



HAL
open science

Motifs de Tate mixtes et éclatements à la MacPherson-Procesi ; Une application aux valeurs zêta multiples motiviques

Ismaël Soudères

► **To cite this version:**

Ismaël Soudères. Motifs de Tate mixtes et éclatements à la MacPherson-Procesi ; Une application aux valeurs zêta multiples motiviques. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2009. Français. NNT: . tel-00430629

HAL Id: tel-00430629

<https://theses.hal.science/tel-00430629>

Submitted on 9 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS DIDEROT - PARIS 7
UFR de Mathématiques
Institut de mathématiques de Jussieu
École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED386)

—
THÈSE DE DOCTORAT
Discipline : Mathématiques
en vue de l'obtention du diplôme de docteur en mathématiques
de l'université de Paris Diderot - Paris 7

Ismaël SOUDÈRES

Motifs de Tate mixtes et éclatements à la MacPherson-Procesi

Une application aux valeurs zêta multiples motiviques

Soutenue le 7 décembre 2009 devant le jury composé de :

Francis BROWN
Pierre CARTIER
Jacky CRESSON
Benjamin ENRIQUEZ
Leila SCHNEPS (directeur)
Zdzislaw WOJTKOWIAK (rapporteur)

Rapporteurs :

M. Hidekazu FURUSHO
M. Zdzislaw WOJTKOWIAK

*À mon père, inaltérable combattant
du droit des peuples et des individus
à disposer d'eux-mêmes*

*Nous attendons. Nous nous ennuyons. Non, ne proteste pas, nous
nous ennuyons ferme, c'est incontestable. Bon. Une diversion se
présente et que faisons-nous ? Nous la laissons pourrir. Allons,
au travail.*

Samuel Becket, En attendant Godot

Remerciements

Quand un thésard en arrive là, c'est en général bien engagé mais cela n'enlève rien à la difficulté ni au plaisir de l'exercice. Avant de commencer, je voudrais présenter mes excuses à celles et ceux que je vais oublier, à celles et ceux que je ne saurai pas remercier comme il se doit. Enfin il y a celles et ceux pour qui les mots ne suffisent pas, aurais-je des livres et des livres pour le leur dire.

Je remercie tout d'abord Leïla sans qui cette thèse n'existerait pas. En effet dès notre première rencontre, après qu'elle m'a donné à lire *l'esquisse d'un programme*, j'ai su que je souhaitais travailler avec elle. Petit à petit, lors de mon mémoire de D.E.A., Leïla m'a introduit aux différentes théories qu'abordent ma thèse : espace de module de courbes, valeurs zêta multiples, produits de mélanges, etc. Ses encouragements à continuer, à rédiger, m'ont guidé et, petit à petit, j'ai découvert et appris le métier de chercheur. Ceux qui me connaissent savent que, parlant de Leïla, Pierre n'est jamais très loin dans mon esprit. En effet, Pierre, par son approche très différente des mathématiques, m'a apporté une autre aide et une autre vision de mon travail. Les remarques de Pierre m'ont régulièrement permis, parfois après de nombreux efforts, d'avancer de façon importante dans ma recherche. Je me souviendrai toujours de quelque chose comme « en utilisant une suite exacte longue ça doit découler simplement du yoga des poids ». Leïla m'a appris à poser des rails avant d'avancer et que les grands murs sont constitués de petites briques : savoir faire tourner un lemme général sur un exemple est une bonne façon de savoir si on a compris. Pierre m'a appris le difficile exercice qu'est la contemplation. Je n'arrive d'ailleurs toujours pas à « contempler » comme il faut, mais je m'entraîne. Enfin j'ai toujours beaucoup apprécié Leïla et Pierre pour leurs conversations non mathématiques que ce soit en déplacement, lors de quelques dîners ou dans les couloirs de Chevaleret.

Je suis reconnaissant à M. Cartier d'avoir suivi, surveillé et encouragé mon travail depuis notre première rencontre lors de la soutenance de mon D.E.A. Sa lecture attentive de mes travaux m'a permis d'écrire et de penser des choses justes. Les idées fausses sont dures à perdre et les remarques et les réflexions de M. Cartier m'ont permis de sortir de quelques ornières, de quelques crevasses. La clarté de ses explications, toujours liant les problèmes et les objets les uns aux autres, m'ont permis non seulement de mieux comprendre ce que je faisais mais aussi d'embrasser un champ beaucoup plus grand, de comprendre mon travail de façon plus large.

Je n'oublie pas Francis et Herbert. Francis a été une oreille attentive et toujours disponible. Ses remarques (« Tu as une preuve de ça parce que cela ne me semble pas du tout évident ? ») ont été précieuses ainsi que les nombreuses pistes et explications qu'il m'a fournies. C'est, en particulier, grâce à lui que j'ai compris les structures de Hodge mixtes. Merci aussi à Herbert pour ce séjour à Durham où mon travail a pris de la consistance. Merci pour ces heures dans ton bureau où, en essayant de t'expliquer, je mesurais mon incompréhension ; pour cette patience et ces bonnes questions qui permettent d'avancer. Grâce à Herbert, j'ai aussi découvert les joies de l'organisation de séminaires et de l'administratif en général (merci Bruxelles). Si certains peuvent voir de l'ironie dans ces propos, je rappellerai la satisfaction du travail accompli, les séjours qui des papiers et signatures deviennent réalité, les exposés qui font oublier les problèmes de salles et du site Web. Je

repenserai longtemps à ces moments et aux « Herbert's three monkeys ».

Je voudrais aussi dire quelques mots pour M. Levine qui m'a accueilli au premier semestre 2006 à Northeastern University. En effet, tout juste sorti de mon M2, j'avais envie d'aller apprendre les mathématiques de l'autre côté de l'Atlantique. Il me semble qu'on parle d'acquérir une expérience internationale... Toujours est-il que ces mois à Boston comptent parmi ceux où j'ai appris le plus en le moins de temps. Je devais avoir un peu de retard à rattraper, tant de choses à apprendre avant de commencer quoi que ce soit. Je m'y suis initié aux cycles algébriques ainsi qu'aux motifs de façon générale. Je remercie M. Levine d'avoir bien voulu pardonner mon ignorance et de m'avoir enseigné nombres de techniques, de constructions et de théories classiques. Merci aussi à Jose pour ces heures à l'Expresso où il a pris le temps de me donner des cours de soutien avec son grand Café-Maté-Laté-Sucré. De l'Expresso au Bukowski's, il n'y a qu'un pas, la conversation n'étant plus uniquement mathématique ; il faut bien dire que sans Jose, je n'aurais pas découvert Boston avec le même regard. J'en profite pour saluer tous ceux que j'ai rencontrés dans ce département.

Je suis reconnaissant à messieurs H. Furusho et Z. Wojtkowiak d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et les remercie de leurs remarques et de leurs suggestions. Je remercie messieurs Cresson et Enriquez de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de ma thèse. Je remercie aussi les autres membres du jury pour l'honneur qu'ils me font.

J'ai une pensée particulière pour ceux avec qui j'ai partagé le plateau 7C de Chevaleret au fil des ans. Hester et Sarah, deux marraines, qui m'ont initié à la géographie et à la sociologie du bâtiment et m'ont guidé lors de mes premiers pas à l'I.M.J. Sarah m'ayant, par ailleurs, rendu quelques précieux services. Clémence, Lara, Abed, Olivier, Hamid, Viet Loc, Phillippe qui m'ont supporté dans notre bureau pendant ces trois années (Oui Abed, je sais que tu n'es pas d'accord). Banasheh, Cécile, Élodie, Mirjam, Jérôme, Julien C, Luc, Manu pour l'ensemble de nos conversations et de nos moments partagés. Je n'oublie pas ceux que je vois moins, Juliette, Ruchi, Nabil et les autres sans qui l'atmosphère ne serait pas la même ; ni Julien G qui en plus d'être un convive charmant est un mathématicien curieux et généreux, nos discussions fructueuses m'ayant plus d'une fois éclairé. Je tiens aussi à exprimer une pensée pour Yassine qu'on ne voit pas assez souvent. Enfin je ne saurais clore ce paragraphe sans un mot pour Benjamin, pour notre groupe de travail perpétuel : « vie - monde - mathématiques » ; Benjamin ayant été, ces dernières années, un comparse inénarrable.

Enfin, je remercie mes amis du lycée, de Saint-Louis, de l'ENS et d'ailleurs pour toutes ces années passées ensemble. Je remercie ma mère et mon père pour tout ce qu'ils m'ont donné, dont l'envie d'apprendre, de réfléchir (de chercher ...), pour m'avoir soutenu et encouragé, pour m'avoir appris qu'il faut se donner les moyens de ses envies. Je remercie Juliette pour ces nombreuses relectures de mes travaux et plus particulièrement pour tout le reste.

Avant de conclure, je veux dire que rien de tout ceci n'aurait été possible sans l'extraordinaire prévenance et gentillesse de Mme Wasse, sans parler de son efficacité redoutable. Merci Madame.

Résumé

Dans cette thèse, on étudie liens étroits qui existent entre les valeurs zêta multiples (MZV) et la géométrie des espaces de modules de courbes en genre 0. En particulier, on y montre comment les deux produits de mélanges (shuffle et stuffle) des MZV reflètent le comportement de certaines applications d'oubli entre espaces de modules courbes. Un des objectifs de mon travail a été de comprendre comment ces produits de mélanges existent dans le cadre des motifs de Tate mixtes attachés aux espaces de modules de courbes.

On rappellera, dans un premier temps, les définitions et les propriétés des deux produits de mélange. Ensuite, on fera le lien avec la géométrie des espaces de modules de courbes $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$. Puis, après quelques rappels sur les motifs encadrés, on montrera comment effectuer le passage aux motifs de Tate mixtes pour le produit shuffle dans le cadre des MZV motiviques de Goncharov et Manin sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ [GM04].

Enfin, le dernier chapitre est consacré au stuffle motivique. Après avoir adapté un théorème de Y. Hu [Hu03] sur les successions d'éclatements à la situation des motifs de Tate mixtes, on construira une famille de variétés, X_n . À partir de là, on définira une nouvelles versions des MZV motiviques $\zeta^{fr,\mathcal{M}}(\mathbf{k}, s)$. Pour parvenir à cette construction, on étudiera, entre autres, l'intersection d'hypersurfaces particulières dans \mathbb{A}^n et la structure de Hodge mixte de certains groupes de cohomologie relative.

On obtient alors une forme de relation stuffle pour les motifs de Tate mixtes encadrés $\zeta^{fr,\mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id})$ dont on déduit les relations de stuffle pour les MZV motiviques de Goncharov et Manin.

Mots-clefs

valeurs zêta multiples - MZV - double mélange - shuffle - stuffle - espaces de modules de courbes
- motifs - motifs de Tate mixtes - Structures de Hodge mixtes - éclatements - suites d'éclatements

Mixed Tate motives and blow-ups sequences : application to the multiple zeta values

Abstract

In this thesis, I study the close links between multiple zeta values (MZVs) and the geometry of moduli spaces of curves in genus zero. It is shown how the properties of forgetful maps between moduli spaces of curves lead to the double shuffle relations for MZVs (shuffle and stuffle). The main result of this work shows that these double shuffle relations hold for the motivic MZVs attached to the moduli space of curves defined by Goncharov and Manin in [GM04].

First, we recall basic definitions and properties of MZVs. Then, we show how those properties are linked to the geometry of the moduli spaces of curves $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$. The next step, after a review of framed mixed motives, is to obtain shuffle relations for the framed mixed motives defined by Goncharov and Manin, which are attached to both MZVs and moduli spaces of curves.

The last chapter is devoted to the problem of the motivic stuffle. There, we adapt a theorem from Y. Hu [Hu03] about successive blow-ups to the situation of mixed Tate motives and then build a family of varieties X_n . After some considerations on intersections of specific hypersurfaces in \mathbb{A}^n and on the mixed Hodge structure of some relative cohomology groups, this family makes it possible to construct a new version of motivic MZVs, $\zeta^{fr.,\mathcal{M}}(\mathbf{k}, s)$.

Using the geometry of the X_n and these new motivic MZVs, it is easy to deduce motivic stuffle relations for the $\zeta^{fr.,\mathcal{M}}(\mathbf{k}, s)$, which lead, by comparison with the moduli spaces of curves, to the motivic stuffle relations for the motivic MZVs defined by Goncharov and Manin.

Keywords

multiplezeta values - MZV - double shuffle - stuffle - moduli space of curves - mixed Tate motives
- blow-up - blow-ups sequences - mixed Hodge structures

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Valeurs zêta multiples	9
1.2	Régularisations	10
1.3	Motifs de Tate mixtes	12
1.4	Stuffle des mots convergents et éclatements	13
2	Intégrale et relations de double mélange	17
2.1	Les relations de stuffle par les séries	17
2.2	La relation de shuffle par les intégrales	18
2.3	Intégrales et relations de stuffle	19
3	Double mélange et applications d'oubli	23
3.1	Espaces de modules de courbes de genre 0 à n points marqués	23
3.2	Produit de mélange et espace de modules	24
3.3	Stuffle et espace de modules	26
4	Shuffle motivique pour les mots « convergents »	29
4.1	Catégorie de motifs et motifs de Tate mixtes	29
4.2	Motifs de Tate mixtes encadrés et situations géométriques	31
4.3	Le produit shuffle est motivique	36
5	Le cas du produit stuffle	39
5.1	Préliminaires sur les éclatements	39
5.2	La variété X_3 et l'exemple de $\zeta(3)$	42
5.3	La variété X_n et ses diviseurs	47
5.4	Une définition alternative des MZV motiviques	55
5.5	Le produit stuffle est motivique	59
A	Autour des structures de Hodge mixtes	61
	Bibliographie	65

Chapitre 1

Introduction

1.1 Valeurs zêta multiples

Les valeurs zêta multiples (MZV) sont des nombres réels généralisant les valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers supérieurs ou égaux à 2. Elles sont définies pour tout p -uplet d'entiers strictement positifs $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ avec $k_1 \geq 2$ par

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_p^{k_p}}.$$

L'une des multiples questions concernant ces nombres est de savoir si ce sont des nombres irrationnels, voir transcendants. Euler a, par exemple, prouvé que les nombres $\zeta(2n)$ sont des multiples rationnels de π^{2n} et des travaux relativement récents de messieurs Apéry et Rivoal montrent que certaines valeurs de la forme $\zeta(2n+1)$ sont irrationnelles. Si l'on conjecture que toutes les valeurs zêta multiples sont des nombres transcendants, il ne semble pas exister de piste permettant de pouvoir répondre par l'affirmative prochainement. Plus que l'étude individuelle de chacun de ces nombres, l'étude de la structure globale de l'ensemble des valeurs zêta multiples permet d'énoncer des conjectures impliquant en particulier la conjecture de la transcendance.

Notons \mathcal{Z} l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} engendré par 1 et la famille de nombres réels formée par les valeurs zêta multiples. Si l'on multiplie deux valeurs zêta multiples on obtient une combinaison linéaire d'autres valeurs zêta multiples mais celle-ci n'est pas unique. Elle dépend du choix d'un produit particulier entre valeurs zêta multiples.

Un des deux produits usuels est le *shuffle* ou produit de mélange contractant et la décomposition du produit $\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$ en somme de valeurs zêta multiples s'obtient par la multiplication des deux séries correspondantes (*Cf.* section 2.1)

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta(\sigma). \quad (1.1)$$

L'autre produit usuel est le *shuffle* ou produit de mélange, il a été mis en évidence par M. Kontsevitch en utilisant une représentation à l'aide d'intégrales des valeurs zêta multiples (*Cf.* section 2.2)

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \sum_{\sigma \in \text{sh}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta(\sigma). \quad (1.2)$$

C'est aussi une conséquence de la représentation des valeurs zêta multiples en termes d'intégrales itérées (*Cf.* [Che73]), plus particulièrement de la formule pour la composition des chemins ([Che73][prop. 1.5.1]).

Le produit shuffle fait de \mathcal{Z} une algèbre.

Définition 1.1.1. La longueur d'un p -uplet d'entiers (k_1, \dots, k_p) est p et son poids est $k_1 + \dots + k_p$.

Les deux différents produits, shuffle et stuffle, respectent le poids et s'ils donnent deux expressions différentes, ces deux expressions sont égales au nombre réel produit des deux valeurs zêta multiples. On appelle cette famille de relations entre valeurs zêta multiples les relations de double mélange. En effet, il est bien connu que deux combinaisons linéaires de valeurs zêta multiples peuvent donner le même nombre réel, par exemple Euler a prouvé que $\zeta(3) = \zeta(2, 1)$.

1.2 Régularisations

Grâce aux travaux de messieurs Ecalle et Zagier ainsi qu'aux apports d'autres mathématiciens, entre autres messieurs Boutet de Monvel, Ihara, Kaneko (Cf. [IKZ06] ou [Rac02]), il est possible d'étendre la définition des valeurs zêta multiples pour des uplets (k_1, \dots, k_p) avec $k_1 = 1$. On parle de valeurs zêta multiples *régularisées* par opposition aux valeurs zêta multiples *convergentes* pour lesquelles nécessairement on a $k_1 \geq 2$. Il n'est cependant pas possible de donner une définition de valeurs zêta multiples régularisées qui satisfasse les relations (1.1) et (1.2) sans les conditions $k_1, l_1 \geq 2$ mais on peut définir deux régularisations différentes $\zeta_*(\mathbf{k})$ (satisfaisant (1.1) sans la restriction $k_1, l_1 \geq 2$) et $\zeta_{\text{III}}(\mathbf{k})$ (satisfaisant (1.2) sans la restriction $k_1, l_1 \geq 2$).

Hoffman, dans [Hof00], motivé par ces valeurs régularisées, donne une nouvelle famille de relations ne faisant intervenir que des valeurs zêta multiples convergentes :

$$0 = \zeta \left(\sum_{\sigma \in \text{sh}((1),1)} \sigma - \sum_{\sigma \in \text{est}((1),1)} \sigma \right),$$

où $\zeta(-)$ est considéré comme linéaire par rapport aux sommes. Une des principales conjectures concernant les valeurs zêta multiples est la suivante.

Conjecture 1.2.1. Toutes les relations algébriques entre valeurs zêta multiples convergentes sont engendrées par celles de double mélange et les relations d'Hoffman.

Cette conjecture peut se traduire comme une conjecture sur la structure de l'algèbre \mathcal{Z} qui serait engendrée par des symboles formels $Z(k_1, \dots, k_p)$ ($k_1 \geq 2$) modulo les seules relations de double mélange et Hoffman.

L'étude de structures formelles associées aux valeurs zêta multiples est une approche générale afin de mieux comprendre la structure de \mathcal{Z} . Plus précisément, soit X_0, X_1 et Y_1, Y_2, \dots des indéterminées non-commutatives. On note $Y_{(k_1, \dots, k_p)}$ le monome $Y_{k_1} \cdots Y_{k_p}$. Pour toute \mathbb{Q} -algèbre A , on plonge l'algèbre de séries formelles $A\langle\langle Y_1, Y_2, \dots \rangle\rangle$ dans $A\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ en envoyant Y_j sur $X_0^{j-1} X_1$ et on note Π_Y la projection de $A\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ sur $A\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle X_1$ annulant les mots se terminant par X_0 . L'algèbre $A\langle\langle Y_1, \dots \rangle\rangle$ est munie d'un coproduit δ_* défini sur les générateurs par

$$\Delta_*(Y_j) = Y_j \otimes 1 + \sum_{i=1}^{j-1} Y_i \otimes Y_{j-i} + 1 \otimes Y_j.$$

De même, l'algèbre $A\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ est munie d'un coproduit Δ_{III} défini à partir des formules

$$\Delta_{\text{III}}(X_0) = \Delta_{\text{III}}(X_0) \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_{\text{III}}(X_0) \quad \text{et} \quad \Delta_{\text{III}}(X_1) = \Delta_{\text{III}}(X_1) \otimes 1 + 1 \otimes \Delta_{\text{III}}(X_1).$$

À chaque uplet $\bar{k} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0, \dots, 0, 1)$ commençant par 0 et finissant par 1, on associe la valeur zêta multiple $\zeta(k_1, \dots, k_r)$ où $k_i - 1$ est le nombre de zéro entre le $(i - 1)$ -ème et le i -ème 1 de \bar{k} . La régularisation shuffle, évoquée ci-dessus, permet d'associer une valeur zêta multiple $\zeta_{\text{III}}(\bar{k})$ à chaque $\bar{k} = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1)$ avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. On définit alors les séries

$$\Phi_* = \sum_{\mathbf{k}} \zeta_*(\mathbf{k}) Y_{\mathbf{k}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\text{III}} = \sum_{\bar{k}} \zeta_{\text{III}}(\bar{k}) X_{\varepsilon_n} \cdots X_{\varepsilon_1}$$

La première somme s'étendant sur tous les uplets d'entiers $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ avec $k_i \geq 1$ et la seconde sur tous les uplets de la forme $\bar{k} = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1)$ ($\varepsilon_i \in \{0, 1\}$), p et n étant arbitrairement grands.

On trouve dans la thèse de Racinet [Rac02], une traduction des relations (1.1) et (1.2) (étendues aux valeurs régularisées $\zeta_*(\mathbf{k})$ et $\zeta_{\text{III}}(\bar{k})$) sous la forme suivante

$$\Delta_*(\Phi_*) = \Phi_* \otimes \Phi_* \quad \Delta_{\text{III}}(\Phi_{\text{III}}) = \Phi_{\text{III}} \otimes \Phi_{\text{III}}.$$

De plus, il formalise la relation, découverte indépendamment par Ecalle et Zagier, entre les deux régularisations par la formule suivante

$$\Phi_* = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} Y_1^n\right) \Pi_Y(\Phi_{\text{III}}).$$

De façon générale, pour une série Φ_{III} de $A\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ on note $\langle \Phi_{\text{III}} | X_0^{n-1} X_1 \rangle$ le coefficient de $X_0^{n-1} X_1$ dans Φ_{III} et on associe à Φ_{III} la série Φ_* définie par

$$\Phi_* = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\langle \Phi_{\text{III}} | X_0^{n-1} X_1 \rangle}{n} Y_1^n\right) \Pi_Y(\Phi_{\text{III}}).$$

Racinet étudie les relations formelles de double mélange. Le résultat principal de sa thèse assure que l'ensemble des séries $\Phi_{\text{III}} = \sum_{\bar{k}} a_{\bar{k}} X_{\varepsilon_n} \cdots X_{\varepsilon_1}$ de $A\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ sans termes en $X_0, X_1, X_0 X_1$, satisfaisant

$$\Delta_*(\Phi_*) = \Phi_* \otimes \Phi_* \quad \text{et} \quad \Delta_{\text{III}}(\Phi_{\text{III}}) = \Phi_{\text{III}} \otimes \Phi_{\text{III}}$$

forme un groupe pour la multiplication donnant le crochet de Poisson (ou crochet d'Ihara) dans l'algèbre de Lie associée.

Ce résultat permet de munir d'une structure de coalgèbre de Lie l'espace vectoriel \mathcal{NFZ} engendré formellement sur \mathbb{Q} par les symboles $Z_{\text{III}}(\bar{k})$ pour tous les uplets de la forme $\bar{k} = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1)$ ($\varepsilon_i \in \{0, 1\}$) (p et n étant arbitrairement grands), modulo les relations suivantes :

- $\sum_{\sigma \in \text{sh}(\bar{k}, \bar{l})} Z_{\text{III}}(\sigma) = 0$ (la définition précise de $\text{sh}(\bar{k}, \bar{l})$ est donnée en section 2.2),
- $Z_{\text{III}}(0) = Z_{\text{III}}(1) = Z_{\text{III}}(0, 1) = 0$,
- pour tout uplet d'entiers $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ on associe un uplet $\bar{k} = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1)$ de 0 et de 1 comme précédemment. Si \bar{k} contient au moins un 0 alors on pose $Z_*(\mathbf{k}) = Z_{\text{III}}(\bar{k})$, sinon

$$Z_*(\overbrace{1, \dots, 1}^{n \text{ fois}}) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} Z_{\text{III}}(\overbrace{0, \dots, 0}^{n-1 \text{ fois}}, 1).$$

On impose alors la relation $\sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} Z_*(\sigma) = 0$ (la définition précise de $\text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ est donnée en section 2.1).

De plus, Goncharov, dans [Gon05], donne de façon explicite le cocrochet qui est donc dual au crochet de Poisson, qui fait, d'après Racinet, du dual de \mathcal{NFZ} une algèbre de Lie.

Introduisons maintenant une autre conjecture concernant la structure de \mathcal{Z} qui donne une description conjecturale de \mathcal{Z} plus explicite que la précédente. On note \mathcal{Z}_n l'espace vectoriel engendré par les valeurs zêta multiples de poids n .

Conjecture 1.2.2 (Conjecture de la dimension). L'algèbre \mathcal{Z} est une algèbre de Hopf graduée $\mathcal{Z} = \bigoplus_n \mathcal{Z}_n$.

Modulo les constantes et les produits, cette algèbre donne une coalgèbre de Lie \mathcal{NZ} dont la structure du dual \mathcal{NZ}^\vee est simple, à savoir

$$\mathcal{NZ}^\vee \simeq \mathbb{Q}[e_2] \oplus L(e_3, e_5, e_7, \dots)$$

où le facteur de droite est l'algèbre de Lie libre engendrée par un générateur en chaque rang impair supérieur ou égal à 3, e_2 commutant avec les e_{2i+1} .

En particulier, en notant $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite d'entiers vérifiant la relation de récurrence suivante

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad \text{et} \quad d_k = d_{k-2} + d_{k-3},$$

on déduit de la structure conjecturale de \mathcal{NZ} que pour tout entier k ,

$$\dim(\mathcal{Z}_k) = d_k.$$

On conjecture de plus que les algèbres de Lie \mathcal{NZ} et \mathcal{NFZ} sont isomorphes, on aurait donc conjecturalement les isomorphismes suivants

$$\mathcal{NFZ}^\vee \simeq \mathcal{NZ}^\vee \simeq \mathbb{Q}[e_2] \oplus L(e_3, e_5, e_7, \dots).$$

1.3 Motifs de Tate mixtes

La théorie des motifs de Tate mixtes a permis de montrer que les d_k sont une borne supérieure pour $\dim(\mathcal{Z}_k)$. Plus précisément, dans [DG05] est définie la catégorie $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z})$ des motifs de Tate mixtes non ramifiés au-dessus de \mathbb{Z} et Goncharov dans [Gon01] conjecture que toutes les périodes des motifs de Tate mixtes non ramifiés sur \mathbb{Z} sont des combinaisons rationnelles des valeurs zêta multiples. Il est démontré dans [Gon01] que la catégorie $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z})$ est une catégorie tannakienne de groupe fondamental $\mathbb{G}_m \rtimes \mathcal{U}_{\mathcal{MTM}(\mathbb{Z})}$, où $\mathcal{U}_{\mathcal{MTM}(\mathbb{Z})}$ est un groupe unipotent d'algèbre de Lie associée isomorphe à l'algèbre de Lie $L(T_{-3}, T_{-5}, \dots)$ libre avec un générateur en chaque degré impair ≤ -3 , facteur de droite de l'algèbre de Lie de la conjecture précédente ; on notera $\mathcal{U}(L(T_{-3}, T_{-5}, \dots))$ son algèbre enveloppante.

