



Optique quantique multimode : des images aux impulsions

Benoît Chalopin

► To cite this version:

Benoît Chalopin. Optique quantique multimode : des images aux impulsions. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : . tel-00431648

HAL Id: tel-00431648

<https://theses.hal.science/tel-00431648>

Submitted on 12 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Quantique
  cole doctorale de physique de la région parisienne

présentée par

M. Benoît CHALOPIN

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse :

Optique quantique multimode : des images aux impulsions

soutenue le 2 novembre 2009 devant le jury composé de :

M. Enrico BRAMBILLA	Rapporteur
Mme. Béatrice CHATEL	Examinatrice
M. Claude FABRE	Directeur de thèse
M. Jean-Marc FRIGERIO	Examineur
M. Luca GUIDONI	Rapporteur
M. Gerd LEUCHS	Examineur
M. Nicolas TREPS	Directeur de thèse

Résumé

Ce mémoire de thèse est consacré à l'étude théorique et expérimentale d'oscillateurs paramétriques optiques (OPO) multimodes dans deux régimes : l'optique des images et l'optique des impulsions.

On rappelle les outils utilisés habituellement pour décrire et manipuler les états non-classiques de la lumière, en insistant sur l'importance du concept de mode du champ dans sa description quantique, qu'il soit transverse ou longitudinal. On rappelle ensuite les techniques de manipulation des modes transverse (images) et des modes longitudinaux (impulsions) au niveau théorique et expérimental. L'accent est mis sur le rapprochement de ces deux domaines où l'on peut facilement identifier un grand nombre de variables similaires. Un modèle général des OPO multimodes est développé, s'appuyant sur un traitement multimode de la conversion paramétrique dans un cristal non-linéaire d'ordre deux. Ce modèle conduit à des états non-classiques multimodes, intéressants pour l'information quantique, et peut être appliqué aux cas d'un OPO dans une cavité dégénérée pour les modes transverses, et d'un OPO pompé en modes synchrones (SPOPO).

Tous ces développements théoriques s'orientent vers plusieurs expériences d'optique multimode décrites dans ce manuscrit. La première est une étude de la transmission et le doublage de fréquence d'images dans une cavité auto-imageante. Deux expériences d'imagerie quantique sont ensuite décrites : l'une conduit à une réduction de bruit multimode dans un OPO au dessus du seuil et la seconde utilise un OPO dans une cavité auto-imageante et permet la production et la caractérisation d'un état trimode sous le seuil de l'OPO. Enfin, on décrit la mise en place expérimentale d'un SPOPO qui conduit à des premiers résultats de réduction de bruit sur un peigne de fréquence.

Mots-clés : optique transverse, imagerie quantique, impulsions femtosecondes, peigne de fréquence, oscillateur paramétrique optique, fluctuations quantiques, états non-classiques multimodes.

Abstract

This thesis is devoted to the theoretical and experimental study of multimode optical parametric oscillators (OPO) in the transverse and longitudinal domains.

We first recall the common tools used to operate non-classical states of light, with a special emphasis on the concept of mode in the quantum description of the electromagnetic field. We recall the techniques used to describe and manipulate experimentally the transverse (images) and longitudinal (pulses) modes, and compare the two cases. A certain number of analog variables arises, which can help transpose concepts from one domain to the other. We develop a general model for multimode OPOs, centered on the multimode description of the non-linear interaction in a parametric crystal. This lead to the possibility of generating multimode non-classical states, and can be applied for transverse or longitudinal multimode OPO.

The theoretical developments are linked to several experiments achieved in this thesis. The first one is a study of the transmission and frequency doubling of images in a self-imaging cavity. Two different quantum imaging experiments are described : the first one is the generation of multimode squeezing in an OPO above threshold and the second one uses an OPO in a self-imaging cavity to produce image amplification and multimode squeezing. Finally, we describe the new experimental setup of a synchronously pumped OPO (SPOPO) which leads to the squeezing of a frequency comb.

Keywords transverse optics, quantum imaging, femtosecond pulses, frequency combs, optical parametric oscillator, quantum fluctuations, multimode non-classical states.

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé dans l'équipe d'optique du Laboratoire Kastler Brossel. Je remercie donc son directeur Paul Indelicato, qui dirige un laboratoire en pleine expansion, mais en restant à l'écoute de chacun de ses membres.

Nicolas Treps et Claude Fabre m'ont encadré pendant ces trois années avec confiance et dévouement. Je tiens donc à leur adresser mes plus sincères et chaleureux remerciements. L'encadrement presque quotidien de Nicolas était à la fois rassurant et motivant, pour permettre aux expériences d'avancer, jamais aussi vite que prévu, mais toujours en gardant le bon cap. L'enseignement de Claude fut ma première motivation pour le domaine de recherche. Il a su ensuite rester disponible malgré son emploi du temps chargé en dispensant de précieux conseils théoriques et expérimentaux.

Je remercie Enrico Brambilla, Béatrice Chatel, Jean-Marc Frigerio, Luca Guidoni et Gerd Leuchs pour avoir accepté de faire partie de mon jury, ce qui impliquait la lourde tâche de relire ce manuscrit.

J'ai eu l'occasion d'enseigner dans plusieurs modules de license et de Master à l'UPMC. Cette expérience m'a beaucoup plu et m'a donné envie de continuer de travailler dans la recherche académique. Je tiens donc à remercier les enseignants-chercheurs impliqués qui m'ont donné goût à la transmission du savoir : Jean-Michel Courty, Edouard Kierlik, Julien Laurat et Brahim Lamine.

De nombreuses personnes m'ont également accompagné scientifiquement, partageant les pénibles difficultés expérimentales, mais aussi la joie que procure un résultat nouveau, au détour d'un oscilloscope ou d'un analyseur de spectre. Merci à Agnès Maître de m'avoir accompagné dans les expériences d'imagerie. Merci à Laurent Lopez, Giuseppe Patera, Jean-François Morizur, Olivier Pinel, Zehui Zhai et Francesco Scazza avec qui j'ai passé de longues heures en salle de manip ou devant un tableau blanc, et qui ont été indispensables pour les résultats de cette thèse, notamment en me faisant découvrir de nouveaux outils et techniques scientifiques et informatiques. Les autres doctorants et jeunes chercheurs du laboratoire que j'ai côtoyés m'ont aidé à garder le moral en créant une atmosphère de travail chaleureuse, dans un bureau surchargé ou à la cantine à midi. Merci à Gabriel, EOL, Charles, Jean, Sophie, Gaëlle, Jérémie, Sydney, PF, Pierre, Alexandros, Michael, Florence, et tous ceux que j'oublie forcément. Merci aussi à la mafia italienne du laboratoire qui m'a prodigué des cours particuliers de langue et de cuisine italienne :

Virginia, Chiara, Piernicola, Pietro, Riccardo.

Cette thèse s'est déroulée dans les meilleures conditions également grâce au travail de tout le personnel technique et administratif du laboratoire. Je remercie d'abord les gestionnaires Monique Bonnamy, Laetitia Morel et Geneviève Léonis, qui ont pris en charge tous les détails commerciaux et administratifs des commandes et des missions. Merci à Serge Bégon, administrateur informatique du réseau du laboratoire. Au niveau technique, je remercie également les ingénieurs et techniciens de l'atelier mécanique, Pascal Travers, Jean-Michel Isac, Alain Vogt et Gaël Coupin, et les électroniciens Jean-Pierre Okpysz et Brigitte Delamour, sans qui les expériences ne seraient pas possibles.

Mes derniers remerciements s'adressent à ma famille et à mes amis, pour leur soutien et leurs encouragements réguliers qui m'ont permis de garder la tête hors de l'eau pendant trois ans : mes parents, mes frères, la mousteam, Amélie, Marc, Maud, Grégory, Antoine, Claire, Thomas, Olivier, Florence Guillaume, Florent... Enfin, merci et au revoir à mon Papi Edouard qui nous a quittés récemment.

Sommaire

Introduction	1
Résumé et plan de la thèse	4
1 Outils pour l'optique quantique multimode en variables continues	7
A Modes et états du champ classique et du champ quantique	8
A.1 Qu'appelle-t-on un mode ?	8
A.1.1 Définition d'un mode en optique classique	8
A.1.2 Quantification du champ	9
A.1.3 Changement de base de modes quantique	10
A.1.4 Description classique ou quantique du champ, que choisir ?	11
A.2 Inégalité de Heisenberg et fluctuations d'un champ intense	11
A.3 Représentation du champ	13
A.3.1 Fonction de Wigner et états gaussiens	13
A.3.2 Etats gaussiens et matrice de covariance	14
B Etats non-classiques de la lumière	16
B.1 Définition d'un état non-classique	16
B.2 État non-classique monomode : réduction de bruit d'un faisceau lu-	
mineux	16
B.3 États classiques multimodes	17
B.4 États non-classiques multimodes	17
B.4.1 Qu'appelle-t-on un état non-classique multimode ?	17
B.4.2 Etat comprimé multimode	18
B.4.3 Corrélations quantiques et intrication bimode	18
C Mesures optiques	21
C.1 Exemple de détection : la détection directe d'intensité	21
C.2 La détection homodyne	22
C.3 Mode associé à une détection	24
C.4 Rôle des pertes dans un dispositif de détection quantique	25
C.5 Mesure multicanal	26
C.5.1 Mesure d'intrication	26
C.5.2 Mesure multipixel	26
2 Optique comparée des images et des impulsions	31
A Éléments d'optique transverse	33
A.1 Equation de propagation	33

	A.1.1	Espace réel	33
	A.1.2	Espace de Fourier	33
A.2		Faisceaux gaussiens	34
A.3		Propagation des modes gaussiens et des images	35
	A.3.1	Définition d'une image	36
	A.3.2	Champ proche et champ lointain	36
	A.3.3	Formalisme des matrices ABCD	37
	A.3.4	Transformation des modes gaussiens par une matrice ABCD	38
	A.3.5	Transformation des images par une matrice ABCD	38
A.4		Cavités dégénérées	38
	A.4.1	Sélection transverse et longitudinale dans une cavité quel- conque	39
	A.4.2	Condition de dégénérescence transverse d'une cavité	41
	A.4.3	Plage de dégénérescence d'une cavité	42
A.5		Cavités totalement dégénérées	44
B		Elements d'optique des impulsions	46
	B.1	Description d'un train impulsions laser femtoseconde	46
	B.1.1	Domaines temporel et spectral	46
	B.1.2	Laser à verrouillage de modes et impulsions femtosecondes	47
	B.2	Propagation d'une impulsion courte	49
	B.2.1	Importance de la phase spectrale	49
	B.2.2	Effets de la dispersion sur une impulsion courte	51
	B.3	Cavités synchrones	54
	B.3.1	Approche Qualitative	54
	B.3.2	Approche Quantitative	55
	B.3.3	Simulations numériques	59
C		Analogie entre les deux domaines	63
	C.1	Equation de propagation des modes	63
	C.2	Résonance en cavité	64
	C.3	Techniques de caractérisation spatiale et temporelle d'un faisceau	65
	C.3.1	Mesures d'intensité	65
	C.3.2	Mesures de phase	67
	C.4	Transformation et mise en forme transverse et longitudinale	69
	C.4.1	Mise en forme transverse d'un faisceau	70
	C.4.2	Mise en forme d'une impulsion	72
	C.5	Variables et concepts analogues dans les deux domaines	74
D		Transmission et doublage d'images en cavité auto-imageante	76
	D.1	La cavité auto-imageante en géométrie linéaire	76
	D.1.1	Etude géométrique	76
	D.1.2	Etude de la stabilité de la cavité auto-imageante	77
	D.1.3	Waist propre de la cavité proche de la dégénérescence	78
	D.1.4	Nombre de modes résonants dans la cavité	79
	D.2	Transmission d'une image	80
	D.2.1	Montage expérimental	80
	D.2.2	Alignement de la cavité auto-imageante	81

D.2.3	Résultats de transmission d'images	82
D.3	Etude du doublage de fréquence en cavité auto-imageante	83
D.3.1	Montage expérimental	84
D.3.2	Images doublées	85
D.3.3	Etude de l'efficacité de doublage	86
D.4	Conclusion	90
E	Conclusion	91
3	Théorie des OPO multimodes	93
A	Optique non linéaire	95
A.1	Généralités sur l'optique non linéaire d'ordre deux	95
A.1.1	Polarisation non linéaire d'ordre deux	95
A.1.2	Hamiltonien non linéaire	96
A.2	Doublage de fréquence	97
A.2.1	Doublage de fréquence monomode	97
A.2.2	Quasi-accord de phase	98
A.2.3	Doublage de fréquence d'une image	99
A.2.4	Doublage de fréquence d'un peigne de fréquence	100
A.3	Conversion paramétrique	101
A.3.1	Equations d'évolutions des modes signal et complémentaire	102
A.3.2	Amplification sensible et insensible à la phase	102
A.3.3	Hamiltonien de la conversion paramétrique monomode	104
B	Approche hamiltonienne de l'interaction paramétrique multimode	105
B.1	Conversion paramétrique multimode spatiale dans un cristal d'épais- seur non négligeable	105
B.1.1	Calcul du hamiltonien	105
B.1.2	Tailles caractéristiques et nombre de modes du couplage transverse	107
B.1.3	Pixellisation du plan transverse.	109
B.2	Conversion paramétrique multimode spectrale	109
B.2.1	Calcul du hamiltonien	109
B.2.2	Matrice de couplage spectrale	111
B.3	Comparaison des matrices de couplages spatial et spectral	114
B.4	Diagonalisation et états propres du couplage paramétrique	114
B.4.1	Valeurs propres	115
B.4.2	Vecteurs propres	117
C	Equations d'évolution générales de l'OPO multimode	120
C.1	OPO dégénéré <i>monomode</i>	120
C.1.1	Equations d'évolution	120
C.1.2	Propriétés classiques	122
C.1.3	Propriétés quantiques	123
C.2	Modèle général des OPO multimodes	127
C.2.1	Définition et exemples étudiés	127
C.2.2	Equations d'évolution des modes	129
C.3	Effets classiques dans les OPO multimodes	129
C.3.1	Seuil d'oscillation	129

C.3.2	Amplification sensible à la phase sous le seuil d'oscillation	130
C.4	Effets quantiques dans les OPO multimodes	131
C.4.1	Réduction de bruit sous le seuil d'oscillation	131
C.4.2	Verrouillage de la pompe au dessus du seuil d'oscillation	132
C.4.3	Corrélations quantiques entre modes copropageants	132
D	Conclusion	135
4	Génération d'un état non-classique multimode brillant	137
A	Contexte et objectif de cette expérience.	137
B	Dispositif expérimental	140
B.1	Source laser	140
B.2	Cavité de filtrage	140
B.3	Le cristal de PPKTP	142
B.4	Cavité optique	143
B.5	Adaptation de mode du faisceau pompe	146
B.6	Asservissements de la cavité	147
B.7	Asservissements de la phase relative au dessus du seuil	147
B.8	Détection homodyne	151
C	Génération d'états non-classiques multimodes	153
C.1	Réduction de bruit multimode sous le seuil d'oscillation	153
C.2	Seuil d'oscillation de l'OPO	153
C.3	État trimode au dessus du seuil d'oscillation	157
D	Conclusion	159
5	Oscillateur paramétrique optique en cavité auto-imageante	161
A	Dépendance des supermodes spatiaux avec le profil de pompe	163
A.1	Pompe gaussienne large	163
A.2	Pompe très focalisée	164
A.3	Deux faisceaux pompes croisés	166
A.4	Détection homodyne des fluctuations sur les supermodes	167
A.5	Description en champ lointain	167
B	Propriétés locales du champ émis par l'OPO en cavité auto-imageante	167
B.1	Réduction des fluctuations locales	168
B.2	Etude locale en champ lointain	169
C	Étude expérimentale d'un OPO en cavité auto-imageante	171
C.1	Contexte et objectifs de cette expérience	171
C.2	Ressources expérimentales sur la table optique	171
C.3	Montage expérimental avec un cristal de LiNbO ₃	171
C.3.1	Le cristal de LiNbO ₃	172
C.3.2	OPO auto-imageant en géométrie de double cavité	173
C.3.3	Cavité du champ pompe	174
C.3.4	Cavité auto-imageante	175
C.3.5	Dispositif d'imagerie	177
C.3.6	Cavités parasites	177
C.3.7	Seuil d'oscillation et effets thermiques dans le cristal de LiNbO ₃	179

C.3.8	Résultats d'amplification sensible à la phase et conclusion	181
C.4	Montage expérimental avec un cristal de PPKTP	181
C.4.1	Géométrie de la cavité	183
C.4.2	Faisceau pompe et amplification sensible à la phase	186
C.4.3	Détection homodyne	186
C.4.4	Résultats de compression de bruit multimode	187
C.5	Conclusion	189
6	Oscillateur paramétrique optique en cavité pompé en modes synchrones	191
A	Description théorique d'un OPO pompé en modes synchrones	193
A.1	Les supermodes de l'approche spectrale	193
A.2	Approximation gaussienne et profil temporel des supermodes	194
A.3	Seuil d'oscillation	195
A.4	Approche temporelle du SPOPO	197
A.4.1	Cas idéal du cristal sans dispersion	198
A.4.2	Cas réel avec dispersion	199
A.4.3	Détection homodyne des modes temporels	200
B	Mise en place expérimentale d'un OPO pompé en modes synchrones	201
B.1	Contexte et objectifs de cette expérience	201
B.2	Dispositif expérimental	202
B.3	Sources laser	202
B.3.1	Laser Mira	202
B.3.2	Bruit du laser	203
B.3.3	Cavité de filtrage et asservissement de l'offset de fréquence du laser	204
B.3.4	Doublage de fréquence dans un cristal de BiBO_3	207
B.4	Construction de l'OPO pompé en modes synchrones	208
B.4.1	Géométrie de la cavité	208
B.4.2	Résonance du peigne de fréquence dans la cavité	212
B.4.3	Asservissement de la cavité	212
B.4.4	Cristal de BiBO_3 et adaptation de mode de la pompe	214
B.5	Amplification sensible à la phase sous le seuil d'oscillation	216
B.6	Seuil d'oscillation du SPOPO	216
B.7	Mise en forme des impulsions de l'oscillateur local	217
B.8	Etat comprimé d'un peigne de fréquence	219
B.9	Conclusion	221
	Conclusion et perspectives	223
	Annexe	227
A	Calcul du doublage de fréquence d'une image	227
B	Calcul du hamiltonien de la conversion paramétrique dans un cristal d'épais- seur non nulle	229
	Bibliographie	230

Introduction

L'optique quantique a réuni les comportements ondulatoires et corpusculaires de la lumière grâce aux concepts de mode et de photon, qui permettent de séparer la propagation de la lumière de sa quantification. Le photon est une particule élémentaire de lumière et le mode décrit le champ électromagnétique qui lui est associé, une sorte de "fonction d'onde" qui doit satisfaire les équations classiques de Maxwell. C'est en quelque sorte la carte d'identité du photon, contenant toutes ses caractéristiques. Inversement, le photon est une excitation énergétique élémentaire dans ce mode. Des photons associés au même mode sont parfaitement identiques. Dans le cas où la direction de propagation de la lumière est bien définie, on peut distinguer trois types de caractéristiques indépendantes :

1. sa polarisation, nécessairement orthogonale à la direction de propagation.
2. son profil transverse, qui rend compte de la dépendance spatiale du mode dans la direction orthogonale à la direction de propagation.
3. son profil longitudinal, qui décrit conjointement la dépendance temporelle du mode et sa dépendance spatiale dans la direction de propagation.

La mécanique quantique nous permet de considérer des états qui exhibent des propriétés particulières qui ne peuvent pas être envisagés par une description classique. Les prouesses expérimentales permettent aujourd'hui la création et l'observation d'une grande variété d'états non-classiques [Bachor 04]. On peut notamment citer l'observation d'états nombres, pour lesquels le nombre de photons est fixé, ou les états comprimés qui présentent des fluctuations quantiques réduites. Récemment, les premiers chats de Schrödinger optiques, superpositions cohérentes d'états macroscopiquement différents ont vu le jour, dans les domaines de la lumière visible [Ourjoumtsev 07b, Takahashi 08] et dans le domaine micro-onde [Deleglise 08]. Le caractère non-classique d'un état du champ peut être une ressource privilégiée pour le traitement quantique de l'information [Cerf 07]. Elle peut par exemple assurer la sécurité de protocoles de partage de clé quantique (cryptographie quantique) entre deux parties [Ekert 91], ou être utilisée pour la téléportation quantique d'états du champ [Vaidman 94, Braunstein 98].

La communauté de l'optique quantique en variables continues s'intéresse au régime où les variables mesurées sont à spectre continu, il s'agit en général des observables de quadrature du champ. Ces mesures nécessitent l'utilisation, au niveau des détecteurs, de champs "intenses", c'est-à-dire pour lesquels on ne peut pas distinguer les photons individuellement. On l'oppose en général au régime de comptage de photon, où l'on ne peut s'intéresser qu'à des états de la lumière avec peu de photons. Dans le cas des faisceaux intenses, la nature corpusculaire de la lumière apparaît quand on mesure les fluctuations

d'un champ : l'arrivée aléatoire des photons sur un photodétecteur introduit un bruit appelé fluctuations quantiques qui vient naturellement limiter la précision de toute mesure d'intensité. Les sources de lumière laser stables ont des fluctuations quantiques poissonniennes qui définissent une limite appelée bruit quantique standard (*shot-noise* en anglais, c'est-à-dire bruit de grenaille), et qui peut être calculée à l'aide de la mécanique quantique. Depuis plus de vingt ans, de nombreuses expériences d'optique quantique ont pour but de manipuler ces fluctuations quantiques en dessous du bruit quantique standard, on les appellent les états comprimés du rayonnement. En regardant ces états sous un autre angle, c'est-à-dire en effectuant un changement de la base de mode que l'on utilise pour décrire les photons, la réduction des fluctuations est équivalente à la présence de corrélations fortes d'origine quantique entre deux modes. C'est le cas par exemple des faisceaux dits jumeaux [Heidmann 87], pour lesquels les photons se propagent toujours en couple.

En traitant plusieurs modes, on peut considérer des photons différents, et la mécanique quantique permet alors de considérer des états plus riches de la lumière. Cette approche multimode est inévitable, et trouve un grand nombre d'applications. Elle est par exemple nécessaire pour augmenter le nombre de canaux disponibles en information quantique, et satisfaire la complexité croissante des algorithmes [Cerf 07]. L'intrication entre un grand nombre de modes est également intéressante en soi au niveau théorique.

Les effets non-linéaires, qui résultent en général de l'interaction de la lumière avec la matière, peuvent conduire à des processus intéressants pour l'optique quantique. Dans un cristal non-linéaire d'ordre deux par exemple, l'interaction dite paramétrique entre les différentes longueurs d'onde peut conduire à la conversion d'un photon dit pompe en deux photons signal et complémentaire qui présentent de très fortes corrélations quantiques. On peut placer un tel cristal dans une cavité optique pour augmenter l'efficacité de ce processus. On forme alors un oscillateur paramétrique optique (OPO), qui, comme un laser, présente un seuil d'oscillation au dessus duquel il y a émission d'un champ intense. Les OPO se sont avérés être les outils les plus adaptés pour la production d'états non-classiques en variables continues [Wu 86]. Dans un OPO monomode, on a la réduction de bruit sur un mode. La première approche multimode a été de considérer des OPO utilisant les deux polarisations orthogonales d'un faisceau, qui a conduit à la génération d'intrication entre ces modes. Pour considérer une plus grande variété de modes, il est donc nécessaire d'utiliser un nouveau degré de liberté de la lumière dans la cavité OPO.

Les modes transverses sont particulièrement adaptés au traitement multimode car ils sont facilement manipulables grâce à toutes les techniques d'imagerie. Dans le cas où l'on traite quantiquement plusieurs modes transverses, on parle d'imagerie quantique [Lugiato 02, Kolobov 06]. Ce domaine de recherche s'intéresse aux effets quantiques dans les images optiques. De nombreux groupes s'y intéressent dans des régimes très différents, dans le domaine du comptage de photons et dans celui des variables continues. Il comprend l'étude du moment angulaire orbital des photons [Mair 01], l'intrication entre pixels [O'Sullivan-Hale 05] ainsi que le ghost-imaging [Bennink 04, Gatti 04]. Les propriétés d'intrication entre modes générées par des OPO sont étudiées [Janousek 09, Lassen 09] de même que l'amplification sans bruit d'images [Mosset 05, Lopez 08], et l'étude de réduction de bruit locale et les corrélations spatiales dans les images [Kolobov 89, Lantz 04]. Parallèlement à l'utilisation des modes transverses pour le traitement quantique de l'information, cet axe de recherche s'inscrit dans le contexte de l'imagerie haute résolution,

avec notamment pour but de battre la limite définie par le critère de Rayleigh dans la mesure des images en utilisant des états non-classiques [Kolobov 00], par exemple dans le cas des mesures des propriétés transverses d'un faisceau laser [Treps 03, Delaubert 06].

Les modes longitudinaux apparaissent également de plus en plus comme de bons candidats pour l'optique quantique multimode. Là-encore, les approches sont très différentes. Une première approche consiste à utiliser des impulsions. En utilisant l'effet Kerr dans des fibres optiques, la très grande intensité crête des impulsions permet de fortes non-linéarités qui conduisent à des états non-classiques intéressants pour l'information quantique [Silberhorn 01]. Dans le régime des photons uniques, des groupes anglais [Mosley 08] et allemands [Eckstein 08] s'intéressent de près aux modes de spectres larges générés par la conversion paramétriques de photons signal et complémentaire dans un cristal non-linéaire pompé par des impulsions femtosecondes. Des états non-classiques sont également générés pour des impulsions individuelles [Wenger 04] en combinant des techniques de variables continues et de photons uniques [Ourjoumtsev 06]. L'approche temporelle est également utilisée pour générer des qubits appelés *time-bin* [Halder 07]. On peut également citer l'étude des corrélations quantiques dans l'absorption à deux photons à partir d'impulsions femtosecondes [Dayan 04]. Notre groupe s'intéresse depuis quelques années aux propriétés quantiques des OPO dans le régime impulsif [de Valcárcel 06]. L'approche spectrale des impulsions est la plus courante, mais la description temporelle d'impulsions de profils différents peut conduire à des développements intéressants. Elle permet par exemple d'envisager des mesures de temps à la limite quantique d'une précision exceptionnelle [Lamine 08]. Les modes longitudinaux ne sont pas restreints aux impulsions courtes produites par des lasers. D'autres équipes de recherche s'intéressent à l'intrication entre faisceaux continus de fréquences différentes [Jing 06].

L'objectif de cette thèse est d'étudier théoriquement et expérimentalement le comportement d'OPO multimodes, dans les deux régimes mentionnés ci-dessus : les modes transverses d'une part, et les impulsions courtes d'autre part. Au niveau théorique, les approches utilisées dans notre groupe pour décrire les effets multimodes transverses [Lopez 05] et longitudinaux [Patera 08] sont différentes. Il est donc paru opportun de comparer les deux domaines pour transposer les concepts et les résultats d'un domaine à l'autre. Cette analogie peut également être intéressante au niveau des techniques expérimentales, différentes dans les deux communautés. L'expérience d'imagerie quantique est une continuation du travail mené précédemment dans le groupe, que l'on souhaite approfondir en utilisant une cavité complètement dégénérée : la cavité auto-imageante. Nous avons donc étudié théoriquement les propriétés d'un OPO dans une telle cavité. L'expérience d'OPO en impulsions est nouvelle et s'appuie sur les récents travaux théoriques. Ces deux configurations expérimentales permettent d'envisager la production d'états non-classiques multimodes.

Résumé et plan de la thèse

Le premier chapitre de ce manuscrit introduit les outils utilisés par la communauté de l'optique quantique en variables continue, et nécessaires pour comprendre les enjeux, les techniques et les résultats de cette thèse. On définit la notion de mode du champ, identique en optique classique et en optique quantique, qui permet de caractériser un état multimode du champ. Enfin, on décrit plusieurs systèmes de détection optique de faisceaux lumineux. Une mesure scalaire ne permet la mesure que d'une seule observable d'un seul mode du champ, appelé mode propre de détection. L'état du champ sur ce seul mode conditionne le résultat de la mesure. On considère également les mesures multicanaux, qui permettent la mesure simultanée de plusieurs observables qui commutent sur plusieurs modes du champ.

Le deuxième chapitre introduit le langage utilisé pour décrire les degrés de liberté transverses et longitudinaux de la lumière, et les outils utilisés pour manipuler les modes dans les expériences d'optique quantique : description des modes transverses et longitudinaux, propagation, résonance en cavité dégénérée et caractérisation du nombre de modes résonants. On attache une importance particulière dans ce chapitre à la comparaison entre les deux domaines, qui fait apparaître un certain nombre de variables jouant un rôle analogue. Ce rapprochement nous permet de comparer les systèmes de mesure du profil spatial, spectral ou temporel d'un faisceau laser, ainsi que les techniques de mises en forme. Enfin, on présente dans ce chapitre la description d'une expérience d'imagerie : transmission et doublage de fréquence d'images dans une cavité complètement dégénérée, la cavité auto-imageante. Cette expérience a pour rôle d'étudier les propriétés de la cavité auto-imageante, en vue de son utilisation pour l'optique quantique, et d'étudier également les propriétés transverses du doublage de fréquence, qui nous renseignent sur les propriétés transverses de la conversion paramétrique. On montre en particulier que la bande spatiale du dispositif de doublage vérifie les prédictions théoriques obtenues avec un modèle local du doublage de fréquence.

Le troisième chapitre présente une théorie générale des OPO multimodes. Il s'appuie sur une description multimode des effets dans un cristal non-linéaire d'ordre deux. On montre par exemple le comportement multimode du doublage de fréquence d'images et de peignes de fréquences. La conversion paramétrique entre les modes pompe, signal et complémentaire qui conduit à l'amplification sensible à la phase est habituellement traitée de façon monomode. Dans le cas d'un cristal de type I, on étend cette description au cas multimode, en faisant apparaître le couplage entre les modes. Exprimé dans une base de mode usuelle (les modes locaux dans le cas transverse, et les modes de fréquences dans le cas longitudinal), ce couplage a une forme non-triviale. Cependant, la symétrie de ce couplage permet de faire apparaître les modes propres de l'interaction avec le champ pompe. Cette approche est utilisée pour décrire le comportement d'un OPO utilisant une cavité dégénérée pour un grand nombre de modes, et avec un cristal non-linéaire permettant la conversion paramétrique d'un photon pompe en deux photons de plus faible énergie dans plusieurs modes. On décrit ainsi le comportement d'un OPO multimode, et l'on décrit les états non-classiques multimodes produits par ce type de dispositif. Exprimés dans la base des modes propres de l'interaction paramétrique, on obtient un état non-classique présentant une réduction de bruit sur plusieurs modes. Il apparaît donc intéressant de pouvoir maîtriser le nombre de modes du couplage, ce qui est possible par l'intermédiaire des paramètres du

faisceau pompe d'une part et du cristal non-linéaire d'autre part.

Le quatrième chapitre est consacré à une expérience utilisant un OPO dans une cavité à résonance pour deux modes transverses TEM_{01} et TEM_{10} . En faisant fonctionner cet OPO au dessus de son seuil d'oscillation, on montre la production d'un état non-classique multimode. Cette expérience fait suite aux prédictions théoriques de Navarrete-Benlloch *et al.* [Navarrete-Benlloch 08]. Pour mener à bien cette expérience, nous avons en particulier développé un nouveau type d'asservissement de la phase relative entre la pompe et l'injection, stable au franchissement du seuil de l'OPO et indispensable pour ce type d'expérience. Grâce à ce dispositif, on montre la création et la caractérisation d'un état tri-mode produit par l'OPO au dessus du seuil, présentant une réduction de bruit pour deux modes transverses orthogonaux au mode intense émis par l'OPO.

Le cinquième chapitre est consacré à l'OPO en cavité auto-imageante. Un approfondissement théorique de l'étude des modes propres de cet OPO faite au chapitre trois en utilisant des paramètres expérimentaux typiques conduit à des fonctionnements multimodes différents en fonction de la forme du champ pompe utilisé. Une approche différente, utilisant les opérateurs locaux de création de photon est décrite, en champ proche et en champ lointain. On décrit ensuite deux expériences utilisant des OPO en cavité auto-imageante dans des configurations différentes. La première est orientée vers un fonctionnement en amplification d'images, et la seconde orientée vers la génération d'états non-classiques multimodes. Pour cette étude expérimentale, on utilise d'une part les propriétés de la cavité étudiées au deuxième chapitre, et la forme du couplage paramétrique entre modes transverses développée au troisième chapitre. On détaille en particulier tous les écueils expérimentaux auxquels nous nous sommes heurtés, et qui nous ont conduit à considérer à la baisse nos attentes. À l'aide du dispositif utilisant un cristal de PPKTP, nous avons montré la création et la caractérisation d'un état comprimé avec une réduction de bruit sur trois modes transverses orthogonaux.

Le sixième et dernier chapitre est consacré à l'OPO pompé en modes synchrones par un train d'impulsions femtosecondes. Comme dans le chapitre précédent, on rappelle les résultats théoriques sur les éléments propres de cet OPO en fonction des paramètres du cristal non-linéaire et du spectre des impulsions pompes. On donne également une description temporelle instantanée du fonctionnement de ce type d'OPO, par analogie avec le cas des modes transverses. Dans une deuxième partie, on détaille la mise en place expérimentale d'un OPO pompé en modes synchrones à partir d'un laser à verouillage de modes. Une partie du faisceau initial est doublée en simple passage dans un cristal non-linéaire pour servir de pompe à l'OPO. Une autre partie du faisceau est injectée dans l'OPO pour asservir la cavité à résonance. Enfin, une dernière partie du faisceau est envoyé dans un dispositif de mise en forme d'impulsions, pour servir d'oscillateur local pour une détection homodyne, encore en cours de construction. L'expérience n'en est encore qu'à ses débuts, mais les premiers résultats d'amplification sensible à la phase et de réduction de bruit ont été obtenus.

Outils pour l'optique quantique multimode en variables continues

Sommaire

A	Modes et états du champ classique et du champ quantique . . .	8
A.1	Qu'appelle-t-on un mode ?	8
A.2	Inégalité de Heisenberg et fluctuations d'un champ intense	11
A.3	Représentation du champ	13
B	Etats non-classiques de la lumière	16
B.1	Définition d'un état non-classique	16
B.2	État non-classique monomode : réduction de bruit d'un faisceau lumineux	16
B.3	États classiques multimodes	17
B.4	États non-classiques multimodes	17
C	Mesures optiques	21
C.1	Exemple de détection : la détection directe d'intensité	21
C.2	La détection homodyne	22
C.3	Mode associé à une détection	24
C.4	Rôle des pertes dans un dispositif de détection quantique	25
C.5	Mesure multicanal	26

CE chapitre introductif a pour objectif de rappeler les outils utilisés habituellement en optique quantique et nécessaires à la compréhension de cette thèse. En revenant aux bases mêmes de la description quantique du champ électromagnétique, on décrit le vocabulaire utilisé, qui est celui de la communauté de l'optique quantique en variables continues. Le langage est donc centré autour des grandeurs observées expérimentalement, principalement les fluctuations associées à chaque mode du champ, qui permettent de distinguer expérimentalement un état non-classique. On attache par ailleurs une importance particulière à la définition d'un mode du champ, ce qui permet ensuite la distinction entre les états monomodes et les états multimodes, au coeur de ce travail de thèse.

A Modes et états du champ classique et du champ quantique

A.1 Qu'appelle-t-on un mode ?

A.1.1 Définition d'un mode en optique classique

En optique, on traite habituellement le champ électromagnétique en utilisant sa représentation complexe, ou plus généralement son signal analytique $\mathbf{E}^{(+)}$, qui correspond à la partie de fréquences positives du champ réel $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.1)$$

On peut définir un mode du champ comme la normalisation dans un plan donné du signal analytique d'une solution des équations de Maxwell $u(\mathbf{r}, t) \vec{\epsilon} = \frac{\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)}{\int d\rho \|\mathbf{E}^{(+)}\|^2}$. On peut distinguer le profil spatial du mode en $\mathbf{r}$, son profil temporel en t , et son profil de polarisation donné par la direction du vecteur $\mathbf{E}$.

Les équations de Maxwell conduisent à des relations entre les profils spatial et temporel d'un mode, comme par exemple la relation de dispersion $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\omega)$ pour des ondes planes progressives, qui dépend du milieu dans lequel on considère la propagation. Plus généralement, on peut définir un mode par sa valeur dans une partie de l'espace-temps $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Par exemple, un mode peut être décrit par son profil spatio-temporel dans un plan transverse donné, le champ pouvant ensuite être calculé dans le reste de l'espace grâce aux équations de propagation. De même, on peut se contenter de décrire le profil spatial d'un mode dans tout l'espace, puis en déduire son profil temporel grâce aux équations de Maxwell.

Une base de modes est définie comme une famille de modes orthonormée $u_j(\mathbf{r}, t) \vec{\epsilon}_j$. Tout mode individuel peut-être associé à d'autres modes pour former une base de modes. Ainsi, si l'on considère un champ de valeur moyenne quelconque, on peut définir une base de modes dont le premier vecteur correspond au mode du champ moyen. On peut associer un champ d'amplitude E_{j_0} à chaque mode :

$$\mathbf{E}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_{j_0} u_j(\mathbf{r}, t) \vec{\epsilon}_j \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

Si l'on considère uniquement des modes se propageant dans une direction, et d'extension transverse finie, la condition d'orthonormalisation peut se restreindre au plan transverse décrit par la variable ρ :

$$\int d\rho u_j^*(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) \vec{\epsilon}_j \cdot \vec{\epsilon}_k = \delta_{jk} \quad (1.4)$$

Dans le cas de modes de profils longitudinaux complexes, on doit en plus considérer une moyenne temporelle de cette condition d'orthonormalisation, représentée par une barre horizontale. Cette moyenne doit se faire sur une durée plus longue que le temps caractéristique de l'évolution des modes $u(\mathbf{r}, t)$:

$$\overline{\int d\rho u_j^*(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) \vec{\epsilon}_j \cdot \vec{\epsilon}_k} = \delta_{jk} \quad (1.5)$$

Un champ quelconque $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ peut donc être décomposé sur une telle base de modes :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \mathcal{E}_j u_j(\mathbf{r}, t) \vec{e}_j \quad (1.6)$$

On peut également utiliser une base de mode indexée par une variable continue. Les symboles delta de kronecker sont alors remplacés par une fonction delta de dirac.

A.1.2 Quantification du champ

Considérons l'opérateur du champ quantique dans la représentation de Heisenberg $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ [Cohen-Tannoudji 89]. La valeur moyenne de cet opérateur dépend donc de la position $\mathbf{r}$ et du temps t auxquels elle est évaluée. On écrit le champ quantifié comme somme de l'opérateur de fréquences positives $\hat{E}^{(+)}$ et de son hermitien conjugué $\hat{E}^{(+)\dagger}$. Cet opérateur de fréquences positives correspond au signal analytique complexe du champ $\hat{\mathbf{E}}$.

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \vec{e} \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.7)$$

Dans le cas des ondes planes, on quantifie habituellement le champ dans une boîte de côté L , et on écrit le champ :

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2 \epsilon_0 L^3}} \hat{a}_l e^{-i(\omega_l t - \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r})} \vec{e}_l \quad (1.8)$$

Dans ce cas, l'indice l représente l'onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}_l$, de fréquence $\omega_l = c||\mathbf{k}_l||$ et de polarisation linéaire $\vec{e}_l$. L'ensemble des indices l décrit donc un espace de dimension $3 + 1 = 4$. Le hamiltonien du champ libre quantifié s'écrit

$$H = \sum_l \hbar \omega_l \left(\hat{a}_l \hat{a}_l^\dagger + \frac{1}{2} \right) = \sum_l \hbar \omega_l \left(\hat{N}_l + \frac{1}{2} \right) \quad (1.9)$$

Dans cette base, l'opérateur $\hat{N}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$ est l'opérateur nombre de photons dans le mode l . Les états stationnaires du champ sont donc les états nombre $|n_l\rangle$ contenant n photons dans le mode l . Cependant ces états ne sont pas des états propres du champ $\hat{\mathbf{E}}$.

Dans la suite de cette thèse, nous nous intéressons à des effets transverses et des effets temporels pour des impulsions femtosecondes. Nous considérons des modes se propageant dans une direction donnée (l'axe Oz), et de pulsation optique moyenne ω_0 . Dans ce cas, le champ peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \epsilon_0 L^3}} \sum_l \hat{a}_l u_l(\mathbf{r}, t) \vec{e}_l + \text{hc} \quad (1.10)$$

Les états propres de $\hat{E}^{(+)}$ et de $\hat{a}_l$ sont les états cohérents ou quasi-classiques introduits par Glauber [Glauber 65]. Pour un mode l donné, on note $|\alpha\rangle$ l'état propre de $\hat{a}_l$ de valeur propre α . Ces états cohérents sont très utilisés par les expérimentateurs car ils correspondent à l'état d'un faisceau laser stable largement au delà du seuil du laser. Cet aspect sera détaillé dans la section A.2.

Plus généralement, l'opérateur de fréquences positives peut être décomposé sur une base de modes quelconque. Pour toute famille de modes $\{u_j(\mathbf{r}, t)\vec{\epsilon}_j\}_j$ telle que définie au paragraphe précédent, on peut définir l'opérateur annihilation de photon $\hat{a}_j$ pour chaque mode. Ces opérateurs vérifient les relations de commutation des opérateurs bosoniques :

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk} \quad (1.11)$$

On peut exprimer l'opérateur de fréquences positives comme combinaison de ces opérateurs :

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_j \mathcal{E}_j \hat{a}_j u_j(\mathbf{r}, t) + \text{hc} \quad (1.12)$$

Avec $\mathcal{E}_n$ l'amplitude du champ dont l'énergie vaut celle d'un seul photon $\hbar\omega_n$.

La seconde quantification décrit le champ $\mathbf{E}$ comme une assemblée d'oscillateurs harmoniques indépendants, appelés modes dont les photons sont les excitations élémentaires. Dans la quantification canonique, les oscillateurs harmoniques sont des ondes planes progressives. Cependant il est possible de décrire le champ en utilisant d'autres modes, plus adaptés à la réalité des expériences et des phénomènes que l'on étudie. Nous utilisons un grand nombre de bases de modes pour décrire les états de la lumière et on rappelle donc dans le paragraphe qui suit la forme exacte du traitement quantique d'un changement de base de modes.

A.1.3 Changement de base de modes quantique

Les ondes planes ne correspondent pas à des états physiques réalistes, et l'on utilise souvent d'autres bases pour décrire les états réels.

D'un point-de-vue quantique, on peut décrire l'opération de changement de base par une transformation des opérateurs $\{\hat{a}_l^\dagger\}$ en un autre ensemble $\{\hat{b}_m^\dagger\}$.

$$\hat{b}_m^\dagger = \sum_l U_m^l \hat{a}_l^\dagger \quad (1.13)$$

La matrice U doit être unitaire pour que les nouveaux opérateurs $\hat{b}_m$ satisfassent les relations de commutation des opérateurs bosoniques. Dans ce nouvel ensemble d'opérateurs, on peut à nouveau trouver des états nombres et des états cohérents.

La décomposition en ondes stationnaires est un exemple simple de changement de base. Les **ondes stationnaires** combinent les modes de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_l$ et $-\mathbf{k}_l = \mathbf{k}_{-l}$.

$$\hat{b}_{l+}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_{-l}^\dagger) \quad (1.14)$$

$$\hat{b}_{l-}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_l^\dagger - \hat{a}_{-l}^\dagger) \quad (1.15)$$

Ce sont par exemple ces modes qui décrivent l'évolution temporelle du champ à l'intérieur d'une cavité optique de Fabry-Pérot.

Dans cette thèse, on s'est intéressé à des effets multimodes. Pour cela, il est essentiel de choisir la base de modes la plus adaptée pour décrire le champ. À cet égard, on introduira d'autres bases de modes dans les chapitres suivants.

A.1.4 Description classique ou quantique du champ, que choisir ?

Pour résoudre un problème d'optique, on peut parfois se demander quelle est la description la plus adaptée du champ électromagnétique. Les modes du champ sont identiques dans les deux descriptions, seule la description de l'état du champ est différente. Dans la suite de ce travail, on passera d'une description à l'autre en remplaçant les amplitudes des champs classiques A_l dans un mode repéré par l'indice l par les opérateurs $i\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 L^3}}\hat{a}_l$, et l'amplitude A_l^* par $-i\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 L^3}}\hat{a}_l^\dagger$.

Pour décrire les fluctuations d'un faisceau intense, une méthode couramment utilisée est la description semi-classique [Reynaud 92]. Elle consiste, pour un mode donné, à décrire classiquement la valeur moyenne α du champ dans ce mode, et d'associer un opérateur quantique $\hat{a}$ au mode correspondant à cette valeur moyenne. On a donc

$$\alpha = \langle \hat{a} \rangle \quad (1.16)$$

On décrit ensuite les fluctuations par un opérateur $\delta\hat{a}$.

$$\delta\hat{a} = \hat{a} - \langle \hat{a} \rangle \quad (1.17)$$

Cet opérateur, de valeur moyenne nulle, obéit aux mêmes relations de commutations que $\hat{a}$ et décrit les fluctuations quantiques du champ dans le mode considéré. L'approximation semi-classique correspond à négliger la valeur moyenne des fluctuations devant les différentes valeurs moyennes du champ sur les différents modes :

$$\langle \delta\hat{a} \rangle \ll \langle \hat{a}_l \rangle \quad (1.18)$$

ce qui généralement permet de simplifier des équations pour ne garder que des termes au premier ordre en $\delta\hat{a}$.

A.2 Inégalité de Heisenberg et fluctuations d'un champ intense

L'optique quantique en variables continues¹ s'intéresse à des faisceaux laser intenses, pour lesquels le nombre de photons est très grand, par opposition au régime des photons uniques. Un faisceau de puissance 1 mW aux longueurs d'onde visibles correspond à plus de 10^{15} photons par seconde. Dans ce cas, les propriétés quantiques de la lumière apparaissent dans les fluctuations du nombre de photons mesurés par un photodétecteur. Cette section décrit le langage formel utilisé pour décrire les fluctuations d'un mode du champ.

Si l'on considère un mode quelconque du champ électromagnétique, décrit par une distribution spatio-temporelle $u(\mathbf{r}, t)$ et un opérateur annihilation $\hat{a}$, celui-ci vérifie la relation de commutation habituelle :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (1.19)$$

1. Par opposition au régime des photons uniques, le terme variables continues désigne les observables à spectre continu. Dans le cas d'un faisceau intense, le nombre de photons est suffisamment grand pour considérer le spectre des observables usuelles.

On peut définir les opérateurs quadratures pour ce mode :

$$\hat{X}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{|u(\mathbf{r}, t)|} \left(\hat{a}u(\mathbf{r}, t) + \hat{a}^\dagger u^*(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.20)$$

$$\hat{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{|u(\mathbf{r}, t)|} \left(\hat{a}u(\mathbf{r}, t) - \hat{a}^\dagger u^*(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.21)$$

Ces opérateurs sont hermitiens et sont donc des observables que l'on peut mesurer, par exemple à l'aide d'une détection homodyne, détaillée ultérieurement dans le paragraphe C.2 de ce chapitre. Ils vérifient par ailleurs la relation de commutation canonique des opérateurs position et impulsion :

$$\left[\hat{X}(\mathbf{r}, t), \hat{P}(\mathbf{r}, t) \right] = 2i \quad (1.22)$$

Dans la représentation des fluctuations introduite au paragraphe A.1.4, on décompose les observables de quadratures comme somme de leurs valeurs moyennes et de leurs fluctuations :

$$\hat{X}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{X}(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \hat{X}(\mathbf{r}, t) \quad (1.23)$$

$$\hat{P}(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{P}(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \hat{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.24)$$

On peut déduire de l'équation (1.22) l'inégalité de Heisenberg habituelle sur les variances $(\delta \hat{X})^2$ et $(\delta \hat{P})^2$ de ces observables :

$$\langle (\delta \hat{X})^2 \rangle \cdot \langle (\delta \hat{P})^2 \rangle \geq 1 \quad (1.25)$$

Plus généralement, on peut définir l'opérateur quadrature selon la direction θ :

$$\hat{X}^\theta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{|u(\mathbf{r}, t)|} \left(\hat{a}u(\mathbf{r}, t)e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger u^*(\mathbf{r}, t)e^{i\theta} \right) \quad (1.26)$$

et toutes les relations précédentes sont vérifiées en remplaçant $\hat{X}$ et $\hat{P}$ respectivement par $\hat{X}^\theta$ et $\hat{X}^{\theta+\frac{\pi}{2}}$.

La propriété quantique fondamentale de la lumière intense est qu'on ne peut pas avoir simultanément $\langle (\delta \hat{X})^2 \rangle$ et $\langle (\delta \hat{P})^2 \rangle$ égaux à zéro. Un état de fluctuations minimales correspond au cas d'égalité dans l'inégalité d'Heisenberg. Si les fluctuations sont identiques selon les 2 quadratures, on a donc pour un état minimal :

$$\langle (\delta \hat{X})^2 \rangle = \langle (\delta \hat{P})^2 \rangle = 1 \quad (1.27)$$

Un état du champ dont les fluctuations des quadratures $\hat{X}$ et $\hat{P}$ vérifient ces égalités est dit au *bruit quantique standard* (ou *shot noise* en anglais pour bruit de grenaille). On remarque que les fluctuations des quadratures des états au bruit quantique standard sont identiques et ne dépendent pas des valeurs moyennes du champ². L'état cohérent $|\alpha\rangle$ introduit par Glauber [Glauber 65] satisfait cette relation. Il en est donc de même pour le vide qui peut être vu comme un état cohérent avec $\alpha = 0$. Les fluctuations de l'intensité du champ $\langle (\mathbf{E}^{(+)\dagger} \mathbf{E}^{(+)}) \rangle$ d'un état au bruit quantique standard sont poissonniennes et le rapport signal à bruit d'une telle mesure est égal à $\frac{1}{\sqrt{N}}$ où N est le nombre total de photons détectés.

2. Par contre, les fluctuations du nombre de photon $\langle \hat{N} \rangle$ dépendent bien de la valeur moyenne du champ

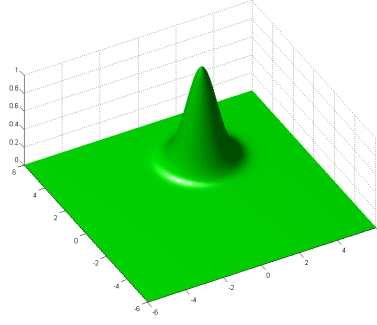


Figure 1.1: Fonction de Wigner $W(x, p)$ d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ de nombre moyen de photon $|\alpha|^2 = 9$

A.3 Représentation du champ

A.3.1 Fonction de Wigner et états gaussiens

Pour caractériser complètement l'état quantique d'un champ, on pourrait utiliser le formalisme de la matrice densité $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Cependant, cette représentation n'est pas adaptée à l'optique quantique en variables continues, puisqu'elle nécessiterait d'introduire une base des états pour chaque mode du champ, qui serait de taille très grande si les états considérés peuvent contenir beaucoup de photons. On l'utilise parfois pour représenter des états à peu de photons.

Une représentation plus adaptée, et couramment utilisée dans le domaine des variables continues, est la représentation de Wigner. Il s'agit d'une quasi-distribution de probabilité $W(x, p)$, dont la projection selon une direction θ quelconque donne la distribution de probabilité³ de la quadrature $\hat{X}^{\theta+\frac{\pi}{2}}$. La fonction de Wigner est une caractérisation complète de l'état d'un champ sur un mode. Elle est égale à la transformée de Fourier de la valeur moyenne de l'opérateur déplacement :

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^{2N}} \int d^2\beta \operatorname{Tr} \left[\hat{\rho} e^{i(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)} \right] e^{i(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)} \quad (1.28)$$

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi^{2N}} \int du dv \operatorname{Tr} \left[\hat{\rho} e^{i(ux+vp)} \right] e^{i(ux+vp)} \quad (1.29)$$

$$(1.30)$$

Pour une description complète de l'équivalence entre les représentations, on peut se reporter à [Ourjoumtsev 07a]. La fonction de Wigner peut être définie également pour un champ multimode. Ce n'est pas une distribution de probabilité au sens classique du terme, car elle peut prendre des valeurs négatives.

Les **états gaussiens** sont les états dont la fonction de Wigner est gaussienne. C'est le cas du vide de photon, qui a une fonction de Wigner gaussienne et symétrique, centrée à l'origine, et dont la variance vaut 1. Un état cohérent $|\alpha\rangle$ a une fonction de Wigner égale à

3. On a expérimentalement accès aux distributions marginales $P_\theta(X^\theta)$, et l'on peut reconstruire la fonction de Wigner $W(x, p)$ grâce à des outils comme la transformation de Radon inverse, ou l'algorithme de maximum de vraisemblance.

celle du vide, mais translatée autour de la valeur moyenne α (qui peut être complexe) dans le plan (X, P) , comme représenté sur la figure 1.1. C'est donc également un état gaussien. On définit la pureté $\mathcal{P}$ d'un état par :

$$\mathcal{P} = \text{Tr}(\hat{\rho}^2) \quad (1.31)$$

Le théorème d'Hudson Piquet [Hudson 74] stipule que les états purs, c'est-à-dire ceux qui vérifient :

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1 \quad (1.32)$$

et qui ont une fonction de Wigner positive, ont une fonction de Wigner gaussienne (mais pas forcément symétrique). Pour vérifier la relation d'incertitude de Heisenberg, le produit des variances de leur fonction de Wigner selon les deux directions doit être supérieur ou égal à 1. Pour tous les états gaussiens, les deux premiers moments caractérisent complètement l'état, et la description à l'aide de la fonction de Wigner est inutile.

$$W(x, p) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\Delta p^2}} \quad (1.33)$$

Si la fonction de Wigner d'un état pur n'est pas gaussienne, elle prend donc nécessairement des valeurs négatives. Un tel état est dit **non-gaussien**. Ces états sont aujourd'hui de plus en plus étudiés [Ourjountsev 07b].

A.3.2 Etats gaussiens et matrice de covariance

Un état gaussien est caractérisé intégralement par les deux premiers moments des observables de quadrature des différents modes. Le premier correspond aux valeurs moyennes des quadratures du champ pour les différents modes considérés. Le second correspond aux valeurs moyennes des produits des quadratures que l'on peut exprimer avec les opérateurs fluctuations : $\langle \delta \hat{X}^2 \rangle$, $\langle \delta \hat{P}^2 \rangle$ et $\langle \delta \hat{X} \delta \hat{P} \rangle$. Un état dont les fluctuations sont au bruit quantique standard vérifie donc :

$$\langle \delta \hat{X}^2 \rangle = 1 \quad (1.34)$$

$$\langle \delta \hat{P}^2 \rangle = 1 \quad (1.35)$$

$$\langle \delta \hat{X} \delta \hat{P} \rangle = 0 \quad (1.36)$$

Une représentation très largement utilisée de l'état d'un mode gaussien unique en variables continues est la représentation de Fresnel (figure 1.2). Dans cette représentation, le champ est décrit par un vecteur dans le plan dont les deux directions privilégiées sont deux quadratures conjuguées $\hat{X}$ et $\hat{P}$. On lui superpose ensuite ses fluctuations sous la forme d'une surface d'incertitude dont la section correspond à la variance $\langle (\Delta \hat{X}^\theta)^2 \rangle$ de la quadrature définie par l'angle θ . Cette représentation permet de représenter les deux premiers moments des quadratures et caractérise ainsi complètement l'état, les états gaussiens.

Pour représenter les seconds moments des opérateurs de quadrature d'un état faisant intervenir plusieurs modes, on utilise la matrice de covariance Γ de l'état. Si l'on considère N modes du champ cette matrice de taille $2N \times 2N$ contient les variances $\langle \delta \hat{X}_p \delta \hat{X}_q \rangle$,

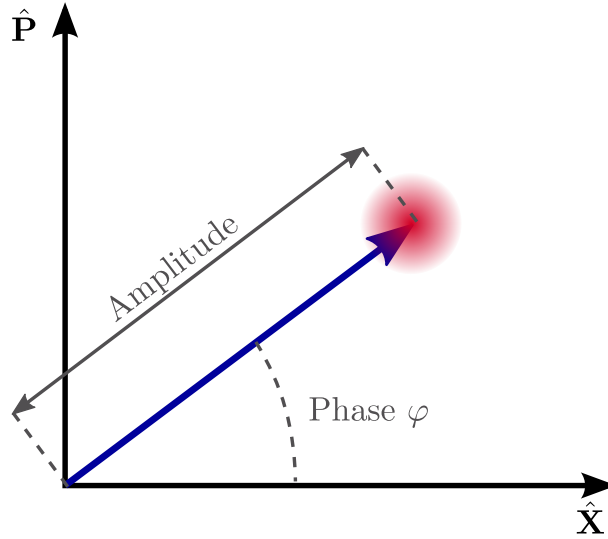


Figure 1.2: Représentation de Fresnel d'un champ. La flèche indique sa valeur moyenne, et ses fluctuations sont représentées par une aire d'incertitude dont les dimensions représentent ses variances sur les différentes quadratures.

$\langle \delta \hat{P}_p \delta \hat{P}_q \rangle$ et les corrélations $\langle \delta \hat{P}_p \delta \hat{X}_q \rangle$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{X}_1 \delta \hat{X}_1 \rangle & \langle \delta \hat{X}_1 \delta \hat{P}_1 \rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{X}_1 \rangle & \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{P}_1 \rangle & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \langle \delta \hat{X}_p \delta \hat{X}_q \rangle & \langle \delta \hat{X}_p \delta \hat{P}_q \rangle & \\ \vdots & & & \langle \delta \hat{P}_p \delta \hat{X}_q \rangle & \langle \delta \hat{P}_p \delta \hat{P}_q \rangle & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Cette matrice est nécessairement symétrique et les relations d'incertitude de Heisenberg imposent :

$$\det \Gamma \geq 1 \quad (1.38)$$

La pureté $\mathcal{P}$ de l'état peut également être évaluée à l'aide de cette matrice [Adesso 04] :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma}} \quad (1.39)$$

Cette matrice contient toute l'information sur les fluctuations d'un état gaussien. Elle est souvent utile pour caractériser les états multimodes produits par une expérience, comme par exemple l'intrication entre plusieurs modes, ou encore la mesure d'une observable sur un mode combinaison linéaire des modes initiaux.

B États non-classiques de la lumière

B.1 Définition d'un état non-classique

Les expériences d'optique quantique en variables continues tentent depuis plus de vingt ans de créer et de caractériser des états de la lumière manifestant des propriétés non-classiques. Il existe de nombreuses façons de définir ce qu'est un état non-classique. Nous utilisons le critère de Simon [Simon 94]. Celui-ci stipule qu'un état est non-classique si et seulement si on peut faire sur cet état une mesure qui donne des fluctuations sous le bruit quantique standard. Dans ce cas, l'état ne peut pas être décrit par une théorie semi-classique où seul le système de détection est quantifié.

B.2 État non-classique monomode : réduction de bruit d'un faisceau lumineux

Pour un seul mode du champ, l'état non-classique le plus simple correspond à une réduction des fluctuations quantiques sur une quadrature quelconque, sous le bruit quantique standard. Un tel état est appelé état comprimé ("squeezed state" en anglais). Un état est donc comprimé si et seulement si il existe une quadrature $\hat{X}^\theta$ telle que :

$$\langle (\delta \hat{X}^\theta)^2 \rangle < 1 \quad (1.40)$$

Alors, la relation d'incertitude de Heisenberg impose

$$\langle (\delta \hat{X}^{\theta+\frac{\pi}{2}})^2 \rangle > 1 \quad (1.41)$$

Sur la figure 1.3, on trouve la représentation de Fresnel des états comprimés. Un état comprimé peut avoir une valeur moyenne nulle. On l'appelle alors vide comprimé. Un tel état est différent du vide et présente une distribution non nulle du nombre de photons, et donc son énergie n'est pas nulle. On quantifie la réduction de bruit sous le bruit quantique standard par une échelle logarithmique (en dB). On parle donc d'une réduction de bruit de M dB si

$$\langle (\delta \hat{X}^\theta)^2 \rangle = 10^{-\frac{M}{10}} \quad (1.42)$$

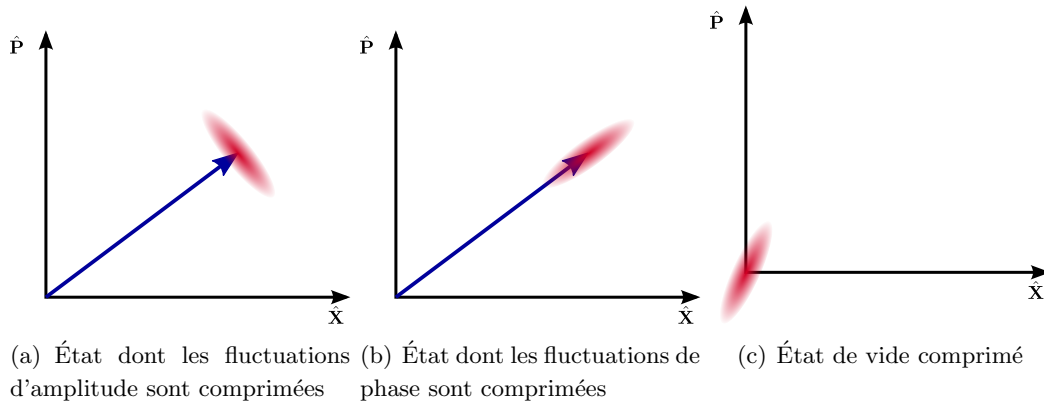


Figure 1.3: États comprimés du rayonnement

Les premiers états comprimés ont été créés il y a plus de vingt ans en utilisant le mélange à quatre onde dans une vapeur de sodium [Slusher 85], ou en utilisant la conversion paramétrique dans des cristaux non-linéaires [Wu 86]. Les réductions de bruit obtenu à l'époque étaient encore faible, et l'on a assisté depuis à une amélioration de la réduction de bruit, pour atteindre aujourd'hui environ 11 dB [Vahlbruch 08], soit $\langle(\delta\hat{X}^\theta)^2\rangle = 0,08$.

Application des états comprimés du rayonnement L'application la plus évidente de ces états du champ est l'amélioration de certaines mesures de très grande sensibilité qui sont aujourd'hui limitées par les fluctuations quantiques de la lumière. Il est nécessaire dans ce cas d'adapter le mode dont on réduit les fluctuations à la mesure effectuée, et plus précisément au mode de bruit de la détection. Cette notion sera détaillée dans le paragraphe C.3. On peut par exemple citer la mesure de petits déplacements d'un faisceau laser [Trops 03] qui utilise la réduction de bruit du mode gaussien TEM₀₁ qui est le mode de bruit de la détection de position d'un faisceau laser. Un autre exemple d'application est l'utilisation d'états comprimés dans les interféromètres géants construits pour la détection d'ondes gravitationnelles [Goda 08].

B.3 États classiques multimodes

Un état décrit classiquement est monomode si les fluctuations de ce champ sont toutes décrites par le mode correspondant à la valeur moyenne du champ. Ainsi, son caractère multimode est lié à la notion de cohérence : la superposition cohérente de deux états monomodes conduit à un état monomode. Cependant, si la superposition est statistique, les fluctuations des deux modes sont indépendantes, et le champ final est multimode. La superposition cohérente de plusieurs modes conduit toujours à un état monomode. En d'autres termes, un état pur est toujours monomode. Prenons l'exemple du peigne de fréquence produit par un laser à verrouillage de modes : la superposition d'un grand nombre de fréquences est cohérente, et l'état du champ est monomode. Par contre, dans le cas d'un laser continu pour lequel il y a une compétition entre deux modes, la superposition est incohérente et l'état du champ est bi-mode.

B.4 États non-classiques multimodes

Les états non-classiques sont aujourd'hui considérés comme une ressource pour des applications diverses. On a évoqué à la section précédente quelques applications des états non-classiques ne faisant intervenir qu'un seul mode du champ. Cependant, il est rapidement paru très utile de pouvoir bénéficier d'états du champ exhibant des propriétés non-classiques sur plusieurs modes simultanément, notamment pour le traitement quantique de l'information. L'intrication entre deux modes du champ que l'on peut séparer spatialement permet par exemple la téléportation quantique [Bouwmeester 97, Furusawa 98].

B.4.1 Qu'appelle-t-on un état non-classique multimode ?

D'un point de vue quantique, la définition d'un état monomode est similaire à son équivalent classique : considérons un état quelconque du champ. Un champ sera monomode si et seulement si il peut être décrit par le vide sur tous les modes sauf un, c'est-à-dire si

il existe une base de modes $\{u_0, \dots, u_n, \dots\}$ tels que l'état du champ s'écrive :

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_0 \otimes |0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (1.43)$$

Pour un état de valeur moyenne non nulle, le mode u_0 est nécessairement le mode correspondant au champ moyen, c'est-à-dire $u_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\int d\mathbf{r} \langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \rangle}$. On peut ensuite compléter u_0 en une base de modes orthonormés.

Un état multimode est par définition un état qui n'est pas monomode. Il n'existe donc pas de base qui permette d'écrire l'état du champ comme vide sur tous les modes sauf un. Dans ce cas, il existe toujours une base dans laquelle le nombre de modes nécessaires pour décrire complètement un état est minimum. Ce nombre est appelé degré de l'état multimode. On peut montrer que le degré d'un état multimode correspond à la dimension de l'espace de Hilbert engendré par l'application de tous les opérateurs annihilation $\hat{a}_l$ pour tous les modes. Le caractère multimode d'un état est donc indépendant de la base de modes utilisée pour le décrire. Une description complète de ce critère théorique est donnée dans [Treps 05a].

B.4.2 Etat comprimé multimode

On parle de réduction de bruit multimode quand un état est au moins bi-mode c'est-à-dire de degré n supérieur ou égal à 2, et que décrites dans sa base minimale, les fluctuations des n premiers modes sont inférieures au bruit quantique standard.

Si l'on mélange sans perte un état comprimé sur N modes orthogonaux, alors on obtient un état comprimé multimode de degré N . On peut aussi produire directement un tel état. Dans la suite de ce travail, on montre que les oscillateurs paramétriques optiques multimodes sont des outils privilégiés pour générer directement de tels états du champ. Dans le cas simple $N = 2$, on peut produire un état comprimé bi-mode à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique (OPO) tel que les faisceaux signal et complémentaire sont dégénérés en fréquence, mais ont des polarisations orthogonales. Dans la base des modes de polarisations à $\pm 45^\circ$ par rapport aux axes propres du cristal, un tel OPO peut produire un état comprimé bi-mode [Laurat 03].

B.4.3 Corrélations quantiques et intrication bimode

L'intrication est une des propriétés les plus fascinantes de la mécanique quantique. D'abord considéré comme une source de paradoxe par Einstein, Podolsky et Rosen dans un article pionnier de 1935 [Einstein 35], elle est aujourd'hui au coeur de nombreux domaines de recherche en physique quantique, tant elle est prometteuse pour l'application à l'information quantique. On présente ici les idées générales nécessaires à la compréhension de la suite de ce travail de thèse. Pour une description plus complète on pourra se reporter à la thèse de Gaëlle Keller-Mullard [Keller 08] et à [Treps 05b]. La mesure de la quantité d'intrication est un sujet de recherche à part entière. Dans le cas des variables continues, on peut citer quelques critères couramment utilisés :

Gémellité Ce critère traduit le caractère non-classique des corrélations qui peuvent exister entre deux modes du champ. Les corrélations normalisées entre deux quadratures $\hat{X}_1^{\theta_1}$ et $\hat{X}_2^{\theta_2}$ de deux modes 1 et 2 du champ peuvent être définies par la grandeur :

$$C(\hat{X}_1^{\theta_1}, \hat{X}_2^{\theta_2}) = \frac{\langle \delta \hat{X}_1^{\theta_1} \delta \hat{X}_2^{\theta_2} \rangle}{\sqrt{\langle (\delta \hat{X}_1^{\theta_1})^2 \rangle \langle (\delta \hat{X}_2^{\theta_2})^2 \rangle}} \quad (1.44)$$

Cette quantité varie de -1 pour des anti-corrélations parfaites à 1 pour des corrélations parfaites. Cependant, les corrélations entre deux modes du champ peuvent également exister classiquement. Le critère de gémellité [Trep 05b] permet d'assurer le caractère non-classique de ces corrélations. Il s'agit en fait de convertir les corrélations en compression de bruit par une opération de changement de base. Ce critère s'applique très bien dans le cas où l'on s'intéresse à la même quadrature de deux modes symétriques, de sorte que $\langle (\delta \hat{X}_1^\theta)^2 \rangle = \langle (\delta \hat{X}_2^\theta)^2 \rangle = \langle (\delta \hat{X}^\theta)^2 \rangle$. La gémellité s'exprime alors :

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{\langle (\delta \hat{X}_1^\theta - \delta \hat{X}_2^\theta)^2 \rangle}{2} \quad (1.45)$$

Lorsque la gémellité de deux modes vérifie $\mathcal{G} < 1$, les corrélations entre les quadratures des deux modes sont nécessairement d'origine quantique, et les modes sont dits "jumeaux" (*twin states* en anglais). Ce cas s'applique très bien quand les deux modes sont spatialement disjoints. On parle alors de faisceaux jumeaux. Dans l'équation 1.45, on remarque que les corrélations d'origine quantique entre les modes peuvent s'interpréter comme une réduction de bruit sur le mode défini par $e^{i\theta_1} u_1(\mathbf{r}, t) - e^{i\theta_2} u_2(\mathbf{r}, t)$.

Inséparabilité Considérons deux modes particuliers du champ quantifié. Un état pur est dit séparable s'il peut se décomposer comme un produit de deux états sur chacun des modes. Dans le cas général, un état est séparable si il peut s'écrire comme un mélange statistique d'états purs séparables :

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_1^i \otimes \hat{\rho}_2^i \quad (1.46)$$

Un état est dit inséparable ou intriqué si il n'est pas séparable. Dans ce cas, certaines actions sur un mode peuvent avoir un effet sur l'état du champ sur l'autre mode. Cette caractéristique est surprenante si l'on considère l'intrication pour deux modes disjoints spatialement, et a permis des expériences de téléportation quantique de l'état d'un champ [Bouwmeester 97, Furusawa 98, Boschi 98] entre des positions macroscopiquement distinctes.

Pour traduire le caractère inséparable d'un état quantique du champ sur deux modes différents, on peut utiliser deux critères, que l'on exprime ici dans le cas de modes symétriques à l'aide des gémellités $\mathcal{G}_+$ et $\mathcal{G}_-$ définies par :

$$\mathcal{G}_+(\theta) = \frac{\langle (\delta \hat{X}_1^\theta + \delta \hat{X}_2^\theta)^2 \rangle}{2} \quad \mathcal{G}_-(\theta) = \frac{\langle (\delta \hat{X}_1^\theta - \delta \hat{X}_2^\theta)^2 \rangle}{2} \quad (1.47)$$

Ce sont des critères suffisants d'inséparabilité qui caractérisent les corrélations sur une quadrature et les anticorrélations sur l'autre quadrature. Le premier, introduit indépendamment par Duan [Duan 00] et Simon [Simon 00] assure l'inséparabilité d'un état s'il

existe deux quadratures orthogonales telles que la somme des gémellités sur ces quadratures soit inférieure à 2.

$$\boxed{\text{Il existe } \theta \text{ tel que } \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_+(\theta) + \mathcal{G}_-(\theta + \frac{\pi}{2}) \right) < 1} \quad (1.48)$$

Le second critère, introduit par Mancini [Mancini 02], assure l'inséparabilité s'il existe deux quadratures orthogonales telles que le produit des gémellités sur ces quadratures soit inférieur à un.

$$\boxed{\text{Il existe } \theta \text{ tel que } \mathcal{G}_+(\theta) \cdot \mathcal{G}_-(\theta + \frac{\pi}{2}) < 1} \quad (1.49)$$

Ces deux critères sont utilisés expérimentalement pour caractériser l'inséparabilité de deux modes. Le critère de Mancini est plus performant car il permet de détecter plus d'états que celui de Duan et Simon. On remarque que ces critères peuvent s'apparenter à une réduction de bruit sur deux quadratures orthogonales de deux modes différents.

Critère EPR Ce critère, développé par Margaret Reid [Reid 89], permet d'assurer que la mesure de l'une ou l'autre de deux quadratures orthogonales sur un mode permet de déduire les quadratures sur l'autre mode, à l'instar de l'expérience de pensée de Einstein, Podolsky et Rosen, qui concernait alors deux particules décrites par leurs opérateurs canoniques $\hat{X}$ et $\hat{P}$. Pour chacune d'elle $\hat{X}$ et $\hat{P}$ ne commutent pas et l'on ne peut donc pas déterminer simultanément ces deux quadratures. En revanche, les opérateurs $\hat{X}_1 + \hat{X}_2$ et $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$ commutent et l'on peut donc mesurer simultanément ces deux quantités avec une précision infinie.

Pour des faisceaux symétriques, ce critère peut s'exprimer en fonction de la gémellité $\mathcal{G}(\theta)$ introduite au paragraphe précédent. Deux modes ont des corrélations de type EPR si leur gémellité vérifie :

$$\left(2\mathcal{G}(\theta) - \frac{\mathcal{G}(\theta)^2}{\langle (\delta\hat{X}^\theta)^2 \rangle} \right) \left(2\mathcal{G}(\theta + \frac{\pi}{2}) - \frac{\mathcal{G}(\theta + \frac{\pi}{2})^2}{\langle (\delta\hat{X}^{\theta+\frac{\pi}{2}})^2 \rangle} \right) < 1 \quad (1.50)$$

C Mesures optiques

Il existe une grande variété de systèmes de détection optique, permettant de mesurer des quantités physiques très différentes. Cette partie consiste à décrire quelques systèmes de détection utilisés et leur associer l'observable correspondante.

C.1 Exemple de détection : la détection directe d'intensité

La détection la plus simple d'un faisceau lumineux consiste à en mesurer son intensité avec un photodétecteur. Dans le domaine des variables continues, une photodiode délivre un photocourant, proportionnel à l'intensité du faisceau lumineux incident. En notant S la surface de la photodiode, le photocourant $i(t)$ est donc proportionnel au produit $\hat{E}^{(+)\dagger}\hat{E}^{(+)}$ moyenné sur le temps de réponse des détecteurs :

$$\hat{I}(t) = \overline{\int_S \hat{E}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) d\boldsymbol{\rho}} \quad (1.51)$$

où la barre horizontale représente la moyenne temporelle. Le champ peut être décomposé sur une base $\{u_j(\mathbf{r}, t)\}_j$ dont le premier vecteur u_0 est choisi de telle sorte qu'il corresponde à la valeur moyenne du champ supposée non nulle⁴.

$$u_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\int d\boldsymbol{\rho} \langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{\mathbf{E}}^\dagger(\mathbf{r}, t) \rangle} \quad (1.52)$$

Avec la condition de normalisation $\overline{\int_S u_j^*(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) d\boldsymbol{\rho}} = \delta_{jk}$ On peut alors écrire l'opérateur de fréquences positives dans cette base :

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_j \mathcal{E}_j \hat{a}_j u_j(\mathbf{r}, t) \quad (1.53)$$

On en déduit l'observable correspondant au signal détecté :

$$\hat{I}(t) = \sum_{j,k} \left(\mathcal{E}_j^* \mathcal{E}_k \overline{\int_S u_j^*(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) d\boldsymbol{\rho}} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \right) \quad (1.54)$$

L'intégrale $\overline{\int_S u_j^*(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) d\boldsymbol{\rho}} = \delta_{jk}$ se simplifie et permet de ne garder que des termes $j = k$. La valeur moyenne $\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle$ n'est non nulle que pour $j = 0$. Dans ce cas, on peut développer l'opérateur $\hat{a}_0 = \alpha_0 + \delta \hat{a}_0$, avec $\alpha_0 = |\alpha_0| e^{i\theta_0}$. Dans l'approximation semi-classique, on peut négliger le terme $\delta \hat{a}_0^\dagger \delta \hat{a}_0$ et écrire

$$\hat{I}(t) = |\mathcal{E}_0^2| \left(|\alpha_0|^2 + |\alpha_0| \delta \hat{X}^{\theta_0} \right) \quad (1.55)$$

$$\delta \hat{I}(t) = |\mathcal{E}_0^2| |\alpha_0| \delta \hat{X}^{\theta_0} \quad (1.56)$$

Les fluctuations du signal mesuré sont donc uniquement celles du mode u_0 sur la quadrature θ_0 . Une détection d'intensité ne peut de plus que mesurer les fluctuations de la quadrature d'amplitude d'un faisceau.

4. On a supposé ici que toute l'énergie du faisceau mesuré arrive sur le photodétecteur. Si ce n'est pas le cas, on doit remplacer u_0 par la projection sur le photodétecteur du mode de valeur moyenne du champ.

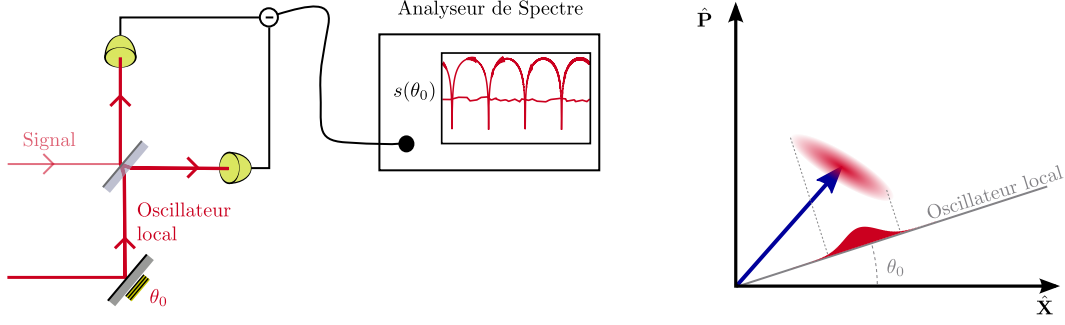


Figure 1.4: Principe de fonctionnement de la détection homodyne. Le faisceau à mesurer est mélangé à un faisceau de référence beaucoup plus intense sur une lame semi-réfléchissante. Deux photodétecteurs enregistrent le signal d'interférence sur chaque voie, et la différence des deux photocourants mesure la valeur moyenne de la quadrature du mode spatio-temporel de l'oscillateur local selon la direction définie par sa valeur moyenne.

C.2 La détection homodyne

Description du dispositif Un photodétecteur détecte l'intensité du champ incident, mais est incapable d'en mesurer la phase. La détection homodyne est très largement utilisée dans les expériences d'optique quantique en variables continues, car elle permet la mesure des deux quadratures d'un mode du champ. Le dispositif est représenté sur la figure 1.4. Il s'agit d'un dispositif interférentiel : on mélange sur une lame semi-réfléchissante le faisceau à mesurer que l'on notera $\hat{\mathbf{E}}$, et un faisceau de référence, beaucoup plus intense, appelé *oscillateur local* et noté $\hat{\mathbf{E}}_{LO}$. On mesure ensuite l'intensité des deux champs sortants, dont on fait la différence.

Calcul de l'observable mesurée Les champs sur les deux voies de sortie de la lame semi-réfléchissante s'écrivent :

$$\hat{E}_1^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_{LO}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.57)$$

$$\hat{E}_2^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \hat{E}_{LO}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.58)$$

où le signe $-$ assure la conservation de l'énergie. L'intensité mesurée sur chaque voie vaut :

$$\hat{I}_1(t) = \frac{1}{2} \int_{S_1} \left(\hat{E}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_{LO}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) \right) \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_{LO}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) dS \quad (1.59)$$

$$\hat{I}_2(t) = \frac{1}{2} \int_{S_2} \left(\hat{E}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) - \hat{E}_{LO}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) \right) \left(\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \hat{E}_{LO}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) dS \quad (1.60)$$

Choisissons à présent une base de modes particulière pour écrire l'opérateur champ $\hat{\mathbf{E}}$, dont le premier mode $u_0(\mathbf{r}, t)$ correspond à la valeur moyenne de l'oscillateur local, $u_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\langle \hat{\mathbf{E}}_{LO}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\int d\rho \langle \hat{\mathbf{E}}_{LO}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}_{LO}^\dagger(\mathbf{r}, t) \rangle}$. On complète ensuite ce mode pour former une base de mode $\{u_i(\mathbf{r}, t)\}_i$ à laquelle on attribue les opérateurs bosoniques $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_i^\dagger$ pour chaque voie d'entrée et chaque

mode ⁵ :

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_j \mathcal{E}_j \hat{a}_j u_j(\mathbf{r}, t) \quad (1.61)$$

$$\hat{E}_{LO}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_j \mathcal{E}_j \hat{a}_{j,LO} u_j(\mathbf{r}, t) \quad (1.62)$$

On en déduit les expressions de $\hat{I}_1$ et $\hat{I}_2$ que l'on peut développer :

$$\hat{I}_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mathcal{E}_j^* \mathcal{E}_k \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{k,LO} + \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_{k,LO} \right) \overline{\int_{S_1} u_j^*(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) dS} \quad (1.63)$$

$$\hat{I}_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mathcal{E}_j^* \mathcal{E}_k \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{k,LO} - \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_{k,LO} \right) \overline{\int_{S_1} u_j^*(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) dS} \quad (1.64)$$

Si l'on se restreint à l'étude de modes tels que leurs distributions transverses soient intégralement contenues dans les surfaces des photodétecteurs, alors on peut utiliser la condition d'orthonormalisation de la famille de modes :

$$\hat{I}_1(t) = \frac{1}{2} \sum_j |\mathcal{E}_j|^2 \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j,LO} + \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_{j,LO} \right) \quad (1.65)$$

$$\hat{I}_2(t) = \frac{1}{2} \sum_j |\mathcal{E}_j|^2 \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j,LO} - \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_{j,LO} \right) \quad (1.66)$$

La différence des photocourants est associée à l'observable $\hat{i}_- = \hat{I}_1 - \hat{I}_2$

$$\hat{i}_- = \sum_j |\mathcal{E}_j|^2 \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j,LO} + \hat{a}_{j,LO}^\dagger \hat{a}_j \right) \quad (1.67)$$

En utilisant l'opérateur fluctuation pour l'oscillateur local seulement, on peut écrire :

$$\hat{a}_{j,LO} = \alpha_{j,LO} + \delta \hat{a}_{j,LO} \quad (1.68)$$

avec $\alpha_{j,LO} = 0$ si $j \neq 0$. L'équation 1.67 s'écrit donc :

$$\hat{i}_- = \sum_j |\mathcal{E}_j|^2 \left(\hat{a}_j^\dagger (\alpha_{j,LO} + \delta \hat{a}_{j,LO}) + (\alpha_{j,LO}^* + \delta \hat{a}_{j,LO}^\dagger) \hat{a}_j \right) \quad (1.69)$$

Si l'oscillateur local est suffisamment intense par rapport au champ à mesurer, grâce au choix judicieux de la base de mode, le terme proportionnel à $\alpha_{0,LO}$ domine la somme, et l'observable $\hat{i}_-$ peut s'écrire :

$$\hat{i}_- = |\mathcal{E}_0|^2 \left(\alpha_{0,LO} \hat{a}_0^\dagger + \alpha_{0,LO}^* \hat{a}_0 \right) \quad (1.70)$$

Si l'on écrit de plus $\alpha_{0,LO} = \sqrt{N_0} e^{i\theta_0}$, alors :

$$\hat{i}_- = |\mathcal{E}_0|^2 \sqrt{N_0} \hat{X}_0^{\theta_0} \quad (1.71)$$

5. Les modes $u_i(\mathbf{r}, t)$ sont identiques pour l'oscillateur local et le champ à mesurer si on les considère en sortie de la lame semi-réfléchissante. Cependant, ils sont différents avant la lame, on leur associe donc des opérateurs $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_{i,LO}$ différents

La détection homodyne permet donc de mesurer la quadrature $\hat{X}^{\theta_0}$ du mode défini par l'oscillateur local. En contrôlant la phase θ_0 , on peut choisir la quadrature que l'on mesure. Expérimentalement, on positionne un miroir du chemin optique de l'oscillateur local sur une câle piezo-électrique, ce qui nous permet de contrôler précisément θ_0 .

Dans le calcul précédent, la seule hypothèse sur l'état du champ à mesurer a été de considérer son amplitude sur les différents modes faible devant celle de l'oscillateur local. Le profil transverse de l'état du champ n'a pas été pris en compte. La détection homodyne agit donc comme une opération de projection sur le mode de l'oscillateur local.

Mise en forme de l'oscillateur local La détection homodyne mesure la quadrature du mode du champ défini par la valeur moyenne de l'oscillateur local. Il apparaît donc intéressant de pouvoir mettre en forme l'oscillateur local. Cette opération est habituellement appelée "adaptation de modes" (*mode-matching* en anglais). Pour cela, on fait interférer l'oscillateur local avec un faisceau d'amplitude non nulle dans le mode spatial que l'on veut mesurer. Dans le cas d'un faisceau gaussien TEM₀₀, l'adaptation de modes peut être réalisée en utilisant un jeu de lentilles et de miroirs. Si le mode que l'on veut mesurer est de valeur moyenne non-nulle, on mesure ensuite son recouvrement avec l'oscillateur local en calculant la visibilité maximale des interférences lorsque les deux faisceaux sont de même amplitude, et que l'on fait varier la phase de l'un par rapport à l'autre.

Dans le cas où l'on souhaite mesurer la quadrature d'un mode de profil spatio-temporel plus subtil, on doit utiliser d'autres techniques de mise en forme. Les techniques possibles sont présentées dans le chapitre suivant, à la section C.4.1 dans le cas du profil spatial, et à la section C.4.2 dans le cas du profil temporel.

Densité spectrale de bruit associée à l'observable mesurée Dans nos expériences d'optique, le signal $\langle \hat{i}_- \rangle$ est enregistré en continu, et on effectue ensuite une analyse spectrale de bruit. La valeur moyenne temporelle de $\langle \hat{i}_- \rangle$ n'est pas toujours intéressante, car à basse fréquence, de nombreuses sources de bruit classique viennent s'ajouter aux quantités mesurées, et les fluctuations d'origine quantique sont inaccessibles. Ces dernières sont accessibles à des fréquences d'analyse spectrales élevées, typiquement de l'ordre de quelques MHz, voire de l'ordre de la centaine de kHz dans certaines expériences. Un faisceau au bruit quantique standard présente un spectre de puissance de bruit constant, dans la limite de la bande passante des photodétecteurs.

La quantité mesurée dans ce cas n'est donc pas la valeur $\langle \hat{i}_-(t) \rangle$ mais la densité spectrale de bruit $S(\omega)$ à la fréquence ω qui est proportionnelle à la variance de la transformée de Fourier $\delta \hat{i}_-(\omega)$ de $\langle \hat{i}_-(t) \rangle$ [Fabre 95]. L'observable mesurée est donc proportionnelle à $\langle \hat{X}^\theta(\omega) \hat{X}^\theta(-\omega) \rangle$.

C.3 Mode associé à une détection

Les deux mesures que l'on vient de présenter mettent en évidence que le résultat de la mesure peut s'exprimer à l'aide d'une observable de quadrature unique sur un mode bien déterminé. Cette notion peut se généraliser, et l'on peut associer un mode de détection à toute mesure. Lorsque la mesure d'une observable $\hat{A}$ fournit un résultat scalaire $A(t)$, on

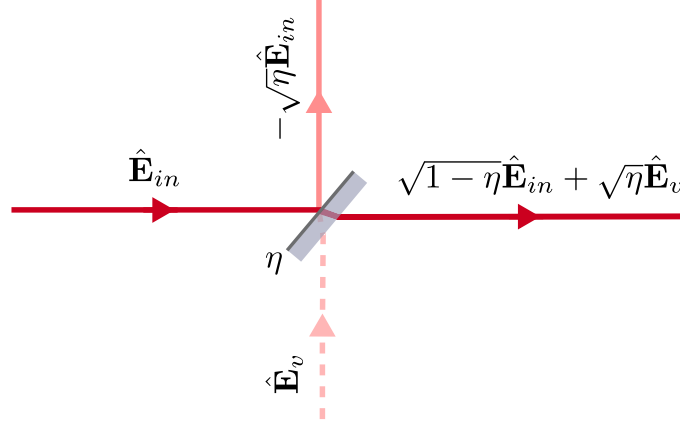


Figure 1.5: Modélisation des pertes optiques d'une expérience d'optique quantique. On assimile les pertes à une lame semi-réfléchissante, qui couple le faisceau au vide.

peut le décomposer en une valeur moyenne $\langle A \rangle$ et des fluctuations $\delta A(t)$ et le système de détection est monocanal. Le paramètre (ou information) A et ses fluctuations sont extraits d'un mode optique particulier [Delaubert 06] appelé mode de bruit de la détection. Ce mode dépend de l'appareil de mesure, et lui seul intervient dans le résultat de la mesure. Les propriétés du faisceau sur tout mode optique orthogonal sont ignorées par le système de détection. Il peut s'agir d'un mode transverse particulier dans le cas par exemple où le paramètre A correspond à une information spatiale du faisceau lumineux, ou d'un mode longitudinal dans le cas où le paramètre A correspond à une information temporelle sur le faisceau. Pour identifier ce mode de bruit, on doit chercher à écrire l'observable $\hat{A}$ en fonction d'un unique mode du champ. On peut ensuite optimiser l'extraction d'une information à partir d'une mesure, en adaptant le mode de bruit à l'information souhaitée.

C.4 Rôle des pertes dans un dispositif de détection quantique

Les pertes optiques vont grandement contribuer à la perte des propriétés non-classiques d'un faisceau lumineux. On peut en général modéliser des pertes η en intensité (donc $\sqrt{\eta}$ en amplitude) par une lame partiellement réfléchissante, de coefficient de réflexion en intensité η , représentée à la figure (1.5). Le champ restant est le champ transmis par cette lame. La lame va avoir un effet de couplage avec le mode vide entrant sur l'autre voie, qui représente les pertes. Le champ sortant $\hat{\mathbf{E}}_{out}$ s'écrit donc en fonction du champ entrant $\hat{\mathbf{E}}_{in}$ et du mode vide $\hat{\mathbf{E}}_v$:

$$\hat{\mathbf{E}}_{out} = \sqrt{1-\eta}\hat{\mathbf{E}}_{in} + \sqrt{\eta}\hat{\mathbf{E}}_v \quad (1.72)$$

Les observables de quadratures s'expriment linéairement par rapport au champ $\hat{\mathbf{E}}$ et vérifient donc les mêmes relations. Les fluctuations de la voie vide et du faisceau ne sont pas corrélées, donc $\langle \delta \hat{X}_{in}^\theta \delta \hat{X}_v^\theta \rangle = 0$. La voie vide a des fluctuations au bruit quantique standard, donc $\langle (\delta \hat{X}_v^\theta)^2 \rangle = 1$. La variance des fluctuations d'une quadrature $\hat{X}^\theta$ s'écrit donc en sortie :

$$\langle (\delta \hat{X}_{out}^\theta)^2 \rangle = (1-\eta)\langle (\delta \hat{X}_{in}^\theta)^2 \rangle + \eta \quad (1.73)$$

On remarque dans cette expression que les pertes mélangent un état avec du vide, et ramènent les fluctuations du faisceau proche du bruit quantique standard. Un faisceau

dont les fluctuations sur la quadrature $\hat{X}^\theta$ sont réduites de 10 dB sous le bruit quantique standard vérifie, après des pertes de 50%

$$\langle (\delta \hat{X}_{out}^\theta)^2 \rangle = \frac{1}{2} \times 0,1 + \frac{1}{2} \quad (1.74)$$

$$\approx \frac{1}{2} \quad (1.75)$$

soit une réduction de bruit de 3 dB seulement.

On peut également donner une interprétation corpusculaire de l'effet des pertes sur la réduction de bruit quantique. Comme décrit à la section (B.2), la réduction de bruit d'intensité correspond à un ordonnement longitudinal des photons dans un faisceau. Les pertes vont soustraire aléatoirement des photons dans ce faisceau, et l'ordre longitudinal des photons va être en partie perdu.

C.5 Mesure multicanal

Certains systèmes de mesures optiques permettent la mesure simultanée de plusieurs grandeurs scalaires. Dans le cas de mesures quantiques, rien n'empêche la mesure simultanée de plusieurs observables qui ne commutent pas. Expérimentalement, on peut faire l'acquisition simultanée de plusieurs signaux. Dans ce cas, il sera toujours possible de définir un mode de bruit par signal.

C.5.1 Mesure d'intrication

La caractérisation de l'intrication passe par la mesure de corrélations (cf section B.4.3) entre plusieurs modes et nécessite donc la mesure de plusieurs observables simultanément. Pour chaque observable, il existe plusieurs techniques pour mesurer les corrélations entre deux modes du champ. La première consiste à mesurer directement les corrélations temporelles entre deux signaux électriques : on enregistre les photocourants sur une durée suffisante, puis on calcul la fonction de corrélation temporelle de ces deux signaux.

La seconde méthode pour mesurer les corrélations consiste à trouver un changement de base, tel que les corrélations entre deux modes se transforment en réduction de bruit dans la nouvelle base. Il suffit ensuite de mesurer les fluctuations des nouveaux modes pour en déduire les corrélations entre les modes d'origine. Cette technique peut être en particulier utilisée pour mesurer l'intrication entre deux modes de polarisations orthogonales. La base des polarisations à 45° transforme alors les corrélations en réduction de bruit [Laurat 03].

