



**HAL**  
open science

# Modélisation et calcul numérique des collisions de gouttes en écoulements laminaires et turbulents

Franck Pigeonneau

► **To cite this version:**

Franck Pigeonneau. Modélisation et calcul numérique des collisions de gouttes en écoulements laminaires et turbulents. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1998. Français. NNT : . tel-00433421

**HAL Id: tel-00433421**

**<https://theses.hal.science/tel-00433421v1>**

Submitted on 19 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS VI

Spécialité : Mécanique

présentée par  
**Franck PIGEONNEAU**

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VI

## **Modélisation et calcul numérique des collisions de gouttes en écoulements laminaires et turbulents**

soutenue le 13 octobre 1998  
devant le jury composé de :

M.	J.-L. ACHARD	Rapporteur
M.	A. BERLEMONT	Examineur
M.	P. CRÉISMÉAS	Examineur
M.	F. FEUILLEBOIS	Directeur de thèse
Mme	R. GATIGNOL	Président
M.	P. LAROCHE	Examineur
M.	J. MAGNAUDET	Rapporteur

## Résumé :

Ce mémoire a pour objet le calcul des collisions de gouttes dans divers écoulements laminaires et turbulents.

Dans le cadre de l'approximation des équations de Stokes, les forces d'interactions hydrodynamiques entre deux gouttes sont déterminées de façon exacte au moyen d'un système de coordonnées bisphériques. Ces forces permettent de calculer les taux de collision pour des écoulements de cisaillement simple et d'élongation pure. Les sections de collision sont obtenues par trajectographie. Les résultats montrent un accroissement de l'efficacité de collision lorsque l'inertie des gouttes croît.

L'expression du taux de collision en écoulement turbulent est analogue à celle utilisée en théorie cinétique des gaz. La fonction de distribution de paires est obtenue pour une turbulence homogène et isotrope et à l'aide de notions de probabilités conditionnelles. Les taux de collision sont calculés sans et avec la gravité.

L'évolution granulométrique d'un nuage de gouttes est décrite à l'aide d'une équation cinétique de type Smoluchowski. Cette équation est résolue au moyen d'une méthode numérique originale.

Deux cas sont traités. Pour de petites gouttes en écoulement turbulent homogène et isotrope, l'élargissement du spectre de gouttes demande plus de temps si les interactions hydrodynamiques sont prises en compte. Pour de grosses gouttes, compte tenu de la gravité, la formation par collisions de gouttes de diamètre supérieur à  $200 \mu m$  dépend fortement de la turbulence. Les résultats corroborent les relevés *in situ* dans des strati.

**motsclef** : écoulement dispersé, goutte, interaction hydrodynamique, coordonnées bisphériques, collision, coalescence, turbulence, évolution granulométrique, nuage, bruine.

## Abstract

This thesis is devoted to the calculation of drop collisions in laminar and turbulent flows.

Using the low Reynolds number approximation, Stokes equations are solved exactly in a bispherical coordinate system and the hydrodynamic forces between two drops are derived. Calculations of trajectories in the cases of a simple shear flow and a pure straining motion then provide the collision cross section and collision rate. The collision efficiency increases with the inertia of drops.

Using an expression analogous to that used in the kinetic theory of gases, the collision rate in isotropic homogeneous turbulence is expressed in term of drop pair probability. Collision rates are calculated without and with gravity.

The size evolution of a drop cloud is described by Smoluchowski kinetic equation which is then solved with a new numeric method.

Two cases are considered. For small drops in isotropic homogeneous turbulent flow, the hydrodynamic interactions tend to delay the broadening of the drops spectrum. For large drops, the formation by collision of drops larger than  $200 \mu m$  depends strongly on turbulence, gravity being taken into account. These results corroborate *in situ* observations in stratus clouds.

**Keywords** : disperse flow, drop, hydrodynamic interaction, bispherical coordinates, collision, coalescence, turbulence, size evolution, cloud, drizzle.

# Table des matières

Nomenclature	v
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Interactions hydrodynamiques</b>	<b>5</b>
<b>3 Forces d'interaction hydrodynamique entre deux gouttes</b>	<b>7</b>
3.1 Les équations du problème . . . . .	8
3.2 Problème asymétrique . . . . .	17
3.2.1 Equation de continuité . . . . .	20
3.2.2 Continuité des vitesses . . . . .	21
3.2.3 Condition de continuité du flux de masse . . . . .	22
3.2.4 Continuité des contraintes tangentielles . . . . .	23
3.2.5 Résolution numérique du problème asymétrique . . . . .	30
3.2.6 Comparaison des résultats avec des particules solides . . . . .	36
3.2.7 Méthode de superposition pour le calcul des coefficients $D_1^{zx}$ et $D_2^{zx}$ . . . . .	40
3.3 Problème axisymétrique . . . . .	41
3.3.1 Continuité des vitesses . . . . .	44
3.3.2 Condition de continuité du flux de masse . . . . .	45
3.3.3 Continuité des contraintes tangentielles . . . . .	45
3.3.4 Résolution numérique du problème axisymétrique . . . . .	46
3.4 Expressions générales des forces d'interactions . . . . .	48
3.5 Relations asymptotiques pour les coefficients des forces . . . . .	52
3.5.1 Relations asymptotiques pour $s$ grand . . . . .	52
3.5.2 Relations asymptotiques pour $\xi$ petit . . . . .	55
3.6 Présentation des coefficients des forces pour diverses valeurs de $\hat{\mu}$ et de $\lambda$ . . . . .	56
3.6.1 Coefficients asymétriques . . . . .	56
3.6.2 Coefficients axisymétriques . . . . .	58
3.7 Détermination des fonctions de mobilité . . . . .	62
3.8 Conclusion . . . . .	68

<b>II</b>	<b>Taux de collision en écoulements linéaires</b>	<b>69</b>
<b>6</b>	<b>Taux de collision en écoulements linéaires</b>	<b>71</b>
6.1	Collision sans effet hydrodynamique . . . . .	72
6.1.1	Collision pour une sédimentation . . . . .	72
6.1.2	Collision dans un écoulement cisailé . . . . .	73
6.1.3	Collision pour une élongation pure . . . . .	74
6.1.4	Collision pour un étirement plan . . . . .	75
6.2	Collision avec effets hydrodynamiques . . . . .	76
6.2.1	Forces de van der Waals . . . . .	77
6.2.2	Collision pour la sédimentation . . . . .	78
6.2.3	Collision pour une élongation pure . . . . .	81
6.2.4	Collision pour un étirement plan . . . . .	84
6.2.5	Collision pour un cisaillement simple . . . . .	85
6.3	Effet de la raréfaction du gaz . . . . .	87
6.4	Analyse dimensionnelle . . . . .	90
6.5	Détermination des taux de collision . . . . .	93
6.5.1	Collision en écoulement de cisaillement simple . . . . .	95
6.5.2	Collision en écoulement d'élongation pure . . . . .	98
6.6	Résultats et discussions . . . . .	99
6.6.1	Cisaillement simple . . . . .	99
6.6.2	Elongation pure . . . . .	107
6.6.3	Effet de la raréfaction . . . . .	111
6.7	Conclusion . . . . .	114
<b>III</b>	<b>Taux de collision en écoulements turbulents</b>	<b>117</b>
<b>10</b>	<b>Dispersion de particules en écoulements turbulents</b>	<b>119</b>
10.1	Diffusion turbulente de particules fluides . . . . .	119
10.1.1	Analyse de Taylor . . . . .	119
10.1.2	Relations entre les grandeurs lagrangiennes et eulériennes . . . . .	123
10.2	Force appliquée sur une particule dans un écoulement turbulent . . . . .	128
10.3	Analyse dimensionnelle . . . . .	128
10.4	Dispersion de gouttes en écoulement turbulent . . . . .	130
10.4.1	Etudes en absence de forces de gravité . . . . .	132
10.4.2	Effet de la gravité . . . . .	134
<b>11</b>	<b>Collisions en écoulements turbulents</b>	<b>139</b>
11.1	Présentation des modèles existants . . . . .	139
11.2	Détermination du taux de collision . . . . .	145
11.2.1	Fonctions de distribution des vitesses du fluide . . . . .	146
11.2.2	Fonctions de distribution des vitesses des particules . . . . .	147
11.2.3	Taux de collision en absence de force de gravité . . . . .	150
11.2.4	Taux de collision en présence de force de gravité . . . . .	152

11.3	Détermination des taux de collision par simulation directe . . . . .	154
11.3.1	Equations régies par les particules . . . . .	155
11.3.2	Repérage des particules en interactions . . . . .	158
11.3.3	Intégration des équations du mouvement des particules . . . . .	161
11.3.4	Traitement des collisions . . . . .	163
11.4	Conclusion . . . . .	164
<b>IV</b>	<b>Application à la coalescence de gouttes dans les nuages</b>	<b>167</b>
<b>17</b>	<b>Equation d'évolution granulométrique d'un nuage</b>	<b>169</b>
17.1	Formulation complète de l'équation de population . . . . .	170
17.1.1	Espace des phases et fonction de distribution . . . . .	170
17.1.2	Détermination du terme source $h$ . . . . .	171
17.2	Formulation dans le cadre homogène . . . . .	173
17.3	Méthode numérique . . . . .	175
<b>18</b>	<b>Applications à l'évolution granulométrique d'un nuage</b>	<b>181</b>
18.1	Influence des interactions hydrodynamiques sur les temps de coalescence . . . . .	181
18.2	Formation de la bruine . . . . .	186
18.3	Conclusion . . . . .	190
<b>19</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>193</b>
<b>A</b>	<b>Généralisation des relations de récurrence pour <math>k</math> quelconque</b>	<b>197</b>
A.1	Equation de continuité . . . . .	197
A.2	Continuité des vitesses . . . . .	198
A.3	Condition de flux de masse nul . . . . .	199
A.4	Continuité des contraintes tangentielles . . . . .	200
<b>B</b>	<b>Vecteurs et tenseurs en coordonnées bisphériques</b>	<b>205</b>
B.1	Les changements de bases . . . . .	205
B.2	Expression de la vitesse dans le repère bisphérique . . . . .	206
B.3	Tenseur des contraintes dans le repère bisphérique . . . . .	207
<b>C</b>	<b>Calcul du moment exercé sur une goutte</b>	<b>211</b>
<b>D</b>	<b>Méthode de Bretherton</b>	<b>213</b>
<b>E</b>	<b>Méthode d'intégration des systèmes raides</b>	<b>215</b>
<b>F</b>	<b>Interpolation du champ de vitesses</b>	<b>217</b>
F.1	Interpolation monodimensionnelle par spline cubique . . . . .	217
F.2	Interpolation tridimensionnelle par spline cubique . . . . .	218



# Nomenclature

## Lettres latines

$A$  : constante d'Hamaker.

$a_1, a_2$  : rayons des gouttes 1 et 2.

$\mathcal{A}(s)$  : fonction de mobilité longitudinale liée à l'écoulement linéaire.

$\mathbf{A}^{\alpha\beta}$  : tenseur des coefficients de résistance.

$\mathcal{B}(s)$  : fonction de mobilité transversale liée à l'écoulement linéaire.

$\vec{b}_1, \vec{b}_2$  et  $\vec{b}_3$  : vecteurs de base du système cartésien  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

$c$  : constante géométrique du système de coordonnées bisphériques.

$C_a$  : nombre capillaire.

$C_d$  : coefficient de traînée d'une particule.

$\vec{c}_f$  : réalisation de la vitesse du fluide.

$\vec{c}_p$  : réalisation de la vitesse des gouttes.

$\vec{d}$  : vecteur unitaire suivant la ligne des centres de deux gouttes.

$D_p$  : coefficient de diffusion turbulent des particules.

$D_{12}^0$  : coefficient de diffusion brownien de deux gouttes 1 et 2.

$D_t$  : coefficient de diffusion turbulent des particules fluides.

$D_\alpha^{xz}$  : coefficient de frottement de la goutte  $\alpha$  lié au cisaillement  $\gamma_{xz}$ .

$D_\alpha^{zx}$  : coefficient de frottement de la goutte  $\alpha$  lié au cisaillement  $\gamma_{zx}$ .

$D_\alpha^{zz}$  : coefficient de frottement de la goutte  $\alpha$  lié au cisaillement  $\gamma_{zz}$ .

$\mathbf{E}$  : tenseur des taux de déformation.

$\mathbf{E}^\infty$  : tenseur des taux de déformation de l'écoulement non-perturbé.

$E_{12}$  : efficacité de collision entre les gouttes 1 et 2.

$E_{ij}$  : efficacité de collision entre les gouttes de classes  $i$  et  $j$ .

$\vec{e}_\zeta, \vec{e}_\eta$  et  $\vec{e}_\theta$  : vecteurs de base du système bisphérique.

$f(v, t)$  : fonction de distribution des gouttes de volume  $v$  à l'instant  $t$ .

$f(r)$  : coefficient d'autocorrélation spatial longitudinal des vitesses du fluide.

$\vec{F}_\alpha, \vec{f}_\alpha$  : force agissant sur la goutte  $\alpha$  et forces sans dimension agissant sur la goutte  $\alpha$ .

$f^{(1)}$  : fonction de distribution de probabilité des particules.

$f_f^{(1)}(\vec{c}_f)$  : fonction de distribution de probabilité des vitesses du fluide.

$f_f^{(2)}(\vec{c}_{f1}, \vec{c}_{f2})$  : fonction de distribution de probabilité de paire des vitesses du fluide.

$f_g$  : coefficient correcteur lié aux effets de raréfaction du gaz.

$f_p^{(1)}(\vec{c}_p)$  : fonction de distribution de probabilité des vitesses des particules.

$f_p^{(2)}(\vec{c}_{p1}, \vec{c}_{p2})$  : fonction de distribution de probabilité de paire des vitesses des particules.

- $\vec{g}$  : champ de gravité.  
 $g(r)$  : coefficient d'autocorrélation spatial transversal des vitesses du fluide.  
 $\mathcal{G}(s)$  : fonction de mobilité longitudinale liée à l'agitation moléculaire.  
 $\mathbf{G}^\alpha$  : tenseur d'ordre 3 des coefficients de glissement de la goutte  $\alpha$ .  
 $\mathcal{H}(s)$  : fonction de mobilité transversale liée à l'agitation moléculaire.  
 $h$  : écart entre les surfaces de deux gouttes.  
 $h_b$  : facteur métrique du système de coordonnées bisphériques.  
 $i$  : imaginaire pur.  
 $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  : vecteurs de base du système cartésien  $x, y$  et  $z$ .  
 $J_{12}$  : Taux de collision entre les gouttes 1 et 2.  
 $k$  : constante de Boltzmann.  
 $K(v, v')$  : noyau de collision entre deux gouttes de volume  $v$  et  $v'$ .  
 $K_{ij}(\vec{r})$  : composante du tenseur d'autocorrélation spatial des vitesses du fluide.  
 $\hat{K}_{ij}(t)$  : composante du tenseur d'autocorrélation lagrangien des vitesses du fluide vues par les particules.  
 $K_L(t - t') = \langle V(t)V(t') \rangle$  : autocorrélation lagrangienne des particules fluides.  
 $K_n$  : nombre de Knudsen.  
 $K_p(t)$  : autocorrélation des vitesses des particules.  
 $\mathcal{L}(s)$  : fonction de mobilité longitudinale liée à la sédimentation.  
 $L_b$  : dimension du domaine de simulation.  
 $L_e$  : échelle spatiale intégrale eulérienne.  
 $\mathcal{M}(s)$  : fonction de mobilité transversale liée à la sédimentation.  
 $\vec{n}$  : vecteur unitaire normal à la surface d'une goutte ou d'une interface.  
 $n_\alpha$  : concentration volumique en goutte  $\alpha$ .  
 $N_c$  : nombre de cellule de repérage.  
 $n_i, \bar{n}_i$  : concentration volumique de la classe  $i$  et concentration volumique adimensionnée.  
 $N_p$  : nombre de particules utilisé dans la simulation.  
 $p$  : champ de pression.  
 $P_n(x)$  : polynôme de Legendre d'ordre  $n$ .  
 $P_n^m(x)$  : fonction de Legendre d'ordre  $n$  et de rang  $m$ .  
 $p_{12}$  : fonction de distribution de paire.  
 $Q_n(x)$  : polynôme de Gegenbauer d'ordre  $n$  et de degré  $1/2$ .  
 $Q_{12}$  : nombre sans dimension lié aux forces de van der Waals.  
 $\vec{r}, r$  : distance vectorielle et norme entre les centres de deux gouttes ou entre deux points quelconques.  
 $\hat{R}(t)$  : coefficient d'autocorrélation des vitesses du fluide vues par les particules.  
 $r_{32}$  : rayon moyen de Sauter.  
 $Re, Rep$  : nombre de Reynolds.  
 $R_L(t)$  : coefficient d'autocorrélation lagrangien des particules fluides.  
 $R_p(t)$  : coefficient d'autocorrélation des vitesses des particules.  
 $s$  : distance entre les centres de deux gouttes adimensionnée par le rayon moyen de ces dernières.  
 $S_t$  : nombre de Stokes.  
 $T$  : température de la phase continue.  
 $\hat{T}$  : échelle de temps intégrale de la turbulence vue par les particules.

$T_E$  : échelle de temps intégrale eulérienne.

$T_L$  : échelle temporelle intégrale lagrangienne.

$\vec{T}^\alpha$  : couple agissant sur une particule solide  $\alpha$ .

$\vec{u}$  : champ de vecteur vitesse.

$\vec{u}(t)$  : vitesse du fluide vue par les particules.

$\vec{u}^\infty$  : champ de vecteur vitesse non-perturbée de la phase continue.

$\vec{U}^\infty(\vec{x}_\alpha)$  : vitesse de l'écoulement non-perturbé déterminé au centre de la goutte  $\alpha$ .

$\overline{u^2}$  : variance des vitesses du fluide.

$v, \mathcal{V}$  : volume d'une goutte.

$v_i, \bar{v}_i$  : volume d'une goutte de classe  $i$  et volume adimensionné.

$V(t)$  : vitesse d'une particule fluide à l'instant  $t$ .

$\vec{V}_\alpha, \vec{v}_\alpha$  : vitesses de la goutte  $\alpha$  avec et sans dimension.

$\vec{V}_{12}$  : vitesse relative entre deux gouttes 1 et 2.

$\vec{V}_{12}^0$  : vitesse relative de sédimentation entre deux gouttes 1 et 2.

$\langle V^2 \rangle$  : variance des vitesses des particules fluides.

$\vec{v}_p(t)$  : vitesse d'une particule quelconque.

$\overline{v_p^2}$  : variance des vitesses des particules.

$\vec{v}_{ps}$  : vitesse de sédimentation d'une goutte dans un fluide au repos.

$\vec{w}$  : vitesse relative entre deux gouttes.

$W_e$  : nombre de Weber.

$\vec{x}$  : position d'un point quelconque de l'espace.

$\vec{x}_\alpha, \vec{\bar{x}}_\alpha$  : position de la goutte  $\alpha$  et position adimensionnée.

$\vec{x}_p$  : position d'une goutte.

$X(t)$  : position d'une particule fluide à l'instant  $t$ .

$\langle X^2(t) \rangle$  : variance de la position d'une particule fluide.

$X_{\alpha\beta}$  : coefficient de résistance longitudinal agissant sur la goutte  $\alpha$  lié au déplacement de la goutte  $\beta$ .

$X_\alpha^G$  : coefficient de glissement longitudinal agissant sur la goutte  $\alpha$ .

$Y_{\alpha\beta}$  : coefficient de résistance transversal agissant sur la goutte  $\alpha$  lié au déplacement de la goutte  $\beta$ .

$Y_\alpha^G$  : coefficient de glissement transversal agissant sur la goutte  $\alpha$ .

## Lettres grecques

$\alpha, \alpha_t$  : fraction volumique totale.

$\alpha_i, \bar{\alpha}_i$  : fraction volumique de la classe  $i$  et fraction volumique réduite.

$\gamma$  : gradient de cisaillement.

$\gamma_{ij}$  : composante du tenseur de cisaillement.

$\mathbf{\Gamma}$  : tenseur de cisaillement.

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker.

$\epsilon$  : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente par unité de masse.

$\epsilon_{ijk}$  : tenseur d'ordre trois antisymétrique.

$\zeta$  : coordonnée bisphérique.

$\zeta_{fp}$  : coefficient de corrélation entre les vitesses du fluide et des particules.

$\eta$  : coordonnée bisphérique.

$\eta_K$  : micro-échelle spatiale de Kolmogorov.  
 $\theta$  : angle méridien des systèmes de coordonnées sphériques et bisphériques.  
 $\lambda$  : rapport de rayon entre les gouttes.  
 $\lambda_g$  : libre parcours moyen des molécules d'un gaz.  
 $\lambda_T$  : micro-échelle spatiale de Taylor.  
 $\mu$  : viscosité dynamique de la phase continue.  
 $\mu'$  : viscosité dynamique de la phase dispersée.  
 $\hat{\mu}$  : rapport de viscosité entre les deux phases.  
 $\nu$  : viscosité cinématique de la phase continue.  
 $\xi$  : écart entre les surfaces de deux gouttes adimensionné par le rayon moyen de ces dernières.  
 $\rho$  : masse volumique de la phase continue ou coordonnée du système cylindrique.  
 $\rho'$  : masse volumique de la phase dispersée.  
 $\sigma$  : tenseur de contraintes.  
 $\vec{\tau}$  : vecteur unitaire tangent à la surface d'une goutte ou d'une interface.  
 $\tau_K$  : micro-échelle temporelle de Kolmogorov.  
 $\tau_p$  : temps de relaxation dynamique d'une goutte.  
 $\Phi_{12}$  : potentiel des forces de van der Waals.  
 $\vec{\Omega}^\infty$  : vecteur tourbillon de l'écoulement non-perturbé.  
 $\vec{\omega}^\alpha$  : vitesse de rotation d'une particule solide  $\alpha$ .

### Opérateurs

$\div$  : divergence.  
 $\Delta$  : laplacien.  
**grad** : gradient.  
 $L_m^2$  : opérateur différentiel défini par  $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .  
 $\Phi^2$  : opérateur différentiel défini par  $\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .  
 $\langle \rangle$ , et  $\bar{\phantom{x}}$  : opérateur de moyenne.

# Chapitre 1

## Introduction

L'un des problèmes essentiels de la physique des aérosols concerne la coalescence. Sa modélisation comporte de nombreuses difficultés. Les interactions entre les deux phases et entre les gouttes elles-mêmes interviennent dans ce phénomène. Les propriétés physico-chimiques dans les derniers stades de la coalescence entre deux gouttes doivent être incluses. La nature de l'écoulement (laminaire, turbulent) modifie fortement le processus de collision. La rencontre de deux gouttes ne s'accompagne pas forcément de la formation d'une nouvelle goutte. Les considérations énergétiques sont à prendre en compte pour pouvoir décrire la stabilité des gouttes produites. Le drainage du film entre les gouttelettes présente également de nombreuses difficultés théoriques. Il fait intervenir des instabilités qui sont encore mal maîtrisées à ce jour. L'ensemble de ces problèmes concerne la «microphysique» de la coalescence. D'un autre côté, la «macrophysique» de la coalescence s'intéresse à l'étude de l'évolution granulométrique des spectres de gouttes. Si les équations permettant de décrire cette évolution sont bien connues dans des écoulements tridimensionnels, elles restent très difficiles à résoudre numériquement. Il devient alors très problématique de démontrer les effets de la coalescence sur la polydispersité d'un nuage.

Il en résulte une méconnaissance des grandeurs physiques pour estimer la largeur de spectre de gouttes d'un nuage. Les conséquences peuvent être très graves. En effet, le passage d'un avion de moyen courrier dans un nuage où se trouvent des gouttes assez grosses ( $> 50 \mu\text{m}$  de diamètre) en surfusion peut entraîner la formation de glace en dehors des systèmes de dégivrage. Cette maîtrise défectueuse des conditions atmosphériques a provoqué l'accident d'un avion de type ATR 72 le 31 octobre 1994 près de Roselawn dans l'Indiana aux Etats-Unis. Les personnes au sol n'avaient pas pu identifier les conditions favorables à la formation de la bruine givrante.

Cet accident a également relancé le problème de la certification des avions au givrage en présence de grosses gouttes (diamètre volumique médian de  $200 \mu\text{m}$ ). Les certifications de l'ATR 72 ont été réalisées à l'aide d'essais atmosphériques aux Etats-Unis. Ces essais très lourds sont effectués à l'aide d'un tanker pourvu d'un système de pulvérisation créant le nuage. L'analyse granulométrique a montré des hétérogénéités dans le nuage. Il a été constaté que le diamètre volumique médian avait tendance à augmenter en aval de la grille d'injection. Il est alors difficile de maîtriser les conditions expérimentales. Ce type de difficultés se rencontre également dans les essais en soufflerie [24].

Concernant la formation de la pluie, le passage en phase solide avant un retour en phase liquide est couramment admis (processus de Bergeron, [114]). Les critaux solides croissent

plus rapidement car la pression de vapeur saturante est plus faible à leur surface. La vapeur d'eau va alors se condenser de préférence sur les critères solides entraînant leur croissance au détriment des gouttes liquides qui auront tendance à disparaître. Néanmoins, ce mécanisme de formation n'explique pas la création des nuages tropicaux où les températures sont beaucoup plus élevées [47]. De nombreux relevés dans des strati, où il n'y avait pas eu de passage en phase solide, ont montré la présence de gouttes de taille élevée [112].

Depuis de nombreuses années, la coalescence a été étudiée dans des domaines très divers comme la météorologie, le génie chimique, la combustion, le génie nucléaire... Les travaux les plus anciens sont l'œuvre de Smoluchowski [131]. Depuis, de nombreuses publications ont été consacrées à la prise en compte des interactions hydrodynamiques. La nature physico-chimique est également étudiée à l'aide de la théorie D.L.V.O. <sup>1</sup> [69]. Mais, la plupart du temps, les applications concernent les hydrosols. Il s'ensuit que l'inertie des gouttes n'est jamais prise en compte. Dans le cadre d'applications aux aérosols, la différence de masse volumique entre les deux phases peut entraîner des effets d'inertie non-négligeables.

L'étude de la coalescence dans les écoulements turbulents est encore mal maîtrisée. La complication provient de la multitude des échelles de la turbulence. Les processus de collision sont de natures différentes selon la taille des gouttes par rapport à l'échelle de dissipation visqueuse de la turbulence. Pour les petites particules <sup>2</sup>, les corrélations spatiales de la vitesse de la phase continue sont prépondérantes [125]. Dans le cas contraire, la tendance va à une décorrélation. Les travaux de Laviéville [88] permettent de trouver le taux de collision pour une grande gamme de tailles de nuages monodisperses. La cas le plus général de spectre polydisperse n'est pas étudié. De plus, les interactions hydrodynamiques ne sont pratiquement jamais prises en compte dans les écoulements turbulents.

A cet égard, cette thèse a pour objectif d'étudier les effets de la coalescence sur l'évolution granulométrique d'un nuage polydisperse. L'accent est mis sur la prise en compte des effets d'inertie des gouttes sur la recherche des taux de collision. Ce point a entraîné un approfondissement des connaissances sur les forces d'interactions hydrodynamiques. Une forme générale de ces efforts est proposée dans des écoulements linéaires quelconques [103], [108]. Il est nécessaire dans l'établissement des forces de supposer que le nombre de Reynolds est faible. Ce dernier correspond au rapport entre les effets d'inertie et de viscosité. Il est donné par la relation,  $Re = aU/\nu$  où  $a$  est la taille de la goutte.  $U$  est une vitesse caractéristique et  $\nu$  la viscosité cinématique. Dans le cadre des applications qui nous concerne,  $Re$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-1}$ . Par suite, les champs de vitesses et de pressions requis pour la détermination des forces sont déterminés à l'aide des équations de Stokes. Dans l'ensemble de ce mémoire, les gouttes sont supposées indéformables. Pour que cette condition soit remplie, le nombre capillaire,  $Ca = U\mu/\sigma$ , doit être petit devant 1.  $\mu$  est la viscosité dynamique et  $\sigma$  la tension superficielle. Le nombre capillaire mesure l'influence des effets visqueux sur les effets de tension superficielle. Les ordres de grandeur de  $Ca$  dans le cadre de nos applications sont de  $10^{-7}$  à  $10^{-6}$ . Le déplacement d'une goutte dans un fluide crée un mouvement de la surface de la goutte. Or, la présence d'agents actifs sur la goutte conduit à une immobilisation de l'interface [91]. Cet effet est d'autant plus important que la taille des gouttelettes est petite. Il s'ensuit que la présence d'impuretés donne un comportement de type particule solide à la goutte. Afin que l'interface des gouttes conserve sa mobilité, il est donc nécessaire de considérer que la surface

<sup>1</sup>Initiales des chercheurs ayant travaillé sur cette théorie : Derjaguin, Landau, Verwey et Overbeek.

<sup>2</sup>Le mot particule est employé dans ce mémoire comme synonyme de goutte.

des gouttes ne présente aucune impureté. Ceci peut être effectivement le cas dans les nuages. Le calcul des coefficients des forces est réalisé par une résolution exacte des équations de Stokes décrivant les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur des gouttes. La méthode employée est celle des coordonnées bisphériques particulièrement bien adaptée à ce type de géométrie. Par la suite, le taux de collision dans des écoulements linéaires est déterminé numériquement par intégration des équations de mouvement de deux gouttes interagissant. Le taux de collision est déterminé par la recherche des sections de collision.

Concernant la turbulence, la coalescence nécessite la connaissance du taux de collision entre des gouttes de tailles différentes. Ainsi, on propose une méthode plus générale de calcul des taux de collision dans des cas polydispersés et pour une grande gamme de tailles. L'introduction du champ de pesanteur sur le calcul du taux de collision est également étudiée. Ce calcul s'appuie sur la détermination de la probabilité de paire avec la prise en compte de la corrélation spatiale. Cette dernière est importante lorsque les gouttes ont des tailles petites par rapport à l'échelle de Taylor. Par contre, ce calcul est effectué en négligeant les interactions hydrodynamiques. Leur prise en compte présente de nombreuses difficultés théoriques non résolues actuellement. L'influence des interactions hydrodynamiques sur le taux de collision ne peut être envisagée que par une simulation lagrangienne de suivi de particules dans un écoulement turbulent homogène et isotrope. Une méthode permettant de faire ces simulations est présentée.

Ces approfondissements sur les collisions en écoulements turbulents ont pour objectif pratique l'évaluation de l'influence de la coalescence sur l'évolution granulométrique d'un nuage. Les premières études ont porté sur la recherche du temps nécessaire pour obtenir une augmentation donnée d'un diamètre moyen (diamètre de Sauter ou diamètre volumique médian) pour de petites gouttes en écoulement homogène et isotrope [105]. Dans ce cadre d'application, l'influence des interactions hydrodynamiques peut être évaluée. La forme générale du taux de collision déterminée pour des écoulements turbulents nous permet d'étudier l'évolution granulométrique de nuages atmosphériques. L'accent est mis sur le rôle joué par la turbulence dans la formation de la bruine [107].

Ce mémoire est décomposé en quatre parties. Dans un premier temps, le travail porte sur l'étude de deux gouttes dans des écoulements laminaires. Le chapitre 3 est consacré à la recherche des forces d'interactions hydrodynamiques dans des écoulements linéaires quelconques.

La deuxième partie, constituée du chapitre 6, commence par une présentation bibliographique des taux de collision en écoulements linéaires. La prise en compte de l'inertie des gouttes nécessite l'établissement d'une nouvelle méthode de détermination du taux de collision présentée dans le paragraphe (§) 6.5. Le chapitre 6 est terminé par la présentation et discussion des résultats.

La troisième partie débute par une étude de la dispersion de gouttes en écoulement turbulent, chapitre 10. La détermination des taux de collision en écoulement turbulent commence par une étude bibliographique. Ensuite, un nouveau modèle est élaboré en absence de champ de forces volumiques et étendu ensuite avec l'effet de la gravité. Cette deuxième partie se termine par la présentation de la méthode numérique permettant de déterminer des taux de collision en écoulement turbulent homogène et isotrope avec l'introduction des interactions hydrodynamiques.

La dernière partie est consacrée aux applications. Dans un premier temps, chapitre 17, l'équation de population régissant l'évolution granulométrique d'un nuage est présentée. La résolution numérique de cette dernière est proposée à la fin de ce chapitre. Dans le cas où les gouttes sont très petites par rapport à l'échelle de dissipation visqueuse de la turbulence, l'in-

fluence des interactions hydrodynamiques peut être évaluée. Cet effet est présenté comme premier exemple dans le chapitre 18. Ensuite, la deuxième application est consacrée à la formation de la bruine dans des nuages atmosphériques de type stratus.

Ce mémoire se termine par une conclusion portant sur l'ensemble des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse et sur les perspectives.

Dans l'annexe A, on propose une généralisation des relations de récurrence servant à déterminer les champs de vitesses et de pressions à l'intérieur et à l'extérieur des gouttes. Dans ce cas de figure, l'écoulement non-perturbé peut avoir une forme non-linéaire. L'annexe B présente les connaissances mathématiques requises dans la manipulation des vecteurs et tenseurs adaptés au système de coordonnées bisphériques. La démonstration de l'annulation du moment appliqué à une goutte est donnée dans l'annexe C. La méthode de Bretherton est présentée dans l'annexe D. Cette dernière est appliquée à la recherche des composantes de forces non-nulles s'appliquant sur des gouttes. La résolution des systèmes d'équations aux dérivées ordinaires raides nécessite l'utilisation d'une méthode adéquate présentée dans l'annexe E. Pour finir, l'annexe F traite de l'interpolation d'un champ de vitesse dans un maillage tridimensionnel.

# **Première partie**

## **Interactions hydrodynamiques**



# Chapitre 3

## Forces d'interaction hydrodynamique entre deux gouttes

Dans les études portant sur les milieux dispersés de gouttelettes dans un gaz, l'hypothèse d'interaction entre paires de particules est couramment utilisée dans la mesure où les solutions sont suffisamment diluées. La détermination de la force sur une goutte est faite en tenant compte des effets hydrodynamiques produits par la présence d'une autre goutte proche de la première.

Comme il a été précisé dans l'introduction, les nombres de Reynolds sont supposés suffisamment faibles. Les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur des gouttes sont régis par les équations de Stokes. La tension interfaciale de l'eau étant grande, les déformations des gouttes ne sont pas considérées. Le caractère indéformable des gouttes est renforcé par la présence d'agents actifs aux interfaces (cf. [91] et [123]). Les impuretés produisent en règle générale une augmentation de la tension superficielle. Par contre, leur présence diminue la mobilité de l'interface. En vue de l'application aux nuages, nous avons supposé que les surfaces des gouttes restaient propres. Ce qui impose de prendre en compte la mobilité de l'interface. Beaucoup de travaux ont été consacrés à l'étude des interactions entre particules solides. Il est possible, aujourd'hui, de calculer les forces et les couples exercés sur les particules dans le cas où ces dernières se déplacent avec des vitesses quelconques dans un écoulement linéaire général [72] et [79]. Les effets de couche de lubrification sont bien pris en compte dans ces théories. Lorsque les particules sont transportées passivement, le calcul des forces conduit aux fonctions de mobilité définies par Batchelor et Green [14].

Par contre, pour les gouttes, les théories ne sont pas aussi évoluées. Les interactions sont plus complexes car il faut tenir compte des écoulements à la fois à l'extérieur et à l'intérieur des gouttelettes. La connaissance des forces s'exerçant sur des gouttes se déplaçant avec des vitesses quelconques dans un fluide au repos a été rendue possible grâce aux travaux de Haber, Hetsroni et Solan [53] et de Zinchenko [154]. Les études avec un fluide porteur en mouvement sont rares. Zinchenko [157] a considéré le cas particulier de gouttes identiques dans des écoulements d'élongation pure et de cisaillement lui permettant d'accéder aux fonctions de mobilité et aux propriétés rhéologiques du mélange. Dans leur recherche des taux de collision, Wang, Zinchenko et Davis [145] ont généralisé les calculs de l'article [157] pour des gouttes de diamètres différents. A notre connaissance, la détermination des forces dans un écoulement linéaire quelconque n'a jamais été entreprise jusqu'à ce jour.

Dans le cadre de nos hypothèses, les méthodes utilisées pour le calcul des forces font appel

à une résolution exacte des équations de Stokes. Afin de simplifier les conditions aux limites à la surface des gouttes, le système de coordonnées bisphériques est couramment utilisé. Son emploi a été instauré en hydrodynamique sous l'impulsion des travaux de Jeffery [70] et de Stimson et Jeffery [134].

Dans un premier temps, §3.1, nous présentons le problème général de la recherche des forces pour un écoulement linéaire quelconque. L'analyse de l'expression totale des forces nous conduit à décomposer l'étude complète en deux sous-problèmes, l'un de nature asymétrique et l'autre axisymétrique qui font l'objet des deux paragraphes suivants. Le paragraphe 3.4 permet d'aboutir à une forme générale des forces indépendantes du référentiel utilisé. On présente ensuite l'établissement des coefficients par d'autres approches. La théorie de lubrification est également utilisée lorsque les gouttes sont proches. Le paragraphe 3.6 permet de faire une comparaison entre les résultats issus de la méthode des coordonnées bisphériques et ceux donnés par les solutions asymptotiques. Enfin, la détermination des fonctions de mobilité est faite dans le dernier paragraphe.

### 3.1 Les équations du problème

La recherche des forces qui agissent sur les gouttes est faite en déterminant les champs de pression et de vitesse à l'intérieur et à l'extérieur des gouttes. Ces dernières sont immergées dans un écoulement linéaire quelconque. Le système de référence est choisi de manière à avoir les deux gouttes suivant l'axe  $z$  (cf. figure 3.1). L'écoulement étant asymétrique en général et suite aux travaux de Dean et O'Neill [37], le champ de vitesse est pris dans le système de coordonnées cylindriques défini par  $\rho$ ,  $\theta$  et  $z$  (cf. figure 3.1). Le passage du système de coordonnées cylindriques au système de coordonnées cartésiennes est rapellé ci-dessous :

$$x = \rho \cos \theta, \quad (3.1a)$$

$$y = \rho \sin \theta. \quad (3.1b)$$

Afin de simplifier les expressions des conditions aux limites sur les surfaces des gouttes, la solution des champs de vitesse et de pression est obtenue en utilisant le système de coordonnées bisphériques,  $\zeta$ ,  $\theta$  et  $\eta$  initialement introduit dans les publications de Jeffery [70] et Stimson et Jeffery [134]. Le passage entre les systèmes de coordonnées cylindriques et bisphériques est :

$$z = \frac{c \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta}, \quad (3.2a)$$

$$\rho = \frac{c \sin \eta}{\cosh \zeta - \cos \eta}, \quad (3.2b)$$

où  $c$  est une constante géométrique.  $\zeta$  et  $\eta$  sont les coordonnées bisphériques. Les surfaces  $\zeta = Cte$  sont des sphères centrées sur l'axe  $z$ . Ce système de référence est orthogonal et conforme. Pour plus de détails sur ce point, il est conseillé de se reporter à l'appendice A du livre de Happel et Brenner [56]. Les principales formules sont rappelées dans l'annexe B de ce mémoire. La goutte 1 est située en  $z > 0$ . Son rayon est noté  $a_1$ . La goutte 2, située en  $z < 0$ , a un rayon  $a_2$ . Le rapport des rayons est défini par  $\lambda = a_2/a_1$ . La distance entre les centres des gouttes est notée  $r$ . L'écart entre les particules est donné par  $h = r - (a_1 + a_2)$ . Ces quantités

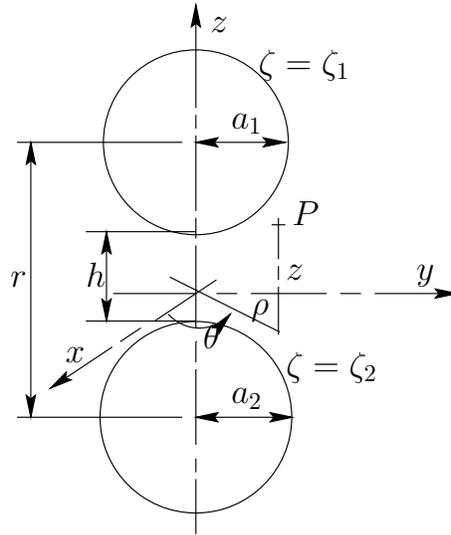


FIG. 3.1 – Représentation des deux gouttes dans le système de référence.

sont couramment adimensionnées de la façon suivante :

$$s = \frac{2r}{a_1 + a_2}, \quad (3.3a)$$

$$\xi = \frac{2h}{a_1 + a_2} = s - 2. \quad (3.3b)$$

Les gouttes sont donc référencées dans le système bisphérique par des valeurs constantes de  $\zeta$  notées  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  avec  $\zeta_1 > 0$  et  $\zeta_2 < 0$ . Les relations permettant de calculer  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et  $c$  sont les suivantes :

$$\cosh \zeta_1 = \frac{s(1 + \lambda)}{4} + \frac{(1 - \lambda)}{s}, \quad (3.4a)$$

$$\sinh \zeta_2 = -\frac{\sinh \zeta_1}{\lambda}, \quad (3.4b)$$

$$c = a_1 \sinh \zeta_1. \quad (3.4c)$$

Le champ de vitesse à l'infini est donné par la relation suivante :

$$\vec{u}^\infty = \mathbf{\Gamma} \cdot \vec{x}. \quad (3.5)$$

$\mathbf{\Gamma}$  est le tenseur de cisaillement ; il a une trace nulle. La pression correspondante est constante. On la prendra nulle sans perte de généralité. La vitesse et la pression à l'extérieur sont décomposées en un terme de perturbation et un autre lié à l'écoulement à l'infini :

$$\vec{u}^t = \vec{u}^e + \vec{u}^\infty, \quad (3.6a)$$

$$p^t = p^e. \quad (3.6b)$$

$\vec{u}^e$  et  $p^e$  sont respectivement la vitesse et la pression de perturbation. L'indice  $t$  est utilisé pour faire référence à l'écoulement extérieur total. L'indice  $e$  est employé pour les champs de perturbation. Pour les gouttes, nous employons les indices 1 et 2.

Comme l'écoulement à l'infini vérifie les équations de Stokes, nous avons :

$$\operatorname{div} \vec{u}^e = 0, \quad (3.7a)$$

$$\mu \Delta \vec{u}^e = \vec{\operatorname{grad}} p^e. \quad (3.7b)$$

$\mu$  est la viscosité dynamique du fluide externe. Les équations de Stokes sont également vérifiées pour les écoulements à l'intérieur des gouttes :

$$\operatorname{div} \vec{u}^1 = 0, \quad (3.8a)$$

$$\mu' \Delta \vec{u}^1 = \vec{\operatorname{grad}} p^1. \quad (3.8b)$$

$$\operatorname{div} \vec{u}^2 = 0, \quad (3.9a)$$

$$\mu' \Delta \vec{u}^2 = \vec{\operatorname{grad}} p^2. \quad (3.9b)$$

$\mu'$  est la viscosité dynamique du fluide à l'intérieur des gouttes.

Les problèmes des gouttes en mouvement dans un fluide au repos ont été étudiés par Haber, Hetsroni et Solan [53] pour les déplacements suivant la ligne des centres et par Zinchenko [154] pour les déplacements perpendiculaires à la ligne des centres. La linéarisation des équations de Stokes entraîne que le cas général de particules se déplaçant avec des vitesses quelconques dans un écoulement non nul est obtenu par superposition de cas particuliers.

Les conditions aux limites à la surface des gouttes sont classiques (pp. 235-236 [9]). Elles sont résumées ci-dessous :

– continuité des vitesses :

$$\vec{u}^t = \vec{u}^1 \text{ pour la goutte 1,} \quad (3.10a)$$

$$\vec{u}^t = \vec{u}^2 \text{ pour la goutte 2,} \quad (3.10b)$$

– continuité du flux de masse :

$$\vec{u}^t \cdot \vec{n}^1 = \vec{V}^1 \cdot \vec{n}^1 \text{ pour la goutte 1,} \quad (3.11a)$$

$$\vec{u}^t \cdot \vec{n}^2 = \vec{V}^2 \cdot \vec{n}^2 \text{ pour la goutte 2,} \quad (3.11b)$$

– continuité des contraintes tangentielles :

$$(\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n}^1) \cdot \vec{\tau}^1 = (\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \vec{n}^1) \cdot \vec{\tau}^1 \text{ pour la goutte 1,} \quad (3.12a)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n}^2) \cdot \vec{\tau}^2 = (\boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \vec{n}^2) \cdot \vec{\tau}^2 \text{ pour la goutte 2,} \quad (3.12b)$$

– condition à l'infini :

$$\vec{u}^t \rightarrow \vec{u}^\infty. \quad (3.13)$$

$\vec{n}^1$  est la normale extérieure et  $\vec{\tau}^1$  est un vecteur unitaire tangent sur la surface de la goutte 1.  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes.  $\vec{V}^1$  et  $\vec{V}^2$  sont les vitesses respectives des gouttes 1 et 2.

La recherche de la solution des équations de Stokes est faite d'une manière classique. Il est facile de voir que la pression vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta p = 0. \quad (3.14)$$

Ensuite, le champ de vitesse est pris sous la forme :

$$\vec{u} = \frac{\rho}{2\mu} \vec{x} + \vec{u}^H, \quad (3.15)$$

où  $\vec{u}^H$  est une fonction vectorielle harmonique.

La détermination des fonctions harmoniques est faite en utilisant la méthode de séparation des variables et les coordonnées bisphériques [70]. La vitesse et la pression de perturbation de l'écoulement externe mais également les champs de vitesse et de pression à l'intérieur des gouttes sont données par les expressions suivantes :

$$p = \frac{2\mu}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (Q_k^0 \sin k\theta + Q_{-k}^0 \cos k\theta), \quad (3.16a)$$

$$u_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\rho}{c} Q_k^0 + W_k^1 + W_k^{-1} \right) \sin k\theta + \left( \frac{\rho}{c} Q_{-k}^0 + W_{-k}^1 + W_{-k}^{-1} \right) \cos k\theta \right], \quad (3.16b)$$

$$u_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (W_{-k}^1 - W_{-k}^{-1}) \sin k\theta + (W_k^{-1} - W_k^1) \cos k\theta \right], \quad (3.16c)$$

$$u_z = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{z}{c} Q_k^0 + 2W_k^0 \right) \sin k\theta + \left( \frac{z}{c} Q_{-k}^0 + 2W_{-k}^0 \right) \cos k\theta \right]. \quad (3.16d)$$

$u_\rho$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$  sont les composantes physiques<sup>1</sup> de la vitesse dans le système de référence cylindrique. Cette solution a été proposée par Lin *et al.* [94]. Elle est une généralisation de celle de Wakiya [144]. Il est possible de trouver plus de détails dans la thèse de Lin [93]. Les fonctions  $Q_m^0$  et  $W_m^i$  où  $i$  varie de  $-1$  à  $1$  et  $m$  vaut  $k$  ou  $-k$  dépendent des variables  $\zeta$  et  $\eta$ . Elles satisfont aux équations :

$$L_{|m|}^2 Q_m^0 = 0, \quad (3.17a)$$

$$L_{|m|+i}^2 W_m^i = 0, \quad (3.17b)$$

où l'opérateur  $L_m^2$  est défini ci-dessous :

$$L_m^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.18)$$

Les solutions des équations (3.17b) obtenues par la méthode de séparation des variables donnent pour  $Q_m^0$  et  $W_m^i$  les relations suivantes :

$$Q_m^0 = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=|m|}^{\infty} q_{mn}^0(\zeta) P_n^{|m|}(\cos \eta), \quad (3.19a)$$

$$W_m^i = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=|m|+i}^{\infty} w_{mn}^i(\zeta) P_n^{|m|+i}(\cos \eta). \quad (3.19b)$$

<sup>1</sup>Le terme «composante physique» est pris au sens tensoriel (cf. [5] et [143]).

$P_n^m(x)$  est la fonction de Legendre d'ordre  $n$  et de rang  $m$ . Elle est définie par la relation suivante lorsque  $n$  et  $m$  sont entiers ([51] page 1014) :

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}. \quad (3.20)$$

$P_n(x)$  est un polynôme de Legendre d'ordre  $n$  en  $x$ . Si  $m > n$ ,  $P_n^m(x)$  est égal à zéro. Il est également nécessaire que  $m$  soit strictement supérieur à zéro. Il ressort que les fonctions  $W_0^{-1}$  et  $W_{-0}^{-1}$  seront prises égales à zéro. Il est d'ailleurs possible de montrer que ces fonctions sont bien nulles en cherchant à démontrer les relations (3.16d).  $q_{mn}^0$  et  $w_{mn}^i$  dépendent uniquement de  $\zeta$ . Elles sont souvent données à l'aide des sinh et cosh. Mais nous préférons utiliser les formes proposées par Zinchenko [154] :

$$q_{mn}^0(\zeta) = C_{mn}^0 e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_{mn}^0 e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}, \quad (3.21a)$$

$$w_{mn}^i(\zeta) = A_{mn}^i e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + B_{mn}^i e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}. \quad (3.21b)$$

Il est intéressant de voir la forme du champ de vitesse non-perturbé en coordonnées cylindriques de façon à pouvoir par la suite utiliser le même formalisme que celui présenté ci-dessus. La matrice de cisaillement a la forme générale suivante dans le système de référence cartésien :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Le champ de vitesse non-perturbé est alors :

$$u_\rho^\infty = \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2} \rho + \gamma_{yz} z \sin \theta + \gamma_{xz} z \cos \theta + \frac{\gamma_{xy} + \gamma_{yx}}{2} \rho \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \rho \cos 2\theta, \quad (3.23a)$$

$$u_\theta^\infty = -\frac{\gamma_{xy} - \gamma_{yx}}{2} \rho - \gamma_{xz} z \sin \theta + \gamma_{yz} z \cos \theta - \frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \rho \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy} + \gamma_{yx}}{2} \rho \cos 2\theta, \quad (3.23b)$$

$$u_z^\infty = \gamma_{zz} z + \gamma_{zy} \rho \sin \theta + \gamma_{zx} \rho \cos \theta. \quad (3.23c)$$

A la vue des précédentes relations, nous pouvons donc limiter la sommation sur  $k$  à une valeur maximale de 2 dans les expressions données par les relations (3.16d). Si l'écoulement non-perturbé n'était pas linéaire, nous aurions des harmoniques encore plus grandes, il serait alors nécessaire de prendre une valeur de  $k$  limite plus importante.

Grâce aux relations (3.6b), les quantités  $W_k^{ti}$  et  $Q_k^{t0}$  de l'écoulement externe peuvent être décomposées de la façon suivante :

$$W_k^{ti} = W_k^{ei} + W_k^{\infty i}, \quad (3.24a)$$

$$Q_k^{t0} = Q_k^{e0}. \quad (3.24b)$$

$W_k^{ei}$  et  $Q_k^{e0}$  sont données par les relations (3.19b) et sont inconnues. Par contre, les quantités  $W_k^{\infty i}$  sont connues. Elles sont déterminées par identification entre les relations (3.16d) et (3.23a). La pression de l'écoulement à l'infini étant nulle, il n'y a pas de terme  $Q_k^\infty$  dans (3.24b).

L'identification pour les écoulements linéaires donnent les relations suivantes pour les termes  $W_k^{\infty i}$  :

– pour  $k = 0$  :

$$W_{-0}^{\infty 1} = \frac{\gamma_{xx} + \gamma_{yy}}{2} \rho, \quad (3.25a)$$

$$W_0^{\infty 1} = \frac{\gamma_{xy} - \gamma_{yx}}{2} \rho, \quad (3.25b)$$

$$W_{-0}^{\infty 0} = \frac{\gamma_{zz}}{2} z, \quad (3.25c)$$

– pour  $k = 1$  :

$$W_1^{\infty -1} = \gamma_{yz} z, \quad (3.26a)$$

$$W_1^{\infty 1} = 0, \quad (3.26b)$$

$$W_1^{\infty 0} = \frac{\gamma_{zy}}{2} \rho, \quad (3.26c)$$

– pour  $k = 2$  :

$$W_2^{\infty -1} = \frac{\gamma_{xy} + \gamma_{yx}}{2} \rho, \quad (3.28a)$$

$$W_2^{\infty 1} = 0, \quad (3.28b)$$

$$W_2^{\infty 0} = 0, \quad (3.28c)$$

– pour  $k = -1$  :

$$W_{-1}^{\infty -1} = \gamma_{xz} z, \quad (3.27a)$$

$$W_{-1}^{\infty 1} = 0, \quad (3.27b)$$

$$W_{-1}^{\infty 0} = \frac{\gamma_{zx}}{2} \rho, \quad (3.27c)$$

– pour  $k = -2$  :

$$W_{-2}^{\infty -1} = \frac{\gamma_{xx} - \gamma_{yy}}{2} \rho, \quad (3.29a)$$

$$W_{-2}^{\infty 1} = 0, \quad (3.29b)$$

$$W_{-2}^{\infty 0} = 0. \quad (3.29c)$$

Il est nécessaire d'exprimer  $z$  et  $\rho$  à l'aide des polynômes de Legendre. Grâce à l'identité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} P_n(\cos \eta), \quad (3.30)$$

et en dérivant (3.30) par rapport à  $\zeta$  et à  $\eta$ , on obtient respectivement pour  $z$  et  $\rho$  :

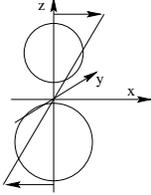
$$z = c \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} \text{sign} \zeta P_n(\cos \eta), \quad (3.31a)$$

$$\rho = -c \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} P_n^1(\cos \eta). \quad (3.31b)$$

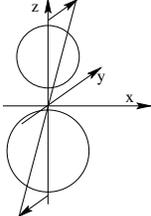
Le symbole  $\text{sign} \zeta$  représente le signe de  $\zeta$ .

Comme les équations de Stokes sont linéaires, nous pouvons décomposer le problème général en une somme de cas élémentaires. Cette décomposition peut se faire de la façon suivante :

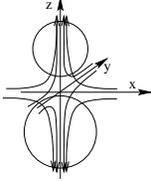
– 1<sup>er</sup> cas d'étude :  $\gamma_{xz} \neq 0$ ,



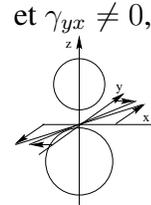
– 2<sup>ème</sup> cas d'étude :  $\gamma_{yz} \neq 0$ ,



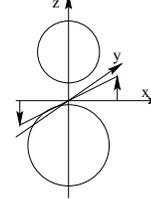
– 3<sup>ème</sup> cas d'étude :  $\gamma_{xx} \neq 0$ ,  $\gamma_{yy} \neq 0$  et  $\gamma_{zz} \neq 0$ ,



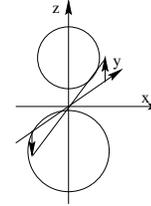
– 4<sup>ème</sup> cas d'étude :  $\gamma_{xy} \neq 0$



– 5<sup>ème</sup> cas d'étude :  $\gamma_{zx} \neq 0$ ,



– 6<sup>ème</sup> cas d'étude :  $\gamma_{zy} \neq 0$ .



Pour ces différents cas, les relations générales des champs de vitesse et de pression (3.16d) peuvent être simplifiées. Ces expressions réduites sont données ci-dessous pour les 6 cas d'études.

– Cas d'étude 1 et 5 :

$$p = \frac{2\mu}{c} Q_{-1}^0 \cos \theta, \quad (3.32a)$$

$$u_\rho = \left( \frac{\rho}{c} Q_{-1}^0 + W_{-1}^1 + W_{-1}^{-1} \right) \cos \theta, \quad (3.32b)$$

$$u_\theta = (W_{-1}^1 - W_{-1}^{-1}) \sin \theta, \quad (3.32c)$$

$$u_z = \left( \frac{z}{c} Q_{-1}^0 + 2W_{-1}^0 \right) \cos \theta. \quad (3.32d)$$

– Cas d'étude 2 et 6 :

$$p = \frac{2\mu}{c} Q_1^0 \sin \theta, \quad (3.33a)$$

$$u_\rho = \left( \frac{\rho}{c} Q_1^0 + W_1^1 + W_1^{-1} \right) \sin \theta, \quad (3.33b)$$

$$u_\theta = (W_1^{-1} - W_1^1) \cos \theta, \quad (3.33c)$$

$$u_z = \left( \frac{z}{c} Q_1^0 + 2W_1^0 \right) \sin \theta. \quad (3.33d)$$

– Cas d'étude 3 :

$$p = \frac{2\mu}{c} (Q_{-0}^0 + Q_{-2}^0 \cos 2\theta), \quad (3.34a)$$

$$u_\rho = \frac{\rho}{c} Q_{-0}^0 + W_{-0}^1 + \left( \frac{\rho}{c} Q_{-2}^0 + W_{-2}^1 + W_{-2}^{-1} \right) \cos 2\theta, \quad (3.34b)$$

$$u_\theta = (W_{-2}^1 - W_{-2}^{-1}) \sin 2\theta, \quad (3.34c)$$

$$u_z = \frac{z}{c} Q_{-0}^0 + 2W_{-0}^0 + \left( \frac{z}{c} Q_{-2}^0 + 2W_{-2}^0 \right) \cos 2\theta. \quad (3.34d)$$

– Cas d'étude 4 :

$$p = \frac{2\mu}{c} Q_2^0 \sin 2\theta, \quad (3.35a)$$

$$u_\rho = \left( \frac{\rho}{c} Q_2^0 + W_2^1 + W_2^{-1} \right) \sin 2\theta, \quad (3.35b)$$

$$u_\theta = W_0^1 + (W_2^{-1} - W_2^1) \cos 2\theta, \quad (3.35c)$$

$$u_z = \left( \frac{z}{c} Q_2^0 + 2W_2^0 \right) \sin 2\theta. \quad (3.35d)$$

Les champs de vitesse et de pression pour les cas 1 et 5 ont déjà été utilisés pour étudier la rotation et le déplacement d'une particule solide [37] et [100], les rotations et les translations de deux particules solides [101] et les déplacements de deux gouttes [154]. La vitesse et la pression des cas 2 et 6 sont très proches de celles des cas 1 et 5. La seule différence provient de l'échange du  $\cos$  en  $\sin$  et inversement. Les problèmes sont en réalité identiques, il suffit d'invertir les axes  $x$  et  $y$ . Le troisième cas est composé d'une vitesse et d'une pression indépendantes de  $\theta$  correspondant à un cas axisymétrique et de champs d'harmonique 2. Le caractère axisymétrique est intéressant à remarquer car la recherche des champs de pression et de vitesse peut être faite à l'aide de la fonction de courant [134]. La résolution est alors plus simple car elle ne fait apparaître aucune relation de récurrence (cf. §3.3).

Il est également intéressant de préciser pour les 6 cas les expressions de  $W_k^{\infty i}$ . On ne donne que les fonctions non-nulles. Elles sont obtenues à l'aide des équations (3.31b) exprimant  $z$  et  $\rho$ .

– Cas d'étude 1 :

$$W_{-1}^{\infty-1} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} w_{-1n}^{\infty-1} P_n(\cos \eta), \quad (3.36a)$$

$$\text{avec } w_{-1n}^{\infty-1} = c\sqrt{2} (2n+1) \gamma_{xz} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} \text{sign} \zeta. \quad (3.36b)$$

– Cas d'étude 2 :

$$W_1^{\infty-1} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} w_{1n}^{\infty-1} P_n(\cos \eta), \quad (3.37a)$$

$$\text{avec } w_{1n}^{\infty-1} = c\sqrt{2} (2n+1) \gamma_{yz} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} \text{sign} \zeta. \quad (3.37b)$$

– Cas d'étude 3 :

$$W_{-0}^{\infty 1} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} w_{-0n}^{\infty 1} P_n^1(\cos \eta), \quad (3.38a)$$

$$\text{avec } w_{-0n}^{\infty 1} = c\sqrt{2} \gamma_{zz} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.38b)$$

$$W_{-0}^{\infty 0} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} w_{-0n}^{\infty 0} P_n(\cos \eta), \quad (3.39a)$$

$$\text{avec } w_{-0n}^{\infty 0} = c \frac{\sqrt{2}}{2} (2n+1) \gamma_{zz} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} \text{sign} \zeta. \quad (3.39b)$$

$$W_{-2}^{\infty -1} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} w_{-2n}^{\infty -1} P_n^1(\cos \eta), \quad (3.40a)$$

$$\text{avec } w_{-2n}^{\infty -1} = -c\sqrt{2} (\gamma_{xx} - \gamma_{yy}) e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.40b)$$

– Cas d'étude 4 :

$$W_0^{\infty 1} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0n}^{\infty 1} P_n^1(\cos \eta), \quad (3.41a)$$

$$\text{avec } w_{0n}^{\infty 1} = c\sqrt{2} (\gamma_{xy} - \gamma_{yx}) e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.41b)$$

$$W_2^{\infty -1} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} w_{2n}^{\infty -1} P_n^1(\cos \eta), \quad (3.42a)$$

$$\text{avec } w_{2n}^{\infty -1} = -c\sqrt{2} (\gamma_{xy} + \gamma_{yx}) e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.42b)$$

– Cas d'étude 5 :

$$W_{-1}^{\infty 0} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} w_{-1n}^{\infty 0} P_n^1(\cos \eta), \quad (3.43a)$$

$$\text{avec } w_{-1n}^{\infty 0} = -c\sqrt{2} \gamma_{zx} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.43b)$$

– Cas d'étude 6 :

$$W_1^{\infty 0} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}^{\infty 0} P_n^1(\cos \eta), \quad (3.44a)$$

$$\text{avec } w_{1n}^{\infty 0} = -c\sqrt{2} \gamma_{zy} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.44b)$$

$$(3.44c)$$

Pour le troisième cas, on a utilisé la relation :

$$\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz} = 0. \quad (3.45)$$

Le but de notre étude est la détermination des forces exercées sur les gouttes dues à un écoulement linéaire quelconque. Nous venons de voir que le problème général se ramène à 6 cas d'étude indépendants. Il est encore possible de simplifier le problème en regardant les expressions des forces calculées à partir des relations (3.16d). Nous utilisons les résultats généraux de la thèse de Lin [93]. Après une adaptation entre les notations de Lin et les nôtres, les forces sur les gouttes 1 et 2 exprimées dans le système de coordonnées rectilignes sont les suivantes :

– pour la goutte 1 :

$$F_x^1 = 8\sqrt{2}\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) D_{-1n}^{e0}, \quad (3.46a)$$

$$F_y^1 = 8\sqrt{2}\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) D_{1n}^{e0}, \quad (3.46b)$$

$$F_z^1 = -8\sqrt{2}\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) D_{-0n}^{e0}, \quad (3.46c)$$

– pour la goutte 2 :

$$F_x^2 = 8\sqrt{2}\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) C_{-1n}^{e0}, \quad (3.47a)$$

$$F_y^2 = 8\sqrt{2}\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) C_{1n}^{e0}, \quad (3.47b)$$

$$F_z^2 = 8\sqrt{2}\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) C_{-0n}^{e0}. \quad (3.47c)$$

Ces résultats permettent de généraliser ceux présentés par Zinchenko [154]. Les moments exercés sur les gouttes sont nuls quel que soit l'écoulement externe (cf. annexe C). Les différences de signe entre nos relations et celles de Zinchenko proviennent de la définition prise pour les fonctions de Legendre. Nous voyons que les champs de vitesse et de pression d'harmonique 2 n'interviennent jamais dans les calculs des forces. Il ne sera donc pas nécessaire de les déterminer dans un premier temps. Le cas d'étude 4 n'engendre aucun effort. Son développement ne sera pas poursuivi. En fait, la nullité des efforts pour ce cas peut être démontrée en utilisant la méthode de Bretherton [19]. Cette démonstration est faite dans l'annexe D. Cette analyse nous amène à étudier uniquement les cas 1, 2, 3, 5 et 6. Seul les champs axisymétriques du cas 3 donnent une force suivant l'axe  $z$ . Nous utiliserons pour calculer les composantes suivant l'axe  $z$  la méthode proposée par Wang *et al.* [145]. Le cas 1 donne des forces suivant l'axe  $x$  uniquement. De façon analogue, le cas 2 ne donne des efforts que suivant l'axe  $y$ . La résolution de ces deux cas est en effet totalement identique comme nous l'avons déjà vu plus haut. Il en est de même pour les cas 5 et 6. Les cas 1 et 2 ont été résolus par Wang *et al.* [145]. Nous allons utiliser leur méthode pour l'appliquer à la détermination des forces pour les cas 5 et 6.

Le développement des problèmes asymétriques est présenté dans le paragraphe suivant. Nous verrons ensuite le problème axisymétrique.

## 3.2 Problème asymétrique

Afin que cette étude soit complète, le déplacement suivant l'axe  $x$  des gouttes est pris en compte. Leur vitesse est notée  $V^1$  pour la goutte 1 et  $V^2$  pour la deuxième. Le champ de vitesse à l'infini est pris de la façon suivante :

$$\vec{u}^\infty = \gamma_{xz} z \vec{i} + \gamma_{zx} x \vec{k}. \quad (3.48)$$

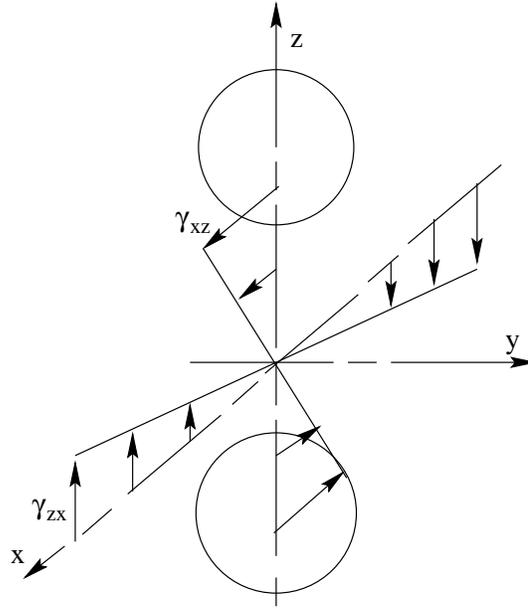


FIG. 3.2 – Représentation du champ de vitesse non-perturbé donné par le relation (3.48).

$\vec{i}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires suivant les axes  $x$  et  $z$  respectivement. Cette vitesse est visualisée sur la figure 3.2.

Ces deux types d'écoulement n'engendrent qu'une seule composante de force suivant l'axe  $x$ . Ce résultat ne présente aucune ambiguïté pour le taux de cisaillement  $\gamma_{xz}$ . Par contre, pour  $\gamma_{zx}$  la présence de cette force suivant l'axe  $x$  n'est pas aussi évidente. Pourtant, nous l'avons démontré dans la section précédente. Cette force peut également être retrouvée en utilisant le raisonnement de Bretherton [19]. Par symétrie, on montre que les composantes suivant les axes  $y$  et  $z$  ne peuvent qu'être nulles (cf. annexe D). Les champs de vitesse et de pression pour les écoulements de perturbation et du fluide à l'intérieur des gouttes sont rappelés ci-dessous :

$$p = \frac{2\mu}{c} Q_{-1}^0 \cos \theta, \quad (3.49a)$$

$$u_p = \left( \frac{\rho}{c} Q_{-1}^0 + W_{-1}^1 + W_{-1}^{-1} \right) \cos \theta, \quad (3.49b)$$

$$u_\theta = (W_{-1}^1 - W_{-1}^{-1}) \sin \theta, \quad (3.49c)$$

$$u_z = \left( \frac{z}{c} Q_{-1}^0 + 2W_{-1}^0 \right) \cos \theta. \quad (3.49d)$$

Les formes des fonctions  $Q_{-1}^0$ ,  $W_{-1}^{-1}$ ,  $W_{-1}^1$  et  $W_{-1}^0$  sont :

$$Q_{-1}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} q_{-1n} P_n^1, \quad (3.50a)$$

$$W_{-1}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{-1n}^{-1} P_n, \quad (3.50b)$$

$$W_{-1}^1 = \sum_{n=2}^{\infty} w_{-1n}^1 P_n^2, \quad (3.50c)$$

$$W_{-1}^0 = \sum_{n=1}^{\infty} w_{-1n}^0 P_n^1, \quad (3.50d)$$

où  $q_{-1n}$  et  $w_{-1n}^i$  sont données par :

$$w_{-1n}^i = A_{-1n}^i e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + B_{-1n}^i e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}, \quad (3.51a)$$

$$q_{-1n} = C_{-1n}^0 e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + D_{-1n}^0 e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}. \quad (3.51b)$$

Pour le champ de vitesse non-perturbé, nous avons les relations :

$$W_{-1}^{\infty-1} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=0}^{\infty} w_{-1n}^{\infty-1} P_n(\cos \eta), \quad (3.52a)$$

$$\text{avec } w_{-1n}^{\infty-1} = c\sqrt{2} (2n+1) \gamma_{xz} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} \text{sign} \zeta, \quad (3.52b)$$

$$W_{-1}^{\infty 0} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=1}^{\infty} w_{-1n}^{\infty 0} P_n^1(\cos \eta), \quad (3.53a)$$

$$\text{avec } w_{-1n}^{\infty 0} = -c\sqrt{2} \gamma_{zx} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.53b)$$

La résolution du problème revient à chercher les relations liant les coefficients numériques  $A_{-1n}^{ei}$ ,  $B_{-1n}^{ei}$ ,  $C_{-1n}^{e0}$ ,  $D_{-1n}^{e0}$ ,  $A_{-1n}^{1i}$ ,  $B_{-1n}^{1i}$ ,  $C_{-1n}^{10}$ ,  $D_{-1n}^{10}$ ,  $A_{-1n}^{2i}$ ,  $B_{-1n}^{2i}$ ,  $C_{-1n}^{20}$  et  $D_{-1n}^{20}$ .

L'établissement de ces relations se fait en exprimant les conditions aux limites et de divergence nulle de la vitesse pour les trois écoulements. La condition d'annulation à l'infini de l'écoulement perturbé est directement vérifiée par la forme de la vitesse (3.49d). En effet, le point à l'infini correspond à  $\eta = 0$  et  $\zeta = 0$ . Ce qui entraîne que les fonctions  $Q_m^0$  et  $W_m^i$  sont identiquement nulles car  $\cosh \zeta = \cos \eta$ . L'écoulement à l'intérieur des gouttes ne doit présenter aucune valeur infinie. Pour satisfaire cette condition, il faut que :

$$B_{-1n}^{1i} = D_{-1n}^{10} = 0, \quad (3.54a)$$

$$A_{-1n}^{2i} = C_{-1n}^{20} = 0. \quad (3.54b)$$

Ces conditions sont issues du fait que  $\zeta$  tend vers  $+\infty$  à l'intérieur de la goutte 1 et vers  $-\infty$  dans la goutte 2.

La suite de ce paragraphe est consacrée à l'écriture des conditions aux limites et de divergence nulle de la vitesse. La méthode suit celle présentée par Zinchenko [154] que nous allons

généraliser. La présentation est faite pour la valeur de  $k$  égale à  $-1$ . Mais les résultats sont généralisables pour une valeur de  $k$  quelconque. Ces derniers sont présentés dans l'annexe A. Cette généralisation est très intéressante si une résolution complète de l'écoulement, où interviennent des harmoniques d'ordre 2, est souhaitable. Pour simplifier les notations, l'indice inférieur  $-1$  est supprimé par la suite.

### 3.2.1 Equation de continuité

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques est rappelée ci-dessous :

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.55)$$

En substituant les relations donnant la vitesse (3.49d) dans l'expression de la divergence (3.55) qui doit être vérifiée quelle que soit la valeur de  $\theta$ , on obtient la relation suivante :

$$3Q^0 + \rho \frac{\partial Q^0}{\partial \rho} + z \frac{\partial Q^0}{\partial z} + c \left( \frac{\partial W^1}{\partial \rho} + \frac{2W^1}{\rho} + \frac{\partial W^{-1}}{\partial \rho} + 2 \frac{\partial W^0}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.56)$$

Cette dernière relation doit être également vérifiée pour des valeurs quelconques de  $\zeta$  et de  $\eta$ . Après un long calcul [100], les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} 5C_n^0 - (n-1)C_{n-1}^0 + (n+2)C_{n+1}^0 - 2A_n^{-1} + A_{n-1}^{-1} + A_{n+1}^{-1} + 2(n-1)(n+2)A_n^1 \\ - (n-2)(n-1)A_{n-1}^1 - (n+2)(n+3)A_{n+1}^1 \\ - 2(2n+1)A_n^0 + 2(n-1)A_{n-1}^0 + 2(n+2)A_{n+1}^0 = 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} 5D_n^0 - (n-1)D_{n-1}^0 + (n+2)D_{n+1}^0 - 2B_n^{-1} + B_{n-1}^{-1} + B_{n+1}^{-1} + 2(n-1)(n+2)B_n^1 \\ - (n-2)(n-1)B_{n-1}^1 - (n+2)(n+3)B_{n+1}^1 \\ + 2(2n+1)B_n^0 - 2(n-1)B_{n-1}^0 - 2(n+2)B_{n+1}^0 = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ces deux relations sont valides pour les coefficients de l'écoulement externe. Pour la goutte 1, seule l'équation (3.57) est prise en considération. Pour la goutte 2, seule l'expression (3.58) est retenue. Les différences de signe entre nos relations et celles de Zinchenko [154] proviennent toujours de la définition retenue pour les fonctions de Legendre.

Afin de simplifier l'écriture des relations (3.57) et (3.58), il est intéressant de poser, en suivant Zinchenko [154], les coefficients supplémentaires :

$$I_n = 5C_n^0 - 2A_n^{-1} + 2(n-1)(n+2)A_n^1, \quad (3.59a)$$

$$J_n = 5D_n^0 - 2B_n^{-1} + 2(n-1)(n+2)B_n^1, \quad (3.59b)$$

$$K_{n-1} = -(n-1)C_{n-1}^0 + A_{n-1}^{-1} - (n-2)(n-1)A_{n-1}^1, \quad (3.59c)$$

$$L_{n-1} = -(n-1)D_{n-1}^0 + B_{n-1}^{-1} - (n-2)(n-1)B_{n-1}^1, \quad (3.59d)$$

$$M_{n+1} = (n+2)C_{n+1}^0 + A_{n+1}^{-1} - (n+2)(n+3)A_{n+1}^1, \quad (3.59e)$$

$$N_{n+1} = (n+2)D_{n+1}^0 + B_{n+1}^{-1} - (n+2)(n+3)B_{n+1}^1. \quad (3.59f)$$

Les nouvelles fonctions sont alors introduites :

$$\alpha_n(\zeta) = I_n e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + J_n e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}, \quad (3.60a)$$

$$\beta_n(\zeta) = K_n e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + L_n e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}, \quad (3.60b)$$

$$\gamma_n(\zeta) = M_n e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + N_n e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}. \quad (3.60c)$$

Ce qui entraîne les identités suivantes compte tenu de (3.51b) :

$$\alpha_n = 5q_n - 2w_n^{-1} + 2(n-1)(n+2)w_n^1, \quad (3.61a)$$

$$\beta_{n-1} = -(n-1)q_{n-1} + w_{n-1}^{-1} - (n-2)(n-1)w_{n-1}^1, \quad (3.61b)$$

$$\gamma_{n+1} = (n+2)q_{n+1} + w_{n+1}^{-1} - (n+2)(n+3)w_{n+1}^1. \quad (3.61c)$$

Les équations de continuité peuvent alors s'écrire de la façon suivante :

– pour l'écoulement externe :

$$I_n^e + K_{n-1}^e + M_{n+1}^e - 2(2n+1)A_n^{e0} + 2(n-1)A_{n-1}^{e0} + 2(n+2)A_{n+1}^{e0} = 0, \quad (3.62a)$$

$$J_n^e + L_{n-1}^e + N_{n+1}^e + 2(2n+1)B_n^{e0} - 2(n-1)B_{n-1}^{e0} - 2(n+2)B_{n+1}^{e0} = 0; \quad (3.62b)$$

– pour la goutte 1 :

$$I_n^1 + K_{n-1}^1 + M_{n+1}^1 - 2(2n+1)A_n^{10} + 2(n-1)A_{n-1}^{10} + 2(n+2)A_{n+1}^{10} = 0; \quad (3.63)$$

– pour la goutte 2 :

$$J_n^2 + L_{n-1}^2 + N_{n+1}^2 + 2(2n+1)B_n^{20} - 2(n-1)B_{n-1}^{20} - 2(n+2)B_{n+1}^{20} = 0. \quad (3.64)$$

### 3.2.2 Continuité des vitesses

Il convient d'établir les relations liant les divers coefficients numériques de notre problème traduisant la continuité des vitesses (3.10b). Nous traitons cette condition pour les deux gouttes en même temps. Le symbole  $\alpha$  représente l'indice sur les gouttes qui peut prendre les valeurs 1 ou 2. Il est nécessaire pour que la continuité des vitesses soit satisfaite que l'on ait :

$$u_\rho^t = u_\rho^\alpha, \quad (3.65a)$$

$$u_\theta^t = u_\theta^\alpha, \quad (3.65b)$$

$$u_z^t = u_z^\alpha. \quad (3.65c)$$

Ce qui conduit aux trois relations suivantes :

$$\frac{\rho}{c}Q^{t0} + W^{t1} + W^{t-1} = \frac{\rho}{c}Q^{\alpha0} + W^{\alpha1} + W^{\alpha-1}, \quad (3.66a)$$

$$W^{t-1} - W^{t1} = W^{\alpha-1} - W^{\alpha1}, \quad (3.66b)$$

$$\frac{z}{c}Q^{t0} + 2W^{t0} = \frac{z}{c}Q^{\alpha0} + 2W^{\alpha0}. \quad (3.66c)$$

On obtient ensuite trois expressions déterminées en fonction de la différence  $W^{\alpha0} - W^{t0}$  :

$$Q^{\alpha0} - Q^{t0} = -\frac{2(\cosh \zeta - \cos \eta)}{\sinh \zeta} (W^{\alpha0} - W^{t0}), \quad (3.67a)$$

$$W^{\alpha-1} - W^{t-1} = \frac{\sin \eta}{\sinh \zeta} (W^{\alpha0} - W^{t0}), \quad (3.67b)$$

$$W^{\alpha1} - W^{t1} = \frac{\sin \eta}{\sinh \zeta} (W^{\alpha0} - W^{t0}). \quad (3.67c)$$

En utilisant les relations de récurrence sur les fonctions de Legendre ([51], pages 1004-1006) et en posant  $Z_n^\alpha = w_n^{\alpha 0} - w_n^{e 0}$ , la condition de continuité des vitesses s'exprime à l'aide des trois équations suivantes :

$$q_n^\alpha - q_n^e = \frac{2}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n-1}{2n-1} (Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}) + \frac{n+2}{2n+3} (Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}) - \cosh \zeta_\alpha (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) \right], \quad (3.68)$$

$$w_n^{\alpha-1} - w_n^{e-1} = \frac{1}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n(n-1)}{2n-1} (Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}) - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} (Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}) \right], \quad (3.69)$$

$$w_n^{\alpha 1} - w_n^{e 1} = \frac{-1}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}}{2n-1} - \frac{Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}}{2n+3} \right]. \quad (3.70)$$

La nouveauté dans le résultat précédent est l'apparition du terme  $w_n^{\infty 0}$ .

### 3.2.3 Condition de continuité du flux de masse

A la surface de la goutte  $\alpha$ , le flux de masse est continu, soit dans le repère absolu :

$$\vec{u}^t \cdot \vec{n}^\alpha = \vec{V}^\alpha \cdot \vec{n}^\alpha. \quad (3.71)$$

Dans le repère lié à la goutte  $\alpha$  (repère se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}^\alpha$ ), la vitesse est :

$$\vec{u}^* = \vec{u} - \vec{V}^\alpha. \quad (3.72)$$

La condition ci-dessus devient une condition de flux de masse nul :

$$\vec{u}^{*t} \cdot \vec{n}^\alpha = 0. \quad (3.73)$$

L'utilisation des coordonnées bisphériques va permettre une simplification de cette condition. Les composantes de la vitesse de la goutte  $\alpha$  dans le référentiel bisphérique sont :

$$V_\zeta^\alpha = -\frac{V^\alpha \cos \theta \sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta}, \quad (3.74a)$$

$$V_\theta^\alpha = -V^\alpha \sin \theta, \quad (3.74b)$$

$$V_\eta^\alpha = -\frac{V^\alpha \cos \theta (1 - \cos \eta \cosh \zeta)}{\cosh \zeta - \cos \eta}. \quad (3.74c)$$

La relation (3.71) se transforme en

$$u_\zeta^t = -V^\alpha \cos \theta \frac{\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta}, \quad (3.75)$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$  où  $u_\zeta^t$  est la composante physique de la vitesse de l'écoulement externe suivant l'axe  $\zeta$  dans le système de coordonnées bisphériques. Le changement de base entre les systèmes cylindrique et bisphérique permet d'écrire  $u_\zeta$  sous la forme :

$$u_\zeta = \frac{-\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_\rho + \frac{1 - \cos \eta \cosh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_z. \quad (3.76)$$

En utilisant les relations (3.49d) donnant  $u_\rho$  et  $u_z$ , la composante  $u_\zeta$  est

$$u_\zeta = \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \eta} \left[ -\cos \eta \sinh \zeta Q^0 - \sin \eta \sinh \zeta (W^1 + W^{-1}) + 2(1 - \cos \eta \cosh \zeta) W^0 \right] \cos \theta. \quad (3.77)$$

La condition de continuité de flux de masse (3.75) impose que

$$-\cos \eta \sinh \zeta_\alpha Q^{t0} - \sin \eta \sinh \zeta_\alpha (W^{t1} + W^{t-1}) + 2(1 - \cos \eta \cosh \zeta_\alpha) W^{t0} = -V^\alpha \sin \eta \sinh \zeta_\alpha. \quad (3.78)$$

Grâce aux relations de récurrence des fonctions de Legendre, il est possible de transformer la précédente relation et de faire apparaître les définitions (3.61c), on obtient alors l'équation :

$$\frac{\gamma_{n+1}^t}{2n+3} - \frac{\beta_{n-1}^t}{2n-1} + \frac{2 \cosh \zeta_\alpha}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{(n-1)w_{n-1}^{t0}}{2n-1} + \frac{(n+2)w_{n+1}^{t0}}{2n+3} \right] - \frac{2w_n^{t0}}{\sinh \zeta_\alpha} = -V^\alpha \sqrt{2} \left[ \frac{e^{-(n-\frac{1}{2})|\zeta_\alpha|}}{2n-1} - \frac{e^{-(n+\frac{3}{2})|\zeta_\alpha|}}{2n+3} \right]. \quad (3.79)$$

Il est à noter qu'en utilisant (3.61c),  $\gamma_n^t$  et  $\beta_n^t$  sont égales à :

$$\gamma_n^t = \gamma_n^e + w_n^{-1\infty}, \quad (3.80a)$$

$$\beta_n^t = \beta_n^e + w_n^{-1\infty}. \quad (3.80b)$$

### 3.2.4 Continuité des contraintes tangentielles

La démonstration est faite pour les deux gouttes. La condition sur les contraintes tangentielles s'exprime sous la forme :

$$(\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n}^\alpha) \cdot \vec{\tau}^\alpha = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \vec{n}^\alpha) \cdot \vec{\tau}^\alpha. \quad (3.81)$$

Le tenseur des contraintes est exprimé dans le système de coordonnées bisphériques. Son expression complète est donné dans l'annexe B. Si  $\vec{e}_\zeta$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\eta$  représentent les vecteurs de base du système bisphérique, la condition ci-dessus peut se transformer ainsi :

$$(\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{e}_\zeta^\alpha) \cdot \vec{e}_\theta^\alpha = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \vec{e}_\zeta^\alpha) \cdot \vec{e}_\theta^\alpha, \quad (3.82a)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{e}_\zeta^\alpha) \cdot \vec{e}_\eta^\alpha = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \vec{e}_\zeta^\alpha) \cdot \vec{e}_\eta^\alpha. \quad (3.82b)$$

En utilisant les résultats de l'annexe B, la contrainte a pour expression :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_\zeta &= \left[ -p + \frac{2\mu}{h_b} \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{1}{h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \eta} u_\eta \right) \right] \vec{e}_\zeta + \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} - \frac{1}{h_b \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} u_\theta + \frac{1}{h_b} \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \frac{\mu}{h_b} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta}{h_b} \right) \right] \vec{e}_\eta. \end{aligned} \quad (3.83)$$

$\mu$  est la viscosité dynamique.  $h_b$  est le facteur d'échelle (cf. [5]) défini par la relation :

$$h_b = \frac{c}{\cosh \zeta - \cos \eta}. \quad (3.84)$$

Il est possible de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{h_b} \right) = -\frac{1}{h_b \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta}. \quad (3.85)$$

Ce qui entraîne que la composante suivant  $\vec{e}_\theta$ , notée  $T_\theta$ , devient :

$$T_\theta = \mu \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\theta}{h_b} \right) \right]. \quad (3.86)$$

Les conditions (3.82b) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\zeta^t}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\theta^t}{h_b} \right) = \hat{\mu} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\zeta^\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\theta^\alpha}{h_b} \right) \right], \quad (3.87a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^t}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^t}{h_b} \right) = \hat{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^\alpha}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^\alpha}{h_b} \right) \right]. \quad (3.87b)$$

$\hat{\mu}$  est le rapport des viscosités dynamiques  $\mu'/\mu$ .

