H^2(0, T; L^2(\Gamma_c))$. We also note from differentiation of (5.2.7) with respect to t that θ_η is the unique solution of the ODE

$$\begin{cases} \partial_t \theta_\eta - \theta_\eta = e^{i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} \partial_t (e^{-i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} g_\eta) & \text{for } x \in \Gamma_c, t \in (0, T), \\ \theta_\eta(x, 0) = \partial_t \theta_\eta(x, T) = 0 & \text{for } x \in \Gamma_c. \end{cases} \quad (5.2.8)$$

It also immediatly follows from this observation that θ_η belongs to $H^2(0, T; L^2(\Gamma))$ since $g_\eta \in H_0^1(0, T; L^2(\Gamma))$.

To identify the locations and certain properties of the small inhomogeneities B_α , we average the boundary measurements $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}|_{\Gamma_c \times (0, T)}$, using the solution θ_η to the Volterra equation (5.2.7) or, equivalently, the ODE (5.2.8) as a function of η . The following result holds.

Theorem 1. (*H. Ammari*) *Let $\eta \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Let u_α be the unique solution in $C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ to the wave equation (5.2.2) with*

$$u^0(x) = u_\eta^0(x) = e^{i\eta \cdot x}, \quad u^1(x) = u_\eta^1(x) = -i\sqrt{\gamma_0}|\eta| e^{i\eta \cdot x}$$

and

$$f(x, t) = f_\eta(x, t) = e^{i\eta \cdot x - i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t}.$$

Suppose that Γ_c and T geometrically control Ω [13]; then we have

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Gamma [\theta_\eta \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \partial_t \theta_\eta \partial_t \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right)] \\ &= - \int_0^T \int_\Gamma e^{i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} \partial_t (e^{-i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} g_\eta) \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \\ &= \alpha^d \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) e^{2i\eta \cdot z_j} [M_j(\eta) \cdot \eta - |\eta|^2 |B_j|] + o(\alpha^d), \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

where θ_η is the unique solution to the ODE (5.2.8), with g_η defined as the boundary control in (5.2.6), and M_j is the polarization tensor of B_j , defined by

$$(M_j)_{k,l} = e_k \cdot \left(\int_{\partial B_j} \left(\nu_j + \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu_j}(y) \right) y \cdot e_l ds_j(y) \right). \quad (5.2.10)$$

Here (e_1, \dots, e_d) is an orthonormal basis of \mathbb{R}^d , ν_j is the outward normal of the j -th imperfection and Φ_j is the solution of a Laplace equation in the j -th imperfection.

See [3] for the full formulation and details of the proof. This theorem is fundamental for our identification problems.

We can now proceed to describe our identification procedure which is based on Theorem 1. We neglect the asymptotically small remainder in the asymptotic formula (5.2.9) and define $\Lambda_\alpha(\eta)$ by

$$\Lambda_\alpha(\eta) = \int_0^T \int_\Gamma \left[\theta_\eta \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \partial_t \theta_\eta \partial_t \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right].$$

The function $\Lambda_\alpha(\eta)$ is computed in the following way. First, we construct the control g_η in (5.2.6) for given $\eta \in \mathbb{R}^d$. Then from the boundary measurements $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}|_{\Gamma \times (0, T)}$, and the explicit knowledge of $\frac{\partial u}{\partial n}$, we form the weighted boundary integrals that appear in the above expression of $\Lambda_\alpha(\eta)$. We reproduce this very important formula, using the data (5.2.4),

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(\eta) &= - \int_0^T \int_\Gamma e^{i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} \partial_t (e^{-i\sqrt{\gamma_0}|\eta|t} g_\eta) \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (5.2.11) \\ &\approx \alpha^d \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) e^{2i\eta \cdot z_j} [M_j(\eta) \cdot \eta - |\eta|^2 |B_j|]. \end{aligned}$$

Recall that the function $e^{2i\eta \cdot z_j}$ is exactly the Fourier transform (up to a multiplicative constant) of the Dirac function δ_{-2z_j} (a point mass located at $-2z_j$). From Theorem 1, it follows that the function $\Lambda_\alpha(\eta)$ is (approximately) the Fourier transform of a linear combination of derivatives of point masses, or

$$\check{\Lambda}_\alpha(x) \approx \alpha^d \sum_{j=1}^m L_j \delta_{-2z_j},$$

where L_j is a second order, constant coefficient, differential operator whose coefficients depend on the polarization tensor M_j defined by (5.2.10) (see [18] for its properties) and $\check{\Lambda}_\alpha(x)$ represents the inverse Fourier transform of $\Lambda_\alpha(\eta)$.

The method of reconstruction we propose here consists, as in [8], of sampling values of $\Lambda_\alpha(\eta)$ at some discrete set of points and then calculating the corresponding discrete inverse Fourier transform. After a rescaling by $-\frac{1}{2}$, the support of this discrete inverse Fourier transform yields the location of the small inhomogeneities B_α . In other terms, once $\Lambda_\alpha(\eta)$ is computed from dynamic boundary measurements on Γ_c , we calculate its inverse Fourier transform.

Then the asymptotic formula (5.2.9) in Theorem 1 asserts that this inverse Fourier transform is a distribution supported at the locations $\{z_j\}_{j=1}^m$.

Once the locations are known, we may calculate the polarization tensors $(M_j)_{j=1}^m$ by solving an appropriate linear system arising from (5.2.9). These polarization tensors give ideas on the orientation and relative size of the inhomogeneities. As was pointed out in [3], from the leading term of $\Lambda_\alpha(\eta)$ given by (5.2.9), we cannot reconstruct more details of the shapes of the domains B_j . Higher order terms in the asymptotic expansion of $\Lambda_\alpha(\eta)$, with respect to α , are needed to reconstruct the domains B_j with high resolution.

The theoretical number of data (sampling) points needed for an accurate discrete Fourier inversion of $\Lambda_\alpha(\eta)$ follows from Shannon's sampling theorem. We need (conservatively) order $(\frac{h}{\delta})^2$ sampled values of $\Lambda_\alpha(\eta)$ to reconstruct, with resolution δ , a collection of inhomogeneities that lie inside a square of side h . Numerical experiments in [8] for the two-dimensional (time-independent) inverse conductivity problem confirm this sampling and seem to suggest that the method is quite stable with respect to noise in measurements and errors in the different approximations.

5.3 The HUM approach to exact boundary controllability

In this section we recall very briefly the numerical method that will be employed in order to solve the exact controllability problem. Full details of the method may be found in [9, 25, 26, 27].

5.3.1 Formulation of the problem

We consider the wave equation with control on a part of the boundary,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 & \text{in } Q = \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u^0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u^1 & \text{in } \Omega, \\ u = \begin{cases} g & \text{on } \Sigma_c = \Gamma_c \times (0, T), \\ 0 & \text{on } \Sigma \setminus \Sigma_c = \Gamma \setminus \Gamma_c \times (0, T), \end{cases} & \end{array} \right. \quad (5.3.12)$$

where Ω is a bounded domain of \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, with boundary Γ , and $\Gamma_c \subset \Gamma$ is the part of the boundary where the control is applied.

The problem of exact boundary controllability is then : “Given T, u^0, u^1 , can we find a control g on Σ_c such that the solution of (5.3.12) satisfies

$$u(x, T) = \partial_t u(x, T) = 0 \text{ in } \Omega ?”$$

The answer is positive if one takes T sufficiently large and one controls on a set large enough to encounter every ray of geometric optics (see [9, 13]). A systematic and constructive method for computing such a control, g , is provided by the *Hilbert uniqueness method* (HUM) of Lions [29].

5.3.2 Description of the HUM

We describe briefly the HUM for the control of the wave equation from a part of the boundary. Full details can be found in [26] and [29]. Let

$$E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) , \quad E' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

and define the operator

$$\Lambda : E \longrightarrow E'$$

as follows :

1. Take $e = \{e^0, e^1\} \in E$ and solve from $t = 0$ to $t = T$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) \varphi = 0 & \text{in } Q = \Omega \times (0, T), \\ \varphi|_{t=0} = e^0 , \quad \partial_t \varphi|_{t=0} = e^1 & \text{in } \Omega, \\ \varphi(x, t) = 0 & \text{on } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \end{cases} \quad (5.3.13)$$

2. Then solve (backwards) from $t = T$ to $t = 0$

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) \psi = 0 & \text{in } Q = \Omega \times (0, T), \\ \psi(x, T) = 0 , \quad \partial_t \psi(x, T) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \psi = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial n} & \text{on } \Sigma_c = \Gamma_c \times (0, T), \\ 0 & \text{on } \Sigma - \Sigma_c = \Gamma - \Gamma_c \times (0, T), \end{cases} \end{cases} \quad (5.3.14)$$

3. Finally, define the operator Υ as

$$\Upsilon e = \{\psi_t(x, 0), -\psi(x, 0)\} \in E'.$$

We have the original theorem of J.-L. Lions [29] :

Theorem 2. (*J.-L. Lions*). *Operator Υ is linear and continuous from E onto E' ; moreover, if T is sufficiently large ($> T_{min} = 2 \|x - x_0\|_{L^\infty(\Omega)}$) and if Γ_c is of the type*

$$\Gamma(x_0) = \{x | x \in \Gamma, (x - x_0) \cdot n_x > 0\}$$

where $x_0 \in \mathbb{R}^d$ is an arbitrary point and n_x is the outward normal to Γ at x , then Υ is an isomorphism from E onto E' .

5.3.3 Application of the HUM to the wave equation

We now apply Theorem 2 to the control of the wave equation (5.3.12). Suppose that

$$u^0 \in L^2(\Omega) , u^1 \in H^{-1}(\Omega)$$

are given. Then,

1. take $f = \{u^1, -u^0\}$ - i.e. we identify u with ψ ;
2. solve $\Upsilon e = f$ to obtain e^0, e^1 , the initial data for the φ wave equation (5.3.12) ;
3. solve the φ wave equation (5.3.12) forwards in time using e^0, e^1 as initial data ;
4. calculate the normal derivative of the solution φ and set $g = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Sigma_0}$;
5. solve the ψ wave equation (5.3.14) backwards in time using g as the boundary data ;
6. finally, set $u = \psi$, then since $\psi(x, T) = 0, \psi_t(x, T) = 0$ was imposed, g (the boundary control) gives the exact boundary controllability with

$$u(x, T) = \partial_t u(x, T) = 0 , \forall x \in \Omega.$$

We remark that the operator Υ is symmetric and E -elliptic. These properties imply that, in step (2), $\Upsilon e = f$ can be solved by a conjugate gradient algorithm.

5.3.4 A numerical algorithm based on the HUM

We have faithfully followed [9] and [25] in order to formulate our algorithm. In particular, we point out that a bi-grid approach, that filters the high frequency components of the discrete solution, is used in order to regularize the numerical implementation.

5.4 Numerical discretization of dynamic localization

In this section, we present the numerical discretization of our identification problem. First of all, we describe the finite element method and the time-stepping scheme used for solving the different wave equations contained in this detection problem. We then discuss the parallel implementation of the identification procedure. Finally, we provide a detailed analysis of our implementation of the Fourier inversion method.

We will not describe here the numerical discretization of the bigrid HUM method, seen in Section 5.3 (the interested reader should consult [9, 17]), nor the evaluation of the boundary integral in (5.2.9) which is based on standard quadrature rules.

