



HAL
open science

Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale

Camille Duprat

► **To cite this version:**

Camille Duprat. Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT: . tel-00433439

HAL Id: tel-00433439

<https://theses.hal.science/tel-00433439v1>

Submitted on 19 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : PHYSIQUE DES LIQUIDES

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de
L'UNIVERSITÉ de PARIS 6**

Présentée par

Camille Duprat

Sujet de la thèse :

Instabilités d'un film liquide en écoulement sur une fibre verticale.

Soutenue le : 7 octobre 2009

Devant le jury composé de :

A.-M. Cazabat Présidente du jury
C. Clanet Examineur
F. Charru Rapporteur
L. Limat Rapporteur
M. Rabaud Directeur de Thèse
F. Giorgiutti-Dauphiné Co-directrice
S. Kalliadasis Invité

Je suis arrivée au FAST il y a un peu plus de 4 ans, j'y suis revenue avec plaisir l'année suivante et le quitte aujourd'hui non sans un petit pincement au coeur...

Je tiens tout d'abord à remercier Dominique Salin qui m'a accueillie au sein du laboratoire. Je remercie Marc Rabaud pour m'avoir permis d'effectuer cette thèse, pour ses suggestions toujours justes et sa relecture minutieuse du manuscrit.

Je remercie tout particulièrement les membres du jury : François Charru et Laurent Limat pour avoir accepté de rapporter cette thèse et pour leurs remarques et questions pertinentes, ainsi que Christophe Clanet pour ses suggestions, dès l'école d'été organisée au Danemark par la DTU (Université technique du Danemark) et notamment dans l'avion du retour... Je remercie Anne-Marie Cazabat d'avoir accepté de présider mon jury, et salue le rôle essentiel qu'elle a jouée pour me permettre de mener à bien cette thèse, que ce soit en tant que professeur en M2 ou en tant que directrice de l'école doctorale.

Je tiens surtout à remercier Frédérique Giorgiutti-Dauphiné pour son encadrement et son soutien tout au long de mon séjour au FAST. J'ai rencontré Frédérique à la fin du M1, où, tout juste débarquée d'Angleterre, je cherchais un stage en mécanique des fluides, domaine qui me plaisait déjà tout particulièrement. En quelques minutes, dans une petite salle de manip (dans laquelle je suis restée un an et demi, avant de migrer dans une salle nettement plus spacieuse et agréable), devant une expérience préliminaire (que je me suis empressée de démontrer en M2...), elle a su me convaincre de travailler sur ce sujet par son enthousiasme, qui ne s'est jamais tari depuis. Merci de ton soutien, que ce soit en M2, au cours de la thèse et jusqu'à la relecture attentive de mon manuscrit et la préparation de la soutenance. Merci pour nos discussions, scientifiques ou autres, nos réunions café-travail, pour avoir lancé l'intervention La main à la pâte en maternelle... Merci enfin d'avoir toujours cru en moi, de m'avoir laissée autonome et libre d'explorer les directions qui m'intéressaient, finalement de m'avoir permis de donner le meilleur de moi-même au cours de cette thèse.

Je remercie aussi Christian Ruyer-Quil pour ses idées, pour m'avoir appris à me servir du logiciel AUTO et fourni ses codes qui m'ont notamment permis d'obtenir les lignes de courant dans l'écoulement, qui ont éveillé ma curiosité quant à l'apparition d'une zone de recirculation au sein des gouttes.

Je remercie chaleureusement Sérafim Kalliadasis, nos échanges furent particulièrement intéressants et notre collaboration fructueuse. Merci d'avoir accepté de faire parti de mon jury de thèse. Merci aussi à Dmitri Tseluiko pour m'avoir patiemment expliqué sa théorie et tout aussi patiemment écouté... Cette collaboration a débouché sur un joli résultat. Merci finalement à toute l'équipe de l'Imperial College ; je garde d'excellents souvenirs de mes séjours à Londres.

Au cours de cette thèse, j'ai eu l'occasion d'enseigner ; je garde un très bon souvenir de cette expérience, notamment grâce à l'équipe de Génie Chimique de l'IUT d'Orsay.

J'ai bénéficié durant ma thèse de l'aide précieuse de Rafaël Pidoux, Alban Aubertin, Gérard Chauvin au FAST, ainsi que Patrice Jenffer et Gilles Marteau pour l'excellente vanne d'alimentation. Je les en remercie profondément.

Je tiens d'ailleurs à remercier tous les membres du laboratoire, qui ont contribué à faire de ces 3 ans de thèse un excellent moment. Je remercie tout particulièrement Jean-Pierre Hulin, pour son encadrement durant le stage de M2 et ses nombreuses et toujours pertinentes suggestions. Je remercie chaudement Ludovic Pauchard. Merci pour ton soutien, nos pauses déjeuner et goûter, nos manip tardives dans des salles adjacentes (et la musique qui les accompagnait parfois...), les nombreux fous rires que nous avons eu, nos retours sur Paris en RER ou en voiture. Merci aussi pour ta relecture méticuleuse du manuscrit et pour l'aide précieuse que tu nous as apporté lorsque nous avons voulu faire couler des fluides non-newtoniens... Merci à Jémil, que j'ai rencontré en L3, puis retrouvé en M2 et finalement en thèse... merci pour nos discussions, sur la thèse, sur tout, sur rien, merci d'avoir été là dans les moments durs mais aussi dans les bons moments, en M2 ou en thèse, lors des pauses/fous rires, soirées, lors de nos vacances en Tunisie ou à New York et finalement pour la soutenance... Merci d'avoir soutenu quelques jours avant moi et d'avoir ainsi pu m'épauler avant ma propre soutenance ! Bravo et bon courage pour la suite ! Merci à mes co-bureaux Guillaume et Yann pour leur bonne humeur, leur écoute, leurs réponses à mes questions, nos discussions et nos rires. Merci tout particulièrement à Yann d'avoir supporté le désordre qui a régné sur mon bureau pendant trois ans, débordant régulièrement sur le sien... Merci aussi à Mourad ("Décalecatan, Décalecatan...Ohé, Ohé !") pour m'avoir toujours rendu le sourire, Antoine, Judith, Floriane (pour ta constante bonne humeur !), Eric S. (rendez-vous à Bastille pour refaire le monde...et manger du quinoa), Eric M. (ou Ewic), Benoît, Marie-Hélène, Pierre, Marc...

Merci à Florian Chaillé pour m'avoir invitée dans son collège pour parler de gouttes d'eau et de bulles de savon... Merci d'ailleurs à Emmanuelle Rio pour les idées et le matériel de vulgarisation !

Je n'oublie évidemment pas "mes" stagiaires : Clémentine, avec qui nous avons installé les premières "petites" fibres, Pascale, avec qui nous nous sommes lancés dans l'aventure des non-newtoniens, Nancy et Christelle, qui a réalisé les manip de gouttes avec un très grand soin et qui m'a fait le plaisir de venir à la soutenance...

Je ne peux pas omettre de remercier Claude Raballand, mon professeur de prépa à Montaigne, qui m'a donné le goût de la physique et m'a conseillé (judicieusement !) le Magistère d'Orsay. Merci aussi à mes amis, en particulier Fred, Cha, Simon, Floÿ, Hélène, Sonia, Laurie, Michael... Merci à tous ceux qui ont assisté à la soutenance (et aussi à ceux qui ne pouvaient pas venir mais qui m'ont envoyé d'importants messages de soutien). Merci à ma soeur Mariette, à mes oncles et tantes, merci Pascal d'être venu, merci à tous les autres pour vos encouragements et félicitations ! Je remercie tout particulièrement ma mère Joëlle, qui a toujours cru en moi et en mes choix...

Merci Mathieu, de m'avoir toujours (et de nombreuses fois) rassurée, encouragée, supportée (!), égayée et tellement plus encore...

Table des matières

Introduction	V
1 Etat de l'art et motivations	1
2 Un fil bien mouillé	9
2.1 Dispositif expérimental	10
2.1.1 Description générale	10
2.1.2 Acquisitions	11
2.1.2.1 Caméra rapide	11
2.1.2.2 Caméra linéaire	11
2.1.2.3 Traitement des images	12
2.1.3 Alimentation	12
2.1.3.1 Ecoulement en sortie de la vanne	14
2.1.3.2 Ecoulement de base : écoulement de <i>Nusselt</i>	14
2.1.4 Dispositif de forçage	21
2.1.5 Gamme de paramètres explorée	21
2.2 Mécanismes d'instabilité	24
2.2.1 Instabilité de Rayleigh-Plateau	24
2.2.2 Instabilité hydrodynamique	29
2.2.2.1 Ecoulement d'un film d'épaisseur uniforme sur un plan incliné	30
2.2.2.2 Phénoménologie	31
2.2.3 Couplage des deux mécanismes	33
3 Comment ça coule ?	35
3.1 Observations expérimentales	36
3.2 Transition Absolu/Convectif	40
3.2.1 Définition	40

3.2.2	Détermination des temps caractéristiques	43
3.2.2.1	Epaisseur faible devant le rayon	43
3.2.2.2	Epaisseur de l'ordre du rayon	47
3.2.3	Calcul complet	51
3.2.3.1	Adimensionnement	51
3.2.3.2	Transition Absolu/Convectif	53
3.2.4	Lieu de la transition	58
3.3	Transition entre les régimes absolus stable/instable	62
3.3.1	Evidences expérimentales	62
3.3.2	Quand l'écoulement entre en jeu...	68
3.4	Carte des régimes	72
4	Quand l'écoulement domine...	75
4.1	Positionnement dans la carte des régimes et modèles adéquats	76
4.2	Réponse à un bruit blanc	79
4.2.1	Observations	79
4.2.2	Analyse de stabilité linéaire	81
4.3	Réponse à une perturbation périodique	83
4.3.1	Evolution spatiale	83
4.3.2	Caractéristiques des ondes	88
4.3.2.1	Amplitude et longueur d'onde	91
4.3.2.2	Forme	92
4.3.2.3	Vitesse des ondes	100
4.3.2.4	Lignes de courant	104
4.3.2.5	Les trois régimes de Kliakhandler et al.	108
4.3.2.6	Mise en évidence expérimentale des lignes de courant	112
4.4	Conclusion	114
5	Des ondes qui s'aiment ... ou se détestent	117
5.1	Observations	118
5.1.1	Dynamique	118
5.1.2	Interactions	119
5.1.2.1	Avec échange de masse : interactions fortes	119
5.1.2.2	Interactions faibles	120
5.1.2.3	Mécanismes d'interaction	122

5.1.3	Formation d'états liés	124
5.1.3.1	Un désordre secrètement bien ordonné	124
5.1.3.2	Un ordre forcé	125
5.2	Théorie d'interactions de structures cohérentes	130
5.2.1	Equation gKS pour un film visqueux s'écoulant sur une fibre verticale	130
5.2.2	Théorie d'interactions	131
5.3	Résultats et discussion	132
5.4	Conclusion : un nouveau type d'état lié	135
6	Quand les gouttes prennent le dessus...	139
6.1	Des ondes aux gouttes...	141
6.2	Déposer une goutte...	144
6.3	Gouttes sur une fibre sèche	145
6.3.1	Trainée d'une goutte	145
6.3.2	Vitesse des gouttes	152
6.4	Influence du film sur la vitesse des gouttes : gouttes sur fibre prémouillée	156
6.5	Perspectives : des gouttes complexes...	160
6.5.1	Gouttes en mouillage partiel	161
6.5.2	Gouttes viscoélastiques	164
6.5.2.1	Les fluides non-newtoniens	164
6.5.2.2	Rhéologie	166
6.5.2.3	Écoulement sur la fibre : résultats préliminaires.	168
	Conclusion	173
	A Forme d'une goutte sur une fibre	179
	B Traitement et exploitation des images	185
B.1	Caméra linéaire parallèle à l'écoulement : diagramme spatio-temporel	185
B.2	Caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement : évolution temporelle de l'épaisseur	188
B.3	Caméra rapide	188
	Nomenclature	191
	Bibliographie	193

Introduction générale

Les perles ne font pas le collier, c'est le fil.

Gustave Flaubert, lettre à Louise Colet (1853)

On rencontre fréquemment, dans la nature ou dans de nombreux procédés industriels, des films liquides présentant une surface libre (c'est-à-dire une interface liquide/air). Ces situations sont souvent instables, et on observe alors des déformations de la surface du liquide. Lorsque le système est spatialement confiné, les motifs émergeant de cette instabilité sont qualifiés de structures cellulaires : c'est le cas par exemple d'un film mince liquide suspendu sous un plan horizontal. Sous l'effet de la gravité, ce film se transforme en un réseau de gouttes ; ce problème classique est connu sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Taylor. On peut par exemple l'observer lorsque la vapeur d'eau se condense sous une surface, comme à l'intérieur d'une bouteille vide comme présenté sur la photographie de la figure 1. Cette instabilité résulte des effets antagonistes de la gravité et de la tension de surface. Si maintenant ce filet liquide gaine une fibre horizontale, il va

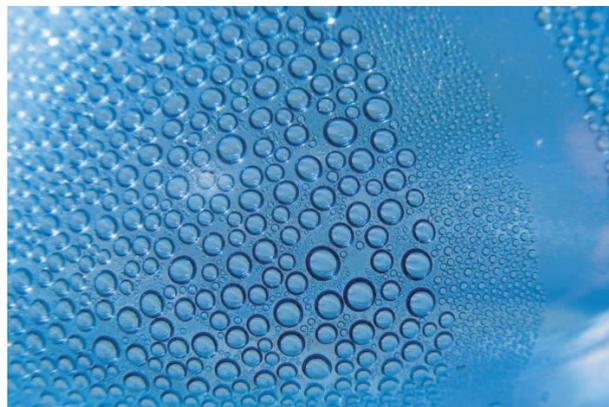


Fig. 1. *Instabilité de Rayleigh-Taylor se développant lors de la condensation dans une bouteille. Photo : Josy C (<http://snapshotoptimism.blogspot.com>).*

lui aussi se déstabiliser spontanément en gouttes ; c'est la tension de surface seule qui est ici à l'origine de cette instabilité, connue sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Plateau, d'après le nom des deux physiciens qui l'étudièrent pour la première fois à la fin du 19^e siècle. En se promenant, on peut observer les effets de cette instabilité en admirant les brins d'herbe mouillés et les toiles d'araignée décorées d'un chapelet de gouttes, comme le montrent les photographies de la figure 2. La rosée, qui se condense sur les fils de la toile, forme un filet liquide qui se déstabilise en gouttelettes régulièrement espacées, "*séparées les unes des autres et traversées par le fil comme des perles*" ainsi que le décrit le physicien Belge Joseph Plateau (80). Ce phénomène est similaire à celui observé lorsqu'un film liquide est déposé sur les parois d'un tube (voir

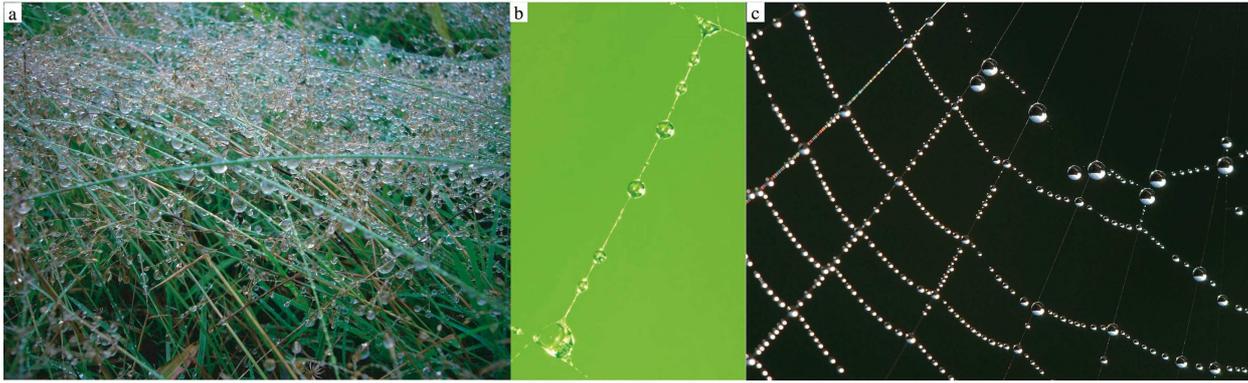


Fig. 2. *a* : Gouttes sur des herbes de différentes inclinaisons (Photo : Babsy). *b* : Gouttes sur une toile d'araignée (Photo : Carla Charles). *c* : Chapelet de gouttes sur une toile d'araignée couverte de rosée (Photo : Luc Viatour).

notamment l'expérience de V. Duclaux (24)).

On peut de plus coupler ces instabilités à un écoulement ; on parle alors d'écoulement ouvert où le fluide en mouvement est en permanence renouvelé. On va dans ce cas observer une évolution spatiale de l'instabilité, présentant souvent une transition vers le désordre. Ainsi, un jet d'eau, soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau, se brise en gouttes au bout de quelques centimètres, comme observé quotidiennement à la sortie d'un robinet qui fuit (Figure 3(a)). Dès 1833, Félix Savart (90) étudie expérimentalement cette instabilité et reporte ses observations sous la forme d'un dessin présenté sur la figure 3(b). Travaillant avec de l'eau, pour laquelle le filet se déplace à grande vitesse, et ne disposant pas alors des caméras rapides et autres appareils photos, il détermine le temps caractéristique de croissance de l'instabilité par une méthode ingénieuse : armé de son épée, il "coupe" le filet d'eau. Selon la hauteur sur le jet à laquelle le coup est donné, l'épée ressort sèche (on a des gouttes espacées) ou mouillée (on a un filet uniforme). Il ne conclue cependant pas sur l'origine de cette instabilité ; ce n'est que 30 ans plus tard, en 1867, que Joseph Plateau (79) identifie la tension de surface comme étant à l'origine de ce phénomène. Il étudie alors de manière rigoureuse et systématique des filets d'huile visqueuse ou de mercure, ce qui lui permet d'observer les différentes étapes de la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées, qu'il reporte sur un dessin présenté sur la figure 3(c). Il faudra attendre quelques années pour que les récents progrès en photographie permettent de capturer la dynamique d'un jet ; Lord Rayleigh présentera, parmi d'autres, des photographies de jets d'eau (Figure 3(d)) obtenues à l'aide d'un montage complexe décrit dans un article de 1891 sur les applications de la photographie pour la physique (41). Il introduira alors un principe intuitif pour décrire l'instabilité de jets (et bien d'autres), qui se base sur la minimisation du travail à fournir pour déformer une interface (43; 42). Un sujet voisin concerne les écoulements à surface libre le long d'une paroi solide, tel le ruissellement d'un film liquide le long d'un plan incliné qui est lui aussi souvent instable : des ondes apparaissent, comme cela peut être observé dans une rue en pente un jour de pluie (Figure 4). Cette instabilité résulte d'une compétition entre la gravité, l'inertie du fluide et les effets capillaires et a été étudiée initialement par le physicien russe Pyotr Leonidovich Kapitza au milieu du 20^e siècle. Il se développe alors des instabilités secondaires pouvant mener au chaos spatio-temporel (Liu et Gollub (63)).

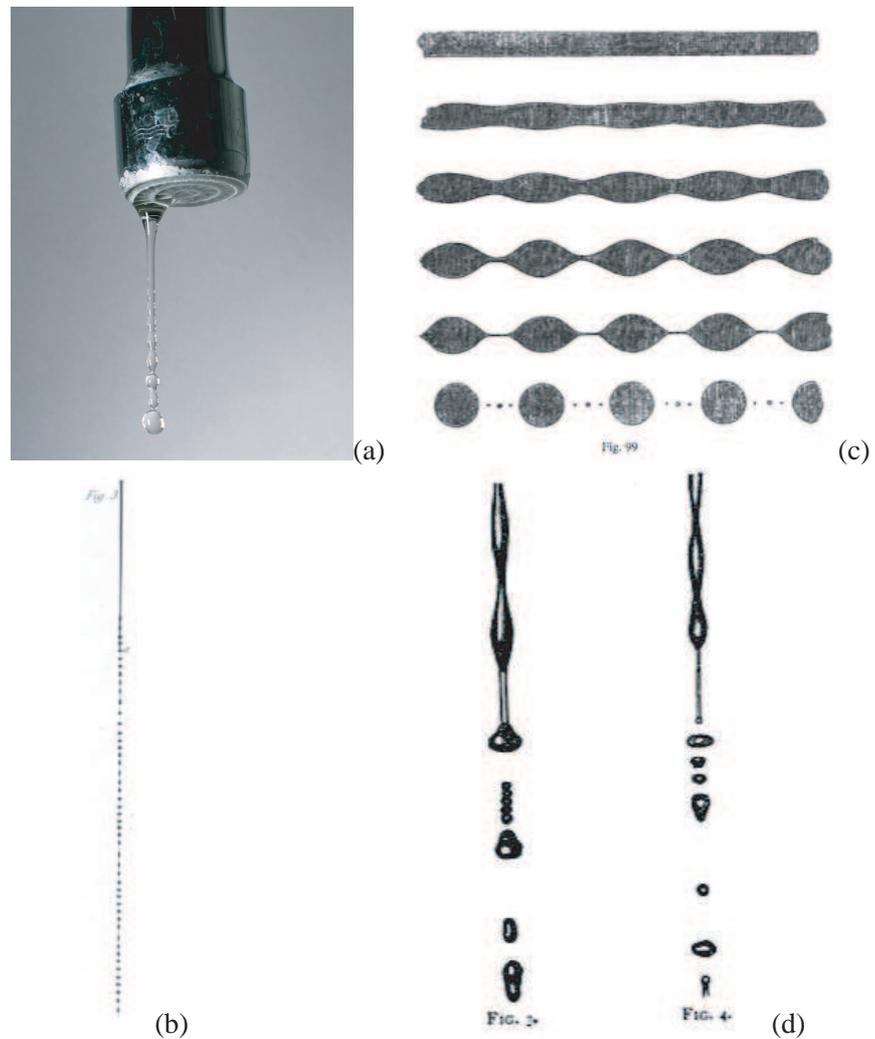


Fig. 3. *Instabilité d'un jet* : (a) à la sortie d'un robinet qui fuit (Photo : Dschwen); (b) dessin de F. Savart (90) d'un jet se brisant en gouttes ; (c) dessins de J. Plateau (80) illustrant la déformation d'un cylindre liquide en gouttes ; (d) photographies de Lord Rayleigh (41).