Pour simplifier les relations sur les contraintes, on se place dans le repère lié à la goutte  $\alpha$  où les champs de vitesse ont été définis, relation (3.72). La condition de flux de masse nul se simplifie sous la forme :

$$u_\zeta^{*\alpha} = 0. \quad (3.88)$$

Il est alors facile de voir que nous avons :

$$\left( \frac{\partial u_\zeta^{*t}}{\partial \theta} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha} = 0, \quad (3.89a)$$

$$\left( \frac{\partial u_\zeta^{*\alpha}}{\partial \theta} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha} = 0. \quad (3.89b)$$

De même, les conditions de flux de masse nul permettent de conclure que la dérivée par rapport à  $\eta$  de  $u_\zeta^*/h_b$  est nulle :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^{*t}}{h_b} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha} = 0, \quad (3.90a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^{*\alpha}}{h_b} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha} = 0. \quad (3.90b)$$

A l'aide des relations (3.89b) et (3.90b), les conditions sur les contraintes deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_{\theta}^{*t}}{h_b} \right) = \hat{\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_{\theta}^{*\alpha}}{h_b} \right), \quad (3.91a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_{\eta}^{*t}}{h_b} \right) = \hat{\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_{\eta}^{*\alpha}}{h_b} \right). \quad (3.91b)$$

Il est alors nécessaire de transformer ces deux dernières relations afin d'éliminer les fonctions de Legendre. Commençons par examiner le relation suivant le direction  $\eta$ .

Les composantes de la vitesse relative sont :

$$u_{\zeta}^* = \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \eta} \left[ -\cos \eta \sinh \zeta - \sin \eta \sinh \zeta (W^1 + W^{-1} - V^{\alpha}) + 2(1 - \cos \eta \cosh \zeta) W^{t0} \right] \cos \theta, \quad (3.92a)$$

$$u_{\eta}^* = \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \eta} \left[ -\sin \eta \cosh \zeta Q^0 + (\cos \eta \cosh \zeta - 1)(W^1 + W^{-1} - V^{\alpha}) - 2 \sin \eta \sinh \zeta W^0 \right] \cos \theta. \quad (3.92b)$$

Si l'on pose pour les composantes physiques  $u_{\zeta}^*$  et  $u_{\eta}^*$

$$u_{\zeta 1}^* = -\cos \eta \sinh \zeta Q^0 - \sin \eta \sinh \zeta (W^1 + W^{-1} - V^{\alpha}) + 2(1 - \cos \eta \cosh \zeta) W^{t0}, \quad (3.93a)$$

$$u_{\eta 1}^* = -\sin \eta \cosh \zeta Q^0 + (\cos \eta \cosh \zeta - 1)(W^1 + W^{-1} - V^{\alpha}) - 2 \sin \eta \sinh \zeta W^0 \quad (3.93b)$$

$u_{\zeta}^*$  et  $u_{\eta}^*$  sont égales à

$$u_{\eta}^* = \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_{\eta 1}^* \cos \theta, \quad (3.94a)$$

$$u_{\zeta}^* = \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_{\zeta 1}^* \cos \theta. \quad (3.94b)$$

La condition de flux de masse nul s'exprime en terme de  $u_{\zeta 1}^*$  sous la forme :

$$u_{\zeta 1}^{*t} = u_{\zeta 1}^{*\alpha} = 0, \quad (3.95)$$

en  $\zeta = \zeta_{\alpha}$ . La relation (3.91bb) peut s'écrire :

$$\left( \frac{\partial u_{\eta 1}^{*t}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_{\alpha}} = \hat{\mu} \left( \frac{\partial u_{\eta 1}^{*\alpha}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_{\alpha}}. \quad (3.96)$$

Afin d'utiliser au maximum la condition de flux de masse nul,  $u_{\eta 1}^*$  est prise sous la forme :

$$u_{\eta 1}^* = \frac{-1}{\sin \eta} \left[ (\cosh \zeta - \cos \eta) Q^0 + \frac{2(\cosh \zeta - \cos \eta)^2}{\sinh \zeta} W^0 + \frac{\cos \eta \cosh \zeta - 1}{\sinh \zeta} u_{\zeta 1}^* \right]. \quad (3.97)$$

La dérivée par rapport à  $\zeta$  de cette dernière relation est alors pour l'écoulement externe :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_{\eta 1}^{*t}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha} &= \frac{-1}{\sin \eta} \left[ \frac{3}{2} \sinh \zeta_\alpha Q^{t0} + 3(\cosh \zeta - \cos \eta) W^{t0} + \right. \\ &\quad \left. \sin^2 \eta \cosh \zeta_\alpha \frac{DQ^{t0}}{\partial \zeta} + 2 \sinh \zeta_\alpha \sin^2 \eta \frac{DW^{t0}}{\partial \zeta} \right. \\ &\quad \left. - (\cos \eta \cosh \zeta_\alpha - 1) \sin \eta \frac{D(W^{t1} + W^{t-1} - V^\alpha)}{\partial \zeta} \right], \end{aligned} \quad (3.98)$$

où le terme  $\frac{D}{\partial \zeta}$  est défini par :

$$\frac{D}{\partial \zeta} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{d}{d\zeta} P_n^i. \quad (3.99)$$

Il est possible de faire apparaître les fonctions  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  définies en (3.60c). Dans le calcul, nous avons besoin également des relations permettant d'exprimer les quantités  $q_n$ ,  $w_n^1$  et  $w_n^{-1}$  en fonction de  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  et  $\gamma_n$ . Ces dernières obtenues en inversant le système (3.61c) sont données ci-dessous :

$$3(2n+1)q_n = (2n+1)\alpha_n + 2(n+2)\beta_n + 2(n-1)\gamma_n, \quad (3.100a)$$

$$6(2n+1)w_n^1 = (2n+1)\alpha_n + (2n+7)\beta_n + (2n-5)\gamma_n, \quad (3.100b)$$

$$\begin{aligned} 6(2n+1)w_n^{-1} &= (2n+1)n(n+1)\alpha_n + (n+1)(n+2)(2n+3)\beta_n \\ &\quad + n(n-1)(2n-1)\gamma_n. \end{aligned} \quad (3.100c)$$

La condition sur la contrainte tangentielle suivant la direction  $\eta$  devient :

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \sinh \zeta_\alpha (q_n^t - \hat{\mu} q_n^\alpha) + 3 \left[ \cosh \zeta_\alpha (w_n^{t0} - \hat{\mu} w_n^{\alpha 0}) - \frac{n-1}{2n-1} (w_{n-1}^{t0} - \hat{\mu} w_{n-1}^{\alpha 0}) \right. \\
& \left. - \frac{n+2}{2n+3} (w_{n+1}^{t0} - \hat{\mu} w_{n+1}^{\alpha 0}) \right] + \cosh \zeta_\alpha \left[ \frac{dq_n^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_n^\alpha}{d\zeta} + \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)} \right. \\
& \left( \frac{d\beta_{n-2}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_{n-2}^\alpha}{d\zeta} \right) - \frac{n-1}{(2n+1)(2n-1)} \left( \frac{d\gamma_n^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_n^\alpha}{d\zeta} \right) - \\
& \frac{n+2}{(2n+3)(2n+5)} \left( \frac{d\gamma_{n+2}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_{n+2}^\alpha}{d\zeta} \right) + \frac{n+2}{(2n+1)(2n+3)} \\
& \left. \left( \frac{d\beta_n^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_n^\alpha}{d\zeta} \right) \right] + 2 \sinh \zeta_\alpha \left[ \frac{2n(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} \left( \frac{dw_n^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_n^{\alpha 0}}{d\zeta} \right) - \right. \\
& \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)} \left( \frac{dw_{n-2}^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_{n-2}^{\alpha 0}}{d\zeta} \right) - \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} \\
& \left. \left( \frac{dw_{n+2}^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_{n+2}^{\alpha 0}}{d\zeta} \right) \right] - \frac{1}{2n-1} \left( \frac{d\beta_{n-1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_{n-1}^\alpha}{d\zeta} \right) - \frac{n-1}{2n-1} \\
& \left( \frac{dq_{n-1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_{n-1}^\alpha}{d\zeta} \right) + \frac{1}{2n+3} \left( \frac{d\gamma_{n+1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_{n+1}^\alpha}{d\zeta} \right) \\
& \left. - \frac{n+2}{2n+3} \left( \frac{dq_{n+1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_{n+1}^\alpha}{d\zeta} \right) = -2\sqrt{2}V^\alpha \sinh \zeta_\alpha (\hat{\mu} - 1) \left\{ \cosh \zeta_\alpha \left[ \frac{n+2}{2n+3} e^{-(n+\frac{3}{2})|\zeta_\alpha|} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{n-1}{2n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})|\zeta_\alpha|} \right] - e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta_\alpha|} \right\}. \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Afin d'exprimer cette dernière relation uniquement à l'aide des fonctions de l'écoulement externe, on utilise les équations (3.68), (3.69) et (3.70) traduisant la continuité des vitesses à l'interface entre les deux fluides. A l'aide de (3.61c), elles permettent également d'établir que

$$\beta_n^\alpha - \beta_n^t = \frac{2}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ n \cosh \zeta_\alpha (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} (Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}) \right], \tag{3.102a}$$

$$\gamma_n^\alpha - \gamma_n^t = \frac{2}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n(2n+1)}{2n-1} (Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}) - (n-1) \cosh \zeta_\alpha (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) \right]. \tag{3.102b}$$

De même, les termes avec les dérivées par rapport à  $\zeta$  peuvent être transformés en utilisant les relations (3.68), (3.69) et (3.70). Nous définissons au préalable la fonction :

$$f_n^\pm = \frac{\frac{df_n}{d\zeta} \pm \hat{\mu}(n + \frac{1}{2})f_n}{(n + \frac{1}{2})(\hat{\mu} + 1)}. \tag{3.103}$$

La fonction  $f_n$  est générique. Le signe plus est utilisé en  $\zeta = \zeta_1$  et le signe moins en  $\zeta_2$ . Le terme  $\hat{\mu} + 1$  au dénominateur n'est pas indispensable. Mais il permet de stabiliser la solution numérique lorsque  $\hat{\mu}$  devient grand. Le premier code de calcul avait été réalisé sans ce terme. Il

s'est avéré que certaines solutions étaient fausses. L'introduction du terme  $\hat{\mu} + 1$  dans une autre version du code a conduit à de meilleurs résultats. A l'aide de cette définition et de (3.61c), (3.68)-(3.70), il est possible de montrer les relations suivantes :

$$\frac{dw_n^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_n^{\alpha 0}}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} [(\hat{\mu} + 1)w_n^{t\pm} \pm \hat{\mu}(Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0})], \quad (3.104)$$

$$\frac{dq_n^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_n^{\alpha 0}}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} \left\{ (\hat{\mu} + 1)q_n^{t\pm} \pm \frac{2\hat{\mu}}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n-1}{2n-1} (Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}) + \frac{n+2}{2n+3} (Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}) - \cosh \zeta_\alpha (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) \right] \right\}, \quad (3.105)$$

$$\frac{d\beta_n^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_n^\alpha}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} \left\{ (\hat{\mu} + 1)\beta_n^{t\pm} \pm \frac{2\hat{\mu}}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ n \cosh \zeta_\alpha (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} (Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}) \right] \right\}, \quad (3.106)$$

$$\frac{d\gamma_n^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_n^\alpha}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} \left\{ (\hat{\mu} + 1)\gamma_n^{t\pm} \pm \frac{2\hat{\mu}}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n(2n+1)}{2n-1} (Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}) - (n-1) \cosh \zeta_\alpha (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) \right] \right\}. \quad (3.107)$$

La condition de continuité des contraintes suivant l'axe  $\eta$  s'écrit finalement sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{3(\hat{\mu} - 1)}{\hat{\mu} + 1} \left[ \sinh \zeta_\alpha q_n^t + 2 \left( \cosh \zeta_\alpha w_n^{t0} - \frac{n-1}{2n-1} w_{n-1}^{t0} - \frac{n+2}{2n+3} w_{n+1}^{t0} \right) \right] + \\ & \cosh \zeta_\alpha \left[ \frac{n+2}{2n+3} (\gamma_{n+2}^{t\pm} - \beta_n^{t\pm}) + \frac{n-1}{2n-1} (\gamma_n^{t\pm} - \beta_{n-2}^{t\pm}) - (2n+1)q_n^{t\pm} \right] + \\ & 2 \sinh \zeta_\alpha \left[ \frac{(n-1)(n-2)}{2n-1} w_{n-2}^{t\pm} + \frac{(n+2)(n+3)}{2n+3} w_{n+2}^{t\pm} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{(2n-1)(2n+3)} w_n^{t\pm} \right] \\ & + \beta_{n-1}^{t\pm} - \gamma_{n+1}^{t\pm} + (n-1)q_{n-1}^{t\pm} + (n+2)q_{n+1}^{t\pm} + \\ & \frac{4\hat{\mu}}{(\hat{\mu} + 1) |\sinh \zeta_\alpha|} \left\{ \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} (Z_{n-2}^\alpha - w_{n-2}^{\infty 0}) - \frac{2(n-1)^2}{(2n-1)^2} \cosh \zeta_\alpha (Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}) + \right. \\ & \left. \frac{2}{2n+1} \left[ \frac{2n(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} - 1 \right] (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) + \frac{2(n+2)^2}{(2n+3)^2} \cosh \zeta_\alpha (Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}) - \right. \\ & \left. \frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} (Z_{n+2}^\alpha - w_{n+2}^{\infty 0}) \right\} = - \frac{2\sqrt{2}V^\alpha \sinh \zeta_\alpha (\hat{\mu} - 1)}{\hat{\mu} + 1} \\ & \left\{ \cosh \zeta_\alpha \left[ \frac{n+2}{2n+3} e^{-(n+\frac{3}{2})|\zeta_\alpha|} + \frac{n-1}{2n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})|\zeta_\alpha|} \right] - e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta_\alpha|} \right\}. \quad (3.108) \end{aligned}$$

Cette relation est une généralisation de celle de Zinchenko [154]. Notre expression comporte en plus les termes  $w_n^{\infty 0}$ . Ils proviennent de l'introduction du cisaillement perpendiculaire à la ligne des centres des gouttes,  $\gamma_{zx}$ .

Il reste à voir la condition suivant l'axe  $\theta$  qui en réalité va nous permettre d'obtenir une expression pour la quantité  $q_n^{t\pm}$ . Le point de départ est l'écriture de l'équation de continuité pour la vitesse relative dans le système de coordonnées bisphériques :

$$\frac{1}{h_b^3} \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_b \rho u_\zeta^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\theta^*}{h_b} \right) + \frac{1}{h_b^3} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_b \rho u_\eta^*) = 0, \quad (3.109)$$

qui est vérifiée pour les fluides interne et externe. En combinant les deux équations de continuité pour les fluides interne et externe et en introduisant  $\hat{\mu}$ , on trouve :

$$\frac{1}{h_b^3} \frac{\partial}{\partial \zeta} [h_b \rho (u_\zeta^{*t} - \hat{\mu} u_\zeta^{*\alpha})] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\theta^{*t} - \hat{\mu} u_\theta^{*\alpha}}{h_b} \right) + \frac{1}{h_b^3} \frac{\partial}{\partial \eta} [h_b \rho (u_\eta^{*t} - \hat{\mu} u_\eta^{*\alpha})] = 0. \quad (3.110)$$

Si cette dernière expression est dérivée par rapport à  $\zeta$  et par utilisation de la condition sur les contraintes tangentielles suivant l'axe  $\theta$ , nous trouvons l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{1}{h_b^3} \frac{\partial}{\partial \zeta} [h_b \rho (u_\zeta^{*t} - \hat{\mu} u_\zeta^{*\alpha})] \right\}_{\zeta_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{1}{h_b^3} \frac{\partial}{\partial \eta} [h_b \rho (u_\eta^{*t} - \hat{\mu} u_\eta^{*\alpha})] \right\}_{\zeta_\alpha} = 0. \quad (3.111)$$

Les formes (3.94b), donnant  $u_\zeta^*$  et  $u_\eta^*$  en fonction de  $u_{\zeta 1}^*$  et  $u_{\eta 1}^*$  respectivement, permettent d'écrire cette dernière relation sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{\zeta 1}^{*t}}{\partial \zeta^2} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 u_{\zeta 1}^{*\alpha}}{\partial \zeta^2} - \frac{3 \sinh \zeta_\alpha}{\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta} \left( \frac{\partial u_{\zeta 1}^{*t}}{\partial \zeta} - \hat{\mu} \frac{\partial u_{\zeta 1}^{*\alpha}}{\partial \zeta} \right) + \\ & \frac{3 \sinh \zeta_\alpha \sin \eta}{(\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta)^2} (u_{\eta 1}^{*t} - \hat{\mu} u_{\eta 1}^{*\alpha}) - \frac{3 \sin \eta}{\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta} \left( \frac{\partial u_{\eta 1}^{*t}}{\partial \zeta} - \hat{\mu} \frac{\partial u_{\eta 1}^{*\alpha}}{\partial \zeta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Il est à noter que le dernier terme du membre de gauche est identiquement nul d'après la condition des contraintes tangentielles suivant l'axe  $\eta$ . Au lieu de le supprimer, il est préférable de le garder afin de faire apparaître de nombreuses simplifications. On change seulement le coefficient 3 en 2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{\zeta 1}^{*t}}{\partial \zeta^2} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 u_{\zeta 1}^{*\alpha}}{\partial \zeta^2} - \frac{3 \sinh \zeta_\alpha}{\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta} \left( \frac{\partial u_{\zeta 1}^{*t}}{\partial \zeta} - \hat{\mu} \frac{\partial u_{\zeta 1}^{*\alpha}}{\partial \zeta} \right) + \\ & \frac{3 \sinh \zeta_\alpha \sin \eta}{(\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta)^2} (u_{\eta 1}^{*t} - \hat{\mu} u_{\eta 1}^{*\alpha}) - \frac{2 \sin \eta}{\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta} \left( \frac{\partial u_{\eta 1}^{*t}}{\partial \zeta} - \hat{\mu} \frac{\partial u_{\eta 1}^{*\alpha}}{\partial \zeta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Sous cette forme, la relation donnée par Zinchenko [154] est retrouvée. En utilisant les expressions donnant  $u_{\zeta 1}$  et  $u_{\eta 1}$  en fonction de  $Q^0$  et  $W^i$  et la condition de flux de masse nul, la relation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} & 2 \frac{D}{\partial \zeta} (Q^{t0} - \hat{\mu} Q^{\alpha 0}) - \cos \eta \sinh \zeta_\alpha \frac{D^2}{\partial \zeta^2} (Q^{t0} - \hat{\mu} Q^{\alpha 0}) + 2 (W^{t0} - \hat{\mu} W^{\alpha 0}) \\ & + 2 (1 - \cosh \zeta_\alpha \cos \eta) \frac{D^2}{\partial \zeta^2} (W^{t0} - \hat{\mu} W^{\alpha 0}) - \\ & \sin \eta \sinh \zeta_\alpha \frac{D^2}{\partial \zeta^2} [W^{t1} + W^{t-1} - V^\alpha - \hat{\mu} (W^{\alpha 1} + W^{\alpha-1} - V^\alpha)] = 0, \end{aligned} \quad (3.114)$$

où

$$\frac{D^2}{\partial \zeta^2} = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{d^2}{d\zeta^2} P_n^i. \quad (3.115)$$

En transformant (3.114) sous forme d'une série de fonctions de Legendre de rang 1, on obtient le résultat final suivant :

$$q_n^{t\pm} = \frac{2(1 - \hat{\mu})}{\hat{\mu} + 1} \left\{ \frac{\sinh \zeta_\alpha}{2n + 3} \left[ V^\alpha \sqrt{2} e^{-(n+\frac{3}{2})|\zeta_\alpha|} + \gamma_{n+1}^t \right] + \frac{2(n+2) \cosh \zeta_\alpha}{2n + 3} w_{n+1}^{t0} - w_n^{t0} \right\} \mp \frac{\hat{\mu}}{2(\hat{\mu} + 1)} X_n^\alpha, \quad (3.116)$$

avec  $X_n^\alpha$  donnée par

$$X_n^\alpha = \frac{4}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n-1}{2n-1} (Z_{n-1}^\alpha - w_{n-1}^{\infty 0}) + \frac{n+2}{2n+3} (Z_{n+1}^\alpha - w_{n+1}^{\infty 0}) + \left( \frac{|\sinh \zeta_\alpha|}{2n+1} - \cosh \zeta_\alpha \right) (Z_n^\alpha - w_n^{\infty 0}) \right]. \quad (3.117)$$

L'ensemble des conditions aux limites a été appliqué à ce stade. Nous voyons que le problème asymétrique fait apparaître des relations de récurrence. Ce point complique la résolution. Il reste à voir le développement de la méthode numérique présentée ci-dessous.

### 3.2.5 Résolution numérique du problème asymétrique

La méthode numérique employée ici est identique à celle de Zinchenko [154]. Dans un premier temps, il est nécessaire de modifier les équations traduisant la divergence nulle à l'intérieur des gouttes de façon à les exprimer en fonction des coefficients de l'écoulement externe. En utilisant les relations de continuité des vitesses entre les deux fluides (3.68), (3.69) et (3.70), les équations de divergence nulle à l'intérieur des gouttes 2 et 1 deviennent respectivement :

$$I_n^e + 2(2n+1)A_n^{e0} + e^{2\zeta_2} [K_{n-1}^e - 2(n-1)A_{n-1}^{e0}] + e^{-2\zeta_2} [M_{n+1}^e - 2(n-1)A_{n+1}^{e0}] + e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} X_n^2 = 0, \quad (3.118)$$

$$J_n^e - 2(2n+1)A_n^{e0} + e^{-2\zeta_1} [L_{n-1}^e + 2(n-1)B_{n-1}^{e0}] + e^{2\zeta_1} [N_{n+1}^e + 2(n-1)B_{n+1}^{e0}] + e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} X_n^1 = 0, \quad (3.119)$$

où  $X_n^1$  et  $X_n^2$  sont définies par la relation (3.117).

La première grande étape du calcul qui est répétée pour chaque valeur de  $n$  est la résolution du système linéaire constitué par les équations (3.62b), (3.118), (3.119) et (3.79) (pour  $\alpha = 1$  et 2) qui permet de trouver  $I_n^e$ ,  $J_n^e$ ,  $K_{n-1}^e$ ,  $L_{n-1}^e$ ,  $M_{n+1}^e$  et  $N_{n+1}^e$  en fonction de  $A_m^{e0}$ ,  $B_m^{e0}$ ,  $Z_m^1$ ,  $Z_m^2$ ,  $V^1$ ,  $V^2$ ,  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{zx}$  où  $m$  varie de  $n-1$  à  $n+1$ . Ce qui nous conduit à établir un système de récurrence portant sur les coefficients  $A_n^{e0}$ ,  $B_n^{e0}$ ,  $Z_n^1$  et  $Z_n^2$ .

Ainsi, on définit le vecteur colonne  $\mathbf{W}_n$  par :

$$\mathbf{W}_n = \begin{pmatrix} A_n^{e0} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \\ B_n^{e0} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \\ Z_n^1 \\ Z_n^2 \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

Le système de récurrence est obtenu à l'aide de l'équation exprimant la condition de continuité des contraintes suivant la direction  $\eta$  (3.108). Cette dernière nous permet d'établir deux relations de récurrence. Afin de ne faire apparaître que des coefficients d'ordre  $n - 2$  à  $n + 2$ ,  $q_n^{t\pm}$  est calculée à partir de la relation (3.116). Les deux dernières équations de récurrence sont obtenues en utilisant les deux expressions donnant  $q_n^{t\pm}$ . La première est celle précédemment citée (3.116), la deuxième est déterminée à partir de la définition de  $q_n^{t\pm}$  (3.103). Finalement, le système de récurrence peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{k=-2}^2 \mathbf{T}_n^k \cdot \mathbf{W}_{n+k} = V^1 \mathbf{S}_n^1 + V^2 \mathbf{S}_n^2 + a_1 \gamma_{xz} \mathbf{S}_n^{\gamma_{xz}} + a_1 \gamma_{zx} \mathbf{S}_n^{\gamma_{zx}}, \text{ pour } n \geq 1 \quad (3.121)$$

$$\mathbf{T}_n^k = 0, \text{ si } n + k < 1.$$

$\mathbf{T}_n^k$  est une matrice  $4 \times 4$ .  $\mathbf{S}_n^1$ ,  $\mathbf{S}_n^2$ ,  $\mathbf{S}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{S}_n^{\gamma_{zx}}$  sont des matrices colonnes  $4 \times 1$ . Leur expression analytique serait trop compliquée à calculer à la main. D'ailleurs, une expression trop lourde serait peu utile pour le calcul numérique. Elle est donc déterminée numériquement. La rayon  $a_1$  est introduit de façon à avoir pour les matrices  $\mathbf{S}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{S}_n^{\gamma_{zx}}$  des coefficients sans dimension.

Pour des raisons de régularité de l'écoulement,  $\mathbf{W}_n$  doit tendre vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. La résolution du problème requiert l'écriture, pour chaque valeur successive de  $n$ , du système (3.121) afin de trouver  $\mathbf{W}_n$ , pour  $n$  variant de 1 à  $N$ . Le calcul est arrêté lorsque  $\mathbf{W}_N$  est proche de zéro. Ensuite la connaissance des  $\mathbf{W}_n$  pour  $n$  variant de 1 à  $N$  permet le calcul des fonctions définissant l'écoulement externe et ceux à l'intérieur des gouttes.

Mais dans la mesure où seules les forces nous intéressent, il est possible de s'abstenir du calcul de  $\mathbf{W}_n$ . En effet, les expressions donnant les forces sur les gouttes ne fait intervenir que les coefficients  $C_n^{e0}$  et  $D_n^{e0}$ . On peut alors se limiter au calcul des sommes  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)C_n^{e0}$  et

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)D_n^{e0}.$$

A partir de la relation (3.116), nous obtenons

$$n(n+1) \begin{pmatrix} C_n^{e0} \\ D_n^{e0} \end{pmatrix} = \sum_{j=-1}^1 \mathbf{R}_n^j \cdot \mathbf{W}_{n+j} + V^1 \mathbf{G}_n^1 + V^2 \mathbf{G}_n^2 + a_1 \gamma_{xz} \mathbf{G}_n^{\gamma_{xz}} + a_1 \gamma_{zx} \mathbf{G}_n^{\gamma_{zx}},$$

pour  $n \geq 1$ . (3.122)

Pour calculer  $\mathbf{R}_n^j$  (matrice  $2 \times 4$ ),  $\mathbf{G}_n^1$ ,  $\mathbf{G}_n^2$ ,  $\mathbf{G}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{G}_n^{\gamma_{zx}}$  (matrices  $2 \times 1$ ),  $C_n^{e0}$  et  $D_n^{e0}$  sont déterminés en fonction de  $q_n^{t+}$  et  $q_n^{t-}$  à partir de la définition (3.103) :

$$C_n^{e0} = \frac{\frac{e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2}}{\hat{\mu}+1} q_n^{t-} + \frac{\hat{\mu}-1}{(\hat{\mu}+1)^2} e^{(2n+1)(\zeta_2-\frac{\zeta_1}{2})} q_n^{t+}}{\left(\frac{\hat{\mu}-1}{\hat{\mu}+1}\right)^2 e^{(2n+1)(\zeta_2-\zeta_1)} - 1}, \quad (3.123a)$$

$$D_n^{e0} = -\frac{\frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1}}{\hat{\mu}+1} q_n^{t+} + \frac{\hat{\mu}-1}{(\hat{\mu}+1)^2} e^{(2n+1)(\frac{\zeta_2}{2}-\zeta_1)} q_n^{t-}}{\left(\frac{\hat{\mu}-1}{\hat{\mu}+1}\right)^2 e^{(2n+1)(\zeta_2-\zeta_1)} - 1}. \quad (3.123b)$$

On voit que dans la relation matricielle (3.122),  $\mathbf{W}_n$  apparait. Il faut donc trouver un moyen pour s'abstenir du calcul de  $\mathbf{W}_n$ . A partir du système (3.121), nous pouvons établir la relation

suivante :

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{D}_n^1 \cdot \mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{D}_n^2 \cdot \mathbf{W}_{n+2} + V^1 \mathbf{A}_n^1 + V^2 \mathbf{A}_n^2 + a_1 \gamma_{xz} \mathbf{A}_n^{\gamma_{xz}} + a_1 \gamma_{zx} \mathbf{A}_n^{\gamma_{zx}}. \quad (3.124)$$

Où  $\mathbf{D}_n^1$ ,  $\mathbf{D}_n^2$ ,  $\mathbf{A}_n^1$ ,  $\mathbf{A}_n^2$ ,  $\mathbf{A}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{A}_n^{\gamma_{zx}}$  sont déterminés d'une façon récurrente par les expressions suivantes :

$$\mathbf{D}_n^1 = - \left[ (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + \mathbf{T}_n^0 \right]^{-1} \cdot \left[ (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{D}_{n-1}^2 + \mathbf{T}_n^1 \right], \quad (3.125a)$$

$$\mathbf{D}_n^2 = - \left[ (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + \mathbf{T}_n^0 \right]^{-1} \cdot \mathbf{T}_n^2, \quad (3.125b)$$

$$\mathbf{A}_n^1 = \left[ (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + \mathbf{T}_n^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_n^1 - \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{A}_{n-2}^1 - (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{A}_{n-1}^1 \right], \quad (3.125c)$$

$$\mathbf{A}_n^2 = \left[ (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + \mathbf{T}_n^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_n^2 - \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{A}_{n-2}^2 - (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{A}_{n-1}^2 \right], \quad (3.125d)$$

$$\mathbf{A}_n^{\gamma_{xz}} = \left[ (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + \mathbf{T}_n^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_n^{\gamma_{xz}} - \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{A}_{n-2}^{\gamma_{xz}} - (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{A}_{n-1}^{\gamma_{xz}} \right], \quad (3.125e)$$

$$\mathbf{A}_n^{\gamma_{zx}} = \left[ (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{D}_{n-1}^1 + \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^2 + \mathbf{T}_n^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_n^{\gamma_{zx}} - \mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{A}_{n-2}^{\gamma_{zx}} - (\mathbf{T}_n^{-2} \cdot \mathbf{D}_{n-2}^1 + \mathbf{T}_n^{-1}) \cdot \mathbf{A}_{n-1}^{\gamma_{zx}} \right]. \quad (3.125f)$$

Le point représente le produit matriciel et l'indice supérieur -1 du crochet droit correspond au signe d'inversion de matrice. Ces relations sont vérifiées pour  $n \geq 3$ . Dans les cas particuliers où  $n$  est égal à 1 et 2, on a :

- si  $n = 1$  :

$$\mathbf{D}_1^1 = - (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_1^1, \quad (3.126a)$$

$$\mathbf{D}_1^2 = - (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_1^2, \quad (3.126b)$$

$$\mathbf{A}_1^1 = (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^1, \quad (3.126c)$$

$$\mathbf{A}_1^2 = (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^2, \quad (3.126d)$$

$$\mathbf{A}_1^{\gamma_{xz}} = (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^{\gamma_{xz}}, \quad (3.126e)$$

$$\mathbf{A}_1^{\gamma_{zx}} = (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^{\gamma_{zx}}, \quad (3.126f)$$

- si  $n = 2$  :

$$\mathbf{D}_2^1 = - \left[ \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_1^1 + \mathbf{T}_2^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_1^2 + \mathbf{T}_2^1 \right], \quad (3.127a)$$

$$\mathbf{D}_2^2 = - \left[ \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_1^1 + \mathbf{T}_2^0 \right]^{-1} \cdot \mathbf{T}_2^2, \quad (3.127b)$$

$$\mathbf{A}_2^1 = \left[ \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_1^1 + \mathbf{T}_2^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_2^1 - \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{A}_1^1 \right], \quad (3.127c)$$

$$\mathbf{A}_2^2 = \left[ \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_1^1 + \mathbf{T}_2^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_2^2 - \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{A}_1^2 \right], \quad (3.127d)$$

$$\mathbf{A}_2^{\gamma_{xz}} = \left[ \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_1^1 + \mathbf{T}_2^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_2^{\gamma_{xz}} - \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{A}_1^{\gamma_{xz}} \right], \quad (3.127e)$$

$$\mathbf{A}_2^{\gamma_{zx}} = \left[ \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{D}_1^1 + \mathbf{T}_2^0 \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{S}_2^{\gamma_{zx}} - \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{A}_1^{\gamma_{zx}} \right]. \quad (3.127f)$$

Si  $n$  est l'ordre à partir duquel on peut négliger  $W_{n+1}$ , il est possible d'exprimer  $W_m$  où  $m$  varie de 1 à  $n - 1$  en fonction de  $W_{n-1}$  et  $W_n$ . Il s'agit encore de relations de récurrence,  $W_m$  est donnée par :

$$W_m = D_m^{n-1} \cdot W_{n-1} + D_m^n \cdot W_n + V^1 A_{1m} + V^2 A_{2m} + a_1 \gamma_{xz} A_{\gamma_{xz}m} + a_1 \gamma_{zx} A_{\gamma_{zx}m}. \quad (3.128)$$

Les expressions récurrentes permettant de calculer  $D_m^{n-1}$ ,  $D_m^n$ ,  $A_{\gamma_{xz}m}$  et  $A_{\gamma_{zx}m}$  sont données ci-dessous :

- si  $m = n - 1$  :

$$D_{n-1}^{n-1} = 0, \quad (3.129a)$$

$$D_{n-1}^n = D_{n-1}^1, \quad (3.129b)$$

$$A_{1n-1} = A_{n-1}^1, \quad (3.129c)$$

$$A_{2n-1} = A_{n-1}^2, \quad (3.129d)$$

$$A_{\gamma_{xz}n-1} = A_{n-1}^{\gamma_{xz}}, \quad (3.129e)$$

$$A_{\gamma_{zx}n-1} = A_{n-1}^{\gamma_{zx}}, \quad (3.129f)$$

- si  $m = n - 2$  :

$$D_{n-2}^{n-1} = D_{n-2}^1, \quad (3.130a)$$

$$D_{n-2}^n = D_{n-2}^2, \quad (3.130b)$$

$$A_{1n-2} = A_{n-2}^1, \quad (3.130c)$$

$$A_{2n-2} = A_{n-2}^2, \quad (3.130d)$$

$$A_{\gamma_{xz}n-2} = A_{n-2}^{\gamma_{xz}}, \quad (3.130e)$$

$$A_{\gamma_{zx}n-2} = A_{n-2}^{\gamma_{zx}}, \quad (3.130f)$$

- si  $m = n - 3$  :

$$D_{n-3}^{n-1} = D_{n-3}^1 \cdot D_{n-2}^1 + D_{n-3}^2, \quad (3.131a)$$

$$D_{n-3}^n = D_{n-3}^1 \cdot D_{n-2}^2, \quad (3.131b)$$

$$A_{1n-3} = D_{n-3}^1 \cdot A_{n-2}^1 + A_{n-3}^1, \quad (3.131c)$$

$$A_{2n-3} = D_{n-3}^1 \cdot A_{n-2}^2 + A_{n-3}^2, \quad (3.131d)$$

$$A_{\gamma_{xz}n-3} = D_{n-3}^1 \cdot A_{n-2}^{\gamma_{xz}} + A_{n-3}^{\gamma_{xz}}, \quad (3.131e)$$

$$A_{\gamma_{zx}n-3} = D_{n-3}^1 \cdot A_{n-2}^{\gamma_{zx}} + A_{n-3}^{\gamma_{zx}}, \quad (3.131f)$$

- si  $m < n - 3$  :

$$D_m^{n-1} = D_m^1 \cdot D_{m+1}^{n-1} + D_m^2 \cdot D_{m+2}^{n-1}, \quad (3.132a)$$

$$D_m^n = D_m^1 \cdot D_{m+1}^n + D_m^2 \cdot D_{m+2}^n, \quad (3.132b)$$

$$A_{1m} = D_m^1 \cdot A_{1m+1} + D_m^2 \cdot A_{1m+2} + A_m^1, \quad (3.132c)$$

$$A_{2m} = D_m^1 \cdot A_{2m+1} + D_m^2 \cdot A_{2m+2} + A_m^2, \quad (3.132d)$$

$$A_{\gamma_{xz}m} = D_m^1 \cdot A_{\gamma_{xz}m+1} + D_m^2 \cdot A_{\gamma_{xz}m+2} + A_m^{\gamma_{xz}}, \quad (3.132e)$$

$$A_{\gamma_{zx}m} = D_m^1 \cdot A_{\gamma_{zx}m+1} + D_m^2 \cdot A_{\gamma_{zx}m+2} + A_m^{\gamma_{zx}}. \quad (3.132f)$$

La détermination de ces matrices se fait dans l'ordre décroissant de l'indice  $m$ . Grâce à la relation (3.128), il est possible d'établir que

$$\sum_{m=1}^{N-1} m(m+1) \begin{pmatrix} C_m^{e0} \\ D_m^{e0} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_N^0 \cdot \mathbf{W}_N + \mathbf{Q}_N^1 \cdot \mathbf{W}_{N-1} + V^1 \mathbf{H}_N^1 + V^2 \mathbf{H}_N^2 + a_1 \gamma_{xz} \mathbf{H}_N^{\gamma_{xz}} + a_1 \gamma_{zx} \mathbf{H}_N^{\gamma_{zx}}. \quad (3.133)$$

Zinchenko [154] a montré que les matrices  $\mathbf{Q}_N^0$  et  $\mathbf{Q}_N^1$  tendent vers zéro lorsque  $N$  devient de plus en plus grand. Les matrices colonnes  $\mathbf{H}_N^1$ ,  $\mathbf{H}_N^2$ ,  $\mathbf{H}_N^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{H}_N^{\gamma_{zx}}$  sont définies par les relations :

$$\mathbf{H}_N^1 = \sum_{m=1}^{N-1} \left( \sum_{j=-1}^1 \mathbf{R}_{m+j}^j \cdot \mathbf{A}_{1m} + \mathbf{G}_m^1 \right), \quad (3.134a)$$

$$\mathbf{H}_N^2 = \sum_{m=1}^{N-1} \left( \sum_{j=-1}^1 \mathbf{R}_{m+j}^j \cdot \mathbf{A}_{2m} + \mathbf{G}_m^2 \right), \quad (3.134b)$$

$$\mathbf{H}_N^{\gamma_{xz}} = \sum_{m=1}^{N-1} \left( \sum_{j=-1}^1 \mathbf{R}_{m+j}^j \cdot \mathbf{A}_{\gamma_{xz}m} + \mathbf{G}_m^{\gamma_{xz}} \right), \quad (3.134c)$$

$$\mathbf{H}_N^{\gamma_{zx}} = \sum_{m=1}^{N-1} \left( \sum_{j=-1}^1 \mathbf{R}_{m+j}^j \cdot \mathbf{A}_{\gamma_{zx}m} + \mathbf{G}_m^{\gamma_{zx}} \right). \quad (3.134d)$$

La détermination lorsque  $N$  est suffisamment grand de  $\mathbf{H}_N^1$ ,  $\mathbf{H}_N^2$ ,  $\mathbf{H}_N^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{H}_N^{\gamma_{zx}}$  permet un calcul facile des forces. En effet, en utilisant les expressions donnant les forces, relations (3.46ca) et (3.47ca), on trouve :

$$F_x^1 = 8\sqrt{2}\pi c [V^1 H_N^1(2) + V^2 H_N^2(2) + a_1 \gamma_{xz} H_N^{\gamma_{xz}}(2) + a_1 \gamma_{zx} H_N^{\gamma_{zx}}(2)], \quad (3.135a)$$

$$F_x^2 = 8\sqrt{2}\pi c [V^1 H_N^1(1) + V^2 H_N^2(1) + a_1 \gamma_{xz} H_N^{\gamma_{xz}}(1) + a_1 \gamma_{zx} H_N^{\gamma_{zx}}(1)]. \quad (3.135b)$$

Les forces sont souvent exprimées sous les formes suivantes :

$$F_x^1 = -6\pi\mu a_1 (Y_{11}V^1 + Y_{12}V^2 + D_1^{xz} a_1 \gamma_{xz} + D_1^{zx} a_1 \gamma_{zx}), \quad (3.136a)$$

$$F_z^2 = -6\pi\mu a_2 (Y_{21}V^1 + Y_{22}V^2 + D_2^{xz} a_1 \gamma_{xz} + D_2^{zx} a_1 \gamma_{zx}). \quad (3.136b)$$

Les divers coefficients sont identifiés par les relations :

$$Y_{11} = -\frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^1(2), \quad (3.137a)$$

$$Y_{12} = -\frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^2(2), \quad (3.137b)$$

$$D_1^{xz} = -\frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^{\gamma_{xz}}(2), \quad (3.137c)$$

$$D_1^{zx} = -\frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^{\gamma_{zx}}(2), \quad (3.137d)$$

$$Y_{21} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^1(1), \quad (3.137e)$$

$$Y_{22} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^2(1), \quad (3.137f)$$

$$D_2^{xz} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^{\gamma_{xz}}(1), \quad (3.137g)$$

$$D_2^{zx} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \sinh \zeta_1 H_N^{\gamma_{zx}}(1). \quad (3.137h)$$

Le but ultime de la méthode numérique revient à déterminer les valeurs limites des matrices  $\mathbf{H}_N^1$ ,  $\mathbf{H}_N^2$ ,  $\mathbf{H}_N^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{H}_N^{\gamma_{zx}}$ .

Nous présentons enfin les grandes étapes du code de calcul créé en Fortran 77. La détermination des forces est faite pour diverses valeurs de  $\lambda$  et de  $\xi$  qui ont été définies dans le §3.1. Le programme se présente sous la forme :

- calcul pour les valeurs de  $\lambda$  et de  $\xi$  de  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et de  $c$  à l'aide de (3.4c),
- calcul pour  $n = 1$ , de  $I_1^e$ ,  $J_1^e$ ,  $K_0^e$ ,  $L_0^e$ ,  $M_2^e$  et  $N_2^e$  en résolvant le système constitué par les relations (3.62b), (3.118), (3.119) et (3.79),
- initialisation des matrices  $\mathbf{H}_0^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{H}_0^{\gamma_{zx}}$  à zéro,
- boucle répéter pour chaque valeur de  $n$  :
  - calcul de  $I_n^e$ ,  $J_n^e$ ,  $K_{n-1}^e$ ,  $L_{n-1}^e$ ,  $M_{n+1}^e$  et  $N_{n+1}^e$  à l'aide de (3.62b), (3.118), (3.119) et (3.79),
  - détermination de  $\mathbf{T}_n^k$ ,  $\mathbf{S}_n^1$ ,  $\mathbf{S}_n^2$ ,  $\mathbf{S}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{S}_n^{\gamma_{zx}}$  à partir des relations (3.108), (3.116) et de  $q_n^{t\pm}$  définie par (3.103),
  - détermination de  $\mathbf{R}_n^j$ ,  $\mathbf{G}_n^1$ ,  $\mathbf{G}_n^2$ ,  $\mathbf{G}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{G}_n^{\gamma_{zx}}$  à partir des relations (3.123b),
  - détermination de  $\mathbf{D}_n^1$ ,  $\mathbf{D}_n^2$ ,  $\mathbf{A}_n^1$ ,  $\mathbf{A}_n^2$ ,  $\mathbf{A}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{A}_n^{\gamma_{zx}}$  à partir des relations (3.125a), (3.126f) et (3.127f),
  - boucle pour  $m \leftarrow n - 1$  à 1 par pas de  $-1$  :
    - calcul de  $\mathbf{D}_m^{n-1}$ ,  $\mathbf{D}_m^n$ ,  $\mathbf{A}_{1m}$ ,  $\mathbf{A}_{2m}$ ,  $\mathbf{A}_{\gamma_{xz}m}$  et  $\mathbf{A}_{\gamma_{zx}m}$  à partir des relations (3.129f), (3.130f), (3.131f) et (3.132f),
    - fin de la boucle pour
    - calcul de  $\mathbf{H}_n^1$ ,  $\mathbf{H}_n^2$ ,  $\mathbf{H}_n^{\gamma_{xz}}$  et  $\mathbf{H}_n^{\gamma_{zx}}$  à partir de (3.134d),
    - détermination de l'écart noté «pres» entre  $\{\mathbf{H}_{n-1}^1, \mathbf{H}_{n-1}^2, \mathbf{H}_{n-1}^{\gamma_{xz}}, \mathbf{H}_{n-1}^{\gamma_{zx}}\}$  et  $\{\mathbf{H}_n^1, \mathbf{H}_n^2, \mathbf{H}_n^{\gamma_{xz}}, \mathbf{H}_n^{\gamma_{zx}}\}$
    - incrémentation de  $n : n \leftarrow n + 1$ ,
  - fin de la boucle répéter jusqu'à ce que «pres» soit inférieur à une précision donnée,
  - calcul des forces,
  - fin du programme.

Le caractère récurrent du problème complique la résolution. Les temps de calcul deviennent assez longs si l'écart entre les gouttes est faible. Ceci est dû au fait que les séries ne convergent pas très vite et qu'il est nécessaire de calculer un grand nombre de termes. Le code fait appel à des résolutions de systèmes linéaires  $6 \times 6$ , des inversions de matrices  $4 \times 4$ , des produits de matrices qui coûtent cher en temps de calcul. Le code a une complexité numérique en  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Les résultats pour les déplacements des gouttes et pour un écoulement non-perturbé de taux de cisaillement  $\gamma_{xz}$  sont en parfait accord avec ceux de Zinchenko [154] et Wang *et al.* [145]. Par contre, le résultat pour l'écoulement non-perturbé de taux de cisaillement  $\gamma_{zx}$  qui n'a jamais été étudié auparavant doit faire l'objet d'une vérification. Ce point est vu dans le paragraphe suivant.

### 3.2.6 Comparaison des résultats avec des particules solides

La comparaison est faite uniquement sur le calcul des forces engendrées par le taux de cisaillement  $\gamma_{zx}$ . Nous étudions le cas limite où le rapport de viscosité tend vers l'infini. Il est alors possible de vérifier si les forces trouvées par notre méthode sont proches de celles s'exerçant sur des particules solides. Pour que la comparaison soit judicieuse, il est nécessaire de supposer que les particules solides tournent librement. C'est à dire que le moment extérieur qui leur est appliqué est nul. Pour déterminer les forces exercées sur les particules solides, nous utilisons la méthode exposée dans le livre de Kim et Karrila [79] qui est issue des travaux théoriques de Jeffrey et Onishi [73], Kim et Mifflin [80] et Jeffrey [72].

Dans le cas où la différence des vitesses entre le fluide porteur et les particules est nulle, les forces et les couples appliqués sur les particules sont les suivants :

$$\vec{F}^1 = \mu \left[ \tilde{\mathbf{B}}_{11} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^1) + \tilde{\mathbf{B}}_{12} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^2) + \tilde{\mathbf{G}}_{11} \cdot \mathbf{E}^\infty + \tilde{\mathbf{G}}_{12} \cdot \mathbf{E}^\infty \right], \quad (3.138a)$$

$$\vec{F}^2 = \mu \left[ \tilde{\mathbf{B}}_{21} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^1) + \tilde{\mathbf{B}}_{22} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^2) + \tilde{\mathbf{G}}_{21} \cdot \mathbf{E}^\infty + \tilde{\mathbf{G}}_{22} \cdot \mathbf{E}^\infty \right], \quad (3.138b)$$

$$\vec{T}^1 = \mu \left[ \mathbf{C}_{11} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^1) + \mathbf{C}_{12} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^2) + \tilde{\mathbf{H}}_{11} \cdot \mathbf{E}^\infty + \tilde{\mathbf{H}}_{12} \cdot \mathbf{E}^\infty \right], \quad (3.138c)$$

$$\vec{T}^2 = \mu \left[ \mathbf{C}_{21} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^1) + \mathbf{C}_{22} \cdot (\vec{\Omega}^\infty - \vec{\omega}^2) + \tilde{\mathbf{H}}_{21} \cdot \mathbf{E}^\infty + \tilde{\mathbf{H}}_{22} \cdot \mathbf{E}^\infty \right]. \quad (3.138d)$$

$\vec{\omega}^1, \vec{\omega}^2$  sont les vitesses de rotations des deux particules.  $\vec{\Omega}^\infty$  est le vecteur tourbillon de l'écoulement non-perturbé.  $\mathbf{E}^\infty$  est le tenseur de taux de déformation. Dans le cas où  $\vec{u}^\infty$  est donné par la relation

$$\vec{u}^\infty = \gamma_{zx} x \vec{k}. \quad (3.139)$$

$\vec{\Omega}^\infty$  est égal à

$$\vec{\Omega}^\infty = -\frac{1}{2} \gamma_{zx} \vec{j}, \quad (3.140)$$

et  $\mathbf{E}^\infty$  vaut :

$$\mathbf{E}^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.141)$$

$\tilde{\mathbf{B}}_{\alpha\beta}, \mathbf{C}_{\alpha\beta}$  sont des tenseurs d'ordre deux.  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent prendre les valeurs 1 ou 2.  $\tilde{\mathbf{G}}_{\alpha\beta}, \tilde{\mathbf{H}}_{\alpha\beta}$  sont des tenseurs d'ordre trois. Le vecteur joignant les centres des deux particules est noté  $\vec{r}$  de

norme  $r$ . Le vecteur unitaire suivant la ligne des centres est défini par

$$\vec{d} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.142)$$

Afin d'utiliser la notation tensorielle, le système de coordonnées cartésiennes est noté  $(x_1, x_2, x_3)$ . Les vecteurs de base sont  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  et  $\vec{b}_3$ . On utilise la convention d'Einstein pour les sommations sur les indices muets. Le taux de cisaillement devient  $\gamma_{31}$ . Ce qui nous permet d'écrire, en utilisant les notations de Jeffrey et Onishi [73] et Jeffrey [72] :

$$\tilde{B}_{ij}^{\alpha\beta} = -Y_{\beta\alpha}^B \epsilon_{ijk} d_k, \quad (3.143a)$$

$$C_{ij}^{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}^C d_i d_j + Y_{\alpha\beta}^C (\delta_{ij} - d_i d_j), \quad (3.143b)$$

$$\tilde{G}_{ijk}^{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha}^G \left( d_j d_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} \right) d_i + Y_{\beta\alpha}^G (d_j \delta_{ki} + d_k \delta_{ij} - 2d_i d_j d_k), \quad (3.143c)$$

$$\tilde{H}_{ijk}^{\alpha\beta} = Y_{\beta\alpha}^H (\epsilon_{jil} d_l d_k + \epsilon_{kil} d_l d_j). \quad (3.143d)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $\epsilon_{ijk}$  est le tenseur antisymétrique.

A l'aide de ces relations, il est possible d'exprimer les forces et les couples sous la forme :

$$\frac{\vec{F}^1}{\mu} = \begin{pmatrix} - [Y_{11}^B \frac{1}{2} \gamma_{31} + Y_{11}^B \omega_2^1 + Y_{21}^B \frac{1}{2} \gamma_{31} + Y_{21}^B \omega_2^2 + (Y_{11}^G + Y_{21}^G) \gamma_{31}] \\ -Y_{11}^B \omega_1^1 - Y_{21}^B \omega_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.144)$$

$$\frac{\vec{F}^2}{\mu} = \begin{pmatrix} - [Y_{12}^B \frac{1}{2} \gamma_{31} + Y_{12}^B \omega_2^1 + Y_{22}^B \frac{1}{2} \gamma_{31} + Y_{22}^B \omega_2^2 + (Y_{12}^G + Y_{22}^G) \gamma_{31}] \\ -Y_{12}^B \omega_1^1 - Y_{22}^B \omega_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.145)$$

$$\frac{\vec{T}^1}{\mu} = \begin{pmatrix} -Y_{11}^C \omega_1^1 - Y_{21}^C \omega_1^2 \gamma_{31} \\ -Y_{11}^C \left( \frac{1}{2} \gamma_{31} + \omega_2^1 \right) - Y_{21}^C \left( \frac{1}{2} \gamma_{31} + \omega_2^2 \right) + (Y_{11}^H + Y_{21}^H) \gamma_{31} \\ -X_{11}^C \omega_3^1 - X_{21}^C \omega_3^2 \end{pmatrix}, \quad (3.146)$$

$$\frac{\vec{T}^2}{\mu} = \begin{pmatrix} -Y_{12}^C \omega_1^1 - Y_{22}^C \omega_1^2 \gamma_{31} \\ -Y_{12}^C \left( \frac{1}{2} \gamma_{31} + \omega_2^1 \right) - Y_{22}^C \left( \frac{1}{2} \gamma_{31} + \omega_2^2 \right) + (Y_{12}^H + Y_{22}^H) \gamma_{31} \\ -X_{12}^C \omega_3^1 - X_{22}^C \omega_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.147)$$

Ensuite, en imposant la condition de moment nul, nous pouvons calculer les vitesses de rotation des deux particules. Nous avons immédiatement :

$$\omega_1^1 = \omega_3^1 = 0, \quad (3.148a)$$

$$\omega_1^2 = \omega_3^2 = 0. \quad (3.148b)$$

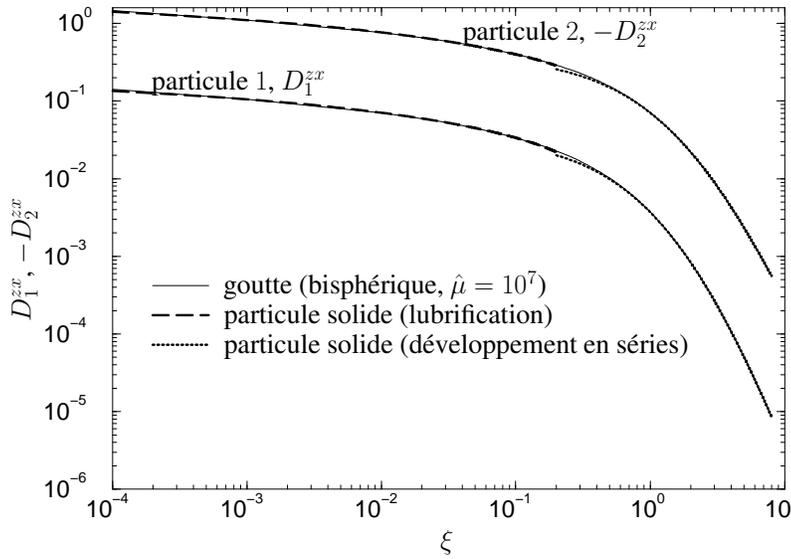


FIG. 3.3 – Coefficients de frottement,  $D_1^{zx}$  et  $-D_2^{zx}$ , définis par (3.137h) obtenus avec les deux méthodes de calcul pour  $\lambda = 0, 1$ .

La détermination des composantes  $\omega_2^1$  et  $\omega_2^2$  nécessite la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues dont le résultat est indiqué ci-dessous :

$$\frac{\omega_2^1}{\gamma_{31}} = \frac{[Y_{11}^H + Y_{21}^H - 0.5(Y_{11}^C + Y_{21}^C)] Y_{22}^C - [Y_{12}^H + Y_{22}^H - 0.5(Y_{12}^C + Y_{22}^C)] Y_{21}^C}{Y_{11}^C Y_{22}^C - Y_{12}^C Y_{21}^C}, \quad (3.149a)$$

$$\frac{\omega_2^2}{\gamma_{31}} = \frac{[Y_{12}^H + Y_{22}^H - 0.5(Y_{12}^C + Y_{22}^C)] Y_{11}^C - [Y_{11}^H + Y_{21}^H - 0.5(Y_{11}^C + Y_{21}^C)] Y_{12}^C}{Y_{11}^C Y_{22}^C - Y_{12}^C Y_{21}^C}. \quad (3.149b)$$

Nous constatons qu'il ne nous reste qu'une seule composante de force suivant l'axe  $x_1$ . Ce qui permet de retrouver le résultat du §3.1. A l'aide des données numériques disponibles dans le livre de Kim et Karrila [79], nous avons réalisé un programme permettant le calcul des deux forces. Il est alors possible de comparer les résultats des calculs issus de la méthode des coordonnées bisphériques avec ceux obtenus pour des particules solides. Nous avons déterminé les forces adimensionnées sous la forme  $-F_1^1/(6\pi\mu a_1^2)$  et  $-F_1^2/(6\pi\mu a_2 a_1)$  correspondant respectivement aux coefficients de frottement  $D_1^{zx}$  et  $D_2^{zx}$  définis à l'aide de (3.137h). Pour les particules solides, deux solutions sont déterminées. L'une est obtenue pour de faibles écarts entre les particules. Elle tient compte des effets de lubrification. L'autre est utilisée lorsque les particules sont suffisamment éloignées. Elle se présente sous forme de séries en  $1/s$  et est établie à l'aide de la méthode des développements en multipôles créée par Jeffrey et Onishi [73]. Les calculs obtenus avec la méthode des coordonnées bisphériques sont exacts quel que soit l'écart entre les gouttes. Pour pouvoir faire la comparaison avec les particules solides, le rapport de viscosité,  $\hat{\mu}$ , est pris égal à  $10^7$ . Nous avons fait des tests pour des valeurs de  $\lambda$  égales à 0, 1 ; 0, 5 et 1. Les résultats sont présentés graphiquement sur les figures 3.3, 3.4 et 3.5.

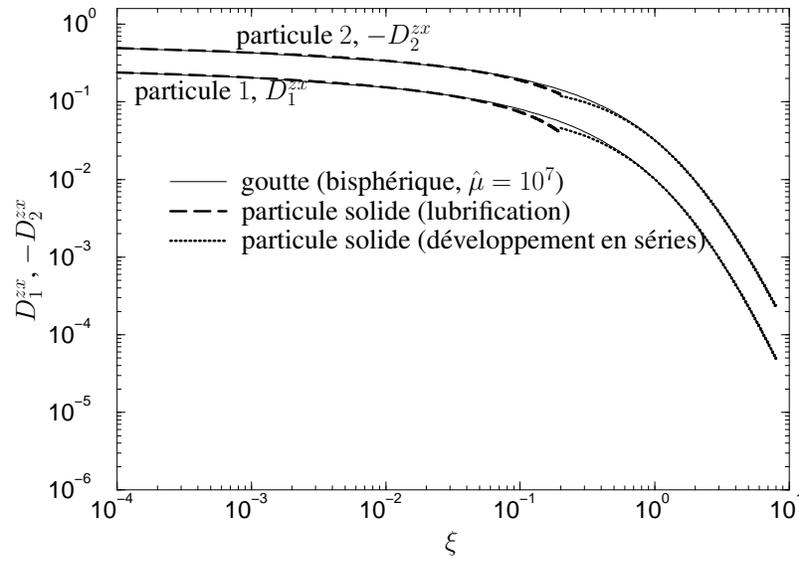


FIG. 3.4 – Coefficients de frottement,  $D_1^{zx}$  et  $-D_2^{zx}$ , définis par (3.137h) obtenus avec les deux méthodes de calcul pour  $\lambda = 0, 5$ .

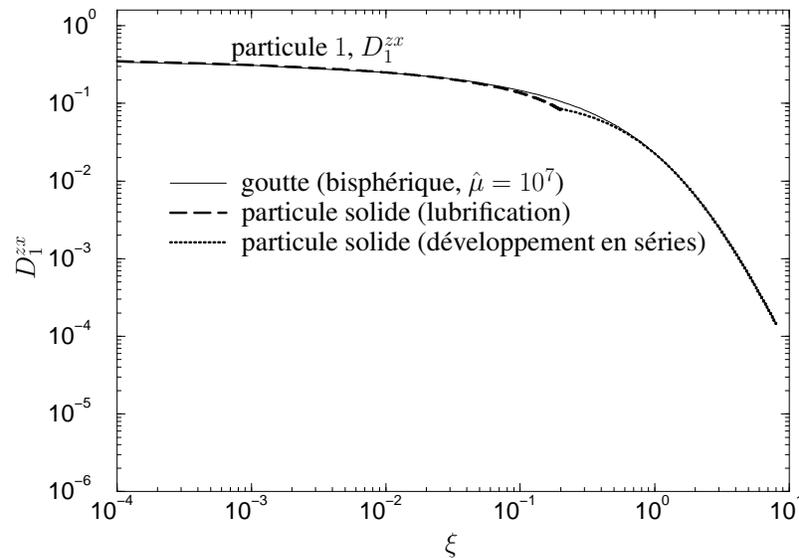


FIG. 3.5 – Coefficient de frottement,  $D_1^{zx}$ , défini par (3.137h) obtenu avec les deux méthodes de calcul pour  $\lambda = 1$ .

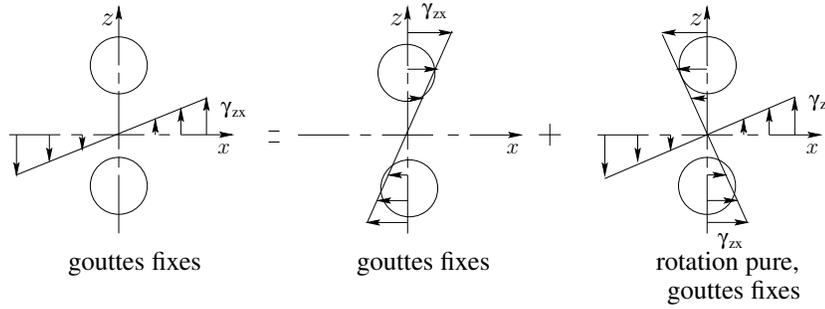


FIG. 3.6 – Décomposition de l'écoulement parallèle à la ligne des centres.

Il ressort de cette comparaison que la méthode de calcul utilisant les coordonnées bisphériques donne de très bons résultats. Les coefficients de frottement obtenus en prenant un rapport de viscosité grand sont très proches de ceux calculés pour des particules solides et dont l'exactitude a déjà été approuvée.

Cette vérification nous permet de valider notre code de calcul. Nous pouvons raisonnablement penser que les résultats issus de ce programme restent corrects pour des rapports de viscosité différents. Cette méthode présente l'avantage d'être applicable pour des écarts entre les gouttes quelconques. Grâce au choix du rapport de viscosité, elle permet des études portant à la fois sur des aérosols, des hydrosols et même des bulles ( $\hat{\mu} = 0$ ).

### 3.2.7 Méthode de superposition pour le calcul des coefficients $D_1^{zx}$ et $D_2^{zx}$

Les coefficients de frottement  $D_1^{zx}$  et  $D_2^{zx}$  peuvent être obtenus par une autre méthode [108]. En effet, il est possible d'utiliser un principe de superposition vérifié par les équations de Stokes. L'écoulement de cisaillement suivant la ligne des centres des gouttes ( $\gamma_{zx}$ ) est considéré comme la combinaison d'un écoulement de cisaillement perpendiculaire à la ligne des centres et d'un écoulement de rotation pure. Cette décomposition est représentée sur la figure 3.6.

Considérons le problème de sphères maintenues fixes dans un écoulement de rotation pure. Dans un repère tournant avec la vitesse de rotation de l'écoulement, les sphères sont en translation perpendiculairement à la ligne des centres dans un fluide au repos à l'infini. Les forces pour maintenir les gouttes fixes dans le cas de la rotation pure sont alors évidentes à obtenir et sont données ci-dessous :

$$F_1^{rp} = -6\pi\mu a_1^2 (Y_{11}l_1 - Y_{12}l_2) \gamma_{zx}, \quad (3.150a)$$

$$F_2^{rp} = -6\pi\mu a_2 a_1 (Y_{21}l_1 - Y_{22}l_2) \gamma_{zx}, \quad (3.150b)$$

Les  $Y_{\alpha\beta}$  sont les coefficients de résistance intervenant dans le déplacement suivant la normale à la ligne des centres. Ces derniers ont été définis à l'aide de (3.137h).  $l_\alpha$  est la distance, divisée par  $a_1$ , entre l'origine du repère des coordonnées bisphériques et le centre de la goutte  $\alpha$ . Les longueurs  $l_1$  et  $l_2$  peuvent être données en fonction de  $s$  et  $\lambda$  sous la forme :

$$l_1 = \frac{(1 + \lambda)s}{4} + \frac{1 - \lambda}{s}, \quad (3.151a)$$

$$l_2 = \frac{(1 + \lambda)s}{4} - \frac{1 - \lambda}{s}. \quad (3.151b)$$

Les forces dues à l'écoulement de cisaillement perpendiculaire à la ligne des centres peuvent être exprimées à l'aide des coefficients  $D_1^{zx}$  et  $D_2^{zx}$ . Ainsi, par sommation,  $D_1^{zx}$  et  $D_2^{zx}$  s'expriment sous la forme :

$$D_1^{zx} = D_1^{zz} + Y_{11}l_1 - Y_{12}l_2, \quad (3.152a)$$

$$D_2^{zx} = D_2^{zz} + Y_{21}l_1 - Y_{22}l_2. \quad (3.152b)$$

Les valeurs numériques obtenues par la méthode directe et celles issues des relations (3.152b) donnent exactement les mêmes résultats. Néanmoins, les équations (3.152b) permettent d'obtenir une expression générale des forces qui est présentée dans le paragraphe 3.4.

### 3.3 Problème axisymétrique

Les développements du §3.2 permettent d'obtenir les forces agissant perpendiculairement à la ligne des centres. Les gouttes peuvent subir des efforts suivant la ligne des centres si elles sont placées dans une élongation pure. Nous avons démontré au §3.1 que seul un écoulement non-perturbé de forme

$$\vec{u}^\infty = \gamma_{xx}x\vec{i} + \gamma_{yy}y\vec{j} + \gamma_{zz}z\vec{k}, \quad (3.153)$$

où l'on a

$$\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz} = 0, \quad (3.154)$$

produit des forces suivant l'axe  $z$ . Il a également été vu que les champs de vitesse et de pression exprimés en coordonnées cylindriques étaient donnés par les relations suivantes :

$$p = \frac{2\mu}{c} (Q_{-0}^0 + Q_{-2}^0 \cos 2\theta), \quad (3.155a)$$

$$u_\rho = \frac{\rho}{c} Q_{-0}^0 + W_{-0}^1 + \left( \frac{\rho}{c} Q_{-2}^0 + W_{-2}^1 + W_{-2}^{-1} \right) \cos 2\theta, \quad (3.155b)$$

$$u_\theta = (W_{-2}^1 - W_{-2}^{-1}) \sin 2\theta, \quad (3.155c)$$

$$u_z = \frac{z}{c} Q_{-0}^0 + 2W_{-0}^0 + \left( \frac{z}{c} Q_{-2}^0 + 2W_{-2}^0 \right) \cos 2\theta. \quad (3.155d)$$

Seule la partie axisymétrique joue un rôle dans l'origine des forces. Nous pouvons donc nous limiter à l'étude de cette dernière. Le champ de vitesse est alors donné par la relation suivante :

$$\vec{u} = u_\rho \vec{e}_\rho + u_z \vec{k}, \quad (3.156)$$

où  $u_\rho$  et  $u_z$  dépendent uniquement de  $\rho$  et de  $z$ .  $\vec{e}_\rho$  est le vecteur de base du système de coordonnées cylindriques suivant la direction  $\rho$ . Le champ de vitesse à l'infini est

$$\vec{u}^\infty = -\frac{\gamma_{zz}\rho}{2} \vec{e}_\rho + \gamma_{zz}z\vec{k}. \quad (3.157)$$

Pour compléter cette étude, on peut également supposer que les gouttes se déplacent avec une vitesse parallèle à la ligne des centres. Ces quantités sont notées pour les gouttes 1 et 2 respectivement  $V^1$  et  $V^2$ .

Au lieu d'utiliser la méthode qui a été exposée au §3.2, nous pouvons introduire la fonction de courant. En effet, l'équation de continuité donne la relation

$$\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} = -\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}, \quad (3.158)$$

ce qui permet de faire apparaître la fonction  $\psi$  vérifiant les équations

$$u_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (3.159a)$$

$$u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho}. \quad (3.159b)$$

Les équations de Stokes en coordonnées cylindriques vont se réduire aux formes suivantes :

$$\mu \left( \Delta u_\rho - \frac{u_\rho}{\rho^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial\rho}, \quad (3.160a)$$

$$\mu \Delta u_z = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3.160b)$$

où le laplacien en coordonnées cylindriques est donné par

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.161)$$

En définissant le nouvel opérateur

$$\Phi^2 = \rho \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.162)$$

nous avons les deux identités suivantes :

$$\Delta u_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi^2\psi}{\partial z} + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (3.163a)$$

$$-\Delta u_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi^2\psi}{\partial\rho}. \quad (3.163b)$$

Par élimination de la pression des équations de Stokes,  $\psi$  vérifie l'équation :

$$\Phi^4\psi = 0. \quad (3.164)$$

La solution de l'équation (3.164) est recherchée à l'aide des coordonnées bisphériques. Elle a été proposée d'une façon générale par Stimson et Jeffery [134]. Cependant, nous préférons utiliser la forme donnée par Wang *et al.* [145] :

$$\psi = c^2\sqrt{2} (\cosh\zeta - \cos\eta)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\psi_n(\zeta)Q_n(\cos\eta). \quad (3.165)$$

$Q_n$  est la fonction de Gegenbauer d'ordre  $n$  et de degré  $1/2$  ou polynôme de Gegenbauer. Il est relié aux polynômes de Legendre par la relation :

$$Q_n(x) = \frac{P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)}{2n+1}. \quad (3.166)$$

$\psi_n(\zeta)$  est égale d'une façon générale à :

$$\psi_n(\zeta) = A_n e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta} + B_n e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta} + C_n e^{(n-\frac{1}{2})\zeta} + D_n e^{(n+\frac{3}{2})\zeta}. \quad (3.167)$$

La forme générale de la fonction de courant (3.165) est valide pour les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur des gouttes. Afin d'éviter des valeurs infinies pour les écoulements internes, les fonctions  $\psi_n$  se réduisent pour les gouttes 1 et 2 respectivement à

$$\psi_n^1(\zeta) = A_n^1 e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta} + B_n^1 e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta}, \quad (3.168a)$$

$$\psi_n^2(\zeta) = C_n^2 e^{(n-\frac{1}{2})\zeta} + D_n^2 e^{(n+\frac{3}{2})\zeta}. \quad (3.168b)$$

Pour tenir compte de l'écoulement à l'infini, la fonction de courant du champ externe est décomposée sous la forme :

$$\psi^t = \psi^e + \psi^\infty, \quad (3.169)$$

où la fonction de courant de l'écoulement non-perturbé est égale à :

$$\psi^\infty = -\frac{\gamma_{zz}}{2} \rho^2 z. \quad (3.170)$$

$\psi^e$  est donnée par la relation (3.165) avec  $\psi_n^e$  prise sous la forme suivante [145] :

$$\psi_n^e(\zeta) = E_n e^{(n-\frac{1}{2})(\zeta-\zeta_1)} + F_n e^{(n-\frac{1}{2})(\zeta_2-\zeta)} + G_n e^{(n+\frac{3}{2})(\zeta-\zeta_1)} + H_n e^{(n+\frac{3}{2})(\zeta_2-\zeta)}. \quad (3.171)$$

Il est nécessaire d'exprimer  $\psi^\infty$  à l'aide des polynômes de Gegenbauer. Pour ce faire, nous pouvons utiliser l'identité suivante<sup>2</sup> [134] :

$$\frac{1}{2} \rho^2 = -c^2 (\cosh \zeta - \cos \eta)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) R_n(\zeta) Q_n, \quad (3.172)$$

où  $R_n(\zeta)$  vaut

$$R_n(\zeta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-(n-\frac{1}{2})|\zeta|}}{2n-1} - \frac{e^{-(n+\frac{3}{2})|\zeta|}}{2n+3} \right]. \quad (3.173)$$

En dérivant par rapport à  $\zeta$  l'identité (3.172), on obtient

$$\frac{z\rho^2}{2} = -c^3 \sqrt{2} (\cosh \zeta - \cos \eta)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \sinh \zeta e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} Q_n. \quad (3.174)$$

Ce qui permet d'écrire d'après la définition de  $\psi^\infty$ , l'équation suivante :

$$\psi^\infty = c^2 \sqrt{2} (\cosh \zeta - \cos \eta)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \psi_n^\infty Q_n, \quad (3.175)$$

<sup>2</sup>L'espace des polynômes de Gegenbauer forme une base orthogonale.

avec

$$\psi_n^\infty = c\gamma_{zz} \sinh \zeta e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|}. \quad (3.176)$$

Il reste à établir les diverses relations liant les coefficients des fonctions  $\psi_n$  issues des conditions aux limites. Mais au préalable, nous pouvons donner les relations permettant le calcul des forces :

$$F_z^1 = -8\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left[ E_n e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_1} + G_n e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \right], \quad (3.177a)$$

$$F_z^2 = -8\pi\mu c \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left[ F_n e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_2} + H_n e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} \right]. \quad (3.177b)$$

Dans la mesure où seules les forces nous intéressent, nous pouvons nous limiter à rechercher les coefficients  $E_n$ ,  $F_n$ ,  $G_n$  et  $H_n$ .

Il est nécessaire dans un premier temps de reformuler les conditions aux limites présentées dans le §3.1 à l'aide de la fonction de courant.

### 3.3.1 Continuité des vitesses

Cette condition exprime la continuité des vitesses tangentielles. Mais grâce à la condition de continuité du flux de masse, il est également nécessaire que les vitesses normales à l'interface soient identiques [5]. Nous avons donc continuité des vitesses.

$$\vec{u}^t = \vec{u}^\alpha, \quad (3.178)$$

en  $\zeta = \zeta_\alpha$  où  $\alpha$  est égal à 1 ou 2. Cette équation vectorielle peut être décomposée en deux relations scalaires. L'utilisation du système de coordonnées bisphériques conduit à écrire :

$$u_\zeta^t = u_\zeta^\alpha, \quad (3.179a)$$

$$u_\eta^t = u_\eta^\alpha. \quad (3.179b)$$

En utilisant l'expression de la divergence en coordonnées bisphériques,

$$\frac{\partial (h_b \rho u_\zeta)}{\partial \zeta} + \frac{\partial (h_b \rho u_\eta)}{\partial \eta} = 0, \quad (3.180)$$

la fonction de courant peut être écrite sous la forme :

$$u_\zeta = \frac{1}{h_b \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad (3.181a)$$

$$u_\eta = -\frac{1}{h_b \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}. \quad (3.181b)$$

La condition de continuité des vitesses en terme de fonction de courant devient :

$$\psi_n^e + \psi_n^\infty = \psi_n^\alpha, \quad (3.182a)$$

$$\frac{d\psi_n^e}{d\zeta} + \frac{d\psi_n^\infty}{d\zeta} = \frac{d\psi_n^\alpha}{d\zeta}, \quad (3.182b)$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$ .

### 3.3.2 Condition de continuité du flux de masse

Dans le cas où nous supposons que la goutte  $\alpha$  se déplace avec une vitesse  $V^\alpha$ , la condition de continuité du flux de masse est :

$$\vec{u}^t \cdot \vec{n} = \vec{V}^\alpha \cdot \vec{n}, \quad (3.183)$$

où  $\vec{V}^\alpha = V^\alpha \vec{k}$ . En exprimant le vecteur vitesse de la goutte dans le système bisphérique, la relation ci-dessus se transforme sous la forme :

$$\frac{\partial \psi^t}{\partial \eta} = \rho \frac{c(1 - \cosh \zeta \cos \eta)}{(\cosh \zeta - \cos \eta)^2} V^\alpha. \quad (3.184)$$

A l'aide de l'expression de la dérivée de  $\rho$  par rapport à  $\eta$ , la condition (3.183) se présente sous la forme :

$$\frac{\partial \psi^t}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) V^\alpha. \quad (3.185)$$

Finalement, en utilisant la relation (3.172), nous obtenons :

$$\psi_n^e + \psi_n^\infty = R_n V^\alpha, \quad (3.186)$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$ . De plus, grâce à (3.182b), il est possible d'établir que :

$$\psi_n^\alpha = R_n V^\alpha, \quad (3.187)$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$ .

### 3.3.3 Continuité des contraintes tangentielles

En utilisant les développements présentés dans la paragraphe 3.2.4, la condition sur les contraintes tangentielles devient :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^t}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^t}{h_b} \right) = \hat{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^\alpha}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^\alpha}{h_b} \right) \right]. \quad (3.188)$$

A l'aide de la fonction de courant et de la condition de continuité de flux de masse, la relation précédente se transforme en :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho^2 V^\alpha}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial \psi^t}{\partial \zeta} \right) = \hat{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho^2 V^\alpha}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial \psi^t}{\partial \zeta} \right) \right\}. \quad (3.189)$$

Il est possible de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\rho^2}{2} \right) \right]. \quad (3.190)$$

Ce qui permet d'écrire la condition sur les contraintes tangentielles sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \psi^t + \frac{\rho^2 V^\alpha}{2} \right) \right] = \hat{\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \psi^\alpha + \frac{\rho^2 V^\alpha}{2} \right) \right], \quad (3.191)$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$ .

Grâce à l'identité (3.172) et en calculant les dérivées des quantités ci-dessus par rapport à  $\zeta$ , on montre que :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{h_b^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \psi^t + \frac{\rho^2 V^\alpha}{2} \right) \right] = \\ & -\frac{3}{4} \sqrt{2} \frac{(\cosh \zeta - \cos \eta)^{\frac{1}{2}}}{\sin \eta} (z \sinh \zeta + 2c \cosh \zeta) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (\psi_n^t - V^\alpha R_n) Q_n + \\ & \frac{c\sqrt{2}}{\sin \eta} (\cosh \zeta - \cos \eta)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( \frac{d^2 \psi_n^t}{d\zeta^2} - V^\alpha \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} \right) Q_n. \end{aligned} \quad (3.192)$$

En utilisant les relations (3.186) et (3.187), la condition sur les contraintes tangentielles se réduit à :

$$\frac{d^2 \psi_n^t}{d\zeta^2} - V^\alpha \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} = \hat{\mu} \left( \frac{d^2 \psi_n^\alpha}{d\zeta^2} - V^\alpha \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} \right), \quad (3.193)$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$ . Il est possible d'éliminer les fonctions  $\psi_n^\alpha$ . En effet, un simple calcul algébrique permet d'établir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_n^\alpha}{d\zeta^2} - V^\alpha \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} = \mp (2n+1) \left( \frac{d\psi_n^\alpha}{d\zeta} - V^\alpha \frac{dR_n}{d\zeta} \right) + \\ \left[ 1 - \frac{(2n+1)^2}{4} \right] (\psi_n^\alpha - V^\alpha R_n), \end{aligned} \quad (3.194)$$

où le signe supérieur est utilisé en  $\zeta > 0$  et le signe inférieur en  $\zeta < 0$ . L'utilisation des conditions de continuité de flux de masse (3.187) et de continuité de vitesse, deuxième équation des relations (3.182b), permet d'écrire :

$$\frac{d^2 \psi_n^t}{d\zeta^2} \pm \hat{\mu} (2n+1) \frac{d\psi_n^t}{d\zeta} = V^\alpha \left[ \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2} \pm \hat{\mu} (2n+1) \frac{dR_n}{d\zeta} \right], \quad (3.195)$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$ .

### 3.3.4 Résolution numérique du problème axisymétrique

L'ensemble des conditions permettant la détermination des coefficients des fonctions de courant a été établi précédemment. Il ressort qu'il n'y a aucune relation de récurrence. La résolution du problème est alors plus simple. Dans la mesure où nous recherchons que les forces, seuls les coefficients  $E_n$ ,  $F_n$ ,  $G_n$  et  $H_n$  vont être calculés. Le système d'équations linéaire permettant leur

calcul est obtenu à l'aide des relations (3.186) et (3.195). Il est donné ci-dessous :

$$E_n + e^{(n-\frac{1}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} F_n + G_n + e^{(n+\frac{3}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} H_n = -c\gamma_{zz} \sinh \zeta_1 e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + V^1 R_n(\zeta_1), \quad (3.196a)$$

$$e^{(n-\frac{1}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} E_n + F_n + e^{(n+\frac{3}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} G_n + H_n = -c\gamma_{zz} \sinh \zeta_2 e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} + V^2 R_n(\zeta_2), \quad (3.196b)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(2n-1)^2}{4} + \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n-1)}{2} \right] E_n + \left[ \frac{(2n-1)^2}{4} - \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n-1)}{2} \right] \\ & e^{(n-\frac{1}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} F_n + \left[ \frac{(2n+3)^2}{4} + \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n+3)}{2} \right] G_n + \\ & \left[ \frac{(2n+3)^2}{4} - \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n+3)}{2} \right] e^{(n+\frac{3}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} H_n = -\frac{c\gamma_{zz}}{2} \\ & \left\{ \left[ \frac{(4n^2+4n+5)}{2} - \hat{\mu}(2n+1)^2 \right] \sinh \zeta_1 + 2(2n+1)(\hat{\mu}-1) \cosh \zeta_1 \right\} \\ & + V^1 \left[ \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2}(\zeta_1) + \hat{\mu}(2n+1) \frac{dr_n}{d\zeta}(\zeta_1) \right], \quad (3.196c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(2n-1)^2}{4} - \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n-1)}{2} \right] e^{(n-\frac{1}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} E_n + \left[ \frac{(2n-1)^2}{4} + \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n-1)}{2} \right] \\ & F_n + \left[ \frac{(2n+3)^2}{4} - \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n+3)}{2} \right] \\ & e^{(n+\frac{3}{2})(\zeta_2-\zeta_1)} G_n + \left[ \frac{(2n+3)^2}{4} + \frac{\hat{\mu}(2n+1)(2n+3)}{2} \right] H_n = \\ & -\frac{c\gamma_{zz}}{2} \left\{ \left[ \frac{(4n^2+4n+5)}{2} - \hat{\mu}(2n+1)^2 \right] \sinh \zeta_2 - \right. \\ & \left. 2(2n+1)(\hat{\mu}-1) \cosh \zeta_2 \right\} + V^2 \left[ \frac{d^2 R_n}{d\zeta^2}(\zeta_2) + \hat{\mu}(2n+1) \frac{dr_n}{d\zeta}(\zeta_2) \right], \quad (3.196d) \end{aligned}$$

où la fonction  $R_n$  est donnée par (3.173). Les coefficients  $E_n$ ,  $F_n$ ,  $G_n$  et  $H_n$  sont obtenus sous la forme de fonctions linéaires de  $\gamma_{zz}$ ,  $V^1$  et  $V^2$  :

$$E_n = E_n^{\gamma_{zz}} \gamma_{zz} a_1 + E_n^1 V^1 + E_n^2 V^2, \quad (3.197a)$$

$$F_n = F_n^{\gamma_{zz}} \gamma_{zz} a_1 + F_n^1 V^1 + F_n^2 V^2, \quad (3.197b)$$

$$G_n = G_n^{\gamma_{zz}} \gamma_{zz} a_1 + G_n^1 V^1 + G_n^2 V^2, \quad (3.197c)$$

$$H_n = H_n^{\gamma_{zz}} \gamma_{zz} a_1 + H_n^1 V^1 + H_n^2 V^2. \quad (3.197d)$$

Les forces sont recherchées sous la forme :

$$F_z^1 = -6\pi\mu a_1 (X_{11}V^1 + X_{12}V^2 + a_1 D_1^{zz} \gamma_{zz}), \quad (3.198a)$$

$$F_z^2 = -6\pi\mu a_2 (X_{21}V^1 + X_{22}V^2 + a_1 D_2^{zz} \gamma_{zz}). \quad (3.198b)$$

A l'aide des définitions des forces exprimées en fonction des coefficients  $E_n$ ,  $F_n$ ,  $G_n$  et  $H_n$ ,

nous obtenons :

$$X_{11} = \frac{4}{3} \sinh \zeta_1 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( E_n^1 e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_1} + G_n^1 e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \right), \quad (3.199a)$$

$$X_{12} = \frac{4}{3} \sinh \zeta_1 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( E_n^2 e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_1} + G_n^2 e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \right), \quad (3.199b)$$

$$D_1^{zz} = \frac{4}{3} \sinh \zeta_1 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( E_n^{\gamma_{zz}} e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_1} + G_n^{\gamma_{zz}} e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \right), \quad (3.199c)$$

$$X_{21} = -\frac{4}{3} \sinh \zeta_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( F_n^1 e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_2} + H_n^2 e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} \right), \quad (3.199d)$$

$$X_{22} = -\frac{4}{3} \sinh \zeta_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( F_n^2 e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_2} + H_n^2 e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} \right), \quad (3.199e)$$

$$D_2^{zz} = -\frac{4}{3} \sinh \zeta_2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left( F_n^{\gamma_{zz}} e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_2} + H_n^{\gamma_{zz}} e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} \right). \quad (3.199f)$$

L'objectif principal de la résolution numérique est la recherche des coefficients indiqués ci-dessus. Les différentes sommes sont calculées jusqu'à ce que la convergence soit atteinte. Le problème axisymétrique est beaucoup plus simple à la fois dans son établissement et dans sa résolution. Le programme de calcul réalisé en Fortran 77 est approximativement 4 fois moins long que celui lié à l'étude asymétrique.

### 3.4 Expressions générales des forces d'interactions

A ce stade, il est possible de connaître les forces s'exerçant sur deux gouttes se déplaçant avec des vitesses quelconques dans un écoulement linéaire. Malheureusement, la détermination des efforts liés au cisaillement doit être faite dans le repère bisphérique. Dans la plupart des applications, la matrice de cisaillement est connue dans un référentiel général. Pour chaque position quelconque des gouttes, il est alors nécessaire de connaître la matrice de passage du repère général au repère bisphérique. Ce type d'approche a été utilisé par Lin [93] dans la détermination de trajectoires relatives entre deux particules solides. Mais son implantation numérique n'est pas très facile. Elle nécessite beaucoup de tests.

Une alternative à cette méthode est d'avoir des expressions objectives des forces d'interaction hydrodynamique. Ceci est possible grâce à l'utilisation des relations (3.152b). L'établissement de ces expressions est donné ci-dessous.