5.4.1 Time-space discretization for the wave equation

In this subsection, we show that the finite element method is well adapted to the numerical resolution of the wave equation : we combine finite elements for the space discretization and finite differences for the time discretization. This will then be used for solving the control problem (5.2.6) for g_η and the inhomogeneous wave equation (5.2.2) for u_α .

Space semi-discretization : Approximation by finite elements

First, we consider the following, general wave equation with a Dirichlet boundary condition, defined on $\Omega \times (0, T)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \nabla \cdot (\gamma(x) \nabla(u(x, t))) = f(x, t) & \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = g(x, t) & \forall (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, t = 0) = u^0(x) & \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u^1(x) & \forall x \in \Omega, \end{array} \right. \quad (5.4.15)$$

with $f \in L^2(L^2(\Omega); (0, T))$, $g \in H_0^1(\partial\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. We assume that $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, and that $u^0, u^1 \in H^1(\Omega)$. Besides, we consider the function g as differentiable in time and satisfying the necessary compatibility conditions with u^0 and u^1 .

In practice, in order to work in the homogeneous space $H_0^1(\Omega)$, we use an extension technique on the function g , defined as follows. For simplicity, we rewrite the elliptic (spatial) part of (5.4.15) as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

We extend g to all of Ω , denoted by \tilde{g} , and look for solutions $\tilde{u} = u - \tilde{g}$ of the homogeneous equation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\tilde{u} &= f - \mathcal{L}\tilde{g} & \text{in } \Omega, \\ \tilde{u} &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

In the weak sense, the problem becomes : find $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ such that

$$a(\tilde{u}, v) = (f, v) - a(\tilde{g}, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

where (\cdot, \cdot) is the inner product in $L^2(\Omega)$ and $a(\cdot, \cdot)$ is the elliptic bilinear form given by

$$a(u, v) = (\gamma \nabla u, \nabla v).$$

The solution exists, according to the Lax-Milgram lemma, if $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ which according to the Trace theorem is true if $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Once \tilde{u} is known, we easily recover u from the definition, $u = \tilde{u} + \tilde{g}$.

For the finite element mesh, we consider shape-regular meshes, \mathcal{T}_h , that partition the domain Ω into a set of disjoint elements $\{K\}$, such that $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$. The elements are rectangles (in 2D) or parallepipeds (in 3D), aligned with the coordinate axes. The diameter of an element K is denoted by h_K and the mesh size h is given by $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. We define the following sub-space of $H_0^1(\Omega)$ on the mesh,

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ and } v_h|_K \in Q_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

where Q_1 denotes the space of polynomials of degree at most one in each of the d variables, thus spanned by $\{1, x, y, xy\}$ when $d = 2$, and by $\{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz\}$ when $d = 3$.

A possible finite element approximation is then given by : find $\tilde{u}_h \in V_h$ such that

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = (f, v_h) - a(\tilde{g}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

However, this approximation is not very practical due to the difficulty of constructing the extension operator, $g \rightarrow \tilde{g}$. We thus assume that g belongs not only to $H^{1/2}(\partial\Omega)$ but also to $C^0(\Omega)$. We denote by I the set of interior nodes (the nodes not belonging to $\Gamma = \partial\Omega$) and by J the set of boundary nodes. Their cardinalities are N_I and N_J respectively. Now we set

$$V_h^* = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h(x_j) = g(x_j), i = 1, \dots, N_J \text{ on } \partial\Omega \text{ and } v_h|_K \in Q_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

and the approximate problem then reads : find $u_h \in V_h^*$ such that

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

But we can express any $u_h \in V_h^*$ as

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_I} u_h(x_i)\omega_i + \sum_{j=1}^{N_J} g(x_j)\tilde{\omega}_j \doteq z_h + \tilde{g}_h$$

where ω and $\tilde{\omega}$ are the basis functions relative to the internal and the boundary nodes respectively. We note that $z_h \in V_h$ and $\tilde{g}_h \in V_h^*$. Finally the problem can be rewritten in a symmetric form as : find $z_h \in V_h$ such that

$$a(z_h, v_h) = (f, v_h) - a(\tilde{g}_h, v_h) \doteq (\tilde{f}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

An element v_h of V_h will be written as

$$\forall x \in \Omega, \quad v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_I} v_h(x_i) \omega_i(x).$$

where ω_i are the Q_1 basis functions associated to the interior nodes.

Returning now to the wave equation (5.4.15), we can write the complete weak form as : find $u \in H_0^1(\Omega)$, with $u|_{t=0} = u^0$, $\partial_t u|_{t=0} = u^1$, such that

$$\langle \partial_t^2 u, v \rangle + a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad 0 < t < T$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the duality pairing between $H^{-1}(\Omega)$ and $H_0^1(\Omega)$. The semi-discrete finite element approximation is then : find $u_h \in V_h \times [0, T]$ such that (with a slight abuse of notation, rewriting u_h for z_h and dropping the $\tilde{\cdot}$)

$$\begin{aligned} \langle \partial_t^2 u_h, v_h \rangle + a(u_h, v_h) &= (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad 0 < t < T, \\ u_h|_{t=0} &= P_h u^0, \\ \partial_t u_h|_{t=0} &= P_h u^1, \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

where P_h denotes the L^2 -projection onto V_h and the discrete bilinear form on $V_h \times V_h$ is given by

$$a(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \gamma \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Writing,

$$\partial_t^2 u_h(x, t) = \sum_{i \in \mathbf{I}} u_i''(t) \omega_i(x),$$

we obtain the linear, second-order system of ordinary differential equations for the discretization of (5.4.15) by the finite element method (5.4.16),

$$\begin{cases} MU_h''(t) + KU_h(t) = B_h & 0 < t \leq T, \\ U_h(0) = U_h^0 \text{ and } U_h'(0) = V_h^0 \text{ given,} \end{cases} \tag{5.4.17}$$

where $U_h^0 = P_h u^0$ and $V_h^0 = P_h u^1$. The mass matrix, M , has coefficients

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \omega_i(x) \omega_j(x) dx, \quad 1 \leq i, j \leq N_I,$$

the stiffness matrix, K , has coefficients

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \gamma(x) \nabla \omega_i(x) \nabla \omega_j(x) dx, \quad 1 \leq i, j \leq N_I,$$

and $B_h \in \mathbb{C}^{N_I}$, the right hand side vector, has coefficients

$$B_i = \int_{\Omega} f(x_i, t) \omega_i(x) dx - \sum_{j \in \mathbf{J}} K_{ij} g(x_j, t) - \sum_{j \in \mathbf{J}} M_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x_j, t).$$

Complete space-time discretization

To discretize (5.4.17) in time, we use the Newmark time-stepping scheme (see [37, 28]). This scheme provides a general approach and permits us to pass easily from fully explicit to fully implicit schemes. Let $k > 0$ be the time step and $\{t^n\}_{0 \leq n \leq N}$ be a subdivision of the time interval $[0, T]$ into $N + 1$ points. More precisely, we put $N = T/k$, $t^n = nk$, $\forall 0 \leq n \leq N$ and $t^N = T$. Note $U_h(t^n) = U_h^n$ and $B_h(t^n) = B_h^n$.

We have the following Newmark scheme : find approximations $\{U_h^n, V_h^n\}_n$ to $\{U_h^n, \partial_t U_h^n\}$ such that

$$(M + k^2 \zeta K) U_h^{n+1} = \left[M - k^2 \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) K \right] U_h^n + k M V_h^n + k^2 \left[\zeta B_h^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) B_h^n \right],$$

and

$$M V_h^{n+1} = M V_h^n + k K [\delta U_h^{n+1} + (1 - \delta) U_h^n] + k [\delta B_h^{n+1} + (1 - \delta) B_h^n],$$

for $n = 0, \dots, N - 1$, with

$$U_h^0 = u^0, \quad V_h^0 = u^1.$$

Here $\zeta \geq 0$ and $\delta \geq 1/2$ are the two Newmark parameters.

Remark 3. We recall that for $\delta = 1/2$ the Newmark scheme is second-order accurate in time, whereas it reduces to first-order accurate for $\delta > 1/2$. When $\zeta = 0$ and $\delta = 1/2$, we obtain an explicit scheme that corresponds to the standard leapfrog scheme. When $\zeta = 1/4$ and $\delta = 1/2$, we have a fully implicit, unconditionally stable scheme.

In the computations we have used the fully implicit scheme for the solution of the wave equation with imperfections (5.2.2) and for the two wave equations (direct and adjoint) used to solve the control problem (5.2.6).

5.4.2 Parallel implementation

In order to reduce the CPU time needed by our identification algorithm, we have used *Message Passing Interface* (MPI) commands for a parallel implementation in *Fortran 90*. Two levels of parallelism are possible :

- coarse grain, where we exploit the MPI commands for looping on chunks of different values of η ;
- and fine grain, where the linear solvers are parallelized using the PETSc package [12].

In the first case, the speed-up should be linear in the number of processors. In the second case, we expect the speed-up to be superlinear.

5.4.3 Fourier method

Sampling

The localization of the centres, z_j , $j = 1, \dots, m$ requires that we numerically compute the inverse Fourier transform of the boundary integral, $\Lambda_\alpha(\eta)$ - see Section 5.2.2. A theoretical framework for the number of points needed is provided by Shannon's Theorem.

Theorem 4. [Shannon] *If the Fourier transform of a function $h(t)$ is zero for all frequencies greater than a critical frequency, f_c , (the Nyquist frequency) then the continuous function $h(t)$ can be uniquely determined from a knowledge of its sampled values by the formula*

$$h(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT) \frac{\sin 2\pi f_c(t - nT)}{\pi(t - nT)}$$

where $T = 1/(2f_c)$ and $(1/T)$ is known as the Nyquist sampling rate.

From this theorem we conclude the two following facts :

1. If the imperfections are known to be contained within a square/cube of side length $2M$, we must sample $\Lambda_\alpha(\eta)$ with a step size $\Delta\eta = 1/(2M)$.
2. If we sample in a domain $|\eta| < \eta_{\max}$, then the resolution will be at most $\delta = 1/(2\eta_{\max})$.

Thus we require $N_\delta = (2M/\delta)^d$, $d = 2, 3$ sampled values of $\Lambda_\alpha(\eta)$ in order to reconstruct, at a resolution δ , a set of imperfections contained inside the square/cube of size $2M$. This implies that we need $(4M\eta_{\max})^d$ points.