Afin d'étudier plus spécifiquement les périodes, Goncharov réintroduit dans [Gon02] l'algèbre de Hopf $\mathcal{MTM}^{fr}(\mathbb{Z})$ des motifs de Tate mixtes encadrés (déjà présents dans [BGSV90]) non ramifiés sur \mathbb{Z} . En effet, pour une catégorie tannakienne de Tate mixte \mathcal{M} , de groupe fondamental $\mathbb{G}_m \rtimes U$ avec U unipotent, Goncharov, dans [Gon01] et [Gon05, Cf. appendice], construit l'algèbre de Hopf \mathcal{M}^{fr} des objets encadrés dont les éléments sont des classes d'équivalence de triplets $[M, v, f]$ ($v \in \text{Hom}(\mathbb{Q}(-n), \text{Gr}_{2n} M)$ et $f \in \text{Hom}(\mathbb{Q}(0), \text{Gr}_0 M^\vee)$). Il y démontre aussi que cette algèbre de Hopf est isomorphe au dual gradué de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie associée à U . Dans le cas de la catégorie $\mathcal{MTM}(\mathbb{Z})$, l'algèbre de Hopf $\mathcal{MTM}^{fr}(\mathbb{Z})$ est ainsi isomorphe au dual gradué de $\mathcal{U}(L(T_{-3}, T_{-5}, \dots))$.

À partir d'une version motivique du groupe fondamental unipotent de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ construite dans [DG05, Gon01], Goncharov obtient une sous-algèbre de Hopf $\mathcal{MTM}_{\mathcal{M}_{0,4}}^{fr}(\mathbb{Z})$ de $\mathcal{MTM}^{fr}(\mathbb{Z})$ qui se surjecte sur l'algèbre des valeurs zêta multiples. De là, on peut voir les espaces de valeurs zêta multiples \mathcal{Z}_n comme des sous-quotients des parties graduées de $\mathbb{Q}[T^2] \otimes \mathcal{U}(L(T_{-3}, T_{-5}, \dots))^\vee$. Goncharov obtient directement de ces arguments le théorème suivant, théorème obtenu de façon indépendante par T. Terasoma dans [Ter02] en utilisant des suites d'éclatements et des structures motiviques proches des motifs de Tate mixtes encadrés.

Théorème 1.3.1 ([Gon01]). *Pour tout k , on a $\dim(\mathcal{Z}_k) \leq d_k$, les nombres d_k étant ceux de la conjecture 1.2.2*

Dans son étude des valeurs zêta multiples motiviques, Goncharov parvient dans [Gon02] à établir qu'elles vérifient des relations de double mélange motivique relevant les relations usuelles. Dans un premier temps il traite des polylogarithmes multiples qui semblent sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ plus faciles à aborder que les valeurs zêta multiples. En effet, la représentation intégrale de ces dernières présente des singularités qui deviennent problématiques lors des constructions géométriques, alors que d'un point de vue analytique cette difficulté est très simplement contournée. Afin d'obtenir les relations de double mélange pour les valeurs zêta multiples, Goncharov est obligé d'avoir recours à des techniques sophistiquées comme des points bases tangentiels motiviques [DG05] ou bien le théorème de spécialisation [Gon02] obtenant à la fin le résultat comme conséquence de résultats sur les variations de structures de Hodge mixtes. Ce recours au théorème de spécialisation et aux variations de structures de Hodge mixtes lui permet de plus d'obtenir des relations de double mélange motiviques correspondant aux relations de double mélange étendues aux valeurs zêta multiples régularisées.

D'autre part, Furusho, dans ses travaux récents [Fur08], montre que la relation de pentagone introduite par Drinfeld dans [Dri92], implique les relations de double mélange. Plus précisément, en notant $U\mathfrak{B}_5$ la A -algèbre engendrée par les symboles X_{ij} avec les relations $X_{ii} = 0$, $X_{ij} = X_{ji}$, $\sum_j X_{ij} = 0$ pour tout j et $[X_{ij}, X_{kl}]$ dès que $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, Furusho montre qu'une série formelle Φ_{III} , élément de $A\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ satisfaisant $\Delta(\Phi_{\text{III}}) = \Phi_{\text{III}} \otimes \Phi_{\text{III}}$ et

$$\Phi_{\text{III}}(X_{12}, X_{23})\Phi_{\text{III}}(X_{34}, X_{45})\Phi_{\text{III}}(X_{51}, X_{12})\Phi_{\text{III}}(X_{23}, X_{34})\Phi_{\text{III}}(X_{45}, X_{51}) = 1 \quad X_{ij} \in U\mathfrak{B}_5$$

satisfait aussi la relation

$$\Delta_*(\Phi_*) = \Phi_* \otimes \Phi_*,$$

la série Φ_* s'obtenant à partir de Φ_{III} comme précédemment.

Sachant que les valeurs zêta multiples satisfont une relation de pentagone motivique, une autre approche aux relations de double mélange motiviques serait de mettre ensemble plusieurs résultats de la littérature qui permettraient d'adapter le résultat récent de Furusho à la situation motivique. Un tel argument, toutefois, ne mettrait pas en lumière le rôle joué par la géométrie des espaces de modules de courbes en genre zero dans la théorie des valeurs zêta multiples motiviques, un des buts principaux de cette thèse.

1.4 Mélange contractant et éclatements ; le cas des mots convergents

Dans une approche complètement nouvelle messieurs Goncharov et Manin, dans [GM04], donnent une définition des valeurs zêta multiples motiviques, éléments de $\mathcal{MTM}^{fr}(\mathbb{Z})$, ne faisant appel qu'à des constructions géométriques simples, basées sur l'espace des modules de courbes de genre 0 à $n + 3$ points marqués, $\overline{\mathcal{M}}_{0, n+3}$. À travers ce point de vue, l'espace des modules apparaît comme le lieu géométrique naturel pour situer l'étude des valeurs zêta multiples. À un p -uplet d'entiers \mathbf{k} avec $k_1 \geq 2$ et $k_1 + \dots + k_p = n$, ils associent une forme différentielle sur $\mathcal{M}_{0, n+3}$, $\omega_{\mathbf{k}}$, satisfaisant en particulier

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Phi_n} \omega_{\mathbf{k}},$$

où Φ_n désigne la cellule standard sur $\mathcal{M}_{0, n+3}$. Ils obtiennent alors le théorème suivant.

Théorème ([GM04][Théorème 4.1 et équation (14)]). *Soit \mathbf{k} un p -uplet d'entiers avec $k_1 \geq 2$, $A_{\mathbf{k}}$ le diviseur des singularités de la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}}$ et B_n la clôture de Zariski du bord de Φ_n . Il existe un motif de Tate mixte encadré*

$$\left[\mathrm{H}^n(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n] \right]$$

dont la période vaut $\zeta(\mathbf{k})$; la notation Y^X désignant de façon générale l'intersection $Y \setminus (Y \cap X)$.

Ils montrent en fait un résultat beaucoup plus fort en donnant un « contrôle » des extensions qui apparaissent dans le motif de Tate mixte

$$\mathrm{H}^n(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}).$$

Cependant, les auteurs ne montrent pas que les valeurs zêta multiples motiviques ainsi définies vérifient les relations de double mélange, se référant plutôt aux travaux antérieurs de Goncharov ([Gon02]), remarquant au détour d'une phrase que la construction sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ est équivalente aux précédentes, ce qui n'est pas forcément évident.

Une des idées qui ont dirigé ce travail est donc d'obtenir les relations de double mélange pour les valeurs zêta multiples sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ de [GM04] par une méthode qui soit la plus directe possible et qui découle le plus possible de la géométrie des espaces de modules de courbes. En effet, la relation de shuffle (Cf. proposition 4.3.1) est une conséquence immédiate du comportement d'applications d'oubli, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+m+3} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,m+3}$.

La relation de stuffle s'avère cependant plus délicate. Des méthodes, bien connues, de P. Cartier ainsi que de A. B. Goncharov, permettent de donner une représentation par des intégrales sur des cubes réels du produit stuffle et donc d'aborder ces relations d'un point de vue géométrique. Bien qu'il soit possible de relever ces techniques aux espaces de modules de courbes en utilisant un choix judicieux d'applications d'oubli comme l'a remarqué F. Brown dans [Bro06], il n'est pas possible d'en conclure, comme pour le produit shuffle, une version motivique du produit stuffle. En effet, il s'agit sur \mathbb{R}^n comme sur l'espace des modules de décomposer un produit de fonctions en une somme de fonctions (décomposition de Cartier, Cf. proposition 2.3.5) et certains termes de cette décomposition ont des singularités qui intersectent le bord du domaine d'intégration, dans \mathbb{R}^n comme sur l'espace de modules de courbes.

Tant que l'on s'en tient à intégrer, ces singularités peuvent être facilement traitées ou en invoquant la théorie de l'intégration des fonctions positives ou en effectuant certaines permutations des variables à différentes étapes de la décomposition qui permettent de ne pas avoir à s'en préoccuper. Cela n'est plus possible dans le cadre des valeurs zêta multiples motiviques sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$, les permutations des variables par exemple n'étant alors plus licites car ne donnant pas de morphisme global sur l'espace des modules de courbes. On est contraint de résoudre ces singularités au préalable en utilisant des successions d'éclatements.

L'exemple de $\zeta(2)$, bien que simple, illustre le lien entre suppression des singularités et éclatements, l'éventuel problème en $(0,0)$ lorsque l'on écrit $\zeta(2)$ sous la forme $\int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \frac{dt_1 dt_2}{t_2(1-t_1)}$ étant résolu ou bien par un passage en coordonnées polaires, ce qui revient géométriquement à remplacer ce point par l'ensemble des directions normales à ce point, ou bien par le changement de variables $x_1 = t_2$, $x_2 x_1 = t_1$, qui correspond bien à éclater le point origine dans le plan. Dans le cas de $\zeta(n)$, la résolution des singularités le long des sous-variétés $(0, \dots, 0, t_i, \dots, t_n)$ correspond à la succession d'éclatements suivant : l'origine, la droite $t_1 = \dots = t_{n-1} = 0$, le plan $t_1 = \dots = t_{n-2} = 0$, et ainsi de suite. On perçoit ici un exemple de la philosophie générale qui consiste, pour résoudre une (des) singularité(s), à éclater les strates du lieu singulier par ordre croissant de dimension. Ce type de successions d'éclatements à la « MacPherson-Procesi » a été introduit dans [FM94] puis

dans [DCP95] et généralisé par messieurs MacPherson et Procesi aux stratifications coniques dans [MP98].

Dans ce travail nous adaptions tout d'abord un théorème de Hu ([Hu03]) au contexte des motifs de Tate mixtes. Il s'agit d'obtenir, à l'aide de ces successions d'éclatements, une variété de Tate et un diviseur à croisements normaux donnant une stratification par des sous-variétés de Tate à partir d'une variété stratifiée. En appliquant ce résultat à une famille particulière de diviseurs dans \mathbb{A}^n , nous construisons une famille de variétés X_n , $n \geq 2$ au moyen desquelles est définie une version alternative des valeurs zêta multiples motiviques. Nous montrons ensuite l'équivalence entre cette version et celle de Goncharov et Manin et de là, nous déduisons les relations de double mélange en utilisant la géométrie propre des espaces X_n comme énoncé dans la proposition suivante.

Proposition. 1. *La proposition 4.3.1 donne une égalité de motifs de Tate mixtes encadrés, relation de shuffle pour les valeurs zêta multiples motiviques*

$$\begin{aligned} & \left[\mathbb{H}^n \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}} \right); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n] \right] \cdot \left[\mathbb{H}^m \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_1; B_m^{A_1} \right); [\omega_1]; [\Phi_m] \right] = \\ & \sum_{\sigma \in \text{sh}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket n+1, n+m \rrbracket)} \left[\mathbb{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\sigma}; B_{n+m}^{A_{\sigma}} \right); [\omega_{\sigma}]; [\Phi_{n+m}] \right]. \end{aligned}$$

2. *La proposition 5.5.1 donne une égalité de motifs de Tate mixtes encadrés, relation de shuffle pour les valeurs zêta multiples motiviques*

$$\begin{aligned} & \left[\mathbb{H}^n \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}} \right); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n] \right] \cdot \left[\mathbb{H}^m \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_1; B_m^{A_1} \right); [\omega_1]; [\Phi_m] \right] = \\ & \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \left[\mathbb{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\sigma}; B_{n+m}^{A_{\sigma}} \right); [\omega_{\sigma}]; [\Phi_{n+m}] \right]. \end{aligned}$$

Afin de prouver ces deux égalités entre motifs de Tate mixtes encadrés, c'est-à-dire cette équivalence entre motifs de Tate mixtes encadrés au sens de Goncharov, nous procéderons de la manière suivante. Dans le second chapitre de ce travail, on rappellera les définitions des deux produits de mélange ainsi que leurs propriétés; le cas de la représentation intégrale du produit stuffle, représentation cubique des valeurs zêta multiples, sera particulièrement détaillé afin d'explicitier l'ensemble des calculs liés à la décomposition de Cartier. Dans le troisième chapitre, on verra comment relever ces manipulations d'intégrales sur les espaces de modules de courbes $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$. Dans le chapitre suivant, très court, suite à quelques rappels sur les motifs encadrés, on montrera comment effectuer le passage aux motifs de Tate mixtes pour le produit shuffle dans le cadre des valeurs zêta multiples motiviques de Goncharov et Manin sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$.

Enfin, le dernier chapitre est consacré au stuffle motivique. Après avoir adapté un théorème général de Y. Hu [Hu03] sur les successions d'éclatements à la situation des motifs de Tate mixtes, on construira la famille d'exemples explicites, X_n pour $n \geq 2$ entier. Si cet exemple a retenu notre attention, c'est qu'il permet de définir de nouvelles versions des valeurs zêta multiples motiviques $\zeta^{fr..M}(\mathbf{k}, \mathbf{s})$. Pour cela il nous faut d'abord définir pour chaque p -uplet d'entiers (avec $k_1 \geq 2$ et $k_1 + \dots + k_p = n$) et chaque permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ une forme différentielle à pôles logarithmiques sur X_n satisfaisant

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\widehat{C}_n} \omega_{\mathbf{k}}^{\mathbf{s}}$$

où \widehat{C}_n désigne la préimage de $]0, 1[^n$ dans X_n .

Théorème (Théorème 5.4.1). *Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ un uplet d'entiers avec $k_1 \geq 2$ et $k_1 + \dots + k_p = n$ et s une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s$ le diviseur des singularités de la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}}^s$ et \widehat{B}_n la clôture de Zariski du bord de \widehat{C}_n . On a alors un motif de Tate mixte*

$$\mathbf{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{k}}^s; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s}),$$

la période du motif de Tate mixte n -encadré

$$\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathbf{k}, s) = \left[\mathbf{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{\mathbf{k}}^s; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{\mathbf{k}}^s}); [\omega_{\mathbf{k}}^s], [\widehat{C}_n] \right]$$

est égale à $\zeta(k_1, \dots, k_n)$.

Effectuer la décomposition de Cartier sur les espaces X_n est alors relativement aisé grâce à la façon dont ces espaces sont construits. En effet, l'expression de cette décomposition utilise sur l'espace de modules de courbes des coordonnées locales qui proviennent d'une première suite d'éclatements de $(\mathbb{P}^1)^n$. Localement, c'est-à-dire en utilisant ces coordonnées, on perd la symétrie des espaces de modules de courbes; la construction des espaces X_n permet, en un sens, de rétablir une symétrie par rapport aux coordonnées locales de la situation précédente. On obtient alors une forme de relation stuffle pour les motifs de Tate mixtes encadrés $\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id})$ (Cf. équation (5.13))

$$\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p | \mathcal{F}', j_1, \dots, j_q) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta^{fr, \mathcal{M}}(\sigma, \text{id}).$$

On donne ensuite une proposition montrant que ces valeurs zêta multiples motiviques sont équivalentes à celle définies par Goncharov et Manin.

Proposition (Proposition 5.4.5).

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_b)$ un b -uplet d'entiers avec $a_1 \geq 2$ et $a_1 + \dots + a_b = n$. On a une égalité de motifs de Tate mixtes encadrés

$$\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathbf{a}, \text{id}) = \left[\mathbf{H}^n(\overline{\mathcal{M}_{0, n+3}} \setminus A_0; B_n^{A_0}); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_n] \right].$$

où on note A_0 pour $\partial \overline{\mathcal{M}_{0, n+3}} \setminus B_n$.

On obtient dans le même mouvement un résultat analogue pour un motif de Tate mixte encadré du type

$$\left[\mathbf{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0, n+m+3}} \setminus A_0, B_{n+m}^{A_0}); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}] \right]$$

et son avatar défini à partir de l'espace X_{n+m} .

Comme les motifs de Tate mixtes encadrés $\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathbf{k}, \text{id})$, analogues des valeurs zêta multiples motiviques définies sur $\overline{\mathcal{M}_{0, n+3}}$, vérifient une forme de produit de stuffle (équation (5.13)), on obtient en utilisant la proposition précédente le produit stuffle motivique pour les valeurs zêta multiples de Goncharov et Manin.

Chapitre 2

Représentation intégrale des relations de double mélange

2.1 Les relations de stuffle par les séries

Dorénavant, et sauf mention explicite du contraire, tous les uplets d'entiers considérés sont des uplets d'entiers strictement positifs.

Le produit de mélange contractant ou *stuffle* d'un p -uplet d'entiers $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et d'un q -uplet d'entiers $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ est défini de manière récursive par la formule

$$\mathbf{k} * \mathbf{l} = (\mathbf{k} * (l_1, \dots, l_{q-1})) \cdot l_q + ((k_1, \dots, k_{p-1}) * \mathbf{l}) \cdot k_p + ((k_1, \dots, k_{p-1}) * (l_1, \dots, l_{q-1})) \cdot (k_p + l_q) \quad (2.1)$$

et $\mathbf{k} * () = () * \mathbf{k} = \mathbf{k}$. Ici $+$ est une somme formelle, $A \cdot a$ est la concaténation de l'entier a à la fin de l'uplet A et \cdot est linéaire en A .

Soit \mathbf{k} et \mathbf{l} deux uplets d'entiers. On écrira $\text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ pour désigner l'ensemble des termes de la somme formelle $\mathbf{k} * \mathbf{l}$ dont tous les coefficients seraient égaux à 1, un tel élément sera représenté par $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ et peut être identifié avec une unique application surjective $f : \llbracket 1, p+q \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, h \rrbracket$ tel que

$$f(1) < \dots < f(p) \quad \text{et} \quad f(p+1) < \dots < f(p+q).$$

Le uplet σ est alors égal au uplet (c_1, \dots, c_h) , les entiers c_i étant définis par la formule

$$c_i = \begin{cases} k_s + l_{t-p} & \text{si } f^{-1}(i) = \{s, t\} \quad \text{avec } s < t, \\ k_s & \text{si } f^{-1}(i) = \{s\} \quad \text{avec } s \leq p, \\ l_{t-p} & \text{si } f^{-1}(i) = \{t\} \quad \text{avec } t > p. \end{cases}$$

Exemple 2.1.1. On a par exemple

$$\begin{aligned} (n) * (m) &= (n, m) + (m, n) + (n + m), \\ (u) * (v, w) &= (u, v, w) + (v, u, w) + (v, w, u) + (u + v, w) + (v, u + w). \end{aligned}$$

Pour calculer la valeur du produit de deux valeurs zêta multiples $\zeta(\mathbf{k})$ et $\zeta(\mathbf{l})$, on découpe le domaine de sommation du produit $\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$

$$\{0 < n_1 < \dots < n_p\} \times \{0 < m_1 < \dots < m_q\}$$

en tous les domaines qui préservent l'ordre strict des n_i ainsi que celui des m_j et en tous les domaines de bord où l'un des n_i est égal à l'un des m_j . On obtient alors la proposition classique suivante qui donne les *relations de stuffle* (2.2), relations quadratiques entre valeurs zêta multiples.

Proposition 2.1.2. Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets d'entiers avec $k_1, l_1 \geq 2$. On a alors

$$\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l}) = \left(\sum_{n_1 > \dots > n_p > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_p^{k_p}} \right) \left(\sum_{m_1 > \dots > m_q > 0} \frac{1}{m_1^{l_1} \cdots m_q^{l_q}} \right) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta(\sigma). \quad (2.2)$$

2.2 La relation de shuffle par les intégrales

On associe au uplet d'entiers $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$, de poids $n = k_1 + \dots + k_p$, le n -uplet

$$\bar{\mathbf{k}} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_1-1 \text{ fois}}, 1, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_p-1 \text{ fois}}, 1) = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_1) \quad (2.3)$$

et la forme différentielle introduite par Kontsevich

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\bar{\mathbf{k}}} = (-1)^p \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}. \quad (2.4)$$

En posant $\Delta_n = \{0 < t_1 < \dots < t_n < 1\}$, le calcul direct de l'intégrale donne, pour \mathbf{k} tel que $k_1 \geq 2$,

$$\zeta(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_n} \omega_{\mathbf{k}}.$$

Le produit de mélange ou *shuffle* d'un n -uplet $(e_1, \dots, e_n) = e_1 \cdot \bar{e}$ et d'un m -uplet $(f_1, \dots, f_m) = f_1 \cdot \bar{f}$ est défini de manière récursive par la formule

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ III } (f_1, \dots, f_m) = e_1 \cdot (\bar{e} \text{ III } (f_1 \cdot \bar{f})) + f_1 \cdot ((e_1 \cdot \bar{e}) \text{ III } \bar{f}) \quad (2.5)$$

et $\bar{e} \text{ III } () = () \text{ III } \bar{e} = \bar{e}$. Ici, comme précédemment, $+$ est une somme formelle, $b \cdot B$ est la concaténation de l'élément b au début du uplet B et \cdot est linéaire en B .

Soit \mathbf{k} et \mathbf{l} deux uplets d'entiers comme ci-dessus. On écrira $\text{sh}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{l}})$ pour désigner l'ensemble des termes de la somme formelle $\mathbf{k} \text{ III } \mathbf{l}$ dont tous les coefficients seraient égaux à 1. Un tel élément sera représenté par $\sigma \in \text{sh}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{l}})$ et peut être identifié avec une unique permutation $\tilde{\sigma}$ de $\{1, \dots, n+m\}$ telle que $\tilde{\sigma}(1) < \dots < \tilde{\sigma}(n)$ et $\tilde{\sigma}(n+1) < \dots < \tilde{\sigma}(n+m)$. La permutation $\tilde{\sigma}$ sera simplement notée σ lorsque le contexte ne prêter pas à confusion. On notera avec un indice σ tout objet dépendant naturellement d'un terme d'un produit shuffle $\sigma \in \text{sh}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{l}})$.

Exemple 2.2.1. On a par exemple

$$XY \text{ III } AB = XYAB + XAYB + XABY + AXYB + AXBY + ABXY.$$

La proposition classique suivante donne les *relations de stuffle* (2.2), relations quadratiques entre valeurs zêta multiples.

Proposition 2.2.2. Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ avec $k_1, l_1 \geq 2$. On a

$$\int_{\Delta_n} \omega_{\bar{\mathbf{k}}} \int_{\Delta_m} \omega_{\bar{\mathbf{l}}} = \sum_{\sigma \in \text{sh}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{l}})} \int_{\Delta_{n+m}} \omega_{\sigma}. \quad (2.6)$$

Démonstration. Soit $n = k_1 + \dots + k_p$ et $m = l_1 + \dots + l_q$. On calcule alors

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n} \omega_{\bar{k}} \int_{\Delta_m} \omega_{\bar{l}} &= \left(\int_{\Delta_n} \frac{dt_1}{1-t_1} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right) \left(\int_{\Delta_m} \frac{dt_{n+1}}{1-t_{n+1}} \dots \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}} \right) \\ &= \int_{\Delta} \frac{dt_1}{1-t_1} \dots \frac{dt_n}{t_n} \frac{dt_{n+1}}{1-t_{n+1}} \dots \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\Delta = \{0 < t_1 < \dots < t_n < 1\} \times \{0 < t_{n+1} < \dots < t_{n+m} < 1\}$ peut être, à une union finie Δ_C de sous-ensembles de codimension 1 près, découpé en une union de simplexes

$$\Delta = \coprod_{\sigma \in \text{sh}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket n+1, n+m \rrbracket)} \Delta_{\sigma} \coprod \Delta_C \quad \text{avec } \Delta_{\sigma} = \{0 < t_{\sigma(1)} < t_{\sigma(2)} < \dots < t_{\sigma(n+m)} < 1\},$$

où $\llbracket a, b \rrbracket$ représente la suite ordonnée des entiers de a à b .

L'intégrale sur Δ est la somme des intégrales sur chaque simplexe Δ_{σ} . D'autre part l'intégrale sur l'un de ces simplexes est, en renumérotant les variables, égale à l'un des termes de la somme

$$\sum_{\sigma \in \text{sh}(\bar{k}, \bar{l})} \int_{\Delta_{n+m}} \omega_{\sigma}. \quad \square$$

2.3 Intégrales et relations de stuffle

On explique ici des idées, déjà présentes chez Goncharov [Gon02] et dans la thèse de Francis Brown [Bro06], qui permettent d'exprimer les relations de stuffle (2.2) en termes d'intégrales.

2.3.0.1 Un exemple simple

Pour $\zeta(2) = \int_{\Delta_2} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1}$, le changement de variables $t_2 = x_1$ et $t_1 = x_1 x_2$ donne

$$\zeta(2) = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1}{x_1} \frac{x_1 dx_2}{1-x_1 x_2} = \int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{1-x_1 x_2}.$$

Ce changement de variables, qui en dimension 2 correspond à l'éclatement de l'origine $(0,0)$ dans le plan, correspond en dimension n à une succession d'éclatements et s'écrit

$$t_n = x_1, t_{n-1} = x_1 x_2, \dots, t_1 = x_1 \dots x_n. \quad (2.7)$$

On écrira $d^n x$ pour $dx_1 \dots dx_n$ où n est le nombre de variables que l'on intègre. En utilisant le changement de variable (2.7) pour $n = 4$ on trouve

$$\zeta(4) = \int_{[0,1]^4} \frac{d^4 x}{1-x_1 x_2 x_3 x_4}, \quad \zeta(2,2) = \int_{[0,1]^4} \frac{x_1 x_2 d^4 x}{(1-x_1 x_2)(1-x_1 x_2 x_3 x_4)}$$

et

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \frac{1}{(1-x_1 x_2)} \frac{1}{(1-x_3 x_4)} d^4 x.$$

Pour toutes variables α et β on a l'égalité suivante

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)} + \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\beta\alpha)} + \frac{1}{1-\alpha\beta} \quad (2.8)$$

qui sera la clé des calculs de cette section.