Commençons par examiner le cas de deux gouttes se déplaçant avec des vitesses quelconques dans un fluide au repos. Le vecteur unitaire suivant la ligne des centres est défini par

$$\vec{d} = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|}. \quad (3.200)$$

$\vec{x}_\alpha$  est la position du centre de la goutte  $\alpha$ . Les vecteurs vitesses de chaque goutte peuvent être décomposés en une composante suivant la ligne des centres et en un vecteur perpendiculaire à

la ligne des centres :

$$\vec{V}^\alpha = (\vec{V}^\alpha \cdot \vec{d}) \vec{d} + [\vec{V}^\alpha - (\vec{V}^\alpha \cdot \vec{d}) \vec{d}]. \quad (3.201)$$

L'utilisation des notations tensorielles donne :

$$V_i^\alpha = V_j^\alpha d_j d_i + (\delta_{ij} - d_i d_j) V_j^\alpha. \quad (3.202)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kroneker.

Par symétrie, les mouvements suivant la ligne des centres donnent uniquement des forces suivant cette même direction. Les mouvements perpendiculaires donnent uniquement des forces perpendiculaires à la ligne des centres<sup>3</sup>. Suite à ce qui a été développé dans les deux précédents paragraphes, les problèmes suivant la ligne des centres sont de nature axisymétrique alors que ceux perpendiculaires sont de nature asymétrique. Ainsi, la force agissant sur la goutte 1 peut être déterminée par la relation suivante :

$$F_i^1 = -6\pi\mu a_1 [X_{11} V_j^1 d_j d_i + Y_{11} (\delta_{ij} - d_i d_j) V_j^1 + X_{12} V_j^2 d_j d_i + Y_{12} (\delta_{ij} - d_i d_j) V_j^2]. \quad (3.203)$$

En introduisant les tenseurs  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}$  :

$$A_{ij}^{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} d_i d_j + Y_{\alpha\beta} (\delta_{ij} - d_i d_j), \quad (3.204)$$

les forces dues au mouvement de deux gouttes ayant respectivement une vitesse  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sont

$$\vec{F}_1 = -6\pi\mu a_1 (\mathbf{A}^{11} \cdot \vec{V}_1 + \mathbf{A}^{12} \cdot \vec{V}_2), \quad (3.205a)$$

$$\vec{F}_2 = -6\pi\mu a_2 (\mathbf{A}^{21} \cdot \vec{V}_1 + \mathbf{A}^{22} \cdot \vec{V}_2). \quad (3.205b)$$

Ces dernières relations peuvent être déterminées dans un repère quelconque. Ce sont donc des quantités objectives.

Considérons maintenant deux gouttes immobiles dans un écoulement linéaire quelconque. Les forces que le fluide exerce sur les sphères 1 et 2 sont déterminées, dans un premier temps, dans le repère bisphérique. Ainsi, les forces suivant l'axe  $x$  sont écrites sous la forme :

$$F_{1x} = -6\pi\mu a_1^2 [D_1^{xz} \gamma_{xz} + D_1^{zx} \gamma_{zx} + (Y_{11} l_1 - Y_{12} l_2) \gamma_{zx}], \quad (3.206a)$$

$$F_{2x} = -6\pi\mu a_2 a_1 [D_2^{xz} \gamma_{xz} + D_2^{zx} \gamma_{zx} + (Y_{21} l_1 - Y_{22} l_2) \gamma_{zx}], \quad (3.206b)$$

où les relations (3.152b) ont été utilisées. Les distances adimensionnées  $l_1$  et  $l_2$  sont déterminées à l'aide des relations (3.151b). Maintenant, introduisons les vitesses non-perturbées du fluide écrites aux centres des deux gouttes précisées ci-dessous

$$U_{1x}^\infty = a_1 \gamma_{xz} l_1, \quad (3.207a)$$

$$U_{2x}^\infty = -a_1 \gamma_{xz} l_2. \quad (3.207b)$$

L'introduction de ces deux vitesses permet de réécrire les forces suivant l'axe  $x$  sous la forme suivante :

$$F_{1x} = -6\pi\mu a_1 [-Y_{11} U_{1x}^\infty - Y_{12} U_{2x}^\infty + 2a_1 (Y_{11} l_1 - Y_{12} l_2 + D_1^{xz}) E_{xz}^\infty], \quad (3.208a)$$

$$F_{2x} = -6\pi\mu a_2 [-Y_{21} U_{1x}^\infty - Y_{22} U_{2x}^\infty + 2a_1 (Y_{21} l_1 - Y_{22} l_2 + D_2^{xz}) E_{xz}^\infty], \quad (3.208b)$$

<sup>3</sup>On peut appliquer ici l'argument de Bretherton [19] utilisant la réversibilité en temps des équations de Stokes.

où  $E_{xz}^\infty$  est une composante du tenseur des taux de déformation du champ de vitesse non-perturbé. La même démarche peut être utilisée pour les composantes suivant l'axe  $y$  où les coefficients des forces sont totalement identiques à ceux déterminés suivant l'axe  $x$  (cf. §3.1, les deux configurations pouvant se déduire l'une de l'autre par une rotation de  $\pi/2$ ) :

$$F_{1y} = -6\pi\mu a_1 [-Y_{11}U_{1y}^\infty - Y_{12}U_{2y}^\infty + 2a_1 (Y_{11}l_1 - Y_{12}l_2 + D_1^{xz}) E_{yz}^\infty], \quad (3.209a)$$

$$F_{2y} = -6\pi\mu a_2 [-Y_{21}U_{1y}^\infty - Y_{22}U_{2y}^\infty + 2a_1 (Y_{21}l_1 - Y_{22}l_2 + D_2^{xz}) E_{yz}^\infty]. \quad (3.209b)$$

Les vitesses non-perturbées suivant l'axe  $y$  étant égales à

$$U_{1y}^\infty = a_1\gamma_{yz}l_1, \quad (3.210a)$$

$$U_{2y}^\infty = -a_1\gamma_{yz}l_2. \quad (3.210b)$$

Les forces suivant l'axe  $z$  sont données par les relations

$$F_{1z} = -6\pi\mu a_1 [-X_{11}U_{1z}^\infty - X_{12}U_{2z}^\infty + a_1 (X_{11}l_1 - X_{12}l_2 + D_1^{zz}) E_{zz}^\infty], \quad (3.211a)$$

$$F_{2z} = -6\pi\mu a_2 [-X_{21}U_{1z}^\infty - X_{22}U_{2z}^\infty + a_1 (X_{21}l_1 - X_{22}l_2 + D_2^{zz}) E_{zz}^\infty], \quad (3.211b)$$

où  $E_{zz}^\infty = \gamma_{zz}$  et

$$U_{1z}^\infty = a_1\gamma_{zz}l_1, \quad (3.212a)$$

$$U_{2z}^\infty = -a_1\gamma_{zz}l_2. \quad (3.212b)$$

Il est facile de constater, une nouvelle fois que les vitesses non-perturbées suivant la ligne des centres n'engendrent que des efforts suivant la même direction. La remarque est identique pour les directions perpendiculaires. Il est alors possible de faire apparaître les tenseurs  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}$ . Concernant les termes liés aux composantes du tenseur des taux de déformations, on peut chercher à exprimer les forces sous forme vectorielle en faisant apparaître un tenseur d'ordre 3. En ne conservant que les termes liés au tenseur des taux de déformation, les forces peuvent s'écrire :

$$\vec{F}_1^{E^\infty} = -6\pi\mu a_1^2 \mathbf{G}^1 : \mathbf{E}^\infty, \quad (3.213a)$$

$$\vec{F}_2^{E^\infty} = -6\pi\mu a_2 a_1 \mathbf{G}^2 : \mathbf{E}^\infty, \quad (3.213b)$$

où le symbole : correspond au double produit contracté.  $\mathbf{E}^\infty$  étant un tenseur symétrique, il est nécessaire que :

$$G_{ijk}^\alpha = G_{ikj}^\alpha. \quad (3.214)$$

Afin d'utiliser les notations indicielles, les indices  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont respectivement remplacés par 1, 2 et 3. La force sur la goutte 1 suivant l'axe  $x_1$  ( $x$ ) peut être écrite sous la forme :

$$F_1^{1E^\infty} = -6\pi\mu a_1^2 Y_1^G (E_{13}^\infty + E_{31}^\infty) = -6\pi\mu a_1^2 G_{1jk}^1 E_{jk}^\infty, \quad (3.215)$$

où  $Y_1^G$  est identifié à

$$Y_1^G = Y_{11}l_1 - Y_{12}l_2 + D_1^{xz}. \quad (3.216)$$

Il est alors nécessaire que

$$G_{131}^1 = Y_1^G, \quad (3.217a)$$

$$G_{113}^1 = Y_1^G, \quad (3.217b)$$

$$\text{sinon } G_{1jk}^1 = 0. \quad (3.217c)$$

Ainsi on doit avoir :

$$G_{1jk}^1 = (\delta_{3j}\delta_{1k} + \delta_{1j}\delta_{3k})Y_1^G. \quad (3.218)$$

En procédant de même pour la composante suivant l'axe  $x_2$  ( $y$ ), nous avons :

$$G_{2jk}^1 = (\delta_{3j}\delta_{2k} + \delta_{2j}\delta_{3k})Y_1^G. \quad (3.219)$$

Pour la composante suivant l'axe  $x_3$  ( $z$ ), nous avons :

$$F_3^{1E^\infty} = -6\pi\mu a_1^2 X_1^G E_{33}^\infty = -6\pi\mu a_1^2 G_{3jk}^1 E_{jk}^\infty, \quad (3.220)$$

où  $X_1^G$  est donné par

$$X_1^G = X_{11}l_1 - X_{12}l_2 + D_1^{zz}. \quad (3.221)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$G_{3jk}^1 = \delta_{3j}\delta_{3k}X_1^G. \quad (3.222)$$

Donc  $G_{ijk}^1$  est donnée sous la forme :

$$G_{ijk}^1 = [\delta_{1i}(\delta_{3j}\delta_{1k} + \delta_{1j}\delta_{3k}) + \delta_{2i}(\delta_{3j}\delta_{2k} + \delta_{2j}\delta_{3k})]Y_1^G + \delta_{3i}\delta_{3j}\delta_{3k}X_1^G. \quad (3.223)$$

En utilisant les deux identités suivantes vérifiées dans le repère bisphérique :

$$\delta_{3i} = d_i, \quad (3.224a)$$

$$\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2} = \delta_{ij} - d_id_j, \quad (3.224b)$$

$G_{ijk}^1$  se met sous la forme

$$G_{ijk}^1 = X_1^G d_id_j d_k + Y_1^G (d_j\delta_{ik} + d_k\delta_{ij} - 2d_id_j d_k). \quad (3.225)$$

Cette dernière relation est objective. Nous pouvons appliquer le même raisonnement pour la goutte 2.

Ainsi, sous forme vectorielle, les forces liées à un écoulement linéaire sur les deux gouttes sont

$$\vec{F}_1 = -6\pi\mu a_1 \left[ -\mathbf{A}_{11} \cdot \vec{U}^\infty(\vec{x}_1) - \mathbf{A}_{12} \cdot \vec{U}^\infty(\vec{x}_2) + a_1 \mathbf{G}^1 : \mathbf{E}^\infty \right], \quad (3.226a)$$

$$\vec{F}_2 = -6\pi\mu a_2 \left[ -\mathbf{A}_{21} \cdot \vec{U}^\infty(\vec{x}_1) - \mathbf{A}_{22} \cdot \vec{U}^\infty(\vec{x}_2) + a_2 \mathbf{G}^2 : \mathbf{E}^\infty \right]. \quad (3.226b)$$

La forme générale de  $\mathbf{G}^\alpha$  est

$$G_{ijk}^\alpha = X_\alpha^G d_id_j d_k + Y_\alpha^G (d_j\delta_{ik} + d_k\delta_{ij} - 2d_id_j d_k). \quad (3.227)$$

avec

$$X_\alpha^G = X_{\alpha 1}l_1 - X_{\alpha 2}l_2 + D_\alpha^{zz}, \quad (3.228a)$$

$$Y_\alpha^G = Y_{\alpha 1}l_1 - Y_{\alpha 2}l_2 + D_\alpha^{xz}. \quad (3.228b)$$

Il est alors remarquable de constater que  $Y_\alpha^G$  est identique à  $D_\alpha^{zx}$ .

Enfin, par application de la linéarité des équations de Stokes, les forces agissant sur des gouttes se déplaçant avec des vitesses quelconques dans un écoulement linéaire général peuvent s'écrire sous la forme :

$$\vec{F}_1 = -6\pi\mu a_1 \left\{ \mathbf{A}^{11} \cdot \left[ \vec{V}_1 - \vec{U}^\infty(\vec{x}_1) \right] + \mathbf{A}^{12} \cdot \left[ \vec{V}_2 - \vec{U}^\infty(\vec{x}_2) \right] + a_1 \mathbf{G}^1 : \mathbf{E}^\infty \right\}, \quad (3.229a)$$

$$\vec{F}_2 = -6\pi\mu a_2 \left\{ \mathbf{A}^{21} \cdot \left[ \vec{V}_1 - \vec{U}^\infty(\vec{x}_1) \right] + \mathbf{A}^{22} \cdot \left[ \vec{V}_2 - \vec{U}^\infty(\vec{x}_2) \right] + a_2 \mathbf{G}^2 : \mathbf{E}^\infty \right\}. \quad (3.229b)$$

Ces expressions sont bien objectives. Les coefficients des forces utilisés pour le calcul des tenseurs  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}$  et  $\mathbf{G}^\alpha$  sont déterminés par la méthode des coordonnées bisphériques. Mais, ces coefficients sont totalement généraux. Ils peuvent très bien être déterminés par une autre méthode comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Remarquons que les relations (3.229b) qui ont été ici obtenues par reconstruction auraient pu être écrites directement compte tenu de la linéarité des équations de Stokes et de l'ordre des tenseurs. Mais la présente approche a permis de bien préciser le contenu de chaque tenseur.

Ces formes générales des forces sont en fait très proches de celles obtenues pour les particules solides [79], [72]. La différence provient qu'il n'y a pas de termes liés à la rotation de la goutte.

### 3.5 Relations asymptotiques pour les coefficients des forces

Les sections 3.2 et 3.3 nous permettent de calculer les coefficients des forces asymétriques ( $Y_{\alpha\beta}$ ,  $Y_\alpha^G$ ) et les coefficients axisymétriques ( $X_{\alpha\beta}$  et  $X_\alpha^G$ ) quelle que soit la distance entre les gouttes. La détermination de ces forces dans un programme de calcul de trajectoire, nécessaire à l'obtention des taux de collision, peut entraîner un surcoût de temps de calcul. Il est donc fortement conseillé de connaître des expressions approchées lorsque l'écart entre les gouttes est grand ou petit.

#### 3.5.1 Relations asymptotiques pour $s$ grand

Lorsque la distance séparant les deux gouttes est grande, les forces peuvent être établies à partir d'autres méthodes. La méthode des réflexions peut être employée. Cette dernière utilise les propriétés de linéarité des équations de Stokes. Elle consiste à développer les champs de vitesse et de pression en sommes de fonctions vérifiant également les équations de Stokes et satisfaisant à des conditions aux limites alternativement sur l'une puis l'autre goutte. Le développement de cette méthode pour des particules solides est présenté dans les livres d'Happel et Brenner [56] et de Kim et Karrila [79]. L'application de cette technique aux gouttes a été initiée par Hetsroni et Haber [57], [58].

Seuls les coefficients  $X_{11}$ ,  $X_{12}$ ,  $Y_{11}$  et  $Y_{12}$  sont donnés. Les coefficients restant sont obtenus par application de la propriété suivante :

$$\begin{aligned} X_{(3-\alpha)(3-\beta)}(s, \lambda, \hat{\mu}) &= X_{\alpha\beta}(s, \lambda^{-1}, \hat{\mu}), \\ Y_{(3-\alpha)(3-\beta)}(s, \lambda, \hat{\mu}) &= Y_{\alpha\beta}(s, \lambda^{-1}, \hat{\mu}). \end{aligned} \quad (3.230)$$

Cette propriété peut être établie à l'aide du théorème de réciprocité de Lorentz.

Hetsroni et Haber [58] ont déterminé les forces agissant sur deux gouttes se déplaçant dans un fluide au repos. Ils trouvent pour  $X_{11}$ ,  $X_{12}$ ,  $Y_{11}$  et  $Y_{12}$  les fonctions suivantes :

$$X_{11} = \frac{2 + 3\hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \left\{ 1 + \frac{(2 + 3\hat{\mu})^2 \lambda}{(1 + \hat{\mu})^2 (1 + \lambda)^2 s^2} + \left[ \frac{4(2 + 3\hat{\mu})^2 \lambda^4}{(1 + \hat{\mu})^2} - \frac{8\hat{\mu}(2 + 3\hat{\mu})\lambda}{(1 + \hat{\mu})^2} + \frac{(2 + 3\hat{\mu})^4 \lambda^2}{(1 + \hat{\mu})^4} \right] \frac{1}{(1 + \lambda)^4 s^4} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^6}\right), \quad (3.231)$$

$$X_{12} = \frac{2 + 3\hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \left\{ -\frac{(2 + 3\hat{\mu})\lambda}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)s} + \left[ \frac{4\hat{\mu}\lambda(1 + \lambda^2)}{(1 + \hat{\mu})} - \frac{(2 + 3\hat{\mu})^3 \lambda^2}{(1 + \hat{\mu})^3} \right] \frac{1}{(1 + \lambda)^3 s^3} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^5}\right), \quad (3.232)$$

$$Y_{11} = \frac{2 + 3\hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \left\{ 1 + \frac{(2 + 3\hat{\mu})^2 \lambda}{4(1 + \hat{\mu})^2 (1 + \lambda)^2 s^2} + \left[ \frac{2(2 + 3\hat{\mu})^2 \lambda^3}{(1 + \hat{\mu})^2} + \frac{2\hat{\mu}(2 + 3\hat{\mu})\lambda}{(1 + \hat{\mu})^2} + \frac{(2 + 3\hat{\mu})^4 \lambda^2}{16(1 + \hat{\mu})^4} \right] \frac{1}{(1 + \lambda)^4 s^4} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^6}\right), \quad (3.233)$$

$$Y_{12} = \frac{2 + 3\hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \left\{ -\frac{(2 + 3\hat{\mu})\lambda}{2(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)s} - \left[ \frac{2\hat{\mu}\lambda(1 + \lambda^2)}{(1 + \hat{\mu})} + \frac{(2 + 3\hat{\mu})^3 \lambda^2}{8(1 + \hat{\mu})^3} \right] \frac{1}{(1 + \lambda)^3 s^3} - \left[ \frac{7(2 + 3\hat{\mu})^2 \lambda^2 (1 + \lambda^2)}{2(1 + \hat{\mu})^2} + \frac{(2 + 3\hat{\mu})^5 \lambda^3}{32(1 + \hat{\mu})^5} \right] \frac{1}{(1 + \lambda)^5 s^5} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^7}\right). \quad (3.234)$$

Il est possible de faire plusieurs remarques à la vue de ces relations. Dans un premier temps, lorsque  $s$  devient très grand, les coefficients  $X_{12}$  et  $Y_{12}$  tendent vers zéro. La force agissant sur la goutte 1 devient alors indépendante de la vitesse de la goutte 2 et vice-versa. De plus les coefficients  $X_{11}$  et  $Y_{11}$  approchent lorsque  $s$  devient grand vers la valeur de  $(2 + 3\hat{\mu})/(3 + 3\hat{\mu})$ . Ce qui permet de retrouver la force s'exerçant sur une goutte seule déterminée en 1911 par Hadamard [54] et Rybczynski [121]. D'un autre côté, lorsque le rapport de viscosité tend vers l'infini, l'ensemble des coefficients approchent ceux déterminés par Jeffrey et Onishi [73] pour des particules solides.

Hetsroni et Haber [58] ont également déterminé les forces agissant sur deux gouttes dans un écoulement de cisaillement. La géométrie utilisée dans leur application est donnée sur la figure 3.7. Les deux particules sont placées sur l'axe  $z$  du côté des valeurs négatives. Hetsroni et Haber [58] décomposent le problème en deux. Dans un premier temps, ils déterminent les forces lorsque les gouttes se déplacent avec des vitesses de signes opposés par rapport aux vitesses de l'écoulement non-perturbé dans un fluide au repos. Cette étape est identique à une étude en sédimentation. Dans un deuxième temps, ils déterminent les forces obtenues pour des gouttes qui se déplacent avec le fluide. Les expressions des efforts dans la deuxième étape nous permettent d'accéder aux relations asymptotiques de  $Y_\alpha^G$ . Afin d'utiliser le résultat de l'article [58], nous faisons un changement de repère, la goutte 1 étant disposée en  $a_1 l_1$  alors que la goutte 2 est fixée du côté négatif de l'axe des  $z$  à  $-a_1 l_2$  où les grandeurs  $l_1$  et  $l_2$  sont données par les relations (3.151b). Pour des gouttes qui se déplacent à la vitesse du fluide environnant, les forces

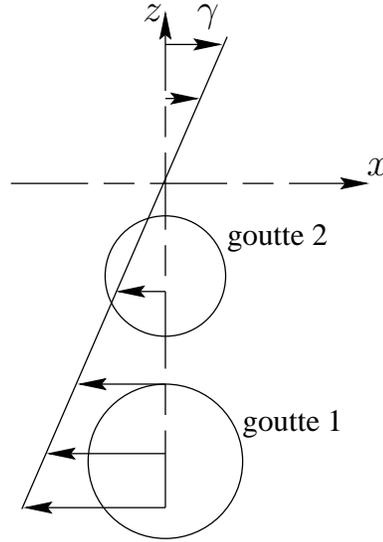


FIG. 3.7 – Géométrie utilisée par Hetsroni et Haber [58] dans la détermination des forces sur deux gouttes dans un écoulement de cisaillement simple.

se réduisent à

$$F_{1x} = -6\pi\mu a_1^2 Y_1^G \gamma, \quad (3.235a)$$

$$F_{2x} = -6\pi\mu a_2 a_1 Y_2^G \gamma. \quad (3.235b)$$

Après identification, les expressions de  $Y_1^G$  et  $Y_2^G$  sont :

$$Y_1^G = \frac{2+3\hat{\mu}}{3(1+\hat{\mu})} \left\{ \left[ \frac{\lambda^2}{1+\hat{\mu}} + \frac{2+5\hat{\mu}}{(1+\hat{\mu})(2+3\hat{\mu})} \right] \frac{8\hat{\mu}\lambda^3}{(1+\lambda)^4 s^4} + \left[ \frac{2+3\hat{\mu}}{(1+\hat{\mu})^2} + \frac{(2+5\hat{\mu})\lambda^2}{(1+\hat{\mu})^2} \right] \frac{4\hat{\mu}\lambda}{(1+\lambda)^5 s^5} + \left[ \frac{(2+3\hat{\mu})\lambda^2}{(1+\hat{\mu})^3} + \frac{2+5\hat{\mu}}{(1+\hat{\mu})^3} \right] \frac{(2+3\hat{\mu})\hat{\mu}\lambda^4}{(1+\lambda)^6 s^6} + \left[ \frac{16\hat{\mu}^2}{(1+\hat{\mu})^2} + \frac{2(2+5\hat{\mu})(6+37\hat{\mu})\lambda^4}{9(1+\hat{\mu})(1+7\hat{\mu})} - \frac{16(4+16\hat{\mu}+17\hat{\mu}^3)\lambda^2}{(1+\hat{\mu})^2(2+3\hat{\mu})} + \frac{\hat{\mu}(2+3\hat{\mu})^3\lambda}{(1+\hat{\mu})^4} + \frac{\hat{\mu}(2+3\hat{\mu})(2+5\hat{\mu})\lambda^3}{(1+\hat{\mu})^3} \right] \frac{\lambda}{(1+\lambda)^7 s^7} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^8}\right), \quad (3.236)$$

$$Y_2^G = -\frac{2+3\hat{\mu}}{3(1+\hat{\mu})} \left\{ \left[ \frac{1}{1+\hat{\mu}} + \frac{(2+5\hat{\mu})\lambda^2}{(1+\hat{\mu})(2+3\hat{\mu})} \right] \frac{8\hat{\mu}}{(1+\lambda)^4 s^4} + \left[ \frac{(2+3\hat{\mu})\lambda^2}{(1+\hat{\mu})^2} + \frac{2+5\hat{\mu}}{(1+\hat{\mu})^2} \right] \frac{4\hat{\mu}\lambda^3}{(1+\lambda)^5 s^5} + \left[ \frac{(2+3\hat{\mu})}{(1+\hat{\mu})^3} + \frac{(2+5\hat{\mu})\lambda^2}{(1+\hat{\mu})^3} \right] \frac{(2+3\hat{\mu})\hat{\mu}\lambda}{(1+\lambda)^6 s^6} + \left[ \frac{16\hat{\mu}^2\lambda^4}{(1+\hat{\mu})^2} + \frac{2(2+5\hat{\mu})(6+37\hat{\mu})}{9(1+\hat{\mu})(1+7\hat{\mu})} - \frac{16(4+16\hat{\mu}+17\hat{\mu}^3)\lambda^2}{(1+\hat{\mu})^2(2+3\hat{\mu})} + \frac{\hat{\mu}(2+3\hat{\mu})^3\lambda^3}{(1+\hat{\mu})^4} + \frac{\hat{\mu}(2+3\hat{\mu})(2+5\hat{\mu})\lambda}{(1+\hat{\mu})^3} \right] \frac{\lambda^3}{(1+\lambda)^7 s^7} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^8}\right). \quad (3.237)$$

### 3.5.2 Relations asymptotiques pour $\xi$ petit

Quand l'écart entre les gouttes est très petit devant 1, il est possible d'utiliser les résultats obtenus dans le cadre de la théorie de lubrification afin d'estimer les valeurs de  $X_{\alpha\beta}$ ,  $Y_{\alpha\beta}$ ,  $X_{\alpha}^G$  et  $Y_{\alpha}^G$ . Davis *et al.* [33] ont déterminé les forces de lubrification pour deux gouttes se déplaçant suivant leur ligne des centres. Ils utilisent une solution sous forme intégrale de l'équation de Stokes. Leur solution nous permet d'estimer  $X_{\alpha\beta}$  :

$$X_{11}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda)^3 \xi} f(m), \quad (3.238a)$$

$$X_{12}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = -X_{11}(\xi, \lambda, \hat{\mu}), \quad (3.238b)$$

$$X_{22}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = X_{11}(\xi, \lambda^{-1}, \hat{\mu}), \quad (3.238c)$$

$$X_{21}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = \frac{X_{12}(\xi, \lambda, \hat{\mu})}{\lambda}. \quad (3.238d)$$

La fonction  $f(m)$  est déterminée à partir d'un approximant de Padé :

$$f(m) = \frac{1 + 0,38m}{1 + 1,69m + 0,43m^2}, \quad (3.239)$$

avec

$$m = \frac{1}{\hat{\mu}} \sqrt{\frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2 \xi}}. \quad (3.240)$$

Il n'existe pas de solution pour les coefficients  $X_{\alpha}^G$ . Par contre, les coefficients  $D_{\alpha}^{zz}$  ne divergent pas lorsque  $\xi$  tend vers zéro. Les courbes de  $D_{\alpha}^{zz}$  obtenues par la méthode des coordonnées bisphériques sont données sur la figure 3.8 pour des gouttes d'eau dans de l'air. Le rapport de viscosité dans ce cas est égal à 104,5. La figure 3.8 donne  $D_1^{zz}$  et  $D_2^{zz}$  pour des valeurs de  $\lambda$  de 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9 et 1,0.  $D_{\alpha}^{zz}$  tendent vers des valeurs constantes lorsque  $\xi$  approche de zéro.

Ainsi, les valeurs de  $D_1^{zz}$  et de  $D_2^{zz}$  pour  $\xi$  très petit peuvent être évaluées à partir du calcul effectué par la méthode des coordonnées bisphériques. On peut écrire que

$$D_{\alpha}^{zz}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = D_{\alpha}^{zz}(0, \lambda, \hat{\mu}) + \mathcal{O}(|\ln \xi|^{-1}). \quad (3.241)$$

Grâce à ces résultats, les coefficients  $X_{\alpha}^G$  donnés par (3.228b) peuvent être estimés à l'aide de la relation suivante où  $l_1$  et  $l_2$  sont définies par (3.151b) :

$$X_1^G(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = X_{11}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) \frac{(\xi+2)(1+\lambda)}{2} + D_1^{zz}(0, \lambda, \hat{\mu}), \quad (3.242a)$$

$$X_2^G(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = -X_{22}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) \frac{(\xi+2)(1+\lambda)}{2} + D_2^{zz}(0, \lambda, \hat{\mu}), \quad (3.242b)$$

Concernant les coefficients asymétriques, il n'existe pas de solution de lubrification. En fait, ces coefficients ne subissent aucune singularité pour  $\xi$  petit. En se basant sur les travaux de O'Neill et Majumdar [102], Zinchenko [154], [156] montre que

$$Y_{\alpha\beta}(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = Y_{\alpha\beta}(0, \lambda, \hat{\mu}) + \mathcal{O}(|\ln \xi|^{-1}). \quad (3.243)$$

Pour les coefficients  $Y_{\alpha}^G$  nous avons les mêmes relations :

$$Y_{\alpha}^G(\xi, \lambda, \hat{\mu}) = Y_{\alpha}^G(0, \lambda, \hat{\mu}) + \mathcal{O}(|\ln \xi|^{-1}). \quad (3.244)$$

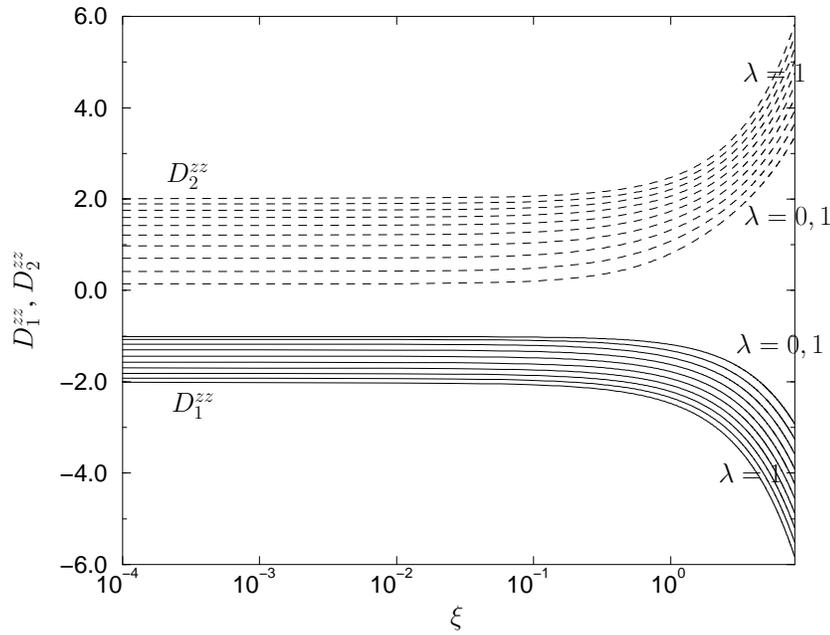


FIG. 3.8 – Courbes donnant  $D_1^{zz}$  et  $D_2^{zz}$  en fonction de  $\xi$  obtenues pour  $\hat{\mu} = 104,5$  et pour  $\lambda$  variant de 0,1 à 1. Les courbes de  $D_1^{zz}$  sont données pour des valeurs de  $\lambda$  croissant du haut vers le bas. Les courbes de  $D_2^{zz}$  sont données pour des valeurs de  $\lambda$  croissant du bas vers le haut.

### 3.6 Présentation des coefficients des forces pour diverses valeurs de $\hat{\mu}$ et de $\lambda$

Les précédents paragraphes ont été consacrés à la recherche des forces d'interactions hydrodynamiques. La solution exacte déterminée à l'aide de la méthode des coordonnées bisphériques permet de connaître les coefficients des forces quelle que soit la distance séparant les deux gouttes. Les relations asymptotiques ont également été proposées. Le but de cette section est de voir comment varient les coefficients des forces en fonction du rapport de viscosité, de  $\lambda$  et de la distance entre les gouttes. Les relations asymptotiques sont également comparées avec les solutions exactes permettant de bien voir leur limite d'utilisation et leur pertinence.

#### 3.6.1 Coefficients asymétriques

Les coefficients  $Y_{\alpha\beta}$  ont des évolutions sensiblement équivalentes. C'est pourquoi, seuls les coefficients  $Y_{11}$  et  $Y_1^G$  sont présentés. Les figures 3.9 et 3.10 donnent  $Y_{11}$  et  $Y_1^G$  en fonction de  $s$  pour des rapports de viscosité de 2, 10 et 104,5 (goutte d'eau).

Lorsque  $s$  devient grand,  $Y_{11}$  tendent asymptotiquement vers le coefficient d'Hadamard-Rybczynski. Les relations asymptotiques donnent une bonne estimation pour  $s$  supérieur à 5. Les valeurs de  $Y_1^G$  restent très faibles. Ce coefficient approche la valeur zéro lorsque  $s$  devient très

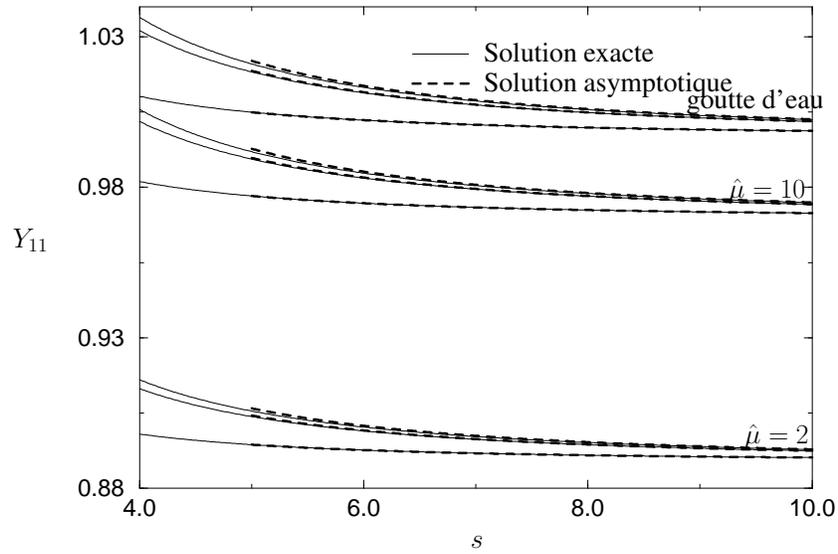


FIG. 3.9 –  $Y_{11}$  en fonction de  $s$  pour  $\hat{\mu}$  égal à 2, 10 et 104,5 (goutte d'eau). Les courbes sont tracées pour  $\lambda = 0, 1; 0, 5$  et 1 du bas vers le haut.

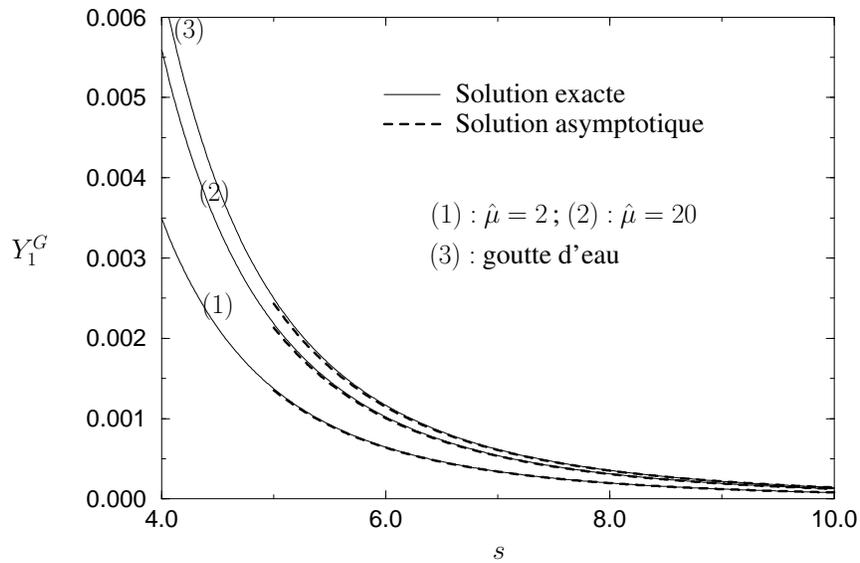


FIG. 3.10 –  $Y_1^G$  en fonction de  $s$  pour  $\hat{\mu}$  égal à 2, 20 et 104,5 (goutte d'eau). Les courbes sont tracées pour  $\lambda = 1$ .

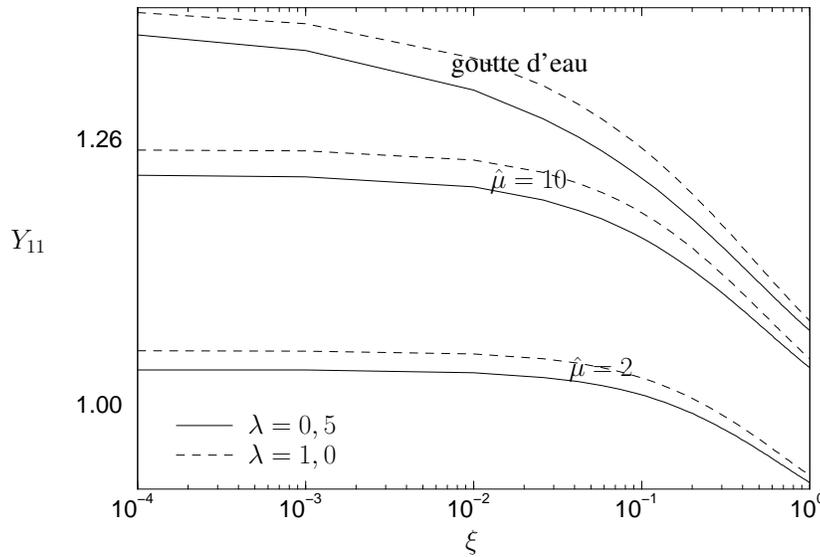


FIG. 3.11 –  $Y_{11}$  en fonction de  $\xi$  pour  $\hat{\mu}$  égal à 2, 10 et 104,5 (goutte d'eau). Les courbes sont tracées pour  $\lambda = 0,5$  et 1.

grand. Les relations asymptotiques que nous avons établies sur les bases des travaux de Hetsroni et Haber [58] se révèlent être de très bonnes approximations de la solution exacte pour  $s \geq 5$ .

Il a déjà été souligné que les coefficients asymétriques ne subissent aucune singularité lorsque l'écart entre les gouttes est faible et ce quel que soit le rapport de viscosité. Ce point est visualisé sur la figure 3.11 donnant  $Y_{11}$  pour  $\hat{\mu} = 2, 10$  et 104,5 (goutte d'eau) et pour  $\lambda = 0,5$  et 1.

Le fluide qui se trouve entre les gouttes proches a un faible effet sur les efforts normaux à la ligne des centres s'appliquant sur les gouttes. Si l'écoulement du fluide de la phase porteuse ne peut plus se faire entre les deux interfaces des gouttes, il peut se faire partout dans le reste de l'espace. Ce sont alors ces champs de perturbation (pression, vitesse) qui contribuent essentiellement aux forces normales à la ligne des centres. Ce point est identique au mouvement d'une particule proche d'une paroi dans un écoulement de cisaillement où la force parallèle au plan ne subit aucune singularité [23].

### 3.6.2 Coefficients axisymétriques

Sur la figure 3.12, le coefficient  $X_{11}$  est représenté pour un rapport de rayon,  $\lambda$ , de 0,1 et pour diverses valeurs de  $\hat{\mu}$  en fonction de  $\xi$ . L'augmentation du rapport de viscosité s'accompagne d'une augmentation de  $X_{11}$ . Le rôle de  $\hat{\mu}$  est également vérifié sur les figures 3.13 et 3.14 obtenues respectivement pour  $\lambda = 0,5$  et  $\lambda = 1$ .  $X_{11}$  augmente également fortement avec le rapport des rayons. Pour  $\lambda = 0,1$ ,  $X_{11}$  n'excède jamais 110 pour  $\xi = 10^{-4}$ . Alors que pour  $\lambda = 0,5$  et 1,  $X_{11}$  est de l'ordre de  $10^3$  dans le cas des particules solides. L'écart entre les faibles valeurs de  $\hat{\mu}$  est d'ailleurs d'autant plus important que  $\lambda$  est grand. Cette forte augmen-

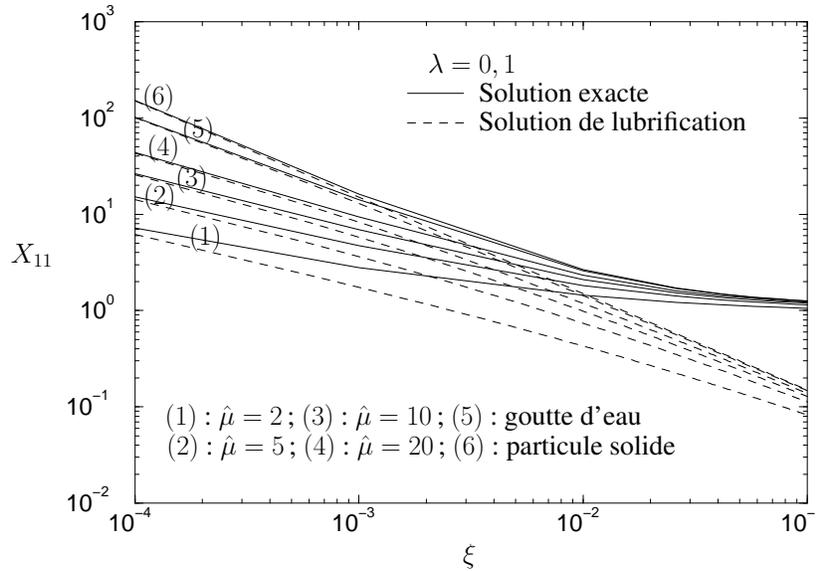


FIG. 3.12 –  $X_{11}$  en fonction de  $\xi$  pour  $\lambda = 0, 1$  et pour divers rapports de viscosité.

tation de  $X_{11}$  en fonction du rapport de viscosité est directement liée à la mobilité de l'interface entre les deux fluides. Lorsque  $\hat{\mu}$  est grand, l'écoulement à l'intérieur des gouttes est de plus en plus «gelé». En fait, il est facile de montrer que le rapport des vitesses caractéristiques entre le fluide interne et externe est inversement proportionnel à  $\hat{\mu}$ . Il s'ensuit que plus  $\hat{\mu}$  est grand plus l'évacuation du film fluide entre les deux gouttes est difficile. Ceci s'accompagne alors d'une forte augmentation de la pression entre les gouttes. Dans le cas des particules solides, il est connu que les forces deviennent inversement proportionnelles à l'écart entre les deux particules [71]. Alors que pour un rapport de viscosité très faible, Davis *et al.* [33] montrent que les forces deviennent proportionnelles à l'inverse de la racine carrée de  $\xi$ . Ceci a de lourdes conséquences sur les collisions et la coalescence. En effet, le temps nécessaire pour avoir contact ne diverge pas dans le cas des faibles valeurs de  $\hat{\mu}$ . Cet effet sera vu également dans le prochain chapitre.

Sur les figures 3.12, 3.13 et 3.14, les solutions obtenues à partir de la théorie de lubrification sont également représentées. Pour  $\lambda = 0, 1$  et pour de faibles rapports de viscosité,  $X_{11}$  calculé à l'aide de (3.238a) s'écarte très rapidement de la solution exacte. Par contre, la solution de lubrification est relativement satisfaisante pour  $\lambda = 0, 5$  et  $\lambda = 1$ . De plus, la concordance est d'autant meilleure que le rapport de viscosité est important.

Afin de voir si les estimations, (3.242ba) et (3.242bb), réalisées pour les coefficients  $X_1^G$  et  $X_2^G$  pour  $\xi$  petit sont correctes, on a représenté sur les figures 3.15, 3.16 et 3.17 une comparaison entre cette solution de lubrification et la solution exacte pour  $X_1^G$ . Les résultats obtenus pour  $X_2^G$  sont analogues. Il s'avère que les conclusions sont identiques à celles établies précédemment pour le coefficients  $X_{11}$ . Encore une fois, la solution de lubrification est très satisfaisante pour les rapports de viscosité élevés.

Sur les figures 3.18 et 3.19,  $X_{11}$  est représenté pour des distances entre les gouttes élevées. Dans chaque cas,  $X_{11}$  tend asymptotiquement vers le coefficient d'Hadamard-Rybczynski pour

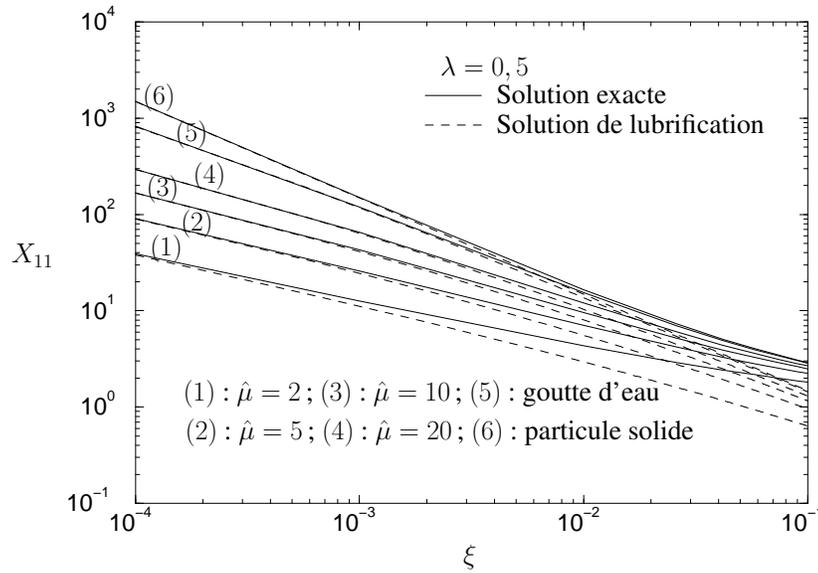


FIG. 3.13 –  $X_{11}$  en fonction de  $\xi$  pour  $\lambda = 0,5$  et pour divers rapports de viscosité.

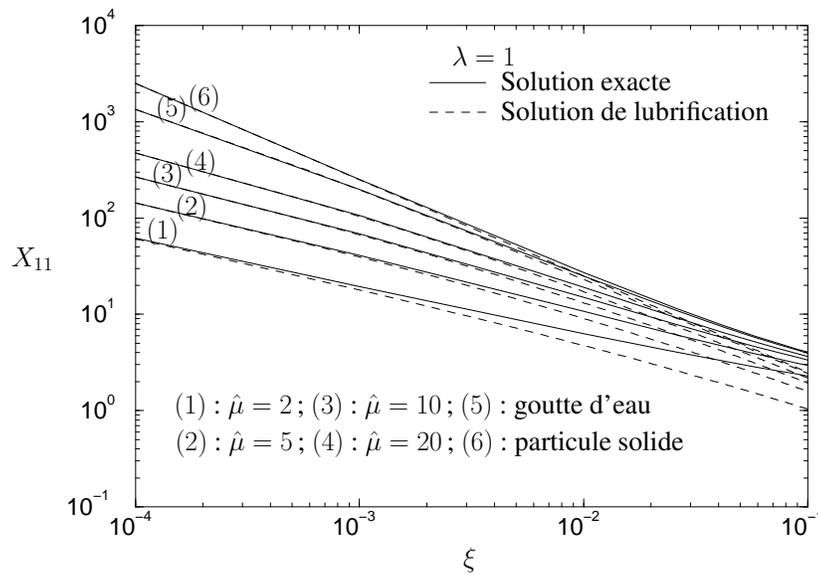


FIG. 3.14 –  $X_{11}$  en fonction de  $\xi$  pour  $\lambda = 1$  et pour divers rapports de viscosité.

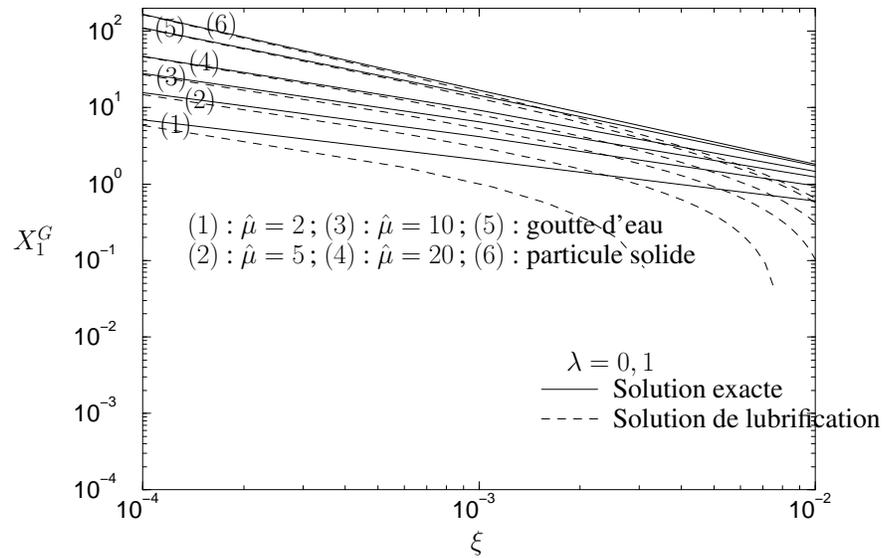


FIG. 3.15 –  $X_1^G$  en fonction de  $\xi$  pour  $\lambda = 0, 1$  et pour divers rapports de viscosité.

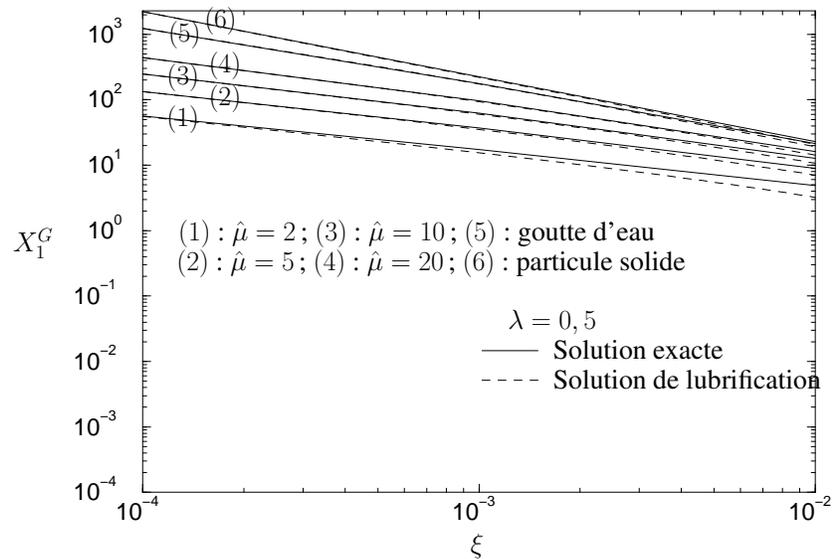


FIG. 3.16 –  $X_1^G$  en fonction de  $\xi$  pour  $\lambda = 0, 5$  et pour divers rapports de viscosité.

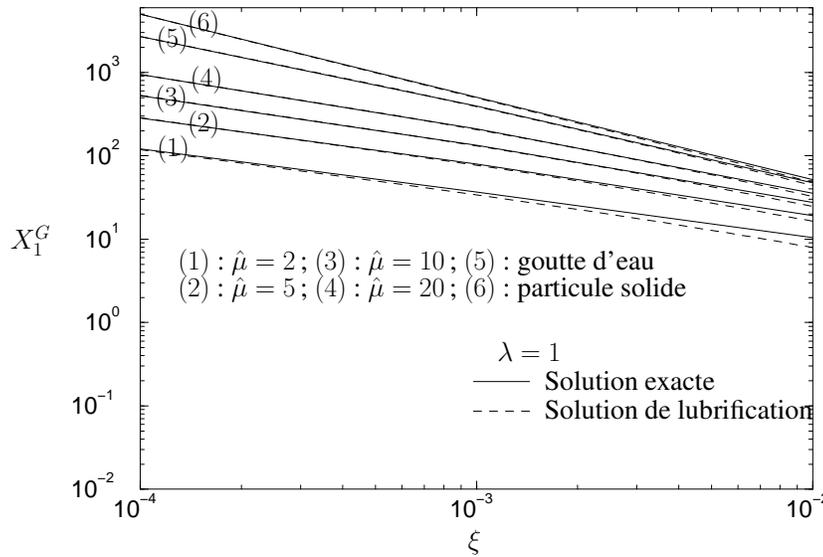


FIG. 3.17 –  $X_1^G$  en fonction de  $\xi$  pour  $\lambda = 1$  et pour divers rapports de viscosité.

$s$  grand. Nous sommes assurés également du bon comportement des solutions asymptotiques.

### 3.7 Détermination des fonctions de mobilité

Lorsque l'inertie des gouttes est négligée, la somme des forces appliquées à une goutte est alors égale à zéro. A cet égard, il devient possible d'exprimer directement la différence des vitesses entre les gouttes. Les trajectoires relatives sont facilement obtenues par intégration de cette vitesse relative. L'intérêt principal de cette écriture est l'obtention analytique de la fonction de distribution de paire dans le cas de la sédimentation [11] et de particules dans un écoulement linéaire [13]. Comme nous le verrons dans le chapitre 6, la détermination de la fonction de distribution de paire est fondamentale dans la recherche du taux de collision. La détermination des forces d'interactions hydrodynamiques permet d'obtenir directement les fonctions de mobilité intervenant dans l'expression de la vitesse relative.

Dans le cas de particules sédimentant où le mouvement brownien est également pris en compte, les travaux de Batchelor [10], [11] permettent d'écrire la vitesse relative  $\vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$  sous la forme [153] :

$$\vec{V}_{12} = \vec{V}_{12}^0 \cdot \left[ \vec{d}\vec{d}\mathcal{L}(s) + \left( \mathbf{I} - \vec{d}\vec{d} \right) \mathcal{M}(s) \right] - D_{12}^0 \left[ \vec{d}\vec{d}\mathcal{G}(s) + \left( \mathbf{I} - \vec{d}\vec{d} \right) \mathcal{H}(s) \right] \cdot \vec{\text{grad}}(\ln p_{12}). \quad (3.245)$$

$\vec{V}_{12}^0$  est la vitesse relative de sédimentation qui pour des gouttes s'exprime à l'aide de la relation d'Hadamard-Rybczynski :

$$\vec{V}_{12}^0 = \frac{2(\hat{\mu} + 1)(\rho' - \rho)a_1^2(1 - \lambda^2)}{3(3\hat{\mu} + 2)\mu} \vec{g}. \quad (3.246)$$

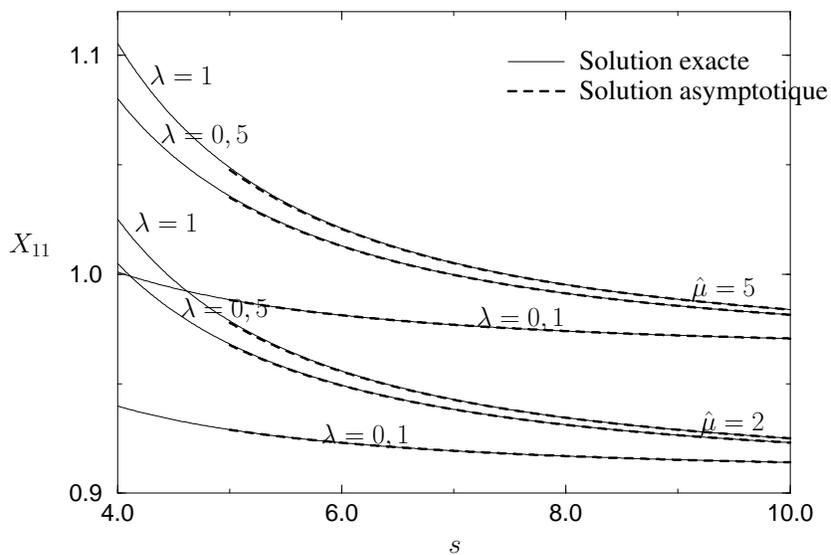


FIG. 3.18 –  $X_{11}$  en fonction de  $s$  pour  $\lambda = 0,1 ; 0,5$  et  $1$  et pour  $\hat{\mu} = 2$  et  $5$ .

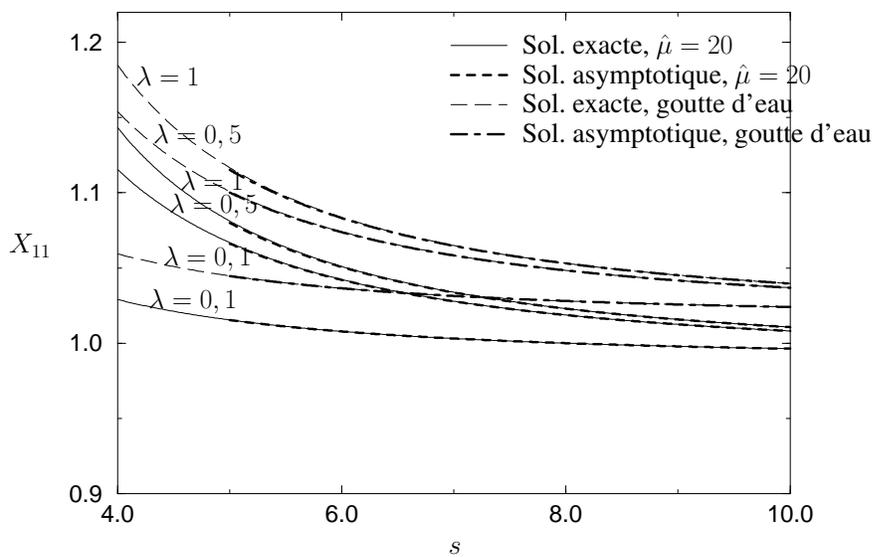


FIG. 3.19 –  $X_{11}$  en fonction de  $s$  pour  $\lambda = 0,1 ; 0,5$  et  $1$  et pour  $\hat{\mu} = 20$  et  $104,5$  (goutte d'eau)

Le coefficient de diffusion  $D_{12}^0$  est donné par

$$D_{12}^0 = \frac{kT(\hat{\mu} + 1)(1 + \lambda^{-1})}{2\pi\mu(3\hat{\mu} + 2)a_1}. \quad (3.247)$$

$p_{12}$  est la fonction de distribution de paire.  $k$  est la constante de Boltzmann.  $T$  la température.  $\mathcal{L}(s)$ ,  $\mathcal{M}(s)$ ,  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{H}(s)$  sont les fonctions de mobilité déterminées en exprimant que la somme des forces qui agissent sur chaque goutte est nulle. Afin d'exprimer facilement la vitesse relative à l'aide des forces d'interactions, Zinchenko [154], [156] exprime ces dernières sous la forme suivante :

$$\vec{F}_1 = -6\pi\mu a_1 \left[ \mathbf{\Lambda}^{11} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) + \mathbf{\Lambda}^{12} \cdot \vec{V}_2 \right], \quad (3.248a)$$

$$\vec{F}_2 = -6\pi\mu a_2 \left[ \mathbf{\Lambda}^{21} \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) + \mathbf{\Lambda}^{12} \cdot \vec{V}_2 \right]. \quad (3.248b)$$

Les tenseurs  $\mathbf{\Lambda}^{\alpha\beta}$  sont définis sous la forme :

$$\Lambda_{ij}^{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta} d_i d_j + T_{\alpha\beta} (\delta_{ij} - d_i d_j). \quad (3.249)$$

Les relations liant les coefficients  $X_{\alpha\beta}$ ,  $Y_{\alpha\beta}$  et  $\Lambda_{\alpha\beta}$ ,  $T_{\alpha\beta}$  sont :

$$\Lambda_{11} = X_{11}, \quad \Lambda_{12} = X_{11} + X_{12}, \quad (3.250a)$$

$$\Lambda_{21} = -X_{21}, \quad \Lambda_{22} = X_{21} + X_{22}, \quad (3.250b)$$

$$T_{11} = Y_{11}, \quad T_{12} = Y_{11} + Y_{12}, \quad (3.250c)$$

$$T_{21} = -Y_{21}, \quad T_{22} = Y_{21} + Y_{22}. \quad (3.250d)$$

Dans le cas de gouttes en sédimentation, la somme des forces est :

$$\vec{F}_1 + \mathcal{V}_1(\rho' - \rho)\vec{g} - kT\mathbf{grad}(\ln p_{12}) = \vec{0}, \quad (3.251a)$$

$$\vec{F}_2 + \mathcal{V}_2(\rho' - \rho)\vec{g} + kT\mathbf{grad}(\ln p_{12}) = \vec{0}. \quad (3.251b)$$

$\mathcal{V}_\alpha$  est le volume de la goutte  $\alpha$ . Le premier terme de la somme représente les forces d'interactions hydrodynamiques, le second est lié à la pesanteur et à la poussée d'Archimède et le dernier terme traduit l'agitation moléculaire. En décomposant ces forces suivant la ligne des centres et perpendiculairement, il est facile de montrer que les fonctions de mobilité  $\mathcal{L}(s)$ ,  $\mathcal{M}(s)$ ,  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{H}(s)$  sont données par les relations suivantes :

$$\mathcal{L}(s) = \frac{2 + \hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \frac{\Lambda_{22} - \lambda^2 \Lambda_{12}}{(1 - \lambda^2)(\Lambda_{11}\Lambda_{22} + \Lambda_{12}\Lambda_{21})}, \quad (3.252a)$$

$$\mathcal{G}(s) = \frac{2 + \hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \frac{\Lambda_{12} + \lambda \Lambda_{22}}{(1 + \lambda)(\Lambda_{11}\Lambda_{22} + \Lambda_{12}\Lambda_{21})}, \quad (3.252b)$$

$$\mathcal{M}(s) = \frac{2 + \hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \frac{T_{22} - \lambda^2 T_{12}}{(1 - \lambda^2)(T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})}, \quad (3.252c)$$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{2 + \hat{\mu}}{3(1 + \hat{\mu})} \frac{T_{12} + \lambda T_{22}}{(1 + \lambda)(T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})}. \quad (3.252d)$$

Dans le cas où  $s$  est suffisamment grand, il est possible d'établir des expressions asymptotiques de ces fonctions [153] :

$$\mathcal{L}(s) = 1 - \frac{(2 + 3\hat{\mu})(\lambda^3 - 1)}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)(\lambda^2 - 1)s} + \frac{4\hat{\mu}(\lambda^3 - 1)(\lambda^2 + 1)}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^3(\lambda^2 - 1)s^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^6}\right), \quad (3.253a)$$

$$\mathcal{G}(s) = 1 - \frac{2(2 + 3\hat{\mu})\lambda}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^2s} + \frac{8\hat{\mu}\lambda(\lambda^2 + 1)}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^4s^3} - \frac{4(2 + 5\hat{\mu})(2 + 3\hat{\mu})\lambda(\lambda^3 + 1)}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^5s^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^6}\right), \quad (3.253b)$$

$$\mathcal{M}(s) = 1 - \frac{(2 + 3\hat{\mu})(\lambda^3 - 1)}{2(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)(\lambda^2 - 1)s} - \frac{2\hat{\mu}(\lambda^3 - 1)(1 + \lambda^2)}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^3(\lambda^2 - 1)s^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^6}\right), \quad (3.253c)$$

$$\mathcal{H}(s) = 1 - \frac{(2 + 3\hat{\mu})\lambda}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^2s} - \frac{2\hat{\mu}\lambda(\lambda^2 - 1)}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^2s^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^6}\right). \quad (3.253d)$$

Lorsque  $s$  tend vers 2 ou  $\xi \rightarrow 0$ , Zhang et Davis [153] proposent des expressions pour  $\mathcal{L}(s)$ ,  $\mathcal{G}(s)$  et  $\mathcal{M}(s)$  tirées des résultats de Davis *et al.* [33]. Ils donnent :

$$\mathcal{L}(\xi) = \frac{(3\hat{\mu} + 2)(1 + \lambda)^3}{3(\hat{\mu} + 1)\lambda^2(\lambda^2 - 1)} \left[ \lambda^3 - 1 - (\lambda\beta_2 - \beta_1) \frac{1 + \lambda^3}{\beta_1 + \lambda\beta_2} \right] \frac{\xi}{f(m)}, \quad (3.254a)$$

$$\mathcal{G}(\xi) = \frac{(3\hat{\mu} + 2)(1 + \lambda)^2\xi}{6(1 + \hat{\mu})\lambda} \frac{\xi}{f(m)}, \quad (3.254b)$$

$$\mathcal{M}(\xi) = M_0 + M_1\xi, \quad (3.254c)$$

où  $f(m)$  est donnée en (3.239). Les constantes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $M_0$  et  $M_1$  sont déterminées à l'aide de la solution obtenue par la méthode des coordonnées bisphériques.

Dans le cas de gouttes dispersées dans un écoulement linéaire, Batchelor et Green [14] ont montré que la vitesse relative s'exprime à l'aide de la relation :

$$\vec{V}_{12} = \vec{\Omega}_\infty^\infty \vec{r} + \mathbf{E}^\infty \cdot \vec{r} - \left[ \mathcal{A}(s)\vec{d}\vec{d} + \mathcal{B}(s) \left( \mathbf{I} - \vec{d}\vec{d} \right) \right] \cdot \mathbf{E}^\infty \cdot \vec{r}. \quad (3.255)$$

$\vec{\Omega}_\infty^\infty$  est le vecteur tourbillon de l'écoulement linéaire non-perturbé par la présence des particules. A l'aide des forces d'interactions hydrodynamiques déterminées dans les cas particuliers d'une élongation pure et d'un cisaillement simple, il est possible de calculer les fonctions de mobilité  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  respectivement.

Dans le cas de l'élongation pure, où le tenseur des taux de déformation est

$$\mathbf{E}^\infty = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.256)$$

seul le mouvement suivant la ligne des centres intervient, la vitesse relative est donnée par la relation :

$$V_{12z} = \gamma r(1 - \mathcal{A}). \quad (3.257)$$

Les forces sont déterminées sous la forme :

$$F_{1z} = -6\pi\mu a_1 [\Lambda_{11}(V_{1z} - V_{2z}) + \Lambda_{12}V_{2z} + a_1\gamma D_1^{zz}], \quad (3.258a)$$

$$F_{2z} = -6\pi\mu a_2 [\Lambda_{21}(V_{2z} - V_{1z}) + \Lambda_{22}V_{2z} + a_1\gamma D_2^{zz}]. \quad (3.258b)$$

Ce qui nous permet de déterminer  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A}(s) = 1 + \frac{2(D_1^{zz}\Lambda_{22} - D_2^{zz}\Lambda_{12})}{(1 + \lambda)s(\Lambda_{11}\Lambda_{22} + \Lambda_{12}\Lambda_{21})}. \quad (3.259)$$

Dans le cas du cisaillement simple, où le tenseur des taux de déformation est

$$\mathbf{E}^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.260)$$

la seule composante restante est suivant l'axe  $x$ , la vitesse relative est alors :

$$V_{12x} = \gamma r(1 - \frac{\mathcal{B}}{2}). \quad (3.261)$$

Les forces sont déterminées sous la forme :

$$F_{1x} = -6\pi\mu a_1 [T_{11}(V_{1x} - V_{2x}) + T_{12}V_{2x} + a_1\gamma D_1^{xz}], \quad (3.262a)$$

$$F_{2x} = -6\pi\mu a_2 [T_{21}(V_{2x} - V_{1x}) + T_{22}V_{2x} + a_1\gamma D_2^{xz}]. \quad (3.262b)$$

Ce qui nous permet de déterminer  $\mathcal{B}$  :

$$\mathcal{B}(s) = 2 + \frac{4(D_1^{xz}T_{22} - D_2^{xz}T_{12})}{(1 + \lambda)s(T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})}. \quad (3.263)$$

Dans le cas où  $s$  est suffisamment grand, Wang *et al* [145] proposent les relations asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s) &= \frac{4(2 + 5\hat{\mu})(1 + \lambda^3)}{(1 + \hat{\mu})(1 + \lambda)^3 s^3} - \frac{48\hat{\mu} [(2 + 3\hat{\mu})(1 + \lambda^5) + (2 + 5\hat{\mu})(1 + \lambda)\lambda^2]}{(1 + \hat{\mu})(2 + 3\hat{\mu})(1 + \lambda)^5 s^5} \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^8}\right), \end{aligned} \quad (3.264a)$$

$$\mathcal{B}(s) = \frac{32\hat{\mu} [(2 + 3\hat{\mu})(1 + \lambda^5) + (2 + 5\hat{\mu})(1 + \lambda)\lambda^2]}{(1 + \hat{\mu})(2 + 3\hat{\mu})(1 + \lambda)^5 s^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^6}\right). \quad (3.264b)$$

Sur la figure 3.20, le coefficient de mobilité  $\mathcal{L}$  a été représenté pour trois rapports de viscosité et pour  $\lambda = 0, 1$ . Lorsque l'écart entre les gouttes est grand, l'influence du rapport de viscosité semble très faible. Les courbes pour  $\hat{\mu} = 20$  et  $\hat{\mu} = 104, 5$  sont pratiquement confondues pour  $\xi$  plus grand que 3. Les relations asymptotiques ont également été représentées permettant de vérifier le bon accord entre les deux solutions. Les autres coefficients de mobilité  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{H}$  ne sont pas représentés car leurs évolutions sont très similaires à celle de  $\mathcal{L}$ .

Pour finir, les fonctions de mobilité  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont données sur les figures 3.21 et 3.22 pour les gouttes d'eau. La solution donnée par Batchelor et Green [14] pour  $\lambda = 1$  et pour des particules solides est également représentée. Nous pouvons constater que les fonctions de mobilités des gouttes sont très proches de celles obtenues pour des particules solides.

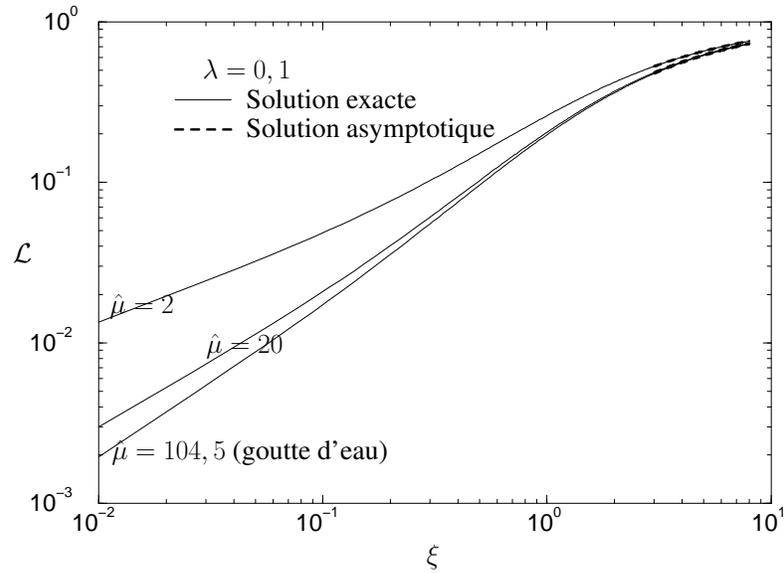


FIG. 3.20 –  $\mathcal{L}$  en fonction de  $\xi$  pour  $\hat{\mu} = 2$ ;  $\hat{\mu} = 20$  et  $104, 5$  (goutte d'eau) et pour  $\lambda = 0, 1$ .

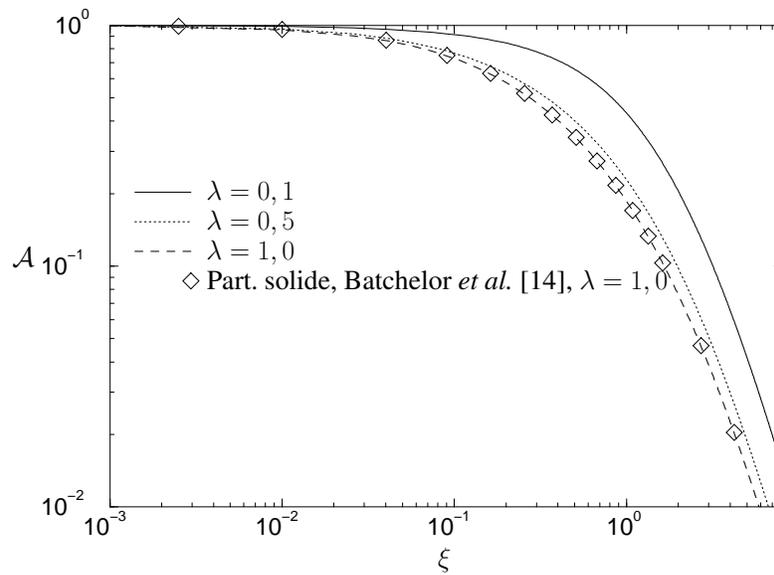


FIG. 3.21 –  $\mathcal{A}$  en fonction de  $\xi$  pour  $\hat{\mu} = 104, 5$  (goutte d'eau).

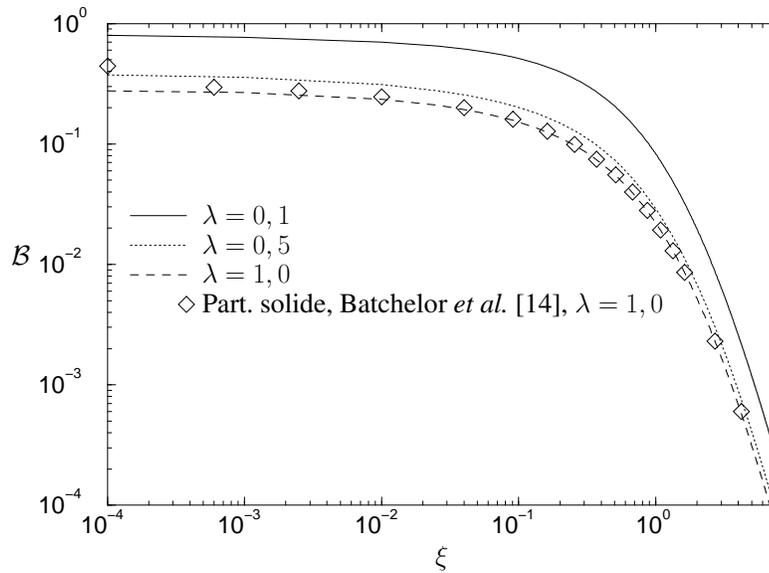


FIG. 3.22 –  $B$  en fonction de  $\xi$  pour  $\hat{\mu} = 104,5$  (goutte d'eau).

### 3.8 Conclusion

Cette première partie a été consacrée à l'étude des forces d'interactions hydrodynamiques. Il a été vu dans un premier temps comment la recherche des efforts sur deux gouttes plongées dans un écoulement linéaire quelconque pouvait se ramener à deux grands problèmes (asymétrique et axisymétrique). La résolution de ces deux derniers a ensuite été élaborée. Les forces sur les gouttes ont été obtenues par une résolution exacte des équations de Stokes pour les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur des gouttes. La méthode des coordonnées bisphériques utilisée ici permet de simplifier les conditions aux limites. En contrepartie, la formulation mathématique se relève beaucoup plus compliquée. Par exploitation de la linéarité des équations de Stokes, une expression générale des forces a été obtenue. L'utilisation de la méthode des réflexions permet d'obtenir des expressions approchées des coefficients des forces lorsque la distance entre les gouttes est relativement importante. A l'opposé, lorsque les gouttes sont très proches, la théorie de lubrification est riche en enseignement. Elle permet d'obtenir également des estimations pour les coefficients axisymétriques. Nous avons pu constater sur les représentations graphiques les bons accords entre les solutions exactes et approchées. Enfin, la dernière section a été consacrée à une application du calcul des forces. Ainsi, l'ensemble des fonctions de mobilité, fonctions utiles pour les applications, a été obtenu pour un écoulement linéaire quelconque. Les résultats se montrent être en très bon accord avec ceux préexistants pour des situations proches.

Les expressions des forces d'interaction hydrodynamique vont être appliquées dans les chapitres suivants, pour calculer les trajectoires relatives entre gouttes ainsi que les taux de collision. Les relations approchées pour  $s$  grand et  $\xi$  petit seront également utilisées.

## **Deuxième partie**

### **Taux de collision en écoulements linéaires**



# Chapitre 6

## Taux de collision en écoulements linéaires

Le mécanisme qui conduit à la coalescence est compliqué. Il fait intervenir de multiples paramètres liés à l'écoulement de la phase porteuse et à la nature physique de la phase dispersée. Les forces mises en présence sont dues à l'écoulement (forces hydrodynamiques) et à des effets microscopiques (forces de van der Waals et électriques). Ces dernières ont une faible portée et jouent un rôle important uniquement lorsque les gouttes sont proches. La prise en compte de ces deux forces à courte portée fait l'objet de la théorie D.L.V.O. (Derjaguin, Landau, Verwey et Overbeek) qui est couramment utilisée dans l'étude des dispersions colloïdales [120], [69]. La coalescence de particules peut être classée suivant la prise en compte ou non des forces microscopiques. La classification due à Levich [91] est la suivante :

- *coalescence neutre* : les forces microscopiques sont négligées ;
- *rapide* : prise en compte uniquement des forces de van der Waals ;
- *lente* : prise en compte des deux forces microscopiques.

Cette classification est liée à la nature des forces à courte portée. Pour des particules faites du même matériau, les interactions de van der Waals sont purement attractives [69] et contribuent à une augmentation de la collision. Alors que les forces électriques ou de double couche peuvent être répulsives et empêchent la collision des gouttes.

Les recherches les plus anciennes sur le sujet sont l'œuvre de Smoluchowski [131]. Il a calculé les taux de collision pour les écoulements cisailés et le mouvement brownien. Par la suite, la prise en compte des interactions hydrodynamiques a été introduite par Zeichner et Schowalter [152] pour des écoulements linéaires et des particules de même taille. Davis [32] a étudié le cas de la sédimentation avec des particules de tailles différentes. Pour les gouttes, la contribution de Zinchenko [158] est importante. Ces travaux ont été étendus à des écoulements linéaires dans une publication récente de Wang *et al.* [145].

Pour des milieux suffisamment dilués, seules les rencontres entre deux particules sont considérées. La coalescence peut être décomposée en plusieurs étapes :

1. Rapprochement de deux particules ;
2. Evacuation du film fluide entre les deux gouttes ;
3. Rupture de ce film ;
4. Formation d'une nouvelle goutte.

L'étape 1 fait l'objet de l'étude hydrodynamique. Le rapprochement de deux gouttes est lié à l'écoulement porteur qui peut être turbulent ou non. Il peut être dû également à des diffé-

rences de vitesses entre les gouttes liées à leur différence de rayon. Les étapes 2 et 3 concernent plus particulièrement l'étude de la coalescence. Elles font intervenir des phénomènes physiques comme la déformation des surfaces des gouttes. Ces étapes ne sont pas vues dans ce mémoire. Pour plus de détails sur ces points, il est conseillé de se reporter aux articles [26] et [122].

Seule la première étape est examinée dans ce chapitre. Dans un premier temps, un modèle simple dû à la sédimentation ou à des écoulements linéaires, ne prenant pas en compte les interactions entre particules, permet de voir les aspects principaux de la physique de la collision. Ensuite, les interactions hydrodynamiques et les forces de van der Waals sont prises en compte pour introduire la notion fondamentale d'efficacité de collision. Les paragraphes 6.1 et 6.2 résumement l'état des connaissances de la physique de la collision. Néanmoins, nous avons établi deux résultats originaux concernant les taux de collision dans un écoulement d'éirement plan. Le premier est produit en absence de forces d'interaction, section 6.1.4 et le deuxième avec interaction, section 6.2.4. Pour des aérosols, où le rapport des masses volumiques est important, l'inertie des gouttes doit être prise en compte. Cet aspect est étudié dans le paragraphe 6.5. L'étude commence par une analyse dimensionnelle afin de montrer l'importance de l'inertie des gouttes. Ensuite, la détermination des taux de collision est présentée pour des écoulements de cisaillement simple et d'élongation pure. Nous finissons cette section par la présentation et discussion des résultats.

## 6.1 Collision sans effet hydrodynamique

Dans cette section, les taux de collision sont établis en absence d'interactions hydrodynamiques entre particules et des forces interparticulaires. Ils sont tous notés avec un indice 0 faisant référence à cette simplicité.

### 6.1.1 Collision pour une sédimentation

Dans la mesure où les interactions entre les particules sont négligées, le calcul est très simple. Il se résume à chercher le flux de particules frappant la goutte dite *cible*. La vitesse de sédimentation d'une goutte est donnée par la relation suivante en utilisant la solution d'Hadamard-Rybczynski :

$$V_\alpha = \frac{2(\hat{\mu} + 1)}{3\mu(3\hat{\mu} + 2)}(\rho' - \rho)a_\alpha^2 g, \quad (6.1)$$

où  $\rho'$  est la masse volumique des particules,  $\rho$  est celle du fluide porteur.  $\hat{\mu}$  est le rapport des viscosités dynamiques entre le fluide interne aux gouttes et le fluide externe.  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Comme dans le chapitre 3,  $\alpha$  est égal à 1 ou 2.

Le nombre de collisions entre des particules de rayons différents est :

$$\Delta N = n_1 n_2 \Delta \mathcal{V}. \quad (6.2)$$

$n_1$  et  $n_2$  sont les concentrations volumiques des gouttes de rayons  $a_1$  et  $a_2$ .  $\Delta \mathcal{V}$  est le volume de balayage où se produit ces collisions. Il est déterminé de la façon suivante :

$$\Delta \mathcal{V} = \pi R^2 V_{12}^0 \Delta t. \quad (6.3)$$

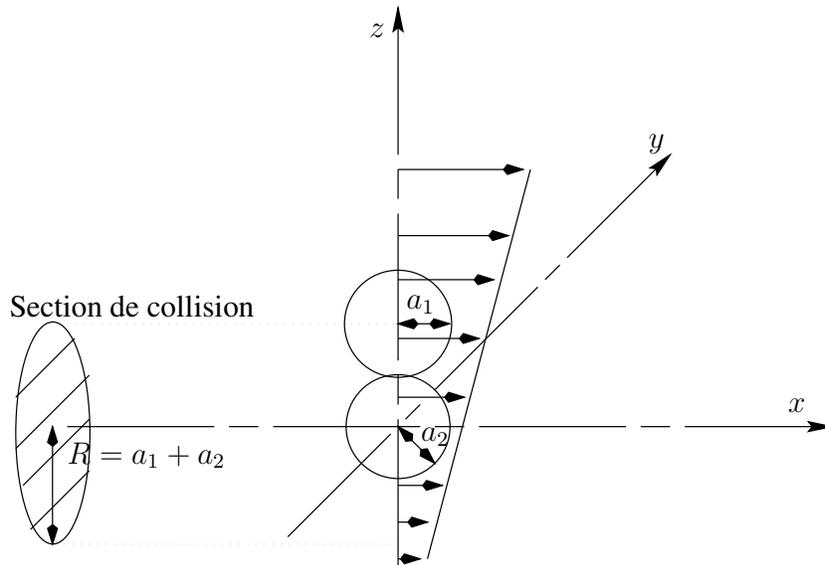


FIG. 6.1 – Section de collision dans un écoulement de cisaillement simple sans interaction hydrodynamique.

$R$  est la somme des rayons des particules.  $V_{12}^0$  est la différence des vitesses de sédimentation définie par la relation (3.246). Le taux de collision est alors défini de la façon suivante :

$$J_{12_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t}. \quad (6.4)$$

L'expression de  $J_{12_0}$  est alors :

$$J_{12_0} = \pi (a_1 + a_2)^2 n_1 n_2 \frac{2(\hat{\mu} + 1)}{3\mu(3\hat{\mu} + 2)} (\rho' - \rho) |a_1^2 - a_2^2| g. \quad (6.5)$$

Dans cette analyse, les effets hydrodynamiques ont été négligés. Les trajectoires des particules ne sont pas déviées lorsque celles-ci sont proches.

### 6.1.2 Collision dans un écoulement cisailé

Supposons que l'on ait un écoulement cisailé suivant la direction  $z$  de taux de cisaillement  $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $u$  étant la composante de la vitesse suivant l'axe  $x$  (cf. figure 6.1). En faisant l'hypothèse d'équilibre dynamique entre les phases continue et dispersée, les particules ont les mêmes vitesses que la phase porteuse.

Le taux de collision est défini de la même façon que dans la section précédente :

$$J_{12_0} = n_1 n_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = n_1 n_2 \int_S |v_{12}| dS. \quad (6.6)$$

$v_{12}$  est la différence de vitesse entre deux particules suivant la direction  $x$ . La valeur absolue est introduite pour tenir compte du mouvement relatif par rapport à la particule cible. La surface

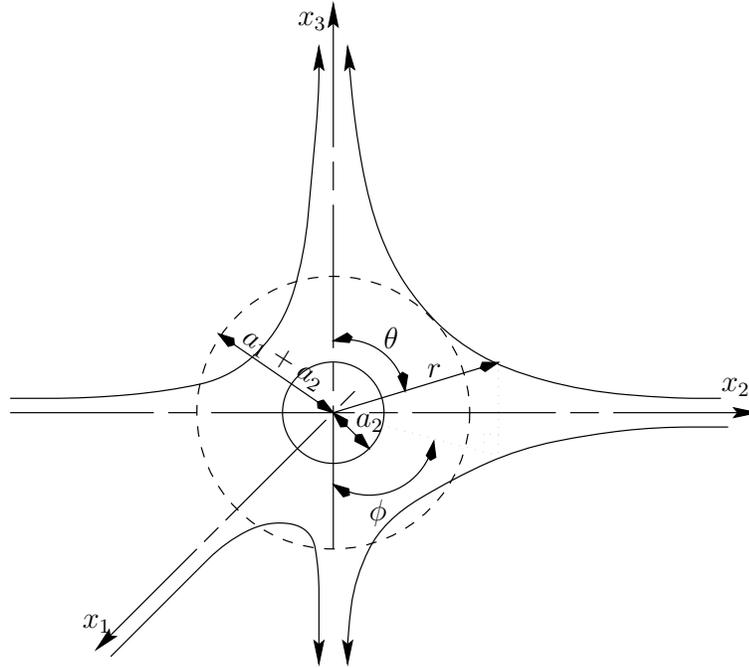


FIG. 6.2 – Section de collision dans une élongation pure sans interaction hydrodynamique.