C.5.2 Mesure multipixel

L'utilisation de plusieurs photodétecteurs en parallèle, mesurant sans perte plusieurs parties d'un faisceau peut également être considérée comme une mesure multicanal. Chaque photodétecteur mesure une observable. Il est cependant possible de combiner les signaux de chaque photodétecteur pour accéder à des observables supplémentaires. Tous les développements de ce paragraphe mettent en avant des mesures spatiales, car les photodétecteurs sont à différentes positions transverses. Cependant, on peut tout à fait imaginer appliquer ces résultats à des mesures sur des modes longitudinaux, en positionnant les détecteurs

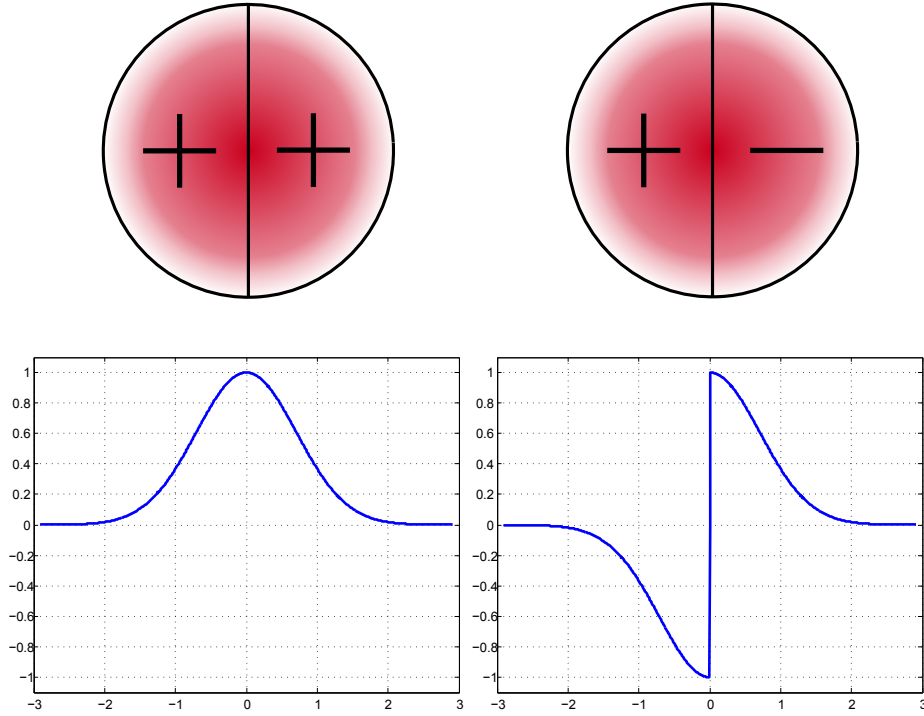


Figure 1.6: Modes de bruit associés à la somme et à la différence des photocourants d'un détecteur à deux zones centré sur lequel on envoie un faisceau gaussien

multipixels dans le plan de Fourier d'une ligne à dispersion nulle (cf section C.4.2 du chapitre suivant) ou en sortie d'un réseau de diffraction, où les différentes fréquences d'une impulsion sont séparées spatialement et peuvent donc être mesurées indépendamment.

Considérons par exemple le détecteur à deux zones (*split-detector* en anglais) sur lequel on envoie un faisceau centré. Chaque photodétecteur mesure l'intensité du signal sur une moitié du faisceau. Ce type de détecteur a été largement étudié puisqu'il permet la mesure de position d'un faisceau laser [Treps 03]. On peut se reporter à [Delaubert 07a] pour une description complète de ce système de détection. L'idée est de considérer la somme et la différence des signaux de chaque photodétecteur (photocourants), plutôt que de considérer les signaux indépendamment. On peut alors associer un mode de bruit à chaque signal mesuré, comme représenté sur la figure 1.6. Le mode de bruit associé à la somme des photocourants est le même que celui de la détection d'intensité, c'est-à-dire la projection du mode de champ moyen sur la surface totale des photodétecteurs. Le mode de bruit associé à la différence des photocourants correspond à la différence des projections du champ moyen sur les deux zones.

Dans le cas général d'une mesure d'intensité sur un nombre N de pixels de surface S_i , on peut mesurer l'observable :

$$\hat{K} = \sum_i g_i \int_{S_i} \hat{E}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) d\boldsymbol{\rho} \quad (1.76)$$

où l'on a attribué un gain g_i à chaque pixel. Dans ce cas, les fluctuations mesurées sont

uniquement associées au mode défini par [Treprs 05a] :

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \sum_i g_i u_0(\mathbf{r}, t) \Pi_i(\boldsymbol{\rho}) \quad (1.77)$$

où Π_i est le projecteur sur le détecteur i : $\Pi_i(\boldsymbol{\rho}) = 1$ si $\boldsymbol{\rho} \in S_i$ et 0 sinon. A nouveau, ce dispositif ne permet de mesurer que la quadrature d'amplitude.

Détection homodyne multipixel Un détecteur multipixel peut être également utilisé dans un dispositif de détection homodyne, comme représenté sur la figure 1.7. Si l'on remplace les photodétecteurs de chaque voie d'une détection homodyne standard par deux détecteurs multipixels identiques, et qu'on utilise un oscillateur local large, de sorte qu'il puisse être considéré comme une onde plane $|\mathcal{E}_0|e^{i\theta_0}$ sur toute la surface des détecteurs, on peut attribuer le gain électronique g_i à la différence de photocourant entre les pixels i de chaque voie, et on mesure l'observable :

$$\hat{K} = |\mathcal{E}_0| \sum_i g_i \int_{S_i} \left(e^{-i\theta_0} \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + e^{i\theta_0} \hat{E}^{(+)\dagger}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.78)$$

On peut à présent choisir la base des modes pixels $u_i(\boldsymbol{\rho}) = 1$ si $\boldsymbol{\rho} \in S_i$ et 0 sinon.

$$\hat{K} = |\mathcal{E}_0| \sum_i g_i \mathcal{E}_i \int_{S_i} \left(e^{-i\theta_0} \hat{a}_i + e^{i\theta_0} \hat{a}_i^\dagger \right) \quad (1.79)$$

$$= |\mathcal{E}_0| |\mathcal{E}| \hat{X}^{\theta_0} \quad (1.80)$$

où $\hat{X}^{\theta_0}$ est la quadrature θ_0 du mode défini par le profil spatial dans le plan des photodétecteurs :

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} g_i & \text{si } \boldsymbol{\rho} \in S_i \\ 0 & \text{si } \boldsymbol{\rho} \text{ n'appartient à aucun des } S_i \end{cases} \quad (1.81)$$

Il apparaît donc possible de mesurer simultanément la quadrature θ_0 d'un grand nombre de modes dont on définit le profil transverse dans le plan des détecteurs en modifiant la distribution des gains g_i . Cependant tous les modes ne sont pas accessibles avec cette technique, et il peut également être utile de moduler la phase de l'oscillateur local dans le plan des photodétecteurs en utilisant par exemple un modulateur de phase spatiale dans un plan conjugué.

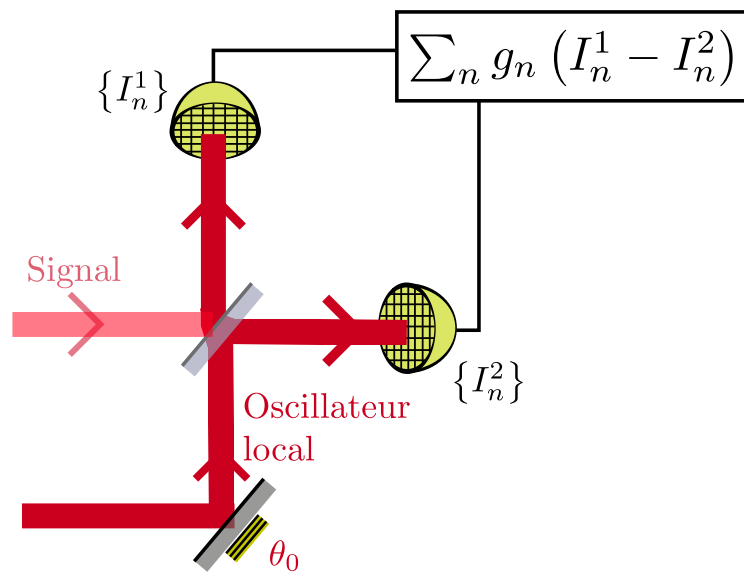


Figure 1.7: Dispositif de mesure homodyne multipixel : deux détecteurs multipixels remplacent les détecteurs d'une détection homodyne usuelle, et l'oscillateur local est constitué d'une onde plane large. On enregistre la différence des photocourants de chaque couple de pixels, puis on les combine avec des gains différents pour choisir une observable à mesurer.

Optique comparée des images et des impulsions

Sommaire

A	Éléments d'optique transverse	33
A.1	Equation de propagation	33
A.2	Faisceaux gaussiens	34
A.3	Propagation des modes gaussiens et des images	35
A.4	Cavités dégénérées	38
A.5	Cavités totalement dégénérées	44
B	Elements d'optique des impulsions	46
B.1	Description d'un train impulsions laser femtoseconde	46
B.2	Propagation d'une impulsion courte	49
B.3	Cavités synchrones	54
C	Analogie entre les deux domaines	63
C.1	Equation de propagation des modes	63
C.2	Résonance en cavité	64
C.3	Techniques de caractérisation spatiale et temporelle d'un faisceau	65
C.4	Transformation et mise en forme transverse et longitudinale	69
C.5	Variables et concepts analogues dans les deux domaines	74
D	Transmission et doublage d'images en cavité auto-imageante	76
D.1	La cavité auto-imageante en géométrie linéaire	76
D.2	Transmission d'une image	80
D.3	Etude du doublage de fréquence en cavité auto-imageante	83
D.4	Conclusion	90
E	Conclusion	91

La lumière a intrinsèquement un nombre infini de degrés de liberté. Un mode du champ électromagnétique correspond comme nous l'avons vu dans le chapitre 1 à un profil spatial, un profil temporel ainsi qu'une polarisation. Ces trois types de degrés de liberté sont traités en optique classique de façons différentes et conduisent à des

traitements différents. La polarisation est le degré de liberté le plus accessible, puisqu'il peut être traité dans un espace de Hilbert de dimension deux. Les degrés de liberté spatiaux et temporels sont plus complexes puisque dans des espaces de Hilbert de dimensions infinies. Cependant, le traitement habituel de la lumière dans le cadre de la physique des lasers donne une description simplifiée où le nombre de degrés de liberté est grandement réduit.

Mon travail de thèse s'est articulé autour de deux expériences d'optique quantique. L'une s'intéressant aux modes transverses de la lumière, au centre des activités du groupe depuis une dizaine d'années, et l'autre étant une nouvelle expérience d'optique quantique avec des peignes de fréquences, donc avec des modes longitudinaux. Dans les deux cas, on traite des modes copropageants.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les outils nécessaires à la manipulation de ces deux degrés de liberté, puis d'établir une analogie forte entre la description spatiale et la description temporelle de la lumière laser, leurs propriétés de propagation, de résonance en cavité. Une partie de ce chapitre est constituée de rappels d'optique des images et des impulsions nécessaires à la compréhension de cette thèse. On y a ajouté un travail original sur la résonance en cavité d'images et d'impulsions. Enfin, on présente une expérience d'optique transverse de transmission et de doublage de fréquence d'images dans une cavité complètement dégénérée.

Dans l'ensemble de ce chapitre, on traite classiquement le champ, car la description quantique est inutile. Cependant, comme on l'a vu au paragraphe précédent, le passage de la description classique à la description quantique est simple, et peut se réduire en général à une normalisation bien choisie des opérateurs bosoniques, de sortes qu'ils satisfassent la bonne relation de commutation.

A Éléments d'optique transverse

On décrit dans cette section les outils utilisés pour décrire et manipuler le degré de liberté spatial d'un faisceau laser. Plus précisément, le terme "transverse" implique que la direction du faisceau lumineux est fixe. L'optique transverse s'intéresse au profil du champ dans la direction orthogonale à la direction de propagation. Les modes transverse sont donc une classe de modes spatiaux copropageants.

A.1 Equation de propagation

A.1.1 Espace réel

Pour décrire un faisceau laser, on décompose habituellement un champ de pulsation ω et d'impulsion $\mathbf{k}$ en utilisant son enveloppe $A(\boldsymbol{\rho}, z)$ où z représente la coordonnée longitudinale, dirigée selon le vecteur $\mathbf{k}$, et $\boldsymbol{\rho}$ la coordonnée transverse du faisceau.

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = A(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i(\omega t - kz)} \vec{e} \quad (2.1)$$

$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ doit satisfaire à l'équation de propagation dans le vide :

$$\Delta \mathbf{E}^{(+)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(+)}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

L'enveloppe $A(\boldsymbol{\rho}, z)$ doit donc satisfaire à l'équation

$$\Delta A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Dans l'approximation paraxiale l'enveloppe du champ est supposée lentement variable devant les termes de diffraction. On considère donc le terme $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ négligeable devant les termes $2ik \frac{\partial A}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$. Cette équation devient alors l'équation de propagation paraxiale

$$\Delta_{\perp} A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

où $\Delta_{\perp}$ est le laplacien transverse dans les directions x et y . C'est l'équation qui décrit la diffraction d'un faisceau lumineux, c'est à dire son étalement dans l'espace. Elle admet de nombreux ensembles complets de solutions, qui constituent des bases de modes possibles de décomposition du champ.

A.1.2 Espace de Fourier

L'enveloppe du champ peut également être décrite dans l'espace de Fourier, qui utilise la variable conjuguée $\mathbf{q}$ à la variable de position $\boldsymbol{\rho}$. $\mathbf{q}$ représente l'impulsion transverse du champ. On utilisera la notation $\tilde{A}(\mathbf{q}, z)$ pour décrire l'enveloppe du champ dans l'espace des $\mathbf{q}$. On a donc les relations suivantes entre $A(\boldsymbol{\rho}, z)$ et $\tilde{A}(\mathbf{q}, z)$:

$$\tilde{A}(\mathbf{q}, z) = \int \frac{d\boldsymbol{\rho}}{2\pi} A(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (2.5)$$

$$A(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \frac{d\mathbf{q}}{2\pi} \tilde{A}(\mathbf{q}, z) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} \quad (2.6)$$

L'équation de propagation devient donc pour $\tilde{A}$:

$$-\|\mathbf{q}\|^2 \tilde{A} + 2ik \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

Cette équation se résout facilement pour la variable $\mathbf{q}$, et on trouve :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, z) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}, 0) e^{-i \frac{|\mathbf{q}|^2 z}{2k}} \quad (2.8)$$

A.2 Faisceaux gaussiens

La physique des lasers utilise traditionnellement le formalisme des faisceaux gaussiens pour décrire le profil spatial des faisceaux de lumière laser. Ce sont des modes propres de l'équation de propagation paraxiale, particulièrement adaptés aux cavités optiques. En effet, la résonance transverse d'un faisceau dans une cavité linéaire impose que les fronts d'onde doivent épouser la surface des miroirs. Une cavité linéaire formée de miroirs sphériques possède donc un ensemble de modes propres gaussiens appelés TEM_{mn} ¹ dont les fronts d'onde ont un rayon de courbure identique aux rayons de courbure des miroirs. Cette famille de mode est caractérisée par deux grandeurs : la position et la taille du col du faisceau ("waist" en anglais). Ce col correspond à la coordonnée longitudinale où le faisceau a une taille minimum notée w_0 . En prenant $z = 0$ au niveau du col, on peut écrire la forme du mode TEM_{mn} en utilisant les polynômes de Hermite-Gauss :

$$A_{mn}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{C_{mn}}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} e^{-i(n+m+1)\varphi_G(z)} \quad (2.9)$$

$$= \frac{C_{mn}}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)}} e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-i(n+m+1)\varphi_G(z)} \quad (2.10)$$

Les grandeurs physiques associées à cette famille de mode sont les suivantes :

$$q(z) = z - iz_R \quad (2.11)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2.12)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad (2.13)$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \quad (2.14)$$

$$\varphi_G(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (2.15)$$

Toutes les propriétés de diffraction du faisceau sont décrites par le paramètre $q(z)$ appelé rayon de courbure complexe du faisceau. Cependant, on utilise habituellement deux paramètres : la taille transverse du faisceau $w(z)$ minimale au waist, et le rayon de courbure du faisceau $R(z)$. La longueur z_R est appelée longueur de Rayleigh, c'est la longueur caractéristique de la diffraction du faisceau. D'après la formule de $w(z)$, la taille

1. TEM signifie transverse électrique et magnétique, pour signifier que les deux champs sont transverses, par opposition aux modes TE ou TM que l'on trouve par exemple dans les guides d'onde

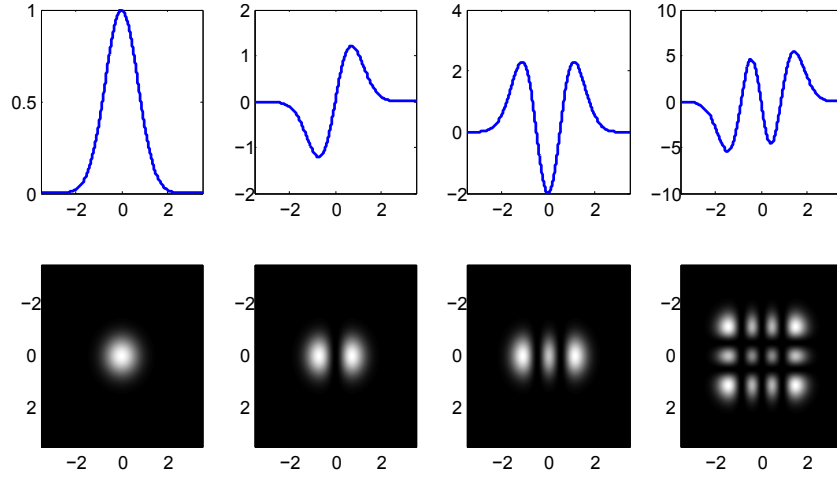


Figure 2.1: Profils transverses de quatre modes gaussiens, de gauche à droite TEM_{00} , TEM_{10} , TEM_{20} et TEM_{32} . Les courbes supérieures représentent le profil d'amplitude au col du faisceau dans la direction x , et les images représentent le profil d'intensité transverse correspondant.

transverse du faisceau est multipliée par $\sqrt{2}$ après une propagation sur une longueur z_R . Cette taille augmente ensuite linéairement avec z . Le rayon de courbure $R(z)$ est très grand au niveau du col du faisceau, et devient environ égal à $2z$ après une propagation sur une longueur z_R . On peut donc assimiler un faisceau gaussien à une onde plane au niveau du col, et sur une distance égale à $2z_R$, et à une onde sphérique au delà. Enfin un terme de phase supplémentaire, $\varphi_G(z)$ appelé phase de Gouy, vient s'ajouter. $\varphi_G(z)$ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ et s'annule au waist du faisceau. Le mode fondamental TEM_{00} diffère donc d'une onde plane et accumule une phase supplémentaire. La phase de Gouy sera d'autant plus grande pour les modes d'ordre supérieur. En terme d'imagerie, cette phase correspond au fait qu'une image se "retourne" au passage d'un point de focalisation.

Les polynômes de Hermite H_p sont donnés par :

$$H_p = (-1)^p e^{X^2} \frac{d^p}{dX^p} \left(e^{-X^2} \right) \quad (2.16)$$

L'indice n (respectivement m), aux valeurs entières, repère donc le nombre de points d'annulation du faisceau dans la direction transverse x (respectivement y). La figure 2.1 exhibe le profil de quelques modes gaussiens. Le premier mode transverse TEM_{00} ne s'annule pas, et possède une symétrie cylindrique parfaite :

$$A_{00}(\rho, z) = \frac{C_{00}}{w(z)} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)}} e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)}} e^{-i\varphi_G(z)} \quad (2.17)$$

C'est ce mode de divergence minimale, qui décrit les faisceaux émis couramment par les lasers en cavité. On caractérise habituellement la "propreté" d'un faisceau par l'écart de la divergence du faisceau par rapport au mode TEM_{00} , à travers un nombre sans dimension noté M^2 .

A.3 Propagation des modes gaussiens et des images

Cette section a pour objectif de présenter le formalisme utilisé pour décrire la propagation des modes transverses utilisés dans nos travaux d'imagerie. Pour une description

plus complète, on pourra se reporter aux travaux de Sylvain Gigan [Gigan 04, Gigan 05].

A.3.1 Définition d'une image

Dans ce travail de thèse, nous allons nous intéresser à des effets d'optique transverse avec des faisceaux lasers. Nous appellerons "image", une distribution transverse $A(\boldsymbol{\rho}, z_0)$ de l'enveloppe du champ électromagnétique dans un plan donné, sans considération de couleur. Expérimentalement, une image est obtenue par l'interception d'un faisceau laser d'enveloppe $A_{in}(\boldsymbol{\rho}, z_0)$ avec un masque de forme quelconque. Ce masque peut être d'intensité ou de phase, et peut toujours être représenté par une fonction de transfert spatiale $T(\boldsymbol{\rho}) = t(\boldsymbol{\rho})e^{i\phi(\boldsymbol{\rho})}$:

$$A(\boldsymbol{\rho}, z_0) = T(\boldsymbol{\rho}) A_{in}(\boldsymbol{\rho}, z_0) \quad (2.18)$$

Une image décrit donc pour nous uniquement un profil spatial d'enveloppe gaussienne. On confondra dans le terme "objet" le champ transmis et l'objet lui-même, et on parlera de son "image" par un système optique quelconque.

La propagation d'une image dans l'espace libre peut être calculée à l'aide du propagateur de Fresnel [Born 99]. Cette fonction permet d'exprimer une relation entre le profil transverse du champ entre deux plans transverses. Si $A(\boldsymbol{\rho}, z_0)$ représente le profil transverse de l'amplitude du champ de vecteur d'onde k dans un plan transverse z_0 , le profil transverse du champ dans le plan z_1 après propagation dans l'espace libre (ou dans un milieu linéaire) est donné par :

$$A(\boldsymbol{\rho}, z_1) = \frac{ik}{2\pi(z_1 - z_0)} \int d^2\boldsymbol{\rho}' A(\boldsymbol{\rho}', z_0) e^{ik \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2}{2(z_1 - z_0)}} \quad (2.19)$$

A.3.2 Champ proche et champ lointain

Les notions de champ proche et de champ lointain sont relatives à une image dans un plan de référence donné. Le champ proche désigne dans ce travail tout plan dans le lequel la **distribution d'intensité** de l'image est conservée, à une homothétie près. Un point de l'objet correspond donc à un et unique point du plan de champ proche. Le champ proche est dit complet s'il restitue de plus la distribution de phase du plan de référence. La transformation de champ proche la plus simple est la conjugaison de Descartes entre objet et image d'une lentille mince. Dans le cas du système dit $2f - 2f$, c'est-à-dire une lentille de focale f précédée et suivie d'une propagation sur une longueur $2f$, le champ proche est complet.

Le champ lointain désigne le plan de Fourier du plan de référence, c'est-à-dire celui où la distribution spatiale du champ reproduit en intensité la transformée de Fourier du champ dans le plan de référence. Un point du plan de champ lointain correspond donc à une impulsion transverse du champ dans le plan objet (ou dans tout plan de champ proche complet). A nouveau, le champ lointain est dit complet s'il restitue de plus la phase de la transformée de Fourier. La transformation de champ lointain complet la plus simple est le système $f - f$, c'est-à-dire une lentille de focale f précédée et suivie d'une propagation

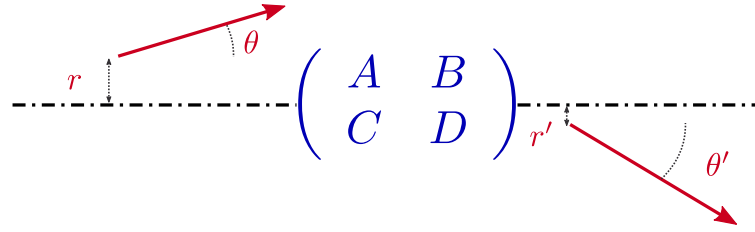


Figure 2.2: Dans le formalisme des matrices ABCD, un système optique paraxial transforme de façon matricielle un rayon lumineux décrit par sa position r à l'axe optique, et sa direction θ par rapport à cet axe

sur une longueur f .

Les notions de champ proche et de champ lointain correspondent à des transformations spéciales et ne permettent pas de décrire un système optique quelconque. Pour cela, on utilise un formalisme d'optique géométrique plus complet, dit des matrices ABCD.

A.3.3 Formalisme des matrices ABCD

En optique géométrique, on utilise le formalisme des matrices ABCD pour décrire la propagation paraxiale d'un faisceau lumineux. On représente un rayon lumineux dans un plan transverse donné par un vecteur colonne à deux éléments : r qui représente la distance du rayon à l'axe et θ l'angle qu'il fait avec l'axe. Dans l'approximation paraxiale, un système optique quelconque va exercer sur le rayon une transformation qui peut être décrite par une matrice 2×2 nommée ABCD. Le rayon final sera calculé en appliquant la matrice ABCD au rayon incident :

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Les matrices utilisées habituellement sont :

- Propagation sur une distance L dans un milieu d'indice n : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Lentille mince convergente de focale f : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$
- Traversée d'un dioptré sphérique de rayon R séparant des milieux d'indices optiques n et n' : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{n'R} & 1 \end{pmatrix}$

Dans un milieu d'indice optique n , la propagation sur une longueur L est équivalente au niveau transverse à la propagation dans le vide sur une distance $\frac{L}{n}$. Ce résultat est différent du cas longitudinal pour lequel la longueur optique vaut nL . Il peut s'interpréter de la façon suivante : l'indice optique diminue la longueur d'onde par rapport à celle dans le vide. Pour une propagation sur une longueur L , le faisceau acquiert une phase n fois supérieure. La longueur optique est donc nL . Pour les effets transverses, la longueur d'onde étant plus faible, le faisceau diffracte moins, ce qui réduit d'autant la longueur équivalente dans le vide, qui vaut $\frac{L}{n}$. Cet effet est très important dans tous les calculs expérimentaux faisant intervenir des milieux d'indice non-nul, par exemple une cavité contenant un cristal.

A.3.4 Transformation des modes gaussiens par une matrice ABCD

Ce formalisme qui sert initialement à décrire la propagation en optique géométrique peut aussi être utilisé [Siegman 86] pour décrire la diffraction des faisceaux gaussiens par l'intermédiaire du rayon de courbure complexe $q(z) = z - iz_R$. Ainsi, une matrice ABCD quelconque transforme un faisceau gaussien de paramètre $q(z)$ en un faisceau de paramètre $q'(z)$ vérifiant :

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (2.21)$$

A.3.5 Transformation des images par une matrice ABCD

La propagation d'une image quelconque $A_0(\boldsymbol{\rho}, z_0)$ par un système optique entre les coordonnées z_0 et z_1 et de matrice ABCD quelconque conduit à une nouvelle image $A_1(\boldsymbol{\rho}, z_1)$, calculée comme suit grâce à l'équation d'Huygens-Fresnel [Siegman 86] :

$$A_1(\boldsymbol{\rho}, z_1) = -\frac{i}{B\lambda} \int d\boldsymbol{\rho}' A_0(\boldsymbol{\rho}', z_0) e^{-\frac{i\pi}{B\lambda}(A\boldsymbol{\rho}'^2 - 2\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}' + D\boldsymbol{\rho})} \quad (2.22)$$

si $B \neq 0$. Cette relation est une généralisation de la relation 2.19 du paragraphe A.3.1. Si $B = 0$, la matrice ABCD s'écrit $\begin{pmatrix} M & 0 \\ C & \frac{1}{M} \end{pmatrix}$, et l'image $A_1(\boldsymbol{\rho}, z_1)$ s'écrit :

$$A_1(\boldsymbol{\rho}, z_1) = -MA_0(M\boldsymbol{\rho}, z_0) e^{-\frac{ikCM\boldsymbol{\rho}^2}{2}} \quad (2.23)$$

Ces expressions peuvent servir à décrire la propagation des modes pixels tels qu'ils ont été définis au paragraphe A.3.1. Par exemple, dans le cas de la propagation dans l'espace libre, l'expression 2.22 est analogue au propagateur de Fresnel. On peut également utiliser ces expressions pour caractériser les transformations en terme d'imagerie. D'après ces équations, pour avoir un champ proche, on doit avoir une matrice ABCD du type $\begin{pmatrix} M & 0 \\ C & \frac{1}{M} \end{pmatrix}$. Le champ proche est complet (intensité et phase) si de plus $C = 0$. De même, une transformation de champ lointain a lieu si $A = 0$, et le champ lointain est complet si de plus $D = 0$, la matrice ABCD vaut alors $\begin{pmatrix} 0 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix}$

A.4 Cavités dégénérées

Une cavité optique est un dispositif composé d'au moins deux miroirs dont l'alignement permet à la lumière de se réfléchir un grand nombre de fois sans en sortir. Les différentes réflexions vont alors interférer, ce qui se traduit par une condition de résonance, ne laissant exister que des modes du champ dont le profil transverse et longitudinal satisfont les conditions de résonance. Une cavité est dite linéaire si le faisceau est réfléchi sur 2 miroirs en incidence normale dans la cavité. Dans ce cas, le mode propre est une onde stationnaire. Dans le cas contraire, la cavité est dite "en anneau", et les modes propres sont des ondes progressives se propageant dans un sens ou dans l'autre à l'intérieur de la cavité. Une étude complète des cavités dégénérées peut être trouvée dans [Gigan 04] et [Gigan 05]. On rappelle ici uniquement les résultats importants.



Figure 2.3: Profils transverse et longitudinal à deux dimensions du premier mode gaussien résonant à l'intérieur d'une cavité plan-concave quelconque. Le rayon de courbure du mode doit épouser la forme des miroirs, ce qui définit la taille et la position du waist dans la cavité.

A.4.1 Sélection transverse et longitudinale dans une cavité quelconque

Considérons un mode du champ caractérisé par une distribution spatiale $A(\mathbf{r})$ donnée. Pour que ce mode soit résonant dans une cavité optique, les interférences multiples correspondant aux réflexions sur les miroirs de cavité doivent être constructives. Le mode doit donc être invariant pour chaque "tour" dans la cavité.

Comme il a déjà été expliqué, une cavité optique linéaire ne permet la résonance que des modes gaussiens dont le profil de phase épouse la forme des miroirs, ce qui définit en général une unique base de modes gaussiens, modes propres de la cavité, comme représenté sur la figure 2.3. C'est principalement à cause de cette sélection transverse que les faisceaux lasers sont habituellement gaussiens. Ainsi, une cavité quelconque possède un waist propre à une position donnée, et d'une taille donnée. Cette condition nous assure que le profil spatial de chaque réflexion sera identique. Il existe des cavités qui acceptent plusieurs familles de modes propres. Ces cavités dégénérées sont étudiées dans la section suivante.

Pour avoir des interférences constructives entre les réflexions multiples à l'intérieur de la cavité, la phase accumulée sur un tour de cavité doit être un multiple de 2π . Pour le mode TEM_{mn} d'une famille de modes de Hermite-Gauss de longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$, cette phase vaut :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi L}{\lambda} + (m + n + 1)\alpha = \frac{2\pi L\nu}{c} + (m + n + 1)\alpha \quad (2.24)$$

où L est la longueur optique totale de la cavité et α est la phase de Gouy accumulée sur un tour de cavité par le mode TEM_{00} . Pour une cavité linéaire dont les miroirs sont aux positions z_1 et z_2 par rapport au waist de la cavité (situé à $z = 0$ par définition) :

$$\alpha = 2 \left(\arctan \left(\frac{z_2}{z_R} \right) - \arctan \left(\frac{z_1}{z_R} \right) \right) \quad (2.25)$$

Le paramètre α est un paramètre uniquement géométrique, et s'exprime aussi à partir de la matrice ABCD correspondant à la propagation d'un rayon lumineux sur un tour de

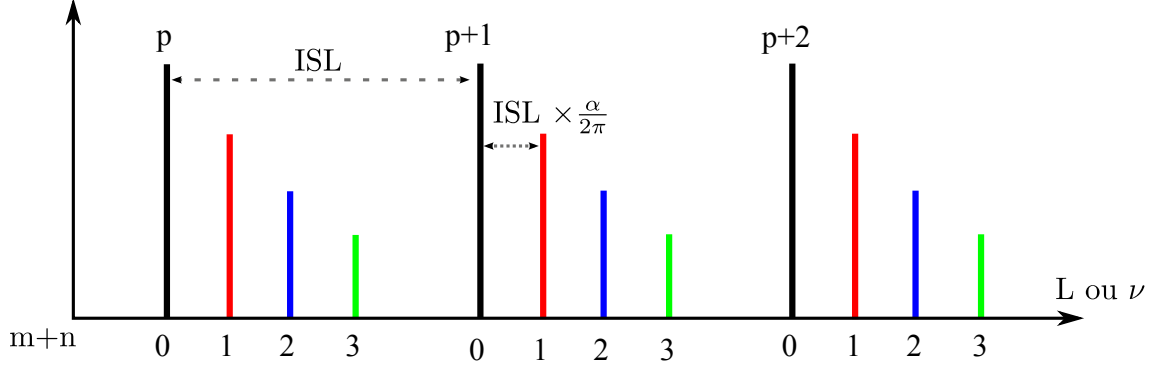


Figure 2.4: Pics de résonance observés lorsqu'on balaye la longueur d'une cavité dans laquelle on a injecté un laser monochromatique dont le profil transverse n'est pas adapté à celui de la cavité. On observe la même figure si l'on balaye la fréquence du laser.

cavité. La condition de résonance s'exprime donc à partir de l'équation 2.24

$$\frac{2\pi L}{\lambda} + (m+n+1)\alpha = \frac{2\pi L\nu}{c} + (m+n+1)\alpha = 2p\pi \quad (2.26)$$

avec p un entier relatif quelconque.

Cette condition fixe donc une relation entre la longueur de la cavité L et la fréquence ν pour avoir résonance dans la cavité. En pratique, si l'on dispose d'un laser de longueur d'onde fixe, on peut faire varier la longueur de la cavité L à l'aide par exemple d'une cale piezo-électrique². On observe alors les résonances successives des modes TEM_{mn} pour des longueurs différentes³ :

$$L = \frac{c}{\nu} \left(p - (m+n+1) \frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad (2.27)$$

On essaie ensuite d'asservir la longueur L pour maintenir la résonance de la cavité pour un mode particulier. La même condition peut-être utilisée quand on fait varier la fréquence du laser pour l'ajuster à la longueur d'une cavité donnée.

Pour une cavité non dégénérée, en injectant un faisceau laser dans une cavité, on le projette sur ses modes propres, qui ne sont pas tous résonants simultanément. D'une manière générale, si l'on fait varier la longueur de la cavité, et que l'on mesure la puissance transmise à travers la cavité, on observe des pics de transmission correspondant à la projection sur les modes propres. Si le faisceau injecté correspond parfaitement à un mode propre de la cavité, il n'y a qu'un seul pic transverse, et l'on ne voit que les pics correspondant à des valeurs de p différentes pour lesquelles on parle de résonances longitudinales. On parle alors d'adaptation de modes entre le mode injecté et un mode propre de la cavité

2. D'après l'équation 2.26, la longueur L de la cavité et la fréquence optique ν ont un rôle équivalent dans la condition de résonance des modes gaussiens dans la cavité. Balayer la longueur de la cavité laser est donc strictement équivalent à balayer la fréquence ν (ce qui peut se faire par exemple en balayant la longueur de la cavité laser).

3. Le paramètre α dépend théoriquement de la longueur de la cavité. Cependant, quand on balaye la longueur de la cavité sur des distances de quelques longueurs d'onde, le paramètre α varie très peu et peut être supposé constant

Cavité	Valeur de $\frac{K}{N}$	Modes résonants
semi-confocale	$\frac{1}{4}$	Un mode transverse sur quatre
confocale	$\frac{1}{2}$	Un mode transverse sur deux
concentrique	1	Tous les modes transverses

Table 2.1: Cavités dégénérées usuelles

(*mode-matching* en anglais). Si le mode injecté ne correspond à aucun mode propre, il y aura en plus des pics correspondant à des modes transverses différents. Dans ce cas, le rapport entre la distance des résonances transverses et la distance des résonances longitudinales vaut $\frac{\alpha}{2\pi}$. La figure 2.4 illustre ces différentes résonances. Grâce à cette figure, on peut interpréter le paramètre $\frac{\alpha}{2\pi}$ comme l'écart entre les résonances des modes transverses normalisées à l'intervalle spectral libre.

A.4.2 Condition de dégénérescence transverse d'un cavité

Une cavité est dite dégénérée quand plusieurs modes transverses d'une même fréquence sont résonants pour une même longueur de cavité. Il existe une dégénérescence naturelle des cavités usuelles à symétrie cylindrique⁴ pour les modes de Hermite-Gauss TEM_{mn} avec la même valeur de $s = m + n$. Par abus de langage, une cavité est dite dégénérée transversalement si elle permet la résonance simultanée de modes de Hermite-Gauss TEM_{mn} avec des valeurs de $s = m + n$ différentes.

D'après l'équation 2.26, cette condition est vérifiée si et seulement si α , la phase de Gouy accumulée sur un tour par le mode TEM_{00} , est une fraction rationnelle de 2π , c'est-à-dire si α s'écrit :

$$\alpha = \frac{K}{N} 2\pi [2\pi] \quad (2.28)$$

avec K et N entiers. Le rapport $\frac{K}{N}$ est appelé l'ordre de dégénérescence de la cavité. Si on prend des valeurs de K et N telles que la fraction $\frac{K}{N}$ soit irréductible, alors les rayons lumineux reviennent sur eux-mêmes après N réflexions. Le tableau 2.1 récapitule les cavités dégénérées usuelles, et les valeurs de K et N correspondantes.

On peut étudier la dégénérescence d'une cavité en calculant la matrice ABCD correspondant à la propagation d'un rayon lumineux sur un tour de cavité. Pour cela, le plus simple consiste à "déplier" la cavité, en remplaçant les miroirs sphériques de rayon de courbure R par des lentilles de focale $\frac{R}{2}$, et sans tenir compte des miroirs plans. La matrice ABCD de la cavité permet de calculer le paramètre α intervenant dans l'équation de résonance des modes gaussiens 2.26 :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{A + D}{2} \right) \quad (2.29)$$

Cette équation traduit également la condition de stabilité de la cavité [Siegman 86] :

4. Ce n'est pas le cas pour des cavités en anneau, ou des cavités linéaires pour lequel le mode résonant n'est pas en incidence normal sur tous les miroirs.

$$A + D \leq 2 \quad (2.30)$$

La matrice ABCD d'une cavité de paramètre de dégénérescence $\frac{K}{N}$ vérifie :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

A.4.3 Plage de dégénérescence d'une cavité

Dans une cavité réelle, on doit tenir compte des pertes optiques dans la cavité, qui élargissent les pics de résonance. Ceci se caractérise par le paramètre $\mathcal{F}$, appelé finesse, qui correspond au nombre moyen d'allers-retours qu'effectue la lumière dans la cavité avant d'en sortir. Pour une cavité dont les pertes par tour en intensité, notées γ , sont faibles ($\gamma \ll 1$), cette finesse vaut :

$$\mathcal{F} \approx \frac{2\pi}{\gamma} \quad (2.32)$$

La finesse élargit les pics de résonances, en leur donnant une forme lorentzienne. Ces pics sont d'autant plus larges que la finesse est faible. Cette finesse rend la condition de résonance moins stricte, car deux pics séparés d'une distance plus faible que la largeur imposée par la finesse sont simultanément résonants. On doit donc tenir compte de la finesse pour déterminer la dégénérescence d'une cavité. Nous allons déterminer la condition sur α pour avoir dégénérescence d'un grand nombre de modes dans la cavité. α dépend des paramètres géométriques de la cavité et on traduit habituellement cette condition en terme de longueur de cavité. On obtient alors une *plage de dégénérescence*. Les calculs détaillés dans la suite de ce paragraphe sont nouveaux, et peuvent s'appliquer à tout type de cavité dégénérée.

La transmission en intensité d'un mode TEM_{mn} , adapté à la cavité, de fréquence ν dans une cavité de finesse $\mathcal{F}$ et de longueur L s'écrit en fonction de la phase φ accumulée sur un tour :

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (2.33)$$

$$\varphi = 2\pi \frac{\nu L}{c} + \alpha(n + m + 1) \quad (2.34)$$

La résonance d'un mode dans une cavité impose donc la condition :

$$\left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \ll 1 \quad (2.35)$$

Dans le cas des pics de transmission de profil lorentzien, on choisit d'utiliser cette condition de façon arbitraire en supposant que l'on considère un mode comme résonant s'il peut être transmis avec une transmission en intensité de plus de 98%. Cela se traduit approximativement :

$$\mathcal{F} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) < \frac{1}{5} \quad (2.36)$$

Pour une cavité dégénérée d'ordre $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{N}$, on a résonance pour tous les modes TEM_{mn} de même fréquence vérifiant $m + n + 1 = q [N]$, pour une même longueur de cavité L qui

vérifie $2\pi \frac{\nu L}{c} + q\alpha = 0 [2\pi]$.

Supposons maintenant ne pas être strictement à la dégénérescence de la cavité, c'est-à-dire $\alpha = \frac{2\pi}{N} + \beta$ avec $\beta \ll 1$. β représente l'écart de la cavité à la dégénérescence. En choisissant une longueur de cavité L , on a pour la famille de modes TEM_{mn} avec $m + n + 1 = q [N]$:

$$\varphi = 2\pi \frac{\nu L}{c} + 2\pi q + (m + n + 1)\beta [2\pi] \quad (2.37)$$

On choisit la longueur de cavité de sorte que le premier mode du sous-ensemble considéré (il vérifie $m + n + 1 = q$) soit résonant. On a alors :

$$\varphi = (m + n + 1 - q)\beta [2\pi] \quad (2.38)$$

$$= rN\beta [2\pi] \quad (2.39)$$

où r est un entier positif ou nul.

Si on est suffisamment proche de la dégénérescence, $rN\beta$ est faible et on peut approximer le sinus

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \frac{rN\beta}{2} \quad (2.40)$$

La résonance impose donc

$$\frac{\mathcal{F}rN\beta}{2} < \frac{1}{5} \quad (2.41)$$

Ce qui donne la valeur maximale de $R_{\max}$ de r :

$$R_{\max} = \frac{2}{5\mathcal{F}N\beta} \quad (2.42)$$

Cette valeur représente le nombre de pics de transmission qui sont confondus avec le pic de transmission du premier mode du sous ensemble $m + n + 1 = q [2\pi]$, à cause de l'élargissement naturel des pics dû à la finesse de la cavité.

Enfin, la dégénérescence naturelle des modes à $m + n$ constant permet d'en déduire le nombre maximal Q de modes résonants en fonction de β .

$$Q = q + (q + N) + (q + 2N) + \dots + (q + R_{\max}N) \quad (2.43)$$

$$Q = \frac{R_{\max} + 1}{2} (2q + R_{\max}N) \quad (2.44)$$

On peut faire les approximations $1 \ll R_{\max}$ et $q \ll R_{\max}N$. Le nombre de modes transverses résonants s'écrit donc :

$$Q \approx \frac{1}{10\mathcal{F}^2N\beta^2} = \frac{1}{10\mathcal{F}^2N(\alpha - \frac{2\pi}{N})^2} \quad (2.45)$$

On peut réécrire cette équation pour déterminer la condition sur β pour avoir Q modes résonants dans la cavité :

$$\beta = \alpha - \frac{2\pi}{N} < \frac{1}{\mathcal{F}\sqrt{10NQ}} \quad (2.46)$$

Enfin, on peut généralement relier β aux propriétés géométriques de la cavité, pour en déduire la précision requise sur l'alignement de la cavité, selon le nombre de modes résonants

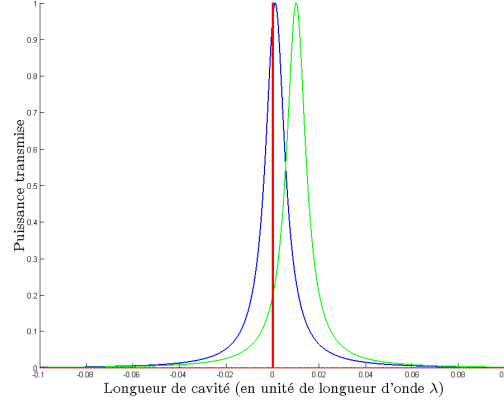


Figure 2.5: Pseudo-résonance de pics de transmission de plusieurs modes dans une cavité de finesse $\mathcal{F} = 100$ et pseudo dégénérée $\beta = 0,001$. Dans ce cas, seuls quelques modes peuvent être considérés comme simultanément résonants.

désirés. La figure 2.5 illustre la dégénérescence de plusieurs modes transverse dans une cavité pseudo-dégénérée. Pour mieux comprendre le phénomène, une barre rouge représente la résonance du premier pic de cette famille pour une longueur de cavité de référence sans tenir compte de la finesse de la cavité. Les pics de transmission du premier et du dixième pics pseudo-résonants sont superposés avec $\mathcal{F} = 100$ et $\beta = 0,001$ et $N = 1$. On voit alors que dans ce cas, le premier pic pseudo-résonant sera bien transmis par la cavité, alors que le dixième pic pseudo-résonant ne peut plus être considéré comme résonant. Seuls quelques modes seront résonants dans cette cavité, ce qui est cohérent avec la valeur calculée $Q \approx 10$.

En pratique, la limitation du nombre de modes transverses résonants dans une cavité peut également être limitée par la dimension des éléments optiques la composant : à cause de la diffraction, la surface des modes gaussiens TEM_{mn} vaut $(m + n + 1)w(z)^2$, et est donc supérieure à la surface des miroirs pour des valeurs élevées de m et n .

A.5 Cavités totalement dégénérées

Pour qu'une cavité soit capable de transmettre n'importe quelle image, elle doit être complètement dégénérée, c'est-à-dire résonante pour tous les modes transverses. Une condition nécessaire et suffisante est donc $\alpha = 0$. Toute base de modes transverses est alors adaptée à la transmission dans une telle cavité. En d'autres termes, sa matrice ABCD doit être égale à l'unité. Cependant, cette condition impose que la cavité soit à la limite de la stabilité puisqu'alors on aura $A + D = 2$

La cavité concentrique, constituée de deux miroirs identiques de rayon de courbure R et séparés d'une distance $2R$, semble donc naturellement adaptée. Cependant, cette cavité ne permet plus un traitement dans l'approximation paraxiale. En effet, lorsque la longueur d'une telle cavité tend vers $2R$, son waist propre tend vers 0, ce qui est incompatible avec l'approximation paraxiale. Dans cette cavité, les modes trop petits auront tendance à diverger.

Pour disposer d'une cavité planaire complètement dégénérée qui puisse être traitée dans l'approximation paraxiale, il est nécessaire d'introduire un troisième élément optique. Arnaud a montré en 1969 [Arnaud 69] qu'il était possible de construire une telle cavité en utilisant plusieurs configurations possibles. Dans cet article, Arnaud décrit également des cavités complètement dégénérées non planaires, utilisant par exemple des coins de cubes. Dans ce cas, une seule lentille peut suffire.

Une partie importante de mon travail de thèse a été d'étudier les propriétés d'une cavité auto-imageante linéaire. La section D de ce chapitre présente une étude théorique et expérimentale détaillée de la transmission d'image dans cette cavité, et de son utilisation pour l'amélioration du doublage de fréquence de modes transverses arbitraires.

B Elements d'optique des impulsions

Cette section a pour objectif d'introduire les notions nécessaires à la description des impulsions lasers dans les domaines temporel et spectral. Nous nous limiterons à la description des lasers à verrouillage de modes, utilisés dans nos expériences d'optique quantique. En effet, ces lasers assurent la cohérence des impulsions successives, cruciale si l'on veut pouvoir les considérer dans un même mode, ce qui n'est pas le cas pour des impulsions créées par des lasers fonctionnant par modulation du facteur de qualité de la cavité (*Q-switch* en anglais). Cette cohérence des impulsions entre elles permet de les décrire concrètement comme une somme de faisceaux monochromatiques, et donc d'appliquer tous les résultats classiques de l'optique en variables continues. Même si elle est constituée d'un très grand nombre de fréquences, il s'agit donc d'une source de lumière monomode, au sens de la définition donnée au chapitre 1.

B.1 Description d'un train impulsions laser femtoseconde

B.1.1 Domaines temporel et spectral

Si l'on néglige les effets transverses, un champ quelconque peut toujours s'écrire comme une somme de champs monochromatiques se propageant dans la direction z :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (2.47)$$

Si l'on ne considère de plus que des ondes planes se propageant dans la même direction (l'axe Oz), on peut faire apparaître le spectre du champ $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ à la position $z = 0$, que l'on décompose en intensité spectrale $\|\tilde{\mathbf{E}}(\omega)\|^2$ et phase spectrale $\varphi(\omega)$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \|\tilde{\mathbf{E}}(\omega)\| e^{i\varphi(\omega)} \quad (2.48)$$

Les équations de propagation du champ se traduisent dans ce cas par la relation de dispersion reliant ω à $\mathbf{k}$. Dans un plan z_0 donné, la forme temporelle de l'impulsion est donnée par la transformée de Fourier de la fonction $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)e^{ik(\omega)z_0}$:

$$\mathbf{E}^{(+)}(z_0, t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z_0)} \quad (2.49)$$

Considérons à présent une impulsion courte, de pulsation centrale ω_0 . Son spectre $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ est centré autour de la pulsation optique ω_0 , et son profil temporel à $\mathbf{r} = \vec{0}$ peut se décomposer comme le produit d'une porteuse à la pulsation ω_0 , et d'une enveloppe $\mathbf{A}(t)$.

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r} = \vec{0}, t) = e^{-i\omega_0 t} \mathbf{A}(t) \quad (2.50)$$

Le spectre $\tilde{\mathbf{A}}(\omega)$ est alors identique à $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ décalé autour de la fréquence nulle :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega) = \tilde{\mathbf{E}}(\omega - \omega_0) \quad (2.51)$$

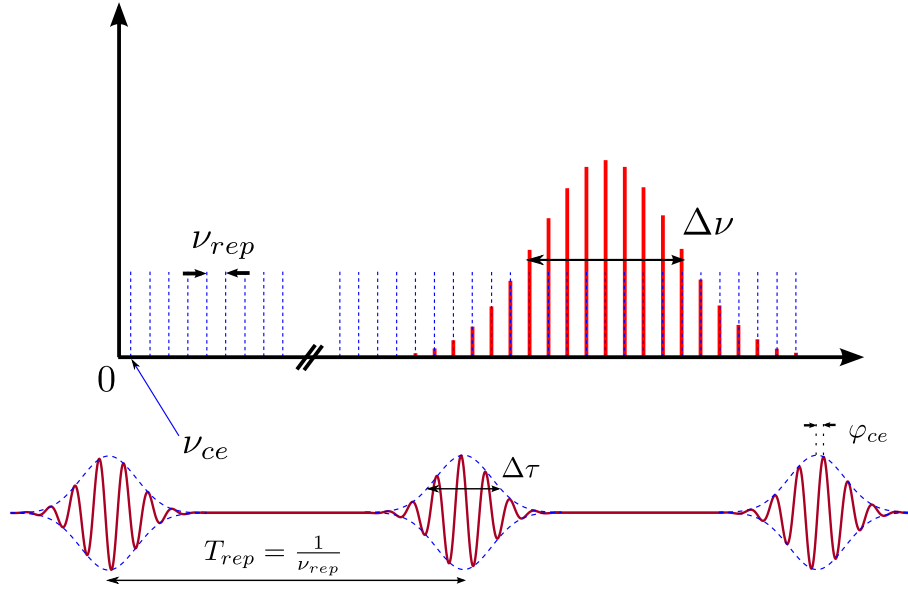


Figure 2.6: Représentation des impulsions ultra-courtes créées par un laser à verrouillage de modes. Dans le domaine spectral, les trains d'impulsions correspondent à un peigne de fréquence.

B.1.2 Laser à verrouillage de modes et impulsions femtosecondes

La condition de résonance d'un champ dans une cavité telle qu'écrite à l'équation (2.26) est toujours valable pour une cavité laser. Si l'on considère que le faisceau émis par un laser correspond uniquement au mode transverse TEM_{00} de sa cavité, le spectre du laser peut être constitué de fréquences séparées par l'intervalle spectral libre de la cavité. Dans le cas d'un laser continu, une seule de ces fréquences est émise. Cependant, si la courbe de gain du milieu amplificateur du laser le permet, on peut avoir émission simultanée de plusieurs fréquences équidistantes. On parle alors de peigne de fréquence. Si de plus les phases des différentes fréquences sont cohérentes, on parle de verrouillage de mode (*mode-locking* en anglais). Dans ce cas, on aura dans le domaine temporel une succession d'impulsions, séparées par l'inverse du taux de répétition, et d'autant plus courtes que le spectre du faisceau est large. La figure 2.6 illustre les représentations usuelles de ce type de laser dans les domaines temporel et spectral.

Représentation spectrale On peut repérer par un indice p les différentes fréquences autour de la fréquence centrale ν_0 :

$$\nu_p = \nu_0 + p \nu_{rep} \quad (2.52)$$

avec ν_{rep} le taux de répétition des impulsions, égal à l'intervalle spectral libre du laser. Si la cavité optique est de longueur totale L :

$$\nu_{rep} = \frac{v_G}{L} \quad (2.53)$$

avec v_G la vitesse de groupe des impulsions à l'intérieur de la cavité. C'est la vitesse de groupe qui intervient ici et non c , car l'intervalle spectral libre est égal à la différence entre deux fréquences successives résonantes dans la cavité, et dépend donc de la dérivée

première de $k(\omega)$. Dans cette description, p prend des valeurs entières centrées autour de 0. On peut également s'affranchir de la fréquence centrale, en introduisant des indices entiers q différents, mais en introduisant la fréquence offset ν_{ce} , inférieure à ν_{rep} :

$$\nu_q = \nu_{ce} + q \nu_{rep} \quad (2.54)$$

Dans ce cas, q prend des valeurs très grandes. ν_{ce} est appelée fréquence porteuse-enveloppe (*carrier-envelope* en anglais), et n'est pas nécessairement nulle. Elle peut être d'origine spatiale à cause du terme de phase de Gouy dans l'équation de résonance des fréquences dans la cavité laser (2.26). Dans ce cas si cette phase de Gouy α est prise dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$\nu_{ce} = \frac{v_G}{L} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \quad (2.55)$$

La fréquence offset peut également due à la dispersion intracavité, si la vitesse de groupe moyenne v_G diffère de la vitesse de phase moyenne v_ϕ dans la cavité. Dans ce cas :

$$\nu_{ce} = \nu_0 \left(1 - \frac{v_G}{v_\phi}\right) \quad (2.56)$$

Représentation temporelle Dans le domaine temporel, un tel peigne de fréquence correspond à un train d'impulsions dont l'enveloppe est de largeur à mi-hauteur $\Delta\tau$, séparées par une durée $T_{rep} = \frac{1}{\nu_{rep}}$, et modulées par une porteuse à la fréquence optique ν_0 comme représenté sur la figure 2.6. La fréquence offset introduit une différence de phase entre la porteuse à la fréquence optique et l'enveloppe, couramment appelée CEP pour *Carrier-Envelope Phase* en anglais, qui augmente de $2\pi \frac{\nu_{ce}}{\nu_{rep}}$ entre chaque impulsion. Si l'on note $\Delta\nu$ la largeur à mi-hauteur du spectre autour de la fréquence centrale, alors les largeurs spectrale et temporelle vérifient une relation :

$$\Delta\tau \Delta\nu \geq K \quad (2.57)$$

où K est une constante qui dépend du profil du spectre [Rulliere 05]. Si l'impulsion est d'enveloppe gaussienne, $K = 0,44$. Une impulsion est dite limitée par transformée de Fourier si son spectre $\tilde{A}(\omega)$ est de phase constante. Dans la plupart des cas, l'impulsion est alors de durée minimale par rapport à son spectre. Pour une impulsion gaussienne limitée par transformée de Fourier, on a une impulsion de durée minimale :

$$\Delta\tau \Delta\nu = 0,44 \quad (2.58)$$

Les notations correspondant aux pulsations optiques associées à ces fréquences sont :

$$\omega_0 = 2\pi \nu_0 \quad (2.59)$$

$$\omega_{ce} = 2\pi \nu_{ce} \quad (2.60)$$

$$\Omega = 2\pi \nu_{rep} \quad (2.61)$$

$$\Delta\omega = 2\pi \Delta\nu \quad (2.62)$$

Le tableau 2.2 récapitule les relations entre les grandeurs spectrales et temporelles.

Un milieu amplificateur couramment utilisé pour produire ce type d'impulsion est le Titane : Saphir, qui dispose d'une très large courbe de gain, et le verrouillage de modes

Domaine spectral		Domaine temporel	
ν_0	Fréquence centrale	ν_0	Fréquence de la porteuse
ν_{rep}	Séparation entre les fréquences	$\frac{1}{\nu_{rep}}$	Durée entre impulsions.
$\Delta\nu$	Largeur du spectre	$\Delta\tau = \frac{0,44}{\Delta\nu}$	Durée des impulsions minimales
ν_{ce}	Fréquence offset	$2\pi \frac{\nu_{ce}}{\nu_{rep}}$	Déphasage supplémentaire entre la porteuse et l'enveloppe

Table 2.2: Tableau récapitulatif des correspondance entre les descriptions spectrale et temporelle du faisceau émis par un laser à verrouillage de modes

est assuré par effet Kerr à l'intérieur même du cristal. Le fonctionnement est le suivant : un dispositif de compensation de la dispersion (prismes ou miroirs à dispersion négative) induite par le cristal est installé dans la cavité laser. Ceci assure que le peigne de fréquence résonant dans la cavité soit bien du type $\nu_p = \nu_0 + p\nu_{rep}$. L'émission de tout type de combinaison de ces fréquences est alors possible, mais le laser émettra naturellement le mode temporel qui a le moins de pertes. Pour forcer l'émission d'un peigne de fréquence limité par transformée de Fourier, on insère ensuite une fente à l'intérieur de la cavité. Si la fente est suffisamment fermée, le faisceau monochromatique est incident sur les bords de la fente ce qui augmente considérablement les pertes intra-cavité. Par contre, à cause de l'effet Kerr, les impulsions suffisamment courtes se propageant dans la cavité sont focalisées au niveau de la fente, il n'y a donc pas de pertes supplémentaires dues à la fente. Le mode impulsionnel à verrouillage de modes a un seuil de fonctionnement plus bas que le fonctionnement continu et est donc favorisé. Cette technique, découverte par Spence et al. [Spence 91] est couramment appelée verrouillage de modes par effet Kerr (*Kerr-lens mode-locking* en anglais) et illustrée sur la figure 2.7, équipe désormais la plupart des lasers à verrouillage de modes. La durée de l'impulsion produite peut être contrôlée en modifiant la dispersion compensée dans la cavité.

L'utilisation de ce type de laser a conduit les métrologistes à réaliser des expériences de mesures de fréquences en utilisant la très grande cohérence entre les fréquences du peigne pour atteindre des précisions relatives extrêmes de l'ordre de 10^{-15} . Une revue détaillée des grands principes de l'utilisation des peignes de fréquences optiques pour la métrologie, utile pour l'optique quantique, peut être trouvée dans [Cundiff 03].

B.2 Propagation d'une impulsion courte

B.2.1 Importance de la phase spectrale

On écrit le champ dans un plan z_0 donné comme la somme de ses composantes spectrales :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_0, t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (2.63)$$

$$= \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)| e^{-i(\omega t - \varphi(\omega))} \quad (2.64)$$

Une impulsion laser produite par un laser à verrouillage de modes a typiquement un profil d'amplitude spectrale $|\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|$ gaussien ou en sécante hyperbolique. La cavité laser

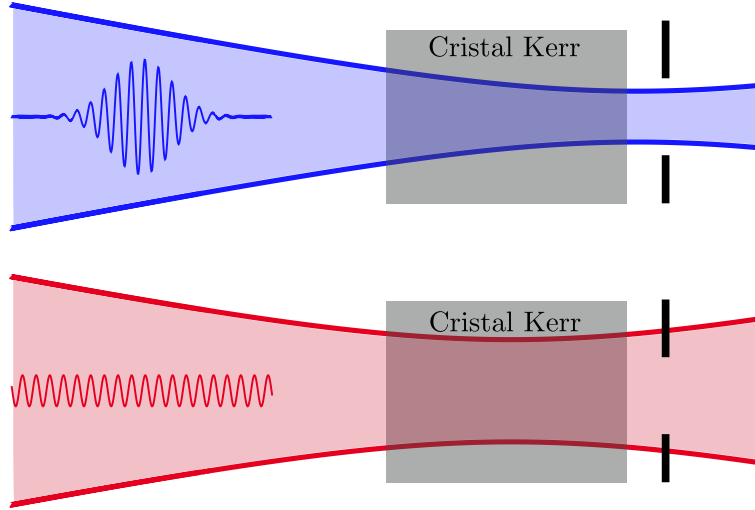


Figure 2.7: Fonctionnement du verrouillage de modes par effet Kerr. Le laser permet le fonctionnement de deux types de faisceaux à l'intérieur de la cavité : le faisceau monochromatique subit des pertes supplémentaires, qui sont ignorées par le faisceau pulsé focalisé grâce à l'effet Kerr.

privilégie naturellement les impulsions dont la durée est la plus courte à la sortie de la cavité, ce qui leur confère une phase spectrale $\varphi(\omega)$ constante, et l'impulsion est donc limitée par transformée de Fourier. Tout système optique, même passif, modifie ce spectre. En général, les éléments optiques que l'on utilise sont transparents, et ne modifient pas significativement le profil d'amplitude spectrale, sauf de manière délibérée si l'on utilise un filtre interférentiel pour réduire le spectre par exemple. Cependant, la phase spectrale est perturbée par la traversée de milieux dispersifs. En effet, si initialement $\varphi(\omega) = 0$, la traversée d'un milieu d'indice dispersif $n(\omega)$ sur une longueur L induit une phase spectrale $\varphi(\omega) = \frac{n(\omega)\omega L}{c}$ dépendant de la fréquence. On peut effectuer un développement de Taylor de cette phase autour de la fréquence centrale ω_0 :

$$\varphi(\omega) = \varphi_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \omega^3}(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.65)$$

$$= \phi_0 + \phi_1(\omega - \omega_0) + \phi_2(\omega - \omega_0)^2 + \phi_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.66)$$

Le tableau 2.3 récapitule l'effet des différents termes sur une impulsion courte.

1. La phase absolue décale la fréquence de la porteuse par rapport au sommet de l'enveloppe de l'impulsion. Si l'impulsion comporte un grand nombre de cycles optiques, cet effet est tout à fait négligeable. Il devient important quand l'impulsion ne comporte que quelques cycles optiques.
2. Le terme linéaire $\phi_1(\omega - \omega_0)$ correspond au fait que l'impulsion est décalée temporellement (par rapport au cas où elle se propagerait dans le vide) d'une durée correspondant à sa vitesse de propagation qui dépend de la vitesse de groupe $v_G = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=\omega_0}$.
3. Le terme quadratique correspond à la dérive de fréquence (*chirp* en anglais, qui se traduit par gazouillis) de l'impulsion. Cette phase spectrale retarde temporellement les différentes fréquences à l'intérieur de l'impulsion. Une dérive de fréquence positive correspond à une impulsion dans laquelle les longueurs d'onde élevées se déplacent

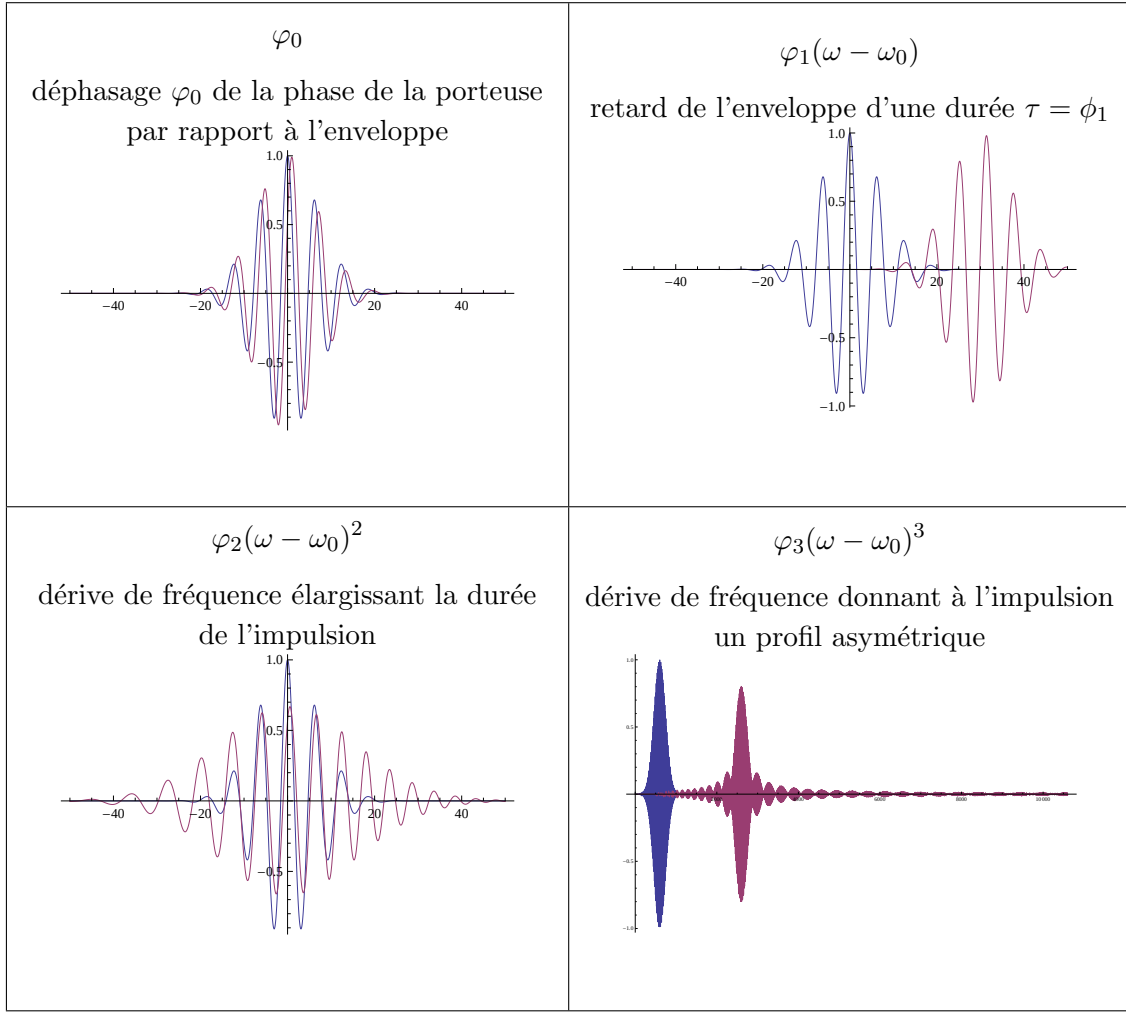


Table 2.3: Tableau récapitulatif de l'effet des différents ordres de la phase spectrale sur une impulsion courte d'enveloppe gaussienne

plus rapidement que les faibles longueurs d'onde. La section suivante est consacrée à l'étude de cet effet sur une impulsion courte.

4. L'effet spectral de troisième ordre $\varphi_3(\omega - \omega_0)^3$ est plus complexe. Il donne à l'impulsion un profil asymétrique. On peut le calculer en utilisant la convolution de l'impulsion avec les fonctions d'Airy. Pour des impulsions comportant au moins une dizaine de cycles optiques, on peut généralement négliger ce terme de même que les termes d'ordre supérieur.

B.2.2 Effets de la dispersion sur une impulsion courte

On développe ici les équations qui caractérisent la propagation d'une impulsion courte dans un milieu dispersif. On peut trouver une étude plus complète dans [Le Blanc 94]. Pour des ondes planes progressives monochromatiques se propageant dans un milieu diélectrique, les équations de propagation se traduisent par une relation de dispersion $\mathbf{k}(\omega)$.

$$\|\mathbf{k}(\omega)\| = n(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (2.67)$$

où $n(\omega)$ est l'indice optique du milieu. Si l'on impose au champ une direction de propagation (l'axe (Oz) par exemple), on peut écrire le champ en utilisant son enveloppe temporelle ou spectrale :

$$\mathbf{E}^{(+)}(z, t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} \quad (2.68)$$

Considérons une impulsion dont le spectre a un support compact de largeur $\Delta\omega$ autour de la pulsation optique ω_0 . Si l'on suppose de plus que la largeur $\Delta\omega$ est faible devant la pulsation optique ω_0 , on peut développer la relation de dispersion $k(\omega)$ autour de ω_0 :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \quad (2.69)$$

$$= k_0 + k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{k''_0}{2}(\omega - \omega_0)^2 \quad (2.70)$$

Le champ correspondant peut s'écrire :

$$\mathbf{E}^{(+)}(z, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \mathbf{A}(z, t) \quad (2.71)$$

On cherche à calculer la forme $\mathbf{A}(z, t)$ de l'impulsion après une propagation quelconque. D'après l'équation (2.70), $\mathbf{A}(z, t)$ s'écrit :

$$\mathbf{A}(z, t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i((\omega - \omega_0)t - k'_0(\omega - \omega_0)z - \frac{1}{2}k''_0(\omega - \omega_0)^2 z)} \quad (2.72)$$

On peut à présent chercher l'expression des dérivées de l'enveloppe $\mathbf{A}(z, t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = i \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) (k'_0(\omega - \omega_0) + \frac{k''_0}{2}(\omega - \omega_0)^2) e^{-i((\omega - \omega_0)t - k'_0(\omega - \omega_0)z - \frac{k''_0}{2}(\omega - \omega_0)^2 z)} \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -i \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) (\omega - \omega_0) e^{-i((\omega - \omega_0)t - k'_0(\omega - \omega_0)z - \frac{k''_0}{2}(\omega - \omega_0)^2 z)} \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = - \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) (\omega - \omega_0)^2 e^{-i((\omega - \omega_0)t - k'_0(\omega - \omega_0)z - \frac{k''_0}{2}(\omega - \omega_0)^2 z)} \quad (2.75)$$

$$(2.76)$$

On peut donc écrire l'équation d'évolution suivante pour l'enveloppe :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = -k'_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - i \frac{k''_0}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (2.77)$$

Si le milieu est tel que $k''_0 = 0$, l'équation précédente n'a qu'un effet de retard sur l'arrivée de l'impulsion. Le paquet d'ondes se déplace en fait à la vitesse de groupe $v_G = \frac{1}{k'_0} = \frac{c}{n(\omega_0)}$.

Si $k''_0 \neq 0$, on peut réécrire l'équation (2.77) en utilisant la variable $\tau = t - k'_0 z$ qui représente le temps relatif à l'arrivée du sommet de l'impulsion :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = -i \frac{k_0''}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \tau^2} \quad (2.78)$$

Cette équation est analogue à l'équation de propagation paraxiale des modes transverses (2.4) en remplaçant la coordonnée transverse $\boldsymbol{\rho}$ par la coordonnée temporelle τ . Elle est valable pour tout type d'impulsion dont le spectre n'est pas trop large. Elle admet notamment pour solutions les modes de Hermite-Gauss. On peut définir, de manière analogue au cas spatial, un mode gaussien de durée minimale $\Delta\tau_0$ à la position $z = 0$. Ce mode est particulièrement intéressant, puisqu'il est proche du profil temporel du faisceau produit typiquement par un laser en impulsion.

$$B(z, \tau) = \frac{C_0}{\Delta\tau(z)} e^{-i \frac{\tau^2}{2k_0'' q_t(z)}} e^{-i\varphi_{Gt}(z)} \quad (2.79)$$

$$= \frac{C_0}{\Delta\tau(z)} e^{-\frac{\tau^2}{\Delta\tau^2(z)}} e^{-i \frac{\tau^2}{2k_0'' R_t(z)}} e^{-i\varphi_{Gt}(z)} \quad (2.80)$$

L'étalement temporel d'une impulsion d'enveloppe gaussienne est donc symétrique et conserve une forme gaussienne. Les paramètres intervenant dans cette expression sont :

$$q_t(z) = z - iz_{Rt} \quad (2.81)$$

$$z_{Rt} = \frac{\Delta\tau_0^2}{2k_0''} \quad (2.82)$$

$$\Delta\tau(z) = \Delta\tau_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_{Rt}^2}} \quad (2.83)$$

$$R_t(z) = z + \frac{z_{Rt}^2}{z} \quad (2.84)$$

$$\varphi_{Gt}(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_{Rt}}\right) \quad (2.85)$$

La longueur z_{Rt} est une "longueur de Rayleigh temporelle", caractérisant la longueur sur laquelle l'impulsion s'étaie temporellement. L'impulsion est de durée minimale comme définie par l'équation (2.58) sur une longueur environ égale à z_{Rt} de part et d'autre du point $z = 0$. La durée $\Delta\tau(z)$ correspond à la durée de l'impulsion après une propagation sur une distance z , représentée sur la figure 2.8. Une impulsion a une longueur typique d'étalement z_{Rt} qui varie quadratiquement avec sa durée initiale. Pour une propagation suffisamment longue dans un milieu dispersif, deux impulsions de durées initiales $\Delta\tau_0^1$ et $\Delta\tau_0^2$, avec $\Delta\tau_0^1 < \Delta\tau_0^2$ se transformeront en des impulsions de durée $\Delta\tau^1$ et $\Delta\tau^2$, avec $\Delta\tau^1 > \Delta\tau^2$, comme représenté sur la figure 2.8.

La longueur $R_t(z)$ est l'analogue du rayon de courbure et représente ici la dérive de fréquence. La phase de Gouy temporelle $\varphi_{Gt}(z)$ est égale à la différence de phase entre l'enveloppe et la porteuse (CEP), qui croît avec la propagation dans un milieu dispersif. Enfin le paramètre complexe $q_t(z)$ pourrait être utilisé pour calculer la transformation d'une impulsion à travers un système complexe de filtres temporels ou spectraux.

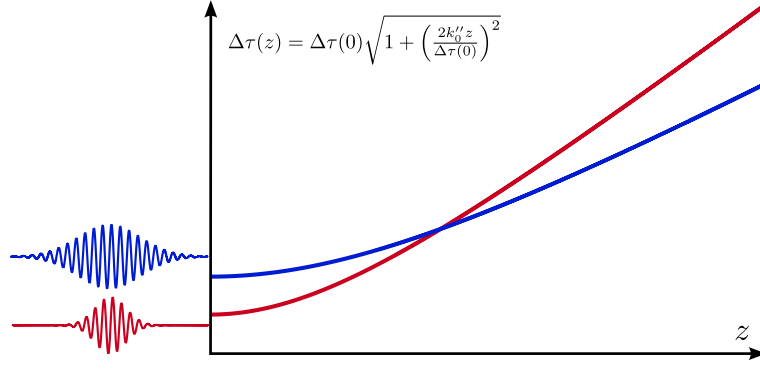


Figure 2.8: Étalement temporel d'une impulsion courte au cours de sa propagation dans un milieu dispersif. Une impulsion initialement courte pourra devenir plus longue qu'une autre.

Comme pour les modes transverses, on pourrait de même écrire les modes de Hermite-Gauss temporels aux ordres plus élevés. Cela présente peu d'intérêt pour l'optique usuelle, mais ces modes sont utiles pour décrire le comportement d'un oscillateur paramétrique optique pompé en modes synchrones, comme nous le verrons au chapitre 6. Notons enfin que ce développement n'exige pas nécessairement des impulsions périodiques, c'est-à-dire des impulsions dont le spectre est un peigne de fréquences.

B.3 Cavités synchrones

Dans le domaine de l'optique quantique en variables continues, les cavités optiques sont largement utilisées comme élément de filtrage, pour filtrer le bruit d'un faisceau laser par exemple, ou pour lui imposer un mode transverse bien défini. Les cavités optiques servent également pour construire des oscillateurs paramétriques optiques, dont l'étude est détaillée dans le chapitre suivant. Dans le cadre de notre expérience d'optique quantique en régime femtoseconde, nous nous sommes donc particulièrement intéressés à la résonance d'impulsions femtosecondes à verrouillage de modes dans une cavité optique. Le terme de cavité synchrone implique que la longueur de la cavité est égale à la distance entre impulsions (donc à la longueur de la cavité laser).

Pour étudier les cavités synchrones, l'analogie avec les cavités dégénérées pour les modes transverses a été cruciale, et nous a permis de dresser des conditions pour la résonance d'un peigne dans une cavité en fonction des caractéristiques du peigne et de la cavité.

B.3.1 Approche Qualitative

Si l'on veut injecter une impulsion courte provenant d'un laser à verrouillage de modes dans une cavité optique, la condition de résonance s'interprète différemment que pour l'injection d'un faisceau continu. Plusieurs paramètres rendront difficile la résonance d'un peigne de fréquence dans une cavité externe. Ces considérations sont également étudiées dans le cadre de la métrologie et de la spectroscopie dans le groupe de Jun Ye à Boulder, Colorado [Thorpe 08]. Dans les deux cas, on agit sur les paramètres du peigne pour les faire correspondre à une référence extérieure. Ici, nous utilisons une approche différente : on essaye de construire une cavité dans laquelle on veut faire résonner un peigne produit par une source laser supposée stable. Nos paramètres d'action sont donc les paramètres

de la cavité.

Sélection transverse Comme pour une cavité pompée par un laser continu, il est nécessaire d'adapter le mode spatial du laser injecté à celui de la cavité.

Longueur de la cavité Pour avoir résonance simultanée de toutes les fréquences du peigne injecté, la longueur de la cavité doit être égale à celle de la cavité laser dont est issu le peigne de fréquence, c'est-à-dire que les intervalles spectraux libres (ISL) des deux cavités doivent être identiques. Cette condition traduit le fait que toute impulsion injectée doit se superposer exactement à l'impulsion résonante dans la cavité. Il est possible d'étudier l'injection dans une cavité dont la longueur est une fraction rationnelle de la longueur entre impulsions. Le traitement est similaire. On peut par exemple utiliser cette technique pour augmenter le taux de répétition des impulsions si l'on utilise une cavité plus courte.

Offset de fréquence L'offset de fréquence du peigne injecté doit aussi correspondre à la cavité. Cet effet subtil est détaillé dans le paragraphe suivant.

Dispersion La dispersion dans la cavité est un critère crucial pour la résonance d'un peigne dans une cavité. En effet, la présence de dispersion va rendre irrégulière la séparation des fréquences résonantes dans la cavité. En d'autres termes, l'ISL ω_{rep} dépend de la fréquence.

$$\omega_{rep} = \frac{2\pi c}{L + c \frac{\partial \phi}{\partial \omega}(\omega)} \quad (2.86)$$

Cette dispersion peut être mesurée en utilisant les résonances individuelles des fréquences [Thorpe 08] ou la résonance complète d'un peigne de fréquence [Schliesser 06]. Elle a une importance d'autant plus grande que la finesse de la cavité est grande.

B.3.2 Approche Quantitative

Pour décrire plus quantitativement l'influence de ces différents paramètres, on présente ici des critères nouveaux pour s'assurer de la résonance d'un peigne de fréquence dans une cavité. On peut écrire la fonction de transfert en intensité $T(\omega)$ et en phase $\Phi(\omega)$ d'une cavité Fabry-Pérot en fonction de la pulsation ω . Dans le cas d'une cavité linéaire symétrique de coefficient de réflexion en intensité R sur chaque miroir, ces fonctions s'écrivent en fonction de la phase $\varphi(\omega)$ accumulée sur un tour de cavité et de la finesse $\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$.

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\varphi(\omega)}{2}\right)} \quad (2.87)$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\varphi(\omega)}{2}\right)} \quad (2.88)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{2} - \arctan \frac{R \sin(\varphi(\omega))}{1 - R \cos(\varphi(\omega))} \quad (2.89)$$

Le paramètre $\varphi(\omega)$ peut s'écrire autour de la pulsation centrale ω_0 :

$$\varphi(\omega) = \frac{L}{c}\omega + \alpha + \phi_0 + \phi_1(\omega - \omega_0) + \phi_2(\omega - \omega_0)^2 + \phi_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.90)$$

L correspond à la longueur totale optique de la cavité. On a ajouté ici au terme classique $\frac{L}{c}\omega$ le terme de phase de Gouy α et les termes supplémentaires en $(\omega - \omega_0)^n$, qui correspondent à la phase supplémentaire acquise par chaque fréquence sur les éléments dispersifs

d'une cavité, les traitements diélectriques des miroirs par exemple. On peut réécrire cette équation en introduisant les variables α' et L' :

$$\varphi(\omega) = \underbrace{\alpha + \phi_0 - \phi_1\omega_0}_{\alpha'} + \frac{\omega}{c} \underbrace{(L + \phi_1 c)}_{L'} + \phi_2(\omega - \omega_0)^2 + \phi_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.91)$$

Pour des raisons de simplicité, on peut toujours choisir $\alpha' \in [0, 2\pi]$. On notera comme précédemment les fréquences ω_n du peigne injecté dans la cavité en fonction de la fréquence centrale ω_0 , la fréquence offset ω_{ce} et le taux de répétition $\Omega = 2\pi \frac{c}{L_0}$ avec L_0 la distance entre impulsions. :

$$\omega = \omega_0 + p\Omega \quad (2.92)$$

$$= \omega_{ce} + q\Omega \quad (2.93)$$

Pour assurer la résonance parfaite du peigne injecté, il faut assurer la condition de résonance de chaque fréquence. Pour un peigne de fréquence de largeur spectrale $\Delta\omega$, cette condition se résume en :

$$\left(\mathcal{F} \sin \frac{\varphi(\omega_0 + \Delta\omega)}{2} \right)^2 \ll 1 \quad (2.94)$$

pour tout le spectre injecté. Pour des raisons de symétrie, dans la suite des calculs, on suppose toujours satisfaite la condition de résonance de la fréquence centrale ω_0 . De plus, on se restreint au développement à l'ordre 2 de la phase spectrale. Dans la suite, on calcule l'influence de chacun de ces termes indépendamment pour exprimer une condition pour assurer la résonance totale d'un peigne dans la cavité. Pour avoir une transmission supérieure à 98 %, on peut utiliser la condition simplifiée

$$\left(\mathcal{F} \sin \frac{\varphi(\omega_0 + \Delta\omega)}{2} \right)^2 < 0,2 \quad (2.95)$$

Effet d'offset Si on néglige la dispersion, alors la phase accumulée sur un tour vaut pour les fréquences du peigne :

$$\varphi(\omega_p = \omega_0 + p\Omega) = \alpha' + \omega_0 \frac{L'}{c} + 2\pi p \frac{L'}{L_0} \quad (2.96)$$

$$(2.97)$$

On choisit L' de sorte que la fréquence centrale ω_0 soit résonante, c'est-à-dire $\alpha' + \omega_0 \frac{L'}{c} = 0[2\pi]$.

$$\exists q_1 \in \mathbb{N}, L' = \frac{2\pi c}{\omega_0} \left(q_1 - \frac{\alpha'}{2\pi} \right) \quad (2.98)$$

$$= \lambda_0 \left(q_1 - \frac{\alpha'}{2\pi} \right) \quad (2.99)$$

Il reste donc :

$$\varphi(\omega_p) = 2\pi p \frac{L'}{L_0} [2\pi] \quad (2.100)$$

On peut développer la longueur L_0 entre les impulsions à l'aide de la fréquence centrale ω_0 :

$$\omega_0 = \omega_{ce} + q_0 2\pi \frac{c}{L_0} \quad (2.101)$$

$$L_0 = \frac{2\pi q_0 c}{\omega_0 - \omega_{ce}} \quad (2.102)$$

$$\approx \lambda_0 \left(q_0 + \frac{q_0 \omega_{ce}}{\omega_0} \right) \quad (2.103)$$

Si l'on choisit la longueur L' proche de L_0 telle que $|L' - L_0| < \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$, alors on a nécessairement $q_1 = q_0$. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\varphi(\omega_p) = 2\pi p \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega_0} \right) \left(1 - \frac{\alpha'}{2\pi q_0} \right) [2\pi] \quad (2.104)$$

$$\approx -2\pi p \left(\frac{\alpha'}{2\pi q_0} + \frac{\omega_{ce}}{\omega_0} \right) [2\pi] \quad (2.105)$$

on peut négliger le terme produit $\frac{\alpha'}{2\pi q_0} \frac{\omega_{ce}}{\omega_0}$, négligeable devant les autres termes inférieurs à l'unité. En réécrivant l'expression ci-dessus, on trouve :

$$\varphi(\omega_p) = -\frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_0} \left(\frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega} \right) [2\pi] \quad (2.106)$$

Dans cette expression, le préfacteur est petit devant l'unité, et les termes entre parenthèses sont inférieurs à un. On peut donc approximer :

$$\sin \frac{\varphi(\omega_p)}{2} \approx -\frac{\omega_p - \omega_0}{2\omega_0} \left(\frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega} \right) \quad (2.107)$$

et donc :

$$\sin \frac{\varphi(\omega_0 + \Delta\omega)}{2} \approx -\frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \left(\frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega} \right) \quad (2.108)$$

Ainsi, un spectre de largeur $\Delta\omega$ pourra être transmis parfaitement par une cavité de finesse $\mathcal{F}$ si la relation suivante est satisfaite :

$$\left(\mathcal{F} \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} \left(\frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega} \right) \right)^2 \ll 1 \quad (2.109)$$

On remarque notamment que pour que cette équation soit satisfaite, il suffit de faire correspondre le paramètre $\frac{\alpha'}{2\pi}$ avec $-\frac{\omega_{ce}}{\Omega}$ avec une précision qui dépend de la largeur du spectre considéré. Expérimentalement, on peut donc simplement asservir l'offset ω_{ce} de la cavité laser, pour assurer cette condition, ce qui est moins contraignant expérimentalement que d'ajuster α' . Cet asservissement est essentiel dans l'utilisation des peignes de fréquence pour la métrologie des fréquences, et des techniques d'asservissement existent déjà [Jones 00]. Dans la suite, on appelle désaccord le paramètre $\eta = \frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega}$.

Longueur de cavité Si on néglige la dispersion, et que l'on suppose complètement compensé le désaccord $\eta = \frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ee}}{\Omega}$, alors la résonance est parfaitement assurée lorsque la longueur L de la cavité injectée est exactement égale à la longueur L_0 entre les impulsions. Est-il possible d'avoir des résonances pour des longueurs différentes ? Comme évoqué plus haut, si L est un multiple exact de L_0 alors on a toujours résonance. Si L est proche de L_0 , on doit avoir $L = L_0 + n\lambda_0$ pour avoir résonance du pic central. Calculons dans ce cas, la phase accumulée sur un tour de cavité par les différentes fréquences ω_p du peigne injecté.

$$\varphi(\omega_p) = \omega_p \frac{L}{c} \quad (2.110)$$

$$= \omega_p \frac{L_0}{c} + n \frac{\lambda_0}{c} \omega_p \quad (2.111)$$

Or $\omega_p \frac{L_0}{c} = 0 [2\pi]$ et $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$. D'où :

$$= 2\pi n \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_0} [2\pi] \quad (2.112)$$

L'entier n est de l'ordre de l'unité et $\omega_p - \omega_0 \ll \omega_0$, la phase $\varphi(\omega_p)$ est petite devant un et on peut approximer :

$$\sin \frac{\varphi(\omega_p)}{2} \approx \pi n \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_0} \quad (2.113)$$

Un peigne de fréquence de largeur $\Delta\omega$ sera donc transmis dans une cavité de finesse $\mathcal{F}$ si n vérifie la relation suivante :

$$\left(n \mathcal{F} \frac{\Delta\omega}{4\omega_0} \right)^2 \ll 1 \quad (2.114)$$

Ce qui nous donne le nombre total N de pics de transmission que l'on peut observer dans une telle cavité :

$$N = \frac{8\omega_0}{\Delta\omega \mathcal{F}} \quad (2.115)$$

Cette équation nous donne un ordre de grandeur du nombre de pics de résonance que l'on pourra observer, si l'on balaye la longueur de la cavité autour de $L = L_0$. Dans un cas expérimental typique, si $\mathcal{F} \approx 50$ et $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 100$ on aura environ 3 longueurs de cavité permettant la transmission totale du spectre sans déformation.

Effet de la dispersion Si l'on prend en compte la dispersion et que l'on suppose le désaccord η nul, la phase accumulée sur un tour de cavité s'écrit :

$$\varphi(\omega) = \omega \frac{L}{c} + \phi_2(\omega - \omega_0)^2 + \phi_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.116)$$

Si la longueur de la cavité L est égale exactement à la distance entre impulsions L_0 , alors la fréquence centrale ω_0 est résonante. La phase accumulée par les fréquences ω_p du peigne s'écrit alors :

$$\varphi(\omega_p) = \omega_0 \frac{L}{c} + p \Omega \frac{L}{c} + \phi_2(\omega_p - \omega_0)^2 + \phi_3(\omega_p - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.117)$$

$$= \phi_2(\omega_p - \omega_0)^2 + \phi_3(\omega_p - \omega_0)^3 + \dots [2\pi] \quad (2.118)$$

Si la dispersion est faible, on peut supposer cette phase petite devant un, et donc approximer :

$$\sin \varphi(\omega_p) \approx \phi_2(\omega_p - \omega_0)^2 + \phi_3(\omega_p - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.119)$$

On peut donc exprimer la condition pour que la résonance d'un peigne soit possible dans une cavité faiblement dispersive :

$$\boxed{\mathcal{F}^2 \left(\phi_2 \frac{\Delta\omega^2}{4} + \phi_3 \frac{\Delta\omega^3}{8} + \dots \right)^2 \ll 1} \quad (2.120)$$

Pour une cavité de finesse $\mathcal{F} = 100$, un spectre de 10 nm de large peut être transmis si la dispersion est inférieure à 50 fs², ce qui n'est pas négligeable si les éléments optiques utilisés dans la cavité ne sont pas adaptés au fonctionnement impulsif. La compensation de la dispersion doit donc être envisagée dès lors que l'on souhaite construire une cavité de finesse supérieure à 100 et injectée avec des impulsions de largeur spectrale supérieure à quelques nm.

B.3.3 Simulations numériques

Nous avons calculé la forme exacte du peigne de fréquence transmis par une cavité synchrone en tenant compte des différents paramètres évoqués au paragraphe précédent, afin de mieux comprendre la transmission du peigne, et de savoir comment interpréter les conditions 2.109, 2.114 et 2.120. Pour cela, nous avons supposé un peigne de fréquence d'enveloppe gaussien correspondant aux paramètres expérimentaux de notre source laser MIRA :

$$\nu_0 = 377 \text{ THz} \quad (2.121)$$

$$\nu_{rep} = 76 \text{ MHz} \quad (2.122)$$

$$\Delta\nu = 3.6 \text{ THz} \quad (2.123)$$

Pour alléger les simulations numériques, on peut choisir un taux de répétition inférieure à sa valeur réelle, de sorte que le peigne incident contienne moins de fréquences. Dans le cas de nos valeurs expérimentales, le nombre de fréquences réelles est d'environ 10⁶, mais les simulations numériques sont typiquement inchangées si l'on ne considère qu'une fréquence sur 10.

Désaccord η Pour étudier l'influence d'une valeur non-nulle du désaccord η sur le spectre, on peut calculer numériquement le peigne transmis dans une cavité synchrone dont le paramètre de désaccord diffère de 0. Les résultats sont présentés sur la figure 2.9 pour deux valeurs de η et deux valeurs de la finesse $\mathcal{F}$.

Longueur de cavité On peut également calculer la puissance transmise par la cavité quand la longueur de la cavité n'est pas exactement égale à la distance entre impulsions, c'est-à-dire quand $L = L_0 + \delta L$. Les résultats des simulations numériques sont présentés sur la courbe 2.10. On a tracé la puissance totale transmise par la cavité quand on balaye L autour de L_0 , pour deux valeurs de la finesse, et pour deux valeurs du désaccord η . On retrouve bien le comportement calculé au paragraphe précédent. Ces courbes correspondent

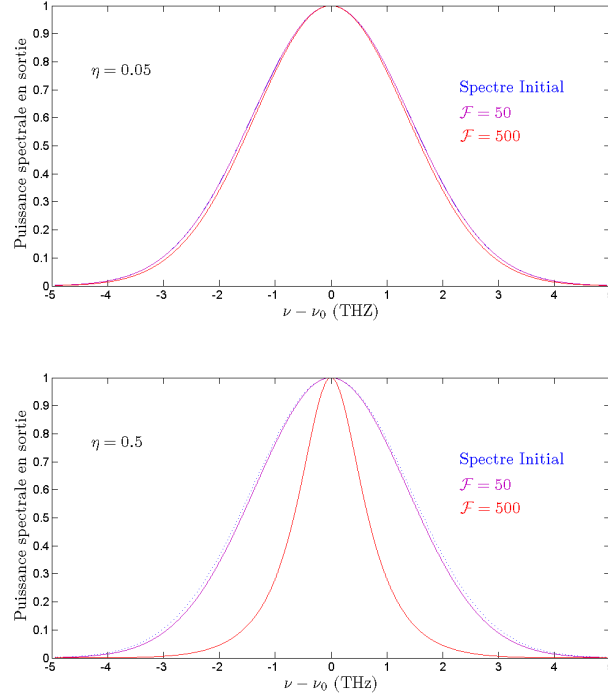


Figure 2.9: Transmission d'un peigne de fréquence dans une cavité pour laquelle le désaccord η est différent de 0. On remarque que pour les cavités de basse finesse, le peigne garde un spectre peu modifié. Ce paramètre devient critique pour la transmission du peigne dès lors que η et la finesse $\mathcal{F}$ deviennent grands

de plus à des données typiquement observées expérimentalement quand la longueur de cavité est balayée par une cale piezo-électrique et que l'on observe la puissance transmise par la cavité mesurée avec une photodiode.