Fig. 4. *Ondes se développant à la surface de l'eau dans une rue en pente un jour de pluie. Rue de la Colline, Orsay.*

Au-delà de ces phénomènes naturels, on rencontre dans de nombreux procédés industriels des écoulements à surface libre. On peut notamment citer les procédés de "coating", ou enrobage, qui consistent à déposer une fine couche liquide sur un solide pour former, après séchage, une couche d'enrobage. Ce procédé entre en jeu dans la fabrication de fibres optiques, de films photographiques... Le cas de l'enrobage d'un fil, qui nous intéresse plus particulièrement, a de nombreuses applications, que ce soit pour protéger ou teindre des textiles, des fils électriques, et divers types de fibres. La méthode la plus couramment employée pour la fabrication de fibres optiques consiste à tirer une fibre d'un cylindre de silicone solide en partie fondu à très haute température, puis à la refroidir rapidement. Cette fibre est alors enrobée d'une couche de fluide (principalement des polymères) pour protéger sa surface (76; 77). La qualité globale de la fibre dépend fortement de l'uniformité de cette couche de protection. C'est cette dernière étape, l'enrobage a proprement dit, qui nous intéresse ici. Le fluide s'écoule le long de la fibre via une vanne (appelée coating die). On peut déterminer l'épaisseur moyenne alors déposée sur la fibre (78). Cependant, il peut y avoir des fluctuations d'épaisseur particulièrement gênantes (44) dues à l'instabilité de Rayleigh-Plateau décrite précédemment. Les ingénieurs cherchent ici à s'en affranchir, mais dans d'autres situations, cette instabilité est recherchée. Par exemple, une de ses applications concerne la collecte d'eau potable sous la forme de *filets capteurs de brouillard* (Fig. 5). Mis en place pour la première fois au Chili, près du petit village de Chungungo, situé dans une des régions les plus arides du monde, et où l'eau est donc une denrée rare et précieuse, le système de filets à nuages est le suivant : l'eau contenue dans le brouillard qui s'étend en permanence le long des côtes (camanchaca) se condense sur de grands filets de polypropylène ; il se forme alors des gouttes qui sont récupérées dans des gouttières qui alimentent la ville en eau (les 80 capteurs des hauteurs de Chungungo produisent en moyenne 10 000 litres d'eau par jour !). Ce système a depuis été installé dans d'autres régions, comme au Népal où ont été prises les photographies de la figure 5. L'instabilité d'un film liquide sur un fil, cette fois-ci en écoulement, est également recherchée dans les échangeurs de chaleur. Il s'agit alors de récupérer la chaleur des gaz chauds à la sortie d'incinérateurs, d'usines ou d'autres procédés industriels afin de faire des économies d'énergie et de protéger l'environnement. Une technique, décrite par K. Hattori et al. (37), et sur laquelle on reviendra au chapitre suivant, consiste à faire ruisseler un liquide le long de fils placés au sein du gaz chaud. L'intérêt de ce dispositif réside dans le fait que le film mince

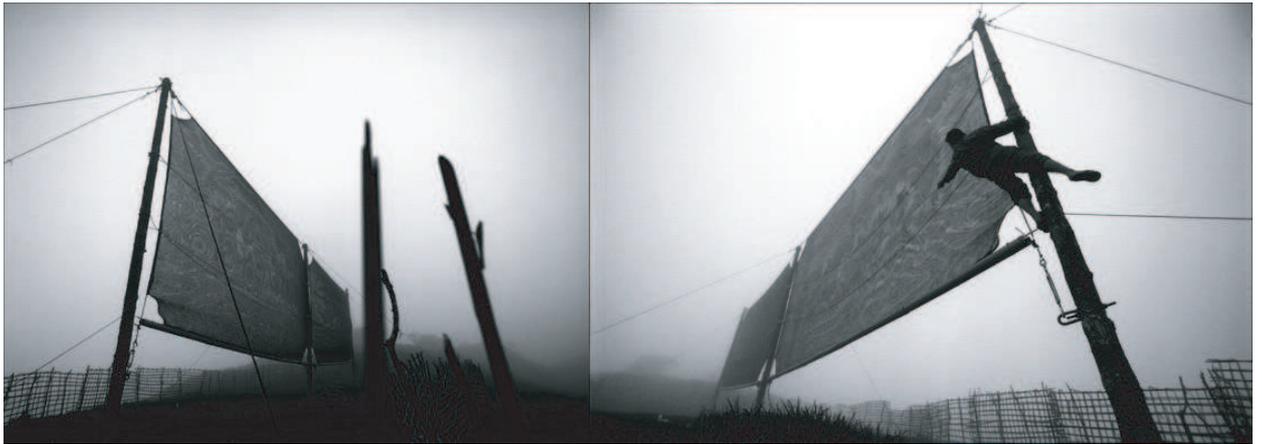


Fig. 5. *Filets à nuages* : (a) collecteurs de brouillard sur la crête montagneuse Danda Bazzar, Népal (crédit photo : Brent Stirton).

recouvrant la fibre offre une grande surface d'échange et un temps de contact important entre le liquide et le gaz, en faisant un système efficace et peu coûteux de récupération de chaleur. On cherche donc à avoir ici l'apparition de gouttes séparées d'un film mince, permettant l'échange de chaleur tout en renouvelant le fluide suffisamment lentement.

Ainsi, les instabilités de films minces en écoulement ont suscité de nombreuses études théoriques et expérimentales, en raison notamment de leurs applications industrielles, qu'elles y soient désirables ou pas, mais aussi pour leur intérêt fondamental. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'écoulement d'un film liquide mince, visqueux, enrobant de manière axisymétrique une fibre verticale. Le film, s'écoulant par gravité le long de la fibre, est soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau ; les effets combinés de cette instabilité, d'un écoulement ainsi que les effets de la viscosité et de l'inertie du fluide conduisent à une dynamique très riche et à l'apparition de régimes que j'ai trouvé fascinants. Ce système constitue en outre un bon prototype de milieu non-linéaire, instable, dissipatif et dispersif, et va donc nous permettre d'étudier des comportements présents dans des systèmes semblables issus de domaines aussi variés que l'optique, la physique des plasmas ou les systèmes biologiques. Dans un premier chapitre, je rassemble les différentes études menées jusqu'ici sur l'écoulement de films minces à surface libre, en particulier lorsque le solide sur lequel le film s'écoule est courbé. Nous verrons alors quels points restent à éclaircir. Dans un second chapitre, je présente le montage expérimental que j'ai réalisé afin de mener à bien cette étude, et notamment comment nous assurons une alimentation continue et uniforme sur la fibre. Nous rentrerons alors dans le cœur de notre étude en mettant en évidence différents régimes d'écoulement au chapitre 3. Nous avons notamment observé et caractérisé une transition entre deux types d'instabilité rencontrés dans les écoulements ouverts, à savoir une instabilité *absolue* ou *convective*. On obtient alors une carte précise des régimes, que l'on va explorer dans la suite de la thèse. Le chapitre 4 se concentre sur les régimes convectifs, dans lesquels le système se comporte comme un amplificateur de bruit et amplifie donc toute perturbation créée en entrée, à savoir un bruit blanc (le bruit ambiant) ou des perturbations périodiques (forçage). L'évolution spatiale du film liquide ainsi que les ondes alors créées seront caractérisées, et l'on distinguera deux types de structures en fonction des mécanismes dominants : on observe soit des *ondes*, similaires à celles observées sur un film tombant sur un plan, soit des *gouttes* similaires à celles observées lorsque seule l'instabilité de Rayleigh-Plateau joue.

Le chapitre 5 aborde l'étude des interactions entre ces ondes ; on y montre que les ondes s'attirent et se repoussent jusqu'à se trouver à une distance fixe l'une de l'autre, formant des *états liés*. Le dernier chapitre est lui consacré à l'étude de la dynamique de gouttes déposées manuellement sur la fibre. Cette expérience révèle deux comportements notables : lorsque les gouttes glissent sur une fibre sèche, elles laissent derrière elles un film qui dépend de leur taille ; la vitesse des gouttes glissant sur de tels films statiques suit alors deux comportements distincts en fonction de l'amplitude des gouttes et de l'épaisseur du film, que l'on identifie comme un comportement d'ondes se propageant sans transport de masse, ou de gouttes présentant une large zone de recirculation. On peut ainsi obtenir un critère afin de discriminer entre les deux structures observées.

Chapitre 1

Etat de l'art et motivations

Comme nous l'avons noté en introduction, le ruissellement de films liquides à surface libre le long de solide a suscité l'intérêt des scientifiques et des ingénieurs dès le 19^e siècle. La situation qui nous intéresse ici est celle de l'écoulement le long d'une surface courbée. Il convient dans un premier temps de rappeler les études menées dans le cas d'un fil (ou d'un tube) horizontal, sans écoulement et non soumis aux effets de la gravité, c'est-à-dire le cas de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Ici, seule la tension de surface pilote l'instabilité : c'est une compétition entre la pression capillaire induite par la courbure azimutale (dans le plan perpendiculaire au fil), qui est déstabilisante, et la pression capillaire induite par la courbure axiale (dans le plan suivant l'axe de la fibre), qui est stabilisante pour les courtes longueurs d'onde qui provoque la déstabilisation de la couche liquide. On peut obtenir une relation de dispersion décrivant cette instabilité à partir d'une analyse de stabilité linéaire des équations de Navier-Stokes dans l'hypothèse de lubrification (cette analyse et les résultats qui en découlent sont développés au chapitre 2). On connaît alors la longueur d'onde la plus instable que le système va sélectionner, ainsi que la longueur d'onde minimale (ou longueur d'onde de coupure) en-deçà de laquelle le cylindre liquide est stable. Le cylindre gainant la fibre se sépare alors en un ensemble de gouttes, dont la forme particulière prend le nom d'onduloïde (terme introduit par Joseph Plateau (80)). B. J. Carroll (11) a obtenu, à partir de la loi de Laplace et en supposant une surpression constante dans la goutte, le profil analytique exact de cette onduloïde (nous détaillerons ce calcul dans l'annexe A). Lorsque la fibre est petite devant la taille de la goutte, la forme d'onduloïde se rapproche de celle d'une sphère qu'adopte une goutte dans l'air. En revanche, lorsque le rayon de la fibre est grand, la goutte s'étend sur la fil et sa forme se rapproche de celle d'un cylindre. En présence de gravité, la goutte est légèrement déformée et se raidit à l'avant, comme l'ont noté A. Kumar et S. Hartland (54; 55). Lorsque l'on est en situation de mouillage partiel, comme les gouttes d'eau de la figure 2, on remarque que cette forme de manchon axisymétrique n'est pas toujours adoptée ; les gouttes roulent alors sur le côté pour former une calotte (ou coquille, clam shell en anglais). La forme stable dépend alors de la taille de la goutte, du rayon de la fibre et de l'angle de contact du liquide (1; 12; 68; 67). Dans cette thèse, on se place principalement en situation de mouillage total, le mouillage partiel sera brièvement abordé au chapitre 6. Si les systèmes gouttes-sur-fibre ont autant intéressé les scientifiques, c'est en partie parce qu'il en existe de nombreuses applications industrielles. En particulier, l'étude de filtres composés de fibres conduit à se poser la question de la forme et de la dynamique de gouttes sur de tels substrats ; citons par exemple les travaux de B. J. Mullins et al. (69; 70; 71) qui étudient la dynamique et la forme de gouttelettes piégées sur les fils d'un filtre et soumises à la gravité, en présence d'un jet d'air. La question de la dynamique des gouttes sur des fils

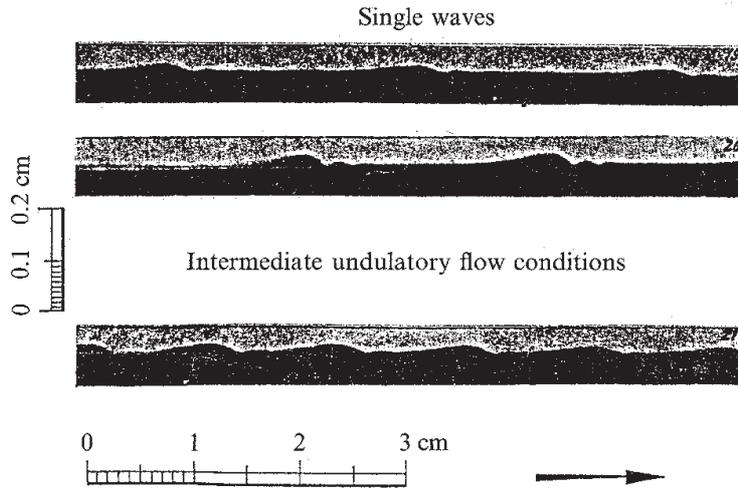


Fig. 1.1. Ondes observées par P. L. Kapitza (50).

n'a été qu'en partie abordée : lorsque la goutte est en mouillage partiel, Z. Huang et al. (39) ont déterminé expérimentalement l'angle critique à partir duquel les effets de la gravité l'emporte sur les effets capillaires et la goutte glisse le long du fil. En situation de mouillage total, E. Lorenceau et al. (66) ont caractérisé la vitesse de la goutte en fonction de l'angle d'inclinaison de la fibre. Dans ces deux cas, comme dans notre étude, c'est la gravité qui provoque le mouvement, alors freiné par la viscosité et les effets capillaires. Notons que la tension de surface seule peut provoquer le mouvement spontané des gouttes : une goutte posée sur une fibre conique (E. Lorenceau et al. (66)) avance spontanément vers les zones de plus faible courbure, remontant ainsi la fibre en partant de la pointe sous l'effet d'un gradient de pression capillaire. La géométrie particulière de la fibre permet donc d'étudier la dynamique de gouttes en mouillage total (sur un plan, on ne peut former de gouttes qu'en mouillage partiel), et de caractériser notamment l'influence d'un film de prémouillage ; nous avons amorcé cette étude, dont les résultats préliminaires sont présentés au chapitre 6. Mais revenons à notre système, à savoir le ruissellement le long d'un cylindre vertical. Les premières expériences reportées sur ce cas sont celles de P. L. Kapitza (50; 49) qui étudie, à la fois expérimentalement et théoriquement, l'écoulement d'un film mince (eau ou alcool) le long d'un cylindre. Dans ces expériences, le cylindre a un diamètre $2R=2.5$ cm tel que les effets de courbure ne jouent pas. Le liquide est injecté sur la surface du tube via une buse conique permettant de régler l'épaisseur de liquide, c'est-à-dire le débit de l'écoulement. P. L. Kapitza observe alors les ondulations de la surface par une méthode ingénieuse de visualisation par ombroscopie, le film liquide étant éclairé par une lumière rasante, un jeu de miroirs permettant alors d'agrandir le profil projeté. Il observe que le film, d'épaisseur constante h_N à la sortie de la buse d'injection, se déstabilise pour conduire à la formation d'ondes de grande amplitude. Afin de les étudier, il met en place un forçage (par jet d'air) couplé à un stroboscope, qui, en éclairant le liquide à la fréquence des ondes forcées, permet d'obtenir une image fixe comme présenté sur la figure 1.1. Son étude ne se limite cependant pas à une approche expérimentale, mais développe une approche théorique en moyennant les équations du mouvement sur l'épaisseur et en supposant un profil de vitesse semi-parabolique dans la couche liquide. Cette méthode lui permet d'obtenir la vitesse de phase des ondes propagatives observées en haut de l'écoulement, à savoir trois fois la vitesse moyenne de l'écoulement. Ces travaux ont depuis inspiré de nombreuses études théoriques ou expérimentales de cette instabilité hydrodynamique de films tombant

sur un plan, dont nous donnerons une explication phénoménologique au chapitre 2. On peut notamment citer les travaux de J. Liu, J. D. Paul et J. P. Gollub (62; 64; 65) qui ont admirablement étudié l'écoulement d'un film mince d'eau et de glycérol le long d'un plan incliné. Ils ont obtenu les profils des ondes par une méthode de fluorescence, et ont particulièrement mis en évidence un débit critique au-delà duquel l'effet déstabilisant de l'inertie l'emporte sur l'effet stabilisant de la gravité, en accord avec les études théoriques et numériques. Ils ont étudié le développement de l'instabilité primaire en identifiant la fréquence des ondes créées et ont montré le caractère convectif de l'instabilité. Ils ont de plus caractérisé les ondes solitaires fortement non-linéaires formées plus bas sur le plan, qui présentent un front raide précédé de nombreuses oscillations capillaires, et décrit les instabilités secondaires ainsi que les interactions (toujours attractives) entre ces ondes. Plus récemment, on peut citer les études de J. Tihon et al. (98), qui ont caractérisé quantitativement les ondes solitaires qui se développent à la surface du film, notamment la relation entre leur vitesse et leur amplitude, et de P. N. Yoshimura et al. (106) qui ont notamment mis en évidence expérimentalement l'existence d'une zone de recirculation dans ces ondes de grande amplitude. La recherche de modèles permettant de décrire cette instabilité a débuté dès les travaux de Kapitza et est toujours très active. Depuis les travaux de T. B. Benjamin (6) et C. S. Yih (105), qui identifient le caractère longues ondes de l'instabilité, différents types de modèles ont été proposés. Sans entrer dans les détails, une première approche consiste à faire un développement longues ondes des équations de Navier-Stokes comme proposé par D. J. Benney (7). On peut alors procéder à un développement faiblement non-linéaire conduisant à une équation d'évolution simple pour l'épaisseur du film appelée équation de Kuramoto-Shivashinsky (57; 91; 56). Nous reviendrons sur cette équation particulière au chapitre 4. Notons simplement que l'on peut formuler cette équation pour de nombreux systèmes, notamment, comme ici, pour des films tombants dans différentes situations (48) : citons par exemple le cas d'un film tombant cisailé à la surface (Oron et Edwards (75)) et le cas d'un substrat chauffé (Kalliadasis et al. (47)). Une autre idée consiste à moyenniser sur l'épaisseur du film ces équations, couplées à la conservation de la masse, afin d'obtenir deux équations couplées pour l'épaisseur et le débit, comme proposé par P. L. Kapitza et développé par V. Ya. Shkadov (92). Ces équations intégrées sur l'épaisseur sont appelées équations de Saint-Venant et ont fait l'objet de plusieurs études théoriques et numériques, notamment par C. Ruyer-Quil et P. Manneville (84; 85; 86).