We now, following the analysis of [27], take a closer look at the quantity $\Lambda_\alpha(\eta)$. For clarity, let us assume that $d = 2$ and let us examine a simplified form by assuming that our data is of the form

$$\Lambda(\eta) = e^{2iz\cdot\eta}$$

for a single imperfection, $z = (z_1, z_2)$. Now we sample η in the domain $[-\eta_{\max}, \eta_{\max}] \times [-\eta_{\max}, \eta_{\max}]$, uniformly with n^2 points and define the discretization step-size as

$$\Delta\eta = \frac{2\eta_{\max}}{n+1}.$$

We obtain the discrete approximation,

$$\Lambda_h(\eta) = e^{2iz_1(-\eta_{\max}+(k-1)\Delta\eta)+2iz_2(-\eta_{\max}+(l-1)\Delta\eta)}, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Applying the inverse discrete Fourier transform (IDFT) to this quantity, we obtain

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e^{2iz_1(-\eta_{\max}+(k-1)\Delta\eta)+2iz_2(-\eta_{\max}+(l-1)\Delta\eta)} e^{2\pi i\left(\frac{(k-1)}{n}(r-1)\right)+2\pi i\left(\frac{(l-1)}{n}(s-1)\right)}$$

for all $1 \leq r, s \leq n$. Let us look at the first coordinate,

$$\check{\Lambda}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2iz_1(-\eta_{\max}+(k-1)\Delta\eta)} e^{2\pi i\left(\frac{(k-1)}{n}(r-1)\right)}.$$

An elementary calculation yields

$$|\check{\Lambda}_1| = \left| \frac{1}{n} \frac{\sin(2\eta_{\max}z_1)}{\sin\left[\pi\left(\frac{z_1\Delta\eta}{\pi} + \frac{r-1}{n}\right)\right]} \right|.$$

For n large ($n \rightarrow \infty$), $|\check{\Lambda}_1| \rightarrow 0$ unless the quantity in the denominator equals zero. This will occur when $\sin k\pi = 0$, $k = 0, \pm 1, \dots$ which means that $\left(\frac{z_1\Delta\eta}{\pi} + \frac{r-1}{n}\right)$ must be close to an integer. So, once the sign of z_1 is fixed, in order to approach only one integer value (and thus observe a single peak in the Fourier transform), the following condition must hold :

$$\left| \frac{z_1\Delta\eta}{\pi} \right| \leq \frac{1}{2}$$

since $0 \leq \frac{r-1}{n} \leq 1$.

For large values of η_{\max} , we begin to observe instabilities due to the exponential terms in the asymptotic formula that become highly oscillatory. In order to control these oscillations, we impose the truncation $\|\eta\| \leq \|(\eta_*, \eta_*)^T\|$ in a discrete 2-norm and set the quantity $\Lambda_\alpha(\eta) = 0$ for all other values of η .

Avoiding the pitfalls

The numerical evaluation of Fourier transforms of general functions is filled with numerous little traps. These can be considered as being due to two main causes : the definition of the Fourier transform and the sampling of the function to be transformed.

The definition of the Fourier transform, and its inverse, imposes a choice of normalizing constants. This choice must also correspond precisely with the definition used in the FFT algorithm itself. In order to minimise this problem, we prefer to use the following definition.

Definition 5. The Fourier transform of a function $h(t)$ is defined as

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

and the inverse Fourier transform by

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df.$$

Note that the FFT algorithm that we use in the post-processing (Matlab) uses this convention and that, more importantly, this definition avoids the need of pesky normalizing constants. In particular, using this convention, we have the following “clean” result for the Fourier transform of an impulse function : if

$$h(t) = Ae^{j2\pi f_0 t} = A \cos 2\pi f_0 t + jA \sin 2\pi f_0 t,$$

where A is a real constant, then

$$H(f) = A\delta(f - f_0).$$

Once the problem of the definition is resolved, all other problems encountered are due to sampling and padding issues.

The first step when determining the sampling interval, is to respect the *periodicity* of the function. If the sampling in time is not an exact multiple of the period(s), a rippling effect is produced. In fact, if a band-limited, periodic function is sampled and truncated at any of other than an integer multiple of the period, the resulting discrete and continuous Fourier transforms differ considerably.

Aliasing occurs when the frequency sampling is too fine (or the time sampling is too coarse) and we obtain a folding-in and overlap of higher frequency periodic replicates of the transformed function. If the sampling interval in time is chosen equal to one-half the reciprocal of the highest frequency component, aliasing does not occur.

Finally, *truncating* the function (which implies multiplication by a step function), will introduce a Gibbs effect. This can be avoided by enlarging the total sampling interval, but one must then be careful not to have too large a sample step, which will reintroduce aliasing.

The most important concept to keep in mind is that the discrete Fourier transform implies periodicity in both the time and the frequency domains. If one respects the fact that the N sample values of the time-domain function represent a single sample of a periodic function, then application of the discrete Fourier transform should result in few surprises.

An exact sampling method

To capture the exact sampling frequencies when numerous imperfections are present in the domain, we propose an *exact sampling method* based on the least common multiplier (lcm) of the coordinates of each of the imperfections.

We consider the periodic component of the asymptotic formula with m imperfections,

$$\Lambda(\eta) = \sum_{j=1}^m e^{2iz_j \cdot \eta}.$$

We set $z = \left(\frac{p}{D}, \frac{q}{D}, \frac{r}{D}\right)$, where p , q and r are whole numbers, and D is a precision factor that depends on the size of the domain and the accuracy of the reconstruction desired. In general, we take $D = 10, 20, \dots$. The function $\eta \mapsto e^{2iz \cdot \eta}$ is (T_1, T_2, T_3) -periodic, with $T_1 = \frac{\pi D}{p}$, $T_2 = \frac{\pi D}{q}$, and $T_3 = \frac{\pi D}{r}$. If we now consider two imperfections, with centers $z_1 = \left(\frac{p_1}{D}, \frac{q_1}{D}, \frac{r_1}{D}\right)$ and $z_2 = \left(\frac{p_2}{D}, \frac{q_2}{D}, \frac{r_2}{D}\right)$, the periodicity of the function $\eta \mapsto e^{2iz_1 \cdot \eta} + e^{2iz_2 \cdot \eta}$ becomes

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\pi D \text{lcm}(p_1, p_2)}{p_1 p_2}, \\ T_2 &= \frac{\pi D \text{lcm}(q_1, q_2)}{q_1 q_2}, \\ T_3 &= \frac{\pi D \text{lcm}(r_1, r_2)}{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

With these periods, we can proceed to compute the discretization step in η and the number of Fourier points needed. We find that

$$\Delta\eta_1 = \frac{\pi D}{2\text{lcm}(p_1, p_2)}, \quad \Delta\eta_2 = \frac{\pi D}{2\text{lcm}(q_1, q_2)}, \quad \Delta\eta_3 = \frac{\pi D}{2\text{lcm}(r_1, r_2)},$$

and that the number of points is

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{[\text{lcm}(p_1, p_2)]^2}{p_1 p_2} \leq 2\text{lcm}(p_1, p_2), \\ N_2 &= \frac{[\text{lcm}(q_1, q_2)]^2}{q_1 q_2} \leq 2\text{lcm}(q_1, q_2), \\ N_3 &= \frac{[\text{lcm}(r_1, r_2)]^2}{r_1 r_2} \leq 2\text{lcm}(r_1, r_2). \end{aligned}$$

For example, if we have two imperfections, $z_1 = (0.30, 0.30, 0.30)$ and $z_2 = (0.60, 0.60, 0.60)$, we need $N_1 = N_3 = 70$, and $N_2 = 30$ with $D = 10$. If we now take $z_1 = (0.58, 0.63, 0.32)$ and $z_2 = (0.39, 0.27, 0.71)$, we require $N_1 = 736$, $N_2 = 550$, and $N_3 = 728$ with $D = 40$.

Examples and tests based on the asymptotic formula (5.2.9)

We recall the asymptotic formula (5.2.9), neglecting the higher order term,

$$\Lambda_\alpha(\eta) = \alpha^d \sum_{j=1}^m \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_j} - 1 \right) e^{2i\eta \cdot z_j} [M_j(\eta) \cdot \eta - |\eta|^2 |B_j|], \quad d = 2, 3. \quad (5.4.18)$$

This formula was systematically used in order to test the sampling strategies and choose the sampling parameters, *before* running the complete localization simulations. We present, in Section 5.5.1, some tests performed in both the 3-D case that show the inherent precision and robustness of this formula.

Three sampling strategies have been tested :

1. A periodic sampling strategy that supposes *a priori* knowledge of the imperfections' centers.
2. A Shannon approach based on the analysis of [27] and [10] with a suitable truncation.
3. A windowing approach that compares Blackman, Hamming and Hanning functions.

Extensive tests of the formula, encompassing all three of the above strategies, can be found in [18].

5.4.4 Résumé of the identification procedure algorithm

Before presenting the numerical results, we resume the procedure used by our identification algorithm.

First, we suppose a finite number of imperfections, $z_j + \alpha B_j$ for $j = 1, \dots, m$, with conductivities γ_j . Then, for each η in a discrete set of values,

1. Compute the solution u_α of the wave equation (5.2.2) by a finite element method to simulate the boundary measurements of $\frac{\partial u_\alpha}{\partial n}$ on $\Gamma \times (0, T)$. The quantity $\frac{\partial u}{\partial n}$ on $\Gamma \times (0, T)$ is explicitly known from (5.2.5).
2. Calculate the control g_η of (5.2.6) via the BiGrid HUM method.
3. Form the quantity $\Lambda_\alpha(\eta)$ from the left hand side of (5.2.11) with a suitable quadrature formula.

Finally, apply the inverse Fourier transform to $\Lambda_\alpha(\eta)$ to compute $\check{\Lambda}_\alpha(x)$. This leads to the localization of the centers of the inhomogeneities.

5.5 Results of the numerical simulations

We present here some numerical results of our identification algorithm. In all examples, we take the domain Ω to be the unit cube $[0, 1]^3$. Extensive simulations in the 2D case can be found in the thesis [18] and will not be presented here. We use Q_1 finite elements for the space discretization and an implicit, unconditionally stable Newmark scheme for the time discretization with $\zeta = 1/4$ and $\delta = 1/2$ (see Section 5.4.1). We also suppose that when the control is active on the entire boundary, we take a final time, T , according to the Table 5.1. The spatial discretization, h , and the corresponding time step Δt are also given in Table 5.1, as well as the stopping criterion of the bigrid HUM method, ϵ . The cutoff function, β , is equal to 1 on a subdomain $\Omega' = (0.2, 0.8)^d$, $d = 3$. The conductivity γ_0 of the background medium is equal to 1. The Fourier parameters depend on the geometry considered (number of imperfections and location of each imperfection) and the resolution required. We denote by N_e the number of Fourier points for each component. In all the figures, we plot contours of the inverse Fourier transform, $\check{\Lambda}_\alpha(x)$.

Parameter	Values
N	14
h	$1/N$
Δt	$h/\sqrt{3}$
T	$4 > 2\sqrt{3}$
ϵ	10^{-6}

TAB. 5.1 – Discretization parameters for all numerical simulations.

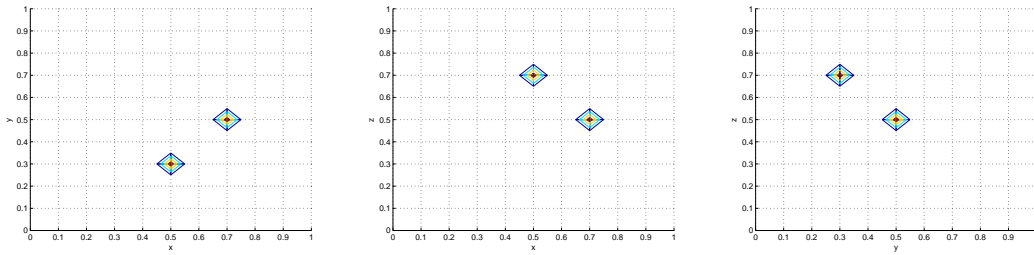


FIG. 5.2 – Exact sampling method for two imperfections, using the asymptotic formula, $z_1 = (0.50, 0.30, 0.70)$ and $z_2 = (0.70, 0.50, 0.50)$.