On peut également calculer le spectre du laser transmis par la cavité lorsque sa longueur est égale à la distance entre impulsions plus un certain nombre de fois la longueur d'onde centrale : $L = L_0 + n\lambda_0$. La figure 2.11 présente la puissance spectrale transmise par la cavité pour deux valeurs de l'entier n , et pour deux valeurs de la finesse de la cavité. On constate que ce spectre est extrêmement sensible aux conditions de résonance. Pour la cavité de haute finesse, aucune autre longueur de cavité n'est possible, mise à part la longueur $L = L_0$. Pour la cavité de basse finesse, seule la valeur $n = 1$ rend possible la transmission du peigne dans la cavité.

Dispersion On peut enfin calculer l'effet de la dispersion intra-cavité sur la puissance totale transmise par la cavité. La figure 2.12 représente la fraction de puissance transmise par la cavité en fonction de la dispersion intra-cavité ϕ_2 telle que définie au paragraphe précédent. La dispersion admissible est d'environ 10 fs^2 pour une cavité de finesse $\mathcal{F} = 500$ et d'environ 100 fs^2 pour une cavité de finesse $\mathcal{F} = 50$, ce qui à nouveau correspond bien au calcul du paragraphe précédent. Au-delà de ces valeurs, un dispositif de compensation de la dispersion doit être envisagé.

Quand le désaccord η est non nul, la dispersion peut avoir un effet étonnant sur le spectre. Par un effet de moiré, une partie du spectre autre que la partie centrale peut

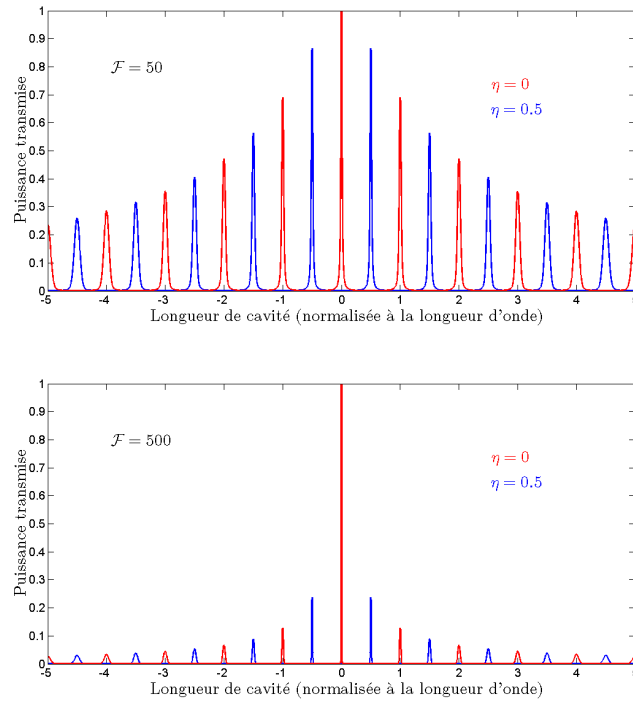


Figure 2.10: Puissance transmise par la cavité quand on balaye la longueur L autour de la distance entre impulsions L_0 , pour deux valeurs de finesse. Plus la finesse de la cavité est grande, moins nombreux sont les pics de transmissions.

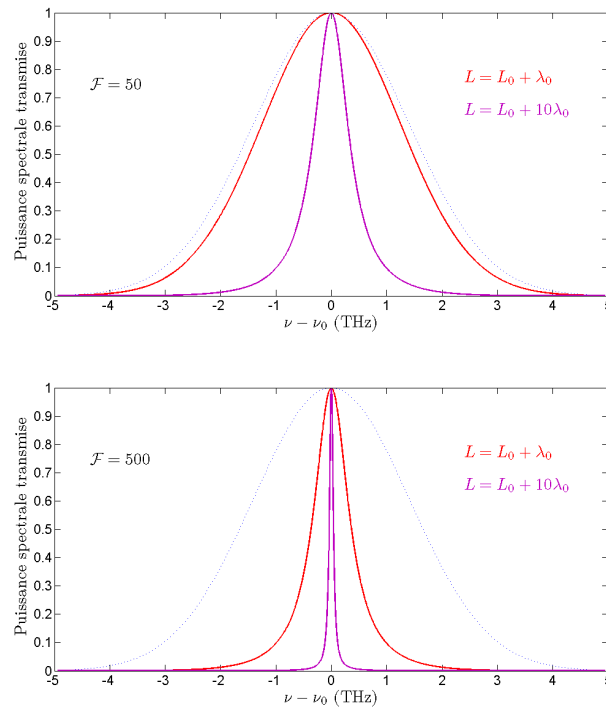


Figure 2.11: Spectre de la puissance transmise par une cavité dont la longueur n'est pas exactement égale à la distance entre impulsions, pour différentes valeurs de finesse.

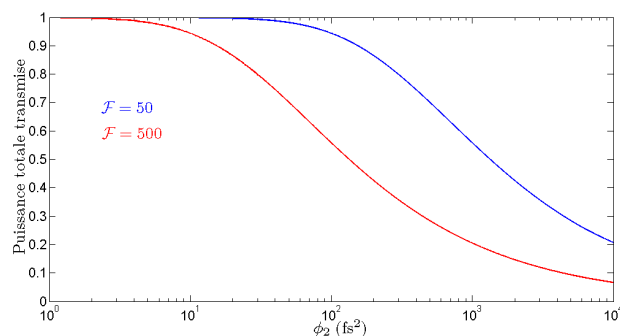


Figure 2.12: Effet de la dispersion intra-cavité sur la transmission totale du peigne dans la cavité, pour deux valeurs de la finesse. On peut en déduire la valeur maximale admissible de la dispersion intra-cavité.

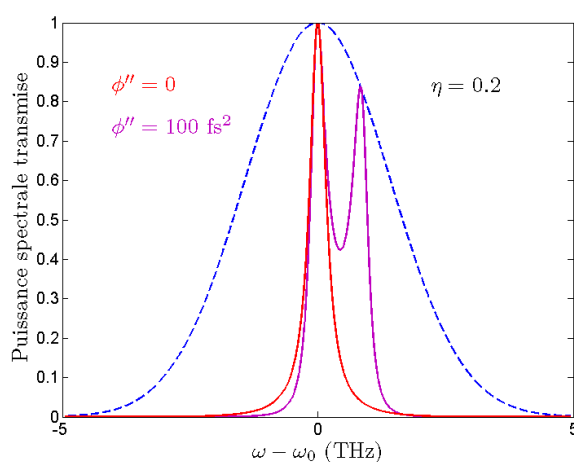


Figure 2.13: Effet conjugué de la dispersion et du désaccord dans la cavité. La courbe rouge représente le spectre transmis dans une cavité de finesse $\mathcal{F} = 1000$ et avec un désaccord $\eta = 0,2$ non dispersive, et la courbe violette en présence d'une dispersion $\phi'' = 100 \text{ fs}^2$. On constate que l'on peut avoir transmission d'une deuxième partie du spectre initial.

être transmise par la cavité. Cet effet est représenté sur la figure 2.13 pour une cavité de finesse $\mathcal{F} = 1000$, un désaccord $\eta = 0,2$ et deux valeurs de dispersion. On constate que sans dispersion seule la partie centrale du spectre est transmise, alors qu'en présence de dispersion dans la cavité, une partie supplémentaire du spectre est transmise. En fonction du signe de η par rapport au signe de la dispersion, cette partie du spectre se situe d'un côté ou de l'autre de la fréquence centrale. La fréquence centrale de cette deuxième bande spectrale dépend de la dispersion dans la cavité.

C Analogie entre les deux domaines

L'optique transverse et l'optique pulsée traitent séparément deux degrés de liberté de la lumière. En optique transverse, on considère habituellement fixe la fréquence ω_0 , et on ne s'intéresse qu'aux propriétés transverses d'un faisceau, que l'on décrit par exemple localement en écrivant $\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho})$ en fonction du paramètre $\boldsymbol{\rho}$ continu, ou alors de façon modale grâce à une base de modes discrète du plan transverse, par exemple la base des modes de Hermite-Gauss. En ce qui concerne l'optique pulsée, c'est cette fois le profil temporel d'un faisceau qui devient important, et l'on met généralement de côté son profil transverse, en le supposant gaussien par exemple, pour n'étudier que les propriétés spectrales de $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ ou le profil de son enveloppe temporelle $\mathbf{B}(z, t)$.

Ce travail de thèse a été articulé autour de deux expériences dans ces deux domaines, et il m'a toujours été très profitable de comparer le comportement de ces deux degrés de liberté de la lumière. Cette section a pour objectif de dresser un parallèle entre les deux descriptions, en montrant que le comportement spatial et temporel de la lumière obéissent aux mêmes équations physiques si l'on adopte une description similaire, et que l'on peut donc transposer des savoirs ou des techniques d'un domaine à l'autre. De tels rapprochement ont déjà été étudiés en optique classiques [Broers 92, Kolner 94] avec des applications notamment dans l'imagerie temporelle d'impulsions courtes.

C.1 Equation de propagation des modes

Dans chacun des domaines spatial ou temporel, on peut distinguer la variable réelle de sa variable conjuguée par transformée de Fourier. La position transverse $\boldsymbol{\rho}$ se transforme en impulsion transverse $\mathbf{q}$ par transformée de Fourier, et le temps t se transforme en pulsation ω . Dans les deux cas, c'est la variable conjuguée qui se conserve dans la propagation selon un axe z .

L'équation de propagation d'un faisceau de vecteur d'onde k_0 selon l'axe z , dans l'approximation paraxiale a été développée à la section A.1, et s'écrit :

$$\Delta_{\perp} A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (2.124)$$

L'équation de propagation selon l'axe z d'une impulsion courte dont le spectre est centré autour de la fréquence centrale ω_0 dans un milieu dispersif caractérisé par une vitesse de groupe $v_G = \frac{1}{k'_0} = \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$ et une dispersion $k''_0 = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}$, a été développée à la section B.2.2, et s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \tau^2} - \frac{2i}{k'_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = 0 \quad (2.125)$$

où $\tau = t - k'_0 z$ est la variable temporelle décalée par rapport au sommet de l'enveloppe de l'impulsion. Ces deux équations sont analogues à l'équation de Schrödinger d'une particule libre de masse m décrite par une fonction d'onde $|\psi\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = 0 \quad (2.126)$$

Si l'on considère un paquet d'ondes d'extension finie, c'est-à-dire un faisceau de diamètre fini, ou une impulsion de courte durée, les équations de propagation conduisent à un étalement du paquet d'ondes pour les variables réelles ρ et t . Cet étalement a lieu après une propagation sur une distance typique qui dépend de la dimension initiale du paquet d'ondes.

$$w(z) = \sqrt{w_0^2 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^2}} \quad \text{dans le cas d'un faisceau gaussien de waist } w_0 \quad (2.127)$$

$$\Delta\tau(z) = \sqrt{\Delta\tau_0^2 + \frac{4k_0''^2 z^2}{\Delta\tau_0^2}} \quad \text{dans le cas d'une impulsion de durée initiale } \Delta\tau_0 \quad (2.128)$$

La transformée de Fourier des équations de propagation nous donne les lois d'évolution des composantes du champ en $\mathbf{q}$ et ω en fonction de z . On peut les écrire :

$$-|\mathbf{q}|^2 \tilde{\mathbf{A}} + 2ik \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial z} = 0 \quad (2.129)$$

$$-\omega^2 \tilde{\mathbf{B}}(\omega) - \omega \frac{2k_0'}{k_0''} \tilde{\mathbf{B}}(\omega) - \frac{2i}{k_0''} \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial z} = 0 \quad (2.130)$$

Ces équations nous donnent l'évolution des composantes $\tilde{\mathbf{B}}(\omega)$ et $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})$ au cours de la propagation.

C.2 Résonance en cavité

La résonance d'un mode dans une cavité optique fait uniquement intervenir la phase accumulée par ce mode sur un tour de cavité. Dans les sections précédentes, on a tenu compte individuellement des aspects spatiaux puis des aspects temporels. Si l'on écrit la phase accumulée par le mode de fréquence $\omega_q = \omega_{ce} + q\Omega$ et de profil spatial TEM_{mn} sur un tour de cavité, on trouve :

$$\varphi(\omega_q) = \phi(\omega_{ce}) + \phi_1(q\Omega) + \phi_2(q\Omega)^2 + \dots + \alpha(m+n+1) \quad (2.131)$$

Cette équation met en évidence deux termes constants, $\phi(\omega_{ce})$ et α , un terme transverse $\alpha(m+n)$, un terme proportionnel à $\phi_1\Omega = \frac{L}{c}\Omega$, et des termes de dispersion d'ordre plus élevés. Une cavité quelconque est donc naturellement dégénérée pour les modes transverses de même degré $m+n$ d'une même fréquence d'une part, et pour des modes de fréquences séparées strictement par l'intervalle spectrale libre d'autre part.

La condition de résonance d'un peigne de fréquence donné dans une cavité apparaît similaire à celui de la transmission d'une image dans une cavité. Pour qu'une cavité soit spatialement complètement dégénérée et permette la transmission d'une image, il faut que $\alpha = 0 [2\pi]$. Pour qu'un peigne soit transmis dans une cavité sans dispersion, il faut satisfaire $\phi(\omega_{ce}) + \alpha = 0$ et $\frac{L}{c}\Omega = 0 [2\pi]$. On peut donc comparer les quantités α et $\frac{L}{c}\Omega$.

Une cavité partiellement dégénérée spatialement est telle que $\alpha = 2\pi \frac{K}{N} [2\pi]$. Elle ne permet la résonance que d'une fraction $\frac{1}{N}$ des modes transverses. Dans le domaine des fréquences, cela correspond à une cavité dont la longueur est une fraction de la distance entre les impulsions. On a donc $\frac{L}{c}\Omega = 2\pi \frac{K}{N}$. Dans ce cas, les impulsions ne sont pas toutes résonantes dans la cavité, celle-ci exerce un filtrage pour ne sélectionner qu'une partie des

fréquences constituant le peigne de l'impulsion initiale. En sortie d'une telle cavité, le taux de répétition des impulsions est modifié, et donc la distance entre les impulsions diminue. Il est également possible d'avoir $K \neq 1$. Dans ce cas, plusieurs impulsions coexistent à l'intérieur même de la cavité.

Dans les deux cas, la finesse de la cavité vient adoucir la condition de résonance parfaite, et permet d'établir une condition moins stricte pour la résonance de plusieurs modes dans une cavité, comme on l'a vu plus tôt dans ce chapitre.

C.3 Techniques de caractérisation spatiale et temporelle d'un faisceau

La comparaison entre l'optique des images et des impulsions peut se poursuivre dans les techniques de mesures utilisées habituellement pour caractériser le profil spatial ou temporel d'un faisceau. Les techniques de mesures transverses sont plus directes, et souvent adaptées aux mesures temporelles ou spectrales.

C.3.1 Mesures d'intensité

Profil d'intensité transverse Le profil spatial d'un faisceau peut être facilement mesuré en utilisant un détecteur mutlipixels, comme par exemple un capteur CCD ou CMOS. Un tel détecteur enregistrera le profil spatial d'intensité du faisceau $|E(\boldsymbol{\rho})|^2$. La limite de résolution de cette mesure est liée à la taille des pixels du détecteur. Cependant, les récents développements des appareils photos numériques ont contribué à l'augmentation du nombre de pixels des détecteurs CCD et CMOS, jusqu'à un nombre de pixels de l'ordre du million, ce qui est grandement suffisant pour nos applications d'optique paraxiale pour lesquelles le nombre de modes ne dépasse jamais plusieurs centaines.

La mesure du profil transverse d'un faisceau peut se faire dans différents plans. À l'aide des techniques d'imagerie, on peut donc mesurer également $|E(\mathbf{q})|^2$.

Profil d'intensité spectral La mesure du profil d'intensité spectrale d'un faisceau peut se faire en décomposant spatialement les différentes fréquences, par exemple à l'aide d'un prisme, d'un réseau ou d'un monochromateur. Ces composantes spectrales sont ensuite mesurées individuellement ou avec un détecteurs multipixels comme s'il s'agissait d'une image. Le signal enregistré est donc proportionnel à $\|\tilde{\mathbf{E}}(\omega)\|^2$.

Profil temporel d'intensité La mesure temporelle directe d'une impulsion femtoseconde n'est pas un problème aisé. Les meilleurs photodétecteurs ne disposent pas d'un temps de réponse suffisant. Il faut donc comparer l'impulsion à une impulsion de référence. Pour résoudre parfaitement l'amplitude du champ de l'impulsion, il faudrait que l'impulsion de référence soit d'une durée beaucoup plus courte que l'impulsion à mesurer. Cette technique a été utilisée récemment, à l'aide d'une impulsion attoseconde dans le domaine X-UV [Goulielmakis 04].

Une technique plus courante consiste à mesurer la corrélation temporelle entre deux impulsions. On peut montrer qu'il est impossible de mesurer la durée d'une impulsion par un dispositif linéaire et stationnaire. On utilise donc des dispositifs non-linéaires. Le plus

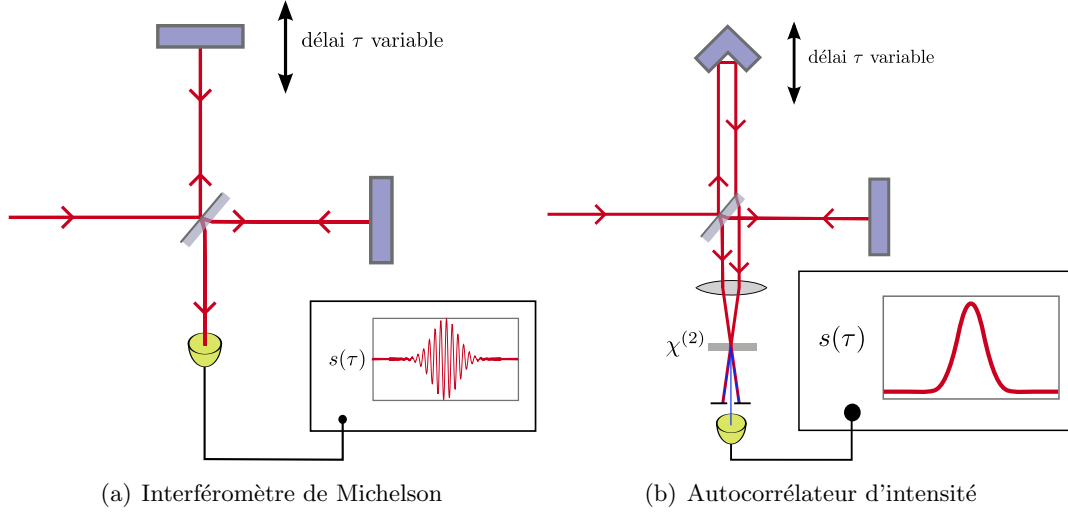


Figure 2.14: L'interféromètre de Michelson ne permet pas d'accéder au profil temporel d'une impulsion, mais seulement à son spectre. Pour accéder au profil temporel qui dépend notamment de la phase spectrale, on doit avoir recours à des non-linéarités.

simple est l'autocorrélateur. Il s'agit d'un interféromètre de Michelson, où l'on fait interférer les faisceaux des deux bras dans un cristal non-linéaire par doublage de fréquence, en contrôlant le retard τ entre les deux impulsions. On mesure ensuite avec un photodétecteur l'intensité du signal doublé provenant de l'interférence des deux faisceaux. Le signal enregistré est :

$$s(\tau) = \int dt \mathbf{E}^2(t) \mathbf{E}^2(t + \tau) \quad (2.132)$$

c'est-à-dire la fonction d'autocorrélation d'intensité $I(t) = \mathbf{E}^2(t)$. Cette mesure est très incomplète, car elle ne donne pas la phase temporelle, et ne fournit qu'une information partielle sur l'amplitude. Par exemple, toute asymétrie temporelle disparaît dans la fonction $s(\tau)$, nécessairement symétrique. Cependant, si l'on dispose d'autres informations partielles sur l'impulsion, cette mesure peut être intéressante. Dans un cas expérimental typique, on peut se servir du signal d'autocorrélation d'intensité pour essayer de recomprimer une impulsion à dérive de fréquence jusqu'à la limite imposée par la transformée de Fourier. La durée d'une impulsion gaussienne est obtenue en divisant la largeur du signal d'autocorrélation par $\sqrt{2}$.

Dans ce dispositif, l'effet non-linéaire ne doit pas nécessairement avoir lieu dans un cristal non-linéaire par doublage de fréquence. On peut également obtenir le même effet non-linéaire en utilisant un détecteur à deux photons, par exemple le GaP. La tension de gap d'un tel semiconducteur correspond à l'énergie de deux photons de l'impulsion. Il détecte donc un signal proportionnel à la puissance quatrième du champ $\mathbf{E}^4(t)$.

C.3.2 Mesures de phase

Pour caractériser complètement un faisceau, il est absolument nécessaire de connaître son profil de phase $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ ou $\varphi(\omega)$.

Mesures référencées Ces profils de phase peuvent être obtenus en utilisant des techniques interférométriques. Si l'on connaît le profil d'intensité d'un faisceau, on peut mesurer son profil de phase en le faisant interférer avec un faisceau de référence, dont on connaît parfaitement le profil d'intensité et de phase. On mesure alors le profil d'intensité spatial ou spectral de l'interférence des faisceaux.

Notons $\mathbf{E}(\zeta)$ et $\mathbf{E}_{ref}(\zeta)$ le champ à mesurer et le champ de référence, avec $\zeta = \boldsymbol{\rho}$ ou $\zeta = \omega$. Le signal mesuré par interférométrie spectrale vaut :

$$I(\zeta) \propto \|\mathbf{E}_{ref}(\zeta) + \mathbf{E}(\zeta)\|^2 \quad (2.133)$$

$$\propto \|\mathbf{E}_{ref}(\zeta)\|^2 + \|\mathbf{E}(\zeta)\|^2 + 2\|\mathbf{E}(\zeta)\| \cdot \|\mathbf{E}_{ref}(\zeta)\| \cos(\varphi(\zeta) - \varphi_{ref}(\zeta)) \quad (2.134)$$

Connaissant $\|\mathbf{E}_{ref}(\zeta)\|^2$, $\varphi_{ref}(\zeta)$ et $\|\mathbf{E}(\zeta)\|^2$, on peut en déduire $\varphi(\zeta)$.

Détecteur de Shack-Hartmann Une technique historique de caractérisation spatiale complète consiste à enregistrer simultanément le profil d'intensité du faisceau, et la forme de son front d'onde. Pour cela, un dispositif imaginé par Hartmann [Hartmann 00] dès 1900, puis implémenté expérimentalement par Shack [Shack 71] en 1971, consiste à intercepter le faisceau avec un réseau de microlentilles, puis d'enregistrer sur un capteur de type CCD l'intensité des points diffractés par chacune des lentilles, ainsi que leur position par rapport au centre de la microlentille, comme représenté sur la figure (2.15). Il faut donc que le capteur possède une résolution beaucoup plus grande que la matrice de lentilles. Pour chaque lentille, la position du point diffracté dépendra de la forme du front d'onde incident. Ce dispositif permet donc de mesurer le front d'onde et le profil d'intensité d'un faisceau avec une résolution égale à celle du réseau de microlentilles.

Le dispositif de Shack-Hartmann est en fait un cas particulier d'interféromètre à décalage multilatéral. Ce type d'interféromètre utilise des réseaux de profils spatiaux différents pour mesurer les dérivées spatiales du profil de phase $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ [Chanteloup 05].

FROG Le FROG (*Frequency-Resolved Optical Gating* en anglais) est une technique de spectroscopie temporelle qui s'inspire de la méthode de Hartmann pour la phase spatiale, introduite par Trebino [Trebino 97]. Ce dispositif, représenté sur la figure 2.16, est similaire à un autocorrélateur classique, mais résolu spectralement. On enregistre donc une trace à deux dimensions $S_{FROG}(\omega, \tau)$, c'est-à-dire une fonction de Wigner temps-fréquence de l'impulsion.

$$S_{FROG}(\omega, \tau) = \left| \int E(t)E(t - \tau)e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (2.135)$$

En utilisant un algorithme itératif, on peut ensuite reconstruire le profil temporel $E(t) = \sqrt{I(t)}e^{i\varphi(t)}$ de façon complète. Il existe aujourd'hui des versions améliorées du FROG mettant en jeu notamment des prismes de Fresnel pour mesurer directement $S_{FROG}(\omega, \tau)$ sans avoir à faire varier τ .

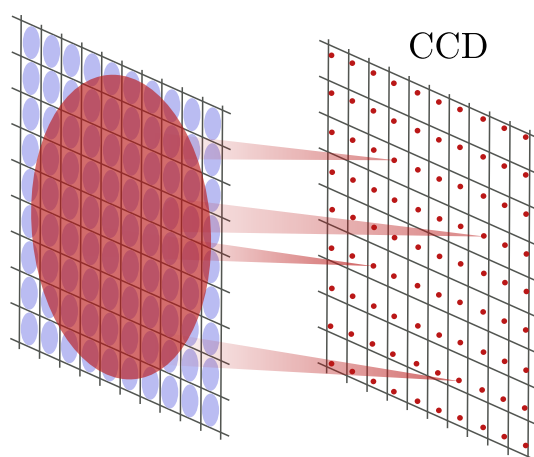


Figure 2.15: Principe du fonctionnement de la détection de front d'onde par la méthode de Shack-Hartmann : on mesure l'intensité de chaque point diffracté et sa position par rapport au centre de la micro-lentille.

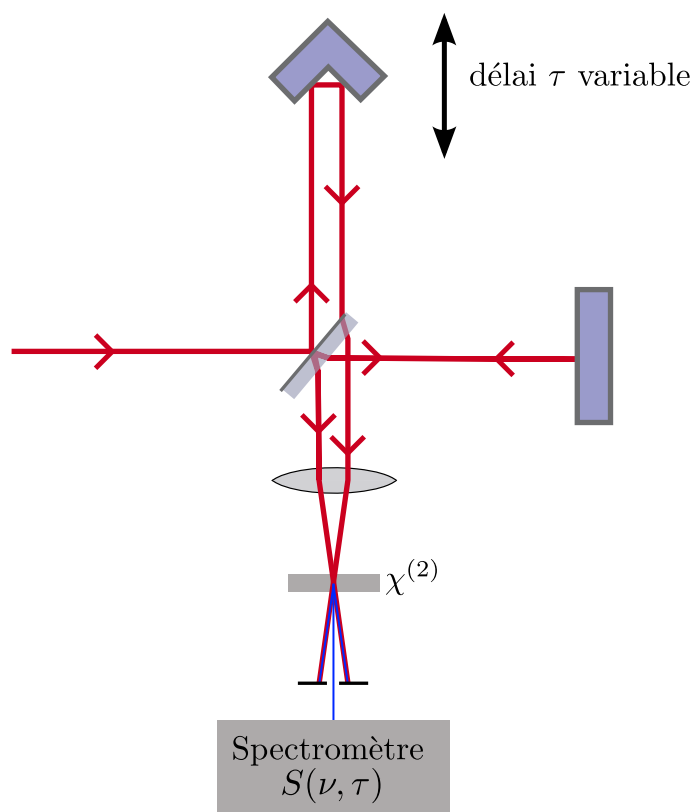


Figure 2.16: La technique *Frequency-Resolved Optical Gating* (FROG) permet par méthode itérative d'accéder au profil temporel complet d'une impulsion intensité et phase.

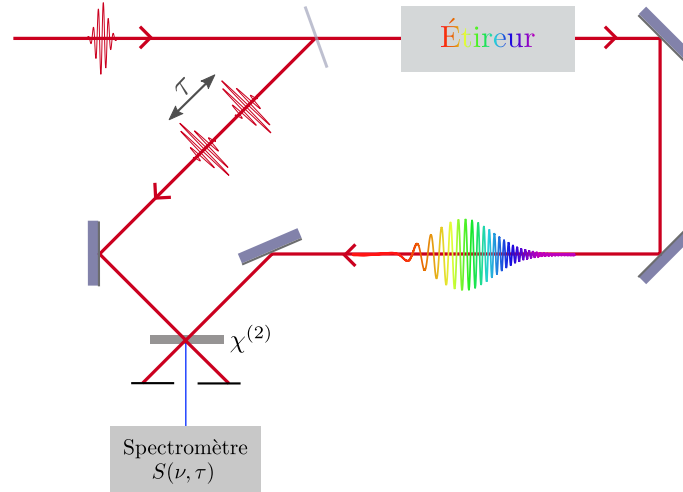


Figure 2.17: La technique *Spectral Phase Interferometry for Direct E-field Reconstruction* (SPIDER) permet également d'accéder au profil temporel complet d'une impulsion.

SPIDER Le SPIDER (*Spectral Phase Interferometry for Direct E-field Reconstruction* en anglais) est une technique d'interférométrie à décalage de fréquence (*spectral shearing* en anglais) mise en place par Walmsley [Iaconis 98], et représenté sur la figure 2.17. Il s'agit de la transposition de l'interférométrie spatiale à décalage dans le domaine spectral. On fait interférer deux impulsions décalées spectralement et temporellement, et l'on mesure le spectrogramme. Pour produire ces deux impulsions, on produit d'abord deux impulsions décalées temporellement à l'aide des réflexions sur une lame mince, ainsi qu'une impulsion longue, produite par étirement de l'impulsion initiale qui conduit à une impulsion à dérive de fréquence. Les impulsions courtes sont mélangées successivement à l'impulsion longue dans un cristal non linéaire, de sorte qu'à l'échelle de durée des impulsions courtes, l'impulsion longue puisse être considérée comme monochromatique, mais avec une fréquence différente pour chacune. Le cristal non-linéaire permet la somme de fréquence entre une impulsion courte et une onde monochromatique, ce qui produira deux impulsions décalées spectralement et temporellement.

Le signal final enregistré est donc :

$$S(\omega) = |E(\omega)|^2 + |E(\omega - \Omega)|^2 + 2|E(\omega)E(\omega - \Omega)| \cos(\varphi(\omega - \Omega) - \varphi(\omega) - \tau\omega) \quad (2.136)$$

C.4 Transformation et mise en forme transverse et longitudinale

Il est assez facile expérimentalement de manipuler les modes transverses, grâce à tous les outils d'imagerie. La manipulation du profil transverse d'un faisceau dépasse la simple propagation si l'on utilise des lentilles par exemple. On peut donc coupler les différentes impulsions transverses $\mathbf{q}$, à l'aide de lentilles ou de miroirs sphériques par exemple. Une lentille exerce une transformation $\mathbf{q} \rightarrow -\zeta\mathbf{q}$ qui permet notamment d'inverser une image. Dans un tel système optique, on peut coupler les différents points d'une image. Ainsi, si l'on utilise une opération de champ lointain, on peut transformer la variable conjuguée $\mathbf{q}$ dans un plan donné en variable réelle $\boldsymbol{\rho}$ dans un autre plan. On peut donc imaginer des

systèmes optiques permettant de transformer ou de décomposer des modes transverses de manière arbitraire, et sans perte, ce qui permet le traitement des états non-classiques du champ sur des modes transverses. De même, la séparation et la combinaison des modes transverses est possible en utilisant les techniques d'imagerie.

Les choses sont beaucoup moins simples dans le domaine des fréquences. En effet, tous les systèmes d'optique passive que l'on utilise couramment dans nos expériences ne permettent pas de coupler les différentes fréquences entre elles, du fait de la linéarité de l'équation d'onde. Il est possible de modifier le profil d'une impulsion en manipulant son amplitude et sa phase spectrale, par exemple dans le plan de Fourier d'une ligne à dispersion nulle (C.4.2), mais cela ne peut pas se faire sans perte. Autrement dit, il est difficile de transférer complètement de l'énergie d'une fréquence à une autre. Cela empêche le mélange sans pertes de modes longitudinaux orthogonaux, et pose des problèmes en optique quantique, où les pertes conduisent généralement à la destruction d'un état non-classique.

C.4.1 Mise en forme transverse d'un faisceau

Dans nos expériences usuelles, on dispose initialement uniquement du faisceau émis par un laser, qui possède un profil gaussien TEM_{00} . On peut facilement changer la taille et la position de son waist, mais il gardera ainsi toujours une forme gaussienne correspondant à un mode TEM_{00} . Pour aller au delà, on doit donc utiliser des techniques de mises en forme spatiale.

Résonance en cavité On peut utiliser une cavité optique pour changer le profil transverse d'un faisceau, en utilisant la non-dégénérescence de la cavité pour les différents modes transverses d'une même longueur d'onde, comme représenté sur la figure 2.18. On injecte ainsi un mode TEM_{00} , qui ne correspond pas au mode TEM_{00} de la cavité, par exemple en le désalignant, ou en lui donnant une taille et/ou position de waist différente. En asservissant la longueur de la cavité sur la résonance d'un mode TEM_{mn} , on projetera le faisceau incident sur ce mode, et en sortie de la cavité on récupérera un faisceau TEM_{mn} propre. Cette technique est couramment utilisée pour obtenir un faisceau gaussien TEM_{01} à partir d'un faisceau TEM_{00} . Les deux modes ont exactement la même direction et le même waist, ce qui présente un grand intérêt expérimental.

Masques de phase et d'intensité Pour modifier le profil de phase ou d'intensité spatiale d'un faisceau, on peut aussi utiliser un masque. Pour cela, on intercepte le faisceau avec un tel masque, qui modifie dans le plan du masque, la distribution de champ $\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho})$, en la multipliant par une fonction de transfert spatiale $H(\boldsymbol{\rho}) = |H(\boldsymbol{\rho})| e^{i\theta(\boldsymbol{\rho})}$:

$$\mathbf{E}_{out}(\boldsymbol{\rho}) = H(\boldsymbol{\rho})\mathbf{E}_{in}(\boldsymbol{\rho}) \quad (2.137)$$

$$|\mathbf{E}_{out}(\boldsymbol{\rho})| = |H(\boldsymbol{\rho})| |\mathbf{E}_{in}(\boldsymbol{\rho})| \quad (2.138)$$

$$\varphi_{out}(\boldsymbol{\rho}) = \theta(\boldsymbol{\rho}) + \varphi(\boldsymbol{\rho}) \quad (2.139)$$

Un masque d'intensité ne modifie pas la phase, c'est-à-dire $\theta(\boldsymbol{\rho}) = 1$. Un tel masque peut représenter une image simple, par exemple des fentes ou un chiffre. On utilise dans nos

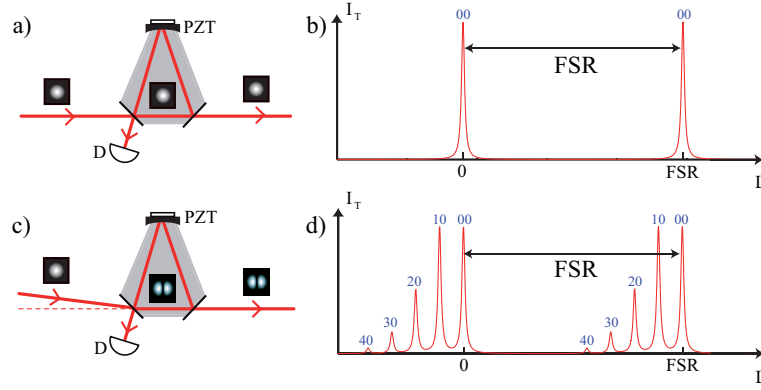


Figure 2.18: Utilisation d'une cavité pour générer des faisceaux gaussiens d'ordres supérieurs. Lorsque la cavité est parfaitement alignée et que l'on injecte un mode TEM_{00} parfaitement adapté à la cavité (a), un seul pic de résonance apparaît quand on balaye la cavité et celle-ci transmet intégralement ce mode. Si l'on désaligne légèrement le faisceau injecté (c), on excite plusieurs modes transverses visibles quand on balaye la cavité (d). On peut alors asservir la longueur de la cavité à résonance pour un de ces modes transverses. Le faisceau de sortie est donc un mode gaussien d'ordre supérieur avec les mêmes caractéristiques (direction, taille et position du waist) que le mode TEM_{00} initial.

expériences la mire de résolution USAF, représentée sur la figure (2.19), pour laquelle $|H(\boldsymbol{\rho})| = 0$ ou 1.

Un masque de phase (ou lame de phase) aura une transmission $|H(\boldsymbol{\rho})| = 1$, et un profil de phase $\theta(\boldsymbol{\rho})$ non constant. On utilise par exemple une lame particulière qui déphase de π une moitié du faisceau par rapport à l'autre. Cette lame transforme un faisceau TEM_{00} en un mode retourné (*flip-mode* en anglais), qui est une bonne approximation d'un mode TEM_{01} . On utilise aussi une lame de phase de profil circulaire pour transformer un mode de Hermite-Gauss en un mode de Laguerre-Gauss, qui possède un moment orbital non nul [Sueda 04]. Un exemple d'une telle lame est représenté sur la figure 2.19.

L'utilisation de tels masques fournit le profil souhaité dans un plan transverse donné, et doit donc en général être couplée à des systèmes d'imagerie, afin de récupérer ce profil dans un autre plan transverse. Pour conserver à une homothétie près le profil d'intensité d'une image, il suffit d'imager en amplitude deux plans transverses, ce qui se traduit (cf équation (2.23)) par une matrice ABCD avec $B = 0$, c'est-à-dire faire une opération de champ proche. Pour que la phase soit également restituée, on doit avoir de plus $C = 0$. La différence fondamentale entre les masques de phase et d'intensité est que le premier conserve la totalité de l'énergie du faisceau, alors que le second induit nécessairement des pertes. En optique quantique, les pertes sur un faisceau sont souvent sources de perte de la non-classicité d'un état. On peut montrer que tout masque d'intensité peut être équivalent à une combinaison de plusieurs masques de phases placés à plusieurs endroits d'un système optique. Cette technique permet notamment d'éviter les pertes.

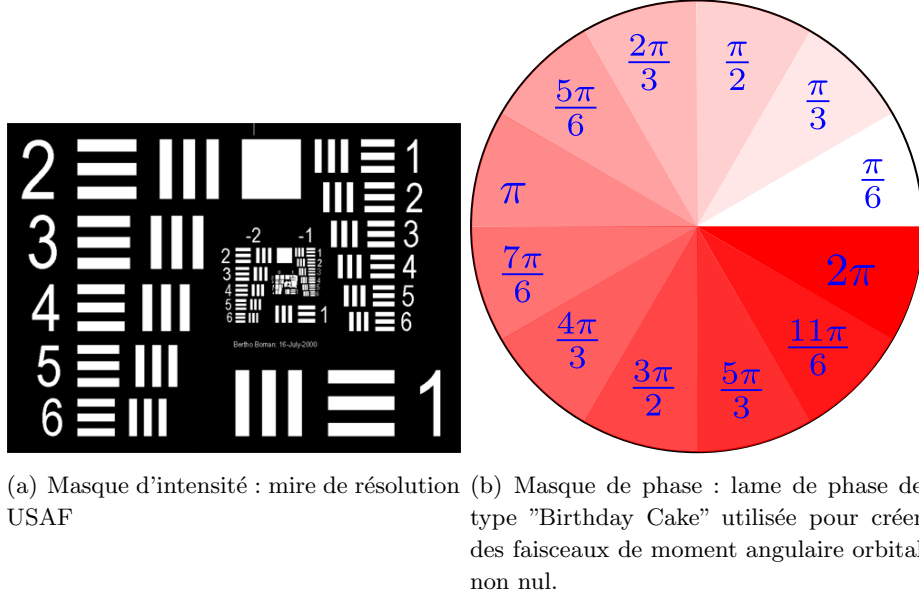


Figure 2.19: Masques d'intensité et de phases utilisés pour transformer le profil transverse d'un faisceau.

Modulateur spatial Les nouvelles technologies des cristaux liquides ont rendu possibles les modulateurs spatiaux de lumière ⁵ (*spatial light modulator* ou SLM en anglais). Il s'agit en fait de masques d'intensité et/ou de phase, fonctionnant avec des technologies à cristaux liquides [Efron 85], donc programmables avec un ordinateur. Ils présentent l'énorme avantage de la modularité. Le taux de rafraîchissement est adapté à l'utilisation massive des SLM pour la vidéo, et donc est en général de 60 Hz. On peut donc imaginer moduler le profil spatial d'un faisceau à des fréquences inférieures à 60 Hz. La figure 2.20 montre le modèle *Hamamatsu* utilisé dans notre expérience.

Miroirs déformables Les miroirs déformables ont vu le jour en astronomie, où, combinés à un système de caractérisation du front d'onde, ils permettent de corriger les aberrations qu'un faisceau de lumière a pu acquérir au cours de sa propagation, dans l'atmosphère par exemple. Cette technique est appelée optique adaptative [Babcock 53], et est largement utilisée en astronomie. Ce type de miroir peut également être utilisé dans des expériences d'optique pour corriger tout type d'aberration d'un faisceau, ou servir de modulateur de phase spatial. Avec un revêtement adapté, par exemple une couche d'or déposée sur le miroir, les pertes optiques sont très faibles, ce qui présente un grand intérêt en optique quantique pour ne pas détruire les états non-classiques. La résolution des miroirs déformables est cependant plus faible que celle des modulateurs à cristaux liquides.

C.4.2 Mise en forme d'une impulsion

La mise en forme d'impulsions courtes est également un sujet de recherche à part entière, devenu très actif depuis une dizaine d'années [Weiner 00]. De même que pour

5. Ce type de dispositif est utilisé dans les vidéoprojecteurs, ce qui contribue à rendre son coût abordable pour une résolution élevée, jusqu'à 1920×1080 pixels.

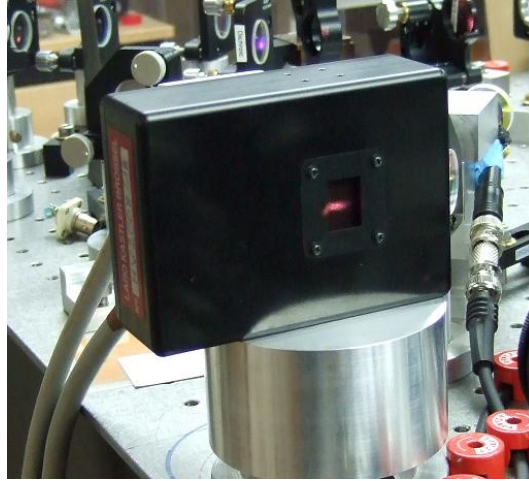


Figure 2.20: Photo du modulateur de phase spatial *Hamamatsu* utilisé dans notre expérience.

la caractérisation temporelle des impulsions, il est difficile d'adresser temporellement les impulsions, car cela nécessiterait un appareil de résolution temporelle encore plus courte que la durée de l'impulsion. Les modulateurs électro-optiques sont aujourd'hui les plus rapides, mais n'atteignent des temps de réponse que de l'ordre de la picoseconde. L'idée principale de la mise en forme d'impulsions courtes est donc de travailler dans le domaine spectral, et d'adresser la phase et l'intensité de chaque fréquence, pour ainsi donner la forme temporelle souhaitée à une impulsion. Une autre technique de mise en forme existe : le Dazzler. Ce dispositif utilise l'interaction acousto-optique dans un cristal biréfringent pour modifier le profil temporel de l'impulsion [Tournois 97]. Nous avons choisi de ne pas utiliser ce dispositif car il ne permet pas de garder la cohérence temporelle des impulsions successives. La thèse d'Antoine Monmayrant [Monmayrant 05] décrit en détail les subtilités de la construction d'un façonneur d'impulsions.

Ligne à dispersion nulle On décompose les différentes fréquences composant les impulsions à l'aide d'une ligne à dispersion nulle [Froehly 83]. Ce dispositif, illustré sur la figure 2.21 permet de séparer spatialement les différentes fréquences d'un spectre, puis de les recomposer pour restituer le faisceau d'origine.

1. Le faisceau est d'abord diffracté par un réseau, de préférence à l'angle de Littrow pour éviter ainsi les pertes sur les ordres différents de 1. Chaque longueur d'onde est ainsi diffractée dans une direction particulière, mais en gardant son profil spatial d'origine.
2. Une lentille de focale f est placée à la distance $L = f$ du réseau. Après une propagation sur une distance $L = f$, chaque longueur d'onde est focalisé en un point différent. On dispose donc d'un étalement spatial des longueurs d'ondes composant le spectre.
3. Après une distance $L = f$, on replace une lentille de focale f
4. Enfin, un réseau placé à la distance $L = f$ de la dernière lentille avec le même alignement que le premier permet de recomposer les différentes longueurs d'ondes du spectre dans un même faisceau.

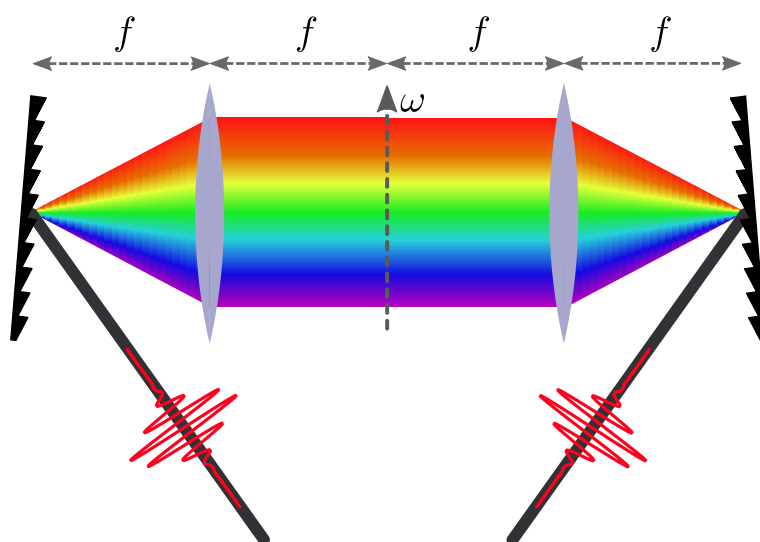


Figure 2.21: Principe de la ligne à dispersion nulle. Les différentes composantes spectrales d'une impulsion sont séparées spatialement par un élément dispersif et une lentille de focalisation. Elles sont ensuite recombinaées pour recréer l'impulsion.

Ce dispositif est dit à dispersion nulle car la phase accumulée par toutes les fréquences est identique, et l'impulsion sortante a le même profil temporel que l'impulsion entrante. On peut donc utiliser ce dispositif pour adresser spatialement les différentes longueurs d'onde composant une impulsion laser, et modifier le profil temporel des impulsions. Pour cela, on doit utiliser des techniques de mise en forme spatiale de la lumière.

Modulateurs de phase et d'intensité et contrôle cohérent Pour modifier l'amplitude et la phase spectrales dans le plan de Fourier d'une ligne à dispersion nulle, on peut disposer des éléments d'imagerie spatiale, permettant de modifier le profil spatial d'amplitude ou de phase d'un faisceau. Il est possible d'utiliser les masques de phase et d'intensité décrits à la section C.4.1. On leur préfère habituellement les masques programmables qui permettent plus de liberté dans le façonnage d'impulsions. On peut ainsi attribuer à chaque longueur d'onde une amplitude et une phase quelconque.

L'utilisation des impulsions mises en forme a donné naissance au contrôle cohérent [Shapiro 03, Ohmori 09]. Les impulsions lumineuses mises en forme permettent de contrôler des réactions physiques, chimiques ou biologiques, à l'aide d'une boucle de rétroaction entre le résultat de la réaction et le profil temporel des impulsions utilisant un algorithme génétique par exemple.

Le contrôle cohérent est l'analogue complet de l'optique adaptative : on utilise le résultat d'une mesure optique pour modifier itérativement le profil transverse ou longitudinal du faisceau qui sert pour la mesure.

C.5 Variables et concepts analogues dans les deux domaines

Le tableau suivant dresse une liste non exhaustive des variables que l'on peut comparer dans les domaines spatial et temporel, afin de mieux comprendre comment on peut

transposer les concepts entre les deux domaines.

	Domaine spatial		Domaine temporel
$\boldsymbol{\rho}$	Variable de l'espace réel (Champ proche)	t	Variable de l'espace réel (temps)
$\mathbf{q}$	Variable de l'espace conjugué (Champ lointain)	ω	Variable de l'espace conjugué (fréquence)
$A(\boldsymbol{\rho}, z)$	Profil transverse d'un mode	$B(z, t)$	Enveloppe d'une impul- sion courte
TEM_{mn}	Famille de modes gaus- siens (paquets d'onde d'enveloppe gaussienne)	$e^{-\frac{t^2}{\Delta\tau^2}}$	Impulsion d'enveloppe gaussienne
$\frac{1}{k}$	Diffraction	$k'' = \frac{d^2k}{d\omega^2}$	Dispersion
$\Delta_{\perp}A + 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0$	Équation de propaga- tion paraxiale Rayon de courbure	$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \tau^2} - \frac{2i}{k_0''} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = 0$	Équation de dispersion d'une impulsion courte Dérive de fréquence
α	Cavité dégénérée Paramètre de dégéné- rescence	$\frac{L\Omega}{c}$	Cavité synchrone Synchronisation des im- pulsions
$\varphi(\boldsymbol{\rho})$	Phase spatiale (Aberra- tions)	$\varphi(\omega)$	Phase spectrale

D Transmission et doublage d'images en cavité auto-imageante

Cette section décrit les expériences de transmission et de doublage de fréquence d'une image à travers une cavité auto-imageante menées pendant cette thèse. Ces résultats sont la première étape dans une expérience utilisant la cavité auto-imageante pour construire un oscillateur paramétrique optique en cavité dégénérée. Il a donc été important d'étudier en détail les propriétés de cette cavité complètement dégénérée, du point de vue théorique et expérimental, puis d'étudier les effets non linéaires transverses en commençant par le doublage de fréquence.

D.1 La cavité auto-imageante en géométrie linéaire

D.1.1 Etude géométrique

Dans un article fondateur [Arnaud 69], Arnaud a décrit en détail les cavités optiques dégénérées. Il a en particulier décrit plusieurs résonateurs permettant la dégénérescence transverse complète, c'est-à-dire pour tous les modes transverses d'une même fréquence. Plusieurs géométries sont possibles pour y arriver. La cavité concentrique est la plus simple, car elle ne comporte que deux éléments optiques. Cependant, cette cavité possède un waist qui tend vers 0, ce qui pose des problèmes de stabilité.

Nous avons choisi d'utiliser une autre configuration de cavité dégénérée en géométrie linéaire. Il s'agit d'une cavité composée d'un miroir plan, d'un miroir sphérique de rayon de courbure R , et d'une lentille de focale f placée à l'intérieur de la cavité. Si l'axe optique de ces trois éléments coïncide, la condition de dégénérescence totale de la cavité s'exprime comme une condition sur les distances L_1 et L_2 séparant respectivement le miroir plan et la lentille d'une part, et la lentille et le miroir sphérique d'autre part. Cette cavité, représentée sur la figure 2.22 est appelée cavité auto-imageante. Pour comprendre la condition de dégénérescence, on peut calculer la matrice ABCD de la cavité pour des valeurs quelconques de L_1 et L_2 :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.140)$$

L'équation $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathbb{I}$ admet pour unique solution :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} L_1 & = & f + \frac{f^2}{R} \\ L_2 & = & f + R \end{array}} \quad (2.141)$$

Ce résultat s'interprète facilement en optique géométrique comme la somme de deux conditions : le miroir plan est imagé sur le miroir sphérique (champ proche) et le parallélisme des rayons est conservé. Après un aller-retour dans la cavité, tout rayon lumineux revient donc sur lui-même. On peut assimiler cette cavité à une cavité Fabry-Pérot plane de longueur exactement nulle. Dans une telle cavité, il n'y a donc plus de sélection de modes transverses. La condition de résonance longitudinale suffit alors à assurer la résonance d'un faisceau lumineux de forme quelconque.

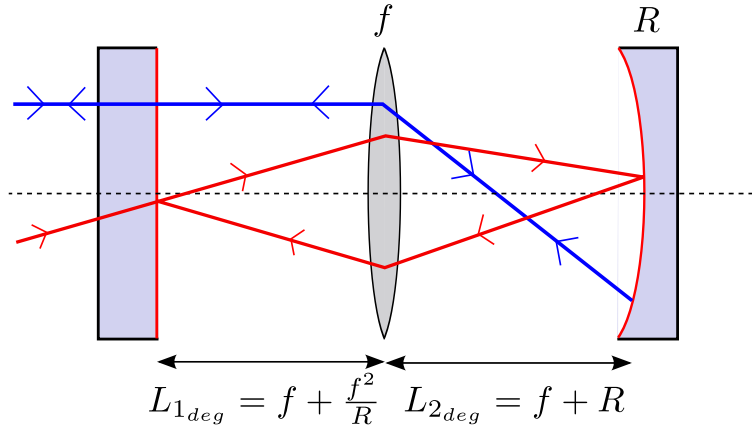


Figure 2.22: Schéma de la cavité auto-imageante que nous avons utilisée. Elle est composée d'un miroir plan, d'une lentille et d'un miroir sphérique. La distance entre les éléments optiques doit être minutieusement réglée pour atteindre la dégénérescence complète de la cavité.

Phase de Gouy On a vu dans la section 2.1 de ce chapitre que la sélection transverse d'une cavité quelconque était due à la phase de Gouy $\alpha(m+n+1)$ accumulée par les modes gaussiens TEM_{mn} sur un tour de cavité, qui intervient dans la condition de résonance des modes à l'intérieur de la cavité :

$$\frac{2\pi L}{\lambda} + (m+n+1)\alpha = \frac{2\pi L\nu}{c} + (m+n+1)\alpha = 2p\pi \quad (2.142)$$

Dans le cas de notre cavité auto-imageante, on a $\alpha = 0$, condition nécessaire et suffisante pour avoir une dégénérescence complète. On peut considérer que pour une cavité proche de la configuration optimale, la valeur α est un paramètre caractérisant la dégénérescence. On utilisera également le paramètre $\frac{\alpha}{2\pi}$ qui représente le rapport de l'écart entre modes transverses normalisé à l'intervalle spectral libre.

D.1.2 Etude de la stabilité de la cavité auto-imageante

À des fins expérimentales, il est intéressant de connaître le comportement de la cavité, autour de la position de dégénérescence parfaite, c'est-à-dire quand les deux longueurs de la cavité L_1 et L_2 sont proches des valeurs optimales. Comme on l'a vu auparavant, α peut être calculé à partir de la matrice ABCD de la cavité, autour de la position de dégénérescence parfaite.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{A+D}{2}\right) \quad (2.143)$$

Notons ϵ et δ la différence des deux distances L_1 et L_2 à leurs valeurs optimales :

$$\epsilon = L_1 - \left(f + \frac{f^2}{R}\right) \quad (2.144)$$

$$\delta = L_2 - (f + R) \quad (2.145)$$

On peut alors tracer la valeur de $\frac{|\alpha|}{2\pi}$ en fonction de ϵ et δ à partir de la matrice ABCD de la cavité calculée pour toute valeur de (ϵ, δ) . Le résultat est représenté sur la figure 2.23, en échelle de couleur, pour des valeurs expérimentales $f = 50$ mm et $R = 38$ mm.

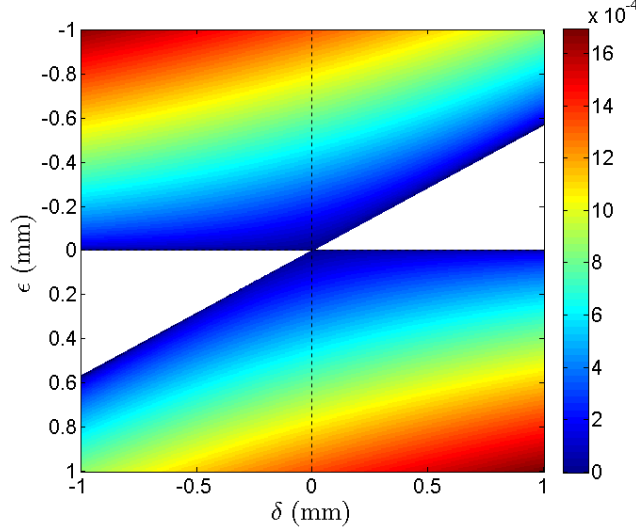


Figure 2.23: Valeur du paramètre de dégénérescence $\frac{|\alpha|}{2\pi}$ qui représente le comportement de la cavité auto-imageante, autour du point de fonctionnement complètement dégénéré représenté par les écarts ϵ et δ des distances L_1 et L_2 à leurs valeurs optimales. Dans cet exemple, on a pris $f = 50$ mm et $R = 38$ mm. Les zones blanches représentent les zones où la cavité est instable.

Cette figure ne fournit pas le signe de α . Cette figure fournit des résultats très intéressants pour la réalisation expérimentale et l'alignement de la cavité, notamment sur la précision de l'alignement à assurer. Cet aspect sera détaillé dans le paragraphe D.2.2. Les zones blanches sont les zones pour lesquelles la cavité est instable. Il est donc très important de rester en dehors de cette zone. Notons simplement que la figure comporte deux zones de stabilités différentes, et que le signe de α est en réalité opposé dans chacune de ces zones. Ce graphe renseigne également sur la précision requise sur les valeurs de L_1 et L_2 pour atteindre une certaine valeur de dégénérescence, comme nous le verrons plus loin.

D.1.3 Waist propre de la cavité proche de la dégénérescence

À dégénérescence complète, la cavité auto-imageante n'admet plus de famille de modes propres, puisqu'elle est résonante pour tous les modes transverses. On peut cependant chercher à calculer les modes propres de la cavité dans une configuration proche de la dégénérescence. On reprend les notations précédentes, et on cherche donc à caractériser la position et la taille du waist propre de la cavité en fonction de ϵ et δ .

On utilise la condition que le rayon de courbure du faisceau est identique au rayon de courbure des miroirs. On en déduit que le waist de la cavité se trouve au niveau du miroir plan de la cavité. Notons $z_R(\epsilon, \delta)$ la longueur de Rayleigh, et $w_0(\epsilon, \delta)$ la taille du waist associée :

$$z_R(\epsilon, \delta) = \sqrt{\frac{f^4(R - \delta)\delta + f^2R(R^2 - 2\delta^2)\epsilon - R^2\delta(R + \delta)\epsilon^2}{R^2\delta(R + \delta)}} \quad (2.146)$$

$$w_0(\epsilon, \delta) = \sqrt[4]{\frac{[f^4(R - \delta)\delta + f^2R(R^2 - 2\delta^2)\epsilon - R^2\delta(R + \delta)\epsilon^2] \lambda^2}{\pi^2 R^2 \delta (R + \delta)}} \quad (2.147)$$

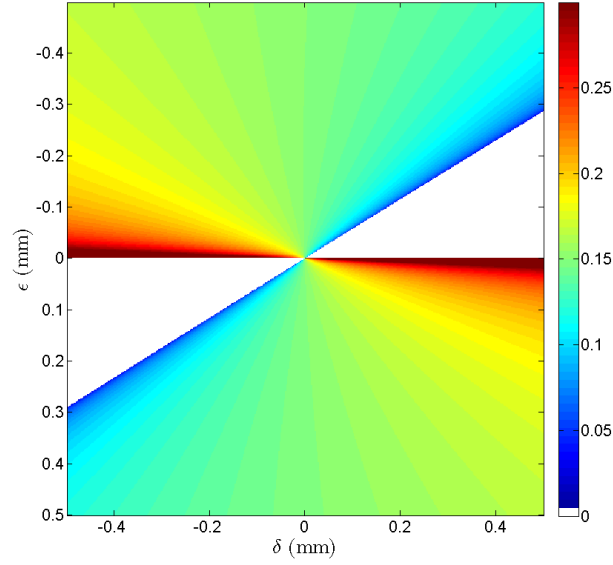


Figure 2.24: Valeur en mm du waist propre w_0 de la cavité auto-imageante en fonction de ϵ et δ . On remarque que la cavité n'a pas de waist propre à dégénérescence. Sur la figure, la valeur du waist a été tronquée à une valeur maximale de $0.3 \mu\text{m}$ mais tend en réalité vers ∞ quand ϵ tend vers 0.

La figure 2.24 représente la taille du waist propre w_0 en mm en fonction de ϵ et δ pour la cavité que nous étudions. Dans ces expressions, on retrouve que la cavité ne possède pas de waist propre au point de fonctionnement auto-imageant $\epsilon = \delta = 0$. Une façon de le voir consiste à approcher ce point sur des courbes telles que $\epsilon = \xi\delta$, avec ξ quelconque. On calcule la limite de $z_R(\xi\delta, \delta)$ et $w_0(\xi\delta, \delta)$ quand δ tend vers 0 :

$$z_R(\xi\delta, \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f \sqrt{\xi + \frac{f^2}{R^2}} \quad (2.148)$$

$$w_0(\xi\delta, \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}} \sqrt{\xi + \frac{f^2}{R^2}} \quad (2.149)$$

Ces deux limites dépendent de ξ ce qui montre que $z_R(0,0)$ et $w_0(0,0)$ ne sont pas définis au point de fonctionnement parfaitement imageant. Contrairement aux cavités dégénérées utilisées couramment (la cavité confocale par exemple), on ne peut pas définir de waist propre de la cavité auto-imageante. Les bases de modes gaussiens ne sont plus privilégiées pour décrire les modes transverses, et on peut choisir d'utiliser la base des modes "pixels" définis dans un plan donné de la cavité.

D.1.4 Nombre de modes résonants dans la cavité

D'après les calculs présentés au paragraphe A.4.3, on peut calculer le nombre Q de modes résonants dans une cavité de paramètre de dégénérescence α . Avec les notations de ce paragraphe, on a $\alpha = \beta [2\pi]$ et $N = 1$; l'équation 2.45 devient :

$$Q = \frac{1}{10\mathcal{F}^2\alpha^2} \quad (2.150)$$

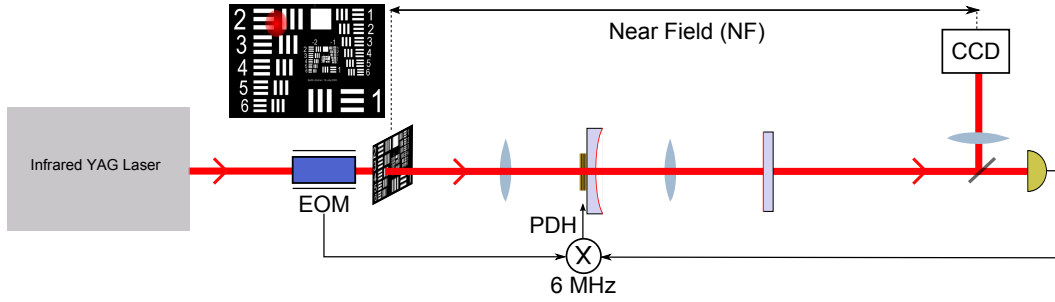


Figure 2.25: Montage expérimental de transmission d'image en cavité auto-imageante.

On remarque que ce nombre de modes tend vers l'infini quand α tend vers 0, ce qui correspond bien à une dégénérescence parfaite. Cependant, ce résultat doit être pondéré par les limitations physiques du système optique. D'une part, la précision de l'alignement des deux longueurs de la cavité ne permet jamais d'avoir $\alpha = 0$. La limitation ultime de ce paramètre correspond à $\epsilon + \delta$ de l'ordre de la longueur d'onde, car on doit toujours satisfaire la condition de résonance longitudinale dans la cavité. On est en pratique assez loin de cette limite. De plus, on ne peut pas avoir résonance dans la cavité de modes transverses plus grands que la taille des optiques, typiquement de l'ordre de 0,5 pouce ou 1 pouce, soit 12.8 mm ou 25.4 mm. Cela correspond à des modes très petits au niveau de leur point de focalisation à l'intérieur de la cavité. Cette condition est plus contraignante quand la longueur de la cavité devient plus grande. Elle ne s'applique pas dans nos cas expérimentaux.

On doit évaluer le nombre de modes maximal pouvant résonner à l'intérieur d'une cavité auto-imageante en fonction du système optique. C'est donc l'ouverture angulaire du système optique qui impose théoriquement le nombre de modes maximal pouvant résonner dans la cavité. En pratique, la limite du nombre de modes est fixée par la précision de l'alignement des différentes longueurs de la cavité.

D.2 Transmission d'une image

D.2.1 Montage expérimental

Le montage expérimental de l'expérience de transmission d'images en cavité auto-imageante est présenté sur la figure 2.25. Notre source laser est un laser YAG Diabolo de la société allemande Innolight, qui émet quelques centaines de mW à la longueur d'onde $\lambda = 1064$ nm. Une image est créée par intersection du faisceau laser avec un masque d'intensité. Nous avons utilisé une mire de résolution USAF, présentée à la figure 2.19 du paragraphe C.4.1, qui permet de produire l'image de chiffres ou de fentes de diverses tailles. L'image ainsi produite est ensuite injectée dans la cavité auto-imageante. La cavité optique est composée des éléments suivants et a été optimisée pour une utilisation en doublage de fréquence : un miroir sphérique de diamètre 12.7 mm et de rayon de courbure 38 mm, traité avec un coefficient de réflexion $R = 90\%$ pour $\lambda = 1064$ nm, et anti-reflet (AR) pour $\lambda = 532$ nm ; un miroir plan de diamètre 12.7 mm traité avec un coefficient de réflexion $R = 99\%$ pour $\lambda = 1064$ nm, et haute réflectivité (HR) pour $\lambda = 532$ nm ; une lentille de focale $f = 50$ mm, traitée AR pour les deux longueurs d'onde. Ces valeurs

permettent à la quasi-totalité du faisceau infra-rouge incident de rentrer dans la cavité, et à l'intégralité du faisceau vert produit de sortir de la cavité par le miroir de sortie de la cavité. Une faible partie de la puissance des images injectées est donc transmise, mais l'objectif de cet expérience est d'étudier les performances de la cavité en terme d'imagerie, en particulier son filtrage spatial et le nombre de modes résonants.

Les longueurs de cavité permettant le fonctionnement complètement dégénéré sont donc :

$$L_1 = L_{1deg} = 115.8 \text{ mm} \quad (2.151)$$

$$L_2 = L_{2deg} = 88 \text{ mm} \quad (2.152)$$

et la finesse de la cavité est de $\mathcal{F} = 60$. Cette valeur peut paraître faible pour l'utilisation de la cavité pour améliorer le doublage de fréquence. La raison principale est que la précision de l'alignement requise pour atteindre la résonance de Q modes est proportionnelle à $\frac{1}{\mathcal{F}}$.

La cavité est asservie en transmission à résonance par la technique Pound-Drever-Hall [Drever 83] qui utilise une modulation de phase du faisceau à 6 MHz générée par un modulateur électrooptique placé en amont de la cavité. Une légère partie du faisceau transmis est mesurée par une photodiode. Le signal continu (DC) délivré par cette photodiode sert à observer l'intensité transmise et est très utile pour l'alignement. Le signal haute fréquence (HF) est démodulé à 6 MHz pour produire le signal d'erreur utile à l'asservissement de la cavité. Enfin, l'image transmise est observée par une caméra CMOS, grâce à un système optique qui génère une transformation de champ proche entre le masque d'intensité qui crée l'image et la caméra.

D.2.2 Alignement de la cavité auto-imageante

La principale difficulté expérimentale consiste à aligner la cavité auto-imageante afin d'avoir une dégénérescence suffisante pour permettre la transmission d'images. Je vais donc dans ce paragraphe expliquer la méthode utilisée pour obtenir un alignement suffisant.

Pour faciliter l'alignement d'une cavité optique dégénérée, il est nécessaire d'avoir un axe optique de référence sur lequel on adapte le faisceau injecté d'une part, et l'axe optique de la cavité d'autre. Pour cela, nous utilisons un banc optique de la société *Newport*. Les éléments optiques de la cavité sont placés sur des montures permettant la rotation et la translation sur un axe parallèle à l'axe du banc. Dans un premier temps, on aligne un faisceau laser sur l'axe du banc optique, puis l'axe optique des trois éléments optiques de la cavité sur ce faisceau de sorte que lorsque l'on translate les éléments optiques pour changer les longueurs de la cavité, on désaligne le moins possible la cavité. Pour cela, il est essentiel que les optiques soient bien centrées. On peut vérifier le centrage des optiques (miroir sphérique et lentille) en s'assurant à l'aide d'une caméra que leur insertion sur le chemin optique ne modifie pas le trajet du faisceau.

Il faut ensuite ajuster les longueurs L_1 et L_2 à leurs valeurs optimales. Pour connaître a priori la précision requise pour l'alignement de la cavité suffisant pour permettre la résonance de Q modes, on peut utiliser la formule de l'équation 2.150 pour connaître la valeur du paramètre de dégénérescence α nécessaire. On peut enfin utiliser la figure 2.23 pour

connaître l'incertitude autorisée sur ϵ et δ . Dans le cas d'une cavité de finesse $\mathcal{F} = 100$, pour avoir environ 100 modes transverses résonants, on doit avoir $\frac{\alpha}{2\pi} < 3 \times 10^{-4}$, et donc $|\epsilon|, |\delta| < 20 \mu\text{m}$, ce qui est proche de la limite de la précision que l'on peut obtenir expérimentalement, avec nos platines de translation. Pour parvenir à cette valeur, l'alignement se fait en deux étapes.

On commence par se placer dans une configuration pour laquelle $L_1 < L_{1deg}$ et $L_2 < L_{2deg}$ et on envoie dans la cavité un faisceau de profil transverse quelconque, mais centré et de taille environ $w_0 = 300 \mu\text{m}$, de sorte que seulement quelques modes transverses soient excités. On observe alors les pics de transmission du faisceau quand on balaye la longueur de la cavité. Ces pics sont séparés d'une valeur proportionnelle au paramètre de dégénérescence α . On augmente ensuite successivement les longueurs L_1 et L_2 , tout en réalignant la cavité pour recentrer les éléments optiques, de sorte que α diminue. Il faut cependant prendre garde à rester dans la zone de stabilité. On peut s'en assurer en calculant la finesse de la cavité à tout instant lors de la procédure d'alignement : si la finesse de la cavité chute, c'est la cavité qui est devenue instable.

La situation devient délicate quand la cavité est dégénérée pour quelques modes transverses. Dans ce cas, la finesse est difficile à mesurer car plusieurs pics de résonances transverses sont proches, ce qui ressemble beaucoup à un pic de largeur plus grande. Dans ce cas, on peut s'assurer de la stabilité en maximisant le niveau du pic de résonance. On vérifie la dégénérescence en désalignant le faisceau injecté dans la cavité, et en vérifiant que le signal de transmission observé en balayage reste inchangé. Finalement, pour parfaire l'alignement, on peut injecter un faisceau de profil transverse complexe, comme par exemple l'image d'un masque d'intensité de forme quelconque, et vérifier avec une caméra le profil du mode transmis par la cavité à résonance. Cela nécessite de pouvoir continuer l'alignement de la cavité quand la cavité est asservie. Nous utilisons pour cela des vis motorisées d'alignement des miroirs.

D.2.3 Résultats de transmission d'images

Pour caractériser la capacité de notre cavité auto-imageante à transmettre des images, nous avons d'abord caractérisé la qualité de notre système optique de transmission d'image en l'absence du filtrage induit par la cavité. Pour cela, on enregistre l'image de la mire de résolution en champ proche en l'absence du miroir plan de la cavité, mais avec la lentille et le miroir sphérique. Il n'y a plus de cavité, mais la transformation optique équivalente est inchangée. Seul l'amplitude de l'image est réduite par rapport au fonctionnement en présence de la cavité auto-imageante. Les images enregistrées dans cette configuration sont présentées sur la figure 2.26(a). Nous avons optimisé la qualité de ces images en modifiant la taille du faisceau traversant le système optique : un faisceau trop focalisé à un point donné du système optique sera divergent et devient trop large à un autre endroit. Un faisceau trop large nécessite des distances de propagation plus longues pour les système d'imagerie, et conduit à une efficacité de doublage plus faible. La configuration optimale a été de prendre un faisceau de taille égale à quelques centaines de microns au niveau du miroir plan de la cavité.



(a) Sans cavité



(b) Avec cavité asservie à résonance

Figure 2.26: Transmission d'images à travers le système optique avec ou sans filtrage spatial par la cavité auto-imageante. On peut en déduire une évaluation du nombre de modes résonants simultanément dans la cavité, qui est d'environ 60.

On enregistre les mêmes images en présence de la cavité, asservie à résonance pour le faisceau injecté. On observe que la qualité des images est légèrement dégradée par le filtrage spatial dû à la cavité. Les chiffres et les fentes sont bien transmis, mais les détails plus fins présents sur l'image en bas à droite sont floutés. À partir de ces images, on peut évaluer le nombre de modes transmis par la cavité comme le carré du rapport entre la taille du plus petit détail transmis ($80\text{ }\mu\text{m}$) et la taille maximale du faisceau que l'on peut injecter dans la cavité ($600\text{ }\mu\text{m}$), ce qui fait un total de 60 modes environ. Ce résultat est cohérent avec la précision avec laquelle nous avons aligné les longueurs L_1 et L_2 . Il serait possible d'augmenter ce nombre de modes en optimisant plus encore l'alignement de la cavité. La stabilité de l'asservissement de la cavité est suffisante pour permettre de changer continûment l'image injectée dans la cavité. Pour cela, on translate la mire de résolution qui crée l'image en transmission. On observe alors l'image transmise par la cavité se translater sans déformation.

D.3 Etude du doublage de fréquence en cavité auto-imageante

Nous présentons ici les résultats expérimentaux de doublage d'images dans la cavité auto-imageante que nous avons étudiée auparavant. L'objectif de cette expérience est double. D'une part, cette étude s'inscrit dans le cadre général des expériences d'imagerie quantique menées dans notre groupe : la même cavité et le même cristal non-linéaire sont également utilisés pour former un oscillateur paramétrique optique en cavité complètement dégénéré. L'étude expérimentale du doublage de fréquence de modes transverses de profils arbitraires nous renseigne sur le couplage paramétrique entre les modes transverses identiques au cas de la conversion paramétrique. Le doublage de fréquence de modes gaussiens d'ordres élevés a été étudié en simple passage [Delaubert 07b] avec des applications éventuelles pour la reconnaissance de modes transverses. Nous étendons ici cette étude à

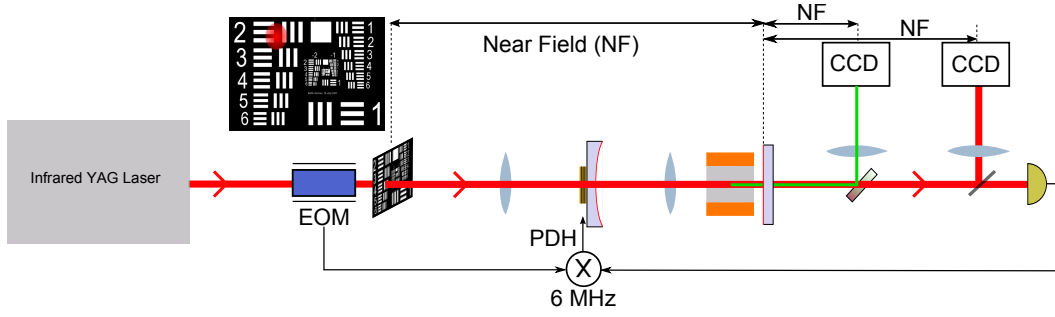


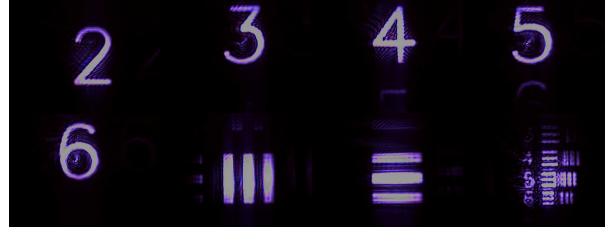
Figure 2.27: Montage expérimental de l'expérience de doublage de fréquence d'image en cavité auto-imageant.

tous les modes transverses. Ce dispositif présente aussi l'intérêt de permettre l'amélioration de l'efficacité de doublage de faisceaux de profils transverses arbitraires grâce à l'effet de cavité. Nous étudions dans cette partie les limites fondamentales et expérimentales du doublage de fréquence d'images.

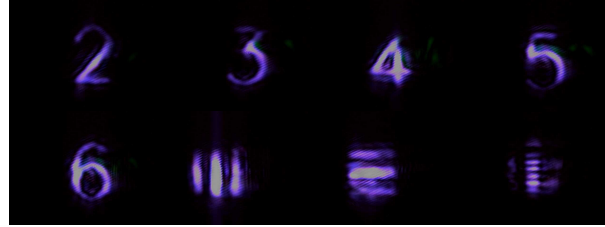
D.3.1 Montage expérimental

Le montage expérimental repose sur le même système optique que celui utilisé pour l'expérience de transmission d'images : une image créée par une mire de résolution à 1064 nm est doublée pour produire la même image à 532 nm dans le vert. Comme mentionné au paragraphe précédent, les réflectivités des miroirs de la cavité ont été optimisées pour le doublage : la quasi-totalité de la puissance infra-rouge entre dans la cavité, et la totalité de la puissance verte est émise dans une seule direction.

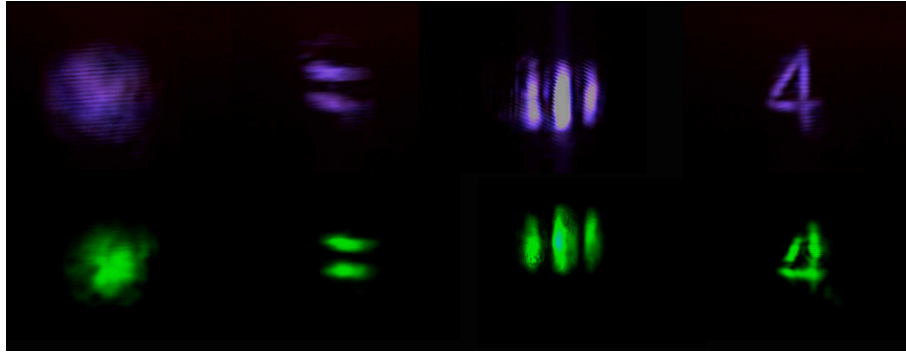
Le montage expérimental est présenté sur la figure 2.27. On a ajouté dans la cavité au niveau du miroir plan, un cristal non-linéaire $\chi^{(2)}$, taillé pour le doublage de fréquence entre 1064 nm et 532 nm. Nous avons choisi pour cette expérience d'utiliser un cristal de PPKTP (*Periodically poled KTP*) de 1 mm × 2 mm × 10 mm, en vue de son utilisation pour l'OPO auto-imageant. L'intérêt majeur d'un tel cristal est son efficacité non-linéaire, beaucoup plus grande que celle des cristaux utilisés habituellement pour lesquels l'accord de phase est assuré par biréfringence, puisque dans ce cas, l'axe principal du cristal est celui possédant la plus grande non-linéarité. Le coefficient non-linéaire d_{eff} est de 13.7 pm/V pour le PPKTP contre 5.3 pm/V pour le niobate de lithium dopé MgO (MgO :LiNbO₃) par exemple. L'efficacité de doublage attendue est donc environ dix fois meilleure. Le cristal que nous utilisons doit être maintenu à environ 30 ° pour assurer l'accord de phase. Pour cela, il est placé dans un four en cuivre et asservi en température par un contrôleur électronique PID. L'inconvénient majeur d'utiliser un tel cristal est sa faible surface transverse de 2 mm², ce qui limite la taille des images que l'on peut utiliser. Nous avons testé l'influence de la faible taille transverse du cristal sur la transmission des images à travers le système optique en comparant les images transmises avec et sans cristal. Les résultats sont présentés sur la figure 2.28. En les comparant avec les résultats de transmission d'images en l'absence du cristal (figure 2.26), on déduit que la faible surface du cristal n'influence pas le filtrage des modes transverses par la cavité auto-imageante. Ce résultat est dû à la taille des images que nous avons choisie (300 μm environ au niveau du cristal).



(a) Avec cristal, sans cavité



(b) Avec cristal, avec cavité asservie à résonance

Figure 2.28: Effet de l'insertion du cristal dans le système optique, avec et sans filtrage par la cavité.**Figure 2.29:** Doublage de fréquence d'images de profils transverses différents.

Enfin, on utilise un second système d'imagerie qui opère une transformation de champ proche entre la mire de résolution et une autre caméra placée en sortie de la cavité, après avoir séparé le faisceau vert doublé de l'infra-rouge résiduel grâce à un miroir dichroïque. Cette caméra enregistre les images de fréquence doublée. On peut éventuellement la remplacer par une photodiode pour enregistrer la puissance du faisceau vert doublé.

D.3.2 Images doublées

Les résultats de doublage de fréquence d'images sont présentés sur la figure 2.29 pour différentes images. La forme générale des images est conservée, ce qui prouve que le doublage de fréquence est possible sur plusieurs modes. On remarque cependant que la qualité des images vertes de fréquence double est dégradée par rapport à celle des images de la longueur d'onde fondamentale. Le doublage de fréquence n'est donc pas possible pour une infinité de modes. Ce problème est dû notamment à la diffraction sur la longueur du cristal, différente pour les deux longueurs d'ondes. Au long de la diffraction dans le cristal, les images vertes créées à différentes positions longitudinales du cristal interfèrent. Cet effet est présenté en détail dans le paragraphe suivant.

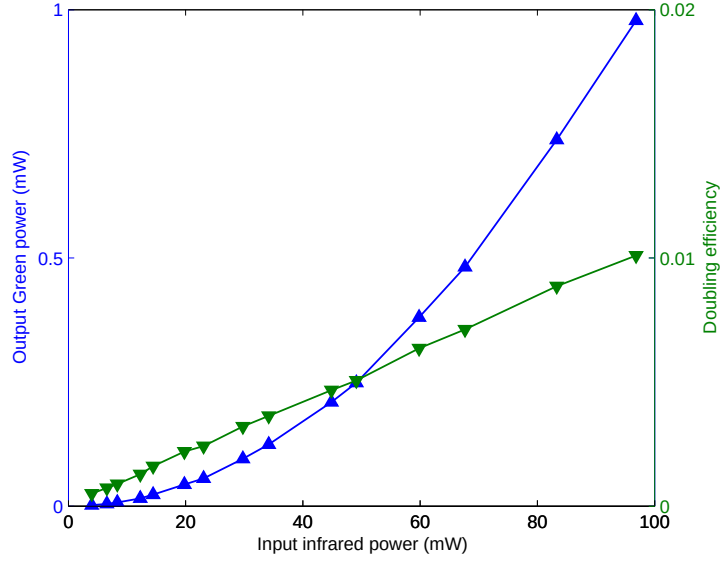


Figure 2.30: Puissance de verte produite (en bleu) et efficacité du doublage de fréquence (en vert) en fonction de la puissance injectée dans la cavité, pour un mode de profil transverse gaussien.

D.3.3 Etude de l'efficacité de doublage

On peut définir l'efficacité de doublage du dispositif de doublage de fréquence comme la puissance du faisceau doublé en sortie divisée par la puissance du faisceau de longueur d'onde fondamentale en entrée :

$$\eta = \frac{P_{532 \text{ nm}}}{P_{1064 \text{ nm}}} \quad (2.153)$$

On s'attend à ce que ce paramètre dépende de la puissance injectée dans le doubleur, puisque le doublage de fréquence est un effet non linéaire. On a donc mesuré cette efficacité pour plusieurs puissances d'entrée, pour le même profil spatial du faisceau fondamental, un faisceau gaussien de waist $w_0 = 300 \mu\text{m}$ au niveau du cristal. Le résultat de ces mesures est représenté sur la figure 2.30. La courbe bleue représente la puissance du faisceau vert produit, et la courbe verte l'efficacité de doublage correspondante. On observe bien la dépendance linéaire attendue de l'efficacité du doublage de fréquence en fonction de la puissance totale injectée dans la cavité pour un même profil de faisceau. La valeur maximale de l'efficacité de doublage est de 1% environ. Cette valeur assez faible s'explique par la largeur du faisceau et la finesse relativement faible de la cavité (60).

Pour caractériser complètement l'efficacité de doublage de différents modes transverses, nous avons injecté des images de profils transverses plus complexes, et calculé l'efficacité de doublage dans ces différents cas. On s'attend à ce que le doublage de fréquence dépende de l'intensité locale du faisceau fondamental.

Doublage d'une fente de largeur variable Il est intéressant de comparer le comportement du doublage de fréquence pour des images de tailles différentes. Pour cela, nous avons grossi la taille du faisceau au niveau du cristal jusqu'à un waist de $w_0 = 1.1 \text{ mm}$, pour pouvoir considérer le faisceau comme une onde plane sur une large étendue transverse. À l'aide de deux lames de rasoir situées à la place de la mire de résolution en champ

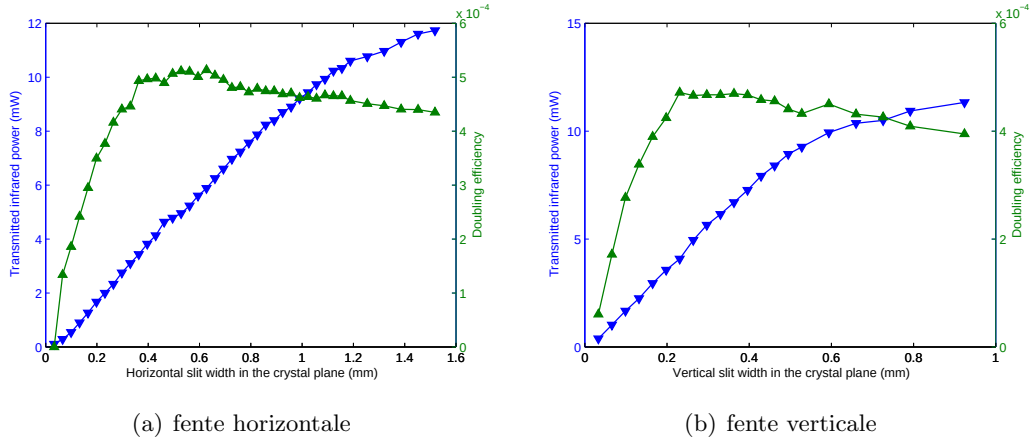


Figure 2.31: Résultats de l'expérience de doublage d'une fente horizontale et verticale de largeur variable. La courbe bleue représente l'intensité infrarouge injectée dans la cavité, en fonction de la largeur de la fente. La courbe verte représente l'efficacité de doublage en fonction de la largeur de la fente.

proche du cristal, nous avons injecté dans la cavité l'image d'une fente dont on contrôle la largeur à l'aide de l'espacement entre les lames de rasoirs. Le point clé de cette expérience est que l'on peut considérer l'intensité locale du faisceau fondamental comme constante. Nous avons ensuite mesuré la puissance infrarouge transmise et la puissance créée par doublage de fréquence ; puis calculé l'efficacité de doublage en fonction de la largeur de la fente.

Les résultats de cette expérience sont présentés sur la figure 2.31 pour des fentes horizontales et verticales. Dans chaque cas, on a représenté en bleu la puissance infrarouge transmise par la cavité en fonction de la largeur de l'image de la fente au niveau du cristal. On remarque que cette puissance est d'abord linéaire, un faisceau deux fois plus large a une intensité deux fois plus grande. Ceci prouve que le faisceau peut bien être considéré comme une onde plane, et que l'intensité locale est constante, ce qui est important pour l'analyse des résultats de doublage. Pour des largeurs de fente trop grande, le profil gaussien du faisceau fondamental apparaît et l'intensité transmise n'est plus linéaire.

La courbe verte représente l'efficacité de doublage en fonction de la largeur de la fente au niveau du cristal. Cette efficacité croît rapidement jusqu'à une certaine largeur de fente d'environ $200 \mu\text{m}$ pour la fente verticale et $300 \mu\text{m}$ pour la fente horizontale, puis atteint un plateau, très légèrement décroissant. Ce plateau s'interprète comme une preuve du caractère local du doublage de fréquence : l'efficacité de doublage est ici constante par rapport à la taille de l'image doublée, bien que la puissance totale injectée soit croissante. La légère décroissance pour des tailles de fente large est due au profil gaussien du faisceau fondamental, qui se manifeste pour des largeurs de fente dont la taille est de l'ordre du waist $w_0 = 1.1 \text{ mm}$.

L'interprétation de la croissance rapide de l'efficacité de doublage pour des fentes fines est plus subtile : il s'agit en fait d'un phénomène de diffraction de l'image sur la longueur du cristal. Les détails fins d'une image diffractent plus que les détails grossiers. La diffraction

le long du cristal n'est pas identique pour le faisceau fondamental et le faisceau doublé. Le calcul complet du profil transverse d'une image de fréquence double le long d'un cristal de longueur finie l_c est détaillé à l'annexe A. Le calcul conduit à la formule suivante pour l'amplitude $B(\boldsymbol{\rho})$ de l'image à $2\omega_0$ dans le plan central du cristal en fonction de l'amplitude $A(\boldsymbol{\rho})$ de l'image injectée dans le plan central :

$$B(\boldsymbol{\rho}) = \frac{2i\zeta k_0}{\pi} \int d(\boldsymbol{\rho}') A(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}') A(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \Delta(\boldsymbol{\rho}') \quad (2.154)$$

avec $\Delta(\boldsymbol{\rho}')$ une fonction caractérisant la diffraction :

$$\Delta(\boldsymbol{\rho}') = \frac{\pi}{2} - \text{Sine} \left(\frac{|\boldsymbol{\rho}'|^2}{l_{coh}^2} \right) \quad (2.155)$$

$$l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda_0 l_c}{4\pi n(\omega_0)}} \quad (2.156)$$

où la fonction Sine est le sinus intégral. Si l'on considère l'image d'une fente de largeur b dans le plan central du cristal, et qu'on ne tient compte que de la diffraction sur une dimension transverse⁶ l'image doublée s'écrit :

$$B(x) = \begin{cases} \pi(b - |x|) - 2 \int_0^{b-|x|} \text{Sine}\left(\frac{u^2}{l_{coh}^2}\right) du & \text{si } |x| < b \\ 0 & \text{si } |x| \geq b \end{cases} \quad (2.157)$$

Cette formule permet de calculer le profil dans le plan central du cristal de l'image de fréquence double d'une fente de largeur quelconque, ce qui est représenté sur la figure 2.32. La formule 2.156 donne $l_{coh} = 22 \mu\text{m}$ pour un cristal de longueur $l_c = 10 \text{ mm}$ et d'indice 1,8. On constate que seuls les bords des fentes sont affectés par la diffraction, sur des largeurs de l'ordre de l_{coh} . La fente de largeur $b = l_{coh}$ est donc complètement déformée. La résolution de notre système d'imagerie dans notre expérience ne nous a pas permis de mesurer cet effet quantitativement, même si on voit les déformations sur les images doublées.

Par contre, on peut calculer l'efficacité totale η du doublage d'une fente de largeur b en fonction de b .

$$\eta = \frac{\int d\boldsymbol{\rho} B(\boldsymbol{\rho})^2}{\int d\boldsymbol{\rho} A(\boldsymbol{\rho})^2} \quad (2.158)$$

$$\propto \frac{1}{b} \int d\boldsymbol{\rho} B(\boldsymbol{\rho})^2 \quad (2.159)$$

À l'aide d'intégrations numériques effectuées avec Mathematica, cette efficacité a été calculée pour plusieurs valeurs de b par rapport à la largeur de la cohérence l_{coh} . La courbe est représentée sur la figure 2.33. On observe le même comportement que ce que l'on a obtenu expérimentalement, avec une augmentation rapide de l'efficacité de doublage pour des fentes fines, puis un plateau à partir de $\frac{b}{l_{coh}} \approx 10$. La valeur pour laquelle on observe le plateau sur les courbes théoriques et expérimentales (figure 2.31) est proche. La courbe théorique ne décroît pas comme la courbe expérimentale car on a négligé le profil gaussien des fentes larges dans les simulations numériques. On peut donc considérer que la mesure de l'efficacité de doublage d'une fente de largeur variable permet d'obtenir une valeur expérimentale de la largeur de cohérence l_{coh} .

6. Cette hypothèse est valable car la longueur de la fente a la taille du waist du faisceau fondamental, grande devant la largeur de cohérence l_{coh} , et on peut négliger les effets de diffraction sur cette dimension.