C'est d'abord en adaptant ces études théoriques au cas d'une fibre de faible rayon, où la courbure joue, que l'étude des films ruisselants sur des fils a été abordée. A. L. Frenkel et al. (31) obtiennent, via un développement faiblement non linéaire, et pour des films minces devant le rayon de la fibre mais en prenant en compte les effets de la courbure, une équation d'évolution similaire à l'équation de Kuramoto-Shivashinsky. Nous détaillerons les étapes conduisant à cette équation au chapitre 3. D'un point de vue expérimental, D. Quéré (81) étudie en premier les effets de l'écoulement sur l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Il tire une fibre d'un bain afin de l'enrober d'un film d'épaisseur uniforme, puis la place horizontale afin de laisser se développer l'instabilité de Rayleigh-Plateau. La fibre est ensuite mise verticale et on analyse alors les effets d'un écoulement (provoqué par la gravité) sur l'interface déformée du film liquide. Ainsi, D. Quéré montre que, en-deçà d'une épaisseur d'enrobage critique, l'écoulement dans le film équilibre les déformations de l'interface dues à la tension de surface. Il nomme ce phénomène saturation de l'instabilité. Il entreprend de l'expliquer via un raisonnement linéaire, à partir de la relation de dispersion tirée de l'équation de Frenkel (encore une fois, je ne détaille pas ici les subtilités de ce calcul qui seront décrites au chapitre 3). S. Kalliadasis et H. C. Chang (46) et H. C. Chang et E. A. Demekhin (15) ont étudié la dynamique des solutions de

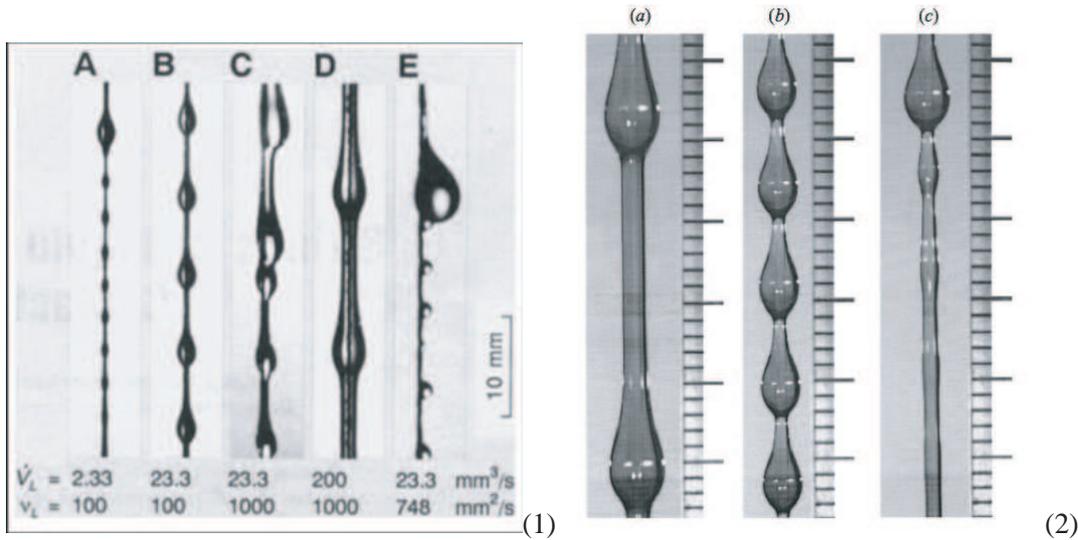


Fig. 1.2. (1) : Les différents régimes observés par K. Hattori et al. (37) obtenus pour de l'huile silicone de viscosité v_L et de tension de surface ~ 21 mN/m sur une fibre de Teflon de rayon $R=0.2$ mm et différents débits V_L (images A-D) et pour du glycérol de viscosité v_L (tension de surface 63.4 mN/m) sur une fibre de verre silanisé de rayon $R=0.25$ mm à un débit V_L (image E). (2) : les 3 régimes observés par I. L. Kliakhandler et al. (53) pour de l'huile de ricin (viscosité 44 mm²/s et tension de surface 31 mN/m) sur une fibre de Nylon de rayon $R=0.25$ mm et trois débits (a) 21.8 mm³/s, (b) 11.5 mm³/s et (c) 5.50 mm³/s.

l'équation de Frenkel et ont comparé leurs prédictions avec les résultats expérimentaux de D. Quéré (81), permettant ainsi de prédire le phénomène non-linéaire de saturation observé expérimentalement. D. Quéré a en outre observé des ondes interfaciales d'amplitude finie. Cependant, la dynamique, la structure et les interactions entre ces structures n'ont pas été étudiées. Une première description qualitative des régimes d'écoulement d'un film mince sur un fil est donnée par K. Hattori et al. (37) quelques années plus tard. Voulant obtenir un modèle simple d'échangeur de chaleur, K. Hattori et al. considèrent en premier lieu le cas simple, isotherme, d'un liquide s'écoulant sur différents fils et à différents débits. Leurs observations expérimentales révèlent que ce système est en fait complexe, et sont reportées sur la figure 1.2(1). Dans tous les cas, des gouttes se forment et il peut apparaître un film mince entre les gouttes ; pour décrire ce comportement, ils utilisent, comme J. Plateau, l'image d'un collier de perles, cette fois en mouvement. Ils différencient alors plusieurs régimes reportés sur la figure 1.2(1). Dans un premier temps, ils étudient des huiles silicone en mouillage total sur le fil. Quatre situations sont alors observées en fonction du débit : à faible débit (Fig. 1.2(1)A), des gouttes se forment instantanément et à intervalles réguliers à la sortie de l'alimentation. Chacune de ces gouttes laisse alors derrière elle une trainée, qui à son tour se déstabilise sous l'effet de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Un film mince est cependant toujours présent entre les gouttes qui sont de taille et forme constantes. En augmentant le débit (Fig. 1.2(1)B), les gouttes créées sont moins espacées et l'écoulement prend l'allure d'un collier de perles. La régularité observée dans ces deux régimes est perdue lorsqu'on augmente le débit (Fig. 1.2(1)C). A plus fort débit ou viscosité, l'écoulement redevient régulier, et les gouttes de taille constante sont séparées d'un film épais (Fig. 1.2(1)D). Avec de l'eau ou du glycérol, l'écoulement n'est jamais régulier et perd rapidement son axisymétrie (Fig. 1.2(1)E), le film se brisant en petites gouttes qui roulent alors sur le côté. Cette étude qualitative a été reprise quelques

années plus tard par I. L. Kliakhandler et al. (53), qui, en enrobant régulièrement une fibre de petit rayon avec de l'huile de ricin très visqueuse parfaitement mouillante, ont observé trois régimes similaires à ceux décrits par K. Hattori et al. et présentés sur la figure 1.2(2). Ces observations sont complétées par des mesures quantitatives de l'épaisseur du film et de la vitesse des gouttes dans ces trois cas. I. L. Kliakhandler et al. ont de plus obtenu une équation d'évolution dans le cas où l'épaisseur du film est de l'ordre du rayon de la fibre, et comparé leurs résultats expérimentaux à des simulations numériques obtenues à partir de cette équation d'évolution. Cependant, il n'existe pas de données expérimentales concernant le développement initial de l'instabilité, les expériences précédentes s'intéressant uniquement aux structures pleinement développées observées bas sur la fibre (à 2m de l'alimentation dans le cas de Kliakhandler et al.). De plus, il existe peu de données quantitatives sur la forme de ces structures, et la transition entre les différents régimes n'est pas identifiée. Ces expériences ont aussi été menées avec des fluides très visqueux, à faible débit et sur des fibres de petit rayon, ne considérant pas les effets de l'inertie du fluide et se concentrant sur les régimes où l'instabilité de Rayleigh-Plateau était dominante. D'un autre côté, mis à part l'étude théorique de Trifonov (99), les études de l'instabilité hydrodynamique de films tombant où les effets inertiels sont dominants n'ont cependant jamais introduit d'effets de courbure. Plus récemment, Craster et Matar (18) ont étudié les solutions instationnaires de l'équation de Kliakhandler et al. numériquement, et ont réalisé quelques expériences qualitatives qui se comparent favorablement aux prédictions de leur modèle, dans la limite où les effets de la tension de surface domine et où l'inertie est négligeable.

Jusqu'ici, il n'existe pas d'étude expérimentale systématique permettant de décrire l'instabilité pour différents rayons de fibre, débits et viscosités, les études précédentes s'intéressant d'un côté à une petite fibre à faible débit, d'un autre côté à des plans inclinés à fort débit et elles restent principalement qualitative dans le cas de petits fils. Une telle étude méthodique a été réalisée à la fois expérimentalement et théoriquement dans une géométrie similaire, dans le cas où on tire une fibre d'un bain à vitesse constante. D. Quéré (83; 82) présente une revue de ces études. Les premières études expérimentales du mouillage dynamique de fils sont reportée en 1922 par Goucher et Ward (34), deux ingénieurs de la General Electric, qui pour comparer l'enduction d'une plaque et d'une fibre, tirent à vitesse constante U_W un fil hors d'un bain de cire d'abeille fondue. Une fois la cire solidifiée, ils la pèsent afin de déterminer l'épaisseur entraînée. Ils identifient alors les paramètres pertinents du problème, à savoir le nombre capillaire $Ca = \eta U_W / \gamma$ qui compare les effets de la viscosité (η) qui favorise l'entraînement d'un film épais à ceux de la tension de surface (γ) qui s'oppose à la déformation de l'interface et donc à la formation du dépôt. Ils introduisent aussi le nombre sans dimension dit de Goucher $N_{GO} = R/l_c$ qui mesure l'effet de la courbure en comparant le rayon de la fibre à la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$, et qui peut donc être considéré comme le rapport des effets gravitationnels et de la tension de surface (36). Une part importante des résultats qui ont suivi ont été obtenus par J. A. Tallmadge et al. (96; 95; 104; 36), qui ont considéré divers rayons de fibre R , différents liquides et différentes vitesses de tirage U_W . Les données expérimentales, couplées à une analyse théorique de l'épaisseur entraînée par la fibre, ont entre autre permis de tracer une carte des régimes (96) présentée sur la figure 1.3 dans le plan nombre de Goucher, nombre capillaire (N_{GO}, Ca). Ainsi, lorsque $R/l_c \gtrsim 3$, on peut négliger les effets de la courbure et considérer que l'on a un plan. A l'opposé, lorsque $R/l_c \lesssim 0.3$, on peut considérer que l'on a de petites fibres. Les valeurs intermédiaires $0.3 \lesssim R/l_c \lesssim 3$ correspondent à des "grands cylindres" pour lesquels on ne peut toutefois pas négliger les effets de courbure et où la gravité doit être prise en compte. J.A. Tallmadge et D. A. White notent aussi une région, à faible rayon et faible vitesse (c'est-à-dire faible

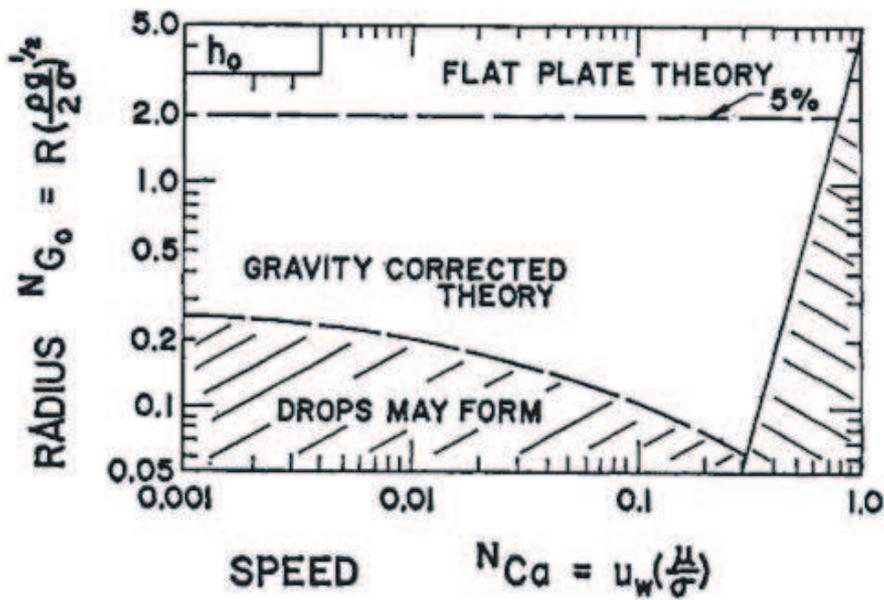


Fig. 1.3. Carte des régimes obtenue par J.A. Tallmadge et D. A. White (96) dans le cas d'une fibre de rayon R tirée d'un bain à la vitesse U_w .

épaisseur), où "des gouttes peuvent apparaître" mais restent vagues sur les limites et caractéristiques de cette instabilité.

Notre étude s'inspire des travaux de K. Hattori et al. et aspire à les compléter par une étude expérimentale systématique et rigoureuse. Un des objectifs de cette thèse est donc d'explorer et de caractériser les effets de la tension de surface, de la viscosité, de l'advection et de l'inertie afin d'aboutir à un diagramme de phase quantitatif et détaillé dans l'esprit de celui obtenu par Tallmadge et al. Nos paramètres de contrôle sont le rayon de la fibre R (ou plutôt le rapport R/l_c) et l'épaisseur initiale du film h_N (c'est-à-dire le débit). Sur la figure 1.4, je présente une carte purement indicative des travaux antérieurs proches de notre sujet, dans le plan des paramètres $(h_N, R/l_c)$. La région a (jaune) correspond aux études sans fil, c'est-à-dire les jets. Si ces études sont différentes de notre système, elles représentent néanmoins des systèmes où l'instabilité de Rayleigh-Plateau est couplée à un écoulement. La zone b (rose), à grand rayon ou lorsque h_N est très faible devant R , correspond aux études sans effets de courbure (plan incliné), largement détaillées dans la littérature. La zone c (verte) correspond à l'expérience de D. Quéré (81), i.e. à faible épaisseur sur des fibres de petits rayons. La zone d (bleue) correspond aux études qualitatives de K. Hattori et al. (37) et I. L. Kliakhandler et al. (53), qui ont aussi étudié de petites fibres, en explorant cependant des débits plus élevés. Cette carte nous indique qu'une zone importante du plan $(h_N, R/l_c)$ reste inexplorée ; notamment, les rayons de fibre modérés pour lesquels tous les effets sont du même ordre n'ont pas été étudiés. Nous nous attacherons dans cette thèse à explorer ces régions, à identifier dans chaque zone du plan les mécanismes dominants et à caractériser les structures qui en découlent.

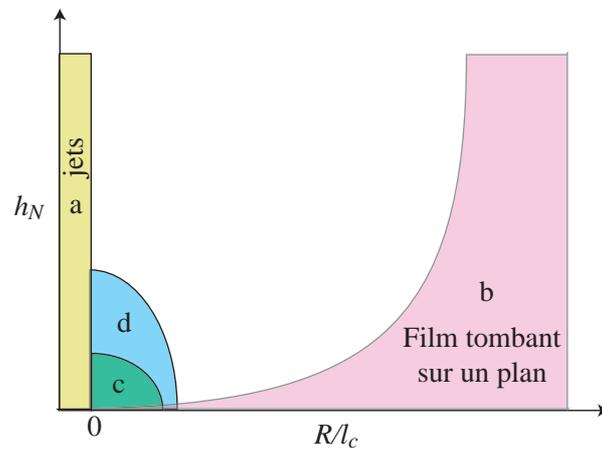


Fig. 1.4. Carte situant les études précédentes dans le plan des paramètres $(h_N, R/l_c)$.

Chapitre 2

Un fil bien mouillé

Dans ce chapitre, je présente le montage que j'ai élaboré pour mener à bien notre étude, en prenant surtout soin d'avoir un débit régulier et continu sur la fibre afin d'obtenir un film axisymétrique, d'épaisseur constante ainsi qu'une gamme de paramètres permettant l'étude des effets combinés de la tension de surface, de la gravité, de la viscosité et de l'inertie. Je décris ici les solutions techniques apportées, l'acquisition des données ainsi que les mécanismes d'instabilité (instabilité de Rayleigh-Plateau et instabilité hydrodynamique de films tombant).

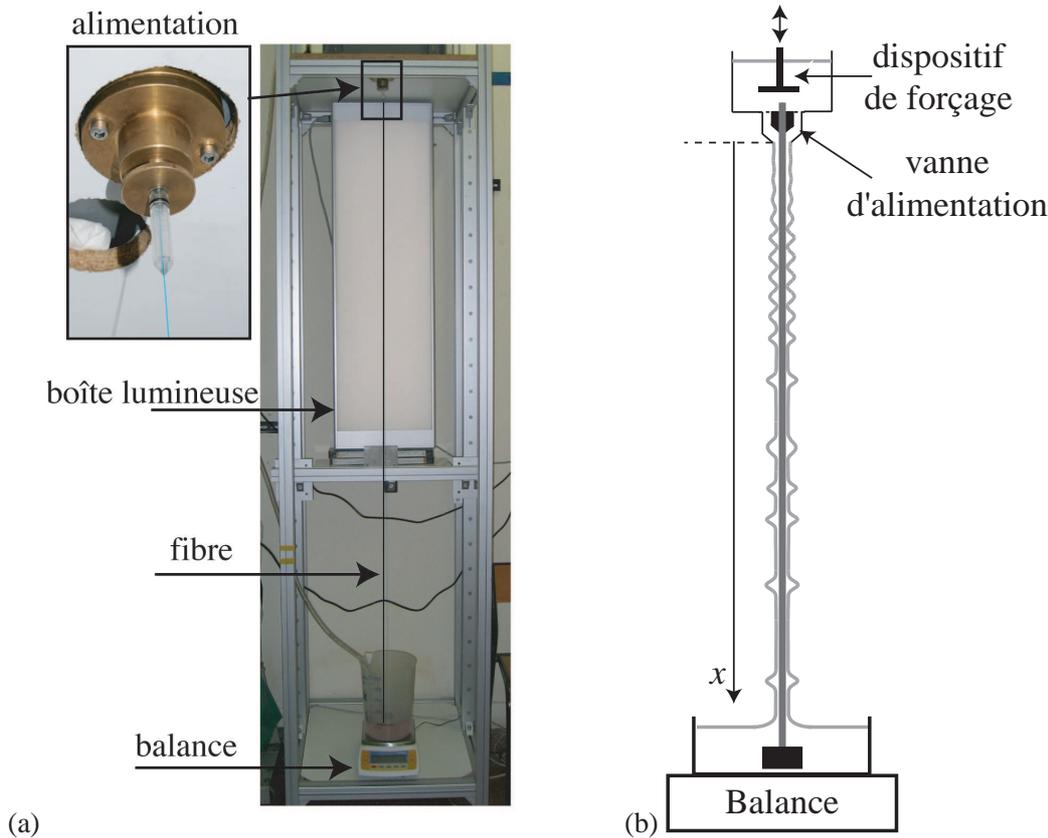


Fig. 2.1. Montage expérimental : (a) photo du montage, (b) Schéma simplifié.

2.1 Dispositif expérimental

2.1.1 Description générale

Le montage expérimental réalisé est présenté sur la figure 2.1. L'alimentation de la fibre se fait à l'aide d'un réservoir placé au-dessus du montage qui s'écoule par gravité. La surface du réservoir supérieur est importante et la hauteur de liquide y est élevée, ce qui permet d'assurer une pression pratiquement constante. Au cours d'une expérience typique, la hauteur dans le réservoir est d'environ 5 cm et varie de moins de 1 cm. Une telle variation de hauteur représente un écart de pression $\Delta P/P$ de moins de 0.1 % ($P \sim 10^5$ Pa, $\Delta P = \rho g \Delta h \sim 10^2$ Pa). On obtient donc une alimentation continue avec un débit Q constant ($\Delta Q/Q \lesssim 5\%$ sur une durée d'environ 10 minutes).

La fibre est maintenue verticale à l'aide d'un poids fixé à son extrémité. Pour obtenir de bonnes images de l'écoulement, on éclaire la fibre à l'aide d'une boîte lumineuse qui délivre un éclairage homogène derrière la fibre. Le débit est mesuré via une balance de précision placée sous le réservoir qui recueille le liquide s'écoulant de la fibre. Cette balance est reliée à un ordinateur, ce qui nous permet d'obtenir le poids du liquide écoulé par unité de temps, et donc le débit massique Q , alors obtenu avec une précision de $5 \cdot 10^{-3} \text{ g.s}^{-1}$. Je dispose de fibres en nylon (fil de pêche) de différents diamètres (de 0.3 à 3 mm). Nous avons choisi d'utiliser des huiles silicone Rhodorsyl de différentes viscosités qui mouillent parfaitement le nylon. De plus, ces huiles ont une tension de surface très bien contrôlée et une excellente stabilité thermique de la viscosité (une variation de 5°C entraîne une variation relative de la viscosité de moins de 5%). On peut

symbole	ρ (kg/m ⁻³)	ν (x10 ⁻⁶ m ² .s ⁻¹)	η (mPa.s)	γ (x10 ⁻³ N.m ⁻¹)	l_c (mm)
V50	963	50	48.15	20.8	1.484
V100	965	100	96.5	20.9	1.486
V500	970	500	485	21.1	1.489

Tab. 2.1. Caractéristiques des huiles silicones utilisées.

de plus disposer de différentes viscosités (de $\nu=50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ à $500 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) sans changer la tension de surface et la densité. Les caractéristiques de ces huiles sont présentées dans le tableau 2.1. Pour pouvoir changer la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ nous avons aussi utilisé un mélange eau-glycérol qui possède une tension de surface de l'ordre de celle de l'eau, soit environ 3 fois celle de l'huile silicone. Avec un mélange à 80 % de glycérol, on a une viscosité proche de $\nu=50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ à 20°C mais la viscosité dépend alors fortement de la température, ce qui rend l'utilisation de ce fluide délicate. De surcroît, dans ce cas, on se trouve en situation de mouillage partiel et d'autres effets entrent en jeu ; on perd notamment l'axisymétrie des structures. Tous les résultats présentés dans cette thèse concernent les huiles siliconées à l'exception d'une expérience réalisée avec un mélange eau-glycérol (voir Chap. 3 et 6).

2.1.2 Acquisitions

Les mesures d'épaisseur de film, vitesses ou fréquences sont faites par traitement d'images obtenues à l'aide de deux caméras : une caméra rapide et une caméra linéaire.

2.1.2.1 Caméra rapide

La caméra rapide permet d'obtenir des images de grande résolution grâce à un objectif Macro (environ $100 \mu\text{m}/\text{pixel}$) sur une longueur de fibre d'environ 10 cm. Ces images apportent de nombreux renseignements quant à la forme des ondes et à l'épaisseur du film. Sa fréquence d'acquisition pouvant atteindre 500 images par secondes, on obtient des films permettant une visualisation précise de la dynamique de l'écoulement.