5.5.1 Calibration tests based on the asymptotic formula

We computed numerous test cases using the asymptotic formula (5.4.18). These tests were extremely helpful in analyzing and choosing the discretization parameters for the Fourier variable, η . We fix $\alpha = 0.02$ and $\gamma_j = 10$ for each imperfection in the following tests.

The exact sampling method

Applying the exact sampling procedure, two imperfections can be exactly located with $N_1 = N_3 = 140$, $N_2 = 60$ and $D = 20$ - see Figure 5.2.

Further tests, and in particular a comparison of various windowing functions as well as different truncations, can be found in [18].

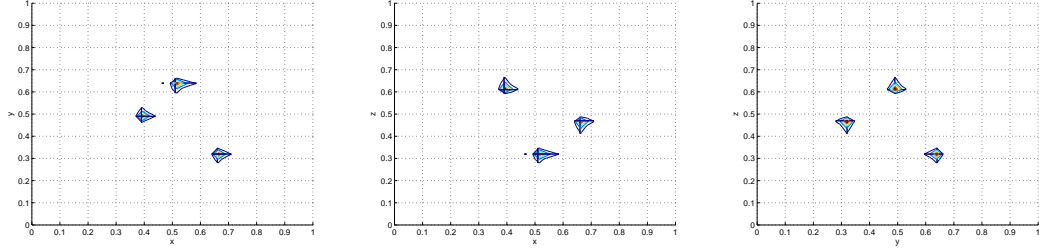


FIG. 5.3 – Shannon sampling approach without truncation, using the asymptotic formula, $z_1 = (0.51, 0.64, 0.32)$, $z_2 = (0.66, 0.32, 0.47)$ and $z_3 = (0.39, 0.49, 0.61)$.

The Shannon sampling approach without truncation

Three imperfections are successfully localized via the Shannon sampling approach without truncation by taking $N_e = 128$, $\eta_{\max} = 64$ - see Figure 5.3.

5.5.2 Numerical Localization of Imperfections in 3D

Based on the calibration runs of the previous section, we now show results of the numerical localization procedure, following the steps laid out in Section 5.4.4. We first present results due to the exact sampling method. We then show the Shannon sampling approach and finally results for “limited-view” data. We finish by giving performance results obtained from the parallel version of the code. In 2D (see [18]) we have also applied various windowing methods for the inverse Fourier transform.

The Shannon sampling approach with truncation

In the first example, we have taken one imperfection with equal abscissa and ordinate. The imperfection is situated at $(0.25, 0.25, 0.25)$ with a radius $\alpha = 0.05$. The conductivity of the medium is equal to 1 and that of the inhomogeneity is equal to 10. The number of data (sampling) points for the calculation of Λ_α is $N_e \times N_e \times N_e = 16 \times 16 \times 16$ and the space step $h = 1/12$. The Fourier inversion is performed with $\eta_{\max} = 19$ and a truncation at $\eta_* = 9$. In Figure 5.4 we compare the numerical result with that obtained from the asymptotic formula, with and without truncation.

The second test case has three imperfections, centered at $z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$,

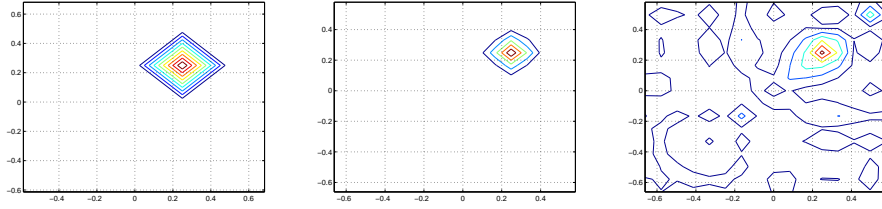


FIG. 5.4 – Localization of a single imperfection at $z = (0.25, 0.25, 0.25)$: asymptotic formula (left), asymptotic formula with truncation (center), numerical localization (right) - views of $x - y$ plane at $z = 0.25$.

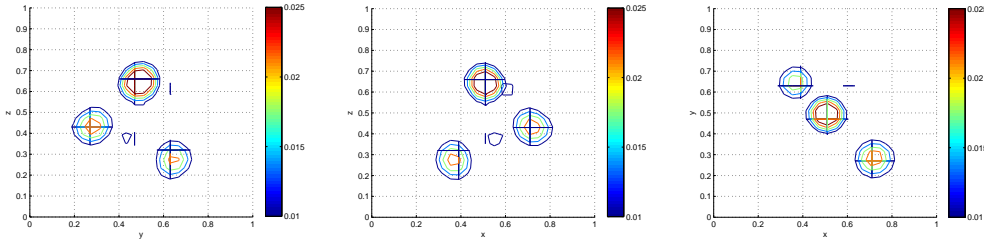


FIG. 5.5 – Localization of three imperfections, centered at $z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$, $z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$, $z_3 = (0.51, 0.47, 0.66)$. Views from the x -, y - and z -directions.

$z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$, $z_3 = (0.51, 0.47, 0.66)$. The number of data (sampling) points for the calculation of Λ_α is $N_e \times N_e \times N_e = 64 \times 64 \times 64$, with $\eta_{\max} = 40$ and a truncation at $\eta_* = 9$. The spatial discretization step is $h = 1/14$, the radius of the imperfections $\alpha = 0.02$ and the conductivity $\gamma_j = 10$. In Figure 5.5 we observe that all three imperfections are well located. A 3D view of the localized imperfections is shown in Figure 5.6.

Finally, we confirm the robustness of our method by a test with four imperfections centered at $z_1 = (0.66, 0.32, 0.47)$, $z_2 = (0.55, 0.71, 0.39)$, $z_3 = (0.39, 0.63, 0.31)$, $z_4 = (0.71, 0.42, 0.74)$. We fix the parameters $N_e = 64$, $\eta_{\max} = 40$ and $\eta_* = 9$. The radius of the imperfections is now $\alpha = 0.01$ and the conductivity $\gamma_j = 10$. In Figures 5.7 and 5.8, we can observe that all four imperfections are well located.

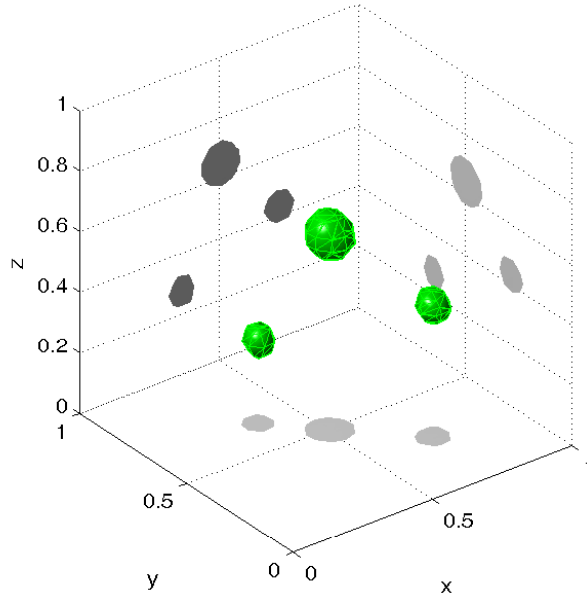


FIG. 5.6 – Localization of three imperfections centered at $z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$, $z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$, $z_3 = (0.51, 0.47, 0.66)$. 3D view.

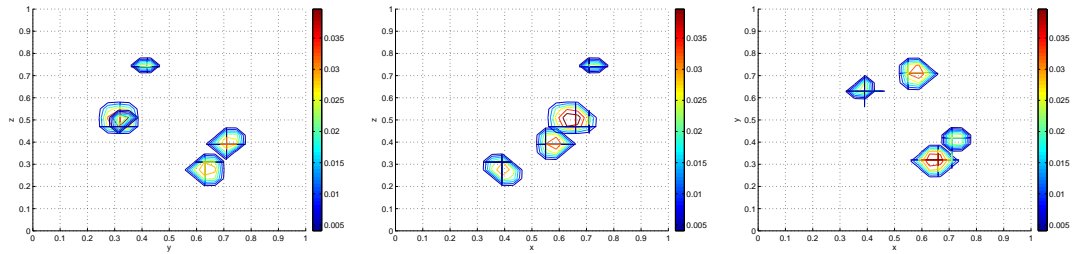


FIG. 5.7 – Localization of four imperfections, centered at $z_1 = (0.66, 0.32, 0.47)$, $z_2 = (0.55, 0.71, 0.39)$, $z_3 = (0.39, 0.63, 0.31)$, $z_4 = (0.71, 0.42, 0.74)$. Views from the x -, y - and z -directions.

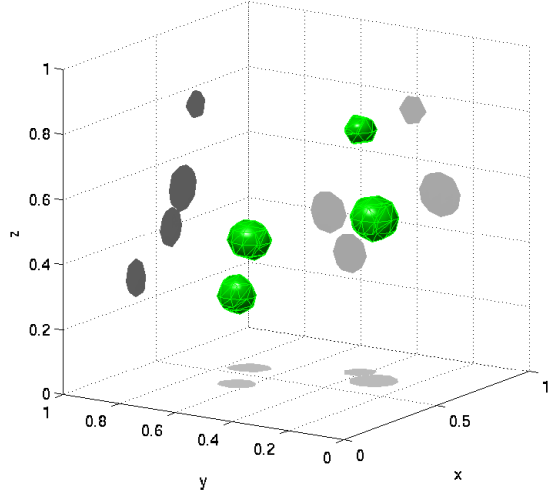


FIG. 5.8 – Localization of four imperfections centered at $z_1 = (0.66, 0.32, 0.47)$, $z_2 = (0.55, 0.71, 0.39)$, $z_3 = (0.39, 0.63, 0.31)$, $z_4 = (0.71, 0.42, 0.74)$. 3D view.

Limited-view data

Since the HUM method permits us to control on a part of the boundary, we can simulate cases where data is given only on subset of $\partial\Omega$. In this case, the causality of the wave equation will imply the need of a longer control time, T , and the eventuality of an increase in the number of iterations required for the HUM algorithm to converge. A detailed presentation of these phenomena can be found in [9].

We consider again the second test of the previous section, using now partial measurements on $\Gamma = \{0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. In other words, measurements are assumed to be available on only three adjacent faces of the cube. In Figure 5.9 we notice that the imperfections are still well located. Relative errors for the localization of the centers are given in Table 5.5.2. These results illustrate both the accuracy and the robustness of the method. Note that the theoretical resolution is $\delta = 1/2\eta_{\max} = 0.0125$.

This result is very important, since it shows the potential of our algorithm for treating more realistic cases.