En posant $\alpha = x_1x_2$ et $\beta = x_3x_4$, la formule (2.8) donne après intégration du membre de gauche

$$\zeta(2)\zeta(2) = \int_{[0,1]^4} \left(\frac{x_1x_2}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3x_4)} + \frac{x_3x_4}{(1-x_3x_4)(1-x_3x_4x_1x_2)} + \frac{1}{1-x_1x_2x_3x_4} \right) d^4x.$$

On retrouve ainsi la relation de stuffle

$$\zeta(2)\zeta(2) = \zeta(2, 2) + \zeta(2, 2) + \zeta(4).$$

2.3.0.2 Cas général

Nous allons ici montrer comment la décomposition de Cartier (2.10) permet d'exprimer toutes les relations de stuffle à l'aide d'intégrales comme dans l'exemple ci-dessus.

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets d'entiers avec $k_1, l_1 \geq 2$. Comme précédemment, si un objet dépend naturellement d'un terme $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, il sera noté avec σ en indice.

Définition 2.3.1. Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ comme précédemment et $n = k_1 + \dots + k_p$. On note f_{k_1, \dots, k_p} , ou plus simplement $f_{\mathbf{k}}$, la fonction de n variables définie sur $[0, 1]^n$ par

$$f_{\mathbf{k}}(x_1, \dots, x_n) = f_{k_1, \dots, k_p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1-x_1 \cdots x_{k_1}} \frac{x_1 \cdots x_{k_1}}{1-x_1 \cdots x_{k_1} x_{k_1+1} \cdots x_{k_1+k_2}} \cdots \frac{x_1 \cdots x_{k_1+\dots+k_{p-1}}}{1-x_1 \cdots x_{k_1+k_2+k_3} \cdots 1-x_1 \cdots x_{k_1+\dots+k_p}}.$$

Proposition 2.3.2 (Représentation cubique des MZV). *Pour tout p -uplet d'entiers (k_1, \dots, k_p) de poids n , avec $k_1 \geq 2$, on a*

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{[0,1]^n} f_{k_1, \dots, k_p}(x_1, \dots, x_n) d^n x. \quad (2.9)$$

Démonstration. Soit $\omega_{\mathbf{k}}$ la forme différentielle associée au p -uplet (k_1, \dots, k_p) avec $n = k_1 + \dots + k_p$, telle que $\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{\Delta_n} \omega_{\mathbf{k}}$.

En appliquant le changement de variables (2.7) à $\omega_{\mathbf{k}}$, on observe que pour chaque terme de la forme $\frac{dt_i}{t_i}$, le facteur $\frac{1}{t_i}$ fait apparaître un terme $\frac{1}{x_1 \cdots x_{n-i+1}}$ qui se simplifie avec $\frac{dt_{i-1}}{\dots} = \frac{x_1 \cdots x_{n-i+1} dx_{n-i+2}}{\dots}$. Cela démontre la proposition. \square

Afin de déduire les relations de stuffle du calcul d'intégrales et des fonctions f_{k_1, \dots, k_p} , on aura besoin des notations suivantes.

Notation 2.3.3. Soit \mathbf{k} un uplet d'entiers (k_1, \dots, k_p) et $n = k_1 + \dots + k_p$. On se donne n variables x_1, \dots, x_n .

– Pour tout uplet $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r)$, on écrira $\prod \mathbf{a}$ pour le produit

$$\prod \mathbf{a} = a_1 \cdots a_r.$$

– Le uplet (x_1, \dots, x_n) est noté \mathbf{x} . On pose de plus

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}, 1) = (x_1, \dots, x_{k_1})$$

ainsi que

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}, i) = (x_{k_1+\dots+k_{i-1}+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_i}),$$

de telle sorte que \mathbf{x} est la concaténation des uplets $\mathbf{x}(\mathbf{k}, 1) \cdots \mathbf{x}(\mathbf{k}, p)$.

- Afin d'alléger les calculs, on utilise $\mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq i)$ pour désigner le uplet $(x_1, \dots, x_{k_1+\dots+k_i}) = \mathbf{x}(\mathbf{k}, 1) \cdots \mathbf{x}(\mathbf{k}, i)$. Si $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_0, k_p)$ est la concaténation du uplet \mathbf{k}_0 et de l'entier k_p , $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p-1)$ sera le uplet

$$(x_1, \dots, x_{k_1+\dots+k_{p-1}}).$$

- Soit \mathbf{l} un q -uplet avec $l_1 + \dots + l_q = m$ et $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. On introduira alors m variables supplémentaires x'_1, \dots, x'_m qui donneront lieu aux notations correspondantes $\mathbf{x}'(\mathbf{l}, j)$, $\mathbf{x}'(\mathbf{l}, \leq j)$, \mathbf{x}'_0 .

Pour σ dans $\text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, on note aussi y_σ le $n+m$ uplet en les variables $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m$ dans lequel chaque groupe de variables

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}, i) = (x_{k_1+\dots+k_{i-1}+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_i})$$

$$\text{(resp. } \mathbf{x}'(\mathbf{l}, j) = (x'_{l_1+\dots+l_{j-1}+1}, \dots, x'_{l_1+\dots+l_j}))$$

est à la position de k_i (resp. l_j) dans σ . Les termes de σ de la forme $k_i + l_j$ donnent lieu à un sous-uplet

$$(x_{k_1+\dots+k_{i-1}+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_i}, x'_{l_1+\dots+l_{j-1}+1}, \dots, x'_{l_1+\dots+l_j}) = (\mathbf{x}(\mathbf{k}, i), \mathbf{x}'(\mathbf{l}, j)).$$

- En suivant ces conventions, les produits $x_1 \cdots x_{k_1}$, $x_{k_1+\dots+k_{i-1}+1} \cdots x_{k_1+\dots+k_i}$, $x_1 \cdots x_{k_1+\dots+k_i}$ sont notés respectivement $\prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, 1)$, $\prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, i)$, $\prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq i)$. De même, en vertu des notations $\mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p-1) = \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p) = \mathbf{x}$, les produits $\prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p-1)$ et $\prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p)$ sont désignés par $\prod \mathbf{x}_0$ et $\prod \mathbf{x}$.

On remarque enfin que pour tout σ dans $\text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, on a

$$\prod y_\sigma = \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'.$$

Remarque 2.3.4. Soit $(k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k}_0, k_p)$ un uplet d'entiers. On a

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}) = f_{k_1, \dots, k_{p-1}}(\mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p-1)) \frac{\prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p-1)}{1 - \prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq p)} = f_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}}.$$

Proposition 2.3.5 (Décomposition de Cartier). *Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets d'entiers de poids n et m avec $k_1, l_1 \geq 2$. On a*

$$f_{k_1, \dots, k_p}(\mathbf{x}(\mathbf{k}, 1), \dots, \mathbf{x}(\mathbf{k}, p)) \cdot f_{l_1, \dots, l_q}(\mathbf{x}'(\mathbf{l}, 1), \dots, \mathbf{x}'(\mathbf{l}, q)) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} f_\sigma(y_\sigma). \quad (2.10)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la longueur des uplets, la définition récursive du produit stuffle étant donnée en (2.1).

Si $p = q = 1$.

On a par hypothèse $\mathbf{k} = (n)$ et $\mathbf{l} = (m)$. Comme

$$f_n(\mathbf{x}(\mathbf{k}, 1)) f_m(\mathbf{x}'(\mathbf{l}, 1)) = \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}(\mathbf{k}, \leq 1)} \cdot \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'(\mathbf{l}, \leq 1)} = \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}} \cdot \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x}'},$$

la formule (2.8) appliquée à $\alpha = \prod \mathbf{x}$ et $\beta = \prod \mathbf{x}'$ donne

$$f_n(\mathbf{x}(\mathbf{k}, 1)) f_m(\mathbf{x}'(\mathbf{l}, 1)) = \frac{\prod \mathbf{x}}{(1 - \prod \mathbf{x})(1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} + \frac{\prod \mathbf{x}'}{(1 - \prod \mathbf{x}')(1 - \prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x})} + \frac{1}{1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'}. \quad (2.11)$$

On en déduit le résultat pour $p = q = 1$.

Pas de la récurrence.

Soit $(k_1, \dots, k_p) = (\mathbf{k}_0, k_p)$ et $(l_1, \dots, l_q) = (\mathbf{l}_0, l_q)$ deux uplets tels qu'énoncés. D'après la remarque 2.3.4, on a l'égalité suivante

$$f_{\mathbf{k}_0, k_p}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\mathbf{k}, p)) f_{\mathbf{l}_0, l_q}(\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'(\mathbf{l}, q)) = f_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}_0) \frac{\prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}} f_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{x}'_0) \frac{\prod \mathbf{x}'_0}{1 - \prod \mathbf{x}'}$$

En appliquant la formule (2.8) avec $\alpha = \prod \mathbf{x}$ et $\beta = \prod \mathbf{x}'$, on obtient que le membre de droite de l'égalité précédente vaut

$$f_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}_0) f_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{x}'_0) \cdot (\prod \mathbf{x}_0 \cdot \prod \mathbf{x}'_0) \left(\frac{\prod \mathbf{x}}{(1 - \prod \mathbf{x})(1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} + \frac{\prod \mathbf{x}'}{(1 - \prod \mathbf{x}')(1 - \prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x})} + \frac{1}{(1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}')} \right).$$

En développant puis en utilisant la remarque 2.3.4, on trouve

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{k}_0, k_p}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\mathbf{k}, p)) f_{\mathbf{l}_0, l_q}(\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'(\mathbf{l}, q)) = \\ \left(f_{\mathbf{k}_0, k_p}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{x}'_0) \right) \cdot \frac{\prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'_0}{1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'} + \left(f_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}_0) f_{\mathbf{l}_0, l_q}(\mathbf{x}') \right) \cdot \frac{\prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x}_0}{1 - \prod \mathbf{x}' \prod \mathbf{x}} \\ + \left(f_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}_0) f_{\mathbf{l}_0}(\mathbf{x}'_0) \right) \cdot \frac{\prod \mathbf{x}_0 \prod \mathbf{x}'_0}{1 - \prod \mathbf{x} \prod \mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

On en déduit que le produit des fonctions f_{k_1, \dots, k_p} et f_{l_1, \dots, l_q} satisfait une relation de récurrence identique à la formule (2.1) définissant le produit stuffle. On utilise donc, dans l'équation (2.12), l'hypothèse de récurrence puis une dernière fois la remarque 2.3.4 ce qui conclut la preuve de la proposition. \square

En intégrant l'équation (2.10) de la proposition précédente sur le cube de dimension $n + m$, puis en permutant les variables dans chaque terme du membre de droite, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.6 (Représentation intégrale du stuffle). *Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ deux uplets d'entiers de poids n et m avec $k_1, l_1 \geq 2$. On a les égalités suivantes*

$$\zeta(\mathbf{k}) \zeta(\mathbf{l}) = \int_{[0,1]^n} f_{\mathbf{k}} d^n x \int_{[0,1]^m} f_{\mathbf{l}} d^m x = \int_{[0,1]^{n+m}} \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} f_{\sigma} d^{n+m} x = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta(\sigma).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que les intégrales convergent. Comme toutes les intégrales considérées sont des intégrales de fonctions positives sur le domaine d'intégration, toutes les opérations (manipulations d'expressions, changements de variables) sont licites et la convergence de chaque terme à chaque étape est assurée, en particulier, par la convergence de la représentation en intégrales itérées des valeurs zêta multiples. \square

Chapitre 3

Espaces de modules de courbes ; double mélange et application d'oubli

3.1 Espaces de modules de courbes de genre 0 à n points marqués

On rappelle ici la définition et les principales propriétés des espaces de modules de courbes de genre 0 à n points marqués.

Définition 3.1.1 (contexte analytique). Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

L'espace de modules de courbes de genre 0 avec n points marqués, $\mathcal{M}_{0,n}$, est l'ensemble des classes d'isomorphismes des surfaces de Riemann de genre 0 (c'est-à-dire des sphères de Riemann) munies de n points distincts ordonnés, on parle de points marqués ; les isomorphismes (structure analytique) envoyant points marqués sur points marqués en respectant l'ordre.

On se donne maintenant n un entier naturel. Comme il n'y a essentiellement qu'une surface de Riemann de genre 0, la sphère de Riemann, et que le groupe de ses automorphismes est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, on voit que l'espace $\mathcal{M}_{0,n+3}$ est isomorphe à

$$\mathcal{M}_{0,n+3} = \left\{ (z_0, \dots, z_{n+2}) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^{n+3} \text{ tel que } z_i \neq z_j \right\} / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

On notera un point de $\mathcal{M}_{0,n+3}$ par $[z'_0, \dots, z'_{n+2}]$ ou, l'action de PSL_2 étant tri-transitive, par un représentant bien choisi de sa classe d'équivalence, $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$. On obtient ainsi l'isomorphisme

$$\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq \left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\} \right)^n \setminus \left(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{t_i = t_j\} \right).$$

Cet isomorphisme n'est pas canonique, il dépend du choix d'un système de représentants, ou de façon équivalente du choix d'un birapport, dans notre cas on a

$$t_i = \frac{z'_i - z'_0}{z'_i - z'_{n+2}} \frac{z'_{n+1} - z'_{n+2}}{z'_{n+1} i - z'_0}.$$

Si l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,n+3}$ n'est pas compact, il existe une compactification $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ définie par Deligne et Mumford qui est encore un espace de modules, c'est-à-dire telle que le bord $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus \mathcal{M}_{0,n+3}$ soit encore un espace classifiant. Plus précisément, un point de $\partial \overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ est une classe d'isomorphismes de surfaces de Riemann stables à n points marqués, c'est-à-dire une classe d'isomorphismes d'arbres de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les points de contacts étant des points doubles géométriques et

les n points marqués étant répartis sur les différentes sphères de Riemann de telle sorte que chacune supporte au moins 3 points spéciaux (points de contacts ou points marqués).

Dans un contexte géométrique, l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ étant défini comme le schéma représentant le foncteur qui à un schéma S associe les classes d'isomorphismes de courbe stable à $n+3$ points marqués au-dessus de S on a le théorème suivant.

Théorème 3.1.2 ([DM69]). *L'espace de modules, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$, est un schéma intègre défini sur \mathbb{Z} dont le bord $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus \mathcal{M}_{0,n+3}$ est un diviseur à croisements normaux.*

Si l'ensemble de points complexes $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{C})$ est connexe, il n'en est pas de même des points réels, $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$. En effet ceux-ci correspondent, d'un point de vue analytique, à des classes d'isomorphismes de la sphère de Riemann, les points marqués étant répartis le long de l'axe réel, un équateur de la sphère. Ces points sont répartis dans un certain ordre le long du cercle $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et l'on ne peut continuellement déplacer les points pour passer d'un ordre à un autre sans que deux se rencontrent, c'est-à-dire sans passer dans le bord de $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$.

Proposition 3.1.3 ([GM04]). *Les composantes connexes de $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ sont en bijection avec les ordres non orientés cycliques des indices, la correspondance étant donnée par l'ordre réel des points marqués sur l'axe réel.*

Définition 3.1.4. On appellera cellule une composante connexe de $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$ et cellule standard, la cellule contenant les points $(0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty)$ vérifiant $0 < z_1 < \dots < z_n < 1 < \infty$.

Soit S un ensemble fini, on note $\mathcal{M}_{0,S}$, l'espace des modules $\mathcal{M}_{0,|S|}$, les points marqués étant vus comme indexés par les éléments de S . Soit T un sous-ensemble de S tel que $|T| \geq 3$, on a un morphisme naturel

$$\mathcal{M}_{0,S} \longrightarrow \mathcal{M}_{0,T}$$

qui consiste à oublier les points marqués de S qui ne sont pas dans T . Ce morphisme s'étend à la compactification de Deligne-Mumford $\overline{\mathcal{M}}_{0,S} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,T}$; on parle d'application d'oubli dans les deux cas.

Si T_1 et T_2 sont deux sous-ensembles de S tels que $|T_1 \cap T_2| = 3$, on obtient un morphisme

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,S} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,T_1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,T_2}.$$

Ce morphisme peut être décrit comme une succession d'éclatements le long de certaines sous variétés de $\overline{\mathcal{M}}_{0,T_1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,T_2}$.

3.2 Produit de mélange et espace de modules

Soit \mathbf{k} et \mathbf{l} deux uplets comme dans le chapitre précédent, $n = k_1 + \dots + k_p$ et $m = l_1 + \dots + l_q$ leurs poids respectifs. Avec les identifications précédentes, pour un entier naturel j , on identifiera un point de l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,j+3}$ avec un uplet $(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty)$. On note Φ_j la cellule standard de $\mathcal{M}_{0,j+3}(\mathbb{R})$, celle qui est envoyée sur Δ_j , le simplexe standard, par l'application : $\beta_j : \mathcal{M}_{0,j+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^j$, qui envoie $(0, z_1, \dots, z_j, 1, \infty)$ sur (z_1, \dots, z_j) .

Goncharov et Manin, dans l'article [GM04], relèvent la représentation des valeurs zêta multiples comme intégrale sur un simplexe, à l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$

$$\zeta(k_1, \dots, k_p) = \int_{\Phi_n} \beta_n^*(\omega_{\mathbf{k}}).$$

Cette représentation a le mérite d'être plus manipulable en termes algébriques. En effet contrairement à l'intégrale sur Δ_n qui réclame un minimum d'attention concernant les problèmes de convergence, l'intégrale sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ est celle d'une forme différentielle continue sur son domaine d'intégration d'adhérence compacte ainsi que sur le bord de celui-ci. Cette représentation permet de voir $\zeta(k_1, \dots, k_p)$ comme une période d'un motif de Tate mixte dont les différentes réalisations sont des groupes de cohomologie relative sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$. D'autre part, comme F. Brown l'a signalé dans sa thèse [Bro06], cette présentation permet de voir les deux différents produits de mélange comme deux cas particuliers de produits induits sur les valeurs zêta multiples par différents produits d'application d'oubli. L'objet de cette section et de la suivante est de présenter ce parallélisme afin de mettre en lumière les problèmes qui se posent pour obtenir une version motivique du mélange contractant.

Proposition 3.2.1. *Soit β l'application définie par*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{0,n+m+3} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3} \\ (0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) & \longmapsto & (0, z_1, \dots, z_n, 1, \infty) \times (0, z_{n+1}, \dots, z_{n+m}, 1, \infty). \end{array}$$

Alors, t_i étant la coordonnée sur $\mathcal{M}_{0,n+m+3}$ telle que $t_i(0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) = z_i$, on a

$$\beta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{1}}) = \frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_n}{t_n} \wedge \frac{dt_{n+1}}{1-t_{n+1}} \wedge \dots \wedge \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$

De plus, pour tout $\sigma \in \text{sh}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket n+1, n+m \rrbracket)$ on note Φ_{n+m}^σ la cellule ouverte de $\mathcal{M}_{0,n+m+3}(\mathbb{R})$ dans laquelle les points marqués sont dans le même ordre que celui de leurs indices dans σ . On a ainsi

$$\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m) = \coprod_{\sigma \in \text{sh}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket n+1, n+m \rrbracket)} \Phi_{n+m}^\sigma.$$

Démonstration. La première partie découle des définitions du pull-back et des coordonnées.

Pour montrer que $\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m) = \coprod \Phi_{n+m}^\sigma$ on utilise le fait qu'une cellule de $\mathcal{M}_{0,n+m+3}(\mathbb{R})$ est définie par un ordre cyclique sur les points marqués. Soit $X = (0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty)$ un point de $\mathcal{M}_{0,n+m+3}(\mathbb{R})$ tel que $\beta(X) \in \Phi_n \times \Phi_m$. Les valeurs des z_i doivent alors satisfaire

$$0 < z_1 < \dots < z_n < 1 (< \infty) \quad \text{et} \quad 0 < z_{n+1} < \dots < z_{n+m} < 1 (< \infty). \quad (3.1)$$

Il n'y a cependant aucune condition entre, disons, z_1 et z_{n+1} .

Donc, les points de $\mathcal{M}_{0,n+m+3}(\mathbb{R})$ qui sont dans $\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)$ sont tels que les points marqués z_i vérifient (3.1); c'est à dire qu'ils sont dans $\coprod_{\sigma \in \text{sh}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket n+1, n+m \rrbracket)} \Phi_{n+m}^\sigma$. \square

Comme $\Phi_n \times \Phi_m \setminus (\beta(\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)))$ est de codimension 1, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *La relation de shuffle $\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{1}) = \sum_{\sigma \in \text{sh}(\mathbf{k}, \mathbf{1})} \zeta(\sigma)$ est une conséquence du changement de variable suivant*

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{1}} = \int_{\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \beta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{1}}).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, le membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal à

$$\sum_{\sigma \in \text{sh}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket n+1, n+m \rrbracket)} \int_{\Phi_{n+m}^\sigma} \frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}.$$

Il s'agit ensuite, pour chacun des termes de la somme, de permuter les variables puis de les renuméroter de façon à obtenir une intégrale sur Φ_{n+m} . Ce calcul est identique à celui qui a été fait pour l'intégrale sur \mathbb{R}^{n+m} de la proposition 2.2.2.

Concernant la convergence, comme $\frac{dt_1}{1-t_1} \wedge \dots \wedge \frac{dt_{n+m}}{t_{n+m}}$ (resp. $\frac{dt_{\sigma(1)}}{1-t_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \frac{dt_{\sigma(n+m)}}{t_{\sigma(n+m)}}$) n'a pas de pôle le long du bord de Φ_{n+m}^σ (resp. Φ_{n+m}), toutes les intégrales sont convergentes. \square

3.3 Stuffle et espace de modules

Dans la section 2.3, on a introduit la représentation en intégrale cubique (sur un cube) des valeurs zêta multiples, par un changement de variables à partir de la représentation simpliciale, de façon à exprimer le produit stuffle à l'aide d'intégrales. On utilise ici un changement de variables identique pour introduire un autre système de coordonnées locales sur un ouvert de $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3}$; on parlera, en suivant [Bro06], de coordonnées cubiques. Ces coordonnées u_i sont définies par $u_1 = t_r$ et $u_i = t_{r-i+1}/t_{r-i+2}$ pour $2 \leq i \leq r$ où les t_i sont les coordonnées usuelles (simpliciales) sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3}$. Cet autre système est le plus adapté pour exprimer le produit stuffle en terme d'application d'oubli.

Proposition 3.3.1. *On rappelle que pour un entier r , $[z'_0, \dots, z'_{r+2}]$ désigne la classe d'équivalence dans $\mathcal{M}_{0,r+3}$ de la sphère de Riemann ayant pour points marqués z'_0, \dots, z'_{r+2} .*

Soit δ l'application définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{0,n+m+3} &\xrightarrow{\delta} \mathcal{M}_{0,n+3} \times \mathcal{M}_{0,m+3} \\ (0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) &\longmapsto (0, z_{m+1}, \dots, z_{n+m}, 1, \infty) \times [0, z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \infty]. \end{aligned}$$

En écrivant l'expression de $\omega_{\mathbf{k}}$ et de $\omega_{\mathbf{l}}$ dans les coordonnées cubiques, on trouve

$$\omega_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}(u_1, \dots, u_n) d^n u \text{ et } \omega_{\mathbf{l}} = f_{\mathbf{l}}(u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) d^m u$$

où $f_{\mathbf{k}}$ et $f_{\mathbf{l}}$ ont la même expression que les fonctions homonymes définies dans la section 2.3. On a alors, dans ce système de coordonnées, l'expression de $\delta^(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}})$:*

$$\delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}) = f_{k_1, \dots, k_p}(u_1, \dots, u_n) f_{l_1, \dots, l_q}(u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) d^{n+m} u,$$

de plus

$$\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m) = \Phi_{n+m}.$$

Démonstration. On commence par montrer la seconde partie de la proposition.

Soit $X = (0, z_1, \dots, z_{n+m}, 1, \infty)$ tel que $\delta(X) \in \Phi_n \times \Phi_m$. Les valeurs z_i doivent alors vérifier

$$0 < z_1 < \dots < z_m < z_{m+1} (< \infty) \quad \text{et} \quad 0 < z_{m+1} < \dots < z_{n+m} < 1 (< \infty). \quad (3.2)$$

Ces deux conditions montrent que nécessairement

$$0 < z_1 < \dots < z_m < z_{m+1} < \dots < 1 < \infty,$$

On en déduit que $X \in \Phi_{n+m}$ et d'autre part Φ_{n+m} s'envoie dans $\Phi_n \times \Phi_m$.

Afin de prouver le premier point, il suffit de remarquer que δ s'exprime dans les coordonnées cubiques de la façon suivante

$$(u_1, \dots, u_{n+m}) \longmapsto (u_1, \dots, u_n) \times (u_{n+1}, \dots, u_{n+m}).$$

En effet, étant donné l'expression des coordonnées u_i en fonction des coordonnées simpliciales t_i , on a le résultat pour le facteur gauche du produit. En ce qui concerne le facteur de droite, on commence par l'écrire à l'aide du système de représentants standard sur $\mathcal{M}_{0,m+3}$, on trouve alors

$$[0, z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \infty] = (0, z_1/z_{m+1}, \dots, z_m/z_{m+1}, 1, \infty) = (0, t_1, \dots, t_m, 1, \infty)$$

dans les coordonnées simpliciales. Ce point s'écrit dans les coordonnées cubiques sur $\mathcal{M}_{0,m+3}$

$$(t_m, t_{m-1}/t_m, \dots, t_1/t_2) = (z_m/z_{m+1}, \dots, z_1/z_2) = (u_{n+1}, \dots, u_{n+m}).$$

□

La discussion précédente ainsi que la section 2.3, nous amènent, en suivant la même procédure que pour le mélange shuffle, à la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. *Le produit stuffle peut être vu comme une conséquence de la décomposition de Cartier (2.10) et du changement de variable suivant*

$$\int_{\Phi_n \times \Phi_m} \omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}} = \int_{\delta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)} \delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}).$$

Remarque 3.3.3. Il faut cependant remarquer que la décomposition de Cartier « ne vit pas » dans les espaces de modules de courbes $\mathcal{M}_{0,r+3}$, en ce sens que dans le processus de décomposition certaines formes différentielles apparaissent qui ne sont pas holomorphes sur l'espace de modules ouvert. Par exemple, en appliquant la décomposition à $f_{2,1}(u_1, u_2, u_3)f_{2,1}(u_4, u_5, u_6)$, on voit apparaître un terme

$$\frac{u_1 u_2 u_4 u_5 du_1 du_2 du_3 du_4 du_5 du_6}{(1 - u_1 u_2 u_4 u_5)(1 - u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)}$$

qui n'est pas holomorphe sur $\mathcal{M}_{0,9}$ (le diviseur donné par l'équation $1 - u_1 u_2 u_4 u_5 = 0$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,9}$ a une intersection non vide avec $\mathcal{M}_{0,9}$). Malgré cela, c'est une forme bien définie et convergente sur la cellule standard où elle est intégrée. Renommer les variables en échangeant u_3 et u_5 (ce qui stabilise la cellule standard donnée par $0 < u_i < 1$) donne l'égalité avec $\zeta(4, 2)$. Cet exemple est représentatif de la situation générale : tant que l'on travaille uniquement avec des intégrales, seul compte ce qui se passe sur la cellule standard où tout est bien défini, la convergence étant assurée par le fait que les fonctions y sont positives. Cependant, il faudra prendre ces problèmes en considération dans le contexte des motifs encadrés.