2.1.2.2 Caméra linéaire

Le fonctionnement de la caméra linéaire est résumé sur la figure 2.2. La caméra linéaire acquiert une seule ligne de pixels.

On peut positionner cette ligne de pixels parallèlement à l'écoulement, c'est-à-dire parallèlement à la fibre (axe \vec{x}) et passant "à travers" les gouttes (Fig. 2.2(a)). A un instant donné, la position des gouttes correspond à une zone sombre. On suit alors l'évolution de cette ligne en fonction du temps pour obtenir un diagramme spatio-temporel (x, t) sur lequel la trajectoire des gouttes est donnée par une ligne sombre. De tels diagrammes nous donnent accès à la fréquence (nombre de crêtes passant à une hauteur donnée sur la fibre par unité de temps) et à la vitesse des structures observées (pente des lignes sombres).

Une autre configuration possible est donnée sur la figure 2.2(b). Dans ce cas, la ligne de pixels est perpendiculaire à la fibre. On obtient ainsi l'évolution temporelle de l'épaisseur du film en un point x donné

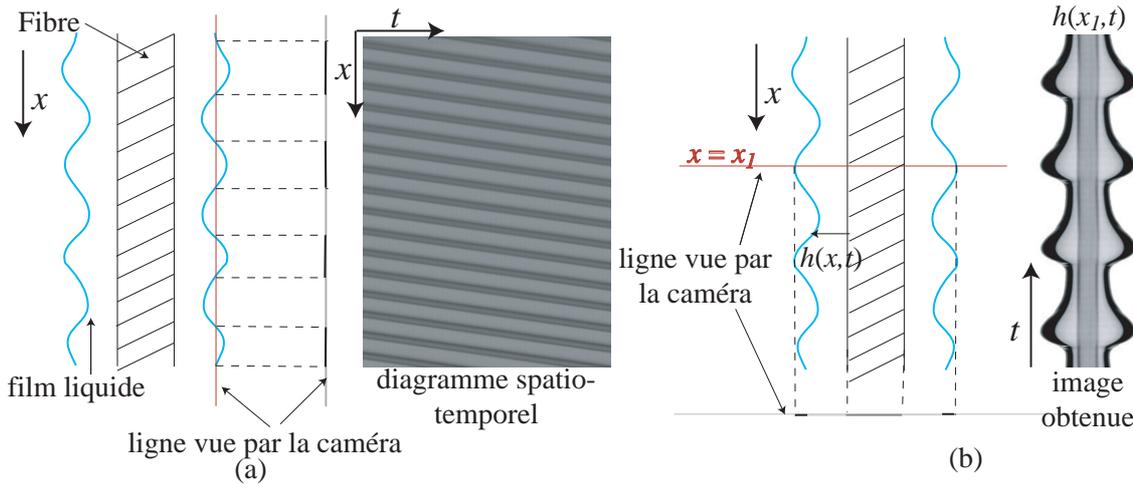


Fig. 2.2. Principe de fonctionnement de la caméra linéaire en position parallèle (a) et perpendiculaire (b) à l'écoulement.

sur la fibre. La précision sur la mesure de l'épaisseur est de $10\text{-}30 \mu\text{m}/\text{pixel}$ et la résolution temporelle est excellente puisque les fréquences d'acquisitions sont comprises entre 1000 et 5000 Hz.

2.1.2.3 Traitement des images

A partir d'une image de l'écoulement (obtenue par la caméra rapide ou la caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement), on peut obtenir l'épaisseur du film en suivant la procédure décrite sur la figure 2.3 à l'aide du logiciel IgorPro. On effectue tout d'abord un seuillage de l'image (Fig. 2.3 (a)), de manière à avoir la fibre+le fluide en noir et le reste en blanc. On inverse cette image, et on a donc fibre+fluide en blanc et l'extérieur en noir (Fig. 2.3 (b)). On obtient ainsi une matrice $M[i,j]$ ($0 \leq i \leq l-1$, $0 \leq j \leq L-1$) contenant les valeurs en niveau de gris des pixels de l'image, soit uniquement des 0 (noir) et des 255 (blanc). On multiplie alors cette matrice par un vecteur unitaire pour obtenir un vecteur colonne $s(x) = \sum_{j=0}^{L-1} f(i,j)$ pour $0 \leq i \leq l-1$ qui correspond donc à la somme de chaque colonne de M (Fig.2.3 (c)). On a ainsi $s(x)=255n(x)$ où $n(x)$ est le nombre de pixels dont la valeur est égale à 255, soit $n(x) \equiv 2(h(x)+R)$. Les structures étant axisymétriques, on reconstruit directement le profil de l'onde $h(x)$ (Fig.2.3 (d)-(e)). La résolution de cette méthode est d'un pixel.

2.1.3 Alimentation

On cherche à enduire la fibre de manière régulière (débit constant) et à obtenir un film initial d'épaisseur uniforme. Cette alimentation constante et axisymétrique est réalisée grâce à une vanne conçue avec l'aide de Patrice Jenffer (Ingénieur de Recherche Paris-Sud) en s'inspirant des travaux expérimentaux de Kapitza (50). Cette pièce est présentée sur la figure 2.4. Elle consiste en un assemblage de deux pièces coniques permettant de bien guider le liquide sur la fibre (voir schéma simplifié de la figure 2.4(b)). Le remplissage de l'espace entre les deux cônes s'effectue grâce à quatre ouvertures symétriques. Le liquide se répartit ensuite autour de la fibre de manière uniforme. La partie inférieure de la vanne est équipée d'un

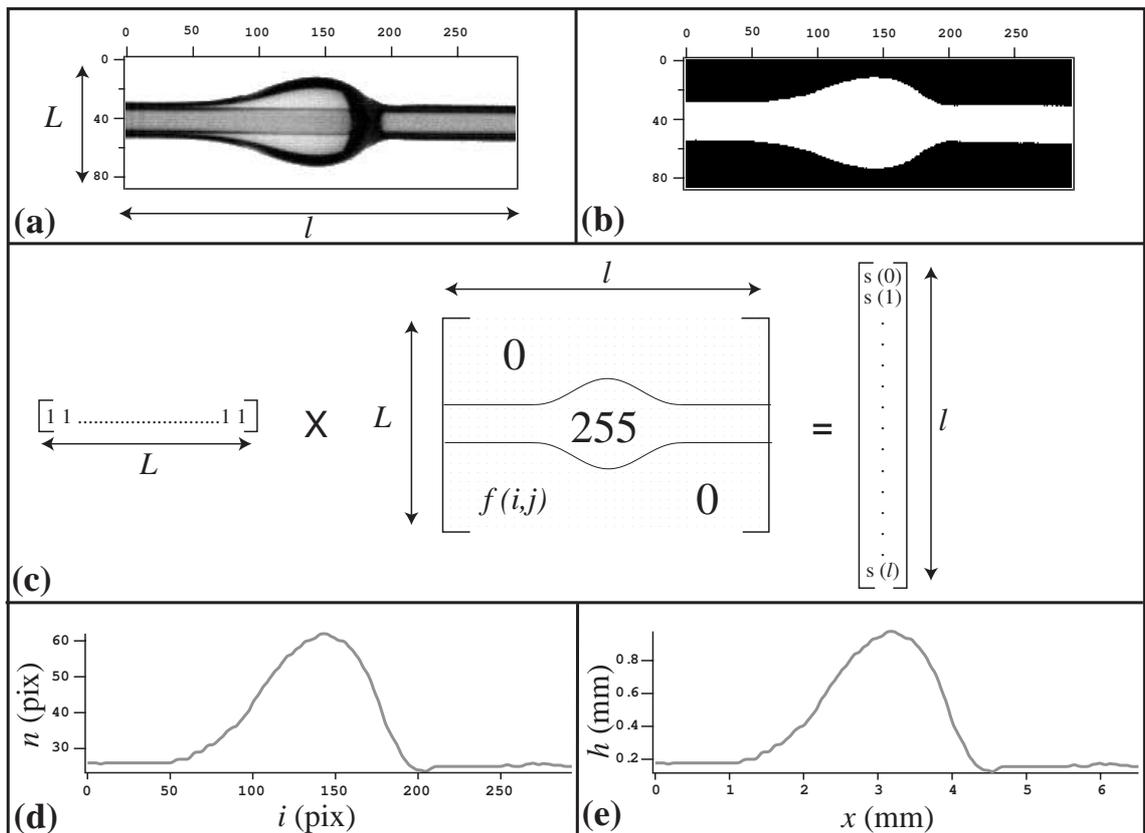


Fig. 2.3. Technique utilisée pour extraire le profil d'une photo (a), qui est seuillée (b), exploitée (c) et dont on extrait le profil d'épaisseur en pixels (d) puis en unité physique (e).

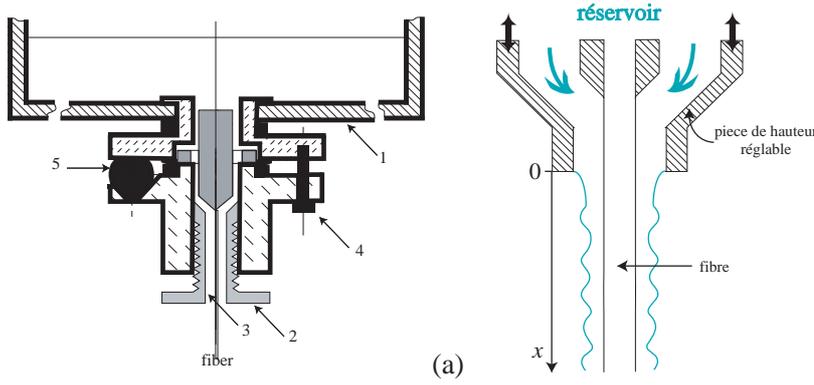


Fig. 2.4. Vanne d'alimentation de la fibre. (a) Schéma complet : la partie supérieure 1 est fixée au réservoir. La partie inférieure 2 est vissée dans 1. Le fluide est guidé sur la fibre via l'espace entre les cônes 3. L'axisymétrie de l'écoulement et l'horizontalité de la vanne sont ajustées à l'aide des vis 4 et du pivot 5. (b) Schéma simplifié de la buse d'injection.

pas de vis très fin permettant de régler l'espace par lequel le liquide s'écoule (entre les deux cônes) et donc l'épaisseur de liquide, c'est-à-dire le débit. L'épaisseur peut alors être réglée avec une précision de 10^{-3} mm de manière reproductible. Trois vis permettent enfin d'ajuster l'horizontalité de la vanne et l'axisymétrie du film liquide.

2.1.3.1 Écoulement en sortie de la vanne

La figure 2.5 représente l'évolution de l'épaisseur du film près de la sortie de la vanne. Le film obtenu est raccordé à la vanne par un ménisque puis s'étend en restant uniforme, d'épaisseur constante h_N . Après une distance Δ , appelée longueur d'apparition, le film se déstabilise. L'instabilité croît rapidement et on obtient ensuite un train d'ondes d'amplitude à peu près constante (Fig. 2.5(a-b)).

2.1.3.2 Écoulement de base : écoulement de Nusselt

Le film uniforme correspond à notre écoulement de base. Les différentes notations sont introduites sur la figure 2.6. On cherche la solution analytique pour cet écoulement de base, à savoir un écoulement stationnaire d'un film uniforme d'épaisseur constante h_N (appelée *épaisseur de Nusselt* (74)) et en supposant que la vitesse et la pression sont indépendantes de la position sur la fibre x . Les champs de vitesse et de pression sont notés $U(r)$ et $P(r)$. Le bilan de la quantité de mouvement suivant la direction axiale (x) se réduit à :

$$\rho g + \eta \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r \right) U = 0 \quad (2.1)$$

que l'on peut réécrire :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) U = -\frac{\rho g}{\eta}. \quad (2.2)$$

Cette équation s'intègre facilement avec comme conditions aux limites le non-glissement sur la fibre ($U = 0$ en $r = R$) et l'annulation des contraintes tangentielles à l'interface ($\partial_r U = 0$ en $r = R + h_N$). On obtient

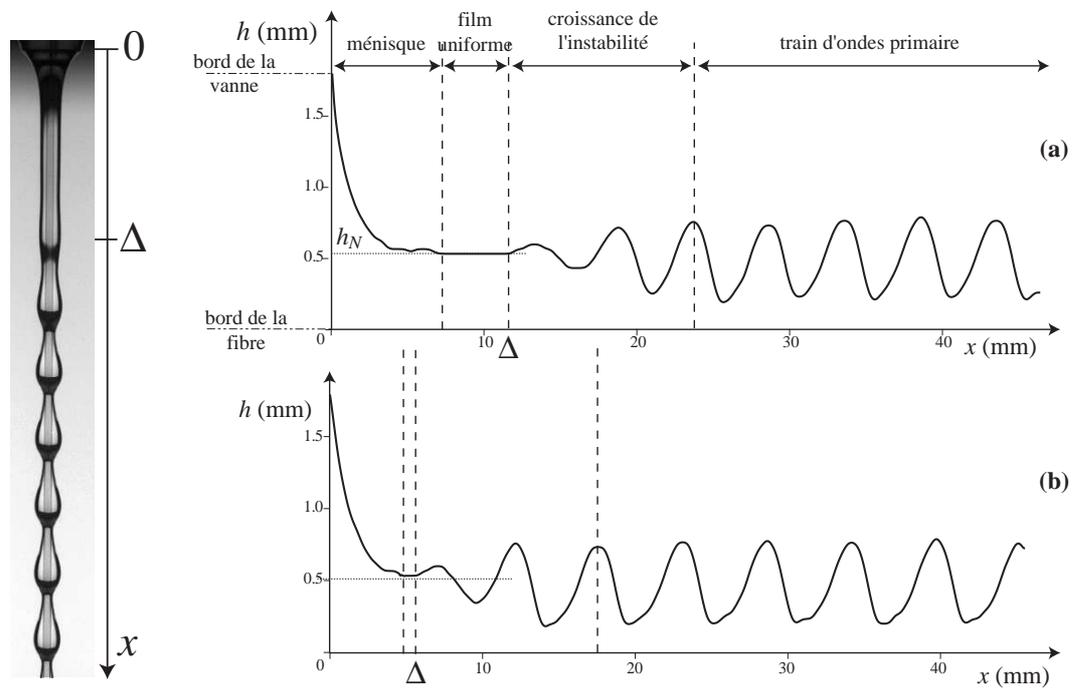


Fig. 2.5. Photo de l'écoulement à la sortie de la vanne. Profils obtenus à la sortie de la vanne pour une fibre $R=0.2$ mm, huile V50 et (a) $h_N = 0.57$ mm, (b) $h_N = 0.55$ mm.

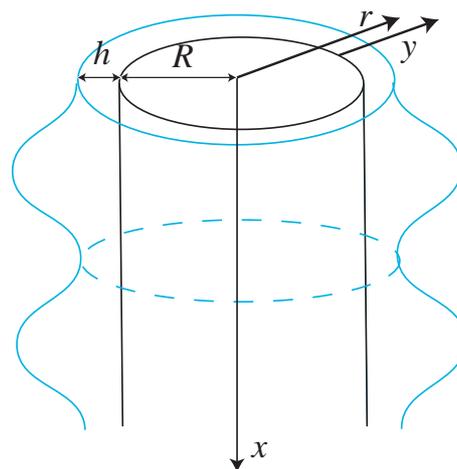


Fig. 2.6. Notations : un film d'épaisseur $h(x, t)$ s'écoule sur une fibre de rayon R selon la direction descendante x .

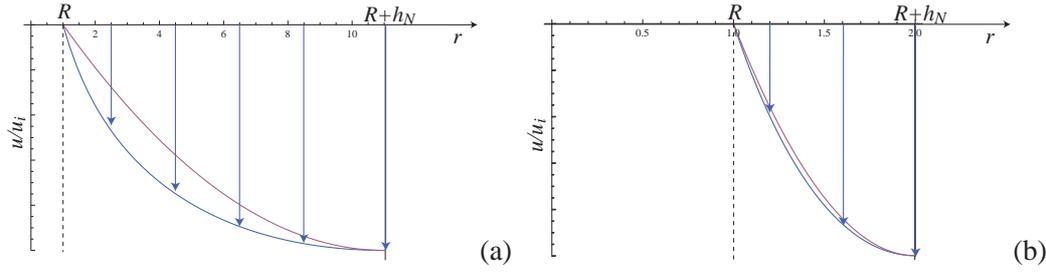


Fig. 2.7. Profils de vitesse dans l'écoulement normalisé par la vitesse maximale (u_i , vitesse du fluide à l'interface) pour un film d'épaisseur h_N s'écoulant sur une fibre de rayon R (bleu) et sur un plan (rose) : (a) lorsque $h_N = 10 R$ (b) lorsque $h_N = R$.

alors la solution pour un écoulement stationnaire appelée solution de Nusselt :

$$U(r) = \frac{\rho g}{2\eta} \left[(R + h_N)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{2}(r^2 - R^2) \right] \quad (2.3)$$

La vitesse est donc nulle sur la fibre et maximale à l'interface ; le profil de vitesse, présenté sur la figure 2.7, est proche du profil semi-parabolique obtenu dans le cas d'un film s'écoulant sur un plan. L'effet de la courbure, via la correction logarithmique à l'écoulement parabolique commence à jouer lorsque $h_N > R$. Lorsque l'épaisseur devient petite devant le rayon de la fibre, on tend rapidement vers le cas plan. On définit le débit linéique $q_N = \frac{1}{2\pi R} \int_R^{R+h_N} U(r) 2\pi r dr$. On note $\alpha_N = h_N/R$.

L'intégration de (2.3) donne

$$q_N = \frac{\rho g}{3\eta} h_N^3 \phi(\alpha_N) \quad (2.4)$$

avec la fonction

$$\phi(x) = \frac{3 \left(4(x+1)^4 \log(x+1) - x(x+2)(3x(x+2)+2) \right)}{16x^3} \quad (2.5)$$

qui ne dépend que de la géométrie et dont le graphe est donnée sur la figure 2.8 (a). Notons que le cas d'un écoulement sur un plan vertical correspond à $\alpha_N \rightarrow 0$. Dans ce cas, $\phi(0) = 1$ et la vitesse moyenne de l'écoulement est q_N/h_N donnée par $(g/3\nu)h_N^2$. On peut inverser numériquement la relation (2.4) pour obtenir l'épaisseur h_N d'un film uniforme à un débit q_N donné. Expérimentalement, on mesure le débit massique Q . Le débit linéique est alors défini par $q_N = Q/(2\pi\rho R)$. L'évolution, à rayon de fibre fixé, de l'épaisseur h_N en fonction du débit est donnée sur la figure 2.8 (b). On peut noter qu'une même épaisseur est obtenue pour un débit d'autant plus faible que la viscosité est élevée.

On mesure le débit total massique Q à l'aide de la balance placée sous le dispositif et on mesure l'épaisseur correspondante. Des mesures précises de l'épaisseur du film uniforme en fonction du temps ont été prises avec la caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement juste avant la déstabilisation du film (à environ 1 cm de la vanne). Ces mesures nous indiquent que les fluctuations relatives d'épaisseur sont de l'ordre de $\pm 0.05\%$, ce qui indique que le niveau de bruit dans le système est très faible. On compare l'épaisseur initiale mesurée expérimentalement à h_N calculé à partir du débit (Fig. 2.9) pour différents rayons de fibre et différentes viscosités. On constate un très bon accord, ce qui signifie que l'écoulement observé en sortie de la vanne est bien l'écoulement de Nusselt. Si les épaisseurs obtenues sont toujours du même ordre ($0.2 \text{ mm} < h_N < 1 \text{ mm}$), la gamme de débit correspondante dépend fortement du rayon de la fibre (de $0.5 \text{ g/s} \lesssim Q \lesssim 2 \text{ g/s}$ pour $R=1.5 \text{ mm}$ à $0 \text{ g/s} \lesssim Q \lesssim 0.15 \text{ g/s}$ pour $R=0.2 \text{ mm}$).

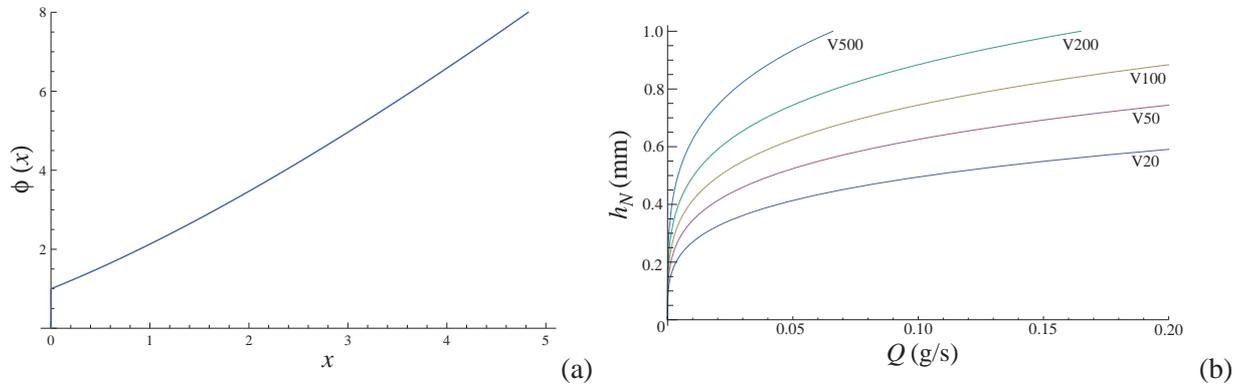


Fig. 2.8. (a) Evolution de la fonction géométrique $\phi(x)$ et (b) évolution de h_N en fonction du débit calculée à partir de la relation (2.4) pour $R=0.2$ mm et différentes viscosités.