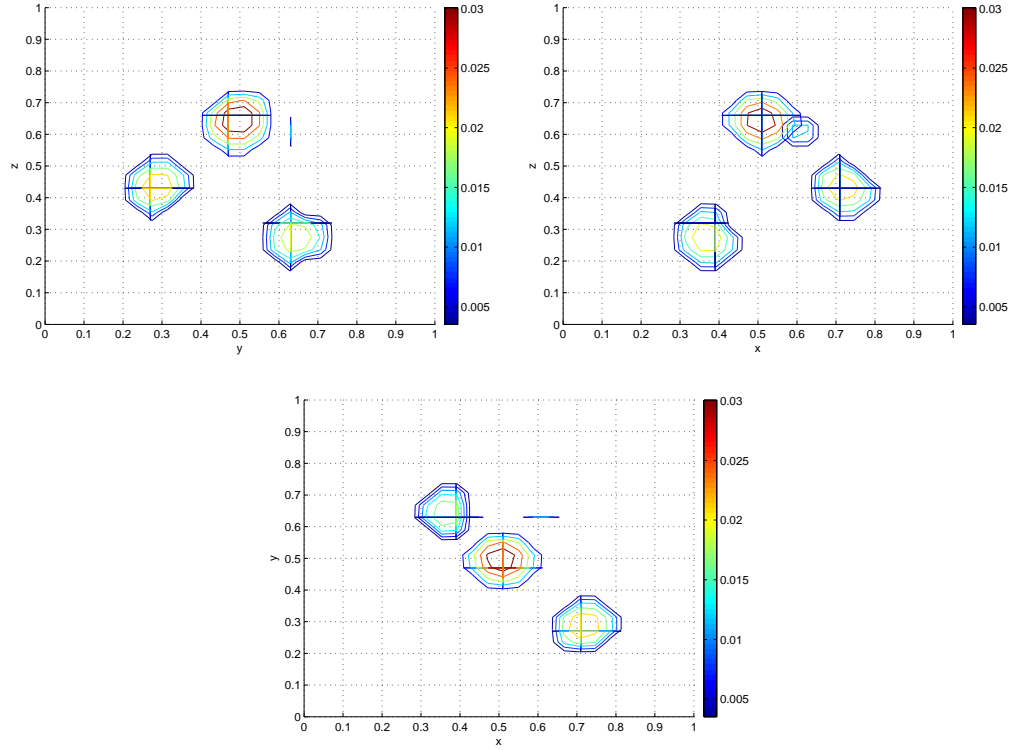


FIG. 5.9 – Localization with limited-view data of three imperfections, centered at $z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$, $z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$, $z_3 = (0.51, 0.47, 0.66)$. Views from the x -, y - and z -directions.

Theoretical centers	Total control	Partial control
$z_1 = (0.39, 0.63, 0.32)$	0.072	0.072
$z_2 = (0.71, 0.27, 0.43)$	0.007	0.007
$z_3 = (0.51, 0.47, 0.66)$	0.033	0.052

TAB. 5.2 – Localization of the centers of three imperfections. Relative localization errors (total control versus partial control).

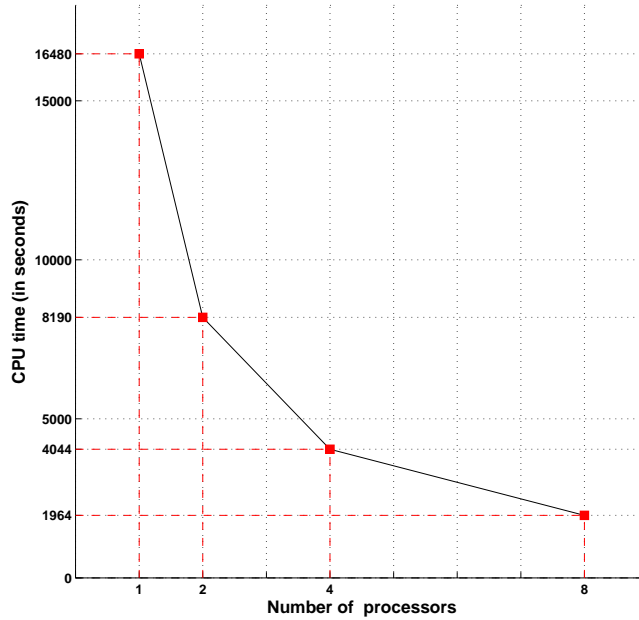


FIG. 5.10 – Performance curve for the localization of one imperfection with parallelization.

Performance curve for parallelized localization

We present in Figure 5.10 a graph of CPU time versus the number of processors. For these 2D computations, we have taken $h = 1/32$ and $N_e = 16$, thus yielding 1024 sample points in $x-y$ space, 135 time steps and 256 sample points in Fourier space.

We remark that we obtain a linear speed-up in the number of processors.

5.6 Conclusion and perspectives

This numerical study has proven the feasibility and the robustness of the dynamic localization procedure proposed by H. Ammari in [3] that is based on the wave equation. The two central parts of this procedure are the computation of a control function, via a geometric control method, and a Fourier inversion of a boundary integral. We have carefully implemented

these two parts. The first using the HUM (Hilbert Uniqueness Method) with a bigrid, finite element in space, Newmark in time, numerical algorithm, and the second using Shannon's theorem, windowing functions and an exact sampling approach. Our implementation of the HUM also permits the study of limited-view data where the observations are available on only a part of the frontier of the object/domain that we are imaging.

The results obtained, in 2D and in 3D, are remarkably accurate. We can localize an arbitrary number of randomly placed imperfections with good precision. Particularly encouraging, are the good results obtained in the limited-view cases.

The perspectives are numerous. First of all, we intend to extend the treatment to general geometries. However, here we need to ensure the applicability of the BiGrid method which requires a structured mesh. If not, we could resort to uniformly controllable approaches, as in [11], or spectral approaches [23], that can both be used with unstructured meshes. A second perspective is to treat coupled photoacoustic [4] and magnetoacoustic [5] approaches in the dynamic regime. There is also the possibility of extending the complete localization procedure to Maxwell's equations, for which the theory exists (see [3]) but the numerical implementation of the geometric control still remains to be done. Finally, a challenging problem is that of localizing imperfections from a single, dynamic measurement recorded at one point. In this case, the object to be imaged must be placed in the interior of a chaotic (or ergodic) cavity - see [25].

Bibliographie

- [1] C. ALVES and H. AMMARI, *Boundary integral formulae for the reconstruction of imperfections of small diameter in an elastic medium*, SIAM J. Applied Math, **62** (2002), pp. 94-106.
- [2] H. AMMARI, *An inverse initial boundary value problem for the wave equation in the presence of imperfections of small volume*, SIAM J. Control Optim., **41** (2002), pp. 1194-1211.
- [3] H. AMMARI, *Identification of small amplitude perturbations in the electromagnetic parameters from partial dynamic boundary measurements*. J. Math. Anal. Appl. **282** (2003), 479-494.
- [4] H. AMMARI, E. BOSSY, V. JUGNON, H. KANG. *Mathematical Modeling in Photo-Acoustic Imaging*. Preprint. 2009
- [5] H. AMMARI, Y. CAPDEBOSCQ, H. KANG AND A. KOZHEMYAK. *Mathematical models and reconstruction methods in magneto-acoustic imaging*. European Journal of Applied Mathematics **20** (2009), 303-317.
- [6] H. AMMARI, P. CALMON AND E. IAKOVLEVA, *Direct elastic imaging of a small inclusion*, SIAM J. Imaging Sci. **1** (2008), pp. 169-187.
- [7] H. AMMARI, S. MOSKOW and M. VOGELIUS, *Boundary integral formulas for the reconstruction of electromagnetic imperfections of small diameter*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **62** (2002), pp. 94-106.
- [8] H. AMMARI, H. KANG, E. KIM, K. LOUATI, AND M. VOGELIUS. *A MUSIC-type algorithm for detecting internal corrosion from electrostatic boundary measurements*. Numerische Mathematik **108** (2008), pp. 501-528.
- [9] M. ASCH and G. LEBEAU, *Geometrical aspects of exact boundary controllability for the wave equation - A numerical study*, ESAIM : control, Optimization and Calculus of Variations, **3** (1998), 163-212.

- [10] M. ASCH and S.M. MEFIRE, *Numerical localization of electromagnetic imperfections from a perturbation formula in three dimensions*, J. Comp. Math., 26 (2008), no. 2, pp 149-195.
- [11] M. ASCH, A. MÜNCH. *Uniformly controllable schemes for the wave equation on the unit square*. J. Optimization Theory and Applic., **143**, 3, pp. 1-23, 2009.
- [12] S. BALAY, K. BUSCHELMAN, W.D. GROPP, D. KAUSHIK, M.G. KNEPLEY, L. CURFMAN MCINNES, B. F. SMITH AND H. ZHANG, *PETSc Web page*, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2001.
- [13] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH. *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*. SIAM J. Control Optim., **30** (1992), pp. 1024-1065.
- [14] D. A. CALHOUN, C. HELZEL, AND R. J. LEVEQUE. *Logically Rectangular Grids and Finite Volume Methods for PDEs in Circular and Spherical Domains*. SIAM Review **50** (2008), 723-752.
- [15] C. CASTRO, S. MICU and A. MUNCH, *Numerical approximation of the boundary control for the wave equation with mixed finite elements in a square*, IMA Journal of Numerical Analysis, **28**, 186-214, 2008.
- [16] D. J. CEDIO-FENGYA, S. MOSKOW and M. VOGELIUS, *Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction*, Inverse Problems, 14 (1998), pp. 553-595.
- [17] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1978.
- [18] J.-B. Duval. *Identification dynamique de petites imperfections*. Ph.D. Thesis. Université de Picardie Jules Verne. 2009.
- [19] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Grad. Stud. Math. 19, AMS, Providence, RI, 1998.
- [20] R. GLOWINSKI, *Ensuring well posedness by analogy ; Stokes problem and boundary control for the wave equation*, Journal of Computational Physics, **103** :189-221, 1992.
- [21] R. GLOWINSKI, C.H. LI and J.-L. LIONS, *A Numerical approach to the exact controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls : Description of the numerical methods*, Japan Journal of Applied Mathematics, **7** (1990), 1-76.

- [22] R. GLOWINSKI and J.-L. LIONS, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, Acta Numerica 1996, 159-333.
- [23] G. Lebeau, M. Nodet. *Experimental Study of the HUM Control Operator for Linear Waves*, to appear in Experimental Mathematics (2009).
- [24] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, Tome 1, Contrôlabilité exacte*, Masson, Paris, 1988.
- [25] Montaldo, G. Palacio, D. Tanter, M. Fink, M. *Building three-dimensional images using a time-reversal chaotic cavity*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, **52**, 9, 1489-1497 (2005)
- [26] A. QUARTERONI, A. VALLI. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer. 1997.
- [27] M. VOGELIUS and D. VOLKOV, *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., **34** (2000), pp. 723-748.
- [28] W. L. WOOD. *Practical time-stepping schemes*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press, Oxford, 1990.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Sommaire

6.1	Conclusions	163
6.2	Perspectives	164

6.1 Conclusions

L'étude numérique effectuée dans les Chapitres 4 et 5 a permis de montrer la faisabilité et la robustesse de la procédure de localisation dynamique proposée par H. Ammari dans [3] qui est basée sur l'équation des ondes. Les deux parties principales de cette procédure sont le calcul d'une fonction contrôle, via une méthode de contrôle géométrique, et une inversion de Fourier d'une intégrale de frontière.

Nous avons soigneusement implémenté ces deux parties. La première en utilisant HUM (Hilbert Uniqueness Method) sur deux grilles avec des éléments finis en espace et un schéma de Newmark en temps, et la seconde en utilisant le théorème de Shannon, des fonctions fenêtrages et une méthode d'échantillonnage exacte. Notre implémentation de HUM permet aussi l'étude de données limitantes où les observations sont disponibles sur une partie de la frontière de l'objet/domaine contenant les imperfections.