$S$  correspond à un disque centré sur la cible et de rayon  $a_1 + a_2$  comme il est représenté sur la figure 6.1. Le calcul élémentaire de l'intégrale donne le résultat suivant pour  $J_{12_0}$  :

$$J_{12_0} = \frac{4}{3} n_1 n_2 (a_1 + a_2)^3 \gamma. \quad (6.7)$$

Ce résultat est été initialement établi par Smoluchowski [131].

### 6.1.3 Collision pour une élongation pure

Pour ce type d'écoulement, l'hypothèse d'équilibre dynamique est également faite. Le champ de vitesse de la phase porteuse est donné ci-dessous.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\gamma x \\ -\gamma y \\ 2\gamma z \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

La recherche du taux de collision se résume à la détermination du flux de particules rentrant dans la sphère *absorbante*. Cette dernière correspond à la sphère qui entoure la particule cible et dont le rayon est  $a_1 + a_2$ . Dans ce cas de figure, il est intéressant d'employer le système de coordonnées sphériques.

La vitesse des particules est alors donnée par les relations :

$$\frac{dr}{dt} = r (3 \cos^2 \theta - 1) \gamma, \quad (6.9a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -3 \sin \theta \cos \theta \gamma. \quad (6.9b)$$

Pour calculer le flux rentrant, on commence par rechercher les trajectoires limites des particules. Ces dernières se déterminent en intégrant les deux équations exprimant la vitesse relative d'une particule par rapport à la cible. En faisant le rapport de ces deux relations, le problème se ramène à une simple équation différentielle ordinaire facilement intégrable.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-r(3 \cos^2 \theta - 1)}{3 \sin \theta \cos \theta}. \quad (6.10)$$

La solution analytique de (6.10) est :

$$r^3 \sin^2 \theta \cos \theta = C. \quad (6.11)$$

$C$  est une constante d'intégration qui dépend de la trajectoire suivie. La recherche du flux rentrant revient à fixer la valeur de  $C$ . La valeur de  $\theta$  limite, notée  $\theta_0$ , pour laquelle les trajectoires tangentent la sphère d'absorption s'obtient très facilement en faisant l'analyse suivante. En  $\theta_0$ ,  $r$  passe par un minimum. Il est donc nécessaire que la fonction dérivée  $\frac{dr}{d\theta}$  s'annule. Cette dernière s'annule pour  $\cos \theta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  d'après la relation (6.10).  $C$  limite est alors égale en prenant  $r = a_1 + a_2$  :

$$C_{cr} = \frac{2(a_1 + a_2)^3}{3\sqrt{3}}. \quad (6.12)$$

La situation se résume ainsi :

- Si  $C < C_{cr}$ , les trajectoires pénètrent dans la sphère absorbante.
- Si  $C > C_{cr}$ , les trajectoires ne pénètrent pas dans la sphère.
- Si  $C = C_{cr}$ , les trajectoires tangentent la sphère.

Le calcul de  $J_{12_0}$  devient alors très simple. En effet, on a :

$$J_{12_0} = -n_1 n_2 \int_S \vec{v}_{12} \cdot \vec{n} dS. \quad (6.13)$$

$\vec{n}$  est la normale unitaire sortante de la section de calcul. En utilisant les précédents résultats,  $J_{12_0}$  devient :

$$J_{12_0} = -n_1 n_2 \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} r^3 \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta d\phi d\theta. \quad (6.14)$$

Après intégration de cette dernière relation, le résultat final est le suivant :

$$J_{12_0} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} n_1 n_2 \gamma (a_1 + a_2)^3. \quad (6.15)$$

Cette dernière relation a été déterminée par Zeichner et Schowalter [152].

### 6.1.4 Collision pour un étirement plan

Ce type d'écoulement linéaire est le dernier présenté. Il n'est pratiquement jamais étudié. A notre connaissance, personne n'a encore calculé le taux de collision pour un écoulement étirement plan sans ou avec effet hydrodynamique bien que sa détermination ne présente aucune difficulté. Le champ de vitesse de la phase porteuse dans un repère cartésien est le suivant :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \gamma x_1 \\ -\gamma x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

La détermination du taux de collision peut être faite de la même façon qu'au paragraphe précédent. Les lignes de courant ou les trajectoires (d'après l'équilibre dynamique) sont des hyperboles équilatères d'équation :

$$x_1 x_2 = A. \quad (6.17)$$

$A$  est encore une constante d'intégration. Il faut déterminer les points de tangence entre ces hyperboloïdes et la sphère de rayon  $a_1 + a_2$ . On trouve deux courbes données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (a_1 + a_2)^2. \end{cases} \quad (6.18)$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (a_1 + a_2)^2. \end{cases} \quad (6.19)$$

Ces courbes sont des cercles de rayon  $a_1 + a_2$  dans les plans méridiens à  $\phi = \pi/4$  pour le premier système d'équation et  $\phi = 3\pi/4$  pour le second. Comme pour l'étirement pur, le système de coordonnées sphériques est utilisé. La vitesse radiale est donnée par la relation suivante :

$$v_r = \gamma r \cos 2\phi \sin^2 \theta. \quad (6.20)$$

Le taux de collision est déterminé ainsi :

$$J_{120} = -2n_1 n_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^\pi \gamma r^3 \cos 2\phi \sin^3 \theta d\theta d\phi. \quad (6.21)$$

Le calcul de l'intégrale donne :

$$J_{120} = \frac{8}{3} n_1 n_2 \gamma (a_1 + a_2)^3. \quad (6.22)$$

Il est intéressant de voir que ce taux de collision est le double de celui d'un écoulement de cisaillement. En effet, l'écoulement d'étirement plan peut être vu comme un écoulement de cisaillement dans un système de référence faisant un angle de  $\pi/4$  avec l'axe  $Ox_1$  de taux de cisaillement  $2\gamma$  et d'un mouvement de rotation pure. Ce qui explique pourquoi le taux de collision est multiplié par un facteur 2. La rotation pure ne produit aucune collision entre les particules.

## 6.2 Collision avec effets hydrodynamiques

La présence d'une particule dévie la trajectoire d'une autre qui s'en rapproche. Qualitativement, on peut s'attendre à une diminution du taux de collision. Ceci est vrai dans le cas où l'on néglige les forces interparticulaires (forces de van der Waals). Dans cette étude les effets d'inertie des particules et du fluide sont négligés. Les trajectoires relatives sont obtenues grâce aux travaux de Batchelor et Green [14] et [13] pour les mouvements de particules dans un écoulement donné et par Batchelor [11] et Batchelor et Wen [15] pour les problèmes de sédimentation (cf. également le corrigé [12]).

Pour des particules solides, il a été montré qu'il était impossible d'avoir collision dans un écoulement de cisaillement. Pour permettre la collision, deux voies ont été explorées. La première est la prise en compte des forces de van der Waals. Leur caractère attractif permet la

rencontre entre des particules. La deuxième voie est utilisable pour des particules dans un gaz. En effet, lorsque les particules se rapprochent, leur distance peut devenir de l'ordre du libre parcours moyen des molécules du gaz. L'hypothèse de milieu continu n'est plus acceptable. Hocking [64] a étudié ce phénomène en remplaçant les conditions de non-glissement par des conditions de glissement (glissement de Maxwell). Il a montré qu'il y avait rupture du film de gaz entre les particules et donc collision pour une distance de  $1,3\lambda_g$  où  $\lambda_g$  est le libre parcours moyen des molécules du gaz. Ces travaux ont été appliqués par Jonas [75] dans l'étude de la collision de gouttes d'eau tombant sous l'effet de la gravité. Des travaux similaires ont été effectués par Davis [31].

Pour des gouttes, la mobilité de l'interface permet d'avoir collision même en absence de forces de van der Waals ou d'effet de raréfaction. La mobilité de l'interface permet d'avoir évacuation du fluide compris entre les deux gouttes. L'étude concernant cette étape de drainage a été étudiée par Abid et Chesters [1] et par Saboni, Gourbon et Chesters [122].

Ce paragraphe est consacré dans un premier temps à une présentation des forces de van der Waals. Ensuite la collision pour les écoulements traités dans le paragraphe précédent est examinée.

### 6.2.1 Forces de van der Waals

Les forces de van der Waals qui se manifestent uniquement lorsque les particules sont proches traduisent des effets de polarisation moléculaire. Le déplacement du nuage électronique d'une molécule entraîne la formation d'un dipole. Ces forces sont principalement produites par une classe d'efforts connue sous le nom de forces de dispersion. Ces efforts ont pour particularité d'agir sur tous les atomes et molécules. Les forces de London, électrodynamiques, de dipole induit appartiennent à cette classe entre autres. L'indifférence à la nature physique des corps en présence entraîne que les forces de van der Waals jouent un rôle important dans beaucoup de phénomènes physiques tels que l'adhésion, la tension superficielle, les propriétés des gaz et des liquides et bien sûr la coalescence [69].

Le potentiel des forces de van der Waals entre deux corps dans le vide ou l'air est obtenue à partir des potentiels interatomiques dont la forme générale est :

$$\phi = -\frac{C_L}{r^6}. \quad (6.23)$$

$C_L$  est le coefficient du potentiel interatomique dépendant des atomes mis en présence, appelé également constante de London. Le signe négatif montre bien le caractère attractive dans la mesure où  $C_L$  est positif. En supposant que les interactions sont additives, le potentiel des efforts est déterminé par intégration sur l'ensemble des atomes des corps. Ce potentiel est souvent écrit à l'aide de la constante d'Hamaker [55] donnée sous la forme [69] :

$$A = \pi^2 C_L \rho_1 \rho_2, \quad (6.24)$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  représentent le nombre d'atomes par unité de volume des deux corps interagissant.  $A$  est toujours de l'ordre de  $10^{-19}$  J. Hamaker [55] a effectué le calcul dans le cas de deux sphères s'appliquant exactement à nos préoccupations. Le potentiel des forces est alors en utilisant nos

notations :

$$\Phi_{12}(s) = -\frac{A}{6} \left\{ \frac{8\lambda}{(s^2 - 4)(1 + \lambda)^2} + \frac{8\lambda}{s^2(1 + \lambda)^2 - 4(1 - \lambda)^2} + \ln \left[ \frac{(s^2 - 4)(1 + \lambda)^2}{s^2(1 + \lambda)^2 - 4(1 - \lambda)^2} \right] \right\}. \quad (6.25)$$

L'introduction des forces de van der Waals entraîne une modification des vitesses relatives telles qu'elles ont été présentées dans la section 3.7. Ainsi, les vitesses relatives déterminées pour la sédimentation et les écoulements linéaires doivent être complétées du terme suivant :

$$\vec{V}_{12}^{VdW} = -\frac{D_{12}^0}{kT} \mathcal{G}(s) d \frac{d\Phi_{12}(r)}{dr}. \quad (6.26)$$

$\mathcal{G}(s)$  est donné dans la section 3.7 obtenue à partir de la méthode des coordonnées bisphériques par la relation (3.252db).  $D_{12}^0$  est donné par (3.247).

Dans la suite, nous présentons successivement les collisions pour la sédimentation puis pour différents types d'écoulements linéaires.

## 6.2.2 Collision pour la sédimentation

Dans le cas où le nombre de Péclet est grand, le mouvement brownien peut être négligé. En absence de forces de van der Waals, la vitesse relative, adimensionnée par  $V_{12}^0$ , entre deux gouttes en sédimentation se réduit à :

$$\vec{v}_{12} = -\mathcal{L}(s) \cos \theta \vec{e}_r + \mathcal{M}(s) \sin \theta \vec{e}_\theta. \quad (6.27)$$

Le taux de collision est déterminée par la relation [32] :

$$J_{12} = -n_1 n_2 \int_{\mathcal{S}'} p_{12} \vec{V}_{12} \cdot \vec{n} dS, \quad (6.28)$$

où  $\mathcal{S}'$  est la partie de la surface de la sphère d'absorption où  $\vec{V}_{12} \cdot \vec{n} < 0$ . Le problème réside dans la détermination de la probabilité de paire,  $p_{12}$ . Cette dernière est régie par l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial p_{12}}{\partial t} + \text{div}(p_{12} \vec{V}_{12}) = 0. \quad (6.29)$$

Dans le cas d'un régime permanent l'équation de Fokker-Planck devient :

$$\text{div}(p_{12} \vec{V}_{12}) = 0. \quad (6.30)$$

Grâce à cette dernière relation et l'application du théorème de la divergence dans l'expression de  $J_{12}$ , (6.28), l'intégration sur  $\mathcal{S}'$  peut être remplacée par une intégration sur  $\mathcal{S}_\infty + \sum$ .  $\mathcal{S}_\infty$  est la section droite à l'infini.  $\sum$  est le tube de courant qui s'appuie sur  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}_\infty$  (cf. figure 6.3). L'intégration sur  $\sum$  est nulle car  $\vec{V}_{12} \cdot \vec{n} = 0$ . Il ne subsiste que la partie sur la section  $\mathcal{S}_\infty$  qui est déterminée très facilement. En effet, à l'infini  $p_{12}$  tend vers 1. La vitesse relative tend vers  $V_{12}^0$ . Sur la figure 6.3  $y_c^*$  est le rayon de la section à l'infini. Si une particule a son point de départ à l'intérieur de la section de rayon  $y_c^*$ , elle subit un choc sinon elle poursuit son chemin.

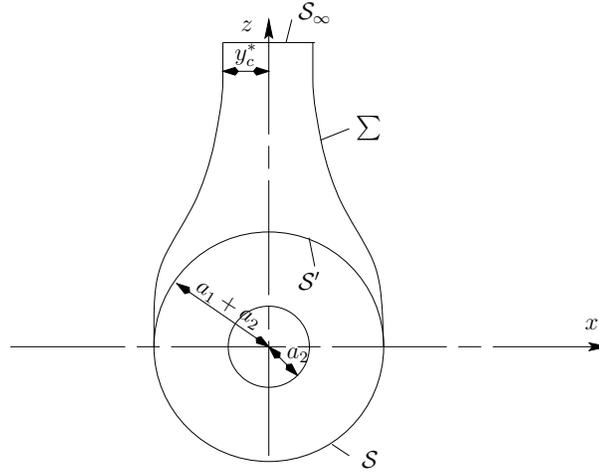


FIG. 6.3 – Section de collision pour une sédimentation avec interaction hydrodynamique.

$J_{12}$  est alors égal :

$$J_{12} = \pi n_1 n_2 (a_1 + a_2)^2 V_{12}^0 \frac{y_c^{*2}}{(a_1 + a_2)^2}. \quad (6.31)$$

Cette dernière relation peut être comparée à  $J_{12_0}$  déterminé dans la section 6.1. Ainsi, l'efficacité de collision définie comme étant égale à

$$E_{12} = \frac{J_{12}}{J_{12_0}} \quad (6.32)$$

est donc dans le cas de la sédimentation :

$$E_{12} = \frac{y_c^{*2}}{(a_1 + a_2)^2}. \quad (6.33)$$

Le calcul de  $y_c^*$  est fait en utilisant les trajectoires des gouttes. En coordonnées sphériques, les composantes de la vitesse relative adimensionnées sont :

$$\frac{ds}{d\tau} = -\mathcal{L}(s) \cos \theta, \quad (6.34a)$$

$$s \frac{d\theta}{d\tau} = \mathcal{M}(s) \sin \theta. \quad (6.34b)$$

où  $\tau$  est le temps sans dimension défini par

$$\tau = \frac{2V_{12}^0}{a_1 + a_2}. \quad (6.35)$$

En faisant le rapport des composantes de la vitesse relative et en utilisant la variable  $y = s \sin \theta$  on obtient :

$$\frac{dy}{y} = \frac{\mathcal{L}(s) - \mathcal{M}(s)}{s\mathcal{L}(s)} ds. \quad (6.36)$$

La solution de cette équation différentielle à variables séparables est :

$$\frac{y_c}{s \sin \theta} = e^{\int_s^{+\infty} \frac{\mathcal{L}(s') - \mathcal{M}(s')}{s' \mathcal{L}(s')} ds'}, \quad (6.37)$$

où  $y_c = 2y_c^*/(a_1 + a_2)$  est la valeur de  $y$  pour  $s \rightarrow \infty$ . C'est la valeur adimensionnée de  $y_c^*$ . Ce qui conduit à une valeur de l'efficacité de collision suivante :

$$E_{12} = e^{-2 \int_2^{+\infty} \frac{\mathcal{M}(s) - \mathcal{L}(s)}{s \mathcal{L}(s)} ds}. \quad (6.38)$$

Les résultats obtenus par Zhang et Davis [153] montrent que l'efficacité de collision diminue avec l'augmentation du rapport des viscosités. Il ressort que  $E_{12}$  tend vers une valeur asymptotique pour les très grandes valeurs de  $\hat{\mu}$ . De plus,  $E_{12}$  diminue lorsque le rapport des rayons diminue.

La prise en compte des forces de van der Waals ne permet plus cette analyse. Il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques. Ainsi la détermination des trajectoires limites se fait en intégrant les équations régies par les composantes de la vitesse qui dans le cas où les forces de van der Waals sont prises en comptes sont :

$$\frac{ds}{d\tau} = -\mathcal{L}(s) \cos \theta - \frac{\mathcal{G}(s)}{Q_{12}} \frac{d\phi_{12}}{ds}, \quad (6.39a)$$

$$s \frac{d\theta}{d\tau} = \mathcal{M}(s) \sin \theta, \quad (6.39b)$$

où  $\phi_{12}$  et  $Q_{12}$  sont définies par les relations :

$$\phi_{12} = \frac{\Phi_{12}}{A}, \quad (6.40a)$$

$$Q_{12} = \frac{(a_1 + a_2) V_{12}^0}{2AD_{12}^0/kT}. \quad (6.40b)$$

La détermination numérique de  $y_c^*$  peut se faire en cherchant la trajectoire limite pour laquelle une collision apparait. En fait, Zhang et Davis [153] proposent une autre méthode. Ils cherchent le point où les forces de gravitation s'équilibrent avec celles de van der Waals. Cet équilibre s'obtient pour  $\theta = \pi$  et pour une distance  $\delta$  déterminée par la résolution de l'équation

$$\mathcal{L}(s) - \frac{\mathcal{G}(s)}{Q_{12}} \frac{d\phi_{12}(s)}{ds} = 0. \quad (6.41)$$

Ensuite, Zhang et Davis [153] intègrent numériquement  $ds/d\theta$  en partant de  $\theta = \pi$  et  $\xi = \delta$  jusqu'à  $\theta = \theta_f$  et  $s = s_f$  qui correspond à un point où les forces de van der Waals sont négligeables. Pour trouver la valeur limite  $y_c^*$  en partant de  $\theta = \theta_f$  et  $s = s_f$ , on peut utiliser la relation (6.37). L'efficacité de collision est alors égale à

$$E_{12} = \frac{(s_f \sin \theta_f)^2}{4} e^{-2 \int_{s_f}^{+\infty} \frac{\mathcal{M}(s) - \mathcal{L}(s)}{s \mathcal{L}(s)} ds}. \quad (6.42)$$

Les résultats obtenus par Zhang et Davis [153] permettent de constater une augmentation de  $E_{12}$  avec les forces de van der Waals (petit  $Q_{12}$ ). La sensibilité aux forces de van der Waals est d'autant plus grande que le rapport de viscosité est élevé. En outre, on constate que l'effet des forces de van der Waals se fait déjà sentir pour des grandes valeurs de  $Q_{12}$  ( $\approx 10^5$  à  $10^6$ ).

### 6.2.3 Collision pour une élongation pure

Cet écoulement est caractérisé par le tenseur des taux de déformation suivant :

$$\mathbf{E}^\infty = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

Le vecteur tourbillon est nul. L'étude est faite en coordonnées sphériques. L'origine est prise au niveau de la sphère 2. La vitesse exprimée à l'aide des coordonnées  $(r, \theta, \phi)$  s'écrit :

$$V_r = \frac{dr}{dt}, \quad (6.44a)$$

$$V_\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad (6.44b)$$

$$V_\phi = r \sin \theta \frac{d\phi}{dt}. \quad (6.44c)$$

Les équations sont adimensionnées à l'aide des quantités suivantes :

$$\tau = \gamma t, \quad (6.45a)$$

$$\phi_{12} = \frac{\Phi_{12}}{A}, \quad (6.45b)$$

$$s = \frac{2r}{a_1 + a_2}. \quad (6.45c)$$

La vitesse relative s'exprime alors en prenant en compte les forces de van der Waals :

$$\frac{ds}{d\tau} = (1 - \mathcal{A})(3 \cos^2 \theta - 1)s - \frac{\mathcal{G}}{Q_{12} \frac{d\phi_{12}}{ds}}, \quad (6.46a)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -3(1 - \mathcal{B}) \sin \theta \cos \theta, \quad (6.46b)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 0, \quad (6.46c)$$

où  $Q_{12}$  est définie par la relation suivante :

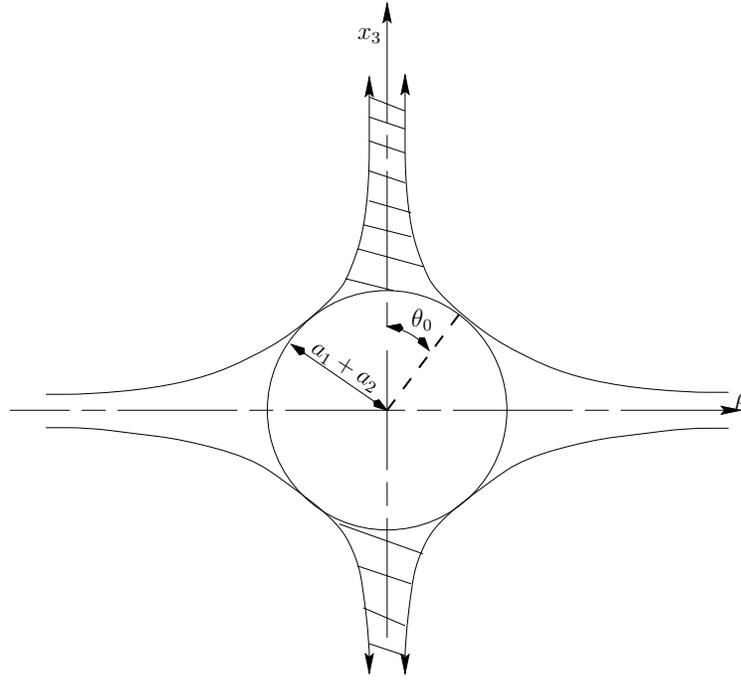
$$Q_{12} = \frac{a_1^2(1 + \lambda)^2 \gamma}{4 \frac{A}{kT} D_{12}^0}. \quad (6.47)$$

Il est possible de définir un nombre de Péclet

$$P_{12} = \frac{a_1^2(1 + \lambda)^2 \gamma}{D_{12}^0}, \quad (6.48)$$

$Q_{12}$  et  $P_{12}$  sont reliés par la relation :

$$Q_{12} = P_{12} \frac{kT}{A}. \quad (6.49)$$

FIG. 6.4 – Zone d'annulation de  $p_{12}$ .

Un nombre de Péclet grand signifie que le mouvement brownien est négligeable. Ce qui a été supposé dans cette étude. Le rapport  $kT/A$  est de l'ordre de  $10^{-1}$ . Donc  $Q_{12}$  est grand. Les forces de van der Waals semblent être négligeables. Cependant, ces dernières sont très importantes quand  $s$  tend vers 2. Dans un premier temps, les taux de collision sont déterminés en négligeant les forces interparticulaires. Nous verrons leurs influences ensuite. Les fonctions de mobilité  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont obtenues à l'aide des méthodes présentées dans le paragraphe 3.7.

Il est nécessaire de calculer la probabilité de paire  $p_{12}$ . Examinons sur la figure 6.4 les différentes zones à considérer autour de la sphère de rayon  $a_1 + a_2$ . Les zones hachurées correspondent aux endroits où la probabilité de paire est nulle.

$p_{12}$  a été calculée par Batchelor et Green [13] quel que soit le type d'écoulement donné. Cette valeur de  $p_{12}$  peut être utilisée pour la zone non-hachurée. Donc  $J_{12}$  est :

$$J_{12} = -n_1 n_2 (a_1 + a_2)^2 2\pi \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} p_{12} V_{12r} \sin \theta d\theta. \quad (6.50)$$

Pour déterminer  $\theta_0$ , les trajectoires des particules doivent être analysées de la même façon qu'elles l'ont été dans le cas simple présenté dans la section 6.1.  $ds/d\theta$  est donné par :

$$\frac{ds}{d\theta} = -\frac{(1 - \mathcal{A})s(3 \cos^2 \theta - 1)}{3(1 - \mathcal{B}) \sin \theta \cos \theta}. \quad (6.51)$$

$\theta_0$  correspond à  $ds/d\theta$  nulle.  $\cos \theta_0$  est donc égal à  $\pm\sqrt{3}/3$ . Cette dernière équation différentielle s'intègre assez facilement, le résultat est :

$$s^3 \sin^2 \theta \cos \theta = C\varphi^3(s), \quad (6.52)$$

où  $\varphi(s)$  est égale

$$\varphi(s) = e^{\int_s^{+\infty} \frac{\mathcal{A}(s') - \mathcal{B}(s')}{(1 - \mathcal{A}(s'))^2} ds'}. \quad (6.53)$$

$C$  est une constante d'intégration.

$p_{12}$  d'après Batchelor et Green [13] est donnée par :

$$p_{12}(s) = \frac{1}{(1 - \mathcal{A})\varphi^3(s)}. \quad (6.54)$$

La vitesse radiale est  $V_{12r} = \gamma(1 - \mathcal{A})r(3 \cos^2 \theta - 1)$ . Le calcul de  $J_{12}$  donne

$$J_{12} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \gamma n_1 n_2 \frac{(a_1 + a_2)^3}{\varphi^3(2)}. \quad (6.55)$$

Ce qui conduit à une efficacité de collision :

$$E_{12} = \frac{1}{\varphi^3(2)}. \quad (6.56)$$

Il peut être intéressant de voir une interprétation physique de  $E_{12}$ . Les trajectoires des particules sont déviées des lignes de courant du fait des interactions hydrodynamiques. C'est pourquoi le flux de particules entrant dans la sphère de rayon  $a_1 + a_2$  est plus petit.

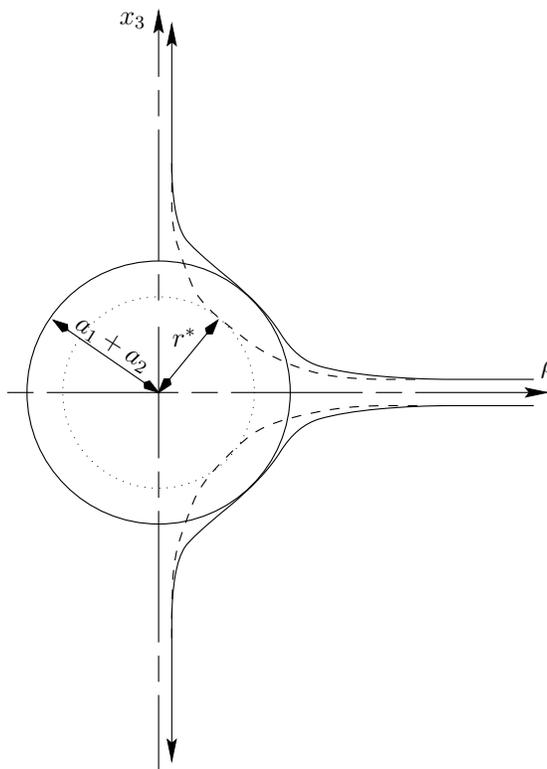


FIG. 6.5 – Comparaison entre les trajectoires des gouttes et les lignes de courant.

Sur la figure 6.5, les lignes en trait continu représentent les trajectoires des particules et celles pointillées les lignes de courant pour des conditions à l'infini identiques. A cet égard, en comparant (6.55) avec (6.15) on voit que le flux de particules entrant dans la sphère de rayon  $a_1 + a_2$  est identique au flux du fluide calculé sur une sphère de rayon  $r^* = (a_1 + a_2)/\varphi(2)$ . L'efficacité de collision est donc le rapport au cube de ces rayons :

$$E_{12} = \left[ \frac{r^*}{(a_1 + a_2)} \right]^3. \quad (6.57)$$

Dans le cas où les forces de van der Waals ne sont pas négligées, la relation (6.57) reste vraie. Le problème dans ce cas est la recherche de  $r^*$  qui doit être faite numériquement. L'intégration en temps peut être évitée en faisant le rapport de  $ds/d\tau$  et de  $d\theta/d\tau$ . Ensuite, la recherche des trajectoires limites pour lesquelles les collisions sont présentes peut être effectuée. Cette méthode a été utilisée par Wang *et al* [145]. Leurs résultats montrent que l'efficacité de collision augmente quand  $Q_{12}$  décroît (l'importance des forces de van der Waals étant plus grande). Il est également constaté comme pour la sédimentation que l'effet des forces de van der Waals commence à apparaître pour des valeurs de  $Q_{12}$  grandes (de l'ordre de  $10^4$ ).

## 6.2.4 Collision pour un étirement plan

La section 6.1.4 nous a permis d'établir le taux de collision pour un écoulement d'étirement plan. Ici, nous proposons de faire le calcul en prenant en compte les interactions hydrodynamiques. Cette détermination est totalement originale.

Le tenseur des taux de déformation est :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

Le champ de vitesse est en négligeant les forces à courte portée :

$$\frac{ds}{d\tau} = s(1 - \mathcal{A}) \cos 2\phi \sin^2 \theta, \quad (6.59a)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = (1 - \mathcal{B}) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi, \quad (6.59b)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -(1 - \mathcal{B}) \sin 2\phi. \quad (6.59c)$$

La recherche de  $J_{12}$  est identique à celle utilisée dans la section précédente.  $p_{12}$  est donné par la même relation que dans le cas de l'étirement  $3D$ . Il faut donc également trouver la zone où  $p_{12}$  est nul. Pour se faire, les trajectoires des particules doivent être recherchées.

En éliminant la variable  $\tau$  des trois dernières relations, le système d'équations différentielles est obtenu sous la forme :

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{(1 - \mathcal{A})s \sin \theta}{(1 - \mathcal{B}) \cos \theta}, \quad (6.60a)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = -\frac{\sin \theta \cos \theta \cos 2\phi}{\sin 2\phi}. \quad (6.60b)$$

Ces deux équations à variables séparables peuvent s'intégrer facilement, les solutions sont :

$$s \cos \theta = A\varphi(s), \quad (6.61a)$$

$$\tan^2 \theta \sin 2\phi = B. \quad (6.61b)$$

$A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégration.

Après un petit raisonnement simple, les trajectoires limites sont obtenues pour les valeurs  $\phi = \pi/4$  et  $\phi = 3\pi/4$ . Ce résultat est identique à celui trouvé dans la section 6.1.4.  $p_{12}$  est donnée par :

$$p_{12}(s) = \frac{1}{(1 - \mathcal{A})\varphi^3(s)}. \quad (6.62)$$

Quant à la vitesse relative radiale, elle vaut :

$$v_{12r} = (1 - \mathcal{A})r\gamma \cos 2\phi \sin^2 \theta. \quad (6.63)$$

Le taux de collision est alors donné par l'intégrale :

$$J_{12} = -2n_1n_2 \frac{R^3\gamma}{\varphi(2)} \int_0^\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\phi \sin^3 \theta d\theta d\phi. \quad (6.64)$$

Le calcul de l'intégrale donne le résultat suivant :

$$J_{12} = \frac{8}{3}n_1n_2 (a_1 + a_2)^3 \gamma \frac{1}{\varphi^3(2)}. \quad (6.65)$$

L'efficacité de collision est donc :

$$E_{12} = \frac{1}{\varphi^3(2)}. \quad (6.66)$$

$E_{12}$  est donc identique à celui de l'élongation tridimensionnelle. On voit donc l'importance de la fonction  $\varphi(s)$ .

Wang *et al* [145] ont calculé cette efficacité de collision pour différents rapports de viscosité. Par contre, la prise en compte des forces de van der Waals ne permet plus ces calculs analytiques. Dans le cas de l'élongation, la détermination des trajectoires limites par intégration numérique est simple car il n'y a qu'une équation à considérer et le problème garde sa symétrie sphérique. Pour l'étirement plan, cette recherche est beaucoup plus compliquée. Ce type d'étude n'a jamais été fait jusqu'à ce jour.

### 6.2.5 Collision pour un cisaillement simple

Dans ce cas, le champ de vitesse est :

$$\vec{u}^\infty = \gamma x_2 \vec{b}_1. \quad (6.67)$$

où  $\vec{b}_1$  est le vecteur unitaire suivant l'axe  $x_1$ . Cette vitesse est également exprimée dans le système de coordonnées sphériques :

$$\frac{ds}{d\tau} = (1 - \mathcal{A})s \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi, \quad (6.68a)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\sin^2 \phi - \frac{1}{2}\mathcal{B} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \quad (6.68b)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = (1 - \mathcal{B}) \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi. \quad (6.68c)$$

Le système de coordonnées cartésiennes peut être à nouveau utilisé en remarquant que les relations entre les deux systèmes sont :

$$\bar{x}_1 = s \sin \theta \cos \phi, \quad (6.69a)$$

$$\bar{x}_2 = s \sin \theta \sin \phi, \quad (6.69b)$$

$$\bar{x}_3 = s \cos \theta. \quad (6.69c)$$

L'intégration des équations différentielles du mouvement a été réalisée par Batchelor et Green [14]. Le résultat est le suivant :

$$\bar{x}_2^2 = \varphi^2(s) (\xi_2^2 + \psi(s)), \quad (6.70a)$$

$$\bar{x}_3 = \xi_3 \varphi(s). \quad (6.70b)$$

$\varphi(s)$  est définie par la relation (6.53).  $\xi_2$  et  $\xi_3$  sont deux constantes d'intégration telles que  $\xi_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} \bar{x}_2$  et  $\xi_3 = \lim_{s \rightarrow \infty} \bar{x}_3$ . La détermination de  $\bar{x}_1$  est déduite de la relation  $s^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2$ .  $\psi(s)$  est définie par la relation :

$$\psi(s) = \int_s^\infty \frac{\mathcal{B}(s')s'}{(1 - \mathcal{A}(s')\varphi^2(s'))} ds'. \quad (6.71)$$

Pour le calcul de  $J_{12}$ , il faut déterminer les trajectoires limites. Il est nécessaire de connaître les valeurs de  $\xi_2$  et  $\xi_3$ . D'après les relations (6.70b) nous avons :

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{\varphi^2(2)} - \psi(2). \quad (6.72)$$

Les particules dont les trajectoires à l'infini sont à l'intérieur de la section droite de rayon  $\sqrt{\frac{4}{\varphi^2(2)} - \psi(2)}$  vont subir un choc avec la particule placée en  $s = 0$ . Mais cette étude doit être conduite avec plus d'attention car il est nécessaire de vérifier la condition suivante :

$$\frac{4}{\varphi^2(2)} - \psi(2) > 0 \Rightarrow \varphi^2(2)\psi(2) < 4. \quad (6.73)$$

Zinchenko [158] et Wang *et al* [145] ont fait ces calculs. Ils trouvent qu'il existe une fonction  $\lambda_c(\hat{\mu})$  critique pour laquelle  $\varphi^2(2)\psi(2) = 4$ . Si pour un rapport de viscosité donné,  $\lambda$  est inférieur à  $\lambda_c$  alors la collision ne peut pas avoir lieu. Le système est considéré comme stable. Dans le cas inverse, la collision peut avoir lieu et le système est instable.

Pour faire le calcul de  $J_{12}$ , en se plaçant à l'infini on a :

$$p_{12} \rightarrow 1, \quad (6.74a)$$

$$\vec{V}_{12} \rightarrow \gamma x_2 \vec{b}_1. \quad (6.74b)$$

Un calcul identique à celui de Smoluchowski [131] donne :

$$J_{12} = \frac{4}{3} n_1 n_2 \gamma (a_1 + a_2)^3 \left( \frac{1}{\varphi^2(2)} - \frac{\psi(2)}{4} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (6.75)$$

L'efficacité de collision est donc :

Si  $\varphi^2(2)\psi(2) < 4$  :

$$E_{12} = \left( \frac{1}{\varphi^2(2)} - \frac{\psi(2)}{4} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (6.76)$$

sinon :

$$E_{12} = 0. \quad (6.77)$$

L'interprétation physique est encore facile à faire. L'efficacité de collision représente le rapport au cube des rayons à l'infini des sections de collision avec ou sans interaction hydrodynamique.

La prise en compte de forces de van der Waals complique la détermination de la section de collision. Les premières tentatives de ces calculs ont été faites par Adler [4] pour des particules solides. Wang *et al* [145] ont repris la même méthode pour les gouttes. Cette détermination des sections de collision se fait en remontant les trajectoires. Lorsque  $Q_{12}$  est faible, forces de van der Waals importantes,  $E_{12}$  devient plus important. Il est même possible d'avoir collision pour des rapports de viscosités importants.

Les méthodes et résultats présentées dans ces deux précédents paragraphes ont été établis pour des dispersions où les effets d'inertie sont négligés. Cette hypothèse est bien vérifiée dans le cadre des dispersions colloïdales où le rapport entre les masses volumiques des deux phases reste faible. Par contre, dans le cas de gouttelettes d'eau dans de l'air, les effets d'inertie peuvent être importants. Ce point est discuté dans l'analyse dimensionnelle donnée dans le §6.4. Le paragraphe 6.5 est donc consacré à la détermination des taux de collision avec la prise en compte de l'inertie des gouttes. Mais nous allons d'abord estimer les effets de la raréfaction du gaz dans l'intervalle entre gouttes proches.

### 6.3 Effet de la raréfaction du gaz

Comme il a été souligné au début du §6.2, les forces de lubrification empêchent les collisions entre les particules solides. Nous avons vu comment le caractère attractif des forces de van der Waals permet les chocs entre particules. Dans le cas des aérosols, un autre aspect important à prendre en compte est la raréfaction du gaz. Le libre parcours moyen,  $\lambda_g$ , dans l'air est de l'ordre de 0,1  $\mu m$ . Il est donc raisonnable de penser que cet effet intervient dans la collision des aérosols. Lorsque la distance est de l'ordre du libre parcours moyen des molécules, les équations de la mécanique des milieux continus et par conséquent les équations de Stokes ne s'appliquent plus. Les effets de raréfaction sont mesurés par le nombre de Knudsen :

$$K_n = \frac{\lambda_g}{h}, \quad (6.78)$$

où  $h$  est une distance caractéristique qui est, dans notre cas, l'écart entre les particules. Plus  $K_n$  est grand plus les effets de raréfaction sont importants. Lorsque  $K_n$  est suffisamment grand, il est nécessaire d'utiliser la théorie cinétique des gaz. Par contre, lorsque  $K_n$  est de l'ordre de l'unité, l'aspect moléculaire peut être pris en compte en conservant les équations de la mécanique des milieux continus mais en changeant les conditions de non-glissement par des conditions de glissement. Cette classe d'étude est généralement appelée *problème de Kramers* ou *approximation de glissement de Maxwell*. Le changement de condition aux limites intervient sur la

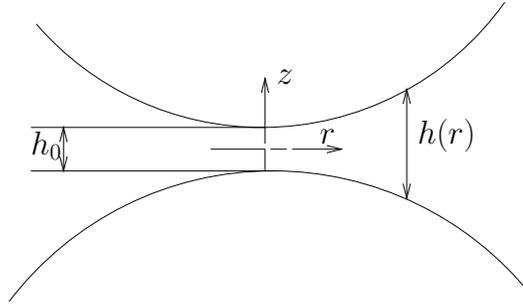


FIG. 6.6 – Géométrie pour deux sphères proches l'une de l'autre utilisée pour l'étude de la lubrification.

composante tangentielle des vitesses. La condition de glissement sur une paroi se déplaçant à une vitesse  $\vec{V}_w$  s'écrit :

$$(\vec{u} - \vec{V}_w) \cdot \vec{\tau} = k_g \lambda_g (\mathbf{E} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{\tau}. \quad (6.79)$$

$\vec{\tau}$  est un vecteur unitaire tangent à la surface.  $\vec{n}$  est la normale à la surface et  $\mathbf{E}$  est le tenseur des taux de déformation. Le coefficient de glissement  $k_g$  est de l'ordre de l'unité. La détermination de  $k_g$  a été entreprise par Loyalka et Ferziger [95] par différentes méthodes. Ils montrent que  $k_g$  est de l'ordre de l'unité.

Ce type de modélisation a été utilisé par Hocking [64]. Ce dernier a étudié le mouvement d'une particule s'approchant d'un plan et de deux particules se déplaçant suivant la ligne des centres. La géométrie du problème de deux particules se rapprochant est présentée sur la figure 6.6.  $h_0$  est l'écart minimum entre les deux sphères. Le système de coordonnées cylindriques est utilisé. Pour une valeur  $r$ , la distance séparant les deux surfaces est donnée par :

$$h(r) = h_0 + \frac{r^2}{a}, \quad (6.80)$$

avec :

$$a = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}. \quad (6.81)$$

Dans le cas où  $h_0$  est petit, les équations de la lubrification pour les petits nombres de Reynolds peuvent être utilisées. Elles sont rappelées ci-dessous :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (6.82a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (6.82b)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6.82c)$$

Hocking [64] utilise ces équations pour deux particules se rapprochant l'une de l'autre suivant la ligne des centres avec une vitesse  $U$ . Les conditions de glissement de Maxwell sont employées. L'expression de la pression entre les particules est alors :

$$p(r) = -\frac{3\mu U a \delta^2(r)}{h_0^2 2(3k_g)^2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{6k_g}{\delta(r)} \right) - \frac{6k_g}{\delta(r)} \right], \quad (6.83)$$

où  $\delta(r)$  est donné par

$$\delta(r) = \delta_0 \left( 1 + \frac{r^2}{ah_0} \right). \quad (6.84)$$

$\delta_0$  est l'inverse du nombre de Knudsen,  $\lambda_g/h_0$ . L'intégration de la pression permet d'accéder à la force agissant sur les deux particules. Le résultat est le suivant :

$$F = \frac{3\pi\mu U a^2}{h_0} f_g. \quad (6.85)$$

$f_g$  est le coefficient correcteur donné par

$$f_g = \frac{\delta_0}{2(3k_g)^2} \left[ (\delta_0 + 6k_g) \ln \left( 1 + \frac{6k_g}{\delta_0} \right) - 6k_g \right]. \quad (6.86)$$

Hocking [64] a utilisé la valeur unité pour  $k_g$ . Dernièrement, Sundararajakumar et Koch [138] ont étendu la solution d'Hocking en prenant une valeur de  $k_g$  égale à 1, 1081.

Jonas [75] a utilisé le coefficient de correction  $f_g$  pour l'étude de la collision de gouttes d'eau sédimentant. Il introduit la correction sur les coefficients axisymétriques des forces,  $X_{\alpha\beta}$  (cf. chapitre 3). Il est à noter que Hocking [64] a également étudié le mouvement perpendiculaire à la lignes des centres. Il ressort que l'influence de la raréfaction est très faible dans ce cas de figure. A cet égard, Jonas [75] ne modifie pas les coefficients asymétriques.

L'utilisation des conditions de glissement de Maxwell a également été faite par Davis [31]. Ce dernier résoud le problème axisymétrique à l'aide de la méthode des coordonnées bisphériques. Il applique également ses résultats à la détermination de l'efficacité de collision de particules en chute libre. Reed et Morrison [116] ont généralisé la solution de Stimson et Jeffery [134] pour des particules se déplaçant suivant la ligne des centres avec des vitesses opposées ou non. La résolution du problème axisymétrique, §3.3, se montre plus simple dans le cas classique car elle ne présente aucune relation de récurrence. Par contre, l'introduction des conditions de glissement entraîne l'apparition de relations de récurrence. La résolution du problème de Kramers pour des gouttes pouvant avoir des viscosités différentes a été faite par Zinchenko [155]. Il calcule une solution approchée qui dans le cas où les rapports de viscosité tendent vers l'infini est identique à celle proposée par Hocking [64].

Comme nous l'avons souligné au début de cette section, l'approximation de glissement de Maxwell ne peut pas être utilisée pour une gamme complète de nombre de Knudsen. Lorsque ce dernier devient très important, il est nécessaire d'avoir recours à une résolution de l'équation de Boltzmann. Le problème de deux particules se rapprochant avec une vitesse relative de  $2U$  a été récemment étudié par Sundararajakumar et Koch [138]. Ces derniers ont déterminé le coefficient de correction,  $f_g$ , pour une large gamme de nombre de Knudsen à la lumière de la théorie cinétique des gaz. Ils donnent une solution approchée pour  $f_g$  en fonction de  $\delta_0$ . Malheureusement, leur résultat présente des incohérences entraînant une incapacité à exploiter leur solution. Il semble que leurs relations présentent des erreurs de frappe.

Par la suite, l'influence de la raréfaction sera testée en utilisant le coefficient correcteur de Hocking. On peut émettre des réserves quant à l'utilisation de  $f_g$  pour des gouttes. En effet, le coefficient correcteur a été établi pour des particules solides. Néanmoins, Hocking [64] justifie l'utilisation de  $f_g$  pour des gouttes en précisant que lorsque la distance entre les gouttes est faible, les circulations internes peuvent être négligées.

## 6.4 Analyse dimensionnelle

Avant de présenter la méthode de calcul nécessaire à l'obtention de l'efficacité de collision, une analyse dimensionnelle est proposée. Elle permet de mettre en relief les différents ordres de grandeurs et de justifier les hypothèses et l'influence de l'inertie des gouttes.

La principal motivation de nos préoccupations concerne l'étude de la coalescence dans des écoulements turbulents. Les taux de collision pour ce type d'écoulement sont présentés dans la deuxième partie de ce mémoire, chapitre 11. Néanmoins, dans le cadre de cette analyse dimensionnelle les travaux de Saffman et Turner [125] peuvent être mentionnés. Ces derniers ont obtenus le taux de collision pour des gouttes dont la taille est plus faible que l'échelle de dissipation visqueuse de la turbulence (échelle de Kolmogorov). L'expression de ce taux de collision est très proche de celles trouvées avec les écoulements linéaires. Ce résultat s'explique fort bien. En effet, à cette échelle l'écoulement étant laminaire ce dernier peut être écrit sous forme d'un développement de Taylor où la contribution du gradient de vitesse est prépondérante. En se basant sur des faits expérimentaux, Saffman et Turner [125] admettent une efficacité de collision égal à 1. Plus récemment, Higashitani *et al.* [60] complètent la relation de Saffman et Turner [125] par une efficacité de collision déterminée pour un écoulement de cisaillement simple. Cette dernière est évaluée par une méthode semblable à celle d'Adler [4] présentée dans l'article [59]. Higashitani *et al.* [60] résolvent ensuite les équations de Smoluchowski décrivant l'évolution temporelle de la granulométrie de la dispersion de gouttes (cf. chapitre 17). Les comparaisons entre l'étude numérique et des relevés expérimentaux montrent un assez bon accord. La conclusion de Higashitani *et al.* [60] permet de prouver le bien fondée de l'utilisation d'une efficacité de collision basée sur un écoulement de cisaillement. La même approximation peut être utilisée dans le cadre d'un nuage de gouttes dans de l'air. Une étude utilisant cette approche est présentée dans le chapitre 18.

En prenant les données de la turbulence des cumuli, il devient possible d'estimer qualitativement les nombres adimensionnels intervenant dans la physique des nuages. Dans le cas d'un cumulus avec une forte convection, le taux de dissipation de l'énergie turbulente,  $\epsilon$ , est de l'ordre de  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}^3$ , [47], [76]. Ce qui donne comme échelle de Kolmogorov :

$$\eta_K = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} = 373 \text{ } \mu\text{m}. \quad (6.87)$$

$\nu$  est la viscosité cinématique de la phase continue.

En considérant des gouttes dont le diamètre maximum est  $2a = 100 \text{ } \mu\text{m}$ , l'hypothèse de goutte de taille plus faible que l'échelle de Kolmogorov est vérifiée. Dans ce cas et suite à ce qui a été dit ci-dessus, l'écoulement autour des gouttes est considéré comme étant un écoulement de cisaillement. En faisant référence à la première hypothèse de Kolmogorov<sup>1</sup> [82], le taux de cisaillement est évalué à l'aide de la relation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (6.88)$$

Ce qui donne une valeur numérique de l'ordre de  $100 \text{ s}^{-1}$ . La vitesse relative entre la phase continue et les gouttes est évaluée à l'aide de la relation  $v_r = a\gamma$ . Il est alors possible de faire

<sup>1</sup>Elle stipule que pour des échelles inférieures à celle de Kolmogorov les propriétés statistiques de l'écoulement ne dépendent que des quantités  $\epsilon$  et  $\nu$  (cf. [46]).

une approximation du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{v_r a}{\nu} \approx 1,8 \times 10^{-2}. \quad (6.89)$$

L'hypothèse de faible nombre de Reynolds et donc l'utilisation des équations de Stokes est bien justifiée. Le nombre capillaire peut également être calculé :

$$Ca = \frac{\mu v_r}{\sigma} \approx 1,2 \times 10^{-6}, \quad (6.90)$$

La prédominance des forces de tension superficielle montre que la déformation des gouttes est faible. A ce titre, elle peut être négligée. Le nombre de Stokes correspondant au rapport entre le temps de relaxation dynamique d'une goutte et le temps caractéristique de l'écoulement peut être écrit à l'aide du nombre de Reynolds :

$$St = \frac{2\rho'}{9\rho} Re. \quad (6.91)$$

Dans le cas de gouttes d'eau de diamètre  $100 \mu m$  dans de l'air,  $St$  est approximativement égal à 3,3. Cette dernière estimation montre l'importance que peut avoir l'inertie des gouttes dans les processus de collision.

L'influence des forces de van der Waals peut être évaluée également. Le nombre adimensionnel des forces interparticulaires,  $Q_{12}$ , écrit en terme de nombre de Péclet, est :

$$Q_{12} = P_e \frac{kT}{A}, \quad (6.92)$$

où  $P_e$  est défini par

$$P_e = \frac{v_r a}{D}. \quad (6.93)$$

$D$  est le coefficient de diffusion donné par la relation d'Einstein.  $A$  est la constante d'Hamaker introduite au début du paragraphe 6.2.  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. Pour  $T = 273,15 K$ , le nombre de Péclet est de l'ordre de  $5,5 \times 10^5$ .  $A$  pour des gouttes d'eau est égale à  $5 \times 10^{-20} J$ .  $Q_{12}$  est alors égal à  $4,1 \times 10^4$  qui est un ordre de grandeur inférieur à  $P_e$ .  $Q_{12}$  étant relativement grand, les forces de van der Waals ont une faible influence lorsque les gouttes sont suffisamment éloignées. Cependant lorsque les gouttes sont proches les forces de van der Waals peuvent avoir une influence. De plus, comme nous l'avons souligné dans le paragraphe 6.2, les effets des forces de van der Waals se font ressentir pour des ordres de grandeur de  $10^4$  pour  $Q_{12}$ . Il reste donc important de prendre en compte ces effets dans la suite de cette étude.

Afin de voir les influences conjuguées des effets d'inertie et des forces de van der Waals, une relation entre les nombres adimensionnés  $Q_{12}$  et  $St$  peut être établie. En partant du fait que le nombre de Péclet peut être écrit sous la forme :

$$P_e = Re S_c, \quad (6.94)$$

où  $S_c$  est le nombre de Schmidt égal à  $S_c = \nu/D$ , il est possible d'établir la relation suivante :

$$Q_{12} = \frac{9\rho}{2\rho'} S_c \frac{kT}{A} St. \quad (6.95)$$

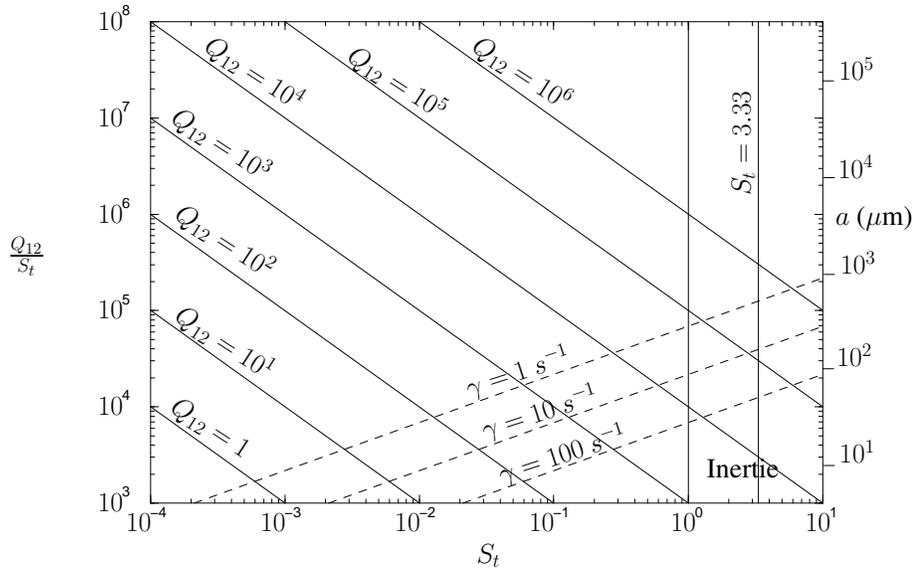


FIG. 6.7 – Diagramme  $Q_{12}/S_t$  en fonction de  $S_t$ .

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme :

$$Q_{12} = \frac{a}{l} S_t, \quad (6.96)$$

avec  $l$  donnée par

$$l = \frac{2\rho' A}{27\pi\rho^2\nu^2} \approx 4.03 \times 10^{-9} \text{ m}. \quad (6.97)$$

Nous constatons alors que le rapport  $Q_{12}/S_t$  est proportionnel au rayon de la goutte. L'influence du taux de cisaillement peut être mise en évidence en écrivant la relation :

$$\frac{Q_{12}}{S_t} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{9\rho\nu}{2\rho'\gamma}} \sqrt{S_t}. \quad (6.98)$$

Sur la figure 6.7, la quantité  $Q_{12}/S_t$  est tracée en fonction de  $S_t$ . En ligne continue, les courbes à  $Q_{12}$  constant ont été représentées. Ces dernières présentent une pente de  $-1$ . Les courbes discontinues sont les représentations graphiques de l'équation (6.98) tracées pour trois valeurs du taux de cisaillement. Elles présentent une pente de  $1/2$ . Sur le côté droit de la figure 6.7 le rapport  $Q_{12}/S_t$  a été exprimé en terme de taille de goutte grâce à la relation (6.96).

Pour un taux de cisaillement de  $100 \text{ s}^{-1}$ , la zone d'inertie symbolisée sur le graphique par une ligne verticale à  $S_t = 1$  commence pour des gouttes de rayon de l'ordre de  $25 \mu\text{m}$ . La valeur de  $Q_{12}$  est de l'ordre de  $10^4$ . Pour des particules plus grosses, l'influence des forces de van der Waals va en diminuant. En fait, cette constatation est connue depuis fort longtemps. Les forces de van der Waals sont surtout importantes pour les petites particules. En prenant des taux de cisaillement plus faibles, les effets d'inertie apparaissent pour des gouttes de taille plus élevée.

En dehors de la formation de nuages, il est possible d'envisager d'autres types d'applications comme par exemple, les écoulements en conduite. Les collisions dans ce cadre ont été étudiées par Williams et Crane [149] et [150]. L'écoulement moyen présente de forts cisaillements à la proximité des parois. Les collisions dans ces zones peuvent alors s'accompagner d'effets d'inertie importants. Les nombres de Stokes des particules peuvent être très grands.

En conclusion de cette analyse, les taux de collision vont être calculés pour une gamme de nombres de Stokes allant de 0 à 30. La plage de  $Q_{12}$  est prise entre  $10^4$  à  $10^7$ .

## 6.5 Détermination des taux de collision

Quand l'inertie des gouttes n'est plus négligeable, il est impossible d'écrire une expression analytique de la vitesse relative. Il devient alors nécessaire de résoudre les équations de quantité de mouvement et cinématique pour accéder à la détermination des taux de collision. Dans le cadre de la sédimentation, ce type de méthode a été utilisé par Hocking et Jonas [65], Jonas [75] et Davis [32] entre autres. La recherche des trajectoires relatives est la première étape dans le calcul des taux de collision présentée dans la référence [106]. Cette section est consacrée à la détermination des taux de collision pour des écoulements de cisaillement et d'élongation pure caractérisés par un gradient de vitesse,  $\gamma$ . La méthode de calcul des taux de collision complétée par quelques résultats ont faits l'objet d'une présentation lors du congrès Euromech de mécanique des fluides à Göttingen [104].

Les équations du problème sont écrites sous forme adimensionnée. Les grandeurs caractéristiques sont données ci-dessous :

$$L = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad (6.99a)$$

$$T = \gamma^{-1}, \quad (6.99b)$$

$$V = \frac{(a_1 + a_2)\gamma}{2}. \quad (6.99c)$$

Les forces sont adimensionnées à l'aide de la quantité  $3\pi\mu(a_1 + a_2)^2\gamma/2$ . La position sans dimension de la goutte  $\alpha$  est écrite sous la forme  $\vec{x}_\alpha$ . Le reste des variables (vitesse, force) est écrit en utilisant des caractères minuscules. Ainsi, les équations exprimant la conservation de la quantité de mouvement sont

$$S_{t1} \frac{d\vec{v}_1(\tau)}{d\tau} = \vec{f}_1, \quad (6.100a)$$

$$\frac{d\vec{x}_1(\tau)}{d\tau} = \vec{v}_1, \quad (6.100b)$$

$$S_{t2} \frac{d\vec{v}_2(\tau)}{d\tau} = \vec{f}_2, \quad (6.100c)$$

$$\frac{d\vec{x}_2(\tau)}{d\tau} = \vec{v}_2, \quad (6.100d)$$

où les nombres de Stokes sont :

$$S_{t1} = \frac{4\rho' a_1^2 \gamma}{9\rho\nu(1 + \lambda)} \quad (6.101a)$$

et

$$S_{t2} = \lambda^3 S_{t1}. \quad (6.101b)$$

Les forces sans dimension sont alors données par les relations :

$$\vec{f}_1 = -\frac{2}{1+\lambda} \left\{ \mathbf{A}_{11} \cdot [\vec{v}_1 - \vec{u}^\infty(\vec{x}_1)] + \mathbf{A}_{12} \cdot [\vec{v}_2 - \vec{u}^\infty(\vec{x}_2)] + \frac{2}{1+\lambda} \mathbf{G}_1 : \mathbf{e}^\infty \right\}, \quad (6.102a)$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{2\lambda}{1+\lambda} \left\{ \mathbf{A}_{21} \cdot [\vec{v}_1 - \vec{u}^\infty(\vec{x}_1)] + \mathbf{A}_{22} \cdot [\vec{v}_2 - \vec{u}^\infty(\vec{x}_2)] + \frac{2}{1+\lambda} \mathbf{G}_2 : \mathbf{e}^\infty \right\}. \quad (6.102b)$$

La prise en compte des forces de van der Waals nécessite l'introduction dans les équations de quantité de mouvement des deux efforts suivant :

$$\text{sur la goutte 1 : } \vec{F}_1^{vdw} = -\frac{d\Phi_{12}(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.103a)$$

$$\text{sur la goutte 2 : } \vec{F}_2^{vdw} = \frac{d\Phi_{12}(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.103b)$$

$\Phi_{12}$  est le potentiel des forces de van der Waals défini au paragraphe 6.2.1, équation (6.25). Sous forme adimensionnée, les efforts présentés ci-dessus deviennent :

$$\vec{f}_1^{vdw} = -\frac{1}{Q_{12}} \frac{2(3\hat{\mu} + 2)\lambda}{3(\hat{\mu} + 1)(1 + \lambda)^2} \frac{d\phi_{12}(s)}{ds} = -\vec{f}_2^{vdw}, \quad (6.104)$$

où  $Q_{12}$  est donné par la relation (6.47).

Par suite, les trajectoires relatives entre les gouttes sont obtenues par intégration numérique du système d'équations différentielles (6.100d). La méthode numérique pour résoudre ce système doit être choisie avec précaution. En effet, lorsque les gouttes sont proches l'une de l'autre, les coefficients de frottement deviennent très grands. Il s'ensuit que le système d'équations présente un caractère raide. Nous avons alors implanté une méthode semi-implicite d'ordre quatre avec adaptation du pas de temps initialement développée par Kaps et Rentrop [77]. Elle est présentée dans l'annexe E. Afin de contrôler le bon comportement de notre méthode, la figure 6.8 donne quelques trajectoires relatives obtenues dans un écoulement de cisaillement simple. La résolution du système (6.100d) est faite en prenant un nombre de Stokes égal à  $10^{-3}$  et des gouttes de même taille. Lorsque l'inertie est totalement négligée, il est possible d'intégrer directement les vitesses relatives en utilisant les relations présentées en 3.7 qui ne présentent aucune difficulté numérique. Dans ce calcul, les forces de van der Waals sont totalement négligées. Initialement, les gouttes sont placées loin l'une de l'autre. La goutte 1 est située en amont de la goutte 2 pour  $\tau = 0$ . De plus, toujours pour  $\tau = 0$ , les vitesses des gouttes sont prises égales à celles du fluide environnant. La figure 6.8 permet de constater le bon comportement de la méthode numérique d'autant que plus le nombre de Stokes est faible plus le caractère raide est renforcé. Une légère déviation est constatée sur la partie aval de la trajectoire donnant une valeur asymptotique en  $\bar{x}_3$  de 0, 5. Remarquons que les trajectoires à très faible nombre de Stokes présentent un axe de symétrie vertical. Cette symétrie est une conséquence directe des propriétés de réversibilité temporelle des équations de Stokes.

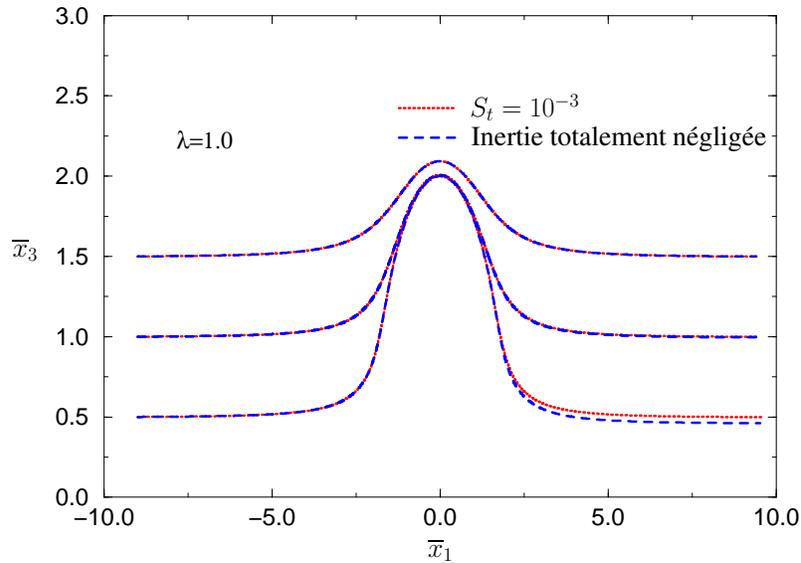


FIG. 6.8 – Trajectoires relatives dans un écoulement de cisaillement simple obtenues avec un nombre de Stokes très faible.

### 6.5.1 Collision en écoulement de cisaillement simple

La détermination des trajectoires va donc nous servir dans la recherche des sections de collision. La distance maximale séparant les gouttes est prise en variable adimensionnée à 15. Pour un écart de cet ordre, les forces d'interactions hydrodynamiques et celles de van der Waals peuvent être négligées. Les conditions initiales sur le calcul d'une trajectoire sont identiques à ce qui a été énoncé ci-dessus. Le champ de vitesse non-perturbé en variables adimensionnées est :

$$\vec{u}^\infty(\vec{x}) = \bar{x}_3 \vec{b}_1, \quad (6.105)$$

où  $\vec{b}_1$  est le vecteur unitaire suivant l'axe  $\bar{x}_1$  (cf. figure 6.9).

Dans la partie infini amont, le système de coordonnées polaires est employé dans le plan  $(\bar{x}_2; \bar{x}_3)$  où

$$\bar{x}_2 = s^* \cos \theta, \quad (6.106a)$$

$$\bar{x}_3 = s^* \sin \theta. \quad (6.106b)$$

La détermination des sections de collision est faite par une recherche dichotomique des trajectoires limites pour lesquelles des collisions se produisent. Cette procédure est répétée pour diverses valeurs de  $\theta$  permettant de constituer la section de collision. Du fait des symétries, il y a possibilité de se limiter à une recherche dans un quart du plan uniquement. La connaissance de la section de collision permet le calcul du taux de collision en utilisant la même méthode que Smoluchowski [131] :

$$J_{12} = n_1 n_2 \int_S |\vec{V}_{12} \cdot \vec{b}_1| dS. \quad (6.107)$$

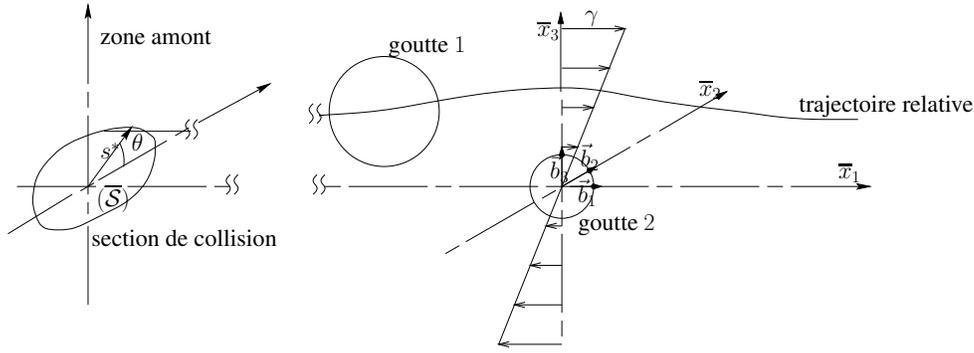


FIG. 6.9 – Représentation d’une trajectoire relative de gouttes et de la section de collision dans l’espace adimensionné.

$S$  est la section de collision (écrite  $\bar{S}$  dans l’espace sans dimension).  $\vec{V}_{12}$  est la vitesse relative entre les gouttes qui lorsque la distance de séparation est grande vaut :

$$|\vec{V}_{12}| = \gamma |x_3| \vec{b}_1. \quad (6.108)$$

Ainsi, le taux de collision est en faisant apparaître la solution de Smoluchowski :

$$J_{12} = \frac{4}{3} (a_1 + a_2)^3 n_1 n_2 \gamma \frac{\int_S |x_3| dS}{\left(\frac{4}{3} (a_1 + a_2)^3\right)^3}. \quad (6.109)$$

L’efficacité de collision est alors :

$$E_{12} = \frac{\int_S |x_3| dS}{\left(\frac{4}{3} (a_1 + a_2)^3\right)^3} \quad (6.110)$$

qui écrite en variables sans dimension devient

$$E_{12} = \frac{3}{32} \int_{\bar{S}} |\bar{x}_3| d\bar{S}. \quad (6.111)$$

Pour faire le calcul de l’intégrale, une technique de Gauss-Legendre est utilisée. Les points de la section de collision sont interpolés par des splines cubiques.

Afin d’illustrer ce paragraphe, les figures 6.10 et 6.11 permettent de voir les sections de collision obtenues pour des gouttes d’eau dans de l’air. La figure 6.10 présente les résultats obtenus avec un nombre de Stokes  $S_{t1} = 0,5$ ,  $Q_{12}$  étant égal à  $10^5$ . Dans ce premier exemple, aucune collision n’est observée pour des rapports de rayons inférieurs à  $0,5$ . Il existe donc des valeurs critiques de  $\lambda$  pour lesquelles la dispersion de gouttelettes reste stable (pas de collision). Sur la figure 6.11, les sections de collision sont données pour un nombre de Stokes  $S_{t1} = 7,0$ ,  $Q_{12} = 10^7$ . De nouveau, nous constatons l’absence de collision pour  $\lambda \leq 0,5$ . Il est remarquable de voir les formes très particulières des sections de collision obtenues à grand nombre de Stokes pour  $\lambda = 0,9$  et  $\lambda = 1,0$ .

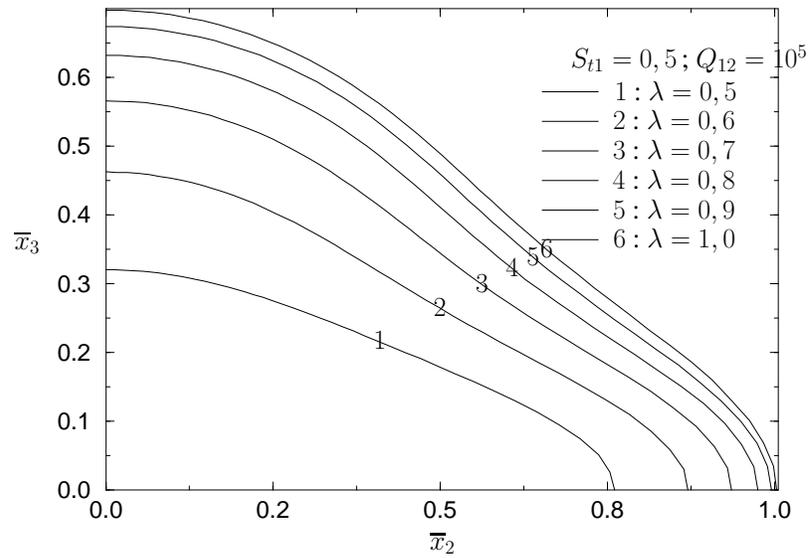


FIG. 6.10 – Sections de collision obtenues pour des gouttes d'eau avec  $S_{t1} = 0,5$  et  $Q_{12} = 10^5$ .

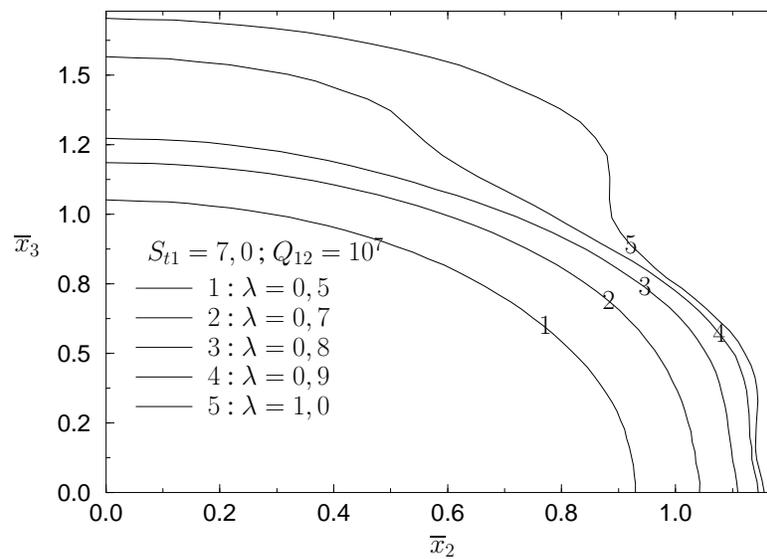


FIG. 6.11 – Sections de collision obtenues pour des gouttes d'eau avec  $S_{t1} = 7,0$  et  $Q_{12} = 10^7$ .

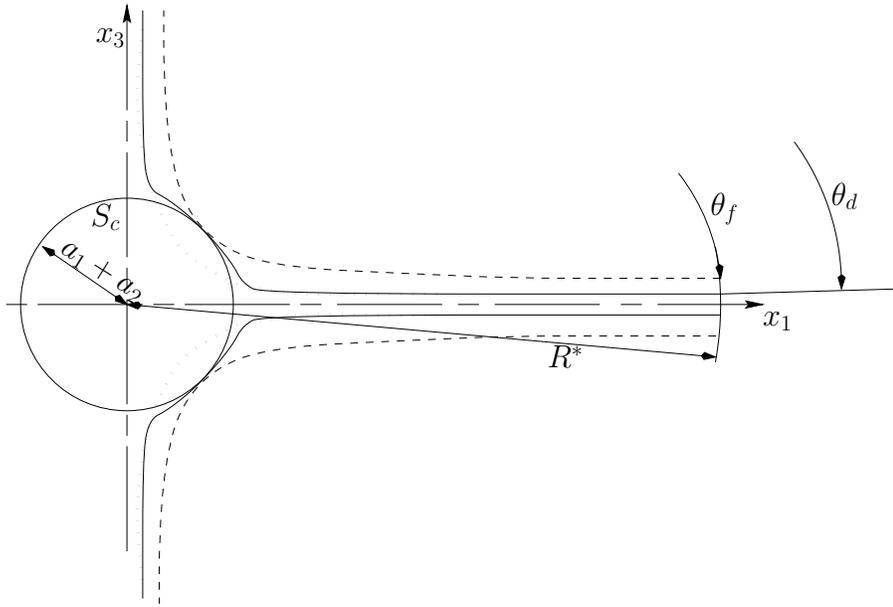


FIG. 6.12 – Représentation des trajectoires relatives des gouttes et des lignes de courant limites dans un écoulement d'élongation pure.

### 6.5.2 Collision en écoulement d'élongation pure

L'efficacité de collision est plus simple à déterminer dans ce type d'écoulement lié à la symétrie sphérique. Une seule trajectoire limite est nécessaire pour obtenir l'efficacité de collision. La détermination de  $E_{12}$  est indiquée en utilisant une interprétation physique visualisée sur la figure 6.12.  $S_c$  est la section de rayon  $a_1 + a_2$ . La courbe en trait continu représente la trajectoire limite pour laquelle une collision est observée. Comme il a déjà été précisé auparavant la déviation entre les lignes de courant et les trajectoires est due aux interactions hydrodynamiques. Pour la distance  $R^*$  où les forces de van der Waals et les effets hydrodynamiques sont négligeables, la trajectoire relative limite est repérée dans le système de coordonnées sphériques par l'angle  $\theta_d$ . La courbe discontinue correspond à la ligne de courant limite qui tangente la sphère  $S_c$ . Elle est référencée par l'angle  $\theta_f$  pour un rayon de  $R^*$ . La courbe en pointillés est la ligne de courant qui est confondue avec la trajectoire limite lorsque les gouttes sont loin l'une de l'autre.

L'interprétation de l'efficacité de collision est identique à celle indiquée dans le paragraphe 6.2 à savoir que  $E_{12}$  est le rapport entre le flux entrant dans la sphère  $S_c$  avec des lignes de courant limites représentées en pointillés sur celui donné par les courbes discontinues. Ainsi, en utilisant le taux de collision de Zeichner et Schowalter [152] rappelé ci-dessous

$$J_{12} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} (a_1 + a_2)^3 \gamma n_1 n_2 E_{12}, \quad (6.112)$$

l'efficacité de collision est

$$E_{12} = \frac{3\sqrt{3}R^{*3} \cos \theta_d \sin^2 \theta_d}{2(a_1 + a_2)^3}. \quad (6.113)$$

En variable adimensionnée,  $E_{12}$  vaut :

$$E_{12} = \frac{3\sqrt{3}}{16} s^{*3} \cos \theta_d \sin^2 \theta_d. \quad (6.114)$$

La procédure consiste alors à déterminer par une méthode de dichotomie l'angle  $\theta_d$  avec une valeur de  $s^* = 15$ .

## 6.6 Résultats et discussions

Les résultats sont présentés successivement pour les écoulements de cisaillement et d'élongation pure.

### 6.6.1 Cisaillement simple

Afin de vérifier le comportement de notre méthode, des tests ont été effectués en prenant un nombre de Stokes très faible ( $S_{t1} = 10^{-3}$ ). L'influence du rapport de viscosité a été testée dans un premier temps. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.13. Ils sont comparés avec ceux obtenus par Wang *et al.* [145]. Il est clairement démontré que le rapport de viscosité entraîne une forte diminution de l'efficacité de collision. Si nos calculs donnent des résultats relativement satisfaisants en comparaison de ceux de Wang *et al.* [145], nous constatons un désaccord grandissant lorsque le rapport de viscosité augmente. Par contre, les seuils à partir desquels l'efficacité devient non-nulle sont prédits correctement. L'accroissement de la différence entre nos résultats et ceux de Wang *et al.* [145], nous pousse à croire qu'il s'agit d'un effet lié aux forces de lubrification. Lorsque les gouttes sont proches l'une de l'autre et pour un nombre de Stokes très faible, le système d'équations différentielles se révèle être très raide. Les désaccords pourraient alors provenir d'une mauvaise détermination des trajectoires. Afin de voir si la résolution du système d'équation était en cause, une nouvelle méthode d'intégration a alors été testée. Nous avons utilisé un schéma semi-implicite d'extrapolation présenté par Press *et al.* [113] qui est une généralisation de celui de Stoer-Bulirsch [135]. Les calculs avec cette nouvelle technique se sont avérés pratiquement identiques avec ceux obtenus initialement. Ce qui permet de mettre hors de cause la méthode d'intégration.

L'influence de  $Q_{12}$  a été testée pour des gouttes d'eau et toujours pour des nombres de Stokes faibles. Les résultats sont représentés sur la figure 6.14 pour des rapports de rayon de 0, 2, 0, 5 et 1. Pour  $\lambda = 0, 2$ , nos résultats sont en assez bon accord avec ceux de Wang *et al.* [145]. Si pour des faibles valeurs de  $Q_{12}$ , les valeurs de  $E_{12}$  pour  $\lambda = 0, 5$  et 1 restent correctes, il apparaît une différence à partir de  $Q_{12} = 10^3$ . L'écart entre nos résultats et ceux de Wang *et al.* [145] augmente avec  $Q_{12}$ . Lorsque  $Q_{12}$  est grand, les forces de van der Waals deviennent plus faibles. Il en résulte que les interactions hydrodynamiques réduisent les sections de collision. De nouveau, cette comparaison montre l'importance des forces de lubrification. Dans notre méthode, les calculs sont difficiles à mener jusqu'à contact entre les gouttes. Ainsi, la collision est admise lorsque  $\xi$  atteint une valeur minimum fixée. Après plusieurs tests, nous avons choisi de prendre pour  $\xi$  minimum la valeur de  $10^{-4}$ .

Il semble difficile de rompre le film fluide. Afin de contrôler cette affirmation, la trajectoire obtenue à l'aide de notre méthode d'intégration est comparée à celle déterminée dans le cas où

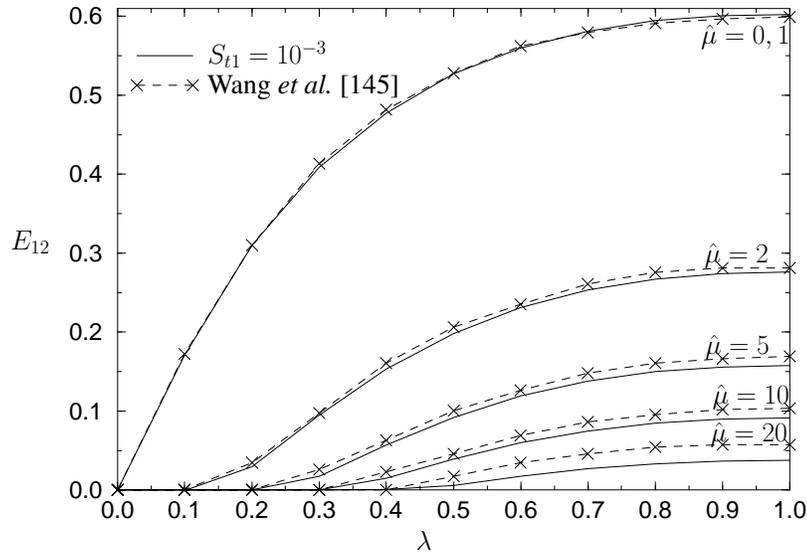


FIG. 6.13 – Efficacité de collision en fonction de  $\lambda$  à très faible nombre de Stokes et pour divers rapports de viscosité dans un écoulement de cisaillement simple.

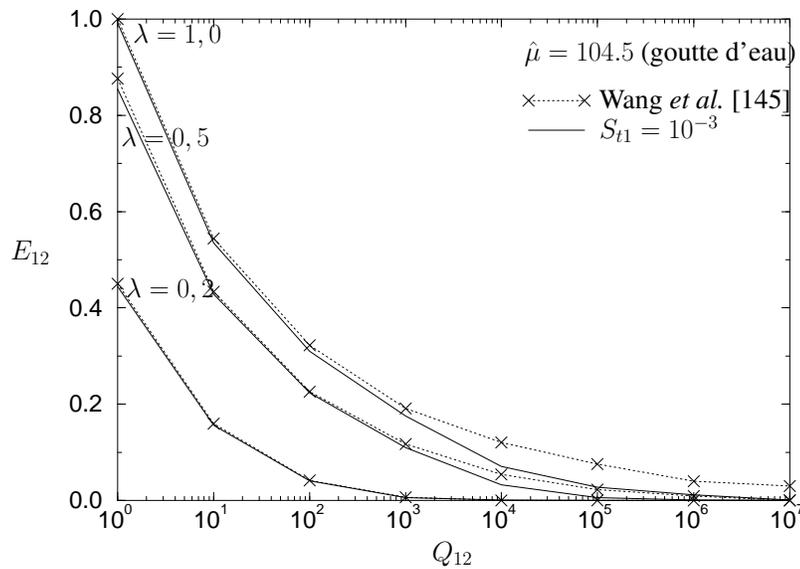


FIG. 6.14 – Efficacité de collision en fonction de  $Q_{12}$  à très faible nombre de Stokes et pour  $\lambda = 0, 2 ; 0, 5$  et 1 dans un écoulement de cisaillement simple.

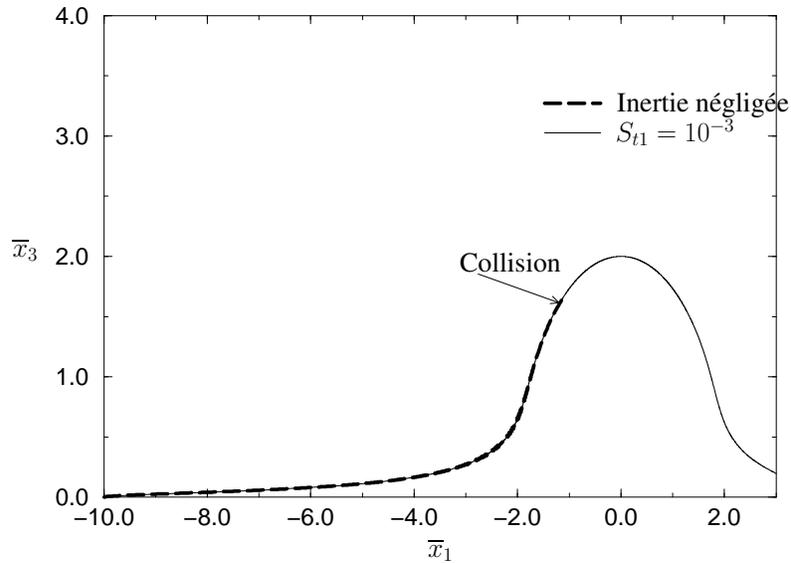


FIG. 6.15 – Trajectoires relatives entre deux gouttes de même rayon dans un écoulement de cisaillement simple.

l'inertie est négligée. Cette dernière s'obtient par intégration de la vitesse relative déterminée à l'aide des fonctions de mobilité (cf. §3.7). Cette comparaison est illustrée sur la figure 6.15 et a été faite pour  $\lambda = 1$ . Nous constatons que les trajectoires sur la partie amont se confondent. Néanmoins, le calcul fait en absence d'inertie prédit une collision. *A contrario*, la trajectoire obtenue pour un nombre de Stokes  $S_{t1} = 10^{-3}$  ne donne aucune collision. L'écart minimum entre les gouttes atteint est de  $1,26 \times 10^{-4}$ . Comme ce cas particulier de trajectoire a été fait dans des conditions les plus défavorables, la collision ne pourra jamais avoir lieu.

En fait, la méthode proposée ici n'est pas bien adaptée aux cas extrêmes où  $S_{t1}$  est très faible et  $Q_{12}$  élevé. Elle ne peut être utilisée qu'en complément des autres méthodes employées en absence totale d'inertie. Cependant, les cas extrêmes mentionnés ci-dessus ont une faible importance physique. En effet, si le nombre de Stokes est faible,  $Q_{12}$  doit également être petit. Alors que  $S_{t1}$  est proportionnel au carré du rayon des gouttes,  $Q_{12}$  varie en fonction du cube de  $a_1$ . Grâce au diagramme 6.7 présenté dans le §6.4, il est possible de constater que pour un nombre de Stokes de l'ordre de  $10^{-2}$ ,  $Q_{12}$  est de l'ordre de 10.