Chapitre 4

Shuffle motivique pour les mots « convergents »

4.1 Catégorie de motifs et motifs de Tate mixtes

Les deux sections suivantes sont dédiées à des rappels, brefs, des outils motiviques qui seront utilisés pour exhiber une version nouvelle de la nature motivique des relations de double mélange. On se place dans une catégorie de motifs, $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$, version contravariante de la catégorie triangulée DM_{gm} de Voevodsky [Voe00]. On note $\text{Sm}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des variétés lisses sur \mathbb{Q} et on note h le foncteur

$$\text{Sm}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$$

qui à une variété lisse X associe son motif $h(X)$.

Proposition 4.1.1 (Formule de l'éclatement). *Soit X une variété lisse, $Z \subset X$ une sous-variété lisse purement de codimension d . On note $\text{Bl}_Z X$ l'éclatement de X le long de Z . Voevodsky montre dans [Voe00] qu'on a alors l'égalité suivante dans $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$*

$$h(\text{Bl}_Z X) = h(X) \bigoplus_{i=1}^{d-1} h(Z)(-i)[-2i]. \quad (4.1)$$

Goncharov dans [Gon99][chapitre 5] et Levine dans [Lev93] construisent de façon indépendante la catégorie des motifs de Tate mixtes $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$. Cette construction est aussi rappelée dans [DG05].

Définition 4.1.2. Soit A et B deux objets de $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$. On dit qu'un objet E de $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$ est une extension de B par A , s'il existe un triangle distingué

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A[1].$$

On note $\mathcal{DMT}_{\mathbb{Q}}$ la sous catégorie triangulée pleine de $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$ formée des extensions itérées d'objets de la formes $\mathbb{Q}(r)[i]$.

Définition 4.1.3 (t -structure). Soit \mathcal{T} une catégorie triangulée. Une t -structure sur \mathcal{T} est la donnée de deux sous-catégories pleines $\mathcal{T}^{\leq 0}$ et $\mathcal{T}^{\geq 0}$ telles que tout objet de \mathcal{T} isomorphe à un objet de $\mathcal{T}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{T}^{\geq 0}$) soit dans $\mathcal{T}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{T}^{\geq 0}$) et satisfaisant les propriétés suivantes :

- pour tout A dans $\mathcal{T}^{\leq 0}$ et B dans $\mathcal{T}^{\geq 0}$ on a $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(A[1], B) = 0$,
- $\mathcal{T}^{\leq 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leq 0}$ et $\mathcal{T}^{\geq 0} \subset \mathcal{T}^{\geq 0}[1]$,

- pour tout objet E de \mathcal{T} il existe un triangle distingué $A \rightarrow E \rightarrow B[-1] \rightarrow A[1]$ avec A dans $\mathcal{T}^{\leq 0}$ et B dans $\mathcal{T}^{\geq 0}$.

L'inclusion de $\mathcal{T}^{\leq 0}$ (resp. $\mathcal{T}^{\geq 0}$) dans \mathcal{T} admet un adjoint à droite $\tau_{\leq 0}$ (resp. un adjoint à gauche $\tau_{\geq 0}$).

La sous-catégorie pleine $\mathcal{A} = \mathcal{T}^{\leq 0} \cap \mathcal{T}^{\geq 0}$ est appelée *coeur* de la t -structure et on dispose de foncteur ${}^{\tau}H^i : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ défini par

$$A \mapsto \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}(A[i]).$$

Proposition 4.1.4 ([Gon99] ou [Lev93]). *La catégorie $\mathcal{DMT}_{\mathbb{Q}}$ admet une t -structure dont le coeur $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$ est une catégorie abélienne stable par produit tensoriel et passage au dual. La catégorie $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$ a pour objets les extensions itérées des $\mathbb{Q}(r)$.*

Pour chaque objet A de $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$, on dispose de plus d'une filtration par le poids W finie croissante et indexée par les entiers pairs telle que les parties graduées

$$\mathrm{Gr}_{-2n}^W A = W_{-2n}A/W_{-2(n+1)}A$$

soient isomorphes à une somme finie de $\mathbb{Q}(n)$. On note $w_n(-)$ le foncteur dans la catégorie des \mathbb{Q} -espaces vectoriels gradués qui à M dans $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(n); \mathrm{Gr}_{-2n}^W(M))$, et $w = \bigoplus_n w_n$.

La catégorie $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$ est tannakienne neutre et le foncteur w est un foncteur fibre.

Remarque 4.1.5. Pour construire un objet de $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$ il est donc suffisant d'avoir un objet de $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$ qui soit obtenu à partir d'extensions itérées d'objets de la forme $\mathbb{Q}(r)[i]$ puis en utilisant la t -structure de $\mathcal{DMT}_{\mathbb{Q}}$ d'obtenir un objet de $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$.

Nous donnons maintenant quelques exemples de réalisation de la catégorie $\mathcal{MTM}(\mathbb{Q})$ dans des théories cohomologiques usuelles.

Définition 4.1.6. Soit \mathcal{A} une catégorie tannakienne sur \mathbb{Q} d'élément neutre $\mathbf{1}$ et munie de twists de Tate $\mathbf{1}(r)$. En notant $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée à gauche, on appelle foncteur de réalisation, un foncteur triangulé \mathcal{R}

$$\mathcal{R} : \mathcal{DM}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$$

commutant au produit tensoriel, envoyant $\mathbb{Q}(r)$ sur $\mathbf{1}(r)$.

M. Levine dans [Lev98] et A. Huber dans [Hub04, Hub00] ont construit les différentes réalisations dans les théories cohomologiques usuelles (Betti, De Rham, l -adique). Sous certaines hypothèses, il est suffisant d'avoir un foncteur à valuer dans la catégorie des complexes bornés à gauche d'objets de \mathcal{A}

$$\mathcal{C}_A : \mathrm{Sm}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C}^+(\mathcal{A})$$

qui s'étend ensuite en une réalisation. Lorsque $\mathcal{R}(X)$, pour X dans $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$ est dans la sous catégorie des complexes bornés, on peut composer \mathcal{R} avec le foncteur $\bigoplus H^i$ et ainsi obtenir un élément de \mathcal{A} .

Exemple 4.1.7 (Réalizations). On note $\mathrm{God}(\mathcal{F})$ la résolution de Godement d'un faisceau \mathcal{F} .

Réalisation de De Rham Le foncteur qui à une variété lisse X associe $\Gamma(X, \mathrm{God}(\Omega_{X/\mathbb{Q}}^*))$ s'étend en un foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathrm{DR}} : \mathcal{DM}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}).$$

Réalisation de Betti Le foncteur qui à une variété lisse X associe le complexe $C^*(X(\mathbb{C}))$ des cochaînes singulières attachées à $X(\mathbb{C})$ s'étend en un foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathrm{B}} : \mathcal{DM}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}).$$

Réalisation de Hodge En suivant [Del71], on peut associer à une variété lisse X un complexe $\Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle$ des formes différentielles sur \bar{X} , une compactification lisse projective de X , et à pôles logarithmiques le long du diviseur lisse à croisements normaux $Y = \bar{X} \setminus X$. Le foncteur associant à X le complexe $\Gamma(X, \text{God}(\Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle))$ est à valeurs dans la catégorie des complexes de structures de Hodge mixtes sur \mathbb{Q} la filtration de Hodge sur $\Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle$ étant la filtration « bête » et la filtration par le poids étant donnée par « l'ordre des pôles » ([Del71], [Voi02])

$$F^p \Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle = \Omega_{\bar{X}}^{\geq p} \langle Y \rangle \quad W_l \Omega_{\bar{X}}^* \langle Y \rangle = \bigwedge^l \Omega_{\bar{X}}^1 \langle Y \rangle \bigwedge \Omega_{\bar{X}/\mathbb{Q}}^{*-l}.$$

Ce foncteur s'étend en un foncteur

$$\mathcal{R}_{\text{Hd}} : \mathcal{DM}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{D}^+(MHS_{\mathbb{Q}}).$$

On sera par la suite amené à composer ces foncteurs de réalisation avec l'un des H^i de la catégorie dérivée, on notera cette composition $H^i \mathcal{R}_{\bullet}$ où \bullet sera remplacé par DR, B ou Hd.

4.2 Motifs de Tate mixtes encadrés et situations géométriques

Goncharov a développé dans [Gon99], [Gon05] et [Gon01] une structure additionnelle sur les motifs de Tate mixtes, introduite dans [BGSV90], afin de sélectionner une période particulière d'un motif de Tate mixte. On décrira aussi dans cette section certaines situations géométriques donnant lieu à des motifs de Tate mixtes encadrés, en particulier, on donnera la définition de valeurs zêta multiples motiviques donnée par Goncharov et Manin dans [GM04].

Définition 4.2.1. Un motif de Tate mixte n -encadré, $(M; v; f)$, est la donnée d'un motif de Tate mixte M et de deux morphismes non nuls, les cadres

$$v : \mathbb{Q}(-n) \rightarrow \text{Gr}_{2n}^W M \quad f : \mathbb{Q}(0) \rightarrow (\text{Gr}_0^W M)^\vee = \text{Gr}_0^W M^\vee.$$

Sur l'ensemble des motifs de Tate mixtes n -encadrés, on considère la relation d'équivalence la plus grossière pour laquelle $(M, v, f) \sim (M', v', f')$ s'il y a une application linéaire $M \rightarrow M'$ respectant les cadres. Soit \mathcal{A}_n l'ensemble des classes d'équivalences et \mathcal{A}_{\bullet} la somme directe des \mathcal{A}_n . On note $[M; v; f]$ la classe d'équivalence du motif de Tate mixte encadré $(M; v; f)$. Si $[M, v, f]$ désigne la classe d'équivalence de (M, v, f) dans \mathcal{A}_{\bullet} , on parlera néanmoins de motifs de Tate mixtes encadrés dans les deux cas.

Théorème 4.2.2 ([Gon05]). *On a sur \mathcal{A}_{\bullet} une structure naturelle d'algèbre de Hopf graduée commutative sur \mathbb{Q} où le produit de $[M; v; f]$, motif de Tate mixte n -encadré, par $[M'; v'; f']$, motif de Tate mixte m -encadré est le motif $n + m$ -encadré $[M \otimes M'; v \otimes v'; f \cdot f']$.*

L'algèbre \mathcal{A}_{\bullet} est canoniquement isomorphe au dual de l'algèbre de Hopf des endomorphismes du foncteur fibre de la catégorie tannakienne des motifs de Tate mixtes.

Ici, le morphisme v peut être vu comme une certaine forme différentielle et le morphisme f comme son pendant homologique, c'est-à-dire un simplexe réel.

On énonce, maintenant, deux lemmes techniques qui seront utilisés dans la section et le chapitre suivant.

On rappelle que l'addition de deux motifs de Tate mixtes encadrés $[M; v; f]$ et $[M'; v'; f']$ est définie par

$$[M; v; f] + [M'; v'; f'] = [M \oplus M'; (v, v'); f + f'].$$

Lemme 4.2.3. *Soit M un motif de Tate mixte encadré. On se donne v, v_1, v_2 trois morphismes non nuls $\mathbb{Q}(-n) \rightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W M$ et f, f_1, f_2 trois autres morphismes non nuls $\mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathrm{Gr}_0^W M^\vee$. On a d'une part*

$$[M; v; f_1 + f_2] = [M; v; f_1] + [M; v; f_2]$$

et d'autre part

$$[M; v_1 + v_2; f] = [M; v_1; f] + [M; v_2; f].$$

Démonstration. Cela est une conséquence directe des définitions [Gon05]. Pour la première partie, il est immédiat de vérifier que l'application diagonale $\varphi : M \rightarrow M \oplus M$ est compatible avec les cadres. Pour la seconde égalité, l'application de $M \oplus M$ dans M qui envoie (m_1, m_2) sur $m_1 + m_2$ donne l'application sur les espaces vectoriels sous-jacents et respecte les cadres. \square

Lemme 4.2.4. *Soit M et M' deux motifs de Tate mixtes tels que M admette des cadres $v : \mathbb{Q}(-n) \rightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W M$ et $f : \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathrm{Gr}_0^W M^\vee$.*

Supposons qu'il existe $v' : \mathbb{Q}(-n) \rightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W M'$ non nul et $\varphi : M' \rightarrow M$ compatible avec v et v' . Alors, f induit un morphisme $f' : \mathbb{Q}(0) \rightarrow \mathrm{Gr}_0^W M'^\vee$ et si f' est non nul alors φ donne une égalité de motifs de Tate mixtes encadrés $[M; v; f] = [M; v'; f']$.

On rappelle un résultat, utilisé dans [GM04] et décrit de façon explicite dans [Gon02], qui permet de construire des motifs de Tate mixtes à partir de situations géométriques naturelles. Pour cela nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 4.2.5 ([Gon02]). Une *variété de Tate* est une variété quasi-projective lisse \mathcal{M} telle que le motif de \mathcal{M} est une somme directe de copies des motifs de Tate $\mathbb{Q}(m)$ (pour différents m) éventuellement décalés.

Soit D un diviseur sur \mathcal{M} . Le diviseur D induit une stratification sur \mathcal{M} donnée par l'ensemble des composantes irréductibles des intersections possibles entre composantes irréductibles de D ; on parlera alors d'une strate de D pour désigner un tel élément.

On dit qu'un diviseur D sur \mathcal{M} fournit une stratification de Tate sur \mathcal{M} si toutes les strates de D , y compris \mathcal{M} , sont des variétés de Tate.

Définition 4.2.6 ((Co)homologie relative). Soit A une variété lisse et B un diviseur de A . L'inclusion $f : B \hookrightarrow A$ induit une flèche de restriction sur les complexes de De Rham $f_{\mathrm{DR}}^* : \Omega_{A/\mathbb{Q}}^* \rightarrow \Omega_{B/\mathbb{Q}}^*$ (respectivement, f_B^* sur les complexes des cochaînes singulières et f_{Hd}^* sur les complexes des formes à pôles logarithmiques). Le i ème groupe de cohomologie de A relativement à B , $H_{\mathrm{DR}}^i(A; B, \mathbb{Q})$ est défini comme le i ème groupe de cohomologie du complexe $\mathrm{Cone}(f_{\mathrm{DR}}^*)$, cône de f_{DR}^* (respectivement comme i ème groupe de cohomologie de $\mathrm{Cone}(f_B^*)$, ou de $\mathrm{Cone}(f_{\mathrm{Hd}}^*)$).

Les groupes $H_\bullet^i(A; B, \mathbb{Q})$ (en remplaçant \bullet par DR, B ou Hd) s'insèrent en particulier dans la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \longrightarrow H_\bullet^{i-1}(B, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_\bullet^i(A; B, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_\bullet^i(A, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_\bullet^i(B, \mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots$$

Dans le cadre de l'homologie singulière, l'inclusion $f : B \hookrightarrow A$ induit sur les complexes des chaînes singulières une injection $f_{B,*} : \mathcal{C}_*(B) \rightarrow \mathcal{C}_*(A)$ et les groupes d'homologie relative $H_{B,i}(A; B, \mathbb{Q})$ sont les groupes d'homologie du complexe $\cdots \rightarrow \mathcal{C}_i(A)/\mathcal{C}_i(B) \rightarrow \cdots$.

Soit \mathcal{M} une variété lisse et X et Y deux diviseurs à croisements normaux sur \mathcal{M} . On note Y^X le diviseur $Y \setminus (Y \cap X)$, qui est à croisements normaux sur $\mathcal{M} \setminus X$. Dans [Gon02], Goncharov donne la proposition suivante.

Proposition 4.2.7 ([Gon02][proposition 3.6]). *Soit \mathcal{M} une variété quasi-projective lisse de dimension n définie sur \mathbb{Q} et $X \cup Y$ un diviseur à croisements normaux sur \mathcal{M} donnant une stratification de Tate de \mathcal{M} . Si les diviseurs X et Y ne partagent aucune composante irréductible, alors il existe un motif de Tate mixte $m(\mathcal{M}, X, Y)$ tel que ses différentes réalisations (Betti, De Rham, Hodge) soient données par les groupes de cohomologie relative correspondants, c'est-à-dire :*

$$H^0 \mathcal{R}_{\text{DR}}(m(\mathcal{M}, X, Y)) = H_{\text{DR}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X, \mathbb{Q}),$$

$$H^0 \mathcal{R}_{\text{B}}(m(\mathcal{M}, X, Y)) = H_{\text{B}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X, \mathbb{Q}),$$

$$H^0 \mathcal{R}_{\text{Hd}}(m(\mathcal{M}, X, Y)) = H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X, \mathbb{Q}).$$

Les foncteurs \mathcal{R}_{DR} (resp. \mathcal{R}_{B} et \mathcal{R}_{Hd}) étant à valeurs dans les catégories dérivées $\mathcal{D}^+(\text{Vect}_{\mathbb{Q}})$ (resp. $\mathcal{D}^+(\text{Vect}_{\mathbb{Q}})$ et $\mathcal{D}^+(\text{MHS}_{\mathbb{Q}})$), il est nécessaire de composer le foncteur de réalisation avec le H^0 de la catégorie dérivée de façon à obtenir un espace vectoriel (une structure de Hodge mixte); la composition avec un H^i pour $i \neq 0$ étant par ailleurs égale à l'espace vectoriel $\{0\}$ (la structure de Hodge mixte $\{0\}$).

On notera dorénavant le motif $m(\mathcal{M}, X, Y)$ par

$$H^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X)$$

et ses différentes réalisations composées avec le H^0 par

$$H_{\text{DR}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X), \quad H_{\text{B}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X), \quad H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X).$$

De plus, en suivant [GM04][page 11] et les travaux de Goncharov dans [Gon02][chapitres 2 et 3], on peut énoncer la proposition 4.2.9 complémentaire qui permet de faire le lien avec les motifs de Tate mixtes encadrés.

Afin de prouver cette dernière, on utilisera le résultat suivant sur les structures de Hodge mixtes des groupes de cohomologie relative $H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)$, $H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X)$ et $H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)$. Ce résultat sera ensuite pourvu en utilisant des résultats de Deligne [Del74] sur le contrôle des poids dans l'annexe A.

Proposition 4.2.8. *Soit \mathcal{M} une variété quasi-projective lisse de dimension n ($n \geq 2$) et X et Y deux diviseurs à croisements normaux. On suppose que les composantes irréductibles de X et de Y sont lisses, que ces deux diviseurs n'ont pas de composante irréductible commune et que l'union $X \cup Y$ est encore un diviseur à croisements normaux.*

On a alors les isomorphismes suivants

$$\text{Gr}_{2n}^W(H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \simeq \text{Gr}_{2n}^W(H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X)) \tag{4.2}$$

et

$$\text{Gr}_0^W(H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \simeq \text{Gr}_0^W(H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)) \tag{4.3}$$

où H_{Hd}^* désigne, dans cette proposition, la cohomologie de De Rham à coefficients rationnels munie de sa structure de Hodge.

La proposition suivante permet d'obtenir un encadrement sur $H^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)$ à partir de la donnée d'une forme différentielle logarithmique à pôles le long de X et d'un simplexe à bord dans Y .

Proposition 4.2.9. *Soit \mathcal{M} une variété quasi-projective lisse de dimension n ($n \geq 2$) définie sur \mathbb{Q} et $X \cup Y$ un diviseur à croisements normaux sur \mathcal{M} donnant une stratification de Tate de \mathcal{M} tel que les diviseurs X et Y ne partagent aucune composante irréductible.*

Soit $[\omega_X]$ une classe non nulle de $\mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}^n(\mathcal{M} \setminus X))$ ainsi que $[\Phi_Y]$ une classe non nulle de $\mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{B},n}(\mathcal{M}; Y))$ (ici les filtrations sont, après tensorisation par \mathbb{C} , induites par la filtration par le poids des structures de Hodge correspondantes). Alors, $[\omega_X]$ et Φ_Y induisent deux morphismes non nuls :

$$v_{[\omega_X]} : \mathbb{Q}(-n) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \quad (4.4)$$

$$f_{[\Phi_Y]} : \mathbb{Q}(0) \longrightarrow \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X))^\vee \quad (4.5)$$

Par abus de notation, on écrira $[\omega_X]$ à la place de $v_{[\omega_X]}$ et $[\Phi_Y]$ à la place de $f_{[\Phi_Y]}$. On obtient ainsi un motif de Tate mixte encadré :

$$\left[\mathrm{H}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X); [\omega_X]; [\Phi_Y] \right].$$

Démonstration. La réalisation de Hodge étant pleinement fidèle dans le cas de la catégorie des motifs de Tate mixtes ([DG05, prop. 2.14], [And04, thm. 25.6.1.1], il est suffisant d'obtenir les morphismes (4.4) et (4.5) dans la réalisation de Hodge. En utilisant la proposition 4.2.8 on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) &\simeq \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X)) \\ \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) &\simeq \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)). \end{aligned}$$

De là, pour obtenir les morphismes (4.4) et (4.5), il est suffisant de construire

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{Hd}, [\omega_X]} : \mathbb{Q}(-n) &\longrightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X)) \\ f_{\mathrm{Hd}, [\Phi_Y]} : \mathbb{Q}(0) &\longrightarrow \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y))^\vee = \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)^\vee) = \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{B},n}(\mathcal{M}, Y)). \end{aligned}$$

La classe $[\omega_X]$ donne un élément $[\omega_X]_{\mathrm{Hd}}$ de $\mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X))$, et le morphisme $v_{\mathrm{Hd}, [\omega_X]}$ est celui envoyant 1 sur $[\omega_X]_{\mathrm{Hd}}$. D'autre part la classe $[\Phi_Y]$, élément de $\mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{B},n}(\mathcal{M}; Y))$, donne un élément $[\Phi_Y]_{\mathrm{Hd}}$ de $\mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)^\vee)$, et le morphisme $f_{\mathrm{Hd}, [\Phi_Y]}$ envoie 1 sur $[\Phi_Y]_{\mathrm{Hd}}$. \square

En appliquant les deux propositions précédentes aux espaces de modules de courbes $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$, on retrouve un énoncé de Goncharov et Manin dans [GM04].

Corollaire 4.2.10. *Soit X et Y deux diviseurs à croisements normaux dans $\overline{\partial \mathcal{M}}_{0,n+3}$ ($n \geq 2$). On suppose qu'ils ne partagent aucune composante irréductible. Alors n'importe quel choix d'éléments non nuls*

$$[\omega_X] \in \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}^n(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus X)); \quad [\Phi_Y] \in \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{B},n}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}; Y))$$

définissent un motif de Tate mixte encadré donné par

$$\left[\mathrm{H}^n(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus X; Y^X); [\omega_X]; [\Phi_Y] \right].$$

Démonstration. Le bord de l'espace des modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ est un diviseur à croisements normaux et toute intersection possible de ses composantes irréductibles de codimension 1 donne une variété isomorphe à un produit de la forme $\prod_{i=1}^k \overline{\mathcal{M}}_{0,n_i+3}$. En utilisant la proposition 4.2.7, pour obtenir un motif de Tate mixte, il suffit donc de montrer que pour tout $n \geq 3$, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est une variété de Tate. D'après les travaux de Keel dans [Kee92], pour $n \geq 5$, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ s'obtient à partir de $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ par des éclatements successifs $B_k \rightarrow B_{k-1}$ le long de sous-variétés disjointes isomorphes à des produits

$\prod_{i=1}^l \overline{\mathcal{M}}_{0,n_i}$ avec $n_i < n$. Les espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ étant lisses et projectifs d'après [Knu83], on peut appliquer la formule de l'éclatement (4.1) à chaque étape et par récurrence, il est suffisant de montrer que $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ est une variété de Tate. Comme $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ est un point et que $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ est isomorphe à \mathbb{P}^1 , on en déduit que pour tout $n \geq 3$, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ est une variété de Tate. \square

Le lemme suivant montre qu'on a une certaine flexibilité dans le choix de X et Y pour un motif de Tate mixte encadré de la forme $[\mathbb{H}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X); [\omega_X]; [\Phi_Y]]$. Les égalités entre motifs de Tate mixtes encadrés sont, dans chaque cas, données par les applications entre motifs de Tate mixtes induites par les inclusions des variétés les unes dans les autres, ces applications induites étant compatibles avec les cadres.

Lemme 4.2.11. *Avec les notations et sous les hypothèses des propositions 4.2.7 et 4.2.8, soit X' un diviseur à croisements normaux de \mathcal{M} contenant X qui ne partage toujours pas de composantes irréductibles avec Y tel que $X' \cup Y$ munisse \mathcal{M} d'une stratification de Tate. Alors*

$$[\mathbb{H}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X); [\omega_X]; [\Phi_Y]] = [\mathbb{H}^n(\mathcal{M} \setminus X'; Y^{X'}); [\omega_X]; [\Phi_Y]].$$

Supposons maintenant que Y' soit un diviseur à croisements normaux contenant Y ne partageant aucune composante irréductible avec X' de telle sorte que $X' \cup Y$ munisse \mathcal{M} d'une stratification de Tate. On a alors

$$[\mathbb{H}^n(\mathcal{M} \setminus X'; Y^{X'}); [\omega_X]; [\Phi_Y]] = [\mathbb{H}^n(\mathcal{M} \setminus X'; Y'^{X'}); [\omega_X]; [\Phi_Y]].$$

Proposition 4.2.12. *Soit \mathbf{k} un p -uplet d'entiers avec $k_1 \geq 2$, $A_{\mathbf{k}}$ le diviseur des singularités de la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}}$ et B_n la clôture de Zariski du bord de Φ_n (cf. section 3.2). Les diviseurs $A_{\mathbf{k}}$ et B_n ne partagent aucune composante irréductible, la forme $\omega_{\mathbf{k}}$ induit une classe $[\omega_{\mathbf{k}}]$ non nulle de $\mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}^n(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A_{\mathbf{k}}))$ et Φ_n induit une classe $[\Phi_n]$ non nulle de $\mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{B},n}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}; B_n))$.*

Démonstration. Le corollaire 3.2 de [GM04] assure que $A_{\mathbf{k}}$ n'intersecte pas le bord de Φ_n , on en déduit en particulier que $A_{\mathbf{k}}$ et B_n n'ont aucune composante irréductible en commun.