Ω	$(0, 1)^2$	$(0, 1)^3$
Ω'	$(0.2, 0.8)^2$	$(0.2, 0.8)^3$
Pas du Maillage	$h = \frac{1}{16}$	$h = \frac{1}{14}$
Pas de temps	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{2}}$
Temps final	$T = 3$	$T = 4$
Imperfections	$z_1 = (0.40, 0.62)$ $z_2 = (0.68, 0.29)$ $z_3 = (0.29, 0.31)$	$z_1 = (0.32, 0.42, 0.73)$ $z_2 = (0.52, 0.63, 0.42)$
Rayons des z_j	$\alpha = 0.03$	$\alpha = 0.03$
Conductivité	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$ $\gamma_3 = 10$	$\gamma_1 = 10$ $\gamma_2 = 10$
Paramètres pour l'échantillonnage	$Ne = 256$ $\eta_{max} = 33$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$	$Ne = 32$ $\eta_{max} = 15$ $\Delta\eta = \frac{2\eta_{max}}{Ne}$
Temps de calcul	8 heures (machine A)	3 jours (machine B)

TAB. 6.1 – Paramètres 2-D et 3-D avec l'approche de Shannon.

Nous donnons à titre indicatif les précisions de localisation et les temps de

calcul d'un test 2-D et 3-D pour trois et deux imperfections, respectivement. L'échantillonnage utilisé pour ces deux tests est basé sur l'échantillonnage de Shannon. Le contrôle de ces deux exemples agit sur toute la frontière du domaine. Le Tableau 6.1 résume les paramètres utilisés et les Tableaux 6.2 et 6.3 les résultats obtenus.

Centres Théoriques	Erreurs relatives
$z_1 = (0.40, 0.62)$	0.0261
$z_2 = (0.68, 0.29)$	0.0464
$z_3 = (0.29, 0.31)$	0.0556

TAB. 6.2 – Localisation des centres de trois imperfections en 2-D. Erreurs relatives de localisation.

Centres Théoriques	Erreurs relatives
$z_1 = (0.32, 0.42, 0.73)$	0.0074
$z_2 = (0.52, 0.63, 0.42)$	0.0045

TAB. 6.3 – Localisation des centres de deux imperfections en 3-D. Erreurs relatives de localisation.

Les multiples résultats obtenus, en 2D et en 3D, sont remarquablement précis. Nous pouvons localiser un nombre arbitraire d'imperfections placées aléatoirement avec une bonne précision. Les bons résultats acquis dans les cas de données limitantes sont particulièrement encourageants.

6.2 Perspectives

Les suites à donner à cette thèse sont nombreuses et variées. Nous allons vous en présenter quelques unes.

1. **Géométries générales** : Nous avons l'intention d'étendre notre procédure d'identification à des géométries plus générales telles que des cercles en 2D ou des sphères en 3D. Toutefois, nous avons besoin ici d'assurer l'applicabilité de la méthode HUM bi-grilles qui requiert un maillage structuré.

2. **Autres approches pour le contrôle géométrique :** Si nous ne pouvons pas appliquer la précédente méthode à notre équation des ondes pour des géométries générales, il nous reste d'autres techniques comme des approches uniformément contrôlables - voir [13] ou des approches spectrales - voir [28]. Ces deux types d'approches peuvent être utilisées avec des maillages non-structurés.
3. **Parallélisation hybride :** Dans le but d'obtenir une parallélisation plus efficace de notre algorithme d'identification, il est possible, dans un premier temps, de paralléliser notre solveur pour l'équation des ondes et, deuxièmement, d'utiliser plutôt des commandes *OpenMP* pour une implémentation parallèle en *Fortran 90*. Une autre possibilité est de coupler des commandes *MPI* et *OpenMP* ou encore de paralléliser le solveur pour l'équation des ondes, ainsi que les boucles en η dans le même programme.
4. **Identification de petites imperfections pour les équations de Maxwell en régime temporel :** L'objet de ce travail, un projet commun entre les universités d'Amiens et de Reims, est de généraliser ces travaux de thèse aux équations de Maxwell en régime temporel, à partir de la théorie établie par H. Ammari dans [4].

Annexe A

Problème d'évolution pour une EDP hyperbolique : l'équation des ondes

Sommaire

A.1	Introduction - Présentation du problème	167
A.2	Formulation variationnelle du problème	168
A.3	Méthodes Numériques dans le cas hyperbolique : Discrétisations en espace et en temps	169
A.3.1	Semi-discrétisation en espace : Approximation par éléments finis	169
A.3.2	Discrétisation complète en espace et en temps	172

A.1 Introduction - Présentation du problème

Cette partie est consacrée à une équation aux dérivées partielles (EDP) de type hyperbolique : l'équation des ondes, qui est le prototype d'une équation hyperbolique. On représente par Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d , avec $d = 2$ ou 3 , et on désigne par $\partial\Omega = \Gamma$ sa frontière. On considère le problème aux limites suivant pour l'équation d'ondes, où T représente le temps final fixé ($T > 0$). Pour $d = 2$ et $d = 3$, on a respectivement $\vec{x} = (x, y)$ et $\vec{x} = (x, y, z)$.

trouver une fonction u telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u(\vec{x}, t) - \operatorname{div}(\gamma(\vec{x}) \operatorname{grad} u(\vec{x}, t)) \\ = f(\vec{x}, t) & \forall (\vec{x}, t) \in \Omega \times]0, T[, \\ u(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) & \forall (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(\vec{x}, t = 0) = u_0(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \Omega, \\ \partial_t u(\vec{x}, t = 0) = u_1(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \Omega, \end{array} \right. \quad (\text{A.1.1})$$

avec $f \in L^2(L^2(\Omega);]0, T[)$, $g \in H_0^1(\partial\Omega)$ où $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. On suppose que $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma(\vec{x}) > 0$, $\forall \vec{x} \in \Omega$, et que $u_0, u_1 \in H^1(\Omega)$. En outre, on considère la fonction g comme dérivable en temps et vérifiant des conditions de compatibilité avec u_0 et u_1 .

Le problème (A.1.1) est un problème avec une condition de Dirichlet non homogène. Afin de pouvoir travailler par la suite dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, on procède à un relèvement dans $H^1(\Omega)$ de la fonction g . Autrement dit, on décompose u en deux fonctions :

$$u = \tilde{u} + u_g, \quad (\text{A.1.2})$$

où $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, $u_g \in H^1(\Omega)$ telle que $u_g(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) \forall \vec{x} \in \partial\Omega, \forall t \in]0, T[$. On a alors :

$$\tilde{u}(\vec{x}, t) = u(\vec{x}, t) - u_g(\vec{x}, t) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega, \forall t \in]0, T[.$$

Le problème (A.1.1) devient alors,

trouver, pour tout $t > 0$, $\tilde{u}(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 \tilde{u}(\vec{x}, t) - \operatorname{div}(\gamma(\vec{x}) \operatorname{grad} \tilde{u}(\vec{x}, t)) \\ + \partial_t^2 u_g(\vec{x}, t) - \operatorname{div}(\gamma(\vec{x}) \operatorname{grad} u_g(\vec{x}, t)) \\ = f(\vec{x}, t) & \forall (\vec{x}, t) \in \Omega \times]0, T[, \\ \tilde{u}(\vec{x}, t) = 0 & \forall (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[, \\ \tilde{u}(\vec{x}, t = 0) = u_0(\vec{x}) - u_g(\vec{x}, 0) & \forall \vec{x} \in \Omega, \\ \partial_t \tilde{u}(\vec{x}, t = 0) = u_1(\vec{x}) - \partial_t u_g(\vec{x}, 0) & \forall \vec{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (\text{A.1.3})$$

Dans un premier temps, nous présenterons la formulation variationnelle du problème (A.1.3), puis nous donnerons sa discrétisation et les méthodes numériques utilisées pour sa résolution.

A.2 Formulation variationnelle du problème

La formulation variationnelle du problème (A.1.3), s'obtient en multipliant la première équation de (A.1.3) par une fonction test v et en intégrant par partie grâce à la formule de Green ¹. On a

trouver, $\forall t > 0$, $\tilde{u}(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) v(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\Omega} \gamma(\vec{x}) \nabla \tilde{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla v(\vec{x}) d\vec{x} \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}(\vec{x}, t) v(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\Omega} \gamma(\vec{x}) \nabla u_g(\vec{x}, t) \cdot \nabla v(\vec{x}) d\vec{x} = \\ \int_{\Omega} f(\vec{x}, t) v(\vec{x}) d\vec{x} & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \tilde{u}(\vec{x}, t) = 0 & \forall (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[, \\ \tilde{u}(\vec{x}, t = 0) = u_0(\vec{x}) - u_g(\vec{x}, 0) & \forall \vec{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(\vec{x}, t = 0) = u_1(\vec{x}) - \frac{\partial u_g}{\partial t}(\vec{x}, 0) & \forall \vec{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (\text{A.2.4})$$

Cette formulation variationnelle possède une et une seule solution via le théorème de Lax-Milgram. La fonction u_g étant connue, il est facile une fois (A.2.4) résolue de déterminer u grâce à (A.1.1).

¹ **Formule de Green** : $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

A.3 Méthodes Numériques dans le cas hyperbolique :

Discrétisations en espace et en temps

Dans cette section, nous montrons que la méthode des éléments finis est bien adaptée à la résolution numérique de l'équation des ondes : on combine des éléments finis pour la discrétisation spatiale et des différences finies pour la discrétisation temporelle.

A.3.1 Semi-discrétisation en espace : Approximation par éléments finis

On réalise un maillage du domaine Ω en éléments finis quadrangulaires Q_1 . Soient ω_i les fonctions de base associées aux éléments finis choisis. Notons \mathbf{I} l'ensemble des indices des noeuds internes du maillage correspondant à une valeur inconnue de la solution u , c'est-à-dire ici l'ensemble des noeuds n'appartenant pas à Γ ($=\partial\Omega$) et N_I est le cardinal de \mathbf{I} . Notons \mathbf{J} l'ensemble des indices des noeuds sur le bord du maillage correspondant à une valeur connue de la solution, donc ici appartenant à Γ .

On introduit le sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ suivant :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } v_h|_K \in Q_1, \forall K \in T_h\}$$

Un élément v_h de V_h s'écrira :

$$\forall \vec{x} \in \Omega, v_h(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_I} v_h(\vec{x}_i) \omega_i(\vec{x}).$$

On notera que l'ensemble des fonctions de base constitue une base de V_h . C'est un sous-espace de dimension finie associé à $H_0^1(\Omega)$.