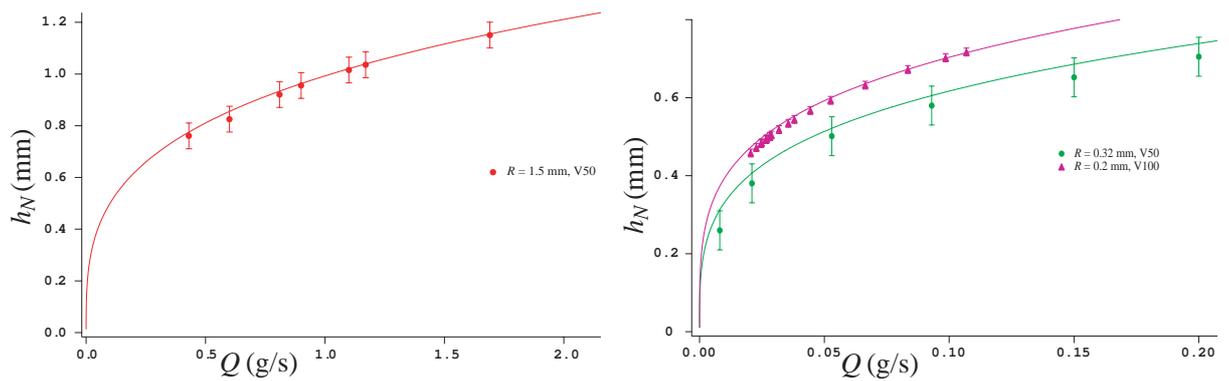


Fig. 2.9. Mesures de l'épaisseur initiale h_N en fonction du débit : résultats expérimentaux (points) et calcul à partir de la relation (2.4) (trait plein).

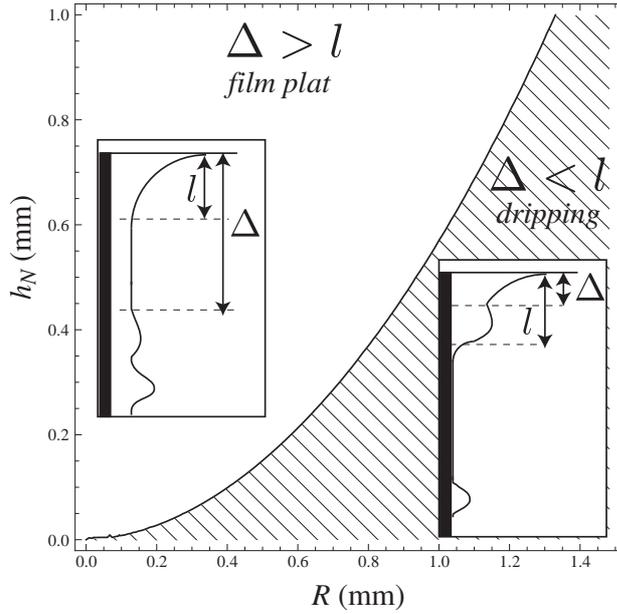


Fig. 2.10. Carte dans le plan (h_N, R) indiquant l'épaisseur critique en deçà de laquelle on ne peut obtenir de film uniforme mais un goutte à goutte (*dripping*).

Ce dispositif permet donc d'obtenir des épaisseurs de quelques dixièmes de millimètres précisément, avec cependant deux limitations majeures. Nous sommes en effet limités aux grandes épaisseurs par la longueur capillaire l_c . En effet, lorsque le film devient d'épaisseur supérieure à l_c , la tension de surface ne peut plus "tenir" le liquide et le film perd son axisymétrie. Notons au passage que l'ouverture de la vanne (4 et 10 mm pour les deux embouts utilisés) a été choisie pour être très supérieure à l_c . Nous sommes aussi limités aux faibles épaisseurs par l'établissement du ménisque. L'épaisseur limite correspond au cas représenté sur la figure 2.5(b), où le film ne reste d'épaisseur uniforme que sur environ 1 mm. Pour des épaisseurs plus faibles, le ménisque se déstabilise instantanément et se brise en gouttes : on ne peut plus former de film uniforme et on observe un goutte-à-goutte dès la sortie de la vanne. Ce mode appelé "*dripping*" est hors du cadre de notre étude, qui se concentre sur la déstabilisation d'un film d'épaisseur uniforme. On peut cependant comprendre son apparition en comparant la distance nécessaire à l'apparition de l'instabilité Δ et la longueur caractéristique du ménisque l . En effet, si $\Delta > l$, on forme un film plat qui se déstabilise en aval. En revanche, si $\Delta < l$, on ne peut former de film : le ménisque se déstabilise, conduisant au goutte à goutte (voir Fig. 2.10). On va donc dans un premier temps estimer l'évolution de la longueur d'apparition Δ , puis déterminer la longueur l sur laquelle le ménisque s'établit afin d'obtenir le lieu de la transition goutte-à-goutte/jet dans le plan (h_N, R) .

Afin d'estimer la longueur d'apparition Δ , on détermine d'abord le temps caractéristique de croissance de l'instabilité en considérant un simple équilibre viscosité/tension de surface, qui sont les deux mécanismes prédominants dans notre problème. On fera le calcul exact au chapitre suivant et on se contente ici de raisonner aux dimensions. L'écoulement dans le film d'épaisseur h_N est un écoulement de Poiseuille caractérisé par la vitesse

$$U \sim \frac{\Delta p}{R} \frac{h_N^2}{\eta}$$

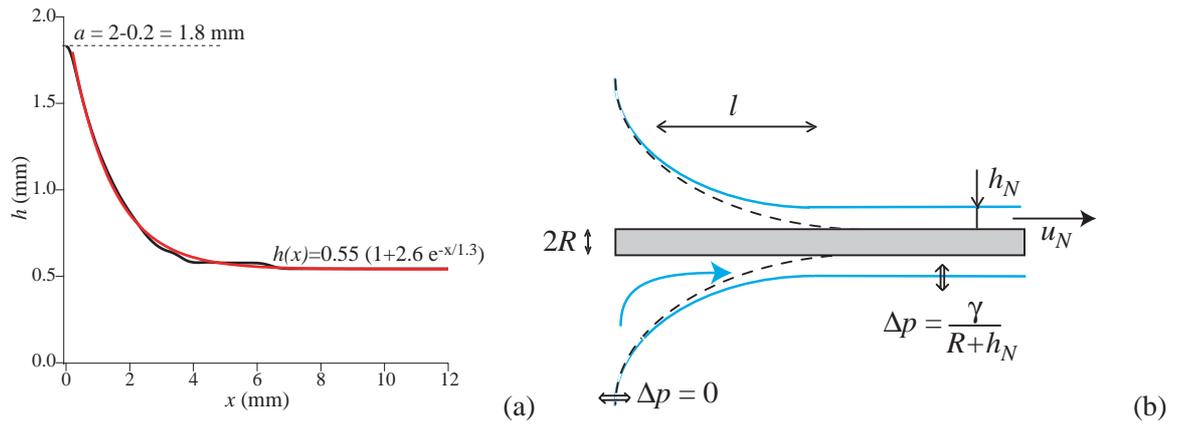


Fig. 2.11. *Ménisque à la sortie de la vanne : (a) profil expérimental (en noir) et courbe d'ajustement (en rouge). (b) Notations, surpressions en différents points et mouvement du fluide. La courbe pointillée correspond au ménisque statique (obtenu en l'absence de mouvement).*

où on a pris comme échelles caractéristiques de longueur R dans la direction de l'écoulement (Ox) et h_N dans la direction radiale (Or). Dans l'approximation des faibles pentes, et en négligeant la pression hydrostatique, le gradient de pression est principalement dû à la courbure axiale ($\sim h_N/R^2$) et on peut écrire $\Delta p \sim \frac{\gamma h_N}{R^2}$. Le flux de liquide (par unité de largeur de film) s'écrit $\Phi = h_N U$. La conservation de la masse s'écrit aux dimensions :

$$\frac{\Phi}{R} \sim \frac{h_N}{\tau}$$

où τ est le temps caractéristique de croissance de l'instabilité. On obtient alors, en combinant les formules précédentes :

$$\tau \sim \frac{\eta R^4}{\gamma h_N^3}$$

Le temps de croissance est de l'ordre de 10^{-4} s pour nos paramètres. En supposant que le fluide est advecté à la vitesse moyenne $u_N \sim \rho g h_N^2 / \eta$ définie précédemment, on peut estimer la longueur d'apparition Δ :

$$\Delta \sim u_N \tau \sim \frac{\rho g R^4}{h_N \gamma} \sim \frac{R^4}{l_c^2 h_N}$$

On cherche maintenant à estimer la longueur l du ménisque qui raccorde la vanne au film d'épaisseur h_N . On peut rapprocher le cas d'un film liquide s'écoulant le long d'une fibre à celui d'une fibre tirée d'un bain, cas qui a été largement étudié (voir notamment la revue de D. Quéré (83; 82)). Je reviendrai en détail sur l'entraînement d'un film liquide par une fibre et la forme du ménisque au chapitre 6. Ici, je me contenterai d'un raisonnement aux dimensions afin d'estimer l'extension l du ménisque. Expérimentalement, on constate que le ménisque prend une forme exponentielle

$$h(x) = h_N(1 + A e^{-x/l})$$

où $A \approx 2.5$ et l est de l'ordre du mm et augmente avec le débit. La constante A dépend de l'ouverture de la vanne : en effet, à $x=0$, $h(0) = a = h_N(1 + A)$ où $a = 2 \text{ mm} - R$ (l'ouverture totale de la vanne étant de 4 mm). Un exemple est donné sur la figure 2.11(a). Dans ce cas, $A = a/h_N - 1 = 1.8/0.55 - 1 = 2.3$ en

bon accord avec la valeur expérimentale $A=2.6$. Les notations sont explicitées sur la figure 2.11(b). Il existe trois régions : en haut de la fibre, on a un morceau de ménisque statique non perturbé par l'écoulement, qui correspond au ménisque présent sans écoulement lorsqu'on met un fil en contact avec un bain liquide (le raccordement d'une interface libre avec un solide mouillant imposant une déformation de l'interface). Ici, on suppose le rayon de la fibre petit devant la longueur capillaire et on néglige l'effet de la gravité. La traversée d'une interface courbe s'accompagne d'un saut de pression donné par la loi de Laplace

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.6)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbures principaux au point de l'interface considéré. Ainsi, en négligeant la pression hydrostatique, le ménisque statique est une surface de courbure nulle donnée en pointillés sur la figure 2.11(b). La forme de ce profil, bien connu, porte le nom de chaînette (dont on peut trouver une description dans le livre de H. Bouasse (8)). En aval, on a une autre région qui est le film plat d'épaisseur h_N . Entre les deux, il y a une zone de raccord, appelée ménisque dynamique, où le film se forme. C'est l'extension l de ce ménisque dynamique que l'on cherche à déterminer.

On peut alors faire le raisonnement suivant : dans le ménisque dynamique, de longueur l , il existe un gradient de pression entre le film plat et le réservoir supposé infini (l'ouverture de la vanne est très supérieure à l_c) qui s'exprime $\nabla p \sim (\gamma/(R+h_N)-0)/l$ (Fig. 2.11(b)). On se place dans le cas simple où $h \ll R$, et on obtient alors

$$\nabla p \sim \gamma/Rl.$$

L'écoulement U dans le ménisque est alors régi par la loi de Poiseuille telle que

$$\frac{\eta U}{h_N^2} \sim \nabla p \sim \frac{\gamma}{lR} \quad (2.7)$$

La courbure du ménisque dynamique comporte deux termes : l'un lié à la courbure de la fibre ($1/R$) et l'autre à la courbure axiale ($\partial^2 h/\partial x^2$). Ce ménisque dynamique se raccorde au ménisque statique de courbure nulle à la distance l , c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{h_N}{l^2} \right) \sim 0 \quad (2.8)$$

En combinant 2.8 et 2.7, on obtient la longueur du ménisque

$$l \sim R \left(\frac{\eta U}{\gamma} \right)^{1/3} \quad (2.9)$$

que l'on définit en prenant pour vitesse moyenne U la vitesse u_N , soit

$$l \sim R \left(\frac{\rho g}{\gamma} \right)^{1/3} h_N^{2/3} \sim \frac{R h_N^{2/3}}{l_c^{2/3}}.$$

Finalement, pour obtenir l'épaisseur critique de dripping, comme présenté sur la figure 2.10, on exprime la condition $\Delta \sim l$ qui s'écrit

$$\frac{h_N}{R} \sim \left(\frac{R}{l_c} \right)^{4/5}.$$

On trace cette épaisseur dans le plan $(h_N, R/l_c)$. A rayon de fibre fixé, il existe bien une épaisseur critique ($\sim 10^{-1}$ mm) en deçà de laquelle la longueur nécessaire au film pour se déstabiliser est plus faible que la longueur d'établissement du ménisque et celui-ci se brise en gouttes. Notons que l'ordre de grandeur de cette épaisseur est correcte, mais le raisonnement en loi d'échelle précédent ne permet pas d'obtenir de critère quantitatif.

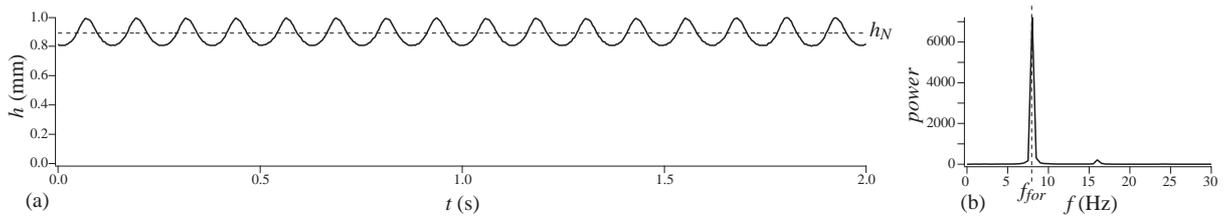


Fig. 2.12. Réponse à un forçage : (a) signal $h(t)$ mesuré en haut de la fibre ($x=10$ cm) et (b) spectre de puissance correspondant pour $R=1.5$ mm, $Q=0.69$ g/s, $h_N=0.89$ mm et $f_{for}=8$ Hz.

2.1.4 Dispositif de forçage

Afin d'étudier la réponse du film à des perturbations périodiques, un dispositif de forçage est placé dans le réservoir d'alimentation de la fibre. Il s'agit d'introduire, à l'aide d'un vibreur, des modulations de pression en amont de la vanne d'alimentation. Ainsi, on obtient à la sortie de la vanne un débit continu modulé en amplitude. L'avantage de cette méthode est qu'on conserve un écoulement axisymétrique et que les perturbations sont uniformes sur tout le périmètre de la fibre.

Pour réaliser ces perturbations, nous avons utilisé un haut-parleur sur la membrane duquel a été fixé une tige de Plexiglas, à l'extrémité de laquelle est collé un disque de diamètre 5 cm. Le haut-parleur est relié à une alimentation couplée à un générateur basses fréquences permettant de faire vibrer la membrane à la fréquence voulue f_{for} . L'ensemble tige+cylindre est plongé dans le réservoir et oscille verticalement à la même fréquence que le haut-parleur. Ceci crée une modulation de la hauteur de liquide dans le réservoir, et par conséquent de la pression et donc du débit.

La figure 2.12 présente la mesure du signal en entrée de l'écoulement en présence d'un forçage. Les mesures sont effectuées à l'aide de la caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement à quelques centimètres de l'alimentation, lorsque les premières oscillations sont visibles ($\Delta h \approx 0.1$ mm). On voit apparaître des oscillations périodiques (à la fréquence de forçage f_{for}) quasi-sinusoïdales autour de l'épaisseur du film plat h_N obtenu en l'absence de forçage à la sortie de la vanne. La fréquence et l'amplitude du forçage (i.e. des modulations d'épaisseurs) peuvent être ajustées. Des mesures d'épaisseur à $x = 2$ cm nous indiquent qu'en l'absence de forçage (bruit ambiant uniquement), les fluctuations d'épaisseur ne dépassent pas 0.2 % ; en revanche, avec un forçage, on observe des fluctuations de 1.5 % à 9 % en fonction de l'amplitude du forçage, avec soit un signal régulier, comme celui présenté ici, soit un signal modulé en amplitude (avec des modulations de l'ordre de 2 %). De tels signaux modulés seront présentés dans la suite de la thèse. Les fréquences de forçage sont comprises entre 0.1 et 50 Hz. L'étude des différentes réponses à un tel forçage seront présentées aux chapitres 4 et 5.

2.1.5 Gamme de paramètres explorée

Nous avons travaillé avec différentes huiles, de viscosités différentes mais pour lesquelles la tension de surface et la densité sont pratiquement constantes (i.e. une longueur capillaire $l_c \approx 1.5$ mm constante). L'effet de la courbure peut être mesuré en comparant le rayon de la fibre R à la longueur capillaire. On définit alors le nombre de Goucher $Go = R/l_c$ présenté en introduction, qui compare les effets gravitationnels et de la tension de surface (34; 96). Ainsi, les différents rayons de fibre que j'ai utilisés, $0.35 \text{ mm} < R < 1.5$ mm, soit $0.12 < R/l_c < 1$, permettent d'étudier l'effet de la courbure jusqu'à la limite du cas plan ($R/l_c \sim$

R (mm)	G_o	Q (g/s)	h_N (mm)	α_N	Re	W	Fr
1.5	1	0.41 → 2.77	0.76 → 1.33	0.51 → 0.89	0.9 → 6.1	3.8 → 1.2	0.7 → 2
0.475	0.32	0.01 → 0.435	0.31 → 0.9	0.66 → 1.9	0.07 → 3	23 → 2.7	0.19 → 1.9
0.45	0.3	0.14 → 0.38	0.66 → 0.86	1.47 → 2	1 → 2.8	5 → 3	0.97 → 1.8
0.35	0.23	0.012 → 0.44	0.35 → 0.9	0.99 → 2.6	0.12 → 4.16	18 → 2.7	0.29 → 2.5
0.32	0.21	0.0123 → 0.13	0.35 → 0.66	1.1 → 2.06	0.13 → 1.34	18 → 5	0.31 → 1.3
0.25	0.17	0.016 → 0.13	0.38 → 0.67	1.5 → 2.7	0.21 → 1.72	15 → 5	0.43 → 1.62
0.23	0.15	0.027 → 0.15	0.45 → 0.7	1.93 → 3	0.39 → 2.16	11 → 4.5	0.68 → 1.9

Tab. 2.2. Gamme de paramètres explorée pour l'huile V50.

R (mm)	G_o	Q (g/s)	h_N (mm)	α_N	Re	W	Fr
0.25	0.21	0.013 → 0.08	0.44 → 0.7	1.75 → 2.8	0.09 → 0.5	11.5 → 4.6	0.3 → 0.9
0.2	0.17	0.02 → 0.107	0.50 → 0.76	2.5 → 3.8	0.17 → 0.88	9 → 3.8	0.48 → 1.35
0.175	0.12	0.023 → 0.06	0.516 → 0.65	2.9 → 3.7	0.22 → 0.56	8 → 5	0.6 → 1

Tab. 2.3. Gamme de paramètres explorée pour l'huile V100.

1). Les débits (et donc les épaisseurs) que l'on peut alors atteindre sont donnés dans les tableaux 2.2 et 2.3 pour deux viscosités. Nous obtenons ainsi des épaisseurs de l'ordre du rayon de la fibre ($\alpha_N = h_N/R \sim 1$). Afin de comparer les différents mécanismes physiques en jeu dans ce système (gravité, viscosité, tension de surface et inertie), on introduit quatre nombres sans dimension :

- le nombre de Reynolds (rapport inertie/viscosité)

$$Re = \frac{Q}{2\pi\rho Rv} = \frac{q_N}{v}$$

- le nombre Capillaire (rapport viscosité/tension superficielle)

$$Ca = \frac{\eta u_N}{\gamma}$$

- le nombre de Bond (rapport tension superficielle/gravité)

$$W = Bo^{-1} = \frac{\gamma}{\rho g h_N^2}$$

- le nombre de Froude (rapport vitesse du fluide/onde de gravité, c'est-à-dire inertie/gravité)

$$Fr = \frac{u_N}{\sqrt{g h_N}}$$

Les gammes de paramètres explorées et les valeurs des nombres sans dimension correspondants sont donnés dans les tableaux 2.2 et 2.3 pour deux viscosités.