La forme $\omega_{\mathbf{k}}$, étant sur un certain ouvert de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A_{\mathbf{k}}$ de la forme

$$f(c_1, \dots, c_n) \bigwedge_{i=1}^n \frac{dc_i}{c_i}$$

avec f holomorphe et c_i des coordonnées locales sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ valant 0 sur $A_{\mathbf{k}}$, induit bien une classe $[\omega_{\mathbf{k}}]$ non nulle dans $\mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{DR}}^n(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A_{\mathbf{k}}))$.

Enfin, Φ_n donne, par définition de B_n , une classe $[\Phi_n]$ non nulle de $\mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{B},n}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}; B_n))$. \square

Goncharov et Manin, [GM04][équation (14)], donnent donc la définition suivante de valeur zêta multiple motivique, définition licite en vertu des propositions 4.2.10 et 4.2.12.

Définition 4.2.13. *Soit \mathbf{k} un p -uplet d'entiers avec $k_1 \geq 2$, $A_{\mathbf{k}}$ le diviseur des singularités de la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}}$ et B_n la clôture de Zariski du bord de Φ_n . La valeur zêta multiple motivique associée au uplet \mathbf{k} est définie dans [GM04] par*

$$[\mathbb{H}^n(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n]].$$

4.3 Le produit shuffle est motivique

L'application β définie à la proposition 3.2.1 sera l'élément principal pour vérifier que les valeurs zêta multiples motiviques satisfont au produit shuffle. Cette application s'étend à la compactification de Deligne-Mumford des espaces des modules de courbes.

$$\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \xrightarrow{\beta} \overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}}.$$

Soit $\omega_{\mathbf{k}}$ et $\omega_{\mathbf{l}}$ comme dans la section 3.2, et $A_{\mathbf{k}}$ et $A_{\mathbf{l}}$ leurs diviseurs des singularités respectifs. On note B_n et B_m les clôtures de Zariski du bord de Φ_n et de Φ_m respectivement. Pour tout $\sigma \in \text{sh}([1, n], [n+1, n+m])$, ω_σ est la forme différentielle correspondant à la valeur zêta multiple associée à σ et A_σ est son diviseur des singularités. La clôture de Zariski du bord de Φ_{n+m} est notée B_{n+m} et B_σ celle de Φ_{n+m}^σ . Les relations de shuffle entre valeurs zêta multiples motiviques sont données dans la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. *On a l'égalité entre motifs de Tate mixtes encadrés*

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{H}^n \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}} \right); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n] \right] \cdot \left[\mathbf{H}^m \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_m^{A_{\mathbf{l}}} \right); [\omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_m] \right] = \\ & \sum_{\sigma \in \text{sh}([1, n], [n+1, n+m])} \left[\mathbf{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_\sigma; B_{n+m}^{A_\sigma} \right); [\omega_\sigma]; [\Phi_{n+m}] \right]. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour prouver cette égalité, il suffit d'exhiber une application (ou plutôt une chaîne d'applications) entre les espaces vectoriels sous-jacents compatibles avec les cadres.

On note A' le bord de $(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}) \times (\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}})$; c'est le diviseur des singularités de $\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}$ sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}}$.

Soit $A_0 = \beta^{-1}(A')$, B_0 la clôture de Zariski du bord de $\Phi_0 = \beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)$ et $B_{n,m}$ celle de $\Phi_n \times \Phi_m$. L'application β donne un morphisme

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_0^{A_0} \right) \xrightarrow{\beta} \left((\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}) \times (\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}); \beta(B_0)^{A'} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \uparrow \alpha \\ & \qquad \qquad \qquad \left((\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}) \times (\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}); B_{n,m}^{A'} \right). \end{aligned}$$

On introduit l'inclusion de droite α car B_0 n'est pas envoyé sur $B_{n,m}$ via β . L'inclusion α induit un morphisme sur les motifs de Tate mixtes

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^{n+m} \left((\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}) \times (\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}); \beta(B_0)^{A'} \right) \xrightarrow{\alpha^*} \\ & \qquad \qquad \qquad \mathbf{H}^{n+m} \left((\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}) \times (\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}); B_{n,m}^{A'} \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Le cadre du membre de droite de (4.6) est donné par $[\Phi_n \times \Phi_m]$ et $[\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}]$. En appliquant le lemme 4.2.4 à (4.6), $[\Phi_n \times \Phi_m]$ induit une application $\tilde{\Phi}$ de $\mathbb{Q}(0)$ dans la partie graduée de degré $-2(n+m)$ du membre de gauche de (4.6). Plus précisément, α étant une immersion ouverte, on a $[\tilde{\Phi}] = [\Phi_n \times \Phi_m]$. On en déduit que $[\Phi_n \times \Phi_m]$ et $[\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}]$ donnent un cadre au membre de gauche de (4.6) compatible avec le morphisme α^* .

L'application β induit un morphisme entre motifs de Tate mixtes

$$\mathbf{H}^{n+m} \left((\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}) \times (\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}); \beta(B_0)^{A'} \right) \xrightarrow{\beta^*} \mathbf{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_0^{A_0} \right). \tag{4.7}$$

Dans le membre de droite de (4.7) le cadre est donné par $[\omega_0]$ où ω_0 est $\beta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}})$ et $[\Phi_0] = [\beta^{-1}(\Phi_n \times \Phi_m)]$ qui est compatible avec β^* .

La formule de Künneth donne un morphisme

$$\mathrm{H}^n(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}) \otimes \mathrm{H}^m(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_m^{A_{\mathbf{l}}}) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_{n,m}^{A'}) .$$

D'après le théorème 4.2.2, ce morphisme respecte les cadres de telle sorte que les motifs de Tate mixtes encadrés sont égaux. D'après (4.6),

$$\left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_{n,m}^{A'}); [\omega_{\mathbf{k}} \otimes \omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_n \times \Phi_m] \right]$$

est égal à

$$\left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; \beta(B_0)^{A'}); [\omega_{\mathbf{k}} \otimes \omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_n \times \Phi_m] \right],$$

et en utilisant (4.7), ce dernier est égal à

$$\left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_0^{A_0}); [\omega_0]; [\Phi_0] \right].$$

Il reste à montrer

$$\left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_0^{A_0}); [\omega_0]; [\Phi_0] \right] = \sum_{\sigma} \left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\sigma}; B_{n+m}^{A_{\sigma}}); [\omega_{\sigma}]; [\Phi_{n+m}] \right]. \quad (4.8)$$

Dans le membre de gauche de (4.8), B_0 étant inclus dans $B_{\mathrm{sh}} = \bigcup_{\sigma} B_{\sigma}$, on peut, grâce au lemme 4.2.11, remplacer B_0 par B_{sh} .

Comme $[\Phi_0] = \sum_{\sigma} [\Phi_{n+m}^{\sigma}]$, le lemme 4.2.3 montre que le membre de gauche de 4.8 est égal à

$$\sum_{\sigma} \left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{\mathrm{sh}}^{A_0}); [\omega_0]; [\Phi_{n+m}^{\sigma}] \right].$$

En utilisant le fait que $B_{\sigma} \subset B_{\mathrm{sh}}$, le lemme 4.2.11 montre que ce motif de Tate mixte encadré s'identifie à

$$\sum_{\sigma} \left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{\sigma}^{A_0}); [\omega_0]; [\Phi_{n+m}^{\sigma}] \right].$$

Comme le diviseur des singularités A de ω_0 est inclus dans A_0 , en appliquant le lemme 4.2.11, on peut remplacer A_0 par A . Enfin, une permutation des points marqués (c'est un morphisme bien défini) donne l'égalité de chacun des termes de la somme $\left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{\sigma}^{A_0}); [\omega_0]; [\Phi_{n+m}^{\sigma}] \right]$ avec

$$\left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\sigma}; B_{n+m}^{A_{\sigma}}); [\omega_{\sigma}]; [\Phi_{n+m}] \right].$$

On obtient ainsi la formule désirée

$$\left[\mathrm{H}^n(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}}); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n] \right] \cdot \left[\mathrm{H}^m(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_m^{A_{\mathbf{l}}}); [\omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_m] \right] = \sum_{\sigma \in \mathrm{sh}((1, \dots, n), (n+1, \dots, n+m))} \left[\mathrm{H}^{n+m}(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\sigma}; B_{n+m}^{A_{\sigma}}); [\omega_{\sigma}]; [\Phi_{n+m}] \right].$$

□

Chapitre 5

Le cas du produit stuffle

Le but de ce chapitre est de traduire les calculs effectués dans la section 2.3 dans un cadre motivique. Afin d'y parvenir, on définira, pour tout n supérieur à 2, une variété $X_n \rightarrow \mathbb{A}^n$ construite à partir d'une succession d'éclatements de \mathbb{A}^n . Après avoir défini une nouvelle, bien qu'équivalente, valeur zêta motivique pour chaque uplet d'entiers (k_1, \dots, k_p) (avec $k_1 + \dots + k_p = n$, $k_1 \geq 2$), on montrera, en utilisant une application naturelle de X_{n+m} dans un ouvert de $\mathcal{M}_{0,n+m+3}$, que le produit stuffle est bien défini dans un contexte motivique.

5.1 Préliminaires sur les éclatements

Lemme 5.1.1 (Éclatement d'un drapeau; [Uly02]). *Soit $V_0^1 \subset V_0^2 \subset \dots \subset V_0^r \subset W_0$ un drapeau de sous-variétés lisses d'une variété algébrique lisse W_0 . Pour $k = 1, \dots, r$, on définit inductivement W_k comme l'éclatement de W_{k-1} le long de V_{k-1}^k , puis V_k^k comme le diviseur exceptionnel dans W_k et V_k^i , $k < i$, la transformée propre de V_{k-1}^i dans W_k .*

La préimage de V_0^r dans la variété W_r est alors un diviseur à croisements normaux. $V_r^1 \cup \dots \cup V_r^r$.

Si \mathcal{F} est un drapeau de sous-variétés V_0^i d'une variété algébrique lisse W_0 comme dans le lemme précédent, on notera $\text{Bl}_{\mathcal{F}} W_0$ la variété W_s obtenue par la construction donnée dans le lemme.

Théorème 5.1.2 ([Hu03]). *Soit X_0 un ouvert d'une variété algébrique lisse X . On suppose que $X \setminus X_0$ peut être décomposé comme une union finie $\cup_{i \in I} D_i$ de variétés irréductibles fermées telles que :*

1. *pour tout i dans I , la variété D_i est lisse ;*
2. *pour tout $i, j \in I$, D_i et D_j se rencontrent proprement, c'est-à-dire que l'intersection schématique est lisse et l'intersection des espaces tangents $T_X(D_i) \cap T_X(D_j)$ est l'espace tangent de l'intersection $T_X(D_i \cap D_j)$;*
3. *pour tout $i, j \in I$, l'intersection $D_i \cap D_j$ est ou bien vide ou bien égale à une union disjointe de D_l .*

L'ensemble $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$ est un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion. Soit k le rang de \mathcal{D} , c'est-à-dire la longueur maximale d'une chaîne ordonnée dans \mathcal{D} ($D_1 \subset \dots \subset D_r$ ayant une longueur égale à $r - 1$).

Il existe alors une suite d'éclatements

$$\text{Bl}_{\mathcal{D}} X \rightarrow \text{Bl}_{\mathcal{D} \leq k-1} X \rightarrow \dots \rightarrow \text{Bl}_{\mathcal{D} \leq 0} X \rightarrow X$$

où $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq 0} X \rightarrow X$ est l'éclatement de X le long des D_i de rang 0 (les éléments minimaux de \mathcal{D}), et, de façon récursive, $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X \rightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r-1} X$ est l'éclatement de $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r-1} X$ le long des transformées propres des D_j de rang r ; la variété $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ vérifiant

1. $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X$ est lisse;
2. $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X \setminus X_0 = \bigcup_{i \in I} \widetilde{D}_i$ est un diviseur à croisements normaux;
3. Pour tout entier k , l'intersection $\widetilde{D}_{i_1} \cap \cdots \cap \widetilde{D}_{i_k}$ est non vide si et seulement si, à la numérotation près, on a la chaîne suivante, dans l'ensemble partiellement ordonné \mathcal{D} , $D_{i_1} \subset \cdots \subset D_{i_k}$. En conséquence, \widetilde{D}_i et \widetilde{D}_j ont une intersection non vide si et seulement si d_i et D_j sont comparables dans \mathcal{D} .

Le fait que les éclatements sont des constructions locales permet de déduire immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.3 (Éclatement d'une suite de drapeaux). *Soit X et \mathcal{D} comme dans le théorème précédent. Soit $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ des drapeaux de sous-variétés appartenant à \mathcal{D} tels que*

1. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ est une partition de \mathcal{D} ,
2. Si D est dans l'un des \mathcal{F}_i , alors pour tout $D' \in \mathcal{D}$, vérifiant $D' < D$, il existe un $j \leq i$ tel que $D' \in \mathcal{F}_j$.

En notant \mathcal{F}_j^i le drapeau des transformées propres des éléments de \mathcal{F}_j^{i-1} dans

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_i^{i-1}} (\cdots (\mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_1} X) \cdots),$$

on obtient

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D}} X = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_k^{k-1}} (\cdots (\mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_1} X) \cdots)$$

Afin d'alléger les notations, on notera une telle suite d'éclatements

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_k, \dots, \mathcal{F}_1} X$$

Comme il s'agit d'appliquer ces résultats afin d'obtenir des motifs de Tate mixtes, il est nécessaire de contrôler la nature des motifs apparaissant au terme de la construction du théorème 5.1.2; ce qui est assuré par la proposition dont l'énoncé reprend les notations de l'article [Hu03], en particulier celles introduites dans les preuves des théorèmes 1.4, 1.7 et lors du corollaire 1.6 de [Hu03].

Proposition 5.1.4. *Soit X et $\mathcal{D} = \cup D_i$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 5.1.2. On suppose de plus que X ainsi que tous les D_i sont des variétés de Tate. Soit \mathcal{E}^{r+1} l'ensemble des diviseurs exceptionnels de $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X \rightarrow X$ et \mathcal{D}^{r+1} l'ensemble des transformées propres dans $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X$ des éléments de \mathcal{D} de rang $r+1$.*

Alors toutes les intersections possibles de strates de $\mathcal{D}^{r+1} \cup \mathcal{E}^{r+1}$ sont des variétés de Tate ainsi que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X$.

Démonstration. En suivant la démonstration du théorème 1.7 de [Hu03], on procède par récurrence sur r .

Si $r = 0$, alors $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq 0} X \rightarrow X$ est l'éclatement le long de sous-variétés disjointes D_i de rang 0.

Tous les diviseurs exceptionnels dans \mathcal{E}^1 sont de la forme $\mathbb{P}(N_X D_i)$ (avec D_i de rang 0) et comme les D_i sont de Tate, il en est de même pour les diviseurs exceptionnels.

On rappelle que, en notant $h(X)$ le motif dans $\mathcal{DM}_{\mathbb{Q}}$ d'une variété X , la formule de l'éclatement (*Cf.* proposition 4.1.1)

$$h(\mathrm{Bl}_Z X) = h(X) \bigoplus_{i=1}^{d-1} h(Z)(-i)[-2i] \quad (5.1)$$

permet d'affirmer que l'éclatement d'une variété de Tate X le long d'une sous-variété de Tate Z de codimension d est de Tate. On en déduit que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq 0} X$ est de Tate.

Soit D_i^1 un élément de \mathcal{D}^1 ; c'est la transformée propre d'un élément D_i de \mathcal{D} de rang supérieur ou égal à 1. D'après le théorème 1.4 dans [Hu03], on a $D_i^1 = \mathrm{Bl}_{D_j \subset D_i; \mathrm{rang}(D_j)=0} D_j$ d'où l'on déduit que D_i^1 est une variété de Tate.

Il s'agit maintenant de montrer que toutes les intersections possibles d'éléments de $\mathcal{D}^1 \cup \mathcal{E}^1$ sont de Tate. Les centres des éclatements étant disjoints, les éléments de \mathcal{E}^1 ne s'intersectent pas.

Soit D_i^1 et D_j^1 deux éléments de \mathcal{D}^1 , transformées propres de D_i et D_j dans \mathcal{D} . Si $D_i \cap D_j = \emptyset$ alors il en est de même de leurs transformées et il n'y a rien à prouver, sinon $D_i \cap D_j = \cup D_l$. Si le rang maximal des D_l est 0, alors le lemme 2.1 de [Hu03] assure que les transformées propres sont d'intersection vide. Si ce rang est au moins 1, comme D_i et D_j se rencontrent proprement, l'intersection des transformées est la transformée propre de l'intersection, c'est-à-dire

$$D_i^1 \cap D_j^1 = \mathrm{Bl}_{D_l \subset D_i \cap D_j; \mathrm{rang}(D_l)=0} D_i \cap D_j.$$

D'où l'on conclut que l'intersection est une variété de Tate. De plus, on déduit du théorème 1.4 ([Hu03]) que $D_i^1 \cap D_j^1 = \cup D_l^1$. Il suffit donc, pour conclure cette étape de la récurrence, d'étudier uniquement les intersections de la forme $E^1 \cap D_i^1$ avec E^1 dans \mathcal{E}^1 et D_i^1 dans \mathcal{D}^1 , transformée propre de D_i dans \mathcal{D} . Une telle intersection est non vide uniquement si E^1 vient d'un élément $D_j \subset D_i$ de rang 0 dans \mathcal{D} . Dans ce cas, l'intersection $E^1 \cap D_i^1$ est $\mathbb{P}(N_{D_i} D_j)$ et c'est une variété de Tate.

Supposons l'énoncé vrai pour $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r-1} X$, \mathcal{E}^r et \mathcal{D}^r . Par le corollaire 1.6 de [Hu03], l'éclatement $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X \rightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r-1} X$ est

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq 0}^r (\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r-1} X) \longrightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r-1} X.$$

Les centres des éclatements sont les éléments de \mathcal{D}^r de rang 0 dans \mathcal{D}^r . Comme ce sont des variétés de Tate par hypothèse, de même que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r-1} X$, on en déduit que $\mathrm{Bl}_{\mathcal{D} \leq r} X$ ainsi que les nouveaux diviseurs exceptionnels sont des variétés de Tate. Les autres diviseurs exceptionnels, éléments de \mathcal{E}^{r+1} sont les transformées propres d'éléments de \mathcal{E}^r et sont de la forme

$$E_i^{r+1} = \mathrm{Bl}_{E_i^r \cap D_l^r; \mathrm{rang}(D_l)=r} E_i^r$$

avec E_i^r dans \mathcal{E}^r et D_l^r dans \mathcal{D}^r provenant de D_l dans \mathcal{D} . Comme, par hypothèse de récurrence, E_i^r et $E_i^r \cap D_l^r$ sont de Tate, E_i^{r+1} est aussi une variété de Tate. Le même argument prouve que tous les éléments de \mathcal{D}^{r+1} sont aussi de Tate.

Comme précédemment, l'intersection de deux éléments de \mathcal{D}^{r+1} est ou vide ou la transformée propre de deux éléments de \mathcal{D}^r , cette transformée étant aussi une variété de Tate. De plus, si cette intersection $D_i^{r+1} \cap D_j^{r+1}$ de deux éléments de \mathcal{D}^{r+1} n'est pas vide, elle peut s'écrire comme une union d'éléments D_l^{r+1} dans \mathcal{D}^{r+1} . Afin de montrer que toutes les intersections d'éléments de $\mathcal{E}^{r+1} \cup \mathcal{D}^{r+1}$ sont de Tate, il suffit de le faire pour l'intersection d'un D_i^{r+1} avec l'intersection $E_1^{r+1} \cap \dots \cap E_k^{r+1}$, les E_i^{r+1} étant des éléments de \mathcal{E}^{r+1} .

Si deux des E_i^{r+1} sont des diviseurs exceptionnels de $\text{Bl}_{\mathcal{D}^{\leq 0}}(\text{Bl}_{\mathcal{D}^{\leq r}} X) \rightarrow \text{Bl}_{\mathcal{D}^{\leq r-1}} X$ alors leur intersection est vide car les éléments correspondants D_i^r et D_j^r ont une intersection vide (ils ont été séparés à une étape précédente).

Au plus l'un des E_i^{r+1} est donc diviseur exceptionnel provenant du dernier éclatement et l'on peut supposer que les éléments $D_i^{r+1}, E_1^{r+1}, \dots, E_{k-1}^{r+1}$ sont des transformées propres des éléments $D_i^r, E_1^r, \dots, E_{k-1}^r$.

- Supposons que E_k^{r+1} soit la transformée propre d'un diviseur exceptionnel E_k^r dans \mathcal{E}^r . La sous-variété $Y = D_i^r \cap E_1^r \cap \dots \cap E_k^r$ est de Tate par hypothèse et sa transformée propre est

$$\text{Bl}_{D_j^r \cap Y; \text{rang}(D_j)=r} Y$$

qui est une variété de Tate ($D_j^r \cap Y$ est ou vide ou de Tate et Y est de Tate). D'autre part, la transformée propre de Y est l'intersection $D_i^{r+1} \cap E_1^{r+1} \cap \dots \cap E_k^{r+1}$ qui est en conséquence une variété de Tate.

- Supposons que E_k^r soit un diviseur exceptionnel provenant de l'éclatement de $\text{Bl}_{\mathcal{D}^{\leq r-1}} X$ long de D_j^r . Soit Y l'intersection $D_i^r \cap E_1^r \cap \dots \cap E_{k-1}^r$. Alors $D_j^r \cap Y$ est ou vide ou une variété de Tate. Dans le premier cas, l'intersection $D_i^{r+1} \cap E_1^{r+1} \cap \dots \cap E_k^{r+1}$ est vide. Dans le second, on a

$$D_i^{r+1} \cap E_1^{r+1} \cap \dots \cap E_k^{r+1} = \mathbb{P}(N_Y Y \cap D_j^r)$$

qui est une variété de Tate. □

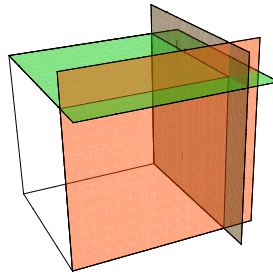
5.2 La variété X_3 et l'exemple de $\zeta(3)$

Pour i dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ on note x_1, x_2 et x_3 les coordonnées standard sur \mathbb{A}^3 . On définit les diviseurs $A_I, B_i^0, B_i^1, B_3, A_3, D_3^1, D_3^0$ et D_3 de la façon suivante :

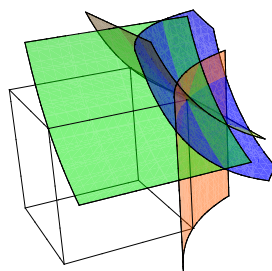
- Pour tout sous-ensemble non vide I de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, A_I est le diviseur défini par l'équation

$$1 - \prod_{i \in I} x_i = 0.$$

On obtient ainsi les sept diviseurs irréductibles suivants :



$$\{x_1 = 1\}, \quad \{x_2 = 1\}, \quad \{x_3 = 1\},$$



$$\{x_1x_2 = 1\}, \quad \{x_1x_3 = 1\}, \quad \{x_2x_3 = 1\}, \quad \{x_1x_2x_3 = 1\}.$$

– On pose aussi

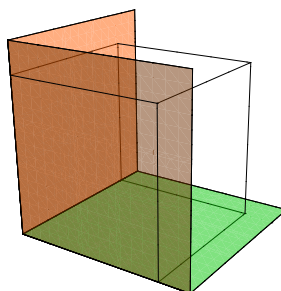
$$A_3 = \{x_1x_2 = 1\} \cup \{x_1x_3 = 1\} \cup \{x_2x_3 = 1\} \cup \{x_1x_2x_3 = 1\}.$$

– D_3^1 est l'union des sept diviseurs ci-dessus

$$D_3^1 = \{x_1 = 1\} \cup \{x_2 = 1\} \cup \{x_3 = 1\} \cup \{x_1x_2 = 1\} \cup \{x_1x_3 = 1\} \cup \{x_2x_3 = 1\} \cup \{x_1x_2x_3 = 1\}.$$

– On définit B_i^0 comme le diviseur d'équation $x_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, ce sont respectivement la clôture de Zariski des faces gauche, avant et inférieure du cube. On note D_n^0 l'union

$$D_3^0 = \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \cup \{x_3 = 0\}.$$



– B_3 est la clôture de Zariski du cube, c'est à dire l'union

$$B_3 = \{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \cup \{x_3 = 0\} \cup \{x_1 = 1\} \cup \{x_2 = 1\} \cup \{x_3 = 1\}.$$

– D_n est l'union $D_n^0 \cup D_n^1 = A_n \cup B_n$.

Le diviseur D_3 n'étant pas à croisements normaux, on cherche une bonne suite d'éclatements de façon à avoir un diviseur à croisements normaux \hat{D}_3 au-dessus de D_3 . Il s'agit par là, de séparer les diviseurs donnés par les équations $x_i = 1$, qui sont les faces du cube, des diviseurs $1 - \prod_{i \in I} x_i$ avec $|I| \geq 2$ qui correspondent aux singularités des fonctions $\frac{1}{1-x_1x_2}$, $\frac{1}{1-x_1x_2x_3}$ et $\frac{1}{(1-x_1x_2)(1-x_1x_2x_3)}$ ainsi que de celles qui s'en déduisent par permutations des variables.

Remarque 5.2.1. Soit I un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $x = (x_1, x_2, x_3)$ un point de A_I . On note δ_I la fonction caractéristique de I . Le vecteur normal à A_I au point x est égal à

$$n_x^{A_I} = \frac{\delta_I(1)}{x_1} dx_1 + \frac{\delta_I(2)}{x_2} dx_2 + \frac{\delta_I(3)}{x_3} dx_3. \quad (5.2)$$

En conséquence, si I et J sont deux sous-ensembles non vides distincts de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, l'intersection de A_I et de A_J est transverse.

Lemme 5.2.2. Soit I_1, \dots, I_k des sous-ensembles de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ et X l'intersection $A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_k} \subset \mathbb{A}^n$. La variété X est alors isomorphe à l'une des variétés suivantes :

$$\mathbb{A}^2, \quad \mathbb{G}_m^2, \quad \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m, \quad \mathbb{A}^1, \quad \mathbb{G}_m, \quad (1, 1, 1), \quad \{(x, x, x), x^2 = 1\} \simeq \{x^2 = 1\}.$$

Démonstration. Les diviseurs donnés par une équation de la forme $x_i = 1$ sont isomorphes à \mathbb{A}^2 , ceux donnés par une équation de la forme $x_i x_j = 1$ avec $i \neq j$ sont isomorphes à $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m$ et le diviseur défini par l'équation $x_1 x_2 x_3 = 1$ est isomorphe à \mathbb{G}_m^2 .

Supposons dans un premier temps que $k = 2$.