Pour des valeurs du paramètre  $Q_{12}$  beaucoup moins contraignantes, la recherche des sections de collision à l'aide de la détermination des trajectoires est satisfaisante. L'avantage de cette technique est de pouvoir tester l'importance de l'inertie des gouttes. Par la suite, les résultats sont exposés uniquement pour des gouttes d'eau. En fait, il est possible de montrer que si le rapport des viscosités est faible, il en est de même pour le nombre de Stokes. Il n'est donc pas nécessaire de faire d'étude sur le rôle de l'inertie pour les faibles rapports de viscosité.

L'influence du nombre de Stokes est présentée sur la figure 6.16. Cette dernière donne  $E_{12}$  en fonction de  $\lambda$  calculé avec  $Q_{12} = 10^6$ . Le rôle joué par l'inertie est démontré clairement. En effet, on constate une forte augmentation lorsque  $S_{t1}$  passe de 0,5 à 3,5. Pour  $\lambda = 1$ ,  $E_{12}$

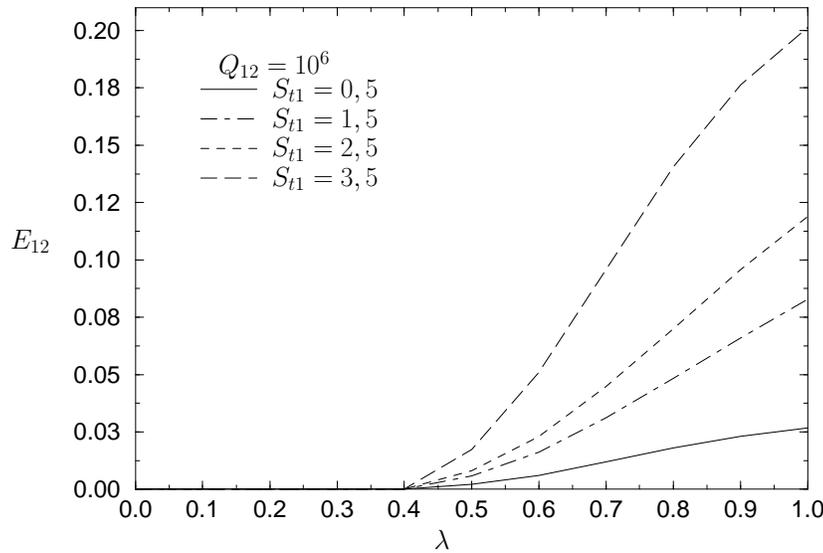


FIG. 6.16 – Efficacité de collision en fonction de  $\lambda$  pour  $Q_{12} = 10^6$  et pour divers nombres de Stokes dans un écoulement de cisaillement simple.

obtenu avec  $S_{t1} = 3,5$  est 7,5 fois plus important que  $E_{12}$  obtenu avec  $S_{t1} = 0,5$ . Par contre, le seuil pour lequel les collisions apparaissent restent le même pour une grande plage de nombre de Stokes. Ainsi, on n'observe aucune collision pour les faibles rapports de rayons. Un milieu bidispersé constitué de gouttes de tailles très différentes subit peu de collisions entre ces particules de tailles différentes. Les collisions ont surtout lieu entre des gouttes de même dimension. La faible influence du nombre de Stokes pour  $\lambda$  petit peut s'expliquer fort simplement. Lorsque le rapport des rayons est petit, le nombre de Stokes de la petite particule,  $S_{t2}$ , est beaucoup plus faible. Ce dernier est proportionnel au cube de  $\lambda$ . Ainsi, pour un rapport de rayons de l'ordre de 0,1,  $S_{t2}$  est 1000 fois plus faible que  $S_{t1}$ . Il s'ensuit que la petite particule subit fortement les interactions hydrodynamiques. Il est nécessaire d'atteindre des nombres de Stokes  $S_{t1}$  très élevés pour observer une collision pour  $\lambda = 0,4$  à  $Q_{12} = 10^6$ . Il faut une valeur de  $S_{t1} = 25$  pour que l'efficacité de collision soit non-nulle à  $\lambda = 0,4$ .

Sur la figure 6.17, nous avons utilisé une valeur de  $Q_{12} = 10^7$ . Les mêmes nombres de Stokes ont été pris. Le seuil à partir duquel l'efficacité est non-nulle est dans ce cas de 0,5. Ce qui montre l'influence des forces de van der Waals. Par contre, les valeurs de  $E_{12}$  trouvées dans ce cas se rapprochent de celles présentées sur la figure 6.16.

D'une façon plus concrète, le rôle joué par les forces de van der Waals est présenté sur les figures 6.18 et 6.19. Pour  $\lambda = 0,6$ , l'influence de  $Q_{12}$  est plus prononcée pour des valeurs inférieures à  $10^5$ . Par contre, au-dessus de cette limite, le rôle des forces de van der Waals reste relativement faible. Cette constatation est encore plus vraie pour  $\lambda = 1$ . On constate également que l'augmentation du nombre de Stokes renforce la faible influence de  $Q_{12}$ . Ce dernier point avait déjà été souligné par Davis [32] dans son calcul d'efficacité de collision pour des particules sédimentant sous l'effet de la pesanteur.

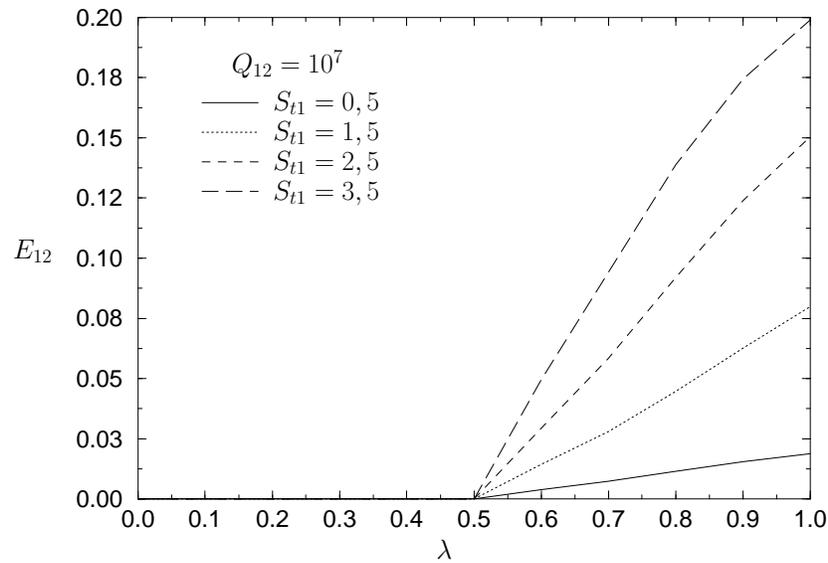


FIG. 6.17 – Efficacité de collision en fonction de  $\lambda$  pour  $Q_{12} = 10^7$  et pour divers nombres de Stokes dans un écoulement de cisaillement simple.

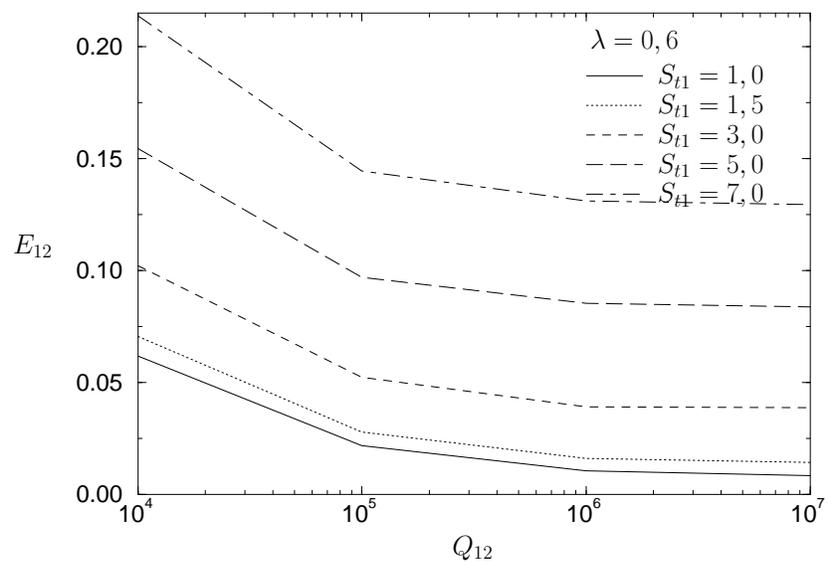


FIG. 6.18 – Efficacité de collision en fonction de  $Q_{12}$  pour  $\lambda = 0,6$  et pour divers nombres de Stokes dans un écoulement de cisaillement simple.

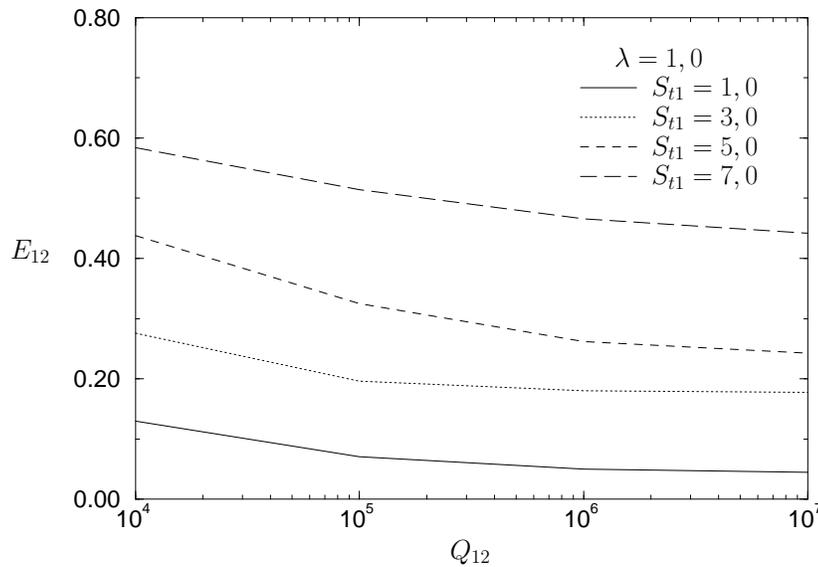


FIG. 6.19 – Efficacité de collision en fonction de  $Q_{12}$  pour  $\lambda = 1$  et pour divers nombres de Stokes dans un écoulement de cisaillement simple.

Les efficacités de collision obtenues pour un paramètre  $Q_{12}$  de  $10^7$  et pour une grande gamme de nombres de Stokes sont présentées sur la figure 6.20. L'influence du nombre de Stokes est encore démontrée.  $E_{12}$  devient de l'ordre de l'unité pour des nombres de Stokes très grands. Cependant, ces valeurs restent inférieures à 1. Un point important apparaît sur cette figure. Il est remarquable de constater un changement dans l'évolution de  $E_{12}$  en fonction de  $S_{t1}$ . Pour  $\lambda = 1$ , ce changement intervient pour un nombre de Stokes de l'ordre de 5. Pour des rapports de rayon plus faible, cette déviation intervient pour des valeurs de  $S_{t1}$  plus importantes. Ainsi, pour  $\lambda = 0,6$  on trouve une valeur de  $S_{t1}$  de l'ordre de 14. Par contre, ce changement d'évolution apparaît toujours pour des valeurs approximativement identiques de  $E_{12}$ . Ce caractère très particulier n'a jamais été observé auparavant. Cette déviation peut également être mise en évidence en observant les sections de collision. Sur la figure 6.21, les sections de collision sont données pour des gouttes de même taille et pour des nombres de Stokes inférieurs et supérieurs à 5. Il apparaît un changement profond dans la forme de la section de collision à partir du seuil de  $S_{t1} = 5$ . Alors que pour  $S_{t1} < 5$ , les sections de collision ont des formes sensiblement elliptiques, elles s'en écartent de plus en plus avec l'augmentation de  $S_{t1}$ . Il se forme une protubérance. Bien que ce résultat soit très intéressant, il n'en reste pas moins difficile à interpréter. Il s'agit sans doute d'un effet d'inertie des particules. Lorsque les gouttes sont alignées avec l'écoulement de cisaillement, les écarts entre les lignes de courant et les trajectoires sont plus importants. Les collisions ont surtout lieu sur les parties amonts des trajectoires. Par contre, lorsque les positions relatives des gouttes sont pratiquement perpendiculaires à l'écoulement, *i.e.*  $\bar{x}_3$  petit, les forces de van der Waals interviennent. Ceci peut être justifié en remarquant que les sections ne changent pas trop lorsque  $S_{t1}$  augmente proche de l'axe  $\bar{x}_2$  (cf. figure 6.21).

Un autre fait important à souligner sur la figure 6.20 est que les courbes donnant  $E_{12}$  en

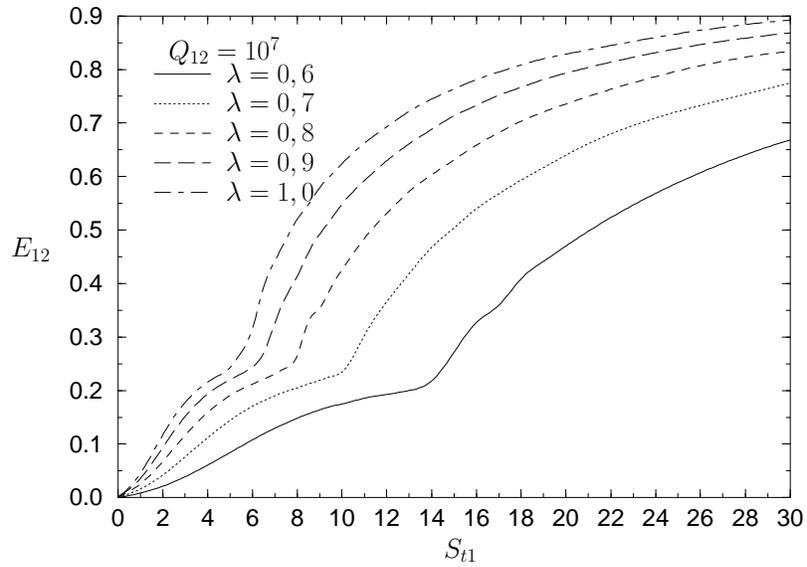


FIG. 6.20 – Efficacité de collision en fonction de  $S_{t1}$  pour divers rapports de rayon dans un écoulement de cisaillement simple.

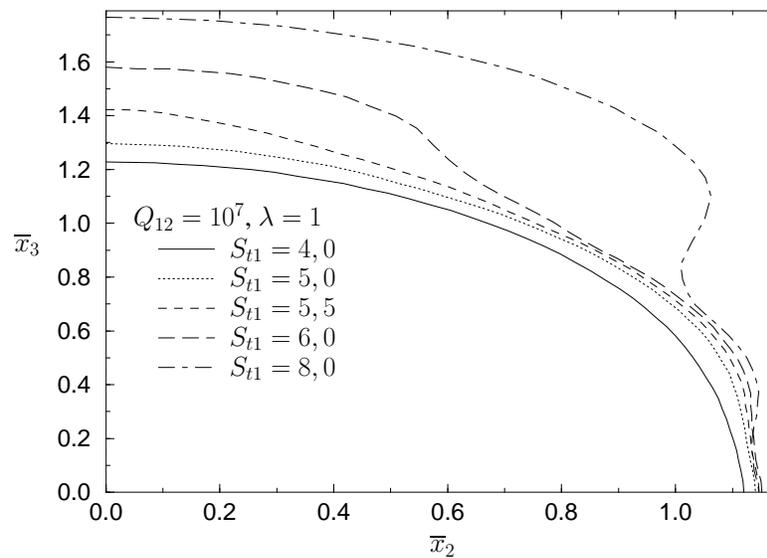


FIG. 6.21 – Sections de collision pour des gouttes de mêmes tailles obtenues pour des nombres de Stokes de 4 à 8.

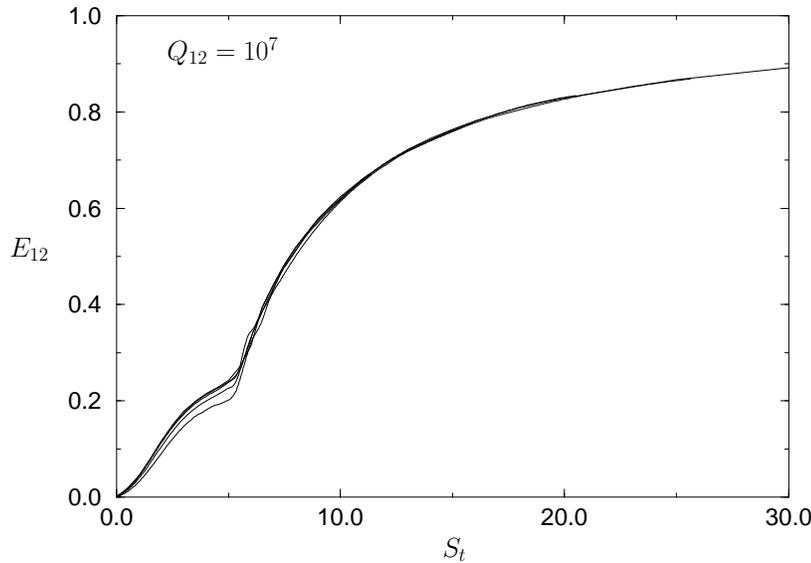


FIG. 6.22 – Superposition des courbes donnant  $E_{12}$  en fonction du nombre de Stokes donné par (6.115) en utilisant la loi (6.117) et pour  $Q_{12} = 10^7$  dans un écoulement de cisaillement simple.

fonction de  $S_{t1}$  semblent se déduire les unes des autres par un facteur d'échelle dépendant de  $\lambda$ . Ainsi, il est possible de superposer le faisceau de courbes sur celle donnant  $E_{12}$  pour  $\lambda = 1$ . Ce point est montré sur la figure 6.22. Nous constatons que pour  $S_t > 5$ , toutes les courbes se superposent. Le nombre de Stokes  $S_t$  étant égal à

$$S_t = S_{t1} \times \lambda^{a(\lambda)}. \quad (6.115)$$

Il est alors possible de déduire l'efficacité de collision pour un rapport de rayon quelconque à l'aide de celle déterminée pour  $\lambda = 1$  :

$$E_{12}(S_{t1}, \lambda) = E_{12}(S_t, \lambda = 1). \quad (6.116)$$

L'exposant  $a(\lambda)$  dépend de  $\lambda$ . Pour obtenir la superposition, nous avons utilisé la loi suivante :

$$a(\lambda) = 2,5 - \lambda. \quad (6.117)$$

Cette étude a été faite pour  $Q_{12} = 10^7$ . Nous avons reconduit les mêmes essais sur les efficacités de collision obtenues à  $Q_{12} = 10^6$ . La superposition des courbes pour des rapports de rayon compris entre 0,5 et 1 est donnée sur la figure 6.23. La loi (6.117) utilisée précédemment s'applique encore fort bien.

Il reste que ces lois d'échelles restent valides pour des nombres de Stokes suffisamment grands. Par contre, dans le cas des petits nombres de Stokes, aucune loi se dégage.

L'ensemble de ces résultats nous permet de voir l'importance de l'inertie des gouttes. Deux faits nouveaux ont été mis en relief. Le premier concerne le changement d'évolution de  $E_{12}$  en fonction du nombre de Stokes,  $S_{t1}$ . Ce changement est lié à une modification des sections de

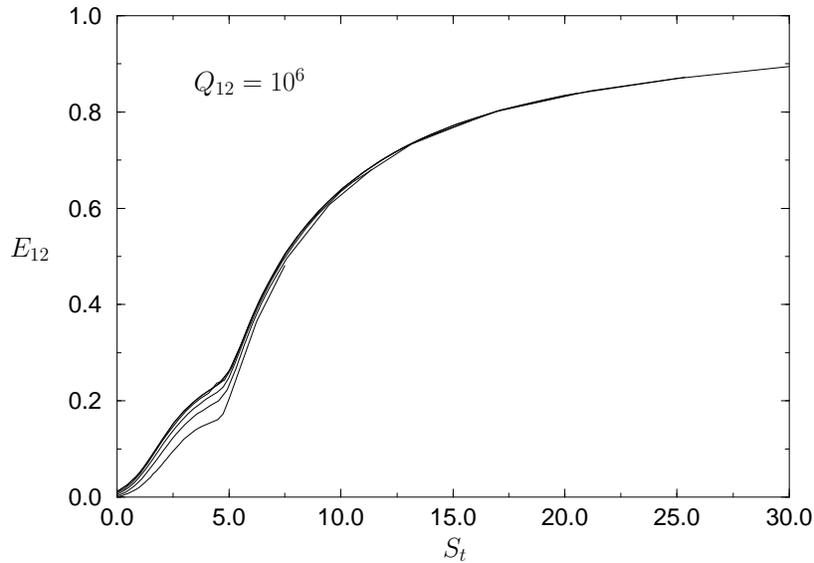


FIG. 6.23 – Identique à la figure 6.22, mais avec  $Q_{12} = 10^6$ .

collision. Le deuxième point important est la loi d'échelle existant entre les efficacités de collision déterminées pour les différents rapports de rayon. Nous n'avons pas trouvé d'explication physique simple à ce résultat.

### 6.6.2 Elongation pure

A l'image de ce qui a été fait ci-dessus, débutons l'application aux écoulements d'élongation pure par une comparaison avec Wang *et al.* [145]. Dans un premier temps, l'influence du rapport de viscosité est illustré sur la figure 6.24. Dans ce type d'écoulement, l'efficacité de collision ne présente aucun seuil comme il a été vu dans le cas de l'écoulement de cisaillement simple. Ce qui montre la nature différente du processus de collision. L'accord entre nos résultats et ceux de Wang *et al.* [145] est relativement bon pour les faibles rapports de viscosité. Mais, un désaccord de plus en plus prononcé apparaît au fur et à mesure que  $\hat{\mu}$  augmente. Nous constatons que la différence augmente également avec le rapport des rayons. Ce qui nous pousse à croire, encore une fois, qu'il s'agit d'un effet des forces de lubrification.

Pour pousser encore plus loin la comparaison,  $E_{12}$  est donnée en fonction de  $Q_{12}$  pour des gouttes d'eau et toujours pour  $S_{t1} = 10^{-3}$  sur la figure 6.25. Encore une fois de plus, notre méthode prédit des efficacités de collision plus faible que celles de Wang *et al.* [145]. Néanmoins, un bon accord est obtenu pour des valeurs de  $Q_{12}$  inférieures à  $10^2$ . Remarquons pour finir avec les comparaisons que les désaccords interviennent toujours pour des valeurs assez faibles de  $E_{12}$ . C'est à dire dans des situations où les taux de collisions seront fortement réduits.

Jusqu'à maintenant,  $E_{12}$  s'est toujours trouvée être inférieure à 1. Par contre dans le cas présent, l'inertie des gouttes va nous permettre d'observer des valeurs largement supérieures à

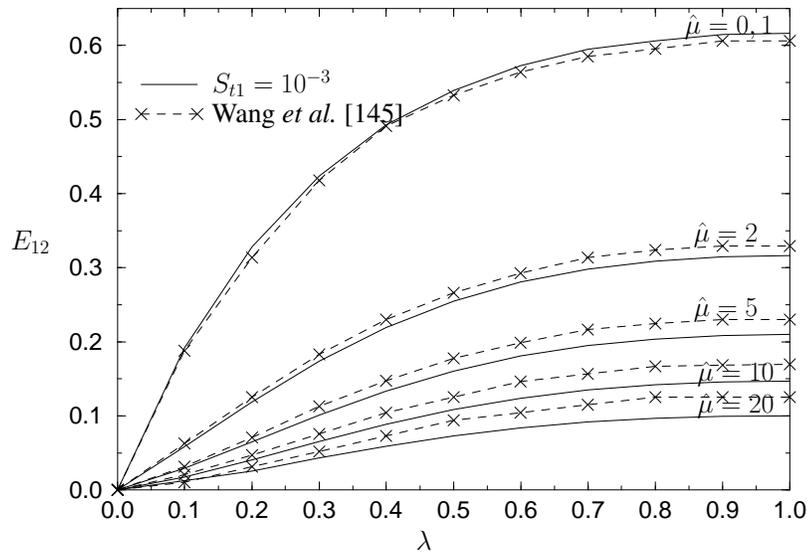


FIG. 6.24 – Efficacité de collision en fonction de  $\lambda$  à très faible nombre de Stokes et pour divers rapports de viscosité dans un écoulement d'élongation pure.

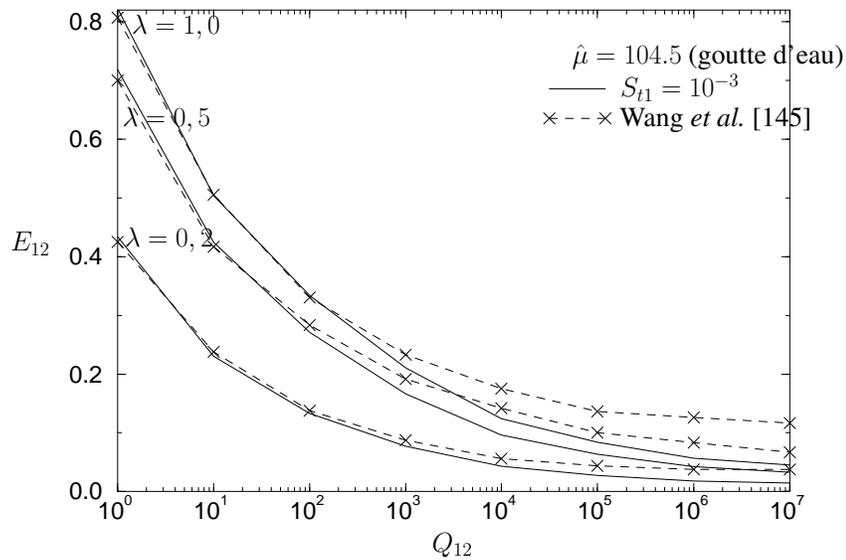


FIG. 6.25 – Efficacité de collision en fonction de  $Q_{12}$  à très faible nombre de Stokes et pour  $\lambda = 0, 2 ; 0, 5$  et 1 dans un écoulement d'élongation pure.

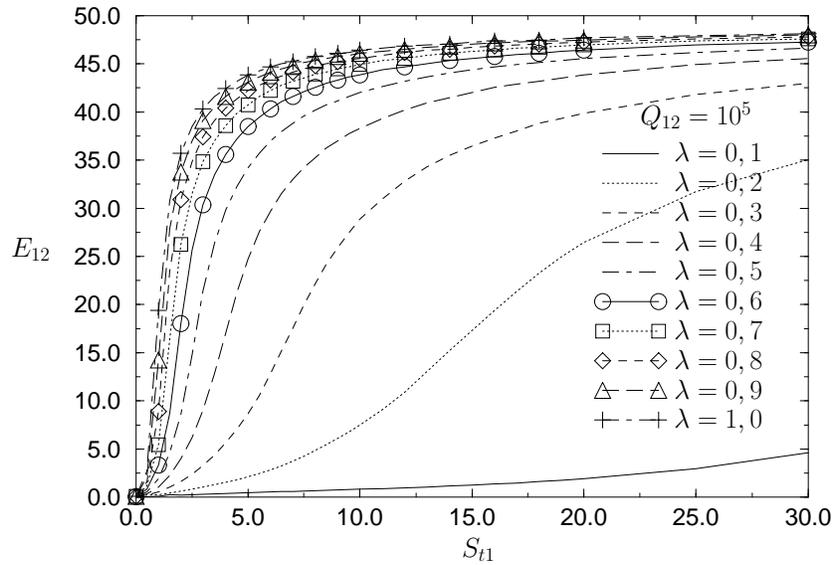


FIG. 6.26 – Efficacité de collision en fonction de  $S_{t1}$  pour  $\lambda$  variant de 0,1 à 1 avec  $Q_{12} = 10^5$  dans un écoulement d'élongation pure.

1. Sur la figure 6.26,  $E_{12}$  a été représenté en fonction de  $S_{t1}$  pour des rapports de rayon allant de 0,1 à 1 et pour  $Q_{12} = 10^5$ . Nous constatons une forte augmentation de l'efficacité de collision en fonction de  $S_{t1}$ . L'accroissement est très important pour des nombres de Stokes inférieurs à 5. La variation est d'autant plus brutale que le rapport des rayons est important. Lorsque  $S_{t1}$  devient très grand,  $E_{12}$  tend vers une valeur asymptotique. Un calcul fait avec un nombre de Stokes très grand ( $10^3$ ) montre que  $E_{12}$  tend vers 48,86 pour  $\lambda = 1$ .

Le rôle joué par les forces de van der Waals est minime. La représentation de  $E_{12}$  en fonction de  $Q_{12}$  pour  $S_{t1} = 1$  montre clairement cette affirmation, figure 6.27. L'efficacité de collision augmente légèrement lorsque  $Q_{12}$  diminue pour  $\lambda = 0,1$ . Par contre pour  $\lambda = 0,5$  et 1, les variations sont relativement faibles.

Sur la figure 6.26, les courbes obtenues pour les différents rapports de rayon suivent la même évolution à un facteur d'échelle près. Comme il a été fait pour l'écoulement de cisaillement, nous avons la possibilité de regrouper l'ensemble des courbes au moyen d'une relation du type (6.115). Nous avons cherché à déterminer la loi d'échelle donnant la fonction  $a(\lambda)$  en prenant l'ensemble des résultats obtenu pour la gamme complète de  $Q_{12}$ . La loi d'échelle établie s'avère être identique quel que soit  $Q_{12}$ . De plus, les faisceaux de courbes obtenus pour les différents  $Q_{12}$  sont pratiquement confondus. Ce point est illustré sur la figure 6.28. Sur cette dernière, sont regroupées 40 courbes. La loi d'échelle que nous avons trouvée est la suivante :

Si  $0 \leq \lambda < 0,7$  :

$$a(\lambda) = \frac{113}{60} - \frac{5}{6}\lambda. \quad (6.118a)$$

Si  $0,7 \leq \lambda \leq 1$  :

$$a(\lambda) = 1,3. \quad (6.118b)$$

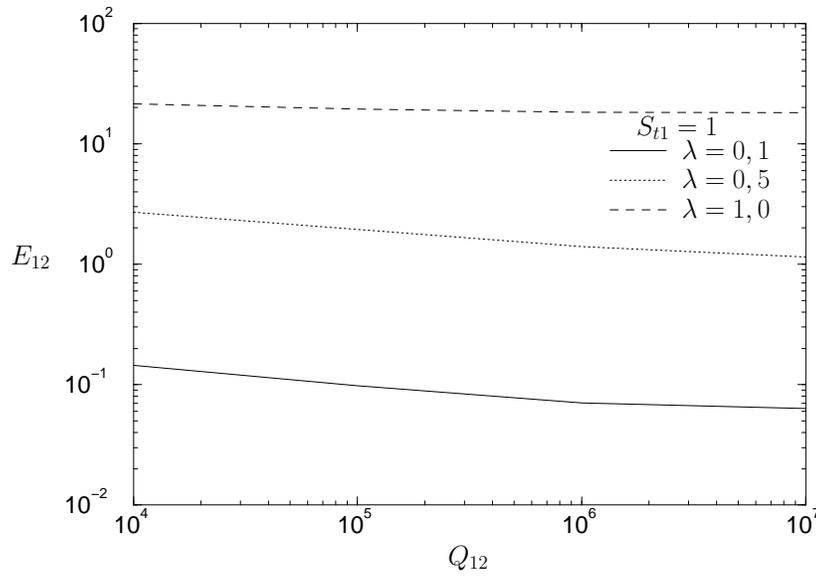


FIG. 6.27 – Efficacité de collision en fonction de  $Q_{12}$  pour des valeurs de  $\lambda$  de 0,1 à 0,5 et 1 avec  $S_{t1} = 1$  dans un écoulement d'élongation pure.

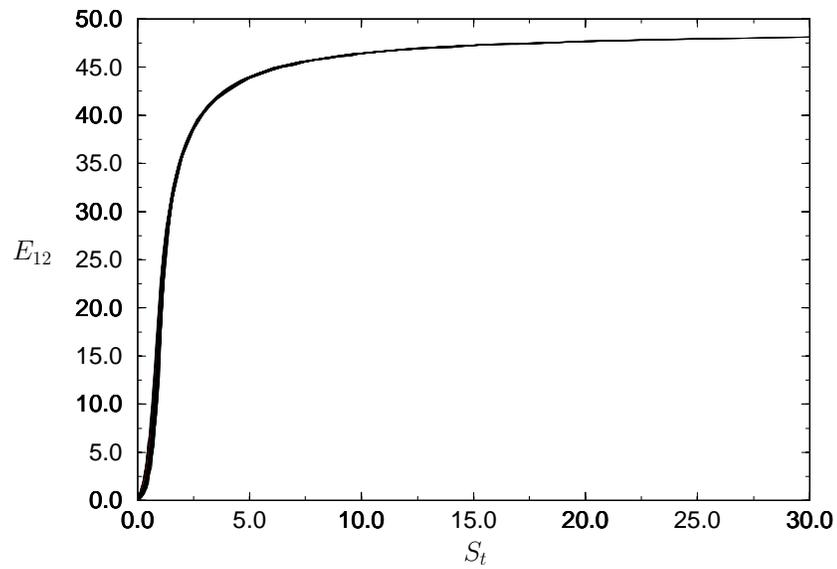


FIG. 6.28 – Superposition des courbes de  $E_{12}$  en fonction de  $S_{t1}$  pour l'ensemble de la gamme de  $Q_{12}$  et de celle de  $\lambda$  dans un écoulement d'élongation pure.

La différence avec ce qui a été présenté pour l'écoulement de cisaillement est qu'ici la loi d'échelle s'applique pour tous les nombres de Stokes (c'est à dire même pour des nombres de Stokes d'ordre unité). L'avantage de ce type de résultat est de taille. En effet, il est seulement nécessaire maintenant de calculer  $E_{12}$  pour  $\lambda = 1$ . Les valeurs pour les autres rapports de rayon s'en déduisent automatiquement. Nous pouvons en outre réunir tous les résultats pour l'écoulement d'élongation pure en proposant une équation pour  $E_{12}$  sous la forme :

$$E_{12}(S_t) = 48,8626 \left( 1 - \frac{0,525}{S_t} \right), \quad (6.119a)$$

si,

$$S_t > 0,6. \quad (6.119b)$$

Cette relation a été déterminée en remarquant que les courbes d'efficacité de collision en fonction de  $1/S_t$  deviennent linéaires. Pour des valeurs du nombre de Stokes inférieures à 0,6, nous pouvons utiliser une évolution parabolique de pente nulle en zéro. De plus, en remarquant que  $E_{12}$  est très petit en  $S_t = 0$ , il est possible de considérer que  $E_{12}$  est nulle en  $S_t = 0$ . Ensuite en assurant le raccordement avec la précédente relation, nous avons :

$$E_{12}(S_t) = 16,9661S_t^2, \quad (6.120a)$$

si,

$$S_t \leq 0,6. \quad (6.120b)$$

$S_t$  correspond toujours au nombre de Stokes équivalent défini par (6.115). La représentation graphique de ces équations approchées est donnée sur la figure 6.29. Elles sont comparées avec le résultat obtenu pour  $\lambda = 1$  à  $Q_{12} = 10^5$ .

### 6.6.3 Effet de la raréfaction

L'effet de la raréfaction a été testé en multipliant les coefficients des forces axisymétriques par le coefficient correcteur précisé dans le §6.3, relation (6.86). Cette modification n'est pas d'une rigueur absolue dans la mesure où ce coefficient n'est valide que pour les particules solides. Il s'agit d'une étude préliminaire. Il aurait fallu calculer les forces en prenant en compte les conditions de glissement de Maxwell. Ce type de calcul n'a pas pu être réalisé.

Néanmoins, le rôle de la raréfaction du gaz est testé dans un premier temps sur l'efficacité de collision de particules sédimentant dans un fluide au repos. Le taux de collision dans ce type d'écoulement a été précisé dans les §6.1 et 6.2. L'efficacité est défini par la relation (6.33) où les trajectoires limites sont recherchées de la même façon que pour les écoulements de cisaillement. Les calculs ont été effectués pour diverses valeurs du rayon  $a_1$  (la plus grosse goutte). Les résultats sont donnés sur la figure 6.30. La détermination de  $E_{12}$  a été conduite sans et avec le coefficient correcteur,  $f_g$ . Nous remarquons que l'introduction de  $f_g$  augmente  $E_{12}$ . Mais l'augmentation reste relativement limitée. De plus, lorsque le rayon de la particule augmente, la différence avec et sans  $f_g$  diminue.

Dans le cadre des écoulements linéaires, l'étude a été faite en fonction d'un nombre de Knudsen basé sur le rayon moyen des particules :

$$K_n = \frac{2\lambda_g}{a_1(1 + \lambda)}. \quad (6.121)$$

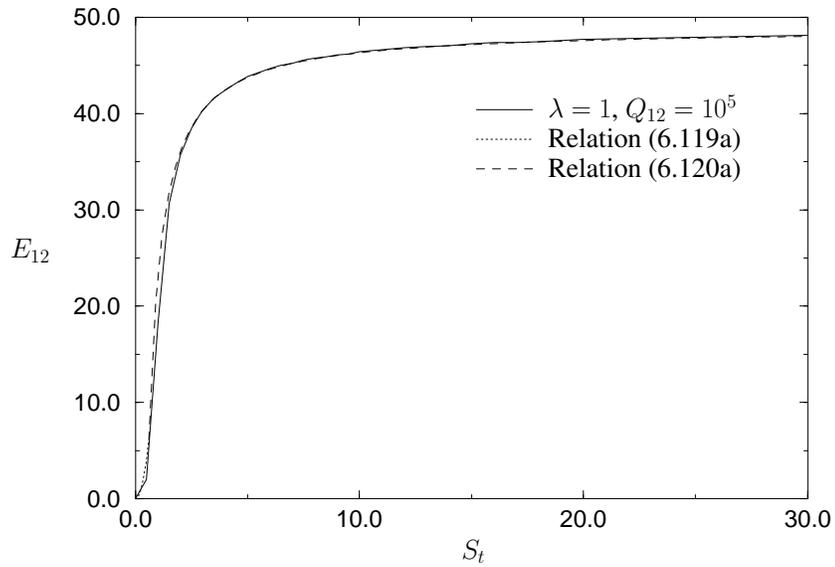


FIG. 6.29 – Représentation de l'efficacité de collision en fonction du nombre de Stokes au moyen des relations(6.119a) et (6.120a) et comparaison avec les résultats du calcul obtenus pour  $\lambda = 1$  et  $Q_{12} = 10^5$ .

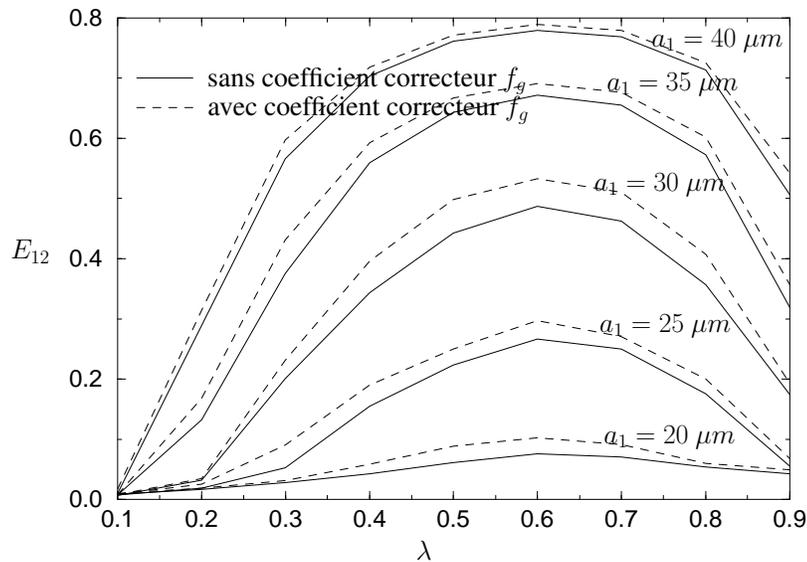


FIG. 6.30 – Efficacité de collision en fonction de  $\lambda$  de gouttes en sédimentation pour diverses valeurs de  $a_1$  et avec et sans  $f_g$ .

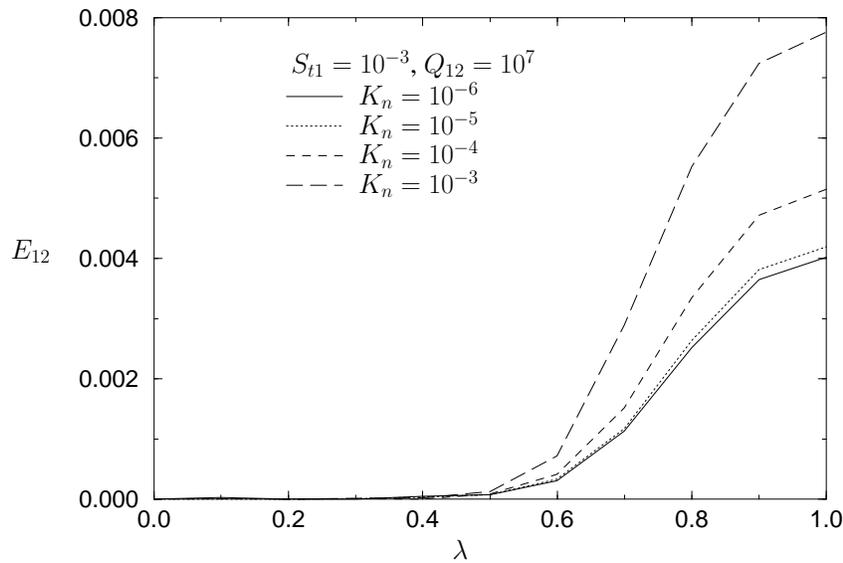


FIG. 6.31 – Efficacité de collision en fonction de  $\lambda$  dans un écoulement de cisaillement simple avec la prise en compte de l'effet de raréfaction.

En fait, l'étude devient très compliquée de part le nombre grandissant de paramètres à prendre en compte. La réalisation de calculs où les nombres  $S_{t1}$ ,  $Q_{12}$  et  $K_n$  varient dans de larges gammes est difficile à mener. Cependant, il a été remarqué précédemment que les forces de van der Waals avaient peu d'influence. Par conséquent,  $Q_{12}$  est fixé à une valeur de  $10^7$  dans cette section. Concernant  $K_n$ , le domaine de variation a été pris entre  $10^{-6}$  et  $10^{-3}$ .

Dans le cas d'un écoulement de cisaillement, les calculs d'efficacité ont été réalisés dans un premier temps en prenant un nombre de Stokes très faible,  $S_{t1} = 10^{-3}$ . Les résultats sont présentés sur la figure 6.31. Il est remarquable de constater que les seuils à partir desquels l'efficacité de collision est différente de zéro ont lieu pour des rapports de rayon plus faibles lorsque  $K_n$  augmente. L'accroissement de  $K_n$  s'accompagne également d'une augmentation de  $E_{12}$ . Pour  $\lambda = 1$ ,  $E_{12}$  est pratiquement multiplié par 2 entre les résultats obtenus avec  $K_n = 10^{-6}$  et  $K_n = 10^{-3}$ . Cependant, cette efficacité de collision reste encore très faible.

L'augmentation du nombre de Stokes nous a permis d'observer un phénomène très particulier. Des calculs faits avec  $S_{t1} = 0,5$  et  $1$  à  $K_n = 10^{-3}$  donnent des efficacités de collision nulles pour tous les rapports de rayon. Ces résultats nous semblent très étranges et n'ont pas pu être expliqués. Ils sont en total contradiction avec ce que l'on pouvait s'attendre. L'introduction du coefficient correcteur  $f_g$  entraîne une modification de la partie aval des trajectoires relatives. Il se peut que ce dernier fait entraîne des modifications sur les collisions. Par suite, un calcul a été réalisé avec  $S_{t1} = 5$ . Seuls les rapports de rayon  $0,9$  et  $1$  donnent des efficacités de collision différentes de zéro. Pour  $\lambda = 1$ ,  $E_{12}$  subit une augmentation par rapport au résultat trouvé en absence d'effet de raréfaction. Avec l'introduction de  $f_g$ ,  $E_{12} = 0,293$  alors que sans  $f_g$ ,  $E_{12} = 0,243$ . Ce qui donne une augmentation de pratiquement  $20,5\%$ . Par contre pour  $\lambda = 0,9$ , nous observons une diminution. Ainsi, avec  $f_g$ ,  $E_{12}$  est égale à  $8,43 \times 10^{-3}$  alors

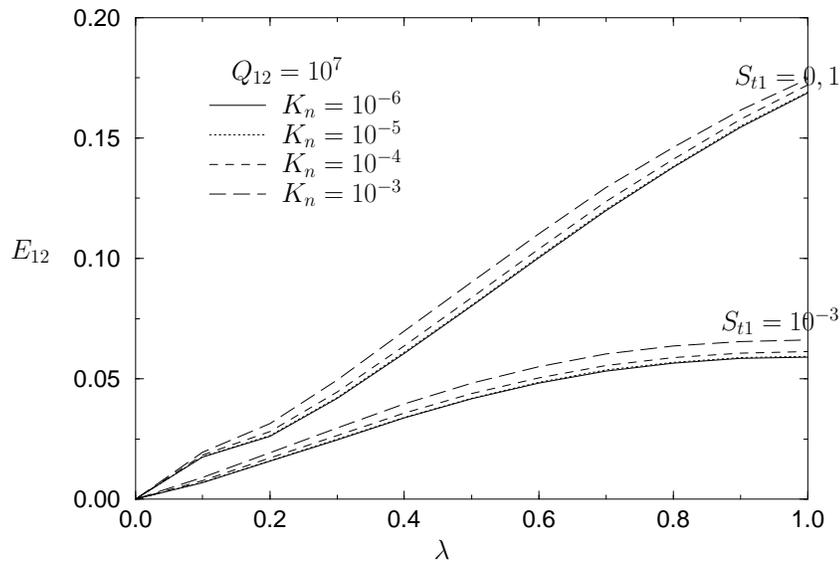


FIG. 6.32 – Efficacité de collision en fonction de  $\lambda$  dans un écoulement d'élongation pure avec la prise en compte de l'effet de raréfaction.

que sans  $f_g$ ,  $E_{12} = 0,22$ . Le manque de temps ne nous a pas permis d'aller plus loin dans ces investigations.

Quelques calculs ont également été réalisés dans le cadre des écoulements d'élongation pure. La figure 6.32 présente les résultats obtenus pour les nombres de Stokes de  $10^{-3}$  et 0, 1. Ici, l'introduction de  $f_g$  entraîne une augmentation de  $E_{12}$ . Cependant cette augmentation reste relativement faible. Les courbes obtenues avec  $K_n = 10^{-6}$  et  $10^{-5}$  sont pratiquement confondues pour les deux nombres de Stokes.

## 6.7 Conclusion

Cette deuxième partie a été consacrée à l'étude de l'influence de l'inertie des gouttes sur l'efficacité de collision dans des écoulements laminaires linéaires à l'infini. Des résultats très intéressants ont été obtenus à la fois dans le cadre des écoulements de cisaillement simple et d'élongation pure. Le changement d'évolution dans les courbes de  $E_{12}$  en fonction de  $S_{t1}$  pour les écoulements de cisaillement simple s'accompagne d'une modification dans la forme des sections de collision. L'inertie des gouttes semble être à l'origine de ces changements. Les lois d'échelle trouvées dans les deux applications n'ont pas reçu d'explications physiques. La relation approchée établie dans le cadre des écoulements d'élongation pure, équation (6.119a), a une forme relativement proche de celle établie par Michael et Norey [99]. Ces derniers ont étudié les taux de collision entre de petites particules et une grosse sphère dans un écoulement de vitesse uniforme.

Dans l'ensemble de ces travaux, la déformation des gouttes a toujours été négligée. Cette

hypothèse a été justifiée par des nombres capillaires très faibles. Chesters [26] établit que dans le cadre des écoulements de cisaillement, l'amplitude de la déformation rapportée au rayon de la goutte est proportionnelle à la racine carrée du nombre capillaire. Or, dans nos applications, le nombre capillaire est de l'ordre de  $10^{-7}$  à  $10^{-6}$ . Ainsi, la taille de la zone de déformation est approximativement de l'ordre de  $10^{-3}$  fois le rayon des gouttes. Ce qui reste très faible.

Concernant les effets de la raréfaction, les quelques résultats obtenus dans le §6.6.3 soulèvent de nombreuses interrogations. Le rôle joué par la raréfaction n'a pas clairement été identifié. Son introduction dans l'expression des forces entraîne des modifications profondes du mécanisme de collision surtout dans le cas des écoulements de cisaillement simple. Une étude plus approfondie s'impose dans l'avenir sur l'influence de la raréfaction.

Les résultats obtenus ici de façon théorique peuvent être inclus dans des codes numériques traitant de phénomènes plus globaux. Dans le prochain chapitre, un exposé sur les taux de collision en écoulement turbulent va être proposé. Les interactions hydrodynamiques ne sont pratiquement jamais prises en compte. Cependant, nous avons vu leur importance. Il est envisageable d'introduire l'influence des interactions hydrodynamiques dans une détermination numérique des taux de collision. Ce point sera vu dans le §11.3.

De plus, nous verrons dans la partie consacrée aux applications comment un spectre de gouttes évolue en fonction du temps. Les efficacités de collision peuvent être déterminées en utilisant les travaux effectués dans cette partie.



## **Troisième partie**

# **Taux de collision en écoulements turbulents**



# Chapitre 10

## Dispersion de particules en écoulements turbulents

La recherche des taux de collision en écoulement turbulent nécessite une connaissance approfondie de la dispersion de particules. Entre autre, la variance des vitesses est une quantité primordiale à connaître. De plus, dans l'optique de recherches numériques sur le transport de particules en écoulement turbulent, il semble nécessaire de connaître les théories qui s'y rattachent. Le chapitre débute par une présentation de la diffusion de particules fluides. Cette quantité nous permet d'introduire les notions fondamentales. Elle peut s'appliquer à des particules d'inertie négligeable. Par contre, lorsque cette dernière augmente, la réponse dynamique des particules est différente de celle du fluide. Cette particularité demande alors une analyse spécifique. Après avoir rappelé la force s'appliquant à des inclusions sphériques et quelques considérations dimensionnelles, nous traitons de la dispersion de particules. Les effets de la gravité sont présentés à la fin de ce chapitre.

### 10.1 Diffusion turbulente de particules fluides

Deux grandes caractéristiques des écoulements turbulents sont d'une part le nombre important d'échelles spatiales et d'autre part une forte augmentation de la diffusivité. L'étude de la diffusion de particules fluides permet de bien mettre en relief ces deux grandes caractéristiques. La turbulence étudiée dans cette section est supposée homogène, isotrope et stationnaire.

#### 10.1.1 Analyse de Taylor

Dans un premier temps, il est alors possible de se limiter à une étude unidirectionnelle de la diffusion. Ainsi, afin d'alléger les notations, l'indice spatial d'une quantité donnée n'est pas précisé. Considérons la diffusion d'une parcelle de fluide dont les dimensions sont supposées petites par rapport à l'échelle de Kolmogorov mais encore très grandes devant les échelles moléculaires. Ce type d'étude a été entrepris pour la première fois par Taylor en 1921 [139]. La vitesse moyenne de l'écoulement est supposée nulle. La position de la particule fluide est  $X(t)$ . Le mouvement de cette parcelle est rapporté à une position moyenne. Ainsi la moyenne de la

position de la particule fluide est prise égale à zéro :

$$\langle X(t) \rangle = 0. \quad (10.1)$$

Ici, on s'intéresse à la position de la particule fluide en la suivant dans son mouvement (point de vue lagrangien). Soit  $V(t)$  la vitesse, la position  $X(t)$  est donnée simplement par la relation :

$$X(t) = \int_0^t V(t') dt'. \quad (10.2)$$

La variance de  $X(t)$  est le premier moment non nul, elle est égale à

$$\langle X^2(t) \rangle = 2 \int_0^t \int_0^{t'} \langle V(t') V(t' - s) \rangle ds dt'. \quad (10.3)$$

Cette relation permet d'introduire la définition du coefficient autocorrélation lagrangien,  $R_L(s)$  :

$$R_L(s) = \frac{\langle V(t) V(t - s) \rangle}{\langle V^2(t) \rangle}, \quad (10.4)$$

où  $\langle V(t) V(t - s) \rangle$  est l'autocorrélation lagrangienne, notée par la suite  $K_L(s)$ . A l'égard de la stationnarité, cette dernière quantité ne donne aucune information à l'instant  $t$ . Elle ne dépend uniquement que de la différence des temps, donc de  $s$ . Elle est également une fonction paire de  $s$ . Toujours en vertu de la stationnarité, la variance  $\langle V^2(t) \rangle$  doit être indépendante de  $t$ ; elle est notée simplement  $\langle V^2 \rangle$ .

La forme de  $R_L(s)$  n'est pas connue *a priori*. Les seules indications sont que pour  $s$  petit,  $R_L(s)$  tend vers 1. Lorsque  $s$  est grand,  $R_L(s)$  doit approcher la valeur zéro traduisant la perte de corrélation entre les vitesses à l'instant  $t$  et  $t - s$ . De plus, d'après l'inégalité de Schwarz,  $R_L(s)$  doit vérifier :

$$R_L(s) \leq 1. \quad (10.5)$$

$R_L(s)$  permet de définir l'échelle de temps intégrale lagrangienne :

$$T_L = \int_0^\infty R_L(s) ds. \quad (10.6)$$

Après intégration par parties de l'équation (10.3), la variance est donnée par la relation

$$\langle X^2(t) \rangle = 2 \langle V^2 \rangle \int_0^t (t - s) R_L(s) ds. \quad (10.7)$$

Cette forme est généralement admise comme ayant été établie par Kampé de Fériet [36]. En se basant sur les propriétés pour  $t$  petit ou grand de  $R_L$ , Taylor [139] établit les deux résultats suivant :

– si  $t \ll 1$  :

$$\langle X^2(t) \rangle \approx \langle V^2 \rangle t^2, \quad (10.8)$$

– si  $t \gg 1$  :

$$\langle X^2(t) \rangle \approx 2 \langle V^2 \rangle T_L t. \quad (10.9)$$

Ces résultats sont très similaires aux relations formulées dans le cadre de l'étude des marches aléatoires présentée par Chandrasekhar [22]. Pour  $t$  très grand, l'écart type du déplacement de la particule fluide varie en fonction de la racine carrée de  $t$ . Ce qui est également le cas pour le mouvement brownien.

Une autre façon enrichissante d'établir ces comportements asymptotiques est l'utilisation de l'analyse spectrale. Ainsi, la fonction d'autocorrélation spectrale,  $\Phi^L(\omega)$ , est définie comme étant la transformée de Fourier sinusoïdale de  $\langle V(0)V(t) \rangle$  :

$$\Phi^L(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \langle V(0)V(t) \rangle \cos \omega t dt. \quad (10.10)$$

La transformée inverse donne

$$\langle V(0)V(t) \rangle = 2 \int_0^\infty \Phi^L(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (10.11)$$

La variance du déplacement est alors, dans ce nouveau formalisme :

$$\langle X^2(t) \rangle = 2 \int_0^\infty \Phi^L(\omega) \frac{2(1 - \cos \omega t)}{\omega^2} d\omega. \quad (10.12)$$

Pour  $t$  petit et en utilisant le développement en série de  $1 - \cos \omega t$ ,  $\langle X^2(t) \rangle$  est donnée par

$$\langle X^2(t) \rangle \approx 2t^2 \int_0^\infty \Phi^L(\omega) d\omega. \quad (10.13)$$

On montre en effet que la partie de l'intégrale où  $\omega \sim t^{-1}$  a une contribution négligeable. Or, la variance de la vitesse obtenue à partir de  $\Phi^L(\omega)$  est

$$\langle V^2 \rangle = 2 \int_0^\infty \Phi^L(\omega) d\omega. \quad (10.14)$$

Ce qui nous permet de retrouver le premier résultat asymptotique de Taylor (10.8). Néanmoins, la relation (10.13) nous permet de voir que la diffusion dépend de l'ensemble des échelles de la turbulence.

Pour  $t$  grand, la variance du déplacement peut être écrite en faisant le changement de variable  $\theta = \omega t$  sous la forme :

$$\langle X^2(t) \rangle = 4t \int_0^\infty \Phi^L\left(\frac{\theta}{t}\right) \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} d\theta. \quad (10.15)$$

Ensuite, si  $t$  est grand,  $\Phi^L(\theta/t)$  est pris égal à  $\Phi^L(0)$  donné par

$$\Phi^L(0) = \frac{\langle V^2 \rangle}{\pi} T_L. \quad (10.16)$$

Il est possible de démontrer que l'intégrale  $\int_0^\infty (1 - \cos \theta)/\theta^2 d\theta$  est égale à  $\pi/2$ . Ce qui nous permet de retrouver le deuxième résultat de Taylor (10.9). Donc pour  $t$  grand, la diffusion est due uniquement aux grandes échelles temporelles de la turbulence [7].

Le coefficient de diffusion est défini par

$$D_t(t) = \frac{1}{2} \frac{d\langle X^2(t) \rangle}{dt} = \langle V^2 \rangle \int_0^t R_L(s) ds. \quad (10.17)$$

Ainsi, nous avons

– si  $t \ll 1$  :

$$D_t(t) \approx \langle V^2 \rangle t, \quad (10.18)$$

– si  $t \gg 1$  :

$$D_t(t) \approx \langle V^2 \rangle T_L. \quad (10.19)$$

Le coefficient de diffusion varie linéairement avec  $t$  au instant initial et tend vers une valeur constante pour  $t$  grand.

Batchelor [7] a généralisé l'analyse de Taylor au cas où la turbulence est uniquement homogène et stationnaire. Le tenseur d'autocorrélation lagrangienne est défini par :

$$K_{ij}(t - t') = \overline{V_i(t)V_j(t')}. \quad (10.20)$$

La barre supérieure désigne au même titre que les quantités  $\langle \rangle$  la moyenne. La généralisation de (10.7) est

$$\overline{X_i(t)X_j(t)} = \int_0^t (t - s) [K_{ij}(s) + K_{ji}(s)] ds. \quad (10.21)$$

Batchelor [7] généralise alors les résultats asymptotiques de Taylor [139]. Ainsi, pour  $t$  petit,  $\overline{X_i(t)X_j(t)}$  est donné par

$$\overline{X_i(t)X_j(t)} \approx \overline{V_i V_j} t^2. \quad (10.22)$$

En utilisant les échelles intégrales définies par

$$T_{ij} = \frac{1}{\overline{V_i V_j}} \int_0^\infty K_{ij}(s) ds, \quad (10.23)$$

$\overline{X_i(t)X_j(t)}$  est donné pour  $t$  très grand par

$$\overline{X_i(t)X_j(t)} \approx \overline{V_i V_j} (T_{ij} + T_{ji}) t. \quad (10.24)$$

Ensuite, Batchelor [7] cherche à déterminer la fonction de distribution de probabilité de  $X_i(t)$ . Pour  $t$  petit,  $X_i(t) \approx V_i(0)t$ . Ainsi, la fonction de distribution de probabilité de  $X_i(t)$  est donc identique à celle de  $V_i(0)$ . Comme les mesures montrent que la fonction de distribution de probabilité de la vitesse est normale, il en est de même pour celle de  $X_i(t)$ . A l'opposé lorsque le temps devient très grand, il est possible d'utiliser le théorème de la limite centrale. L'intégrale donnant la position peut être décomposée en une somme de  $N$  termes :

$$X_i(t) = \int_0^t V_i(s) ds = \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\frac{t}{N}}^{n\frac{t}{N}} V_i(s) ds. \quad (10.25)$$

Les termes de la série peuvent être considérés comme statistiquement indépendants. Si le nombre de termes de la série tend vers l'infini alors l'application du théorème de la limite centrale permet de conclure que la fonction de distribution de probabilité de  $X_i(t)$  est gaussienne. Pour  $t$  quelconque, Batchelor [7] conclut, en se basant sur des données expérimentales, que  $X_i(t)$  est une variable aléatoire gaussienne.

Dans le cas isotrope, la fonction de distribution de probabilité,  $P(x_i, t)$ , que  $X_i(t)$  soit égal à  $x_i$  à l'instant  $t$  est

$$P(x_i, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{X_i^2}(t)}} e^{-\frac{x_i^2}{2\overline{X_i^2}(t)}}, \quad (10.26)$$

où il n'y a aucune sommation suivant l'indice  $i$ . L'équation régie par  $P(x_i, t)$  est alors (cf. également [90]) :

$$\frac{\partial P(x_i, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{d\overline{X_i^2(t)}}{dt} \frac{\partial^2 P(x_i, t)}{\partial x_i^2}. \quad (10.27)$$

Ce qui permet de retrouver la définition du coefficient de diffusion suivant l'axe  $x_i$  :

$$D_{ti} = \frac{1}{2} \frac{d\overline{X_i^2(t)}}{dt}. \quad (10.28)$$

### 10.1.2 Relations entre les grandeurs lagrangiennes et eulériennes

Le concept lagrangien permet d'établir des résultats importants sur la dispersion de particules fluides. Malheureusement, les quantités lagrangiennes qui viennent d'être établies sont difficilement accessibles expérimentalement. Il est donc nécessaire de relier les quantités lagrangiennes aux quantités eulériennes plus facilement déterminables par l'expérience. Les résultats permettant de faire le lien entre ces deux concepts de base restent peu nombreux. Néanmoins, Tennekes et Lumley [141] ont établi dans le cadre d'une turbulence homogène le résultat suivant :

$$\overline{f[\vec{X}(t), t]} = \overline{f(\vec{x}, t)}, \quad (10.29)$$

où  $f$  est une fonction quelconque,  $\vec{X}(t)$  correspond à la variable lagrangienne alors que  $\vec{x}$  est la variable eulérienne. Ce résultat peut être appliqué aux fonctions caractéristiques des vitesses lagrangienne et eulérienne :

$$\langle \exp \left\{ \imath [\vec{z} \cdot \vec{V}(t)] \right\} \rangle = \langle \exp \left\{ \imath [\vec{z} \cdot \vec{u}(\vec{x}, t)] \right\} \rangle. \quad (10.30)$$

$\imath$  est l'imaginaire pur et  $\vec{z}$  est un champ vectoriel homogène à l'inverse d'une vitesse. L'utilisation des fonctions caractéristiques en turbulence est développée dans les livres de Frisch [46] et McComb [27]. Ainsi, en dérivant par rapport à la variable  $\vec{z}$  cette dernière relation, les variances des vitesses lagrangienne et eulérienne se révèlent identiques :

$$\langle V_i V_j \rangle = \langle u_i u_j \rangle. \quad (10.31)$$

Il en est d'ailleurs de même pour l'ensemble des moments d'ordre quelconque.

D'une façon plus générale, la vitesse lagrangienne peut être écrite sous la forme suivante :

$$\vec{V}(t) = \vec{u}[\vec{X}(t), t], \quad (10.32)$$

qui en utilisant la fonction de Dirac devient :

$$\vec{V}(t) = \int \vec{u}(\vec{x}, t) \delta[\vec{x} - \vec{X}(t)] d\vec{x}. \quad (10.33)$$

Il est alors possible de relier les tenseurs de corrélation lagrangien et eulérien :

$$\overline{V_i(0)V_j(t)} = \int \overline{u_i(\vec{0}, 0)u_j(\vec{x}, t) \delta[\vec{x} - \vec{X}(t)]} d\vec{x}. \quad (10.34)$$

Par suite l'utilisation de la conjecture de Corrsin [29] disant que :

**Conjecture 1** *Pour des temps de diffusion importants, le déplacement d'une particule fluide devient statistiquement indépendant du champ de vitesse eulérien.*

Il devient alors possible d'écrire

$$\overline{V_i(0)V_j(t)} = \int \left[ \overline{u_i(\vec{0}, 0)u_j(\vec{x}, t)} \right] \left\{ \delta \left[ \vec{x} - \vec{X}(t) \right] \right\} d\vec{x}. \quad (10.35)$$

Weinstock [148] a établi les conditions d'utilisation de cette approximation. Il montre qu'elle est applicable dans le cadre d'une turbulence homogène. Cette dernière relation est le point de départ de l'analyse faite par Saffman [124]. Il utilise la conjecture de Corrsin pour tout  $t$ . Ensuite, il assimile la quantité  $\delta \left[ \vec{x} - \vec{X}(t) \right]$  à la fonction de distribution de probabilité de  $\vec{X}(t)$  qu'il suppose en outre gaussienne. En fait, par utilisation de la théorie des distributions [127], il est possible de démontrer que  $\delta \left[ \vec{x} - \vec{X}(t) \right]$  est toujours identique à la fonction de distribution de probabilité de  $\vec{X}(t)$  même si cette dernière n'est pas gaussienne. Il utilise le tenseur spectral des corrélations de vitesses eulériennes défini comme étant la transformée de Fourier de  $\overline{u_i(\vec{0}, 0)u_j(\vec{x}, t)}$  :

$$\Phi_{ij}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \overline{u_i(\vec{0}, 0)u_j(\vec{x}, t)} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}, \quad (10.36)$$

et dont la transformée inverse redonne  $\overline{u_i(\vec{0}, 0)u_j(\vec{x}, t)}$

$$\overline{u_i(\vec{0}, 0)u_j(\vec{x}, t)} = \int \Phi_{ij}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}. \quad (10.37)$$

Ce qui permet d'établir par l'utilisation du théorème de Parseval et dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope le résultat suivant :

$$\overline{V_i(0)V_j(t)} = \int \Phi_{ij}(\vec{k}, t) e^{-\frac{k^2 \overline{X^2(t)}}{2}} d\vec{k}. \quad (10.38)$$

$\overline{X^2(t)}$  est la variance suivant une direction quelconque de l'espace. Le tenseur spectral,  $\Phi_{ij}(\vec{k}, t)$ , est donné dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope par :

$$\Phi_{ij}(\vec{k}, t) = \frac{\mathcal{E}(k, t)}{4\pi k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (10.39)$$

où  $\mathcal{E}(k, t)$  est le spectre d'énergie dont une formulation analytique proposée par Kraichnan est utilisée par Saffman [124] sous la forme :

$$\mathcal{E}(k, t) = E(k)r(k, t), \quad (10.40)$$

où  $E(k)$  et  $r(k, t)$  sont donnés respectivement par

$$E(k) = \frac{4\overline{u^2}k^4}{\sqrt{\pi}k_0^5} e^{-\frac{k^2}{k_0^2}}, \quad (10.41a)$$

$$r(k, t) = e^{-\frac{\overline{u^2}k^2 t^2}{2}}. \quad (10.41b)$$

$k_0$  est donné en fonction de l'échelle spatiale intégrale longitudinale,  $L_e$  :

$$k_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{L_e}. \quad (10.42)$$

En utilisant la relation (10.39), l'équation (10.38) écrite suivant l'axe  $x_1$  par exemple devient :

$$\overline{V_1(0)V_1(t)} = \int \frac{E(k)r(k,t)}{4\pi k^4} \frac{k_2^2 + k_3^2}{k^2} e^{-\frac{k^2 \overline{X^2(t)}}{2}} d\vec{k}. \quad (10.43)$$

Ce qui permet d'exprimer la fonction autocorrélation après intégration de cette dernière équation sur l'espace des nombres d'ondes sous la forme :

$$R_L(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\overline{u^2}k_0^2 t^2 + \frac{1}{2}\overline{X^2(t)}k_0^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \quad (10.44)$$

Néanmoins, l'équation de  $R_L(t)$  dépend de  $\overline{X^2(t)}$  qui reste inconnue. Cependant  $R_L(t)$  est égal à

$$R_L(t) = \frac{1}{2\overline{u^2}} \frac{d^2 \overline{X^2(t)}}{dt^2}. \quad (10.45)$$

Nous obtenons alors l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\frac{1}{2\overline{u^2}} \frac{d^2 \overline{X^2(t)}}{dt^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\overline{u^2}k_0^2 t^2 + \frac{1}{2}\overline{X^2(t)}k_0^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \quad (10.46)$$

Cette équation est résolue numériquement sous forme adimensionnelle à l'aide des variables :

$$\tau = \sqrt{\overline{u^2}}k_0 t, \quad x = k_0^2 \frac{\overline{X^2(t)}}{2}. \quad (10.47)$$

En utilisant la variable

$$y(\tau) = \frac{dx}{d\tau}, \quad (10.48)$$

un système d'équations à deux inconnues est obtenu :

$$\frac{dx}{d\tau} = y = D_t(\tau), \quad (10.49)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\tau^2 + x\right)^{\frac{5}{2}}} = R_L(\tau). \quad (10.50)$$

Ainsi, la résolution de ce dernier permet d'accéder aux évolutions temporelles de  $D_t(\tau)$  et  $R_L(\tau)$ . La solution est représentée sur la figure 10.1. Il est alors possible d'estimer l'échelle intégrale temporelle lagrangienne qui en variable dimensionnée vaut :

$$T_L = 0,4 \frac{L_e}{\sqrt{\overline{u^2}}}. \quad (10.51)$$

Le coefficient autocorrélation eulérien est défini par la relation :

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_1(\vec{0}, 0)u_1(\vec{0}, t)}}{\overline{u^2}}. \quad (10.52)$$

En utilisant le spectre de Kraichnan,  $R_E(t)$  est :

$$R_E(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\overline{u^2}k_0^2t^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \quad (10.53)$$

L'échelle intégrale eulérienne peut alors être calculée :

$$T_E = \int_0^\infty R_E(t)dt = 1,25 \frac{L_e}{\sqrt{\overline{u^2}}}. \quad (10.54)$$

$T_E$  correspond à l'échelle déterminée dans un repère qui se déplace avec le mouvement moyen. Alors que généralement, les données atmosphériques donnent une échelle intégrale mesurée en un point fixe. Saffman [124] fait une comparaison entre l'échelle lagrangienne et l'échelle eulérienne mesurée en un point fixe. Il en est de même dans le livre de McComb [27]. Le manque de précision concernant ces définitions d'échelles rendent parfois ambigus les comparaisons entre les divers auteurs. Comme le mouvement des particules fluides est rapporté à un référentiel se déplaçant à la vitesse moyenne du fluide, il semble plus judicieux de faire une comparaison avec l'échelle eulérienne prise dans ce même référentiel. Ainsi, nous constatons que les échelles intégrales eulérienne et lagrangienne sont directement proportionnelles. Il est alors possible de déterminer  $T_L$  à l'aide de  $T_E$  par :

$$T_L = \beta T_E, \quad (10.55)$$

où, avec le spectre de Kraichnan,  $\beta$  est égal 0,32. Spelt [132] utilise dans son étude de dispersion de bulles le spectre de von Karmann-Pao. Le champ de vitesse est obtenu par une technique de simulation cinématique<sup>1</sup>. Il trouve pour  $T_L$  et  $T_E$  les relations suivantes :

$$T_L = 0,6 \frac{L_e}{\sqrt{\overline{u^2}}}, \quad (10.56a)$$

$$T_E = 1,2 \frac{L_e}{\sqrt{\overline{u^2}}}. \quad (10.56b)$$

Ce qui donne avec le spectre de von Karmann-Pao un coefficient  $\beta$  égal à 0,5.

Ainsi, il semble que l'échelle intégrale lagrangienne soit toujours inférieure à l'échelle intégrale eulérienne. Les vitesses d'une particule fluide que l'on suit dans son mouvement sont moins corrélées que les vitesses mesurées en un point fixe. La représentation de  $R_L$  et  $R_E$  sur la figure 10.1 montre que cette dernière constatation est vérifiée pour tout  $t$ . Weinstock [148] arrive à la même conclusion dans un cadre plus général où l'hypothèse de distribution gaussienne n'est pas utilisée.

Néanmoins, signalons que Tennekes [140] montre que la micro-échelle eulérienne est plus petite que la micro-échelle lagrangienne. Ce qui est en contradiction avec ce qui a été constaté

<sup>1</sup>Cette méthode a été introduite par Kraichnan [85]. Il s'agit de déterminer le champ de vitesse d'une façon aléatoire satisfaisant la condition d'incompressibilité et en accord avec un spectre d'énergie donné.

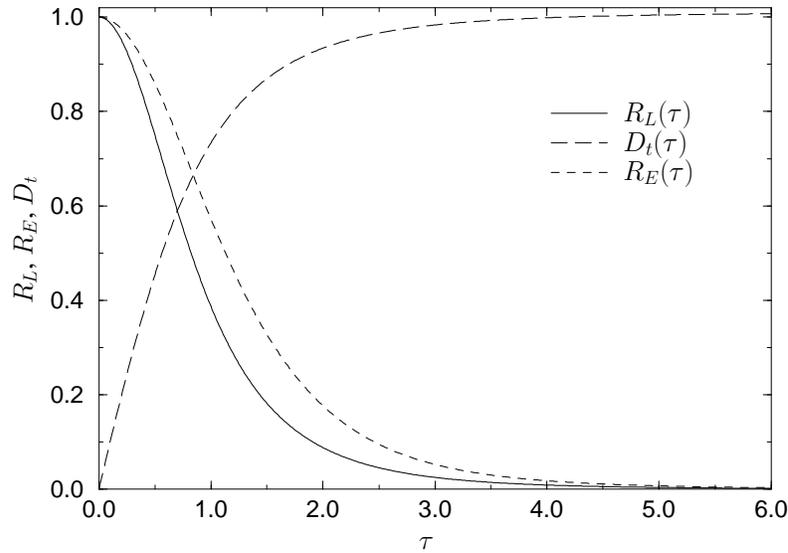


FIG. 10.1 – Représentation des autocorrélations lagrangienne et eulérienne et du coefficient de dispersion en fonction du temps adimensionné.

ci-dessus. Tennekes base son analyse sur une hypothèse d'advection des structures tourbillonnaires à petite échelle par les structures à grande échelle. Cette advection entraînerait une perte de corrélation entre les vitesses mesurées en un point fixe (pour plus de détails voir les références [140] et [132]).

Comme nous le verrons plus loin, l'étude de la dispersion de gouttes requiert une forme analytique de  $R_L$ . Hinze [62] utilise une forme exponentielle :

$$R_L(t) = e^{-\frac{t}{T_L}}. \quad (10.57)$$

Il en existe d'autres. Berlemont *et al.* [17] utilisent une forme proposée par Frenkiel :

$$R_L(t) = e^{-\frac{t}{(m^2+1)T_L}} \cos \left[ \frac{mt}{(m^2+1)T_L} \right]. \quad (10.58)$$

Dans le cas où  $m$  est égal à 0 la forme de Hinze est retrouvée.

Ces dernières considérations achèvent notre discussion sur la dispersion de particules fluides. Nous avons vu comment l'approche lagrangienne pouvait conduire à des résultats relativement généraux. Dans le cadre de la turbulence homogène, les caractéristiques lagrangiennes peuvent être reliées aux grandeurs eulériennes. Cette analyse nous aidera pour la dispersion des gouttes.

## 10.2 Force appliquée sur une particule dans un écoulement turbulent

En dehors des effets visqueux entraînant l'existence d'une force de traînée, l'instationnarité de l'écoulement crée l'apparition de nouveaux termes dans l'expression des forces s'appliquant à une goutte. Gatignol [48] et Maxey et Riley [98] ont déterminé la force agissant sur une particule plongée dans un écoulement non-uniforme. Leur résultat obtenu par des voies différentes sont identiques. La non-uniformité du champ de vitesse entraîne l'apparition de termes dits de Faxén. Dans le cas où ces derniers sont négligés, la force appliquée à une particule est :

$$\vec{F} = -6\pi\mu a (\vec{v}_p - \vec{u}) + \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \left( \frac{D\vec{u}}{Dt} - \vec{g} \right) + \frac{2}{3}\pi a^3 \rho \left( \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{d\vec{v}_p}{dt} \right) + 6a^2 \sqrt{\pi\mu\rho} \int_{-\infty}^t \left( \frac{d\vec{u}}{dt'} - \frac{d\vec{v}_p}{dt'} \right) \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}. \quad (10.59)$$

$\vec{u}$  est la vitesse de la phase continue non-perturbée par la présence de la particule.  $a$  est le rayon de la goutte.  $\frac{d}{dt}$  est la dérivée en suivant la particule dans son mouvement :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_p \cdot \vec{\nabla}. \quad (10.60)$$

Alors que  $\frac{D}{Dt}$  est celle en suivant le fluide dans son mouvement :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}. \quad (10.61)$$

Dans l'équation (10.59), le premier terme est la force de traînée. Le deuxième est l'effort qui s'applique sur toute inclusion plongée dans un milieu fluide. Il s'agit d'une généralisation de la poussée d'Archimède. Le troisième est le terme de masse ajoutée. Il traduit la force à fournir pour accélérer la goutte. Le dernier terme est celui de Basset-Boussinesq. Cette force est due au changement de la couche limite et du sillage lorsque la goutte subit un mouvement non-uniforme.

Dans le cas de particule dont la masse volumique est grande devant celle de la phase continue, les forces de masse ajoutée et de Basset-Boussinesq peuvent être négligées. Cette simplification s'applique très bien dans le cas de goutte d'eau dispersée dans de l'air où le rapport de masse volumique est de l'ordre de  $10^3$ . Dans l'étude de la dispersion de particules, seul le terme de traînée est conservé.

## 10.3 Analyse dimensionnelle

Avant de commencer l'étude de la dispersion de particules, il est intéressant de donner quelques résultats qualitatifs qui permettent de comprendre les interactions fluide-particule. Considérons dans un premier temps le comportement par rapport à un mouvement moyen dont les grandeurs caractéristiques sont une longueur  $L$  et une vitesse  $U_0$ .

Pour les interactions fluide-particule, le paramètre important est le temps de relaxation dynamique d'une particule,  $\tau_p$ . Si l'on suppose que le nombre de Reynolds lié à une particule est faible, la force de traînée de Stokes est applicable. Dans ce cadre,  $\tau_p$  est égal à :

$$\tau_p = \frac{2\rho'a^2}{9\rho\nu} \quad (10.62)$$

$\rho'$  est la masse volumique des particules,  $a$  le rayon.  $\rho$  est la masse volumique du gaz,  $\nu$  sa viscosité cinématique. La longueur de relaxation dynamique est définie par :

$$\lambda_p = \tau_p U_0 = \frac{2\rho'a^2 U_0}{9\rho\nu} \quad (10.63)$$

Le premier paramètre important est le rapport  $\frac{\lambda_p}{L}$ . Ce dernier correspond au nombre de Stokes. Les caractères dynamiques peuvent être énoncés de la façon suivante :

- Si  $\frac{\lambda_p}{L} \gg 1$  : le mouvement des particules dépend grandement des conditions initiales. Le temps de passage dans la zone d'intérêt n'est pas assez grand pour altérer l'évolution de la particule. Cette dernière ne suit pas l'écoulement. On a un effet «boulet».
- Si  $\frac{\lambda_p}{L} \ll 1$  : le mouvement particulaire dépend grandement de l'évolution de l'écoulement gazeux. La mise en équilibre est très rapide.
- Si  $\frac{\lambda_p}{L} \sim 1$  : les particules ont la mémoire des événements qui prennent place dans une région de dimension  $\lambda_p$ .

Cette première analyse ne s'intéresse qu'aux mouvements moyens des particules. Par contre dans le cas d'écoulements turbulents, le transport des gouttes est assez compliqué à analyser du fait de la multiplicité des échelles de la turbulence. A chaque instant, la particule subit les forces exercées par le fluide environnant.  $\tau_p$  est le temps qui lui est nécessaire pour répondre à son environnement. Comme dans la précédente analyse,  $\tau_p$  doit être comparé aux temps caractéristiques de la turbulence [63].

Comparons dans un premier temps avec les échelles de Kolmogorov. Ce sont les plus petites échelles où se manifestent les effets de dissipation visqueuse. Elles s'obtiennent en utilisant la première hypothèse de Kolmogorov [82]. Cette dernière postule que les seules quantités déterminantes dans la zone de dissipation sont  $\epsilon$ , taux de dissipation de l'énergie turbulente, et  $\nu$ , viscosité cinématique (cf. [27], page 68). Ainsi, les dimensions caractéristiques temporelle et spatiale sont les suivantes :

$$\tau_K = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}}, \quad (10.64a)$$

$$\eta_K = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (10.64b)$$

Le nombre de Stokes déterminé en faisant le rapport de  $\tau_p$  et  $\tau_K$  peut être écrit sous la forme

$$S_{tK} = \frac{2\rho'a^2}{9\rho\eta_K^2}. \quad (10.65)$$

Dans le cas de gouttes d'eau dans de l'air, il faut que le rapport  $a/\eta_K$  soit inférieur à 0,1 pour que les particules répondent au mouvement de ces plus petits tourbillons.

Ensuite, la deuxième échelle caractéristique en turbulence est celle de Taylor qui dans le cas homogène et isotrope est donnée par :

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{15\nu\overline{u'^2}}{\epsilon}}, \quad (10.66)$$

où  $\overline{u'^2}$  est la variance de la vitesse fluctuante. Ici, la liberté a été prise de ne pas préciser l'indice de la composante de la vitesse du fait de l'isotropie.  $\lambda_T$  correspond à la dimension à partir de laquelle les vitesses du fluides sont corrélées. Pour les tourbillons les plus énergétiques, la dimension pertinente est l'échelle intégrale eulérienne, notée  $L_e$ . Hinze [63] montre que les particules répondent aux plus grosses structures de la turbulence si  $a$  est 10 fois plus petite que l'échelle de Taylor.

Il ressort de cette analyse que les gouttes filtrent l'écoulement. Elles ne répondent qu'aux tourbillons d'un ordre de grandeur supérieur à leur taille. Ces résultats qualitatifs sont intéressants à noter et peuvent expliquer certaines relations plus rigoureuses que nous établirons dans le cadre de la dispersion de particules, §10.4. Ces conclusions nous seront également utiles dans la compréhension du mouvement relatif de gouttes intervenant dans l'étude de la collision. Ainsi, les vitesses de deux gouttes entrant en collision sont très faiblement corrélées si leur diamètre est supérieur à  $0,1 \times \lambda_T$ .

## 10.4 Dispersion de gouttes en écoulement turbulent

Tchen (cité dans les références [62] et [27]) est le premier à avoir étudié la dispersion de particules en turbulence homogène et isotrope. Il utilise la loi de Stokes, les particules étant supposées plus petites que l'échelle de Kolmogorov. De plus, durant le mouvement de la particule, il suppose que le fluide environnant la particule reste le même. Ainsi, la turbulence «vue» par la particule est identique à celle du fluide. Mais cette dernière hypothèse a été fortement discutée [62] et [63]. Elle restreint le champ d'applications de l'analyse de Tchen. En effet, lorsque les particules ont des masses volumiques différentes de celle du fluide, les forces de gravitation conduisent à une différence de trajectoires entre les particules fluides et des gouttes. Il apparaît un glissement ou une dérive. Cet effet est appelé «croisement de trajectoires» et a été initialement souligné par Yudine [151] et Csanady [30]. Comme il a été précisé dans l'analyse dimensionnelle, les particules ne répondent pas à toutes les structures turbulentes. Si l'inertie est faible, on peut s'attendre que les fines particules suivent bien les mouvements du fluide. Dans ce cas, la turbulence vue par les particules doit se rapprocher de celle du fluide. Alors que pour les particules lourdes, les temps de relaxation étant importants, la turbulence dans le voisinage d'une particule change fortement alors que la position de cette dernière n'a pratiquement pas modifiée. Donc, la turbulence vue par les particules lourdes est très différente de celle du fluide.

Dans la suite, l'analyse est limitée aux écoulements homogènes et isotropes. Le nombre de Reynolds des particules est supposé petit afin d'utiliser la loi de Stokes. Ainsi, les composantes des vitesses sont indépendantes les unes des autres. Les équations du mouvement d'une

inclusion de rayon  $a$  sont, en absence de forces de gravité :

$$\frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = -\frac{\vec{v}_p(t) - \vec{u}[\vec{x}_p(t), t]}{\tau_p}, \quad (10.67)$$

$$\frac{d\vec{x}_p(t)}{dt} = \vec{v}_p(t). \quad (10.68)$$

Le temps de relaxation,  $\tau_p$ , est alors donné par la relation (10.62) défini au §10.3.  $\vec{v}_p(t)$  est la vitesse de la particule.  $\vec{x}_p(t)$  sa position.  $\vec{u}[\vec{x}_p(t), t]$  est la vitesse du fluide vue par la particule à l'instant  $t$ .

Dans le cadre des hypothèses formulées dans ce paragraphe, nous pouvons nous limiter à une analyse unidimensionnelle. L'indice des composantes des champs vectoriels est alors supprimé. Ainsi, nous pouvons définir le coefficient d'autocorrélation vu par la particule sous la forme :

$$\hat{R}(t) = \frac{\langle u(\vec{0}, 0)u[\vec{x}_p(t), t] \rangle}{u^2}. \quad (10.69)$$

De même le coefficient d'autocorrélation des vitesses des particules est

$$R_p(t) = \frac{\langle v_p(0)v_p(t) \rangle}{v_p^2}. \quad (10.70)$$

L'autocorrélation est donnée par  $K_p(t) = \overline{v_p^2} R_p(t)$ .