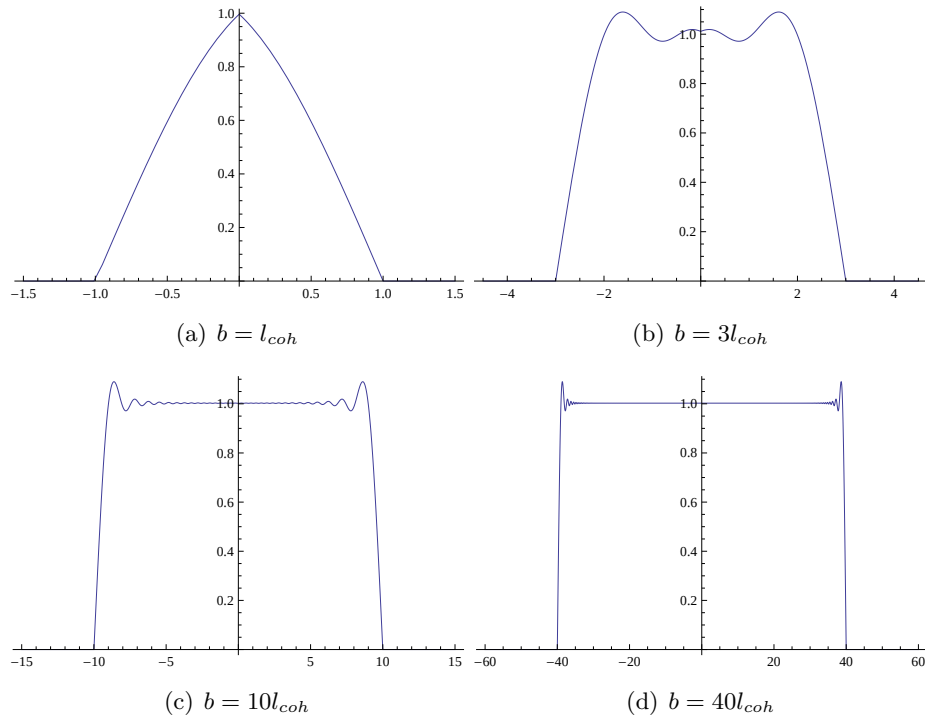


Figure 2.32: Profil d'amplitude $B(x)$ du doublage de fréquence d'une fente de largeur b variable en fonction de l'abscisse normalisée $\frac{x}{l_{coh}}$

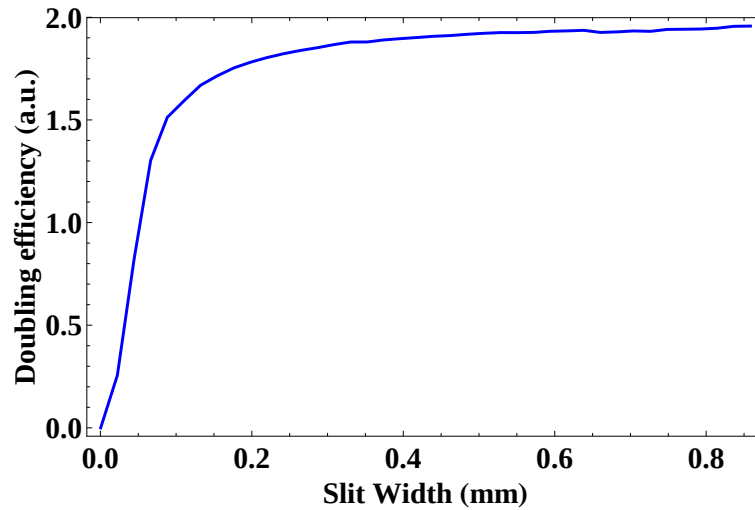


Figure 2.33: Calcul théorique de l'efficacité de doublage d'une fente illuminée par une onde plane en fonction de sa largeur b pour un cristal de largeur de cohérence $l_{coh} = 22 \mu\text{m}$. L'échelle verticale est en unités arbitraires.

Bande passante spatiale du doublage de fréquence Les courbes précédentes d'efficacité de doublage d'une fente de largeur variable peuvent être considérées comme un graphe de la bande passante spatiale du dispositif de doublage de fréquence en cavité auto-imageante. Le doublage de fréquence d'une image conduit naturellement à une efficacité plus faible pour les bords de l'image sur des largeurs de l'ordre de l_{coh} , qui vaut $\approx 20 \mu\text{m}$ dans nos expériences usuelles. On peut d'ailleurs noter que ceci n'est pas dû à la présence d'une cavité mais uniquement aux effets de propagation en simple passage dans le cristal. L'alignement de notre dispositif est donc suffisant pour le doublage. Pour optimiser l'uniformité de l'efficacité du doublage de fréquence d'une image, la seule solution est d'utiliser un cristal non linéaire plus fin, mais ceci conduira à une chute de l'efficacité totale de doublage, ce qui rend d'autant plus importante la présence d'une cavité pour augmenter l'intensité du champ de fréquence fondamentale.

La taille maximale des images que l'on peut doubler est liée principalement à la taille du cristal non-linéaire, en général plus faible que le diamètre des autres optiques utilisées dans les expériences. Il y a là encore deux effets opposés : les cristaux non-linéaires les plus efficaces sont les cristaux à quasi-accord de phase. Or la fabrication de ces cristaux leur impose une largeur faible⁷. Il y a donc un compromis à trouver entre efficacité totale de doublage, et taille maximale des images que l'on souhaite doubler.

D.4 Conclusion

Nous avons étudié les propriétés théoriques d'une cavité autoimageante linéaire, sa stabilité, et le nombre de modes transverses résonants dans cette cavité. Cette étude a ensuite été mise au profit de l'expérience puisque nous avons montré la transmission d'images dans une telle cavité. Nous avons également été amenés à développer les techniques expérimentales nécessaires à l'alignement subtil de ce cavité, à la limite de la dégénérescence. Les images transmises par la cavité sont de bonne qualité, et les résultats expérimentaux du nombre de modes résonants dans cette cavité coïncident avec les prédictions théoriques, compte tenu de la précision avec laquelle nous avons aligné les éléments optiques de la cavité.

Nous avons également étudié le doublage de fréquence d'images dans cette cavité à l'aide d'un cristal non-linéaire $\chi^{(2)}$. La stabilité de la cavité nous a permis de montrer le doublage de fréquence de nombreux modes transverses, quand la cavité reste asservie à une même résonance. L'étude de l'efficacité de doublage dans cette cavité est en accord avec les prédictions théoriques, et fait apparaître expérimentalement la valeur de la largeur de cohérence et la bande passante spatiale du dispositif de doublage.

7. Le retournement de la polarisation des domaines sur des périodes de l'ordre de $10 \mu\text{m}$ se fait en appliquant un champ électrique constant très grand entre les deux faces du cristal. La tension à appliquer croît donc avec l'épaisseur du cristal.

E Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques outils nécessaires pour manipuler les différents modes que peut avoir un faisceau laser dans deux cas distincts. D'une part en considérant les modes transverses d'un faisceau laser. Les modes gaussiens sont les modes les plus adaptés aux cavités optiques et à la propagation. Cependant, on peut utiliser des techniques d'imagerie et des cavités dégénérées pour adapter une expérience à l'utilisation de modes transverses quelconques. Nous avons ainsi montré la transmission d'images et le doublage de fréquences d'images dans une cavité complètement dégénérée, résonante pour tous les modes transverses d'une même fréquence.

D'autre part, nous avons considéré les modes longitudinaux d'un faisceau laser dans le cas de trains d'impulsions courtes femtoseconde. Lorsqu'elles sont produites par un laser à verrouillage de modes, ces impulsions correspondent dans le domaine spectral à un peigne de fréquence. Nous avons rappelé les équations de propagation d'une impulsion courte et étudié la résonance d'un peigne de fréquence dans une cavité synchrone, c'est-à-dire dont la longueur est égale à la distance entre impulsions successives. Enfin, on a présenté les outils généralement utilisés pour caractériser et mettre en forme de telles impulsions.

Ces deux approches nous ont permis de dresser un parallèle intéressant entre modes transverses et modes longitudinaux, qui est utile pour comprendre la transposition des phénomènes étudiés d'un domaine à l'autre.

Théorie des OPO multimodes

Sommaire

A	Optique non linéaire	95
A.1	Généralités sur l'optique non linéaire d'ordre deux	95
A.2	Doublage de fréquence	97
A.3	Conversion paramétrique	101
B	Approche hamiltonienne de l'interaction paramétrique multi-mode	105
B.1	Conversion paramétrique multimode spatiale dans un cristal d'épaisseur non négligeable	105
B.2	Conversion paramétrique multimode spectrale	109
B.3	Comparaison des matrices de couplages spatial et spectral	114
B.4	Diagonalisation et états propres du couplage paramétrique	114
C	Equations d'évolution générales de l'OPO multimode	120
C.1	OPO dégénéré <i>monomode</i>	120
C.2	Modèle général des OPO multimodes	127
C.3	Effets classiques dans les OPO multimodes	129
C.4	Effets quantiques dans les OPO multimodes	131
D	Conclusion	135

LES systèmes multimodes sont de plus en plus utilisés en optique quantique. Dans le cadre du traitement quantique de l'information, ils permettent en particulier un traitement multiplexé des ressources que sont aujourd'hui devenus les états non-classiques de la lumière. Plusieurs chemins sont possibles pour obtenir des états multimodes. On peut utiliser la conversion en simple passage, générant des paires de photons uniques intriqués dans des états qui peuvent être multimodes [Avenhaus 08]. En variables continues, les oscillateurs paramétriques optiques (OPO) sont une technique privilégiée pour produire des états non-classiques. Une approche utilise le mélange d'états non-classiques produits par des OPO monomodes [Yukawa 08]. Nous sommes intéressés par l'utilisation d'OPO multimodes pour produire directement des états non-classiques multimodes. Ce type de dispositif simplifie les asservissements de phase nécessaires quand

on mélange plusieurs faisceaux sur une lame semi-réfléchissante, et est a priori plus compact.

L'objectif de ce chapitre est d'établir un modèle général pour décrire le comportement d'un OPO multimode, de la manière la plus générale possible. Un tel OPO nécessite une cavité résonante pour plusieurs modes, comme celles décrites dans le chapitre précédent dans le cas des modes transverses et des peignes de fréquences. Il est de plus nécessaire d'utiliser un cristal non-linéaire et une pompe permettant la conversion paramétrique de photons dans plusieurs modes résonants dans la cavité. La première partie de ce chapitre présente des rappels d'optique non-linéaire d'ordre deux en insistant sur le caractère multimode. Ce traitement conduit en particulier aux calculs théoriques du profil transverse du doublage de fréquence d'une image, et du profil spectral du doublage de fréquence d'un peigne de fréquence. La deuxième partie revient sur un traitement hamiltonien multimode de la conversion paramétrique dans le cas des modes transverses et des modes longitudinaux. On montre que l'on peut toujours décrire l'interaction non-linéaire avec la pompe par un hamiltonien quadratique entre différents modes. Cela conduit en particulier à une diagonalisation du hamiltonien qui fait apparaître les modes propres de l'interaction non-linéaire. Enfin, à partir de la forme générale d'un hamiltonien quadratique symétrique, on peut décrire le comportement et les états non-classiques produits par un OPO multimode quelconque.

A Optique non linéaire

A.1 Généralités sur l'optique non linéaire d'ordre deux

A.1.1 Polarisation non linéaire d'ordre deux

L'interaction du champ électromagnétique avec les atomes d'un milieu non-linéaire donne naissance à une polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ que l'on développe habituellement en puissance de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ¹.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

Le terme linéaire $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ de cette polarisation est à l'origine de l'indice optique du milieu et de son éventuelle absorption. On écrit habituellement [Boyd 03] $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) = \chi^{(1)} \omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$. Nous allons dans ce chapitre nous intéresser exclusivement à la polarisation $P^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ d'ordre 2. En utilisant la transformée de Fourier temporelle de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, on peut réécrire l'équation précédente pour faire apparaître le tenseur susceptibilité d'ordre deux $\chi_{i,j,k}^{(2)}$:

$$P_j^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int \frac{d\omega_1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{2\pi}} \chi_{j,i_1,i_2}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \tilde{E}_{i_1}(\mathbf{r}, \omega_1) \tilde{E}_{i_2}(\mathbf{r}, \omega_2) e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \quad (3.2)$$

$$\tilde{P}_j^{(2)}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \int \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} \chi_{j,i_1,i_2}^{(2)}(\omega - \omega', \omega') \tilde{E}_{i_1}(\mathbf{r}, \omega - \omega') \tilde{E}_{i_2}(\mathbf{r}, \omega') \quad (3.3)$$

Un cristal non-linéaire d'ordre deux est décrit intégralement par son tenseur $\chi_{i,j,k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$. On se place généralement dans une base de vecteurs de l'espace qui permet une écriture simple de $\chi_{i,j,k}^{(2)}$ dont on ne garde qu'un seul terme². Dans la suite de cette thèse, on simplifie l'écriture en oubliant les indices i, j, k , et on considère implicitement les ondes polarisées selon les axes tels que $\chi_{i,j,k}^{(2)}$ soit non nul et on ne garde qu'un seul terme de la polarisation, et on écrit des grandeurs scalaires. Les grandeurs $E(\mathbf{r}, t)$ et $P(\mathbf{r}, t)$ sont réelles, on a donc :

$$\tilde{E}(-\omega) = \tilde{E}(\omega)^* \quad (3.4)$$

$$\tilde{P}(-\omega) = \tilde{P}(\omega)^* \quad (3.5)$$

On peut en déduire, d'après l'équation 3.3

$$\chi^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2) = \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2)^* \quad (3.6)$$

La polarisation non-linéaire d'ordre deux peut donner naissance à plusieurs effets non-linéaires en fonction du signe de ω_1 et ω_2 et dont on peut donner une image corpusculaire.

1. $\chi^{(2)}(\omega, \omega)$: doublage de fréquence. Deux photons de même fréquence donnent naissance à un photon de fréquence double, donc d'énergie double.

1. Ce développement est légitime dans la mesure où l'on suppose le champ lumineux très inférieur au champ électromagnétique d'origine atomique, ce qui est toujours le cas pour des faisceaux lasers utilisés dans nos laboratoires.

2. Plus précisément, on utilise des cristaux non-linéaires dont les angles de coupe permettent de simplifier l'écriture de ce tenseur de susceptibilité.

2. $\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$: somme de fréquence. Deux photons de fréquences différentes donnent naissance à un photon de fréquence somme.
3. $\chi^{(2)}(\omega, -\omega)$: redressement optique.
4. $\chi^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$: différence de fréquences ou conversion paramétrique. Un photon pompe donne naissance à deux photons signal et complémentaire
5. $\chi^{(2)}(\omega, 0)$: effet électro-optique.

où tous les ω_i sont pris positifs. On ne s'intéresse ici qu'aux effets paramétriques, c'est-à-dire le doublage, la somme ou la différence de fréquence. Dans les cas réels, tous les phénomènes de conversion sont possibles. Cependant, l'efficacité de ces effets non linéaires dépend de l'amplitude des différents champs présents dans le cristal, des coefficients non-linéaires et des conditions d'accord de phase. On peut donc généralement isoler un processus dominant, correspondant à la conversion des photons dans le mode d'amplitude dominante vers les modes de plus faible amplitude.

En présence d'une polarisation du second ordre, l'équation de propagation du champ $\mathbf{E}$ s'écrit :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(2)}}{\partial t^2} \right) \quad (3.7)$$

Si l'on introduit l'enveloppe spatiale $A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$ du champ de fréquence ω et de polarisation $\vec{\epsilon}$, de sorte que le champ s'écrive :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)z)} \vec{\epsilon} \quad (3.8)$$

avec $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi^{(1)}(\omega)}$, l'équation de propagation s'écrit pour $A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$:

$$\Delta_{\perp} A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{\omega^2}{c^2} \int \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} \chi^{(2)}(\omega - \omega', \omega') A(\mathbf{r}, \omega - \omega') A(\mathbf{r}, \omega') e^{i\Delta k(\omega, \omega')z} \quad (3.9)$$

où $\Delta k(\omega, \omega')$ est appelé accord de phase et vaut :

$$\Delta k(\omega, \omega') = k(\omega - \omega') + k(\omega') - k(\omega) \quad (3.10)$$

Cette notation simplifiée implique que l'on considère pour chaque onde le vecteur d'onde de la polarisation dont on tient compte. Par ailleurs, on a toujours :

$$A(\boldsymbol{\rho}, z, -\omega) = A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)^* \quad (3.11)$$

A.1.2 Hamiltonien non linéaire

La densité d'énergie du champ électromagnétique s'écrit classiquement dans le vide

$$u_{em}^{libre} = \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \quad (3.12)$$

Dans un milieu possédant une polarisation $\mathbf{P}$ non nulle, le champ $\mathbf{E}$ doit être remplacé par $\mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}$. Le développement de $|\mathbf{E}|^2$ conduit à un terme linéaire et un terme quadratique

en $\mathbf{P}$. Si l'on suppose $\mathbf{P}$ faible devant $\epsilon_0 \mathbf{E}$, on peut oublier le terme quadratique, et la densité d'énergie électromagnétique s'écrit :

$$u_{em} = u_{em}^{\text{libre}} + u_{em}^{\text{non-linéaire}} \quad (3.13)$$

$$u_{em}^{\text{non-linéaire}} = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{P} \mathbf{E}^* + \mathbf{E} \mathbf{P}^*) \quad (3.14)$$

Si l'on considère la polarisation du second ordre $\chi^{(2)}$ comme développée au paragraphe précédent, on peut écrire le hamiltonien non linéaire d'un cristal de longueur l_c :

$$H^{\text{non-linéaire}} = \frac{\epsilon_0^2}{2} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz \int d\boldsymbol{\rho} \int \frac{d\omega_1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d\omega_3}{\sqrt{2\pi}} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \times \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega_1) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega_2) \tilde{E}^*(\mathbf{r}, \omega_3) + \text{cc} \\ & = \frac{\epsilon_0^2}{2} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz \int d\boldsymbol{\rho} \int \frac{d\omega_1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{d\omega_3}{\sqrt{2\pi}} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \quad (3.16) \\ & \times A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_1) A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_2) A^*(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_3) e^{i(k(\omega_1) + k(\omega_2) - k(\omega_3))z} + \text{cc} \end{aligned}$$

Le hamiltonien non-linéaire quantique peut être obtenu simplement à partir de l'expression précédente en remplaçant l'amplitude de l'enveloppe du champ $A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$ par son analogue quantique. Il s'agit de l'opérateur d'annihilation local $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$. La constante de normalisation entre $A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$ et $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$ est différente du cas d'une famille discrète de modes, les ondes planes par exemple. On doit avoir nécessairement :

$$[\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega), \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', z, \omega)] = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (3.17)$$

et on remplace donc $A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$ par $i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L}} \hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$ où L est la taille de la boîte de quantification longitudinale. Une version détaillée de la définition des opérateurs $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z)$ peut être trouvée dans [Treps 01]. Il peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= i\hbar g \int_{l_c/2}^{l_c/2} dz \int d\boldsymbol{\rho} \int d\omega_1 \int d\omega_2 \int d\omega_3 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \\ & \times \hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_1) \hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_2) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_3) e^{i(k(\omega_1) + k(\omega_2) - k(\omega_3))z} + \text{hc} \quad (3.18) \end{aligned}$$

Cette expression du hamiltonien sera dans la suite simplifiée pour ne garder que les dépendances spatiales ou spectrales.

A.2 Doublage de fréquence

Le doublage de fréquence, ou génération de deuxième harmonique (*second-harmonic generation* en anglais) correspond à la conversion de deux photons identiques en un photon de fréquence, donc d'énergie, double. Ce processus non linéaire correspond au terme $\chi^{(2)}(\omega, \omega)$ de la polarisation non linéaire.

A.2.1 Doublage de fréquence monomode

Pour décrire le doublage de fréquence d'une onde plane monochromatique de fréquence ω_0 , les champs de fréquences ω_0 et $2\omega_0$ sont décrits par $A(z, \omega_0)$ et $A(z, 2\omega_0)$. On peut alors écrire l'équation 3.9 sous la forme :

$$2ik(2\omega_0) \frac{\partial A}{\partial z}(\boldsymbol{\rho}, z, 2\omega_0) = -\frac{4\omega_0^2}{c^2} \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_0) A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_0)^2 e^{i\Delta k z} \quad (3.19)$$

où

$$\Delta k = 2k(\omega_0) - k(2\omega_0) = \frac{2\omega_0}{c}(n(\omega_0) - n(2\omega_0)) \quad (3.20)$$

est appelé accord de phase (*phase-matching* en anglais).

Si l'on suppose de plus l'efficacité de doublage suffisamment faible pour pouvoir considérer $A(z, \omega_0) = A_0$ peu modifié lors de la propagation, alors $A(z, 2\omega_0)$ vérifie l'équation différentielle simple :

$$\frac{\partial A}{\partial z}(z, 2\omega_0) = i \frac{\omega_0 \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_0)}{n(2\omega_0)c} A_0^2 e^{i\Delta k z} \quad (3.21)$$

Dans le cas du doublage dans un cristal de longueur L , cette équation se résout simplement, en fonction de la valeur de l'accord de phase Δk :

$$A(L, 2\omega_0) = \begin{cases} i \frac{2\omega_0 \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_0)}{n(2\omega_0)c} A_0^2 \frac{\sin(\frac{\Delta k L}{2})}{\Delta k} & \text{si } \Delta k \neq 0 \\ i \frac{2\omega_0 \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_0)}{n(2\omega_0)c} A_0^2 z & \text{si } \Delta k = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Il apparait donc intéressant d'assurer l'accord de phase parfait $\Delta k = 0$, c'est-à-dire $n(\omega) = n(2\omega_0)$ pour maximiser l'efficacité du doublage. Cela nécessite en général une découpe particulière du cristal selon certains axes. La non-linéarité $\chi^{(2)}$ n'est pas nécessairement maximale dans ce cas.

A.2.2 Quasi-accord de phase

Une autre technique est possible : le quasi-accord de phase [Fejer 92, Byer 97], illustré sur la figure 3.1. On choisit ici de se placer selon l'axe de propagation qui possède la plus forte non-linéarité. L'accord de phase Δk n'est alors pas nécessairement nul, et l'amplitude du champ doublé oscille longitudinalement avec une période $\frac{2}{\Delta k}$ et est donc maximale après une propagation sur une distance $l = \frac{1}{\Delta k}$. Cette oscillation est en fait due à l'interférence entre le doublage de fréquence engendré au point z et celui engendré plus tôt dans le cristal qui accumule une phase différente. Pour maximiser l'efficacité de doublage, on inverse le signe du coefficient non linéaire avec une période longitudinale de $\Lambda = \frac{2\pi}{\Delta k}$, en inversant le coefficient ferro-électrique du cristal, ce qui change le signe de $\chi^{(2)}$.

On peut dans ce cas écrire la susceptibilité non-linéaire comme une fonction périodique en créneau de période $\frac{2\pi}{\Delta k}$ [Boyd 03] :

$$\chi^{(2)}(z) = \chi^{(2)} \text{sign}(\cos(\Delta k z)) \quad (3.23)$$

La fonction $\chi^{(2)}$ est périodique et peut être développée en série de Fourier :

$$\chi^{(2)}(z) = \chi^{(2)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) e^{-im\Delta k z} \quad (3.24)$$

L'équation de propagation de doublage 3.21 devient :

$$\frac{\partial A}{\partial z}(z, 2\omega_0) = i \frac{\omega_0 \chi^{(2)}(\omega_0, \omega_0)}{n(2\omega_0)c} A_0^2 \sum_m \frac{2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) e^{i(1-m)\Delta k z} \quad (3.25)$$

Le terme fondamental $m = 1$ de cette équation est prépondérant car il correspond à un accord de phase parfait. On peut comprendre ce phénomène de la façon suivante : l'accord

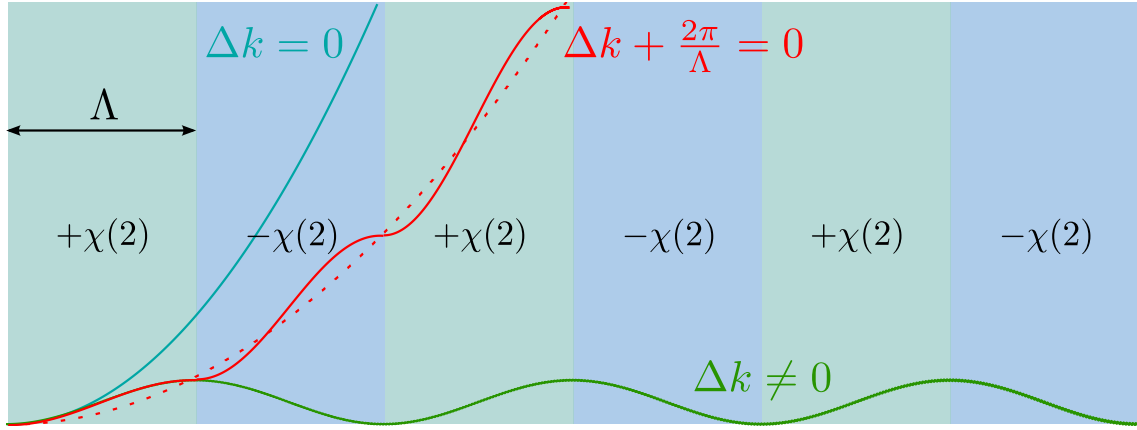


Figure 3.1: Principe de fonctionnement du quasi-accord de phase : le signe de la susceptibilité non linéaire $\chi^{(2)}$ est inversé sur des périodes de longueur $\frac{2\pi}{\Delta k}$ pour maximiser l'interaction paramétrique.

de phase Δk est complété par la maille périodique du cristal, pour former un accord de phase effectif égal strictement à zéro :

$$\Delta k_{\text{eff}} = \Delta k - \frac{2\pi}{\Lambda} = 0 \quad (3.26)$$

Les autres termes du développement en série de Fourier conduisent à des champs dont l'amplitude oscille avec une période égale à Λ . Leurs amplitudes dégradent l'amplitude du champ doublé. On peut montrer que l'intensité du champ doublé est dans ce cas égale à 40 % de l'amplitude que l'on aurait obtenue avec un accord de phase et l'on peut caractériser le quasi-accord de phase par un coefficient non-linéaire d_{eff} . Le gain total sur le coefficient non-linéaire est en général grand, et l'efficacité de doublage est meilleure avec le quasi-accord de phase qu'avec l'accord de phase par biréfringence.

A.2.3 Doublage de fréquence d'une image

Le doublage de fréquence d'un faisceau de profil transverse peut être traité de la même façon que celui d'un faisceau quelconque si les effets de la diffraction peuvent être négligés, c'est-à-dire si la longueur du cristal est petite devant la longueur de Rayleigh du faisceau initial à la fréquence ω_0 . L'étude des propriétés transverses du doublage de fréquence de faisceaux gaussiens d'ordres élevés a été décrite dans [Delaubert 07a, Delaubert 07b], et dans [Scotto 02].

Dans le cas du doublage d'une image de profil transverse quelconque, on doit résoudre l'équation de propagation :

$$\Delta_{\perp} A(\boldsymbol{\rho}, z, 2\omega_0) + 2ik(2\omega_0) \frac{\partial A}{\partial z}(\boldsymbol{\rho}, z, 2\omega_0) = -\frac{4\omega_0^2}{c^2} \chi^{(2)} A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_0)^2 e^{i\Delta k z} \quad (3.27)$$

Le calcul complet est effectué dans l'annexe A.

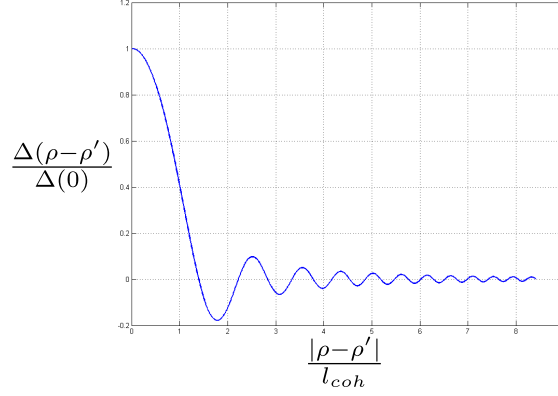


Figure 3.2: Allure de la fonction $\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$ en fonction de $\frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{l_{coh}}$.

On trouve finalement :

$$B(\boldsymbol{\rho}) = \frac{2i\zeta k_0}{\pi} \int d\boldsymbol{\rho}' A(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}') A(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \Delta(\boldsymbol{\rho}') \quad (3.28)$$

$$\Delta(\boldsymbol{\rho}') = \frac{\pi}{2} - \text{Sine}\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}'|^2}{l_{coh}^2}\right) \quad (3.29)$$

$$\text{Sine}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du \quad (3.30)$$

$$l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda_0 l_c}{4\pi n(\omega_0)}} \quad (3.31)$$

Cette formule générale permet de calculer le profil transverse d'une image doublée dans un cristal d'épaisseur non négligeable. La diffraction n'est pas identique pour les champs de fréquences ω_0 et $2\omega_0$ et $B(\boldsymbol{\rho})$ s'exprime donc comme une sorte de produit d'auto-convolution de l'image fondamentale, multipliée par la fonction caractéristique de la diffraction, dont la largeur caractéristique est l_{coh} , représentée sur la figure 3.2. Cette formule a été utilisée pour calculer l'efficacité attendue de doublage d'une fente de largeur variable dans une cavité auto-imageante à la section D.3 du chapitre précédent. l_{coh} est la largeur de cohérence transverse du processus de doublage de fréquence, et nous avons montré qu'elle définit la taille transverse de la plus petite image qui peut être doublée dans un cristal de longueur l_c . Les expériences d'efficacité de doublage sont en accord avec la théorie, et peuvent constituer une mesure expérimentale de la largeur de cohérence.

A.2.4 Doublage de fréquence d'un peigne de fréquence

Pour décrire le doublage de fréquence d'un peigne de fréquence, on doit considérer toutes les fréquences $\omega_p = \omega_0 + p\Omega$ composant le peigne initial. Pour simplifier, on s'affranchit des effets transverses et on oublie le terme $\Delta_{\perp} A$ dans l'équation 3.9. L'intégrale sur les fréquences ω' peut être remplacée par une somme sur les fréquences ω_p du peigne initial. On peut également négliger la dépendance spectrale de $\chi^{(2)}$, ce qui revient à supposer que l'interaction paramétrique est instantanée, hypothèse vérifiée par les cristaux usuels. Le peigne doublé sera décrit par les fréquences $\omega_r = 2\omega_0 + r\Omega$ qui vérifieront les

équations :

$$\frac{\partial A}{\partial z}(\omega_r) = i \frac{\omega_r}{n(\omega_r)c} \sum_p \chi^{(2)} A(\omega_0 + (r-p)\Omega) A(\omega_0 + p\Omega) e^{i\Delta k_{rp}z} \quad (3.32)$$

avec

$$\Delta k_{rp} = k(\omega_0 + (r-p)\Omega) + k(\omega_0 + p\Omega) - k(2\omega_0 + r\Omega) \quad (3.33)$$

On peut éventuellement développer l'expression de $k(\omega)$ autour des pulsations ω_0 et $2\omega_0$ en utilisant un développement de Taylor. Le peigne de fréquence doublé a un taux de répétition identique au peigne initial, son spectre est proche d'un produit d'auto-convolution du spectre initial si l'on néglige le terme d'accord de phase $e^{i\Delta k_{rp}z}$ sur toute la largeur du spectre. Cette conclusion peut être facilement interprétée dans le domaine temporel : les impulsions initiales sont doublées une à une, conduisant à des impulsions doublées avec un taux de répétition identique, et si le cristal est suffisamment court, les impulsions doublées ont un profil temporel égal au carré des impulsions initiales, ce qui correspond bien à un produit d'autoconvolution dans le domaine spectral. Négliger le terme d'accord de phase $e^{i\Delta k_{rp}z}$ revient à considérer que les impulsions initiales et doublées se propagent avec la même vitesse de groupe et la même vitesse de phase dans le cristal. Dans ce cas, on peut considérer que la largeur du spectre des impulsions doublées est égale à la largeur du spectre des impulsions initiales multipliée par $\sqrt{2}$.

Si le cristal est trop long, l'accord de phase ne peut pas être assuré sur toute la largeur du spectre, et les impulsions doublées sont plus longues. L'approche temporelle permet à nouveau d'expliquer ce phénomène : la légère différence entre les vitesses de groupe et de phase des impulsions initiales et doublées n'est plus négligeable si le cristal est trop long. Dans ce cas, l'impulsion fondamentale crée tout au long du cristal une impulsion de fréquence double qui ne se propage pas de manière identique. Il en résulte que l'impulsion doublée en sortie du cristal est une somme d'impulsions créées à différentes positions dans le cristal, et qui ne sont pas en phase et/ou retardées les unes par rapport aux autres, ce qui crée une impulsion plus longue que l'impulsion initiale.

A.3 Conversion paramétrique

La conversion paramétrique correspond au processus non-linéaire au cours duquel un photon pompe donne naissance à deux photons habituellement appelés signal et complémentaire (*signal and idler* en anglais). Dans la description précédente de la polarisation non linéaire (équation 3.9 par exemple), on ne doit garder que les termes $\chi^{(2)}(\omega_1, -\omega_2)$ où ω_1 est la fréquence du photon pompe, et ω_2 la fréquence du photon signal. On remplace dans ce cas $A(-\omega_2)$ par $A^*(\omega_2)$.

Nous considérons dans cette section uniquement la conversion paramétrique des ondes planes monochromatiques³. Une onde pompe, de fréquence ω_p , d'amplitude $A_p(z)$, traversant un cristal non linéaire $\chi^{(2)}$ peut donner naissance à deux ondes signal et complémentaire, de fréquence ω_s et ω_i , d'amplitude $A_s(z)$ et $A_i(z)$. On considère dans ce cas uniquement la dépendance en z de l'amplitude des ondes.

3. Ce développement reste valable si les faisceaux considérés sont d'extension transverse finie, mais suffisamment large pour négliger la diffraction lors de la propagation dans le cristal.

A.3.1 Equations d'évolutions des modes signal et complémentaire

Comme dans plusieurs ouvrages d'optique non-linéaire ([Boyd 03] par exemple), on écrit pour simplifier les équations d'évolution de l'amplitude du champ dans les modes signal et complémentaire en supposant la pompe suffisamment intense pour négliger les variations de son amplitude le long du cristal. On peut utiliser les variables réduites :

$$\alpha_s(z) = i\sqrt{\frac{n_s c \epsilon_0 L^3}{2\hbar\omega_s}} A_s(z) \quad \alpha_i(z) = i\sqrt{\frac{n_i c \epsilon_0 L^3}{2\hbar\omega_i}} A_i(z) \quad (3.34)$$

n_p, n_s, n_i sont les indices du cristal pour les trois ondes, de sorte que $|\alpha_s|^2$ et $|\alpha_i|^2$ soient homogènes à un nombre de photons dans le volume L^3 . On doit donc résoudre le système :

$$\frac{d\alpha_s}{dz} = G\alpha_i^*(z)e^{i\Delta kz} \quad (3.35)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dz} = G\alpha_s^*(z)e^{i\Delta kz} \quad (3.36)$$

où $g = \sqrt{\frac{\omega_s \omega_i}{n_s n_i}} \frac{\chi^{(2)} A_p}{c}$ est appelé gain paramétrique. On peut choisir la phase de la pompe de telle sorte que G soit réel positif. Δk est appelé accord de phase et vaut :

$$\Delta k = k_p - k_s - k_i = \frac{n_p \omega_p}{c} - \frac{n_s \omega_s}{c} - \frac{n_i \omega_i}{c} \quad (3.37)$$

Dans le cas où l'accord de phase est exactement nul, $\Delta k = 0$, $\alpha_s(z)$ et $\alpha_i(z)$ vérifient la même équation $\frac{d^2 \alpha}{dz^2} = g^2 \alpha$, qui se résout simplement avec les fonctions sinh et cosh. On trouve finalement :

$$\alpha_s(z) = \alpha_s(0) \cosh(Gz) + \alpha_i^*(0) \sinh(Gz) \quad (3.38)$$

$$\alpha_i(z) = \alpha_i(0) \cosh(Gz) + \alpha_s^*(0) \sinh(Gz) \quad (3.39)$$

A.3.2 Amplification sensible et insensible à la phase

Les équations précédentes mettent en évidence le phénomène d'amplification paramétrique : sous l'effet du champ pompe supposé constant, les champs signal et complémentaire ont en sortie du cristal une valeur qui dépend de leurs valeurs initiales, et de l'amplitude du champ pompe, par l'intermédiaire de la constante g . Examinons à présent deux cas possibles d'amplification, en fonction de l'injection du champ signal, avec toujours la condition d'accord de phase $\Delta k = 0$ respectée.

Amplification insensible à la phase Si les modes signal et complémentaire sont différents, et que l'on injecte dans le cristal uniquement un champ signal $\alpha_s(0)$, les champs signal et complémentaire s'écrivent alors :

$$\alpha_s(z) = \alpha_s(0) \cosh(Gz) \quad (3.40)$$

$$\alpha_i(z) = \alpha_s^*(0) \sinh(Gz) \quad (3.41)$$

L'intensité du champ signal sortant $|\alpha_s(L)|^2$ est donc strictement supérieure à l'intensité du champ signal entrant, et par ailleurs indépendante de sa phase.

Amplification sensible à la phase Les équations 3.36 peuvent être découplées en utilisant les fonctions

$$\beta_+(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_s(z) + \alpha_i(z)) \quad (3.42)$$

$$\beta_-(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_s(z) - \alpha_i(z)) \quad (3.43)$$

avec $\beta_+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_s(0) + \alpha_i(0))$ et $\beta_-(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_s(0) - \alpha_i(0))$. Il s'agit en fait d'un simple changement de base de modes. On a alors :

$$\frac{d\beta_+}{dz} = G\beta_+^*(z) \quad (3.44)$$

$$\frac{d\beta_-}{dz} = -G\beta_-^*(z) \quad (3.45)$$

Ce système a pour solution :

$$\beta_+(z) = \beta_+(0) \cosh(Gz) + \beta_+^*(0) \sinh(Gz) \quad (3.46)$$

$$\beta_-(z) = \beta_-(0) \cosh(Gz) - \beta_-^*(0) \sinh(Gz) \quad (3.47)$$

On peut réécrire ce système en sortie du cristal $z = L$ à l'aide des quadratures⁴ β^X et β^P , qui correspondent aux parties réelle et imaginaire du champ β :

$$\beta_+(L) = \beta_+^X(0)e^{GL} + i\beta_+^P(0)e^{-GL} \quad (3.48)$$

$$\beta_-(L) = \beta_-^X(0)e^{-GL} + i\beta_-^P(0)e^{GL} \quad (3.49)$$

Ces équations expriment donc que l'amplification des quadratures X et P n'est pas identique. La quadrature X est définie comme la partie réelle du champ, et correspond en fait à la quadrature du champ pompe à l'entrée du cristal, d'après la référence de phase prise en supposant G réel positif. Pour β_+ , cette quadrature est amplifiée d'un facteur e^{GL} , alors que la quadrature P est désamplifiée d'un facteur e^{-GL} . L'amplification d'un champ injecté dépend donc dans ce cas de sa phase, par rapport à celle du champ pompe. Les quadratures amplifiées et désamplifiées sont inversées pour β_- . On parle dans ce cas d'**amplification sensible à la phase**.

Dans le cas où les champs signal et complémentaire sont complètement dégénérés, α_s et α_i sont identiques et il y a toujours amplification sensible à la phase. Dans le cas où les modes signal et complémentaire ne diffèrent que par leur polarisation (cristal avec accord de phase de type II), les champs $\beta_{\pm}$ correspondent aux polarisations à $\pm 45^\circ$. L'injection d'une des deux polarisations propres du cristal conduit à une amplification insensible à la phase, alors que l'injection d'une polarisation à 45° permet l'amplification sensible à la phase. Ce système rend possible la comparaison de l'amplification sensible à la phase avec l'amplification insensible à la phase dans un système équivalent, c'est-à-dire avec les mêmes coefficients de gain et de perte. Cette approche a été utilisée pour caractériser l'amplification sans bruit d'images [Lopez 08].

4. La définition des quadratures revient à définir une origine des phases pour le champ signal et peut se faire grâce à la définition de la phase de la pompe de sorte que le paramètre G soit réel positif. La relation de phase est maintenue sur toute la propagation, car on a considéré la pompe de fréquence exactement égale au double de la fréquence signal.

A.3.3 Hamiltonien de la conversion paramétrique monomode

On peut écrire le hamiltonien de la conversion paramétrique monomode à partir de l'équation 3.18. Dans ce manuscrit, on suppose que l'on peut négliger les effets quantiques de la conversion paramétrique sur le mode du champ pompe. Cette hypothèse nécessite de considérer des valeurs moyennes des champs signal et complémentaire suffisamment faibles. On décrit donc le champ pompe de façon classique. Le hamiltonien correspondant à l'amplification paramétrique s'écrit simplement pour les modes signal et complémentaire :

$$\hat{H} = i\hbar g \left(A_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger - A_p^* \hat{a}_s \hat{a}_i \right) \quad (3.50)$$

où $\hat{a}_s$ et $\hat{a}_i$ sont respectivement les opérateurs annihilation d'un photon dans les modes signal et complémentaire, A_p l'amplitude du champ pompe et g est le gain⁵.

Dans la base de modes définie par β_+ et β_- auxquels on attribue les opérateurs créations $\hat{b}_+^\dagger$ et $\hat{b}_-^\dagger$, le hamiltonien de l'interaction paramétrique s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{i\hbar g}{2} \left(\hat{b}_+^2 - (\hat{b}_+^\dagger)^2 + \hat{b}_-^2 - (\hat{b}_-^\dagger)^2 \right) \quad (3.51)$$

On peut notamment remarquer que le hamiltonien est diagonal dans cette base.

5. Le gain g n'a dans ce cas pas la même dimension que dans le gain G défini pour l'amplification sensible à la phase qui tient compte de l'amplitude du champ pompe. On peut cependant faire l'approximation $g A_p \frac{n}{c} = G$

B Approche hamiltonienne de l'interaction paramétrique multimode

On a montré dans la section précédente de ce chapitre, que si l'on ne se limite pas à une description monomode, la conversion paramétrique d'un faisceau pompe de profil spectral ou spatial quelconque couple un grand nombre de modes. Ce couplage peut être décrit par un hamiltonien $\hat{H}$ qui s'exprime à l'aide d'une matrice de couplage entre tous les modes. L'objectif de cette section, est d'étudier les similarités et les différences des couplages entre modes transverses d'une part et entre modes longitudinaux d'autre part. On montre ici que l'on peut traiter les deux cas avec le même formalisme hamiltonien, qui conduit à l'apparition de modes propres. Cette nouvelle approche permet une description simplifiée du couplage qui est utile pour décrire le fonctionnement des OPO multimodes.

Les chapitres 5 et 6 approfondissent l'étude de ces couplages paramétriques multimodes dans le cas de deux expériences menées au laboratoire.

B.1 Conversion paramétrique multimode spatiale dans un cristal d'épaisseur non négligeable

B.1.1 Calcul du hamiltonien

Pour décrire l'interaction paramétrique en tenant compte des effets de propagation transverse dans un cristal d'épaisseur non nulle, on reprend ici une description quantique à l'aide des propagateurs de Fresnel, initialement utilisée dans [Lopez 05] et [Lopez 09] pour décrire les effets quantiques dans un oscillateur paramétrique optique dégénéré en fréquence en cavités confocale et auto-imageante. Cette description quantique est générale et peut être utilisée pour décrire des effets transverses classiques si l'on remplace les opérateurs $\hat{a}(\boldsymbol{\rho})$ par la valeur moyenne $\langle \hat{a}(\boldsymbol{\rho}) \rangle$.

On cherche donc à résoudre l'équation de propagation 3.9 en tenant compte du terme de diffraction $\Delta_{\perp} A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)$. La résolution directe n'est pas simple, et on lui préfère une approche hamiltonienne. Considérons un champ pompe de fréquence $2\omega_0$ de profil spatial normalisé $A_p(\boldsymbol{\rho}, z)$ que l'on traitera classiquement, et un champ signal de fréquence ω_0 décrit par les opérateurs transverses $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z)$ dans le plan central du cristal, tels qu'on les a décrit au paragraphe A.1.2. L'interaction paramétrique est supposée dégénérée en fréquence, et les modes signal et complémentaire sont donc confondus. On considère l'accord de phase réalisé $\Delta k = 0$, et on néglige les effets de double réfraction, ce qui nous permet de supposer la propagation des deux champs comme colinéaires. Le hamiltonien de la conversion paramétrique s'écrit⁶ :

$$\hat{H} = \frac{i\hbar g}{l_c} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} dz \int d\boldsymbol{\rho} A_p(\boldsymbol{\rho}, z) (\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}, z))^2 + \text{hc} \quad (3.52)$$

où g est une constante incluant la susceptibilité non linéaire $\chi^{(2)}$ et les indices de réfraction du cristal.

6. L'approche hamiltonienne développée ici est aussi valable pour des champs classiques, si l'on remplace le commutateur par un crochet de Poisson

Le calcul de cet hamiltonien exprimé dans la base des opérateurs locaux $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = \hat{a}(\boldsymbol{\rho})$ pris au centre du cristal est effectué en détail à l'annexe B. On trouve finalement le résultat suivant :

$$\hat{H} = ig\hbar \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\rho}' \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}') + \text{hc} \quad (3.53)$$

avec

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = A_p\left(\frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'}{2}, 0\right) \Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (3.54)$$

$$\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') = \frac{k_s}{2\pi l_c} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Sine}\left(\frac{k_s |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2}{2l_c}\right) \right] \quad (3.55)$$

où Sine est la fonction sinus intégral. Calculons la contribution de l'interaction paramétrique à l'évolution du champ signal au centre du cristal $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$:

$$\left. \frac{d\hat{a}}{dt}(\boldsymbol{\rho}, z = 0) \right|_{\text{int. param.}} = \frac{1}{i\hbar} [H, \hat{a}(\boldsymbol{\rho}, 0)] \quad (3.56)$$

$$= g \int d\boldsymbol{\rho}' \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', 0) \quad (3.57)$$

On peut utiliser cette même expression pour calculer le champ résultant de l'interaction d'un champ injecté dans un cristal. On note $\hat{a}_{in}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ la valeur qu'aurait le champ injecté dans le plan $z = 0$, ou dans tout autre plan effectuant une opération de champ proche par rapport au plan central du cristal. On note de même $\hat{a}_{out}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ la valeur du champ sortant dans le plan $z = 0$, ou dans tout autre plan de champ proche. En supposant que l'interaction paramétrique modifie peu le champ, on peut écrire :

$$\hat{a}_{out}(\boldsymbol{\rho}, 0) - \hat{a}_{in}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \frac{gl_c}{c} \int d\boldsymbol{\rho}' \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \hat{a}_{in}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', 0) \quad (3.58)$$

$$= \frac{gl_c}{c} \int d\boldsymbol{\rho}' A_p\left(\frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'}{2}, 0\right) \Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \hat{a}_{in}^\dagger(\boldsymbol{\rho}', 0) \quad (3.59)$$

Le paragraphe suivant traite explicitement le développement du couplage $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ entre les opérateurs locaux dans le cas du cristal épais. Remarquons simplement à ce stade, que dans le cas du cristal mince, le terme $\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$ tend vers une fonction de Dirac, et il n'y a plus aucun couplage entre les modes $\hat{a}(\boldsymbol{\rho})$. On est alors ramené au cas de conversion paramétrique monomode pour tous les opérateurs $\hat{a}(\boldsymbol{\rho})$. L'amplification sensible à la phase d'une image peut être vue comme une amplification sensible à la phase locale pour toutes les positions transverses, à condition que les paramètres d'amplification soit identiques en tout point. Cela nécessite donc que le profil spatial de phase de l'image soit constant, et que l'amplitude de pompe soit également constante sur la largeur de l'image. La première condition peut être remplie en utilisant des techniques d'imagerie, et la dernière peut être remplie si le faisceau pompe est un faisceau gaussien dont le waist est plus grand que la largeur de l'image à amplifier.

B.1.2 Tailles caractéristiques et nombre de modes du couplage transverse

La fonction (ou noyau) de couplage spatial $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ décrit le couplage entre les modes locaux $\hat{a}(\boldsymbol{\rho})$ et $\hat{a}(\boldsymbol{\rho}')$ pris au centre du cristal, ou dans tout plan de champ proche.

$$\hat{H} = ig\hbar \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\rho}' \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \hat{a}(\boldsymbol{\rho}) \hat{a}(\boldsymbol{\rho}') + \text{hc} \quad (3.60)$$

avec $\mathcal{K}$ produit du profil spatial de la pompe, avec un terme de diffraction sur la longueur du cristal.

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = A_p \left(\frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'}{2} \right) \Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (3.61)$$

Ce noyau peut s'interpréter de la façon suivante : le champ à deux points $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\rho}'$ est couplé au le champ pompe à la position moyenne $A_p(\frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'}{2})$, et l'amplitude de ce couplage est calculée par le recouvrement possible des deux points sur la longueur du cristal, caractérisé par la fonction $\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$. Il est intéressant de noter que cette fonction de deux variables se décompose comme le produit de deux termes : un terme diagonal de diffraction et un terme anti-diagonal de champ de pompe. La taille de la fonction selon la seconde bissectrice est donc égale à la taille de la pompe A_p . L'intégrale $\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$ s'exprime en fonction de la fonction sinus intégral :

Cette fonction caractérisant la diffraction est apparue dans le cas du doublage de fréquence d'une image, et est représentée à la figure 3.2 de la section précédente de ce chapitre. Elle fait apparaître une longueur caractéristique de cohérence l_{coh} , dont la valeur est deux fois plus grande que dans le cas du doublage de fréquence.

$$l_{\text{coh}} = \sqrt{\frac{2l_c}{k_s}} = \sqrt{\frac{\lambda l_c}{\pi n_s}} \quad (3.62)$$

Cette longueur représente la distance transverse entre deux points de coordonnées $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\rho}'$ au delà de laquelle il n'y aura plus de couplage possible à cause de la diffraction sur toute la longueur du cristal. En effet la fonction $\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$ prend des valeurs significatives seulement pour $|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| < l_{\text{coh}}$. Cette longueur est la taille de la fonction $\mathcal{K}$ selon la première bissectrice.

La seconde longueur caractéristique du noyau selon la seconde bissectrice est la taille transverse du faisceau pompe A_p , que l'on note w_p . Dans le cas d'une pompe gaussienne, w_p est typiquement la taille du waist du faisceau pompe, si l'on admet que celui-ci est focalisé au centre du cristal.

Pour simplifier la représentation, on choisit de réduire le problème transverse à une seule dimension. On peut donc représenter la fonction $\mathcal{K}(x, x')$ pour une pompe gaussienne. Dans ce cas, deux longueurs caractérisent complètement la fonction $\mathcal{K}(x, x')$. La figure 3.3 représente le profil de cette fonction pour $w_p = 300 \mu\text{m}$ et $l_c = 10 \text{ mm}$.

Le nombre sans dimension $b = \frac{w_p}{l_{\text{coh}}}$ est égal au rapport des tailles du noyau dans les deux directions. On a vu que le couplage transverse n'a lieu que pour des positions transverses éloignées d'une distance inférieure à l_{coh} , et à l'intérieur du faisceau pompe de largeur w_p . Si la pompe est plus large que la largeur de cohérence, le nombre b peut donc donner une idée du *nombre de modes* indépendants impliqués dans l'interaction paramétrique sur un cristal de longueur l_c pour chaque dimension transverse, comme représenté sur la figure

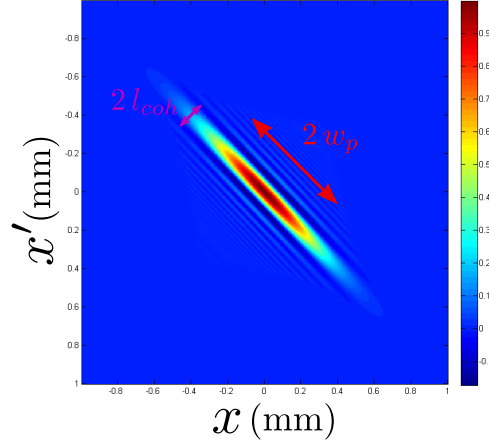


Figure 3.3: Noyau du couplage entre modes transverses pour une pompe gaussienne avec $w_p = 300 \mu\text{m}$ et $l_c = 10 \text{ mm}$. On a représenté la taille de la matrice selon les axes des deux bissectrices, dont le rapport définit le nombre de modes.

3.3. Après simplification, dans le cas d'une pompe gaussienne, on peut écrire b en fonction de la longueur de Rayleigh de la pompe z_{Rp} , et la longueur optique transverse du cristal $\frac{l_c}{n_s}$ (comme définie au paragraphe A.3.3) :

$$b = \sqrt{2n_s \frac{z_{Rp}}{l_c}} \quad (3.63)$$

Si le faisceau pompe est symétrique, le nombre de modes est identique dans chaque direction, et le nombre de modes total que l'on doit prendre en compte vaut donc b^2 .

Dans les expériences typiques d'optique quantique utilisant l'interaction paramétrique dans un cristal non-linéaire $\chi^{(2)}$, on utilise la condition de Boyd et Kleinman [Boyd 68] pour déterminer la taille optimale que doivent avoir les faisceaux pompe et signal pour maximiser l'interaction paramétrique sur la longueur du cristal. Celle-ci stipule que la taille optimale du faisceau pompe est telle que le paramètre de focalisation $\xi = \frac{l_c}{2z_R}$ doit être proche de 2.8, donc la longueur de Rayleigh de la pompe doit être égale à la longueur optique du cristal divisée par 6. Autour de cette valeur l'efficacité totale reste presque maximale [Delaubert 07a]. Cette condition est en fait équivalente à considérer un nombre de mode b^2 de l'ordre de 0,5⁷. On peut donc considérer que le critère de Boyd et Kleinman correspond à une interaction paramétrique quasi-monomode.

Dans la limite du cristal infiniment fin, la longueur de cohérence est nulle et le noyau $\mathcal{K}$ du couplage paramétrique est diagonal. Il n'y a plus de couplage entre des points différents du plan transverse. Dans ce cas les opérateurs locaux sont alors états propres de l'interaction paramétrique, et le hamiltonien paramétrique peut s'écrire dans cette base :

$$\hat{H} = i\hbar g \int d\rho A_p(\rho) \left(\hat{a}^\dagger(\rho) \right)^2 + \text{cc} \quad (3.64)$$

On est ramené au problème monomode, pour chaque opérateur local $\hat{a}(\rho)$.

7. Dans ce cas, le paramètre b ne représente plus le nombre de modes, car l_{coh} est du même ordre de grandeur que w_p .

B.1.3 Pixellisation du plan transverse.

Pour traiter numériquement les propriétés du couplage transverse dû à l'interaction paramétrique, il est nécessaire d'utiliser une représentation discrète de la fonction $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$, c'est-à-dire une matrice, que l'on note $\mathcal{K}_{k,l}$. La pixellisation transverse du champ proche impose de choisir un nombre de modes maximal pris en compte, a priori bien supérieur aux nombre de modes réels du problème. Dans ce cas, on est sûr de n'avoir perdu aucune information. En d'autres termes, la discrétisation de l'espace est possible, si la taille des pixels choisie est très inférieure aux échelles de variation typique de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire les deux longueurs l_{coh} et w_p , et si la taille totale de la zone pixellisée est bien supérieure aux longueurs l_{coh} et w_p . On note L la taille totale de la zone pixelisée, et δ la taille de chaque pixel. Le nombre de pixel est donc égal à $\frac{L}{\delta}$ si l'on ne considère qu'une dimension, et $(\frac{L}{\delta})^2$ si l'on pixellise les deux dimensions. On doit donc satisfaire la condition suivante :

$$\delta \ll l_{coh}, w_p \ll L \quad (3.65)$$

Expérimentalement, la longueur l_c du cristal vaut en général 10 mm, soit une longueur de cohérence $l_{coh} = 40 \mu\text{m}$. Le faisceau pompe est choisi suffisamment focalisé pour disposer d'une intensité suffisante, mais également suffisamment large pour considérer un grand nombre de modes b . On prend donc w_p de l'ordre de quelques centaines de μm . On doit donc prendre $L \approx 2 \text{ mm}$ et $\delta \approx 4 \mu\text{m}$, soit un nombre total de pixels environ égal à 500, largement supérieur au nombre de modes défini par $b = \frac{w_p}{l_c} \approx 10$.

Dans cette approche, on utilise les opérateurs "pixels" $\hat{a}_m$ définis dans le plan central du cristal. L'indice m décrit un pixel de taille δ à la position m . En notant S la taille commune de tous les pixels, on a :

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{S}} \int_{S_m} \hat{a}(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \quad (3.66)$$

Avec cette définition, on a donc bien la relation de commutation des opérateurs discrets :

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn} \quad (3.67)$$

Le hamiltonien du couplage paramétrique s'écrit dans cette base :

$$\hat{H} = ig\hbar \sum_{k,l} \mathcal{K}_{k,l} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l^\dagger + \text{hc} \quad (3.68)$$

avec

$$\mathcal{K}_{k,l} = A_p \left(\frac{k+l}{2} \right) \Delta(k-l) \quad (3.69)$$

B.2 Conversion paramétrique multimode spectrale

B.2.1 Calcul du hamiltonien

Nous allons ici reprendre la description de la conversion paramétrique d'un peigne de fréquence développée dans [Patera 08] et [de Valcárcel 06]. Considérons la conversion paramétrique d'une pompe à large spectre, par exemple un peigne de fréquence, de taux de répétition Ω et de fréquence centrale $2\omega_0$. On peut reprendre l'approche hamiltonienne

développée dans le cas spatial. Ici, on peut donc mettre de côté l'intégrale transverse de l'équation 3.17, et ne garder que les intégrales spectrales et l'intégrale longitudinale. Les fréquences de pompe sont notées $\omega_r = 2\omega_0 + r\Omega$, et l'amplitude spectrale normalisée de pompe, notée $A(\omega_r) = A_r$, est supposée constante et traitée classiquement lors de sa propagation dans le cristal car l'interaction paramétrique est supposée faible et n'affecte pas le faisceau pompe.

On peut également supposer que les impulsions pompes génèrent des impulsions signal et complémentaire de même taux de répétition, donc décrites également par des peignes de fréquences dans le domaine spectral. L'interaction paramétrique est supposée instantanée, de sorte que les modes signal et complémentaire sont créés au passage de l'impulsion pompe dans le cristal non-linéaire, et sont donc décrits par des peignes de fréquences avec un taux de répétition identique. On suppose de plus que la phase des photons est identiques. On peut donc considérer que les peignes signal et complémentaire sont identiques, et décrits par les fréquences $\omega_0 + m\Omega$, associées à l'opérateur $\hat{a}_m$. Si la largeur spectrale des impulsions considérées n'est pas trop large (i.e. si les impulsions ne sont pas trop courtes), on peut considérer la réponse du milieu non linéaire comme instantanée, et donc la susceptibilité $\chi^{(2)}(\omega, \omega')$ comme constante. On ne conserve dans le hamiltonien d'interaction paramétrique que les termes qui conservent l'énergie :

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0^2 \chi^{(2)}}{2} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} dz \sum_{m,n} A_{m+n} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger e^{i\Delta k_{m,n}z} + \text{hc} \quad (3.70)$$

avec

$$\Delta k_{m,n} = k(2\omega_0 + (m+n)\Omega) - k(\omega_0 + m\Omega) - k(\omega_0 + n\Omega) \quad (3.71)$$

qui dépend uniquement des paramètres du cristal.

Si l'on suppose que l'interaction paramétrique affecte peu la valeur des champs, on peut oublier la dépendance en z des champs, et l'intégration sur la longueur du cristal est simple :

$$\int_{-l_c/2}^{l_c/2} e^{i\Delta k_{m,n}z} dz = l_c \text{sinc}\left(\frac{\Delta k_{m,n}l_c}{2}\right) \quad (3.72)$$

où la fonction "sinc" est le sinus cardinal : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

On peut donc écrire le hamiltonien en faisant apparaître une matrice de couplage spectrale $\mathcal{L}_{m,n}$:

$$\hat{H} = i\hbar g \sum_{m,n} \mathcal{L}_{m,n} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger + \text{hc} \quad (3.73)$$

avec g une constante réelle faisant intervenir $\chi^{(2)}$ et la puissance totale de pompe, et :

$$\mathcal{L}_{m,n} = A_{m+n} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k_{m,n}l_c}{2}\right) \quad (3.74)$$

Cette approche permet de calculer l'évolution des opérateurs $\hat{a}_m$ pris au centre du cristal :

$$\left. \frac{d\hat{a}_m}{dt} \right|_{\text{int. param.}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{a}_m] \quad (3.75)$$

$$= g \sum_n \mathcal{L}_{m,n} \hat{a}_n^\dagger \quad (3.76)$$

Cette matrice de couplage intervient de façon identique dans l'équation de propagation des fréquences du peigne signal :

$$\frac{d\hat{a}_m}{dz} = \frac{i\omega_m\chi^{(2)}}{2n(\omega_m)c} \sum_n A_{m+n} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_{m,n}l_c}{2}\right) \hat{a}_n^\dagger \quad (3.77)$$

$$= ig' \sum_n \mathcal{L}_{m,n} \hat{a}_n^\dagger \quad (3.78)$$

Ces deux equations d'évolution sont liées, si l'on considère que la propagation de chaque fréquence se fait à la vitesse de phase v_φ . On a alors $\frac{d}{dt} = v_\varphi \frac{d}{dz}$.

La matrice $\mathcal{L}_{m,n}$ représente le couplage entre deux modes de fréquences ω_m et ω_n dû à l'interaction paramétrique avec un peigne de fréquence pompe. Si le cristal est infiniment fin, l'accord de phase peut être respecté pour tous les couples de fréquences, et la matrice $\mathcal{L}_{m,n}$ est uniquement fonction du spectre de pompe. Il y a dans ce cas couplage entre tous les modes. Si au contraire le cristal est suffisamment épais, les conditions de couplage sont plus strictes. La section suivante traite en détail ce couplage à partir de la matrice $\mathcal{L}_{m,n}$.

B.2.2 Matrice de couplage spectrale

Pour représenter la matrice $\mathcal{L}_{m,n}$, il est dans un premier temps nécessaire de calculer l'accord de phase $\Delta k_{m,n}$ entre les fréquences ω_m et ω_n :

$$\Delta k_{m,n} = k(2\omega_0 + (m+n)\Omega) - k(\omega_0 + m\Omega) - k(\omega_0 + n\Omega) \quad (3.79)$$

$$= \frac{1}{c} [n(2\omega_0 + (m+n)\Omega)(2\omega_0 + (m+n)\Omega) - n(\omega_0 + m\Omega)(\omega_0 + m\Omega) - n(\omega_0 + n\Omega)(\omega_0 + n\Omega)] \quad (3.80)$$

Dans l'hypothèse où les fréquences considérées sont proches des fréquences ω_0 et $2\omega_0$, ce qui revient à considérer une pompe de largeur faible, on peut faire un développement de Taylor des vecteurs d'ondes $k(2\omega_0 + r\Omega)$ et $k(\omega_0 + n\Omega)$.

$$k(2\omega_0 + r\Omega) \approx k(2\omega_0) + r\Omega k'(2\omega_0) + \frac{r^2\Omega^2}{2} k''(2\omega_0) \quad (3.81)$$

$$k(\omega_0 + m\Omega) \approx k(\omega_0) + m\Omega k'(\omega_0) + \frac{m^2\Omega^2}{2} k''(\omega_0) \quad (3.82)$$

On suppose l'accord de phase réalisé entre les fréquences centrales ω_0 et $2\omega_0$. On a donc $k(2\omega_0) = 2k(\omega_0)$. On a finalement

$$\Delta k_{m,n} = (m+n)\Omega [k'(2\omega_0) - k'(\omega_0)] + (m+n)^2\Omega^2 \frac{k''(2\omega_0)}{2} - (m^2 + n^2)\Omega^2 \frac{k''(\omega_0)}{2} \quad (3.83)$$

Comme dans [Patera 08], on pose :

$$\beta_1 = \frac{1}{2}l_c\Omega [k'(2\omega_0) - k'(\omega_0)] \quad (3.84)$$

$$\beta_{2p} = \frac{1}{4}l_c\Omega^2 k''(2\omega_0) \quad (3.85)$$

$$\beta_{2s} = \frac{1}{4}l_c\Omega^2 k''(\omega_0) \quad (3.86)$$

$k'(\omega_0)$	$6.2664 \times 10^{-9} \text{ sm}^{-1}$	β_1	9.2472×10^{-6}
$k'(2\omega_0)$	$6.6537 \times 10^{-9} \text{ sm}^{-1}$	β_{2p}	2.6935×10^{-12}
$k''(\omega_0)$	$1.6420 \times 10^{-25} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$	β_{2s}	9.3605×10^{-13}
$k''(2\omega_0)$	$4.7248 \times 10^{-25} \text{ s}^2\text{m}^{-1}$		

Table 3.1: Valeur des paramètres de dispersion dans un cristal BiBO_3 taillé pour l'accord de phase entre 800 nm et 400 nm et de longueur $l_c = 100 \mu\text{m}$.

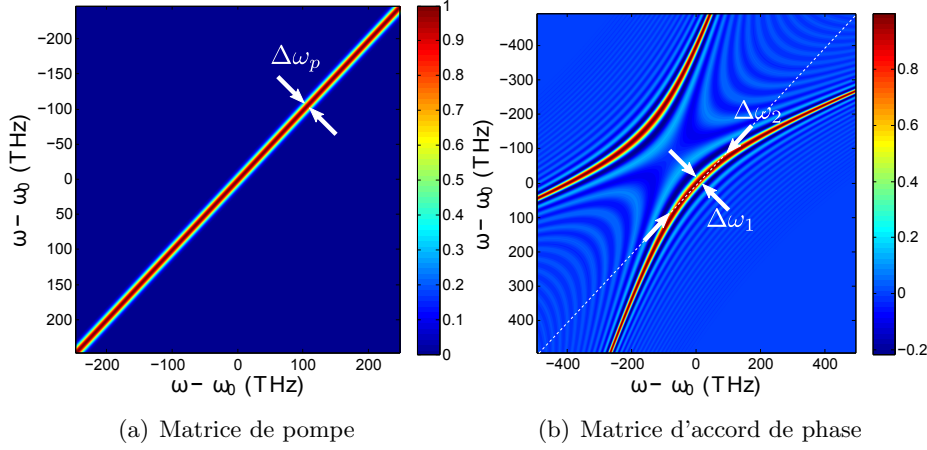


Figure 3.4: Forme et dimensions caractéristiques des matrices intervenant dans le couplage paramétrique entre modes longitudinaux, pour des valeurs expérimentales typiques. La matrice d'accord de phase a été tracée sur une échelle de fréquence plus grande pour faire ressortir les deux branches d'hyperboles.

On peut alors donner une expression simplifiée de la matrice de couplage :

$$\mathcal{L}_{m,n} = A_{m+n} \text{sinc}(\beta_1(m+n) + \beta_{2p}(m+n)^2 - \beta_{2s}(m^2 + n^2)) \quad (3.87)$$

Pour représenter la matrice $\mathcal{L}$ il est nécessaire de connaître les valeurs de $k'(2\omega_0)$, $k'(\omega_0)$, $k''(2\omega_0)$ et $k''(\omega_0)$. Ces paramètres dépendent uniquement du cristal. Il est possible de les calculer en utilisant par exemple les coefficients de Sellmeier que l'on peut trouver dans [Nikogosyan 05]. Le calcul doit également prendre en compte les angles de coupe du cristal, choisis pour avoir l'accord de phase entre ω_0 et $2\omega_0$. Nous utilisons expérimentalement un cristal de Borate de Bismuth BiBO_3 , taillé pour l'accord de phase entre les longueurs d'ondes 800 nm et 400 nm, c'est-à-dire $\pi - \theta = 151$ [Ghotbi 04a]. Les valeurs calculées dans [Patera 08] pour un cristal de longueur $l_c = 100 \mu\text{m}$ et un taux de répétition $\Omega = 2\pi \times 76 \text{ MHz}$ figurent dans la table 3.1. On peut en déduire les valeurs des paramètres β , qui dépendent également de la longueur du cristal et du taux de répétition Ω .

La matrice de couplage spectrale se calcule donc comme le produit terme à terme d'une matrice antidiagonale correspondant au spectre de la pompe, avec une matrice d'accord de phase. On peut donc évaluer le profil de la matrice de couplage en fonction des tailles caractéristiques de ces deux matrices.

- La matrice de pompe a une largeur selon la deuxième bissectrice égale au nombre de fréquences dans le peigne des impulsions pompes. Expérimentalement, les impulsions pompes sont produites par doublage de fréquence en simple passage dans un cristal

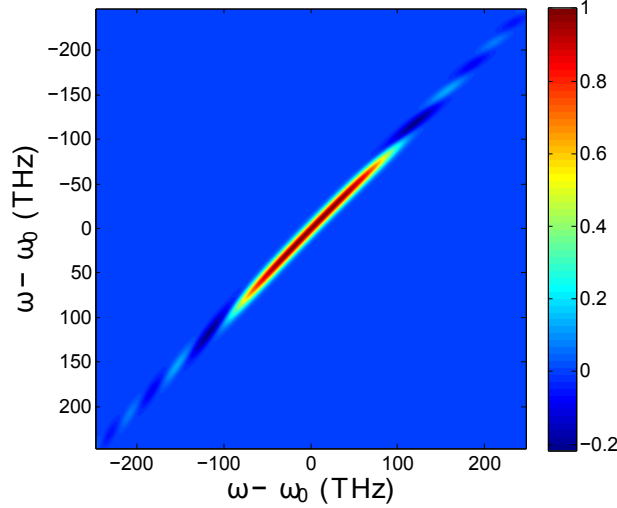


Figure 3.5: Matrice de couplage entre différentes fréquences dans un cristal de BiBO_3 de longueur $100\ \mu\text{m}$ et avec une pompe gaussienne de largeur spectrale $4.6\ \text{THz}$

non-linéaire. On utilise dans nos expériences un cristal suffisamment court qui permet de considérer le spectre de la pompe comme égal au spectre de l'impulsion initiale multipliée par $\sqrt{2}$. Pour des impulsions initiales de $120\ \text{fs}$ limitées par transformée de Fourier, la largeur spectrale est égale à $\Delta\omega = 2\pi \times 3.6\ \text{THz}$. La largeur de la pompe est donc de $\Delta\omega_p = 5.1\ \text{THz}$. La matrice correspondant à cette valeur est représentée sur la figure 3.4 (a).

- La matrice d'accord de phase, présentée sur la figure 3.4 (b) pour un cristal de BiBO_3 de longueur $l_c = 100\ \mu\text{m}$, possède deux branches d'hyperboles dont l'une correspond à l'accord de phase entre les fréquences ω_0 et $2\omega_0$. La largeur de ces deux branches correspond à la largeur de la fonction sinus cardinal. Les calculs figurent complètement dans [Patera 08]. Les deux tailles caractéristiques de cette matrice peuvent être calculées à partir des coefficients du cristal. Multipliées par le taux de répétition, on obtient les deux largeurs spectrales suivantes :

$$\Delta\omega_1 = \Omega \frac{\sqrt{5/2}}{|\beta_1|} = 13\ \text{THz} \quad (3.88)$$

$$\Delta\omega_2 = \Omega \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{|\beta_{2s}|}} = 270\ \text{THz} \quad (3.89)$$

La matrice de couplage entre différentes fréquences correspond au produit terme à terme des deux matrices représentées sur la figure 3.4. Elle est représentée sur la figure 3.5 pour les valeurs expérimentales typiques. Quand la largeur spectrale de la pompe est plus petite que la largeur $\Delta\omega_1$, les tailles de la matrice de couplage sont donc $\Delta\omega_2$ sur la diagonale, et $\Delta\omega_p$ sur l'anti-diagonale. Comme dans le cas transverse, on peut utiliser le paramètre $b = \frac{\Delta\omega_2}{\Delta\omega_p}$ pour obtenir un ordre de grandeur du nombre de modes affectés par l'interaction paramétrique avec les impulsions pompes. Dans le cas d'une pompe de spectre plus large que $\Delta\omega_1$, la matrice de couplage a une forme en banane et ce calcul de nombre de modes est inadéquat.

Pour implémenter numériquement ces matrices sous Matlab par exemple, on a été

amené à réduire le nombre de modes de fréquences pris en compte. Cette approximation est justifiée par le fait que l'effet paramétrique est instantané, et ne dépend pas du taux de répétition des impulsions. On remarque que la taille de la matrice de couplage doit être supérieure à $\Delta\omega_2$ pour qu'aucune information ne soit perdue. Or $\frac{\Delta\omega_2}{\Omega}$ est supérieur à trois millions. Comme dans le cas spatial, nous avons réduit la dimension de la matrice jusqu'à une taille de 1000×1000 .

B.3 Comparaison des matrices de couplages spatial et spectral

Notons que les deux matrices de couplages, exprimées dans la base des modes locaux dans le plan transverse du cristal d'une part, et dans la base des modes de fréquences d'autre part ont une forme similaire. Elles s'expriment toutes les deux comme le produit de deux termes. Le premier correspond au profil du champ pompe dans la base considéré, et traduit la conservation de l'énergie. Le second terme correspond à une intégrale de recouvrement des modes sur toute la longueur du cristal. Dans le cas spatial, cette intégrale ne dépend que de la distance entre les points considérés, et la matrice de couplage est symétrique selon les deux bissectrices. Dans le cas spectral, l'intégrale donne naissance à un profil d'accord de phase hyperbolique, avec deux dimensions caractéristiques qui conduit à une forme particulière de la matrice de couplage, qui n'est plus symétrique que selon la première bissectrice.

Les deux matrices se distinguent également par leurs dimensions caractéristiques, qui dépendent du profil du champ pompe et de la longueur du cristal, dans des conditions expérimentales typiques. Dans le cas spatial, la taille caractéristique de la matrice la plus grande est celle du profil de la pompe, donc selon la première bissectrice. Dans le cas spectral, les choses sont différentes. C'est la courbe d'accord de phase qui est plus large que la largeur spectrale de la pompe.

B.4 Diagonalisation et états propres du couplage paramétrique

Le couplage paramétrique entre modes se traduit par une matrice de couplage. On a traité deux exemples dans le cas de l'interaction entre modes transverses d'une part et entre modes longitudinaux d'autre part, mais on peut facilement imaginer d'autres problèmes d'optique non linéaire pouvant se linéariser et dont le hamiltonien peut s'écrire facilement à l'aide d'une matrice de couplage entre modes⁸. Dans le cas spatial cette matrice se calcule facilement dans la base des modes locaux au centre du cristal. Pour les modes de fréquence, cette matrice se calcule facilement dans la base des ondes planes monochromatiques. Dans les deux cas, la forme non-diagonale de la matrice de couplage entre les modes traduit le fait que ces bases ne sont pas adaptées au couplage paramétrique avec la forme de pompe choisie, car celle-ci couple les modes entre eux. Pour généraliser, considérons le cas du couplage paramétrique entre modes discrets dont les opérateurs d'annihilation s'écrivent $\hat{a}_j$. Le hamiltonien de couplage peut s'écrire d'une manière générale à l'aide d'une matrice $\mathcal{C}_{j,k}$.

$$\hat{H} = i\hbar g \sum_{j,k} \mathcal{C}_{j,k} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k^\dagger + \text{hc} \quad (3.90)$$

8. C'est le cas par exemple du mélange à quatre ondes, dans le cas où l'on considère le processus de conversion de deux photons d'un faisceau pompe en deux photons signal et complémentaire différents.

Pour simplifier le traitement multimode, il apparaît intéressant de trouver une base dans laquelle l'interaction paramétrique est diagonale, c'est-à-dire dans laquelle il n'y a pas de couplage entre modes orthogonaux. On cherche donc à trouver une base qui diagonalise la matrice de couplage entre les modes. Dans les deux cas qui nous intéressent, la matrice de couplage est symétrique, et est donc diagonalisable dans une base orthonormée⁹. Cette diagonalisation est en fait une réduction de Bloch-Messiah [Braunstein 05]. Elle est similaire à une décomposition de Schmidt qui correspond au cas où l'on considère les modes signal et complémentaires différents, dans le cas d'un cristal de type II par exemple.

B.4.1 Valeurs propres

La diagonalisation des matrices est possible avec des valeurs numériques des paramètres de pompe et du cristal. On obtient ainsi le spectre des valeurs propres de la matrice $\{\Lambda_k\}$. Comme la matrice de couplage est symétrique, les valeurs propres sont réelles. On utilise une taille de matrice (c'est-à-dire un nombre de modes a priori nécessaires pour décrire l'interaction) telle que la diagonalisation conduise à un grand nombre de valeurs propres quasi-nulles. On peut d'ailleurs arbitrairement changer la taille de la matrice de couplage, et observer les valeurs propres non nulles, qui ne dépendent pas de la taille de la matrice. À titre d'exemple, considérons la matrice de couplage entre modes transverses pour un cristal de 10 mm de longueur et une pompe de waist $300\ \mu\text{m}$. Les 30 plus grandes valeurs propres positives sont représentées sur la figure 3.6 pour une pixellisation du plan transverse avec un nombre total de pixels $N = 500$ et $N = 1000$. On remarque que les deux spectres sont très proches. La taille choisie pour la matrice de couplage est donc suffisante.

On peut tout d'abord remarquer que le nombre de valeurs propres non nulles chute considérablement par rapport au nombre de mode considéré a priori. Il existe des modes intrinsèques au problème, et donc un nombre de modes différent de celui utilisé a priori pour décrire le problème. Ce résultat est particulièrement impressionnant dans le cas où l'on considère la conversion paramétrique d'un peigne de fréquence correspondant à une impulsion femtoseconde. Le nombre de fréquence du peigne est de l'ordre de 10^5 , et le nombre de valeurs propres est de l'ordre de quelques dizaines.

Les valeurs propres non-nulles, positives et négatives correspondent à l'efficacité du couplage paramétrique pour chaque mode propre. Le nombre de valeurs propres non nulles correspond au nombre de modes effectifs. La diagonalisation conduit en général à un grand nombre de valeurs propres presque égales à 0. Pour estimer quantitativement le nombre de modes sans tenir compte de ces valeurs propres presque nulles, on pourrait choisir de les compter jusqu'à un certain seuil. On choisit d'introduire le paramètre de coopérativité, noté κ [Huang 93]. Ce paramètre est également utilisé par la communauté des photons uniques, et appelé nombre de Schmidt [Law 04] ou dimensionnalité. Dans ce cas, il représente la dimension de l'espace de Hilbert considéré, c'est-à-dire le nombre de modes nécessaires pour décrire complètement l'état à un photon. Dans [U'Ren 05], ce paramètre est utilisé pour décrire la quantité d'intrication entre les deux photons produite par la

9. Dans les deux cas que nous avons considérés, la matrice est de plus réelle si le profil de phase du faisceau pompe est constant, c'est-à-dire sans aberration dans le cas spatial, et avec une phase spectrale constante dans le cas spectral

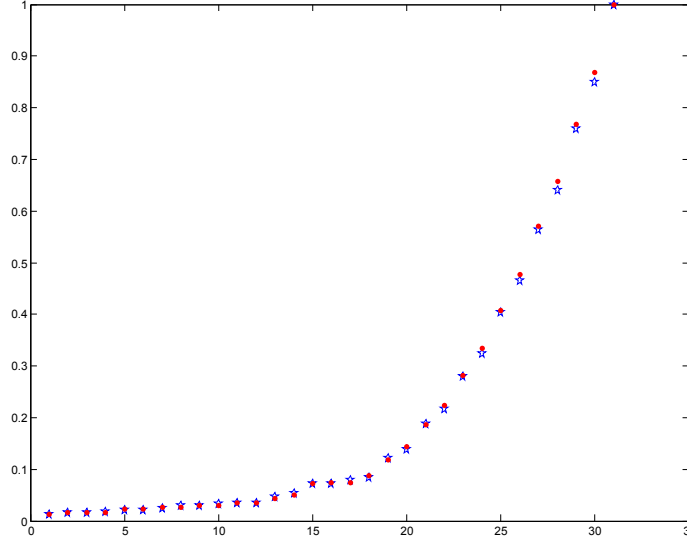


Figure 3.6: Valeurs des 30 plus grandes valeurs propres positives normalisées de la matrice de couplage paramétrique avec une pixellisation transverse de 500 pixels (points rouges) et 1000 pixels (étoiles bleues). Au delà d'un certain nombre de pixels, la diagonalisation de la matrice de couplage conduit à des résultats identiques.

conversion paramétrique.

Dans notre cas des variables continues, on peut utiliser ce même paramètre. Il ne représente pas directement la quantité d'intrication, mais le nombre de modes affectés par l'interaction non-linéaire dans le cristal. Les valeurs propres ne sont pas nécessairement normalisées, et κ s'expriment différemment par rapport à ce que l'on trouve dans la littérature à ce sujet [Law 04] :

$$\kappa = \frac{(\sum \Lambda_k^2)^2}{\sum \Lambda_k^4} \quad (3.91)$$

En utilisant des valeurs expérimentales des différents paramètres, on trouve des valeurs de κ assez faibles. Le tableau 3.2 représente différentes valeurs de κ pour la matrice de couplage entre modes transverses dans plusieurs cas expérimentaux. La pompe est toujours supposée gaussienne.

On peut comparer la valeur de la coopérativité avec la valeur du nombre de modes évalué comme le rapport des dimensions de la matrice de couplage selon les deux directions. Les résultats figurent dans le tableau 3.2 dans le cas de la matrice de couplage entre modes transverses. On remarque que κ et b sont de bonnes variables pour caractériser le nombre de modes car la dépendance entre κ et b est presque linéaire. Dans le cas spectral, on peut mener le même raisonnement, les deux dimensions de la matrice de couplage étant données par la largeur spectrale de la pompe $\Delta\omega_p$ d'une part, et le paramètre du cristal $\Delta\omega_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{|\beta_{2s}|}}$ d'autre part.

Suivant les cas de figures, il n'est pas toujours préférable d'avoir un nombre de modes élevé. En effet, l'augmentation du nombre de modes s'accompagne en général d'une diminution du couplage non linéaire avec la pompe pour chaque mode. Dans le cas des

$l_c(mm)$	$w_p(mm)$	κ	$b_{1D} = \frac{w_p}{l_{coh}}$	$\frac{\kappa}{b_{1D}}$
10	0,3	6.6	5.2	1.269
5	0,3	9.3	7.3	1.274
1	0,3	20.9	16.3	1.282
10	0,2	4.4	3.4	1.294
10	0,1	2.3	1.7	1.353
10	0,5	10.9	8.6	1.267
10	1	21.8	17.2	1.267

Table 3.2: Valeurs du paramètre de cooperativité dans différents cas expérimentaux d'interaction paramétrique multimode avec une pompe gaussienne, et comparaison avec les dimensions de la matrice de couplage.

oscillateurs paramétriques optiques (OPO), cela conduit à une augmentation du seuil d'oscillation. Comme on l'a vu dans le cas spatial, pour maximiser l'interaction non-linéaire dans le cas du doublage de fréquence, ou des OPO, on utilise le critère de Boyd et Kleinman [Boyd 68], qui correspond à un comportement quasi-monomode.

B.4.2 Vecteurs propres

D'une manière générale, la diagonalisation de la matrice de couplage conduit à une matrice de changement de base U_k^n associée au spectre $\{\Lambda_k\}$. Les vecteurs colonnes de cette matrice correspondent aux modes propres décrits dans la base utilisée initialement. Dans le cas spectral, ces modes sont exprimés dans la base des opérateurs de fréquence bien définie, et l'on obtient directement le profil spectral des modes propres. Pour retrouver leur profil temporel, il faut donc en prendre la transformée de Fourier. Dans le cas spatial, les modes propres sont exprimés dans la base des opérateurs pixels, et l'on obtient directement leur profil transverse. Dans l'exemple utilisé précédemment ($l_c = 10$ mm et $w_p = 300$ μ m), on a calculé le profil transverse des premiers modes propres. Ces profils sont représentés sur la figure 3.7.

Le profil $u_k(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ des modes propres s'exprime à l'aide de la matrice de changement de base U_k^n en fonction du profil $u_n(\boldsymbol{\rho}, z, t)$ des modes initiaux :

$$u_k(\boldsymbol{\rho}, z, t) = \sum_n U_k^n u_n(\boldsymbol{\rho}, z, t) \quad (3.92)$$

Dans le cas simple où la matrice de couplage est gaussienne, la diagonalisation peut se faire analytiquement [Patera 08]. Dans ce cas, les modes propres sont exactement des modes de Hermite-Gauss. Ce cas de figure n'est jamais strictement accessible d'après les formes que l'on a calculées pour les matrices de couplage. Cependant, on peut dans certains cas approximer la matrice de couplage à une forme gaussienne.

On peut définir les opérateurs bosoniques de création et annihilation de photon dans la nouvelle base, car la matrice de changement de base est unitaire (cf équation 1.13 dans

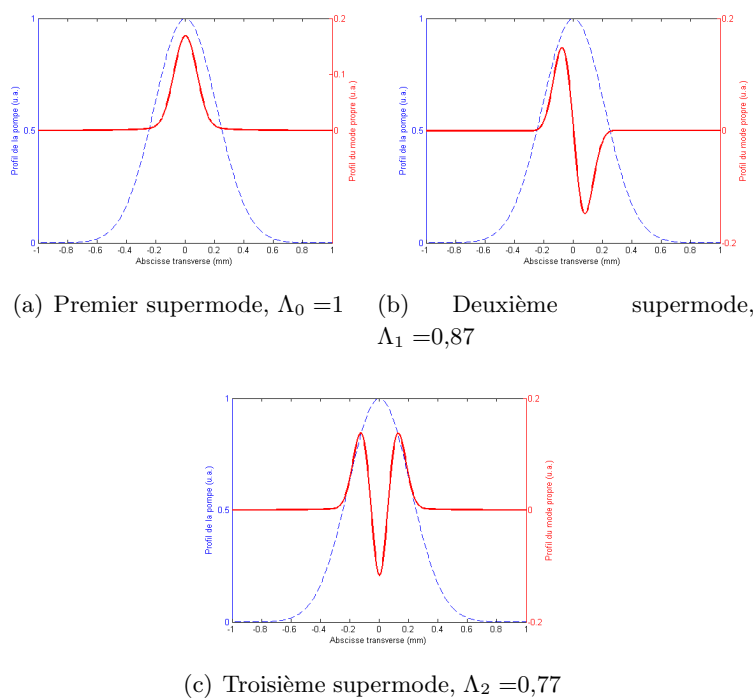


Figure 3.7: Profil transverse de quelques modes propres de l'interaction paramétrique entre modes transverses dans un cristal de longueur $l_c = 10$ mm et avec un faisceau pompe de taille $w_p = 300 \mu\text{m}$. La courbe bleue représente le profil transverse du faisceau pompe, et la courbe rouge le profil des supermodes

la section A.1.3 du chapitre 1). Ces nouveaux opérateurs s'écrivent donc :

$$\hat{S}_k = \sum_n U_k^n \hat{a}_n \quad (3.93)$$

L'opérateur $\hat{S}_k$ correspond donc à l'annihilation d'un photon dans le mode dont le profil transverse ou longitudinal est décrit par la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de changement de base. Ce mode est appelé "supermode". La valeur propre Λ_k associée à ce supermode décrit de plus l'efficacité relative de l'interaction non linéaire avec le champ pompe relativement à la valeur propre de module maximal que l'on note Λ_0 . Les supermodes dont la valeur propre est quasi-nulle peuvent donc être ignorés car ils ne sont pratiquement pas affectés par l'interaction paramétrique.

Le hamiltonien de l'interaction paramétrique peut donc s'écrire dans cette base :

$$\hat{H} = i\hbar g \sum_k \Lambda_k \left(\hat{S}_k^\dagger \right)^2 + \text{hc} \quad (3.94)$$

Il s'agit du hamiltonien d'une assemblée de sources d'états comprimés indépendantes. En appliquant ce hamiltonien au vide de photon, on obtient un état comprimé multimode :

$$|0, 0, \dots\rangle \xrightarrow{\hat{H}} |\text{Sqz}_{\Lambda_1}, \text{Sqz}_{\Lambda_2}, \dots\rangle \quad (3.95)$$

où $|\text{Sqz}_{\Lambda_i}\rangle$ représente un état comprimé sur le supermode i avec une réduction de bruit qui dépend de Λ_i . On voit donc que seuls les modes de valeurs propres non-négligeables sont comprimés.

C Equations d'évolution générales de l'OPO multimode

Un oscillateur paramétrique optique (OPO) est constitué d'une cavité optique dans laquelle on place un cristal non linéaire $\chi^{(2)}$ et que l'on pompe avec un faisceau permettant la conversion paramétrique d'un photon pompe en deux photons appelé signal et complémentaire, résonants dans la cavité. Ce dispositif est utilisé en optique car il permet de produire des faisceaux de nouvelles longueurs d'onde, difficilement accessibles avec des lasers.

En optique quantique les OPO sont utilisés depuis plus de vingt ans pour produire des états de la lumière dont les propriétés quantiques sont remarquables. Dans cette partie, on décrit dans un premier temps les propriétés d'un OPO monomode, puis on montre comment ces propriétés sont conservées pour un OPO multimode, c'est-à-dire quand plusieurs modes résonants dans la cavité sont impliqués dans le processus de conversion paramétrique.

C.1 OPO dégénéré *monomode*

On présente dans cette section les propriétés classiques et quantiques d'un OPO monomode, pour lequel les modes signal et complémentaire sont identiques. Ces propriétés sont bien connues [Walls 95], et ont conduit la communauté de l'optique quantique en variables continues à utiliser de tels dispositifs pour étudier l'amplification sensible à la phase, l'amplification sans bruit, et la réduction de bruit sous le bruit quantique standard, pour un mode du champ défini en général par le mode transverse de la cavité optique, et par le mode longitudinal du faisceau pompe.

C.1.1 Equations d'évolution

Les équations d'évolution des oscillateurs paramétriques optiques sont généralement écrites en représentation de Heisenberg. Considérons une cavité optique dont les pertes totales sont notées γ . Ces pertes sont supposées uniquement dues au miroir d'injection dont les coefficients de réflexion et de transmission s'écrivent respectivement $r = 1 - \gamma$ et $t = \sqrt{2\gamma}$. L'évolution du champ libre à l'intérieur d'une cavité à résonance s'écrit en calculant la valeur du champ après un tour de cavité :

$$\tau \frac{d\hat{a}}{dt} = -\gamma \hat{a} + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_{in} \quad (3.96)$$

où τ représente le temps d'aller-retour dans la cavité, et $\hat{a}_{in}$ le mode entrant dans la cavité par le miroir de couplage.

Pour décrire un oscillateur paramétrique optique, on doit de plus ajouter la contribution de l'interaction paramétrique avec un champ pompe. Dans le cas monomode, on considère les modes signal et complémentaire identiques. On suppose en général que l'interaction paramétrique d'un simple passage est faible, et l'on peut alors décrire le gain du mode $\hat{a}$ sur un tour en fonction du champ pompe A_p décrit classiquement et d'un coefficient g' qui décrit notamment l'efficacité du couplage non-linéaire¹⁰ : $g' A_p \hat{a}^\dagger$. On peut également

10. le gain $g' A_p$ est supposé faible et tient compte de l'intégration des équations non-linéaires 3.36 sur la longueur du cristal. On peut dans ce cas écrire $g' = \frac{\omega_0 l_c \chi^{(2)}}{nc}$

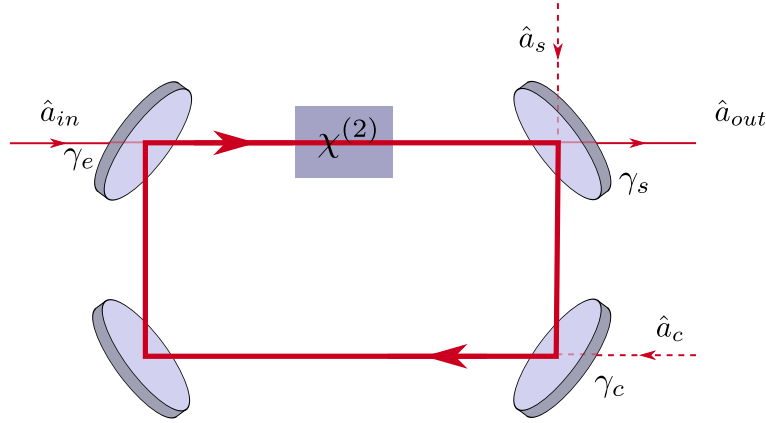


Figure 3.8: Modélisation des pertes dans un OPO réel. On distingue les pertes sur les miroirs d'entrée γ_{in} et de sortie γ_{out} . Les pertes supplémentaires γ_c sont modélisées par un couplage avec un mode vide sur un miroir de sortie.

obtenir ce résultat en utilisant une approche hamiltonienne. Le hamiltonien de l'interaction paramétrique monomode s'écrit :

$$\hat{H} = i\hbar g A_p (\hat{a}^\dagger)^2 + \text{hc} \quad (3.97)$$

On a donc :

$$\left. \frac{d\hat{a}}{dt} \right|_{\text{int param}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] \quad (3.98)$$

$$= g A_p \hat{a}^\dagger \quad (3.99)$$

avec $g = \frac{g'}{\tau}$. L'équation d'évolution de l'OPO monomode s'écrit donc :

$$\tau \frac{d\hat{a}}{dt} = -\gamma \hat{a} + g' A_p \hat{a}^\dagger + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_{in} \quad (3.100)$$

On pose $\sigma = \frac{g' A_p}{\gamma}$ qui peut être assimilé à un gain optique normalisé aux pertes. L'OPO atteint son seuil quand $\sigma \rightarrow 1$. On choisit la phase de la pompe de sorte que le paramètre σ soit réel et positif. Dans cette thèse on s'intéresse en général à des effets quantiques en dessous du seuil, donc pour $0 < \sigma < 1$.