Le problème semi-discret en espace associé à (A.2.4) est introduit ci-dessous :

Pour tout $t \in]0, T[$, trouver $\tilde{u}_h(\cdot, t) \in V_h$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \partial_t^2 \tilde{u}_h(\vec{x}, t) v_h(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\Omega} \gamma(\vec{x}) \nabla \tilde{u}_h(\vec{x}, t) \cdot \nabla v_h(\vec{x}) d\vec{x} \\ + \int_{\Omega} \partial_t^2 u_{g,h}(\vec{x}, t) v_h(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\Omega} \gamma(\vec{x}) \nabla u_{g,h}(\vec{x}, t) \cdot \nabla v_h(\vec{x}) d\vec{x} \\ = \int_{\Omega} f(\vec{x}, t) v_h(\vec{x}) d\vec{x} \\ \tilde{u}_h(\vec{x}, t) = 0 \\ \tilde{u}_h(\vec{x}, t = 0) = u_0(\vec{x}) - u_{g,h}(\vec{x}, 0) \\ \partial_t \tilde{u}_h(\vec{x}, t = 0) = u_1(\vec{x}) - \partial_t u_{g,h}(\vec{x}, 0) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall v_h \in V_h, \\ \forall (\vec{x}, t) \in \partial\Omega \times]0, T[, \\ \forall \vec{x} \in \Omega, \\ \forall \vec{x} \in \Omega \end{array} \quad (\text{A.3.5})$$

On peut décomposer la solution approchée u_h ainsi :

$$\forall \vec{x} \in \Omega, \forall t > 0, \quad u_h(\vec{x}, t) = \tilde{u}_h(\vec{x}, t) + u_{g,h}(\vec{x}, t).$$

Nous avons l'écriture suivante dans la base des ω_i

$$\tilde{u}_h(\vec{x}, t) = \sum_{i \in \mathbf{I}} u_{h,i}(t) \omega_i(\vec{x})$$

et

$$u_{g,h}(\vec{x}, t) = \sum_{i \in \mathbf{J}} g(\vec{x}_i, t) \omega_i(\vec{x}).$$

On en déduit ensuite

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_h}{\partial t^2}(\vec{x}, t) = \sum_{i \in \mathbf{I}} u_i''(t) \omega_i(\vec{x}).$$

Ce relèvement présente deux avantages :

1) La solution cherchée u_h et la solution calculée \tilde{u}_h prennent les mêmes valeurs aux points où la solution u est inconnue. Il n'y a donc pas de transformation *a posteriori* à effectuer sur les résultats.

2) Les conditions aux limites ne produisent qu'une modification limitée du système linéaire qui n'intervient que sur quelques composantes du second membre.

En intégrant dans la formulation variationnelle tous ces éléments, on obtient en définitive le problème approché s'écrivant sous la forme d'un système différentiel linéaire de N_I équations à N_I fonctions inconnues du temps u_i .

Trouver pour tout $t \in]0, T[$, et $\forall j \in \mathbf{I}$, les fonctions $u_j(t)$ telles que, $\forall i \in \mathbf{I}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in \mathbf{I}} \left(\left(\int_{\Omega} \omega_j \omega_i d\vec{x} \right) u_j''(t) + \left(\int_{\Omega} \gamma \nabla \omega_j \cdot \nabla \omega_i d\vec{x} \right) u_j(t) \right) \\ = \int_{\Omega} f \omega_i d\vec{x} - \sum_{j \in \mathbf{J}} \left(\int_{\Omega} \gamma \nabla \omega_j \cdot \nabla \omega_i d\vec{x} \right) g(\vec{x}_j, t) \\ - \sum_{j \in \mathbf{J}} \left(\int_{\Omega} \omega_j \omega_i d\vec{x} \right) \partial_t^2 g(\vec{x}_j, t) \\ u_i(0) \text{ et } u_i'(0) \text{ donnés } \forall i \in \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (\text{A.3.6})$$

Ce qui donne matriciellement :

Trouver pour tout $t \in [0, T]$, le vecteur $U(t)$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} MU''(t) + KU(t) = B \\ U(0) \text{ et } U'(0) \text{ donnés} \end{array} \right. \quad (\text{A.3.7})$$

avec M la matrice de masse de coefficients

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \omega_j(\vec{x}) \omega_i(\vec{x}) d\vec{x}$$

K la matrice de raideur de coefficients

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \gamma \nabla \omega_j(\vec{x}) \nabla \omega_i(\vec{x}) d\vec{x}$$

et B le vecteur second membre de coefficients

$$B_i = \int_{\Omega} f(\vec{x}_i, t) \omega_i d\vec{x} - \sum_{j \in \mathbf{J}} K_{ij} g(\vec{x}_j, t) - \sum_{j \in \mathbf{J}} M_{ij} \partial_t^2 g(\vec{x}_j, t).$$

A.3.2 Discrétisation complète en espace et en temps

Dans cette sous-section, nous appliquerons différents schémas en temps pour obtenir une discrétisation complète du problème.

Soient $\Delta t > 0$ le pas de temps et $\{t^n\}_{0 \leq n \leq N}$ une subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N+1$ points. Plus précisément, on pose $N = \frac{T}{\Delta t}$, $t^n = n\Delta t$, $\forall 0 \leq n \leq N$, soit $t^N = T$. Notons $U(t^n) = U^n$. On identifiera par la suite Δt comme étant le pas de discrétisation en temps de (A.2.4).

On utilise les approximations numériques suivantes :

$$U''(t) \approx \frac{U(t + \Delta t) - 2U(t) + U(t - \Delta t)}{\Delta t^2},$$

$$U'(t) \approx \frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t}.$$

Schéma explicite du second ordre

En appliquant les approximations ci-dessus à (A.3.7), on obtient le schéma explicite suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ et } U^1 \text{ donnés} \\ MU^{n+1} = 2MU^n - MU^{n-1} - \Delta t^2 KU^n + \Delta t^2 B \end{array} \right. \quad (\text{A.3.8})$$

Remarquons que la dépendance du second membre B par rapport au temps ne poserait pas de problème difficile.

La résolution complète du problème approché nécessite la résolution d'un système matriciel à chaque pas de temps. Nous avons trois possibilités :

1) On factorise une fois pour toutes en début de calcul la matrice de masse M qui est symétrique définie positive sous forme LL^T et on a deux systèmes triangulaires à résoudre à chaque pas de temps.

2) On effectue un gradient conjugué pour $MU = F$ à chaque pas de temps, où F est le second membre connu de la relation (A.3.8).

3) On calcule la matrice de masse de façon approchée sous forme d'une matrice de masse condensée diagonale (lumping). Ce qui est facile pour des éléments P_1 ou Q_1 . L'inversion de la matrice de masse est alors immédiate et on obtient un schéma numérique explicite.

Schéma implicite

Le choix d'une discrétisation implicite en temps conduit au schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ et } U^1 \text{ donnés} \\ (M + \Delta t^2 K)U^{n+1} = 2MU^n - MU^{n-1} + \Delta t^2 B \end{array} \right. \quad (\text{A.3.9})$$

Dans ce cas, que l'on ait ou non condensé la matrice de masse sous forme diagonale, on doit résoudre un système matriciel. Ce que l'on fait soit en factorisant une fois pour toute au début du calcul, la matrice $M + \Delta t^2 K$ qui est symétrique définie positive, sous forme LL^T puis en résolvant à chaque pas de temps deux systèmes triangulaires, soit en utilisant une méthode de gradient conjugué pour $(M + \Delta t^2 K)U = F$ où F est le second membre connu de la relation (A.3.9).

Schéma de Newmark

On peut, pour plus de généralités, utiliser le schéma de *Newmark* pour la discrétisation en temps. On aboutit au schéma suivant, qui est équivalent au schéma donné à la sous-Section 4.2.1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^0 \text{ et } U^1 \text{ donnés} \\ (M + \beta \Delta t^2 K)U^{n+1} = (2M - \Delta t^2 K(1 - 2\beta + \delta))U^n \\ -(M + \Delta t^2 K(\beta - \delta))U^{n-1} + \Delta t^2 B \end{array} \right. \quad (\text{A.3.10})$$

où

$$B = \beta b(t^{n+1}) + (1 - 2\beta + \delta)b(t^n) + (\beta - \delta)b(t^{n-1})$$

avec b le second membre du système matriciel.

Ensuite, on procède comme pour les précédents schémas, c'est-à-dire soit on factorise une fois pour toute au début du calcul la matrice $M + \beta \Delta t^2 K$ (symétrique définie positive), sous forme LL^T puis on résout à chaque pas de temps deux systèmes triangulaires, soit on utilise une méthode de gradient conjugué pour $(M + \beta \Delta t^2 K)U = F$ où F est le second membre connu de la relation (A.3.10).

Remarque : Lorsque $\beta = \delta = 0$, on obtient le schéma explicite et quand $\beta = \delta = 1$, on retrouve le schéma implicite.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'*ordre de convergence* et à la *stabilité* du schéma de Newmark (A.3.10) en nous basant sur des études faites dans [1] et [38].

Ordre de convergence

Introduisons l'erreur de troncature

$$E(U) = M \left(\frac{U(t + \Delta t) - 2U(t) + U(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} \right) \\ + K \left(\beta U(t + \Delta t) + (1 + \delta - 2\beta)U(t) + (\beta - \delta)U(t - \Delta t) \right) \\ - \left(\beta b(t + \Delta t) + (1 + \delta - 2\beta)b(t) + (\beta - \delta)b(t - \Delta t) \right)$$

En effectuant un développement de Taylor en $t = t^n$, on établit que

$$E(U) = MU'' + KU - b + \Delta t \delta (KU' - b') + (\Delta t)^2 \left(\beta - \frac{\delta}{2} \right) (KU'' - b'') + \frac{(\Delta t)^2}{12} MU^{(4)} \\ + \frac{(\Delta t)^3}{6} \delta (KU^{(3)} - b^{(3)}) + O((\Delta t)^4).$$

Si U est solution de l'équation (A.3.8), on a

$$MU'' + KU - b = 0$$

et

$$KU'' - b'' = -MU^{(4)}.$$

Ainsi,

$$E(U) = \Delta t \delta (KU' - b') - (\Delta t)^2 \left(\beta - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{12} \right) MU^{(4)} + \frac{(\Delta t)^3}{6} \delta (KU^{(3)} - b^{(3)}) + O((\Delta t)^4).$$

On vérifie aisément sur l'expression de $E(U)$ que le schéma de Newmark est d'ordre 1 pour $\delta \neq 0$, d'ordre 2 pour $\delta = 0$ et $\beta \neq \frac{1}{6}$ et d'ordre (au moins) 4 si $\delta = 0$ et $\beta = \frac{1}{6}$.

Remarque : Cas particuliers

- $\delta = 0$ et $\beta = \frac{1}{4}$, c'est la méthode des accélérations constantes (trapèze),
- $\delta = 0$ et $\beta = \frac{1}{6}$, c'est la méthode des accélérations linéaires,
- $\delta = 0$ et $\beta = 0$, c'est la méthode des différences centrées, qui peut-être explicite,
- $\delta = 0$ et $\beta = \frac{1}{12}$, c'est la méthode de Fox-Goodwin.

Stabilité

On se contente d'étudier la condition nécessaire de stabilité de *Von Neumann*.

Lemme 8. *On considère le schéma de Newmark (A.3.10). Si $\delta < 0$, il est toujours instable. Supposons désormais que $\delta \geq 1/2$. La condition nécessaire de stabilité de Von Neumann est toujours vérifiée si $\beta \geq \frac{(1+\delta)^2}{4}$, tandis que, si $\beta < \frac{(1+\delta)^2}{4}$, elle n'est satisfaite que sous la condition CFL*

$$\max_i \lambda_i (\Delta t)^2 < \frac{4}{(1 + \delta)^2 - 4\beta}, \quad (\text{A.3.11})$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $KU = \lambda MU$.