L'échelle intégrale de la turbulence vue par la particule est alors définie par :

$$\hat{T} = \int_0^\infty \hat{R}(t) dt. \quad (10.71)$$

$\hat{T}$  dépend de l'inertie des particules considérées. Dans le cas de petites particules pour lesquelles l'inertie est faible, nous avons déjà souligné qu'elles suivent très bien les mouvements du fluide. Leur temps de relaxation dynamique étant très faible, elles répondent à toutes les structures de la turbulence. Donc,  $\hat{T}$  doit tendre vers l'échelle intégrale lagrangienne,  $T_L$ . D'un autre côté, pour les grosses particules, la turbulence vue par ces dernières est pratiquement celle vue en un point fixe. Ainsi, pour de grosses particules,  $\hat{T}$  doit tendre vers l'échelle intégrale eulérienne,  $T_E$ . Wang et Stock [146] ont établi une relation pour  $\hat{T}$  en fonction du nombre de Stokes bâti sur l'échelle  $T_E$ . Ils utilisent également une méthode de simulation cinématique. Les échelles intégrales lagrangienne et eulérienne sont dans leur calcul reliées par :

$$T_L = 0,356T_E. \quad (10.72)$$

Cette relation est très proche de celle issue de l'analyse de Saffman [124]. En s'appuyant sur une étude numérique, Wang et Stock [146] donnent pour  $\hat{T}$  la relation

$$\hat{T}(S_t) = T_E \left[ 1 - \frac{0,644}{(1 + S_t)^{0,4(1+0,01S_t)}} \right], \quad (10.73)$$

où  $S_t$  est donné par

$$S_t = \frac{\tau_p}{T_E}. \quad (10.74)$$

La relation  $\hat{T}(S_t)$  permet de bien retrouver les comportements asymptotiques lorsque  $S_t$  tend vers 0 ou devient très grand. Dans le cas où la forme générale  $T_L = \beta T_E$  est utilisée,  $\hat{T}$  est donné par

$$\hat{T}(S_t) = T_E \left[ 1 - \frac{1 - \beta}{(1 + S_t)^{0,4(1+0,01S_t)}} \right]. \quad (10.75)$$

Cette dernière équation a été utilisée par Launay *et al.* [87].

La forme de  $\hat{R}(t)$  employée par Wang et Stock [146], à l'image de celle que nous avons indiquée pour  $R_L$ , est exponentielle :

$$\hat{R}(t) = e^{-\frac{t}{T}}. \quad (10.76)$$

### 10.4.1 Etudes en absence de forces de gravité

La variance de la vitesse des particules est une quantité importante à connaître. Elle peut être établie par différentes voies. Ici, nous utilisons une méthode spectrale. Les vitesses des particules et du fluide peuvent être écrites ainsi :

$$v_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (10.77)$$

$$\hat{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (10.78)$$

où  $\hat{u}(t) = u[\vec{x}_p(t), t]$ .  $\alpha(\omega)$  et  $\beta(\omega)$  sont reliés en utilisant l'équation de quantité de mouvement (10.67) par l'équation suivante :

$$\alpha(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{1 + \tau_p i\omega}. \quad (10.79)$$

Les fonctions d'autocorrélations spectrales sont définies à l'aide de

$$\phi_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle v_p(0)v_p(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (10.80a)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{u}(0)\hat{u}(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (10.80b)$$

Les grandeurs moyennes sont définies d'une façon temporelle :

$$\langle v_p(0)v_p(\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v_p(t)v_p(t + \tau) dt. \quad (10.81)$$

Nous avons la même définition pour  $\langle \hat{u}(0)\hat{u}(\tau) \rangle$ . Les quantités  $\phi_p(\omega)$  et  $\hat{\phi}(\omega)$  sont obtenues en fonction de  $\alpha(\omega)$  et  $\beta(\omega)$  respectivement à l'aide des identités suivantes (cf. [62]) :

$$\phi_p(\omega) = \frac{\pi}{T} \alpha(\omega) \alpha^*(\omega), \quad (10.82a)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\pi}{T} \beta(\omega) \beta^*(\omega), \quad (10.82b)$$

$\alpha^*(\omega)$  désigne la valeur conjuguée de  $\alpha(\omega)$ . Ces dernières relations peuvent être établies par application de la transformée de Fourier du produit de convolution. Ainsi, il devient possible d'établir le résultat suivant :

$$\phi_p(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{1 + \tau_p^2 \omega^2}. \quad (10.83)$$

La variance de la vitesse des particules est :

$$\langle v_p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_p(\omega) d\omega. \quad (10.84)$$

Grâce à la forme particulière de  $\hat{R}(t)$ , (10.76), la fonction d'autocorrélation spectrale,  $\hat{\phi}(\omega)$ , est donnée par :

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\overline{\hat{T}u^2}}{\pi (1 + \omega^2 \hat{T}^2)}. \quad (10.85)$$

Ainsi, la variance,  $\langle v_p^2 \rangle$ , est alors égale à

$$\langle v_p^2 \rangle = \frac{\overline{u^2}}{1 + \frac{\tau_p}{\hat{T}}}. \quad (10.86)$$

Cette dernière relation est en fait très proche de celle établie par Tchen (cf. [62]) où l'échelle intégrale  $\hat{T}$  est remplacée par  $T_L$ . Lorsque l'inertie des gouttes est faible, la variance  $\langle v_p^2 \rangle$  tend vers celle du fluide. Alors que pour de grosses particules,  $\langle v_p^2 \rangle$  devient faible. Ce qui montre bien le rôle de filtre joué par l'inertie.

A l'image de l'analyse faite pour la détermination de  $\langle v_p^2 \rangle$ , il est possible d'établir les relations donnant  $\langle \hat{u}v_p \rangle$  et  $\langle (v_p - \hat{u})^2 \rangle$ . Les résultats sont donnés ci-dessous :

$$\langle \hat{u}v_p \rangle = \frac{\overline{u^2}}{1 + \frac{\tau_p}{\hat{T}}}, \quad (10.87a)$$

$$\langle (v_p - \hat{u})^2 \rangle = \frac{\tau_p \overline{u^2}}{\hat{T} + \tau_p}. \quad (10.87b)$$

Nous constatons que  $\langle \hat{u}v_p \rangle$  est identique à  $\langle v_p^2 \rangle$ . La relation (10.87bb) a été établie par Csanady [30] lui permettant de montrer que pour des particules de faible inertie, les fluctuations subies par ces dernières sont identiques à celles de la turbulence. Grâce à l'intégration de l'équation (10.85), nous avons

$$\langle \hat{u}^2 \rangle = \overline{u^2}. \quad (10.88)$$

Pour finir, l'autocorrélation des vitesses des gouttes peut être obtenue par transformation inverse de Fourier portant sur  $\phi_p(\omega)$ . Le résultat est alors :

$$K_p(t) = \frac{\overline{u^2}}{1 - \left(\frac{\tau_p}{\hat{T}}\right)^2} \left( e^{-\frac{t}{\hat{T}}} - \frac{\tau_p}{\hat{T}} e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right). \quad (10.89)$$

Par la même occasion, l'intégration de cette dernière relation permet d'obtenir le coefficient de dispersion :

$$D_p(t) = \frac{\overline{u^2 \hat{T}}}{1 - \left(\frac{\tau_p}{\hat{T}}\right)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\hat{T}}} - \frac{\tau_p^2}{\hat{T}^2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \right]. \quad (10.90)$$

Il est remarquable de constater que ces résultats sont très proches dans leur formulation de ceux établis par Tchen [62] et [27] où l'échelle intégrale lagrangienne de la turbulence vue par les particules,  $\hat{T}$ , est remplacée par  $T_L$ . D'ailleurs, lorsque l'inertie des particules est très faible, les résultats précédemment exposés tendent vers ceux de Tchen. Dans le cas opposé nous constatons que la variance des vitesses des particules devient très faible. Par contre, les coefficients de dispersion se révèlent plus importants dû au fait que  $\hat{T}$  approche  $T_E$  lorsque  $S_t$  devient important. Ce dernier effet est totalement ignoré dans la théorie de Tchen.

### 10.4.2 Effet de la gravité

L'équation de quantité de mouvement est modifiée par l'introduction de la force de gravité :

$$\frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = -\frac{\vec{v}_p(t) - \vec{u}(t)}{\tau_p} + \vec{g}. \quad (10.91)$$

La vitesse de sédimentation de la particule obtenue dans un fluide au repos est :

$$\vec{v}_{ps} = \tau_p \vec{g}. \quad (10.92)$$

L'intégration de l'équation quantité de mouvement donne :

$$\vec{v}_p(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\frac{s-t}{\tau_p}}}{\tau_p} \vec{u}(s) ds + \vec{v}_{ps}. \quad (10.93)$$

La vitesse de la particule est décomposée en une partie moyenne,  $\langle \vec{v}_p(t) \rangle$ , et une partie fluctuante,  $\vec{v}_p'(t)$ . La vitesse moyenne des particules est prise égale à la vitesse de sédimentation  $\vec{v}_{ps}$ . En fait, Maxey [97] a montré que la vitesse moyenne est légèrement plus importante que  $\vec{v}_{ps}$ . Cet effet est dû également à l'inertie des particules. Cependant, la différence entre  $\langle \vec{v}_p(t) \rangle$  et  $\vec{v}_{ps}$  reste faible. Par suite, l'équation portant sur la partie fluctuante de la vitesse est identique à celle obtenue en absence de force de gravité, (10.67). Par contre, la vitesse  $\vec{v}_{ps}$  entraîne un glissement entre le mouvement des particules et le fluide. Il s'en suit que la turbulence vue par les inclusions est différente de celle perçue en absence de forces de gravité. Plus l'intensité de  $\vec{v}_{ps}$  est grande plus cette différence est prononcée. Le paramètre important à prendre en compte est alors le rapport entre  $\vec{v}_{ps}$  et  $\sqrt{u^2}$  :

$$\gamma = \frac{\|\vec{v}_{ps}\|}{\sqrt{u^2}}. \quad (10.94)$$

Commençons par regarder le cas où  $\gamma$  est grand. Le déplacement moyen des particules est donné par :

$$\bar{x}_{pi}(t) = -v_{ps} t \delta_{i3}. \quad (10.95)$$

L'axe  $x_3$  est suivant la normale ascendante et  $v_{ps}$  vaut  $\tau_p g$ . Les déplacements suivant les autres directions sont de l'ordre de  $\sqrt{\overline{u^2}}\sqrt{t}$ . Dans le cas où  $v_{ps}$  est beaucoup plus grand que  $\sqrt{\overline{u^2}}$ , ces derniers peuvent être négligés devant le mouvement moyen  $\overline{x}_{p3}(t)$ . En conséquence, l'autocorrélation lagrangienne du fluide vu par les particules est :

$$\hat{K}_{33}(t) = \langle u_3(\vec{0}, 0) u_3(-v_{ps}t\vec{b}_3, t) \rangle. \quad (10.96)$$

Cette dernière quantité subit à la fois une décorrélation spatiale dont l'échelle de temps est de l'ordre de  $L_e/v_{ps}$  et une décorrélation temporelle d'échelle de temps  $L_e/\sqrt{\overline{u^2}}$ . Si  $\gamma$  est grand, la décorrélation temporelle peut être négligée devant la première. Par suite,  $\hat{K}_{33}(t)$  peut être estimée par l'utilisation de l'autocorrélation spatiale donc la forme générale tensorielle, dans le cadre d'une turbulence homogène et isotrope, est (cf. [27]) :

$$K_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle = \overline{u^2} \left[ f(r) \frac{r_i r_j}{r^2} + g(r) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \right]. \quad (10.97)$$

$f(r)$  et  $g(r)$  sont les coefficients d'autocorrélations spatiaux longitudinal et transversal respectivement. Ces deux dernières quantités sont reliées par l'équation :

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{df(r)}{dr}. \quad (10.98)$$

Cette égalité résulte de l'équation de continuité (cf. [27]).

Nous avons alors pour  $\hat{K}_{33}(t)$  la relation :

$$\hat{K}_{33}(t) = \sqrt{\overline{u^2}} f(-v_{ps}t). \quad (10.99)$$

Cette analyse a été employée par Yudine [151] pour déterminer les coefficients de diffusion des particules. Csanady [30] a également fait usage de ce résultat. De plus, ce dernier suppose que les fluctuations de vitesse subies par les particules sont identiques à celles du fluide. Ainsi, le coefficient de diffusion suivant  $x_3$  des particules est :

$$D_{p33}(t) = \sqrt{\overline{u^2}} \int_0^t f(-v_{ps}s) ds. \quad (10.100)$$

En utilisant le même raisonnement, les coefficients de diffusion suivant  $x_1$  et  $x_2$  sont égaux à

$$D_{p11}(t) = D_{p22}(t) = \sqrt{\overline{u^2}} \int_0^t g(-v_{ps}s) ds. \quad (10.101)$$

Par conséquent, lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $D_{p33}$  devient

$$D_{p33}(\infty) = \frac{\sqrt{\overline{u^2}} L_e}{v_{sp}}. \quad (10.102)$$

Pour les directions transversales, on trouve [151] :

$$D_{p11}(\infty) = D_{p22}(\infty) = \frac{\sqrt{\overline{u^2}} L_e}{2v_{sp}}. \quad (10.103)$$

Ce dernier résultat résulte de la relation

$$\int_0^{\infty} g(r)dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(r)dr. \quad (10.104)$$

obtenue facilement à partir de (10.98).

Donc, les coefficients de diffusion transversaux sont deux fois plus petits que  $D_{p33}(\infty)$ . Cette effet est directement lié à la relation entre  $f(r)$  et  $g(r)$ . Ce résultat est appelé par Csanady [30] «effet de continuité». Ainsi, lorsque  $\gamma$  est grand, les corrélations de vitesses vues par les particules s'apparentent aux corrélations spatiales eulériennes. De plus, la dispersion des inclusions diminue lorsque  $v_{ps}$  augmente. Dans la mesure où il est désirable de connaître les autocorrélations lagrangiennes ou les coefficients de dispersion pour des valeurs de temps intermédiaire, il devient nécessaire de se donner une forme particulière pour  $f(r)$ . La forme exponentielle est souvent utilisée [30], [146] :

$$f(r) = e^{-\frac{r}{L_e}}. \quad (10.105)$$

Ce qui donne pour  $\hat{K}_{33}(t)$  :

$$\hat{K}_{33}(t) = \overline{u^2} e^{-\frac{v_{ps}t}{L_e}}. \quad (10.106)$$

$\hat{K}_{11}(t)$  et  $\hat{K}_{22}(t)$  sont alors

$$\hat{K}_{11}(t) = \hat{K}_{22}(t) = \overline{u^2} \left( 1 - \frac{v_{ps}t}{2L_e} e^{-\frac{v_{ps}t}{L_e}} \right). \quad (10.107)$$

Les coefficients de dispersion en découlent immédiatement par intégration.

Ces résultats s'appliquent dans la mesure où  $\gamma$  est très grand. Par contre dans le cas où  $v_{ps}$  est comparable avec  $\sqrt{\overline{u^2}}$ , l'analyse doit être reconduite. Lorsque la vitesse de sédimentation devient très faible, les résultats établis en absence de force de gravité, §10.4.1, doivent être retrouvés. Csanady [30] a proposé un modèle pour passer des deux cas extrêmes présentés dans §10.4.1 et ci-dessus. Csanady souligne que si  $v_{ps}$  tend vers zéro, les corrélations vues par les particules doivent tendre vers les corrélations lagrangiennes. Par contre, lorsque  $v_{ps}$  devient grand les corrélations doivent tendre vers les corrélations eulériennes comme il a été utilisé par Yudine [151]. Le passage entre ces deux cas extrêmes devant se faire d'une façon continue. Pour  $v_{ps}$  nulle, Csanady utilise la théorie de Tchen. Plus récemment, Wang et Stock [146] ont étendu cette approche mais en utilisant le fait que la turbulence vue par les particules n'est pas forcément celle du fluide. Ils emploient alors les considérations exposées dans §10.4.1. L'autocorrélation des vitesses vue par les particules est considérée sous la forme générale suivante :

$$\hat{K}_{33}(t) = \hat{K}_{33} \left( \frac{v_{ps}t}{L_e}; \frac{\sqrt{\overline{u^2}}t}{L_e} \right). \quad (10.108)$$

Wang et Stock [146] utilisent l'hypothèse de Csanady [30]. Cette dernière stipule que  $\hat{K}_{33}(t)$  doit rester constant sur des ellipses d'équations :

$$\frac{t^2}{\hat{T}^2} + \frac{v_{ps}^2 t^2}{L_e^2} = Cte. \quad (10.109)$$

Ainsi,  $\hat{K}_{33}(t)$  est donnée par la relation :

$$\hat{K}_{33}(t) = \overline{u^2} e^{-\frac{t}{T}} \sqrt{1 + \frac{\tau_p^2}{T^2} \gamma^2}, \quad (10.110)$$

où on a utilisé la relation  $T_E = L_e / \sqrt{\overline{u^2}}$ . Pour  $\hat{K}_{11}(t)$  et  $\hat{K}_{22}(t)$ , nous avons :

$$\hat{K}_{11}(t) = \hat{K}_{22}(t) = \overline{u^2} \left( 1 - \frac{v_{ps} t}{2L_e} \right) e^{-\frac{t}{T}} \sqrt{1 + \frac{\tau_p^2}{T^2} \gamma^2}. \quad (10.111)$$

Ensuite, les autocorrélations des vitesses des particules peuvent être obtenues en utilisant l'analyse spectrale comme il a été fait dans le §10.4.1. Au préalable, on pose

$$m_T = \frac{\hat{T}}{T_E}. \quad (10.112)$$

De plus, le nombre de Stokes défini par (10.74) est employé dans les relations de  $K_{p33}(t)$ ,  $K_{p11}(t)$  données ci-dessous :

$$K_{p33}(t) = \frac{\overline{u^2}}{1 - \frac{S_t^2}{m_T^2} (1 + m_T^2 \gamma^2)} \left[ e^{-\frac{t}{T}} \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2} - \frac{\tau_p}{\hat{T}} \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2} e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right], \quad (10.113)$$

$$K_{p11}(t) = \frac{\overline{u^2}}{1 - \frac{S_t^2}{m_T^2} (1 + m_T^2 \gamma^2)} \left\{ e^{-\frac{t}{T}} \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2} \left[ 1 + \frac{S_t^2 \gamma \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2}}{m_T \left( 1 - \frac{S_t^2}{m_T^2} (1 + m_T^2 \gamma^2) \right)} - \frac{\gamma t}{2T_E} \right] - \left[ \frac{\tau_p}{\hat{T}} \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2} + \frac{\gamma S_t}{2} \frac{1 + \frac{S_t^2}{m_T^2} (1 + m_T^2 \gamma^2)}{1 - \frac{S_t^2}{m_T^2} (1 + m_T^2 \gamma^2)} \right] e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right\}. \quad (10.114)$$

En prenant ces relations pour  $t = 0$ , nous sommes en mesure de déterminer les variances des particules :

$$\overline{v_{p3}^2} = \frac{\overline{u^2}}{1 + \frac{\tau_p}{T} \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2}}, \quad (10.115)$$

$$\overline{v_{p1}^2} = \overline{v_{p2}^2} = \overline{u^2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\tau_p}{T} \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2}} - \frac{\gamma S_t}{2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{\tau_p}{T} \sqrt{1 + m_T^2 \gamma^2} \right)^2} \right]. \quad (10.116)$$

Ainsi, il est possible de voir que les variances suivant les axes  $x_1$  et  $x_2$  sont plus faibles que celle suivant l'axe  $x_3$ . Cet effet est encore dû à l'équation de continuité.

Ces dernières considérations terminent ce chapitre sur la dispersion des particules. Les résultats établis ici nous seront utiles dans la recherche des taux de collision. Les relations ont été obtenues dans la mesure où l'on se donne une forme particulière pour le coefficient d'autocorrélation des vitesses du fluide vues par les particules. Ces expressions algébriques restent simples. Dans le cas où l'on souhaite faire une étude plus rigoureuse, on s'expose à un degré de complexité plus élevé. Reeks [117] a étudié la dispersion de particules d'inertie finie. Il

utilise une méthode d'approximation itérative du second ordre. Ses résultats sont donnés sous formes d'équations intégrales difficilement utilisables. Néanmoins, les résultats de Reeks sont en accord avec ce qui a été présenté plus haut. A savoir qu'en absence de vitesse de glissement entre les particules et le fluide, Reeks [117] montre que la dispersion des particules augmente avec l'inertie. Une autre étude a été dispensée par Pismen et Nir [111]. Ces derniers utilisent la conjecture de Corrsin. Leur analyse s'apparente à celle utilisée par Saffman [124]. Mais encore une fois, les solutions de Pismen et Nir [111] se présentent sous formes d'équations intégrales-différentielles difficiles à utiliser.

# Chapitre 11

## Collisions en écoulements turbulents

Dans la première partie, nous nous sommes concentrés sur les collisions dans des écoulements linéaires. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux taux de collision en écoulements turbulents. L'étude est plus compliquée car le nombre d'échelles caractéristiques est plus important. A chaque échelle correspond un mode de collision propre. Les résultats présentés dans le cadre de la dispersion de particules en écoulements turbulents vont nous servir dans ce chapitre.

Nous nous intéressons uniquement à la turbulence homogène et isotrope. Ce chapitre commence par un exposé sur les modèles existants. Nous proposons ensuite un nouveau modèle pour le taux de collision de gouttes de tailles différentes en nous appuyant sur les travaux de Laviéville [88]. Ce modèle repose sur la recherche de la fonction de distribution des vitesses des particules.

Pour finir, nous verrons comment les interactions hydrodynamiques peuvent être introduites dans une détermination numérique des taux de collision. Il ne s'agit ici que d'une ébauche de futurs travaux.

### 11.1 Présentation des modèles existants

Dans le cas de très fines particules, les vitesses de ces dernières sont très corrélées. Les processus de collision s'apparentent à ceux rencontrés dans les écoulements laminaires. Par contre, pour de plus grosses particules ou dans des écoulements de forte turbulence, l'agitation turbulente prend beaucoup plus d'importance.

Commençons par exposer le problème pour des particules plus petites que l'échelle de Kolmogorov définie dans §10.3 par la relation (10.64bb). Les gouttes subissent les variations spatiales de la vitesse de la phase porteuse. Pour de telles échelles, l'écoulement est pratiquement laminaire. En d'autres termes, l'écoulement de la phase continue peut être vu comme un écoulement de cisaillement de gradient  $\gamma$ . Ce dernier est déterminé en fonction des grandeurs caractéristiques de la turbulence. Par utilisation de la première hypothèse de Kolmogorov [82] une simple analyse dimensionnelle donne :  $\gamma = \sqrt{\epsilon/\nu}$ . En utilisant les travaux de Smoluchowski [131], Camp et Stein [21] proposent comme taux de collision pour de fines particules :

$$J_{12t} = \frac{4}{3} (a_1 + a_2)^3 n_1 n_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (11.1)$$

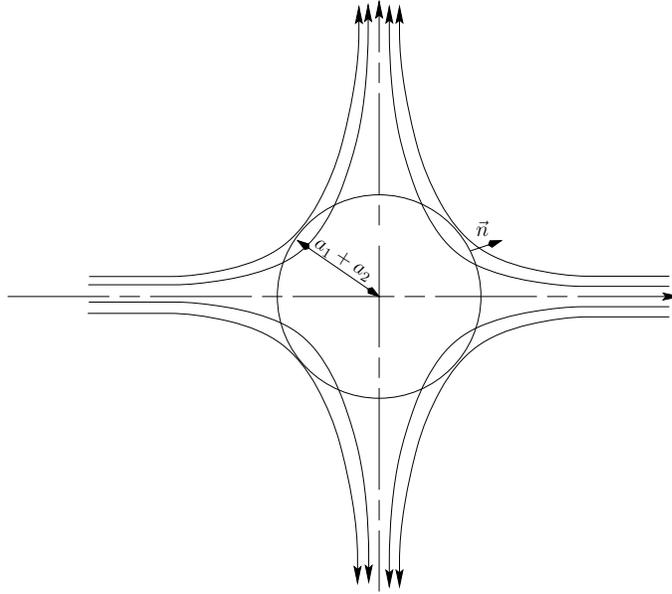


FIG. 11.1 – Flux de particules entrant dans la sphère absorbante pour un écoulement turbulent.

Une étude plus rigoureuse a été menée ensuite par Saffman et Turner [125]. Ils distinguent deux mécanismes de collision en écoulement turbulent. Le premier est lié aux variations spatiales du champ de vitesse. Ce qui entraîne que des particules de mêmes tailles peuvent s'entrechoquer. Le second mécanisme est lié aux différences de réponses inertielles des particules soumises à un champ d'accélération. Il ne concerne que des particules de tailles différentes. Ce dernier est appelé par Fuchs [47] *collision cinétique*.

Le modèle de Saffman et Turner [125] ne peut être appliqué que pour des petites particules par rapport à l'échelle de Kolmogorov. Des gouttes d'eau subiront les variations spatiales de vitesse à l'échelle de dissipation si elles sont d'un ordre de grandeur plus petites [63] (cf. §10.3). Donc, ce modèle de collision ne peut être valide que pour des taux de dissipation turbulente faibles. De plus, Saffman et Turner [125] ne prennent pas en compte l'efficacité de collision. Or, nous avons vu dans la première partie l'importance que celle-ci pouvait avoir.

Localement, à l'échelle de Kolmogorov, l'écoulement turbulent est vu comme un écoulement d'élongation pure. C'est à dire que l'on suppose que le temps de vie de l'écoulement d'élongation pure est beaucoup plus important que le temps de réponse inertiel des particules. Cette persistance de l'élongation pure a été proposée par Townsend [142] en 1951. De part la faible inertie des gouttes, ces dernières sont censées suivre les lignes de courant de la phase continue. La recherche du taux de collision revient à déterminer le flux de particules entrant dans la sphère absorbante comme nous l'avons fait dans le cas des écoulements linéaires.

Le taux de collision est :

$$J_{12t} = -n_1 n_2 \Phi, \quad (11.2)$$

où  $\Phi$  est le flux de particules entrant dans la sphère absorbante.

$$\Phi = \int_{S, w_r < 0} w_r dS. \quad (11.3)$$

$w_r$  est la vitesse relative suivant la normale  $\vec{n}$ . Le flux total est :

$$\Phi_t = \int_{S, w_r > 0} w_r dS + \int_{S, w_r < 0} w_r dS \quad (11.4)$$

qui doit être nul en vertu de la conservation du débit. Donc,

$$\int_S |w_r| dS = -2 \int_{S, w_r < 0} w_r dS. \quad (11.5)$$

Ce flux est moyenné sur l'ensemble des réalisations possibles des champs de vitesses. De plus, avec la propriété d'isotropie, le flux entrant  $\bar{\Phi}$  est égal à :

$$\bar{\Phi} = -2\pi R^2 |\bar{w}_x|, \quad (11.6)$$

$\bar{w}_x$  est la vitesse relative par rapport à la particule cible. Saffman et Turner [125] prennent comme relation pour  $|\bar{w}_x|$  :

$$|\bar{w}_x| = R \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (11.7)$$

Ils supposent également que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est une fonction aléatoire gaussienne. Il est possible d'évaluer la variance de cette dernière quantité en utilisant le résultat classique de la turbulence homogène et isotrope (cf. par exemple [27]) :

$$\overline{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} = \frac{\epsilon}{15\nu}. \quad (11.8)$$

La connaissance de la variance d'une fonction aléatoire gaussienne permet par un simple calcul d'obtenir le résultat suivant (cf. [110] chap. 20) :

$$\left| \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} \right| = \sqrt{\frac{2\epsilon}{15\nu\pi}}. \quad (11.9)$$

Ce qui permet d'écrire pour le taux de collision :

$$J_{12t} = n_1 n_2 (a_1 + a_2)^3 \sqrt{\frac{8\pi\epsilon}{15\nu}} \approx 1,3 n_1 n_2 (a_1 + a_2)^3 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (11.10)$$

Il est à noter que le coefficient 1,3 est proche du 4/3 qui figure dans l'expression obtenue d'une façon plus intuitive par Camp et Stein [21].

Une autre approche a été proposée par Levich [91]. Il se base sur une équation de diffusion. Il raisonne d'une façon similaire à celle employée pour le mouvement brownien. En fait, Levich se place dans un contexte totalement opposé à celui utilisé par Saffman et Turner [125]. Il suppose que seul le processus diffusif conduit au mouvement relatif des particules. Il évalue le coefficient de diffusion turbulente de la façon suivante :

$$D_{tur} \approx v_r r, \quad (11.11)$$

où  $r$  est l'échelle de longueur.  $v_r$  est une vitesse caractéristique à l'échelle  $r$ . Il prend :

$$D_{tur} \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{15\nu}} r^2 \text{ si } r < \eta_K, \quad (11.12a)$$

$$D_{tur} \approx \alpha (\epsilon r)^{\frac{1}{3}} r \text{ si } r > \eta_K, \quad (11.12b)$$

où  $\alpha$  est une constante sans dimension. En calculant le flux de particules entrant sur autre cible, il propose comme taux de collision :

$$J_{12i} = 9,73 n_1 n_2 (a_1 + a_2)^3 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (11.13)$$

On constate que cette dernière relation a une forme similaire à celles proposées par Camp et Stein [21] et Saffman et Turner [125]. Mais le coefficient 9,73 est d'un ordre supérieur à ceux proposés par les autres auteurs. Des critiques sur l'approche de Levich [91] ont été émises par Delichatsios et Probstein [38]. Ils justifient leurs doutes en disant que la nature non-markovienne du processus de dispersion turbulente ne peut être décrite par un modèle de diffusion stationnaire. Néanmoins, dans un article très récent, Brunk *et al* [20] reprennent la même approche que Levich [91]. En se basant sur des résultats de simulation numérique directe de la turbulence de Girimaji et Pope [50], Brunk *et al.* [20] proposent comme taux de collision :

$$J_{12i} = 5,78 (a_1 + a_2)^3 n_1 n_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (11.14)$$

Dans l'article de Delichatsios et Probstein [38], une autre expression du taux de collision est également proposée. Leur approche est très simple. Ils considèrent que le flux de particules est donné par la relation suivante :

$$\Phi = \pi (a_1 + a_2)^2 w_r, \quad (11.15)$$

où  $w_r$  est la vitesse relative des particules. Pour des particules dont la taille est inférieure à l'échelle de Kolmogorov, ils utilisent la relation :

$$w_r \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{15\nu}} (a_1 + a_2), \quad (11.16)$$

ce qui donne pour  $J_{12}$  :

$$J_{12i} \approx 0,81 n_1 n_2 (a_1 + a_2)^3 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (11.17)$$

Dans les précédents résultats, nous n'avons considéré que les cas où les particules sont petites devant l'échelle de Kolmogorov. C'est à dire que l'inertie des gouttes est négligée. Les particules sont supposées suivre l'écoulement porteur. Ici, seul le mécanisme de collision par cisaillement a été pris en compte. Il est remarquable de constater que les taux de collision déterminés par les divers auteurs ont tous des formes similaires en dehors des constantes multiplicatives variant entre 1,29 pour Saffman et Turner [125] à 9,73 pour Levich [91].

Maintenant pour des particules de tailles différentes, le retard de réponse aux variations de vitesse de la phase porteuse peut entraîner une collision des particules. Levich [91] a également

étudié ce deuxième mécanisme. Le taux de collision est exprimé de la même façon que nous l'avons vu pour la sédimentation. Le vitesse relative des deux particules est déterminée grâce à l'équation de quantité de mouvement qui pour une particule  $\alpha$  est :

$$\frac{d\vec{v}_{p\alpha}}{dt} = -\frac{1}{\tau_{p\alpha}} (\vec{v}_{p\alpha} - \vec{u}) + \vec{\gamma}_e, \quad (11.18)$$

où  $\tau_{p\alpha} = 2\rho' a_\alpha^2 / (9\rho\nu)$ .  $\vec{\gamma}_e$  est le champ d'accélération d'entraînement. Si l'on suppose que  $\tau_{p\alpha}$  est suffisamment faible, la différence de vitesse entre les deux gouttes est :

$$w_r \approx |\tau_{p1} - \tau_{p2}| \gamma_e. \quad (11.19)$$

Ensuite, Levich [91] exprime  $\gamma_e$ , module de  $\vec{\gamma}_e$ , en fonction des grandeurs caractéristiques de dissipation visqueuse, *i.e.*  $\epsilon$  et  $\nu$  :

$$\gamma_e \approx \frac{v_{\eta K}}{\tau_{\eta K}} \approx \left( \frac{\epsilon^3}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (11.20)$$

d'où,

$$J_{12t} = \pi (a_1 + a_2)^2 n_1 n_2 |\tau_{p1} - \tau_{p2}| \left( \frac{\epsilon^3}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (11.21)$$

Saffman et Turner [125] ont également étudié ce mécanisme de collision. Ils utilisent une approche statistique qui ressemble à celle employée en théorie cinétique des gaz. La vitesse relative des gouttes est décrite comme étant une variable aléatoire de densité de probabilité  $P(\vec{w})$ . Le nombre de collisions durant un intervalle de temps  $\delta t$ , où  $\delta t$  est beaucoup plus petit que le temps caractéristique des petits tourbillons, est de la forme  $\pi R^2 w n_1 n_2 \delta t$ . Si l'on suppose que les particules évoluent en ligne droite et avec une vitesse constante durant  $\delta t$ , on a :

$$J_{12t} = n_1 n_2 \pi R^2 \int w P(\vec{w}) d\vec{w}. \quad (11.22)$$

Le calcul de  $J_{12t}$  revient à chercher  $P(\vec{w})$ . Mais la forme de  $P(\vec{w})$  n'est pas connue. Saffman et Turner [125] cherchent la variance de  $\vec{w}$  et utilisent pour  $P(\vec{w})$  une distribution maxwellienne de même variance. Le résultat final est le suivant :

$$J_{12t} = 2\sqrt{2\pi} (a_1 + a_2)^2 n_1 n_2 \left[ \left( 1 - \frac{\rho}{\rho'} \right)^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})^2 \overline{\left( \frac{Du}{Dt} \right)^2} + \frac{1}{9} (a_1 + a_2)^2 \frac{\epsilon}{\nu} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.23)$$

Dans leur article, Saffman et Turner [125] prennent en compte également le champ de pesanteur en introduisant sous la racine carrée un terme supplémentaire sensiblement équivalent à celui de la sédimentation. Dans la dernière relation, les deux mécanismes de collision, par différence de réponse inertielle et par cisaillement, sont pris en compte. Cependant, si l'on prend  $\tau_{p1} = \tau_{p2}$ , on trouve à partir de cette dernière relation :

$$J_{12t} = 1,67 (a_1 + a_2)^3 n_1 n_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}} \neq 1,3 (a_1 + a_2)^3 n_1 n_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (11.24)$$

Cette différence provient du choix de  $P(\bar{w})$  qui est inconsistant avec la turbulence homogène et isotrope.

L'ensemble de ces résultats ne reste applicable que si les particules ont des tailles suffisamment faibles. Lorsque les gouttes sont plus grosses ou que la turbulence est plus vigoureuse ( $\epsilon$  grand), le mécanisme de collision est différent. Le mouvement des gouttes n'est plus corrélé. Le premier à avoir étudié la collision en turbulence vigoureuse est Abrahamson [2]. Il suppose que les particules sont distribuées de façon aléatoire dans l'espace. Elles sont prises statistiquement indépendantes. De telles hypothèses permettent d'utiliser les mêmes méthodes qu'en théorie cinétique des gaz. Abrahamson suppose que la fonction de distribution des vitesses est gaussienne.  $\overline{v_{p\alpha}'^2}$  est la variance des vitesses de la particule  $\alpha$ . Le calcul du taux de collision obtenue d'une manière classique est :

$$J_{12t} = \sqrt{8\pi} (a_1 + a_2)^2 n_1 n_2 \sqrt{\overline{v_{p1}'^2} + \overline{v_{p2}'^2}}. \quad (11.25)$$

Pour la détermination de  $\overline{v_{p1}'^2}$  et  $\overline{v_{p2}'^2}$ , variances des vitesses fluctuantes des gouttes, Abrahamson utilise l'analyse développée par Levins et Glastonbury [92]. Cette dernière se rapproche de celle faite Tchen (cf. §10.4).

Mais le résultat d'Abrahamson ne s'applique uniquement que pour des particules de taille suffisamment élevée. Il existe une gamme de rayons qui ne peuvent ni rentrer dans le cadre des résultats de Saffman et Turner [125] ni dans ceux d'Abrahamson. Néanmoins, Williams et Crane [150] ont proposé des résultats plus généraux. Comme il a été vu depuis le début de ce chapitre, la clé de la détermination du taux de collision réside dans le calcul de la vitesse relative entre deux particules. Cette dernière est liée à deux effets :

1. existence d'un gradient de vitesse du fluide entre les deux gouttes,
2. différence de réponse inertielle des deux particules de tailles inégales.

Pour le premier effet, la vitesse relative dépend de l'écart séparant les deux particules. Williams et Crane [150] ne prennent pas en compte ce mode de collision qui correspond au mécanisme de collision par cisaillement présenté plus haut. Pour la deuxième cause, la vitesse relative est indépendante de l'écart. Il est alors possible d'estimer cette vitesse relative pour une séparation égale à zéro et en utilisant alors l'équation d'une seule particule. Dans l'approche de Williams et Crane [150] les interactions hydrodynamiques sont totalement négligées. Ils poursuivent leur analyse en calculant la variance de la vitesse des particules. Ils reprennent dans un premier temps les travaux de Hinze [62] et retrouvent la même expression que celle donnée par Tchen. La variance de la vitesse relative prise suivant une direction quelconque indiquée  $i$  est :

$$\overline{w_i^2} = \overline{v_{p1_i}'^2} + \overline{v_{p2_i}'^2} - 2\overline{v_{p1_i}' v_{p2_i}'}. \quad (11.26)$$

Pour faire le calcul de  $\overline{v_{p1_i}' v_{p2_i}'}$ , Williams et Crane [150] utilisent les équations de mouvement de chaque particule. Pour plus de détails concernant les développements analytiques nous renvoyons le lecteur à l'article original [150]. Leurs résultats sont :

pour des petites particules :

$$\overline{w_i^2} = \frac{\overline{u_i'^2} (S_{t1} - S_{t2})^2}{(S_{t1} + S_{t2})(1 + S_{t1})(1 + S_{t2})}, \quad (11.27a)$$

pour des grosses particules :

$$\overline{w_i^2} = \left[ \frac{1}{1 + S_{t1}} + \frac{1}{1 + S_{t2}} - \frac{4}{S_{t1} + S_{t2} + S_{t1}S_{t2}\sqrt{\frac{1}{1+S_{t1}} + \frac{1}{1+S_{t2}}}} \right] \overline{u_i^2}, \quad (11.27b)$$

où  $S_{t\alpha}$  est le nombre de Stokes basé sur l'échelle intégrale lagrangienne :  $S_{t\alpha} = \tau_{p\alpha}/T_L$ . Williams et Crane proposent une solution générale qui permet de retrouver les deux cas extrêmes :

$$\overline{w_i^2} = \overline{u_i^2} \frac{(S_{t1} + S_{t2})^2 - 4S_{t1}S_{t2}\sqrt{\frac{1+S_{t1}+S_{t2}}{(1+S_{t1})(1+S_{t2})}}}{(S_{t1} + S_{t2})(1 + S_{t1})(1 + S_{t2})}. \quad (11.28)$$

Pour faire le calcul du taux de collision, Williams et Crane [150] utilisent les mêmes hypothèses que celles formulées par Saffman et Turner [125] et Abrahamson [2]. Ainsi,  $J_{12t}$  peut être écrit sous la forme :

$$J_{12t} = \sqrt{8\pi}n_1n_2\sqrt{\overline{w^2}}(a_1 + a_2)^2, \quad (11.29)$$

où  $\overline{w^2}$  est déterminée en utilisant la relation (11.28). Le modèle de Williams et Crane permet de retrouver celui d'Abrahamson lorsque les gouttes sont grosses. Pour des petites particules,  $\sqrt{\overline{w^2}}$  tend vers une expression similaire à celle proposée par Saffman et Turner [125] pour le mécanisme de collision cinétique. Par contre, le mécanisme de collision par cisaillement local est à prendre en compte ce qui n'est pas fait dans le travail de Williams et Crane. Un autre point important à améliorer dans ce dernier modèle est la détermination des variances des vitesses des particules qui est faite dans le cadre de la théorie de Tchen. Or, nous avons vu dans le chapitre 10 les limitations de ce modèle.

Les taux de collision présentés dans ce paragraphe n'ont pas une très grande universalité. Pour les gouttes très petites, l'approche faite par Saffman et Turner [125] nous semble la plus adéquate. Lorsque les inclusions commencent à avoir une dimension non-négligeable par rapport à l'échelle de Kolmogorov, le taux de collision doit approcher celui déterminé par Abrahamson [2]. Bien que le modèle de Williams et Crane [150] soit applicable à une large gamme de rayon, il ne permet pas de prendre en compte le mode de collision par cisaillement. L'ensemble de ces critiques nous a poussé à rechercher une nouvelle expression du taux de collision faisant l'objet du prochain paragraphe.

## 11.2 Détermination du taux de collision

Le taux de collision peut être déterminé par utilisation du formalisme employé en théorie cinétique des gaz. Ce type de voie a été exploré par Jenkins et Savage [74] entre autre dans une étude portant sur les milieux granulaires. Considérons une particule 2 de rayon  $a_2$  et de vitesse  $\vec{c}_{p2}$  située en  $\vec{x}_{p2}$  à l'instant  $t$ . Pour qu'une autre particule 1 de vitesse  $\vec{c}_{p1}$  de rayon  $a_1$  s'entrechoque avec la première durant un intervalle de temps  $dt$ , il est nécessaire que la particule 1 se trouve dans un voisinage  $d\vec{k}$  de chaque direction  $\vec{k}$  d'élément de volume égal à  $(a_1 + a_2)^2 \vec{w} \cdot \vec{k} d\vec{k} dt$  [74].  $\vec{w}$  est la vitesse relative entre les deux gouttes  $\vec{c}_{p1} - \vec{c}_{p2}$ .  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire défini par  $\vec{k} = (\vec{x}_{p2} - \vec{x}_{p1}) / \|\vec{x}_{p2} - \vec{x}_{p1}\|$  et  $d\vec{k}$  représente un élément d'angle solide voisin de la direction  $\vec{k}$ . Il est également nécessaire pour que la collision puisse se produire

que  $\vec{w} \cdot \vec{k}$  soit supérieur à zéro. Le nombre probable de collision par unité de temps pour un voisinage  $d\vec{k}$  de la direction  $\vec{k}$  et des voisinages  $d\vec{c}_{p1}$ ,  $d\vec{c}_{p2}$  des vitesses  $\vec{c}_{p1}$  et  $\vec{c}_{p2}$  est donné par  $f_p^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{p2}, t)(a_1 + a_2)^2 \vec{w} \cdot \vec{k} d\vec{k} d\vec{c}_{p1} d\vec{c}_{p2}$  où  $f_p^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{p2}, t)$  est la fonction de distribution de paire des particules. Ainsi, le taux de collision est déterminé par la relation suivante :

$$J_{12t} = \frac{1}{2} (a_1 + a_2)^2 \int \int \int \vec{w} \cdot \vec{k} H(\vec{w} \cdot \vec{k}) f_p^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p1} + (a_1 + a_2)\vec{k}, \vec{c}_{p2}, t) d\vec{k} d\vec{c}_{p1} d\vec{c}_{p2}. \quad (11.30)$$

La fonction d'Heaviside,  $H$ , est introduite afin de ne prendre en compte que les vitesses convergentes. Dans le cas isotrope, il est possible d'effectuer l'intégrale sur l'espace de vecteur  $\vec{k}$  qui dans le cas où on ne prend que les vitesses entrantes est égale à  $2\pi$  (cf. [74]). Le taux de collision devient alors

$$J_{12t} = \pi (a_1 + a_2)^2 \int \int \|\vec{w}\| f_p^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p1} + (a_1 + a_2)\vec{k}, \vec{c}_{p2}, t) d\vec{c}_{p1} d\vec{c}_{p2}. \quad (11.31)$$

Cette forme est en fait très proche de celles utilisées par Saffman et Turner [125] et par Abrahamson [2] dans des formes simplifiées. La difficulté résiduelle dans cette dernière relation est la connaissance de la fonction de distribution de paire.

L'hypothèse couramment utilisée consiste à supposer les particules statistiquement indépendantes. La fonction de distribution de paire est alors tout simplement égale au produit des fonctions de distribution de chaque particule. Mais comme le souligne Laviéville [88] à juste titre, l'hypothèse d'indépendance statistique est mise en défaut lorsque la distance séparant les gouttes est faible. En effet, ces dernières peuvent se trouver dans des structures tourbillonnaires identiques. Il s'ensuit que les vitesses de ces inclusions sont corrélées. De plus, pour de fines particules où l'inertie devient négligeable, la fonction de distribution de paire doit tendre vers celle des vitesses du fluide. Or, cette dernière fait apparaître les fonctions de corrélation de vitesses. Donc la détermination de la fonction  $f_p^{(2)}$  requiert la plus grande attention. C'est sur quoi nous allons insister maintenant. Une généralisation des résultats de Laviéville [88] va être proposée. Elle intègre la possibilité d'avoir des particules de tailles différentes. Mais dans un premier temps, examinons les formes des fonctions de distribution des vitesses du fluide et celle des particules en un point.

### 11.2.1 Fonctions de distribution des vitesses du fluide

Dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope, il est couramment admis que les vitesses du fluide ont des statistiques gaussiennes. Ce point est discuté dans le livre de Batchelor [8]. Ce dernier s'appuie sur l'utilisation du théorème de la limite centrée. A cet égard, la fonction de distribution de vitesse du fluide a la forme suivante :

$$f_f^{(1)}(\vec{c}_f) = \frac{1}{(2\pi\overline{u^2})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{c_f^2}{2\overline{u^2}}}. \quad (11.32)$$

Laviéville [88] par utilisation de simulations à grandes échelles trouve que les distributions gaussiennes s'appliquent fort bien. Cependant, la turbulence ne peut pas être considérée comme

un processus totalement gaussien. Le transfert d'énergie entre les différentes échelles ne peut se faire qu'au travers de corrélation d'ordre trois. Or, dans le cas d'une statistique gaussienne, l'ensemble des moments impairs est identiquement nul. En fait, Frisch [46] souligne que la turbulence est fortement non-gaussienne à petite échelle. Ainsi, le fait d'utiliser une distribution gaussienne se justifie comme étant un état statistique de la turbulence mais à une échelle suffisamment grande.

Laviéville [88] va d'ailleurs plus loin en proposant une expression de la fonction de distribution de paire de vitesse de fluide prise en deux points de l'espace. Cette fonction est notée  $f_f^{(2)}(\vec{c}_{f1}, \vec{c}_{f2})$ . Dans le cas d'une turbulence homogène cette dernière ne dépend que de  $\|\vec{r}\|$ , distance entre les points où sont mesurées les vitesses, et de  $\vec{c}_{f1}$  et  $\vec{c}_{f2}$ .  $f_f^{(2)}(\vec{c}_{f1}, \vec{c}_{f2})$  doit vérifier les relations suivantes :

$$\int f_f^{(2)}(\vec{c}_{f1}, \vec{c}_{f2}) d\vec{c}_{f1} = f_f^{(1)}(\vec{c}_{f2}), \quad (11.33a)$$

$$\int f_f^{(2)}(\vec{c}_{f1}, \vec{c}_{f2}) d\vec{c}_{f2} = f_f^{(1)}(\vec{c}_{f1}), \quad (11.33b)$$

$$\int \int c_{f1i} c_{f2i} f_f^{(2)}(\vec{c}_{f1}, \vec{c}_{f2}) d\vec{c}_{f1} d\vec{c}_{f2} = \overline{u^2} R_{Eij}(\vec{r}). \quad (11.33c)$$

$\mathbf{R}_E(\vec{r})$  est le tenseur d'autocorrélation spatiale dont la forme est :

$$R_{Eij}(\vec{r}) = f(r) \frac{r_i r_j}{r^2} + g(r) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (11.34)$$

où les fonctions  $f(r)$  et  $g(r)$  ont déjà été rencontrées dans le chapitre 10.

La forme la plus simple permettant de vérifier les relations (11.32)-(11.34) est une fonction binormale donnée ci-dessous :

$$f_f^{(2)}(\vec{c}_{f1}, \vec{c}_{f2}) = \frac{1}{(2\pi \overline{u^2})^3 \sqrt{1 - f^2(r)} [1 - g^2(r)]} e^{-\left( \frac{{}^t \vec{c}_{f1} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{c}_{f1}}{2u^2} + \frac{{}^t \vec{c}_{f2} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{c}_{f2}}{2u^2} - \frac{{}^t \vec{c}_{f1} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{c}_{f2}}{u^2} \right)}, \quad (11.35)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont à l'image de  $\mathbf{R}_E(\vec{r})$  donnés par :

$$B_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{1 - f^2(r)} \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{1}{1 - g^2(r)} \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (11.36a)$$

$$C_{ij}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{1 - f^2(r)} \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{g(r)}{1 - g^2(r)} \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right). \quad (11.36b)$$

## 11.2.2 Fonctions de distribution des vitesses des particules

Commençons par étudier la forme de la fonction de distribution de vitesses  $f_p^{(1)}(\vec{c}_p, t)$ . L'équation régie par cette dernière est de type Fokker-Planck dans le cas de la turbulence homogène et isotrope. Cette équation a été obtenue par Derevich et Zaichik [39]. Ces derniers utilisent l'hypothèse de variable gaussienne pour le champ de vitesse de la phase continue. Ils font également appel aux notions de dérivée fonctionnelle et d'équation de Furutsu-Novikov<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Un annexe sur le formalisme de Furutsu-Novikov est donné dans le livre de Mc Comb [27]

Après avoir intégré sur l'espace physique  $f_p^{(1)}(\vec{c}_p, t)$  est alors régie par

$$\frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial t} - \frac{3f_p^{(1)}}{\tau_p} = \frac{c_{pi}}{\tau_p} \frac{\partial f_p^{(1)}}{\partial c_{pi}} + \frac{\overline{u^2}}{\tau_p} f_u(t) \frac{\partial^2 f_p^{(1)}}{\partial c_{pi} \partial c_{pi}}. \quad (11.37)$$

$f_u(t)$  est donnée par :

$$f_u(t) = \int_0^t \hat{R}(s) e^{-\frac{s}{\tau_p}} ds, \quad (11.38)$$

où  $\hat{R}(s)$  est le coefficient d'autocorrélation temporelle de la turbulence vue par les particules. Cette dernière quantité a été introduite dans la paragraphe 10.4 du précédent chapitre. Il est facile de trouver une solution de l'équation régie par  $f_p^{(1)}$  en utilisant les développements proposée par Chandrasekhar [22]. Lorsque le temps  $t$  est plus grand que le temps de relaxation  $\tau_p$  la forme de  $f_p^{(1)}$  est la suivante :

$$f_p^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p, t) = \frac{n(\vec{x}, t)}{\left(2\pi\overline{v_p^2}\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\vec{c}_p^2}{2\overline{v_p^2}}}. \quad (11.39)$$

$n(\vec{x}, t)$  est la concentration volumique en particules. La variance des vitesses des particules est obtenue en utilisant les résultats énoncés §10.4, relation (10.86). La forme gaussienne de  $f_p^{(1)}$  a été trouvée par plusieurs auteurs. Citons entre autre les travaux très intéressants de Sainsaulieu [126]. Il prouve l'existence d'une entropie liée à la phase dispersée. Le cas où la production d'entropie est nulle lui permet de démontrer que la fonction de distribution de vitesse est gaussienne. Par le fait, elle est liée à un état d'équilibre. Sous cette forme, nous retrouvons la fonction de distribution utilisée par Abrahamson [2].

Simonin [130] dans le cadre de la modélisation d'écoulement dispersé introduit une fonction de distribution mixte portant sur les vitesses des particules et du fluide vue par les inclusions dans leur mouvement. Cette fonction est notée  $f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t)$ . Elle est reliée à  $f_p^{(1)}$  d'une façon conditionnelle [130], [88] :

$$f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t) = f_p^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p, t) f_f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_f, t | \vec{c}_p). \quad (11.40)$$

$f_f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_f, t | \vec{c}_p)$  est la fonction de distribution de vitesse vue par les particules conditionnée par la vitesse  $\vec{c}_p$ .

Simonin [130] et Laviéville [88] dérivent une équation pour  $f_{fp}^{(2)}$  nécessaire à la procédure de fermeture des équations de bilans portant sur la phase dispersée. Dans le cas de la turbulence homogène et isotrope, ces deux derniers auteurs donnent une forme présumée maxwellienne à  $f_{fp}^{(2)}$ . Ils se reposent sur le fait que  $f_{fp}^{(2)}$  doit vérifier les égalités suivantes :

$$\int \int f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t) d\vec{c}_f d\vec{c}_p = n(\vec{x}, t), \quad (11.41a)$$

$$\int \int c_{pi} c_{pj} f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t) d\vec{c}_f d\vec{c}_p = n(\vec{x}, t) \overline{v_p^2} \delta_{ij}, \quad (11.41b)$$

$$\int \int c_{fi} c_{pj} f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t) d\vec{c}_f d\vec{c}_p = n(\vec{x}, t) \overline{uv_p} \delta_{ij}, \quad (11.41c)$$

$$\int \int c_{fi} c_{fj} f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t) d\vec{c}_f d\vec{c}_p = n(\vec{x}, t) \overline{u^2} \delta_{ij}. \quad (11.41d)$$

Les quantités  $\overline{v_p^2}$  et  $\widehat{uv}_p$  sont données par les relations (10.86) et (10.87a). Ainsi,  $f_{fp}^{(2)}$  est égale à :

$$f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t) = \frac{n(\vec{x}, t)}{(2\pi)^3 \left(\overline{v_p^2} u^2\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\left(B_f \frac{c_f^2}{2u^2} + B_p \frac{c_p^2}{2v_p^2} - B_{fp} \frac{\vec{c}_f \cdot \vec{c}_p}{\sqrt{u^2 v_p^2}}\right)}. \quad (11.42)$$

Les coefficients  $B_f$ ,  $B_p$  et  $B_{fp}$  sont donnés par

$$B_f = \frac{1}{1 - \zeta_{fp}^2}, \quad (11.43a)$$

$$B_p = \frac{1}{1 - \zeta_{fp}^2}, \quad (11.43b)$$

$$B_{fp} = \frac{\zeta_{fp}^2}{1 - \zeta_{fp}^2}, \quad (11.43c)$$

où  $\zeta_{fp}^2$  vaut

$$\zeta_{fp}^2 = \frac{(\widehat{uv}_p)^2}{u^2 v_p^2} = \frac{1}{1 + \frac{T_p}{T}}. \quad (11.44)$$

La dernière égalité de (11.44) a été obtenue en utilisant les équations (10.86) et (10.87a) données dans le paragraphe 10.4. L'intégration sur l'espace des vitesses du fluide de (11.42) permet de retrouver la fonction de distribution des vitesses des particules, équation (11.39). Il est possible de définir une fonction de distribution liée au fluide conditionnée par la présence d'une particule en un point  $\vec{x}$  sous la forme :

$$f_{fp}^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_f, t) = \frac{1}{n(\vec{x}, t)} \int f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_f, \vec{c}_p, t) d\vec{c}_p. \quad (11.45)$$

A l'aide de la forme particulière de  $f_{fp}^{(2)}$ , (11.42), la fonction  $f_{fp}^{(1)}$  est identique à celle de  $f_f^{(1)}$  donnée par la relation (11.32). Cependant ce résultat n'est pas général. Il s'applique dans le cas de la turbulence homogène et isotrope.

Pour obtenir une forme de la fonction de distribution de paire des vitesses des particules, il est possible de procéder de la même façon. Dans un premier temps, nous devons introduire une fonction de distribution portant sur les vitesses des particules et du fluide en deux points notée  $f_{fp}^{(4)}$ . Cette dernière nous permet de déterminer  $f_p^{(2)}$  par intégration sur les espaces des vitesses du fluide :

$$f_p^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{p2}, t) = \int \int f_{fp}^{(4)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{f1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{f2}, \vec{c}_{p2}) d\vec{c}_{f1} d\vec{c}_{f2}. \quad (11.46)$$

$f_{fp}^{(4)}$  est déterminée en utilisant la notion de probabilité conditionnelle sous la forme :

$$f_{fp}^{(4)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{f1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{f2}, \vec{c}_{p2}) = f_f^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{f1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{f2}) f_p^{(1)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{p1} | \vec{c}_{f1}) f_p^{(1)}(\vec{x}_{p2}, \vec{c}_{p2} | \vec{c}_{f2}). \quad (11.47)$$

Par suite, les fonctions conditionnées par la vitesse du fluide sont déterminées à l'aide de :

$$f_p^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p | \vec{c}_f) = \frac{f_{fp}^{(2)}(\vec{x}, \vec{c}_p, \vec{c}_f)}{f_f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_f)}. \quad (11.48)$$

Ainsi,  $f_{fp}^{(4)}$  est donnée par :

$$f_{fp}^{(4)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{f1}, \vec{c}_{p1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{f2}, \vec{c}_{p2}) = f_f^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{f1}, \vec{x}_{p2}, \vec{c}_{f2}) \frac{f_{fp}^{(2)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{p1}, \vec{c}_{f1})}{f_f^{(1)}(\vec{x}_{p1}, \vec{c}_{f1})} \frac{f_{fp}^{(2)}(\vec{x}_{p2}, \vec{c}_{p2}, \vec{c}_{f2})}{f_f^{(1)}(\vec{x}_{p2}, \vec{c}_{f2})}. \quad (11.49)$$

Dans le cas de la turbulence homogène et isotrope,  $f_{fp}^{(4)}$  peut être déterminée par l'utilisation des relations (11.35), (11.42) et de (11.32). Ensuite, l'intégration de  $f_{fp}^{(4)}$  permet d'obtenir  $f_p^{(2)}$ . Dans la mesure où l'on considère des particules de tailles différentes, il convient de faire attention à bien prendre des temps de relaxation dynamique propre à chaque particule. Il en est de même concernant les grandeurs liées à la turbulence vue par les particules. La relation que nous donnons ici permet de généraliser celle proposée par Laviéville [88] déterminée dans le cas monodisperse. Les détails des intégrations sur les espaces des vitesses du fluides ne sont pas précisés. Elles ne présentent aucune difficulté majeure. Ainsi,  $f_p^{(2)}$  est égale à :

$$f_p^{(2)} = A(a_1, a_2, r) e^{-\left[ \frac{t\vec{c}_{p1} \cdot \mathbf{B}_{p1} \cdot \vec{c}_{p1}}{2v_{p1}^2} + \frac{t\vec{c}_{p2} \cdot \mathbf{B}_{p2} \cdot \vec{c}_{p2}}{2v_{p2}^2} - \frac{t\vec{c}_{p1} \cdot \mathbf{B}_{p1p2} \cdot \vec{c}_{p2}}{\sqrt{v_{p1}^2 v_{p2}^2}} \right]}. \quad (11.50)$$

Avec :

$$A(a_1, a_2, r) = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{\left(2\pi v_{p1}^2 2\pi v_{p2}^2\right)^3 [1 - \zeta_{fp1}^2 \zeta_{fp2}^2 f^2(r)] [1 - \zeta_{fp1}^2 \zeta_{fp2}^2 g^2(r)]}}, \quad (11.51a)$$

$$B_{p\alpha ij} = \frac{1}{1 - \zeta_{fp1}^2 \zeta_{fp2}^2 f^2(r)} \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{1}{1 - \zeta_{fp1}^2 \zeta_{fp2}^2 g^2(r)} \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (11.51b)$$

$$B_{p1p2ij} = \zeta_{fp1} \zeta_{fp2} \left[ \frac{f(r)}{1 - \zeta_{fp1}^2 \zeta_{fp2}^2 f^2(r)} \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{g(r)}{1 - \zeta_{fp1}^2 \zeta_{fp2}^2 g^2(r)} \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \right]. \quad (11.51c)$$

Cette forme permet de voir l'existence de corrélation entre les vitesses des particules via les fonctions  $f(r)$  et  $g(r)$ . Lorsque la distance entre les particules est importante, l'indépendance statistique est retrouvée car  $f(r)$  et  $g(r)$  tendent vers zéro. Dans le cas où l'inertie des particules est très faibles  $f_p^{(2)}$  tend vers la fonction de distribution de paire des vitesses des fluides.

L'obtention de  $f_p^{(2)}$  a été possible en utilisant les notions de probabilité conditionnée. Mais les formes utilisées ne sont pas uniques. Une autre manière serait d'utiliser l'équation régie par  $f_p^{(2)}$ . Malheureusement, bien que cette équation soit relativement facile à trouver elle n'en reste pas moins difficile à résoudre. Donc, l'équation (11.50) va nous permettent de déterminer le taux de collision.

### 11.2.3 Taux de collision en absence de force de gravité

L'ensemble des précédentes considérations permet de calculer le taux de collision donné par l'équation (11.31). Pour faire le calcul des intégrales, nous effectuons un changement de variables en introduisant une vitesse moyenne et la vitesse relative. Ensuite, l'intégration sur la vitesse moyenne est immédiate. Pour faire le calcul sur la vitesse relative un passage en

coordonnées sphériques facilite l'intégration. Le taux de collision est alors égal à

$$J_{12t} = \sqrt{2\pi} (a_1 + a_2)^2 \sqrt{v_{p1}^2 + v_{p2}^2 - 2\sqrt{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \zeta_{fp1} \zeta_{fp2} f(a_1 + a_2)} \\ \left[ 1 + \frac{v_{p1}^2 + v_{p2}^2 - 2\sqrt{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \zeta_{fp1} \zeta_{fp2} g(a_1 + a_2)}{v_{p1}^2 + v_{p2}^2 - 2\sqrt{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \zeta_{fp1} \zeta_{fp2} f(a_1 + a_2)} \frac{\arctan C}{C} \right] n_1 n_2, \quad (11.52)$$

où  $C$  est donnée par

$$C = \sqrt{\frac{2\zeta_{fp1} \zeta_{fp2} \sqrt{v_{p1}^2 v_{p2}^2} [f(a_1 + a_2) - g(a_1 + a_2)]}{v_{p1}^2 + v_{p2}^2 - 2\zeta_{fp1} \zeta_{fp2} \sqrt{v_{p1}^2 v_{p2}^2} f(a_1 + a_2)}}. \quad (11.53)$$

Dans le cas où  $f(r)$  et  $g(r)$  sont supposées pratiquement identiques, le terme entre crochet de (11.52) tend vers la valeur 2. Dans ce cas de figure, nous retrouvons le résultat donné par Laviéville [88] généralisé ici à des particules de tailles différentes. Mais cette simplification n'est pas précisée dans [88]. Il est intéressant de voir dans quelle mesure cette hypothèse peut être faite. Tout d'abord précisons les relations donnant  $f(r)$  et  $g(r)$ . Il a été vu dans le §10.4 que la forme exponentielle est couramment utilisée. Par contre lorsque  $r$  est petit,  $f(r)$  et  $g(r)$  doivent être des fonctions paires. Elles sont généralement définies à l'aide de l'échelle de Taylor sous la forme :

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\lambda_T^2}, \quad (11.54a)$$

$$g(r) = 1 - \frac{r^2}{\lambda_T^2}. \quad (11.54b)$$

$\lambda_T$  a été indiquée dans le §10.3, relation (10.66). Dans la mesure où les particules ont des dimensions plus faibles que l'échelle de Taylor, l'approximation consistant à considérer  $f(r) \approx g(r)$  est assez bien vérifiée. Les problèmes peuvent survenir lorsque la turbulence devient très forte et que les particules sont grosses. Cependant dans le cadre d'applications à la turbulence atmosphérique, les taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ne sont pas trop élevés. Nous avons cherché à calculer le coefficient entre crochet de (11.52). Même dans le cas extrême d'application au nuage de type cumulus où le taux de dissipation de l'énergie turbulente  $\epsilon$  est de l'ordre  $0,1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ , ce coefficient est pratiquement égal à 2 et ce pour une gamme de rayon allant de 1 à  $100 \mu\text{m}$ . Les  $\zeta_{p\alpha}$  sont calculés à l'aide de la deuxième égalité de (11.44).

L'expression de  $J_{12t}$  peut être simplifiée sous la forme :

$$J_{12t} = \sqrt{8\pi} (a_1 + a_2)^2 \sqrt{v_{p1}^2 + v_{p2}^2 - 2\sqrt{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \zeta_{fp1} \zeta_{fp2} f(a_1 + a_2)} n_1 n_2. \quad (11.55)$$

Il est possible de contrôler le bon comportement de cette dernière relation. Dans le cas où les particules sont très petites, la relation de  $f(r)$ , (11.54ba) peut être utilisée. Les variances des vitesses des particules tendent vers celle du fluide. De plus, les fonctions  $\zeta_{fp1}$  et  $\zeta_{fp2}$  approchent la valeur unité. En utilisant l'expression de l'échelle de Taylor, le taux de collision devient identique à celui déterminée par Saffman et Turner [125]. Dans le cas opposé de grosses particules

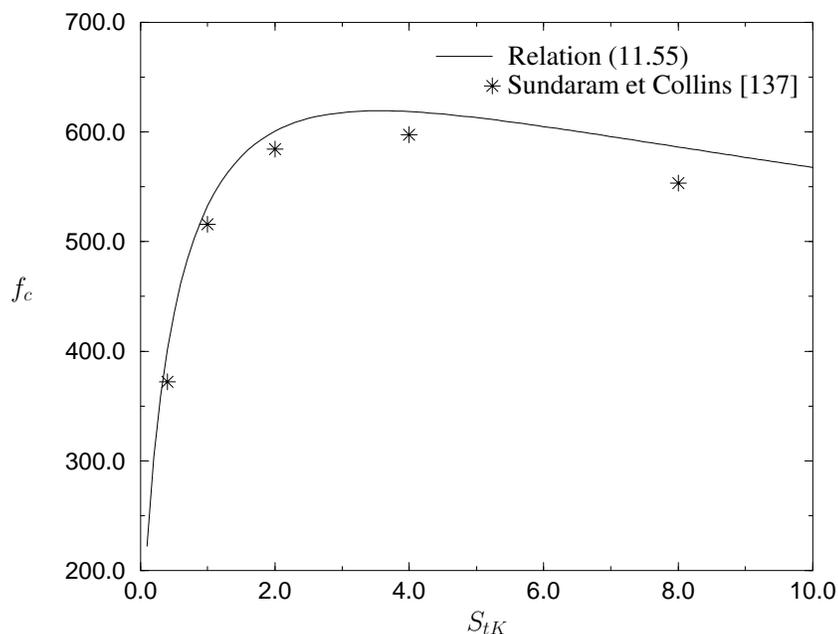


FIG. 11.2 – Fréquence de collision en fonction du nombre de Stokes basé sur l'échelle de Kolmogorov.

ou de forte turbulence, l'expression (11.55) tend vers celle déterminée par Abrahamson [2], relation (11.29).

Récemment, Sundaram et Collins [137] ont déterminé les fréquences de collision pour des particules de même taille par une simulation directe de la turbulence. Les caractéristiques de leur turbulence sont :

$$\sqrt{\overline{u^2}} = 0,8512 \text{ m/s}, \quad (11.56a)$$

$$\epsilon = 0,2145 \text{ m}^2/\text{s}^3. \quad (11.56b)$$

Leur viscosité cinématique est de  $0,0126 \text{ m}^2/\text{s}$ . Leur fraction volumique en particule est de  $4,19 \times 10^{-3}$ . A l'aide de ces données, il est possible de comparer les fréquences obtenues par utilisation de (11.55) et celle déterminée numériquement. La comparaison est présentée sur la figure 11.2. Cette dernière donne la fréquence de collision en fonction du nombre de Stokes basé sur l'échelle de Kolmogorov. Notre modèle surestime les fréquences de collision. Cependant, les résultats corroborent ceux de Sundaram et Collins [137] ce qui est fort encourageant.

#### 11.2.4 Taux de collision en présence de force de gravité

Comme il sera présenté dans les applications à la formation des nuages, les taux de collision sont généralement pris comme étant ceux obtenus pour des particules qui sédimentent dans un fluide au repos. Mais, la turbulence peut avoir son importance. Abrahamson [2] a déterminé le

taux de collision pour des particules soumises au champ de pesanteur toujours dans le cadre de l'hypothèse d'indépendance statistique entre les gouttes. Dans cette section, une généralisation de ce travail est proposée. Cependant, il convient de faire attention. Comme nous l'avons montré à la fin du chapitre 10, l'introduction des forces de gravité entraîne une différence entre les variances des vitesses des particules selon qu'elles sont déterminées suivant une direction colinéaire au champ de pesanteur ou pas. Dans le cas où le taux de dissipation d'énergie turbulente est faible, le rapport  $\overline{v_{px}^2}/\overline{v_{pz}^2}$  où le champ de pesanteur est suivant la direction  $z$  reste faible. Avec  $\epsilon = 10^{-3} m^2/s^3$  (taux de dissipation caractéristique des nuages de type stratocumulus) et  $\sqrt{\overline{u^2}} = 0,5 m/s$ , on trouve pour des gouttes de  $200 \mu m$  de diamètre un rapport  $\overline{v_{px}^2}/\overline{v_{pz}^2}$  égale à 0,9994. Avec,  $\sqrt{\overline{u^2}} = 1 m/s$ , il est de 0,99993. Lorsque  $\epsilon$  est égal à  $0,1 m^2/s^3$ , le rapport  $\overline{v_{px}^2}/\overline{v_{pz}^2}$  a une valeur de 0,9932 avec  $\sqrt{\overline{u^2}} = 0,5 m/s$ . Par contre, avec  $\sqrt{\overline{u^2}} = 1 m/s$ , on obtient 0,9491.

Nous pouvons constater que plus le taux de dissipation est élevé plus la différence entre les variances est grande. Le fait de prendre des variances différentes rend le calcul du taux de collision pratiquement impossible. Donc, nous supposons que les variances des vitesses des particules restent identiques par la suite. Nos résultats alors ne peuvent s'appliquer que dans le cas où les taux de dissipation de l'énergie turbulente restent faibles. Les résultats établis par Abrahamson [2] peuvent être remis en cause. En effet, ce dernier s'intéresse à des applications où la turbulence est très forte. Il indique des valeurs de  $\epsilon$  de l'ordre de  $200 - 5000 m^2/s^3$  caractéristiques de ce que l'on trouve dans des écoulements en conduite. Or, il semble ignorer que les variances des particules peuvent être différentes en présence d'un champ de pesanteur puisque ce point n'est pas discuté dans son article. Néanmoins, les effets de la gravité sur la variation des variances n'étaient pas très connus au moment de la publication d'Abrahamson.

Dans ce cadre, la forme de la fonction de distribution de paire des vitesses des particules doit être modifiée par un changement de repère.  $f_p^{(2)}$  a une forme similaire à celle que l'on a proposée précédemment mais en se plaçant dans un repère se déplaçant avec les vitesses de sédimentation des particules. Ainsi,  $f_p^{(2)}$  est donnée par la relation (11.50) mais en changeant les composantes des vitesses de la façon suivante :

$$\tilde{c}_{p1i} = c_{p1i} - \delta_{i3}v_{p1s}, \quad (11.57a)$$

$$\tilde{c}_{p2i} = c_{p2i} - \delta_{i3}v_{p2s}. \quad (11.57b)$$

Le calcul des intégrales est effectué de la même façon que dans le cas où les forces de pesanteur ne sont pas prises en compte. Il demande un peu plus de travail. Il fait apparaître des intégrales du type  $\int_0^\infty x^2 e^{-(ax^2+2bx)} dx$ . Ces dernières peuvent être déterminées en utilisant les résultats présents dans le livre de Gradshteyn et Ryzhik [51]. Ces intégrales donnent des termes où la fonction erreur est présente. Le taux de collision est égal alors à

$$J_{12i} = (a_1 + a_2)^2 \left\{ \sqrt{2\pi} \sqrt{w_{p1p2}^2} e^{-\frac{(v_{p2s} - v_{p1s})^2}{2w_{p1p2}^2}} + \frac{w_{p1p2}^2 + (v_{p2s} - v_{p1s})^2}{v_{p2s} - v_{p1s}} \operatorname{erf} \left( \frac{v_{p2s} - v_{p1s}}{\sqrt{2w_{p1p2}^2}} \right) \right\} n_1 n_2, \quad (11.58)$$

où  $w_{p_1 p_2}^2$  est égale à

$$w_{p_1 p_2}^2 = \overline{v_{p_1}^2} + \overline{v_{p_2}^2} - 2\sqrt{\overline{v_{p_1}^2} \overline{v_{p_2}^2}} \zeta_{fp_1} \zeta_{fp_2} f(a_1 + a_2). \quad (11.59)$$

Dans le cas où la turbulence devient négligeable cette dernière relation tend vers le taux de collision pour des particules sédimentant donnée dans §6.1. D'un autre côté, lorsque les vitesses de sédimentation deviennent très faibles, la taux de collision déterminé par relation ci-dessus tend vers celle donnée par l'équation (11.55). Lorsque les corrélations entre les vitesses sont négligées, la relation (11.58) a une forme similaire à celle déterminée par Abrahamson [2]. Bien qu'il semble qu'une erreur se soit glissée dans l'expression de ce dernier.

Ces taux de collision seront utilisés dans le cadre d'application à la formation de la bruine. Ces déterminations ont été rendues possible dans la mesure où une forme de la fonction de distribution de paire des vitesses des gouttes est donnée. Les expressions (11.55) et (11.58) peuvent être utilisées pour une large gamme de taille de particules. Dans l'ensemble de cette étude, les interactions hydrodynamiques entre les gouttes sont totalement négligées. L'impact de ces dernières dans les taux de collision en écoulements turbulents est assez difficile à mesurer. Leur introduction dans un modèle théorique semblent hors atteinte actuellement.

### 11.3 Détermination des taux de collision par simulation directe

Ce paragraphe a pour objet la présentation des méthodes et algorithmes utilisés dans la simulation des collisions de particules. Bien que le domaine d'application concerne les gouttes, seule la collision est prise en compte. Le choc entre deux particules ne s'accompagne pas de coalescence. De plus, nous nous limitons au cas monodisperse. Il ne s'agit ici qu'un travail préliminaire.

Suite aux dernières remarques formulées dans le précédent paragraphe, il est fondamental de savoir si les interactions hydrodynamiques peuvent avoir de l'influence sur les taux de collision en écoulements turbulents. Ces effets peuvent être recherchés en essayant de déterminer les taux de collision numériquement. L'utilisation des forces d'interaction hydrodynamique calculées dans le chapitre 3 peut se faire. L'introduction de cet effet n'a jamais été fait à l'heure actuelle. Les taux de collision sont classiquement déterminé numériquement en considérant les particules comme étant totalement indépendantes les unes des autres. Les collisions sont détectées lorsque la distance entre les particules devient inférieure à la somme des rayons ou va le devenir durant un intervalle de temps déterminé. Ainsi, même dans les plus brefs instants avant la collision, les particules se comportent comme des inclusions seules dans un milieu fluide. Ce type de simulation a été faite par Sundaram et Collins [137] et encore plus récemment par Wang *et al.* [147].

Néanmoins, l'introduction des interactions hydrodynamiques n'est pas chose facile. En effet, dans quelle mesure des forces déterminées pour des écoulements linéaires peuvent-elles être utilisées dans ce nouveau contexte ? Ce problème reste ouvert actuellement. Cependant, les effets des interactions hydrodynamiques ont déjà été testés pour des particules solides par Chauvin [25]. Dans ce travail, il est fait usage des expressions données par Jeffrey et Onishi [73]. Chauvin [25] montre que les interactions hydrodynamiques ont une influence dans le cas

où les taux de dissipation de la turbulence est faible. Les effets se manifestent sur les variances des vitesses des particules.

L'écoulement de la phase continue est turbulent homogène et isotrope. Ce dernier est obtenu par un code simulation directe de la turbulence fourni par le département d'aérodynamique de l'ONERA sous le nom de «Pégase». La résolution des équations de Navier-Stokes est réalisée par un schéma hermitien d'ordre 6 en espace [89]. L'avancement en temps est effectué par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3. Cette partie du code n'est pas présentée ici.

Concernant les particules, il est nécessaire de repérer celles qui peuvent subir des chocs ou être en interaction hydrodynamique. Le repérage est le point essentiel de ce type de simulation. Après cette étape qui a lieu à chaque pas de temps, il est nécessaire de résoudre les équations du mouvement des particules. Parmi cet ensemble, certaines sont supposées interagir avec aucune autre. Elles sont alors traitées comme indépendantes. La résolution de leurs équations de mouvement est obtenue par une méthode Runge-Kutta modifiée afin de tenir compte des temps de relaxation dynamiques petits. Concernant les particules en interaction, la détermination des positions et des vitesses est faite par couples. La méthode de calcul utilisée est celle employée pour le calcul des taux de collision en écoulements linéaires, §6, dont les principes sont donnés dans l'annexe E.

Le système diphasique est défini par la fraction volumique globale,  $\alpha$ , par la taille des particules,  $a$  et par le nombre de particules,  $N_p$ . Si la dimension du domaine de simulation est notée  $L_b$ , le rapport  $a/L_b$  est donné par la relation suivante :

$$\frac{a}{L_b} = \sqrt[3]{\frac{3\alpha}{4\pi N_p}}. \quad (11.60)$$

Dans la suite de cette présentation, les équations régies par les particules sont rappelées. On insiste dans cette section à déterminer les critères à partir desquelles les particules peuvent être considérées comme interagissantes entre elles. Ensuite, la méthode de repérage des particules proches est présentée. Le §11.3.3 est consacré à la présentation des méthodes d'intégration des équations régies par les particules libres et en interaction.

### 11.3.1 Equations régies par les particules

Dans un premier temps, examinons le cas d'une particule seule. Dans ce calcul, seule la force de traînée est prise en compte. L'équation de la dynamique appliquée à une particule est rappelée ci-dessous :

$$\frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = -\frac{\vec{v}_p(t) - \vec{u}[\vec{x}_p(t), t]}{\tau_p}, \quad (11.61)$$

où  $\tau_p$  est le temps de relaxation dynamique de la particule donné par :

$$\tau_p = \frac{2\rho' a^2}{9\rho\nu f_d(R_{ep})}. \quad (11.62)$$

$R_{ep}$  est le nombre de Reynolds

$$R_{ep} = \frac{2a\|\vec{u}[\vec{x}_p(t), t] - \vec{v}_p(t)\|}{\nu}, \quad (11.63)$$

et  $f_d(R_{ep})$  est la fonction dépendant de  $R_{ep}$  intervenant dans le coefficient de traînée sous la forme :

$$C_d = \frac{24}{R_{ep}} f_d(R_{ep}). \quad (11.64)$$

De nombreuses expressions existent pour  $f_d(R_{ep})$ . Boothroyd [18] donne plusieurs expressions du coefficient de traînée obtenues par diverses sources. Deutsch [40] et Laviéville [88] utilisent dans leur simulations pour  $f_d(R_{ep})$  la relation :

$$f_d(R_{ep}) = 1 + 0,15R_{ep}^{0,687}. \quad (11.65)$$

Pinsky et Khain [109] utilisent

$$f_d(R_{ep}) = 1 + 0,17R_{ep}^{0,632} + 10^{-6}R_{ep}^{2,25}. \quad (11.66)$$

Dans un premier temps, nous avons fait usage de la première de ces deux dernières relations.

Dans le cas de deux particules en interaction, les difficultés théoriques sont plus grandes. Il n'existe pas d'expressions de forces d'interactions hydrodynamiques dans le cas d'écoulement turbulent. Les seules relations valides sont déterminées pour des écoulements linéaires et ont fait l'objet du premier chapitre. L'influence de forces d'interaction hydrodynamique en écoulement turbulent a rarement été étudiée. Récemment, Koziol et Leighton [84] ont tenu compte des interactions afin de voir l'influence de la turbulence sur la détermination du taux de collision de particules solides sédimentant. L'utilisation de telles expressions est conditionnée par certaines hypothèses. Ainsi, il faut que localement l'écoulement soit pratiquement laminaire. Il est donc nécessaire que la distance entre les gouttes soit faible par rapport à la micro-échelle de Taylor, relation (10.66). Les interactions hydrodynamiques doivent donc apparaître pour des distances plus faibles que  $\lambda_T$ . Les simulations de trajectoires relatives entre deux gouttes plongées dans un écoulement de cisaillement simple montrent que la zone d'influence est de l'ordre de 2 à 4 fois le diamètre des gouttes [106]. Ces simulations ont été effectuées en utilisant les équations (6.100d) définies dans le §6.5. Initialement, les gouttes sont prises loin l'une de l'autre et leurs vitesses sont identiques à celles du fluide. Cette zone d'influence est déterminée comme étant la distance à partir de laquelle les interactions commencent à être importantes. Cette dernière dépend de l'inertie des particules. Sur la figure 11.3, les trajectoires relatives de deux gouttes de même taille sont données pour diverses valeurs du nombre de Stokes défini de la même façon que dans le §6.5, relation (6.101a). L'augmentation du nombre de Stokes entraîne une diminution de la zone d'influence.

Par contre, cette région évolue également en fonction de la position relative des gouttes. Comme il est possible de le constater sur la figure 11.4, lorsque les particules sont prises initialement sur le même axe, la zone d'influence est augmentée. La dimension de cette dernière peut être prise égale à 10 fois le diamètre des gouttes.

A cet égard, il est possible d'admettre que les particules commencent à avoir une influence hydrodynamique pour une distance de l'ordre de 10 fois leur diamètre. Pour pouvoir utiliser les expressions des forces (cf. chapitre 3), il faut que la distance entre les particules reste inférieure à l'échelle de Taylor. Il est alors possible d'estimer dans ce cas le tenseur des taux de déformation. La condition nécessaire à remplir est la suivante :

$$a \leq \frac{\lambda_T}{20}. \quad (11.67)$$

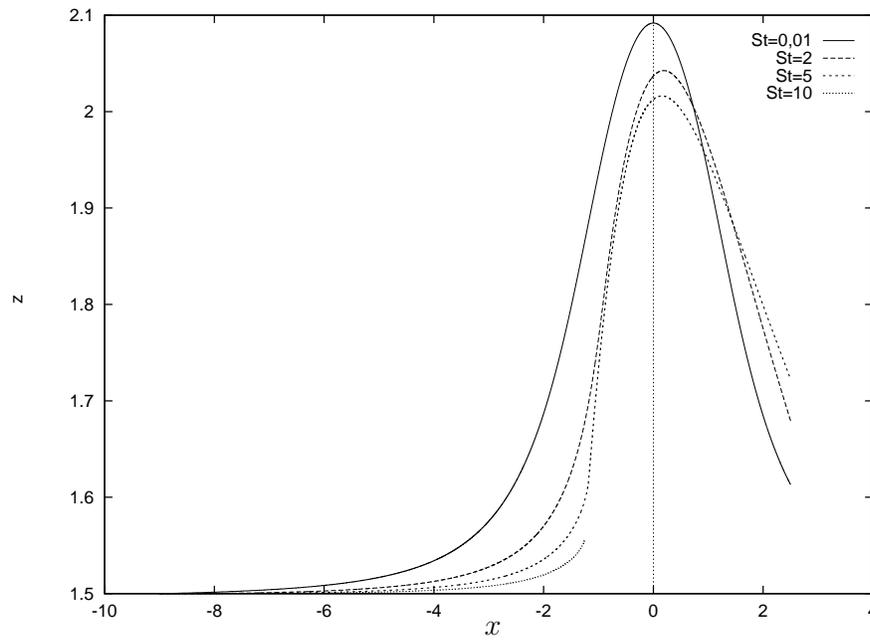


FIG. 11.3 – Trajectoires relatives pour différents nombres de Stokes dans un écoulement de cisaillement simple.

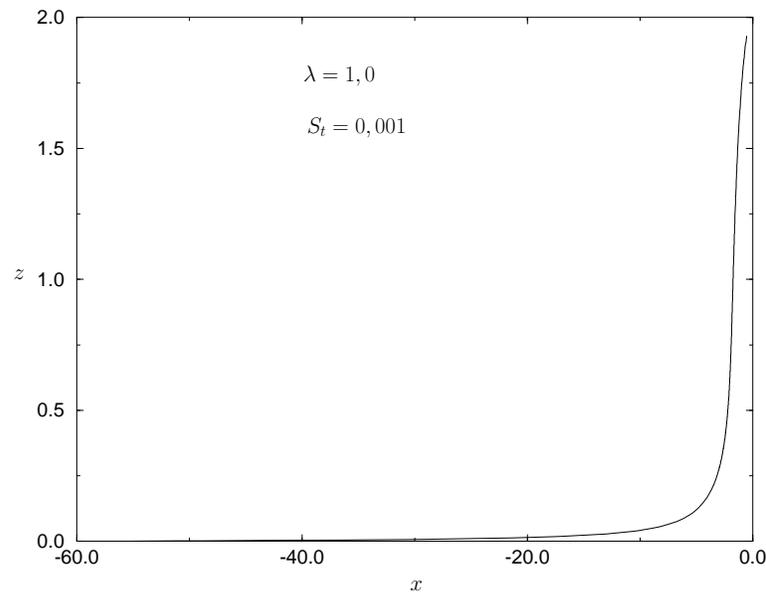


FIG. 11.4 – Trajectoires relatives pour un nombre de Stokes faible et pour des gouttes dont les positions initiales sont sur le même axe.

Cette condition n'est pas si contraignante. Elle l'est beaucoup moins que celle imposant une taille de particule plus petite que la micro-échelle de Kolmogorov. Ainsi, dans le calcul, un couple de particules est supposé en interaction lorsque leur distance est inférieure à 10 fois leur diamètre.