Pour décrire de façon plus réaliste les OPO construits dans nos expériences, on doit rajouter des termes de pertes. Tous les OPO que nous avons utilisés sont en géométrie linéaire, l'entrée et la sortie du champ moyen se font par des miroirs différents, dont les pertes γ_e et γ_s ne sont pas nécessairement égales. On note $\hat{a}_s$ le mode a priori vide entrant dans la cavité par le miroir de sortie, et $\hat{a}_{out}$ le mode de sortie. Enfin, on modélise habituellement les pertes supplémentaires γ_c dans la cavité par un couplage supplémentaire avec un mode vide $\hat{c}$ (représenté sur un miroir hypothétique sur les schémas). Ces pertes peuvent être dues par exemple à l'absorption dans le cristal non linéaire, ou à l'imperfection des traitements diélectriques des miroirs. Les pertes totales sont donc $\gamma = \gamma_e + \gamma_s + \gamma_c$. La figure 3.8 représente un schéma de cette modélisation des pertes dans un OPO réel. Dans ce cas, l'équation d'évolution du mode $\hat{a}$ à l'intérieur de la cavité s'écrit :

$$\tau \frac{d\hat{a}}{dt} = -\gamma \hat{a} + \gamma \sigma \hat{a}^\dagger + \sqrt{2\gamma_e} \hat{a}_{in} + \sqrt{2\gamma_s} \hat{a}_s + \sqrt{2\gamma_c} \hat{c} \quad (3.101)$$

On utilise enfin les relations d'entrée-sortie sur le miroir de sortie pour calculer le mode de sortie de l'OPO, noté $\hat{b}$:

$$\hat{a}_{out} = -\hat{a}_s + \sqrt{2\gamma_s}\hat{a} \quad (3.102)$$

C.1.2 Propriétés classiques

Les propriétés des OPO monomodes sont bien connues. On rappelle ici les résultats importants qui peuvent être appliqués ensuite au cas multimode. La valeur moyenne du champ intracavité satisfait l'équation stationnaire dans laquelle on ne tient pas compte des entrées vides :

$$\alpha = \sigma\alpha^* + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma}\alpha_{in} \quad (3.103)$$

qui se résout simplement :

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} \frac{\alpha_{in} + \sigma\alpha_{in}^*}{1 - \sigma^2} \quad (3.104)$$

La valeur moyenne du champ en sortie de l'OPO s'écrit donc :

$$\alpha_{out} = \sqrt{2\gamma_s}\alpha \quad (3.105)$$

$$= \frac{2\sqrt{\gamma_s\gamma_e}}{\gamma} \frac{\alpha_{in} + \sigma\alpha_{in}^*}{1 - \sigma^2} \quad (3.106)$$

En écrivant le champ entrant $\alpha_{in} = |\alpha_{in}|e^{i\varphi}$, on écrit la puissance du champ sortant :

$$|\alpha_{out}|^2 = |\alpha_{in}|^2 \frac{4\gamma_e\gamma_s}{\gamma^2} \left| \frac{e^{i\varphi} + \sigma e^{-i\varphi}}{1 - \sigma^2} \right|^2 \quad (3.107)$$

$$= |\alpha_{in}|^2 \frac{4\gamma_e\gamma_s}{\gamma^2} \frac{\cos^2 \varphi (1 + \sigma)^2 + \sin^2 \varphi (1 - \sigma)^2}{(1 - \sigma)^2 (1 + \sigma)^2} \quad (3.108)$$

On retrouve ici l'expression de l'amplification dépendante de la phase du champ injecté dans la cavité, par rapport à la phase de la pompe. En effet, si $\varphi = 0$ [π], le champ injecté est amplifié et la puissance en sortie est maximale et vaut :

$$|\alpha_{out}|^2 = |\alpha_{in}|^2 \frac{4\gamma_e\gamma_s}{\gamma^2} \frac{1}{(1 - \sigma)^2} \quad (3.109)$$

Si en revanche $\varphi = \frac{\pi}{2}$ [π], le champ injecté est désamplifié (ou atténué) et la puissance en sortie est minimale et vaut :

$$|\alpha_{out}|^2 = |\alpha_{in}|^2 \frac{4\gamma_e\gamma_s}{\gamma^2} \frac{1}{(1 + \sigma)^2} \quad (3.110)$$

Expérimentalement, on s'intéresse uniquement à la puissance en sortie et on définit le gain de l'amplificateur comme le rapport entre la puissance en sortie avec et sans pompe :

$$G = \frac{|\alpha_{out}(\sigma)|^2}{|\alpha_{out}(\sigma = 0)|^2} \quad (3.111)$$

$$G_{\text{ampli}} = \frac{1}{(1 - \sigma)^2} \quad (3.112)$$

$$G_{\text{désampli}} = \frac{1}{(1 + \sigma)^2} \quad (3.113)$$

En phase de désamplification, le gain minimal est donc de $\frac{1}{4}$, pour une puissance de pompe se rapprochant du seuil $\sigma \rightarrow 1$. En phase d'amplification, le gain est supposé tendre vers l'infini quand $\sigma \rightarrow 1$. Cependant, le gain atteint toujours une valeur limite car au delà d'une certaine valeur de gain, l'hypothèse de la pompe non appauvrie par l'interaction paramétrique n'est plus valable (on parle alors de *pump depletion* en anglais), notamment pour des raisons de conservation de l'énergie. La valeur maximale du gain dépend donc de la puissance du champ signal injecté. On arrive généralement à obtenir des gains optiques de l'ordre de plusieurs dizaines.

Une autre approche pour décrire l'amplification sensible à la phase est de considérer les équations d'évolution des deux quadratures du champ, notées $\hat{X}$ et $\hat{P}$. Leurs valeurs moyennes classiques peuvent être notées x et p , avec :

$$x = \text{Re } \alpha \quad (3.114)$$

$$p = \text{Im } \alpha \quad (3.115)$$

L'état stationnaire des équations d'évolution permettent d'écrire x et p :

$$x = \sigma x + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} x_{in} \quad (3.116)$$

$$p = -\sigma p + \frac{\sqrt{2\gamma_e}}{\gamma} p_{in} \quad (3.117)$$

On en déduit donc :

$$x_{out} = \frac{2\sqrt{\gamma_s\gamma_e}}{\gamma} \frac{x_{in}}{1-\sigma} \quad (3.118)$$

$$p_{out} = \frac{2\sqrt{\gamma_s\gamma_e}}{\gamma} \frac{x_{in}}{1+\sigma} \quad (3.119)$$

On note donc que la quadrature x du champ injecté est amplifiée, et la quadrature p désamplifiée. Ces quadratures sont définies par rapport à la phase de la pompe. Si l'on injecte un champ en phase par rapport à la pompe, ce champ se décompose uniquement sur la quadrature x et sera amplifié. Si par contre la phase du champ injecté est décalée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au champ pompe, il sera désamplifié.

C.1.3 Propriétés quantiques

Les OPO sont des ressources privilégiées en optique quantique pour produire des états non-classiques. Dans la section B du chapitre 1, on a vu que l'état non-classique du champ le plus simple à produire est un état dont les fluctuations quantiques d'un mode particulier sont réduites sous le bruit quantique standard. Les OPO permettent de produire de tels états. On rappelle ici le calcul des variances des observables de quadratures [Walls 95]. Pour le comprendre, on écrit l'équation d'évolution de l'opérateur fluctuation associé au

mode $\hat{a}$ et on néglige les fluctuations du faisceau pompe¹¹ :

$$\tau \frac{d(\delta\hat{a})}{dt} = -\gamma\delta\hat{a} + \gamma\sigma\delta\hat{a}^\dagger + \sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{a}_{in} + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{a}_s + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{c} \quad (3.120)$$

On doit tenir compte à présent des voies vides $\delta\hat{a}_s$ et $\delta\hat{c}$ dont les fluctuations ne sont pas de valeur moyenne nulle. On décrit en général les fluctuations d'un faisceau dans le domaine spectral. On mesure donc les fluctuations des quadratures $\hat{X}$ et $\hat{P}$ à une certaine fréquence de bruit, c'est-à-dire les observables $\langle\delta\hat{X}(\omega)\delta\hat{X}(-\omega)\rangle$ et $\langle\delta\hat{P}(\omega)\delta\hat{P}(-\omega)\rangle$ où ω est la fréquence d'analyse de bruit. Pour des fréquences d'analyse ω trop faibles, on est gêné par les sources de bruit d'origine classique, comme par exemple les oscillations de relaxation du laser. On choisit donc des fréquences d'analyse supérieure à 1 MHz. L'équation précédente s'écrit pour ces opérateurs¹² :

$$\delta\hat{X}(\omega) = \frac{1}{i\omega\tau + \gamma(1-\sigma)} \left[\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{X}_{in}(\omega) + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{X}_s(\omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_c(\omega) \right] \quad (3.121)$$

$$\delta\hat{P}(\omega) = \frac{1}{i\omega\tau + \gamma(1+\sigma)} \left[\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{P}_{in}(\omega) + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{P}_s(\omega) + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{P}_c(\omega) \right] \quad (3.122)$$

Les quadratures du champ en sortie s'écrivent donc :

$$\delta\hat{X}_{out}(\omega) = \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{i\omega\tau + \gamma(1-\sigma)} \left[\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{X}_{in} + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{X}_s + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{X}_c \right] - \delta\hat{X}_s \quad (3.123)$$

$$\delta\hat{P}_{out}(\omega) = \frac{\sqrt{2\gamma_s}}{i\omega\tau + \gamma(1+\sigma)} \left[\sqrt{2\gamma_e}\delta\hat{P}_{in} + \sqrt{2\gamma_s}\delta\hat{P}_s + \sqrt{2\gamma_c}\delta\hat{P}_c \right] - \delta\hat{P}_s \quad (3.124)$$

Expérimentalement, un analyseur de spectre donne la densité spectrale de bruit du photocourant, qui peut être reliée (cf section C.2 du chapitre 1) à la densité spectrale des observables de quadrature à la fréquence ω , c'est-à-dire les valeurs moyennes $\langle\delta\hat{X}_{out}^\theta(\omega)\delta\hat{X}_{out}^\theta(-\omega)\rangle$. On note

$$V_X(\omega) = \langle\delta\hat{X}_{out}(\omega)\delta\hat{X}_{out}(-\omega)\rangle \quad (3.125)$$

$$V_P(\omega) = \langle\delta\hat{P}_{out}(\omega)\delta\hat{P}_{out}(-\omega)\rangle \quad (3.126)$$

Pour calculer ces densités spectrales de bruit, on peut supposer que les différents modes $\hat{a}_{in}$, $\hat{a}_s$ et $\hat{a}_c$ ne sont pas corrélés, c'est à dire que les valeurs moyennes croisées sont nulles :

$$\langle\delta\hat{X}_s^\theta(\omega)\delta\hat{X}_{in}^\theta(-\omega)\rangle = 0 \quad (3.127)$$

$$\langle\delta\hat{X}_{in}^\theta(\omega)\delta\hat{X}_c^\theta(-\omega)\rangle = 0 \quad (3.128)$$

$$\langle\delta\hat{X}_c^\theta(\omega)\delta\hat{X}_s^\theta(-\omega)\rangle = 0 \quad (3.129)$$

On suppose également ces différents champs au bruit quantique standard, c'est-à-dire :

$$\langle\delta\hat{X}_{in}^\theta(\omega)\delta\hat{X}_{in}^\theta(-\omega)\rangle = 1 \quad (3.130)$$

$$\langle\delta\hat{X}_s^\theta(\omega)\delta\hat{X}_s^\theta(-\omega)\rangle = 1 \quad (3.131)$$

$$\langle\delta\hat{X}_c^\theta(\omega)\delta\hat{X}_c^\theta(-\omega)\rangle = 1 \quad (3.132)$$

11. Cette hypothèse est valable dans la limite où le signal injecté dans la cavité est suffisamment faible, de sorte que les fluctuations du produit $A_p\hat{a}^\dagger$ peuvent être assimilées à $A_p\delta\hat{a}^\dagger$ en négligeant le terme $\delta\hat{A}_p\langle\hat{a}^\dagger\rangle$. Si le champ signal intracavité est trop intense, ce terme devient non négligeable et aura pour effet un couplage des fluctuations de la pompe vers celle du champ dans la cavité, ce qui peut poser problème notamment si la pompe n'est pas au bruit quantique standard.

12. Les quadratures $\hat{X}^\theta$ sont des observables, mais ici les opérateurs $\hat{X}^\theta(\omega)$ qui correspondent à leur transformée de Fourier ne sont plus hermitiens

On a donc finalement :

$$V_X(\omega) = \left| \frac{2\gamma_s}{i\omega\tau + \gamma(1-\sigma)} - 1 \right|^2 + \frac{4\gamma_s(\gamma_e + \gamma_c)}{\omega^2\tau^2 + \gamma^2(1-\sigma)^2} \quad (3.133)$$

$$V_P(\omega) = \left| \frac{2\gamma_s}{i\omega\tau + \gamma(1+\sigma)} - 1 \right|^2 + \frac{4\gamma_s(\gamma_e + \gamma_c)}{\omega^2\tau^2 + \gamma^2(1+\sigma)^2} \quad (3.134)$$

Le cas idéal pour observer la réduction de bruit est que $\gamma_e, \gamma_c \ll \gamma_s$ et donc $\gamma \approx \gamma_s$ de sorte que l'on puisse négliger le second terme de ces expressions. Les pertes dans la cavités sont alors dominées par les pertes sur le miroir de sortie (appelé habituellement miroir de couplage). On décrit en général l'importance des pertes sur le miroir de sortie de l'OPO par une grandeur $\eta = \frac{\gamma_s}{\gamma}$ qui décrit les pertes utiles de l'OPO (*escape efficiency* en anglais). Dans le cas où γ est proche de un, on peut négliger les contributions des voies autres que la voie de sortie, et l'on a finalement :

$$V_X(\Omega) \approx \frac{(1+\sigma)^2 + \Omega^2}{(1-\sigma)^2 + \Omega^2} \quad (3.135)$$

$$V_P(\Omega) \approx \frac{(1-\sigma)^2 + \Omega^2}{(1+\sigma)^2 + \Omega^2} \quad (3.136)$$

où $\Omega = \frac{\omega\tau}{\gamma}$ est la fréquence de bruit normalisée à la bande passante de la cavité.

On observe que la quadrature $\hat{P}$ du champ (déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la pompe) est comprimée¹³. Ce résultat est cohérent avec le résultat trouvé pour l'amplification sensible à la phase : on voit grâce à l'équation 3.119 que l'OPO amplifie la quadrature $\hat{X}$ du mode et désamplifie la quadrature $\hat{P}$. Il se passe la même chose pour les fluctuations : les fluctuations quantiques $\delta\hat{X}$ et $\delta\hat{P}$ sont respectivement amplifiées et désamplifiées par rapport au bruit quantique standard.

La figure 3.9 représente la variance $V_P(\omega) = \langle \delta\hat{P}_{out}(\omega)\delta\hat{P}_{out}(-\omega) \rangle$ en fonction de σ et ω . On observe que la réduction de bruit est évidemment maximale quand on se rapproche du seuil, et nulle quand on s'en éloigne. La réduction de bruit n'a lieu qu'à des fréquences de fluctuation faible devant la bande passante de la cavité. Ce résultat traduit uniquement le fait que les fluctuations rapides sont filtrées par la cavité ; à cette fréquence, le système de détection enregistrera uniquement les fluctuations du mode vide $\delta\hat{X}^\theta(\omega)$ réfléchi par le miroir de couplage. La réduction de bruit sur la quadrature $\hat{P}$ s'accompagne naturellement d'un ajout de bruit équivalent sur la quadrature $\hat{X}$, de sorte que les inégalités d'Heisenberg sont toujours assurées.

Amplification sans bruit L'amplification sensible à la phase qui conduit à la réduction de bruit a également des propriétés intéressantes en terme de bruit ajouté quand les fluctuations ne sont pas d'origine quantique. Cette caractéristique est décrite par un paramètre F appelé facteur de bruit, qui mesure l'ajout de bruit d'un amplificateur par le ratio entre le rapport signal sur bruit en entrée, divisé par le rapport signal sur bruit en sortie.

13. D'après les équations précédentes, la réduction de bruit à la fréquence ω correspond en fait à des corrélations entre les bandes latérales de fluctuations aux fréquences ω et $-\omega$

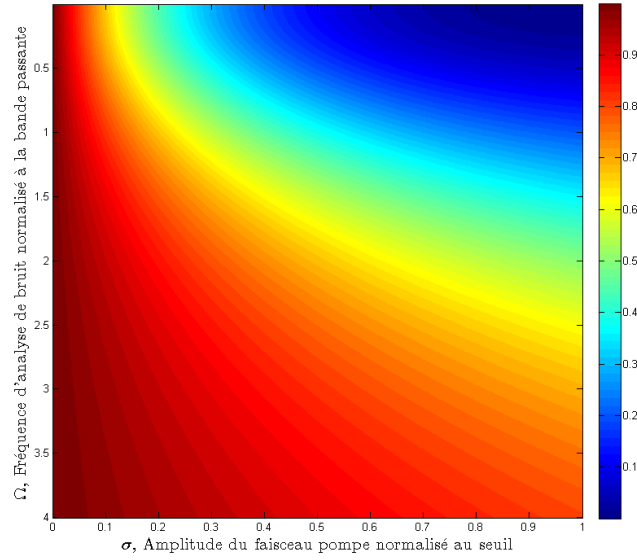


Figure 3.9: Densité spectrale de bruit d'un mode du champ en sortie d'un OPO monomode en fonction de σ , la puissance de pompe normalisée au seuil et de la fréquence d'analyse normalisée à la bande passante de la cavité Ω . Quand σ se rapproche de un, l'état est comprimé pour des valeurs de Ω dans la bande passante de la cavité

On peut montrer qu'un amplificateur insensible à la phase a un facteur de bruit égal à $2 - \frac{1}{G}$, donc strictement supérieur à un, et qui tend vers 2 quand le gain tend vers l'infini. Concrètement, on rajoute toujours 3 dB de bruit sur un signal si celui-ci est fortement amplifié. L'amplification paramétrique est sensible à la phase sous certaines conditions discutées à la section A.3.2 et l'on peut montrer que le facteur de bruit correspondant est égal à un : le rapport signal sur bruit est conservé, c'est-à-dire qu'aucun bruit n'est ajouté durant le processus d'amplification. Cet effet est représenté sur la figure 3.10 à l'aide de la représentation de Fresnel des champs. L'amplification sans bruit a été montrée expérimentalement dans notre groupe dans le cas multimode où l'on amplifie des images [Lopez 08]. On peut également trouver dans la thèse de Laurent Lopez [Lopez 06] un descriptif détaillé des conditions idéales pour obtenir un OPO optimisé pour l'amplification sans bruit.

Ce type d'amplification présente donc un intérêt pour des dispositifs d'optique classique dont le "bruit" considéré n'est pas d'origine quantique, mais pourrait par exemple correspondre à une modulation du faisceau à une fréquence d'analyse élevée que l'on voudrait amplifier. Cependant, cette technique nécessite une connaissance a priori de la phase du signal que l'on souhaite amplifier.

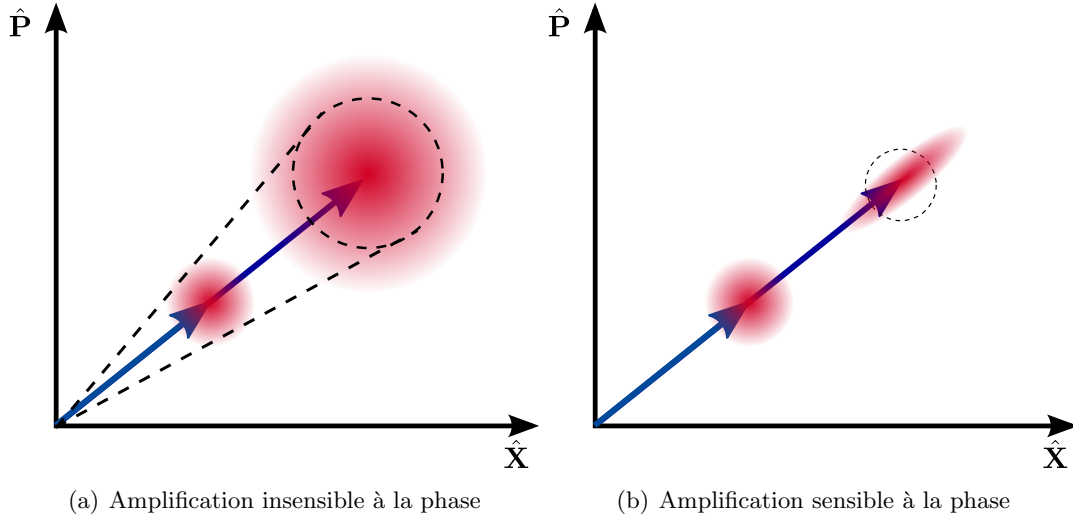


Figure 3.10: Représentation dans le plan de Fresnel de l'effet de l'amplification sensible et insensible à la phase sur les fluctuations associées à un champ amplifié : Dans le cas de l'amplification sensible à la phase, un bruit rajouté apparaît, alors que dans le cas de l'amplification insensible à la phase, le facteur de bruit est strictement égal à un et de plus, les fluctuations de la quadrature de phase sont réduites sous le bruit quantique standard.

C.2 Modèle général des OPO multimodes

C.2.1 Définition et exemples étudiés

Définition 1 *Un OPO est dit multimode si la cavité optique permet la résonance de plusieurs modes simultanément, et si le cristal non-linéaire permet la conversion paramétrique de photons pompes en photons signal et complémentaire dans plusieurs modes résonants dans la cavité.*

L'exemple le plus simple d'un OPO multimode, est un OPO utilisant un cristal non linéaire de type II pour lequel les photons signal et complémentaires ont des polarisations croisées [Laurat 04]. Nous allons dans la suite étudier deux types d'OPO multimodes, dans les domaines spatial d'une part, et fréquentiel d'autre part. Dans chacun des cas, il est nécessaire de choisir une base adaptée pour décrire les différents modes résonants dans la cavité, et qui sont couplés par l'interaction paramétrique multimode.

OPO en cavité auto-imageante Un OPO dans une cavité dégénérée transversalement et pompé par un faisceau de large extension transverse est multimode, car différents modes transverses résonants peuvent être produits par le processus de conversion paramétrique d'un photon du faisceau pompe, comme évoqué dans la première partie de ce chapitre. Dans la suite, nous étudions le cas particulier de la cavité auto-imageante. Un schéma du fonctionnement de cet OPO est présenté sur la figure 3.11. Dans cette cavité, tous les modes transverses sont résonants simultanément, et il est donc possible de choisir n'importe quelle base pour les décrire. La définition d'une base de modes gaussiens n'a pas beaucoup de sens, car la cavité n'a plus de waist propre. Nous choisissons donc d'utiliser la base des modes locaux dans le plan transverse au centre du cristal, associés aux opérateurs $\hat{a}(\boldsymbol{\rho})$. Dans cette base, le couplage entre les modes dû à l'interaction paramétrique est donné par

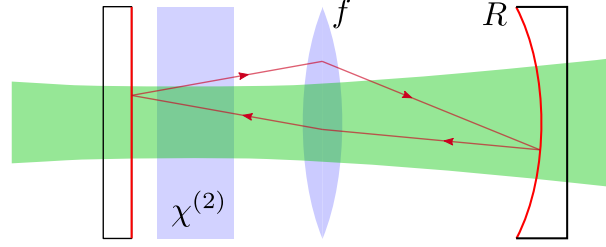


Figure 3.11: Schéma du fonctionnement d'un OPO en cavité auto-imageante. Un cristal non linéaire est placé dans une cavité auto-imageante alignée à dégénérescence, et pompé avec un faisceau de large profil transverse.

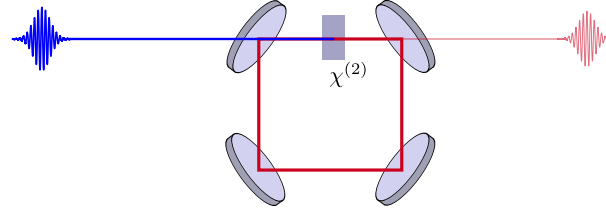


Figure 3.12: Schéma du fonctionnement d'un OPO pompé en modes synchrones. Un cristal non linéaire est placé dans une cavité et pompé avec un faisceau laser à verrouillage de modes dont la distance entre impulsions correspond exactement à la longueur de cavité.

le Hamiltonien calculé à la section B.1 de ce chapitre.

Pour que la description soit plus simple, on peut choisir de pixelliser le plan transverse, et d'utiliser la famille de modes décrite par les opérateurs $\{\hat{a}_m\}_{m \in M}$ où M est une partition du plan transverse. Cette description, introduite à la section B.1.3 de ce chapitre ne perd aucune généralité si la taille des pixels est choisie suffisamment petite. Dans la section A du chapitre 5, on présente une étude détaillée du comportement de cet OPO avec des valeurs expérimentales typiques.

OPO pompé en modes synchrones Un OPO pompé en modes synchrones (*SPOPO* en anglais) est un OPO que l'on pompe avec un laser à verrouillage de modes dont la distance entre impulsions correspond exactement à la longueur de la cavité, notée L , comme représenté sur la figure 3.12. L'accord de phase du cristal permet en général la conversion paramétrique d'un photon pompe en photons signal et complémentaire de profils longitudinaux différents. C'est donc également un OPO multimode. On le décrit donc en utilisant la base des modes longitudinaux de fréquence $\omega_n = \omega_0 + n\Omega$, où $\Omega = 2\pi \frac{c}{L}$. Les opérateurs bosoniques associés sont notés $\hat{a}_n$.

Dans cette description, le couplage non-linéaire entre les modes est décrit par le hamiltonien calculé à la section 3.5 de ce chapitre. Dans la section A du chapitre 6, on traite en détail les propriétés du SPOPO en utilisant des paramètres correspondant aux valeurs expérimentales.

La description qui suit des OPO multimodes est générale, et s'applique en particulier dans ces deux cas. Elle utilise une base de plusieurs modes résonants dans la cavité, et pour laquelle on peut écrire facilement les termes résultants de l'interaction paramétrique.

C.2.2 Equations d'évolution des modes

On peut maintenant écrire les équations d'évolution des opérateurs $\hat{a}_n$ des différents modes dans le cas des OPO multimodes. La description donnée ici est générale et s'applique donc à tout type d'OPO multimode.

On s'inspire du cas monomode, décrit par l'équation 3.100. Les termes linéaires sont inchangés si l'on suppose les pertes dans la cavité identiques pour tous les modes. Seul le terme correspondant à l'interaction paramétrique diffère. Celui-ci peut-être calculé en utilisant le hamiltonien du couplage paramétrique entre les modes :

$$\left. \frac{d\hat{a}_n}{dt} \right|_{\text{int. param.}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{a}_n] \quad (3.137)$$

Ce hamiltonien a été calculé à la section B dans les deux cas qui nous intéressent. D'une manière générale, on peut écrire :

$$\hat{H} = i\hbar g \sum_{n,k} \mathcal{C}_{n,m} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger + \text{hc} \quad (3.138)$$

On a donc finalement :

$$\tau \frac{d\hat{a}_n}{dt} = -\gamma \hat{a}_n + g \sum_m \mathcal{C}_{n,m} \hat{a}_m^\dagger + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_{n,in} \quad (3.139)$$

Les équations d'évolution de l'OPO multimode apparaissent donc comme une assemblée d'équations couplées. Pour résoudre ces équations, on utilise la *diagonalisation de la matrice de couplage* introduite à la section B.4. Les superopérateurs $\hat{S}_k$ introduits lors de la diagonalisation du couplage entre les modes par l'équation 3.93 vérifient donc les équations suivantes :

$$\tau \frac{d\hat{S}_k}{dt} = -\gamma \hat{S}_k + g \Lambda_k \hat{S}_k^\dagger + \sqrt{2\gamma} \hat{S}_{k,in} \quad (3.140)$$

Cet ensemble d'équations décrit les OPO multimodes comme une assemblée d'OPO monomodes indépendants, chacun de ces supermodes voyant une puissance de pompe effective proportionnelle à Λ_k . On peut donc appliquer la plupart des résultats des OPO monomodes pour les supermodes, grâce à la diagonalisation de la matrice de couplage entre les modes.

C.3 Effets classiques dans les OPO multimodes

C.3.1 Seuil d'oscillation

Dans un OPO monomode, le seuil d'oscillation apparaît quand le gain intracavité est égal aux pertes, $\sigma = 1$ c'est-à-dire quand $g' A_p = \gamma$. Pour des puissances de pompe supérieures, il y a émission d'un champ intense dans le mode résonant dans la cavité.

Dans un OPO multimode, les différents supermodes sont en compétition, de la même façon que dans un laser. Cependant, l'efficacité de l'interaction non-linéaire est différente pour tous les modes, qui ont donc chacun une puissance de pompe au seuil différente. Il est donc intéressant de considérer le mode $\hat{S}_0$ dont la valeur propre est la plus grande :

$$|\Lambda_0| = \sup_k |\Lambda_k| \quad (3.141)$$

C'est ce mode qui voit la plus grande puissance de pompe. Dans la description que nous avons utilisée, l'amplitude du champ pompe est contenue dans la matrice de couplage $\mathcal{C}_{k,l}$ et donc dans son spectre. Les valeurs propres Λ_k sont donc directement proportionnelles à l'amplitude de pompe. Le seuil d'oscillation apparaît donc pour $g|\Lambda_0| = \gamma$. Pour des puissances de pompe supérieures, on peut montrer qu'il y a émission intense d'un champ dans le supermode $\hat{S}_0$ [Patera 08].

Il peut exister plusieurs valeurs propres de même valeur absolue maximale. Il peut s'agir de deux valeurs opposées, ou encore d'une valeur propre d'ordre de multiplicité élevé. L'espace propre des modes associés à cette valeur propre est de dimension supérieure ou égale à deux. Il y a alors brisure de symétrie, et le champ émis au dessus du seuil prend une valeur quelconque dans le sous-espace propre associé à cette valeur.

Ce cas de figure a été calculé précisément dans le cas d'une cavité dégénérée pour les deux modes transverses TEM₀₁ et TEM₁₀ [Navarrete-Benlloch 08]. Dans ce cas, la cavité est dégénérée pour tout mode gaussien TEM₀₁ dans toutes les directions du plan transverse. Au dessus du seuil, il y a brisure de symétrie et émission d'un champ intense se fera dans une direction quelconque. Une étude expérimentale de ce phénomène a été faite et les résultats sont présentés dans le chapitre 4.

C.3.2 Amplification sensible à la phase sous le seuil d'oscillation

L'OPO multimode se comporte comme un ensemble d'OPO monomodes dans son fonctionnement sous le seuil d'oscillation. Chaque supermode a un seuil à une puissance de pompe proportionnelle à sa valeur propre associée Λ_k . Posons $\sigma_k = \frac{g\Lambda_k}{\gamma}$. Cette quantité traduit la distance du supermode k au seuil virtuel qui lui serait associé pour un fonctionnement monomode, et prend donc pour valeur maximale en module $\left|\frac{\Lambda_k}{\Lambda_0}\right|$. Les propriétés d'amplification sensible à la phase en fonctionnement monomode sont donc toujours vérifiées par le supermode k . Cependant, la quadrature amplifiée lors de ce processus dépend du signe de Λ_k . Dans l'étude du cas monomode, on avait considéré la constante $\sigma = \frac{g'A_p}{\gamma}$ réelle positive. La quadrature $x = \langle \hat{X} \rangle$ (en phase avec le champ pompe) était alors amplifiée, et la quadrature $p = \langle \hat{P} \rangle$ (en opposition de phase avec le champ pompe) désamplifiée. On peut donc en déduire :

$$\Lambda_k > 0 \Rightarrow x_k \text{ est amplifiée et } p_k \text{ désamplifiée.} \quad (3.142)$$

$$\Lambda_k < 0 \Rightarrow p_k \text{ est amplifiée et } x_k \text{ désamplifiée.}$$

On peut alors écrire le gain en amplification et désamplification si l'on injecte le supermode k dans la cavité :

$$G_{\text{ampli}}^k = \frac{1}{(1 - |\sigma_k|)^2} \quad (3.143)$$

$$G_{\text{désampli}}^k = \frac{1}{(1 + |\sigma_k|)^2} \quad (3.144)$$

On peut également déduire les valeurs extrêmes des gains quand on tend vers le seuil :

$$G_{\text{ampli, max}}^k = \frac{1}{(1 - \left| \frac{\Lambda_k}{\Lambda_0} \right|)^2} \quad (3.145)$$

$$G_{\text{désampli, max}}^k = \frac{1}{(1 + \left| \frac{\Lambda_k}{\Lambda_0} \right|)^2} \quad (3.146)$$

Dans le cas où l'on injecte dans la cavité OPO une superposition de plusieurs supermodes, les résultats d'amplification sont différents. Cela peut correspondre à une image de profil transverse quelconque, où un peigne de fréquence de profil d'amplitude et de phase spectrale quelconques. Pour calculer le profil du mode en sortie de l'OPO, on doit donc décomposer le mode entrant sur la base des supermodes de l'OPO. Il faut dans ce cas tenir compte des effets de phase. Si le mode injecté est une superposition linéaire de plusieurs supermodes de valeurs propres de même signe, il est nécessaire que la phase de ces différents modes soit égale ou opposée, de sorte que la quadrature amplifiée soit la même.

C.4 Effets quantiques dans les OPO multimodes

C.4.1 Réduction de bruit sous le seuil d'oscillation

Sous le seuil d'oscillation d'un OPO multimode, l'amplification sensible à la phase des supermodes est accompagnée des mêmes effets quantiques que dans le cas d'un OPO monomode. D'après l'équation d'évolution 3.140, on peut dériver les mêmes calculs, supermode par supermode, que dans le cas monomode. Considérons à nouveau le cas parfait où la totalité des pertes optiques dans la cavité a lieu sur le miroir de couplage : $\gamma = \gamma_s$. On trouve alors les mêmes formules de réduction de bruit pour les quadratures du supermode $\hat{S}_k$, en fonction de σ_k et de la fréquence d'analyse de bruit normalisée à la bande passante de la cavité Ω :

$$V_{X,k}(\Omega) = \langle \delta \hat{X}_{out}^k(\Omega) \delta \hat{X}_{out}(-\Omega) \rangle \approx \frac{(1 + \sigma_k)^2 + \Omega^2}{(1 - \sigma_k)^2 + \Omega^2} \quad (3.147)$$

$$V_{P,k}(\Omega) = \langle \delta \hat{P}_{out}^k(\Omega) \delta \hat{P}_{out}(-\Omega) \rangle \approx \frac{(1 - \sigma_k)^2 + \Omega^2}{(1 + \sigma_k)^2 + \Omega^2} \quad (3.148)$$

Comme pour l'amplification sensible à la phase, c'est le signe de σ_k et donc de la valeur propre Λ_k qui détermine la quadrature dont les fluctuations quantiques sont réduites sous le bruit quantique standard. Si $\Lambda_k > 0$, c'est la quadrature $\hat{P}$ qui est comprimée, et si $\Lambda_k < 0$, c'est la quadrature $\hat{X}$.

Dans la limite où l'on tend vers le seuil de l'OPO, la réduction maximale que l'on peut atteindre pour chaque supermode correspond toujours à des fréquences d'analyse de bruit Ω nulle. Cette valeur s'exprime d'une manière générale :

$$V_{P,k} = \left(\frac{|\Lambda_0| - |\Lambda_k|}{|\Lambda_0| + |\Lambda_k|} \right)^2 \quad (3.149)$$

La réduction de bruit sous le bruit quantique standard est significative seulement pour les supermodes dont la valeur propre n'est pas très éloignée de la valeur propre maximale

Λ_0 . Dans le cas de l'OPO auto-imageant avec un faisceau pompe de taille $w_p = 300 \mu\text{m}$ et un cristal de longueur $l_c = 10 \text{ mm}$, le spectre de la matrice de couplage a été présenté sur la figure 3.6. La figure 3.13 représente la réduction de bruit de quelques supermodes en fonction de la fréquence d'analyse de bruit normalisée Ω .

L'OPO multimode génère donc des états comprimés présentant une réduction de bruit sous le bruit quantique standard sur un grand nombre de mode à l'intérieur d'un même faisceau laser, c'est-à-dire sur un grand nombre de modes copropageants. Il s'agit donc d'un état non-classique multimode tel qu'on l'a défini à la section B.4.1 du premier chapitre de cette thèse. Le degré de cet état est égal au nombre de valeurs propres différentes de zéro. Il inclut théoriquement toutes les valeurs propres quasiment égales à zéro. Il n'est donc pas adapté et on lui préfère le paramètre de coopérativité κ de la matrice de couplage.

L'état produit par l'OPO multimode est gaussien et on peut écrire la matrice de covariance de l'état produit par l'OPO multimode dans la base des supermodes $\hat{S}_k$ qui est diagonale :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sigma_0)^2+\Omega^2}{(1-\sigma_0)^2+\Omega^2} & 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & \frac{(1-\sigma_0)^2+\Omega^2}{(1+\sigma_0)^2+\Omega^2} & & & & \\ 0 & & \frac{(1+\sigma_1)^2+\Omega^2}{(1-\sigma_1)^2+\Omega^2} & 0 & & \\ \vdots & & 0 & \frac{(1-\sigma_1)^2+\Omega^2}{(1+\sigma_1)^2+\Omega^2} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{(1+\sigma_N)^2+\Omega^2}{(1-\sigma_N)^2+\Omega^2} & 0 \\ & & & & 0 & \frac{(1-\sigma_N)^2+\Omega^2}{(1+\sigma_N)^2+\Omega^2} \end{pmatrix} \quad (3.150)$$

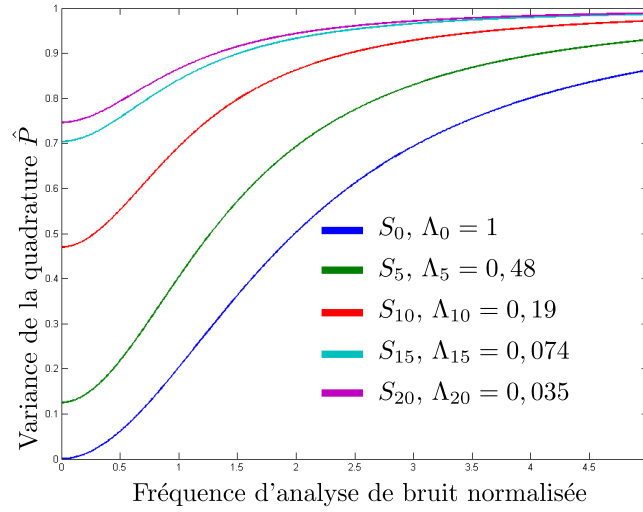
C.4.2 Verrouillage de la pompe au dessus du seuil d'oscillation

Au dessus du seuil d'oscillation de l'OPO, un champ intense dans le mode de valeur propre maximale est émis. Les autres supermodes voient alors une puissance de pompe égale à celle au niveau du seuil. Ce phénomène de blocage de la pompe (*pump-clamping* en anglais) ou du gain (*gain-clamping*) est bien connu dans les OPO et les lasers.

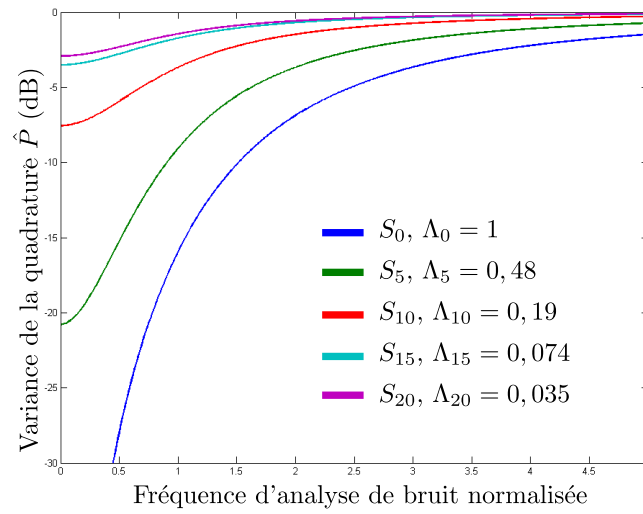
On peut prédire qu'un OPO multimode au dessus du seuil permet la réduction de bruit pour tous les supermodes sauf celui émis, d'un montant égal à celui atteint au niveau du seuil, tel que définit par l'équation 3.149. Cet effet est discuté en détail dans le chapitre 4 dans le cas simple où la cavité est résonante pour les modes gaussiens TEM₁₀ et TEM₀₁.

C.4.3 Corrélations quantiques entre modes copropageants

On a montré que les OPO multimodes génèrent une réduction de bruit sur un certain nombre de modes simultanément, à l'intérieur d'un même faisceau laser. Comme on l'a vu à la section B.4.3 du premier chapitre, les corrélations entre plusieurs modes peuvent se caractériser par différents critères tels que la gémellité, le critère EPR ou l'inséparabilité, qui se traduisent par une réduction de bruit sur un mode particulier. Réciproquement, la réduction de bruit sur plusieurs modes peut se transformer en intrication après un changement de base.



(a) Echelle linéaire



(b) Echelle logarithmique

Figure 3.13: Réduction de bruit théorique pour quelques supermodes de l'OPO en cavité auto-imageante.

Prenons par exemple deux modes de valeurs propres égales en module : $|\Lambda_{k_1}| = |\Lambda_{k_2}|$, associés aux opérateurs $\hat{S}_{k_1}$ et $\hat{S}_{k_2}$. Si l'on regarde la bonne combinaison linéaire de ces deux modes :

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{k_1} + i\hat{S}_{k_2}) \\ \hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{k_1} - i\hat{S}_{k_2}) \end{cases} \quad \text{si } \Lambda_{k_1} = \Lambda_{k_2} \quad (3.151)$$

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{k_1} + \hat{S}_{k_2}) \\ \hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{k_1} - \hat{S}_{k_2}) \end{cases} \quad \text{si } \Lambda_{k_1} = -\Lambda_{k_2} \quad (3.152)$$

Dans ce cas, le hamiltonien de l'interaction non linéaire correspondant à ces deux modes se simplifie :

$$\hat{H}_{k_1 k_2} = \Lambda_{k_1} \hat{S}_{k_1}^2 + \Lambda_{k_2} \hat{S}_{k_2}^2 + \text{hc} \quad (3.153)$$

$$= 2\Lambda_{k_1} \hat{b}\hat{c} + \text{hc} \quad (3.154)$$

Ce qui correspond exactement au hamiltonien de l'interaction paramétrique entre deux modes signal et complémentaire qui conduit à une intrication théoriquement parfaite entre ces modes.

Intrication bimode multiple Les matrices de couplage des deux cas que nous avons étudiés ne présentent pas de valeurs propres exactement égales ou opposées. Cependant, on peut toujours prédire des corrélations quantiques entre plusieurs modes. Les calculs sont effectués en détail dans [Patera 08], et montrent qu'à partir d'une réduction de bruit multimode, un changement de base conduit à des corrélations quantiques entre un grand nombre de couples de modes, qui dépend du nombre de modes initialement comprimés.

Génération de Cluster States Un OPO multimode produit un grand nombre de modes intriqués copropageants à l'intérieur d'un même faisceau laser. En vue de l'utilisation de ces états multimodes pour l'information quantique, la description à l'aide du formalisme de *cluster-state* est la plus adaptée. Il s'agit d'une classe d'états proposée pour le traitement quantique de l'information, pour lesquelles les mesures successives sur différents modes constituent les étapes du calcul quantique [Briegel 01]. Il a déjà été mis en oeuvre pour un petit nombre de modes en combinant des faisceaux comprimés sur une succession de lames séparatrices [Yukawa 08].

En utilisant le changement de bases de modes adaptés, on peut transformer le hamiltonien d'interaction en un autre hamiltonien quadratique (et donc également transformer la matrice de covariance Γ). L'état produit par l'OPO multimode peut donc correspondre à un cluster-state avec un changement de base adapté. Cette opération, combinée à un système de détection multimode du type de celui présenté à la section C.5.2 du chapitre 1, ainsi qu'à une mesure non gaussienne sur un mode particulier, permettrait de réaliser un grand nombre d'opérations de calcul quantique. Ce nombre d'opération augmente encore si l'on peut mettre en forme la matrice de covariance, c'est-à-dire changer le spectre des valeurs propres de la matrice de couplage de l'interaction paramétrique. Ceci est possible par exemple en modifiant le profil de pompe de l'OPO multimode.

D Conclusion

Nous avons étudié l'interaction paramétrique entre un faisceau pompe supposé classique et plusieurs modes signaux, et montré que cette interaction était a priori fortement multimode quand on la décrit dans une base de modes particulière. Ainsi, dans le cas des modes transverses, les modes pixels sont privilégiés pour décrire la conversion paramétrique d'un faisceau pompe de profil transverse large. De même, l'interaction paramétrique d'un peigne de fréquence pompe avec un peigne de fréquence signal se calcule facilement dans la base des modes de fréquences. Dans les deux cas, l'interaction non-linéaire intégrée sur la longueur du cristal introduit un couplage entre les différents modes qui peut s'exprimer par une matrice de couplage entre les modes. Le traitement de ce couplage est simplifié en utilisant un changement quantique de base de modes adaptée qui fait apparaître les modes propres de l'interaction paramétrique. Ces modes propres dépendent des propriétés du faisceau pompe et du cristal non-linéaire.

Si l'on place le cristal $\chi^{(2)}$ dans une cavité dégénérée pour tous les modes considérés, on obtient un OPO multimode. Les modes propres de l'interaction paramétriques sont alors modes propres de l'OPO et conduisent chacun à des états non-classiques. Dans la base des modes propres, on obtient en sortie de l'OPO une réduction de bruit sous le bruit quantique standard pour chaque mode en fonction de sa valeur propre associée. En opérant un nouveau changement de base de modes, on peut transformer cette réduction de bruit en intrication multimode, et ainsi produire des états non-classiques d'une grande diversité.

Les OPO multimodes apparaissent donc comme un système particulièrement intéressant car ils permettent de modifier les propriétés quantiques d'un grand nombre de modes en fonction des propriétés du faisceau pompe et du cristal non-linéaire. Dans les chapitres 5 et 6, on approfondit l'étude de deux OPO multimodes pour les modes transverses dans le domaine de l'imagerie d'une part et pour les modes longitudinaux dans le domaine des impulsions femtosecondes d'autre part. Ces études théoriques viennent compléter le travail expérimental autour d'un OPO en cavité auto-imageante et d'un OPO pompé en modes synchrones qui constitue une part importante de ce travail de thèse.

Génération d'un état non-classique multimode brillant

Sommaire

A	Contexte et objectif de cette expérience.	137
B	Dispositif expérimental	140
B.1	Source laser	140
B.2	Cavité de filtrage	140
B.3	Le cristal de PPKTP	142
B.4	Cavité optique	143
B.5	Adaptation de mode du faisceau pompe	146
B.6	Asservissements de la cavité	147
B.7	Asservissements de la phase relative au dessus du seuil	147
B.8	Détection homodyne	151
C	Génération d'états non-classiques multimodes	153
C.1	Réduction de bruit multimode sous le seuil d'oscillation	153
C.2	Seuil d'oscillation de l'OPO	153
C.3	État trimode au dessus du seuil d'oscillation	157
D	Conclusion	159

A Contexte et objectif de cette expérience.

Nous présentons ici une expérience d'optique quantique multimode utilisant un OPO dans une cavité classique, mais utilisant la dégénérescence naturelle de la cavité pour les modes gaussiens TEM_{10} et TEM_{01} . Deux équipes de recherche différentes ont mis en évidence la réduction de bruit simultanée sur ces deux modes en dessous du seuil d'oscillation de l'OPO [Janousek 09, Lassen 09]. Notre expérience a pour but d'aller plus loin, et d'observer la réduction de bruit au dessus du seuil d'oscillation de l'OPO, pour des modes orthogonaux au mode intense émis. Elle fait suite à l'article théorique [Navarrete-Benlloch 08]

dont on rappelle le contenu dans le paragraphe suivant. Après des investigations expérimentales, nous avons changé légèrement le dispositif par rapport à la prédiction théorique pour réussir à démontrer expérimentalement la génération d'un état trimode au dessus du seuil. Ce travail a été réalisé avec Francesco Scazza, en thèse de Master de l'université de Milan en Italie.

Propriétés quantiques d'un OPO multimode au dessus du seuil

Dans les articles [Navarrete-Benlloch 08] et [Navarrete-Benlloch 09], Navarrete-Benlloch et al. considèrent un OPO dont la cavité est résonante pour les modes TEM_{01} et TEM_{10} d'une même fréquence ν_0 , et pompé par un faisceau de fréquence $2\nu_0$ dans un mode TEM_{00} . La cavité est également supposée symétrique pour ce mode. Le problème présente une symétrie de révolution parfaite. Pour une puissance de pompe suffisante le seuil de l'OPO est atteint, et l'on suppose que le mode émis au dessus du seuil est de fréquence ν_0 . C'est donc une combinaison linéaire des modes TEM_{01} et TEM_{10} . Or la conservation du moment angulaire orbital lors du processus de conversion paramétrique observée expérimentalement [Caetano 02] interdit l'émission d'un mode de Laguerre-Gauss, c'est-à-dire du type $\text{TEM}_{01} + i \text{TEM}_{10}$. Il s'agit donc d'un mode de Hermite-Gauss d'orientation quelconque. On peut également appliquer le raisonnement plus général des OPO multimodes développé au chapitre précédent, pour lequel on considère seulement deux modes transverses résonants dans la cavité. À la section C de ce chapitre, on a rappelé que le mode de plus grande valeur propre Λ_0 est émis au dessus du seuil, et que tous les autres modes sont comprimés d'une quantité indépendante de la distance au seuil, proportionnelle à $\frac{\Lambda_0 - \Lambda_k}{\Lambda_0 + \Lambda_k}$.

Le fonctionnement d'un tel OPO au dessus du seuil est donc intéressant du point de vue quantique. Deux descriptions du même phénomène sont possibles.

1. On peut définir l'orientation transverse du mode émis comme la direction x . C'est donc un mode TEM_{10} . Le mode orthogonal TEM_{01} est alors de valeur moyenne nulle. Comme décrit au paragraphe C.4.2, ce mode voit une puissance de pompe verrouillée à sa valeur au seuil et on peut lui prédire une réduction de bruit maximale.
2. L'émission d'un mode de Hermite-Gauss définit une direction particulière. Il y a donc brisure de la symétrie du problème. Cette direction est aléatoire et peut donc fluctuer au cours du temps. Les relations d'incertitude de Heisenberg autorisent alors à ce que la variable conjuguée de l'orientation du mode TEM_{10} émis soit parfaitement définie. Il s'agit de la quadrature de phase du mode de TEM_{01} de direction orthogonale. Pour un état pur pour lequel le produit des variances de ces deux observables vaut un, on peut donc obtenir un état bimode, brillant sur le mode TEM_{10} et comprimé sur le mode TEM_{01} .

Pour détecter cette réduction de bruit, on utilise une détection homodyne avec un oscillateur local correspondant exactement au mode comprimé, c'est-à-dire un mode TEM_{10} d'orientation orthogonale à celle émise par l'OPO. Pour s'affranchir des fluctuations de l'orientation de ce mode, et ainsi s'affranchir des fluctuations du mode émis, Navarrete-Benlloch et al. proposent de se placer suffisamment au dessus du seuil de fonctionnement de l'OPO.

Dans notre cas, on injecte l'OPO avec un mode TEM_{10} pour forcer l'oscillation de l'OPO sur ce mode. Le mode TEM_{01} d'orientation orthogonale est alors bien défini. L'injection est de plus nécessaire pour asservir la cavité à la résonance de ces deux modes. Théoriquement, cette configuration doit nous permettre d'observer une réduction de bruit sur le mode TEM_{01} , que l'on peut mesurer en mettant en forme l'oscillateur local de la détection homodyne.

Nous avons cependant été amené à modifier la configuration expérimentale pour atteindre une stabilité suffisante pour observer un état non-classique au dessus du seuil de l'OPO. En changeant la focalisation du champ pompe, et grâce à la large plage d'accord de phase du cristal de PPKTP que nous avons utilisé, nous avons pu faire osciller l'OPO sur un mode TEM_{00} au dessus du seuil.

	Polarisation p	Polarisation s
Longueur	40 cm	40 cm
Taille du waist	$370\ \mu\text{m}$	$370\ \mu\text{m}$
Finesse	270	1600
Bande passante	2.8 MHz	470 kHz

Table 4.1: Caractéristiques de la cavité de filtrage utilisée

B Dispositif expérimental

Nous décrivons ici le dispositif expérimental mis en place pour l'expérience de réduction de bruit au dessus du seuil. Ce dispositif est présenté sur la figure 4.1.

B.1 Source laser

Notre source laser est un laser Diabolo de la société allemande *Innolight*. Elle est constitué d'un laser de YAG en cavité complètement monolithique en anneau non planaire NPRO (*Nonplanar ring oscillator*) ou MISER (*monolithic isolated single-mode end-pumped rings*), qui délivre un faisceau ultrastable à 1064 nm. Une partie de ce faisceau est envoyée dans une cavité de doublage interne au laser qui utilise un cristal de $\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$. On dispose donc de deux faisceaux cohérents de 300 mW à 1064 nm et 600 mW à 532 nm. Un modulateur électro-optique à l'intérieur du laser génère une modulation de phase à 12 MHz sur le faisceau infra-rouge qui subsiste donc sur le faisceau vert doublé.

B.2 Cavité de filtrage

On utilise une cavité de filtrage pour le faisceau à 1064 nm qui a pour but à la fois de filtrer le mode spatial du faisceau, et d'éliminer les fluctuations classiques du faisceau pour des fréquences en dehors de la bande passante de la cavité. Il s'agit d'un modèle de cavité triangulaire utilisé depuis longtemps dans notre groupe, et décrit à la figure 4.3. Elle est constituée d'un seul bloc d'Invar sur lequel on fixe trois miroirs. Le miroir de fond de cavité est placé sur une cale piezo-électrique pour asservir sa longueur à résonance avec le faisceau injecté. Le signal d'erreur de cet asservissement est obtenu par la technique de Pound-Drever-Hall [Drever 83] en démodulant à 12 MHz le signal haute fréquence d'un photodétecteur mesurant le faisceau réfléchi par la cavité. La cavité possède une biréfringence naturelle et possède une basse finesse pour la polarisation horizontale $\mathcal{F} \approx 270$ et une haute finesse pour la polarisation verticale $\mathcal{F} \approx 1600$. Les propriétés de cette cavité de filtrage sont décrites dans la thèse de Laurent Lopez [Lopez 06], et rappelées dans le tableau 4.1.

Cette cavité est particulièrement utile pour cette expérience car elle permet d'une part de fixer une référence pour tous les modes transverses que nous utilisons, et d'autre part de créer des modes transverses d'ordre supérieur à partir d'un faisceau dans un mode TEM_{00} . Quand la cavité est parfaitement alignée, l'injection correspond exactement au mode TEM_{00} de la cavité. Quand on désaligne légèrement l'injection, le faisceau est projeté sur les modes gaussiens de la cavité, et plusieurs modes gaussiens d'ordre supérieur résonent

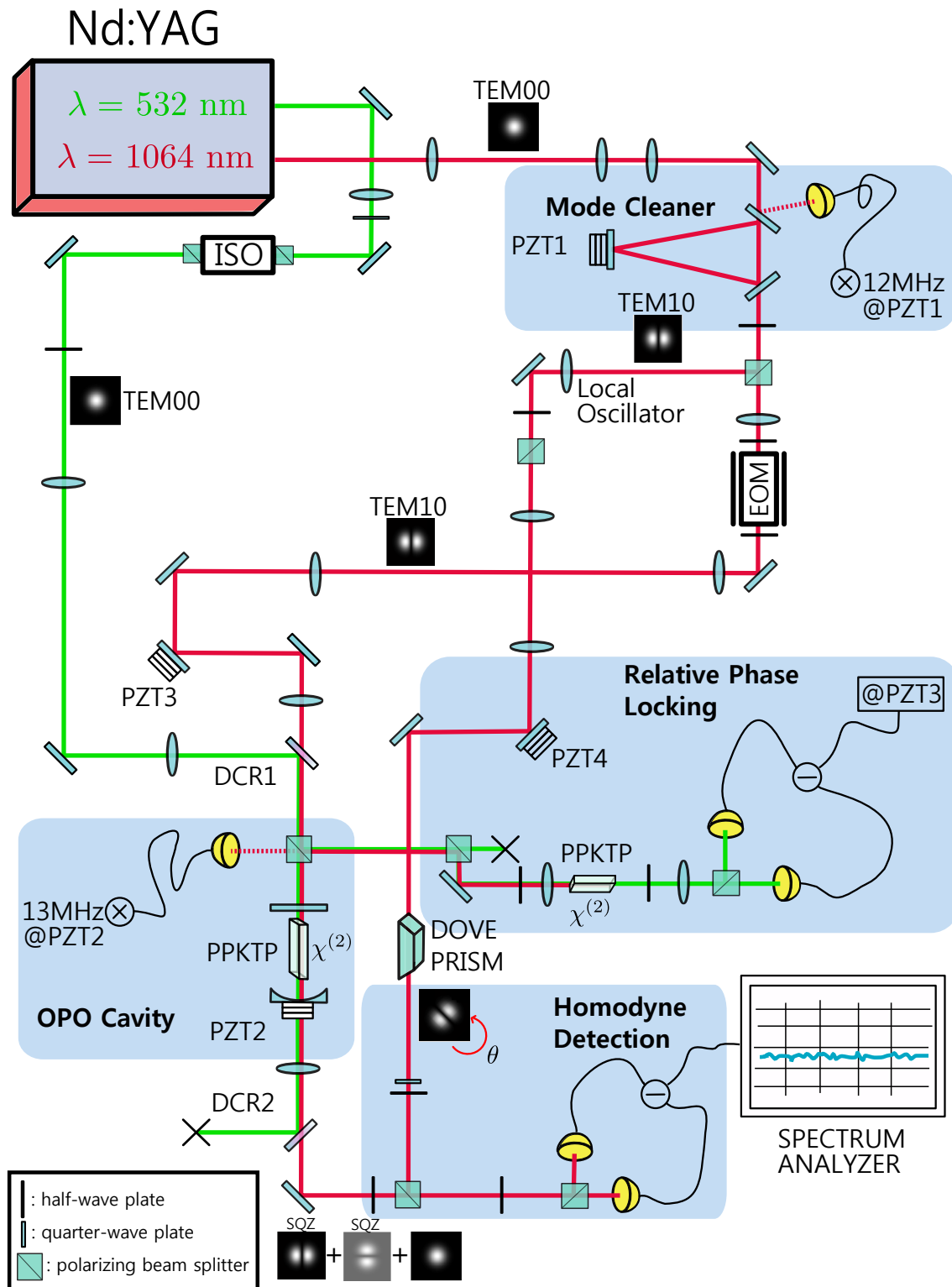


Figure 4.1: Dispositif expérimental complet réalisé pour la mesure de réduction de bruit au dessus du seuil pour les modes TEM_{10} et TEM_{01}



Figure 4.2: Laser Diabolo de la société Innolight

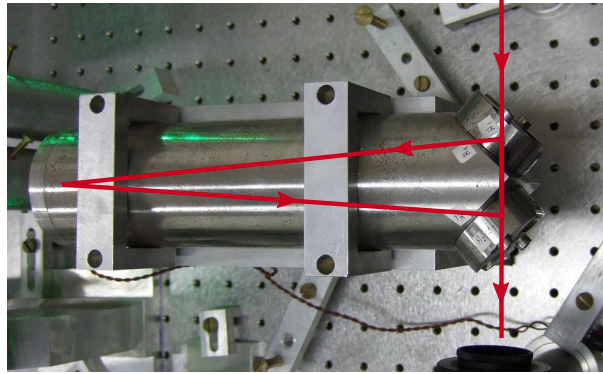


Figure 4.3: Cavité de filtrage utilisée pour filtrer les fluctuations du faisceau à 1064 nm.

dans la cavité. On peut asservir la longueur de la cavité sur ces résonances. Dans ce cas, le faisceau de sortie de la cavité de filtrage est un mode gaussien d'ordre supérieur mais qui garde le même alignement et le même waist que le mode TEM_{00} . Cette opération se fait au détriment de la puissance du laser. On perd environ 60% de la puissance quand on passe d'un mode TEM_{00} à un mode TEM_{10} . Ce rendement pourrait être amélioré en utilisant une lame de phase en amont de la cavité.

B.3 Le cristal de PPKTP

Notre première approche a été d'utiliser pour cette expérience un OPO dans une géométrie de double cavité [Gigan 04] avec un cristal de Niobate de Lithium ($MgO : LiNbO_3$). Dans ce cas, les deux faces du cristal non-linéaire sont les miroirs plans de haute réflectivité de deux cavités indépendantes pour la pompe verte et le faisceau infrarouge respectivement. Cette configuration correspond parfaitement à celle décrite dans l'article théorique. Elle a de plus l'avantage de permettre de choisir indépendamment la taille des modes résonants dans les deux cavités. Cependant, nous n'avons pas réussi à maintenir la stabilité de l'asservissement de la cavité de pompe quand on dépasse le seuil d'oscillation de l'OPO. Nous avons donc changé le dispositif expérimental pour utiliser un OPO résonant seulement pour les modes signal et complémentaire, le faisceau pompe étant en simple passage dans le cristal non linéaire. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser un cristal possédant un coefficient non-linéaire beaucoup plus grand, car la puissance de pompe délivrée par notre laser est limitée à environ 600 mW.

Nous avons donc utilisé pour cette expérience un cristal de PPKTP de dimensions $1\text{ mm} \times 2\text{ mm} \times 10\text{ mm}$, taillé pour le quasi accord de phase du doublage de fréquence $1064\text{ nm} - 532\text{ nm}$, acheté à la société israélienne *Raicol*. La période de retournement de la polarisation non linéaire à l'intérieur du cristal est de $9\text{ }\mu\text{m}$. Le cristal est traité anti-reflet sur les deux faces pour les deux longueurs d'onde. Il doit donc être placé dans une cavité résonante pour l'infra-rouge et dont les miroirs ne réfléchissent pas le vert. Le gain en efficacité non-linéaire du cristal permet de diviser d'un facteur 20 environ la puissance de pompe requise pour atteindre le seuil d'oscillation de l'OPO. Le cristal est taillé pour fonctionner à une température de $35\text{ }^\circ\text{C}$ environ. Nous avons donc construit un four en cuivre, chauffé par un élément Peltier, et contrôlé en température à l'aide d'un asservissement commercial de la société Innolight de type PID (*Proportionnel Intégrateur Différentiel*) avec une précision de l'ordre de 10 mK .

Pour optimiser la température du cristal pour satisfaire la condition d'accord de phase dégénéré dans le cristal, on peut mesurer la puissance de vert produite par le processus de doublage de fréquence dont l'efficacité est identique à celle de la conversion paramétrique d'un photon vert en deux photons infrarouge identiques. Nous avons optimisé cette température en présence de la cavité optique décrite ci-dessous autour du cristal pour accroître l'efficacité totale. Pour un mode transverse donné, on mesure la puissance du faisceau vert en fonction de la température du cristal. Les résultats sont présentés sur la figure 4.4 pour deux modes transverses. La température optimale mesurée expérimentalement est de $35.5\text{ }^\circ\text{C}$ pour le mode TEM_{00} et de $34.5\text{ }^\circ\text{C}$ pour le mode TEM_{10} . On attribue cet écart à la phase de Gouy différente pour chaque mode transverse. Il correspond à ce qui a été observé dans d'autres groupes [Delaubert 07b, Latstzka 07]. Cette différence est à prendre en compte dans la suite de l'expérience. Pour plus de détails concernant la dépendance du doublage de fréquence par rapport au mode transverse, on peut se reporter à l'article [Delaubert 07b]. On observe une largeur en température de $2\text{ }^\circ\text{C}$ environ pour chacun des modes. Enfin, les courbes mettent en évidence une légère modulation de la puissance de vert (entre 10 et 40%) produite en fonction de la température à l'intérieur de la courbe sur une période d'environ $0.5\text{ }^\circ\text{C}$. Cet effet a été observé par d'autres équipes travaillant sur ce type de cristal. Il serait dû à des interférences à l'intérieur du cristal sur un réseau formé par les domaines de polarisation inversées dont la période varie très légèrement avec la température.

B.4 Cavité optique

La cavité optique que nous avons utilisée est une cavité linéaire plan sphérique composée d'un miroir plan d'entrée de réflectivité $R=99.8\%$ à 1064 nm et d'un miroir de sortie concave de rayon de courbure 5 cm et de réflectivité $R=98.3\%$. Ce miroir est placé sur une cale piezo-électrique pour contrôler finement la longueur de la cavité. La longueur de la cavité vide est de 47 mm ce qui lui confère une longueur de Rayleigh $z_R = 11\text{ mm}$ et un waist de taille $w_0 = 60\text{ }\mu\text{m}$ au niveau du miroir plan. La finesse de la cavité vide est de 330 environ et la bande passante de la cavité vide est de 9.6 MHz .

L'insertion du cristal dans la cavité ajoute des pertes que l'on essaye de minimiser. La faible surface transverse du cristal (2 mm^2) impose de bien aligner l'axe central du cristal selon l'axe de la cavité, de sorte que le mode résonant ne subisse pas de pertes sur les

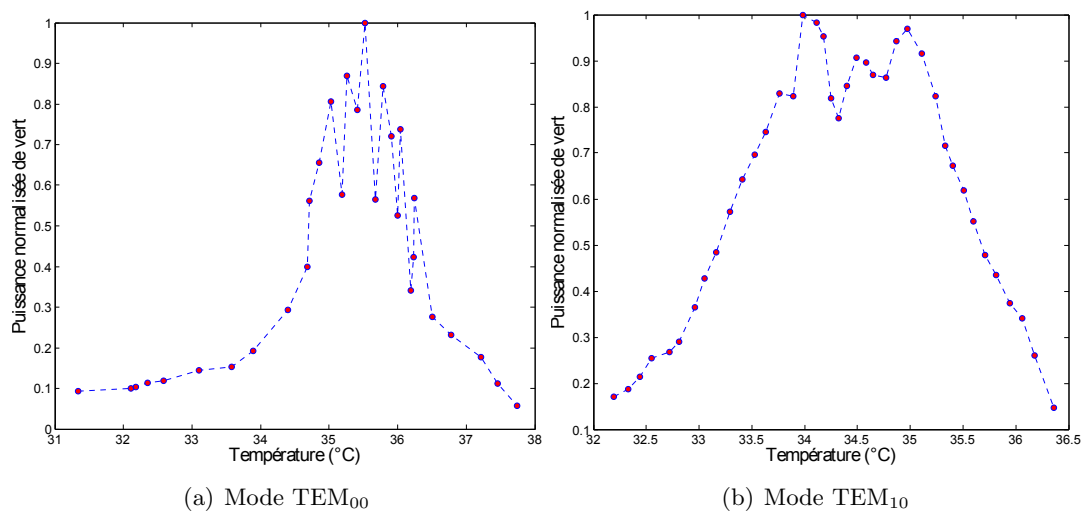


Figure 4.4: Mesure expérimentale de l'efficacité non linéaire en fonction de la température. On a représenté ici la puissance de vert produite par doublage d'un faisceau de puissance constante normalisé à la puissance maximale produite en fonction de la température du cristal, pour deux modes transverses : un TEM_{00} et un TEM_{10} . Les graphes montrent que la température optimale n'est pas identique pour les deux modes et diffère d'un degré, mais la largeur des courbes en température est identique et vaut environ 2° . On observe de plus une faible modulation dans la puissance de vert produite avec une période de 0.5° environ.

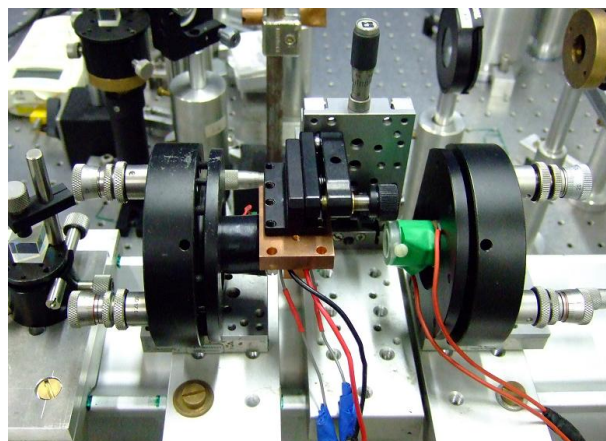
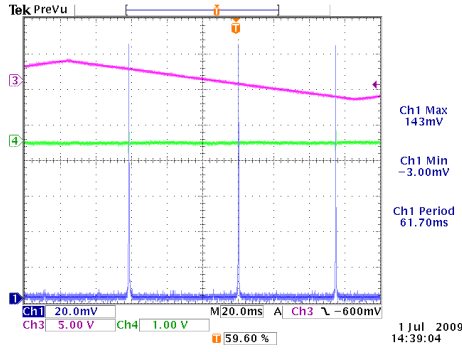
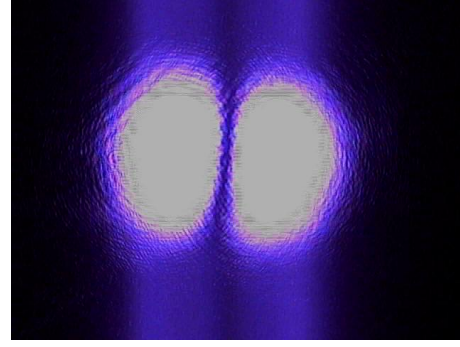


Figure 4.5: Cavité OPO en géométrie plan concave. Le cristal de PPKTP, placé dans un four en cuivre et traité anti-reflet sur les deux faces est inséré dans la cavité une fois que celle-ci est alignée. Le miroir concave est placé sur une cale piezo-électrique pour asservir la longueur de la cavité à la résonance souhaitée.



(a) Pic de transmission (bleu) quand la longueur de cavité est balayée par une rampe (violet). La courbe verte représente le signal d'erreur d'asservissement de la cavité



(b) Profil d'intensité du mode transmis par la cavité

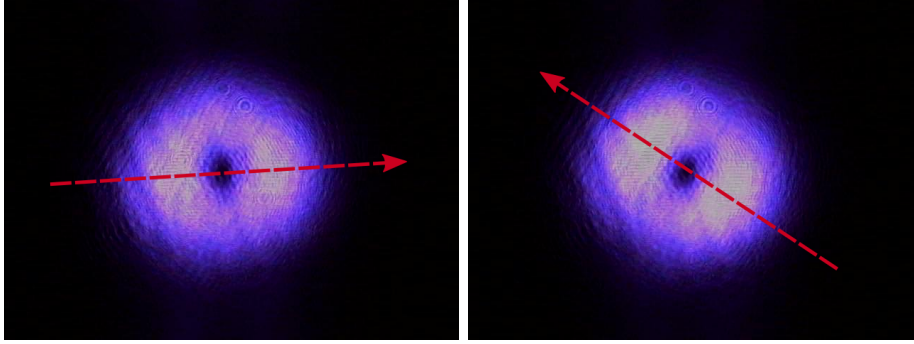
Figure 4.6: Cavité injectée avec un faisceau TEM_{10} parfaitement adapté à la cavité

bords du cristal. Les pertes totales dues au cristal s'élèvent à 0,2% environ, ce qui fait chuter la finesse à 300, pour une bande passante de 10.6 MHz. Nous avons de plus constaté que cette valeur dépendait très fortement de la position transverse du cristal. On constate expérimentalement que la finesse peut chuter jusqu'à 250 quand on déplace le cristal. La position optimale pour le placement du cristal ne correspond pas nécessairement à son centre, ce que nous n'arrivons pas à expliquer clairement.

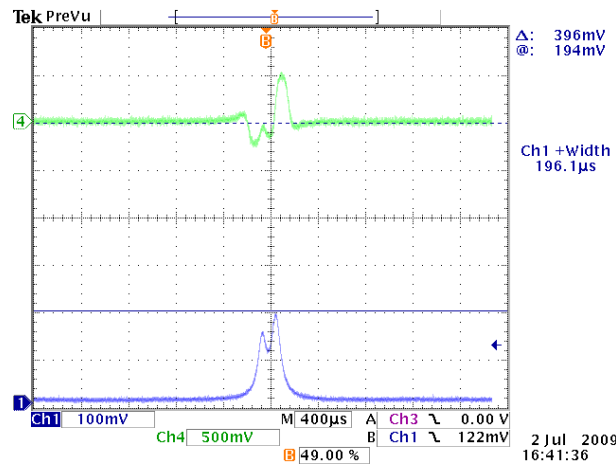
Dégénérescence de la cavité Un paramètre clé de cette expérience est la dégénérescence de la cavité pour les modes TEM_{10} et TEM_{01} . Pour une cavité linéaire vide, rien ne brise la symétrie cylindrique de la cavité, et la dégénérescence est assurée. L'insertion du cristal dans la cavité perturbe cependant cette condition. Le premier effet est l'alignement non parfait de l'axe du cristal sur l'axe de la cavité, qui induit un angle d'incidence différent dans les deux directions horizontale et verticale. Le second effet est dû au retournement de polarisation à l'origine du quasi-accord de phase. Cette opération est effectuée en appliquant de fortes tensions entre les deux faces du cristal, pour inverser le signe de $\chi^{(2)}$. Il est alors possible que les contraintes appliquées au cristal lors de cette opération modifient également l'indice du cristal.

On observe cette dégénérescence grâce aux pics de transmission lorsque la cavité est balayée ainsi qu'à l'aide d'une caméra. Quand la cavité est injectée avec un mode TEM_{10} parfaitement adapté à un mode de la cavité, il n'y a qu'un seul pic de résonance et le mode transmis est identique au mode injecté, comme représenté sur la figure 4.6.

Quand la cavité n'est pas à dégénérescence, on observe que le mode TEM_{10} d'orientation quelconque injecté est projeté sur les modes propres TEM_{10} et TEM_{01} de la cavité, qui ne sont pas nécessairement horizontal et vertical, mais peuvent être tournés de 45° selon l'axe de propagation, comme représenté sur la figure 4.7. On observe que le pic de transmission se scinde en deux. En asservissant la cavité sur un pic ou l'autre, on observe le mode transmis qui est une superposition des deux modes propres avec des intensités



(a) Mode transmis quand la cavité est asservie sur un mode propre de la cavité et injectée avec une superposition de 2 modes propres. (b) Mode transmis quand la cavité est asservie sur l'autre mode propre de la cavité et injectée avec une superposition de 2 modes propres.



(c) Pic de transmission d'une cavité non dégénérée (bleu) lorsque sa longueur est balayée. La courbe verte représente le signal d'erreur d'asservissement de la cavité

Figure 4.7: Cavité non dégénérée injectée avec un faisceau TEM_{10} non adapté à la cavité

différentes. La différence de phase entre les deux modes donne au faisceau transmis un profil semblable à un mode de Laguerre-Gauss. On peut cependant isoler une direction particulière représentée par une flèche sur la figure.

Pour optimiser cette dégénérescence, on peut légèrement traduer le cristal à l'intérieur de la cavité, ou bien modifier finement la température à l'intérieur de la courbe d'accord de phase décrite au paragraphe précédent. Ce point est vraisemblablement une des limitations principales de notre expérience.

B.5 Adaptation de mode du faisceau pompe

L'adaptation du mode du faisceau pompe est à nouveau un paramètre important pour cette expérience. Pour faire fonctionner un OPO sur un mode TEM_{00} , on utilise habituellement un mode pompe TEM_{00} dont le waist coïncide avec celui de la cavité, et de longueur de Rayleigh approximativement égale (la taille du waist est donc divisée par $\sqrt{2}$ par rapport au waist de la cavité). Un OPO fonctionnant sur un mode TEM_{10} doit être

optimisé différemment. Dans sa thèse [Delaubert 07a], Vincent Delaubert a montré que le mode optimal de pompe que l'on peut utiliser pour pomper un OPO sur un mode TEM_{10} est une combinaison linéaire d'un mode TEM_{00} et d'un mode TEM_{20} . Cependant, la symétrie de révolution doit être conservée par le faisceau pompe pour notre expérience, et il est dans ce cas indispensable d'utiliser seulement un mode TEM_{00} . Nous avons cherché à optimiser la taille du faisceau pompe en optimisant le gain en amplification du mode TEM_{10} .

Dans [Lassen 06], Lassen et al. constatent que le mode de pompe optimal est un mode TEM_{00} centré et de taille identique à celui utilisé pour pomper un mode TEM_{00} (de taille $\sqrt{2}$ fois inférieure à la taille du mode TEM_{00} infrarouge), donc parfaitement adapté à la cavité. Nos observations expérimentales ont été différentes. Le maximum de gain a été obtenu avec un mode TEM_{00} de pompe TEM_{00} moins large et désaligné, de sorte qu'il ne recouvre qu'un seul lobe du mode TEM_{10} . Ce fonctionnement ne respecte malheureusement pas la symétrie de révolution, et nous avons finalement optimisé le gain en utilisant un mode TEM_{00} centré et de taille supérieure mais centré sur l'axe optique de la cavité.

Le seuil d'oscillation de l'OPO est de 250 mW quand la cavité est asservie pour le TEM_{00} , et de 450 mW quand la cavité est asservie pour le TEM_{10} . Les courbes de la figure 4.8 présentent la valeur du gain mesuré en amplification et désamplification en fonction de la puissance de pompe.

B.6 Asservissements de la cavité

Pour optimiser le fonctionnement de l'OPO au dessus du seuil d'oscillation, il est nécessaire de rendre les asservissements de l'OPO indifférents au franchissement du seuil d'oscillation. Pour cela, nous avons construit des asservissements en amont de l'OPO.

L'asservissement de la cavité est réalisé en récupérant une partie de la puissance du faisceau injecté réfléchi sur le miroir d'entrée de la cavité. Ce type d'asservissement est possible car le miroir d'entrée de la cavité a une transmission non nulle de 0,2% environ, soit environ dix fois moins que pour le miroir de sortie. On peut donc calculer la proportion de la puissance réfléchie qui rentre effectivement dans la cavité, qui vaut environ 3%. On utilise un modulateur électro-optique large-bande de marque *New Focus* pour générer une modulation de phase à 12.6 MHz dans le faisceau injecté dans la cavité. La partie du faisceau réfléchi par la cavité que l'on récupère est détectée par une photodiode dont la voie haute fréquence est démodulée à 12.6 MHz pour créer le signal d'erreur Pound-Drever-Hall représenté sur la figure 4.9. On utilise un boîtier d'asservissement PID "maison" pour asservir ce signal d'erreur à résonance de la cavité. L'absence de modulation à cette fréquence sur le faisceau pompe rend cet asservissement indépendant du franchissement du seuil de l'OPO.

B.7 Asservissements de la phase relative au dessus du seuil

La phase relative entre le faisceau pompe et le faisceau injecté est contrôlée à l'aide d'une cale piezo-électrique sur laquelle est placé un miroir du chemin optique de l'infra-

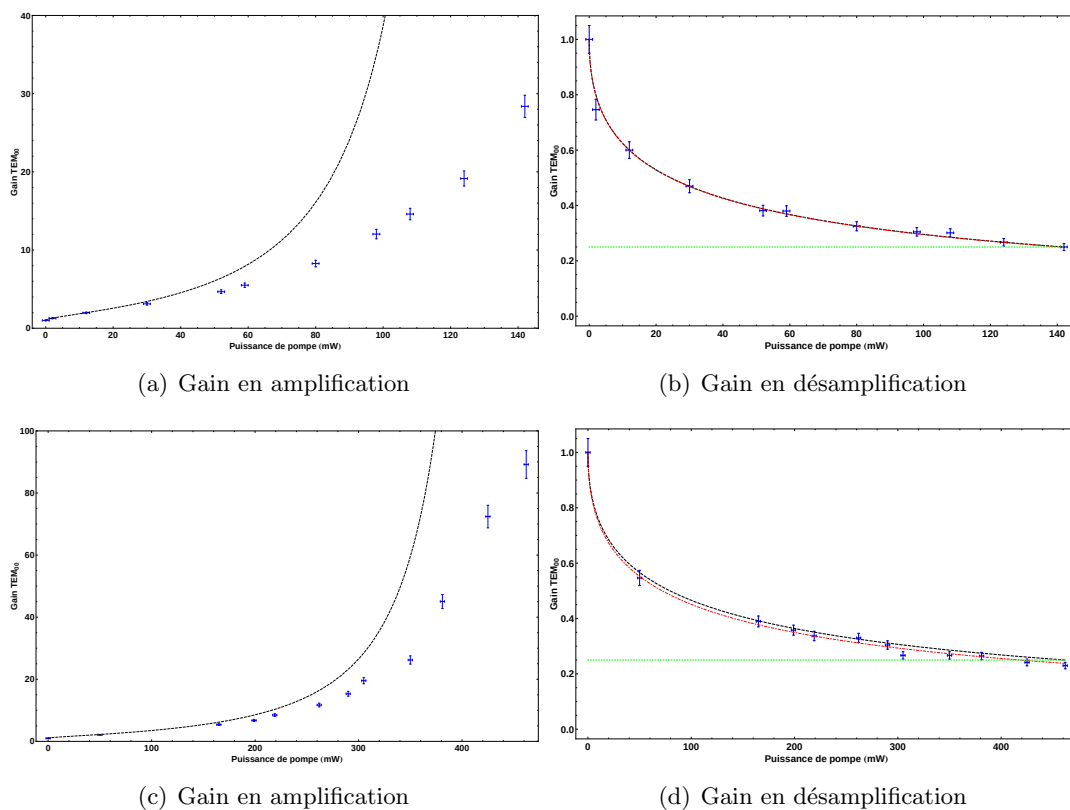


Figure 4.8: Courbes de gain mesurées en amplification et désamplification pour les modes TEM_{00} et TEM_{10} . Les courbes en pointillés noirs représentent les prédictions théoriques par rapport à la valeur expérimentale du seuil, et les courbes rouges l'ajustement aux données expérimentales dans le cas de la désamplification. La différence à la courbe théorique dans le cas de l'amplification s'explique par l'appauvrissement de la pompe.

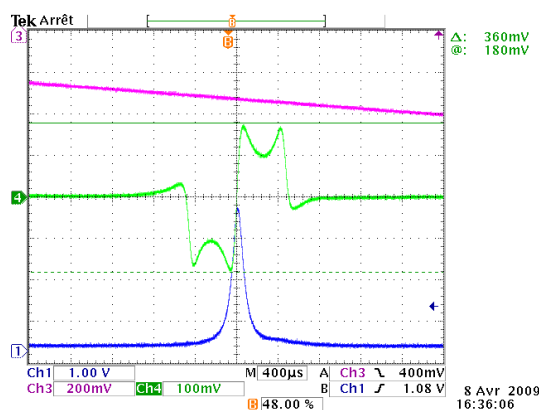


Figure 4.9: Signal d'erreur (courbe verte) de type Pound-Drever-Hall généré quand la longueur de cavité est balayée (courbe mauve) autour d'un pic de résonance (courbe bleue)

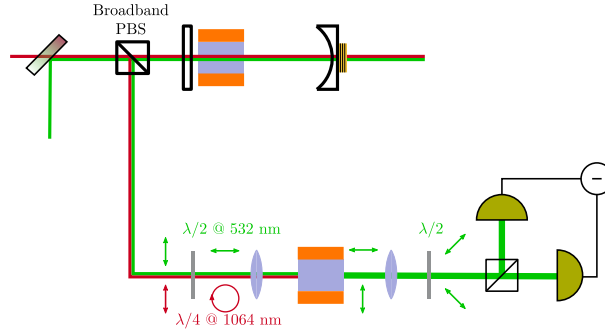


Figure 4.10: Principe de fonctionnement de l'asservissement de la phase relative entre le faisceau pompe et l'injection dans la cavité OPO : on récupère une partie des faisceaux après leur mélange sur une lame dichroïque. On double la fréquence de l'infrarouge dans un cristal de PPKTP, puis on fait interférer les deux faisceaux de fréquence $2\omega_0$ à l'aide d'un cube polariseur.

rouge avant sa combinaison avec le faisceau pompe. Pour asservir cette phase relative, les techniques utilisées habituellement ne permettent pas de garantir la stabilité au dessus du seuil de l'OPO. Ces techniques génèrent un signal d'erreur à partir du phénomène même que l'on veut asservir, c'est-à-dire l'amplification sensible à la phase dans la cavité OPO, qui est perturbée au dessus du seuil. Nous avons développé pour cette expérience une technique nouvelle d'asservissement de la phase relative, schématisée sur la figure 4.10.

Elle repose sur le fait que la phase relative entre les deux faisceaux au niveau du cristal non linéaire est conservée sur la propagation et ne dépend en fait que de la phase relative entre les faisceaux à l'endroit où l'on mélange les faisceaux, c'est-à-dire un miroir dichroïque. On peut donc mesurer la phase relative à un autre endroit que dans l'OPO. Cependant, mesurer une phase relative ne peut pas se faire de manière interférentielle si les faisceaux ont des longueurs d'onde différentes. L'idée est donc d'utiliser le doublage de fréquence du faisceau de longueur d'onde fondamentale¹, puis de faire interférer le faisceau doublé avec le faisceau pompe de l'OPO. Il est nécessaire de disposer d'un cristal en quasi-accord de phase, de sorte que l'efficacité de doublage soit bonne en simple passage.

Après avoir mélangé les deux faisceaux grâce au miroir dichroïque, on récupère une partie des deux faisceaux que l'on envoie dans le dispositif d'asservissement de la phase relative, constitué des éléments suivants :

1. Une lame d'onde particulière, qui tourne différemment les polarisations des faisceaux de longueurs d'onde différentes, de sorte que l'on ait pas d'interaction paramétrique entre les deux faisceaux dans le cristal. Dans notre expérience, nous utilisons un cristal de PPKTP identique à celui utilisé dans l'OPO, pour lequel les polarisations des deux faisceaux sont identiques. Nous utilisons une lame quart d'onde pour l'infrarouge et demi-onde pour le vert. L'idéal serait d'utiliser une lame demi-onde pour l'infrarouge et qui ne change pas la polarisation du vert.
2. Un cristal non linéaire de PPKTP dans lequel les deux faisceaux sont focalisés co-

¹. Le doublage de fréquence n'est pas un processus sensible à la phase. Il conserve de plus la phase du faisceau initial.

linéairement. La faisceau vert a une polarisation telle qu'il n'interagit pas dans le cristal. La projection du faisceau infrarouge de polarisation circulaire est doublée sur une polarisation orthogonale à celle du faisceau issu de la pompe

3. Un filtre coloré qui absorbe l'infrarouge résiduel.
4. Une lame demi-onde qui tourne les polarisations des deux faisceaux verts de 45°
5. Un cube polariseur qui sépare les polarisations horizontale et verticale. Les deux faisceaux interfèrent à présent dans les deux voies de sortie de ce cube.
6. Deux photodétecteurs qui mesurent ces deux voies. Les intensités des deux faisceaux verts sont en général très différentes et le signal d'interférence a une visibilité assez faible sur chacune des voies. La différence des photocourants des deux photodiodes fournit cependant un signal de valeur moyenne directement proportionnelle au signal d'interférence.

Le signal d'interférence enregistré par la différence des photocourants des deux photodiodes s'écrit en fonction de la phase relative ϕ entre les faisceaux au niveau du miroir dichroïque :

$$s(\phi) \propto \Gamma \sqrt{I_{\text{pompe}}} I_{\text{infrarouge}} \cos(2\phi - \phi_0) \quad (4.1)$$

$$\Gamma = \int d\rho u_p(\rho) u_s^2(\rho) \quad (4.2)$$

où Γ est l'intégrale de recouvrement entre les modes pompe $u_p(\rho)$ et signal doublé $u_s^2(\rho)$ au niveau des photodétecteurs. L'offset de phase ϕ_0 peut provenir d'un déphasage léger mais fixe entre les deux faisceaux acquis à cause de la dispersion des éléments optiques. On peut modifier la valeur de ϕ_0 en jouant sur les éléments dispersifs, notamment le cristal lui-même que l'on peut traduire et tourner. Cette opération modifie légèrement l'amplitude du signal d'interférence. Modifier la valeur de ϕ_0 permet de modifier la valeur de la phase relative souhaitée entre les faisceaux pompe et signal au niveau de la cavité OPO. Pour ajuster cette phase finement, on utilise un offset électronique du signal d'erreur.

L'amplitude du signal d'interférence peut être augmentée en modifiant indépendamment les valeurs des puissances des faisceaux vert et infrarouge que l'on envoie dans le dispositif d'asservissement. On ne peut pas cependant envoyer des puissances quelconques car l'amplitude du signal d'erreur doit être plus grande que les fluctuations des deux faisceaux. Ce paramètre a été très critique pour faire fonctionner le système de manière optimale. En effet, l'efficacité de doublage du PPKTP est faible et on doit donc envoyer dans le dispositif d'asservissement une puissance d'infrarouge très grande devant la puissance de vert. Pour cela, nous avons utilisé un cube polariseur de large bande spectrale placé après le miroir dichroïque, qui nous permet de choisir indépendamment les deux puissances injectées dans le dispositif d'interférence en changeant la polarisation des faisceaux avant leur combinaison. On injecte dans le système entre 20 mW et 60 mW d'infrarouge, doublé avec une efficacité de l'ordre de 0,1%, et moins d'un milliwatt de vert.

Cette technique s'est révélée être très robuste, une fois que les puissances relatives ont été bien choisies. On a mesuré l'évolution du signal d'erreur ainsi enregistré et le phénomène d'amplification sensible à la phase dans l'OPO, représenté sur la figure 4.11.

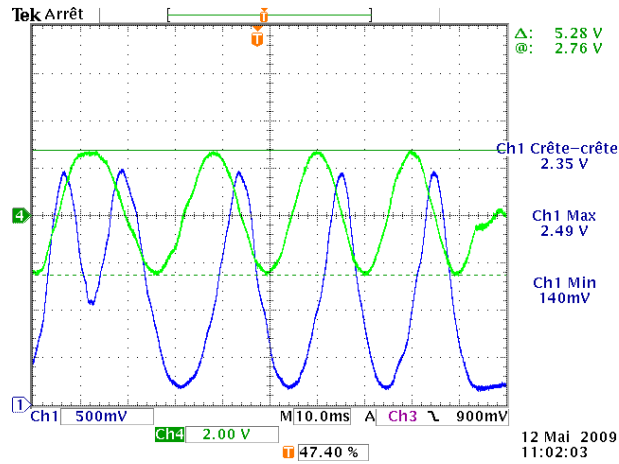


Figure 4.11: Signal d'erreur de l'asservissement de la phase relative (courbe verte) quand celle-ci est balayée. La courbe bleue représente le signal d'amplification sensible à la phase dans l'OPO.

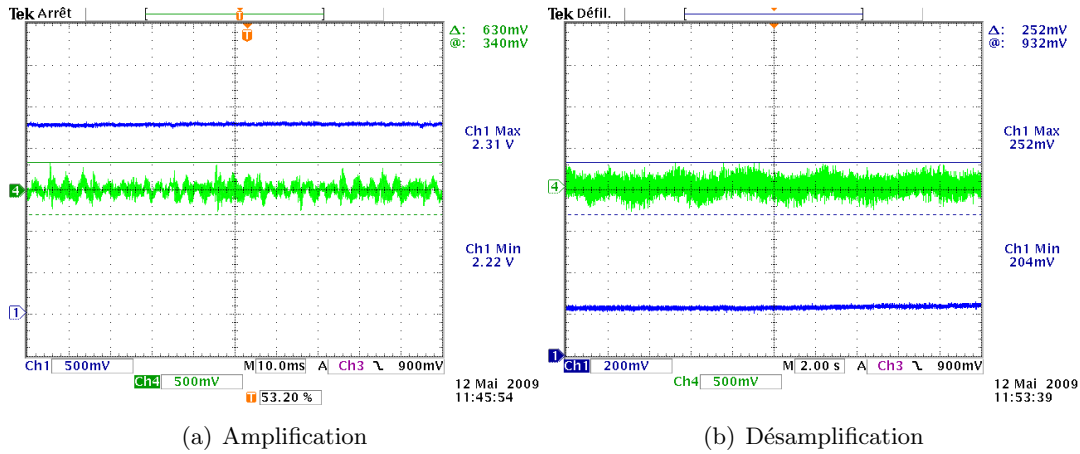


Figure 4.12: Signal injecté (courbe bleue) asservi en amplification et désamplification et valeur du signal d'erreur (courbe verte).

On peut ainsi asservir la phase de façon stable pendant plusieurs minutes. La figure 4.12 représente le signal asservi en amplification et désamplification.

B.8 Détection homodyne

L'objectif de cette expérience est de mesurer une réduction de bruit sur un mode TEM_{10} d'orientation quelconque. La détection homodyne que nous avons mise en place utilise une partie du faisceau infrarouge en sortie de la cavité de filtrage. Quand celle-ci est asservie sur un mode TEM_{10} horizontal, on utilise un prisme de Dove pour le transformer en un mode TEM_{10} d'orientation quelconque. Ce type de prisme, représenté sur la figure 4.13, permet d'inverser une image selon une direction définie par son orientation.

On dispose donc d'un mode TEM_{10} dont on peut faire varier l'orientation. On mélange ce faisceau avec le faisceau de sortie de la cavité OPO, en utilisant un cube polariseur puis on les fait interférer avec une lame demi-onde et un deuxième cube polariseur. On mesure

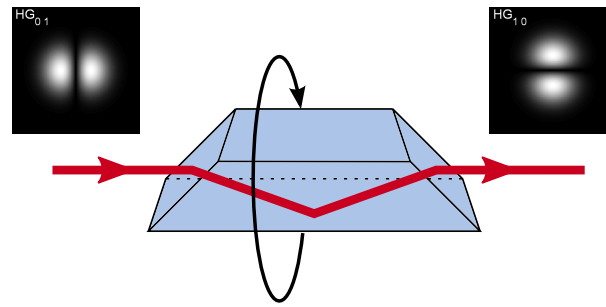


Figure 4.13: Principe de la génération d'un mode TEM_{10} d'orientation quelconque : un mode TEM_{10} horizontal est envoyé dans un prisme de Dove, qui effectue une symétrie par rapport à un de ses axes propres. On génère ainsi un mode d'orientation quelconque en fonction de l'angle du prisme de Dove.

la différence des photocourants enregistrés par deux photodiodes sur les deux voies de sortie du cube, différence qui est proportionnelle à la quadrature du mode de l'OPO défini par le profil et la phase de l'oscillateur local.

C Génération d'états non-classiques multimodes

C.1 Réduction de bruit multimode sous le seuil d'oscillation

On injecte l'OPO avec un mode TEM_{10} horizontal, et on asservit la cavité sur ce mode, en ayant optimisé avec précaution la dégénérescence de la cavité pour les modes TEM_{10} et TEM_{01} . On injecte une puissance de pompe inférieure à la puissance de seuil, et on asservit la phase relative entre le mode infrarouge et la pompe en régime de désamplification. On observe alors une réduction de bruit sur les modes TEM_{10} d'orientation différente. Les résultats sont présentés sur la figure 4.14 pour une fréquence d'analyse de bruit de 5 MHz.