Le nombre capillaire Ca sera toujours faible ($0.05 \lesssim Ca \lesssim 0.5$) pour les épaisseurs accessibles et pour tous les rayons de fibre. L'évolution des trois autres nombres sans dimension dans le plan des paramètres de contrôle ($h, R/l_c$) pour les rayons étudiés et les épaisseurs explorées est donné sur la figure 2.13. Les régimes visqueux, à faibles épaisseurs, sont caractérisés par des nombres de Reynolds $Re \sim 10^{-1}$ et les régimes inertiels, pour des épaisseurs importantes, par $Re \sim 10$. La tension de surface domine aux faibles épaisseurs ($W > 10$) et reste importante pour des épaisseurs intermédiaires ($W \sim 1$). A très forte épaisseur,

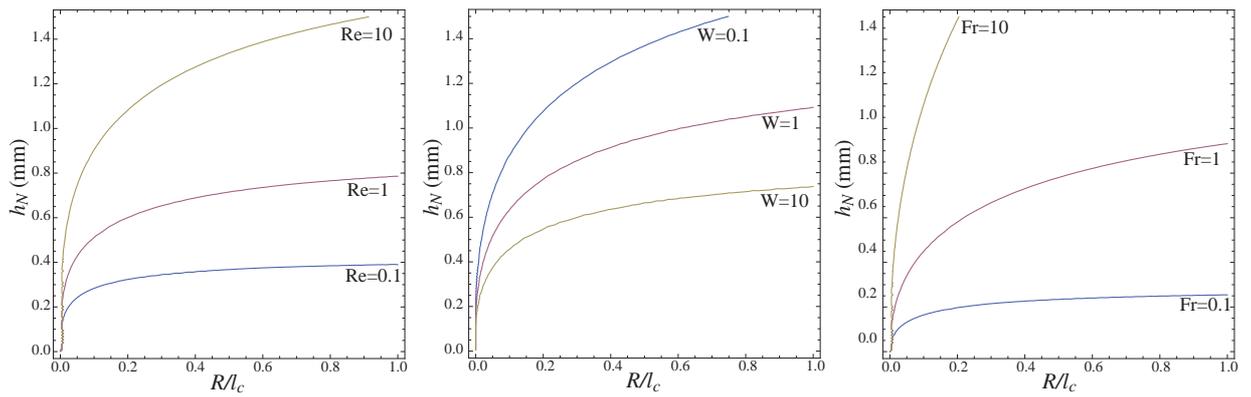


Fig. 2.13. Evolution des courbes d'isovaleur des nombres sans dimension Re , W et Fr dans le plan (h, Go) . Les valeurs indiquées (0.1 en bleu, 1 en rose et 10 en jaune) correspondent aux valeurs des nombres sans dimension pour de l'huile V50.

les effets capillaires sont moindres ($W < 1$). De plus, l'effet de la tension de surface est lié à la courbure et donc diminue lorsque l'on augmente le rayon ou lorsque l'épaisseur est très grande par rapport au rayon de la fibre. Le nombre de Froude reste d'ordre 1 pour la plupart des épaisseurs obtenues, la gravité équilibrant les effets inertiels. A fortes épaisseurs, l'inertie domine ($Fr \sim 10$) tandis que les effets inertiels sont négligeables à faibles épaisseurs ($Fr \sim 0.1$).

Ainsi, on peut tracer une carte qualitative des régimes attendus (Fig. 2.14). Cette carte définit trois régions : à faible épaisseur, l'écoulement est dominé par la viscosité et la tension de surface (région violette définie par $Re \sim 0.1$ et $W \sim 10$). A rayon et viscosité fixés, en augmentant h , i.e. en se déplaçant verticalement dans le diagramme Fig. 2.14, on augmente Re et diminue W et on passe donc de régimes dans lesquels l'écoulement est principalement sensible aux effets capillaires à des régimes où les effets de la viscosité et de la gravité dominant (région bleue définie par $Re \sim 1$, $W \sim 1$ et $Fr \sim 1$). Finalement, à fortes épaisseurs, $Fr \sim 10$, $Re \sim 10$, des effets inertiels apparaissent (région verte). Augmenter la viscosité revient à déplacer les limites de ces régions vers le haut et la droite, c'est-à-dire pour des épaisseurs élevées et des faibles rayon de fibre : la région capillarité/viscosité devient prédominante pour la quasi-totalité des épaisseurs accessibles, et les effets inertiels ne peuvent être observés.

Comme nous l'avons déjà vu, le film liquide qui gaine la fibre ne reste pas d'épaisseur uniforme, mais se déstabilise spontanément et on voit apparaître des oscillations de grande amplitude de l'interface. Je vais décrire et expliquer ici les mécanismes responsables de cette déstabilisation, tout d'abord de manière phénoménologique puis en m'intéressant uniquement à l'apparition des oscillations, c'est-à-dire en faisant une analyse de stabilité linéaire. En l'absence d'écoulement, un film gagnant une fibre se déstabilise sous l'effet de la tension de surface : c'est l'instabilité de Rayleigh-Plateau. On sait de plus qu'un film liquide s'écoulant sur un plan se déstabilise sous l'effet de la gravité et de l'inertie : c'est l'instabilité de Kapitza. Je vais donc tout d'abord décrire l'instabilité de Rayleigh-Plateau, en statique et en négligeant l'effet de la gravité, puis étudier un film mince s'écoulant le long d'un plan afin de caractériser l'instabilité hydrodynamique liée à l'écoulement.

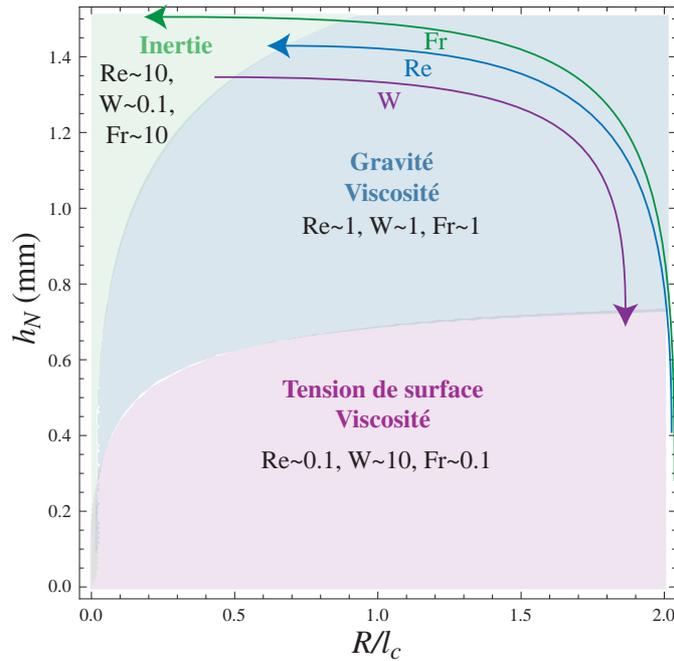


Fig. 2.14. Carte des régimes attendus en fonction de la prédominance des 4 mécanismes physiques.

2.2 Mécanismes d'instabilité

2.2.1 Instabilité de Rayleigh-Plateau

Au petit matin, la rosée se condense le long des fils d'une toile d'araignée ; le film liquide ainsi formé se déstabilise pour former un chapelet de gouttelettes régulièrement espacées (Fig. 2.15). Cette instabilité, aussi responsable de la brisure d'un jet en gouttes, est connue sous le nom d'instabilité de Rayleigh-Plateau. C'est en effet Joseph Plateau qui, il y a plus d'un siècle, a mené les premières études expérimentales de ce phénomène et c'est à Lord Rayleigh que l'on doit la théorie de l'instabilité des surfaces cylindriques.



Fig. 2.15. Toile d'araignée sur laquelle la rosée forme un chapelet de gouttes (Photo : Ensnaria).

J. Plateau (80) s'intéresse aux figures d'équilibre liquides (ou, selon ses termes, aux figures "laminaires de révolutions") qu'il interprète à l'aide du théorème de Laplace (1805). Cette loi énonce que lorsqu'on traverse la surface de séparation de deux fluides, il se produit un accroissement de la pression ΔP égal au produit de la tension de surface par la courbure de l'interface, soit

$$\Delta p = \gamma C = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Plateau remarque qu'"un cylindre liquide dans lequel le rapport de la longueur au diamètre est notablement supérieur à 3 constitue une figure d'équilibre instable". Il précisera ce rapport 3 par la suite, qu'il trouvera en fait égal à π par des arguments géométriques et à partir de la loi de Laplace. Ainsi, un cylindre liquide entourant un fil suffisamment long "se transforme aussitôt, d'une manière à fort peu près régulière, en un grand nombre de petites masses séparées les unes des autres et traversées par le fil comme des perles". Ces

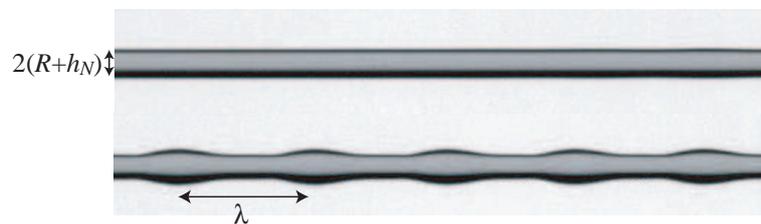


Fig. 2.16. Instabilité de Rayleigh-Plateau. En quelques secondes, le film axisymétrique gagnant une fibre horizontale se déstabilise et ondule ; on voit apparaître des structures régulièrement espacées.

perles ne sont pas sphériques, mais "l'adhérence une fois établie, la masse liquide s'étend sur la surface du cylindre de manière à envelopper une portion de la longueur de celui-ci, perd sa forme sphérique, et constitue enfin une figure de révolution dont la ligne méridienne change de courbure en allant vers ses deux extrémités, pour devenir, en ces deux points, tangente à la génératrice du cylindre. La fig. 21 représente la coupe méridienne de la figure liquide et du cylindre solide." Ainsi, un film liquide gagnant une fibre se déforme spontanément, tout en restant axisymétrique (Fig. 2.16) ; puis, "les étranglements ne peuvent s'approfondir qu'en chassant leur liquide dans les renflements" et finalement, la figure d'équilibre complète "se compose d'une suite régulière de renflements et d'étranglements égaux, la fig. 24 en représente une coupe méridienne sur une certaine étendue." Il lui donnera le nom d'"Onduloïde". Les deux figures originales sont reproduites sur la figure 2.17. Revenons au XXI^{ème} siècle et considérons le cas d'un cylindre liquide axisymétrique d'épaisseur h sur une fibre de rayon R (Fig. 2.18). Il existe alors deux rayons de



Fig. 21

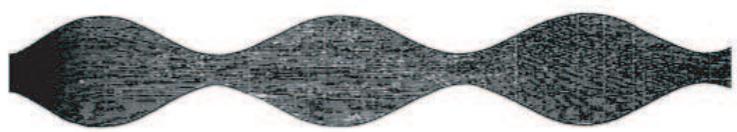


Fig. 24

Fig. 2.17. Instabilité d'une film liquide sur une fibre horizontale : Dessins de J. Plateau (80).

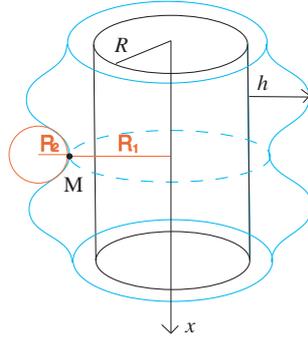


Fig. 2.18. Définition des deux rayons de courbure dans le cas d'une fibre enduite.

courbure R_1 et R_2 décrits sur la figure 2.18. Les pressions à l'interface sont données par la loi de Laplace :

$$\delta p = p_{air} - p_{liq} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.10)$$

où p_{air} , p_{liq} sont les pressions des fluides de part et d'autre de l'interface, avec $p_{air} = P_a$ la pression atmosphérique.

En supposant des déformations de l'interface de grandes longueurs devant l'épaisseur du film (i.e. interface de pente faible $\partial_x h \ll 1$), la courbure s'écrit en M :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R+h} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

Dans le fluide, $p_{liq} = P_a + \delta p$ et la surpression δp due à la déformation de l'interface s'écrit

$$\delta p = \frac{\gamma}{R+h} - \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

Posons

$$C_a = \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad C_b = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R+h}$$

C_a correspond à la courbure axiale (dans l'axe de la fibre, i.e. dans l'axe de la feuille) et C_b à la courbure azimutale (courbure de la fibre dans le plan perpendiculaire à la fibre). Le gradient de pression induit par la courbure axiale C_a est stabilisant. En effet, la pression dans le fluide augmente avec l'épaisseur du film. Le gradient de pression induit un mouvement du fluide des zones de haute pression vers les zones de basses pressions (figure 2.19a). La tension de surface tend donc à diminuer la déformation, et a alors un effet stabilisant. Elle amortie efficacement les ondes courtes mais beaucoup moins les ondes longues. En ce qui concerne la pression induite par la courbure azimutale C_b , elle est d'autant plus élevée que l'épaisseur h du film est petite. Les zones de haute et basse pression sont indiquées sur la figure 2.19b. Le mouvement du fluide induit s'effectue des zones de haute pression vers celles de basse pression, la tension de surface tend donc à augmenter la déformation et a donc un effet toujours déstabilisant, et ce d'autant plus que la longueur d'onde est petite.

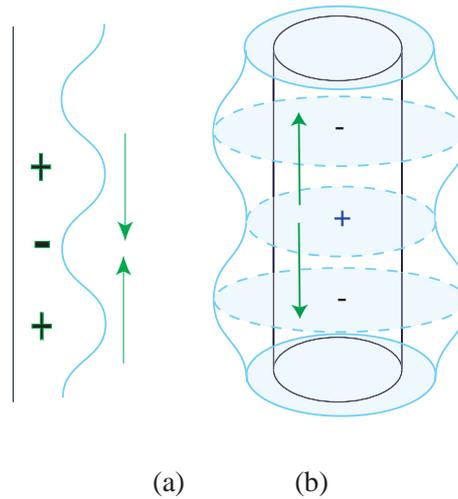


Fig. 2.19. Zones de hautes (+) et basses (-) pressions, pour une plaque plane et la courbure axiale du cylindre (a) et pour la courbure azimutale du cylindre (b). Les flèches indiquent les mouvements de fluide.

On observe alors que le film liquide se structure spatialement et une longueur d'onde bien définie λ apparaît. Sous certaines hypothèses, on obtient facilement une expression pour cette longueur d'onde. Considérons un film liquide d'épaisseur initiale h_N et $h = h^* + \delta h \cos kx$ la modulation de l'épaisseur ($k = 2\pi/\lambda$). La conservation du volume entre le cylindre uniforme et le cylindre modulé sur une longueur d'onde λ nous donne

$$\lambda\pi(R + h_N)^2 = \lambda\pi\left[(R + h^*)^2 + \frac{\delta h^2}{2}\right] \quad (2.13)$$

En supposant des déformations faibles de l'interface, en δh^2 , l'épaisseur moyenne est alors donnée par

$$h^* = h_N - \frac{\delta h^2}{4(R + h_N)} \quad (2.14)$$

On détermine alors la différence d'énergie ΔE entre le cylindre déformé et le cylindre non déformé dont elle est issue. L'énergie est constituée uniquement de l'énergie de surface. Sur une longueur d'onde, on peut écrire

$$\Delta E = \int_0^\lambda 2\pi(R + h)\gamma ds - 2\pi(R + h_N)\gamma\lambda \quad (2.15)$$

avec l'abscisse curviligne $ds \approx dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dx}\right)^2\right)$ en supposant la surface faiblement ondulée. On trouve alors

$$\Delta E = \gamma \frac{1}{4} \frac{\delta h^2}{R + h_N} 2\pi\lambda \left[k^2(R + h_N)^2 - 1 \right] \quad (2.16)$$

L'énergie est abaissée ($\Delta E < 0$), c'est-à-dire la déformation du cylindre est favorisée si $k^2(R + h_N)^2 - 1 < 0$ c'est-à-dire pour un vecteur d'onde k tel que $k < \frac{1}{R + h_N}$ soit une longueur d'onde $\lambda > \lambda_{min}$ comme présenté sur la figure 2.20(a). Cette plus petite longueur d'onde instable λ_{min} s'écrit

$$\lambda_{min} = 2\pi(R + h_N) \quad (2.17)$$

On comprend l'existence d'une longueur d'onde minimale en comparant les deux courbures. En effet, pour que l'instabilité se développe, il faut que la courbure qui s'oppose à l'instabilité $C_a = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ soit assez faible,

c'est-à-dire λ assez grand devant h . Dans ces conditions, le cylindre liquide se déstabilise toujours afin de minimiser sa surface.

L'analyse de stabilité linéaire va fournir la longueur d'onde la plus amplifiée λ_{RP} . L'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe (Ox), dans l'approximation de lubrification et en supposant le gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ indépendant de r , se réduit à

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.18)$$

Dans un film fin ($h \ll R$), les équations sont les mêmes que les équations en coordonnées cartésiennes (on néglige le terme en $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$). On a comme conditions aux limites

$$u(r = R) = 0$$

condition de non-glissement à la paroi et

$$\eta \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R+h} = 0$$

annulation des contraintes tangentielles sur la surface libre, ce qui donne un profil de vitesse parabolique

$$u(r) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (r^2 + R^2 + 2Rh - 2r(R+h)) \quad (2.19)$$

On en déduit un débit linéique par unité de largeur

$$q = \int_R^{R+h} u(r) dr = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{3\eta} \quad (2.20)$$

La pression induite par la déformation de l'interface s'écrit

$$p = \gamma \left(\frac{1}{R+h} - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \quad (2.21)$$

soit un débit

$$q = \frac{\gamma h^3}{3\eta} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \quad (2.22)$$

La conservation de la masse dans une tranche de fluide dx , pour une largeur unité, s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (2.23)$$

ce qui conduit au premier ordre en δh à (rappelons que l'épaisseur s'écrit $h = h^* + \delta h \cos kx$)

$$\frac{d\delta h}{dt} = \frac{\gamma h^{*3}}{3\eta R^2} \delta h k^2 (1 - k^2 R^2) \quad (2.24)$$

On pose $\delta h \propto e^{\sigma t}$ et on obtient le taux de croissance

$$\sigma(k) = \frac{\gamma h^{*3}}{3\eta R^2} k^2 (1 - k^2 R^2) \quad (2.25)$$

dont l'allure typique est présentée sur la figure 2.20(b). La longueur d'onde sélectionnée par le système est la longueur d'onde la plus amplifiée (i.e. la plus instable), c'est-à-dire celle correspondant au maximum du taux de croissance $d\sigma/dk|_{k=k_m} = 0$ soit pour $k_m = \frac{1}{\sqrt{2}R}$. On obtient ainsi la longueur d'onde dite de Rayleigh-Plateau

$$\lambda_{RP} = 2\pi \sqrt{2}R.$$

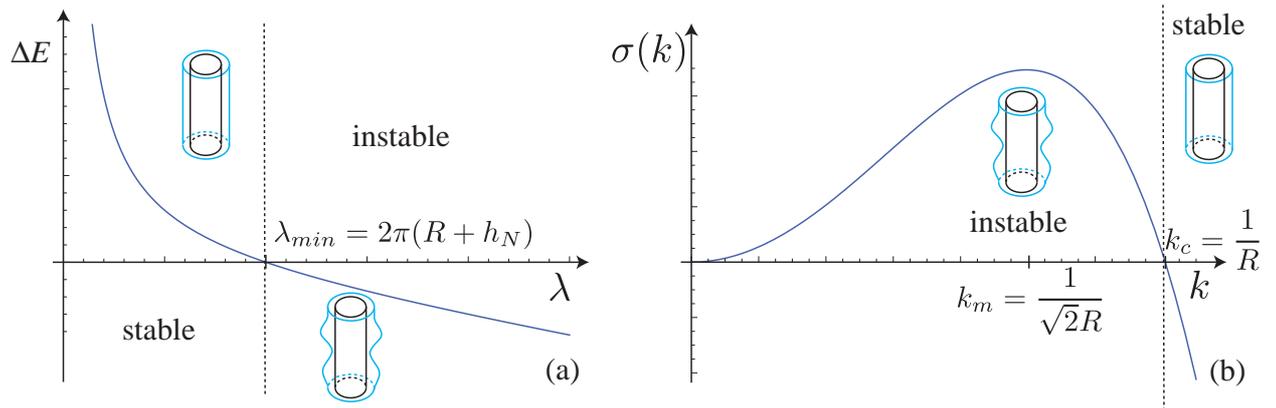


Fig. 2.20. *Stabilité d'un film liquide sur une fibre sans effet de la gravité : (a) Evolution de la différence d'énergie ΔE entre un cylindre liquide non déformé et un cylindre liquide ondulé en fonction de la longueur d'onde λ . La ligne pointillée verticale indique la transition entre la région stable dans laquelle le film liquide reste plat ($\Delta E > 0$, déformer l'interface est coûteux en énergie) et instable dans laquelle le film se déstabilise ($\Delta E < 0$, il est plus favorable de déformer le cylindre) ; (b) Evolution du taux de croissance σ en fonction du nombre d'onde k . La ligne pointillée verticale indique la transition entre la région instable ($\sigma > 0$, les perturbations de l'interface sont amplifiées) et la région stable ($\sigma < 0$, les perturbations de l'interface sont amorties).*

Comme le soulignait Plateau, "Le mode de déformations de ces cylindres [liquides] est bien le résultat d'une propriété qui leur est inhérente ; Les longueurs respectives des portions étranglée et renflée paraissent égales entre elles." La longueur d'onde est effectivement constante et proportionnelle au rayon du fil. La plus petite longueur d'onde instable est la longueur de coupure, obtenue pour $\sigma(k_c) = 0$, soit $k_c = \frac{1}{R}$. On retrouve bien

$$\lambda_{min} = 2\pi R.$$

Le calcul pour un film d'épaisseur $h_N \sim R$ est donné au chapitre suivant en présence d'un écoulement (notons que la présence d'advection par l'écoulement ne modifie pas le calcul de la croissance de l'instabilité) ; dans ce cas, on ne peut plus négliger l'épaisseur du film devant le rayon de la fibre et l'on trouve

$$\lambda_{RP} = 2\pi \sqrt{2}(R + h_N)$$

et

$$\lambda_{min} = 2\pi(R + h_N).$$

Ainsi, la géométrie cylindrique provoque une instabilité due à la tension de surface du fluide. Je vais maintenant décrire le deuxième mécanisme d'instabilité lié à l'écoulement en géométrie plane.