Remarque : On ne reconnaît pas immédiatement dans (A.3.11) la condition *CFL* (Courant-Friedrichs-Lewy) usuelle $\Delta t \leq Ch$ pour l'équation des ondes. En fait, on peut montrer que, si le maillage T_h est uniformément régulier au sens où toute maille contient une boule de rayon Ch (avec $C > 0$ indépendant de la maille), alors on a effectivement $\max_i \lambda_i = O(h^{-2})$. Contrairement au cas parabolique, la condition *CFL* (A.3.11) n'est pas trop sévère puisqu'on peut prendre des pas de temps Δt de l'ordre du pas d'espace h . Cependant, quitte à inverser un système linéaire (pour pouvoir calculer U^{n+1} en fonction de U^n , U^{n-1} et du second membre), autant utiliser le schéma de Newmark pour des valeurs de δ et β telles qu'il soit inconditionnellement stable. Le seul cas intéressant pour un schéma stable sous condition *CFL* est le cas où il est *explicite*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de système linéaire à résoudre à chaque pas de temps. En effet, un schéma explicite nécessite très peu d'opérations par pas de temps et conduit donc à des calculs peu coûteux. La seule possibilité pour le schéma de Newmark d'être explicite est que $\beta = 0$ et que la matrice de masse M soit diagonale grâce à des formules d'intégration approchée. Ce schéma explicite est souvent utilisé en pratique avec $\delta = 0$.

Condition de stabilité		Pas de temps critique
inconditionnelle	$\beta \geq 0.25$ et $\delta \geq 0$	$\Delta t_c = \infty$
conditionnelle	$2\beta \leq \delta - \frac{1}{2}$ et $\delta \geq 0$	$\Delta t_c = \frac{T_{min}}{2\pi\sqrt{\gamma/2-\beta}}$

TAB. A.1 – Conditions de stabilité de la méthode d'intégration temporelle de Newmark.

En conclusion, la méthode de Newmark correspondant à $\beta \geq \frac{1}{4}$ et $\delta = 0$ est inconditionnellement stable et d'ordre 2. Elle fournit en général une bonne approximation des solutions des problèmes d'ordre 2 en t : la méthode la plus utilisée est relative au cas limite $\beta = \frac{1}{4}$, $\delta = 0$. Lorsque la solution u n'est pas assez régulière et que l'on résout le problème dans un grand intervalle de temps $[0, T]$, la solution approchée u_h présente dans ce cas des oscillations parasites qui ne sont pas amorties. Il est préférable d'utiliser la méthode de Newmark avec $\beta \geq \frac{(1+\delta)^2}{4}$, $\delta > 0$ convenable. Cette méthode n'est plus que d'ordre 1 mais introduit une propriété d'amortissement de l'erreur au cours du temps qui se traduit par une diminution notable des oscillations parasites mentionnées plus haut. Le choix du coefficient δ convenable dépend dans une large mesure du problème considéré.

Enfin la méthode de Newmark correspondant à $\beta = \delta = 0$ est très utilisée en pratique lorsque la matrice de masse M est diagonale. En effet, la méthode obtenue est explicite et la condition de stabilité associée n'introduit pas comme dans le cas parabolique une restriction trop sévère sur le pas de temps Δt .

Remarque : Dans le problème de l'équation des ondes (progressives *i.e.* $0 \rightarrow T$), on doit trouver le vecteur U^{n+1} . Par contre dans l'équation des ondes (rétrogrades en temps *i.e.* $T \rightarrow 0$), on doit trouver le vecteur U^{n-1} . Par conséquent, on obtient la même formulation variationnelle du problème et il n'y a que le schéma de Newmark qui est modifié comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver pour tout } n \in [0, N], \text{ la suite de vecteurs } U^n \text{ tels que :} \\ U^N \text{ et } U^{N+1} \text{ donnés} \\ (M + (\beta - \delta)\Delta t^2 K)U^{n-1} = (2M - \Delta t^2 K(1 - 2\beta + \delta))U^n \\ -(M + \Delta t^2 K\beta)U^{n-1} + \Delta t^2 B \end{array} \right. \quad (\text{A.3.12})$$

où $B = \beta b(t^{n+1}) + (1 - 2\beta + \delta)b(t^n) + (\beta - \delta)b(t^{n-1})$, avec b le second membre du système matriciel.

Bibliographie

- [1] G. ALLAIRE, *Analyse numérique et Optimisation*, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2005.
- [2] C. ALVES and H. AMMARI, *Boundary integral formulae for the reconstruction of imperfections of small diameter in an elastic medium*, SIAM J. applied Math, **62** (2001), pp. 94-106.
- [3] H. AMMARI, *An inverse initial boundary value problem for the wave equation in the presence of imperfections of small volume*, SIAM J. Control Optim., **41** (2002), pp. 1194-1211.
- [4] H. AMMARI, *Identification of small amplitude perturbations in the electromagnetic parameters from partial dynamic boundary measurements*, J. Math. Anal. Appl. **282** (2003), pp. 479-494.
- [5] H. AMMARI, E. IAKOVLEVA and D. LESSELIER, *A MUSIC algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency*, Multiscale Model. Simul., **3**, (2005), pp. 597-628.
- [6] H. AMMARI and H. KANG, *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, Lecture Notes in Mathematics, v. 1846, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [7] H. AMMARI, H. KANG, E. KIM, K. LOUATI and M. VOGELIUS, *A MUSIC-type algorithm for detecting internal corrosion from electrostatic boundary measurements*, Numerische Mathematik, 108 (2008), pp. 501-528.
- [8] H. AMMARI, S. MOSKOW and M. VOGELIUS, *Boundary integral formulas for the reconstruction of electromagnetic imperfections of small diameter*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 62 (2002), pp. 94-106.
- [9] H. AMMARI, M.S. VOGELIUS and D. VOLKOV, *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of*

- imperfections of small diameter II.*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **9**, (2003), pp. 49-66.
- [10] M. ASCH, M. DARBAS and J.-B. DUVAL, *Numerical solution of an inverse initial boundary value problem for the wave equation in the presence of imperfections of small volume*, submitted.
- [11] M. ASCH and G. LEBEAU, *Geometrical aspects of exact boundary controllability for the wave equation - A numerical study*, ESAIM : control, Optimization and Calculus of Variations, **3** (1998), 163-212.
- [12] M. ASCH and S.M. MEFIRE, *Numerical localization of electromagnetic imperfections from a perturbation formula in three dimensions*, J. Comp. Math., 26 (2008), no. 2, pp 149-195.
- [13] M. ASCH and A. MÜNCH, *Uniformly controllable schemes for the wave equation on the unit square*, J. Optimization Theory and Applic., **143**, 3, pp.1-23, 2009.
- [14] O. AXELSSON and V.A. BARKER, *Finite element solution of boundary value problems, Theory and Computation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1984.
- [15] S. BALAY, K. BUSCHELMAN, W.D. GROPP, D. KAUSHIK, M.G. KNEPLEY, L. CURFMAN MCINNES, B.F. SMITH and H. ZHANG, *PETSC Web page*, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2001.
- [16] C. BARDOS, G. LEBEAU and J. RAUCH, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., 30 (1992), pp. 1024-1065.
- [17] C. CASTRO, S. MICU and A. MÜNCH, *Numerical approximation of the boundary control for the wave equation with mixed finite elements in a square*, IMA Journal of Numerical Analysis, **28**, 186-214, 2008.
- [18] D. J. CEDIO-FENGYA, S. MOSKOW and M. VOGELIUS, *Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction*, Inverse Problems, 14 (1998), pp. 553-595.
- [19] N. CHANDRACHODAN, *Understanding FFT windows*, Application Note AN014, Indian Institute of Technology Madras, 2007, 7 p., available on : http://www.ee.iitm.ac.in/~nitin/_media/ee462/fftwindows.pdf?id=jan07.
- [20] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1978.

- [21] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1990.
- [22] DONNA A. CALHOUN, C. HELZEL and R.J. LEVEQUE, *Logically Rectangular Grids and Finite Volume Methods for PDEs in Circular and Spherical Domains*, SIAM Review, 50 (1998), pp. 723-752.
- [23] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Grad. Stud. Math. 19, AMS, Providence, RI, 1998.
- [24] M. FINK, *Time reversal of ultrasonic fields - Part 1 : Basic principles*, IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, **39**(5) (1992), pp. 555-566.
- [25] R. GLOWINSKI, *Ensuring well posedness by analogy; Stokes problem and boundary control for the wave equation*, Journal of Computational Physics, 103 :189-221, 1992.
- [26] R. GLOWINSKI, C.H. LI and J.-L. LIONS, *A Numerical approach to the exact controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls : Description of the numerical methods*, Japan Journal of Applied Mathematics, **7** (1990), 1-76.
- [27] R. GLOWINSKI and J.-L. LIONS, *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*, Acta Numerica 1996, 159-333.
- [28] G. LEBEAU and M. NODET, *Experimental study of the HUM control operator for linear waves*, Experimental Mathematics, (2009).
- [29] J.-L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, Tome 1, Contrôlabilité exacte*, Masson, Paris, 1988.
- [30] F. JEDRZEJEWSKI, *Introduction aux méthodes numériques*, Springer, Deuxième édition, Paris, 2006.
- [31] B. LUCQUIN et O. PIRONNEAU *Introduction au calcul scientifique*, Masson, Paris, 1996.
- [32] J.C. NEDELEC, *Notions sur les techniques d'éléments finis*, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Mathématiques et applications, Ellipses, 1991.
- [33] S. NICAISE, *Boundary observability of the numerical approximation of Maxwell's system in a cube*, Collectanea Mat. Barcelona, **59**, (2008), pp. 27-52.

- [34] S. NICAISE, *Exact boundary controlability of Maxwell's equation in heterogeneous media and application to an inverse source problem*, SIAM J. Control Optim. **38** (2000), pp. 1145-1170.
- [35] E. ORAN BRIGHAM, *The fast Fourier transform and its applications*, Prentice-Hall, Signal Processing Series, 1988.
- [36] A. QUARTERONI, R. SACCO et F. SALERI, *Méthodes numériques - Algorithmes, analyse et applications*, Springer, Milan, 2007.
- [37] A. QUARTERONI, A. VALLI, *Numerical Approximation of Partial Differential equations*, Springer, 1997.
- [38] P.A. RAVIART and J.-M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [39] M. VOGELIUS and D. VOLKOV, *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 34 (2000), pp. 723-748.
- [40] D. VOLKOV, *Numerical methods for locating small dielectric inhomogeneities*, Wave Motion, 38 (2003), pp. 189-206.
- [41] D. VOLKOV, *An inverse problem for Maxwell's equations*, Ph.D. thesis in mathematics, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, 2001, 159 p., available on : <http://users.wpi.edu/~darko/RESEARCH/theThesis.pdf>
- [42] W. L. WOOD, *Practical time-stepping schemes*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [43] M. YAMAMOTO, *Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method*, Inverse Problems, 11 (1995), pp. 481-496.
- [44] E. ZUAZUA, *Propagation, observation and control of waves approximated by finite difference methods*, SIAM Review 47, 2 (2005), pp. 197-243.