On observe 20 % (1 dB) de réduction de bruit sur le mode horizontal et le mode vertical. L'effet est légèrement dégradé pour le mode à 45° , ce qui est dû aux fluctuations de la dégénérescence de la cavité. Les différents paramètres expérimentaux sont résumés dans le tableau suivant :

Distance au seuil	$\sigma = 0,64$
Pertes utiles dans la cavité (<i>escape efficiency</i>)	$\frac{\gamma_s}{\gamma} = 0,6$
Pertes sur le trajet optique en sortie de la cavité	$\xi = 20\%$
Visibilité de la détection homodyne	$\eta = 0,92$
Efficacité des photodétecteurs	$\alpha = 0,91$

La réduction de bruit attendu est de 35 % (1.8 dB). La différence avec la valeur obtenue est attribuée à la stabilité des asservissements. Ces résultats sont à comparer avec ce qui a été obtenu pour le mode TEM_{00} quand c'est le mode résonant dans la cavité. Dans ce cas, on avait obtenu 30 % (1.5 dB) de réduction de bruit.

Nous avons donc mis en évidence une réduction de bruit multimode sous le bruit quantique standard pour deux modes orthogonaux et une combinaison linéaire des deux. Ce résultat a été observé quelques mois auparavant dans deux autres équipes danoise [Lassen 09] (1.6 dB et 1.4 dB de réduction de bruit respectivement pour les modes TEM_{10} et TEM_{01}) et australienne [Janousek 09] (1.7 dB pour les deux modes).

C.2 Seuil d'oscillation de l'OPO

L'étape suivante de cette expérience a été de franchir le seuil d'oscillation pour observer la réduction de bruit prédite par [Navarrete-Benlloch 08]. Cette étape s'est révélée délicate. L'idée était initialement de forcer l'oscillation de l'OPO sur un mode TEM_{10} d'orientation quelconque en injectant et en asservissant la cavité avec un tel mode. Nous avons réussi à optimiser un faisceau pompe de manière symétrique pour atteindre un tel point de fonctionnement, mais l'OPO entraînait alors dans un régime de compétition de modes, et le mode intense émis oscillait alors entre un TEM_{10} et un TEM_{00} non-dégénérés en fréquence, avec un temps caractéristique de l'ordre de la seconde. De plus l'oscillation sur le mode TEM_{01} se faisait sur un mode d'orientation quelconque comme prédit théoriquement, et ce fonctionnement ne nous permettait pas d'adapter la détection homodyne au mode d'orientation orthogonale. Cette condition est indispensable pour pouvoir s'affranchir des fluctuations élevées présentes sur le faisceau émis au dessus du seuil qui sont au

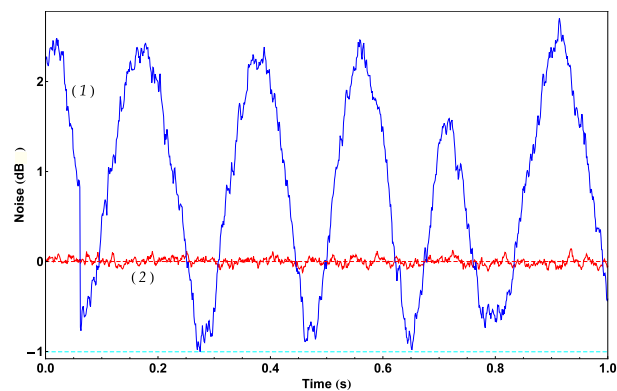
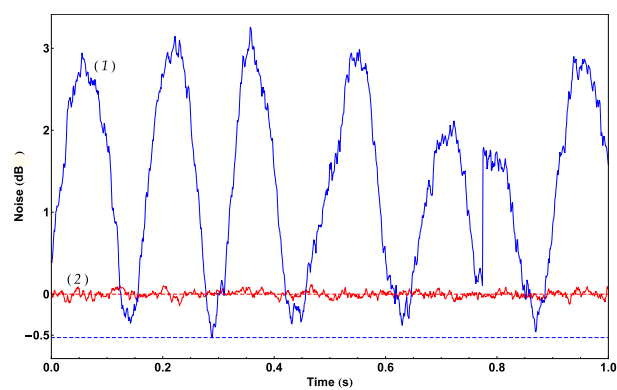
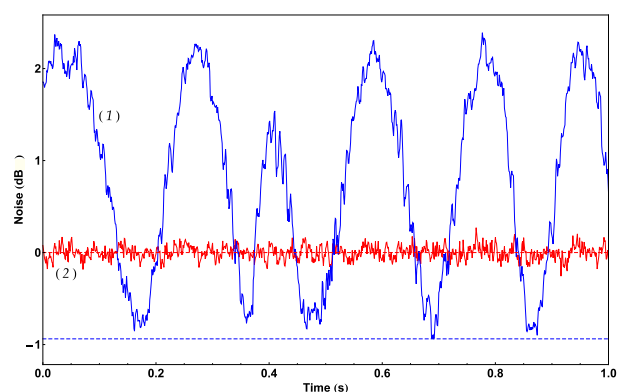
(a) TEM_{10} horizontal, mode injecté(b) $TEM_{10} + TEM_{01}$, mode à 45° (c) TEM_{01} vertical, mode vide

Figure 4.14: Mesure des fluctuations à 5 MHz sur 3 modes différents. La courbe rouge représente le niveau du bruit quantique standard, et la courbe bleue le bruit mesuré par la détection homodyne quand on balaye la phase de l'oscillateur local.

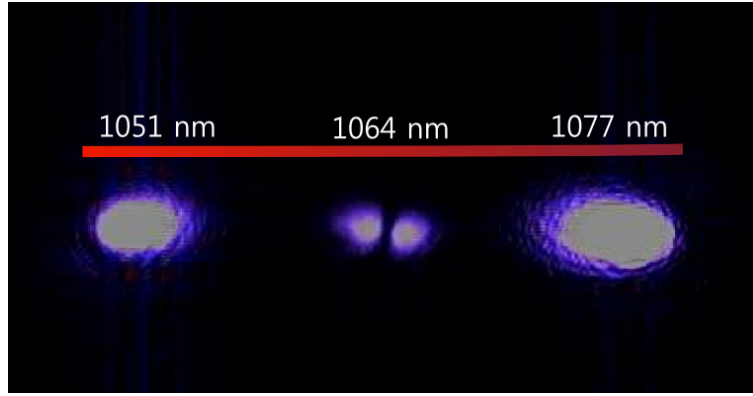


Figure 4.15: Faisceaux diffractés par le réseau et enregistrés une caméra de la sortie de l'OPO au dessus du seuil. On voit au centre le faisceau TEM_{10} injecté à 1064 nm, et les modes TEM_{00} émis au dessus du seuil à des longueurs d'ondes 1064 ± 13 nm

dessus du bruit quantique standard à cause du couplage des fluctuations de la pompe de l'OPO.

Nous avons donc choisi de changer légèrement l'adaptation de mode du faisceau pompe pour éliminer la compétition de modes, de sorte que l'OPO émette toujours sur un mode TEM_{00} avec deux fréquences non dégénérées quand la longueur de la cavité est asservie à résonance pour le mode TEM_{10} à 1064 nm, et tout en gardant une valeur du gain en amplification élevée sous le seuil pour le mode TEM_{10} injecté.

Les champs signal et complémentaire émis par l'OPO au dessus du seuil n'ont nécessairement pas la même fréquence puisqu'alors seuls les modes TEM_{10} et TEM_{01} sont résonants à 1064 nm. Nous avons mesuré la longueur d'onde de ces deux champs en séparant les différentes longueurs d'onde à l'aide d'un réseau de diffraction de pas 1200 mm^{-1} . On mesure les angles de diffraction pour en déduire la longueur d'onde des champs signal et complémentaire par rapport au champ injecté à 1064 nm. On trouve des longueurs d'onde de $1051 \pm 0.5 \text{ nm}$ et $1077 \pm 0.5 \text{ nm}$, soit un écart de $13 \pm 0.5 \text{ nm}$ par rapport au fonctionnement dégénéré. La figure 4.15 représente les faisceaux diffractés par le réseau et enregistrés avec une caméra. On voit au centre le mode TEM_{10} à 1064 nm et sur les côtés les modes TEM_{00} à $1064 \pm 13 \text{ nm}$.

Pour expliquer pourquoi l'oscillation se fait sur des longueurs d'onde très différentes, on doit tenir compte de la dispersion dans la cavité, principalement due au cristal. Sans dispersion, on ne peut en aucun cas avoir deux modes TEM_{00} résonants de longueur d'onde moyenne 1064 nm quand la longueur de cavité est asservie à résonance du mode TEM_{10} à 1064 nm. Pour illustrer cette condition la figure 4.16 représente la condition de résonance des modes TEM_{00} et TEM_{10} dans une cavité en fonction de la fréquence. Pour satisfaire la conservation de l'énergie, on doit avoir deux résonances de TEM_{00} symétriques par rapport la fréquence correspondant à 1064 nm, ce qui est impossible si le terme de phase de Gouy accumulé sur un tour de cavité par le mode TEM_{00} $\frac{\alpha}{2\pi}$ (cf paragraphe 2.1) est différent de 0 ou $\frac{1}{2}$.

A cause de la dispersion, l'intervalle spectral libre n'est pas constant, et dépend de la

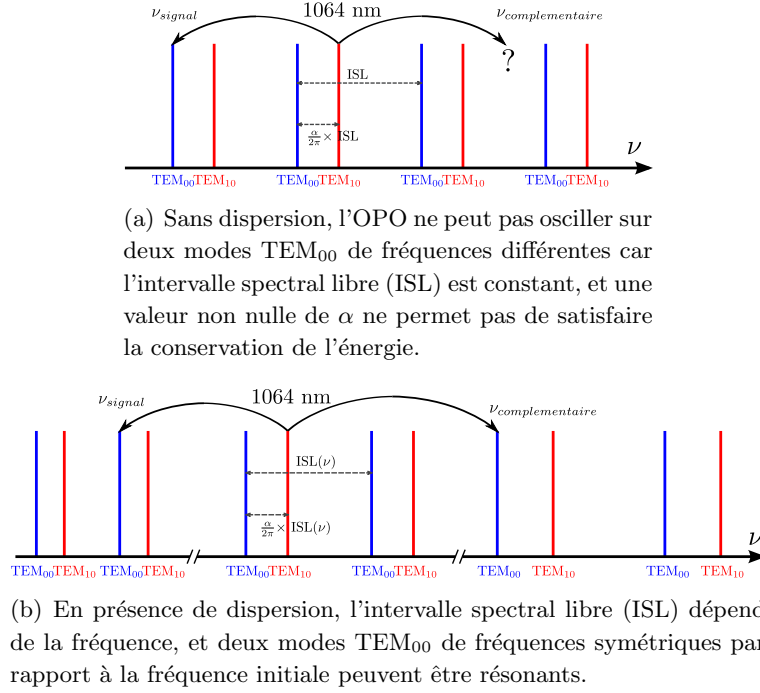


Figure 4.16: Représentation des modes TEM₀₀ et TEM₁₀ résonants dans une cavité asservie sur un mode TEM₁₀ à 1064 nm.

longueur d'onde. En s'éloignant suffisamment loin de la fréquence moyenne, on peut ainsi satisfaire la condition de résonance pour le TEM₀₀ à deux fréquences symétriques par rapport à la fréquence moyenne correspondant à 1064 nm, comme représenté sur la figure 4.16. La dispersion du PPKTP a été calculée en utilisant les coefficients de Sellmeier du PPKTP trouvés dans la référence [Fradkin 99], ce qui nous permet d'exprimer la dépendance de l'intervalle spectral libre par rapport à la fréquence. On mesure expérimentalement la valeur de la phase de Gouy accumulée sur un tour de cavité par le mode TEM₀₀ $\frac{\alpha}{2\pi}$ qui vaut $0,39 \pm 0,02$. Connaissant la dispersion exacte du PPKTP, on scanne les résonances des modes TEM₀₀ de part et d'autre de la fréquence centrale de sorte que la conservation de l'énergie soit satisfaite jusqu'à ce que l'on ait résonance de deux modes TEM₀₀². Le résultat correspond bien à la valeur expérimentale : on trouve des longueurs d'onde de 1052 ± 1 nm et 1076 ± 1 nm, ce qui correspond à environ 1200 intervalles spectraux libres de part et d'autre de la fréquence centrale.

Grâce au dispositif mis en place pour mesurer la longueur d'onde, on observe bien que pour une puissance maximale, la longueur d'onde des modes signal et complémentaire émis dans le mode TEM₀₀ varie quand on balaye manuellement la longueur de la cavité, jusqu'à une valeur maximale de 1064 ± 20 nm.

2. On impose aux fréquences d'être suffisamment proches de la résonance du TEM₀₀ avec un certain niveau de pertes autorisées. Ce niveau a été calculé en comparant le niveau du seuil quand la cavité est résonante pour le TEM₀₀ et le TEM₁₀, respectivement 250 mW et 450 mW. On en déduit un niveau de pertes autorisées pour le TEM₀₀ de l'ordre de 1%.

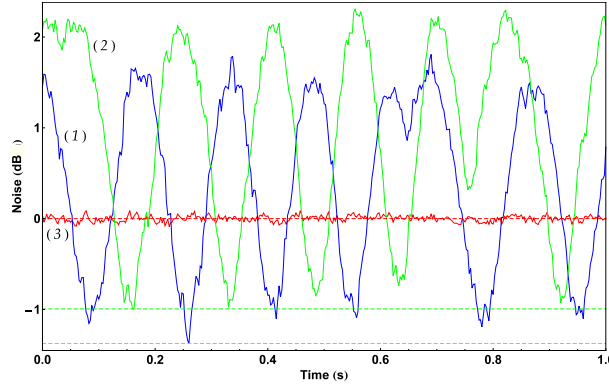


Figure 4.17: Mesure des fluctuations à 5 MHz du mode TEM_{01} vide quand on balaye la phase relative pour des puissances de pompe sous le seuil (courbe bleue) et légèrement au dessus du seuil (courbe verte) de sorte que le niveau défini par l'oscillateur local seul (courbe rouge) corresponde toujours au bruit quantique standard. On observe que l'on conserve 1 dB de réduction de bruit.

C.3 État trimode au dessus du seuil d'oscillation

La mesure de réduction de bruit au dessus du seuil n'a pas été possible quand l'OPO oscille sur un mode TEM_{10} . Cependant nous avons réussi l'expérience dans le cas où l'OPO oscille sur un TEM_{00} en étant asservi sur un mode TEM_{10} injecté dans la cavité. Dans ce cas, nous avons mis en évidence la réduction de bruit sur les deux modes TEM_{10} et TEM_{01} . Pour la détecter, on utilise le même système de détection homodyne que pour la mesure sous le seuil.

Une première méthode consiste à se placer légèrement au dessus du seuil. Dans ce cas, la puissance émise par l'OPO est très faible, et perturbe peu le signal de détection homodyne. La figure 4.17 représente la réduction de bruit observée dans ce cas quand l'OPO franchit le seuil. La courbe rouge représente le niveau de bruit de l'oscillateur local seul (donc le niveau du bruit quantique standard du faisceau mesuré). La courbe bleue représente les fluctuations à 5 MHz du mode TEM_{01} vide juste en dessous du seuil quand on balaye la phase de l'oscillateur local. La courbe verte correspond aux fluctuations mesurées dans les mêmes conditions quand on franchit légèrement le seuil. Le niveau de réduction est légèrement perturbé, ce qui peut s'expliquer par la présence du faisceau émis par l'OPO qui modifie légèrement le niveau du bruit quantique standard. On observe donc 20 % (1 dB) de réduction de bruit au dessus du seuil pour le mode TEM_{01} vide.

Une seconde méthode pour réaliser ce type de mesure consiste à se placer plus loin au dessus du seuil. Dans ce cas, l'émission dans le mode TEM_{00} n'a plus une puissance négligeable par rapport au niveau de l'oscillateur local. Les fluctuations mesurées par la détection homodyne ne doivent alors plus être comparées au niveau de bruit défini avec l'oscillateur local seul. On corrige ce niveau en ajoutant à l'oscillateur local une puissance égale à celle émise par l'OPO. La figure 4.18 représente les mesures faites à 5 MHz pour le mode injecté TEM_{10} . Ce mode a une puissance d'environ $30 \mu W$, contre environ $1.5 mW$ émis par l'OPO dans le mode TEM_{00} . L'oscillateur local a une puissance d'environ $4 mW$. La courbe verte correspond au niveau de bruit défini par l'oscillateur local seul. La courbe

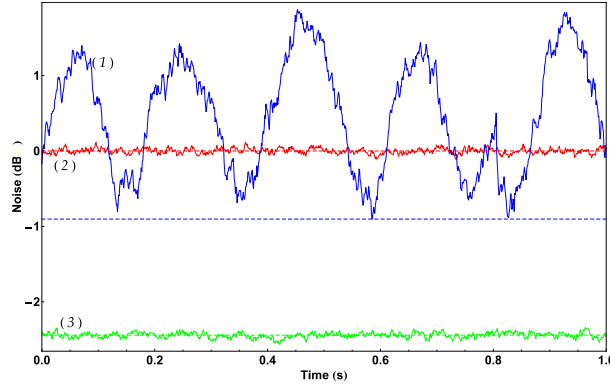


Figure 4.18: Mesure des fluctuations à 5 MHz du mode TEM_{10} non vide pour une puissance de pompe au dessus du seuil quand on balaye la phase relative (courbe bleue). La courbe verte représente le bruit de l'oscillateur local seul, et la courbe rouge le niveau de bruit de l'oscillateur local corrigé en ajoutant la puissance produite par l'OPO au dessus du seuil, de l'ordre de 1 mW.

rouge correspond au niveau de bruit de l'oscillateur local seul corrigé du niveau de bruit correspondant au faisceau émis par l'OPO au dessus du seuil. La courbe bleue correspond aux fluctuations du mode TEM_{10} enregistré dans ces conditions. On constate que l'on conserve la réduction de bruit d'environ 1 dB que l'on observe également sous le seuil.

Nous avons donc mesuré au dessus du seuil de l'OPO l'émission intense d'un mode TEM_{00} pour deux fréquences non-dégénérées, accompagnée d'une réduction de bruit pour deux modes orthogonaux, l'un vide et l'autre de puissance faible comparé au faisceau intense. Nous avons donc caractérisé un état trimode *doublement non-classique*, généré par un OPO au dessus du seuil dans une cavité dégénérée pour deux modes de mêmes fréquences. De plus, la réduction de bruit mesurée ne dépend pas de la distance au seuil de la puissance du faisceau pompe, ce qui prouve que l'amplitude du faisceau pompe est bloquée à sa puissance au niveau du seuil de l'OPO.

D Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une expérience d'optique quantique dans laquelle on produit et on mesure un état non-classique trimode produit par un oscillateur paramétrique optique dans une cavité usuelle, dégénérée pour deux modes transverses de même fréquence. Nous avons observé une réduction de bruit sous le bruit quantique standard pour deux modes transverses orthogonaux sous le seuil d'oscillation. Ce résultat a déjà été observé par deux autres équipes au Danemark et en Australie, mais nous avons étendu cette méthode au dessus du seuil d'oscillation. Le fonctionnement au dessus du seuil de cet OPO permet de plus de conserver les propriétés quantiques des modes quand l'émission intense se fait sur un mode TEM_{00} non dégénéré en fréquence, avec une valeur de réduction de bruit indépendante de la puissance de pompe. Notre expérience n'est pas encore au niveau de stabilité des meilleures expériences d'optique quantique et l'on peut imaginer quelques modifications qui pourraient permettre d'améliorer quantitativement la réduction de bruit : réduire les pertes intra-cavité et post-cavité permet de garder un niveau de réduction de bruit maximal. Utiliser une cavité semi-monolithique permettrait d'optimiser la dégénérescence, et donc la stabilité et les performances du système.

Nous avons de plus développé pour cette expérience une nouvelle méthode robuste d'asservissement de la phase relative entre le faisceau pompe et le faisceau injecté dans l'OPO. Cette méthode est indépendante du fonctionnement de l'OPO, et reste stable lors du franchissement du seuil. Elle s'est avérée indispensable pour la stabilité du système au dessus du seuil.

Les résultats expérimentaux de ce chapitre sont a priori généralisables à tout type d'OPO dont la cavité permet la résonance de plusieurs modes transverses, et constituent une nouvelle méthode de génération de réduction de bruit sur des modes copropageants à l'aide d'un seul OPO. Tout type d'OPO multimode permet a priori d'obtenir une réduction de bruit au dessus du seuil d'oscillation. En particulier, on peut également généraliser au cas d'un OPO où l'on considère des modes longitudinaux, comme cela a été décrit au chapitre 3 pour l'OPO pompé en modes synchrones.

Oscillateur paramétrique optique en cavité auto-imageante

Sommaire

A	Dépendance des supermodes spatiaux avec le profil de pompe	163
A.1	Pompe gaussienne large	163
A.2	Pompe très focalisée	164
A.3	Deux faisceaux pompes croisés	166
A.4	Détection homodyne des fluctuations sur les supermodes	167
A.5	Description en champ lointain	167
B	Propriétés locales du champ émis par l'OPO en cavité auto-imageante	167
B.1	Réduction des fluctuations locales	168
B.2	Etude locale en champ lointain	169
C	Étude expérimentale d'un OPO en cavité auto-imageante	171
C.1	Contexte et objectifs de cette expérience	171
C.2	Ressources expérimentales sur la table optique	171
C.3	Montage expérimental avec un cristal de LiNbO_3	171
C.4	Montage expérimental avec un cristal de PPKTP	181
C.5	Conclusion	189

LE domaine de l'imagerie quantique a connue un essor considérable et de nombreux groupes se sont intéressés aux états non-classiques sur des modes transverses au delà du mode gaussien TEM_{00} [Kolobov 99, Lugiato 02, Kolobov 06] tant dans le régime des photons uniques que celui des variables continues, et a donné naissance à plusieurs phénomènes d'optique quantique transverse : réduction de bruit locale, ghost imaging.

Notre groupe s'intéresse en particulier aux oscillateurs paramétriques optiques en cavités dégénérées. Ce sont des OPO multimodes tels que définis au chapitre 3. L'OPO en cavité auto-imageante étudié dans ce chapitre constitue le modèle le plus simple d'OPO multimode transverse à décrire théoriquement, puisque tous les modes transverses sont

résonants simultanément, ce qui permet d'identifier les modes propres de la conversion paramétrique à ceux de l'OPO. La première section de ce chapitre revient sur le modèle théorique de l'interaction paramétrique développé dans le chapitre 3, dans le cas particulier des paramètres du faisceau pompe et du cristal non-linéaire accessibles expérimentalement. On étudie les différents états multimodes accessibles. On montre également comment ce dispositif permet de produire une réduction locale des fluctuations d'un faisceau dans tout plan de champ proche du cristal non-linéaire.

Au niveau expérimental, cet OPO est par contre le plus difficile à mettre en place à cause de la dégénérescence de tous les modes transverses qui impose à la cavité d'être à la limite de la stabilité. La seconde section de ce chapitre est consacrée à l'étude expérimentale de l'OPO en cavité auto-imageante qui constitue l'étape ultime de l'étude des OPO en cavité dégénérée menée dans notre groupe.

A Dépendance des supermodes spatiaux avec le profil de pompe

La description générale des OPO multimodes de la section C du chapitre 3 s'applique au cas de l'OPO en cavité auto-imageante, dont on rappelle la géométrie sur la figure 5.1. Dans le cas d'une pompe gaussienne de waist w_p au centre d'un cristal de longueur finie l_c , on représente ici le résultat du calcul numérique des supermodes dans le plan du cristal (et donc dans tout plan de champ proche). Cette approche nouvelle nous permet de mettre en évidence les états que l'on peut produire dans différentes configurations expérimentales.

Les modes propres de l'OPO en cavité auto-imageante apparaissent quand on diagonalise la matrice de couplage de l'interaction paramétrique dans un cristal de longueur finie. Cette matrice est le produit d'une fonction de diffraction $\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$ avec le profil transverse de la pompe dans le plan central du cristal $A_p(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}')$. La longueur du cristal est en général fixe, et la fonction de diffraction est une constante du problème. On a vu précédemment que le nombre de modes effectif de cette interaction dépendait du rapport des deux tailles de la matrice de couplage selon les deux bissectrices, c'est-à-dire le rapport $\frac{w_p}{\sqrt{\frac{\lambda_s l_c}{\pi n_s}}}$. On peut également quantifier le nombre de modes avec le paramètre de coopérativité κ . Sur la figure 5.2, on a tracé la valeur de ce paramètre en fonction des deux paramètres expérimentaux que l'on peut contrôler : la taille du waist de la pompe dans le plan central w_p et la longueur du cristal non-linéaire l_c .

Dans la suite de cette section, on examine la dépendance des supermodes spatiaux en fonction du profil de la pompe, car c'est la grandeur que l'on peut le plus facilement modifier expérimentalement. L'objectif est à terme de pouvoir créer des supermodes dont on contrôle la forme et les valeurs propres.

A.1 Pompe gaussienne large

Considérons un faisceau pompe dont le profil transverse est une gaussienne de largeur w_p grande devant la largeur de cohérence l_{coh} . Ce cas typique a été présenté pour décrire la matrice de couplage et sa diagonalisation à la section B.1 du chapitre 3, car il correspond au cas étudié expérimentalement. Il conduit à un grand nombre de modes. On représente

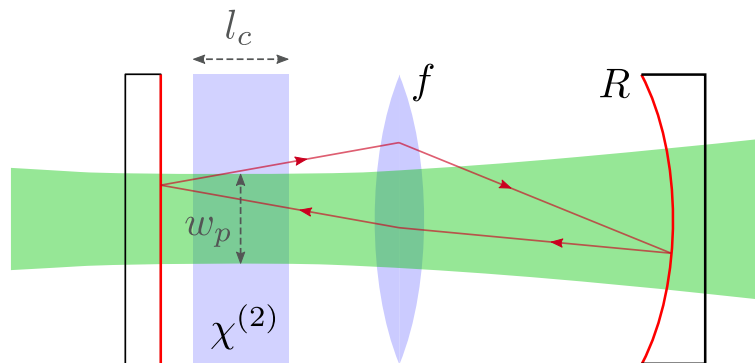


Figure 5.1: Rappel du schéma de fonctionnement de l'OPO en cavité auto-imageante.

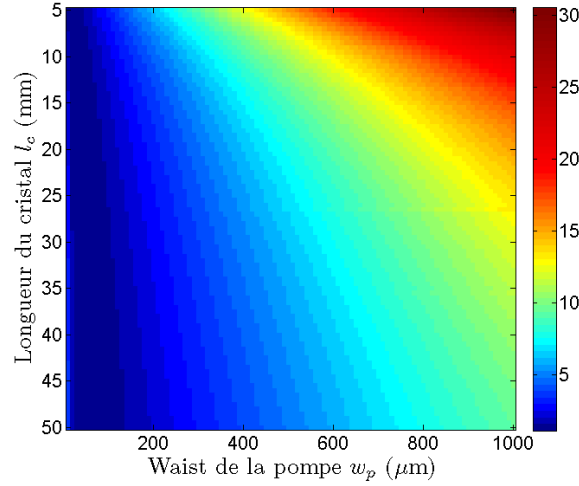


Figure 5.2: Valeur du paramètre de coopérativité qui représente le nombre de modes de l'OPO en cavité auto-imageante, en fonction de la taille du faisceau pompe gaussien au centre du cristal w_p et de la longueur du cristal l_c

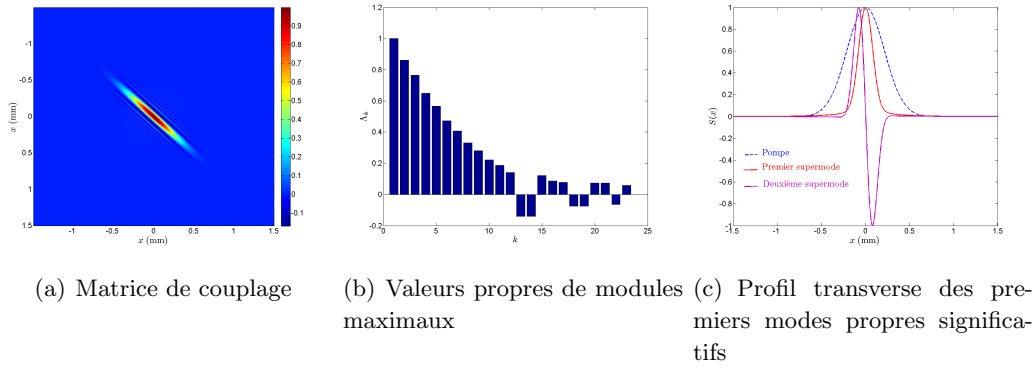


Figure 5.3: Matrice de couplage et ses éléments propres dans le cas d'une pompe gaussienne large.

à nouveau la matrice de couplage et ses éléments propres sur la figure 5.3 pour un cristal de longueur 10 mm et une pompe de largeur $w_p = 300 \mu\text{m}$.

Dans ce cas, on constate que la plupart des valeurs propres significatives sont positives, c'est-à-dire qu'en sortie de l'OPO, tous les supermodes présentent une réduction de bruit sur la même quadrature. Dans ce cas, la parité des supermodes n'a pas de rapport avec le signe de la valeur propre correspondante.

A.2 Pompe très focalisée

Quand la taille de la pompe devient de l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence $l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda_s l_c}{\pi n_s}}$, le nombre de modes chute. D'après les simulations, la coopérativité est égale à un quand $w_p = \frac{l_{coh}}{2}$. La figure 5.4 représente la matrice de couplage et ses éléments propres dans ce cas. Le seul mode propre significatif a un profil gaussien plus large que la pompe. Ce cas particulier a été discuté au paragraphe B.1.2 du chapitre 3, dont on rappelle l'idée principal : on retrouve le cas utilisé habituellement dans les expériences d'optique non-linéaire, et appelé critère de Boyd et Kleinman, qui stipule que pour maximiser l'in-

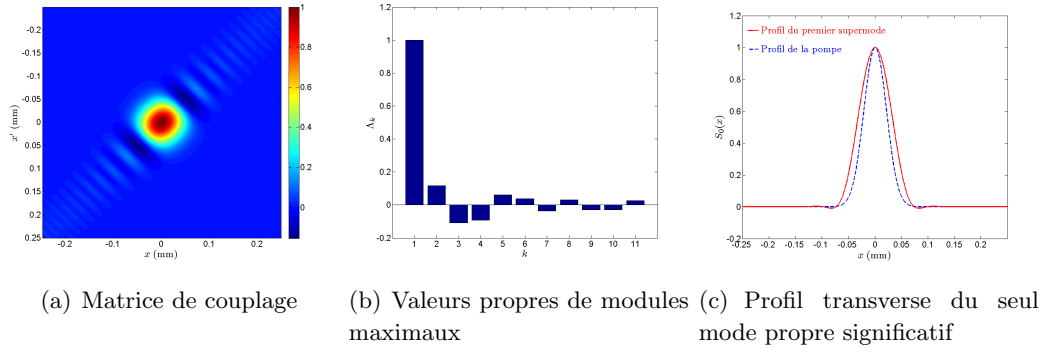


Figure 5.4: Matrice de couplage et ses éléments propres dans le cas d'une interaction quasi-monomode

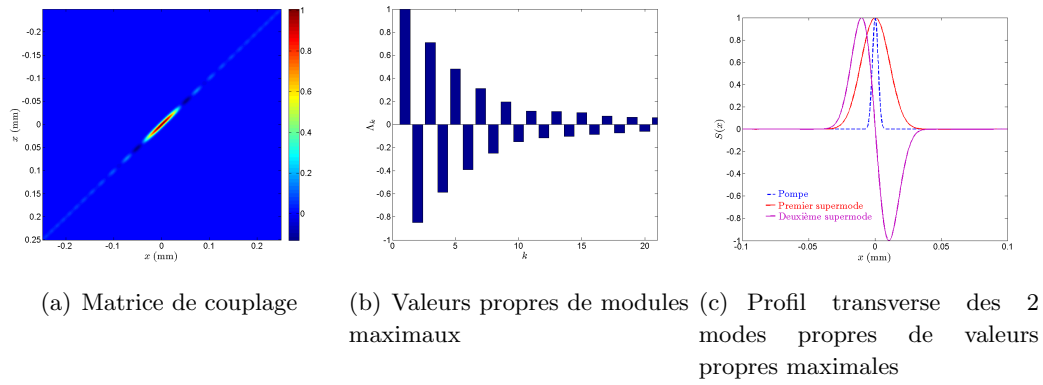


Figure 5.5: Matrice de couplage et ses éléments propres dans le cas d'une pompe très focalisée $w_p = \frac{l_{coh}}{20}$

interaction paramétrique, on doit choisir une longueur de Rayleigh [Boyd 68, Delaubert 07a] (commune pour la pompe et le faisceau de fréquence double) environ égale à une fraction de la longueur du cristal. La largeur du faisceau pompe est alors plus faible que celle du faisceau signal.

Dans le cas où la pompe est plus focalisée que la largeur de cohérence l_{coh} , les éléments propres de la matrice de couplage sont encore différents. Le nombre de modes augmente à nouveau, mais ne peut plus être comparé à $\frac{w_p}{\sqrt{\frac{\lambda_s l_c}{\pi n_s}}}$. Il y a alors une symétrie entre les valeurs propres positives et négatives, contrairement au cas où la pompe est large. Les modes de valeur propre positive sont pairs et ceux de valeur propre négative sont impairs. La figure 5.5 exhibe la matrice de couplage et ses éléments propres dans le cas où $w_p = \frac{l_{coh}}{20}$. Dans ce cas, la formule approchée du nombre de modes en fonction des dimensions de la matrice de couplage doit être inversée, car la largeur de cohérence est supérieure à la taille du waist du faisceau pompe :

$$b = \frac{l_{coh}}{w_p} \quad (5.1)$$

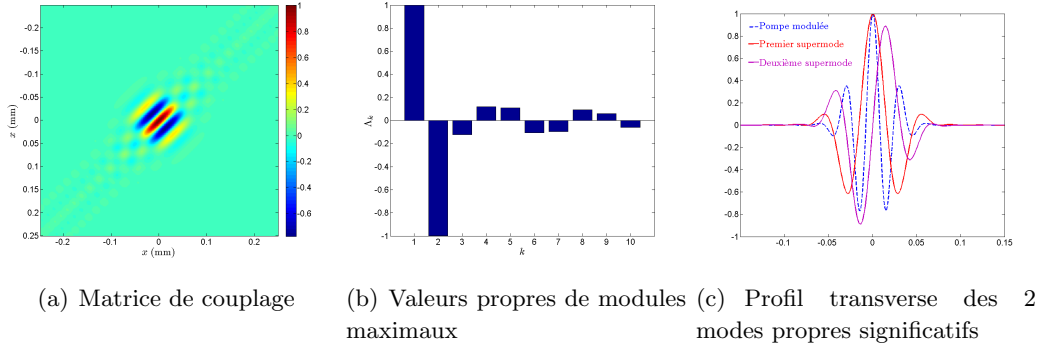


Figure 5.6: Matrice de couplage et ses éléments propres dans le cas de deux faisceaux pompes focalisés dans le cristal qui se croisent dans le plan central avec un angle faible. La matrice de couplage est alors modulée, et le système devient bi-mode.

A.3 Deux faisceaux pompes croisés

On considère à présent le cas où le champ pompe est constitué de deux faisceaux gaussiens de même largeur qui se croisent avec un angle θ dans le plan central du cristal. Le problème se simplifie car on peut se contenter de la valeur du champ pompe dans ce plan central. L'interférence entre les deux faisceaux conduit à un champ pompe qui est égal à une gaussienne modulée par une sinusoïde, dont la période spatiale d dépend de θ sous la forme suivante :

$$d = \frac{\lambda}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (5.2)$$

Ce cas de figure est particulièrement intéressant car il permet d'ajuster la forme du spectre des valeurs propres comme nous allons le voir. On choisit par exemple de faire interférer deux faisceaux identiques dont la largeur conduit à un fonctionnement monomode considéré au paragraphe précédent. On choisit un angle entre les faisceaux tels que l'interférence conduisent à une gaussienne modulée par un cosinus dont la période vaut $d = 30 \mu\text{m}$, soit un angle qui vaut $\theta = 3.8^\circ$ pour une longueur d'onde de 1064 nm. La matrice de couplage et ses éléments propres correspondant à ce cas est présentée sur la figure 5.6. En l'absence de la modulation de la pompe, on avait une seule valeur propre non-nulle. La modulation rend le système bi-mode, avec deux valeurs propres égales de signe opposé. On peut généraliser ce résultat : en modulant la matrice de couplage d'un système quasi-monomode, on peut obtenir des états multi-modes qui dépendent de la modulation

Pour augmenter le nombre de modes et contrôler les valeurs propres associées, on peut moduler plus encore la matrice de couplage, par exemple en ajoutant des faisceaux qui se croisent dans le plan central du cristal, ce qui revient à ajouter des modulations pour le champ pompe au centre du cristal. Cette approche intéressante nous permet de modifier à souhait les éléments propres de la matrice de couplage, et rend possible la création d'états non-classiques arbitrairement complexes.

A.4 Détection homodyne des fluctuations sur les supermodes

L'OPO en cavité auto-imageante peut produire des états multimodes sur des modes transverses dont on connaît le profil dans le plan central du cristal. On a vu au paragraphe C.4.1 du chapitre 3 qu'en sortie d'un OPO multimode les supermodes peuvent présenter des fluctuations de variance inférieure au bruit quantique standard sur une quadrature. Pour observer cette réduction de bruit dans le cas de l'OPO auto-imageant, on peut par exemple adapter l'oscillateur local de la détection homodyne à un supermode. Il est donc nécessaire de tenir compte de la propagation de ces supermodes, qui ont été calculés dans le plan central du cristal. Une solution est par exemple de mettre en forme l'oscillateur local dans un plan conjugué de ce plan. On peut également imaginer utiliser un dispositif de détection homodyne multipixel, combiné avec un oscillateur local dont le profil transverse est une onde plane, telle qu'elle a été décrite à la section C.5.2 du chapitre 1.

A.5 Description en champ lointain

Jusqu'ici, on a considéré uniquement des modes de champ proche, définis comme une fraction du plan transverse central du cristal. L'OPO en cavité auto-imageante exhibe des propriétés différentes dans les plans de champ lointain de ce plan. La variable spatiale $\mathbf{q}$ d'un plan de champ lointain correspond à la variable conjuguée de la position transverse $\boldsymbol{\rho}$ d'un plan de champ proche par transformée de Fourier ; c'est une impulsion transverse. Le passage de la description en $\boldsymbol{\rho}$ à celle en $\mathbf{q}$ est un changement de base, les modes de champ lointain sont obtenus par transformée de Fourier des modes de champ proche (section A.1 du chapitre 2).

On peut mener le même raisonnement que celui effectué à la section B.1 du chapitre 3 dans l'espace de l'impulsion transverse $\mathbf{q}$. On peut à nouveau faire apparaître une matrice de couplage $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ entre les opérateurs de champ lointain du plan central du cristal $\hat{a}(\mathbf{q})$, correspondant à la transformée de Fourier de la matrice de couplage dans l'espace des $\boldsymbol{\rho}$. Les dimensions de la matrice de couplage sont données par les paramètres de la pompe selon la direction $\mathbf{q} + \mathbf{q}'$ et du cristal selon la direction $\mathbf{q} - \mathbf{q}'$. Si la pompe n'est pas très focalisée dans le cristal, son profil en champ lointain est mince, de largeur $w_{pf} \propto \frac{1}{w_p}$. Un cristal mince permet un profil d'accord de phase plus large, et on peut définir une largeur de cohérence en champ lointain $l_{coh} \propto \frac{1}{l_{coh}}$. La matrice de couplage $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ a donc des dimensions inversées par rapport au cas du champ proche. Cependant, le rapport des tailles de la matrice dans les deux dimensions est conservé, et donc on garde bien le même nombre de modes. La figure 5.7 représente la matrice du couplage $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ calculée en champ lointain pour l'interaction paramétrique avec un faisceau pompe de waist $w_p = 300 \mu\text{m}$ dans un cristal de longueur $l_c = 10 \text{ mm}$.

B Propriétés locales du champ émis par l'OPO en cavité auto-imageante

L'approche locale avait été initialement utilisée pour décrire les effets transverses dans les OPO, notamment dans [Gatti 95] dans le cas d'un OPO en cavité plan-plan, et dans

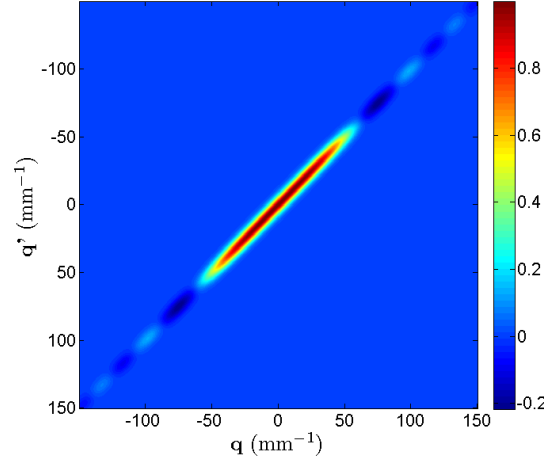


Figure 5.7: Matrice du couplage $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ en coordonnées de champ lointain $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q}'$ pour $w_p = 300 \mu\text{m}$ et $l_c = 10 \text{ mm}$.

[Lopez 05] pour un OPO en cavité confocale. Cette approche a été poursuivie pour la cavité auto-imageante dans l'article [Lopez 09]. Nous en rappelons ici les principaux résultats.

B.1 Réduction des fluctuations locales

Une approche purement locale, à l'aide uniquement des opérateurs de création $\hat{a}(\boldsymbol{\rho})$ est possible pour décrire les propriétés de l'OPO auto-imageant. Dans le cas où le faisceau pompe est suffisamment large par rapport à la largeur de cohérence l_{coh} , l'OPO en cavité auto-imageante permet de produire une réduction des fluctuations locales du faisceau. Pour observer cet effet, on utilise un oscillateur local constitué d'une onde plane, et une détection homodyne dont les détecteurs sont placés dans un plan de champ proche du plan central du cristal. On suppose l'OPO non injecté, les modes de sortie ont donc une valeur moyenne nulle. On peut mettre en évidence la réduction des fluctuations locales en changeant la taille de l'oscillateur local et en le déplaçant par rapport au centre du faisceau défini par la position du faisceau pompe, ou simplement en déplaçant le photodétecteur à l'intérieur du faisceau de l'oscillateur local. Les résultats sont présentés sur la figure 5.8 avec comme oscillateur local une onde plane, pour détecteur centré dont on varie la taille, et pour plusieurs valeurs du paramètre $b = \frac{w_p}{l_{coh}}$. On observe la réduction locale de bruit pour des modes de tailles transverses supérieures à la largeur de cohérence l_{coh} et situés à l'intérieur de la zone de taille w_p définie par le faisceau pompe. Dans un cristal de longueur nulle, la largeur de cohérence est nulle, et la réduction de bruit est purement locale.

Ces résultats peuvent s'expliquer comme une assemblée d'OPO indépendants aux positions transverses $\boldsymbol{\rho}$ et pompés chacun avec une pompe d'amplitude définie par l'amplitude du faisceau pompe à la position $\boldsymbol{\rho}$. La cavité auto-imageante n'exerce aucun filtrage spatial et les propriétés transverses locales de la conversion paramétrique conduisent à la réduction locale de bruit.

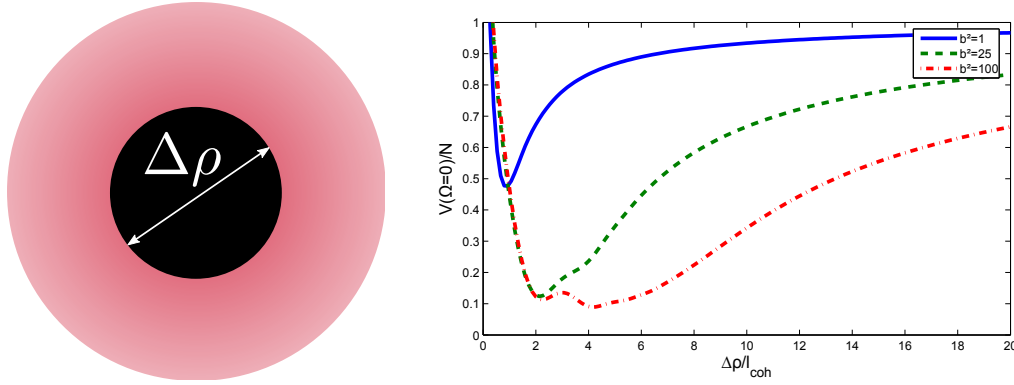


Figure 5.8: Fluctuations normalisées au bruit quantique standard observées par un système de détection homodyne en champ proche en fonction de la taille du détecteur $\Delta\rho$ normalisée à la longueur de cohérence l_{coh} , et pour plusieurs valeurs du nombre de modes $b^2 = \frac{w_p^2}{l_{coh}^2}$

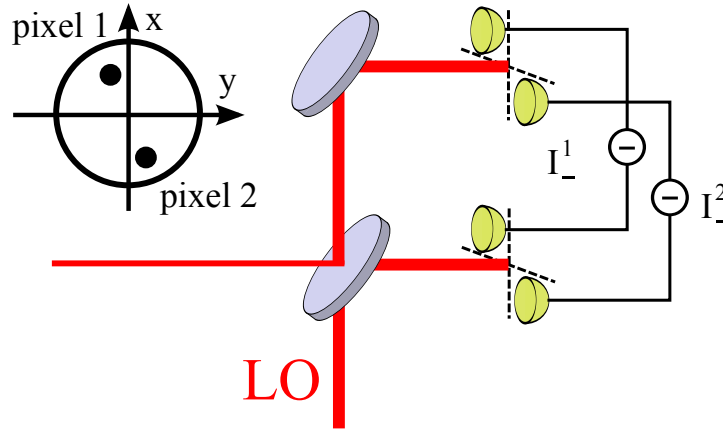


Figure 5.9: Principe de la détection d'intrication entre zones symétriques en champ lointain : on dispose de deux couples de détecteurs placés symétriquement sur chaque voie de la détection homodyne. On mesure ensuite les corrélations entre la différence de chaque couple de détecteurs I_-^1 et I_-^2

B.2 Etude locale en champ lointain

On peut mener une description locale en champ lointain, comme on l'a fait en champ proche. Les calculs analytiques effectués par Laurent Lopez [Lopez 09] montrent que dans le cas d'un faisceau pompe très large, on a des corrélations quantiques parfaites entre des zones symétriques du plan de champ lointain, telles qu'introduites dans [Gatti 99]. Pour observer cet effet, on peut utiliser une détection homodyne double placée dans un plan de champ lointain du plan central du cristal, telle que décrite sur la figure 5.9. Ce schéma a été initialement proposé dans [Navez 01]. Chaque voie de la détection homodyne est équipée de deux photodétecteurs symétriques. On mesure les corrélations entre la différence des photocourants de chaque voie.

Les calculs montrent que les corrélations vérifient les critères EPR et les critères d'inséparabilité si les zones observées ont une taille strictement comprise entre w_{pf} et $l_{coh,f}$. Sur la figure 5.10, on a représenté la valeur du critère d'inséparabilité de Duan, défini à

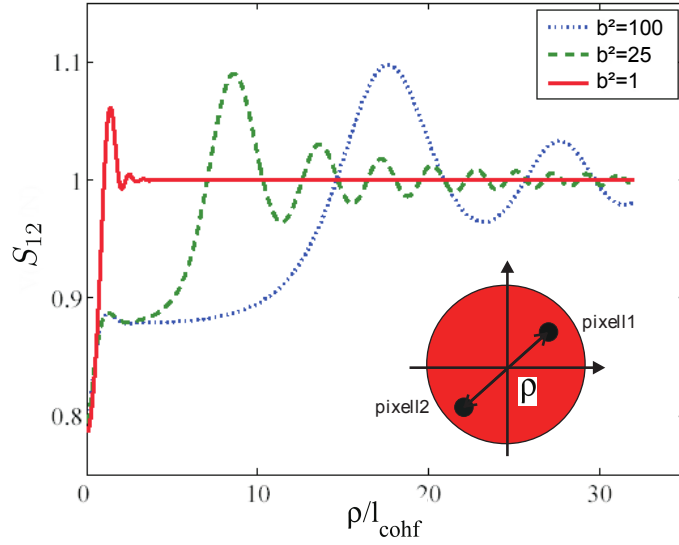


Figure 5.10: Critère d'inséparabilité de Duan observé en champ lointain, par le système de détection d'intrication, en fonction de la distance entre les détecteurs normalisée à la longueur de cohérence en champ lointain $l_{coh f}$.

l'équation 1.48 de la section B.4.3 du chapitre 1 dans le cas où l'on déplace symétriquement des détecteurs de taille fixe, pour différentes valeurs du nombre de modes.

L'origine physique de ces états intriqués entre zones symétriques peut se comprendre à partir de la représentation corpusculaire de la conversion paramétrique : la conversion d'un photon pompe en deux photons d'énergie moitié assure la conservation de l'impulsion, notamment transverse. Si le photon pompe a une impulsion transverse nulle, les deux photons créés ont des impulsions transverses opposées, d'où les fortes corrélations entre les zones symétriques du champ lointain.

C Étude expérimentale d'un OPO en cavité auto-imageante

C.1 Contexte et objectifs de cette expérience

Durant les dernières années, notre groupe d'optique quantique s'est intéressé à l'imagerie quantique autour d'une expérience utilisant des OPO en cavités dégénérées. Les travaux de thèse de Sylvain Gigan [Gigan 04] puis de Laurent Lopez [Lopez 06] ont concerné l'amplification paramétrique d'images sans bruit dans différentes cavités dégénérées. La première étape a été d'utiliser la cavité héli-confocale, résonante pour un quart des modes transverses d'un même fréquence. Dans [Lopez 08], on trouve la première démonstration de l'amplification sans bruit d'images dans une cavité héli-confocale, ainsi qu'une étude du gain local du processus d'amplification. Les mêmes résultats ont été démontrés dans une cavité confocale, qui permet donc l'utilisation d'un plus grand nombre de modes transverses. Ces travaux sont proches de ce qui a été fait plus tôt en simple passage dans un cristal non-linéaire, en utilisant une pompe pulsée [Lantz 97, Choi 99].

L'utilisation d'une cavité complètement dégénérée est donc la suite logique de ces travaux, et nous avons donc modifié notre expérience pour mettre en place un OPO en cavité auto-imageante, résonante pour tous les modes transverses d'une même fréquence simultanément. Ce travail est également proche des expériences que nous avons menées pour étudier la transmission d'image dans une telle cavité, et les effets transverses du doublage de fréquence, présentées dans la section D du chapitre 2.

C.2 Ressources expérimentales sur la table optique

Les expériences présentées dans la suite de cette partie utilisent le montage "historique" du groupe, utilisé pour les expériences décrites aux sections D du chapitre 2 et B du chapitre précédent. On dispose donc d'un laser Diabolo qui produit environ 300 mW d'infrarouge à $\lambda = 1064$ nm et 600 mW d'infrarouge à $\lambda = 532$ nm, de façon cohérente. On peut donc utiliser le faisceau vert pour pomper l'OPO, et le faisceau infra-rouge pour injecter la cavité, et comme oscillateur local de la détection homodyne avec laquelle on mesure les fluctuations du faisceau en sortie de l'OPO. Pour supprimer les fluctuations classiques et fixer le mode transverse du faisceau infrarouge, on utilise la cavité de filtrage décrite au chapitre précédent. Pour aligner les cavités optiques dégénérées, on utilise le banc optique. Enfin, on dispose des mêmes outils d'asservissement de phase et de cavité que ce qui a été présenté au chapitre précédent.

La cavité auto-imageante que nous avons utilisée pour ces expériences a une géométrie linéaire équivalente à celle utilisée pour l'étude de la transmission et du doublage de fréquence d'images, détaillés dans la section D du chapitre 2. La lecture de cette partie de cette thèse est utile à la compréhension de ce qui suit.

C.3 Montage expérimental avec un cristal de LiNbO_3

Nous avons dans un premier temps construit un OPO dans une cavité auto-imageante avec un cristal de Niobate de Lithium permettant la conversion paramétrique dégénérée de type I. Le coefficient non-linéaire de ce type de cristal n'est pas suffisamment élevé pour

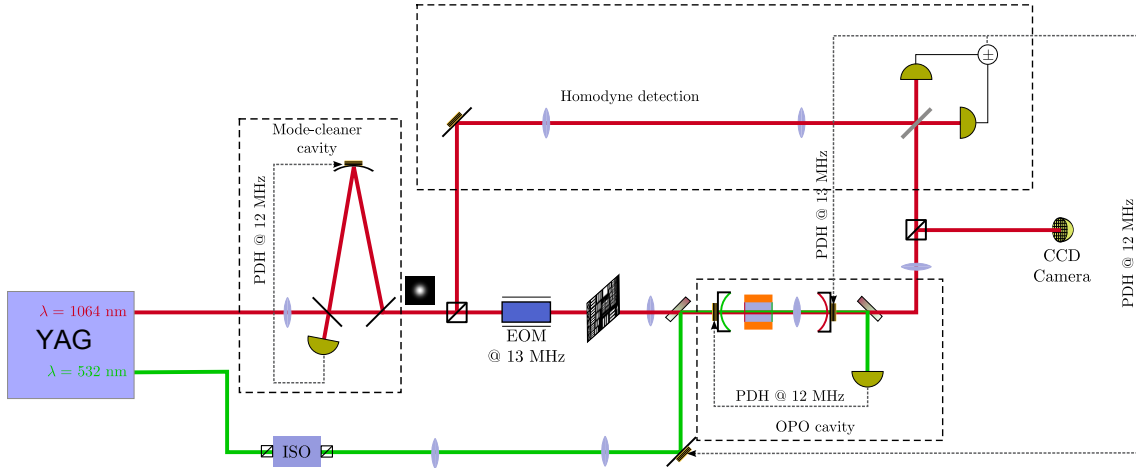


Figure 5.11: Schéma du dispositif expérimental de l'expérience d'OPO en cavité auto-imageante avec un cristal de LiNbO_3

pouvoir être utilisé dans un OPO simplement résonant. Plutôt que d'utiliser une cavité doublement résonante, ce qui est difficilement compatible avec la stabilité de la dégénérescence, nous avons utilisé une géométrie de double cavité. Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 5.11.

C.3.1 Le cristal de LiNbO_3

Nous avons utilisé un cristal de Niobate de Lithium dopé à l'oxyde de Magnésium ($\text{MgO}:\text{LiNbO}_3$) taillé à l'accord de phase critique pour le doublage de fréquence de 1064 nm à 532 nm. Le dopage permet d'augmenter sa résistance aux dommages quand il est pompé par un faisceau de forte puissance. L'accord de phase de type I $o + o \rightarrow e$ est assuré par la biréfringence du cristal. L'accord de phase entre les longueurs d'ondes de notre laser est assurée à la température $T = 68^\circ\text{C}$. Les cristaux ont été achetés à la société chinoise *Casix*.

La biréfringence de ce type de cristal dépend fortement de la température, et il est donc nécessaire d'utiliser un asservissement en température de grande précision. Pour optimiser l'asservissement, le cristal est placé dans un four en cuivre de petites dimensions, de sorte que la masse à chauffer soit la plus faible possible. Pour permettre au cristal de se dilater sous l'effet de la température, une pièce du four est mobile et tenue par un ressort. Le four est chauffé par une résistance chauffante, et la mesure de température se fait à l'aide d'une thermistance. Enfin, le tout est placé dans un habillage en téflon, avec un accès optique pour le cristal, afin d'isoler le four des fluctuations thermiques notamment dues aux mouvements de l'air. Le four est représenté sur la figure 5.12. Ce four nous permet de maintenir le cristal à la température d'accord de phase (68°C) avec une précision de l'asservissement meilleure que 100 mK [Chalopin 06].

Les deux faces du cristal sont traitées avec des doubles traitements pour les longueurs d'onde $\lambda = 1064\text{ nm}$ et $\lambda = 532\text{ nm}$ pour pouvoir être utilisés dans une géométrie de double cavité. Une face est traitée haute réflectivité (HR) pour $\lambda = 1064\text{ nm}$ et anti-reflet (AR) pour $\lambda = 532\text{ nm}$ et l'autre face est traitée AR pour $\lambda = 1064\text{ nm}$ et HR pour $\lambda = 532\text{ nm}$. Les traitements ont été réalisés par la société allemande *Layertec*. Les traitements HR

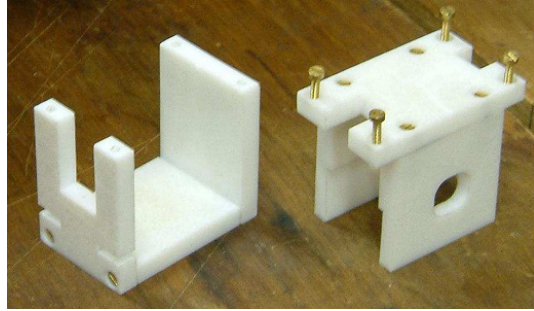
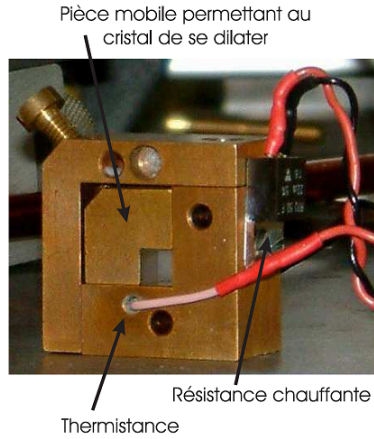


Figure 5.12: Four en cuivre (à gauche) dans lequel on place le cristal de LiNbO_3 et son habillage en téflon (à droite).

assurent $R > 99,9\%$ et les traitement AR assurent $R < 0,1\%$.

C.3.2 OPO auto-imageant en géométrie de double cavité

Notre OPO fonctionne en double cavité. Une face du cristal sert de miroir pour une cavité pompe (verte) monomode, et l'autre face sert de miroir plan pour la cavité auto-imageante alignée pour le faisceau infra-rouge, afin que les cavités soient entrelacées autour du cristal. La figure 5.13 représente la double cavité que nous avons utilisée.

Cette configuration a plusieurs avantages :

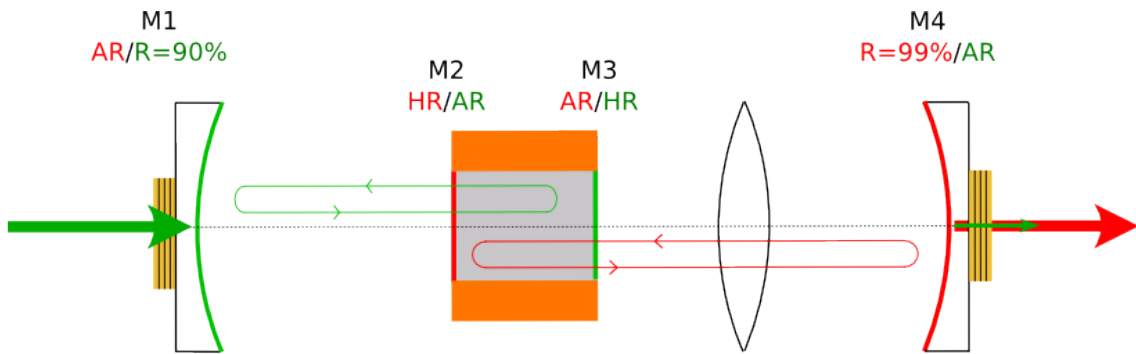


Figure 5.13: Principe de fonctionnement de la double cavité que nous utilisons pour l'OPO en cavité auto-imageante. Les faces du cristal ont des doubles traitements qui permettent aux cavités verte et infrarouge d'être entrelacées.

1. L'alignement d'une cavité dégénérée comme la cavité auto-imageante est très subtil, il n'est pas réaliste d'assurer de plus la résonance de deux faisceaux de deux longueurs d'onde différente à l'intérieur. On peut donc assurer la résonance des deux longueurs indépendamment grâce aux deux cavités. Pour cela, les deux miroirs de fond de cavité (miroirs sphériques) sont placés sur des cales piezo-électriques.
2. La cavité pompe est indépendante, et nous permet de choisir le profil du champ pompe de taille arbitraire par rapport au champ signal.

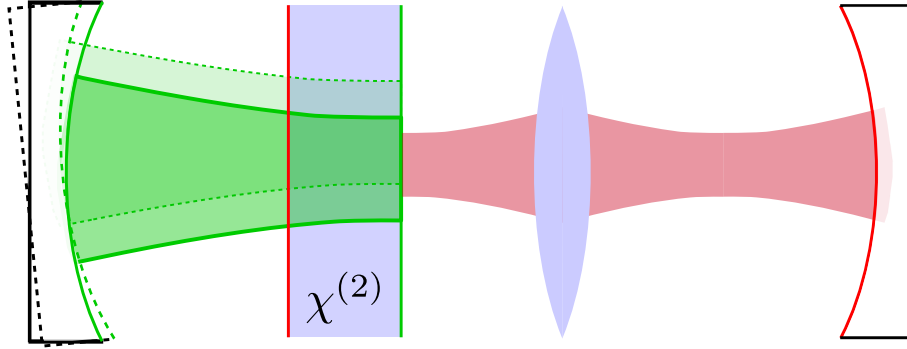


Figure 5.14: Procédure d'alignement de la superposition des faisceaux pompe et signal dans le dispositif de double cavité : le parallélisme des faces du cristal impose aux faisceaux d'être parallèles. En changeant l'orientation du miroir sphérique de la cavité verte, on déplace le mode résonant dans la cavité.

3. Le parallélisme des deux faces du cristal impose aux faisceaux résonants dans la cavité d'être parallèles¹. Pour superposer les faisceaux dans la cavité, il suffit de les superposer en champ proche du cristal.

Pour optimiser l'interaction paramétrique entre le champ pompe et le champ injecté dans le cristal, on doit faire en sorte que les deux faisceaux soient exactement superposés². Pour cela, il existe plusieurs techniques pour aligner la double cavité. Elles sont détaillées extensivement dans la thèse de Sylvain Gigan [Gigan 04]. Voici la méthode que nous avons choisie : on observe les faisceaux vert et infra-rouge en sortie de la cavité à l'aide d'une caméra placée dans un plan de champ proche. Comme énoncé plus haut, le parallélisme des miroirs du cristal impose aux modes résonants dans les deux cavités d'être parallèles. Il suffit donc de superposer les faisceaux en champ proche. On compense la différence de position en changeant l'orientation du miroir sphérique de la cavité verte, ce qui a pour effet de déplacer le mode résonant dans cette cavité à l'intérieur du cristal, comme représenté sur la figure 5.14. On doit ensuite réaligner l'injection du faisceau vert. On peut ainsi atteindre une superposition parfaite entre les deux faisceaux. Il est plus intéressant de mener cette opération quand la cavité auto-imageante n'est pas à dégénérescence. Dans le cas contraire, rien ne nous assure que le faisceau infrarouge est orthogonal aux faces du cristal.

C.3.3 Cavité du champ pompe

La cavité verte a une géométrie plan-sphérique dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau suivant :

1. quand la cavité auto-imageante n'est pas à dégénérescence, ce qui est le cas quand on aligne les faisceaux

2. Si la cavité auto-imageante était parfaitement dégénérée, cela ne serait pas nécessaire. Cependant, l'alignement n'est assuré en pratique que pour les modes de direction proche du mode défini par le faisceau injecté dans la cavité qui sert pour l'alignement.

Rayon de courbure du miroir sphérique	ROC = 40 cm
Longueur de la cavité	L = 5 cm
Taille du waist	$w_0 = 150 \mu\text{m}$
Réfectivité du miroir sphérique	R = 90 %
Réfectivité du miroir plan	R > 99.9 %
Finesse	$\mathcal{F} = 65$

À la sortie du laser, le faisceau vert passe par un isolateur optique. On contrôle la puissance injectée dans la cavité en modifiant la polarisation à l'entrée de l'isolateur. On adapte ensuite son mode transverse à celui défini par la cavité à l'aide de lentilles. Les réfectivités très différentes des deux miroirs pour le vert permettent de maximiser la puissance de la pompe dans la cavité quand celle-ci est à résonance. L'asservissement de la cavité est assuré par la technique de Pound-Drever-Hall [Drever 83]. On utilise la modulation de phase à 12 MHz générée par un modulateur électro-optique à l'intérieur même du laser Diabolo. La faible portion de la puissance qui est transmise par la cavité est mesurée avec un photodétecteur. La voie continue (DC) sert à aligner la cavité, quand sa longueur est balayée, et la voie haute fréquence (HF) est démodulée à 12 MHz pour générer un signal d'erreur. Celui-ci est envoyé dans une boîte d'asservissement "maison" qui permet d'asservir la longueur de la cavité à résonance.

C.3.4 Cavité auto-imageante

La cavité auto-imageante que nous avons construite est différente de celle utilisée pour les expériences de doublage d'images car les contraintes sur les réfectivités des miroirs ne sont pas les mêmes pour optimiser le fonctionnement en doublage de fréquence ou en conversion paramétrique. Le miroir d'entrée est le miroir plan HR déposé sur la face du cristal. Le miroir de sortie est le miroir sphérique. Les caractéristiques de la cavité sont résumées dans le tableau suivant :

Rayon de courbure du miroir sphérique	ROC = 38 mm
Distance focale de la lentille	f = 50 mm
Longueur entre le miroir plan et la lentille	$L_{1deg} = 115.8 \text{ mm}$
Longueur entre la lentille et le miroir sphérique	$L_{2deg} = 88 \text{ mm}$
Longueur totale de la cavité	$L_{tot} = 203.8 \text{ mm}$
Réfectivité du miroir plan	R > 99.9 %
Réfectivité du miroir sphérique	R = 98.7 %
Finesse	$\mathcal{F} = 250$
Pertes à l'intérieur de la cavité	$\gamma_c \approx 1.3 \%$
Pertes utiles de la cavité (<i>escape efficiency</i>)	$\frac{\gamma_s}{\gamma} \approx 50 \%$
Bande passante	B = 3 MHz

Une photo du dispositif de double cavité est présentée sur la figure 5.15.

La procédure d'alignement de la cavité auto-imageante a été énoncée à la section D.2.2 du chapitre 2 dans le cas d'une cavité vide. Dans le cas d'une cavité semi-monolithique considéré ici, la procédure n'est pas très différente :

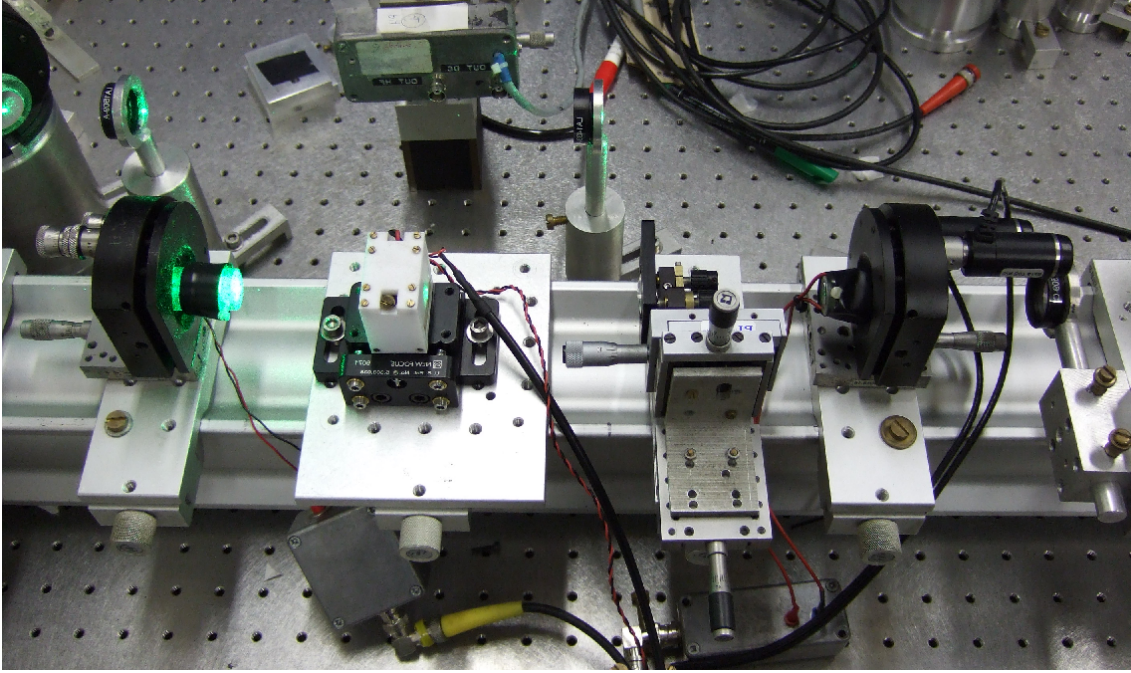


Figure 5.15: Photo de l'OPO en cavité auto-imageante avec une géométrie de double cavité. La cavité verte est sur la gauche et la cavité infra-rouge sur la droite. Le cristal est placé dans le four puis dans une isolation supplémentaire en teflon blanc.

1. On adapte le profil transverse du faisceau infrarouge TEM_{00} de sorte qu'il soit focalisé dans le cristal non-linéaire, avec une taille adaptée à celle du faisceau pompe.
2. On aligne le faisceau sur l'axe défini par le banc optique, de sorte qu'il soit centré par rapport à la lentille et au miroir sphérique. Il est indispensable que le déplacement des éléments optiques de la cavité désaligne le moins possible l'orientation relative du faisceau et des optiques.
3. On se place dans une configuration telle que les distances entre les éléments optiques soient inférieures aux valeurs à dégénérescence, de sorte que l'on soit dans la zone de stabilité de la cavité (figure 2.23 du chapitre 2). On observe alors quelques pics de résonance quand on balaye la longueur de cavité. Ces pics sont séparés d'une distance proportionnelle au paramètre de dégénérescence α , ce qui nous renseigne sur la distance de la cavité à la position de dégénérescence complète.
4. En allongeant successivement les distances L_1 et L_2 tout en réalignant légèrement les miroirs, on s'approche de la position de dégénérescence complète de la cavité.
5. Une fois que les quelques pics de résonance que l'on observe sont confondus en un seul de largeur identique à la largeur des pics loin de la dégénérescence, on peut vérifier la dégénérescence en injectant un mode transverse plus complexe dans la cavité. Pour cela, le plus facile est de couper une partie du faisceau injecté, par exemple à l'aide d'une lame de rasoir ou d'un diaphragme, ce qui a l'intérêt de ne pas désaligner l'injection³. On s'assure alors que le pic de transmission ne s'élargit pas, ce qui signifie que le mode transverse injecté est bien résonant et ne subit pas

3. La cavité auto-imageante est plus sensible au désalignement de l'injection qu'à la translation du mode injecté.

de pertes supplémentaires dans la cavité.

La finesse de cette cavité est supérieure à celle de la cavité étudiée dans le cas de l'étude du doublage de fréquence d'images. Le nombre de modes transverses que l'on peut espérer faire résoner simultanément est donc plus faible. Pour une précision absolue de $20\ \mu\text{m}$ sur les deux longueurs de la cavité, on peut atteindre environ 50 modes résonants dans la cavité.

C.3.5 Dispositif d'imagerie

Un premier objectif de cette expérience a été de mettre en place un dispositif permettant l'amplification sensible à la phase d'images dans l'OPO en cavité auto-imageante. Nous avons donc construit un dispositif d'imagerie. Une image est créée par interception du faisceau laser avec une mire de résolution USAF (figure 2.19 du chapitre 2). Le faisceau est de taille large $w_0 = 930\ \mu\text{m}$ et collimaté à cet endroit, de sorte que le profil de phase de l'image soit constant. Pour pouvoir amplifier l'image, il est important que le profil de phase soit également constant dans le plan central du cristal non-linéaire et sur toute sa longueur. On doit donc créer une transformation de champ proche complet entre le plan de la mire et le plan central du cristal. Cette transformation doit également diminuer la taille de l'image, pour lui donner une taille inférieure à la pompe de l'OPO ($w_p = 150\ \mu\text{m}$). Nous avons utilisé un système optique imageant avec un grandissement de un dixième environ, pour une taille de faisceau environ égale à $100\ \mu\text{m}$ dans le cristal.

Enfin, nous avons également construit un système optique pour imager la mire après la cavité. Pour cela, on tient compte des différents éléments optiques de la cavité auto-imageante. Pour enregistrer le profil transverse d'intensité en sortie de la cavité (à l'aide d'une caméra), il n'est pas nécessaire de réaliser une transformation de champ proche complet. Les calculs sont donc beaucoup plus simples, et une lentille suffit généralement.

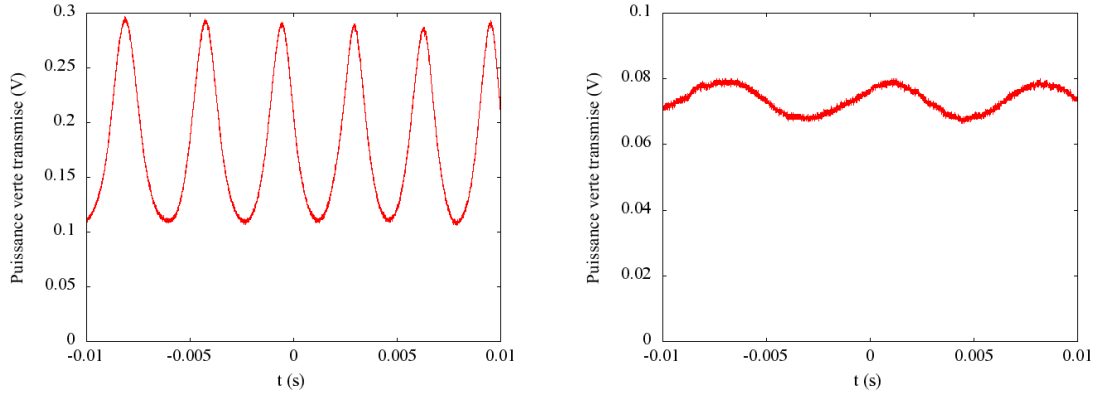
Pour tester le système imageant, on peut enregistrer des images en l'absence de cavité en ôtant le miroir plan du trajet optique. Cette opération ne modifie pas le système d'imagerie. On récupère en sortie de la cavité des images similaires à celles présentées à la section D du chapitre 2.

C.3.6 Cavités parasites

Cette configuration de double cavité introduit des effets de cavité parasite si les miroirs sphériques d'une des deux cavités ne sont pas parfaitement traités AR pour l'autre longueur d'onde. Cet effet a été étudié en détail dans [Gigan 04]. On peut ainsi montrer que si ce miroir a une réflectivité R_{parasite} faible, on a un effet de cavité Fabry-Pérot parasite entre le miroir HR et ce miroir qui conduit à une modulation du signal transmis par la double cavité. Cette modulation dépend de la phase accumulée par le champ dans la cavité parasite, et la transmission varie entre T_{max} et T_{min} :

$$\frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}} = \frac{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2}{(1 + \sqrt{R_1 R_2})^2} \quad (5.3)$$

$$\approx \left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^4 \quad (5.4)$$



(a) Signal enregistré pour le faisceau vert quand la cavité verte est asservie à résonance et que la cavité infra-rouge est balayée

(b) Signal enregistrée pour le faisceau infrarouge quand la cavité infrarouge est asservie à résonance et que la cavité verte est balayée

Figure 5.16: Effets de double cavité observés à l'oscilloscope par un photodétecteur à la sortie de la double cavité, quand une cavité est asservie à résonance et que la longueur de l'autre cavité est balayée.

car on a supposé R_1 très proche de 1 et R_2 petit devant 1. Pour $R_1 = 0,999$ et $R_2 = 0,001$, on a $\frac{T_{min}}{T_{max}} = 0,88$. Avec $R_2 = 0,01$, on a $\frac{T_{min}}{T_{max}} = 0,65$. Ce rapport atteint 0,5 pour $R_2 = 0,025$

Pour le champ pompe, on a une cavité parasite entre les deux faces du cristal, et une autre entre le miroir HR du cristal et le miroir AR de la cavité infra-rouge. La première modulation est fixe, et ne peut être contrôlée que par la température du cristal qui modifie l'indice de réfraction $n(T)$ et donc la longueur optique du cristal. Si celle-ci est fixée, elle ne pose pas de problème pour le fonctionnement de l'OPO. La seconde modulation n'a aucun effet sur ce qui se passe dans la cavité OPO car la cavité parasite se situe après le miroir HR. On observe simplement une modulation de la puissance transmise par la cavité quand la longueur de la cavité infrarouge est balayée.

Pour l'infrarouge, on a également un premier effet de cavité parasite entre le miroir sphérique de la cavité verte et le miroir HR de la première face du cristal, et un deuxième entre les deux faces du cristal. Cet effet parasite vient nécessairement perturber la dégénérescence de la cavité. Il est donc indispensable que le traitement AR sur la seconde face du cristal soit la meilleure possible.

Expérimentalement, nous avons constaté d'énormes effets de cavité parasite sur la cavité verte, mais peu sur la cavité infrarouge. Sur la figure 5.16, on trouve les signaux enregistrés à l'oscilloscope quand on a asservi une cavité à résonance et que l'on balaye la longueur de l'autre. On observe une chute de 40% de la puissance de vert transmis par la double cavité.

C.3.7 Seuil d'oscillation et effets thermiques dans le cristal de LiNbO_3

Quand la cavité auto-imageante est alignée, et que le recouvrement des deux faisceaux est assuré, on observe le seuil d'oscillation de l'OPO. La puissance de pompe nécessaire pour atteindre le seuil dépend fortement de la qualité de l'alignement de la cavité⁴ et de la superposition des modes. Dans notre cas, cette puissance se situe entre 100 mW et 300 mW.

Les effets thermiques dans le cristal ont été la principale limitation de cette expérience. Ils sont dus à la forte puissance de pompe intra-cavité nécessaire pour se rapprocher du seuil. La puissance de pompe dans le cristal est de l'ordre de 4 W pour une injection de 200 mW, ce qui conduit à une intensité de 18 kW/cm^2 d'après la taille du waist du faisceau. Une partie de cette puissance est absorbée par le cristal, ce qui le réchauffe localement et conduit à un gradient transverse d'indice $n(\rho)$ et crée une lentille thermique. Cette lentille thermique vient perturber la dégénérescence transverse de la cavité auto-imageante, et peut être modélisée en introduisant une lentille de distance focale f_{therm} au niveau du cristal, comme représenté sur la figure 5.17.

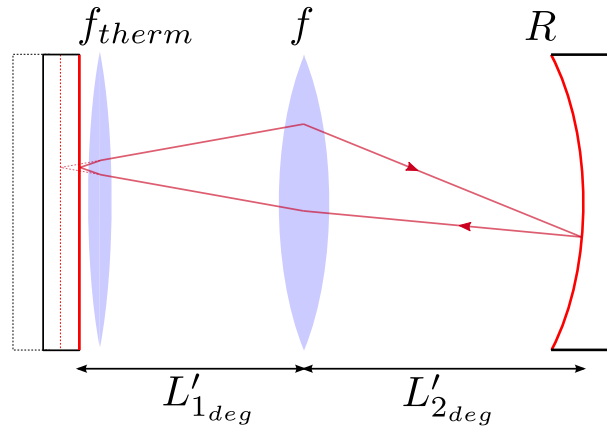


Figure 5.17: Les effets thermiques introduisent un effet de lentille au niveau du cristal. Pour garder le caractère imageant de la cavité, on doit déplacer les éléments optiques légèrement.

Les calculs de la valeur de cette lentille thermique sont fastidieux. Dans sa thèse [Trep01], Nicolas Trep a étudié le déplacement de la confocalité d'un OPO en cavité confocale sous l'effet d'une forte puissance de pompe. En adaptant la valeur trouvée à nos paramètres expérimentaux, on peut en déduire un ordre de grandeur de la distance focale de la lentille thermique, qui est de l'ordre d'une dizaine de mètres. On peut donc étudier la dégénérescence de la cavité auto-imageante en fonction de la valeur de cette lentille thermique. Les résultats sont présentés sur la figure 5.18. On constate que le point de dégénérescence se déplace sous l'effet de la lentille thermique dans le cristal de quelques centaines de microns. Cette valeur est supérieure à la limite de précision quand on aligne la cavité vide pour faire résonner une cinquantaine de modes. Comme on peut le voir sur les graphes de la figure 5.18, la présence du champ pompe dans le cristal place la cavité

4. Si la cavité est légèrement désalignée, on peut se trouver à un point de fonctionnement instable, ce qui augmente considérablement les pertes dans la cavité, et donc la puissance de pompe nécessaire pour atteindre le seuil

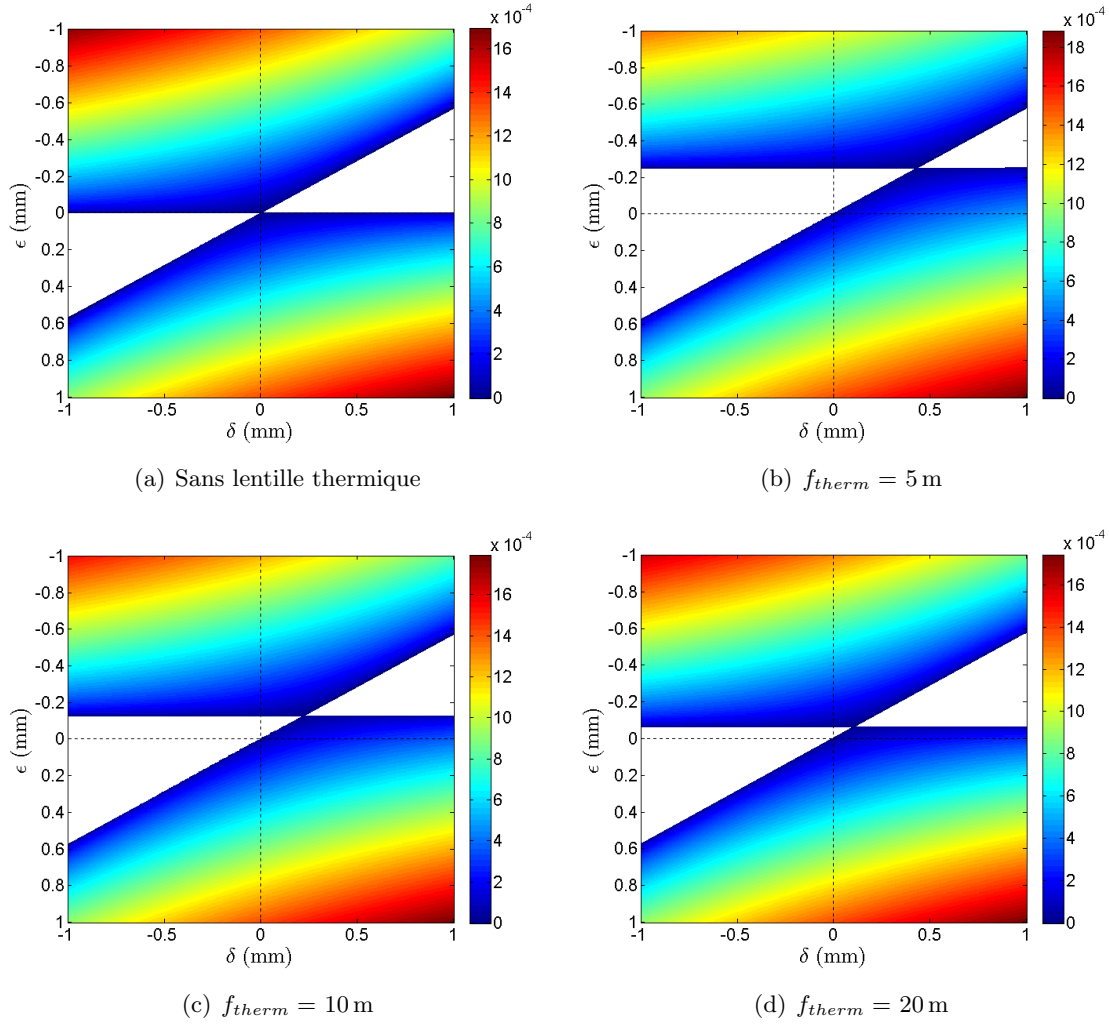


Figure 5.18: Valeur du paramètre de dégénérescence $\frac{\alpha}{2\pi}$ de la cavité auto-imageante considérée en fonction de l'écart à dégénérescence des deux longueurs en l'absence de lentille thermique ϵ et δ . On constate un déplacement de la position auto-imageante de quelques centaines de microns, ce qui impose de réaligner la cavité en présence du faisceau pompe.

dans une zone d'instabilité.

Pour corriger cet effet, on doit ré-aligner la cavité auto-imageante en présence de la pompe à une valeur proche du seuil de fonctionnement de l'OPO et donc avec la cavité verte asservie à résonance, et donc déplacer les éléments optiques de la cavité d'une centaine de microns au moins. Cette opération est extrêmement délicate car il est difficile de toucher au cristal sans perdre l'asservissement de la cavité verte. On déplace donc la lentille et le miroir sphérique. Le paramètre le plus sensible est l'orientation du miroir sphérique de la cavité auto-imageante. Pour optimiser cet alignement sans toucher le banc optique, nous avons remplacé les vis micrométriques d'orientation par des vis motorisées munies d'un picomoteur, achetées à la société *Newport*, qui ont une précision de l'ordre de 30 nm. On peut les voir sur la photo de la figure 5.15. Il est difficile cependant de caractériser précisément le comportement imageant de la cavité après ce réalignement, car les effets non-linéaires empêchent la transmission d'images.

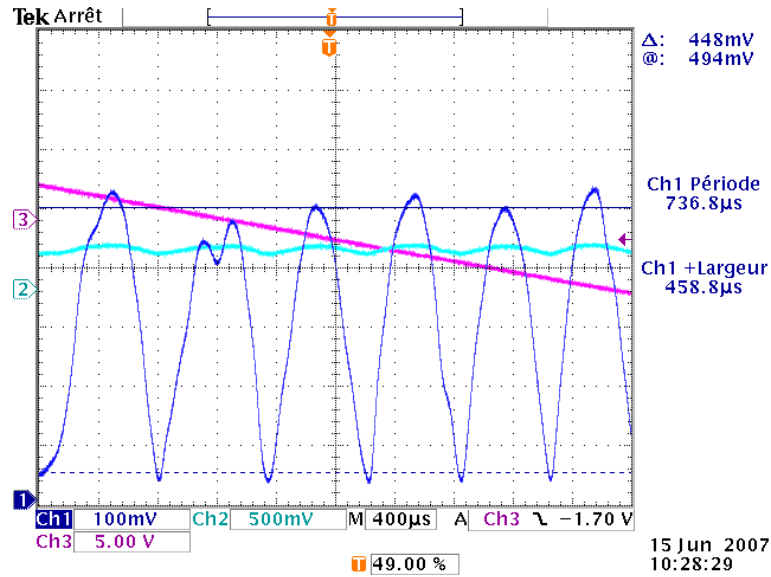


Figure 5.19: Amplification sensible à la phase (courbe bleue) quand la phase relative entre la pompe et le faisceau injecté est balayée par une rampe (courbe violette). Dans ce cas, on observe un gain de 7 en amplification, et de 0,3 en désamplification.

C.3.8 Résultats d'amplification sensible à la phase et conclusion

Nous avons observé l'amplification sensible à la phase de modes de profils simples. Dans un premier temps, on garde un faisceau injecté de profil gaussien. La phase relative entre le faisceau pompe et l'image injectée est contrôlée grâce à une cale piezo-électrique sur laquelle est collé un miroir du chemin optique du faisceau vert. La figure 5.19 montre l'image enregistrée à l'oscilloscope de l'amplification du faisceau injectée quand on balaye la phase relative. Dans ce cas, le faisceau est gaussien de waist $w_0 = 100 \mu\text{m}$. Le gain en amplification est de 7 environ, et de 0,3 en désamplification. Quand on coupe une partie de l'image avec une lame de rasoir par exemple, on observe toujours l'amplification sensible à la phase, mais avec une légère dégradation du gain.

Dans le cas où le faisceau injecté dans la cavité est une image de profil plus complexe créée par interception avec la mire de résolution, l'amplification sensible à la phase subsiste mais est largement dégradée. Sur la figure 5.20, on a représenté l'image d'une double fente verticale transmise par la cavité en présence du champ pompe, en régime d'amplification et en régime de désamplification. Dans ce cas, le gain en amplification vaut environ 1,5.

Ces images constituent ce que nous avons obtenu de mieux avec cet OPO en cavité auto-imageante avec le cristal de LiNbO_3 . La qualité médiocre des images transmises est principalement due au désalignement de la cavité à cause des effets thermiques induits par le champ pompe. Les différents modes sont alors amplifiés avec des gains différents.

C.4 Montage expérimental avec un cristal de PPKTP

Pour résoudre les problèmes des effets thermiques dus au champ pompe qui désaligne la cavité auto-imageante, on doit faire baisser l'intensité du champ pompe nécessaire pour atteindre le seuil. Pour cela, deux solutions sont possibles :

- augmenter la finesse de la cavité auto-imageante.

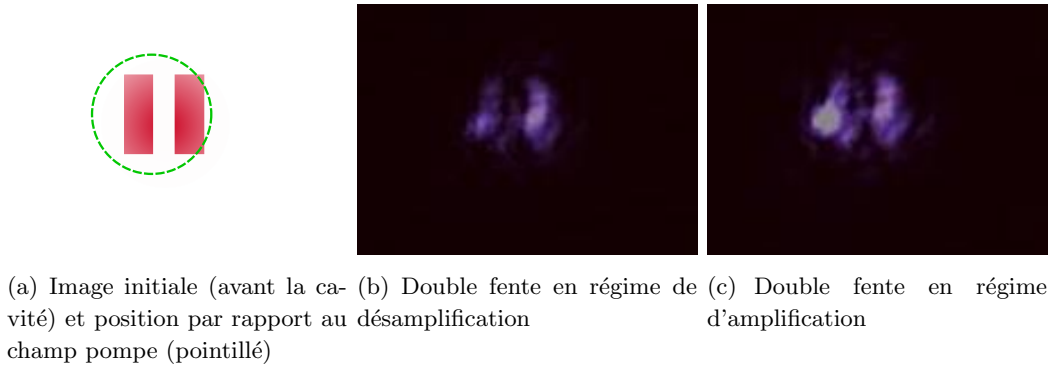


Figure 5.20: Images transmises par l'OPO en cavité auto-imageante d'une double fente verticale.

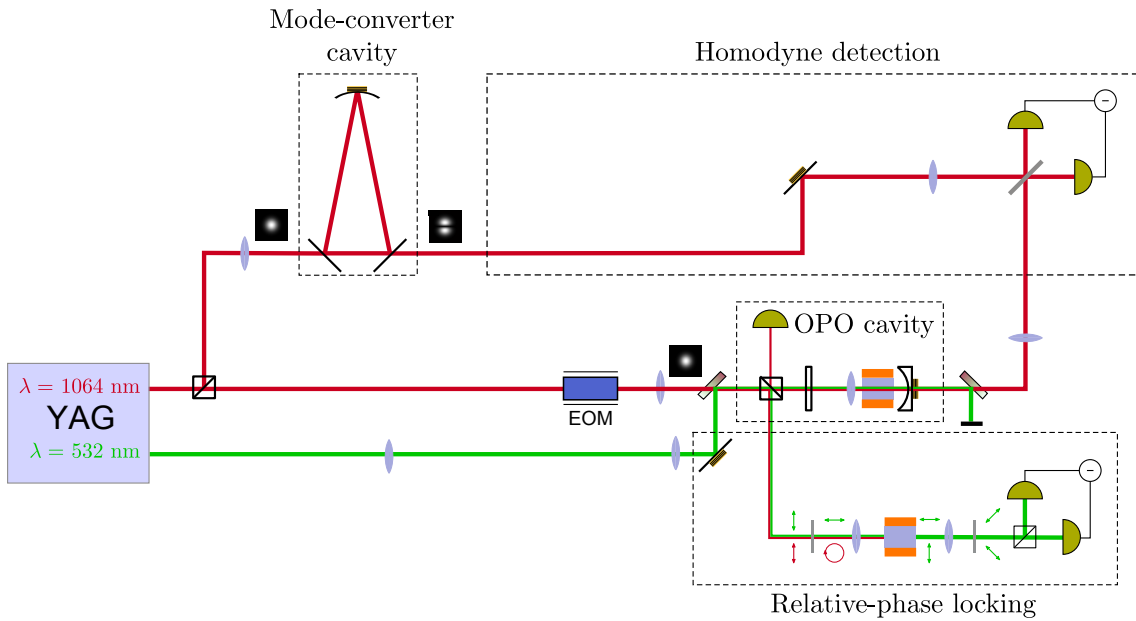


Figure 5.21: Dispositif expérimental de l'OPO en cavité auto-imageante avec un cristal de PPKTP pompé en simple passage.

- augmenter le coefficient de non-linéarité du cristal.

La première solution paraît la plus simple. Cependant, elle rend la cavité auto-imageante encore plus difficile à aligner, et les effets thermiques, bien que plus faibles, sont alors plus difficiles à compenser. De plus, cette opération dégrade l'escape efficiency de la cavité (cf paragraphe C.1.3 du chapitre 3). Nous avons donc choisi la deuxième solution. Pour maximiser le coefficient non-linéaire du cristal, nous avons choisi d'utiliser un cristal de PPKTP, taillé pour le quasi-accord de phase entre les longueurs d'ondes $\lambda = 1064 \text{ nm}$ et $\lambda = 532 \text{ nm}$. Les cristaux non-linéaires ont été achetés à la société israélienne *Raicol*. Le coefficient non-linéaire d'un tel cristal est environ trois fois plus grand, et on s'attend donc à un seuil environ dix fois plus bas. Pour cette expérience, nous avons choisi de laisser de côté le système d'imagerie. Pour détecter des effets multimodes, on utilise la cavité de filtrage pour générer des modes gaussiens d'ordres supérieurs utilisés comme oscillateurs locaux de la détection homodyne. La figure 5.21 présente un schéma du dispositif expérimental de cette expérience.