2.2.2 Instabilité hydrodynamique

Lorsqu'un film liquide s'écoule le long d'un plan incliné, il peut se déstabiliser : des ondes apparaissent, comme cela peut être observé dans une rue en pente un jour de pluie. Ce phénomène fascinant a inspiré des artistes qui en ont fait des fontaines, comme le Canada Memorial que l'on peut admirer dans Green Park, à quelques pas de Buckingham Palace lorsqu'on se promène à Londres.



Fig. 2.21. *Canada Memorial, Green Park (Buckingham Palace), Londres.*

Cette instabilité a été étudiée pour la première fois expérimentalement et théoriquement par Kapitza (50), qui a montré qu'au-delà d'un débit critique, l'écoulement était toujours instable et des oscillations se développaient à la surface du film. Ces déformations de l'interface ont été reconnues comme le résultat d'une instabilité *longues ondes* (de grande longueur d'onde) par T.B. Benjamin (6).

Les mécanismes liés à l'instabilité hydrodynamique de films tombant sont la gravité dans la direction de l'écoulement qui pilote le mouvement des ondes, l'inertie, qui amplifie les ondes et la gravité dans la direction transverse qui stabilise l'écoulement. L'instabilité résulte donc d'une compétition inertie-gravité. Dans un premier temps, nous allons établir le profil de vitesse dans un film mince visqueux qui s'écoule sous l'effet de la gravité le long d'un plan incliné d'un angle θ , puis nous étudierons les différents mécanismes en faisant une description phénoménologique de l'instabilité. Une description complète de l'instabilité peut être trouvée dans F. Charru (17).

2.2.2.1 Ecoulement d'un film d'épaisseur uniforme sur un plan incliné

Dans le cas d'un film plat (non déformé) s'écoulant sur un plan incliné, la vitesse du fluide augmente avec l'épaisseur (en effet, une épaisseur importante de fluide ressent moins la friction à la paroi). De fait, on montre simplement qu'un film mince visqueux s'écoulant le long d'un plan incliné d'un angle θ admet un profil de vitesse semi-parabolique. Les notations sont explicitées sur la figure 2.22. On est dans le cadre de la théorie de lubrification. Le bilan de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement s'écrit donc

$$\eta \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\rho g \sin \theta \quad (2.26)$$

et on a comme conditions aux limites

$$U(y = 0) = 0 \quad (2.27)$$

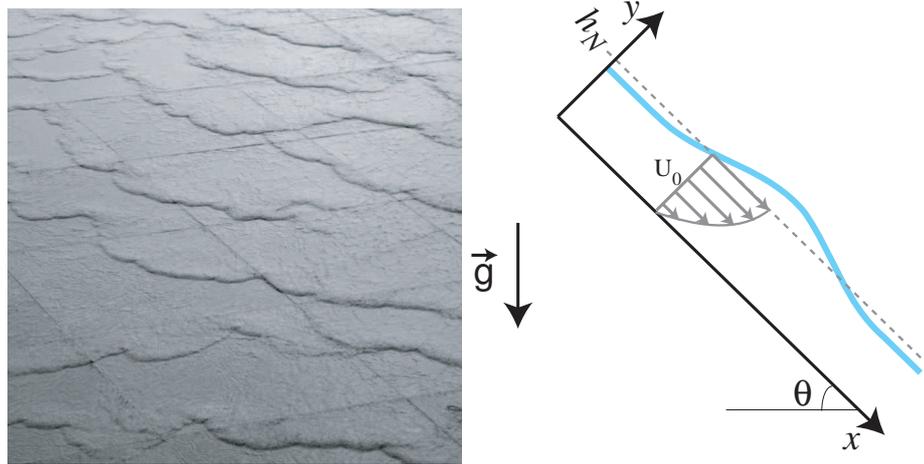


Fig. 2.22. Film s'écoulant sur un plan incliné.

pour le non-glissement à la paroi et

$$\frac{\partial U}{\partial y}(y = h_N) = 0 \quad (2.28)$$

annulation des contraintes tangentielles à l'interface. Le champ de vitesse s'écrit alors

$$U(y) = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\eta} y(y - 2h_N) \quad (2.29)$$

Le débit par unité de longueur suivant l'axe (Oz) peut donc s'exprimer comme

$$q = \int_0^{h_N} U dy = \frac{g \sin \theta}{3\nu} h_N^3 \quad (2.30)$$

et la vitesse de l'interface s'écrit

$$U_0 = \frac{\rho g h_N^2}{2\eta} \sin \theta \quad (2.31)$$

2.2.2.2 Phénoménologie

On s'intéresse maintenant à la stabilité de ce film initialement plat. On considère alors une petite perturbation \tilde{h} du film plat (d'épaisseur h_N) de grande longueur d'onde ($\lambda \gg h_N$ soit $\partial_x h \ll 1$). L'épaisseur varie donc lentement dans la direction de l'écoulement, le profil de vitesse à une position x restant ainsi proche de l'écoulement pleinement développé, i.e. l'écoulement de base U décrit au paragraphe précédent. Les mécanismes de l'instabilité sont présentés sur la figure 2.23.

- Dans un premier temps, l'interface est faiblement déformée. La composante selon x de la gravité va accentuer cette déformation. En effet, le débit q augmente avec l'épaisseur de fluide ($q \propto h^3 \rightarrow dq/dh > 0$). Une épaisseur plus importante de liquide se déplace plus vite qu'une épaisseur faible. Ainsi, la gravité draine le fluide des creux vers les crêtes (Fig.2.23 (a)).
- Sur l'interface déformée, l'écoulement de base présente un gradient $U' = U''\tilde{h}$ où les primes indiquent la dérivée par rapport à y . L'écoulement est l'écoulement de base U , on a donc $U'' =$

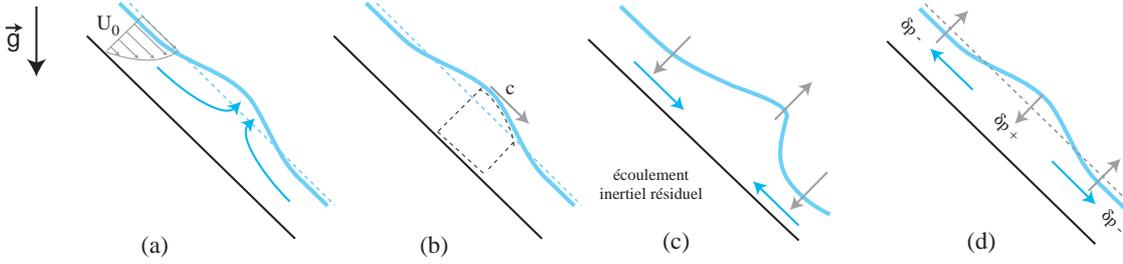


Fig. 2.23. Mécanismes de l'instabilité de film tombants : (a) et (b) Effet de la gravité. La ligne bleue pointillée correspond au film plat non perturbé. La zone définie par les traits noirs pointillés représente le volume de contrôle mettant en évidence la célérité c . (c) Effet de l'inertie. (d) Effet de la pression hydrostatique. Les flèches bleues correspondent aux mouvements du fluide et les flèches grises aux mouvements de l'interface.

$-\rho g \sin \theta / \eta = -2U_0 / h_N^2$ d'où $U' = U''\tilde{h} = -2U_0\tilde{h} / h_N^2$. Pour satisfaire la condition de cisaillement nul à l'interface, il faut prendre en compte une petite perturbation de vitesse $\tilde{u} = U_0\tilde{h} / h_N$ dans le sens de l'écoulement et \tilde{v} dans la direction transverse. On peut alors faire un bilan de masse sur le volume de contrôle défini Fig. 2.23 (b) : la somme du volume entrant lié à l'écoulement de base ($\tilde{h}U_0dt$) et celui lié à la perturbation de vitesse ($\tilde{h}U_0dt$) est égale au volume sortant $\tilde{h}c dt$, ce qui impose une translation de l'onde à la vitesse $c = 2U_0$. Ainsi, la vitesse de l'onde est supérieure à la vitesse U_0 de l'écoulement avant déformation.

- L'adaptation de la vitesse du fluide à la déformation de l'interface est donc retardée, d'où l'apparition d'un écoulement inertiel résiduel. Cet écoulement inertiel est dû à l'advection des perturbations par l'écoulement de base et est dirigé des creux vers les crêtes des ondes ; il a donc un effet déstabilisant (Fig. 2.23 (c)).
- Finalement, la composante transverse de la gravité génère une pression hydrostatique plus élevée sous une crête δp_+ que sous un creux δp_- . Cette différence de pression tend à pousser du fluide des crêtes vers les creux et donc à stabiliser l'interface (Fig. 2.23 (d)).

Ainsi, l'effet stabilisant de la gravité est en compétition avec l'accumulation de fluide sous la crête dû à l'inertie. Si les effets inertiels sont suffisamment importants, le film est instable et la perturbation croît. Un film tombant sur un mur vertical est toujours instable vis à vis de perturbations de l'interface (les effets de la pression hydrostatique s'annulent).

On peut définir un critère de stabilité en comparant l'importance de la gravité stabilisante et de l'inertie déstabilisante. Le gradient de pression hydrostatique induit un écoulement de type Poiseuille dont l'ordre de grandeur de la vitesse V_g satisfait

$$\eta \frac{V_g}{h_N^2} \sim \frac{\Delta P}{\lambda} \sim \frac{\rho g \cos \theta \tilde{h}}{\lambda}$$

soit

$$V_g \sim \frac{h_N^2 \tilde{h}}{\eta \lambda} \rho g \cos \theta \quad (2.32)$$

L'advection de la perturbation par l'écoulement de base engendre un écoulement inertiel ($\rho u \partial_x u$) dont la vitesse V_i satisfait donc

$$\eta \frac{V_i}{h_N^2} \sim \rho U_0 \frac{\tilde{u}}{\lambda} \sim \frac{\rho U_0^2 \tilde{h}}{\lambda h_N}$$

soit

$$V_i \sim \frac{\rho U_0^2 h_N \tilde{h}}{\eta \lambda} \quad (2.33)$$

Ainsi, la stabilité marginale est donnée par l'équilibre entre l'écoulement inertiel déstabilisant et l'écoulement gravitaire stabilisant, soit $V_g \sim V_i$, ce qui peut se réécrire sous la forme

$$Fr^2 = \frac{U_0^2}{gh_N \cos \theta} \sim 1 \quad (2.34)$$

où l'on introduit le nombre de *Froude* qui compare donc la vitesse caractéristique de l'écoulement et la vitesse des ondes de gravité. Le calcul exact donne une valeur de Froude critique égale à 5/8.

L'instabilité se développe donc lorsque les effets inertiels sont suffisamment importants pour dominer sur les effets de la pression hydrostatique, c'est-à-dire lorsque la gravité ne permet plus de compenser l'écart de vitesse entre l'onde et le film, qui conduit alors à l'effet d'accumulation décrit plus haut.

2.2.3 Couplage des deux mécanismes

Dans le cas d'un film liquide sur une fibre verticale, les deux mécanismes décrit précédemment entrent en jeu. Ainsi, on aura d'un côté la tension de surface via la courbure azimutale et l'inertie déstabilisantes, et d'un autre côté la tension de surface via la courbure axiale stabilisante. On a vu (Fig. 2.14) l'importance relative des différents mécanismes physiques (tension de surface, viscosité, gravité, inertie) en fonction du rayon de la fibre et de l'épaisseur du film. On peut maintenant établir une carte similaire présentant l'importance relative des mécanismes d'instabilité (Fig. 2.24). On s'attend à ce que l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine pour des petites fibres et à faibles épaisseurs, tandis que le mode Kapitza d'instabilité va être prépondérant à fortes épaisseurs et pour des fibres de grand rayon. Lorsqu'on se rapproche du cas plan ($R/l_c \geq 1$), seule l'instabilité de Kapitza va jouer (zone hachurée sur la figure 2.24). Les mécanismes d'instabilité sont de plus couplés avec d'autres effets, à savoir l'advection par l'écoulement et de la dissipation visqueuse. La carte présentée ici est purement indicative : un des buts de cette étude est de réaliser une carte précise des différents régimes possibles issus du couplage complexe des mécanismes en jeu.

Dans un premier temps, je vais donc, en faisant varier le rayon R de la fibre et le débit Q (i.e. l'épaisseur h_N) explorer expérimentalement le plan des paramètres ($h_N, R/l_c$) afin de mettre en évidence les différents régimes d'écoulement. On cherchera à identifier et comprendre les transitions entre ces régimes lorsque l'instabilité de Rayleigh-Plateau entre en compétition avec l'écoulement (Chap.3). Les autres effets et régimes seront ensuite étudiés en détail (Chaps.4 à 6).

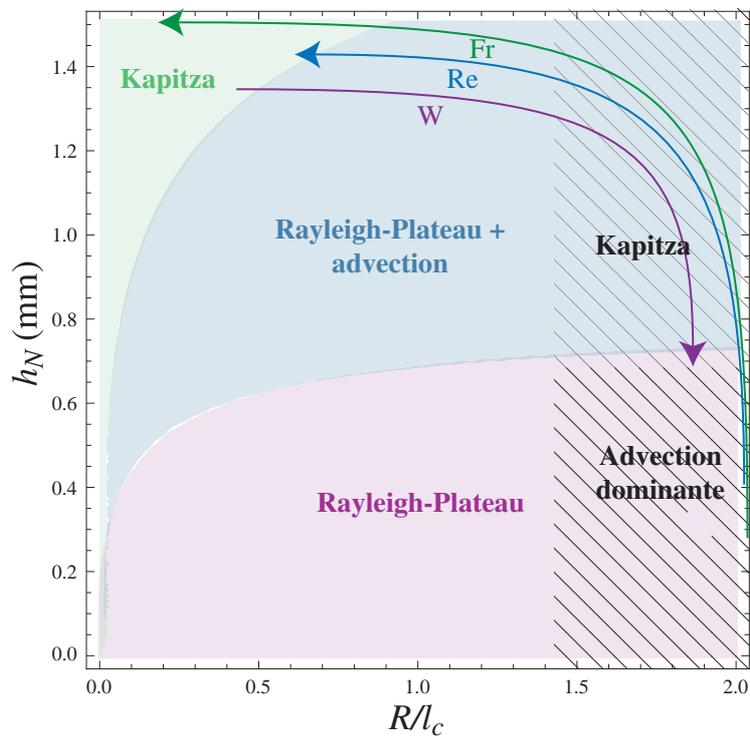


Fig. 2.24. Carte des mécanismes dominants dans le plan $(h_N, R/l_c)$.

Chapitre 3

Comment ça coule ?

Nous disposons donc d'un montage expérimental nous permettant d'étudier les effets combinés de la tension de surface (instabilité de Rayleigh-Plateau), de la viscosité et de la gravité (écoulement) et de l'inertie (mode Kapitza d'instabilité). On va donc observer différents régimes dynamiques d'écoulement ainsi que différentes structures en fonction du mécanisme prépondérant. Dans ce chapitre, je décris qualitativement et quantitativement les régimes et structures observés, ainsi que les transitions entre ces différents régimes. La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont reportés dans (28; 26).



Les élèves de l'école maternelle 34 rue Sarrette (Paris 14) se demandent aussi "comment ça coule ?". La main à la pâte, les 13 et 20 Juin 2008.

3.1 Observations expérimentales

En fonction du rayon de la fibre et de l'épaisseur initiale du film, trois régimes différents sont observés. Ces différents régimes sont présentés sur la figure 3.1 à l'aide d'images de la caméra rapide et de diagrammes spatio-temporels obtenus avec la caméra linéaire placée parallèlement à la fibre (rappelons que dans ce cas, les trajectoires des gouttes sont indiquées par des lignes sombres tandis que le film uniforme est représenté par une zone grise).

Pour une fibre de rayon donné tel que $R/l_c < 0.3$, soit pour des petites fibres, les trois régimes sont obser-

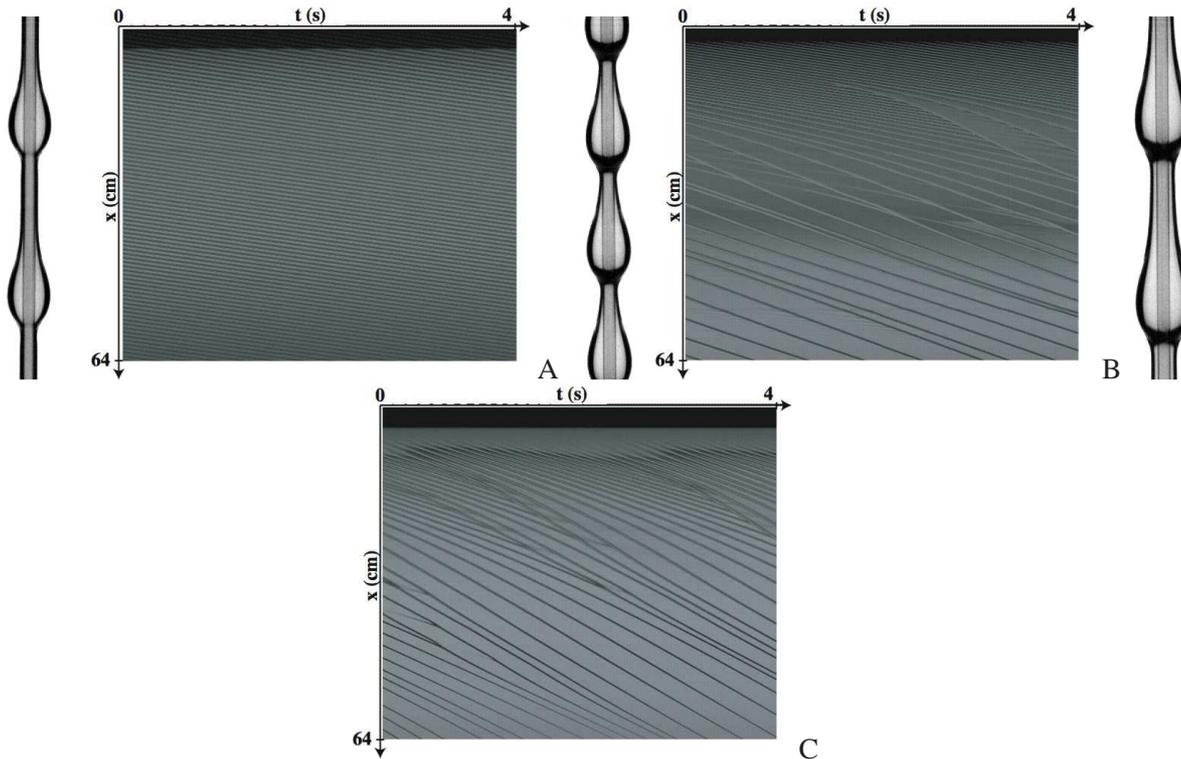


Fig. 3.1. Photos de l'écoulement à $x \sim 7$ cm et diagrammes spatio-temporels pour $R=0.2$ mm, V100 et différents débits (c'est-à-dire différentes épaisseurs initiales) **A** : $h_N=0.51$ mm, **B** : $h_N=0.58$ mm, **C** : $h_N=0.74$ mm.

vés pour différentes épaisseurs initiales de film, c'est-à-dire différents débits (Fig.3.1). À faible épaisseur (Fig.3.1 **A**), les effets capillaires dominent et on observe alors que le film se déstabilise spontanément et rapidement à une distance constante Δ de l'alimentation de l'ordre du centimètre, en un train d'ondes régulier, avec une fréquence et une longueur d'onde bien définies qui restent constantes sur toute la longueur de la fibre. Les structures formées sont des gouttes quasi-symétriques (légèrement déformées par la gravité à l'avant), qui se déplacent à vitesse constante sur un film très mince. L'épaisseur maximale de la goutte est donnée par $h_m=0.69$ mm, l'épaisseur du film par $h_s=0.18$ mm et le rapport $h_m/h_s=3.8$. Pour des épaisseurs plus élevées (régime **B**), le train d'ondes apparaît toujours à même distance de l'alimentation ($\Delta=cste$) et reste très régulier sur quelques centimètres. En revanche, il se déstabilise en aval : on observe des coalescences de gouttes (se traduisant par un croisement de deux lignes sur le diagramme spatio-temporel) qui conduisent à l'apparition d'un régime désordonné. Les gouttes se déplacent sur un substrat plus épais mais gardent une forme proche de celle observée dans le régime **A** (dans ce cas $h_m=0.72$ mm, $h_s=0.19$ mm et

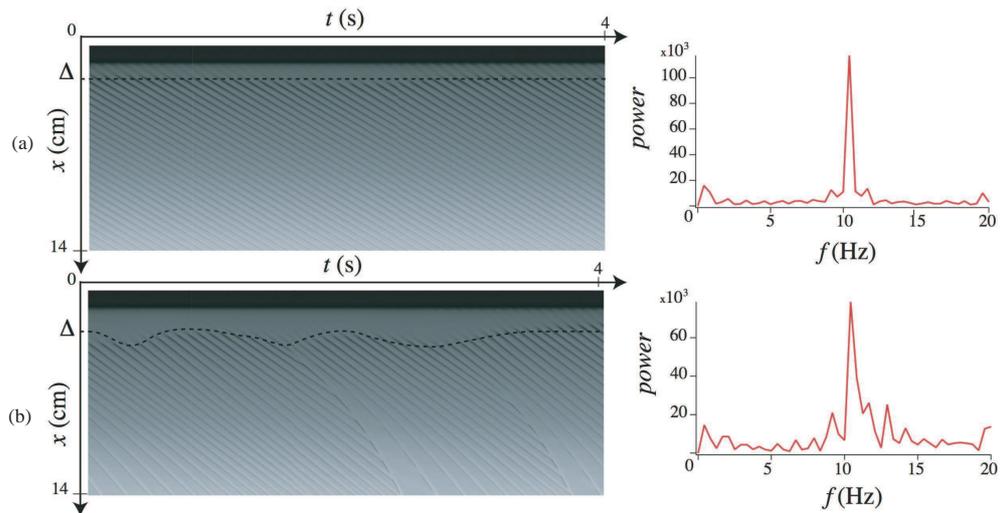


Fig. 3.2. Diagrammes spatiotemporels (à gauche) et spectres de la fréquence prise à l'apparition des ondes $f(x = \Delta)$ correspondants (à droite) pour $R = 0.32$ mm, $V50$, pour un régime régulier (a) et un régime irrégulier (b). (a) : $Q = 0.067$ g/s, $h_N = 0.56$ mm, $\Delta = 1.83 \pm 0.03$ cm, $f = 10.4 \pm 0.8$ Hz; (b) : $Q = 0.090$ g/s, $h_N = 0.6$ mm, $\Delta = 2.07 \pm 0.23$ cm, $f = 10.8 \pm 2.5$ Hz.