Les équations de la dynamique pour les deux particules en interactions peuvent être écrites sous une forme similaire à l'équation (11.61) :

$$\frac{d\vec{v}_{p1}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{p1}} \{ \mathbf{A}_{11} \cdot [\vec{v}_{p1}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p1}(t), t)] + \mathbf{A}_{12} \cdot [\vec{v}_{p2}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p2}(t), t)] + a\mathbf{G}_1 : \mathbf{E}^\infty \}, \quad (11.68a)$$

$$\frac{d\vec{v}_{p2}(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{p2}} \{ \mathbf{A}_{21} \cdot [\vec{v}_{p1}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p1}(t), t)] + \mathbf{A}_{22} \cdot [\vec{v}_{p2}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p2}(t), t)] + a\mathbf{G}_2 : \mathbf{E}^\infty \}. \quad (11.68b)$$

Dans le cas où les nombres de Reynolds ne sont plus petits devant 1, Chauvin [25] utilise pour les temps de relaxation dynamique  $\tau_{p1}$  et  $\tau_{p2}$  des expressions similaires à la relation (11.62).

Les équations de quantité de mouvement (11.61) et (11.68b) vont nous servir à déterminer les positions des particules. Mais au préalable, il faut être en mesure de connaître les particules en interactions et celles qui ne le sont pas. La méthode de ce repérage est présentée dans le prochain paragraphe.

### 11.3.2 Repérage des particules en interactions

Le repérage des positions des particules les unes par rapport aux autres sert à connaître les couples de gouttes en interactions et également celles qui subissent des chocs. Deux particules sont supposées en interaction lorsque leur distance les séparant est inférieur à un seuil fixé au préalable. Ce dernier a été fixé à 20 fois le rayon des particules,  $r_{max} = 20a$ .

Chercher à savoir les distances entre toutes les particules se trouvant dans le domaine de simulation est chose difficile. Il serait nécessaire de faire  $N_p(N_p - 1)/2$  tests qui avec plus de  $10^4$  gouttes prendrait un temps trop important. D'autres types d'algorithmes permettant de gagner du temps *CPU* doivent être utilisés. Le repérage des particules est fait en utilisant la méthode proposée par Sundaram et Collins [136]. Le domaine de calcul est décomposé en cellules. La détermination des plus proches voisins se trouvant dans une cellule donnée est alors limitée à une recherche sur l'ensemble des cellules voisines. En prenant en moyenne 1 particule par boîte, le nombre de cellules par direction d'espace est donné par :

$$N_c = \text{Entier} \left\{ \sqrt[3]{N_p} \right\}. \quad (11.69)$$

Chaque cellule est repérée par trois indices  $i, j$  et  $k$ . Ces derniers varient de 1 à  $N_c$  modulo  $N_c + 1$ . Ces cellules sont représentées sur la figure 11.5.

Dans chaque cellule, il est nécessaire de connaître à chaque instant le nombre de particules s'y trouvant. Nous devons alors définir un tableau à trois indices,  $numpart(i, j, k)$ , donnant ce nombre. Ce type d'approche entraîne que les particules ne sont plus indiscernables. Elles sont donc référencées par un indice variant de 1 à  $N_p$ . Dans chaque cellule, les indices des particules devront également être sauvegardés. Il est fait usage dans les programmes d'un tableau à 4

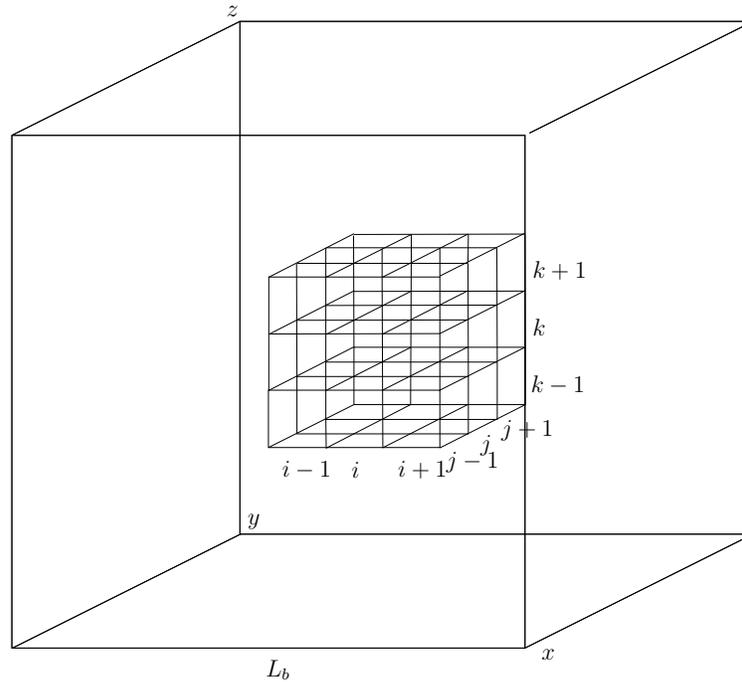


FIG. 11.5 – Représentation des cellules dans le domaine de simulation.

dimensions, noté  $parbox(i, j, k, l)$ , où les trois premiers indices repèrent la cellule et varient de 1 à  $N_c$  et le dernier donne le numéro de la particule évoluant de 1 à  $numpart(i, j, k)$ . Le repérage des indices des cellules pour une position quelconque d'une particule  $p$  donnée est obtenu très facilement. Si  $x_p(p)$ ,  $y_p(p)$  et  $z_p(p)$  sont les composantes de la position de la particule  $p$ , les indices de la cellule dans laquelle se trouve  $p$  sont :

$$\begin{aligned} i &= \text{Entier}\left\{\frac{x_p(p)}{L_b} \times N_c\right\} + 1, \\ j &= \text{Entier}\left\{\frac{y_p(p)}{L_b} \times N_c\right\} + 1, \\ k &= \text{Entier}\left\{\frac{z_p(p)}{L_b} \times N_c\right\} + 1. \end{aligned} \quad (11.70)$$

La connaissance des tableaux  $numpart$  et  $parbox$  est primordiale pour la détermination des particules en interactions hydrodynamiques ou non. Après chaque nouveau pas de temps, ces tableaux devront être mis à jour afin de tenir compte des nouvelles positions des particules.

Lors de la recherche des plus proches voisins, il faut tester les cellules d'indices  $i - 1$  à  $i + 1$ ,  $j - 1$  à  $j + 1$  et  $k - 1$  à  $k + 1$ . Lorsque les frontières du domaine sont atteintes, i.e.  $i = 1$  ou  $i = N_c$ , les indices  $i - 1$  dans le cas où  $i = 1$  ou  $i + 1$  dans le cas où  $i = N_c$  ne sont *a priori* pas connus. A l'aide des conditions de périodicité, il est nécessaire dans le cas où  $i = 1$  par exemple que l'indice de  $i - 1$  corresponde à la cellule d'indice  $N_c$ . Ces remarques sont identiques pour les indices  $j$  et  $k$ . Ainsi, il est possible de créer une fonction numérique qui nous permette d'assurer ces propriétés de périodicité. Cette fonction appelé  $indice(i, N_c)$  à deux arguments est définie par la relation :

$$indice(i, N_c) = \text{mod}(i, N_c + 1) + i / (N_c + 1) + N_c [1 - H(i)], \quad (11.71)$$

où / désigne la division entière.  $H(i)$  est la fonction d'Heaviside donnée par :

si  $i \leq 0$  alors

$$H(i) = 0, \quad (11.72a)$$

sinon

$$H(i) = 1. \quad (11.72b)$$

Il est facile de vérifier que si  $i = 0$  la fonction *indice* donne bien  $N_c$ . Dans le cas où  $i = N_c + 1$ , *indice* faut 1. L'appel de cette fonction à chaque fois qu'il est nécessaire entraîne un temps de calcul élevé. Dans un but d'optimiser les temps d'exécution, il est préférable de créer un tableau variant de 0 à  $N_c + 1$  nous donnant l'indice d'une cellule et respectant les conditions de périodicité.

Le nombre de particules est en moyenne égal à 1. Ce qui permet de déterminer la taille relative des cellules,  $l_c$ . Le rapport  $l_c/L_b$  est :

$$\frac{l_c}{L_b} = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3\alpha} \frac{a}{L_b}}. \quad (11.73)$$

Dans le cas d'une concentration volumique de l'ordre de  $10^{-6}$ ,  $l_c$  est plus de 161 fois plus grand que  $a$ . De ce fait, la recherche des plus proches voisins d'une particule se trouvant dans une cellule d'indices  $i$ ,  $j$  et  $k$  peut être limité à celles entourant cette cellule. Ce qui entraîne que les tests se font sur 27 cellules comme il est représenté sur la figure 11.5.

Le repérage consiste donc à dresser les listes des particules qui sont en interaction et donc susceptibles de subir des chocs et celles qui sont isolées. Ainsi, le nombre de couples de gouttes en interaction, noté *nbcouple*, et la liste des particules, *parinter*( $i, j$ ) sont déterminés où ici  $i$  varie de 1 à 2 et  $j$  de 1 à *nbcouple*. Le nombre des particules non sujet aux interactions est noté *nbnoninter*. Les indices de ces gouttes sont sauvegardés dans un tableau appelé *parnoninter*( $i$ ) avec  $i$  compris entre 1 et *nbnoninter*.

Jusqu'à ce point, seuls les aspects spatiaux ont été envisagés. Il est également possible de prendre en compte des effets cinématiques. En effet, si deux particules ont des vitesses les faisant converger l'une vers l'autre elles peuvent rentrer en interaction. Pour deux particules d'indices  $p1$  et  $p2$ , la distance, notée  $r_{p1p2}$ , qui est comparée à  $r_{max}$  est déterminée de la façon suivante :

si  $[\vec{x}_{p1}(t) - \vec{x}_{p2}(t)] \cdot [\vec{v}_{p1}(t) - \vec{v}_{p2}(t)] < 0$  alors :

$$r_{p1p2} = \|\vec{x}_{p1} - \vec{x}_{p2} + \Delta t(\vec{v}_{p1} - \vec{v}_{p2})\|, \quad (11.74a)$$

sinon

$$r_{p1p2} = \|\vec{x}_{p1} - \vec{x}_{p2}\|. \quad (11.74b)$$

$\Delta t$  est le pas de temps utilisé dans les simulations.

L'utilisation de la distance  $r_{max}$  relativement grande par rapport à  $a$  entraîne l'apparition d'une nouvelle difficulté. Cette dernière réside dans le fait qu'il est possible d'avoir plus de deux particules dans cette sphère d'influence. Il est nécessaire de considérer que seules les deux particules les plus proches sont en interaction. La troisième est considérée comme indépendante.

Ainsi, la procédure de repérage s'effectue de la façon suivante. Pour l'ensemble des cellules et pour l'ensemble des particules d'indice  $p$  se trouvant dans une cellule  $i$ ,  $j$  et  $k$ , on cherche à savoir s'il n'y a pas de particules dans la sphère d'influence de la particule  $p$ . Ce test est fait sur toutes les cellules voisines. Quand deux particules ont été repérées, il est nécessaire de voir

si l'une ou l'autre ou les deux n'ont pas déjà été sélectionnées comme particules en interaction. Si aucune des particules n'a été rencontrée auparavant leur indices respectifs sont sauvegardés dans le tableau *parinter* et *nbcouple* est incrémenté d'une unité. Si les deux particules ont déjà été vues, il n'y a rien à faire. Dans le cas où l'une ou l'autre a été rencontrée au préalable, trois particules se trouvent dans la sphère d'influence. A ce stade, les distances deux à deux sont déterminées, les particules pour lesquelles la distance est plus faible sont supposées en interaction. La dernière est considérée comme seule. Lorsque tous les couples ont été déterminés, les indices des particules restantes sont sauvegardés dans le tableau *parnoninter*. Il convient également de calculer le nombre de particules ne se trouvant pas en interaction, *nbnoninter*.

### 11.3.3 Intégration des équations du mouvement des particules

La nécessité de connaître la valeur de la vitesse de la phase continue au centre d'une particule oblige à faire une interpolation. Comme il est souligné dans la thèse de Deutsch [40], cette interpolation doit être faite avec soin afin d'éviter un filtrage du champ de vitesse. Elle doit avoir une bonne précision. Il est fait usage ici d'une interpolation par spline cubique d'ordre trois. Elle est présentée dans l'annexe F.

#### Cas des particules isolées

Les équations à intégrer dans le cas de particules supposées n'interagir avec aucune autre sont les suivantes :

$$\frac{d\vec{x}_p(t)}{dt} = \vec{v}_p(t), \quad (11.75a)$$

$$\frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = -\frac{\vec{v}_p(t) - u[\vec{x}_p(t), t]}{\tau_p}. \quad (11.75b)$$

Elles doivent être adimensionnées de façon à être en harmonie avec la méthode numérique employée pour la résolution des équations de Navier-Stokes. A cet égard, les grandeurs de références sont prises identiques. Les vitesses sont adimensionnées par une vitesse de référence notée  $U_0$ . Pour les longueurs,  $L_0$  est utilisée. Cette dernière est définie de façon à avoir une dimension du domaine de simulation adimensionnée égale à  $2\pi$ . Dans la suite, les quantités adimensionnées sont notées de la même façon que les grandeurs dimensionnées. Les équations de mouvement deviennent :

$$\frac{d\vec{x}_p(t)}{dt} = \vec{v}_p(t), \quad (11.76a)$$

$$\frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = -\frac{\vec{v}_p(t) - u[\vec{x}_p(t), t]}{S_{tp}}, \quad (11.76b)$$

où  $S_{tp}$  est le nombre de Stokes défini par la relation :

$$S_{tp} = \frac{\tau_p U_0}{L_0}. \quad (11.77)$$

Il a été vu dans le §11.3.1 que le nombre de Stokes dépend du nombre de Reynolds des particules. Ce dernier peut être écrit en fonction du nombre de Reynolds utilisée pour la simulation

de l'écoulement turbulent,  $R_{e0}$ , sous la forme :

$$R_{ep} = 2 \frac{a}{L_0} \|\vec{v}_p - \vec{u}\| R_{e0}. \quad (11.78)$$

Le nombre de Stokes est également déterminé en fonction de  $R_{e0}$  :

$$S_{tp} = \frac{2\rho'}{9\rho f_d(R_{ep})} \left( \frac{a}{L_0} \right)^2 R_{e0}. \quad (11.79)$$

L'intégration de (11.76b) peut être fait à l'aide d'une méthode classique de Runge-Kutta. Malheureusement dans le cas où les particules sont de petite taille, le nombre de Stokes devient très faible. Il s'ensuit que l'équation sur la vitesse présente un caractère raide. Pour faire face à ce problème, une méthode de Runge-Kutta modifiée présentée dans la thèse de Deutsch [40] est utilisée. Elle est résumée ci-dessous pour une seule composante. Elle est précise à l'ordre 2.  $t_n$  représente le temps à la  $n^{\text{ième}}$  itération.  $\Delta t$  est le pas de temps. La détermination de la vitesse, suivant  $x$  par exemple, au temps  $n + 1$  est donnée par :

$$v_{px}(t_{n+1}) = v_{px}(t_n) + \frac{1}{2} (k_{1x}^v + k_{2x}^v), \quad (11.80)$$

où les incréments  $k_{1x}^v$  et  $k_{2x}^v$  sont déterminés par les relations suivantes :

$$k_{1x}^v = \{v_{px}(t_n) - u_x[\vec{x}_p(t_n), t_n]\} \left( e^{-\frac{\Delta t}{S_{tp}}} - 1 \right), \quad (11.81a)$$

$$k_{2x}^v = \left\{ v_{px}(t_n) - u_x \left[ \vec{x}_p(t_n) + \vec{k}_1^x, t_{n+1} \right] \right\} \left( e^{-\frac{\Delta t}{S_{tp}}} - 1 \right). \quad (11.81b)$$

$\vec{k}_1^x$  représente l'incrément utilisé pour le vecteur position. Il est déterminé par une méthode de Runge-Kutta classique. La relation sur  $k_{2x}^v$  nécessite la connaissance du champ de vitesse de la phase continue à l'instant  $t_{n+1}$ . Dans un premier temps, le calcul de  $\vec{u}$  en  $t_{n+1}$  pour la détermination de  $k_{2x}^v$  n'est pas effectué dans nos simulations. Il est à remarquer que si le nombre de Stokes est grand, son inverse devient faible. Les exponentielles dans les expressions de  $k_{1x}^v$  et  $k_{2x}^v$  peuvent être déterminées à l'aide des développements limités. Ce qui permet de retrouver les incréments classiques de la méthode de Runge-Kutta.

### Cas de particules en interaction

Les équations décrivant le comportement dynamique de deux particules en interaction sous forme adimensionnées sont :

$$\frac{d\vec{x}_{p1}(t)}{dt} = \vec{v}_{p1}, \quad (11.82a)$$

$$\frac{d\vec{x}_{p2}(t)}{dt} = \vec{v}_{p2}, \quad (11.82b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_{p1}(t)}{dt} = & -\frac{1}{S_{tp1}} \left\{ \mathbf{A}_{11} \cdot [\vec{v}_{p1}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p1}(t), t)] + \mathbf{A}_{12} \cdot [\vec{v}_{p2}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p2}(t), t)] \right. \\ & \left. + \frac{a}{L_0} \mathbf{G}_1 : \mathbf{E}^\infty \right\}, \end{aligned} \quad (11.82c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_{p2}(t)}{dt} = & -\frac{1}{S_{tp2}} \left\{ \mathbf{A}_{21} \cdot [\vec{v}_{p1}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p1}(t), t)] + \mathbf{A}_{22} \cdot [\vec{v}_{p2}(t) - \vec{u}(\vec{x}_{p2}(t), t)] \right. \\ & \left. + \frac{a}{L_0} \mathbf{G}_2 : \mathbf{E}^\infty \right\}. \end{aligned} \quad (11.82d)$$

Le tenseur des taux de déformation doit être évalué au niveau de la particule  $p2$ . Ce système de 12 équations différentielles est encore plus compliqué à résoudre que celui présenté pour les particules isolées. Dans nos simulations, nous utilisons la même technique employée pour la recherche des trajectoires relatives déterminées en écoulement linéaire. Cette méthode d'intégration est présentée dans l'annexe E. Le pas de temps utilisé dans les simulations reste fixé tout au long du calcul. Par contre, si la détermination des vitesses et des positions des particules en interaction nécessite plus de précision, l'intégration du système d'équations correspondant est fait pour des pas de temps intermédiaires.

Après avoir intégré les équations de mouvement, il est nécessaire dans un premier temps de vérifier si les nouvelles positions des particules se trouvent dans le domaine de simulation. Dans le cas où les particules sortent de ce domaine, il est nécessaire de changer leurs positions en respectant les conditions de périodicité. Dans un deuxième temps, les particules peuvent changer de cellule de repérage d'un pas de temps à l'autre. Il faut donc alors modifier les tableaux *numpart* et *parbox* en conséquence.

#### 11.3.4 Traitement des collisions

Les collisions ne peuvent se produire qu'entre des particules en interaction hydrodynamique. Par conséquent, les chocs sont à prendre en compte uniquement dans la procédure d'intégration de particules en interaction. Les forces pour un couple de particules sont valides pour toutes les distances entre les particules. Elles deviennent très grandes pour les faibles écarts. Ce dernier point entraîne que le nombre de calculs pour des pas de temps intermédiaires est plus grand lorsque les particules sont proches. Afin d'être assuré de bien localiser le choc, il est possible d'estimer l'instant du choc. Ainsi, pour deux particules en interaction d'indices  $p1$  et  $p2$ , en supposant que leurs vitesses ne changent pas, l'instant de la collision peut être évalué par la résolution de l'équation suivante :

$$\|\vec{x}_{p1}(t_n) - \vec{x}_{p2}(t_n) + \Delta t_{p1p2} [\vec{v}_{p1}(t_n) - \vec{v}_{p2}(t_n)]\| = 2a. \quad (11.83)$$

Cette dernière relation se transforme en équation du second degré pour la variable  $\Delta t_{p_1 p_2}$ . Un choc se produira durant l'intervalle  $[t_n; t_n + \Delta t]$  si  $\Delta t_{p_1 p_2} \leq \Delta t$ . De plus seules les valeurs positives sont retenues. Dans le cas où l'équation donne deux solutions réelles positives,  $\Delta t_{p_1 p_2}$  est pris comme étant le minimum de ces deux solutions. L'estimation de  $\Delta t_{p_1 p_2}$  nous permet de fixer le pas de temps intermédiaire à utiliser dans l'intégration des vitesses et positions de deux particules en interaction.

Lorsqu'un choc a été localisé, il est nécessaire de modifier les vitesses des deux particules en vertu des principes de conservation de la quantité de mouvement. Cette simulation n'ayant pour but, dans un premier temps, que la détermination du taux de collision, les gouttes sont supposées subir que des chocs élastiques. Il n'y a aucune coalescence. Si les vitesses des particules après choc sont notées avec un prime, on a :

$$\vec{v}'_{p_1} = \vec{v}_{p_1} - \vec{p}, \quad (11.84a)$$

$$\vec{v}'_{p_2} = \vec{v}_{p_2} + \vec{p}, \quad (11.84b)$$

$$\text{avec } \vec{p} = \left[ (\vec{v}_{p_1} - \vec{v}_{p_2}) \cdot \vec{k} \right] \vec{k} \text{ et } \vec{k} = \frac{\vec{x}_{p_1} - \vec{x}_{p_2}}{\|\vec{x}_{p_1} - \vec{x}_{p_2}\|}. \quad (11.84c)$$

A chaque fois qu'un choc est localisé, le nombre de chocs, noté  $N_{choc}$ , est incrémenté. Pour chaque pas de temps, ce dernier permet d'estimer la fréquence de collision,  $J$ , à l'aide de la relation suivante :

$$J = \frac{N_{choc}}{\Delta t}. \quad (11.85)$$

$J$  subit des fluctuations en fonction du temps qui sont liées à la mise en équilibre des particules. Il est donc nécessaire de faire le calcul de  $J$  seulement quand les particules ont atteint leur état stationnaire statistiquement. De plus, le calcul doit être répété un grand nombre de fois afin d'obtenir une grandeur représentative. Sundaram et Collins [137] préconisent d'attendre au moins des temps égaux à deux fois l'échelle intégrale temporelle eulérienne de la turbulence avant d'obtenir une bonne estimation de la fréquence de collision. Ensuite la multiplication de  $J$  avec le nombre de particules par unité de volume donne le taux de collision.

Le manque de temps dans le cadre de ce travail n'a pas permis d'obtenir des résultats dans ces simulations. Des difficultés dans l'obtention d'un champ de turbulence homogène et isotrope ont fortement ralenti notre progression. Le travail a surtout consisté à optimiser les temps de calcul des modules propres aux particules. Nous avons réussi à obtenir des temps de calcul similaires entre la partie réservée à la simulation de la turbulence et celle au transport des gouttes. Il va de soit que cette étude doit être poursuivie dans l'avenir.

## 11.4 Conclusion

La troisième partie de ce mémoire a été consacrée à la détermination des taux de collision en écoulements turbulents. Après avoir rappelé les notions fondamentales sur la dispersion de particules, une présentation des modèles existants a été effectuée. Le manque d'universalité dans les divers expressions du taux de collision témoigne de la difficulté à appréhender la détermination de  $J_{12t}$ .

Nous avons alors poursuivi notre étude en recherchant le taux de collision. Il est fait usage d'un formalisme emprunté à la théorie cinétique des gaz. La difficulté réside dans la détermina-

tion de la fonction de distribution de paire. Cette dernière a été obtenue en utilisant des notions de probabilités conditionnelles et une hypothèse de normalité sur le champ de vitesse de la phase continue. Le taux de collision déterminé en absence de force de pesanteur se révèle être d'une plus grande universalité que les modèles disponibles dans la littérature. Une comparaison avec les résultats numériques de Sundaram et Collins [137] nous a permis de contrôler le bien fondé de notre modèle. De plus, le taux de collision a été déterminé en présence du champ de gravité. Ainsi, nous avons pu généraliser l'expression obtenue initialement par Abrahamson [2].

Par contre, ces considérations sont faites en négligeant totalement les interactions hydrodynamiques. Leur introduction dans la recherche d'expression analytique du taux de collision est difficilement réalisable. Une simulation numérique semble être une alternative pour le calcul du taux de collision. Ainsi, une méthode numérique a été mise au point permettant d'étudier la dispersion de particules dans un écoulement turbulent homogène et isotrope. Par contre, des difficultés dans l'obtention du champ de vitesse nous ont empêché d'obtenir des résultats dans cette simulation.

L'expression du taux de collision déterminée en présence du champ de gravité va être utilisée dans la dernière partie de ce mémoire. Le but est de voir l'influence de la turbulence sur l'élargissement d'un spectre de gouttes.



## **Quatrième partie**

### **Application à la coalescence de gouttes dans les nuages**



# Chapitre 17

## Equation d'évolution granulométrique d'un nuage

Jusqu'à maintenant seuls les aspects collisionnels ont été étudiés. Mais la collision peut entraîner la coalescence entre deux gouttes à la suite de leur choc. Il ressort que la granulométrie d'un nuage va évoluer en temps. La coalescence n'est pas le seul phénomène physique entraînant une variation du spectre de goutte.

En effet, la rupture de gouttes en d'autres plus petites intervient également. L'éclatement a lieu pour des nombres de Weber,  $W_e = \rho U^2 L / \sigma$ , critiques.  $U$  et  $L$  sont des grandeurs caractéristiques. Ce nombre adimensionnel peut s'exprimer à l'aide des nombres de Reynolds et capillaire sous la forme :

$$W_e = R_e C_a. \quad (17.1)$$

La détermination du nombre de Weber critique n'est pas chose facile. Elle dépend du phénomène conduisant à la rupture des gouttes. Les forces de tension superficielle doivent résister aux forces visqueuses ou aux efforts inertielles du fluide comme le signalent Sevik et Park [129]. Dans le cas où les forces visqueuses dominent (petites gouttes par rapport à l'échelle de Kolmogorov), Hinze [61] indique une valeur de nombre de Weber critique de 1, 2. Par contre, lorsque les forces inertielles sont prépondérantes, Sevik et Park [129] donnent des valeurs comprises entre 5 et 11. Plus récemment, Kocamustafaogullari *et al.* [81] précisent que les nombres de Weber critiques doivent être inférieurs à 12, 2.

Le manque de consensus entre les divers auteurs montre bien les difficultés rencontrées dans l'étude de l'éclatement de gouttes. Cependant, nous voyons que les nombres de Weber critiques sont compris approximativement entre 1 et 12. Or, dans le cadre de nos applications, les valeurs des nombres capillaires restent très faibles. Comme les nombres de Reynolds relatifs aux gouttes sont petits,  $W_e$  reste relativement modéré et inférieur aux valeurs critiques.

En fait, les zones de nombre de Weber pour lesquelles interviennent le fractionnement sont différentes de celles où s'effectuent les phénomènes de collision-coalescence. Les éclatements prennent naissance lorsque le déséquilibre dynamique entre les deux phases est important ou lors de la présence de fort cisaillement du champ de vitesse. De plus, lorsque le nombre capillaire est important, la déformation des gouttes l'est aussi. Or, cette dernière empêche la coalescence de se faire comme le précise Chesters [26]. Par conséquent, le fractionnement n'est pas prise en compte dans le cadre de cette étude.

La condensation entraîne également une variation granulométrique. Les taux de condensation varient avec la taille des gouttes. Néanmoins, l'élargissement du spectre de gouttes n'est généralement pas expliqué par la condensation. En effet, le taux de condensation est inversement proportionnel au rayon des particules. Il s'ensuit que plus les dimensions des inclusions sont grandes plus les taux de condensation diminuent. L'élargissement est donc fortement limité [76]. Par la suite, la condensation est également négligée.

Ce chapitre est consacré dans un premier temps à l'établissement de l'équation de population dans un cadre relativement général. Par suite, l'étude est limitée au cas homogène. La méthode numérique choisie permettant de résoudre ce type d'équation est alors exposée.

## 17.1 Formulation complète de l'équation de population

Commençons, dans un premier temps, par voir l'établissement de l'équation de population décrivant l'évolution dynamique d'un nuage. Cette dernière s'apparente à une équation de type Boltzmann appliquée à une fonction de distribution de probabilité. Dans un premier temps, l'espace des phases est introduit. L'établissement de l'équation décrite par la fonction de distribution est donnée dans un deuxième temps. Enfin, la forme générale du terme source lié à la coalescence est établie.

### 17.1.1 Espace des phases et fonction de distribution

La notion d'espace des phases est fondamentale dans l'établissement de l'équation de population. Cet espace est constitué des variables décrivant le comportement des particules. Hulburt et Katz [67] et Achard [3] séparent les coordonnées des phases en coordonnées externes et internes. Les coordonnées externes sont constituées des variables d'espace donnant la position de chaque particule, notée  $\vec{x}$ . Alors que les coordonnées internes comprennent l'ensemble des variables décrivant le comportement des particules. La vitesse en fait partie. Dans le cas où la taille des gouttes peut varier sous l'effet de la coalescence, le volume ou le rayon est considéré comme coordonnée interne. Il en est de même pour la température ou l'énergie interne lorsque les effets thermiques ont une importance. Ici, seuls la vitesse des particules,  $\vec{c}_p$ , et le volume,  $v$ , sont pris comme coordonnées internes.  $\vec{x}$ ,  $\vec{c}_p$  et  $v$  sont régis par des équations aux dérivées ordinaires :

$$\frac{dx_i}{dt} = c_{pi}, \quad (17.2a)$$

$$\frac{dc_{pi}}{dt} = \dot{c}_{pi}(\vec{x}, \vec{c}_p, \vec{u}_1), \quad (17.2b)$$

$$\frac{dv}{dt} = 0. \quad (17.2c)$$

$\vec{u}_1$  correspond à la vitesse de la phase continue vue par les particules. La relation (17.2cc) traduit le fait que le processus d'évaporation ou de condensation n'est pas pris en compte.

L'état d'une particule est donné par la connaissance des coordonnées de phases. L'intégration des équations (17.2c) donne la succession d'états d'une particule. Ces états décrivent une «trajectoire» dans l'espace des phases. Chaque particule donne une trajectoire différente. En

prenant un grand nombre de particules, l'ensemble des trajectoires donne un «nuage de trajectoires» qui tend à devenir continu si le nombre de particules est grand. Il devient alors possible de définir un nombre probable de particules se trouvant dans un certain état. A cet égard,  $f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t)$  est définie comme étant la fonction de distribution. La quantité  $f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t)d\vec{x}d\vec{c}_p dv$  représente le nombre de particules qui à l'instant  $t$  est compris entre les états  $x_i$  et  $x_i + dx_i$ ,  $c_{pi}$  et  $c_{pi} + dc_{pi}$  et  $v$  et  $v + dv$ .  $d\vec{x}$  est donné par  $dx_1 dx_2 dx_3$  et  $d\vec{c}_p$  par  $dc_{p1} dc_{p2} dc_{p3}$ . L'intégration sur un hypervolume de l'espace des phases donne le nombre de particules se trouvant dans cet hypervolume :

$$N(t) = \int_{\vec{x}} \int_{\vec{c}_p} \int_0^\infty f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t) d\vec{x} d\vec{c}_p dv. \quad (17.3)$$

Dans le cas où la coalescence est prise en compte,  $N(t)$  peut varier dans cet hypervolume sous la forme générale suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \int_{\vec{x}} \int_{\vec{c}_p} \int_0^\infty h(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t) d\vec{x} d\vec{c}_p dv, \quad (17.4)$$

où  $h(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t)$  est le terme source décrivant les variations des états des phases subies par les particules dans les processus de collision-coalescence. Il est facile de montrer que la variation temporelle de  $N(t)$  est

$$\frac{dN(t)}{dt} = \int_{\vec{x}} \int_{\vec{c}_p} \int_0^\infty \left[ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial (f^{(1)} c_{pi})}{\partial x_i} + \frac{\partial (f^{(1)} \dot{c}_{pi})}{\partial c_{pi}} \right] d\vec{x} d\vec{c}_p dv. \quad (17.5)$$

En combinant les deux dernières relations qui doivent être vérifiées quel que soit l'hypervolume considéré, l'équation décrite par  $f^{(1)}$  est alors :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial (f^{(1)} c_{pi})}{\partial x_i} + \frac{\partial (f^{(1)} \dot{c}_{pi})}{\partial c_{pi}} = h(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t). \quad (17.6)$$

Cette dernière relation a une forme d'équation de Boltzmann. Kuentzmann [86] a établi une relation similaire mais encore plus générale. Il prend en compte les transferts de masse mais il ajoute également l'énergie interne des particules comme coordonnée interne. De plus, dans le terme source  $h$ , il prend en compte la possibilité de désintégration des particules.

L'équation (17.6) a un caractère hyperbolique. Les caractéristiques de cette dernière ne sont rien d'autres que les équations (17.2c) décrivant l'évolution temporelle des coordonnées des phases. L'utilisation des équations caractéristiques est faite par Domelevo [41] pour la recherche de solution de (17.6) dans le cas où la coalescence est négligée.

### 17.1.2 Détermination du terme source $h$

La coalescence s'effectue en plusieurs étapes. Il se produit dans un premier temps, collision entre deux particules de masses  $m'$ ,  $m''$  et de vitesses  $\vec{c}'_p$  et  $\vec{c}''_p$ . Ensuite, ces gouttelettes peuvent former une nouvelle goutte. Mais cette dernière peut se diviser. La noyau de collision est noté  $K(\vec{x}, \vec{c}'_p, \vec{c}''_p, v', v'', t)$ . Le taux de collision est obtenu en faisant le produit entre le noyau de collision et les concentrations volumiques des gouttes de volumes  $v'$  et  $v''$ . Dans le processus de collision, la masse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique se conservent. Si  $m$  et  $\vec{c}_p$

sont la masse et la vitesse de la particule formée après collision, les principes de conservation impliquent :

$$m' + m'' = m \rightarrow v' + v'' = v, \quad (17.7a)$$

$$m' \vec{c}'_p + m'' \vec{c}''_p = m \vec{c}_p \rightarrow v' \vec{c}'_p + v'' \vec{c}''_p = v \vec{c}_p, \quad (17.7b)$$

$$m' \frac{\vec{c}'_p{}^2}{2} + m'' \frac{\vec{c}''_p{}^2}{2} = m \frac{\vec{c}_p{}^2}{2} \rightarrow v' \frac{\vec{c}'_p{}^2}{2} + v'' \frac{\vec{c}''_p{}^2}{2} = v \frac{\vec{c}_p{}^2}{2}. \quad (17.7c)$$

Dans l'étape d'éclatement, la fonction de distribution  $G(\vec{x}; \vec{c}'_p, v'; \vec{c}''_p, v''; \vec{c}_p, v)$  est défini dans [86].  $G d\vec{c}_p dv$  représente le nombre de particules formées par éclatement après collision et ayant une vitesse comprise entre  $c_{pi}$  et  $c_{pi} + dc_{pi}$  et un volume entre  $v$  et  $v + dv$ . Toujours en vigueur des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, il est nécessaire d'avoir :

$$v' + v'' = \int_{\vec{c}_p} \int_0^\infty v G(\vec{x}; \vec{c}'_p, v'; \vec{c}''_p, v''; \vec{c}_p, v) d\vec{c}_p dv, \quad (17.8a)$$

$$v' \vec{c}'_p + v'' \vec{c}''_p = \int_{\vec{c}_p} \int_0^\infty v \vec{c}_p G(\vec{x}; \vec{c}'_p, v'; \vec{c}''_p, v''; \vec{c}_p, v) d\vec{c}_p dv, \quad (17.8b)$$

$$v' \frac{\vec{c}'_p{}^2}{2} + v'' \frac{\vec{c}''_p{}^2}{2} = \int_{\vec{c}_p} \int_0^\infty v \frac{\vec{c}_p{}^2}{2} G(\vec{x}; \vec{c}'_p, v'; \vec{c}''_p, v''; \vec{c}_p, v) d\vec{c}_p dv. \quad (17.8c)$$

Mais la forme de  $G$  n'est pas évidente. Sur ce point, le manque de données expérimentales est très important. Dans la mesure où la particule formée après la collision ne se désintègre pas, nous avons :

$$\int_{\vec{c}_p} \int_0^\infty G(\vec{x}; \vec{c}'_p, v'; \vec{c}''_p, v''; \vec{c}_p, v) d\vec{c}_p dv = 1. \quad (17.9)$$

Dans la suite, cette hypothèse est utilisée bien que Babukha *et al.* [6] ont montré que l'éclatement après la coalescence joue un rôle important. Il est également possible de supposer que l'éclatement produit deux gouttes de même taille. Ce dernier point correspond au modèle de Curl (cité dans [66]).

$h$  peut être décomposée en une partie source et une autre puits.  $h$  nécessite l'introduction de la fonction de distribution de paire dont nous avons déjà discutée l'établissement dans le chapitre 11. La probabilité de trouver deux particules en  $\vec{x}'$  et  $\vec{x}''$  est  $f^{(2)}(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{c}'_p, \vec{c}''_p, v', v'', t)$ . En supposant les gouttelettes comme indépendantes statistiquement,  $f^{(2)}$  vérifie [115] :

$$f^{(2)}(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{c}'_p, \vec{c}''_p, v', v'', t) = f^{(1)}(\vec{x}', \vec{c}'_p, v', t) f^{(1)}(\vec{x}'', \vec{c}''_p, v'', t). \quad (17.10)$$

Cependant, cette équation n'est pas vérifiée lorsque les gouttes sont proches dans le cadre des écoulements turbulents ou linéaires. Néanmoins, la relation (17.10) est utilisée par la suite. En fait, l'interdépendance entre les gouttes due aux interactions hydrodynamiques ou aux corrélations de vitesses est reportée dans le noyau de collision. La prise en compte des interactions hydrodynamiques peut être faite en multipliant le noyau de collision par l'efficacité de collision. Alors que dans le cas des écoulements turbulents, la dépendance statistique est introduite en utilisant les taux de collision calculés dans le §11.2.

Dans ce cadre, la coalescence entre des gouttes de volume  $v$  avec des gouttes de tailles quelconques entraîne la perte de gouttes de volume  $v$ . Il s'ensuit la formation de gouttes de volumes différents de  $v$ . Ainsi, le terme puits de  $h$  est :

$$h^- = -f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t) \int_{\vec{c}'_p} \int_0^\infty K(\vec{x}, \vec{c}_p, \vec{c}'_p, v, v', t) f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}'_p, v', t) d\vec{c}'_p dv'. \quad (17.11)$$

D'un autre côté, la coalescence de gouttes de volumes  $v'$  et  $v''$  donne des gouttes formées après l'étape d'éclatement de volume  $v$ . Le terme source s'exprime alors sous la forme :

$$h^+ = \frac{1}{2} \int_{\vec{c}''_p} \int_0^\infty \int_{\vec{c}'_p} \int_0^\infty K(\vec{x}, \vec{c}'_p, \vec{c}''_p, v', v'', t) G(\vec{x}; \vec{c}'_p, v'; \vec{c}''_p, v''; \vec{c}_p, v) f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}'_p, v', t) f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}''_p, v'', t) d\vec{c}''_p dv'' d\vec{c}'_p dv'. \quad (17.12)$$

Le coefficient  $1/2$  provient du rôle symétrique joué par les particules de volumes  $v'$  et  $v''$ . Une justification précise de ce coefficient est donnée dans le livre de Seinfeld [128]. Donc, le terme  $h$  est égal à

$$\begin{aligned} h(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t) &= \frac{1}{2} \int_{\vec{c}''_p} \int_0^\infty \int_{\vec{c}'_p} \int_0^\infty K(\vec{x}, \vec{c}'_p, \vec{c}''_p, v', v'', t) \\ &G(\vec{x}; \vec{c}'_p, v'; \vec{c}''_p, v''; \vec{c}_p, v) f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}'_p, v', t) f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}''_p, v'', t) d\vec{c}''_p dv'' d\vec{c}'_p dv' \\ &- f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}_p, v, t) \int_{\vec{c}'_p} \int_0^\infty K(\vec{x}, \vec{c}_p, \vec{c}'_p, v, v', t) f^{(1)}(\vec{x}, \vec{c}'_p, v', t) d\vec{c}'_p dv'. \end{aligned} \quad (17.13)$$

## 17.2 Formulation dans le cadre homogène

L'équation générale (17.6) est à la base de nombreuses études. Dans le cadre d'écoulements turbulents, elle sert à l'établissement des équations de bilans portant sur la phase dispersée. Elle intervient comme une alternative aux modèles classiques à deux fluides [68] dont les lois de fermetures nécessaires à la prise en compte de la turbulence restent difficiles à établir. Il existe d'énormes avantages à l'utilisation de (17.6). La turbulence est généralement prise en compte directement en moyennant (17.6). Il s'en suit l'apparition de termes inconnus dans l'équation de Boltzmann. Cependant de part la linéarité de cette dernière, les lois de fermeture sont plus simples à établir. De plus, l'utilisation d'une loi de fermeture simple sur (17.6) ne donnera par forcément une relation de fermeture triviale sur les équations de bilans. De telles approches sont utilisées par Reeks [118], [119], Derevich et Zaichik [39] entre autre. Un avantage supplémentaire de l'utilisation du formalisme cinétique est qu'il est possible de spécifier une forme particulière de  $f^{(1)}$  proche des parois permettant l'établissement des conditions aux limites [130]. Ces considérations, sortant du cadre de ce travail, ne sont pas poursuivies dans la suite de ce mémoire.

La résolution de (17.6) avec la prise en compte de la coalescence est relativement difficile à faire dans le cadre général. Il est possible d'établir des équations de bilans sur la masse, la quantité de mouvement de la phase dispersée par intégration sur l'espace des vitesses de (17.6). Ce type d'équations a déjà été formulé par Greenspan et Ungarish [52] en absence de collision-coalescence. L'introduction de la coalescence entraîne l'apparition de nouveaux termes sources.

Ces équations portent sur des fonctions dépendant de  $\vec{x}$ , de  $v$  et de  $t$ . Ce type de fonctions dépendent de variables dites «semi-fluide» d'après Domelevo et Sainsaulieu [42]. Ce nom est lié au fait que ces fonctions se situent entre des quantités dépendant uniquement des variables d'Euler et des fonctions de distribution de probabilité. Néanmoins, ces équations restent encore bien compliquées à résoudre.

Dans le cadre de ce travail, nous nous limitons à la formulation homogène décrivant l'évolution granulométrique d'un nuage de goutte en terme de fonction de distribution, notée simplement  $f$ , dépendant du volume  $v$  et du temps  $t$ . Cette abstraction entraîne la perte de certains phénomènes importants. Par exemple, l'étude de la dispersion de gouttes dans un écoulement turbulent homogène et isotrope montre des concentrations préférentielles de la phase dispersée. Ce fait a été constaté expérimentalement par Fessler *et al.* [44], théoriquement par Elperin *et al.* [43] et numériquement par Sundaram et Collins [137] entre autre. Ces concentrations préférentielles proviennent directement de la différence de masse volumique entre les deux phases et à l'inertie des gouttes. Dans le cas de particules dont la masse volumique est plus grande que celle du fluide, les concentrations se font de préférence dans les zones de faible vorticité (zone de pression maximum). Alors que dans le cas inverse de particules de masse volumique plus faible que le fluide, les concentrations ont lieu dans les zones de forte vorticité. Il advient que le nuage de gouttes présente des h t rog nit s. Ces effets peuvent avoir des retombées sur la coalescence. Les collisions seront plus nombreuses dans les zones de concentrations préférentielles et plus faibles dans les autres régions. Cet effet sur l'évolution granulométrique a été étudié par Pinsky et Khain [109].

L'équation régie par  $f(v, t)$  dans le cas homogène est donc obtenue comme une simplification de l'équation générale (17.6). Cette forme simplifiée porte également le nom d'équation cinétique de Smoluchowski. Elle est donnée ci-dessous :

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(v', v'', t) G(v', v'', v) f(v', t) f(v'', t) dv'' dv' - f(v, t) \int_0^\infty K(v, v', t) f(v', t) dv'. \quad (17.14)$$

Dans la mesure où les gouttes ne se d sint grent pas après la coalescence,  $G(v', v'', v)$  est donnée sous la forme

$$G(v', v'', v) = \delta[v - (v' + v'')]. \quad (17.15)$$

Ainsi, l'équation cinétique de Smoluchowski se réduit à

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^v K(v', v - v', t) f(v', t) f(v - v', t) dv' - f(v, t) \int_0^\infty K(v, v', t) f(v', t) dv'. \quad (17.16)$$

C'est sous cette forme que va être étudiée l'évolution granulométrique des nuages. Pour finir, signalons qu'il est possible de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (17.16) dans la mesure où le noyau de collision est toujours positif, borné et symétrique par rapport au variables  $v$  et  $v'$  ce qui est toujours le cas. Une démonstration est fournie dans le livre de Corduneanu [28].

## 17.3 Méthode numérique

Diverses méthodes sont disponibles pour résoudre l'équation intégro-différentielle (17.16). Une revue des différentes techniques est donnée par Ramkrishna [115]. La méthode des moments, par exemple, consiste à résoudre une suite d'équations différentielles portant sur les moments. Généralement, le système d'équations n'est pas fermé. Il convient de tronquer la suite. Pour arriver à fermer le système, la fonction de distribution  $f(v, t)$  est développée sous forme d'une série sur une base de polynômes orthogonaux. Les coefficients de la série dépendent des moments. Hulburt et Katz [67] et Hulburt et Akiyama [66] utilisent les polynômes de Laguerre (cf. également [3]). Mais cette méthode a ses limites. En effet, les équations sur les moments deviennent impossibles à obtenir dans le cas où le noyau de collision prend en compte l'efficacité de collision. Ici, une méthode plus simple est proposée. Elle repose sur une discrétisation du spectre continu en volume. Elle doit remplir deux critères importants :

- prendre en compte des spectres de gouttes relativement larges,
- assurer la conservation de la masse de la phase dispersée.

Le spectre volumique de gouttes est discrétisé en classe de volume. La classe  $i$  a un volume  $v_i$  où  $i$  varie de 1 à  $N$ . De façon à prendre une gamme de taille la plus large, les volumes des classes sont obtenus à l'aide d'une progression géométrique. Si  $v_1$  est le volume de la première classe et  $r$  la raison,  $v_i$  est donné par

$$v_i = v_1 r^{i-1}. \quad (17.17)$$

Comme la largeur de la gamme de volume est limitée, les volumes minimum et maximum doivent être fixés. Il en découle la détermination de la raison  $r$  :

$$r = \left( \frac{v_N}{v_1} \right)^{\frac{1}{N-1}}. \quad (17.18)$$

Ce type de discrétisation porte le nom d'échantillonnage logarithmique. La différence logarithmique entre deux classes de volumes successives est constante et égale au logarithme népérien de  $r$ . Cette discrétisation est couramment utilisée pour la résolution de l'équation cinétique de Smoluchowski [16] et [83].

Avant de présenter la méthode permettant d'obtenir le système d'équations discret, il est nécessaire de définir le volume médian entre de classe  $i$  et  $i \pm 1$  sous la forme :

$$v_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{v_i + v_{i \pm 1}}{2}. \quad (17.19)$$

Ces volumes médians doivent être déterminés pour  $i$  variant de 1 à  $N$ . Il est donc nécessaire de se donner  $v_0$  et  $v_{N+1}$ . Pour le premier nous prenons 0. Quant au deuxième, il peut être choisi arbitrairement grand. Ainsi, il nous assure la grande largeur de la gamme. Il doit également nous permettre de considérer que la concentration en goutte de volume  $v_{N+1}$  est pratiquement négligeable. Dans les applications numériques,  $v_{N+1}$  a été déterminé en utilisant la relation (17.17).

Généralement les équations discrètes s'expriment en terme de concentration volumique. Pour des raisons de conservation de la masse, nous préférons utiliser les fractions volumiques  $\alpha_i$  définies par la relation :

$$\alpha_i(t) = \int_{v_{i-\frac{1}{2}}}^{v_{i+\frac{1}{2}}} v f(v, t) dv. \quad (17.20)$$

Cette intégrale est évaluée en utilisant l'approximation suivante :

$$\alpha_i(t) = v_i f(v_i, t) \Delta v_i, \quad (17.21)$$

où  $\Delta v_i$  est égal à

$$\Delta v_i = v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2}. \quad (17.22)$$

Les équations différentielles régies par  $\alpha_i$  sont obtenues en intégrant (17.16) entre  $v_{i-\frac{1}{2}}$  et  $v_{i+\frac{1}{2}}$ . Par conséquent, un système de  $N$  équations différentielles en résulte dont la forme générale est :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = S_i^+ - S_i^-. \quad (17.23)$$

$S_i^+$  et  $S_i^-$  représentent respectivement les termes source et puits. Ces derniers doivent être déterminés en fonction des  $\alpha_i$ . Voyons dans un premier temps, comment le terme puits est obtenu. Il est donné sous la forme :

$$S_i^- = \alpha_i \sum_{j=0}^N \int_{v_j}^{v_{j+1}} K(v_i, v') f(v', t) dv'. \quad (17.24)$$

Les intégrales entre  $v_j$  et  $v_{j+1}$  sont évaluées en utilisant la méthode des trapèzes. Ainsi, nous avons :

$$\sum_{j=0}^N \int_{v_j}^{v_{j+1}} K(v_i, v') f(v', t) dv' = \frac{K(v_i, v_0) f(v_0, t)}{2} + \sum_{j=1}^N \frac{K(v_i, v_j)}{v_j} \alpha_j + \frac{K(v_i, v_{N+1}) f(v_{N+1}, t)}{2}. \quad (17.25)$$

Comme la fonction de distribution pour  $v_0$  est identiquement nulle, le premier terme du membre de droite de la précédente relation est égal à zéro. Il en est de même pour le dernier terme. Ainsi,  $S_i^-$  s'exprime sous la forme :

$$S_i^- = \alpha_i \sum_{j=1}^N \frac{K(v_i, v_j)}{v_j} \alpha_j. \quad (17.26)$$

Pour le terme source, nous allons employer la forme donnée par la relation (17.14).  $S_i^+$  est alors, en utilisant la méthode des trapèzes :

$$S_i^+ = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N K(v_j, v_k) f(v_j, t) f(v_k, t) \Delta v_j \Delta v_k \int_{v_{i-\frac{1}{2}}}^{v_{i+\frac{1}{2}}} v \delta(v - v_j - v_k) dv. \quad (17.27)$$

L'intégrale présente dans la dernière relation est uniquement différente de zéro lorsque  $v_j + v_k$  est encadré par les valeurs  $v_{i-\frac{1}{2}}$  et  $v_{i+\frac{1}{2}}$ . Elle peut être écrite sous la forme :

$$\int_{v_{i-\frac{1}{2}}}^{v_{i+\frac{1}{2}}} v \delta(v - v_j - v_k) dv = (v_j + v_k) \left[ H(v_j + v_k - v_{i-\frac{1}{2}}) - H(v_j + v_k - v_{i+\frac{1}{2}}) \right]. \quad (17.28)$$

$H$  est la fonction d'Heaviside. La relation donnant  $S_i^+$  est totalement symétrique relativement aux volumes  $v_j$  et  $v_k$ . Ainsi,  $S_i^+$  se transforme en

$$S_i^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{K(v_j, v_k)}{v_k} \alpha_j \alpha_k \left[ H(v_j + v_k - v_{i-\frac{1}{2}}) - H(v_j + v_k - v_{i+\frac{1}{2}}) \right]. \quad (17.29)$$

A l'aide des relations (17.27) et (17.29), il est facile de vérifier que l'on a bien la conservation du volume de la phase dispersée. Pour s'en convaincre, il suffit de faire la somme de  $S_i^+ - S_i^-$  pour  $i$  variant de 1 à  $N$ .

Au lieu d'utiliser cette forme, certains auteurs préfèrent employer une procédure de redistribution [83] et [133].  $S_i^+$  est alors écrit sous la forme :

$$S_i^+ = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{K(v_j, v_k)}{v_k} \alpha_j \alpha_k B_{ijk}, \quad (17.30)$$

où  $B_{ijk}$  est égal à

si  $v_i \leq v_j + v_k < v_{i+1}$  :

$$B_{ijk} = \frac{v_{i+1} - v_j - v_k}{v_{i+1} - v_i}, \quad (17.31a)$$

et

$$B_{ijk+1} = \frac{v_j + v_k - v_i}{v_{i+1} - v_i}. \quad (17.31b)$$

La conservation de la masse est encore assurée à l'aide de ces fonctions de redistribution. Il est même possible d'étendre ce type de distribution à un nombre de points plus élevé. Nous pouvons faire appel aux polynômes d'interpolation de Lagrange utilisés dans les méthodes d'éléments finis (cf. [45]). Dans ce cas de figure, les fonctions  $B_{ijk}$  sont données ci-dessous. Si  $v_i \leq v_j + v_k < v_{i+1}$  et pour  $l$  variant de  $-1$  à  $1$  :

$$B_{ijk+l} = \prod_{m=-1, m \neq l}^1 \frac{v_{i+m} - v_j - v_k}{v_{i+m} - v_{i+l}}. \quad (17.32)$$

Le système d'équations différentielles se met alors sous la forme générale suivante :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \tilde{K}_{jk} \alpha_j \alpha_k B_{ijk} - \alpha_i \sum_{j=1}^N \tilde{K}_{ij} \alpha_j, \quad (17.33)$$

où  $\tilde{K}_{ij}$  est égal à

$$\tilde{K}_{ij} = \frac{K(v_i, v_j)}{v_j}. \quad (17.34)$$

Une méthode numérique a été mise au point afin de résoudre ce système d'équations différentielles ordinaires. La technique d'intégration choisie est identique à celle utilisée pour la détermination des trajectoires (cf. annexe E).

Afin de contrôler la méthode, il est possible de faire une comparaison avec une solution exacte obtenue en prenant un noyau de collision constant. Initialement, le spectre est pris sous la forme :

$$f(v, 0) = \frac{N_0}{v_0} e^{-\frac{v}{v_0}}, \quad (17.35)$$

où  $N_0$  est la concentration volumique totale initiale et  $v_0$  le volume moyen à  $t = 0$ . Le noyau de collision est égal à  $K_0$ . La réalisation de l'adimensionnement suivant :

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{N_0 v_0}, \quad (17.36a)$$

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{v_0}, \quad (17.36b)$$

$$\tau = t K_0 N_0, \quad (17.36c)$$

permet d'écrire le système d'équations différentielles ainsi :

$$\frac{d\bar{\alpha}_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\bar{\alpha}_j \bar{\alpha}_k}{\bar{v}_k} B_{ijk} - \bar{\alpha}_i \sum_{j=1}^N \frac{\bar{\alpha}_j}{\bar{v}_j}. \quad (17.37)$$

Grâce au spectre initial, les fractions volumiques peuvent être déterminées à l'aide de la relation (17.20) :

$$\bar{\alpha}_i(0) = \left( \bar{v}_{i-\frac{1}{2}} + 1 \right) e^{-\bar{v}_{i-\frac{1}{2}}} - \left( \bar{v}_{i+\frac{1}{2}} + 1 \right) e^{-\bar{v}_{i+\frac{1}{2}}}. \quad (17.38)$$

Gelbart et Seinfeld [49] ont également testé leur méthode numérique à l'aide de la solution exacte dont ils donnent l'expression pour  $\tau$  quelconque :

$$f(v, \tau) = \frac{4N_0}{v_0(\tau + 2)^2} e^{-\frac{2v}{v_0(\tau+2)}}. \quad (17.39)$$

Il est alors possible de connaître  $\bar{\alpha}_i$  pour tout  $\tau$  :

$$\bar{\alpha}_i(\tau) = \left( \frac{2\bar{v}_{i-\frac{1}{2}}}{\tau + 2} + 1 \right) e^{-\frac{2\bar{v}_{i-\frac{1}{2}}}{\tau+2}} - \left( \frac{2\bar{v}_{i+\frac{1}{2}}}{\tau + 2} + 1 \right) e^{-\frac{2\bar{v}_{i+\frac{1}{2}}}{\tau+2}}. \quad (17.40)$$

Dans cet exemple numérique, nous avons pris 25 classes,  $\bar{v}_1 = 10^{-2}$  et  $\bar{v}_N = 10^2$ . Concernant la redistribution entre les diverses classes, les trois types présentés ci-dessus ont été implantés. Les résultats sont donnés sur la figure 17.1 pour  $\tau$  égal à 0, 5, 1 et 3.

Bien que le nombre de classes soit relativement faible, nous constatons que la solution numérique se comporte relativement bien. Pour  $\tau = 0, 5$ , les solutions numériques sont très proches de la solution exacte. Pour  $\tau = 3$ , la méthode utilisant la redistribution quadratique, (17.32), donne un résultat très satisfaisant.

La méthode numérique développée ici s'apparente à celle créée initialement par Kovetz et Olund [83]. Les critiques qui avaient faites à l'encontre de ce type de méthode concernaient surtout une prédiction trop importante de l'élargissement du spectre de gouttes. Par contre, la comparaison faite ci-dessus montre que cette surestimation de l'élargissement n'a pas lieu avec la méthode mise au point dans cette section. De plus, après quelques vérifications, la conservation de la masse de la phase dispersée s'avère être très correcte. Ainsi, cette méthode numérique remplit les objectifs fixés initialement. Elle va être utilisée par la suite avec la redistribution quadratique.

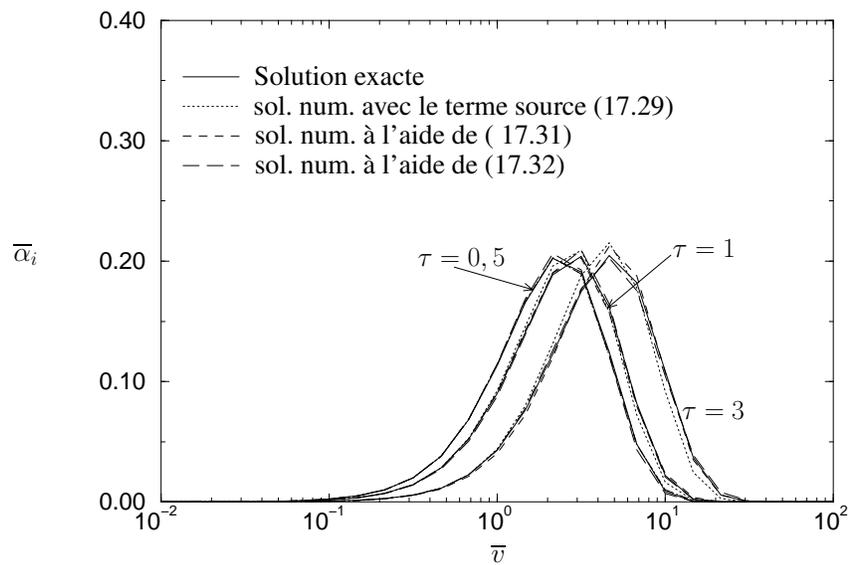


FIG. 17.1 – Comparaison entre la solution exacte et les solutions numériques obtenues à l'aide des trois méthodes de redistribution.



# Chapitre 18

## Applications à l'évolution granulométrique d'un nuage

Grâce à la méthode numérique qui a été mise au point, la recherche de l'évolution granulométrique devient envisageable. L'application principale concerne la formation des nuages tropicaux ou de la bruine. Dans un premier temps, l'influence des interactions hydrodynamiques a été testée pour des taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente caractéristiques de ceux rencontrés dans les cumuli. Ensuite, la deuxième application concerne plus particulièrement la formation de la bruine dans des nuages de type stratus où la turbulence est beaucoup plus faible.

### 18.1 Influence des interactions hydrodynamiques sur les temps de coalescence

L'introduction des interactions hydrodynamiques ne peut se faire que dans un cadre bien particulier. En premier lieu, l'étude va être limitée à des nuages de gouttes dont les tailles maximales restent très faibles par rapport à l'échelle de Kolmogorov. Le taux de collision ou plus particulièrement le noyau de collision utilisé dans ce cadre est pris comme étant égal à celui déterminé par Saffman et Turner [125] (cf. §11.1). Dans ce cas de figure, le noyau de collision s'apparente avec ce qui a été vu pour les écoulements de cisaillement, chapitre 6. Par contre, l'éventuelle influence des interactions hydrodynamiques n'est pas étudiée par Saffman et Turner. Une introduction rigoureuse de ces effets est encore relativement compliquée à faire. Néanmoins, il est possible d'en évaluer le rôle en utilisant l'approximation développée ci-dessous.

Le noyau de collision déterminé par Saffman et Turner [125] est modifié en introduisant une efficacité de collision :

$$K_{12} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (a_1 + a_2)^3 \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}} E_{12}. \quad (18.1)$$

$E_{12}$  est alors évaluée en considérant un écoulement de cisaillement simple de gradient  $\sqrt{\epsilon/\nu}$ . Ce type d'approche a déjà été utilisé par Higashitani *et al.* [60]. Ils justifient, *a posteriori*, une telle approximation par d'assez bonnes comparaisons entre leurs résultats numériques et expérimentaux.  $E_{12}$  a été déterminée par l'utilisation de la méthode numérique discutée dans le §6.5.

Pour cette première application, le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente a été fixé à  $0,15 \text{ m}^2/\text{s}^3$ . La viscosité cinématique de l'air a été prise égale à  $1,425 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Ainsi, l'échelle de Kolmogorov est de l'ordre de  $372,68 \text{ }\mu\text{m}$ . Concernant les gouttes, le spectre initial est considéré monodisperse de rayon  $5 \text{ }\mu\text{m}$ . Comme nous sommes limité par l'utilisation de l'équation (18.1), les gouttes ne peuvent pas prendre des tailles trop importantes. A cet égard, nous utilisons dans cette section un échantillonnage uniforme en volume. Le volume d'une classe  $i$  est alors donné sous la forme :

$$v_i = i v_1. \quad (18.2)$$

De plus, le nombre maximum de classe est fixé à 25. Il en résulte que le rayon de la classe  $N$  est égal à  $14,62 \text{ }\mu\text{m}$ . Ainsi, les particules sont toujours très petites par rapport à l'échelle de Kolmogorov. Comme il a été précisé dans l'analyse dimensionnelle effectuée dans le §10.3, pour que les gouttes subissent l'influence des structures turbulentes les plus faibles, il est nécessaire que leur taille soit dix plus petite que l'échelle de Kolmogorov. Ce critère est bien vérifié dans cette section. La fraction volumique totale de la phase dispersée est fixée à  $\alpha_t = 10^{-6}$ .

L'utilisation d'un échantillonnage uniforme a également une autre conséquence sur la redistribution entre les différentes classes de gouttes. En effet, ici, la coalescence entre deux gouttes de classes  $i$  et  $j$  donne une goutte de classe  $i+j$ . La redistribution dans ce cas est alors beaucoup plus simple.  $B_{ijk}$  peut s'exprimer sous la forme de fonction de Dirac :

$$B_{ijk} = \delta(i - j - k). \quad (18.3)$$

Le système d'équations différentielles se transforme en :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{K}_{ji-j} \alpha_j \alpha_{i-j} - \alpha_i \sum_{j=1}^N \tilde{K}_{ij} \alpha_j. \quad (18.4)$$

Cette forme est en fait très proche de celle déterminée par Smoluchowski [131]. Cependant, ce dernier considère les concentrations volumiques.

Le système d'équation est adimensionné sous la forme suivante :

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_t}, \quad (18.5a)$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{ij} = \frac{\tilde{K}_{ij}}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}}, \quad (18.5b)$$

$$\tau = t \alpha_t \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}}. \quad (18.5c)$$

Il est résolu jusqu'à ce qu'un certain pourcentage d'augmentation d'un rayon moyen soit atteint. Le rayon de Sauter a été utilisé dans cette étude dont l'obtention à partir des fractions volumiques est rappelée ci-dessous :

$$r_{32} = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i}{\sum_{i=1}^N \frac{\bar{\alpha}_i}{a_i}}. \quad (18.6)$$

$a_i$  est le rayon de la goutte de volume  $v_i$ .

Afin de voir l'influence des interactions hydrodynamiques, les calculs ont été conduits avec et sans l'efficacité de collision, notée  $E_{ij}$  pour des gouttes de classes  $i$  et  $j$ . Nous avons déterminé le «temps de coalescence» nécessaire pour obtenir une augmentation donnée du rayon de Sauter. Les calculs ont été menés pour des pourcentages d'augmentation de 10, 20, 30, 40 et 50% de  $r_{32}$ .

Les temps de coalescence sont donnés sur le tableau 18.1. Il apparaît clairement que la prise en compte de l'efficacité de collision entraîne une augmentation des temps de coalescence. Il faut pratiquement 1,65 fois plus de temps avec les interactions hydrodynamiques pour obtenir une augmentation de 10% de  $r_{32}$ . Pour une augmentation de 50% de  $r_{32}$ , les temps de coalescence sont multipliés par 1,8.

Pourcentage	Temps de coales. sans $E_{ij}$ (min)	Temps de coales. avec $E_{ij}$ (min)
10%	30, 50	50, 50
20%	58, 58	99, 06
30%	84, 54	145, 87
40%	108, 22	190, 62
50%	129, 06	232, 03

TAB. 18.1 – Temps de coalescence avec ou sans interaction hydrodynamique pour différents accroissements du rayon moyen de Sauter.

En fait, l'introduction de  $E_{ij}$  entraîne une diminution du taux de collision dont l'effet à grande échelle est cette augmentation des temps de coalescence. Les valeurs de  $E_{ij}$  pour des rayons de 5, 10 et 15  $\mu m$  sont données sur la figure 18.1. Ils ont été déterminées en utilisant la méthode numérique développée dans le §6.5. Pour de telle dimension de particules, l'inertie des gouttes a une faible influence. Pour un rayon de 5  $\mu m$ , le nombre de Stokes est de l'ordre de  $3,33 \times 10^{-3}$ . Néanmoins, pour un rayon de 15  $\mu m$ , ce dernier est égal à 0,3. Pour de tel nombre de Stokes, l'effet de l'inertie commence à se faire ressentir surtout pour des particules de mêmes tailles. Par contre, le rôle des forces de van der Waals est important. D'ailleurs, leurs effets sont directement montrés sur la figure 18.1. En effet, nous voyons que l'efficacité de collision diminue avec l'augmentation du rayon résultant des interactions de van der Waals.

Les granulométries pour différentes valeurs de  $r_{32}$  sont données sur les figures 18.2 et 18.3 sans et avec la prise en compte de  $E_{ij}$  respectivement. Il est remarquable de constater que la forme du spectre de gouttes ne change pratiquement pas lorsque  $E_{ij}$  est introduite. Par contre, ces granulométries sont obtenues à des instants différents.

Sur la figure 18.4, l'évolution temporelle des fractions volumiques des cinq premières classes a été tracée. La classe 1 a initialement une fraction volumique unité pour ensuite décroître en fonction du temps. Cette variation suit approximativement une loi hyperbolique. Quant à la classe 2, elle commence par augmenter pour diminuer à partir de  $\tau = 0,5$ . Une comparaison intéressante peut être faite en utilisant la solution de Smoluchowski [131]. Cette dernière s'obtient en supposant que le noyau de collision est le même pour tous les couples de gouttes. Cette solution est obtenue en fonction des concentrations volumiques,  $n_i$ . Si le noyau de collision  $K(v_i, v_j)$  est égal à  $2K$  et en adimensionnant à l'aide de  $K$  et de la concentration initiale, les

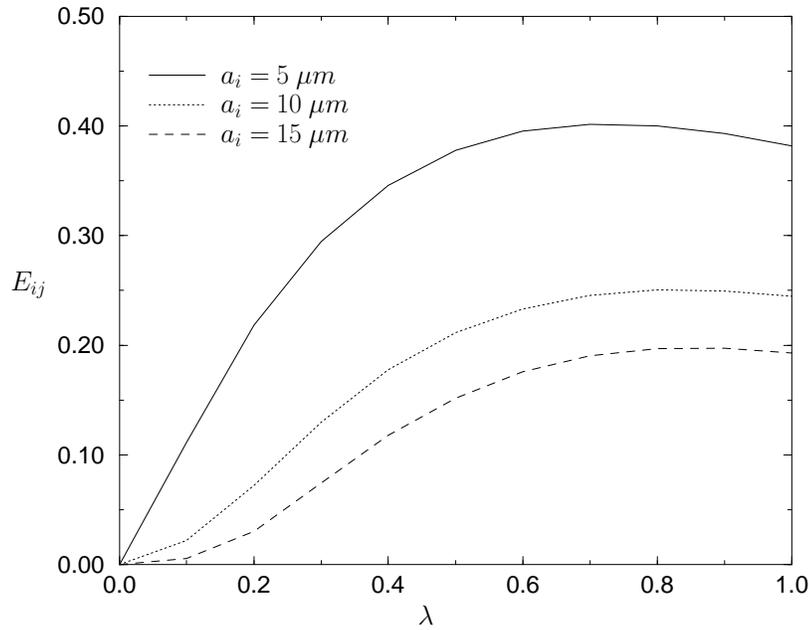


FIG. 18.1 – Efficacité de collision en fonction du rapport des rayons pour un taux de cisaillement de  $\sqrt{\epsilon/\nu} = 102,6 \text{ s}^{-1}$  et pour  $a_i = 5, 10$  et  $15 \text{ }\mu\text{m}$ .

équations de Smoluchowski sont :

$$\frac{d\bar{n}_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{n}_j \bar{n}_{i-j} - 2\bar{n}_i \bar{n}. \quad (18.7)$$

$\bar{n}_i$  sont les concentrations volumiques adimensionnées à l'aide de la concentration maximale initiale.  $\bar{n}$  est la concentration totale en particules.

La solution de Smoluchowski s'obtient en faisant dans un premier temps la somme sur  $i$  de 1 à  $\infty$  des équations (18.7) afin d'obtenir l'équation sur  $\bar{n}$  qui est égale à 1 initialement :

$$\frac{d\bar{n}}{d\tau} = -\bar{n}^2. \quad (18.8)$$

La solution est immédiate et est indiquée ci-dessous :

$$\bar{n}(\tau) = \frac{1}{1 + \tau}. \quad (18.9)$$

Ensuite, la solution pour  $\bar{n}_1$  s'obtient en utilisant directement (18.7). Cette concentration volumique est également égale à 1 pour  $\tau = 0$ . Le résultat est le suivant :

$$\bar{n}_1(\tau) = \frac{1}{(1 + \tau)^2}. \quad (18.10)$$

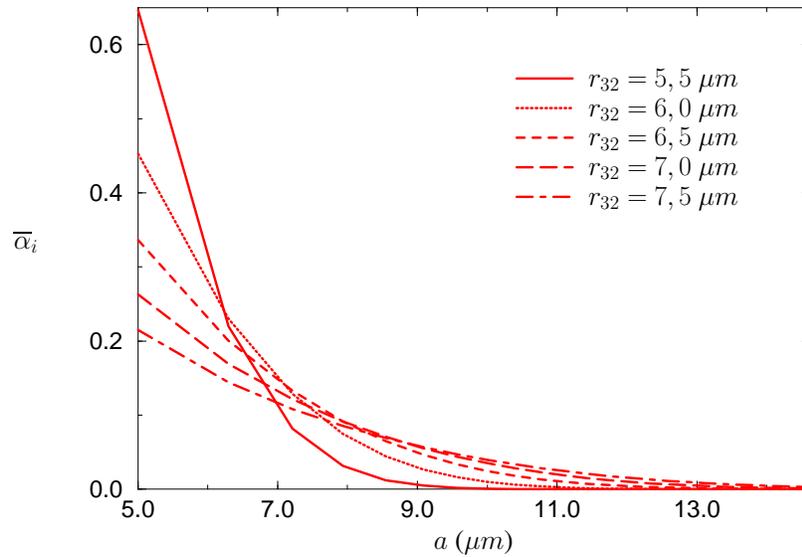


FIG. 18.2 – Granulométrie obtenue sans  $E_{ij}$  pour différentes valeurs du rayon de Sauter.

Pour les concentrations volumiques des classes supérieures, la méthode est la même tout en sachant que les conditions initiales pour  $i > 1$  sont  $\bar{n}_i(0) = 0$ . Par récurrence, il est facile de montrer que la solution générale est :

$$\bar{n}_i(\tau) = \frac{\tau^{i-1}}{(1 + \tau)^{i+1}}. \quad (18.11)$$

Ces résultats peuvent être utilisés pour obtenir les solutions sur les fractions volumiques qui sont égales à  $n_i v_i$  en grandeur dimensionnelle et  $i \bar{n}_i$  en grandeur adimensionnelle. Par conséquent,  $\bar{\alpha}_i(\tau)$  est égale à

$$\bar{\alpha}_i(\tau) = \frac{i \tau^{i-1}}{(1 + \tau)^{i+1}}. \quad (18.12)$$

Sur la figure 18.5, les fractions volumiques pour les trois premières classes sont représentées en utilisant les résultats numériques et la solution de Smoluchowski. Qualitativement, les courbes ont des formes assez similaires. Pour les temps très petits, les deux solutions sont proches. Par contre, les divergences apparaissent avec l'augmentation de  $\tau$ . La solution de Smoluchowski sous-estime la fraction volumique de la première classe. Il s'ensuit une surestimation des autres classes. Par contre, il est remarquable de constater que pour la classe 2, les deux solutions admettent un maximum en  $\tau = 0,5$ .

Les interactions hydrodynamiques dont les effets microscopiques ont été étudiés dans la première partie de ce mémoire ont également un impact sur les effets macroscopiques. L'introduction de  $E_{ij}$  entraîne une augmentation des temps de coalescence. Ainsi, l'élargissement granulométrique demande plus de temps lorsque les interactions hydrodynamiques interviennent. Malheureusement, ce type d'étude souffre d'un manque considérable d'expériences. Ces der-

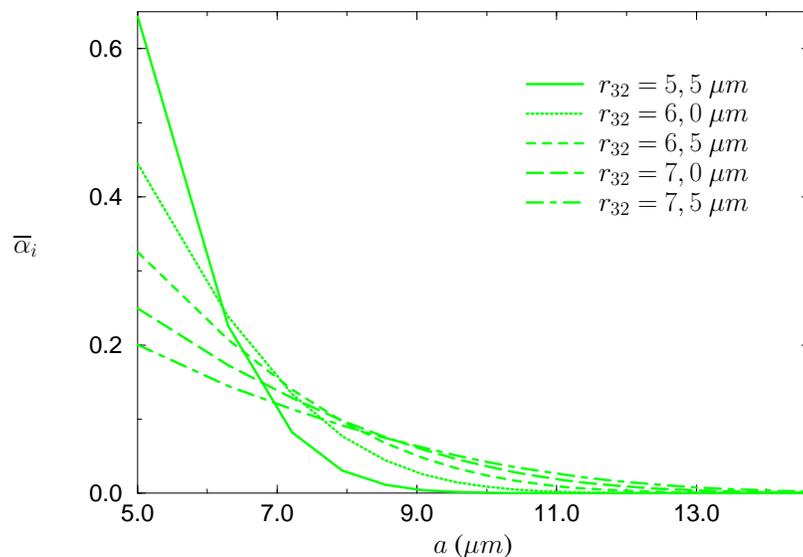


FIG. 18.3 – Granulométrie obtenue avec  $E_{ij}$  pour différentes valeurs du rayon de Sauter.

nières pourraient nous aider sur la justification des hypothèses utilisées et voir leur domaine d'application.

## 18.2 Formation de la bruine

La bruine est caractérisée par des dimensions de gouttes relativement importantes. Les diamètres moyens sont de l'ordre de  $200 \mu m$ . Le passage d'un avion de moyen courrier dans un nuage de bruine en surfusion peut avoir de lourdes conséquences. La présence de grosses gouttes rend inefficace les systèmes de dégivrage. La glace peut se former au delà de ces systèmes. La formation de givre sur les ailes conduit à une réduction des coefficients de portance et à une augmentation des coefficients de traînée [112]. Cette application est surtout motivée par les conditions de formation des nuages de bruine. L'accent est mis sur l'importance de la turbulence dans le mécanisme de collision.

En microphysique des nuages, le noyau de collision couramment utilisé est celui issu de la sédimentation de particules [114]. Ce choix est dû au fait que la différence de vitesse entre les gouttes de tailles différentes est supposée liée uniquement à l'effet de pesanteur. Le taux de collision doit être complété à l'aide d'une efficacité de collision. Mais, la turbulence peut avoir de l'importance. Son introduction sur la modification du taux de collision a été faite par plusieurs auteurs. Les premiers travaux sont l'œuvre de Almeida [34], [35]. Ce dernier a surtout cherché à voir comment l'efficacité de collision est modifiée par la prise en compte de la turbulence. Il trouve que la turbulence entraîne une augmentation de l'efficacité de collision. Plusieurs critiques ont été formulées à l'égard des travaux de Almeida par Pruppacher et Klett [114]. La plus importante de ces critiques est que Almeida utilise pour les vitesses turbu-

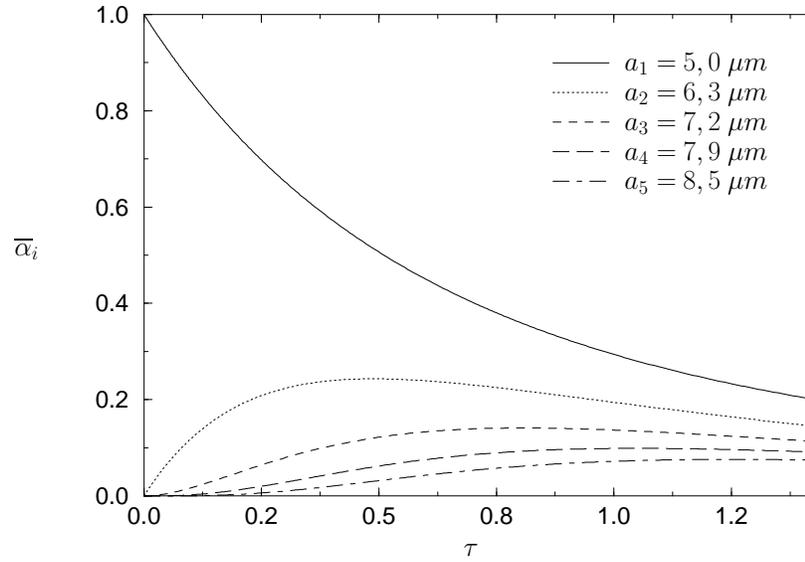


FIG. 18.4 – Concentration volumique en fonction du temps adimensionné pour les 5 premières classes de gouttes.

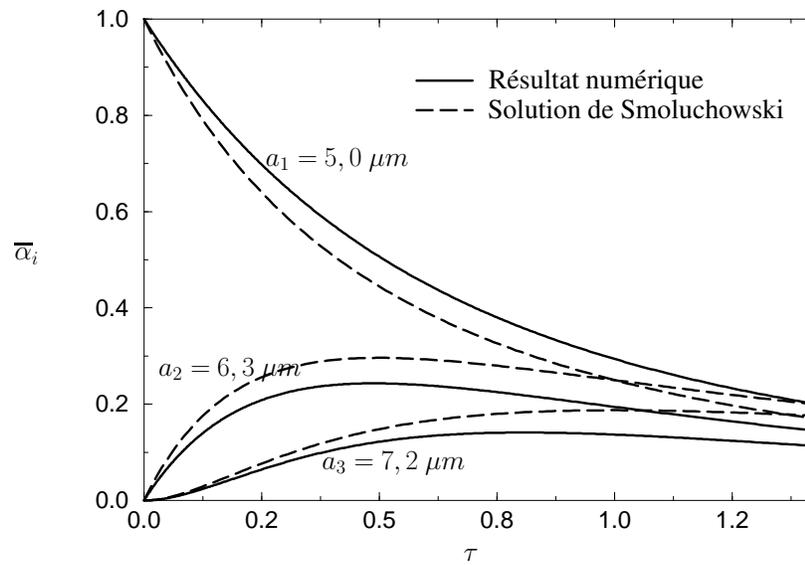


FIG. 18.5 – Comparaison entre la solution de Smoluchowski et le résultat numérique pour les 3 premières classes de gouttes.

lentes les lois d'échelles valides dans la zone inertielle du spectre d'énergie turbulente alors que les distances entre les particules sont inférieures à l'échelle de Kolmogorov. Plus récemment, Koziol et Leighton [84] utilisent les forces déterminées sur des particules solides (cf. [79]). L'écoulement autour des particules est linéarisé. Ce dernier est déterminé par une technique de simulation cinématique de la turbulence. Leurs résultats se révèlent être très différents de ceux de Almeida. Koziol et Leighton montrent que la turbulence n'augmente pas énormément l'efficacité de collision. Ils trouvent même dans certain cas des diminutions.

Une alternative pour mesurer l'effet de la turbulence est de modifier l'expression du noyau de collision. Ce dernier peut être exprimé en faisant apparaître une différence des vitesses entre les gouttes,  $\Delta V$ . Dans le cas d'un fluide au repos,  $\Delta V$  correspond à la différence de vitesse de sédimentation des gouttes. Pinsky et Khain [109] changent l'expression de  $\Delta V$  sous la forme :

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_s^2 + \overline{\Delta V'^2}}. \quad (18.13)$$

$\overline{\Delta V'^2}$  est la variance des vitesses relatives entre les particules. Pinsky et Khain déterminent cette quantité à l'aide d'une analyse spectrale dont les détails sont fournis dans [78]. Le rapport entre  $\sqrt{\overline{\Delta V'^2}}$  et  $\Delta V_s$  peut être supérieur à 1.

Dans cette section, nous allons mettre à profit les résultats établis dans le §11.2. L'évolution granulométrique est étudiée en prenant comme taux de collision celui donné par la relation (11.58). Les résultats obtenus avec la prise en compte de la turbulence sont comparés avec ceux calculés en prenant en compte que les vitesses de sédimentation dans le noyau de collision. Comme les interactions hydrodynamiques sont difficiles à introduire dans les taux de collision, elles sont négligées dans cette étude.

Comme il s'agit de voir la formation de la bruine dans des nuages de type stratus, le taux de dissipation de l'énergie turbulente a été fixé à  $10 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ . Concernant les fluctuations de vitesses, nous prenons  $\sqrt{u^2} = 0,5 \text{ m/s}$ . Initialement, le spectre de gouttes a été pris comme une distribution log-normal de rayon moyen  $10 \mu\text{m}$  et d'écart type  $1,6 \mu\text{m}$ . Les fluctuations des vitesses sont déterminées en utilisant les résultats donnés dans le §10.4.

La méthode numérique exposée lors du précédent chapitre est utilisée avec un échantillonnage logarithmique. Le nombre de classes est de 25. La gamme de rayons est comprise entre 5 et  $500 \mu\text{m}$ . L'adimensionnement est identique à celui utilisé dans le paragraphe précédent.

Sur la figure 18.6, les granulométries du nuage sont obtenues pour des temps de 0, 1, 5 et 10 min en absence de turbulence. Celles obtenues avec la turbulence sont données sur la figure 18.7. Alors que la granulométrie évolue très lentement en fonction du temps en absence de turbulence, la prise en compte de cette dernière entraîne assez rapidement la formation de gouttes de tailles relativement importantes.

Le diamètre volumique médian après 10 min en absence de turbulence est de  $42 \mu\text{m}$  alors qu'il atteint  $204 \mu\text{m}$  avec la turbulence. Ce diamètre est bien caractéristique de la bruine.

La turbulence bien qu'elle soit encore relativement faible se révèle être d'une importance capitale dans l'élargissement du spectre. Encore une fois, nos résultats souffrent d'un manque de comparaison. Néanmoins, Pobanz *et al.* [112] indiquent que des relevés dans des nuages de type stratus font apparaître des formations de gouttes dont la taille est comprise entre 100 et  $500 \mu\text{m}$  de diamètre en quelques dizaines de minutes. Leurs données sont en accord avec les résultats obtenus ici. De plus, Pobanz *et al.* [112] montrent que la présence de larges gouttes est associée à des cisaillements de vents verticaux. Toujours à l'aide d'observations *in situ*, ils indiquent

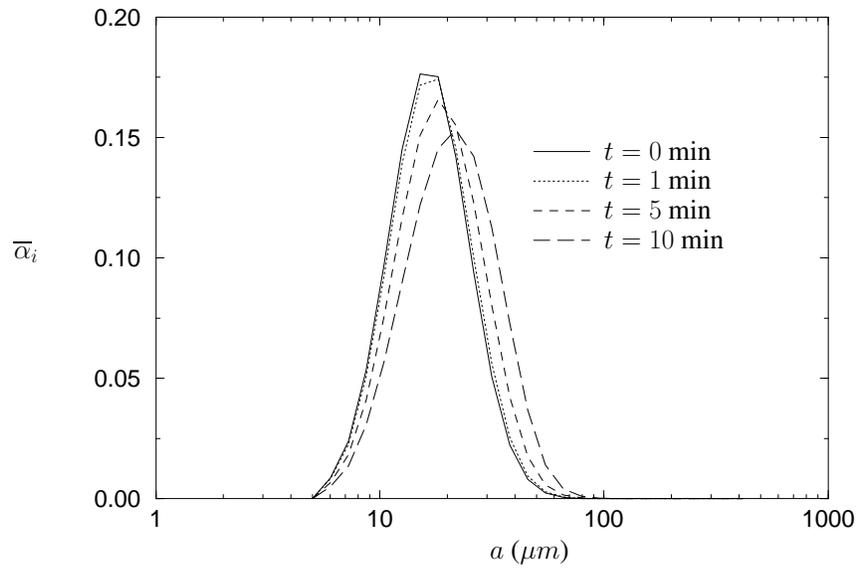


FIG. 18.6 – Granulométries en absence de turbulence.