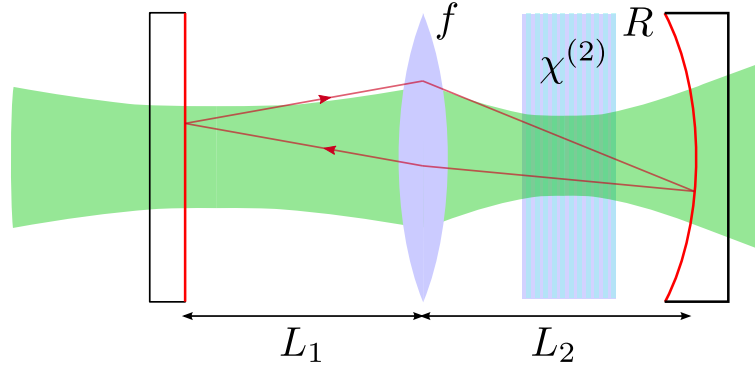


Figure 5.22: Schéma du fonctionnement de l'OPO en cavité auto-imageante avec un cristal de PPKTP. Pour diminuer la longueur totale de la cavité et augmenter sa bande passante, on place le cristal entre la lentille et le miroir sphérique.

C.4.1 Géométrie de la cavité

Le coefficient non-linéaire du PPKTP est suffisant pour pouvoir construire un OPO en simple passage du faisceau pompe. Cette opération économise une cavité et un asservissement. Dans un premier temps, nous souhaitions construire une cavité auto-imageante semi-monolithique, utilisant une face du cristal comme miroir pur l'infra-rouge, et l'autre face traitée anti-reflet pour les deux longueurs d'ondes. Cependant, les traitements diélectriques déposés par la société allemande *Layertec* sur les faces des cristaux que nous avons achetés se sont avérés très mauvais, et ont rendu les cristaux inutilisables pour notre cavité auto-imageante (2% de pertes sur le traitement anti-reflet). Nous avons donc utilisé un cristal traité anti-reflet sur les deux faces pour les deux longueurs d'ondes, que nous avons ensuite placé dans une cavité. Le schéma de fonctionnement de cet OPO est présenté sur la figure 5.22, et une photo est présentée sur la figure 5.23.

La cavité auto-imageante utilisée pour cette expérience est différente de celle utilisée dans l'expérience avec le LiNbO_3 . Nous avons optimisé ses caractéristiques pour la réduction de bruit multimode plutôt que pour l'amplification sans bruit d'images. Ses caractéristiques sont résumées dans le tableau suivant :

Rayon de courbure du miroir sphérique	ROC = 50 mm
Distance focale de la lentille	f = 30 mm
Longueur entre le miroir plan et la lentille	L_{1deg} = 48 mm
Longueur entre la lentille et le miroir sphérique	L_{2deg} = 80 mm
Longueur totale de la cavité	L_{tot} = 128 mm
Réfectivité du miroir plan	R > 99.8 %
Réfectivité du miroir sphérique	R = 98.3 %
Finesse cavité vide	$\mathcal{F}$ = 280
Finesse avec cristal	$\mathcal{F}$ = 250
Pertes à l'intérieur de la cavité (lentille + cristal)	$\gamma_c \approx 0.8 \%$
Pertes utiles de la cavité (<i>escape efficiency</i>)	$\frac{\gamma_s}{\gamma} \approx 70 \%$
Bande passante	B = 4.7 MHz

Pour cette expérience, nous avons donc utilisé le même cristal de PPKTP que pour

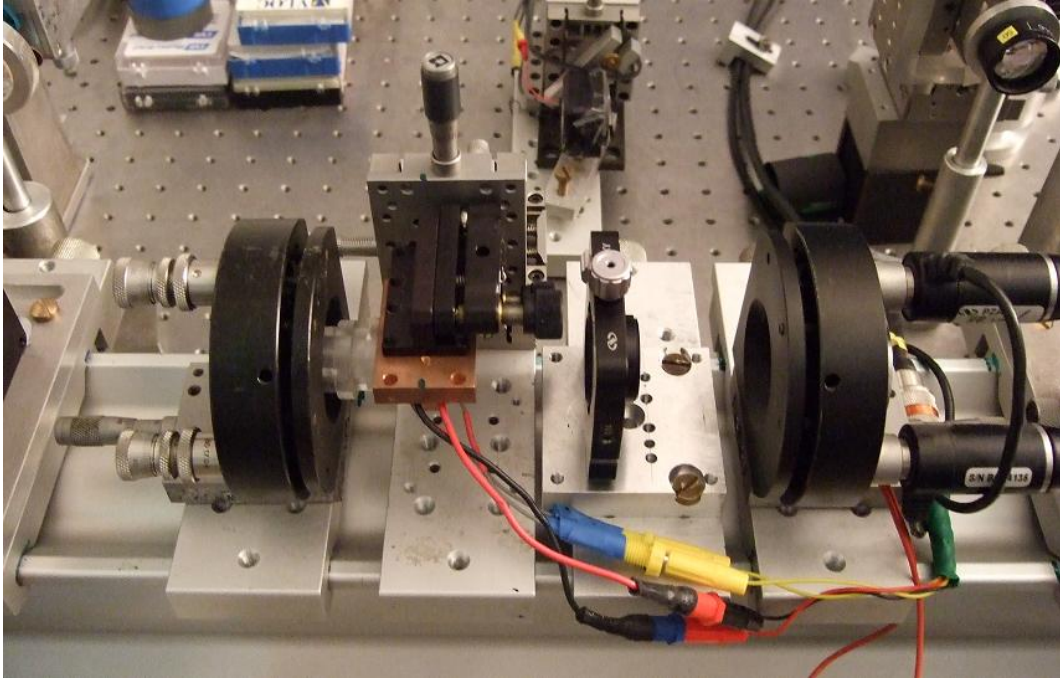


Figure 5.23: Photo de l'OPO auto-imageant construit avec un cristal de PPKTP.

l'expérience sur les modes TEM_{10} et TEM_{01} . Les pertes sur les faces de ce cristal sont faibles (de l'ordre de 0.07 % par face). Il est placé dans un four en cuivre dont la température est asservie autour de 35 °C environ à l'aide d'un contrôleur de type PID. Nous avons essayé de minimiser la longueur de la cavité, de sorte que sa bande passante soit la plus grande possible. Pour cela, nous avons choisi de placer le cristal entre la lentille et le miroir sphérique, ce qui nous a permis d'utiliser une géométrie plus compacte.

Les problèmes de dégénérescence que nous avons observés avec ce cristal pour l'expérience sur les modes TEM_{10} et TEM_{01} ont également été gênants pour cette expérience. Pour s'en affranchir, on commence par aligner la cavité vide avec un faisceau bien centré dont le waist est situé entre la lentille et le miroir sphérique, et est de taille $w_0 = 90 \mu\text{m}$. On s'assure de la dégénérescence de la cavité vide en coupant une partie du faisceau injecté à l'aide d'une lame de rasoir, et en vérifiant que le pic de transmission reste de même largeur, comme représenté sur la figure 5.24. On insère ensuite le cristal dans la cavité auto-imageante. L'indice optique du cristal est différent de un, et la cavité n'est alors plus auto-imageante. On peut donc orienter le cristal pour que le faisceau injecté soit à nouveau bien centré, puis on augmente la longueur L_2 d'environ 4.5 mm pour atteindre à nouveau la dégénérescence. Celle-ci est difficile à évaluer dans ce nouveau contexte, à cause d'effets transverses dans le cristal, décrit également dans l'expérience du chapitre précédent. Il nous a en général été possible d'atteindre la dégénérescence de la cavité dans une direction transverse, mais pas dans l'autre. Pour quantifier la dégénérescence, on peut à nouveau utiliser une lame de rasoir pour couper une partie du faisceau. Sur la figure 5.24, on trouve des images enregistrées à l'oscilloscope des pics de transmission de la cavité en l'absence et en présence du cristal. Comme pour l'expérience de doublage de fréquence d'images détaillée à la section D du chapitre 2, on caractérise la dégénérescence de la cavité en

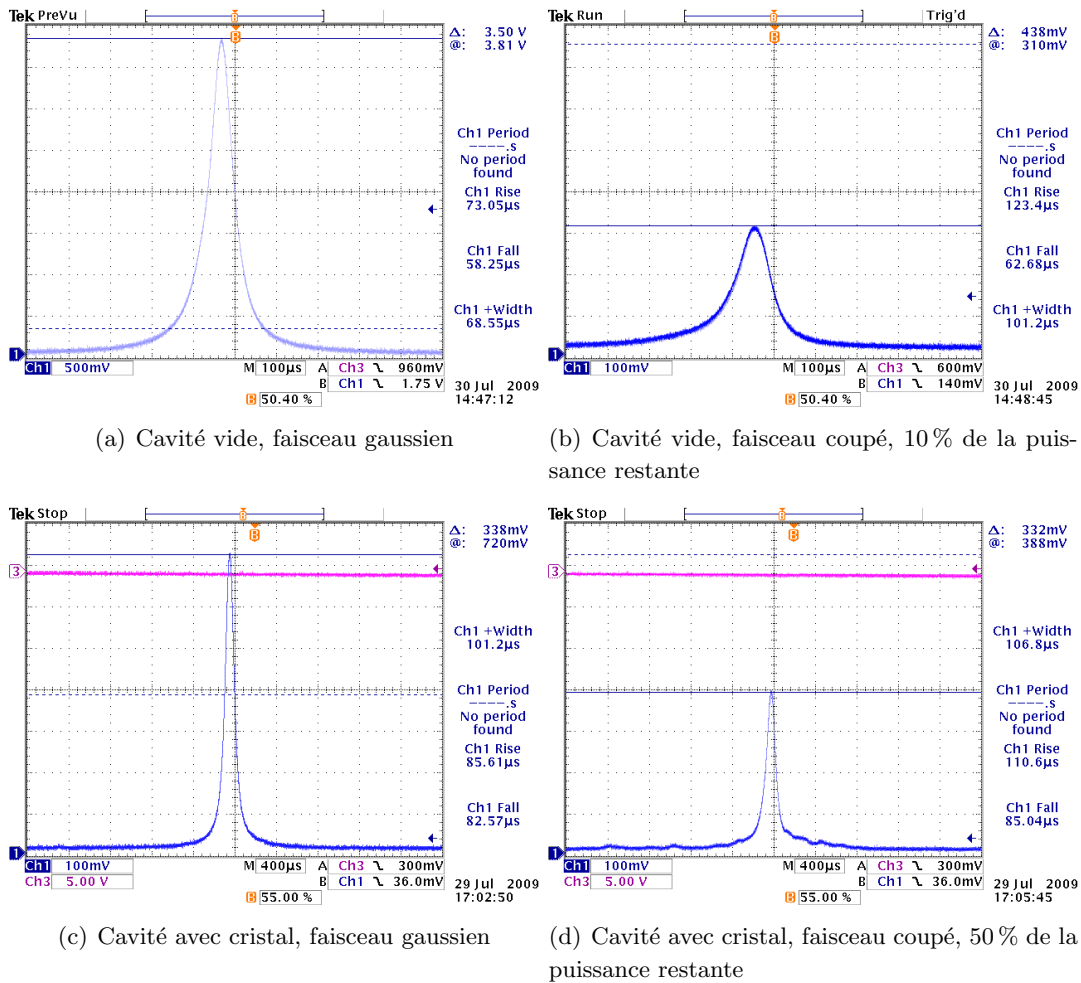


Figure 5.24: Pics de transmission quand la cavité auto-imageante est dégénérée, en l'absence et en présence du cristal, pour deux types de faisceaux injectés.

couplant une partie du faisceau injecté dans la cavité avec une lame de rasoir. Dans le cas de la cavité vide, on voit sur la figure 5.24 que même en occultant 90 % du faisceau, le pic de transmission de la cavité garde la même forme et presque la même largeur. Cependant, en alignant la cavité en présence du cristal et en occultant la moitié du faisceau, la forme du pic de transmission se dégrade. Le nombre de modes résonants est difficile à évaluer dans ce cas.

C.4.2 Faisceau pompe et amplification sensible à la phase

Le faisceau pompe de l'OPO est choisi de taille telle que le mode TEM_{00} injecté soit le plus proche possible du premier supermode de l'OPO, calculé avec le modèle théorique détaillé dans le chapitre 3 et à la section A de ce chapitre. Il doit donc avoir un waist de taille $w_p \approx 120 \mu\text{m}$ au niveau du cristal, c'est-à-dire entre la lentille et le miroir sphérique. Dans ce cas, d'après les prédictions théoriques, les supermodes de cet OPO sont une famille de modes proches des modes de Hermite-Gauss, et le mode injecté correspond au premier mode de cette famille. Ce fonctionnement réduit le nombre de modes de l'OPO à environ 8, mais diminue également la puissance de pompe nécessaire pour atteindre le seuil, et donc les effets thermiques.

On aligne le faisceau pompe en le superposant au faisceau vert créé par doublage de fréquence du faisceau infra-rouge injecté dans le cristal non-linéaire. On observe alors l'amplification sensible à la phase du faisceau injecté. Comme dans le cas de l'OPO en cavité auto-imageante avec le cristal de LiNbO_3 , cette amplification est conservée quand on coupe une partie du faisceau injecté à l'aide d'une lame de rasoir. On optimise l'alignement du faisceau pompe pour maximiser le gain en amplification. On atteint des valeurs de gains autour de 20 en amplification, et autour de 0,3 en désamplification.

Pour asservir la phase relative entre le faisceau pompe et le faisceau injecté en régime de désamplification, on utilise la même technique que celle utilisée pour l'expérience sur les modes TEM_{01} et TEM_{10} , détaillée au paragraphe B.7 du chapitre 4 : le signal d'erreur est généré par un dispositif interférentiel entre le faisceau infrarouge doublé en fréquence et le faisceau pompe prélevés en amont de la cavité OPO.

C.4.3 Détection homodyne

Pour détecter des effets de réduction de bruit multimodes en sortie de cet OPO, on choisit de changer le profil transverse de l'oscillateur local pour l'adapter aux différents supermodes de l'OPO. Pour cela, on procède de la façon suivante, comme représenté schématiquement sur la figure 5.21 :

1. On injecte dans la cavité auto-imageante un mode TEM_{00} correspondant au premier supermode calculé numériquement. Ce faisceau est prélevé avant la cavité de filtrage.
2. Le faisceau de la détection homodyne passe à travers la cavité de filtrage. Quand celle-ci est asservie sur le mode TEM_{00} , on adapte le mode en sortie au mode qui passe par la cavité en l'absence de pompe, en maximisant la visibilité des interférences enregistrées avec les photodiodes de la détection homodyne. On atteint en général des visibilités de l'ordre de 98 %.

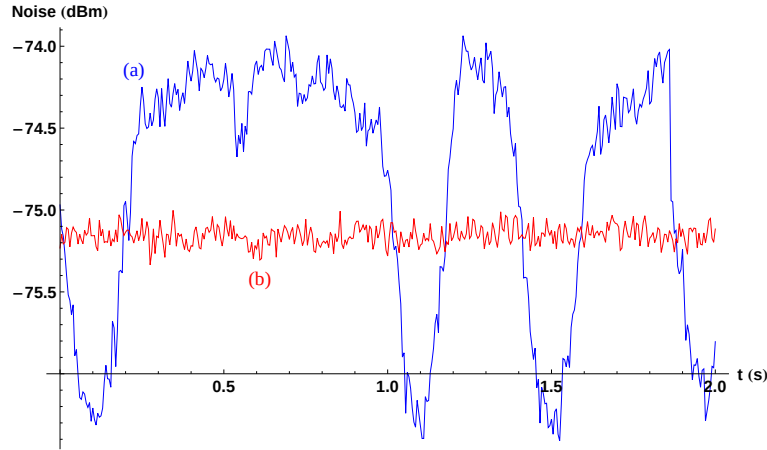


Figure 5.25: Fluctuations mesurées sur le mode TEM_{00} injecté à une fréquence d'analyse de 3.5 MHz (courbe bleue (a)) quand la phase de l'oscillateur local est balayée. La courbe rouge (b) représente le niveau du bruit quantique standard.

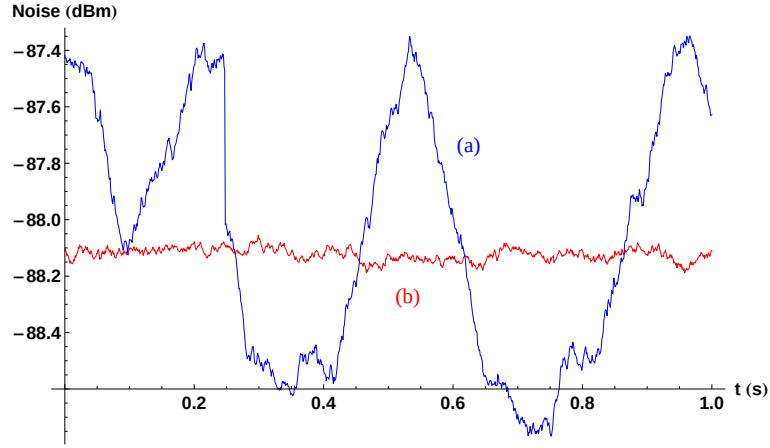
3. On peut ensuite changer le profil transverse de l'oscillateur local en asservissant la cavité de filtrage sur un mode transverse d'ordre supérieur. Cette opération permet de garder l'alignement de l'oscillateur local avec le faisceau qui passe à travers la cavité, même s'il s'agit de deux modes orthogonaux. La visibilité des interférences résiduelles entre le mode injecté dans la cavité et l'oscillateur local, théoriquement nulle, est dans notre cas égale à quelques pourcents, et peut varier légèrement au cours de l'expérience. Cette valeur faible nous permet de nous assurer que l'on détecte bien le mode gaussien d'ordre supérieur, et pas seulement une partie du mode TEM_{00} .

On ne dispose que d'une seule cavité de filtrage. Il n'est donc pas possible de "nettoyer" le faisceau injecté dans la cavité auto-imageante de l'OPO. Ce faisceau est donc bruité, mais cela ne pose pas de problème quand on mesure les fluctuations en sortie de l'OPO sur un mode orthogonal.

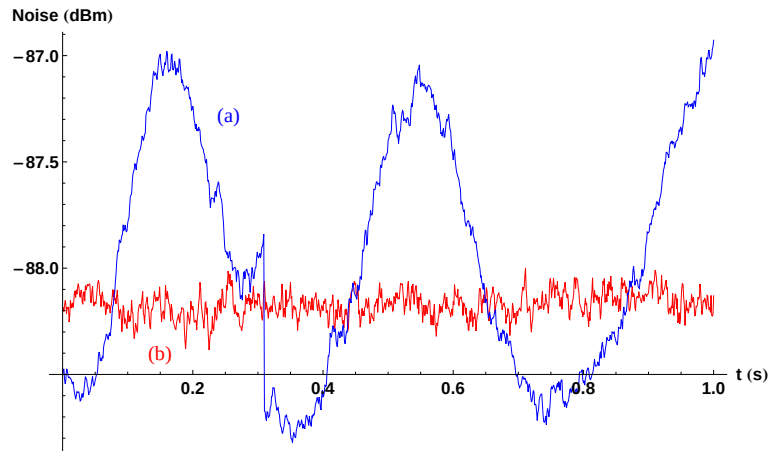
C.4.4 Résultats de compression de bruit multimode

Nous avons mesuré les fluctuations du faisceau en sortie de l'OPO auto-imageant sur plusieurs modes transverses, quand la phase relative entre le faisceau injecté et le faisceau pompe est asservie en régime de désamplification. La figure 5.25 présente les fluctuations mesurées sur le mode TEM_{00} injecté à une fréquence d'analyse de 3.5 MHz, quand la phase de l'oscillateur local est balayée. On observe une réduction de bruit sur la quadrature d'amplitude d'environ 25 % (1.2 dB) sous le bruit quantique standard, pour une valeur théorique de 35 % (1.8 dB) avec nos paramètres expérimentaux. C'est à cette fréquence que la réduction de bruit est la meilleure, étant donnée le bruit initial du faisceau injecté et la faible bande passante de la cavité OPO. Pour des fréquences d'analyse de bruit plus basses, le faisceau injecté n'est pas au bruit quantique standard, et donc la réduction de bruit est dégradée. Pour des fréquences plus élevées, on se rapproche de la bande passante de l'OPO (4.7 MHz) et la réduction de bruit se détériore. L'excès de bruit sur la quadrature de phase est environ égal à la réduction de bruit.

Quand l'oscillateur local est un mode TEM_{10} horizontal, orthogonal au mode TEM_{00}



(a) Fluctuations enregistrées à 1.7 MHz



(b) Fluctuations enregistrées à 3.5 MHz

Figure 5.26: Fluctuations mesurées sur le mode TEM_{10} vide (courbe bleue (a)) quand la phase de l'oscillateur local est balayée. La courbe rouge (b) représente le niveau du bruit quantique standard. On observe une réduction de bruit d'environ 0.6 dB

injecté, nous avons observé une réduction de bruit de 13 % (0.6 dB). Cette valeur a été observée à plusieurs fréquences d'analyse de bruit entre 1.5 MHz et 3.5 MHz. Les fluctuations du faisceau injecté ne posent plus de problème car on détecte à présent un mode vide. Les fluctuations enregistrées à des fréquences d'analyse de 1.7 MHz et 3.5 MHz sont présentées sur la figure 5.26. À nouveau, l'excès de bruit sur la quadrature de phase est environ égal à la réduction de bruit. La réduction de bruit est plus faible que celle observée sur le mode TEM_{00} , mais il faut également considérer que le mode TEM_{10} a un couplage plus faible avec le faisceau pompe, qui se traduit par une valeur propre du couplage paramétrique plus faible que pour le mode TEM_{00} : $\Lambda_1 = 0,67\Lambda_0$. La réduction de bruit attendue est donc plus faible. Le calcul complet conduit à une réduction de bruit attendue environ égale à 0.9 dB de réduction de bruit sur le mode TEM_{10} . La valeur obtenue expérimentalement est donc un peu plus faible et la différence peut être attribuée à la dégénérescence imparfaite de la cavité, qui attribue des pertes plus grandes pour le mode TEM_{10} par rapport au mode TEM_{00} .

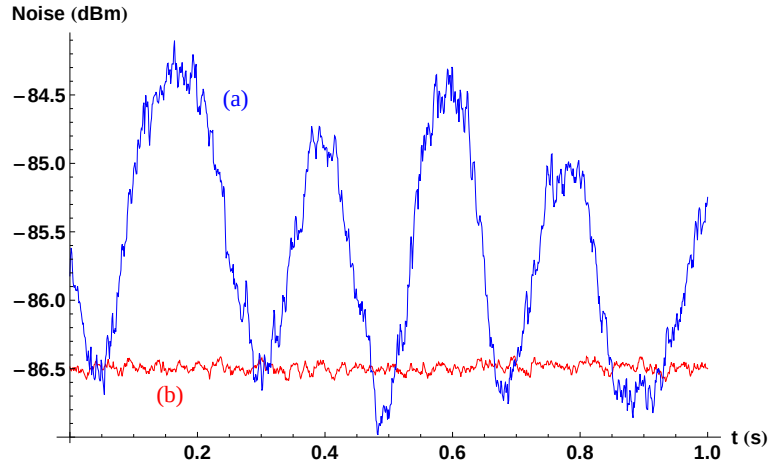


Figure 5.27: Fluctuations mesurées sur le mode TEM_{01} vide (courbe bleue (a)) quand la phase de l'oscillateur local est balayée. La courbe rouge (b) représente le niveau du bruit quantique standard. On observe une réduction de bruit d'environ 0.3 dB

Enfin, nous avons mené la même opération quand l'oscillateur local est un mode TEM_{01} vertical, orthogonal au mode TEM_{00} injecté. La dégénérescence de la cavité dans la direction verticale était alors moins bonne que dans la direction horizontale et la réduction de bruit est moins bonne. On enregistre les fluctuations de ce mode quand la phase de l'oscillateur local est balayée. Les résultats sont présentés sur la figure 5.27 pour une fréquence d'analyse de 1.8 MHz. On observe une réduction de bruit d'environ 7 % (0.3 dB) sous le bruit quantique standard. Ces résultats sont de plus moins reproductibles que pour le mode horizontal, car la dégénérescence de la cavité est moins bonne dans cette direction, ce qui d'une part augmente le niveau de pertes pour ce mode dans la cavité et d'autre part rend la résonance beaucoup plus sensible aux fluctuations. De même que pour le mode TEM_{10} , la réduction de bruit attendue pour ce mode dans une cavité parfaitement dégénérée est de 0.9 dB.

Nous avons mesuré la réduction de bruit sous le bruit quantique standard sur trois modes transverses orthogonaux. L'état créé est donc un état trimode au sens de la définition du paragraphe B.4.1 du chapitre 1. Les fluctuations de la dégénérescence de la cavité auto-imageante ne nous ont pas permis d'effectuer des mesures sur plus de modes transverses, notamment sur les modes TEM_{02} , TEM_{20} et TEM_{11} .

C.5 Conclusion

Le bilan de cette expérience visant à produire un état non-classique multimode à l'aide d'un OPO en cavité auto-imageante est mitigé. Les résultats obtenus sont satisfaisants, mais il est apparu des limitations fondamentales à ce type d'expérience :

Les propriétés de la cavité auto-imageante sont bien maîtrisées, comme l'a démontrée l'expérience décrite dans la section D du chapitre 2.

Pour la première fois, nous avons observé l'amplification sensible à la phase de faisceaux de profils transverses simples dans un OPO en cavité auto-imageante. Nous avons également réussi à générer et mesurer des états non-classiques multimodes avec une faible réduction de bruit. C'est la première expérience capable de générer une réduction de bruit multimode sur les modes TEM_{00} , TEM_{01} et TEM_{10} à l'aide d'un seul OPO.

Les limitations de ce système sont difficiles à contourner. Pour obtenir un état non-

classique très multimode, il faut un faisceau pompe très large, ce qui fait augmenter la valeur du seuil d'oscillation de l'OPO et les effets thermiques au sein du cristal limitent la dégénérescence de la cavité. L'utilisation d'une cavité de plus haute finesse pour l'infrarouge ne résout pas entièrement le problème puisque la dégénérescence de la cavité est également plus difficile à atteindre si la finesse est élevée. La seule solution possible est l'utilisation d'un cristal de plus grand coefficient non-linéaire $\chi^{(2)}$. Le cristal de PPKTP que nous avons utilisé était imparfait et la dégénérescence de notre cavité auto-imageante était soumise à un alignement fin et très instable, ce qui limite la reproductibilité des expériences.

Pour reproduire cette expérience dans les meilleures conditions, il semble optimal d'utiliser un cristal de PPKTP ou PPLN en géométrie semi-monolithique, pour rendre la dégénérescence plus facile à obtenir et limiter les effets transverses indésirables dans le cristal. Il est également important de minimiser les pertes dans le cristal et sur la lentille, pour avoir un coefficient de pertes utiles $\frac{\gamma_s}{\gamma}$ maximal. La transmission du miroir de sortie doit être choisie la plus basse possible, tout en gardant le seuil d'oscillation accessible. Enfin, il faut choisir une cavité de longueur la plus courte possible pour avoir une bande passante suffisante pour mesurer des fluctuations quantiques.

L'observation de réduction des fluctuations locales d'un faisceau prédite dans [Lopez 09] de même que l'observation de faisceaux EPR locaux nécessitent l'amélioration de l'efficacité globale du dispositif, notamment pour accroître le nombre de modes et la pureté des états produits, ce qui semble difficile à l'heure actuelle si ce n'est en utilisant des cristaux non-linéaires de bien meilleure qualité.

Oscillateur paramétrique optique en cavité pompé en modes synchrones

Sommaire

A	Description théorique d'un OPO pompé en modes synchrones	193
A.1	Les supermodes de l'approche spectrale	193
A.2	Approximation gaussienne et profil temporel des supermodes . .	194
A.3	Seuil d'oscillation	195
A.4	Approche temporelle du SPOPO	197
B	Mise en place expérimentale d'un OPO pompé en modes synchrones	201
B.1	Contexte et objectifs de cette expérience	201
B.2	Dispositif expérimental	202
B.3	Sources laser	202
B.4	Construction de l'OPO pompé en modes synchrones	208
B.5	Amplification sensible à la phase sous le seuil d'oscillation	216
B.6	Seuil d'oscillation du SPOPO	216
B.7	Mise en forme des impulsions de l'oscillateur local	217
B.8	Etat comprimé d'un peigne de fréquence	219
B.9	Conclusion	221

LE régime de l'optique des impulsions très brèves est très adapté pour l'optique non-linéaire grâce aux importantes intensités crête que l'on peut atteindre. L'efficacité des processus non-linéaires est donc grandement améliorée par rapport au fonctionnement continu. ainsi, le régime pulsé est utilisé par plusieurs équipes d'optique quantique pour générer des états non-classique à l'aide de la conversion paramétrique dans un cristal $\chi^{(2)}$ en simple passage qui permet de générer une réduction de bruit sous le bruit quantique standard pour des impulsions individuelles [Aytür 90, Wenger 04] ou encore des corrélations transverses d'origine quantique [Blanchet 08]. Des états comprimés ont également été créés en simple passage dans une fibre optique (milieu $\chi^{(3)}$) en régime impulsionnel [Rosenbluh 91, Heersink 05] (régime des solitons optiques).

Si on utilise de plus un cristal $\chi^{(2)}$ dans une cavité synchrone pour amplifier les effets non-linéaires, on obtient un oscillateur paramétrique optique pompé en modes synchrones (SPOPO pour *Synchronously Pumped OPO* en anglais), qui peut ouvrir une nouvelle voie pour l'optique quantique parce qu'il est intrinsèquement multimode d'une part, et parce que les effets non-linéaires ont une efficacité importante par rapport au cas continu. Ce type de dispositif a été décrit par la théorie générale des OPO multimodes présentée au chapitre 3. On a vu en particulier comment décrire le comportement d'un SPOPO et sous quelles conditions il permettait de générer des états non-classiques multimodes.

La première partie de ce chapitre rappelle le profil des modes propres du SPOPO calculés en utilisant des paramètres expérimentaux. Un approfondissement théorique sur une description complètement temporelle du SPOPO est également abordée. La deuxième partie est consacrée à la mise en place expérimentale d'un SPOPO, expérience nouvelle dans le groupe qui a commencé au début de cette thèse. On discute les différentes étapes du développement de l'expérience, et on présente les premiers résultats.

A Description théorique d'un OPO pompé en modes synchrones

Les résultats montrés dans le cas général des OPO mutimodes s'appliquent dans le cas d'un OPO pompé en modes synchrones (SPOPO). Cette approche est traitée en détail dans [Patera 08, de Valcárcel 06]. On présente ici quelques approfondissements théoriques et des simulations du SPOPO que nous avons construit expérimentalement utilisant un cristal de BiBO_3 et une pompe correspondant au doublage des impulsions femtosecondes produites par notre laser MIRA. Les valeurs expérimentales nous permettent de calculer le profil d'amplitude spectrale des modes propres de l'expérience, et de calculer le seuil d'oscillation du SPOPO. Enfin, par analogie avec l'OPO en cavité auto-imageante, on peut également donner une description temporelle du fonctionnement de cet OPO.

A.1 Les supermodes de l'approche spectrale

Considérons ici le cas (qui correspond à notre expérience) d'un SPOPO avec un cristal de BiBO_3 pompé avec les impulsions obtenues par doublage de fréquence du faisceau laser de notre MIRA. La largeur spectrale des impulsions initiales est de 3.6 THz et la largeur des impulsions doublées est donc de 5.1 THz. On dispose de plusieurs cristaux de BiBO_3 de différentes épaisseurs : 100 μm , 200 μm , 500 μm et 1 mm. On peut calculer la matrice de couplage entre les fréquences $\nu_m = \nu_0 + m\nu_{rep}$ en fonction des paramètres du cristal comme décrit à la section 3.5 du chapitre 3. Pour les différents cristaux dont nous disposons, on a calculé la matrice de couplage et ses éléments propres. Les figures 6.1 et 6.2 représentent les cas des cristaux de longueurs 200 μm et 1 mm.

On observe que le nombre de modes propres significatifs est minimal pour un cristal de longueur $l_c = 200 \mu\text{m}$ et maximal pour $l_c = 1 \text{ mm}$. Les modes propres ont un profil d'amplitude spectrale gaussien pour les trois plus petits cristaux. Dans le cas du cristal de 1 mm, on observe de légères oscillations sur les bords du spectre. On peut expliquer ces oscillations par la forme courbe de la matrice de couplage, qui apparaît quand l'accord de phase permis par le cristal est moins large que le spectre des impulsions pompes. Le spectre du premier supermode est d'autant plus large que le cristal est court. Dans le cas du cristal de 1 mm, le premier supermode est très proche des impulsions laser initiales

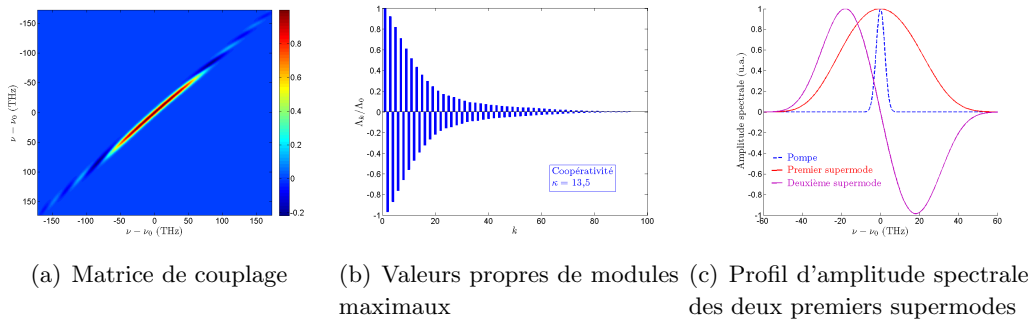


Figure 6.1: Matrice de couplage entre les fréquences ν_m dans le cas d'une pompe de largeur spectrale $\Delta\nu_p = 5.1 \text{ THz}$ et avec un cristal de BiBO_3 de longueur $l_c = 200 \mu\text{m}$.

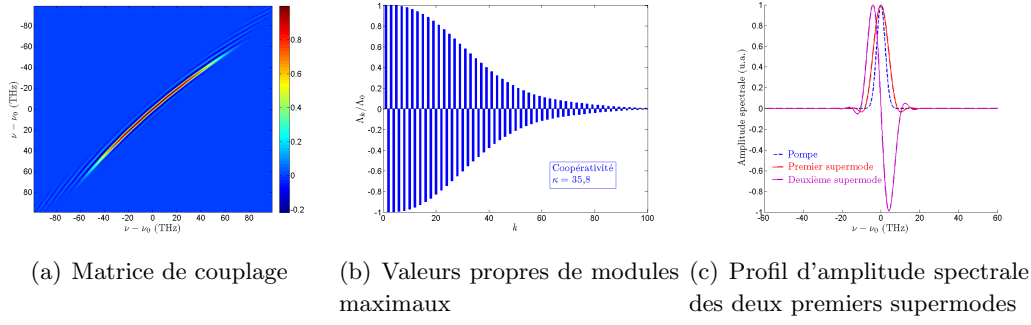


Figure 6.2: Matrice de couplage entre les fréquences ν_m dans le cas d'une pompe de largeur spectrale $\Delta\nu_p = 5.1$ THz et avec un cristal de BiBO_3 de longueur $l_c = 1$ mm.

avant doublage de fréquence.

Comme dans le cas spatial, on peut étendre cette approche, et calculer le nombre de modes (par l'intermédiaire du paramètre de coopérativité κ) en fonction de la longueur du cristal et de la largeur spectrale de la pompe. Cette fonction est représentée sur la figure 6.3 pour des longueurs de cristal de $50 \mu\text{m}$ à 2 mm, et des largeurs spectrales des impulsions pompes de 0.51 THz à 51 THz, soit des impulsions pompes de durée comprises entre 8 fs et 800 fs.

Comme dans le cas de l'OPO en cavité auto-imageante, le nombre de modes propres de l'interaction paramétrique dépend du profil du champ pompe et des propriétés du cristal non-linéaire. Dans le cas du SPOPO, on observe une dépendance non triviale du nombre de modes en fonction de ces deux paramètres. Le nombre de modes est maximal dans deux cas : pour un cristal très court et des impulsions pompes de durée très longue d'une part, et pour un cristal très long et des impulsions pompes de durée très courte d'autre part. En augmentant la longueur du cristal, on peut atteindre un fonctionnement multimode avec un grand nombre de modes. En revanche, le nombre de modes minimal, atteint dans le cas d'un cristal très court et d'une pompe très courte, ne peut pas diminuer jusqu'à un fonctionnement monomode. Pour une pompe de 8 fs et un cristal de $50 \mu\text{m}$, on obtient $\kappa = 6$.

A.2 Approximation gaussienne et profil temporel des supermodes

Dans les conditions typiques de fonctionnement du SPOPO, les modes propres de la matrice de couplage ont un profil proche d'un profil gaussien correspondant aux polynômes de Hermite-Gauss. Cela est dû au fait que la matrice de couplage est très similaire à une matrice gaussienne de largeurs différentes selon les deux directions. La diagonalisation analytique d'une telle matrice est possible et les modes propres sont des modes de Hermite-Gauss. Giuseppe Patera a montré que le recouvrement était supérieur à 99% entre les modes propres résultants de la diagonalisation analytique et les modes propres de la diagonalisation numérique.

Les modes de Hermite-Gauss sont invariants par transformée de Fourier. L'enveloppe

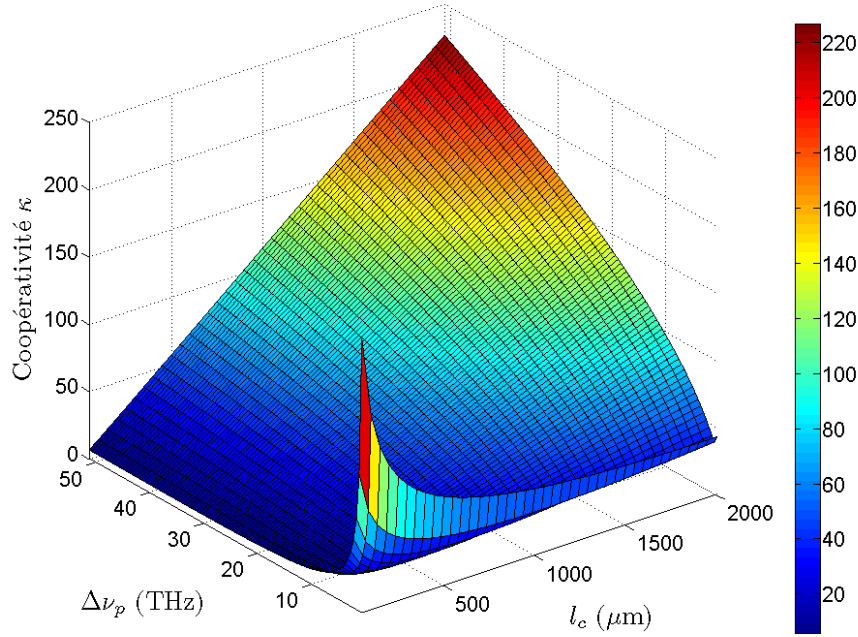


Figure 6.3: Valeur du paramètre de coopérativité κ de la matrice de couplage entre modes de fréquences dans un cristal de BiBO_3 en fonction de longueur du cristal l_c et de la largeur spectrale des impulsions pompes $\Delta\nu_p$.

temporelle des modes propres de l'OPO est donc également décrite par les polynômes de Hermite-Gauss. Dans le domaine temporel, le champ électrique associé à chaque supermode est donc une succession d'impulsions courtes d'enveloppe définie par un polynôme de Hermite-Gauss, et avec toujours la même porteuse à la fréquence optique ω_0 . Ces champs sont représentés sur la figure 6.4 pour les trois premiers supermodes de l'interaction avec une pompe de 85 fs dans un cristal de BiBO_3 avec $l_c = 500 \mu\text{m}$. Dans le cas de l'approximation gaussienne, le champ associé aux supermodes a toujours un profil similaire, seul la durée des impulsions gaussiennes varie.

Le deuxième mode propre a une enveloppe temporelle présentant deux lobes successifs. Dans l'article [Lamine 08], Brahim Lamine, Claude Fabre et Nicolas Treps proposent d'utiliser un tel mode pour mesurer de manière interférométrique le temps d'arrivée d'une impulsion courte, car il correspond à la dérivée par rapport au temps de l'enveloppe gaussienne de l'impulsion du premier supermode.

A.3 Seuil d'oscillation

Dans sa thèse [Patera 08], Giuseppe Patera a calculé la valeur théorique attendue du seuil d'oscillation du SPOPO à partir de la décomposition en modes propres de la matrice de couplage. Comme évoqué dans le paragraphe C.3 du chapitre 3, c'est le mode propre de valeur propre maximale (en valeur absolue) qui est émis par l'OPO au dessus du seuil. On peut de plus établir la relation entre les puissances de pompe au seuil pour les fonctionnements impulsionnel d'une part et continu d'autre part, c'est-à-dire quand

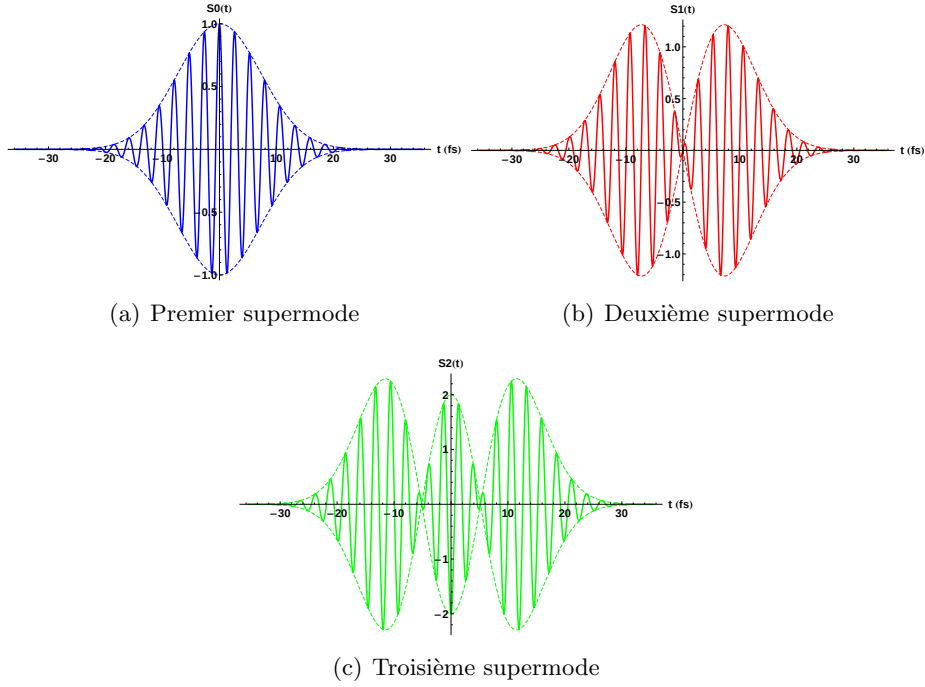


Figure 6.4: Profil temporel du champ électrique des trois premiers supermodes dans l'approximation gaussienne de l'interaction paramétrique avec des impulsions pompes de durée 85 fs dans un cristal de BiBO₃ de longueur $l_c = 500 \mu\text{m}$.

le SPOPO est pompé par un faisceau continu, et émet un faisceau continu de fréquence moitié.

$$P_{\text{impulsionnel}} = \frac{P_{\text{continu}}}{\Lambda_0^2} \quad (6.1)$$

où Λ_0 est la valeur propre maximale de la matrice de couplage entre les fréquences. Pour des valeurs typiques des paramètres de la matrice de couplage, Λ_0 est de l'ordre de 270, soit un seuil réduit d'un facteur 7×10^4 par rapport au fonctionnement monomode. Ce résultat montre le gain du fonctionnement impulsionnel par rapport au fonctionnement continu de l'OPO, qui s'explique simplement par la très grande intensité crête des impulsions par rapport au fonctionnement continu. Le rapport Λ_0^2 correspond d'ailleurs à l'ordre de grandeur du rapport entre les intensités crête, qui correspond au rapport entre la durée des impulsions et le temps entre chaque impulsion (qui vaut environ 10^5 pour le cas expérimental typique). Cependant, ce résultat est à relativiser par le fait que le gain du fonctionnement continu est élevé, car le cristal non linéaire considéré ici est très court (moins d'un millimètre) par rapport aux cristaux utilisés dans le cas d'un OPO continu. Il ne correspond donc pas à une valeur réelle de puissance de pompe pour un OPO pompé en continu, comme ceux utilisés habituellement dans nos expériences.

Comme dans un OPO habituel, le niveau du seuil est inversement proportionnel à la finesse $\mathcal{F}$ de la cavité au carré et à la longueur du cristal l_c au carré et proportionnel à la surface du faisceau pompe πw_0^2 dans le cristal. Pour un SPOPO simplement résonant en

cavité linéaire, la puissance moyenne de pompe au seuil vaut :

$$P_{impulsionnel} = \frac{cn_0^2 \epsilon_0 \pi w_0^2 \lambda_0^2}{2\Lambda_0^2 \mathcal{F}^2 l_c^2 \pi^3 \chi^2} \quad (6.2)$$

On peut calculer cette valeur dans différents cas expérimentaux accessibles avec notre expérience, c'est-à-dire avec les cristaux de BiBO_3 et les miroirs de couplage de cavité dont nous disposons. Les impulsions pompes produites par doublage de fréquence des impulsions du laser n'ont pas une durée que l'on contrôle parfaitement car elle dépend de la dérive de fréquence des impulsions fondamentales dans le cristal doubleur. On a donc utilisé deux valeurs de $\Delta\tau_p$. Les valeurs calculées sont résumées dans le tableau suivant, avec $w_0 = 20 \mu\text{m}$, $\nu_{rep} = 76 \text{ MHz}$ et $\chi^{(2)} = 3.3 \text{ pm/V}$:

$\Delta\tau_p$	85 fs	85 fs	85 fs	85 fs	85 fs	85 fs	85 fs	85 fs
l_c	100 μm	200 μm	500 μm	1000 μm	100 μm	200 μm	500 μm	1000 μm
$\mathcal{F}$	125	125	125	125	30	30	30	30
P_{seuil}	37 mW	12 mW	6.1 mW	5.9 mW	590 mW	192 mW	98 mW	94 mW

$\Delta\tau_p$	170 fs	170 fs	170 fs	170 fs	170 fs	170 fs	170 fs	170 fs
l_c	100 μm	200 μm	500 μm	1000 μm	100 μm	200 μm	500 μm	1000 μm
$\mathcal{F}$	125	125	125	125	30	30	30	30
P_{seuil}	35 mW	9.3 mW	2.3 mW	1.5 mW	560 mW	149 mW	37 mW	24 mW

On constate que ces valeurs sont très basses par rapport à un OPO pompé en continu, et permettent notamment d'utiliser une finesse très basse, et donc un coefficient de pertes utiles de l'OPO très élevé. Par ailleurs le seuil du SPOPO n'est pas minimal pour une intensité crête des impulsions pompe maximale, c'est-à-dire pour des impulsions pompes de durée minimale, comme on pourrait le penser naïvement pour maximiser les effets non-linéaires. Ce résultat s'interprète avec les propriétés de dispersion du cristal. Les impulsions pompe et signal se propagent avec des vitesses de groupe différentes, et leur recouvrement à l'intérieur du cristal est maximal sur une distance plus courte si les impulsions sont courtes. Ceci explique également pourquoi la valeur du seuil ne décroît pas proportionnellement à $\frac{1}{l_c}$ comme attendue par la formule de l'équation 6.2.

A.4 Approche temporelle du SPOPO

On traite habituellement les modes longitudinaux d'un laser dans le domaine spectral, en utilisant des sommes de champs monochromatiques. On peut aussi utiliser l'approche temporelle pour traiter ces modes. Dans le cas des OPO pompés en modes synchrones, cette théorie est actuellement développée dans notre groupe, en collaboration avec Valentin Averchenko de l'université de Saint-Petersbourg, sous la direction de Yuri Golubev. Sans détailler l'intégralité des calculs, on donne ici les idées principales de cette description. On peut comparer cette approche avec ce qui a été fait dans le cas des modes transverses : dans le cas de l'OPO en cavité auto-imageante, on dispose de deux approches pour traiter le couplage entre les modes transverses et les états produits par l'OPO : les modes de champ proche qui correspondent aux valeurs locales du champ dans le plan central du cristal, et

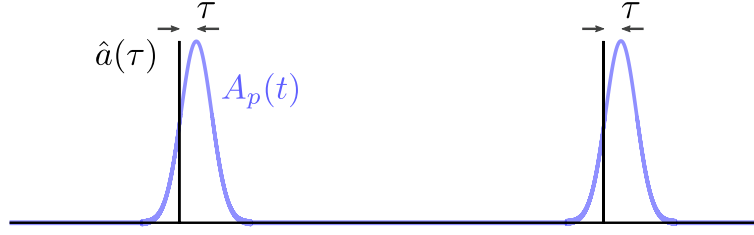


Figure 6.5: Modes temporels périodiques utilisés pour décrire le SPOPO dans le domaine temporel. La coordonnée τ est utilisée pour décrire le temps relatif au sommet de l'impulsion pompe.

les modes de champ lointain, obtenus par transformée de Fourier, qui correspondent à une impulsion transverse donnée dans le même plan du cristal.

Revenons au cas des modes longitudinaux. Pour décrire les trains d'impulsions courtes correspondant à un peigne de fréquence c'est-à-dire une superposition de champs monochromatiques de fréquences équidistantes, on utilise les opérateurs temporels périodiques $\hat{a}(\tau)$ qui correspondent à des successions de fonctions de Dirac au temps τ , périodiques avec une période égale à celle de la pompe. Ces modes ont peu de réalité physique mais sont résonants dans une cavité synchrone sans dispersion ou si la dispersion est compensée sur un tour. On définit $\tau = 0$ comme l'instant où l'impulsion pompe est maximale. Ces modes sont illustrés sur la figure 6.5.

A.4.1 Cas idéal du cristal sans dispersion

On peut dans un premier temps considérer le cas limite d'un cristal possédant une susceptibilité non linéaire d'ordre deux $\chi^{(2)}$ mais non dispersif, c'est à dire pour lequel les impulsions pompe et signal se propagent identiquement, comme ce serait le cas dans le vide par exemple. L'accord de phase du cristal non linéaire est dans ce cas infiniment large.

Les modes temporels $\hat{a}(\tau)$ sont résonants dans la cavité. Dans ce cas simple, la conversion paramétrique couple les modes $\hat{a}(\tau)$ avec l'amplitude du champ pompe au même instant τ , mais pas avec les autres modes temporels $\hat{a}(\tau')$. Le modèle de l'OPO multimode développé à la section C.2 du chapitre 3 est donc valable pour ces modes, et dans ce cas la matrice de couplage est purement diagonale. Les modes temporels sont donc modes propres de l'interaction paramétrique et l'on peut traiter le comportement du SPOPO comme une assemblée d'OPO indépendants pour les modes temporels $\hat{a}(\tau)$. On peut donc prédire dans ce cas une réduction de bruit sur les opérateurs $\hat{a}(\tau)$ proportionnelle à l'amplitude du champ pompe à l'instant τ .

Ce cas de figure correspond dans le domaine spatial au cas du cristal infiniment mince dans une cavité optique complètement dégénérée. Cette approche, discutée dans [Lopez 09] et dans la section B.1 du chapitre 3, conduit à la notion de réduction des fluctuations locales.

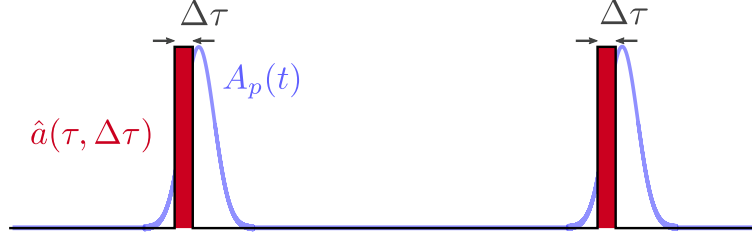


Figure 6.6: Modes temporels élargis. On prédit la réduction de bruit sur de tels modes ayant une durée $\Delta\tau$ supérieure à la durée de cohérence τ_{coh} calculée en tenant compte de la dispersion dans le cristal.

A.4.2 Cas réel avec dispersion

Le cas du cristal non linéaire non dispersif est impossible en pratique (tout comme le cas du cristal mince dans le cas spatial), et on doit donc tenir compte de la dispersion à l'intérieur du cristal. Cette dispersion a été caractérisée par les coefficients β_1 , β_{2s} et β_{2p} dans la section 3.5 du chapitre 3, et impose une largeur spectrale à l'accord de phase.

Le traitement complet de l'interaction paramétrique dans le domaine temporel est assez compliqué. On peut cependant se contenter de l'analogie avec le domaine transverse pour comprendre ce qui se passe dans le domaine temporel. On rappelle ici l'idée générale du raisonnement dans le cas du traitement multimode transverse de l'interaction paramétrique : la diffraction sur longueur l_c du cristal $\chi^{(2)}$ introduit une largeur transverse l_{coh} au delà de laquelle on peut considérer les modes (ρ) indépendants. l_{coh} s'exprime en fonction du vecteur d'onde du champ signal $k(\omega_0) = \frac{2\pi}{\lambda_0}$:

$$l_{\text{coh}} = \sqrt{\frac{2l_c}{k(\omega_0)}} \quad (6.3)$$

On a vu dans la section C.5 du chapitre 2 que le vecteur d'onde k était au phénomène de diffraction ce que le coefficient $\frac{1}{k''} = \frac{1}{\frac{d^2k}{d\omega^2}}$ était au phénomène de dispersion. On peut donc prévoir que la dispersion dans le cristal non-linéaire modifie le comportement multimode de l'interaction non-linéaire avec une impulsion pompe en couplant les modes temporels $\hat{a}(\tau)$ sur des durées inférieures à un temps caractéristique de cohérence τ_{coh} que l'on peut définir par¹ :

$$\tau_{\text{coh}} = \sqrt{2l_c k''(\omega_0)} \quad (6.4)$$

Pour le cristal de BiBO_3 de longueur $l_c = 100 \mu\text{m}$, cette durée de cohérence vaut $\tau_{\text{coh}} = 5.7 \text{ fs}$. On peut dans ce cas prédire qu'il y a réduction de bruit sur des impulsions de durée plus longue que τ_{coh} à l'intérieur de l'impulsion pompe, comme illustré sur la figure 6.6.

Cette approche nous permet de calculer le nombre de modes qui sont affectés par l'interaction paramétrique avec le champ pompe, comme le rapport entre la durée de

1. On utilise ici une seule variable pour décrire la dispersion dans le cristal, alors que dans la description fréquentielle du SPOPO on en avait utilisé trois. Cependant, le raisonnement sur les dimensions caractéristiques de la matrice de couplage mettait en évidence que seule la variable β_{2s} qui ne dépend que de $k''(\omega_0)$ intervenait, dans la limite où la largeur du spectre de la pompe est faible.

l'impulsion pompe et le temps de cohérence :

$$b = \frac{\Delta\tau_p}{\tau_{\text{coh}}} \quad (6.5)$$

L'état produit par un tel OPO est multimode si le temps de cohérence τ_{coh} est court devant la durée de l'impulsion pompe $\Delta\tau_p$.

Si l'on calcule cette valeur pour des cas expérimentaux typiques, on trouve des résultats qui correspondent bien au nombre de modes calculé en utilisant l'approche spectrale, avec le paramètre de coopérativité par exemple. Pour des impulsions pompe de 85 fs et un cristal de 100 μm , on trouve :

$$b = \frac{\Delta\tau_p}{\tau_{\text{coh}}} = 14,9 \quad (6.6)$$

Ce résultat se compare très bien au paramètre de coopérativité qui vaut 15.6, ce qui valide l'approche temporelle dans ce cas. Dans le cas de cristaux plus long, la comparaison est moins bonne, car le coefficient $k''(\omega_0)$ ne suffit plus pour décrire la dispersion dans le cristal.

A.4.3 Détection homodyne des modes temporels

Pour mesurer ces effets temporels de réduction de bruit à l'aide d'une détection homodyne, il est nécessaire de disposer d'un oscillateur local dont on peut contrôler le profil temporel. Celui-ci doit donc être une succession d'impulsions courtes de durée $\Delta\tau$ variable. Si $\Delta\tau < \Delta\tau_p$, on s'attend à détecter des fluctuations de variance inférieure au bruit quantique standard.

Cette opération n'est pas facilement réalisable expérimentalement car on utilise habituellement la même source laser pour générer la pompe du SPOPO et l'oscillateur local de la détection homodyne, afin d'avoir deux faisceaux cohérents. La durée des impulsions produites par le laser est fixe. Or pour mettre en évidence des effets temporels multimodes, il est nécessaire que la durée des impulsions de l'oscillateur local soit faible devant la durée des impulsions pompes, avec un ratio de l'ordre de un dixième. Cette opération nécessite un dispositif de mise en forme des impulsions qui élargit la largeur du spectre d'un facteur 10, ce qui n'est pas facile à mettre en oeuvre. On pourrait imaginer un dispositif où deux lasers à verrouillage de modes produisant des impulsions de durées très différentes soient verrouillés en phase à l'aide d'un asservissement actif.

Cette approche peut cependant être utilisée pour des impulsions plus longues, produites par un laser picoseconde ou nanoseconde, de sorte que la résolution temporelle des photodétecteurs permette un échantillonnage des photocourants suffisant pour pouvoir établir la statistique temporelle à l'intérieur même des impulsions.

B Mise en place expérimentale d'un OPO pompé en modes synchrones

B.1 Contexte et objectifs de cette expérience

Au début de ma thèse, notre équipe a décidé de lancer le développement d'une nouvelle expérience d'optique quantique dans le régime femtoseconde, centrée autour d'un OPO pompé en modes synchrones par un faisceau issu d'un laser à verrouillage de modes. Notre ambition pour cette expérience était de réaliser une expérience d'optique quantique en variables continues. Les techniques d'optique quantique pour des sources d'intensité constante peuvent s'appliquer aux impulsions femtosecondes car on peut en effet considérer les lasers à verrouillage de modes comme une source de lumière composée de la somme d'un grand nombre de faisceaux monochromatiques cohérents. Nous sommes particulièrement intéressés par l'aspect multimode qui se manifeste dans un OPO pompé en modes synchrones. Notre ambition a donc été initialement de mettre en évidence les prédictions théoriques d'états multimodes générés par un tel dispositif. J'ai participé activement à la construction ex nihilo de cette expérience. Les grands choix stratégiques ont été pris d'après les résultats des prédictions théoriques effectués par Giuseppe Patera et German de Valcarcel [de Valcarcel 06]. Cette proximité des théoriciens fut un atout considérable dans l'élaboration de cette expérience. Un an après le lancement de cette expérience, Olivier Pinel a commencé sa thèse dans l'équipe, dédiée exclusivement à cette expérience. Il est aujourd'hui l'acteur principal de l'avancement de cette expérience. Un nouvel objectif fut alors donné à cette expérience : en appliquant les techniques d'imagerie quantique utilisées pour la mesure de position d'un faisceau laser à la limite quantique standard et au delà [Treps 03, Delaubert 06], il est possible de mesurer le temps d'arrivée d'une impulsion femtoseconde avec une précision à la limite quantique standard. Cette prédiction théorique de Brahim Lamine, Nicolas Treps et Claude Fabre [Lamine 08] est envisagée aujourd'hui expérimentalement, et a donné naissance au projet QUALITIME de l'Agence Nationale pour la Recherche.

Notre groupe avait initialement peu d'expertise sur les techniques et subtilités expérimentales des lasers femtosecondes. Nous avons pour cela été amenés à collaborer avec Manuel Joffre du Laboratoire Optique et Biosciences de l'École Polytechnique, notamment sur le sujet de la mise en forme d'impulsions femtosecondes, et de mesure de temps. Les collaborations se sont à nouveau étendues sur ce sujet, avec l'équipe de Christine Silberhorn du Max Planck Institute for the science of light, à Erlangen en Allemagne.

À l'heure de l'écriture de ce manuscrit, cette expérience est encore en cours de développement, mais les premiers résultats sont prometteurs, et nous ont permis de conforter nos prévisions théoriques. Dans la suite de cette section, nous détaillons l'expérience de mesure de réduction de bruit d'impulsions femtosecondes, les techniques expérimentales mises en oeuvre pour cette nouvelle expérience d'optique quantique femtoseconde en variables continues, les résultats préliminaires et les perspectives que nous avons pour cette expérience.

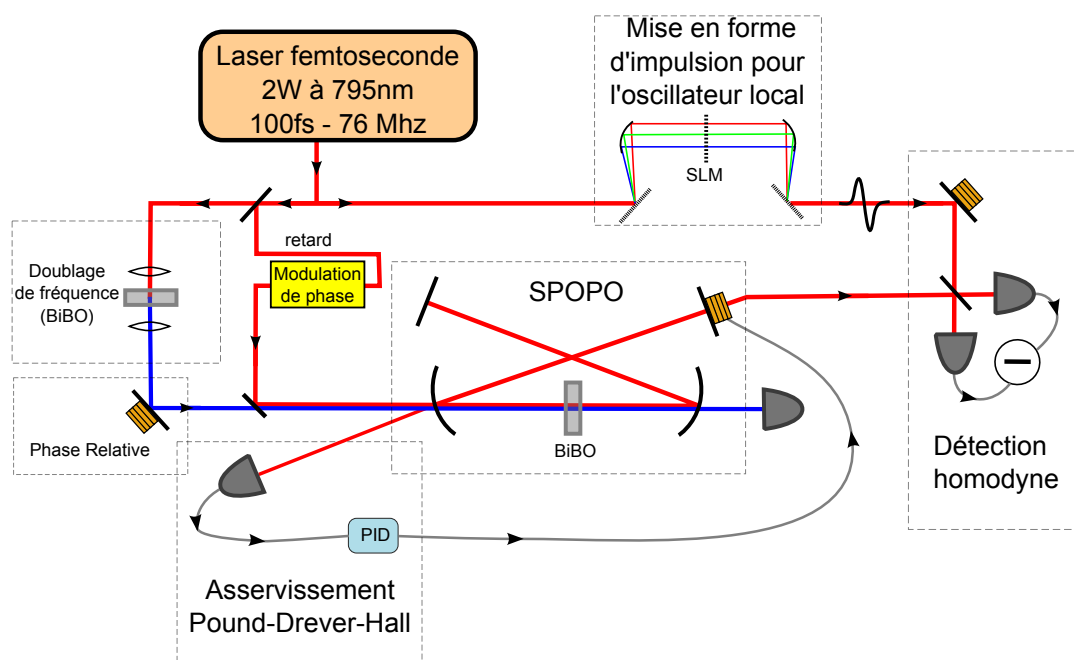


Figure 6.7: Schéma général et simplifié du dispositif expérimental d'optique quantique femtoseconde. On y retrouve les différents éléments d'une expérience d'optique quantique utilisant un OPO : le faisceau pompe, la cavité OPO et la détection homodyne.

B.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 6.7. Il reprend les mêmes éléments que les expériences d'optique quantique traditionnelles utilisant des OPO. Les impulsions femtosecondes produites par le laser à verrouillage de modes sont séparées en plusieurs voies. L'une sert à générer le faisceau pompe par doublage de fréquence. La deuxième sert à injecter l'OPO pour asservir la longueur de cavité à résonance. La dernière voie sert d'oscillateur local pour la détection homodyne, opération qui nécessite la mise en forme des impulsions.

B.3 Sources laser

B.3.1 Laser Mira

Nous disposons d'un laser MIRA 900 de la société américaine *Coherent*, pompé par un laser Verdi V-18 à 532nm de la même société. Cette source laser à verrouillage de modes produit des impulsions femtosecondes de durée accordable autour de 120 fs environ, et avec une longueur d'onde centrale accordable que nous avons choisie à 795 nm. Le verrouillage de modes est assuré par l'effet Kerr à l'intérieur du cristal laser, ainsi qu'à une fente de sortie dont on peut contrôler la largeur, comme expliqué à la section B.1.2 du chapitre 2. L'accordabilité de la longueur d'onde centrale est possible grâce à un filtre de Lyot placé à l'intérieur de la cavité laser. La dispersion dans la cavité est compensée par un système de deux prismes [Fork 84]. Cette technique permet de modifier la phase spectrale quadratique acquise par les différentes fréquences à l'intérieur de la cavité, et rend les différentes fréquences résonantes exactement équidistantes, condition nécessaire

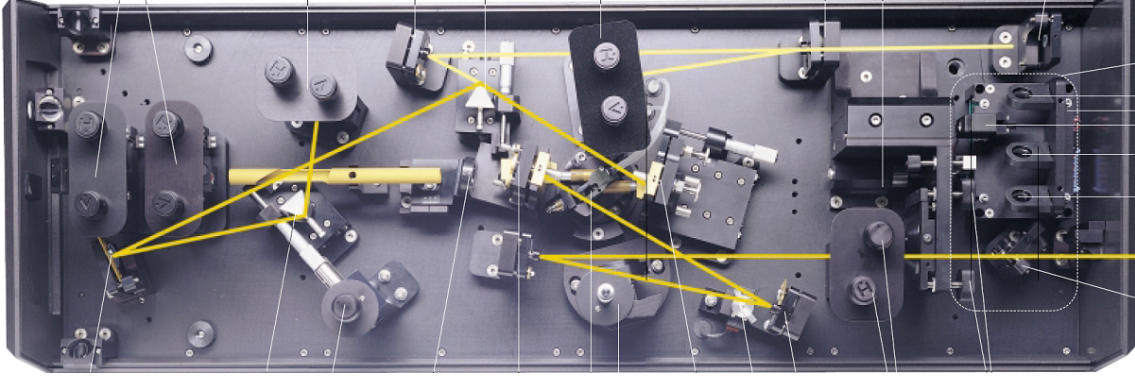


Figure 6.8: Laser MIRA 900 de la société *Coherent*.

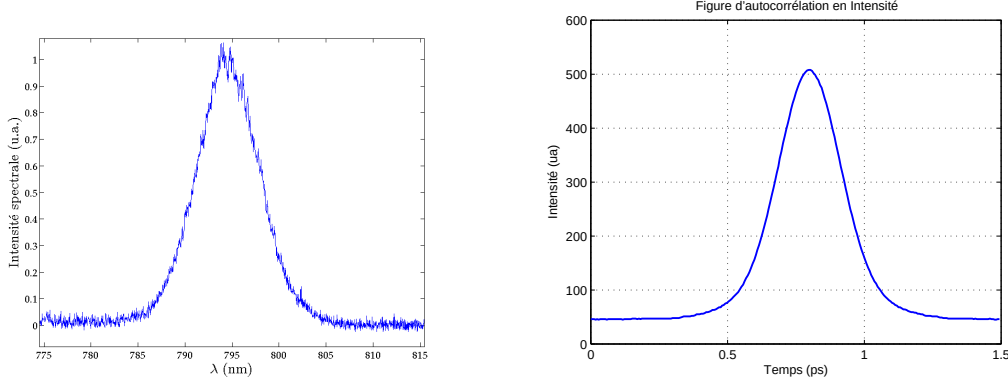
au fonctionnement optimal du mode impulsif. La dispersion compensée dans la cavité peut être contrôlée en déplaçant légèrement les prismes, ce qui permet l'accordabilité de la durée des impulsions. La figure 6.8 montre tous les différents éléments optiques à l'intérieur de la cavité laser. Le taux de répétition des impulsions est donné par la longueur de la cavité laser qui vaut $L_0 = 3.94\text{ m}$ et $\nu_{rep} = \frac{\Omega}{2\pi} = 76\text{ MHz}$. On pompe le Mira avec un faisceau issu du Verdi de puissance 13 W environ, pour obtenir 2 W en sortie, soit une puissance crête d'environ 200 kW, et une énergie de 25 nJ par impulsion.

Les impulsions de 120 fs ont un spectre de largeur environ égale à 3.3 THz, soit 7 nm. Cependant, en fonction de l'alignement de la cavité laser, le spectre peut varier d'un jour à l'autre, par exemple sur les bords du spectre. On obtient donc un spectre d'enveloppe tantôt gaussienne tantôt en sécante hyperbolique. La figure 6.9 (a) représente un spectre typique obtenu avec un spectromètre à réseau de la société *Ocean Optics*, et la figure 6.9 (b) la trace d'autocorrélation obtenue avec un autocorrélateur commercial *PulseCheck* de la société allemande *APE*. Comme expliqué au paragraphe C.3 du chapitre 2, dans le cas d'une impulsion gaussienne, la durée de l'impulsion est obtenue en divisant la largeur de la trace d'autocorrélation par $\sqrt{2}$. On vérifie bien que les impulsions sont limitées par transformée de Fourier à la sortie du laser.

La géométrie de la cavité laser n'a pas un axe optique linéaire, ce qui donne au faisceau laser un léger astigmatisme. Cette aberration a été compensée en utilisant un zoom composé de trois lentilles cylindriques, qui adapte la taille du faisceau dans les deux directions transverses.

B.3.2 Bruit du laser

Nous avons caractérisé les propriétés de bruit d'intensité du laser MIRA en utilisant une détection équilibrée. Pour cela on sépare le faisceau laser en deux grâce à une lame 50/50 ou un cube polariseur, puis on mesure l'intensité des deux voies à l'aide de deux photodétecteurs identiques. La somme des photocourants nous donne accès au bruit total en intensité du laser, et leur différence correspond au bruit quantique standard, dans la limite où les détecteurs sont identiques, ce qui n'est habituellement possible qu'avec une précision de 10^{-3} ou 10^{-4} soit un coefficient de réjection de 30 dB ou 40 dB. On a représenté sur la figure 6.10 ces deux spectres de bruit, pour des fréquences d'analyse de bruit entre 0 et 5 MHz. On a aussi représenté le bruit d'obscurité des photodétecteurs. On constate



(a) Intensité spectrale du laser MIRA enregistrée avec un spectromètre *Ocean Optics*. On constate la forme gaussienne du spectre, ainsi que des légères perturbations sur les côtés, dû à l'alignement imparfait du laser. On a mesuré dans ce cas un spectre de 7.6 nm de largeur à mi-hauteur.

(b) Trace d'autocorrélation en intensité mesurée avec un autocorrélateur *PulseCheck* de la société *APE*. La largeur de la trace est proportionnelle à la durée de l'impulsion, qui vaut dans ce cas environ 200 fs

Figure 6.9: Mesures des impulsions produites par notre laser MIRA dans le domaine spectral et dans le domaine temporel.

que pour des fréquences supérieures à 1.2 MHz, le bruit sur la somme est égal au bruit sur la différence, ce qui signifie que les fluctuations d'intensité du laser (somme) sont au bruit quantique standard (différence).

B.3.3 Cavité de filtrage et asservissement de l'offset de fréquence du laser

Pour diminuer les fluctuations du laser MIRA, et stabiliser l'alignement, nous avons voulu construire une cavité de filtrage, du même type que celles utilisées dans les expériences habituelles d'optique quantique avec des sources d'intensité constante. Les conditions nécessaires des caractéristiques de cette cavité étaient les suivantes, d'après la description donnée dans le paragraphe B.3 :

1. La longueur totale L de la cavité de filtrage doit être identique à la distance L_0 entre les impulsions du laser, soit presque 4 m dans notre cas.
2. On souhaite éliminer les fluctuations du faisceau laser à basse fréquence. La fonction de transfert de la cavité de filtrage a un profil lorentzien, dont la largeur correspond à la bande passante de la cavité. Cette bande passante B est l'inverse du temps de vie des photons dans la cavité. Elle s'exprime donc en fonction de la longueur totale L de la cavité et de sa finesse $\mathcal{F}$:

$$B = \frac{c}{L\mathcal{F}} \quad (6.7)$$

Comme la longueur de la cavité est fixée, la bande passante des cavités synchrones est uniquement déterminée par la finesse. Le SPOPO permet de réduire les fluctuations quantiques dans la limite de la bande passante de la cavité OPO. On doit donc disposer d'un faisceau dont les fluctuations sont au bruit quantique standard à des fréquences inférieures à cette bande passante. En d'autres termes, pour que la bande passante de l'OPO soit plus grande que la bande passante de la cavité de filtrage, la

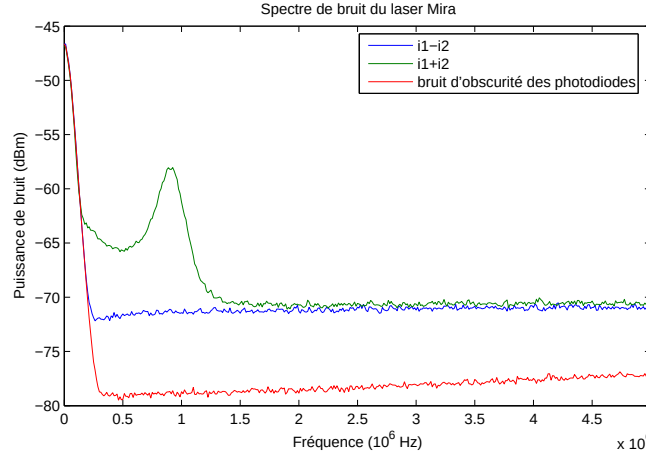


Figure 6.10: Spectres de bruit du laser MIRA enregistrés avec une détection balancée. La courbe rouge correspond au bruit d'obscurité des photodétecteurs, enregistré en l'absence de lumière. La courbe verte correspond aux fluctuations de la somme des deux photodétecteurs, et la courbe bleue aux fluctuations de la différence.

finesse de la cavité de filtrage doit être plus grande que la finesse de la cavité OPO. Notre OPO a une finesse entre 30 et 100, et d'après les propriétés de bruit de notre laser la cavité de filtrage doit avoir une finesse de 300 au moins, et donc une bande passante inférieure à 250 kHz.

3. La cavité de filtrage doit permettre la transmission d'un peigne de fréquence de largeur 3.3 THz. D'après les calculs de la section B.3, on peut déduire de cette valeur, les conditions nécessaires à la transmission du peigne dans une cavité de finesse $\mathcal{F} = 500$. Pour avoir une transmission totale de plus de 98 %, on peut prendre la condition simplifiée 2.95 qui s'écrit :

$$\eta = \frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega} \ll 0,04 \quad (6.8)$$

$$L - L_0 \ll 0.3 \mu\text{m} \quad (6.9)$$

$$\phi'' \ll 3 \text{ fs}^2 \quad (6.10)$$

Nous avons construit une telle cavité en anneau, en utilisant une géométrie en W, comme représenté sur la figure 6.11 : deux miroirs quasiment à 45° , un miroir de repli plan, et un miroir sphérique de fond de cavité de rayon de courbure $R = 5 \text{ m}$. La pièce centrale est une monture supportant les deux miroirs quasi à 45° d'entrée et de sortie de la cavité. L'angle entre ces deux miroirs a dû être calculé pour autoriser la résonance dans la cavité avec une longueur de 4 m environ. Le miroir de repli est positionné sur une cale piezoélectrique pour permettre de balayer la longueur de la cavité. Les miroirs d'entrée et de sortie ont un coefficient de réflexion en intensité $R = 99.4$, et la cavité a une finesse $\mathcal{F} = 500$. La dispersion des miroirs que nous avons achetés permet de satisfaire les conditions de l'équation 6.10. Une fois la cavité alignée, on balaye la longueur de la cavité pour observer les pics de transmission. Comme attendu pour cette valeur de finesse, seul un pic de transmission ou deux permet la transmission de plus de 50 % de la puissance injectée dans la cavité. Cependant, l'offset de fréquence ω_{ce} du laser n'est pas stable et donc la transmission maximale de la cavité fluctue sur des temps caractéristiques de l'ordre de 1 s.

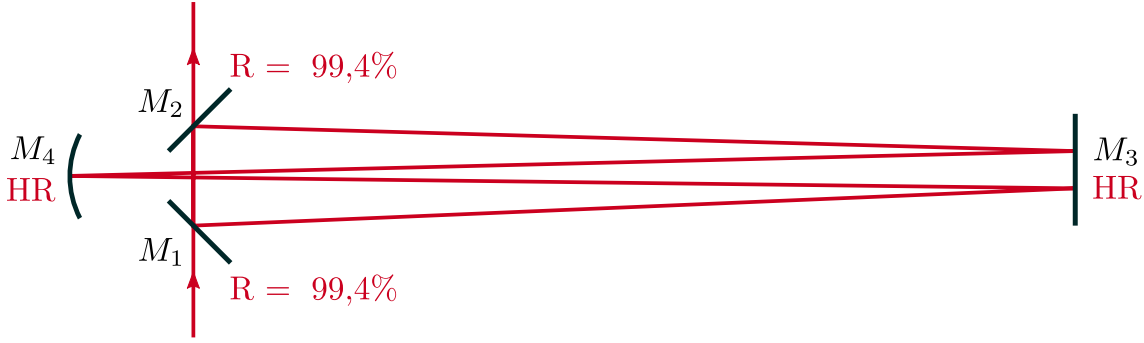


Figure 6.11: Schéma représentant la cavité de filtrage que nous avons construite, avec une géométrie repliée en W pour minimiser les longueurs.

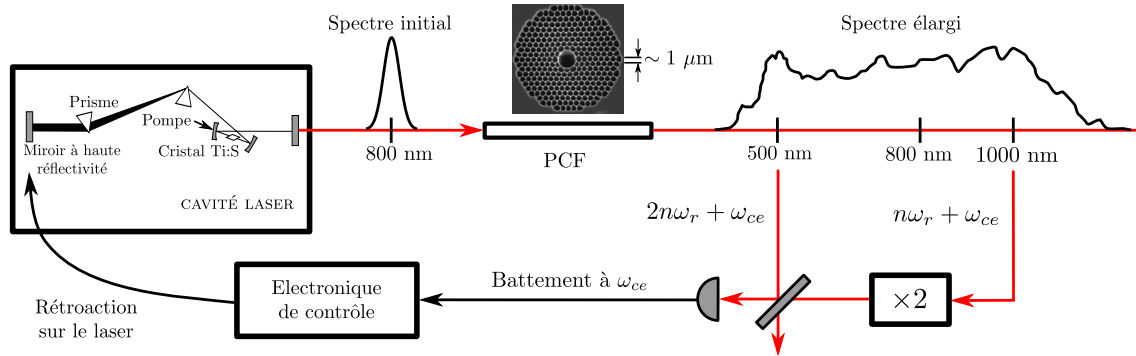


Figure 6.12: Principe de l'asservissement de la phase CEP : une fibre optique à cristaux photoniques élargit le spectre par auto-modulation de phase. On fait ensuite interférer la partie hautes fréquences du spectre avec la partie basse fréquence en utilisant le doublage de fréquence dans un cristal non-linéaire. L'interférence produit un batttement à la fréquence ω_{ce} .

Pour comprendre ce phénomène on peut se reporter à la figure 2.10 de la section B.3 du chapitre 2 : quand le désaccord $\eta = \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega}$ est nul, la transmission totale de la puissance injectée est possible. Par contre, quand $\eta \neq 0$ la transmission totale est impossible. Si ω_{ce} fluctue, il est donc logique que la puissance transmise fluctue, et il devient impossible d'utiliser une cavité de filtrage.

Asservissement de l'offset de fréquence du laser Pour corriger ce problème, il est possible d'asservir l'offset de fréquence ω_{ce} à une valeur quelconque souhaitée, de sorte que le désaccord η puisse être égal à 0. Nous avons donc commencé à monter un dispositif pour réaliser cet asservissement. Comme énoncé à la section B.1.2, l'offset de fréquence ω_{ce} , correspond dans le domaine temporel à une phase entre la porteuse et l'enveloppe des impulsions, qui augmente de $2\pi \frac{\omega_{ce}}{\Omega}$ à chaque impulsion. Pour cette raison l'asservissement de l'offset de fréquence est couramment appelé asservissement de la CEP pour *carrier-envelope phase* en anglais. Cette technique a été mise au point par les métrologistes [Jones 00] dans l'objectif d'utiliser les peignes de fréquences pour mesurer directement des fréquences optiques. Il est alors nécessaire d'asservir ou de mesurer les caractéristiques du peigne de fréquence : le taux de répétition, et l'offset de fréquence.

Le contrôle et l'asservissement de la CEP sont possibles depuis une dizaine d'année environ

[Telle 99, Dietrich 00, Jones 00], et ont rendu la mesure de fréquences optiques avec une précision extraordinaire de l'ordre de 10^{-15} [Udem 99, Diddams 00, Udem 02]. Cette technique, schématisée sur la figure 6.12, repose sur l'autoréférencement du spectre du peigne de fréquence, rendu possible par la mise au point de fibres à cristaux photoniques (PCF) permettant par automodulation de phase d'élargir grandement le spectre d'un peigne de fréquence au delà d'une octave, tout en gardant les mêmes valeurs de ω_{ce} et Ω . Il est ensuite possible de faire interférer la partie de haute fréquence du spectre avec la partie basse fréquence du spectre, que l'on a préalablement doublée en fréquence. On fait donc interférer les fréquences $\omega_{ce} + p\Omega$ avec $2(\omega_{ce} + q\Omega)$, ce qui crée un battement mesurable à la fréquence ω_{ce} . On peut ensuite comparer cette valeur à une référence, et l'asservir à une valeur fixe, par exemple en jouant sur un miroir de cavité du laser femto. Ce dispositif est actuellement en cours de réalisation sur notre expérience, et nous espérons qu'il rendra possible l'asservissement de la cavité de filtrage.

B.3.4 Doublage de fréquence dans un cristal de BiBO₃.

Nous avons utilisé un cristal de BiBO₃ acheté à la société chinoise *Crystech*, taillé pour l'accord de phase critique entre les longueurs d'onde centrales $\lambda = 800$ nm et $\lambda = 400$ nm pour effectuer le doublage de fréquence en simple passage, afin de créer le faisceau pompe du SPOPO. Ce type de cristal combine un grand coefficient non linéaire $\chi^{(2)}$ avec un seuil de dommage très haut identique à celui du KTP, ainsi qu'un fonctionnement à température ambiante. D'après [Ghotbi 04a], on a $d_{eff} = 3.2$ pmV⁻¹. Il est utilisé aujourd'hui dans de nombreux OPO femtosecondes [Ghotbi 06]. Une efficacité de doublage de plus de 50% en simple passage d'impulsions infra-rouge à 830 nm pour une puissance initiale de 1.6 W a été démontrée [Ghotbi 04b].

Dans notre expérience, nous utilisons un cristal de 500 μ m de longueur, traité anti-reflet autour de $\lambda = 800$ nm et $\lambda = 400$ nm, avec un coefficient de transmission $T > 99.9\%$, et nous avons réussi à créer un faisceau bleu de 800 mW à 397 nm avec une efficacité de doublage de l'ordre de 30%. Cependant, pour de fortes puissances, le profil spatial du faisceau doublé se dégrade, à cause d'effets thermiques dus à la forte focalisation dans le cristal. Cet effet limite la puissance du faisceau bleu que l'on peut utiliser comme pompe de l'OPO à environ 300 mW, ce qui se révèle largement suffisant.

On peut utiliser le spectromètre à réseau pour mesurer le profil spectral des impulsions bleues produites par doublage de fréquence². Un exemple de spectre est présenté sur la figure 6.13. On constate que la largeur à mi-hauteur du spectre n'est que de 3 nm, ce qui est plus faible que la largeur du spectre d'infrarouge mesurée en sortie du laser (7.6 nm). La différence est due au fait que la mesure se fait en longueur d'onde λ et non en fréquence ν .

2. Le spectromètre est initialement réglé pour fonctionnement à 795 nm, mais on peut utiliser le deuxième ordre de diffraction du réseau, qui diffracte une petite partie de la puissance injectée autour de 397 nm avec le même angle que le premier ordre de diffraction à 795 nm

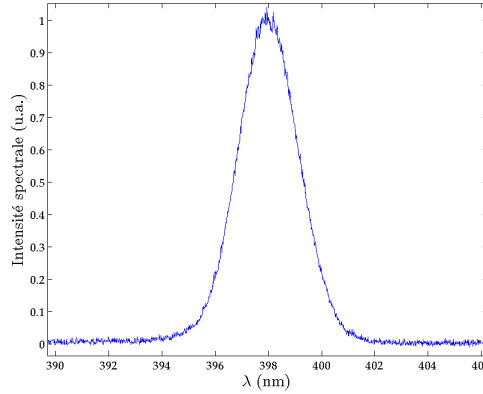


Figure 6.13: Intensité spectrale des impulsions bleues créées par doublage de fréquence dans le cristal de BiBO_3 , mesurée avec le spectromètre à réseau en utilisant le deuxième ordre de diffraction.

B.4 Construction de l'OPO pompé en modes synchrones

B.4.1 Géométrie de la cavité

Pour construire un SPOPO pompé avec nos impulsions doublées, il est nécessaire d'avoir une cavité dont la longueur totale L_0 correspond exactement à la distance entre les impulsions pompes, c'est-à-dire environ 4 m. Cette longueur est très grande, et représente la principale source d'instabilités expérimentales de cette expérience.

Nous avons choisi une géométrie linéaire croisée. La cavité, représentée sur la figure 6.14(a), est constituée de 2 miroirs sphériques proches avec un angle d'incidence faible, et deux miroirs plans plus éloignés en incidence normale. La taille du waist de la cavité dépend du rayon de courbure des miroirs et de la distance qui les sépare. Pour la calculer, on peut utiliser une version "dépliée" équivalente de la cavité, en remplaçant les deux miroirs sphériques de rayon de courbure R par deux lentilles de distance focale $f = \frac{R}{2}$, comme représenté sur la figure 6.14(b)

On considère une cavité symétrique et on note $2L_1$ la distance qui sépare les miroirs sphériques, et L_2 la distance entre les miroirs sphériques et les miroirs plans. On doit alors satisfaire la condition suivante :

$$L_1 + L_2 = \frac{L_0}{4} \quad (6.11)$$

La taille du waist peut être calculée en considérant que l'on doit avoir un waist au milieu des miroirs sphériques, et un waist au niveau des miroirs plans. On obtient ainsi une formule pour la longueur de Rayleigh z_R et la taille du waist w_0 au centre de la cavité. La figure 6.15 représente la valeur du waist w_0 de la cavité pour un miroir de rayon de courbure $R = 10$ cm, qui est la valeur que nous utilisons actuellement. On constate que la plage de stabilité de la cavité est très faible, de l'ordre de 3 mm pour L_1 .

Astigmatisme de la cavité La cavité OPO que nous avons construite n'a pas un axe optique linéaire à cause de l'angle d'incidence non nul sur les miroirs sphériques. Cet angle introduit de l'astigmatisme et rend les modes propres transverses de la cavité de tailles différentes dans les deux directions. L'importance de cet effet peut être évaluée

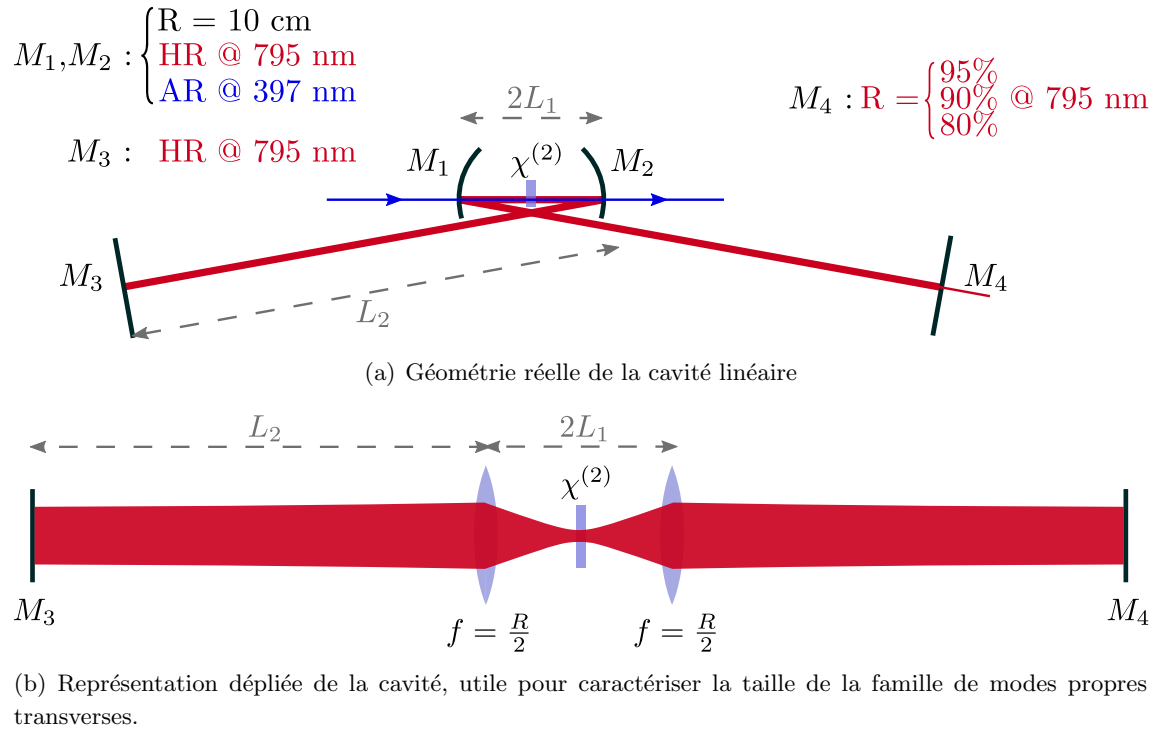


Figure 6.14: Représentations de la cavité SPOPO construite expérimentalement.

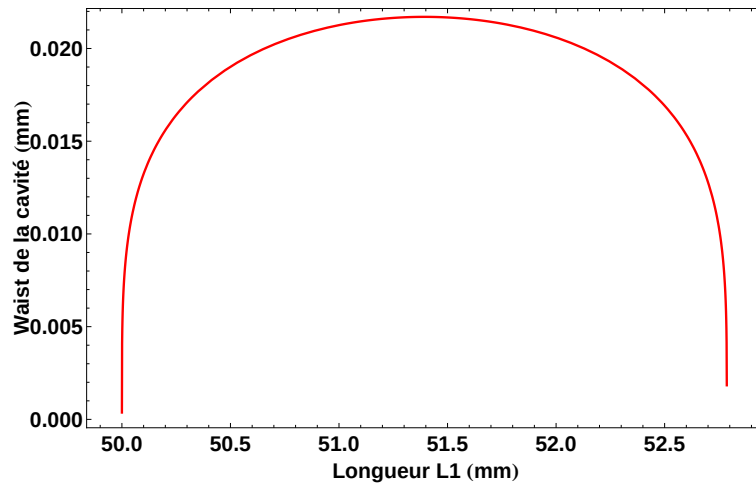


Figure 6.15: Valeur du waist de la cavité au centre des miroirs sphériques en fonction de la longueur L_1 qui est égale à la moitié de la distance entre les miroirs sphériques.

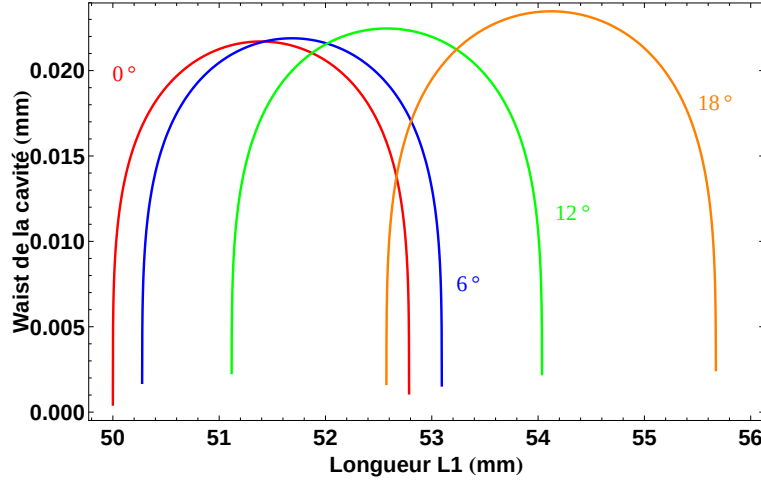


Figure 6.16: Valeur du waist de la cavité dans la direction horizontale pour différentes valeurs de l'angle d'incidence sur les miroirs sphériques. On constate que l'angle maximal autorisé est $\theta = 18^\circ$ environ. Pour un fonctionnement de la cavité non astigmatique au niveau du cristal, on doit choisir un point de fonctionnement tel que les tailles du waist dans les deux directions soient égales.

d'après le calcul de waist précédent : l'angle d'incidence, noté θ sur les miroirs sphériques est horizontal. On peut considérer l'effet de cet angle en modifiant légèrement la valeur du rayon de courbure R du miroir dans la direction horizontale³, qui vaut alors $\frac{R}{\cos \theta}$. Pour minimiser l'astigmatisme dans la cavité, il convient donc de minimiser l'angle θ . Les montures optiques sur lesquelles sont placés les miroirs ont une taille qui impose un angle θ minimum, qui dépend de la distance entre les miroirs sphériques. Augmenter cette distance ne peut se faire qu'en utilisant des miroirs de rayon de courbure plus grand, et ceci augmente la taille du waist propre. Il faut donc trouver un compromis entre taille du waist souhaitée, et effets d'astigmatisme dans la cavité. La figure 6.16 représente la valeur des waists pour différents angles d'incidence θ . On souhaite se placer dans une configuration pour laquelle le waist a la même taille dans les deux directions, c'est-à-dire sur un point d'intersection de deux courbes pour $\theta = 0$ d'une part et $\theta \neq 0$ d'autre part. Ceci implique que la longueur de la cavité soit de part et d'autre de la confocalité (valeur de la longueur qui donne un waist de taille maximale) pour les deux directions. On voit qu'avec $R = 10$ cm, on ne peut pas avoir un angle d'incidence supérieur à 18° .