1. Si $I_1 = \{i\}$ et $I_2 = \{j\}$ avec $i \neq j$ alors X est irréductible et

$$X \simeq \{x_i = x_j = 1\} = \mathbb{A}^1.$$

2. Si $I_1 = \{i\}$ et $I_2 = \{i, j\}$ avec $i \neq j$ alors X est irréductible et

$$X \simeq \{x_i = x_j = 1\} = \mathbb{A}^1.$$

3. Si $I_1 = \{i\}$ et $I_2 = \{j, k\}$ ou $I_2 = \{i, j, k\}$ avec $i \neq j, k$ alors X est irréductible et

$$X \simeq \{x_i = 1 \text{ et } x_j = 1/x_k\} = \mathbb{G}_m.$$

4. Si $I_1 = \{j, k\}$ et $I_2 = \{i, j, k\}$ avec $i \neq j, k$ alors X est irréductible et

$$X \simeq \{x_i = 1 \text{ et } x_j = 1/x_k\} = \mathbb{G}_m.$$

5. Si $I_1 = \{i, j\}$ et $I_2 = \{j, k\}$ avec $i \neq j \neq k$ alors X est irréductible et

$$X \simeq \{x_i = x_k \text{ et } x_j = 1/x_i\} = \mathbb{G}_m.$$

Supposons maintenant que $k = 3$. La discussion précédente permet de décrire $A_{I_1} \cap A_{I_2}$. Dans les cas 1. et 2., en intersectant par A_{I_3} ou l'on ne change pas l'intersection (si $I_3 \subset \{i, j\}$), ou bien

$$X = \{x_1 = x_2 = x_3 = 1\}.$$

Dans les cas 3. et 4., en intersectant par A_{I_3} ou l'on ne change pas l'intersection (si $I_3 \subset \{i, j\}$ ou $I_3 \subset \{1, 2, 3\}$), ou bien

$$X = \{x_1 = x_2 = x_3 = 1\}.$$

Dans le cas 5. l'intersection vaut $(1, 1, 1)$ sauf si $I_3 = \{i, k\}$ et dans ce cas

$$X = \{x_i = x_k, 1 = x_i^2 \text{ et } x_j = x_i\} = \{(1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}$$

ce qui achève la preuve. □

Lemme 5.2.3. Soit \mathcal{D}_3^1 l'ensemble partiellement ordonné (pour l'inclusion) dont les éléments sont toutes les composantes irréductibles des intersections possibles des diviseurs A_I . L'ensemble \mathcal{D}_3^1 satisfait les conditions (1), (2) et (3) du théorème 5.1.2.

Démonstration. La condition d'intersection (3) est une conséquence immédiate de la définition de \mathcal{D}_3^1 . D'après le lemme 5.2.2, une intersection de la forme $X = A_{I_1} \cap \cdots \cap A_{I_k}$ est isomorphe à l'une des variétés suivantes :

$$\mathbb{A}^2, \quad \mathbb{G}_m^2, \quad \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_m, \quad \mathbb{A}^1, \quad \mathbb{G}_m, \quad (1, 1, 1), \quad \{(x, x, x), x^2 = 1\}.$$

On en déduit que X est lisse et les composantes irréductibles de X étant disjointes, elles sont aussi lisses.

Enfin la preuve du lemme 5.2.2 ainsi que la remarque 5.2.1 montrent que deux variétés S_1 et S_2 , éléments de \mathcal{D}_n^1 , se rencontrent proprement. Il suffit en effet de vérifier au cas par cas que l'espace normal de l'intersection est engendré par les espaces normaux à S_1 et S_2 , c'est-à-dire

$$N_{\mathbb{A}^n}(S_1 \cap S_2) = N_{\mathbb{A}^n}(S_1) + N_{\mathbb{A}^n}(S_2).$$

□

En appliquant la construction du théorème 5.1.2 avec $\mathcal{D} = \mathcal{D}_3^1$ et $X = \mathbb{A}^3$, on obtient une variété $X_3 \xrightarrow{p_3} \mathbb{A}^3$ qui est le résultat d'une suite d'éclatements des strates de \mathcal{D}_n^1 de sorte que la préimage \widehat{D}_3^1 de D_3^1 soit un diviseur à croisements normaux.

Plus précisément, la variété X_3 s'obtient de la façon suivante. L'ensemble \mathcal{D}_3^1 est composé des variétés suivantes

	$(x_1, 1, 1)$	$(1, \lambda, \lambda^{-1}) \lambda \in \mathbb{G}_m$	$(\lambda, \lambda, \lambda^{-1}) \lambda \in \mathbb{G}_m$
$(1, 1, 1)$	$(1, x_2, 1)$	$(\lambda, 1, \lambda^{-1}) \lambda \in \mathbb{G}_m$	$(\lambda, \lambda^{-1}, \lambda) \lambda \in \mathbb{G}_m$
$(-1, -1, -1)$	$(1, 1, x_3)$	$(\lambda, \lambda^{-1}, 1) \lambda \in \mathbb{G}_m$	$(\lambda^{-1}, \lambda, \lambda) \lambda \in \mathbb{G}_m$

Comme $(1, 1, 1)$ et $(-1, -1, -1)$ sont deux points distincts, éclater le long de l'un puis de l'autre ou dans l'autre ordre revient au même. On obtient ainsi une variété

$$\text{Bl}_{(-1, -1, -1)} \text{Bl}_{(1, 1, 1)} \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3,$$

dans laquelle les transformées propres des variétés de codimension 1, éléments de \mathcal{D}_3^1 , sont disjointes. On peut alors éclater le long de ces transformées propres sans se soucier de l'ordre dans lequel on opère. Le diviseur à croisements normaux \widehat{D}_3^1 est l'union des 11 diviseurs exceptionnels et des 7 transformées propres des diviseurs A_I avec $I \subset \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

On note \widehat{D}_3 le diviseur à croisements normaux, union de \widehat{D}_3^1 et des transformées propres, dans X_3 , des diviseurs $\{x_1 = 0\}$, $\{x_2 = 0\}$ et $\{x_3 = 0\}$.

Définition 5.2.4. On note \widehat{B}_3 la préimage de B_3 dans X_n et \widehat{A}_n le diviseur $\widehat{D}_3 \setminus \widehat{B}_3$.

Le diviseur B_3 est l'union des transformées propres dans X_3 des diviseurs $x_i = 0$, $x_i = 1$ et des diviseurs exceptionnels issus des éclatements le long de $(1, 1, 1)$, $x_1 = x_2 = 1$, $x_1 = x_3 = 1$ et $x_2 = x_3 = 1$.

Remarque 5.2.5. Les diviseurs \widehat{A}_3 et \widehat{B}_3 n'ont aucune composante irréductible en commun.

Soit \widehat{C}_3 la préimage de $]0, 1[^3$ dans $X_3(\mathbb{R})$ et $\overline{\widehat{C}_3}$ sa clôture. Le diviseur \widehat{B}_3 est alors la clôture de Zariski du bord de $\overline{\widehat{C}_3}$ et on obtient la classe non nulle suivante

$$[\widehat{C}_3] \in \text{Gr}_0^W \text{H}^3(X_3, \widehat{B}_3). \quad (5.3)$$

Comme $\zeta(3)$ s'écrit

$$\int_{[0,1]^3} \frac{1}{1-x_1x_2x_3} dx_1dx_2dx_3,$$

on pose

$$\omega_{(3)} = p_3^* \left(\frac{1}{1-x_1x_2x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \right).$$

Le diviseur $\widehat{A}_{(3)}$ des singularités de la forme différentielle $\omega_{(3)}$ n'intersecte pas le bord de \widehat{C}_3 . En effet la seule singularité possible de $\omega_{(3)}$ au bord de \widehat{C}_3 serait celle provenant de la singularité de $\frac{1}{1-x_1x_2x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ en $(1, 1, 1)$; or celle-ci disparaît suite à l'éclatement en $(1, 1, 1)$. En effet, en posant $z_i = 1 - x_i$ on obtient

$$\omega_{(3)} = -p_3^* \left(\frac{1}{z_1 + z_2 + z_3 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_1z_3 + z_1z_2z_3} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \right).$$

L'éclatement en $(1, 1, 1)$ donne lieu à trois choix de changements de variables (correspondant à trois choix d'ouverts affines sur $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(N_{\mathbb{A}^3}(1, 1, 1))$). En notant \tilde{p}_3 la suite d'éclatements

$$\tilde{p}_3 : X_3 \longrightarrow \text{Bl}_{(1,1,1)} \mathbb{A}^3$$

et en posant par exemple

$$z_3 = s_1, \quad z_2 = s_1s_2, \quad z_1 = s_1s_3,$$

on obtient

$$\omega_{(3)} = -\tilde{p}_3^* \left(\frac{s_1^2}{s_1(1+s_2+s_3-s_1s_2-s_1s_2s_3-s_1s_3+s_1^2s_2s_3)} ds_1 \wedge ds_2 \wedge ds_3 \right)$$

et pour $s_1 \neq 0$

$$\omega_{(3)} = -\tilde{p}_3^* \left(\frac{s_1}{((1-s_1s_2)(1-s_1s_3) + \frac{1}{s_1}(1-(1-s_1s_2)(1-s_1s_3)))} ds_1 \wedge ds_2 \wedge ds_3 \right).$$

La préimage du cube $[0, 1]^3$ dans $\text{Bl}_{(1,1,1)} \mathbb{A}^3$ est donnée (en tenant compte du changement de variables choisi) par

$$0 \leq s_1 \leq 1, \quad 0 \leq s_1s_2 \leq 1, \quad 0 \leq s_1s_3 \leq 1.$$

On en déduit que la forme différentielle

$$\frac{s_1}{1+s_2+s_3-s_1s_2-s_1s_2s_3-s_1s_3+s_1^2s_2s_3} ds_1 \wedge ds_2 \wedge ds_3$$

n'a pas de singularités au bord de la préimage du cube dans $\text{Bl}_{(1,1,1)} \mathbb{A}^3$ (ni dans la préimage du cube). De là,

$$\omega_{(3)} = -\tilde{p}_3^* \left(\frac{s_1}{((1-s_1s_2)(1-s_1s_3) + \frac{1}{s_1}(1-(1-s_1s_2)(1-s_1s_3)))} ds_1 \wedge ds_2 \wedge ds_3 \right)$$

n'a pas de singularités au bord de la préimage du cube dans X_3 , c'est-à-dire au bord de \widehat{C}_3 . En appliquant les résultats de la section 4.2 on obtient d'une part un motif de Tate mixte

$$H^3(X_3 \setminus \widehat{A}_{(3)}; \widehat{B}_3^{\widehat{A}_{(3)}}),$$

la forme différentielle $\omega_{(3)}$ et la préimage \widehat{C}_3 du cube réel $]0, 1[^3$ dans X_3 donnent d'autre part deux éléments non nuls

$$[\omega_{(3)}] \in \mathrm{Gr}_6^W \mathrm{H}^3(X_3 \setminus \widehat{A}_{(3)}; \widehat{B}_3^{\widehat{A}_{(3)}}) \quad \text{et} \quad [\widehat{C}_3] \in \left(\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}^3(X_3 \setminus \widehat{A}_{(3)}; \widehat{B}_3^{\widehat{A}_{(3)}}) \right)^\vee.$$

La période du motif de Tate mixte n -encadré

$$\left[\mathrm{H}^3(X_3 \setminus \widehat{A}_{(3)}; \widehat{B}_3^{\widehat{A}_{(3)}}); [\omega_{(3)}]; [\widehat{C}_3] \right]$$

est égale à $\zeta(3)$.

De plus, on a l'équivalence suivante entre motifs de Tate mixtes encadrés

$$\left[\mathrm{H}^3 \left(X_3 \setminus \widehat{A}_{(3)}; \widehat{B}_3^{\widehat{A}_{(3)}} \right); [\omega_{(3)}]; [\widehat{C}_3] \right] = \left[\mathrm{H}^3 \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,6} \setminus A_0; B_3^{A_0} \right); \left[\frac{du_1 \wedge du_2 \wedge du_3}{1 - u_1 u_2 u_3} \right], [\Phi_3] \right].$$

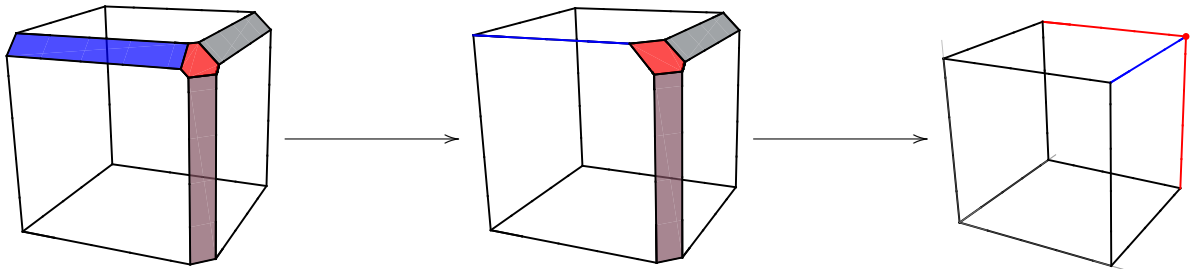
où A_0 est le complémentaire dans $\partial \overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ de la clôture de Zariski, B_3 , de la cellule standard Φ_3 .

En effet, en éclatant le point $(1, 1, 1)$ puis les deux droites $x_1 = x_2 = 1$ et $x_2 = x_3 = 1$ dans \mathbb{A}^3 on réalise $\overline{\mathcal{M}}_{0,6} \setminus A_0$ comme un ouvert de $\mathrm{Bl}_{\{(x_2=x_3=1), \{(1,1,1), x_1=x_2=1\}\}} \mathbb{A}^3$.

De là, en éclatant ensuite le point $(-1, -1, -1)$, puis les autres strates de dimension 1, on obtient une suite de drapeaux $\mathcal{F}_1 = \{(1, 1, 1), x_1 = x_2 = 1\}$, $\mathcal{F}_2 = \{x_2 = x_3 = 1\}$, $\mathcal{F}_3 \dots, \mathcal{F}_N$ telle que

$$\begin{array}{ccc} X_3 = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_N, \dots, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^3 & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_3} & \mathrm{Bl}_{\{(x_2=x_3=1), \{(1,1,1), x_1=x_2=1\}\}} \mathbb{A}^3 & \longrightarrow & \mathbb{A}^3 \\ & & \uparrow & & \\ & & \overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \setminus A_0 & & \end{array}$$

cette suite d'éclatements étant illustrée ci-dessous (les diviseurs exceptionnels qui correspondent aux hyperboles, n'intersectent pas le bord de la préimage du cube et ne sont pas représentés)



$$X_3 \longrightarrow \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3.$$

Le morphisme $\tilde{\alpha}_3$ induit un morphisme $\tilde{\alpha}_3^*$ entre $\mathrm{H}^3 \left(X_3 \setminus \widehat{A}_{(3)}; \widehat{B}_3^{\widehat{A}_{(3)}} \right)$ et $\mathrm{H}^3 \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,6} \setminus A_0; B_3^{A_0} \right)$ qui est compatible aux encadrements d'où l'égalité de motifs de Tate mixtes encadrés.

5.3 La variété X_n et ses diviseurs

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ on note x_i la i -ème coordonnée standard sur \mathbb{A}^n . On définit les diviseurs $A_I, B_i^0, B_i^1, B_n, A_n, D_n^1, D_n^0$ et D_n de la façon suivante :

– pour tout sous-ensemble non vide I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, A_I est le diviseur défini par l'équation

$$1 - \prod_{i \in I} x_i = 0 ;$$

- pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_i^0 est le diviseur $x_i = 0$;
- pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i^1 = A_{\{i\}}$ est le diviseur $1 - x_i = 0$;
- B_n est l'union $(\bigcup_i B_i^0) \cup (\bigcup_i B_i^1)$;
- A_n est l'union $\bigcup_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket; |I| \geq 2} A_I$;
- D_n^1 est l'union $\bigcup_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket; I \neq \emptyset} A_I$;
- D_n^0 est l'union $\bigcup_i B_i^0$;
- D_n est l'union $D_n^0 \cup D_n^1 = A_n \cup B_n$.

Remarque 5.3.1. Le diviseur B_n est la clôture de Zariski du bord du cube réel $C_n = [0, 1]^n$ dans $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.

Le diviseur D_n n'étant pas à croisements normaux, on cherche une bonne suite d'éclatements de façon à avoir un diviseur à croisements normaux \widehat{D}_n au-dessus de D_n . La remarque et les lemmes suivants serviront à pouvoir appliquer les résultats précédents.

Remarque 5.3.2. Soit I un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point de A_I . Le vecteur normal à A_I au point x est égal à

$$n_{|x}^{A_I} = \sum_{i \in I} \frac{1}{x_i} dx_i. \quad (5.4)$$

En conséquence, si I et J sont deux sous-ensembles non vides distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'intersection de A_I et de A_J est transverse.

Lemme 5.3.3. *Soit I_1, \dots, I_k des sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et X l'intersection $A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_k} \subset \mathbb{A}^n$. Il existe alors des entiers positifs r et s avec $r > 0$ et $r + s \leq n$ ainsi que des entiers c_1, \dots, c_r tels que X soit isomorphe à*

$$\mathbb{A}^s \times \mathbb{G}_m^{n-s-r} \times \prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}$$

Démonstration. Si $|I_1 \cup \dots \cup I_k| = a < n$ alors X est isomorphe à $(A'_{I_1} \cap \dots \cap A'_{I_k}) \times \mathbb{A}^{n-a} \subset \mathbb{A}^a \times \mathbb{A}^{n-a}$ où les A'_{I_i} sont définies par les mêmes équations, $1 - \prod_{j \in I_i} x_j = 0$, qui définissent les A_{I_i} mais vues dans \mathbb{A}^a au lieu de \mathbb{A}^n . Avec $s = n - a$, il est donc suffisant de montrer que

$$X' = (A'_{I_1} \cap \dots \cap A'_{I_k}) \simeq \mathbb{G}_m^{a-r} \times \prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}.$$

On suppose dans la suite de la preuve que $|I_1 \cup \dots \cup I_r| = n$.

Pour tout n -uplet d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et pour tout x dans \mathbb{A}^n , on note x^λ le produit $\prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_j}$. Pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ comme l'élément de \mathbb{Z}^n tel que

$$\forall j, 1 \leq j \leq n \quad a_{ij} = \delta_{I_i}(j)$$

où δ_{I_i} est la fonction caractéristique de l'ensemble I_i . En utilisant ces notations, X est défini par les équations

$$x^{a_1} = \dots = x^{a_k} = 1.$$

Soit L le sous-module de \mathbb{Z}^n engendré par a_1, \dots, a_n et r , $r \leq k$, son rang. Pour λ dans L , en écrivant

$$\lambda = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k,$$

on obtient que pour tout x dans \mathbb{A}^n ,

$$x^\lambda = \prod_{i=1}^n (x^{a_i})^{\alpha_i}.$$

On en déduit que x est dans X si et seulement si pour tout λ dans L on a $x^\lambda = 1$.

Le module L étant un sous-module de \mathbb{Z}^n , le théorème de la base adaptée donne une base f_1, \dots, f_r de \mathbb{Z}^n ainsi que des entiers c_1, \dots, c_r tels que

$$L = f_1 \cdot c_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus f_r \cdot c_r \mathbb{Z}.$$

Comme un élément x de \mathbb{A}^n est dans X si et seulement si

$$\forall \lambda \in L, x^\lambda = 1,$$

on conclut que x est dans X si et seulement si

$$(x^{f_1})^{c_1} = 1, \quad \dots, \quad (x^{f_r})^{c_r} = 1$$

et X est en fait défini par les équations ci-dessus.

Soit e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{Z}^n et φ l'isomorphisme de \mathbb{Z}^n qui envoie chaque f_i sur e_i pour i dans $[[1, n]]$. Soit $(\varphi_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de φ dans la base canonique. Le morphisme φ induit un morphisme $\tilde{\varphi}$ de \mathbb{G}_m^n dans \mathbb{G}_m^n défini sur les coordonnées par

$$\tilde{\varphi}(x_j) = \prod_{i=1}^n x_i^{\varphi_{ij}},$$

de telle sorte que $\tilde{\varphi}$ envoie X sur la sous-variété \tilde{X} défini par

$$x^{\varphi(c_1 f_1)} = 1, \quad \dots, \quad x^{\varphi(c_r f_r)} = 1.$$

Comme pour tout i dans $[[1, n]]$, $\varphi(c_i f_i) = c_i e_i$, \tilde{X} est en fait défini par les équations

$$x_1^{c_1} = 1, \quad \dots, \quad x_r^{c_r} = 1.$$

Le morphisme φ étant inversible, $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme et X est isomorphe à

$$\mathbb{G}_m^{n-r} \times \prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}.$$

□

Lemme 5.3.4. *Soit I_1, \dots, I_r des sous-ensembles de $[[1, n]]$ et X l'intersection $A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_r} \subset \mathbb{A}^n$. Alors, le fibré normal $N_{\mathbb{A}^n} X$ est engendré par les fibrés normaux $N_{\mathbb{A}^n} A_{I_1}, \dots, N_{\mathbb{A}^n} A_{I_r}$.*

Démonstration. De même que dans la preuve du lemme précédent, il est suffisant de traiter le cas où $|I_1 \cup \dots \cup I_r| = n$.

Chacun des $N_{\mathbb{A}^n} A_{I_i}$ est un sous-fibré de $N_{\mathbb{A}^n} X$, ainsi, comme X est lisse, il suffit d'obtenir l'égalité des dimensions. D'après l'équation (5.4), en un point x de X la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(n_{|x}^{A_{I_1}}, \dots, n_{|x}^{A_{I_k}})$ est égale au rang de la matrice

$$M = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{x_j} \delta_{I_i}(j) \\ \hline \end{array} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$$

où $\delta_{I_i}(j)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble I_i . Le rang de M est le même que celui de la matrice $(\delta_{I_i}(j))_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$, c'est-à-dire qu'il est égal au rang du \mathbb{Z} -module L engendré par les éléments a_1, \dots, a_k définis dans la preuve précédente. D'après la preuve de la lemme 5.3.3, le rang de L est égal à la codimension de X ce qui achève la preuve du lemme 5.3.4 \square

Lemme 5.3.5. *Soit \mathcal{D}_n^1 l'ensemble partiellement ordonné (pour l'inclusion) dont les éléments sont toutes les composantes irréductibles des intersections possibles des diviseurs A_I . L'ensemble \mathcal{D}_n^1 satisfait les conditions (1), (2) et (3) du théorème 5.1.2.*

Démonstration. La condition d'intersection (3) est une conséquence immédiate de la définition de \mathcal{D}_n^1 . D'après le lemme 5.3.3, une intersection de la forme $X = A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_k}$ est isomorphe à $\mathbb{A}^s \times \mathbb{G}_m^{n-s-r} \times \prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}$ avec r et s des entiers positifs et des entiers c_i . On en déduit que X est lisse et les composantes irréductibles de X étant disjointes, elles sont aussi lisses.

Soit S_1 et S_2 deux éléments de \mathcal{D}_n^1 . Afin de montrer que S_1 et S_2 se rencontrent proprement, il est suffisant de montrer que l'espace normal de l'intersection est engendré par les espaces normaux à S_1 et S_2 , c'est-à-dire

$$N_{\mathbb{A}^n}(S_1 \cap S_2) = N_{\mathbb{A}^n}(S_1) + N_{\mathbb{A}^n}(S_2).$$

Comme S_1 et S_2 sont les intersections de différents A_I , il est suffisant de montrer que le fibré normal de $A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_k}$ est engendré par ceux des A_{I_j} ce qui est assuré par le lemme 5.3.4. \square

En appliquant la construction du théorème 5.1.2 avec $\mathcal{D} = \mathcal{D}_n^1$ et $X = \mathbb{A}^n$, on obtient une variété $X_n \xrightarrow{p_n} \mathbb{A}^n$ qui est le résultat d'une suite d'éclatements des strates de \mathcal{D}_n^1 de sorte que la préimage \widehat{D}_n^1 de D_n^1 soit un diviseur à croisements normaux.

Lemme 5.3.6. *Soit \widehat{D}_n^0 la transformée propre dans X_n du diviseur D_n^0 . Le diviseur $\widehat{D}_n = \widehat{D}_n^1 \cup \widehat{D}_n^0$ est alors à croisements normaux.*

Démonstration. Soit I un sous ensemble non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et \widehat{B}_I^0 (resp. B_I^0) l'intersection dans X_n (resp. \mathbb{A}^n) des diviseurs $\{x_i = 0\}$ pour i dans I , pour i dans I . On se donne d'autre part $\widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_k$ des strates de $\widehat{\mathcal{D}}_n^1$ telles que l'intersection des \widehat{S}_i soit non vide. On veut montrer qu'il existe un voisinage V de $\widehat{B}_I^0 \cap \widehat{S}_1 \cap \dots \cap \widehat{S}_k$ tel que $V \cap \widehat{D}_n$ est à croisements normaux. Par le théorème 5.1.2, les \widehat{S}_i viennent de strates, S_i , de \mathcal{D}_n^1 , et l'on peut supposer que $S_1 \subset \dots \subset S_k$. Si l'intersection des \widehat{S}_i 's avec \widehat{B}_I^0 est non vide, l'intersection de B_I^0 avec S_1 aussi non vide. De plus, il existe I_1, \dots, I_l des sous ensembles non vides de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $S_1 = A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_l}$.

Comme $B_I^0 \cap S_1$ est non vide, on a

$$I \cap (I_1 \cup \dots \cup I_l) = \emptyset.$$

on en déduit que, dans \mathbb{A}^n , il y a un voisinage V_0 de $B_I^0 \cap S_1$ isomorphe à un produit $\mathbb{A}^d \times \mathbb{A}^{|I|}$ avec $d = n - |I|$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^d & \times & \mathbb{A}^{|I|} \\ \cup & & \cup \\ \tilde{D}_d^1 & & \bigcup_{i \in I} \tilde{B}_i^0, \end{array}$$

où \tilde{B}_i^0 l'hyperplan correspondant à $\{x_i = 0\}$ dans $\mathbb{A}^{|I|}$.

En remontant ce voisinage en \widehat{V}_0 dans X_n , il s'identifie à $X_d \times \mathbb{A}^{|I|}$ avec $\widehat{D}_d^1 \subset X_d$. De là, pour toute strate \widehat{S}_i il y a une strate \widehat{S}_i^d de \widehat{D}_d^1 telle que $\widehat{V}_0 \cap \widehat{S}_i \simeq \widehat{S}_i^d \times \mathbb{A}^{|I|}$. Comme les \widehat{S}_i^d forment un diviseur à croisements normaux dans X_d d'après le théorème 5.1.2, \widehat{V}_0 est un voisinage de $\widehat{B}_I^0 \cap \widehat{S}_1 \cap \cdots \cap \widehat{S}_k$ tel que $\widehat{V}_0 \cap \widehat{D}_n$ est un diviseur à croisements normaux. \square

Définition 5.3.7. Soit \widehat{B}_n la préimage de B_n dans X_n et \widehat{A}_n le diviseur $\widehat{D}_n \setminus \widehat{B}_n$.