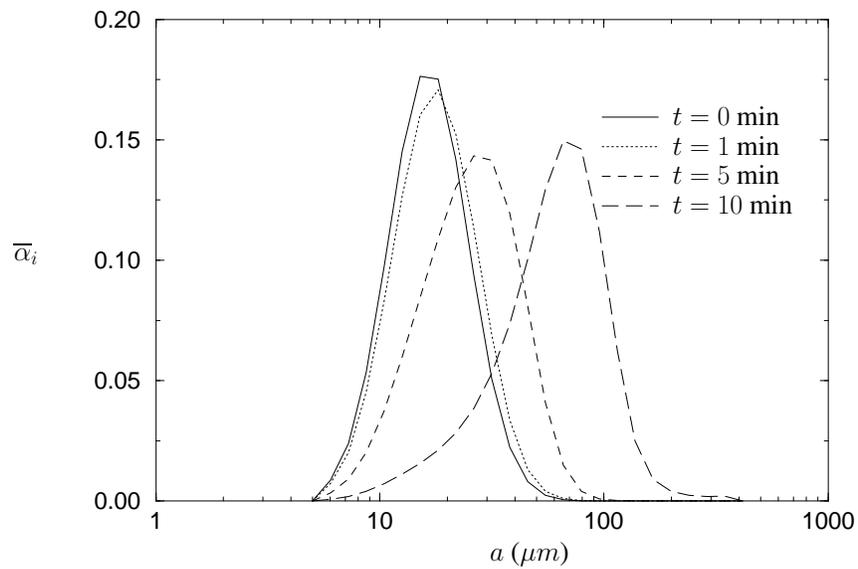


FIG. 18.7 – Granulométries avec la prise en compte de la turbulence.

que l'intensité turbulente est toujours maximale dans cette zone de cisaillement. Ceci permet de bien confirmer le grand rôle de la turbulence dans l'élargissement du spectre de gouttes. Marwitz [96] indique la présence d'un fort cisaillement de vent lors de l'accident mortel de l'avion de type ATR 72 en 1994. Ce cisaillement aurait conduit à la formation de larges gouttes par coalescence. De plus, il indique l'absence de particules de glace dans le nuage en question entraînant l'incapacité du processus de Bergeron de se réaliser (les grandes lignes de ce dernier ont été rappelées dans l'introduction).

Les efforts doivent être poursuivis dans la modélisation. En effet, l'accent a été mis, dans la section précédente, sur l'importance des interactions hydrodynamiques. Les temps nécessaires à l'élargissement du spectre augmentent lorsque les interactions hydrodynamiques sont prises en compte. A terme, ces dernières doivent être introduites dans les modèles de collision en écoulement turbulent d'une façon plus générale. L'autre point important est la présence d'hétérogénéités de la phase dispersée, non étudiées ici. Pourtant, ces effets semblent avoir de l'importance comme le signalent Pinsky et Khain [109]. Ces derniers ont pris en compte les hétérogénéités par une simple modification de l'équation cinétique de Smoluchowski. Ils introduisent au second membre un terme supplémentaire lié au fait que la divergence de la vitesse des particules est différente de zéro [97]. Ensuite, ils associent deux granulométries l'une avec une divergence des vitesses négative et l'autre avec une divergence positive dont les évolutions granulométriques sont obtenues numériquement. A chaque pas de temps, une granulométrie globale est obtenue en moyennant les deux. Leurs résultats font apparaître la formation de larges gouttes en quelques minutes. Néanmoins, cette approche reste très simple. En toute rigueur, il serait nécessaire d'avoir un système d'équations de bilans pour chaque classe de gouttes. Par contre, la résolution d'un tel système devient très lourde de par le nombre important d'équations aux dérivées partielles.

D'autres points restent à éclaircir. Les spectres de gouttes initiaux doivent être déterminés plus précisément. La forme prise dans cette étude a été choisie arbitrairement. Or, des considérations physiques devraient être introduites comme la présence de noyaux de condensation et les lois de nucléation conduisant à la formation de gouttes assez grosses pour croître sous l'effet de la coalescence. Les efforts sur la connaissance de la turbulence atmosphérique doivent être poursuivis. En effet, si les taux de dissipation de l'énergie turbulente sont assez bien connus, il n'en est pas de même des valeurs de l'énergie cinétique turbulente.

## 18.3 Conclusion

La dernière partie de ce mémoire a été consacrée à la variation granulométrique d'un nuage de gouttes sous l'effet de la coalescence. Après avoir rappelé l'équation régissant cette évolution, une méthode numérique a été mise au point dans le chapitre 17.

La première application, §18.1, a été dédiée à la prise en compte des interactions hydrodynamiques. Ces effets sont introduits en multipliant le taux de collision par une efficacité de collision. Cette dernière est calculée par l'utilisation de la méthode développée dans le §6.5. Le taux de collision n'est applicable que pour des gouttes de faibles tailles par rapport à l'échelle de Kolmogorov. Les résultats montrent qu'il est nécessaire d'attendre un temps plus important pour obtenir un accroissement donné du rayon moyen de Sauter lorsque  $E_{ij}$  est introduit.

L'objet du paragraphe 18.2 est une application à la formation de la bruine givrante. Le taux

de collision, utilisé dans ce cadre, est celui déterminé dans le §11.2, relation (11.58). L'influence de la turbulence sur la formation de grosses gouttes a été démontrée clairement. Après 10 min, le diamètre volumique médian du nuage excède  $200 \mu m$  alors qu'il est de l'ordre de  $40 \mu m$  lorsque la turbulence n'est pas prise en compte.



# Chapitre 19

## Conclusion générale

Ce travail avait pour objectifs d'une part d'identifier l'importance de l'inertie des gouttes sur les taux de collision et d'autre part d'estimer l'influence de la coalescence sur le comportement d'un nuage polydisperse.

L'introduction de l'inertie des gouttes dans le calcul des taux de collision nécessite une connaissance approfondie des forces d'interactions hydrodynamiques. Ces dernières sont obtenues ici par la résolution exacte des équations de Stokes régissant les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur des gouttes. La solution exacte a pu être obtenue grâce à l'utilisation des coordonnées bisphériques simplifiant les conditions aux limites. Les efforts ont été recherchés pour des rapports de viscosité quelconques. Grâce à la linéarité des équations de Stokes, la recherche des forces dans le cas le plus général de gouttes se déplaçant avec des vitesses quelconques dans un écoulement linéaire est réalisée par la décomposition en écoulements plus simples. Deux grandes classes de problèmes ont été identifiées, l'un de nature asymétrique et l'autre de caractère axisymétrique. Concernant la détermination des forces dans un champ de vitesse linéaire, trois écoulements de base sont calculés. Le premier est un écoulement de cisaillement suivant la ligne des centres, le deuxième un cisaillement perpendiculaire à la ligne des centres et le dernier un écoulement d'élongation pure. La détermination des forces pour le deuxième cas n'avait jamais été faite jusqu'à ce jour et a été réalisée dans le cadre de ce travail. Une comparaison avec des particules solides nous a permis de confirmer le bien fondé de notre solution. De plus, les relations établies entre les coefficients de frottement pour les écoulements de cisaillement perpendiculaire et parallèle à la ligne des centres permettent d'écrire les forces d'interactions hydrodynamiques sous une forme générale indépendante du référentiel choisi. Les expressions de ces efforts s'apparentent à celles établies pour des particules solides.

Cette première étape ayant été réalisée, les taux de collision en écoulements linéaires ont été obtenus par résolution des équations de mouvement de deux particules interagissantes et recherche des sections de collision. Le rôle de l'inertie a alors pu être identifié. Ce dernier s'avère être très important. Alors que, dans le cas des écoulements de cisaillement simple, l'efficacité de collision est pratiquement nulle à très faible nombre de Stokes, cette quantité devient non négligeable lorsque l'inertie des gouttes est importante. Néanmoins, les seuils des rapports de rayon à partir desquels l'efficacité de collision est différente de zéro ne changent pas avec l'augmentation de l'inertie des gouttes. Le calcul fait pour des nombres de Stokes relativement grands ( $> 5$ ) a permis d'observer de nouveaux faits. Dans un premier temps, l'identification d'un changement dans l'évolution de l'efficacité de collision en fonction du nombre de Stokes a

été observée. Dans un deuxième temps, nous avons pu établir des lois d'échelles. Ces dernières sont très intéressantes car elles permettent de se limiter au calcul pour des gouttes de mêmes tailles et d'en déduire les efficacités pour les autres rapports de rayon. Alors que pour les écoulements de cisaillement simple, ces lois d'échelles ne s'appliquent pas pour tous les nombres de Stokes, elles se révèlent plus largement applicables dans le cas des écoulements d'élongation pure. Il est à noter également que ces lois d'échelles sont différentes pour ces deux types d'écoulement. De plus, une expression approchée a pu être établie pour l'écoulement d'élongation pure. Les forces de van der Waals ont été introduites dans la détermination des taux de collision. Ces dernières se révèlent peu influentes lorsque l'inertie des gouttes est élevée. Les interactions de van der Waals sont surtout importantes pour les petites particules.

Le manque d'universalité dans les expressions du taux de collision en écoulement turbulent nous a conduit à rechercher de nouvelles expressions de cette quantité. Des efforts ont été réalisés dans un premier temps pour bien définir la dispersion de particules en écoulements turbulents. L'accent a été mis sur les notions de turbulence vue par les particules. Par suite, l'obtention des taux de collision est faite dans le cadre d'un formalisme identique à celui de la théorie cinétique des gaz. Le calcul du taux de collision nécessite la connaissance de la fonction de distribution de paire des vitesses des particules. Cette dernière est déterminée par l'utilisation d'une probabilité conditionnelle. Elle requiert la connaissance des fonctions de distribution des vitesses des particules et du fluide vues par les gouttes. En absence de force de gravité, le taux de collision calculé s'avère être en accord avec le modèle de Saffman et Turner [125] lorsque la taille des gouttes est très petite par rapport à l'échelle de Kolmogorov. Dans le cas inverse, les taux de collision approchent ceux déterminés par Abrahamson [2]. De plus, la prise en compte des forces de gravité a été introduite. L'expression du taux de collision dans ce cadre généralise celle calculée par Abrahamson [2].

Ces considérations nous ont permis d'estimer l'évolution granulométrique d'un nuage poly-disperse en écoulement turbulent. Il a fallu dans un premier temps mettre au point une méthode numérique permettant de résoudre l'équation de population d'un nuage de gouttes soumis à des phénomènes de coalescence. Cette méthode a été conçue dans le but de faciliter son implantation numérique. De plus, elle se devait d'avoir de bonnes propriétés de conservation de la masse de la phase dispersée et permettre la prise en compte d'un large spectre de gouttes. Au terme de cette étude, nous avons pu mettre en évidence le rôle important de la turbulence. Ainsi, il a été vu que même dans le cas de nuages de type stratus, peu de temps suffit à la formation de la bruine. Ces résultats confirment les relevés *in situ* où la présence de grosses gouttes est associée à de fort cisaillement de vent vertical. Or, dans ces zones de cisaillement, la turbulence se révèle être relativement importante.

Dans le domaine des taux de collision en écoulements linéaires, les futurs travaux devront porter sur une meilleure compréhension de l'effet de raréfaction du gaz. Il est fort conseillé de déterminer les forces d'interactions hydrodynamiques par l'utilisation de solution exacte et à l'aide des conditions de glissement de Maxwell. Ces calculs peuvent encore se faire à l'aide de la méthode des coordonnées bisphériques.

Les travaux théoriques doivent être poursuivis dans la recherche des taux de collision en écoulement turbulent. Les efforts porteront tout particulièrement sur une introduction rigoureuse des interactions hydrodynamiques. Ces travaux devront s'appuyer sur les résultats obtenus par la simulation directe qui reste à développer. Cette dernière s'appuyera sur l'obtention d'un champ turbulent de bonne qualité.

Les recherches seront à faire sur la coalescence et notamment sur une introduction d'une efficacité de coalescence comme coefficient multiplicateur du noyau de collision dans les équations régissant l'évolution granulométrique d'un nuage. En effet, la collision entre deux gouttes ne s'accompagne pas forcément par une coalescence de ces deux dernières. La collision peut également entraîner la formation de gouttes satellites et les recherches théoriques sont encore ici peu nombreuses.

Dans le domaine de l'évolution granulométrique, les recherches devront se concentrer sur la prise en compte des hétérogénéités dans le nuage de gouttes. Ces effets peuvent être pris en compte par l'établissement des équations de bilans permettant l'introduction implicite de ces hétérogénéités. Une alternative serait de faire des simulations lagrangiennes dans lesquelles les chocs pourraient s'accompagner de coalescence. A cet égard, le code de calcul devant permettre la détermination des taux de collision pourrait servir de base à l'établissement de cette nouvelle simulation.

Une meilleure compréhension de la microphysique des nuages permettrait d'améliorer les études sur la formation des nuages. Le point important concerne un approfondissement sur la connaissance de la turbulence atmosphérique. La recherche de relevés expérimentaux sur ce point est d'ailleurs fort conseillée.



# Annexe A

## Généralisation des relations de récurrence pour $k$ quelconque

Dans cette annexe, les vitesses des particules sont prises égales à zéro. Elles n'interviennent que pour  $k = \pm 1$  et ont été étudiées le §3.2. Nous prenons ici la forme générale des champs de pression et de vitesse (3.16d). La vitesse non-perturbée a également une forme quelconque. L'utilisation des conditions aux limites va nous permettre d'obtenir des relations sur les divers coefficients de  $Q_m^0$  et  $W_m^i$ . La résolution est faite d'une façon identique à celle exposée dans le §3.2.

### A.1 Equation de continuité

L'équation de continuité en coordonnées cylindrique est :

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.1})$$

A l'aide des trois dernières équations de (3.16d), nous obtenons une série harmonique en  $\cos k\theta$  et  $\sin k\theta$  qui doit être imposée à zéro quelle que soit la valeur de  $\theta$ . Ce qui conduit à écrire :

$$3Q_k^0 + \rho \frac{\partial Q_k^0}{\partial \rho} + z \frac{\partial Q_k^0}{\partial z} + c \left( \frac{\partial W_k^1}{\partial \rho} + \frac{(1 + |k|)W_k^1}{\rho} + \frac{\partial W_k^{-1}}{\partial \rho} + \frac{(1 - |k|)W_k^{-1}}{\rho} + 2 \frac{\partial W_k^0}{\partial z} \right) = 0. \quad (\text{A.2})$$

$k$  peut être égale à  $+k$  ou  $-k$ .

Cette dernière relation nous conduit à deux nouvelles équations obtenues en utilisant les relations de récurrence sur les fonctions de Legendre.

$$\begin{aligned}
& 5C_{kn}^0 - (n - |k|)C_{kn-1}^0 + (n + |k| + 1)C_{kn+1}^0 - 2A_{kn}^{-1} + A_{kn-1}^{-1} + A_{kn+1}^{-1} + \\
& 2(n - |k|)(n + |k| + 1)A_{kn}^1 - (n - |k| - 1)(n - |k|)A_{kn-1}^1 - (n + |k| + 1)(n + |k| + 2)A_{kn+1}^1 - \\
& 2(2n + 1)A_{kn}^0 + 2(n - |k|)A_{kn-1}^0 + 2(n + |k| + 1)A_{kn+1}^0 = 0, \tag{A.3a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5D_{kn}^0 - (n - |k|)D_{kn-1}^0 + (n + |k| + 1)D_{kn+1}^0 - 2B_{kn}^{-1} + B_{kn-1}^{-1} + B_{kn+1}^{-1} + \\
& 2(n - |k|)(n + |k| + 1)B_{kn}^1 - (n - |k| - 1)(n - |k|)B_{kn-1}^1 - (n + |k| + 1)(n + |k| + 2)B_{kn+1}^1 + \\
& 2(2n + 1)B_{kn}^0 - 2(n - k)B_{kn-1}^0 - 2(n + |k| + 1)B_{kn+1}^0 = 0. \tag{A.3b}
\end{aligned}$$

D'une façon similaire à celle effectuée par Zinchenko [154], nous introduisons les nouvelles fonctions :

$$\alpha_{kn}(\zeta) = I_{kn}e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + J_{kn}e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}, \tag{A.4a}$$

$$\beta_{kn}(\zeta) = K_{kn}e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + K_{kn}e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}, \tag{A.4b}$$

$$\gamma_{kn}(\zeta) = M_{kn}e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + N_{kn}e^{(n+\frac{1}{2})\zeta}, \tag{A.4c}$$

où  $\alpha_{kn}(\zeta)$ ,  $\beta_{kn}(\zeta)$  et  $\gamma_{kn}(\zeta)$  vérifient les relations suivantes :

$$\alpha_{kn} = 5q_{kn} - 2w_{kn}^{-1} + 2(n - |k|)(n + |k| + 1)w_{kn}^1, \tag{A.5a}$$

$$\beta_{kn-1} = -(n - |k|)q_{kn-1} + w_{kn-1}^{-1} - (n - |k| - 1)(n - |k|)w_{kn-1}^1, \tag{A.5b}$$

$$\gamma_{kn+1} = (n + |k| + 1)q_{kn+1} + w_{kn+1}^{-1} - (n + |k| + 1)(n + |k| + 2)w_{kn+1}^1. \tag{A.5c}$$

Les équations de continuité pour les écoulements interne et externe deviennent :

– pour l'écoulement externe :

$$\begin{aligned}
I_{kn}^e + K_{kn-1}^e + M_{kn+1}^e - 2(2n + 1)A_{kn}^{e0} + 2(n - |k|)A_{kn-1}^{e0} + \\
2(n + |k| + 1)A_{kn+1}^{e0} = 0, \tag{A.6a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{kn}^e + L_{kn-1}^e + N_{kn+1}^e + 2(2n + 1)B_{kn}^{e0} - 2(n - |k|)B_{kn-1}^{e0} - \\
2(n + |k| + 1)B_{kn+1}^{e0} = 0; \tag{A.6b}
\end{aligned}$$

– pour la goutte 1 :

$$I_{kn}^1 + K_{kn-1}^1 + M_{kn+1}^1 - 2(2n + 1)A_{kn}^{10} + 2(n - |k|)A_{kn-1}^{10} + 2(n + |k| + 1)A_{kn+1}^{10} = 0; \tag{A.7}$$

– pour la goutte 2 :

$$J_{kn}^2 + L_{kn-1}^2 + N_{kn+1}^2 + 2(2n + 1)B_{kn}^{20} - 2(n - |k|)B_{kn-1}^{20} - 2(n + |k| + 1)B_{kn+1}^{20} = 0. \tag{A.8}$$

Nous avons les mêmes relations pour  $-k$ .

## A.2 Continuité des vitesses

La condition sur les vitesses est :

$$u_{\rho}^t = u_{\rho}^{\alpha}, \tag{A.9a}$$

$$u_{\theta}^t = u_{\theta}^{\alpha}, \tag{A.9b}$$

$$u_z^t = u_z^{\alpha}. \tag{A.9c}$$

On rappelle que  $\alpha$  vaut 1 ou 2. En identifiant les séries harmoniques terme à terme, nous trouvons :

$$\frac{\rho}{c} Q_k^{t0} + W_k^{t1} + W_k^{t-1} = \frac{\rho}{c} Q_k^{\alpha 0} + W_k^{\alpha 1} + W_k^{\alpha -1}, \quad (\text{A.10a})$$

$$W_k^{t-1} - W_k^{t1} = W_k^{\alpha -1} - W_k^{\alpha 1}, \quad (\text{A.10b})$$

$$\frac{z}{c} Q_k^{t0} + 2W_k^{t0} = \frac{z}{c} Q_k^{\alpha 0} + 2W_k^{\alpha 0}, \quad (\text{A.10c})$$

où  $k = \pm k$ .

En définissant la fonction  $Z_{kn}^\alpha = w_{kn}^{\alpha 0} - w_{kn}^{e0}$ , on obtient après calcul :

$$q_{kn}^\alpha - q_{kn}^e = \frac{2}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n - |k|}{2n - 1} (Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}) + \frac{n + |k| + 1}{2n + 3} (Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}) - \cosh \zeta_\alpha (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) \right], \quad (\text{A.11a})$$

$$w_{kn}^{\alpha -1} - w_{kn}^{e-1} = \frac{1}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{(n - |k| + 1)(n - |k|)}{2n - 1} (Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}) - \frac{(n + |k|)(n + |k| + 1)}{2n + 3} (Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}) \right], \quad (\text{A.11b})$$

$$w_{kn}^{\alpha 1} - w_{kn}^{e1} = \frac{-1}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}}{2n - 1} - \frac{Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}}{2n + 3} \right]. \quad (\text{A.11c})$$

### A.3 Condition de flux de masse nul

La vitesse des gouttes étant nulle, cette condition s'exprime simplement à l'aide de l'équation suivante :

$$\vec{u}^t \cdot \vec{n}^\alpha = 0. \quad (\text{A.12})$$

En se plaçant dans le repère bisphérique, la relation ci-dessus devient

$$u_\zeta^t = 0, \quad (\text{A.13})$$

pour  $\zeta = \zeta_\alpha$ .

Le changement de base entre les systèmes cylindrique et bisphérique permet d'exprimer la composante  $u_\zeta$  sous la forme :

$$u_\zeta = \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{k=0}^{\infty} (u_{\zeta k} \sin k\theta + u_{\zeta -k} \cos k\theta), \quad (\text{A.14})$$

où  $u_{\zeta k}$  vaut

$$u_{\zeta k} = -\cos \eta \sinh \zeta Q_k^0 - \sin \eta \sinh \zeta (W_k^1 + W_k^{-1}) + 2(1 - \cos \eta \cosh \zeta) W_k^0. \quad (\text{A.15})$$

On a la même relation pour  $k = -k$ .

La condition de flux de masse nul est donc réalisée si

$$u_{\zeta k} = 0, \quad (\text{A.16a})$$

$$u_{\zeta -k} = 0. \quad (\text{A.16b})$$

L'utilisation des relations de récurrence des fonctions de Legendre permet d'obtenir le résultat final sous la forme :

$$\frac{\gamma_{kn+1}^t}{2n+3} - \frac{\beta_{kn-1}^t}{2n-1} + \frac{2 \cosh \zeta_\alpha}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{(n-|k|)w_{kn-1}^{t0}}{2n-1} + \frac{(n+|k|+1)w_{kn+1}^{t0}}{2n+3} \right] - \frac{2w_{kn}^{t0}}{\sinh \zeta_\alpha} = 0. \quad (\text{A.17})$$

## A.4 Continuité des contraintes tangentielles

Nous avons vu au §3.2 que la condition sur les contraintes se ramène aux relations scalaires suivantes :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\zeta^t}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\theta^t}{h_b} \right) = \hat{\mu} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\zeta^\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\theta^\alpha}{h_b} \right) \right], \quad (\text{A.18a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^t}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^t}{h_b} \right) = \hat{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta^\alpha}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^\alpha}{h_b} \right) \right]. \quad (\text{A.18b})$$

Les gouttes étant au repos, il n'est pas nécessaire de se placer dans un référentiel lié aux gouttes. L'utilisation de la condition de flux de masse nul réduit celle sur les contraintes à

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\theta^t}{h_b} \right) = \hat{\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\theta^\alpha}{h_b} \right), \quad (\text{A.19a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^t}{h_b} \right) = \hat{\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta^\alpha}{h_b} \right). \quad (\text{A.19b})$$

La composante de la vitesse suivant l'axe  $\eta$ ,  $u_\eta$ , peut également se mettre sous la forme :

$$u_\eta = \frac{1}{\cosh \zeta - \cos \eta} \sum_{k=0}^{\infty} (u_{\eta k} \sin k\theta + u_{\eta -k} \cos k\theta), \quad (\text{A.20})$$

où  $u_{\eta k}$  vaut

$$u_{\eta k} = -\sin \eta \cosh \zeta Q_k^0 + (\cos \eta \cosh \zeta - 1) (W_k^1 + W_k^{-1}) - 2 \sin \eta \sinh \zeta W_k^0. \quad (\text{A.21})$$

On a la même relation pour  $k = -k$ .  $u_{\eta k}$  est également déterminée en fonction de  $u_{\zeta k}$  :

$$u_{\eta k} = \frac{-1}{\sin \eta} \left[ (\cosh \zeta - \cos \eta) Q_k^0 + \frac{2(\cosh \zeta - \cos \eta)^2}{\sinh \zeta} W_k^0 + \frac{\cos \eta \cosh \zeta - 1}{\sinh \zeta} u_{\zeta k} \right]. \quad (\text{A.22})$$

La condition sur les contraintes devant être vérifiée quelle que soit la valeur de  $\theta$ , nous avons la relation suivante pour la composante suivant  $\eta$  :

$$\left( \frac{\partial u_{\eta k}^t}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha} = \hat{\mu} \left( \frac{\partial u_{\eta k}^\alpha}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha}. \quad (\text{A.23})$$

La dérivée par rapport à  $\zeta$  de  $u_{\eta k}$  est alors pour l'écoulement externe :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_{\eta k}^t}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=\zeta_\alpha} &= \frac{-1}{\sin \eta} \left[ \frac{3}{2} \sinh \zeta_\alpha Q_k^{t0} + 3(\cosh \zeta - \cos \eta) W_k^{t0} + \right. \\ &\quad \left. \sin^2 \eta \cosh \zeta_\alpha \frac{DQ_k^{t0}}{\partial \zeta} + 2 \sinh \zeta_\alpha \sin^2 \eta \frac{DW_k^{t0}}{\partial \zeta} \right. \\ &\quad \left. - (\cos \eta \cosh \zeta_\alpha - 1) \sin \eta \frac{D(W_k^{t1} + W_k^{t-1})}{\partial \zeta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Il est possible de faire apparaître les fonctions  $\beta_{kn}$  et  $\gamma_{kn}$ . Dans le calcul, nous avons besoin également des relations permettant d'exprimer les quantités  $q_{kn}$ ,  $w_{kn}^1$  et  $w_{kn}^{-1}$  en fonction de  $\alpha_{kn}$ ,  $\beta_{kn}$  et  $\gamma_{kn}$ . Ces dernières sont données ci-dessous :

$$3(2n+1)q_{kn} = (2n+1)\alpha_{kn} + 2(n+|k|+1)\beta_{kn} + 2(n-|k|)\gamma_{kn}, \quad (\text{A.25a})$$

$$6|k|(2n+1)w_{kn}^1 = (2n+1)\alpha_{kn} + (2n+2|k|+5)\beta_{kn} + (2n-2|k|-3)\gamma_{kn}, \quad (\text{A.25b})$$

$$6|k|(2n+1)w_{kn}^{-1} = (2n+1)(n+1-|k|)(n+|k|)\alpha_{kn} + (n+|k|)(n+|k|+1) \quad (\text{A.25c})$$

$$(2n+5-2|k|)\beta_{kn} + (n-|k|+1)(n-|k|)(2n+2|k|-3)\gamma_{kn}. \quad (\text{A.25d})$$

La condition suivant l'axe  $\eta$  devient :

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} \sinh \zeta_\alpha (q_{kn}^t - \hat{\mu} q_{kn}^\alpha) + 3 \left[ \cosh \zeta_\alpha (w_{kn}^{t0} - \hat{\mu} w_{kn}^{\alpha 0}) - \frac{n-|k|}{2n-1} (w_{kn-1}^{t0} - \hat{\mu} w_{kn-1}^{\alpha 0}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n+|k|+1}{2n+3} (w_{kn+1}^{t0} - \hat{\mu} w_{kn+1}^{\alpha 0}) \right] + \cosh \zeta_\alpha \left[ \frac{dq_{kn}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_{kn}^\alpha}{d\zeta} + \frac{n-|k|}{(2n-1)(2n-3)} \right. \\ &\quad \left( \frac{d\beta_{kn-2}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_{kn-2}^{(\alpha)}}{d\zeta} \right) - \frac{n-|k|}{(2n+1)(2n-1)} \left( \frac{d\gamma_{kn}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_{kn}^\alpha}{d\zeta} \right) - \\ &\quad \frac{n+|k|+1}{(2n+3)(2n+5)} \left( \frac{d\gamma_{kn+2}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_{kn+2}^\alpha}{d\zeta} \right) + \frac{n+|k|+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &\quad \left( \frac{d\beta_{kn}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_{kn}^{(\alpha)}}{d\zeta} \right) \left. \right] + 2 \sinh \zeta_\alpha \left[ \frac{2(n^2+n-1+k^2)}{(2n+3)(2n-1)} \left( \frac{dw_{kn}^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_{kn}^{\alpha 0}}{d\zeta} \right) - \right. \\ &\quad \frac{(n-|k|)(n-|k|-1)}{(2n-1)(2n-3)} \left( \frac{dw_{kn-2}^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_{kn-2}^{\alpha 0}}{d\zeta} \right) - \frac{(n+|k|+1)(n+|k|+2)}{(2n+3)(2n+5)} \\ &\quad \left( \frac{dw_{kn+2}^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_{kn+2}^{\alpha 0}}{d\zeta} \right) \left. \right] - \frac{1}{2n-1} \left( \frac{d\beta_{kn-1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_{kn-1}^\alpha}{d\zeta} \right) - \frac{n-|k|}{2n-1} \\ &\quad \left( \frac{dq_{kn-1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_{kn-1}^\alpha}{d\zeta} \right) + \frac{1}{2n+3} \left( \frac{d\gamma_{kn+1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_{kn+1}^\alpha}{d\zeta} \right) \\ &\quad - \frac{n+|k|+1}{2n+3} \left( \frac{dq_{kn+1}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_{kn+1}^\alpha}{d\zeta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

L'utilisation des équations de continuité des vitesses à l'interface permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\beta_{kn}^\alpha - \beta_{kn}^t = \frac{2}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ (n+1 - |k|) \cosh \zeta_\alpha (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} (Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}) \right], \quad (\text{A.27a})$$

$$\gamma_{kn}^\alpha - \gamma_{kn}^t = \frac{2}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n(2n+1)}{2n-1} (Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}) - (n+|k|) \cosh \zeta_\alpha (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) \right]. \quad (\text{A.27b})$$

Comme dans le §3.2, la fonction  $f_{kn}^\pm$  est définie :

$$f_{kn}^\pm = \frac{\frac{df_{kn}}{d\zeta} \pm \hat{\mu}(n + \frac{1}{2})f_{kn}}{(n + \frac{1}{2})(\hat{\mu} + 1)}. \quad (\text{A.28})$$

Il est alors possible de trouver :

$$\frac{dw_{kn}^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dw_{kn}^{\alpha 0}}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} [(\hat{\mu} + 1)w_{kn}^{t\pm} \pm \hat{\mu}(Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0})], \quad (\text{A.29a})$$

$$\frac{dq_{kn}^{t0}}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{dq_{kn}^{\alpha 0}}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} \left\{ (\hat{\mu} + 1)q_{kn}^{t\pm} \pm \frac{2\hat{\mu}}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n-|k|}{2n-1} (Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}) + \frac{n+|k|+1}{2n+3} (Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}) - \cosh \zeta_\alpha (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) \right] \right\}, \quad (\text{A.29b})$$

$$\frac{d\beta_{kn}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\beta_{kn}^\alpha}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} \left\{ (\hat{\mu} + 1)\beta_{kn}^{t\pm} \pm \frac{2\hat{\mu}}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ (n+1 - |k|) \cosh \zeta_\alpha (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} (Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}) \right] \right\}, \quad (\text{A.29c})$$

$$\frac{d\gamma_{kn}^t}{d\zeta} - \hat{\mu} \frac{d\gamma_{kn}^\alpha}{d\zeta} = \frac{2n+1}{2} \left\{ (\hat{\mu} + 1)\gamma_{kn}^{t\pm} \pm \frac{2\hat{\mu}}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n(2n+1)}{2n-1} (Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}) - (n - |k|) \cosh \zeta_\alpha (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) \right] \right\}. \quad (\text{A.29d})$$

La condition de continuité des contraintes suivant l'axe  $\eta$  s'écrit finalement sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \frac{3(\hat{\mu} - 1)}{\hat{\mu} + 1} \left[ \sinh \zeta_\alpha q_{kn}^t + 2 \left( \cosh \zeta_\alpha w_{kn}^{t0} - \frac{n - |k|}{2n - 1} w_{kn-1}^{t0} - \frac{n + |k| + 1}{2n + 3} w_{kn+1}^{t0} \right) \right] + \\
& \cosh \zeta_\alpha \left[ \frac{n + |k| + 1}{2n + 3} (\gamma_{kn+2}^{t\pm} - \beta_{kn}^{t\pm}) + \frac{n - |k|}{2n - 1} (\gamma_{kn}^{t\pm} - \beta_{kn-2}^{t\pm}) - (2n + 1) q_{kn}^{t\pm} \right] + \\
& 2 \sinh \zeta_\alpha \left[ \frac{(n - |k|)(n - |k| - 1)}{2n - 1} w_{kn-2}^{t\pm} + \frac{(n + |k| + 1)(n + |k| + 2)}{2n + 3} w_{kn+2}^{t\pm} - \right. \\
& \left. \frac{2(n^2 + n + k^2 - 1)(2n + 1)}{(2n - 1)(2n + 3)} w_{kn}^{t\pm} \right] \\
& + \beta_{kn-1}^{t\pm} - \gamma_{kn+1}^{t\pm} + (n - |k|) q_{kn-1}^{t\pm} + (n + |k| + 1) q_{kn+1}^{t\pm} + \\
& \frac{4\hat{\mu}}{(\hat{\mu} + 1) |\sinh \zeta_\alpha|} \left\{ \frac{(n - |k| - 1)(n - |k|)}{(2n - 1)(2n - 3)} (Z_{kn-2}^\alpha - w_{kn-2}^{\infty 0}) \right. \\
& \left. - \frac{2(n - 1)(n - |k|)}{(2n - 1)^2} \cosh \zeta_\alpha (Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}) + \right. \\
& \left. \frac{2}{2n + 1} \left[ \frac{2(n^2 + n + k^2 - 1)}{(2n + 3)(2n - 1)} - 1 \right] (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) + \frac{2(n + 2)(n + |k| + 1)}{(2n + 3)^2} \cosh \zeta_\alpha \right. \\
& \left. (Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}) - \frac{(n + |k| + 1)(n + |k| + 2)}{(2n + 3)(2n + 5)} (Z_{kn+2}^\alpha - w_{kn+2}^{\infty 0}) \right\} = 0. \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant tirer partie de la condition sur les contraintes tangentielles suivant l'axe  $\theta$ . Toujours à partir de l'expression de la divergence, on montre que l'on a pour chaque harmonique  $k$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{\zeta k}^t}{\partial \zeta^2} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 u_{\zeta k}^\alpha}{\partial \zeta^2} - \frac{3 \sinh \zeta_\alpha}{\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta} \left( \frac{\partial u_{\zeta k}^t}{\partial \zeta} - \hat{\mu} \frac{\partial u_{\zeta k}^\alpha}{\partial \zeta} \right) + \\
& \frac{3 \sinh \zeta_\alpha \sin \eta}{(\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta)^2} (u_{\eta k}^t - \hat{\mu} u_{\eta k}^\alpha) - \frac{2 \sin \eta}{\cosh \zeta_\alpha - \cos \eta} \left( \frac{\partial u_{\eta k}^t}{\partial \zeta} - \hat{\mu} \frac{\partial u_{\eta k}^\alpha}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (\text{A.31})
\end{aligned}$$

En utilisant les expressions donnant  $u_{\zeta k}$  et  $u_{\eta k}$  en fonction de  $Q_k^0$  et  $W_k^i$  et la condition de flux de masse nul, la relation ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{D}{\partial \zeta} (Q_k^{t0} - \hat{\mu} Q_k^{\alpha 0}) - \cos \eta \sinh \zeta_\alpha \frac{D^2}{\partial \zeta^2} (Q_k^{t0} - \hat{\mu} Q_k^{\alpha 0}) + 2 (W_k^{t0} - \hat{\mu} W_k^{\alpha 0}) \\
& + 2 (1 - \cosh \zeta_\alpha \cos \eta) \frac{D^2}{\partial \zeta^2} (W_k^{t0} - \hat{\mu} W_k^{\alpha 0}) - \\
& \sin \eta \sinh \zeta_\alpha \frac{D^2}{\partial \zeta^2} [W_k^{t1} + W_k^{t-1} - \hat{\mu} (W_k^{\alpha 1} + W_k^{\alpha -1})] = 0, \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

En utilisant les relations de récurrence sur les fonctions de Legendre, on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
q_{kn}^{t\pm} &= \frac{2(1 - \hat{\mu})}{\hat{\mu} + 1} \left[ \frac{\sinh \zeta_\alpha}{2n + 3} \gamma_{kn+1}^t + \frac{2(n + |k| + 1) \cosh \zeta_\alpha}{2n + 3} w_{kn+1}^{t0} - w_{kn}^{t0} \right] \\
& \mp \frac{\hat{\mu}}{2(\hat{\mu} + 1)} X_{kn}^\alpha, \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

avec  $X_{kn}^\alpha$  donnée par

$$X_{kn}^\alpha = \frac{4}{\sinh \zeta_\alpha} \left[ \frac{n - |k|}{2n - 1} (Z_{kn-1}^\alpha - w_{kn-1}^{\infty 0}) + \frac{n + |k| + 1}{2n + 3} (Z_{kn+1}^\alpha - w_{kn+1}^{\infty 0}) + \left( \frac{|\sinh \zeta_\alpha|}{2n + 1} - \cosh \zeta_\alpha \right) (Z_{kn}^\alpha - w_{kn}^{\infty 0}) \right]. \quad (\text{A.34})$$

L'ensemble des relations qui vient d'être établi dans cette annexe généralise les résultats de Zinchenko [154]. Ces conditions peuvent servir de base au calcul des écoulements produits par des harmoniques d'ordre supérieur à 1.

# Annexe B

## Vecteurs et tenseurs en coordonnées bisphériques

Cette annexe établit les diverses relations permettant d'exprimer les changements de base entre les différents systèmes de coordonnées utilisés dans ce mémoire. L'expression générale du tenseur des contraintes dans le repère bisphérique est également donnée. Nous utilisons les développements théoriques sur l'analyse tensorielle présenté par Aris [5] et l'appendice du livre de Happel et Brenner [56].

### B.1 Les changements de bases

Le dessin ci-dessous présente la relation entre les systèmes cartésien et cylindrique.

Les relations entre  $x, y, z$  et  $\rho, \theta$  sont :

$$x = \rho \cos \theta, \quad (\text{B.1a})$$

$$y = \rho \sin \theta, \quad (\text{B.1b})$$

$$z = z. \quad (\text{B.1c})$$

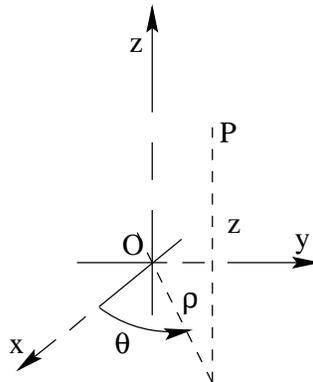


FIG. B.1 – *Passage du repère cartésien au système de référence cylindrique.*

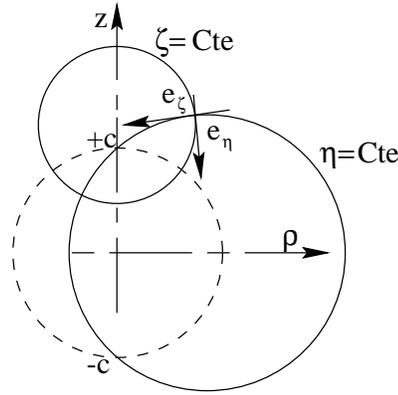


FIG. B.2 – Passage du repère cylindrique au système de référence bisphérique.

La matrice de passage de  $(O; \vec{x}; \vec{y}; \vec{z})$  à  $(O; \vec{e}_\rho; \vec{e}_\theta; \vec{z})$  est la suivante :

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

On rappelle que la matrice  $\mathbf{P}_1$  est orthogonale.

Nous employons dans ce mémoire le système de coordonnées bisphériques. Il faut être en mesure d'exprimer les changements de base entre les référentielles  $(O; \vec{e}_\rho; \vec{e}_\theta; \vec{z})$  et  $(O; \vec{e}_\zeta; \vec{e}_\eta; \vec{z})$  (cf. figure B.2).

La recherche des vecteurs  $\vec{e}_\zeta$  et  $\vec{e}_\eta$  en fonction de  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{z}$  est faite de la façon suivante. A partir des expressions de  $z$  et de  $\rho$  exprimées en fonction de  $\zeta$  et de  $\eta$ , on trouve les composantes de  $\vec{e}_\zeta$  en dérivant  $\rho$  et  $z$  par rapport à  $\zeta$ . Pour les composantes de  $\vec{e}_\eta$ ,  $\rho$  et  $z$  sont dérivés par rapport à  $\eta$ . Après normalisation, nous obtenons le résultat suivant :

$$\vec{e}_\zeta = \frac{-\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} \vec{e}_\rho + \frac{1 - \cosh \zeta \cos \eta}{\cosh \zeta - \cos \eta} \vec{z}, \quad (\text{B.3a})$$

$$\vec{e}_\eta = -\frac{1 - \cosh \zeta \cos \eta}{\cosh \zeta - \cos \eta} \vec{e}_\rho - \frac{\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} \vec{z}. \quad (\text{B.3b})$$

A partir de ces relations, la matrice de passage de  $(O; \vec{e}_\rho; \vec{e}_\theta; \vec{z})$  à  $(O; \vec{e}_\zeta; \vec{e}_\eta; \vec{z})$  est obtenue facilement.

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} & 0 & -\frac{1 - \cosh \zeta \cos \eta}{\cosh \zeta - \cos \eta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1 - \cosh \zeta \cos \eta}{\cosh \zeta - \cos \eta} & 0 & -\frac{\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

La matrice  $\mathbf{P}_2$  est également orthogonale.

## B.2 Expression de la vitesse dans le repère bisphérique

A l'aide des matrices de passage, il est facile d'exprimer les composantes physiques de la vitesse dans le système de coordonnées bisphériques. En effet, si  $X_c$  et  $X_b$  représentent les

matrices colonnes contenant les composantes d'un vecteur quelconque dans les systèmes cylindrique et bisphérique respectivement, on a la relation suivante :

$$X_b = \mathbf{P}_2^{-1} \cdot X_c. \quad (\text{B.5})$$

Le produit matricielle de cette dernière relation donne pour les composantes de la vitesse :

$$u_\zeta = -\frac{\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_\rho + \frac{1 - \cos \eta \cosh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_z, \quad (\text{B.6a})$$

$$u_\eta = -\frac{1 - \cos \eta \cosh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_\rho - \frac{\sin \eta \sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} u_z. \quad (\text{B.6b})$$

### B.3 Tenseur des contraintes dans le repère bisphérique

Afin d'utiliser les notations indicielles, le système de coordonnées rectilignes est noté  $y^1, y^2$  et  $y^3$ . Pour le système bisphérique, on pose :

$$x^1 = \zeta, \quad (\text{B.7a})$$

$$x^2 = \theta, \quad (\text{B.7b})$$

$$x^3 = \eta. \quad (\text{B.7c})$$

Le tenseur métrique covariant, défini par la relation

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \quad (\text{B.8})$$

est diagonal. Cette propriété est liée au caractère orthogonal du système de coordonnées bisphériques. Dans ce cas de figure, il est possible de définir les facteurs métriques :

$$h_i = \sqrt{g_{ii}}, \quad (\text{B.9})$$

sans sommation sur l'indice  $i$ .

Dans notre application, les facteurs métriques sont :

$$h_1 = h_3 = h_b = \frac{c}{\cosh \zeta - \cos \eta}, \quad (\text{B.10a})$$

$$h_2 = \rho = \frac{c \sin \eta}{\cosh \zeta - \cos \eta}. \quad (\text{B.10b})$$

Le tenseur des contraintes a la forme générale suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{e}, \quad (\text{B.11})$$

où  $\mathbf{1}$  représente le tenseur unité,  $\mathbf{e}$  est le tenseur des taux de déformation. La divergence de la vitesse a été prise égale à zéro.

La recherche du tenseur des contraintes revient à déterminer celui des taux de déformation. Les composantes covariantes de ce dernier sont :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (\text{B.12})$$

où  $u_{i,j}$  est la dérivée covariante de la vitesse. Les composantes contravariantes et covariantes de  $e$  sont reliées par la relation :

$$e^{ij} = g^{ik} g^{jl} e_{kl}. \quad (\text{B.13})$$

$g^{ij}$  est le tenseur inverse de  $g_{ij}$ .

La dérivée covariante de  $u_i$  est définie ainsi

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} u_k. \quad (\text{B.14})$$

Dans le cas d'un système de coordonnées orthogonales, les symboles de Christoffel sont plus simples à calculer :

– si  $i \neq j \neq k$  :

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad (\text{B.15})$$

– si  $i \neq j$  ou  $i = j$  :

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ i \ j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j}, \quad (\text{B.16})$$

– sinon :

$$\left\{ \begin{matrix} j \\ i \ i \end{matrix} \right\} = -\frac{h_i}{h_j^2} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \quad (\text{B.17})$$

Après avoir calculé l'ensemble de nos symboles de Christoffel, nous pouvons déterminer les dérivées covariantes de la vitesse et donc obtenir le tenseur des taux de déformation.

La dernière étape du calcul est la recherche des composantes physiques définies par Truesdell [143] du tenseur de taux de déformation. Ces dernières sont notées  $e_{(ij)}$  et sont données dans le cas d'un système orthogonal par :

$$e_{(ij)} = \frac{e_{ij}}{h_i h_j}. \quad (\text{B.18})$$

Après le calcul de  $e_{(ij)}$ , il est possible d'obtenir les composantes physiques du tenseur des

contraintes. Le résultat final est donné ci-dessous :

$$\sigma_{\zeta\zeta} = -p + \frac{2\mu}{h_b} \left( \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{1}{h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \eta} u_\eta \right), \quad (\text{B.19a})$$

$$\sigma_{\zeta\theta} = \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} - \frac{1}{h_b \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} u_\theta + \frac{1}{h_b} \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \right), \quad (\text{B.19b})$$

$$\sigma_{\zeta\eta} = \mu \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_\zeta}{h_b} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_\eta}{h_b} \right) \right], \quad (\text{B.19c})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + \frac{2\mu}{\rho} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{h_b} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} u_\eta + \frac{1}{h_b} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} u_\zeta \right), \quad (\text{B.19d})$$

$$\sigma_{\theta\eta} = \mu \left( \frac{1}{h_b} \frac{\partial u_\theta}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\eta}{\partial \theta} - \frac{1}{h_b \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} u_\theta \right), \quad (\text{B.19e})$$

$$\sigma_{\eta\eta} = -p + \frac{2\mu}{h_b} \left( \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{h_b} \frac{\partial h_b}{\partial \zeta} u_\zeta \right). \quad (\text{B.19f})$$

$u_\zeta$ ,  $u_\eta$  et  $u_\theta$  sont les composantes physiques du vecteur vitesse.



# Annexe C

## Calcul du moment exercé sur une goutte

Le moment exercé sur une goutte  $\alpha$  calculé au centre de cette dernière est :

$$\vec{M}_{O_\alpha} = \int_{S_\alpha} \vec{x} \wedge (\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n}) dS. \quad (\text{C.1})$$

$\vec{x}$  est un vecteur qui a pour origine le centre de la goutte et pour extrémité un point à la surface de cette dernière.

Il est facile de voir que l'on a  $\vec{x} = a_\alpha \vec{n}$ . La contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n}$  peut être décomposée en deux composantes, l'une normale et l'autre tangentielle à la surface.

$$\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n} = \sigma^t \vec{n} + \vec{\tau}^t. \quad (\text{C.2})$$

Il est évident de voir que

$$\vec{n} \wedge (\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n}) = \vec{n} \wedge \vec{\tau}^t. \quad (\text{C.3})$$

Or d'après les conditions de continuité des contraintes tangentielles, on a :

$$\vec{\tau}^t = \vec{\tau}^\alpha. \quad (\text{C.4})$$

D'où on peut écrire :

$$\vec{n} \wedge (\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \vec{n}) = \vec{n} \wedge \vec{\tau}^t = \vec{n} \wedge (\boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \vec{n}). \quad (\text{C.5})$$

Le moment exercé sur la goutte  $\alpha$  est alors :

$$\vec{M}_{O_\alpha} = \int_{S_\alpha} \vec{x} \wedge (\boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \vec{n}) dS. \quad (\text{C.6})$$

Sous cette forme nous pouvons utiliser le théorème d'Ostrograsky. La composante du moment suivant l'axe  $x_i$  est alors :

$$\mathcal{M}_i = \int_{V_\alpha} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV + \int_{V_\alpha} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} dV. \quad (\text{C.7})$$

Le tenseur de contrainte étant symétrique, le premier terme du membre de droite de la relation ci-dessus est nul. Les équations de Stokes correspondent à :

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Ce qui entraîne que le second terme est également nul. Donc le moment exercé sur une goutte est identiquement nul et ce quel que soit l'écoulement externe.



# Annexe D

## Méthode de Bretherton

Bretherton [19] utilise les propriétés de linéarité et de réversibilité des équations de Stokes. Ainsi, si le champ de vitesse change de signe il en résulte également un changement de signe sur les forces hydrodynamiques s'appliquant sur une goutte plongée dans cet écoulement. De même, Bretherton [19] stipule qu'une symétrie miroir appliquée à l'écoulement a les mêmes effets sur les forces s'exerçant sur une particule. Ces propriétés peuvent servir à la détermination des composantes des forces non nulles s'appliquant sur des gouttes. Regardons dans un premier temps, le cas d'un écoulement de cisaillement dans le plan  $(O, x, y)$ . Les deux gouttes sont situées sur l'axe  $z$ . La situation est représentée sur la figure D.1.

*A priori*, les composantes des forces s'appliquant aux gouttes sont toutes différentes de zéro. Dans un premier temps, l'inversion de l'écoulement change le signe des composantes des forces. Cette nouvelle situation est représentée en trait discontinu sur la figure D.1. Afin de retrouver l'écoulement initial, on applique maintenant une symétrie miroir par rapport au plan  $(0, x, z)$ . Nous remarquons alors que les composantes des forces suivant les axes  $x$  et  $z$  sont de signe opposé par rapport à ce qui avait été supposé initialement. Comme l'écoulement à l'infini s'avère identique à celui de la situation initiale, et par unicité de la solution des équations de Stokes ces deux composantes doivent être nulles. Il nous reste donc qu'une seule composante. Maintenant, appliquons une symétrie miroir par rapport au plan  $(O, y, z)$ , la composante suivant l'axe  $y$  n'a pas été modifiée. Pour retrouver la situation initiale, l'écoulement doit être inversé. Par conséquent, la composante des forces suivant l'axe  $y$  change de signe. De nouveau, l'écoulement étant identique à la situation de base, la composante  $y$  ne peut être que nulle. Ainsi, nous venons de démontrer que pour un écoulement de cisaillement suivant l'axe  $x$ , les forces qui agissent sur les gouttes sont identiquement nulles.

Ce type de raisonnement peut être appliqué de la même façon pour un écoulement de cisaillement suivant l'axe  $y$ . Par suite, un écoulement linéaire quelconque de vitesse nulle suivant l'axe  $z$  ne donne aucune force sur les gouttes situées sur ce même axe. Ceci résulte du fait qu'un écoulement quelconque peut toujours être décomposé en une somme d'écoulements de cisaillement simple.

La méthode de Bretherton permet également de démontrer que pour un écoulement de cisaillement de gradient  $\gamma_{zx}$ , la seule composante non nulle est située suivant l'axe  $x$ . Ce qui permet de retrouver le résultat démontré dans le §3.1.



# Annexe E

## Méthode d'intégration des systèmes raides

Soit le système d'équations différentielles à  $N$  inconnues suivant

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{y}(t)], \quad (\text{E.1})$$

où  $\mathbf{y}(t)$  et  $\mathbf{f}$  sont des vecteurs colonnes à  $N$  lignes. Il s'agit de prendre en compte le fait que  $\mathbf{f}$  peut subir de fortes variations au cours de l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Une méthode d'Euler pourrait être utilisée sous la forme suivante :

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \Delta t \{ \mathbf{f}[\mathbf{y}(t_n)] + \mathbf{A}(t_n) \cdot [\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n)] \}, \quad (\text{E.2})$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$  dont les composantes sont définies par

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}. \quad (\text{E.3})$$

Ainsi, la détermination de  $\mathbf{y}(t_{n+1})$  requiert la résolution du système linéaire suivant :

$$[\mathbf{1} - \Delta t \mathbf{A}] \cdot [\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n)] = \Delta t \mathbf{f}[\mathbf{y}(t_n)]. \quad (\text{E.4})$$

Cette méthode d'Euler généralisée présente bien un caractère semi-implicite dans le sens où elle nécessite la résolution d'un système linéaire. Il est également possible de généraliser la méthode de Runge-Kutta. Ainsi, dans celle développée par Kaps et Rentrop [77], la solution de  $\mathbf{y}(t)$  est déterminée par :

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \sum_{i=1}^4 c_i \mathbf{k}_i, \quad (\text{E.5})$$

où les incréments  $\mathbf{k}_i$  sont obtenus par la résolution des systèmes suivants :

$$[\mathbf{1} - \gamma_{11} \Delta t \mathbf{A}] \cdot \mathbf{k}_i = \Delta t \mathbf{f}[\mathbf{y}(t_n) + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{k}_j] + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \mathbf{k}_j. \quad (\text{E.6})$$

Nous employons pour les coefficients  $c_i$ ,  $\gamma_{ij}$  et  $\alpha_{ij}$ , indépendants du problème considéré, ceux donnés dans le livre de Stoer et Bulirsh [135] :

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,545211088; c_2 = 0,30148648; c_3 = 0,177064668; c_4 = -0,0237622363. \\ \gamma_{11} &= \gamma_{22} = \gamma_{33} = \gamma_{44} = 0,22042841; \\ \gamma_{21} &= 0,822867461; \gamma_{31} = 0,695700194; \gamma_{41} = 3,90481342; \gamma_{43} = 1; \\ \alpha_{21} &= -0,545211088; \alpha_{31} = 0,252787696; \alpha_{41} = 0,252787696; \alpha_{32} = 1; \alpha_{42} = 1. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Les coefficients qui n'ont pas été spécifiés sont égaux à zéro.

Il est possible de contrôler le pas de temps en estimant l'erreur de calcul. Pour ce faire, une estimation de la solution du système d'équations différentielles est faite à l'ordre 3 sous la forme :

$$\hat{\mathbf{y}}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \sum_{i=1}^3 \hat{c}_i \mathbf{k}_i, \quad (\text{E.8})$$

où les coefficients  $\hat{c}_i$  utilisés sont :

$$\hat{c}_1 = -0,162871035; \hat{c}_2 = 1,1821536; \hat{c}_3 = -0,0192825995. \quad (\text{E.9})$$

L'erreur est déterminée de la façon suivante :

$$E_r = \max_{i=1}^N \{|y_i(t_{n+1}) - \hat{y}_i(t_{n+1})|\}. \quad (\text{E.10})$$

La détermination du nouveau pas de temps est faite par l'utilisation de la relation :

$$\Delta t^{new} = 0,9 \Delta t^4 \sqrt{\frac{\epsilon \Delta t}{E_r}}. \quad (\text{E.11})$$

$\epsilon$  est une tolérance qui est fixée en fonction de la précision souhaitée.

# Annexe F

## Interpolation du champ de vitesses

La présentation est tout d'abord effectuée dans le cas monodimensionnel. Ensuite, l'interpolation d'un champ tridimensionnel est examinée.

### F.1 Interpolation monodimensionnelle par spline cubique

Soit une fonction,  $f(x)$ , connue de façon discrète pour des valeurs de  $x$  égales à  $x_i$ .  $f_i$  représente la valeur de  $f(x)$  en  $x_i$ . L'indice  $i$  varie de 1 à  $N$ . L'interpolation par spline cubique sur l'intervalle  $[x_i; x_{i+1}[$  de  $f(x)$  s'écrit sous la forme<sup>1</sup> :

$$f(x) = \sum_{k=-1}^2 g^k(\beta_i) \tilde{f}_{i+k}, \quad (\text{F.1})$$

où  $\beta_i$  est défini par

$$\beta_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (\text{F.2})$$

Les fonctions  $g^k(\beta)$  sont déterminés de façon à assurer la continuité des valeurs de  $f(x)$  mais également de ces dérivées première et seconde en  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . Elles sont données par les relations suivantes :

$$g^{-1}(\beta) = \frac{1}{6} (1 - \beta)^3, \quad (\text{F.3a})$$

$$g^0(\beta) = \frac{1}{6} (3\beta^3 - 6\beta^2 + 4), \quad (\text{F.3b})$$

$$g^1(\beta) = \frac{1}{6} (-3\beta^3 + 3\beta^2 + 3\beta + 1), \quad (\text{F.3c})$$

$$g^2(\beta) = \frac{\beta^3}{6}. \quad (\text{F.3d})$$

Concernant les quantités  $\tilde{f}_i$ , elles sont déterminées en écrivant que pour  $\beta = 0$  la relation (F.1) donne  $f_i$  :

$$\frac{1}{6} \tilde{f}_{i-1} + \frac{2}{3} \tilde{f}_i + \frac{1}{6} \tilde{f}_{i+1} = f_i. \quad (\text{F.4})$$

---

<sup>1</sup>Par abus de notation, l'interpolé de la fonction  $f(x)$  est également noté  $f(x)$ .

Cette dernière relation étant écrite pour  $i$  variant de 1 à  $N$ , nous obtenons alors un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues. Pour  $i = 1$ , les conditions de périodicité sont utilisées. Il en de même en  $i = N$ . Ainsi, le système à résoudre a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{f}_{N-1} \\ \tilde{f}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}. \quad (\text{F.5})$$

Grace à la résolution du système ci-dessus, il devient alors possible de déterminer l'interpolation de la fonction  $f(x)$ .

## F.2 Interpolation tridimensionnelle par spline cubique

Considérons une fonction  $f(x, y, z)$  définie de façon discrète sur les points du maillage dont les nœuds sont repérés par  $x_i$ ,  $y_j$  et  $z_k$ .  $i$  varie de 1 à  $N_x$ ,  $j$  de 1 à  $N_y$  et  $k$  de 1 à  $N_z$ . Pour  $x \in [x_i; x_{i+1}[$ ,  $y \in [y_j; y_{j+1}[$  et  $z \in [z_k; z_{k+1}[$ , l'interpolation de  $f(x, y, z)$  est déterminée par la relation suivante :

$$f(x, y, z) = \sum_{l=-1}^2 \sum_{m=-1}^2 \sum_{n=-1}^2 g^l(\beta_i) g^m(\gamma_j) g^n(\delta_k) \tilde{\tilde{f}}_{i+l, j+m, k+n}, \quad (\text{F.6})$$

où  $\beta_i$ ,  $\gamma_j$  et  $\delta_k$  sont donnés par

$$\beta_i = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \gamma_j = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}, \quad \delta_k = \frac{z - z_k}{z_{k+1} - z_k}. \quad (\text{F.7})$$

Les fonctions  $g$  ne changent pas par rapport au cas monodimensionnel. La détermination de  $\tilde{\tilde{f}}_{i,j,k}$  est faite par trois étapes successives. La première étape consiste à déterminer  $\tilde{f}_{i,j,k}$  par la résolution du système linéaire suivant :

$$\sum_{l=1}^{N_x} A_{i,l}^x \tilde{f}_{l,j,k} = f_{i,j,k}, \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } N_x. \quad (\text{F.8})$$

Cette résolution doit être répétée pour l'ensemble des valeurs de  $j$  et de  $k$ . Il s'ensuit qu'il est nécessaire de résoudre  $N_y \times N_z$  systèmes pour connaître la totalité de  $\tilde{f}_{i,j,k}$ . La matrice  $\mathbf{A}^x$  est identique à celle donnée dans le cas monodimensionnel. De la même façon, la deuxième étape consiste à déterminer  $\tilde{\tilde{f}}_{i,j,k}$  par la résolution des systèmes :

$$\sum_{m=1}^{N_y} A_{j,m}^y \tilde{\tilde{f}}_{i,m,k} = \tilde{f}_{i,j,k}, \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } N_y. \quad (\text{F.9})$$

Et la troisième étape permet d'obtenir  $\tilde{\tilde{f}}_{i,j,k}$  à l'aide de la résolution des systèmes suivants :

$$\sum_{n=1}^{N_z} A_{k,n}^z \tilde{\tilde{f}}_{i,j,n} = \tilde{\tilde{f}}_{i,j,k}, \text{ pour } k = 1 \text{ à } N_z. \quad (\text{F.10})$$

Au total,  $\tilde{\tilde{f}}_{i,j,k}$  nécessite la résolution de  $N_y \times N_z + N_x \times N_z + N_x \times N_y$  systèmes linéaires.

Dans le cas de l'interpolation du champ de vitesse, il est nécessaire de refaire l'interpolation pour chaque nouveau pas de temps. Comme les matrices  $\mathbf{A}^x$ ,  $\mathbf{A}^y$  et  $\mathbf{A}^z$  ne changent pas en fonction du temps, elles peuvent être inversées au début de la simulation. Ensuite les résolutions des divers systèmes se fait par de simples produits de matrices. Cependant, les temps de calcul restent assez longs.



# Bibliographie

- [1] S. Abid and A. K. Chesters. The drainage and rupture of partially-mobile films between colliding drops at constant approach velocity. *Int. J. Multiphase Flow*, 20(3) :613–629, 1994.
- [2] J. Abrahamson. Collision rate of small particles in a vigorously turbulent fluid. *Chemical Engineering Science*, 30 :1371–1379, 1975.
- [3] J. L. Achard. Contribution à l'étude théorique des écoulements diphasiques en régime transitoire. Doctorat, Université scientifique et médicale et Institut National Polytechnique de Grenoble, 1978.
- [4] P.M. Adler. Heterocoagulation in shear flow. *J. Colloid Interface Sci.*, 83(1) :106–115, 1981.
- [5] R. Aris. *Vectors, Tensors and the basic equation of fluid mechanics*. Dover Publications, Inc, New York, 1962.
- [6] G. L. Babukha, L. E. Sternin, and A. A. Shraider. Calculation of two-phase losses in nozzles with coagulation and breaking of condensate drops. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhidk. i Gaza*, 1 :175–177, 1971.
- [7] G. K. Batchelor. Diffusion in a field of homogeneous turbulence, I. Eulerian analysis. *Austr. J. Sci. Res. A*, 2 :437–450, 1949.
- [8] G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, 1953.
- [9] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [10] G. K. Batchelor. Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction. *J. Fluid Mech.*, 74 :1–29, 1976.
- [11] G. K. Batchelor. Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres. part 1. general theory. *J. Fluid Mech.*, 119 :379–408, 1982.
- [12] G. K. Batchelor. Corrigendum. *J. Fluid Mech.*, 137 :467–469, 1983.
- [13] G. K. Batchelor and J. T. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ . *J. Fluid Mech.*, 56(3) :401–427, 1972.
- [14] G. K. Batchelor and J. T. Green. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. *J. Fluid Mech.*, 56(2) :375–400, 1972.
- [15] G. K. Batchelor and C.-S. Wen. Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres. part 2. numerical results. *J. Fluid Mech.*, 124 :495–528, 1982.

- [16] J. M. Beeckmans. Coagulation of uncharged aerosols. *Can. J. Chem.*, 43 :2312–2318, 1965.
- [17] A. Berlemont, R. Desjonquères, and G. Gouesbet. Particle Lagrangian simulation in turbulent flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 16(1) :19–34, 1990.
- [18] R. G. Boothroyd. *Flowing gas-solid suspensions*. Chapman and Hall Ltd, 1971.
- [19] F. P. Bretherton. The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 14 :284–304, 1962.
- [20] B. K. Brunk, D. L. Koch, and L. W. Lion. Hydrodynamic pair diffusion in isotropic random velocity fields with application to turbulent coagulation. *Phys. Fluids*, 9(9) :2670–2691, 1997.
- [21] T. R. Camp and P. C. Stein. Velocity gradients and internal work in fluid motion. *J. Boston Soc. Civil Engrs.*, 30 :219–237, 1943.
- [22] S. Chandrasekhar. Stochastic problems in physics and astronomy. *Rev. Mod. Phys.*, 15 :1–89, 1943.
- [23] M. Chaoui. Migration d’une particule proche d’une paroi en écoulement de cisaillement. Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1995.
- [24] F. Charpin and J. Prieur. Large scale icing tests in the ONERA S1MA windtunnel. Current capabilities and planned improvements. In *19th AIAA advanced measurement and ground testing conference, New Orleans, LA (USA), June 18-20, 1996*.
- [25] C. Chauvin. Influence des forces d’interactions particulières dans la simulation lagrangienne du comportement de particules en sédimentation et écoulements turbulents. Doctorat, Faculté des sciences de l’université de Rouen, 1991.
- [26] A. K. Chesters. The modelling of coalescence processes in fluid-liquid dispersions : A review of current understanding. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 69 :259–270, 1991.
- [27] W. D. Mc Comb. *The physics of fluid turbulence*. The Oxford Engineering Science. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [28] C. Corduneanu. *Integral equation and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [29] S. Corrsin. Theories of turbulent dispersion. In *Mécanique de la turbulence, Colloq. Inter.*, pages 27–52, Marseille, 28 août-2 septembre 1962. C.N.R.S.
- [30] G. T. Csanady. Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere. *J. Atmosph. Sci.*, 20 :201–208, 1963.
- [31] M. H. Davis. Collisions of small cloud droplets : Gas kinetic effects. *J. Atmos. Sci.*, 29 :911–915, 1972.
- [32] R. H. Davis. The rate of coagulation of a dilute polydisperse system of sedimenting spheres. *J. Fluid Mech.*, 145 :179–199, 1984.
- [33] R. H. Davis, J. A. Schonberg, and J. M. Rallison. The lubrication force between two viscous drops. *Phys. Fluids A*, 1(1) :77–81, 1989.
- [34] F. C. de Almeida. The collisional problem of cloud droplets moving in a turbulent environment. Part I : A method of solution. *J. Atmos. Sci.*, 33 :1571–1578, 1976.

- [35] F. C. de Almeida. The collisional problem of cloud droplets moving in a turbulent environment. Part II : Turbulent collision efficiencies. *J. Atmos. Sci.*, 36 :1564–1576, 1979.
- [36] M. J. Kampé de Fériet. Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène. *Ann. Soc. Sci. de Bruxelles*, 16 :145–194, 1939.
- [37] W. R. Dean and M. E. O'Neill. A slow motion of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere. *Mathematika*, 10 :13–24, 1963.
- [38] M. A. Delichatsios and R. F. Probstein. Coagulation in turbulent flow : Theory and experiment. *J. Coll. Inter. Sci.*, 51(3) :394–405, 1975.
- [39] I. V. Derevich and L. I. Zaichik. Particle deposition from a turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhid. i Gaza*, 5 :96–104, 1987.
- [40] E. Deutsch. Dispersion de particules dans une turbulence homogène isotrope stationnaire calculée par simulation numérique directe des grandes échelles. Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [41] K. Domelevo. Analyse mathématique et numérique d'une modélisation cinétique d'un brouillard de gouttelettes dans un écoulement gazeux turbulent. Doctorat, Ecole Polytechnique, 1996.
- [42] K. Domelevo and L. Sainsaulieu. Une méthode numérique pour le calcul de la dispersion d'un nuage de particules par un écoulement gazeux turbulent. *C. R. Acad. Sci. Paris, série I*, 323 :85–90, 1996.
- [43] T. Elperin, N. Kleorin, and I. Rogachevskii. Self-excitation of fluctuations of inertial particle concentration in turbulent fluid flow. *Phys. Rev. Lett.*, 77(27) :5373–5376, 1996.
- [44] J. R. Fessler, J. D. Kulick, and J. K. Eaton. Preferential concentration of heavy particles in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 6(11) :3742–3749, 1994.
- [45] C. A. J. Fletcher. *Computational techniques for fluid dynamics, Volume I : Fundamental and general techniques*. Springer Verlag, Heidelberg, 1991.
- [46] U. Frisch. *Turbulence, The legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [47] N. A. Fuchs. *The mechanics of aerosols*. Pergamon press, 1964.
- [48] R. Gatignol. The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow. *J. Méca. Th. et appl.*, 1(2) :143–160, 1983.
- [49] F. Gelbart and J. H. Seinfeld. Numerical solution of the dynamic equation for particulate systems. *J. Comp. Phys.*, 28 :357–375, 1978.
- [50] S. S. Girimaji and S. B. Pope. A diffusion model for velocity gradients in turbulence. *Phys. Fluid A*, 2 :242, 1990.
- [51] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, San-Diego, 1965.
- [52] H. P. Greenspan and M. Ungarish. On hindered of particles of different sizes. *Int. J. Multiphase Flow*, 8(6) :587–604, 1982.
- [53] S. Haber, G. Hetsroni, and A. Solan. On the low Reynolds number motion of two droplets. *Int. J. Multiphase Flow*, 1 :57–71, 1973.

- [54] J. Hadamard. Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 152 :1735–1738, 1911.
- [55] H. C. Hamaker. The London-van der Waals attraction between spherical particles. *Physica*, 4 :1058–1072, 1937.
- [56] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1973.
- [57] G. Hetsroni and S. Haber. The flow in and around a droplet or bubble submerged in an unbounded arbitrary velocity field. *Rheologica Acta*, 9 :488–496, 1970.
- [58] G. Hetsroni and S. Haber. Low Reynolds number motion of two drops submerged in an unbounded arbitrary velocity field. *Int. J. Multiphase Flow*, 4 :1–17, 1978.
- [59] K. Higashitani, R. Ogawa, G. Hosokawa, and Y. Matsuno. Kinetic theory of shear coagulation for particles in a viscous fluid. *J. Chem. Eng. Japan*, 15(4) :299–304, 1982.
- [60] K. Higashitani, K. Yamauchi, Y. Matsuno, and G. Hosokawa. Turbulent coagulation of particles dispersed in a viscous fluid. *J. Chem. Eng. Japan*, 16(4) :299–304, 1983.
- [61] J. O. Hinze. Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes. *AIChE Journal*, 1-3 :289–295, 1955.
- [62] J. O. Hinze. *Turbulence, An introduction to its mechanism and theory*, chapter 5, pages 352–364. Mc Graw Hill Books Comp., 1959.
- [63] J. O. Hinze. Turbulent fluid and particle interaction. *Prog. Heat Mass Transfer*, 6 :433–452, 1972.
- [64] L. M. Hocking. The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent spheres. *J. of Engineering Math.*, 7(3) :207–221, 1973.
- [65] L. M. Hocking and P. R. Jonas. The collision efficiency of small drops. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 96 :722–729, 1970.
- [66] H. M. Hulburt and T. Akiyama. Liouville equations for agglomeration and dispersion processes. *I. & E. C. Fundamentals*, 8-2 :319–324, 1969.
- [67] H. M. Hulburt and S. Katz. Some problems in particles technology. *Chem. Engng. Sci.*, 19 :555–574, 1964.
- [68] M. Ishii. *Thermo-fluids Dynamics Theory of Two-Phase Flow*. Eyrolles, Paris, 1975.
- [69] J. N. Israelachvili. *Intermolecular and surface forces*. Academic Press, London, 1985.
- [70] G.B. Jeffery. On a form of the solution of Laplace's equation suitable for problems relating to two spheres. *Proc. Roy. Soc. Lon.*, 87 :109–120, 1912.
- [71] D. J. Jeffrey. Low Reynolds number flow between converging spheres. *Mathematika*, 29 :58–66, 1982.
- [72] D. J. Jeffrey. The calculation of the low Reynolds number resistance functions for two unequal spheres. *Phys. Fluids, A*, 4(1) :16–29, 1992.
- [73] D. J. Jeffrey and Y. Onishi. Calculation of the resistance and mobility functions for two unequal rigid spheres in low-Reynolds-number flow. *J. Fluid Mech.*, 139 :261–290, 1984.
- [74] J. T. Jenkins and S. B. Savage. A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *J. Fluid Mech.*, 130 :187–202, 1983.

- [75] P. R. Jonas. The collision efficiency of small drops. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 98 :681–683, 1972.
- [76] P. R. Jonas. Turbulence and cloud microphysics. *Atmospheric Research*, 40 :283–306, 1996.
- [77] P. Kaps and P. Rentrop. Generalized Runge-Kutta methods of order four with stepsize control for stiff ordinary differential equations. *Numer. Math.*, 33 :55–68, 1979.
- [78] A. P. Khain and M. B. Pinsky. Drop inertia and its contribution to turbulent coalescence in convective cloud. part i : Drop fall in the flow with random horizontal velocity. *J. Atm. Sci.*, 52(2) :196–206, 1995.
- [79] S. Kim and S. J. Karrila. *Microhydrodynamics. Principles and selected applications*. Butterworth-Heinemann, Boston, 1991.
- [80] S. Kim and R. T. Mifflin. The resistance and mobility functions of two equal spheres in low-Reynolds-number flow. *Phys. Fluids*, 28(7) :2033–2045, 1985.
- [81] G. Kocamustafaogullari, S. R. Smits, and J. Razi. Maximum and mean droplet sizes in annular two-phase flow. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 37(6) :955–965, 1994.
- [82] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proc. R. soc. Lond. A (publication originale dans Dokl. Akad. Nauk. SSSR (1941) 30(3))*, 434 :9–13, 1991.
- [83] A. Kovetz and B. Olund. The effect of coalescence and condensation on rain formation in a cloud of finite vertical extent. *J. Atmos. Sci.*, 26 :1060–1065, 1969.
- [84] A. S. Koziol and H. G. Leighton. The effect of small-scale turbulence on the collision rates of cloud drops. In *12<sup>th</sup> Inter. Conf. on Clouds and Precipitations, Zurich, Switzerland 19-23 August*, pages 113–116, 1996.
- [85] R. H. Kraichnan. Diffusion by a random velocity field. *Phys. Fluids*, 13(1) :22–31, 1970.
- [86] P. Kuentzmann. *Aérothermochimie des Suspensions*, volume 72 of *Mémoires de sciences physiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1973.
- [87] K. Launay, D. Huilier, and H. Burnage. Simulation numérique de la dispersion de particules lourdes : considération sur la turbulence vue par la particule. *C. R. Acad. Paris*, t 324, Série II b :315–322, 1997.
- [88] J. Laviéville. Simulation numériques et modélisation des interactions entre l’entraînement par la turbulence et les collisions interparticulaires en écoulements gaz-solide. Doctorat, Université de Rouen, 1997.
- [89] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, 103 :16–42, 1992.
- [90] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*, volume 40 of *Fluid mechanics and its applications*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, third edition, 1997.
- [91] V. G. Levich. *Physicochemical hydrodynamics*. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1962.
- [92] D. M. Levins and J. R. Glastonbury. Particle-liquid hydrodynamics and mass transfer in a stirred vessel. *trans. Inst. Chem. Engrs.*, 50 :32–41, 1972.

- [93] C. J. Lin. *Statistical mechanical theory of shock waves and suspensions*. PhD thesis, University of Washington, 1968.
- [94] C. J. Lin, K. J. Lee, and N. F. Sather. Slow motion of two spheres in a shear field. *J. Fluid Mech. (UK)*, 43(1) :35–47, 1970.
- [95] S. K. Loyalka and J. H. Ferziger. Model dependence of the slip coefficient. *Phys. Fluids*, 10(8) :1833–1839, 1967.
- [96] J. Marwitz. A forecast and verification experiment for supercooled large drops (SLD). In *Int. Conf. on Aircraft Inflight Icing, Springfield Virginia, May 6-8*, pages 301–306, 1996.
- [97] M. R. Maxey. The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields. *J. Fluid Mech.*, 174 :441–465, 1987.
- [98] M. R. Maxey and J. J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluids*, 26((4)) :883–889, 1983.
- [99] D. H. Michael and P. W. Norey. Particle collision efficiencies for a sphere. *J. Fluid Mech.*, 37(3) :565–575, 1969.
- [100] M. E. O’Neill. A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere. *Mathematika*, 11 :67–74, 1964.
- [101] M. E. O’Neill and S. R. Majumdar. Asymmetrical slow viscous fluid motions caused by the translation or rotation of two spheres. Part I : The determination of exact solutions for any values of the ratio of radii and separation parameters. *Z. Angew. Math. Phys.*, 21 :164–179, 1970.
- [102] M. E. O’Neill and S. R. Majumdar. Asymmetrical slow viscous fluid motions caused by the translation or rotation of two spheres. Part II : Asymptotic forms of the solutions when the minimum clearance between the spheres approaches zero. *Z. Angew. Math. Phys.*, 21 :180–187, 1970.
- [103] F. Pigeonneau and F. Feuillebois. Détermination des forces d’interactions sur deux gouttes de rayons différents dans un écoulement linéaire quelconque. In *12<sup>ème</sup> Journée d’Etudes et de Recherches sur les Aérosols*, pages 51–56, Paris, 4 et 5 décembre 1996.
- [104] F. Pigeonneau and F. Feuillebois. Effect of inertia of droplets on collision efficiency in a linear flow field. In *3rd European Fluid Mechanics Conference, Books of Abstracts*, page 119, Göttingen, 15-18 september 1997.
- [105] F. Pigeonneau and F. Feuillebois. Evolution du spectre de gouttes en écoulement turbulent homogène et isotrope. In *13<sup>ème</sup> Congrès Etudes et de Recherche sur les Aérosols*, pages 71–76, Paris, 2-3 décembre 1997.
- [106] F. Pigeonneau and F. Feuillebois. Trajectoires et collision de gouttes dans un écoulement à taux de déformation constant. In *13<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, volume 1, pages 305–308, Poitiers-Futuroscope, 1-5 septembre 1997.
- [107] F. Pigeonneau and F. Feuillebois. Collision and size evolution of drops in homogeneous isotropic turbulence. *J. Aerosol Sci.*, 29 :S1279–S1280, 1998.
- [108] F. Pigeonneau and F. Feuillebois. Drag forces on two drops embedded in a general linear flow field. *Z. Angew. Math. Mech.*, 78(S2) :S665–S666, 1998.

- [109] M. B. Pinsky and A. P. Khain. Turbulence effects on droplet growth and size distribution in clouds—a review. *J. Aerosol Sci.*, 28(7) :1177–1214, 1997.
- [110] N. Piskounov. *Calcul différentiel et intégral*. Editions Mir, Moscou, 1980.
- [111] L. M. Pismen and A. Nir. On the motion of suspended particles in stationary homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 84 :193–206, 1978.
- [112] B. M. Pobanz, J. D. Marwitz, and M. K. Politovich. Conditions associated with large-drop regions. *J. Applied Meteorology*, 33 :1366–1372, 1994.
- [113] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [114] H. R. Pruppacher and J. D. Klett. *Microphysics of clouds and precipitation*, chapter 14, pages 594–598. D. Reidel publishing company, second edition, 1997.
- [115] D. Ramkrishna. The status of population balances. *Rev. Chem. Engng.*, 3-1 :49–95, 1985.
- [116] L. D. Reed and F. A. Morrison. Particle interactions in viscous flow at small values of Knudsen number. *Aerosol Science*, 5(2) :175–189, 1974.
- [117] M. W. Reeks. On the dispersion of small particles suspended in an isotropic turbulent fluid. *J. Fluid Mech.*, 83(3) :529–546, 1977.
- [118] M. W. Reeks. On the kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows. *Phys. Fluids A*, 3(3) :446–456, 1991.
- [119] M. W. Reeks. On the continuum equations for dispersed particles in nonuniform flows. *Phys. Fluids A*, 4(6) :1290–1303, 1992.
- [120] W. B. Russel, D. A. Saville, and W. R. Schowalter. *Colloidal dispersions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [121] W. Rybczynski. Über die fortschreitende bewegung einer flussigen kugel in einem zähen medium. *Bull. de l'Acad. des Sci. de Cracovie*, pages 40–46, 1911.
- [122] A. Saboni, C. Gourdon, and A. K. Chesters. Drainage and rupture of partially mobile films during coalescence in liquid-liquid systems under a constant interaction force. *J. Col. Int. Sci.*, 175 :27–35, 1995.
- [123] S. S. Sadhal and R. E. Johnson. Stokes flow past bubbles and drops partially coated with thin films. Part 1. Stagnant cap of surfactant film - exact solution. *J. Fluid Mech.*, 126 :237–250, 1983.
- [124] P. G. Saffman. An approximate calculation of the Lagrangian auto-correlation coefficient for stationary homogeneous turbulence. *Appl. Sci. Res., A*, 11 :245–255, 1963.
- [125] P. G. Saffman and J. S. Turner. On the collision of drops in turbulent clouds. *J. Fluid Mech.*, 1 :16–30, 1956.
- [126] L. Sainsaulieu. Equilibrium velocity distribution function for a kinetic model of two-phase flows. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 5(2), 1995.
- [127] L. Schwartz. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann, Paris, 1961.
- [128] J. H. Seinfeld. *Atmospheric chemistry and physics of air pollution*, chapter 9-10. Wiley, New York, 1986.

- [129] M. Sevik and S. H. Park/1973. The splitting of drops and bubbles by turbulent fluid flow. *J. Fluid Engng.*, Trans. ASME 95 :53–60, 1973.
- [130] O. Simonin. Continuum modelling of dispersed two-phase flow. In *Combustion and turbulence in two-phase flow*, Lecture series 1996-02, pages 1–47. von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1996.
- [131] M. V. Smoluchowski. Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen. *Z. Phys. Chem.*, 92 :129–168, 1917.
- [132] P. D. M. Spelt. *The motion of bubbles in a turbulent flow*. PhD thesis, Universiteit Twente, 1996.
- [133] E. N. Stankova and M. A. Zatevakhin. The modified Kovetz and Olund method for the numerical solution of stochastic coalescence equation. In *12<sup>th</sup> Inter. Conf. on Clouds and Precipitations, Zurich, Switzerland 19-23 August*, pages 921–923, 1996.
- [134] M. Stimson and G. B. Jeffery. The motion of two spheres in a viscous fluid. *Proc. Roy. Soc. Lon., A*, 111 :110–116, 1926.
- [135] J. Stoer and R. Bulirsh. *Introduction to numerical analysis*, chapter 7. Springer-Verlag, New-York, 1980.
- [136] S. Sundaram and L. E. Collins. Numerical considerations in simulating a turbulent suspension of finite-volume particles. *J. Comp. Phys.*, 124 :337–350, 1996.
- [137] S. Sundaram and L. E. Collins. Collision statistics in an isotropic particle-laden turbulent suspension. Part I. Direct numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 335 :75–109, 1997.
- [138] R. R. Sundararakumar and D. L. Koch. Non-continuum lubrication flows between particles colliding in a gas. *J. Fluid Mech.*, 313 :283–308, 1996.
- [139] G. I. Taylor. Diffusion by continuous movements. *Proc. Lon. Math. Soc.*, 20 :196–212, 1921.
- [140] H. Tennekes. Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 67 :561–567, 1975.
- [141] H. Tennekes and J. L. Lumley. *The first course in turbulence*. MIT Press, 1972.
- [142] A. A. Townsend. The diffusion of heat spots in isotropic turbulence. *Proc. R. Soc. London A*, 209 :418, 1951.
- [143] C. Truesdell. The physical components of vectors and tensors. *Z. Angew. Math. Mech.*, 33 :345–356, 1953.
- [144] S. Wakiya. Slow motions of a viscous fluid around two spheres. *J. Phys. Soc. Jpn. (Japan)*, 22(4) :1101–1109, 1967.
- [145] H. W. Wang, A. Z. Zinchenko, and R. H. Davis. The collision rate of small drops in linear flow fields. *J. Fluid Mech.*, 265 :161–188, 1994.
- [146] L.-P. Wang and D. E. Stock. Dispersion of heavy particles by turbulent motion. *J. Atmos. Sci.*, 50(13) :1897–1913, 1993.
- [147] L.-P. Wang, A. S. Wexler, and Y. Zhou. On the collision rate of small particle in isotropic turbulence I. Zero-inertia case. *Phys. Fluids*, 10(1) :266–276, 1998.

- [148] J. Weinstock. Lagrangian-Eulerian relation and the independence approximation. *Phys. Fluids*, 19(11) :1702–1711, 1976.
- [149] J. J. E. Williams and R. I. Crane. Drop coagulation in cross-over pipe flows of wet steam. *J. Mech. Engng. Sci.*, 21(5) :357–360, 1979.
- [150] J. J. E. Williams and R. I. Crane. Particle collision rate in turbulent flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 9(4) :421–435, 1983.
- [151] M. L. Yudine. Physical considerations on heavy-particle dispersion. *Advances in Geophysics*, 6 :185–191, 1959.
- [152] G. R. Zeichner and W. R. Schowalter. Use of trajectory analysis to study stability of colloidal dispersions in flow fields. *AIChE J.*, 23(3) :243–254, 1977.
- [153] X. Zhang and R. H. Davis. The rate of collisions due to Brownian or gravitational motion of small drops. *J. Fluid Mech.*, 230 :479–504, 1991.
- [154] A. Z. Zinchenko. The slow asymmetric motion of two drops in a viscous medium. *Prikl. Matem. Mekhan.*, 44 :49–59, 1980.
- [155] A. Z. Zinchenko. Calculation of close interaction between drops, with internal circulation and slip effect into account. *Prikl. Matem. Mekhan.*, 45 :759–763, 1981.
- [156] A. Z. Zinchenko. Calculation of the effectiveness of gravitational coagulation of drops with allowance for internal circulation. *Prikl. Matem. Mekhan.*, 46 :72–82, 1982.
- [157] A. Z. Zinchenko. Hydrodynamic interaction of two identical liquid spheres in linear flow field. *Prikl. Matem. Mekhan.*, 47 :56–63, 1983.
- [158] A. Z. Zinchenko. Effect of hydrodynamic interactions between the particles on the rheological properties of dilute emulsions. *Prikl. Matem. Mekhan.*, 48 :282–292, 1984.