Nous avons choisi d'utiliser des miroirs sphériques de rayon de courbure $R = 10$ cm, avec un angle $\theta = 4.1^\circ$ et une distance $L_1 = 51.5$ mm. Cela correspond à une taille de waist $w_0 = 21 \mu\text{m}$ identique dans les deux directions au niveau du cristal⁴. Ce choix implique une distance $L_2 = 93.1$ cm entre les miroirs sphériques et les miroirs plans. Enfin, pour minimiser les distances, on utilise un miroir de repli sur l'un des deux bras, de sorte que les deux longs bras soient situés du même côté. La figure 6.17 montre une photo du coeur

3. Une construction géométrique simple permet de se convaincre que la distance focale apparente d'une lentille est divisée par $\cos \theta$ pour un faisceau d'angle d'incidence θ par rapport à la lentille.

4. Même si le mode transverse résonant dans la cavité a une taille identique dans les deux directions au niveau du cristal, la cavité reste astigmatique, et le mode a des dimensions horizontale et verticale différentes au niveau des miroirs plan. Pour injecter la cavité, on traverse également le miroir sphérique avec un angle d'incidence non nul, on doit donc injecter un mode légèrement astigmatique.

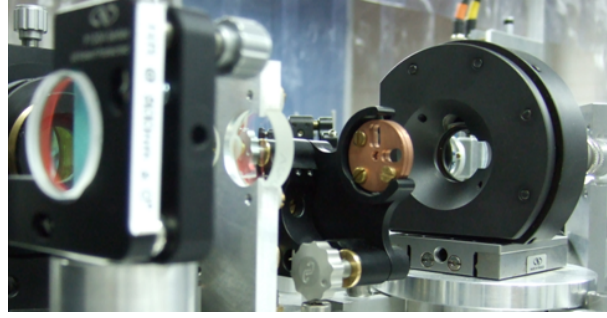


Figure 6.17: Vue rapprochée du coeur de l'OPO constitué des miroirs sphériques et du cristal non linéaire de BiBO_3 . Les montures du miroir sphérique et du cristal sont percées pour minimiser les angles dans la cavité.

de l'OPO, où l'on aperçoit les trous percés dans les montures pour minimiser les angles dans la cavité.

Miroirs de cavité Tous les miroirs de la cavité sont traités haute réflectivité (HR) pour les impulsions à 795 nm sauf un miroir plan, qui sert de miroir de couplage de l'OPO. Ce choix nous permet de minimiser les pertes en sortie de cavité sur l'état non-classique que produit l'OPO. La grande efficacité non linéaire attendue en régime femtoseconde (détaillé dans la section A) nous permet d'utiliser une cavité de très basse finesse, sans pour autant voir augmenter la puissance de pompe nécessaire pour atteindre le seuil d'oscillation de l'OPO. Nous avons utilisé plusieurs miroirs de couplage, de réflectivités $R = 95\%$, $R = 90\%$, et $R = 80\%$ pour des finesse respectivement de 120, 60 et 30. Nous avons choisi d'injecter la cavité par l'intermédiaire d'un miroir sphérique HR. Les deux miroirs sphériques sont traités anti-reflet à 397 nm, de sorte que le faisceau pompe traverse le cristal en simple passage. A nouveau, cette opération est possible car l'efficacité de l'interaction paramétrique est très grande dans notre régime impulsif. Un des deux miroirs plans est placé sur une platine de translation pour permettre de balayer la longueur de la cavité grossièrement, et sur une cale piezo-électrique pour le balayage fin et l'asservissement.

Comme pour la cavité de filtrage, on déduit de la finesse et du spectre du laser que l'on injecte dans la cavité les conditions sur les paramètres de la cavité pour que la résonance soit possible, conditions calculées à la section B.3 du chapitre 2. Dans le cas où l'on utilise le miroir de couplage avec $R = 80\%$, la finesse vaut $\mathcal{F} = 30$ et ces conditions sont :

$$\eta = \frac{\alpha'}{2\pi} + \frac{\omega_{ce}}{\Omega} < 1 \quad (6.12)$$

$$L - L_0 < 8 \mu\text{m} \quad (6.13)$$

$$\phi'' < 80 \text{ fs}^2 \quad (6.14)$$

La valeur de η est définie modulo 1, et donc la condition sur η ne pose pas problème. La condition sur la longueur de cavité nous assure une dizaine de résonances possibles. Enfin, la condition sur la dispersion ϕ'' dans la cavité ne doit pas être négligée car le cristal non-linéaire est un élément très dispersif. Pour un cristal de BiBO_3 , on a $k''(2\omega_0) = 164 \text{ fsmm}^{-1}$ (cf tableau 3.1 du chapitre 3). Sans dispositif de compensation de la dispersion intracavité,

on doit donc prendre un cristal de taille inférieure à $500\text{ }\mu\text{m}$, ce qui est la configuration expérimentale choisie.

Les propriétés de la cavité sont résumées dans le tableau suivant :

Longueur totale de la cavité	$L_{\text{tot}} = 3.94\text{ m}$
Rayon de courbure des miroirs sphériques	ROC = 100 mm
Distance entre les miroirs sphériques	$2L_1 = 103\text{ mm}$
Distance entre les miroirs sphériques et les miroirs plans	$L_2 = 931\text{ mm}$
Waist au centre de la cavité	$w_0 = 21\text{ }\mu\text{m}$
Réflectivité des miroirs M_1 , M_2 et M_3	R > 99.9 %
Réflectivité du miroir de couplage M_4	R = 95 % / 90 % / 80 %
Finesse de la cavité vide	$\mathcal{F} = 126 / 63 / 31$
Pertes utiles de la cavité (<i>escape efficiency</i>)	$\frac{\gamma_s}{\gamma} > 90\text{ \%} / 95\text{ \%} / 97\text{ \%}$
Bande passante	B = 600 kHz / 1.2 MHz / 2.4 MHz

B.4.2 Résonance du peigne de fréquence dans la cavité

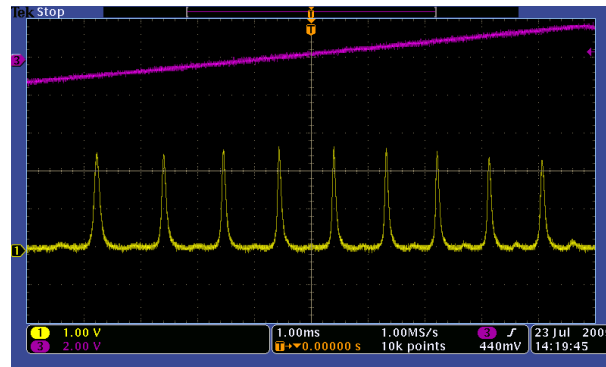
L'alignement d'une telle cavité est très délicat. La longueur totale de la cavité est de 4 m, avec deux bras de 1 m environ. Notre choix de minimiser l'angle θ à 4.1° avec une distance de $2L_1$ de 103 mm entre les miroirs sphériques, nous a conduit à devoir percer des trous dans les montures des miroirs que nous utilisons ainsi que dans la monture du cristal, comme on peut le voir sur la photo de la figure 6.17. Il est donc essentiel d'aligner les différents éléments optiques de la cavité de sorte que le mode gaussien TEM_{00} résonant dans la cavité n'intercepte pas le bord des miroirs et des trous.

Quand la cavité est alignée, on balaye la longueur à l'aide de la cale piezo-électrique. On ne voit alors pas forcément les pics de transmission. Il faut alors déplacer plus grossièrement la longueur à l'aide de la platine de translation. On voit alors apparaître les pics de transmission, comme représenté sur la figure 6.18. On peut mesurer expérimentalement que seulement une dizaine de pics de transmission permet la transmission du peigne sans déformation, ce qui correspond à la prédiction théorique de la section B.3 du chapitre 2.

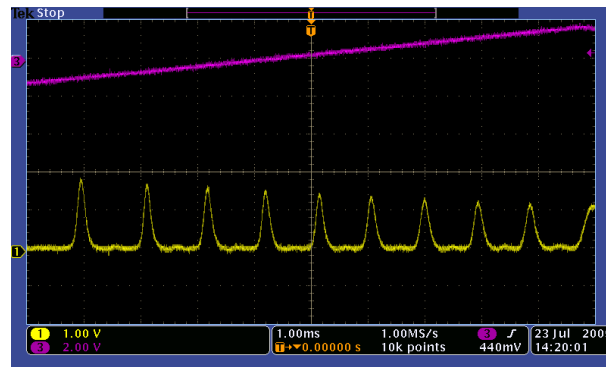
B.4.3 Asservissement de la cavité

Dans nos expériences, les cavités linéaires sont généralement asservies avec la méthode de Pound-Drever-Hall [Drever 83]. Cette technique nécessite une modulation de phase sur le faisceau injecté dans la cavité. On démodule ensuite le signal réfléchi ou transmis enregistré avec une photodiode à la fréquence de modulation pour créer un signal d'erreur d'asservissement de la cavité.

Nous avons initialement prévu d'utiliser un modulateur électro-optique pour générer la modulation de phase du faisceau. Cependant, ces modulateurs fonctionnent avec des cristaux très dispersifs ce qui pose problème pour les impulsions courtes. Nous avons mesuré expérimentalement une dispersion de $18\,000\text{ fs}^2$ dans un modulateur de phase de marque *New Focus* composé d'un cristal de Niobate de Lithium de 5 cm de long, ce qui ralonge



(a) Quand la longueur de la cavité est exactement égale à la distance entre impulsions, la transmission est maximale, puis se dégrade quand la longueur de la cavité s'incrémente d'une longueur d'onde



(b) Dès que la longueur de la cavité est d'une dizaine de microns trop longue, la forme des pics de transmission est dégradée.

Figure 6.18: Pics de transmission de la cavité OPO quand la longueur de la cavité est balayée à l'aide de la câle piezo-électrique autour de deux valeurs moyennes différentes.

les impulsions jusqu'à plus de 600 fs. Cette quantité de dispersion n'est pas facilement compensable par les techniques habituelles. Nous avons donc opté pour une modulation de phase à 5.4 MHz créée par le mouvement d'une cale piezoélectrique⁵ sur laquelle repose un miroir du chemin optique de l'injection dans la cavité. Le signal d'erreur nécessaire à l'asservissement de la longueur de cavité est obtenu en démodulant le signal mesuré en sortie de la cavité à la fréquence de modulation.

Parallèlement, nous avons également mis au point une nouvelle technique d'asservissement de cavité injectée par un peigne de fréquence. Le dispositif repose sur le léger déplacement du spectre pour des longueurs de cavité très proches des valeurs qui permettent la résonance, c'est-à-dire les longueurs $L = L_0 + n\lambda_0$. On mesure ce déplacement de la façon suivante : on disperse le spectre à l'aide d'un réseau ou d'un prisme, puis on envoie le faisceau sur une photodiode à deux zones, centrée au niveau de la fréquence centrale ω_0 . La différence des photocourants des deux zones du détecteur est un signal proportionnel au déplacement du spectre au premier ordre, et fournit donc un très bon signal d'erreur pour l'asservissement de la cavité⁶.

Les calculs numériques effectués par Olivier Pinel montrent la robustesse du signal d'erreur par rapport aux différentes caractéristiques de la cavité : longueur, effet d'offset de fréquence, dispersion. Les détails de ces calculs seront présentés dans sa thèse. L'amplitude du signal d'erreur dépend du pic de transmission sur lequel on se place. La figure 6.19 montre les courbes obtenues expérimentalement et la figure 6.20 les simulations numériques du signal d'erreur et des pics de transmission du peigne injecté dans la cavité avec et sans dispersion dans la cavité. On constate qu'autour du pic central pour lequel la longueur de la cavité est exactement égale à la distance entre impulsions, le signal d'erreur a une amplitude beaucoup plus faible, nulle en l'absence de dispersion dans la cavité. La dispersion a également pour effet de déformer la forme du signal d'erreur pour le rendre asymétrique. Dans notre cavité OPO de faible finesse, cela ne pose pas de problème car si la cavité est asservie sur le pic de résonance suivant, le peigne de fréquence est presque totalement transmis. Cette technique présente un avantage de simplicité par rapport à une technique de Pound-Drever-Hall, mais la stabilité de l'asservissement est réduite car la génération du signal d'erreur est soumise aux fluctuations à basse fréquence du laser, alors que la technique PDH permet d'utiliser une modulation à une fréquence beaucoup plus élevée.

B.4.4 Cristal de BiBO₃ et adaptation de mode de la pompe

On utilise un cristal de BiBO₃ dans la cavité OPO, similaire à celui utilisé pour le double de fréquence. On dispose de plusieurs cristaux de longueurs différentes, de 100 μm à 1 mm, traités anti-reflet sur les deux faces autour des longueurs d'onde $\lambda = 800 \text{ nm}$ et $\lambda = 400 \text{ nm}$, avec un coefficient de transmission $T > 99.9 \%$. La dispersion par unité de

5. En adaptant l'impédance électrique de la cale piezo-électrique à celle du reste du circuit (50 Ohm), on peut effectuer une modulation d'amplitude non négligeable sans utiliser une haute tension.

6. Un effet similaire a déjà été utilisé il y a plus de dix ans pour asservir des OPO femtosecondes [Butterworth 96] autour d'une certaine longueur d'onde moyenne, mais ne s'appliquait alors qu'à des cavités actives, pour lesquelles le champ sur lequel on asservit la cavité est créé à l'intérieur même de celle-ci. Nous avons montré que cette technique s'applique généralement dans tout type de cavité.

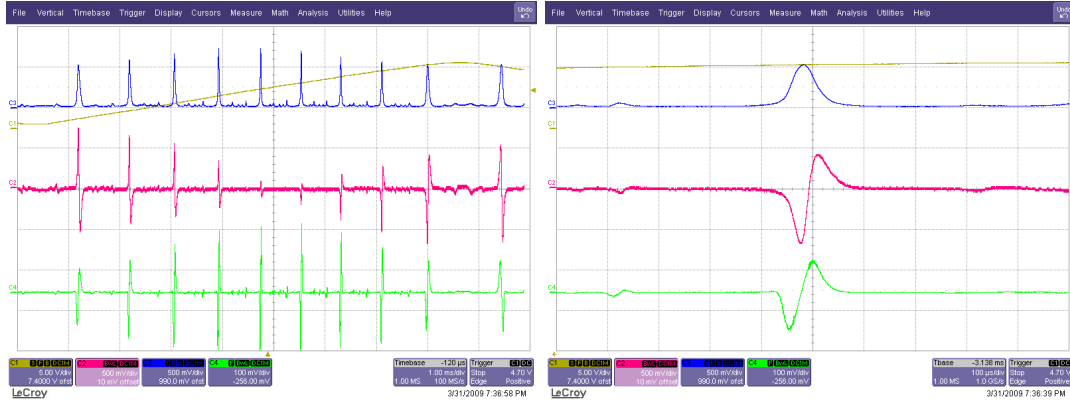


Figure 6.19: Observation expérimentale du signal d'erreur obtenu par décalage du spectre (courbe rouge au milieu), quand on balaye la longueur de la cavité. La courbe bleue en haut représente les pics de transmission, et la courbe verte (en bas) le signal d'erreur obtenu par la technique de Pound-Drever-Hall

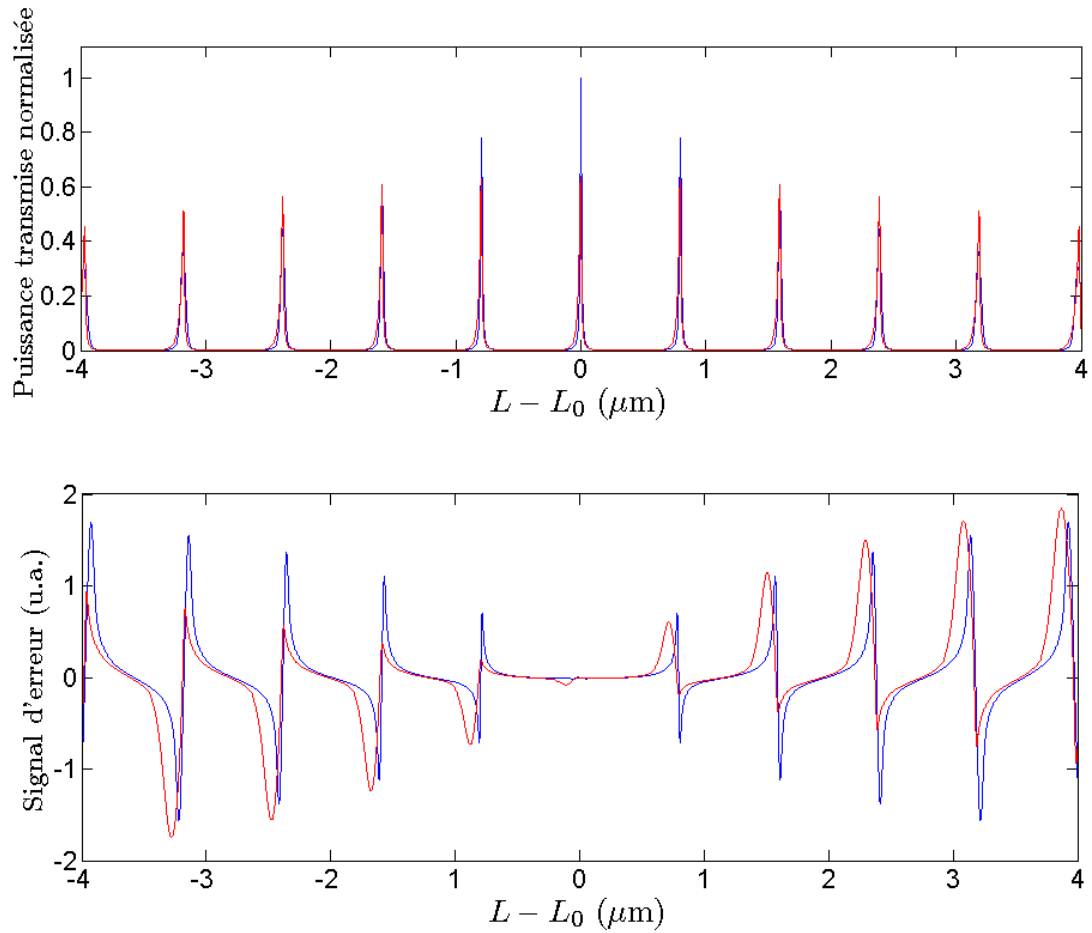


Figure 6.20: Pics de transmission (haut) et signal d'erreur (bas) correspondant générés grâce à la technique du moiré de fréquence calculés numériquement pour des cavités synchrones sans dispersion (courbe bleue) et en présence d'une dispersion de 100 fs^2 .

longueur de ce cristal calculée grâce aux coefficients de Sellmeier vaut $k_0'' = 164 \text{ fs}^2 \text{ mm}^{-1}$ pour la longueur d'onde $\lambda = 795 \text{ nm}$. D'après les conditions 6.14, on doit donc prendre un cristal de longueur maximale $l_c = 500 \mu\text{m}$ si on ne compense pas la dispersion dans la cavité avec un système de prismes par exemple. Nous avons choisi d'utiliser cette longueur de cristal, et n'avons pour l'instant pas de compensation de la dispersion dans la cavité.

On utilise un miroir dichroïque placé en amont de la cavité pour combiner le faisceau pompe du SPOPO au faisceau injecté. Le faisceau pompe, doublé en fréquence dans un cristal identique, n'est pas résonant dans la cavité, et on réalise son alignement en le superposant en sortie de la cavité au faisceau doublé dans le cristal de la cavité par le faisceau injecté. Pour optimiser le recouvrement, on aligne position transverse et direction de la pompe en champ proche et en champ lointain du cristal, à l'aide de combinaisons de lentilles.

Enfin, l'alignement de la pompe est optimisé grâce à l'amplification paramétrique sensible à la phase. Cette opération nécessite au préalable de superposer dans le cristal les impulsions pompe et signal injectées dans la cavité, il faut donc que les longueurs des chemins optiques des deux faisceaux soient égalisées avec une précision meilleure que la longueur des impulsions, soit $30 \mu\text{m}$ pour des impulsions de 100 fs . Pour cela, on utilise une ligne à retard composée de deux miroirs à 45° sur une platine de translation motorisée.

B.5 Amplification sensible à la phase sous le seuil d'oscillation

Un miroir placé sur le chemin optique du faisceau pompe est placé sur une cale piezo-électrique, ce qui permet de contrôler la phase relative du faisceau pompe et du signal injecté dans la cavité. Nous avons observé l'amplification sensible à la phase du peigne de fréquence injecté, comme dans le cas d'un OPO monomode. La figure 6.21 montre une trace d'oscilloscope d'amplification quand on balaye la phase relative. Nous avons observé un gain en amplification maximal d'environ 15 et un gain minimal en désamplification de 0,25 ce qui correspond exactement à la limite théorique.

Pour asservir la phase relative entre l'impulsion pompe et l'impulsion signal injectée, on procède avec des techniques similaires à ce qui se fait pour les OPO continus : on crée une modulation de phase sur le faisceau pompe à l'aide d'une cale piezo-électrique qui fait bouger un miroir du chemin optique à une fréquence de modulation de 3.8 MHz . L'interaction paramétrique couple cette modulation au faisceau résonant dans la cavité, et on récupère un signal d'erreur pour la phase relative en démodulant le faisceau en sortie de la cavité à la fréquence de modulation. On peut ainsi asservir la phase relative en régime d'amplification ou de désamplification.

Cette expérience est la première démonstration expérimentale de l'amplification sensible à la phase d'un peigne de fréquence à l'aide d'un SPOPO.

B.6 Seuil d'oscillation du SPOPO

Pour une puissance de pompe suffisante, on atteint expérimentalement le seuil d'oscillation de l'OPO. Pour une cavité de miroir de couplage $T = 5\%$ (finesse $\mathcal{F} = 30$), ce seuil est atteint avec une puissance moyenne d'environ 4 mW . Pour $T = 20\%$ (finesse

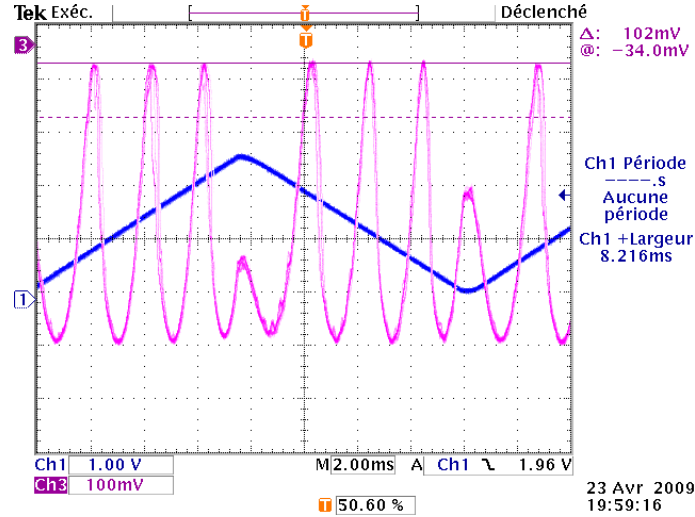


Figure 6.21: Amplification sensible à la phase du peigne de fréquence injecté dans la cavité, quand on balaye la phase relative entre la pompe et le signal injecté. Sur cette courbe, on observe un gain en amplification de 4,3 et un gain en désamplification de 0.25.

$\mathcal{F} = 120$), il est atteint avec une puissance de 32 mW. Ces valeurs sont exceptionnellement basses comparées aux valeurs des seuils obtenus pour des OPO pompés en continu⁷. Ce gain est évidemment dû à la très grande intensité crête obtenue avec une impulsion ultra-courte qui augmente l'efficacité des effets non-linéaires, ainsi que de la largeur de l'accord de phase autorisé par le cristal. C'est cette raison qui a initialement motivé le choix de cette expérience en régime femtoseconde : le seuil très bas de l'OPO rend possible l'utilisation de cavités de finesses très basses, ce qui permet de maximiser le rapport entre les pertes utiles dans l'OPO sur le miroir de couplage, avec les autres pertes dans la cavité dues notamment au cristal (escape efficiency). On s'attend donc à pouvoir obtenir des effets non-classiques importants.

Ces valeurs expérimentales peuvent être comparées aux valeurs théoriques attendues quand le SPOPO est décrit avec le modèle des supermodes. Comme énoncé à la section A.3, si l'on utilise des impulsions pompes de longueur 170 fs, le seuil attendu est de 37 mW pour une cavité de miroir de couplage $T = 20\%$ et de 2.3 mW pour une cavité avec le miroir de couplage $T = 5\%$. Les valeurs obtenues expérimentalement sont donc très proches des valeurs théoriques. La légère différence peut être attribuée à l'incertitude sur la durée des impulsions pompes. On peut toutefois en déduire que cette valeur confirme la validité du modèle théorique de diagonalisation de l'interaction paramétrique qui permet le calcul de la puissance de seuil.

B.7 Mise en forme des impulsions de l'oscillateur local

Pour mesurer les fluctuations quantiques en sortie de la cavité sur des modes correspondant aux supermodes du SPOPO calculés théoriquement à partir de la diagonalisation de la matrice de couplage spectrale (cf section 3.5), et pour ainsi mettre en évidence le caractère multimode de notre OPO, on doit disposer d'un oscillateur local dont le spectre

7. par exemple l'OPO décrit dans la section B du chapitre 4 a un seuil de 250 mW

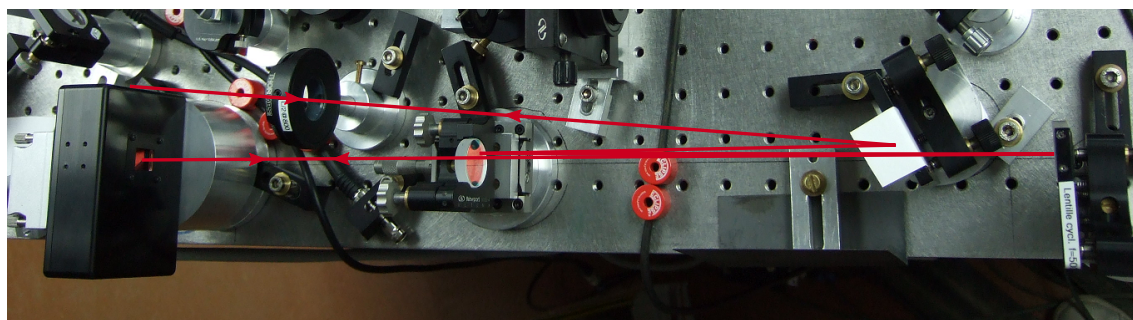


Figure 6.22: Dispositif de mise en forme d'impulsion construit pour notre expérience : un réseau diffracte le spectre sur un miroir de repli puis un miroir cylindrique, qui focalise chaque longueur d'onde sur un point du modulateur de phase spatiale en réflexion.

correspond à celui des supermodes. Pour cela, on peut mettre en forme l'oscillateur local à partir du faisceau laser produit par notre Mira. Il nous a donc fallu faire appel aux techniques de mise en forme d'impulsion, telles que décrites succinctement au paragraphe C.4.2 du chapitre 2. Nous avons donc commencé à mettre en place ce dispositif sur notre expérience.

Nous avons construit une ligne à dispersion nulle (ligne 4f) représentée sur la figure 6.22. Cette ligne permet d'étaler le spectre dans une direction, et de conserver le profil initial du faisceau dans l'autre direction. Nous avons utilisé un modulateur de phase spatiale (SLM) en réflexion de marque *Hamamatsu*, modèle LCOS X10468. Il possède 800×600 pixels de taille $50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$ avec 256 niveaux chacun (8 bits), pour une taille totale de $16 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$. Le SLM est contrôlé par un signal vidéo DVI produit par un ordinateur. La phase de chaque pixel est contrôlée en niveau de gris. Ce modulateur permet la modulation de phase seulement, mais on peut se servir des deux directions pour modifier l'amplitude et la phase spectrale des impulsions [Vaughan 05]. La ligne 4f est constituée d'un réseau de diffraction de marque *Richardson* avec 1200 traits par mm. Le réseau diffracte horizontalement le spectre sur une longueur $L = 50 \text{ cm}$, puis les différentes longueurs d'onde sont focalisées à l'aide d'un miroir cylindrique de rayon de courbure $R = 1 \text{ m}$ disposé verticalement. Le plan situé à $L = 50 \text{ cm}$ du miroir cylindrique contient donc les différentes longueurs d'onde du faisceau étalées horizontalement, et la direction verticale du faisceau est conservée. On place le modulateur de phase spatiale en réflexion dans ce plan.

Notre dispositif n'est à l'heure actuelle pas encore fonctionnel à cause d'un dysfonctionnement du modulateur de phase spatiale. Nous avons cependant testé la ligne à dispersion nulle, en plaçant des masques d'intensité dans le plan de Fourier, afin de modifier l'amplitude spectrale. Ces masques ont été créés sur un ordinateur puis imprimés sur un transparent. À titre d'exemple, considérons un masque correspondant à une succession de bandes sombres formant un réseau. Dans le domaine spectral, on coupe donc périodiquement des bandes du spectre. Dans le domaine temporel, cette mise en forme crée des répliques de l'impulsion initiale, retardées d'un temps qui dépend de la période des bandes du masque, et d'amplitudes dépendant de la largeur des bandes. On peut ensuite mesurer le spectre et la trace d'autocorrélation des impulsions à la sortie du dispositif de mise en forme. L'autocorrélation fournit un profil temporel pair dont on peut extraire l'amplitude et le

délai des répliques. Les résultats sont présentés sur la figure 6.23 pour trois masques de périodes et d'épaisseurs différentes. On observe comme attendu que le délai des répliques, respectivement de 2.3 ps, 0.95 ps et 0.6 ps est inversement proportionnel à la période spatiale du masque et donc à la période des cannelures dans le spectre respectivement de 1 nm, 2.2 nm et 3.5 nm. Sur le premier spectre de la figure 6.23, on observe de plus la limite de résolution de notre ligne 4f. A partir d'un réseau rectangulaire, on obtient un spectre dont les cannelures sont sinusoïdales. On en déduit une limite de résolution de l'ordre de 0.2 nm. Cette valeur est suffisante pour nos applications.

B.8 Etat comprimé d'un peigne de fréquence

Ne disposant pas encore d'un montage de mise en forme d'impulsions pour donner à l'oscillateur local le profil des supermodes et mettre en évidence le caractère multimode des états produits par le SPOPO sous le seuil d'oscillation, nous avons dans un premier temps monté un dispositif de détection balancée. On utilise seulement le faisceau en sortie de l'OPO, qui ne doit pas être un mode vide. Le faisceau est séparé en deux sur une lame séparatrice 50/50 puis envoyé sur deux détecteurs. La somme des deux photocourants correspond aux fluctuations d'intensité du faisceau, alors que la différence correspond au niveau du bruit quantique standard d'un faisceau de cette intensité moyenne. On peut donc seulement mesurer les fluctuations de la quadrature d'amplitude du faisceau avec ce dispositif.

Ce type de mesure nécessite une plus grande stabilité de l'asservissement de la phase relative que la détection homodyne car on ne peut détecter que la quadrature d'amplitude, alors qu'une détection homodyne permet la mesure de toutes les quadratures. Il est de plus nécessaire d'adapter la puissance du faisceau à mesurer aux photodétecteurs, dans un régime où la puissance est suffisante pour que le signal haute fréquence détecté soit suffisamment en dehors du bruit d'obscurité des détecteurs, mais pas trop grande pour ne pas saturer les circuits d'amplification des photodétecteurs notamment à cause du signal enregistré à la fréquence du taux de répétition du laser. Enfin, la puissance du faisceau doit également être suffisante pour un fonctionnement optimal des asservissements. Ces remarques nous ont conduits à développer de nouveaux circuits d'amplification des photodétecteurs.

On asservit la cavité, et la phase relative entre l'injection et la pompe en régime de désamplification, pour que ce soit la quadrature d'amplitude du faisceau résonant dans la cavité qui soit comprimée. L'asservissement de phase relative doit être suffisamment stable pour pouvoir enregistrer successivement la somme et la différence des photocourants avec les mêmes niveaux de puissance dans la cavité. Avec ce dispositif, nous avons mesuré une réduction de bruit de 1.1 dB sur le faisceau en sortie de la cavité, pour des fréquences d'analyse de bruit à partir de 1.5 MHz. Cette limite est imposée par le fait qu'en dessous de cette fréquence, les fluctuations d'intensité du laser sont supérieures au bruit quantique standard (cf figure 6.10). La courbe est présentée sur la figure 6.24. La finesse de la cavité était alors $\mathcal{F} = 30$ et la bande passante de la cavité égale à 2.4 MHz, ce qui est cohérent avec les observations expérimentales.

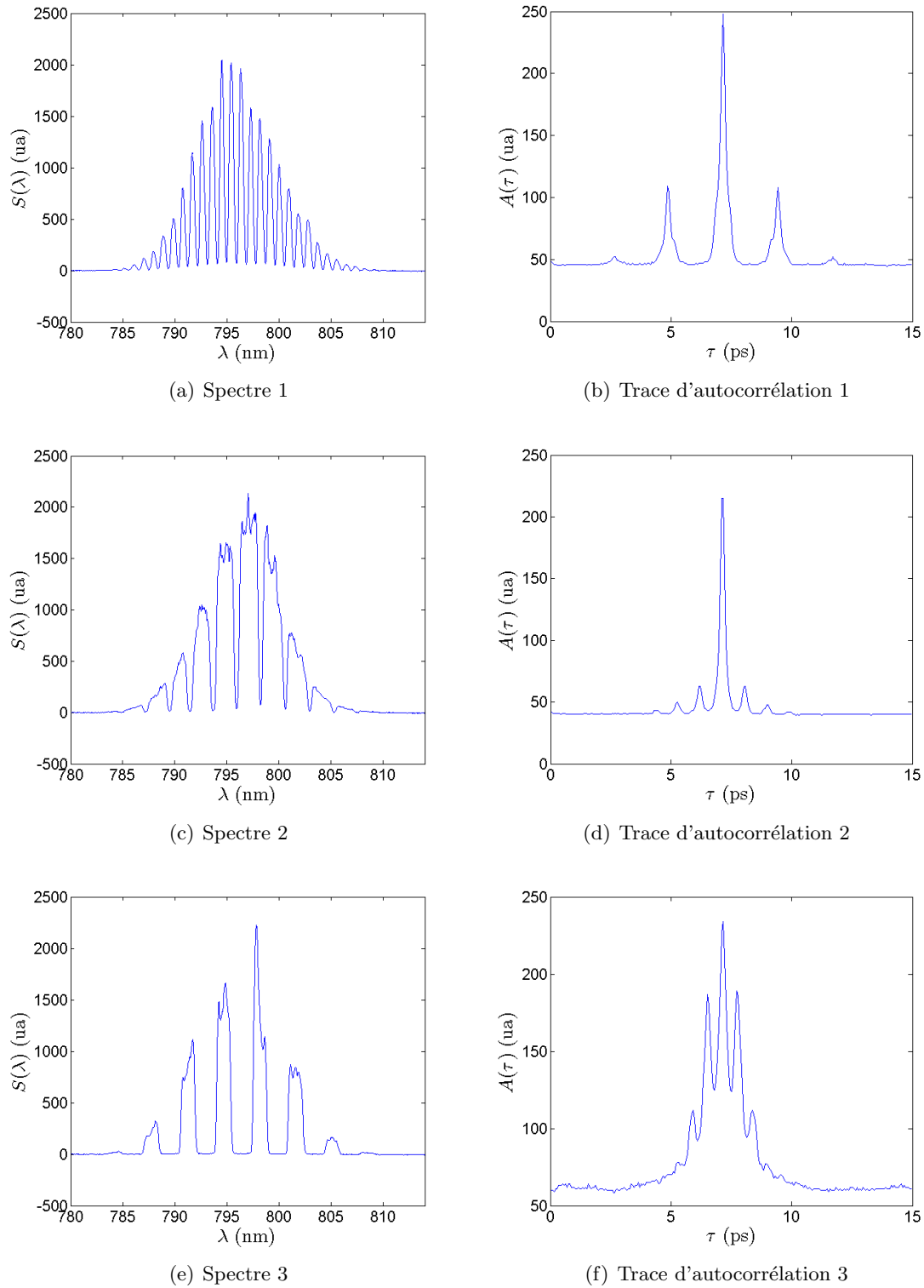


Figure 6.23: Spectres et traces d'autocorrélation des impulsions en sortie du dispositif de mise en forme avec des masques d'intensité.

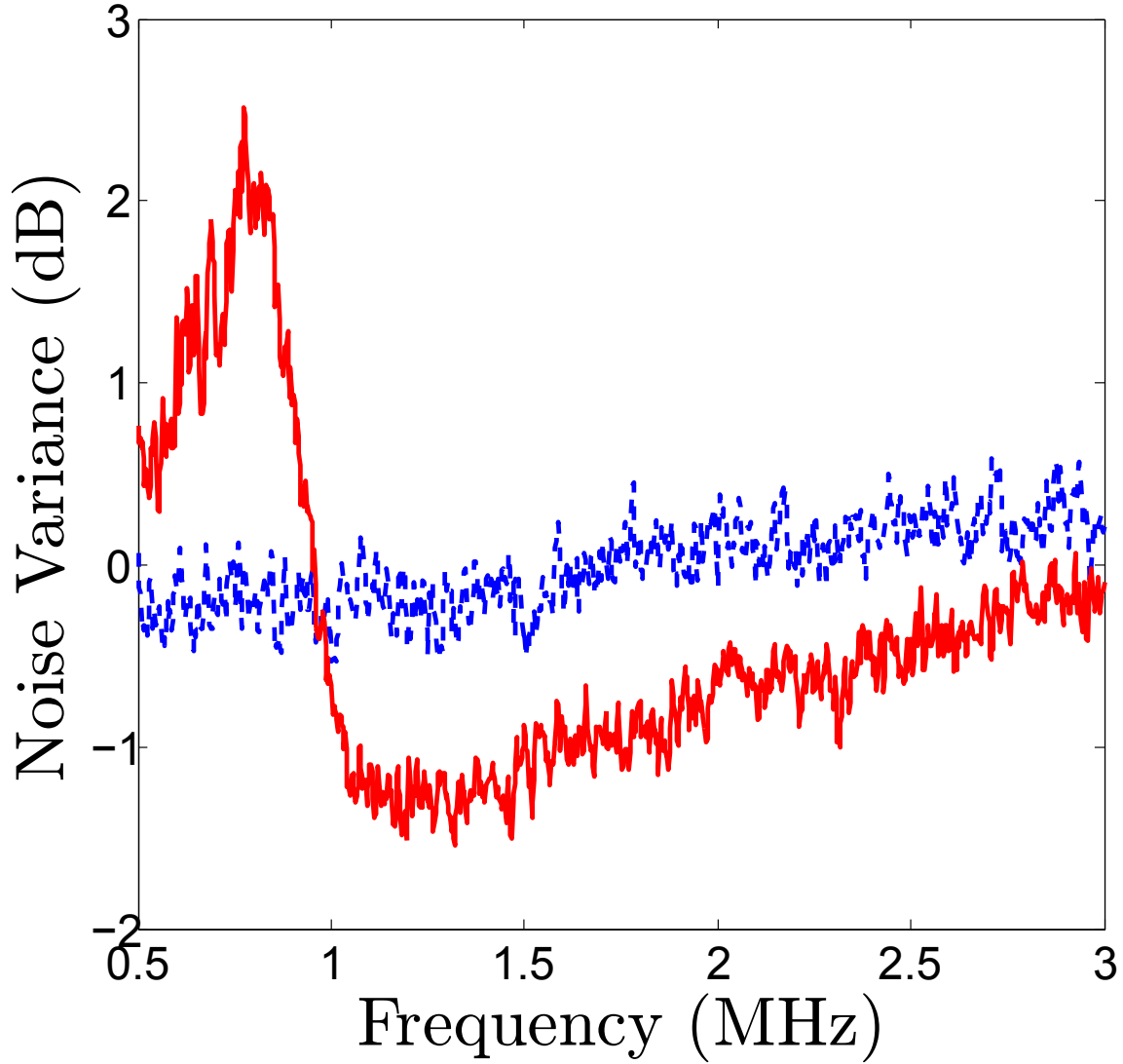


Figure 6.24: Réduction de bruit mesurée avec une détection balancée en sorti du SPOPO : la courbe bleue représente le bruit total du faisceau, et la courbe rouge le bruit quantique standard. On a donc une réduction de bruit de 1.1 dB à partir d'une fréquence d'analyse de 1 MHz.

Ces résultats préliminaires constituent la première démonstration expérimentale de réduction de bruit sur un peigne de fréquence à l'aide d'un OPO pompé en modes synchrones. Ce résultat est encore préliminaire, et pourra vraisemblablement être amélioré dans un futur proche, grâce au dispositif de détection homodyne.

B.9 Conclusion

Cette jeune expérience d'oscillateur paramétrique optique pompé en modes synchrones a été conçue initialement sur le modèle des expériences historiques d'optique quantique avec des OPO, et en utilisant les résultats théoriques obtenus dans notre groupe. Plusieurs éléments expérimentaux restent à consolider : la cavité de filtrage qui nécessite l'asservissement de la phase relative enveloppe porteuse, la compensation de la dispersion à l'intérieur de la cavité OPO, le façonneur d'impulsions pour la détection homodyne. Mal-

gré l'imperfection de ces différents éléments, les premiers résultats d'optique quantique ont vu le jour, et sont prometteurs quant à la capacité du dispositif à produire des états quantiques exotiques. Nous avons fourni la première démonstration expérimentale d'amplification sensible à la phase et de réduction de bruit d'un peigne de fréquence à l'aide d'un SPOPO sous son seuil d'oscillation.

L'expérience est désormais associée au projet de métrologie quantique visant à atteindre la limite quantique fondamentale d'une mesure de temps. Les axes de recherche se sont donc multipliés autour de cette expérience.

Conclusion et perspectives

Les états non-classiques de la lumière sont aujourd'hui devenus une ressource expérimentale pour l'optique quantique. Leur utilisation dépasse la simple démonstration du caractère non-classique de la lumière. La complexité croissante de ces états va de pair avec leurs applications dans les systèmes réels. C'est ce qui motive l'étude des états non-classiques multimodes de la lumière du groupe d'optique quantique du Laboratoire Kastler Brossel. La spécificité de ce groupe est d'approcher conjointement l'aspect théorique et expérimental de ce domaine de recherche. Ce travail de thèse fait suite aux travaux de Laurent Lopez sur les OPO en cavités dégénérées et l'amplification sans bruit d'images, et à ceux de Giuseppe Patera sur les propriétés non-classiques de l'OPO pompé en modes synchrones, et les avancées sont à la fois théoriques et expérimentales.

Dans ce manuscrit de thèse, nous nous sommes particulièrement intéressés aux degrés de liberté transverse et longitudinal d'un faisceau laser, dans le cas particulier des images et des impulsions courtes. Une étude de la résonance en cavité d'images ou d'impulsions, ainsi qu'une approche théorique de la conversion paramétrique multimode nous ont permis de dresser un modèle général permettant de décrire le comportement des OPO multimodes. À un changement de base près, un OPO multimode peut toujours être décrit comme une assemblée d'OPO monomodes indépendants, dont le nombre dépend des paramètres de la pompe et du cristal. En modifiant les paramètres de la pompe de l'OPO et du cristal non-linéaire, on peut transformer le profil de ces modes propres et leur réduction de bruit associée. La variété des états non-classiques accessibles est donc infinie et les applications sont prometteuses. Le calcul quantique à l'aide de *cluster-states* nécessite des états non-classiques multimodes sur un grand nombre de modes. Actuellement, les états les plus complexes sont créés à l'aide de plusieurs OPO dont on mélange les champs sortant à l'aide de lames séparatrices. Pour faciliter l'extension à des dimensions supérieures (*scalability*), on peut imaginer créer ces états à l'aide d'OPO multimodes dont on choisit les paramètres pour rendre les mesures plus accessibles. En ce qui concerne les mesures de très grande sensibilité, une autre partie de notre groupe s'intéresse à l'optimisation de l'extraction d'une information à partir d'un faisceau. On isole le mode du champ contenant l'information correspondant à une mesure. On peut ensuite améliorer la limite de sensibilité de la mesure en utilisant un état non-classique dans ce mode particulier. À nouveau, la génération d'un état non-classique dans un mode quelconque est envisageable à l'aide d'un OPO dont on adapte les propriétés.

Au niveau expérimental, cette thèse s'est appuyée sur deux montages. On a pu béné-

ficier de toutes les ressources matérielles de l'expérience d'imagerie menée dans le groupe depuis plus de dix ans, ainsi que de l'expertise en la matière des expérimentateurs succésifs. Nous avons donc mené sur ce montage plusieurs expériences d'imagerie.

En utilisant une cavité dégénérée pour deux modes transverses orthogonaux, nous avons confirmé les prédictions théoriques de l'article théorique de Navarrete-Benlloch *et al.* [Navarrete-Benlloch 08] qui prédisaient une réduction de bruit au dessus du seuil sur le mode résonant dans la cavité et orthogonal au mode émis. Les contraintes expérimentales nous ont écarté de la configuration d'origine, et nous avons fait fonctionner l'OPO au dessus du seuil avec une oscillation sur un mode transverse différent. Nous avons ainsi créé et caractérisé un état non-classique trimode produit par un OPO au dessus du seuil, c'est-à-dire à un point de fonctionnement où les champs sont a priori bruyants : un mode du champ porte l'énergie du faisceau et un mode orthogonal possède des fluctuations réduites. Ce résultat nouveau permet d'envisager des expériences utilisant d'autres OPO multimodes au dessus du seuil pour générer des états non-classiques multimodes. Pour optimiser le fonctionnement au dessus du seuil de cet OPO, nous avons été amenés à développer un nouveau type d'asservissement de la phase relative entre la pompe de l'OPO et le signal injecté, qui constitue également une technique dont d'autres expériences pourraient profiter, dans d'autres contextes où il est nécessaire de faire interférer deux champs de longueurs d'onde différentes.

Nous avons également mené des expériences autour d'une cavité auto-imageante en géométrie linéaire. En démontrant la transmission et le doublage de fréquence d'images simples, nous avons pu évaluer qualitativement le nombre de modes résonants dans la cavité, et calculer la bande passante spatiale du dispositif. Celle-ci correspond exactement à la valeur attendue, calculée avec le modèle théorique du doublage de fréquence d'images développé dans cette thèse. Cette expérience constitue une démonstration expérimentale de ce modèle et permet d'obtenir la largeur caractéristique de cohérence des effets non-linéaires dans ce cristal non-linéaire. Ce résultat prouve également que la dégénérescence de la cavité auto-imageante que nous avons utilisée est suffisante et ne constitue pas le facteur limitant dans le cas des images complexes. Il apparait donc légitime d'utiliser une telle cavité pour améliorer l'efficacité du doublage par rapport au cas du simple passage du faisceau fondamental dans le cristal.

Enfin, le montage d'imagerie a été utilisé pour une expérience autour d'un OPO en cavité auto-imageante. Cette configuration correspond exactement au cas étudié théoriquement dans cette thèse. Cette expérience s'est avérée très délicate. Un premier montage utilise un cristal de LiNbO_3 , et est optimisé pour l'amplification d'image. Ce dispositif n'a permis l'amplification sensible à la phase que d'images de profil transverse simple, à cause des effets thermiques dus à l'absorption du champ pompe dans le cristal. Une deuxième configuration utilise un cristal de PPKTP qui possède un coefficient non-linéaire beaucoup plus grand, et limite donc la puissance de pompe nécessaire pour s'approcher du seuil de l'OPO. En se plaçant dans une configuration moins ambitieuse pour laquelle le nombre de modes est réduit, nous avons mis en évidence un état non-classique tri-mode pour trois modes transverses, mais avec de faibles réduction de bruit. La compétition entre les effets thermiques et le nombre de modes résonants dans la cavité impose une limite à cette expérience, qui ne pourra être améliorée que par l'utilisation de cristaux non-linéaires plus performants. Cette expérience montre toutefois la capacité des OPO multimodes à pro-

duire une réduction de bruit sur plusieurs modes orthogonaux.

Parallèlement, une nouvelle expérience a été mise en place, autour d'un OPO pompé en modes synchrones par un train d'impulsions femtosecondes produits par un laser à verrouillage de modes. Pour monter cette expérience *ex nihilo*, nous avons utilisé les techniques expérimentales usuelles en optique quantique, ainsi que les résultats théoriques obtenus dans le groupe. Nous avons dû de plus nous intéresser à de nouvelles techniques propres aux expérimentateurs en optique des impulsions femtosecondes, notamment pour la mise en forme des impulsions. En trois ans, cette expérience a montré ses premiers résultats prometteurs pour son avenir. L'OPO fonctionne avec un seuil bas, qui confirme les prédictions du modèle théorique. L'amplification sensible à la phase d'un peigne de fréquence injecté est possible et conduit à un état présentant une réduction de bruit de 20 % sous le bruit quantique standard. La mise en place d'une détection homodyne permettra vraisemblablement d'améliorer cette valeur, et pourra prouver le caractère multimode s'il est couplé à un dispositif de mise en forme d'impulsions pour l'oscillateur local.

Signalons enfin qu'un nouvel axe de recherche très prometteur s'est développé autour de cette expérience. Il s'agit d'utiliser un peigne de fréquence pour comparer avec une très grande précision les temps d'arrivée de trains d'impulsions courtes, par exemple pour synchroniser les horloges de deux satellites. Une détection homodyne associée à un système de mise en forme d'impulsions permettrait d'atteindre la limite quantique standard de cette mesure, qui se situe autour de quelques dizaines de yoctosecondes (10^{-23} s) pour des valeurs expérimentales réalistes. On peut montrer théoriquement [Lamine 08] que l'on peut utiliser les peignes de fréquences non-classiques du type de ceux produits par notre SPOPO pour améliorer plus encore cette limite. Cette jeune expérience d'optique quantique est promise à un bel avenir.

Annexe

A Calcul du doublage de fréquence d'une image

On développe ici le calcul du profil transverse d'une image doublée. Pour cela, en utilisant les notations du chapitre 3, on doit résoudre l'équation de propagation suivante :

$$\Delta_{\perp} A(\boldsymbol{\rho}, z, 2\omega_0) + 2ik(2\omega_0) \frac{\partial A}{\partial z}(\boldsymbol{\rho}, z, 2\omega_0) = -\frac{4\omega_0^2}{c^2} \chi^{(2)} A(\boldsymbol{\rho}, z, \omega_0)^2 e^{i\Delta k z} \quad (\text{A-1})$$

Pour résoudre cette équation, on peut utiliser le propagateur de Fresnel. Cette fonction introduite à la section A.3 permet de calculer l'effet de la propagation sur une image. Si $A(\boldsymbol{\rho}, z_0)$ représente l'image dans un plan z_0 , l'image $A(\boldsymbol{\rho}, z_1)$ dans le plan z_1 est donnée par :

$$A(\boldsymbol{\rho}, z_1) = -\frac{ik}{2\pi(z_1 - z_0)} \int d\boldsymbol{\rho}_1 A(\boldsymbol{\rho}_1, z_0) e^{ik \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|^2}{2(z_1 - z_0)}} \quad (\text{A-2})$$

Notons $A(\boldsymbol{\rho}, z)$ l'amplitude du champ de fréquence fondamentale ω_0 , et $B(\boldsymbol{\rho}, z)$ l'amplitude du champ de fréquence double $2\omega_0$. $A(\boldsymbol{\rho}) = A(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$ et $B(\boldsymbol{\rho}) = B(\boldsymbol{\rho}, z = 0)$ représentent les champs dans le plan central du cristal.

On peut calculer l'image de fréquence double en additionnant le champ créé par doublage de fréquence sur toute la longueur du cristal, et en tenant compte de la diffraction. Si on se place en champ proche du plan central du cristal $z = 0$, l'image de fréquence double s'écrit donc :

$$B(\boldsymbol{\rho}) = i\zeta \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} dz \left[-\frac{ik_{2\omega_0}}{2\pi z} \int d\boldsymbol{\rho}_1 [A(\boldsymbol{\rho}_1, z)]^2 e^{-ik_{2\omega_0} \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|^2}{2z}} \right] \quad (\text{A-3})$$

avec $\zeta = \frac{\omega_0 \chi^{(2)}}{n(2\omega_0)c}$. Cette équation est une forme intégrale de l'équation d'évolution du champ de fréquence double A-1. On remplace alors dans cette intégrale le champ fondamental $A(\boldsymbol{\rho}_1, z)$ par sa valeur au centre du cristal en négligeant la variation due à l'interaction non-linéaire, donc à l'aide uniquement du propagateur. On suppose de plus que la condition d'accord de phase est satisfaite, c'est-à-dire $k_{2\omega_0} = 2k_{\omega_0}$. On note dans la suite $k_0 = k_{\omega_0}$.

$$B(\boldsymbol{\rho}) = -\zeta \frac{k_0^3}{4\pi^3} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z^3} \iiint d\boldsymbol{\rho}_1 d\boldsymbol{\rho}_2 d\boldsymbol{\rho}_3 A(\boldsymbol{\rho}_2) A(\boldsymbol{\rho}_3) e^{ik_0 \frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|^2}{2z}} e^{ik_0 \frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_3|^2}{2z}} e^{-ik_0 \frac{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1|^2}{z}} \quad (\text{A-4})$$

Le développement des trois termes d'exponentielles complexes conduit à

$$e^{ik_0 \frac{\rho_2^2 + \rho_3^2 - 2\rho^2}{2z}} e^{-ik_0 \frac{\rho_1 \cdot (\rho_2 + \rho_3 - 2\rho)}{z}}$$

L'intégrale sur ρ_1 conduit donc à la fonction de dirac $\left(\frac{2z\pi}{k_0}\right)^2 \delta\left(\rho - \frac{\rho_2 + \rho_3}{2}\right)$. Il reste finalement :

$$B(\rho) = -\zeta \frac{k_0}{\pi} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z} \int d\rho_3 A(2\rho - \rho_3) A(\rho_3) e^{ik_0 \frac{|\rho - \rho_3|^2}{z}} \quad (\text{A-5})$$

$$= -\zeta \frac{k_0}{\pi} \int d\rho' A(\rho - \rho') A(\rho + \rho') \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z} e^{ik_0 \frac{|\rho'|^2}{z}} \quad (\text{A-6})$$

L'intégrale sur z peut être calculée à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{z}$, et fait apparaître la fonction sinus intégrale, qui est la primitive du sinus cardinal qui s'annule en 0 :

$$\int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z} e^{ik_0 \frac{|\rho'|^2}{z}} = 2i \left[\frac{\pi}{2} - \text{Sine} \left(\frac{2k_0 \rho'^2}{l_c} \right) \right] \quad (\text{A-7})$$

$$\text{Sine}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du \quad (\text{A-8})$$

On a donc finalement :

$$B(\rho) = \frac{2i\zeta k_0}{\pi} \int d\rho' A(\rho + \rho') A(\rho - \rho') \Delta(\rho') \quad (\text{A-9})$$

$$\Delta(\rho') = \frac{\pi}{2} - \text{Sine} \left(\frac{|\rho'|^2}{l_{coh}^2} \right) \quad (\text{A-10})$$

$$l_{coh} = \sqrt{\frac{\lambda_0 l_c}{4\pi n(\omega_0)}} \quad (\text{A-11})$$

B Calcul du hamiltonien de la conversion paramétrique dans un cristal d'épaisseur non nulle

Cette annexe développe le calcul complet du hamiltonien de la conversion paramétrique dans un cristal d'épaisseur non-négligeable. Le calcul est très similaire à celui de l'annexe précédente.

On exprime à présent les champs $A_p(\boldsymbol{\rho}, z)$ et $\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}, z)$ en fonction de leur valeur au centre du cristal en utilisant à nouveau le propagateur de Fresnel :

$$A_p(\boldsymbol{\rho}, z) = -\frac{ik_p}{2\pi z} \int d\boldsymbol{\rho}_1 A_p(\boldsymbol{\rho}_1, 0) e^{ik_p \frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1|^2}{2z}} \quad (\text{B-1})$$

$$\hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}, z) = -\frac{ik_s}{2\pi z} \int d\boldsymbol{\rho}_2 \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_2, 0) e^{-ik_s \frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_2|^2}{2z}} \quad (\text{B-2})$$

Or l'accord de phase nous permet d'écrire $k_p = 2k_s$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{gk_s^3}{4\pi^3 l_c} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z^3} \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\rho}_1 \int d\boldsymbol{\rho}_2 \int d\boldsymbol{\rho}_3 A_p(\boldsymbol{\rho}_1, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_3, 0) \\ & \times e^{ik_s \frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1|^2}{z}} e^{-ik_s \frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_2|^2}{2z}} e^{-ik_s \frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_3|^2}{2z}} \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

Les termes $|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|^2$ peuvent être développés pour donner :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{gk_s^3}{4\pi^3 l_c} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z^3} \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\rho}_1 \int d\boldsymbol{\rho}_2 \int d\boldsymbol{\rho}_3 A_p(\boldsymbol{\rho}_1, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_3, 0) \\ & \times e^{ik_s \frac{(2\rho^2 + 2\rho_1^2 - 4\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_1 - \rho^2 - \rho_2^2 + 2\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_2 - \rho^2 - \rho_3^2 + 2\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_3)}{2z}} \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{gk_s^3}{4\pi^3 l_c} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z^3} \int d\boldsymbol{\rho}_1 \int d\boldsymbol{\rho}_2 \int d\boldsymbol{\rho}_3 A_p(\boldsymbol{\rho}_1, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_3, 0) \\ & \times e^{ik_s \frac{(2\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2)}{2z}} \int d\boldsymbol{\rho} e^{-2ik_s \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - (\frac{\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_3}{2}))}{z}} \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

L'intégrale sur $\boldsymbol{\rho}$ se simplifie pour donner $\left(\frac{z\pi}{k_s}\right)^2 \delta\left(\boldsymbol{\rho}_1 - \frac{\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_3}{2}\right)$. Finalement, il reste :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{gk_s}{4\pi l_c} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z} \int d\boldsymbol{\rho}_1 \int d\boldsymbol{\rho}_2 \int d\boldsymbol{\rho}_3 A_p(\boldsymbol{\rho}_1, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_3, 0) \\ & \times e^{ik_s \frac{(2\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2)}{2z}} \delta\left(\boldsymbol{\rho}_1 - \frac{\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_3}{2}\right) \\ = & -\frac{gk_s}{4\pi l_c} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z} \int d\boldsymbol{\rho}_2 \int d\boldsymbol{\rho}_3 A_p\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_3}{2}, 0\right) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_2, 0) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}_3, 0) e^{-ik_s \frac{(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_3)^2}{4z}} \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

Introduisons à présent le noyau $\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$:

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = A_p\left(\frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'}{2}, 0\right) \Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (\text{B-7})$$

où $\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')$ est un terme de diffraction :

$$\Delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') = \frac{ik_s}{4\pi l_c} \int_{-\frac{l_c}{2}}^{\frac{l_c}{2}} \frac{dz}{z} e^{-ik_s \frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2}{4z}} \quad (\text{B-8})$$

$$= \frac{k_s}{2\pi l_c} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Sine}\left(\frac{k_s |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|^2}{2l_c}\right) \right] \quad (\text{B-9})$$

On a finalement :

$$\hat{H} = ig\hbar \int d\boldsymbol{\rho} \int d\boldsymbol{\rho}' \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}) \hat{a}^\dagger(\boldsymbol{\rho}') + \text{hc} \quad (\text{B-10})$$

Bibliographie

- [Adesso 04] Gerardo Adesso, Alessio Serafini & Fabrizio Illuminati. *Extremal entanglement and mixedness in continuous variable systems*. Phys. Rev. A, vol. 70, no. 2, page 022318, Aug 2004. Cité p. [15](#)
- [Arnaud 69] JA Arnaud. *Degenerate optical cavities*. Applied Optics, vol. 8, no. 9, pages 189–195, 1969. Cité p. [45](#), [76](#)
- [Avenhaus 08] M. Avenhaus, H. B. Coldenstrodt-Ronge, K. Laiho, W. Mauerner, I. A. Walmsley & C. Silberhorn. *Photon Number Statistics of Multimode Parametric Down-Conversion*. Physical Review Letters, vol. 101, no. 5, page 053601, 2008. Cité p. [93](#)
- [Aytür 90] Orhan Aytür & Prem Kumar. *Pulsed twin beams of light*. Phys. Rev. Lett., vol. 65, no. 13, pages 1551–1554, Sep 1990. Cité p. [191](#)
- [Babcock 53] HW Babcock. *The possibility of compensating astronomical seeing*. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, vol. 65, no. 386, pages 229–236, 1953. Cité p. [72](#)
- [Bachor 04] HA Bachor & TC Ralph. *A Guide to Experiments in Quantum Optics 2nd revised and enlarged edn*, 2004. Cité p. [1](#)
- [Bennink 04] Ryan S. Bennink, Sean J. Bentley, Robert W. Boyd & John C. Howell. *Quantum and Classical Coincidence Imaging*. Phys. Rev. Lett., vol. 92, no. 3, page 033601, Jan 2004. Cité p. [2](#)
- [Blanchet 08] J.L. Blanchet, F. Devaux, L. Furfaro & E. Lantz. *Measurement of Sub-Shot-Noise Correlations of Spatial Fluctuations in the Photon-Counting Regime*. Physical Review Letters, vol. 101, no. 23, page 233604, 2008. Cité p. [191](#)
- [Born 99] M. Born & E. Wolf. Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Cambridge University Press, 1999. Cité p. [36](#)
- [Boschi 98] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy & S. Popescu. *Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Physical Review Letters, vol. 80, no. 6, pages 1121–1125, 1998. Cité p. [19](#)

- [Bouwmeester 97] D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter & A. Zeilinger. *Experimental quantum teleportation*. Nature, vol. 390, no. 6660, pages 575–579, 1997. Cité p. [17](#), [19](#)
- [Boyd 68] GD Boyd & DA Kleinman. *Parametric interaction of focused Gaussian light beams*. Journal of Applied Physics, vol. 39, page 3597, 1968. Cité p. [108](#), [117](#), [165](#)
- [Boyd 03] Robert W. Boyd. Nonlinear optics. Academic Press, 2003. Cité p. [95](#), [98](#), [102](#)
- [Braunstein 98] Samuel L. Braunstein & H. J. Kimble. *Teleportation of Continuous Quantum Variables*. Phys. Rev. Lett., vol. 80, no. 4, pages 869–872, Jan 1998. Cité p. [1](#)
- [Braunstein 05] Samuel L. Braunstein. *Squeezing as an irreducible resource*. Phys. Rev. A, vol. 71, no. 5, page 055801, May 2005. Cité p. [115](#)
- [Briegel 01] Hans J. Briegel & Robert Raussendorf. *Persistent Entanglement in Arrays of Interacting Particles*. Phys. Rev. Lett., vol. 86, no. 5, pages 910–913, Jan 2001. Cité p. [134](#)
- [Broers 92] B. Broers, L. D. Noordam & H. B. van Linden van den Heuvell. *Diffraction and focusing of spectral energy in multiphoton processes*. Phys. Rev. A, vol. 46, no. 5, pages 2749–2756, Sep 1992. Cité p. [63](#)
- [Butterworth 96] DS Butterworth, S. Girard & DC Hanna. *A simple technique to achieve active cavity-length stabilisation in a synchronously pumped optical parametric oscillator*. Optics Communications, vol. 123, no. 4-6, pages 577–582, 1996. Cité p. [214](#)
- [Byer 97] R.L. Byer. *Quasi-phasematched nonlinear interactions and devices*. Journal of Nonlinear Optical Physics and Materials, vol. 6, pages 549–592, 1997. Cité p. [98](#)
- [Caetano 02] D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos & A. Z. Khoury. *Conservation of orbital angular momentum in stimulated down-conversion*. Phys. Rev. A, vol. 66, no. 4, page 041801, Oct 2002. Cité p. [138](#)
- [Cerf 07] NJ Cerf, G. Leuchs & ES Polzik. Quantum information with continuous variables of atoms and light. Imperial College Pr, 2007. Cité p. [1](#), [2](#)
- [Chalopin 06] B Chalopin. *Rapport de stage de M2*. Laboratoire Kastler Brossel, 2006. Cité p. [172](#)
- [Chanteloup 05] J.-C. Chanteloup. *Multiple-wave lateral shearing interferometry for wave-front sensing*. Appl. Opt., vol. 44, no. 9, pages 1559–1571, 2005. Cité p. [67](#)
- [Choi 99] S.K. Choi, M. Vasilyev & P. Kumar. *Noiseless optical amplification of images*. Physical Review Letters, vol. 83, no. 10, pages 1938–1941, 1999. Cité p. [171](#)

- [Cohen-Tannoudji 89] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg. *Photons and atoms*. Wiley New York, 1989. Cité p. [9](#)
- [Cundiff 03] Steven T. Cundiff & Jun Ye. *Colloquium : Femtosecond optical frequency combs*. Rev. Mod. Phys., vol. 75, no. 1, pages 325–342, Mar 2003. Cité p. [49](#)
- [Dayan 04] B. Dayan, A. Pe’Er, A.A. Friesem & Y. Silberberg. *Two photon absorption and coherent control with broadband down-converted light*. Physical review letters, vol. 93, no. 2, page 23005, 2004. Cité p. [3](#)
- [de Valcárcel 06] G. J. de Valcárcel, G. Patera, N. Treps & C. Fabre. *Multimode squeezing of frequency combs*. Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), vol. 74, no. 6, page 061801, 2006. Cité p. [3](#), [109](#), [193](#), [201](#)
- [Delaubert 06] V. Delaubert, N. Treps, C.C. Harb, P.K. Lam & H.A. Bachor. *Quantum measurements of spatial conjugate variables : displacement and tilt of a Gaussian beam*. Optics Letters, vol. 31, no. 10, pages 1537–1539, 2006. Cité p. [3](#), [25](#), [201](#)
- [Delaubert 07a] V. Delaubert. *Quantum imaging with a small number of transverse modes*. Thèse de doctorat en cotutelle entre l’université Pierre et Marie Curie et l’Australian National University, 2007. Cité p. [27](#), [99](#), [108](#), [147](#), [165](#)
- [Delaubert 07b] V. Delaubert, M. Lassen, DRN Pulford, H.A. Bachor & CC Harb. *Spatial mode discrimination using second harmonic generation*. Optics Express, vol. 15, no. 9, pages 5815–5826, 2007. Cité p. [83](#), [99](#), [143](#)
- [Deleglise 08] S. Deleglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.M. Raimond & S. Haroche. *Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence*. Nature, vol. 455, no. 7212, pages 510–514, 2008. Cité p. [1](#)
- [Diddams 00] Scott A. Diddams, David J. Jones, Jun Ye, Steven T. Cundiff, John L. Hall, Jinendra K. Ranka, Robert S. Windeler, Ronald Holzwarth, Thomas Udem & T. W. Hänsch. *Direct Link between Microwave and Optical Frequencies with a 300 THz Femtosecond Laser Comb*. Phys. Rev. Lett., vol. 84, no. 22, pages 5102–5105, May 2000. Cité p. [207](#)
- [Dietrich 00] P. Dietrich, F. Krausz & PB Corkum. *Determining the absolute carrier phase of a few-cycle laser pulse*. Optics Letters, vol. 25, no. 1, pages 16–18, 2000. Cité p. [207](#)
- [Drever 83] RWP Drever, JL Hall, FV Kowalski, J. Hough, GM Ford, AJ Munley & H. Ward. *Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*. Applied Physics B : Lasers and Optics, vol. 31, no. 2, pages 97–105, 1983. Cité p. [81](#), [140](#), [175](#), [212](#)

- [Duan 00] L.M. Duan, G. Giedke, J.I. Cirac & P. Zoller. *Inseparability criterion for continuous variable systems*. Physical Review Letters, vol. 84, no. 12, pages 2722–2725, 2000. Cité p. [19](#)
- [Eckstein 08] Andreas Eckstein & Christine Silberhorn. *Broadband frequency mode entanglement in waveguided parametric downconversion*. Opt. Lett., vol. 33, no. 16, pages 1825–1827, 2008. Cité p. [3](#)
- [Efron 85] U. Efron, J. Grinberg, P. O. Braatz, M. J. Little, P. G. Reif & R. N. Schwartz. *The silicon liquid-crystal light valve*. Journal of Applied Physics, vol. 57, no. 4, pages 1356–1368, 1985. Cité p. [72](#)
- [Einstein 35] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen *et al.* *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Physical review, vol. 47, no. 10, pages 777–780, 1935. Cité p. [18](#)
- [Ekert 91] Artur K. Ekert. *Quantum cryptography based on Bell's theorem*. Phys. Rev. Lett., vol. 67, no. 6, pages 661–663, Aug 1991. Cité p. [1](#)
- [Fabre 95] C. Fabre. *Quantum fluctuations in light beams*. In Fluctuations Quantiques/Quantum Fluctuations : Les Houches Session LXIII, June 27-July 28, 1995. A UJFG/a NATO Advanced Study Institute conference. Edited by S. Reynaud, E. Giacobino and J. Zinn-Justin. ISBN 0444-82593-2. Published by Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1997, p. 181, 1995. Cité p. [24](#)
- [Fejer 92] M.M. Fejer, G.A. Magel, D.H. Jundt & R.L. Byer. *Quasi-phase-matched second harmonic generation : tuning and tolerances*. IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 18, pages 2631–2654, 1992. Cité p. [98](#)
- [Fork 84] RL Fork, OE Martinez & JP Gordon. *Negative dispersion using pairs of prisms*. Optics letters, vol. 9, no. 5, pages 150–152, 1984. Cité p. [202](#)
- [Fradkin 99] K. Fradkin, A. Arie, A. Skliar & G. Rosenman. *Tunable midinfrared source by difference frequency generation in bulk periodically poled KTiOPO*. Applied physics letters, vol. 74, page 914, 1999. Cité p. [156](#)
- [Froehly 83] C. Froehly, B. Colombeau & M. Vampouille. *Shaping and analysis of picosecond light pulses*. Progress in optics, vol. 20, pages 63–153, 1983. Cité p. [73](#)
- [Furusawa 98] A. Furusawa, JL Sørensen, SL Braunstein, CA Fuchs, HJ Kimble & ES Polzik. *Unconditional quantum teleportation*. Science, vol. 282, no. 5389, page 706, 1998. Cité p. [17](#), [19](#)
- [Gatti 95] A. Gatti & L. Lugiato. *Quantum images and critical fluctuations in the optical parametric oscillator below threshold*. Phys. Rev. A, vol. 52, no. 2, pages 1675–1690, Aug 1995. Cité p. [167](#)
- [Gatti 99] A. Gatti, LA Lugiato, KI Petsas & I. Marzoli. *Spatial Einstein-Podolsky-Rosen aspects in the optical parametric oscillator below*

- threshold*. Europhysics Letters, vol. 46, pages 461–466, 1999. Cité p. [169](#)
- [Gatti 04] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache & LA Lugiato. *Correlated imaging, quantum and classical*. Physical Review A, vol. 70, no. 1, page 13802, 2004. Cité p. [2](#)
- [Ghotbi 04a] M. Ghotbi & M. Ebrahim-Zadeh. *Optical second harmonic generation properties of BiB3O6*. Optics Express, vol. 12, no. 24, pages 6002–6019, 2004. Cité p. [112](#), [207](#)
- [Ghotbi 04b] M. Ghotbi, M. Ebrahim-Zadeh, A. Majchrowski, E. Michalski & I. V. Kityk. *High-average-power femtosecond pulse generation in the blue using BiB3O6*. Opt. Lett., vol. 29, no. 21, pages 2530–2532, 2004. Cité p. [207](#)
- [Ghotbi 06] M. Ghotbi, A. Esteban-Martin & M. Ebrahim-Zadeh. *BiB3O6 femtosecond optical parametric oscillator*. Opt. Lett., vol. 31, no. 21, pages 3128–3130, 2006. Cité p. [207](#)
- [Gigan 04] S. Gigan. *Amplification paramétrique d’images en cavité : Effets classiques et quantiques*. Thèse de doctorat de l’université Pierre et Marie Curie, 2004. Cité p. [36](#), [38](#), [142](#), [171](#), [174](#), [177](#)
- [Gigan 05] Sylvain Gigan, Laurent Lopez, Nicolas Treps, Agnès Maître & Claude Fabre. *Image transmission through a stable paraxial cavity*. Phys. Rev. A, vol. 72, no. 2, page 023804, Aug 2005. Cité p. [36](#), [38](#)
- [Glauber 65] RJ Glauber. *Optical coherence and photon statistics*. Quantum Optics and Electronics, 1965. Cité p. [9](#), [12](#)
- [Goda 08] K. Goda, O. Miyakawa, EE Mikhailov, S. Saraf, R. Adhikari, K. McKenzie, R. Ward, S. Vass, AJ Weinstein & N. Mavalvala. *A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector*. Nature Physics, vol. 4, no. 6, pages 472–476, 2008. Cité p. [17](#)
- [Goulielmakis 04] E. Goulielmakis, M. Uiberacker, R. Kienberger, A. Baltuska, V. Yakovlev, A. Scrinzi, Th. Westerwalbesloh, U. Kleineberg, U. Heinzmann, M. Drescher & F. Krausz. *Direct Measurement of Light Waves*. Science, vol. 305, no. 5688, pages 1267–1269, 2004. Cité p. [65](#)
- [Halder 07] M. Halder, A. Beveratos, N. Gisin, V. Scarani, C. Simon & H. Zbinden. *Entangling independent photons by time measurement*. Nature Physics, vol. 3, no. 10, pages 692–695, 2007. Cité p. [3](#)
- [Hartmann 00] J. Hartmann. *Bemerkungen über den Bau und die Justirung von Spektrographen*. Z. Instrumentenk., vol. 20, page 47, 1900. Cité p. [67](#)
- [Heersink 05] J. Heersink, V. Josse, G. Leuchs & U.L. Andersen. *Efficient polarization squeezing in optical fibers*. Optics letters, vol. 30, no. 10, pages 1192–1194, 2005. Cité p. [191](#)

- [Heidmann 87] A. Heidmann, RJ Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre & G. Camy. *Observation of quantum noise reduction on twin laser beams*. Physical review letters, vol. 59, no. 22, pages 2555–2557, 1987. Cité p. [2](#)
- [Huang 93] H. Huang & J.H. Eberly. *Correlations and one-quantum pulse shapes in photon pair generation*. Journal of Modern Optics, vol. 40, no. 14, pages 915–930, 1993. Cité p. [115](#)
- [Hudson 74] RL Hudson. *When is the Wigner quasi-probability density non-negative*. Rep. Math. Phys, vol. 6, no. 2, pages 249–252, 1974. Cité p. [14](#)
- [Iaconis 98] C. Iaconis & IA Walmsley. *Spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction of ultrashort optical pulses*. Optics letters, vol. 23, no. 10, pages 792–794, 1998. Cité p. [69](#)
- [Janousek 09] J. Janousek, K. Wagner, JF Morizur, N. Treps, PK Lam, CC Harb & HA Bachor. *Optical entanglement of co-propagating modes*. Nature Photonics, 2009. Cité p. [2](#), [137](#), [153](#)
- [Jing 06] Jietai Jing, Sheng Feng, Russell Bloomer & Olivier Pfister. *Experimental continuous-variable entanglement from a phase-difference-locked optical parametric oscillator*. Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), vol. 74, no. 4, page 041804, 2006. Cité p. [3](#)
- [Jones 00] D.J. Jones, S.A. Diddams, J.K. Ranka, A. Stentz, R.S. Windeler, J.L. Hall & S.T. Cundiff. *Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis*. Science, vol. 288, no. 5466, page 635, 2000. Cité p. [57](#), [206](#), [207](#)
- [Keller 08] G. Keller. *Génération et caractérisation d'états intriqués en variables continues*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, 2008. Cité p. [18](#)
- [Kolner 94] B.H. Kolner. *Space-time duality and the theory of temporal imaging*. IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 30, no. 8, pages 1951–1963, 1994. Cité p. [63](#)
- [Kolobov 89] MI Kolobov & IV Sokolov. *Squeezed states of light and noise-free optical images*. Phys. Lett. A, vol. 140, pages 101–104, 1989. Cité p. [2](#)
- [Kolobov 99] M.I. Kolobov. *The spatial behavior of nonclassical light*. Reviews of Modern Physics, vol. 71, no. 5, pages 1539–1589, 1999. Cité p. [161](#)
- [Kolobov 00] Mikhail I. Kolobov & Claude Fabre. *Quantum Limits on Optical Resolution*. Phys. Rev. Lett., vol. 85, no. 18, pages 3789–3792, Oct 2000. Cité p. [3](#)
- [Kolobov 06] M.I. Kolobov. Quantum imaging. Springer Verlag, 2006. Cité p. [2](#), [161](#)

- [Lamine 08] Brahim Lamine, Claude Fabre & Nicolas Treps. *Quantum Improvement of Time Transfer between Remote Clocks*. Physical Review Letters, vol. 101, no. 12, page 123601, 2008. Cité p. [3](#), [195](#), [201](#), [225](#)
- [Lantz 97] E. Lantz & F. Devaux. *Parametric amplification of images*. Quantum and Semiclassical Optics-Journal of the European Optical Society Part B, vol. 9, no. 2, pages 279–286, 1997. Cité p. [171](#)
- [Lantz 04] E. Lantz, N. Treps, C. Fabre & E. Brambilla. *Spatial distribution of quantum fluctuations in spontaneous down-conversion in realistic situations*. The European Physical Journal D, vol. 29, no. 3, pages 437–444, 2004. Cité p. [2](#)
- [Lassen 06] M. Lassen, V. Delaubert, C. Harb, P.K. Lam, N. Treps & H.A. Bachor. *Generation of squeezing in higher order Hermite-Gaussian modes with an optical parametric amplifier*. Journal of the European Optical Society, Rapid Publications, vol. 1, page 06003, 2006. Cité p. [147](#)
- [Lassen 09] M. Lassen, G. Leuchs & U. L. Andersen. *Continuous Variable Entanglement and Squeezing of Orbital Angular Momentum States*. Physical Review Letters, vol. 102, no. 16, page 163602, 2009. Cité p. [2](#), [137](#), [153](#)
- [Latstzka 07] N Latstzka & R. Schnabel. *The Gouy phase shift in nonlinear interactions of waves*. Opt. Express, vol. 15, pages 7211–7217, 2007. Cité p. [143](#)
- [Laurat 03] J. Laurat, T. Coudreau, N. Treps, A. Maître & C. Fabre. *Conditional Preparation of a Quantum State in the Continuous Variable Regime : Generation of a sub-Poissonian State from Twin Beams*. Phys. Rev. Lett., vol. 91, no. 21, page 213601, Nov 2003. Cité p. [18](#), [26](#)
- [Laurat 04] J. Laurat. *Etats non-classiques et intrication en variables continues à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, Laboratoire Kastler-Brossel, 2004. Cité p. [127](#)
- [Law 04] C. K. Law & J. H. Eberly. *Analysis and Interpretation of High Transverse Entanglement in Optical Parametric Down Conversion*. Phys. Rev. Lett., vol. 92, no. 12, page 127903, Mar 2004. Cité p. [115](#), [116](#)
- [Le Blanc 94] Catherine Le Blanc. *Principes et réalisation d'une chaîne laser femtoseconde haute intensité basée sur le saphir dopé au titane*. Ann. Phys. Fr., vol. 19, no. 1, pages 1–157, 1994. Cité p. [51](#)
- [Lopez 05] L. Lopez, S. Gigan, N. Treps, A. Maître, C. Fabre & A. Gatti. *Multimode squeezing properties of a confocal optical parametric oscillator : Beyond the thin-crystal approximation*. Phys. Rev. A, vol. 72, no. 1, page 013806, Jul 2005. Cité p. [3](#), [105](#), [168](#)

- [Lopez 06] L. Lopez. *Amplification paramétrique, sans bruit, continue, d'images en cavité*. Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, 2006. Cité p. [126](#), [140](#), [171](#)
- [Lopez 08] L. Lopez, N. Treps, B. Chalopin, C. Fabre & A. Maître. *Quantum processing of images by continuous wave optical parametric amplification*. Physical Review Letters, vol. 100, no. 1, pages 13604–13604, 2008. Cité p. [2](#), [103](#), [126](#), [171](#)
- [Lopez 09] L. Lopez, B. Chalopin, A. Rivière de la Souchère, C. Fabre, A. Maître & N. Treps. *Multimode quantum properties of a self-imaging optical parametric oscillator : Squeezed vacuum and Einstein-Podolsky-Rosen-beams generation*. Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), vol. 80, no. 4, page 043816, 2009. Cité p. [105](#), [168](#), [169](#), [190](#), [198](#)
- [Lugiato 02] LA Lugiato, A. Gatti & E. Brambilla. *Quantum imaging*. Journal of Optics B : Quantum and semiclassical optics, vol. 4, no. 3, pages 176–183, 2002. Cité p. [2](#), [161](#)
- [Mair 01] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs & A. Zeilinger. *Entanglement of the orbital angular momentum states of photons*. Nature, vol. 412, no. 6844, pages 313–316, 2001. Cité p. [2](#)
- [Mancini 02] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali & P. Tombesi. *Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure*. Physical review letters, vol. 88, no. 12, page 120401, 2002. Cité p. [20](#)
- [Monmayrant 05] A. Monmayrant. *Façonnage et caractérisation d'impulsions ultracourtes. Contrôle cohérent de systèmes simples*. Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier, 2005. Cité p. [73](#)
- [Mosley 08] Peter J. Mosley, Jeff S. Lundeen, Brian J. Smith, Piotr Wasylczyk, Alfred B. U'Ren, Christine Silberhorn & Ian A. Walmsley. *Heralded Generation of Ultrafast Single Photons in Pure Quantum States*. Physical Review Letters, vol. 100, no. 13, page 133601, 2008. Cité p. [3](#)
- [Mosset 05] Alexis Mosset, Fabrice Devaux & Eric Lantz. *Spatially Noiseless Optical Amplification of Images*. Phys. Rev. Lett., vol. 94, no. 22, page 223603, Jun 2005. Cité p. [2](#)
- [Navarrete-Benlloch 08] C. Navarrete-Benlloch, E. Roldán & de Valcárcel GJ. *Noncritically Squeezed Light via Spontaneous Rotational Symmetry Breaking*. Physical Review Letters, vol. 100, no. 20, page 203601, 2008. Cité p. [5](#), [130](#), [137](#), [138](#), [153](#), [224](#)
- [Navarrete-Benlloch 09] C. Navarrete-Benlloch, A. Romanelli, E. Roldán & G.J. de Valcárcel. *Non-critical squeezing in 2-transverse-mode optical parametric oscillators*. Arxiv preprint arXiv :0904.0049, 2009. Cité p. [138](#)
- [Navez 01] P. Navez, E. Brambilla, A. Gatti & L.A. Lugiato. *Spatial entanglement of twin quantum images*. Physical Review A, vol. 65, no. 1, page 13813, 2001. Cité p. [169](#)

- [Nikogosyan 05] D.N. Nikogosyan. Nonlinear optical crystals : a complete survey. Springer, 2005. Cité p. [112](#)
- [Ohmori 09] Kenji Ohmori. *Wave-Packet and Coherent Control Dynamics*. Annual Review of Physical Chemistry, vol. 60, no. 1, pages 487–511, 2009. PMID : 19335221. Cité p. [74](#)
- [O’Sullivan-Hale 05] Malcolm N. O’Sullivan-Hale, Irfan Ali Khan, Robert W. Boyd & John C. Howell. *Pixel Entanglement : Experimental Realization of Optically Entangled $d = 3$ and $d = 6$ Qudits*. Phys. Rev. Lett., vol. 94, no. 22, page 220501, Jun 2005. Cité p. [2](#)
- [Ourjoumtsev 06] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat & P. Grangier. *Generating Optical Schrodinger kittens for quantum information processing*, 2006. Cité p. [3](#)
- [Ourjoumtsev 07a] A. Ourjoumtsev. *Étude théorique et expérimentale de superpositions quantiques cohérentes et d’états intriqués non-gaussiens de la lumière*. Thèse de Doctorat de l’université Paris-XI, 2007. Cité p. [13](#)
- [Ourjoumtsev 07b] Alexei Ourjoumtsev, Hyunseok Jeong, Rosa Tualle-Brouri & Philippe Grangier. *Generation of optical /‘Schrodinger cats/’ from photon number states*. Nature, vol. 448, no. 7155, pages 784–786, August 2007. Cité p. [1](#), [14](#)
- [Patera 08] G. Patera. *Quantum properties of ultra-short pulses generated by SPOPOs : multi-mode squeezing and entanglement*. Thèse de doctorat de l’université Pierre et Marie Curie, 2008. Cité p. [3](#), [109](#), [111](#), [112](#), [113](#), [117](#), [130](#), [134](#), [193](#), [195](#)
- [Reid 89] MD Reid. *Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification*. Physical Review A-General Physics, 3 rd Series, vol. 40, pages 913–923, 1989. Cité p. [20](#)
- [Reynaud 92] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino & C. Fabre. *Quantum fluctuations in optical systems*. Progress in optics, vol. 30, pages 1–85, 1992. Cité p. [11](#)
- [Rosenbluh 91] M. Rosenbluh & R. M. Shelby. *Squeezed optical solitons*. Phys. Rev. Lett., vol. 66, no. 2, pages 153–156, Jan 1991. Cité p. [191](#)
- [Rulliere 05] C. Rulliere. *Femtosecond laser pulses : principles and experiments*. Springer Verlag, 2005. Cité p. [48](#)
- [Schliesser 06] Albert Schliesser, Christoph Gohle, Thomas Udem & Theodor W. Hänsch. *Complete characterization of a broadband high-finesse cavity using an optical frequency comb*. Opt. Express, vol. 14, no. 13, pages 5975–5983, 2006. Cité p. [55](#)
- [Scotto 02] Pierre Scotto & Maxi San Miguel. *Spatial behavior of light in second-harmonic generation*. Phys. Rev. A, vol. 65, no. 4, page 043811, Mar 2002. Cité p. [99](#)

- [Shack 71] R.V. Shack & BC Platt. *Production and use of a lenticular Hartmann screen*. J. Opt. Soc. Am, vol. 61, no. 5, page 656, 1971. Cité p. [67](#)
- [Shapiro 03] M. Shapiro & P. Brumer. *Principles of the quantum control of molecular processes*. Principles of the Quantum Control of Molecular Processes, by Moshe Shapiro, Paul Brumer, page 250, 2003. Cité p. [74](#)
- [Siegman 86] A.E. Siegman. *Lasers*. Sausalito, 1986. Cité p. [38](#), [41](#)
- [Silberhorn 01] C. Silberhorn, PK Lam, O. Weiss, F. K
"onig, N. Korolkova & G. Leuchs. *Generation of continuous variable Einstein-Podolsky-Rosen entanglement via the Kerr nonlinearity in an optical fiber*. Physical Review Letters, vol. 86, no. 19, pages 4267–4270, 2001. Cité p. [3](#)
- [Simon 94] R. Simon, N. Mukunda & Biswadeb Dutta. *Quantum-noise matrix for multimode systems : $U(n)$ invariance, squeezing, and normal forms*. Phys. Rev. A, vol. 49, no. 3, pages 1567–1583, Mar 1994. Cité p. [16](#)
- [Simon 00] R. Simon. *Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems*. Physical Review Letters, vol. 84, no. 12, pages 2726–2729, 2000. Cité p. [19](#)
- [Slusher 85] RE Slusher, LW Hollberg, B. Yurke, JC Mertz & JF Valley. *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity*. Physical Review Letters, vol. 55, no. 22, pages 2409–2412, 1985. Cité p. [17](#)
- [Spence 91] DE Spence, PN Kean & W. Sibbett. *60-fsec pulse generation from a self-mode-locked Ti : sapphire laser*. Optics Letters, vol. 16, no. 1, pages 42–44, 1991. Cité p. [49](#)
- [Sueda 04] K. Sueda, G. Miyaji, N. Miyanaga & M. Nakatsuka. *Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses*. Opt. Express, vol. 12, no. 15, pages 3548–3553, 2004. Cité p. [71](#)
- [Takahashi 08] Hiroki Takahashi, Kentaro Wakui, Shigenari Suzuki, Masahiro Takeoka, Kazuhiro Hayasaka, Akira Furusawa & Masahide Sasaki. *Generation of Large-Amplitude Coherent-State Superposition via Ancilla-Assisted Photon Subtraction*. Physical Review Letters, vol. 101, no. 23, page 233605, 2008. Cité p. [1](#)
- [Telle 99] HR Telle, G. Steinmeyer, AE Dunlop, J. Stenger, DH Sutter & U. Keller. *Carrier-envelope offset phase control : A novel concept for absolute optical frequency measurement and ultrashort pulse generation*. Applied Physics B : Lasers and Optics, vol. 69, no. 4, pages 327–332, 1999. Cité p. [207](#)
- [Thorpe 08] MJ Thorpe & J. Ye. *Cavity-enhanced direct frequency comb spectroscopy*. Applied Physics B : Lasers and Optics, vol. 91, no. 3, pages 397–414, 2008. Cité p. [54](#), [55](#)

- [Tournois 97] Pierre Tournois. *Acousto-optic programmable dispersive filter for adaptive compensation of group delay time dispersion in laser systems*. Optics Communications, vol. 140, no. 4-6, pages 245 – 249, 1997. Cité p. [73](#)
- [Trebino 97] R. Trebino, K.W. DeLong, D.N. Fittinghoff, J.N. Sweetser, M.A. Krumbügel, B.A. Richman & D.J. Kane. *Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating*. Review of Scientific Instruments, vol. 68, page 3277, 1997. Cité p. [67](#)
- [Treps 01] N. Treps. *Effets quantiques dans les images optiques*. Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, 2001. Cité p. [97](#), [179](#)
- [Treps 03] N. Treps, N. Grosse, W.P. Bowen, C. Fabre, H.A. Bachor & P.K. Lam. *A quantum laser pointer*, 2003. Cité p. [3](#), [17](#), [27](#), [201](#)
- [Treps 05a] N. Treps, V. Delaubert, A. Maître, J. M. Courty & C. Fabre. *Quantum noise in multipixel image processing*. Phys. Rev. A, vol. 71, no. 1, page 013820, Jan 2005. Cité p. [18](#), [28](#)
- [Treps 05b] N. Treps & C. Fabre. *Criteria of quantum correlation in the measurement of continuous variables in optics*. Laser Physics, vol. 15, page 187, 2005. Cité p. [18](#), [19](#)
- [Udem 99] Th. Udem, J. Reichert, R. Holzwarth & T. W. Hänsch. *Absolute Optical Frequency Measurement of the Cesium D1 Line with a Mode-Locked Laser*. Phys. Rev. Lett., vol. 82, no. 18, pages 3568–3571, May 1999. Cité p. [207](#)
- [Udem 02] T. Udem, R. Holzwarth & T.W. Hänsch. *Optical frequency metrology*. Nature, vol. 416, no. 6877, pages 233–237, 2002. Cité p. [207](#)
- [U'Ren 05] A.B. U'Ren, C. Silberhorn, R. Erdmann, K. Banaszek, W.P. Grice, I.A. Walmsley & M.G. Raymer. *Generation of Pure-State Single-Photon Wavepackets by Conditional Preparation Based on Spontaneous Parametric Downconversion*. Las. Phys, vol. 15, page 146, 2005. Cité p. [115](#)
- [Vahlbruch 08] Henning Vahlbruch, Moritz Mehmet, Simon Chelkowski, Boris Hage, Alexander Franzen, Nico Lastzka, Stefan Gößler, Karsten Danzmann & Roman Schnabel. *Observation of Squeezed Light with 10-dB Quantum-Noise Reduction*. Physical Review Letters, vol. 100, no. 3, page 033602, 2008. Cité p. [17](#)
- [Vaidman 94] Lev Vaidman. *Teleportation of quantum states*. Phys. Rev. A, vol. 49, no. 2, pages 1473–1476, Feb 1994. Cité p. [1](#)
- [Vaughan 05] J.C. Vaughan, T. Hornung, T. Feurer & K.A. Nelson. *Diffraction-based femtosecond pulse shaping with a two-dimensional spatial light modulator*. Optics letters, vol. 30, no. 3, pages 323–325, 2005. Cité p. [218](#)

- [Walls 95] DF Walls & G.J. Milburn. Quantum optics. Springer Verlag, 1995. Cité p. [120](#), [123](#)
- [Weiner 00] A. M. Weiner. *Femtosecond pulse shaping using spatial light modulators*. Review of Scientific Instruments, vol. 71, no. 5, pages 1929–1960, 2000. Cité p. [72](#)
- [Wenger 04] J. Wenger, R. Tualle-Brouri & P. Grangier. *Non-Gaussian statistics from individual pulses of squeezed light*. Physical review letters, vol. 92, no. 15, page 153601, 2004. Cité p. [3](#), [191](#)
- [Wu 86] L.A. Wu, HJ Kimble, JL Hall & H. Wu. *Generation of squeezed states by parametric down conversion*. Physical review letters, vol. 57, no. 20, pages 2520–2523, 1986. Cité p. [2](#), [17](#)
- [Yukawa 08] Mitsuyoshi Yukawa, Ryuji Ukai, Peter van Loock & Akira Furusawa. *Experimental generation of four-mode continuous-variable cluster states*. Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics), vol. 78, no. 1, page 012301, 2008. Cité p. [93](#), [134](#)