Remarque 5.3.8. Les diviseurs \widehat{A}_n et \widehat{B}_n n'ont aucune composante irréductible en commun.

Soit \widehat{C}_n la préimage de $C_n =]0, 1[^n$ dans $X_n(\mathbb{R})$ et $\overline{\widehat{C}_n}$ sa clôture. Le diviseur \widehat{B}_n est alors la clôture de Zariski du bord de \widehat{C}_n et on obtient la classe non nulle suivante

$$[\widehat{C}_n] \in \mathrm{Gr}_0^W H^n(X_n, \widehat{B}_n). \quad (5.5)$$

Si I est un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on définit F_I et G_I comme les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} G_I &: (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \prod_{i \in I} x_i \\ F_I &: (x_1, \dots, x_n) \longmapsto 1 - \prod_{i \in I} x_i. \end{aligned}$$

Définition 5.3.9. Un drapeau \mathcal{F} de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une collection de sous-ensembles I_j distincts non vides de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_r$. La longueur du drapeau \mathcal{F} est l'entier r et l'on parlera de r -drapeau de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On appellera drapeau maximal un drapeau de longueur n .

Un r -drapeau distingué $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ sera la donnée d'un drapeau \mathcal{F} de longueur r et d'éléments $i_1 < \dots < i_p$ de $\llbracket 1, r \rrbracket$.

Définition 5.3.10. Soit $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ un r -drapeau distingué de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $\Omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ la forme différentielle de $\Omega_{log}^{\bullet}(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$ définie par

$$\Omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}} = \bigwedge_{j=1}^r d \log(g_j)$$

où

$$g_j = \begin{cases} F_{I_j} & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_p\} \\ G_{I_j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ un uplet d'entiers avec $k_1 \geq 2$ tel que $k_1 + \dots + k_p = n$ et s une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On définit la forme différentielle $\Omega_{\mathbf{k}, s} \in \Omega_{log}^n(\mathbb{A}^n \setminus D_n)$ par

$$\Omega_{\mathbf{k}, s} = f_{k_1, \dots, k_n}(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

la fonction f_{k_1, \dots, k_n} étant celle de la définition 2.3.1.

Remarque 5.3.11. Soit \mathbf{k} et s comme dans la définition précédente. On associe à la paire (\mathbf{k}, s) le drapeau maximal distingué $(\mathcal{F}_{\mathbf{k}}, i_1, \dots, i_p)$ défini par $I_i = \{s(1), \dots, s(i)\}$ et $i_j = k_1 + \dots + k_j$ pour j allant de 1 à p . On voit alors qu'il existe un entier r_s tel que

$$\Omega_{\mathbf{k}, s} = (-1)^{r_s} \Omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}_{\mathbf{k}}}.$$

Définition 5.3.12. On notera $\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ et $\omega_{\mathbf{k}, s}$ les images réciproques sur $X_n \setminus \widehat{D}_n$ des formes Ω_{I_1, \dots, I_p} et $\Omega_{\mathbf{k}, s}$ respectivement.

Proposition 5.3.13. Si $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ est un drapeau maximal distingué de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i_1 \geq 2$ et $i_p = n$, alors :

- le diviseur des singularités $A_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ de $\Omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ est $A_{I_{i_1}} \cup \dots \cup A_{I_{i_p}}$;
- le diviseur des singularités $\widehat{A}_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ de $\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ est dans \widehat{A}_n , ainsi le diviseur des singularités de $\omega_{\mathbf{k}, s}$ est dans \widehat{A}_n .

De plus, soit $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ et $(\mathcal{F}', i'_1, \dots, i'_q)$ sont deux drapeaux distingués de longueurs respectives i_p et i'_q avec $|i_1| \geq 2$, $|i'_1| \geq 2$ tels que $I_{i_p}, I'_{i'_q}$ forment une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Le diviseur des singularités de $\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}} \wedge \omega_{i'_1, \dots, i'_q}^{\mathcal{F}'}$ est dans \widehat{A}_n .

Soit $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ un drapeau vérifiant les hypothèses de la propriété précédente.

Le fait que $A_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ soit $A_{I_{i_1}} \cup \dots \cup A_{I_{i_p}}$ est une conséquence directe des définitions. Le lemme suivant peut facilement être adapté à notre situation particulière.

Lemme 5.3.14 ([Gon02][lemme 3.8]). Soit Y un diviseur à croisements normaux d'une variété lisse X et $\omega \in \Omega_{\log}^n(X \setminus Y)$. Soit $p : \widehat{X} \rightarrow X$ l'éclatement d'une variété irréductible Z . On suppose que le point générique de Z est différent de celui des strates de Y . Alors $p^*\omega$ n'a pas de singularité le long du diviseur exceptionnel de \widehat{X} .

C'est-à-dire :

Lemme 5.3.15. Soit Y un diviseur à croisements normaux dans \mathbb{A}^n inclus dans $\bigcup_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket; |I| \geq 2} A_I$ et $\omega \in \Omega_{\log}^n(\mathbb{A}^n \setminus Y)$. Soit $p_n : X_n \rightarrow \mathbb{A}^n$ l'application provenant de la construction de X_n . Supposons que les points génériques des strates de B_n qui sont éclatées dans la construction sont différents des points génériques des strates de Y . Alors $p_n^*\omega$ n'a pas de singularité de long de \widehat{B}_n .

Démonstration. Soit \widehat{S} une composante irréductible de \widehat{B}_n provenant d'une strate S de B_n . Comme ω n'a pas de singularités le long des diviseurs $\{x_i = 0\}$, le pull-back $p_n^*\omega$ n'en a pas le long des transformées propre de ces diviseurs et l'on peut supposer que S est incluse dans une intersection de diviseurs de la forme $\{x_i = 1\}$, c'est à dire que S est une strate de $\cup_i \{x_i = 1\}$. On veut montrer que $p_n^*\omega$ n'a pas de singularités le long de \widehat{S} . On peut inclure $S = S_i$ dans un drapeau $\mathcal{F}_1 = \{S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_{n-1}\}$, les S_j étant des strates de $\cup_i \{x_i = 1\}$, puis se donner des drapeaux $\mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_N$ de sous variétés de \mathcal{D}_n^1 tels que les \mathcal{F}_k vérifient les hypothèses du lemme 5.1.3.

Suite au premier éclatement,

$$p_n^1 : \text{Bl}_{S_1} \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n,$$

les points génériques des strates S_j^1 , transformées propres des S_j , sont différents des points génériques des strates de Y^1 , transformée propre de Y ; sinon cela serait déjà le cas pour S_j et Y . De plus Y^1 contient le lieu des singularités de $p_n^{1*}\omega$ par application du lemme 5.3.14 à p_n^1 , ω et S_1 .

Il en est de même pour les éclatements le long des transformées propres des strates S_2, \dots, S_{i-1} . On note

$$p_n^{i-1} : \text{Bl}_{S_1 \subset \dots, S_{i-1}} \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$$

et S_i^{i-1} la transformée propre de S_i dans $\text{Bl}_{S_1 \subset \dots, S_{i-1}} \mathbb{A}^n$ et Y^{i-1} celle de Y .

Comme précédemment, Y^{i-1} contient le diviseur des singularités de $p_n^{i-1*}\omega$ et le lemme 5.3.14, appliqué à

$$p_n^i : \text{Bl}_{S_1 \subset \dots, S_i} \mathbb{A}^n \rightarrow \text{Bl}_{S_1 \subset \dots, S_{i-1}} \mathbb{A}^n$$

permet d'affirmer que $p_n^{i*}\omega$ n'a pas de singularités de long du diviseur exceptionnel \widehat{S}_i^i de ce dernier éclatement.

Les différentes images réciproques de ω par les éclatements suivants continueront à ne pas avoir de singularités le long des transformées propres successives de \widehat{S}_i^i . \square

Preuve de la proposition 5.3.13. D'après le lemme 5.3.15, il est suffisant de montrer que le diviseur des singularités de $\Omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ est à croisements normaux et qu'aucune de ses strates n'est une strate éclatée de B_n .

Le diviseur des singularités de $\Omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$ est $A_{I_{i_1}} \cup \dots \cup A_{I_{i_p}}$ et pour montrer que c'est un diviseur à croisements normaux, il est suffisant de montrer que les vecteurs normaux des $A_{I_{i_j}}$ sont linéairement indépendants à chaque point de n'importe quelle intersection des $A_{I_{i_j}}$. Le vecteur normal à $A_{I_{i_j}}$ est $\sum_{i \in I_{i_j}} 1/x_i dx_i$ et comme $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_p$, ces vecteurs sont linéairement indépendants en tout point d'une intersection quelconque des $A_{I_{i_j}}$.

Il s'agit maintenant de montrer qu'aucune des strates de B_n éclatée dans la construction de X_n n'est exactement une strate de $A_{I_1} \cup \dots \cup A_{I_p}$. Soit S une telle strate de B_n de codimension k . La strate S est définie par les équations $x_{r_1} = 1, \dots, x_{r_k} = 1$. Si I_S est l'ensemble $\{r_1, \dots, r_k\}$ alors, pour tout sous-ensemble I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, S est inclus dans A_I si et seulement si I est inclus dans I_S . Comme $I_i \subset I_{i'}$ pour $i < i'$, si S est inclus dans une strate S_A de A_{I_1, \dots, I_p} , cette strate est de la forme $A_{I_{i_1}} \cap \dots \cap A_{I_{i_j}}$ avec $j < k$ car $|I_1| \leq 2$. En conséquence, S_A est de codimension au plus $k-1$ et S ne peut être exactement une strate de $A_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}}$.

On utilise le même argument dans le cas de deux drapeaux distingués satisfaisant les hypothèses de la proposition 5.3.13, ceci en achève par ailleurs la démonstration. \square

Proposition 5.3.16. *Le diviseur \widehat{A}_n n'intersecte pas le bord de \widehat{C}_n dans $X_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit S une composante irréductible de codimension 1 de \widehat{B}_n contenant l'intersection de certaines composantes de \widehat{A}_n avec le bord de \widehat{C}_n . Comme le diviseur A_n n'intersecte le bord du cube réel C_n que sur des strates de B_n de codimension au moins 2, on a nécessairement que $p_n(S)$ est une strate de B_n de codimension au moins 2.

Par symétrie de la situation par rapport aux coordonnées standards sur \mathbb{A}^n , on peut supposer sans nuire à la généralité que $p_n(S)$ est définie dans ces coordonnées par $x_k = x_{k+1} = \dots = x_n$.

En commençant avec \mathbb{A}^n et en éclatant d'abord le point $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, puis la droite $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$ puis le plan $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 1$ et ainsi de suite, on obtient une variété $\widetilde{p}_n : \widetilde{X}_n \rightarrow \mathbb{A}^n$. Il y a des coordonnées naturelles (s_1, \dots, s_n) sur un ouvert de \widetilde{X}_n telles que les coordonnées sur \mathbb{A}^n définies par $y_i = 1 - x_i$ satisfassent

$$y_1 = s_1, \quad y_2 = s_1 s_2, \quad \dots, \quad y_i = s_1 s_2 \cdots s_i, \quad \dots, \quad y_n = s_1 s_2 \cdots s_n.$$

Dans les coordonnées y_i la strate $x_j = x_{j+1} = \dots = x_n = 1$ est donnée par $y_j = y_{j+1} = \dots = y_n = 0$ et sa préimage dans \widetilde{X}_n par $s_j = 0$.

Pour toute permutation s de $\llbracket 1, n \rrbracket$ la même construction s'applique, c'est-à-dire qu'on éclate d'abord le point $x_{s(1)} = x_{s(2)} = \dots = x_{s(n)} = 1$ puis la droite $x_{s(2)} = x_{s(3)} = \dots = x_{s(n)} = 1$ et ainsi de suite, afin d'obtenir une variété $\widetilde{p}_n^s : \widetilde{X}_n^s \rightarrow \mathbb{A}^n$. La préimage de D_n dans \widetilde{X}_n^s sera notée \widetilde{D}_n^s , \widetilde{B}_n^s sera celle de B_n et \widetilde{A}_n^s sera $\widetilde{D}_n^s \setminus \widetilde{B}_n^s$.

Pour montrer que \widehat{A}_n n'intersecte pas le bord de \widehat{C}_n dans $X_n(\mathbb{R})$, et en vertu du lemme 5.1.3, il est suffisant de montrer que, pour toute permutation s , \widetilde{A}_n^s n'intersecte pas, dans $\widetilde{X}_n^s(\mathbb{R})$, le bord de la préimage de C_n . Il est alors suffisant de vérifier que les transformées propres des diviseurs A_I n'intersectent pas le bord de $\widetilde{X}_n^s(\mathbb{R})$. En effet, il en sera alors de même pour les composantes irréductibles de leurs intersections et cela restera vrai après leurs éclatements, éclatements nécessaires pour parvenir à X_n . Par symétrie, il est suffisant de le faire lorsque s est l'identité, c'est-à-dire dans le cas de \widetilde{X}_n . Soit \widetilde{C}_n la préimage de C_n dans \widetilde{X}_n .

Soit A_I une strate de codimension 1 de A_{n_2} , I étant l'ensemble $\{i_0, \dots, i_p\}$ et supposons que $i_0 < \dots < i_p$. On veut montrer que la clôture \tilde{A}_I de la préimage de $A_I \setminus B_n$ dans \tilde{X}_n n'intersecte pas le bord de \tilde{C}_n . Les k -ième fonctions symétriques sont notés σ_k avec les conventions suivantes

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_k(X_1, \dots, X_l) = 0 \text{ si } l > k.$$

La strate A_I est définie dans les coordonnées x_i par $1 - x_{i_0} \cdots x_{i_p} = 0$, ce qui se traduit dans les coordonnées y_i en

$$0 = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \sigma_k(y_{i_0}, y_{i_1}, \dots, y_{i_p}). \quad (5.6)$$

Avant de donner une expression explicite de \tilde{A}_I dans les coordonnées s_i , on définit l'ensemble $J_0 = \{1, \dots, i_0\}$ et les ensembles J_1, \dots, J_p par

$$J_k = \{i_0 + 1, i_0 + 2, \dots, i_k\}$$

pour tout k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Pour tout sous-ensemble J de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\Pi^J \mathbf{s}$ le produit $\prod_{j \in J} s_j$, on a ainsi les relations suivantes

$$y_{i_0} = \Pi^{J_0} \mathbf{s} \quad \text{and} \quad \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad y_{i_k} = \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_k} \mathbf{s}.$$

Le membre de droite de l'équation (5.6) peut, en utilisant le changement de variables $y_i = s_1 \cdots s_i$, se réécrire comme

$$\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \sigma_k(\Pi^{J_0} \mathbf{s}, \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_p} \mathbf{s}). \quad (5.7)$$

Pour toute indéterminée λ et pour tout k , on a

$$\sigma_k(\lambda, \lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_p) = \lambda^k (\sigma_{k-1}(X_1, \dots, X_p) + \sigma_k(X_1, \dots, X_p)).$$

L'expression (5.7) est donc égale a

$$\begin{aligned} & \Pi^{J_0} \mathbf{s} \left[1 + \sigma_1(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}) \right. \\ & \quad + \sum_{k=1}^{p-1} \left((-1)^k (\Pi^{J_0} \mathbf{s})^k \left(\sigma_k(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}) + \sigma_{k+1}(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}) \right) \right) \\ & \quad \left. + (-1)^p \sigma_p(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}) \right]. \end{aligned}$$

L'expression de \tilde{A}_I dans les coordonnées s_i est alors

$$\begin{aligned} 0 = & 1 + \sigma_1(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}) \\ & + \sum_{k=1}^{p-1} \left((-1)^k (\Pi^{J_0} \mathbf{s})^k \left(\sigma_k(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}) + \sigma_{k+1}(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}) \right) \right) \\ & + (-1)^p \sigma_p(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s}). \quad (5.8) \end{aligned}$$

La clôture de \tilde{C}_n est donnée, dans les coordonnées s_i , par $s_1 \in [0, 1]$ et pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ $s_1 \cdots s_i \in [0, 1]$. Il est suffisant de regarder l'intersection de \tilde{A}_I avec les strates de codimension 1 du bord de \tilde{C}_n .

Supposons que $s_{i_0} = 0$ pour un certain $i_0 \in J_0$ alors le membre de droite de (5.8) devient

$$1 + \sigma_1(\Pi^{J_1} \mathbf{s}, \dots, \Pi^{J_p} \mathbf{s})$$

qui est strictement positif si pour tout i , $s_i \geq 0$. On en déduit que le diviseur \tilde{A}_I n'intersecte aucune composante de la forme $s_{i_0} = 0$ pour i_0 dans J_0 .

On peut donc supposer que $s_i \neq 0$ pour tout $i \in J_0$ afin d'étudier l'intersection de \tilde{A}_I avec le bord de \tilde{C}_n et le membre de droite de (5.8) peut s'écrire

$$\frac{1}{\prod^{J_0} \mathbf{s}} \left(1 - \prod_{j=1}^p \left(1 - \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_j} \mathbf{s} \right) \right) + \prod_{j=1}^p \left(1 - \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_j} \mathbf{s} \right).$$

Si $x = (s_1, \dots, s_n)$ avec $s_i > 0$ pour tout i dans J_0 , est dans la clôture de \tilde{C} , en particulier pour tout i , le produit $s_1 s_2 \cdots s_i$ est entre 0 et 1, on en déduit que tous les produits $\Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_j} \mathbf{s}$ sont compris entre 0 et 1 pour j dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. On a de plus les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\prod^{J_0} \mathbf{s}} \left(1 - \prod_{j=1}^p \left(1 - \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_j} \mathbf{s} \right) \right) \leq \frac{1}{\prod^{J_0} \mathbf{s}}, \\ &0 \leq \prod_{j=1}^p \left(1 - \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_j} \mathbf{s} \right) \leq 1. \end{aligned}$$

Les deux termes $\frac{1}{\prod^{J_0} \mathbf{s}} \left(1 - \prod_{j=1}^p \left(1 - \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_j} \mathbf{s} \right) \right)$ et $\prod_{j=1}^p \left(1 - \Pi^{J_0} \mathbf{s} \Pi^{J_j} \mathbf{s} \right)$ ne peuvent s'annuler simultanément, on en déduit que \tilde{A}_I n'intersecte pas le bord de \tilde{C}_n les s_i étant strictement positifs pour i dans J_0 . Cela achève la preuve de la proposition 5.3.16. \square

5.4 Une définition alternative des MZV motiviques

Les propositions 5.3.13 et 5.3.16 nous amènent à l'énoncé du théorème suivant et à une autre définition des valeurs zêta multiples motiviques.

Théorème 5.4.1. *Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ un uplet d'entiers avec $k_1 \geq 2$ et $k_1 + \dots + k_p = n$. Soit s une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Comme précédemment $\hat{A}_{\mathbf{k}}^s$ est le diviseur des singularités de la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}}^s$. On a alors un motif de Tate mixte*

$$\mathrm{H}^n(X_n \setminus \hat{A}_{\mathbf{k}}^s; \hat{B}_n^{\hat{A}_{\mathbf{k}}^s}).$$

La forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}}^s$ et la préimage \hat{C}_n du cube réel de dimension n dans X_n donnent deux éléments non nuls

$$[\omega_{\mathbf{k}}^s] \in \mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}^n(X_n \setminus \hat{A}_{\mathbf{k}}^s; \hat{B}_n^{\hat{A}_{\mathbf{k}}^s}) \quad \text{et} \quad [\hat{C}_n] \in \left(\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}^n(X_n \setminus \hat{A}_{\mathbf{k}}^s; \hat{B}_n^{\hat{A}_{\mathbf{k}}^s}) \right)^\vee$$

La période du motif de Tate mixte n -encadré

$$\zeta^{fr., \mathcal{M}}(\mathbf{k}, s) = \left[\mathrm{H}^n(X_n \setminus \hat{A}_{\mathbf{k}}^s; \hat{B}_n^{\hat{A}_{\mathbf{k}}^s}); [\omega_{\mathbf{k}}^s], [\hat{C}_n] \right]$$

est égale à $\zeta(k_1, \dots, k_n)$.

D'autre part, soit $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ et $(\mathcal{F}', i'_1, \dots, i'_q)$ deux drapeaux distingués de longueurs respectives i_p et i'_q avec $|i_1| \geq 2$, $|i'_1| \geq 2$ de telle sorte que $I_{i_p}, I'_{i'_q}$ soit une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $\widehat{A}_{i_1, \dots, i_p | i'_1, \dots, i'_q}^{\mathcal{F} | \mathcal{F}'}$ le diviseur des singularités de $\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}} \wedge \omega_{i'_1, \dots, i'_q}^{\mathcal{F}'}$. Il existe alors un motif de Tate mixte n -encadré

$$\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p | \mathcal{F}', i'_1, \dots, i'_q) = \mathrm{H}^n(X_n \setminus \widehat{A}_{i_1, \dots, i_p | i'_1, \dots, i'_q}^{\mathcal{F} | \mathcal{F}'}; \widehat{B}_n^{\widehat{A}_{i_1, \dots, i_p | i'_1, \dots, i'_q}^{\mathcal{F} | \mathcal{F}'}}),$$

les cadres étant donnés par $[\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}} \wedge \omega_{i'_1, \dots, i'_q}^{\mathcal{F}'}]$ et $[\widehat{C}_n]$.

Démonstration. On cherche à appliquer le théorème 3.6 de [Gon02] à notre cas particulier. Comme \widehat{D}_n est un diviseur à croisements normaux et comme la proposition 5.3.16 nous assure que \widehat{A}_n n'intersecte pas le bord réel de \widehat{C}_n , en utilisant la proposition 5.3.13, la seule chose qu'il reste à vérifier est que nous sommes bien en présence d'une stratification de Tate de X_n ; ce dernier point est acquis en vertu du lemme 5.4.3.

Le calcul des périodes découle du fait qu'intégrer sur \widehat{C}_n est équivalent à intégrer sur le cube réel. \square

Le point-clé de la preuve du lemme 5.4.3 est contenu dans le lemme 5.3.3 d'où l'on déduit le lemme suivant.

Lemme 5.4.2. *Soit I_1, \dots, I_r des sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et X l'intersection $A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_r} \subset \mathbb{A}^n$. Alors, X ainsi que ses composantes irréductibles sont des variétés de Tate.*

Démonstration. D'après le lemme 5.3.3, on a des entiers positifs r et s et des entiers c_1, \dots, c_r tels qu'il existe un isomorphisme f

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{A}^s \times \mathbb{G}_m^{n-s-r} \times \prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}$$

De plus, les composantes irréductibles de X sont en bijection avec celles de $\prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}$. Elles sont donc disjointes.

Dans la réalisation de Hodge, on a alors l'isomorphisme suivant

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{A}^s \times \mathbb{G}_m^{n-s-r} \times \prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{H}^*(X, \mathbb{Q}).$$

Le morphisme de structure de Hodge mixte, f^* , est strict [Del71], d'où l'on déduit que $\mathrm{H}^*(X, \mathbb{Q})$ est une somme directe de structure de Hodge-Tate $\mathbb{Q}(m)$ (pour différents m) car, d'après la formule de Künneth, la cohomologie de $\mathbb{A}^s \times \mathbb{G}_m^{n-s-r} \times \prod_{i=1}^r \{x^{c_i} = 1\}$ l'est.

Finalement, en utilisant le fait que la réalisation de Hodge-De Rham est pleinement fidèle, on conclut que le motif de X est une somme directe de motifs de Tate, en d'autres mots, X est une variété de Tate. Les composantes irréductibles de X étant disjointes, chacune d'entre elles est aussi une variété de Tate. \square

Lemme 5.4.3. *Le diviseur $\widehat{D}_n = \widehat{B}_n^0 \cup \widehat{D}_n^1$ munit X_n d'une stratification de Tate.*

Démonstration. Il faut dans un premier temps montrer que toutes les strates de \widehat{D}_n^1 ainsi que X_n sont des variétés de Tate. En utilisant la proposition 5.1.4, il est suffisant de montrer que toutes les intersections possibles de composantes irréductibles de D_n^1 sont des variétés de Tate (c'est évident pour \mathbb{A}^n). Comme, en vertu du lemme 5.4.2, une composante irréductible de $A_{I_1} \cap \dots \cap A_{I_k}$ de D_n^1

est une variété de Tate, on conclut que X_n ainsi que toutes les strates de \widehat{D}_n^1 sont des variétés de Tate.

On remarque que l'argument précédent assure que quelque soit $k \geq 2$, X_k ainsi que toutes les strates de \widehat{D}_k^1 sont des variétés de Tate.

Soit \widehat{S} l'intersection de certaines composantes de codimension 1 de \widehat{B}_n^0 ; c'est la transformée propre de l'intersection correspondante, disons $S = \cap_{j \in J} \{x_j = 0\}$ pour un $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, dans B_n^0 . C'est à dire que \widehat{S} est isomorphe à

$$\mathrm{Bl}_{S \cap D : D \in \mathcal{D}_n^1} S. \quad (5.9)$$

D'une part, l'intersection S est isomorphe à \mathbb{A}^d pour $d = n - |J|$, S est donc une variété de Tate. D'autre part si I est un sous ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ alors $S \cap A_I$ est ou bien vide ($I \cap J \neq \emptyset$) ou bien, si $I \cap J = \emptyset$, isomorphe à la sous variété de \mathbb{A}^d donné par $\{1 - \prod_{i \in I} x_i = 0\}$ (à une renumérotation près). On en déduit que la transformée propre, \widehat{S} , est une variété de Tate car elle est isomorphe à X_d qui en est une grâce à ce qui précède.

Maintenant, si \widehat{S}_i est une composante irréductible de \widehat{D}_n^1 qui a une intersection non vide avec \widehat{S} alors, comme \widehat{S}_i provient de diviseur exceptionnel d'un des éclatements de la construction de X_n , cette intersection $\widehat{S} \cap \widehat{S}_i$ provient d'un diviseur exceptionnel de la suite d'éclatements (5.9) qui produit \widehat{S} . L'intersection $\widehat{S} \cap \widehat{S}_i$ est donc isomorphe à une composante irréductible de \widehat{D}_d^1 dans X_d .

On en déduit que toute intersection non vide de composante irréductible de \widehat{D}_n^1 avec \widehat{S} est isomorphe à une intersection de composante irréductible de \widehat{D}_d^1 dans $X_d \simeq \widehat{S}$ et est par conséquent une variété de Tate. \square

Le lemme et la proposition suivante font le lien entre notre définition alternative des valeurs zêta multiples motiviques et celle de l'article de Goncharov et Manin [GM04].

Lemme 5.4.4. *Soit $r \geq 2$ un entier et soit $\tilde{\delta}_r : \overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^r$ le morphisme donné sur l'ensemble ouvert par*

$$(0, z_1, \dots, z_r, 1, \infty) \longmapsto [0, z_1, z_2, \infty] \times [0, z_2, z_3, \infty] \times \dots \\ \times [0, z_{r-1}, z_r, \infty] \times (0, z_r, 1, \infty).$$

Soit A_r l'union des composantes irréductibles de $\overline{\partial \mathcal{M}}_{0,r+3}$ qui sont envoyées par $\tilde{\delta}_r$ dans $(\mathbb{P}^1)^r \setminus \mathbb{A}^r$. On note aussi A_0 le diviseur composé des composantes irréductibles de $\overline{\partial \mathcal{M}}_{0,r+3}$ qui ne sont pas au bord de la cellule standard Φ_r .

Alors, A_r est inclus dans A_0 et il existe une suite de drapeaux $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$ d'éléments de \mathcal{D}_r^1 (lemme 5.3.5) satisfaisant aux hypothèses du corollaire 5.1.3 telle que

$$X_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_N, \dots, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\alpha_r} \overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \setminus A_r = \mathrm{Bl}_{\mathcal{F}_r, \dots, \mathcal{F}_1} \mathbb{A}^r \xrightarrow{\tilde{\delta}_r} \mathbb{A}^r. \quad (5.10)$$

Démonstration. Le morphisme $\tilde{\delta}_r$ est donné en coordonnées cubiques sur $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3}$ par $x_i = u_i$, les x_i étant les coordonnées affines standard sur $(\mathbb{P}^1)^r$, et envoie les composantes de B_r dans les hyperplans $x_i = 0$ ou $x_i = 1$.

Le morphisme induit $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \setminus A_r \rightarrow \mathbb{A}^r$ est l'éclatement le long des strates

$$\{x_i = x_{i+1} = \dots = x_j = 1\} \quad (5.11)$$

qui sont des éléments de \mathcal{D}_r^1 .

Le départ de la suite de drapeaux $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ est donc donné comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{\{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1\}, \{x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 1\}, \dots, \{x_1 = 1\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\{x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1\}, \{x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 1\}, \dots, \{x_2 = 1\}\} \\ &\quad \dots \\ \mathcal{F}_i &= \{\{x_i = x_{i+1} = \dots = x_n = 1\}, \{x_i = x_{i+1} = \dots = x_{n-1} = 1\}, \dots, \{x_i = 1\}\} \\ &\quad \dots \\ \mathcal{F}_r &= \{\{x_r = 1\}\}. \end{aligned}$$

Cette partie de la suite satisfait bien la condition (2) du corollaire 5.1.3. La manière la plus simple de compléter la suite est de prendre des drapeaux ne contenant qu'un élément commençant avec les éléments non encore sélectionnés de rang 1 (la seule strate de rang 0 est $\{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1\}$), puis ceux de rang 2 et ainsi de suite.

Cette suite de drapeau satisfait bien les hypothèses du corollaire 5.1.3, ce dernier assurant donc que les morphismes dans (5.10) existent.

En fait, l'application usuelle $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \rightarrow (\mathbb{P}^1)^r$ qui envoie $(0, z_1, \dots, z_r, 1, \infty)$ sur (z_1, \dots, z_r) envoie Φ_r sur le simplexe standard $\Delta_r = \{0 < t_1 < \dots < t_r < 1\}$ et envoie B_r sur le bord algébrique de Δ_r . Une première suite d'éclatements le long des sous-variétés $\{0 = t_1 = \dots = t_i\}$ correspond au changement de variables des coordonnées simpliciales aux cubiques (2.7). Pour retrouver B_r , l'éclatement le long des transformées propres des sous-variétés $\{t_i = t_{i+1} = \dots = t_j\}$ et $\{t_i = t_{i+1} = \dots = t_r = 1\}$ doit encore être effectué. L'expression de ces sous-variétés en coordonnées cubiques est $\{x_i = x_{i+1} = \dots = x_j = 1\}$. Le fait qu'il semble y avoir moins d'éclatements pour passer $(\mathbb{P}^1)^r$ à $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3}$ en utilisant $\tilde{\delta}_r$ (5.10) vient du fait qu'ici il s'agit de retrouver un ouvert, $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+3} \setminus A_r$. \square

Le lemme précédent permet de faire le lien entre les valeurs zêta multiples motiviques définies précédemment et celles de Goncharov et Manin.

Proposition 5.4.5. 1. Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_b)$ un b -uplet d'entiers avec $a_1 \geq 2$ et $a_1 + \dots + a_b = n$. En utilisant les conventions précédentes, on a une égalité de motifs de Tate mixtes encadrés

$$\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathbf{a}, \text{id}) = \left[\mathbb{H}^n \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus A_0; B_n^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{a}}], [\Phi_n] \right].$$

2. Soit \mathbf{k} et \mathbf{l} un p -uplet et un q -uplet d'entiers avec $k_1, l_1 \geq 2$, de poids respectifs n et m . Il existe deux drapeaux distingués $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ et $(\mathcal{F}', j_1, \dots, j_q)$ avec $i_1, j_1 \geq 2$, I_{i_p}, I_{j_q} formant une partition de $\llbracket 1, n+m \rrbracket$ tels qu'on ait l'égalité de motifs de Tate mixtes encadrés suivante

$$\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p | \mathcal{F}', j_1, \dots, j_q) = \left[\mathbb{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+m+3} \setminus A_0, B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

En particulier, pour tout $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, le motif de Tate mixte

$$\left[\mathbb{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+m+3} \setminus A_0, B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\sigma}], [\Phi_{n+m}] \right]$$

est égal à son avatar sur X_{n+m} , $\zeta^{fr, \mathcal{M}}(\sigma)$.

Démonstration. Dans 1. et 2., l'application entre espaces vectoriels sous-jacents est respectivement donnée par α_n^* et α_{n+m}^* (cf. (5.10)). Comme \hat{C}_n est envoyé sur Φ_n par α_n^* et \hat{C}_{n+m} sur Φ_{n+m} par α_{n+m}^* respectivement, connaître le comportement de α_n^* et α_{n+m}^* sur $\omega_{\mathbf{a}}$ et $\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}$ est suffisant pour déduire que α_n^* et α_{n+m}^* respectent les cadres.

1. Comme le morphisme α_n^* n'a pas d'effet sur les coordonnées cubiques, u_i , définies sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_0$, on a $\alpha_n^*(\omega_{\mathbf{a}}) = \omega_{\mathbf{a}}^{\text{id}}$, et de là l'égalité des motifs de Tate mixtes encadrés.
2. En utilisant les expressions en coordonnées cubiques (sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0$) suivantes

$$\omega_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}(u_1, \dots, u_n) d^n u \quad \text{and} \quad \omega_{\mathbf{l}} = f_{\mathbf{k}}(u_{n+1}, \dots, u_{n+m}) d^m u$$

on construit deux drapeaux distingués

$$(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p) \quad \text{and} \quad (\mathcal{F}', j_1, \dots, j_q),$$

comme expliqué dans la remarque 5.3.11 avec $s = \text{id}$. Le fait que α_{n+m}^* respecte les cadres vient de l'égalité

$$\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}'} \wedge \omega_{j_1, \dots, j_q}^{\mathcal{F}'} = \alpha_{n+m}^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}).$$

□

5.5 Le produit stuffle est motivique

Soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_p)$ et $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_q)$ un p -uplet et un q -uplet d'entiers avec $k_1, l_1 \geq 2$, $\sum k_i = n$ et $\sum l_j = m$. Dans cette section, comme dans les sections 2.1 et 2.3, si σ est un terme de la somme formelle $\mathbf{k} * \mathbf{l}$, tous les coefficients étant égaux à 1, on écrira $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. L'application δ définie à la proposition 3.3.1 s'étend à

$$\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \times \overline{\mathcal{M}_{0,m+3}}.$$

Soit $A_{\mathbf{k}}$ (resp. $A_{\mathbf{l}}$) le diviseur des singularités de la forme différentielle $\omega_{\mathbf{k}}$ sur $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}$ (resp. $\omega_{\mathbf{l}}$ sur $\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}}$) donnée dans les coordonnées simpliciales par $\omega_{\bar{k}}$ (resp. $\omega_{\bar{l}}$) (cf. 2.4) et dans les coordonnées cubiques par $f_{k_1, \dots, k_p} d^n u$ (resp. $f_{l_1, \dots, l_q} d^m u$). Pour tout $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, soit A_{σ} le diviseur des singularités de la forme ω_{σ} . En reprenant les notations de la section 4.3, on note respectivement Φ_n , Φ_m et Φ_{n+m} la cellule standard de $\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}}(\mathbb{R})$, $\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}}(\mathbb{R})$ et $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}}(\mathbb{R})$, et B_n , B_m et B_{n+m} les clôtures de Zariski des bords de respectivement Φ_n , Φ_m et Φ_{n+m} .

Proposition 5.5.1. *On a une égalité de motifs de Tate mixtes encadrés*

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{H}^n \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}} \right); [\omega_{\mathbf{k}}]; [\Phi_n] \right] \cdot \left[\mathbb{H}^m \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_m^{A_{\mathbf{l}}} \right); [\omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_m] \right] = \\ \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \left[\mathbb{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_{\sigma}; B_{n+m}^{A_{\sigma}} \right); [\omega_{\sigma}]; [\Phi_{n+m}] \right]. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit A_0 la clôture de Zariski de $\partial \overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus B_{n+m}$, $B_{n,m}$ celle du bord de $\Phi_n \times \Phi_m$ et A' le bord de $\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}} \right) \times \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}} \right)$. Comme l'application δ envoie B_{n+m} sur $B_{n,m}$, on a une application induite

$$\delta : \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0} \right) \longrightarrow \left(\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}} \right) \times \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}} \right); B_{n,m}^{A'} \right).$$

En utilisant la formule de Künneth, on a des morphismes de motifs de Tate mixtes

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^n \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}}; B_n^{A_{\mathbf{k}}} \right) \otimes \mathbb{H}^m \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}}; B_m^{A_{\mathbf{l}}} \right) \longrightarrow \\ \mathbb{H}^{n+m} \left(\left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+3}} \setminus A_{\mathbf{k}} \right) \times \left(\overline{\mathcal{M}_{0,m+3}} \setminus A_{\mathbf{l}} \right); B_{n,m}^{A'} \right) \longrightarrow \\ \mathbb{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0} \right) \quad (5.12) \end{aligned}$$

qui sont tous les deux compatibles aux cadres $[\omega_{\mathbf{k}}] \otimes [\omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_n] \otimes [\Phi_m]$, $[\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}]; [\Phi_n \times \Phi_m]$ et $[\delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}})]; [\Phi_{n+m}]$.

Il nous reste à montrer que

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0} \right); [\delta^*(\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}})], [\Phi_{n+m}] \right] = \\ \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \left[\mathbf{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_\sigma; B_{n+m}^{A_\sigma} \right); [\omega_\sigma]; [\Phi_{n+m}] \right]. \end{aligned}$$

Comme A_σ est inclus dans A_0 , en utilisant le lemme 4.2.11, il est suffisant de montrer l'égalité précédente avec A_0 à la place de A_σ dans le membre de droite. En vertu de la proposition 5.4.5, il est maintenant suffisant de travailler avec X_{n+m} (cf. section 5.3) à la place de $\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0$. En effet, d'après la proposition 5.4.5 pour tout σ dans $\text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ on a

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, \text{id}) = \left[\mathbf{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0; B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_\sigma], [\Phi_{n+m}] \right].$$

D'autre part, d'après la seconde partie, on a $(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p)$ et $(\mathcal{F}', j_1, \dots, j_q)$ avec $i_1, j_1 \geq 2$, I_{i_p}, I_{j_q} formant une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p | \mathcal{F}', j_1, \dots, j_q) = \left[\mathbf{H}^{n+m} \left(\overline{\mathcal{M}_{0,n+m+3}} \setminus A_0, B_{n+m}^{A_0} \right); [\omega_{\mathbf{k}} \wedge \omega_{\mathbf{l}}], [\Phi_{n+m}] \right].$$

Pour terminer la preuve de la proposition 5.5.1, il nous faut donc encore montrer que

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p | \mathcal{F}', j_1, \dots, j_q) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, \text{id}). \quad (5.13)$$

Les calculs de la section 2.3, en particulier la proposition 2.3.5, donnent pour chaque $\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ une permutation s_σ de $\llbracket 1, n+m \rrbracket$ telle que

$$[\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}} \wedge \omega_{j_1, \dots, j_q}^{\mathcal{F}'}] = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} [\omega_{\sigma, s_\sigma}].$$

Comme le diviseur $A_{\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}, j_1, \dots, j_q}$ de $\omega_{i_1, \dots, i_p}^{\mathcal{F}} \wedge \omega_{j_1, \dots, j_q}^{\mathcal{F}'}$ et le diviseur A_{σ, s_σ} sont dans \widehat{A}_{n+m} , le lemme 4.2.11 et le lemme 4.2.3 montrent que

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p | \mathcal{F}', j_1, \dots, j_q) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, s_\sigma). \quad (5.14)$$

Permuter les variables donne un morphisme bien défini $X_{n+m} \rightarrow X_{n+m}$ qui préserve \widehat{C}_{n+m} ainsi que son bord algébrique \widehat{B}_{n+m} . On obtient ainsi, sur chaque terme du membre de droite de (5.14), une égalité

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, s_\sigma) = \zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, \text{id}),$$

d'où l'on conclut

$$\zeta^{fr.\mathcal{M}}(\mathcal{F}, i_1, \dots, i_p | \mathcal{F}', j_1, \dots, j_q) = \sum_{\sigma \in \text{st}(\mathbf{k}, \mathbf{l})} \zeta^{fr.\mathcal{M}}(\sigma, \text{id}),$$

ce qui donne l'égalité de motifs de Tate mixtes encadré voulue pour prouver la proposition 5.5.1. \square

Annexe A

Autour des structures de Hodge mixtes

La proposition suivante (proposition 4.2.8) sert de façon essentielle à prouver la proposition 4.2.9.

Proposition A.0.2 (Proposition 4.2.8). *Soit \mathcal{M} une variété quasi-projective lisse de dimension n ($n \geq 2$) et X et Y deux diviseurs à croisements normaux. On suppose que les composantes irréductibles de X et de Y sont lisses, que ces deux diviseurs n'ont pas de composante irréductible commune et que l'union $X \cup Y$ est encore un diviseur à croisements normaux. On notera parfois Y^X pour $Y \setminus (Y \cap X)$.*

On a alors les isomorphismes suivants

$$\mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \simeq \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X)) \quad (\text{A.1})$$

et

$$\mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \simeq \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)) \quad (\text{A.2})$$

où $\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^*$ désigne la cohomologie de De Rham à coefficients rationnels munie de sa structure de Hodge.

On utilise dans la preuve quelques résultats de Deligne contenus dans [Del74].

Preuve de l'isomorphisme (A.1). La suite exacte longue de cohomologie relative donne

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y^X) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y^X) \longrightarrow \cdots$$

Les morphismes de structures de Hodge mixtes étant strictes, cette suite exacte longue donne une suite exacte sur les parties graduées de poids $2n$

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y^X) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X; Y^X) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X) \\ \longrightarrow \mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y^X) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Pour montrer que $\mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \simeq \mathrm{Gr}_{2n}^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X))$ il est donc suffisant de vérifier les annulations suivantes

$$\mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y \setminus X \cap Y) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y \setminus (X \cap Y)) = 0.$$

On trouve chez Deligne [Del74][Théorème 8.2.4] les principes généraux de contrôle des poids, contenus dans le théorème suivant et qui seront utilisés plus loin :

Théorème A.0.3 ([Del74][Théorème 8.2.4]). *Soit M une variété algébrique sur \mathbb{C} . Les couples (p, q) tels que les nombres de Hodge $h^{p,q}(M)$ (définis par $h^{p,q}(M) = \dim \mathrm{Gr}_{p+q}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(M)$) soient non nuls vérifient les conditions suivantes*

1. $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. Si $\dim M = N$ et que $n \geq N$ alors

$$(p, q) \in \llbracket n - N, N \rrbracket \times \llbracket n - N, N \rrbracket.$$

3. Si M est propre alors $p + q \leq n$.
4. Si M est lisse alors $p + q \geq n$.

On déduit de 1 que $\mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y \setminus X \cap Y) = 0$ et de 2 que $\mathrm{Gr}_{2n}^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y \setminus (X \cap Y)) = 0$ puisque $\dim Y \setminus (X \cap Y) = n - 1$. \square

Preuve de l'isomorphisme (A.2). Il s'agit donc de montrer que

$$\mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \simeq \mathrm{Gr}_0^W(\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)).$$

Les trois groupes de cohomologie relative $\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)$, $\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y^X)$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)$ donnent lieu à trois suites exactes longues reliées par les morphismes d'inclusion naturels, et qui sont résumées dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(\mathcal{M} \setminus X) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y^X) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y^X) \\ \uparrow & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y^X) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y^X) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y^X) \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\ \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y) \end{array}$$

Les suites exactes et les morphismes verticaux étant des morphismes de structures de Hodge mixtes, on peut à nouveau passer aux parties graduées, ici en poids 0. En utilisant le théorème A.0.3, rappelé ci-dessus, on trouve en vertu de 4 que $\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}) = 0$, $\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(\mathcal{M}) = 0$, $\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X) = 0$ et $\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(\mathcal{M} \setminus X) = 0$ car \mathcal{M} et $\mathcal{M} \setminus X$ sont lisses ($n \geq 2$); en vertu de 2 on a également que $\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y) = 0$ et $\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(Y^X) = 0$.

Le diagramme se réduit donc au suivant, qui fournit des relations entre trois isomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y^X) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y^X) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y^X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De la partie supérieure, on tire l'isomorphisme $\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X) \simeq \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y^X)$. De la partie inférieure on conclut que pour obtenir l'isomorphisme désiré (A.2), il suffit de montrer que :

$$\mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y) \simeq \mathrm{Gr}_0^W \mathrm{H}_{\mathrm{Hd}}^{n-1}(Y \setminus (Y \cap X)). \quad (\text{A.3})$$

La variété non lisse Y (resp. $Y \setminus (Y \cap X)$) est une union finie de composantes irréductibles lisses $\cup_{i=1}^N Y_i$ (resp. $\cup_{i=1}^N Y_i \setminus (Y \cap X)$). Les groupes de cohomologie $H_{\text{Hd}}^k(Y)$ (resp. $H_{\text{Hd}}^k(Y \setminus (Y \cap X))$) sont l'aboutissement de la suite spectrale de structures de Hodge mixtes

$${}_L E_1^{p,q}(Y) = \bigoplus_{|I|=p+1} H_{\text{Hd}}^q(Y_I) \quad \left(\text{resp. } {}_L E_1^{p,q}(Y \setminus (Y \cap X)) = \bigoplus_{|I|=p+1} H_{\text{Hd}}^q(Y_I \setminus (Y \cap X)) \right)$$

où I désigne ici un sous ensemble de $\llbracket 1, N \rrbracket$ et Y_I (resp. $Y_I \setminus (Y \cap X)$) est l'intersection $\cap_{i \in I} Y_i$ (resp. $\cap_{i \in I} Y_i \setminus (Y \cap X)$).

L'inclusion $j : Y \setminus (Y \cap X) \hookrightarrow Y$ (et par restriction les inclusions $Y_I \setminus (Y \cap X) \hookrightarrow Y_I$) induit un morphisme $j^* : {}_L E_1^{p,q}(Y) \rightarrow {}_L E_1^{p,q}(Y \setminus (Y \cap X))$ entre les suites spectrales de même qu'entre leurs aboutissements; de plus, j^* respecte les structures de Hodge mixtes.

Étant intéressé uniquement par le cas où $p + q = n - 1$, on observe que dans ce cas on a un isomorphisme sur les parties graduées de poids 0 des termes en $E_1^{p,q}$ des suites spectrales (avec $p + q = n - 1$).

En effet, pour $q > 0$ on a $\text{Gr}_0^W H_{\text{Hd}}^q(Y_I) = 0$ et $\text{Gr}_0^W H_{\text{Hd}}^q(Y_I \setminus (Y \cap X)) = 0$ en utilisant le point 4 du théorème A.0.3 car Y_I et $Y_I \setminus (Y \cap X)$ sont lisses. Enfin, pour $q = 0$, on a

$${}_L E_1^{p,q}(Y \setminus (Y \cap X)) \simeq {}_L E_1^{p,q}(Y)$$

car l'hypothèse que $X \cup Y$ est à croisements normaux implique que les intersections de n composantes de Y coïncident avec les intersections de même type pour $Y \setminus (Y \cap X)$.

On en déduit bien que le morphisme $j^* : {}_L E_1^{p,q}(Y) \rightarrow {}_L E_1^{p,q}(Y \setminus (Y \cap X))$ induit un isomorphisme sur les parties graduées de poids 0 des termes E_1 pour $p + q = n - 1$.

De plus, les différentielles d_1 restreintes en poids 0 s'annulent. Elles s'écrivent en effet

$$d_1 : \text{Gr}_0^W {}_L E_1^{p,q}(Y) = \bigoplus_{|I|=p+1} \text{Gr}_0^W H_{\text{Hd}}^q(Y_I) \longrightarrow \text{Gr}_0^W {}_L E_1^{p+1,q}(Y) = \bigoplus_{|I|=p+2} \text{Gr}_0^W H_{\text{Hd}}^q(Y_I)$$

et de manière identique en remplaçant Y par $Y \setminus (X \cap Y)$ pour ${}_L E_1^{p,q}(Y \setminus (X \cap Y))$. Or l'espace d'arrivée est trivial puisque l'on doit avoir $q = 0$, $p + 2 = n - 1 + 2 = n + 1$ et que le diviseur Y est à croisements normaux.

Finalement les parties graduées de poids 0 des aboutissements des deux suites spectrales pour Y et $Y \setminus (X \cap Y)$ sont isomorphes, c'est-à-dire $\text{Gr}_0^W H_{\text{Hd}}^{n-1}(Y) \simeq \text{Gr}_0^W H_{\text{Hd}}^{n-1}(Y \setminus (Y \cap X))$. On en déduit, d'après ce qui précède l'isomorphisme désiré

$$\text{Gr}_0^W (H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M} \setminus X, Y^X)) \simeq \text{Gr}_0^W (H_{\text{Hd}}^n(\mathcal{M}, Y)).$$

□

Bibliographie

- [And04] Y. ANDRÉ – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [BGSV90] A. A. BEĬLINSON, A. B. GONCHAROV, V. V. SCHECHTMAN et A. N. VARCHENKO – « Aomoto dilogarithms, mixed Hodge structures and motivic cohomology of pairs of triangles on the plane », The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 135–172.
- [Bro06] F. BROWN – « Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{R})$ », Thèse, Université de Bordeaux, 2006.
- [Che73] K.-T. CHEN – « Iterated integrals of differential forms and loop space homology », *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 217–246.
- [DCP95] C. DE CONCINI et C. PROCESI – « Wonderful models of subspace arrangements », *Selecta Math. (N.S.)* **1** (1995), no. 3, p. 459–494.
- [Del71] P. DELIGNE – « Théorie de Hodge. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1971), no. 40, p. 5–57.
- [Del74] — , « Théorie de Hodge. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), no. 44, p. 5–77.
- [DG05] P. DELIGNE et A. B. GONCHAROV – « Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), no. 1, p. 1–56.
- [DM69] P. DELIGNE et D. MUMFORD – « The irreducibility of the space of curves of given genus », *Pub. Math. Institut des Hautes Etudes Scientifiques* (1969), no. 36, p. 75–109.
- [Dri92] V. G. DRINFEL'D – « On the structure of quasitriangular quasi-Hopf algebras », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **26** (1992), no. 1, p. 78–80.
- [FM94] W. FULTON et R. MACPHERSON – « A compactification of configuration spaces », *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), no. 1, p. 183–225.
- [Fur08] H. FURUSHO – « Double shuffle relation for associators », <http://arxiv.org/abs/0808.0319>, 2008.
- [GM04] A. B. GONCHAROV et Y. I. MANIN – « Multiple ζ -motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ », *Compos. Math.* **140** (2004), no. 1, p. 1–14.
- [Gon99] A. B. GONCHAROV – « Volumes of hyperbolic manifolds and mixed Tate motives », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 2, p. 569–618.
- [Gon01] — , « Multiple polylogarithms and mixed tate motives », www.arxiv.org/abs/math.AG/0103059, May 2001.
- [Gon02] — , « Period and mixed motives », www.arxiv.org/abs/math.AG/0202154, May 2002.

- [Gon05] — , « Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry », *Duke Math. J.* **128** (2005), no. 2, p. 209–284.
- [Hof00] M. E. HOFFMAN – « Quasi-shuffle products », *J. Algebraic Combin.* **11** (2000), no. 1, p. 49–68.
- [Hu03] Y. HU – « A compactification of open varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 12, p. 4737–4753 (electronic).
- [Hub00] A. HUBER – « Realization of Voevodsky’s motives », *J. Algebraic Geom.* **9** (2000), no. 4, p. 755–799.
- [Hub04] A. HUBER – « Corrigendum to : “Realization of Voevodsky’s motives” [J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 4, 755–799; mr1775312] », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. 1, p. 195–207.
- [IKZ06] K. IHARA, M. KANEKO et D. ZAGIER – « Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values », *Compos. Math.* **142** (2006), no. 2, p. 307–338.
- [Kee92] S. KEEL – « Intersection theory of moduli space of stable n -pointed curves of genus zero », *Trans. Amer. Math. Soc.* **330** (1992), no. 2, p. 545–574.
- [Knu83] F. F. KNUDSEN – « The projectivity of the moduli space of stable curves. II. The stacks $M_{g,n}$ », *Math. Scand.* **52** (1983), no. 2, p. 161–199.
- [Lev93] M. LEVINE – « Tate motives and the vanishing conjecture for algebraic k-theory », *Algebraic K-Theory and Algebraic Topology, Lake Louise 1991* (P. G. Goerss et J. F. Jardine, éd.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser C Math. Phys. Sci., no. 407, Kluwer Acad. Pub., Février 1993, p. 167–188.
- [Lev98] — , *Mixed motives*, no. 57, AMS, Providence, 1998.
- [MP98] R. MACPHERSON et C. PROCESI – « Making conical compactifications wonderful », *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 1, p. 125–139.
- [Rac02] G. RACINET – « Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l’unité », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2002), no. 95, p. 185–231.
- [Ter02] T. TERASOMA – « Mixed Tate motives and multiple zeta values », *Invent. Math.* **149** (2002), no. 2, p. 339–369.
- [Uly02] A. P. ULYANOV – « Polydiagonal compactification of configuration spaces », *J. Algebraic Geom.* **11** (2002), no. 1, p. 129–159.
- [Voe00] V. VOEVODSKY – « Triangulated category of motives over a field », *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Math. Studies, vol. 143, Princeton University Press., 2000.
- [Voi02] C. VOISIN – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, première éd., Société Mathématique de France, 2002.