$h_m/h_s=3.8$). Aux fortes épaisseurs (régime **C**), la distance à laquelle le film se déstabilise fluctue au cours du temps. Le système est alors très sensible au bruit extérieur. Le train d'ondes primaire, assez irrégulier, se déstabilise rapidement en aval sous l'effet d'instabilités secondaires qui conduisent à des coalescences. Le motif régulier est remplacé par un régime désordonné comportant des ondes semblables à des ondes solitaires caractérisées par un front raide (les structures perdent leur symétrie haut/bas) et se déplaçant sur un substrat épais (dans ce cas $h_m=1.2$ mm, $h_s=0.435$ mm et $h_m/h_s=2.8$).

Pour des fibres de grands rayons ($R/l_c > 0.32$), la courbure est faible et les effets capillaires jouent peu : l'instabilité est principalement pilotée par les effets inertiels. Les régimes **A** et **B** ne sont jamais observés : le système se comporte toujours comme un amplificateur de bruit (régime **C**).

On distingue alors deux régimes : les régimes *réguliers* (**A** et **B**) et *irréguliers* (**C**). Au sein des régimes réguliers, on distingue des régimes réguliers *stable* (**A**) et *instable* (**B**).

Nous avons retenu deux critères afin de caractériser les différents régimes : la fréquence du train d'ondes primaire f et la hauteur d'apparition des ondes Δ . Notons que la longueur d'apparition de l'instabilité dépend du taux de croissance et est d'autant plus grande que le fluide est visqueux. La fréquence $f(x)$ est mesurée avec la caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement, grâce à laquelle on obtient l'évolution de l'épaisseur en fonction du temps à une distance x donnée. Ainsi, $f(x)$ correspond au nombre de crêtes passant à une position x donnée par unité de temps. On mesure la fréquence du train d'ondes primaire juste après déstabilisation ($f(x = \Delta)$) et on calcule la transformée de Fourier de ce signal.

Pour chaque débit et pour différents rayons de fibre, on mesure donc les variations de ces grandeurs autour de leurs valeurs moyennes. Les résultats obtenus sur une fibre de rayon $R=0.32$ mm ($R/l_c = 0.21$) sont présentés sur la figure 3.2. Les régimes dits réguliers (Fig. 3.2(a)) sont caractérisés par une hauteur d'apparition constante et une fréquence bien définie (pic de Fourier fin). Pour les régimes irréguliers (3.2(b)), la hauteur d'apparition fluctue fortement et le train d'ondes est assez irrégulier (pic de Fourier élargi).

Pour l'exemple donné sur la figure 3.2, la régime régulier est caractérisé par $\delta\Delta/\Delta=1.6\%$ et $\delta f/f=8\%$,

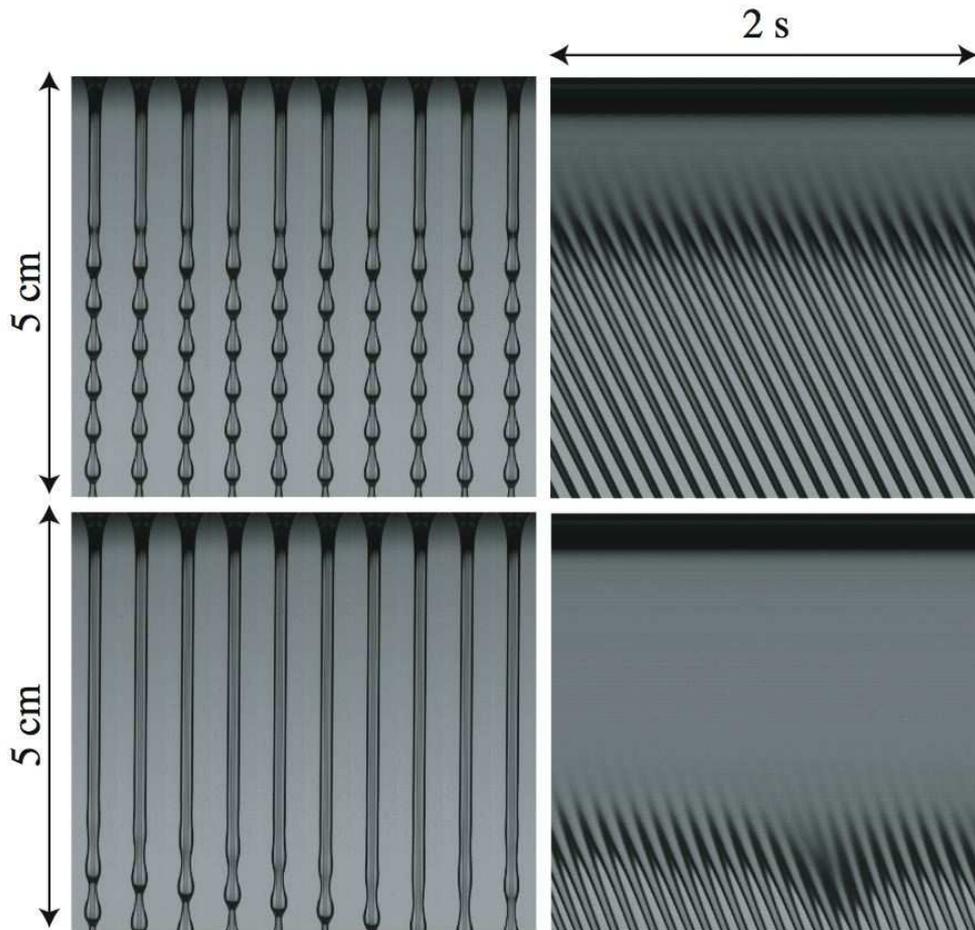


Fig. 3.3. Chronoimages de l'écoulement (une image toutes les 0.1 s) et diagrammes spatio-temporels obtenus avec la caméra rapide pour $R = 0.2$ mm, V500, pour un régime régulier (en haut) et un régime irrégulier (en bas). Haut : $Q = 0.0088$ g/s. Bas : $Q = 0.010$ g/s.

tandis que le régime irrégulier est caractérisé par $\delta\Delta/\Delta=11\%$ et $\delta f/f=23\%$. La différence entre régime régulier et irrégulier peut être mise en évidence en observant les premiers centimètres de l'écoulement à la sortie de l'alimentation à l'aide de la caméra rapide (cf Fig. 3.3). On observe précisément la déstabilisation du film et la croissance des premières ondes, et on obtient un diagramme spatio-temporel des premiers centimètres de fibre. Dans le régime régulier, les ondes apparaissent à la distance faible constante $\Delta=1.5$ cm, tandis que dans le régime irrégulier, cette distance est plus grande et fluctue $\Delta=3.8 \pm 0.5$ cm ($\delta\Delta/\Delta \approx 13\%$). De manière générale, les régimes réguliers présentent des fluctuations de longueur d'apparition Δ de moins de 2% et des fluctuations de fréquence de l'ordre de 5-10%. Les régimes irréguliers sont quant à eux caractérisés par des fluctuations de Δ importantes, de l'ordre de 10% et des fluctuations de fréquence de l'ordre de 15-20%.

L'évolution de ces grandeurs (Δ et fréquence d'apparition f) pour une fibre de rayon $R=0.32$ mm est donnée sur la figure 3.4. La fréquence moyenne, ainsi que les variations de fréquence sont mesurées à partir du signal $h(t)$ obtenu en $x \approx \Delta$ avec la caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement (voir Annexe B pour le détail de la procédure). La mesure de $f(x = \Delta)$ obtenue sur le diagramme spatio-temporel donne des résultats similaires. A faible débit, c'est-à-dire à faible épaisseur, l'écoulement est *régulier* (régimes A et B).

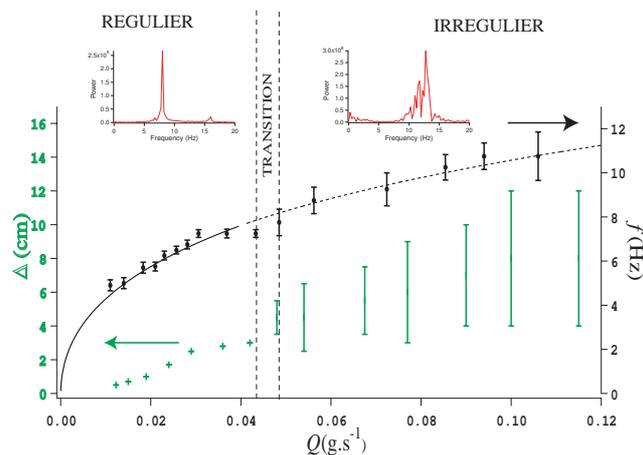


Fig. 3.4. Fréquence et hauteur d'apparition des ondes primaires ($R = 0.32$ mm et huile V50. Des exemples de spectres en fréquence sont placés en encart. Les barres représentent les fluctuations autour d'une valeur moyenne.

Lorsque l'on augmente le débit, l'évolution de Δ et $f(x = \Delta)$ est monotone mais on observe une transition nette vers un régime *irrégulier* (régime C) à un débit critique Q_c compris entre les deux barres verticales : Δ se met spontanément à fluctuer, et la fréquence est moins bien définie. Ce comportement est identique pour différents rayons de fibre tant que $R \leq 0.475$ mm ($R/l_c < 0.32$). Au delà, l'écoulement est irrégulier pour tous les débits étudiés. Les débits réguliers et irréguliers obtenus expérimentalement pour différents rayons de fibre sont présentés sur la figure 3.5. On peut noter que plus le rayon de la fibre est grand, plus le débit critique est faible. Des expériences similaires ont été réalisées avec une huile deux fois plus visqueuse (Fig. 3.5 (b)). Dans ce cas, le débit critique est légèrement plus faible.

On va donc dans un premier temps tenter de comprendre cette transition régulier/irrégulier et d'identifier théoriquement le débit critique à laquelle elle a lieu. Dans un second temps, on s'intéressera aux régimes réguliers afin de comprendre la transition stable/instable.

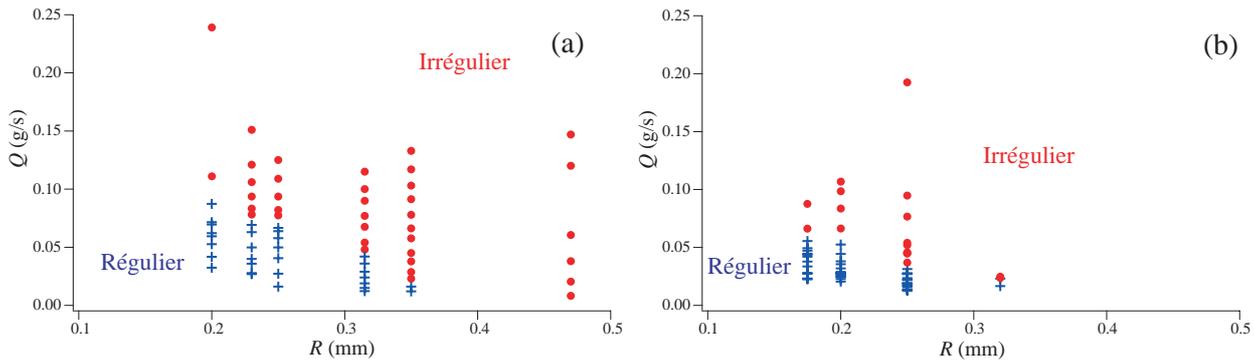


Fig. 3.5. Débits réguliers (croix bleues) et irréguliers (ronds rouges) pour différents rayons de fibre et de l'huile V50 (a) et V100 (b).

3.2 Transition Absolu/Convectif

3.2.1 Définition

Les *écoulements ouverts* où le fluide en mouvement est en permanence renouvelé, tels l'écoulement d'un film liquide sur un substrat sont souvent instables : des ondes sont générées, croissent et se propagent. Les deux mécanismes dominants sont donc la croissance de l'instabilité et l'advection des ondes par l'écoulement. Une problématique est donc de savoir qui de la croissance de l'instabilité ou de l'advection par l'écoulement l'emporte. Dans ce cas (voir par exemple *Open shear flow instabilities* par P. Huerre dans (4) Chap.4), deux types d'instabilité ont été observées : certains systèmes, comme les couches de mélange à co-courant, l'écoulement sur un plan incliné ou les jets homogènes se comportent comme des amplificateurs de bruits sensibles au bruit extérieur ; d'autres, tels les jets à densité variable, se comportent comme des oscillateurs avec une fréquence bien définie qui est insensible à un bruit faible.

La distinction entre la dynamique extrinsèque des amplificateurs de bruit et la dynamique intrinsèque des oscillateurs peut être faite en reprenant le formalisme développé dans le contexte de la physique des plasmas par Briggs (10), depuis appliqué en optique (73) et en hydrodynamique (40). Ce formalisme distingue deux types d'instabilité en fonction de l'évolution spatiale d'une perturbation localisée en espace et en temps : l'instabilité est dite *convective* lorsque la perturbation est advectée hors du domaine d'étude, tandis qu'on parle d'instabilité *absolue* lorsqu'une telle perturbation croît en tous points du domaine. Ces comportements sont schématisés sur la figure 3.6. Dans un système stable, la perturbation est amortie, l'écoulement reste uniforme. Dans un système instable convectif, la perturbation est advectée plus vite qu'elle ne croît et sort du domaine : le système se comporte comme un amplificateur de bruit. Dans un système instable absolu, la perturbation croît plus vite qu'elle n'est advectée par l'écoulement et envahit alors tout le domaine : le système se comporte comme un oscillateur avec une fréquence propre bien définie. Cet état périodique auto-entretenu présent sur tout le domaine est qualifié de *mode global*.

Ces deux types d'instabilité ainsi que la transition d'une instabilité convective à une instabilité absolue sont observés dans le cas de l'écoulement derrière un cylindre. Un cylindre de diamètre d placé dans un écoulement uniforme de vitesse U génère un sillage (en aval du cylindre) dont les caractéristiques ne dépendent que du nombre de Reynolds ($Re = Ud/\nu$). A très faible nombre de Reynolds ($Re \ll 1$), on observe un écoulement laminaire (Fig. 3.7 (a)). Lorsque Re devient de l'ordre de 5, l'écoulement reste stationnaire

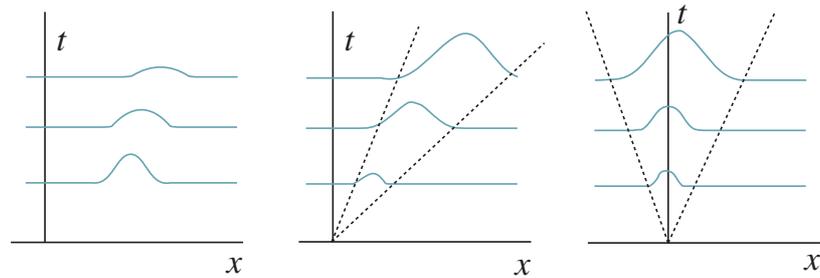


Fig. 3.6. Evolution d'une perturbation dans le plan (x, t) pour un système stable, instable convectif et instable absolu de gauche à droite.

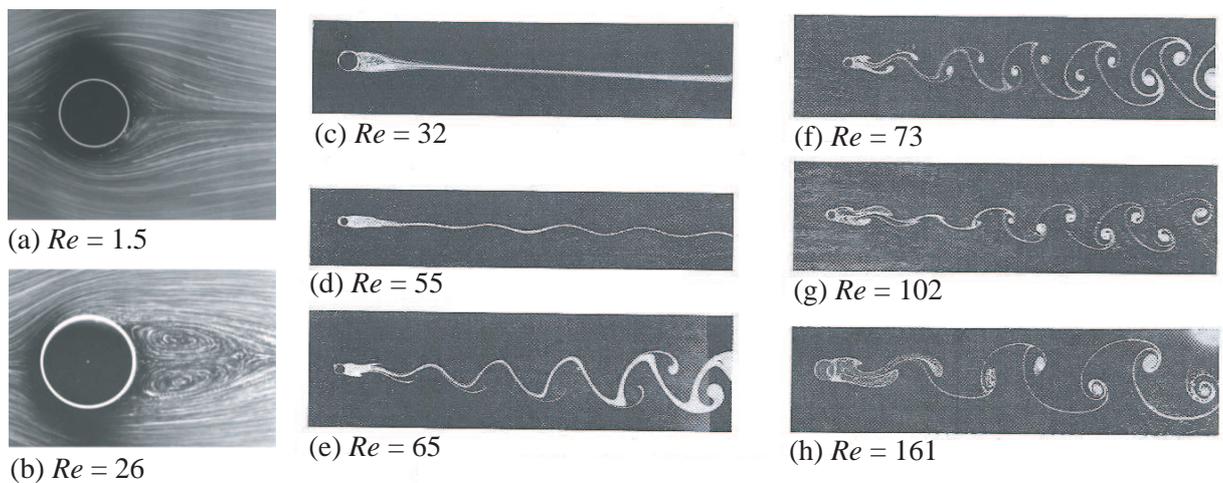


Fig. 3.7. Visualisation du sillage d'un cylindre à l'aide de particules d'aluminium réfléchissantes ((a)-(b)) et par émission d'encre ((c)-(h)). Pour $Re > 50$, on visualise une allée périodique de tourbillons alternés émis par le cylindre, dite allée de tourbillons de Bénard-von Kármán. (a)-(b) : d'après (97) ; (c)-(h) : (3), d'après (38).

mais il se développe une zone de recirculation (composée de deux vortex contrarotatifs) derrière le cylindre (Fig. 3.7 (b) et (c)). Au-delà d'un Reynolds critique $Re_{Gc} = 48.5$, une allée périodique de tourbillons alternés (allée de Bénard-von Kármán) apparaît derrière le cylindre (Fig. 3.7 (d)-(h)). L'écoulement est passé d'un amplificateur de bruit où toutes les perturbations sont advectées et finissent par disparaître, à un oscillateur auto-entretenu. Dans cette configuration, l'écoulement n'est pas parallèle (le profil de vitesse n'est pas uniforme dans la direction de l'écoulement) ce qui nécessite une description locale et globale et rend donc l'étude de la transition difficile.

Si de nombreuses études théoriques prédisent une transition absolu/convectif dans de nombreux systèmes, il existe peu d'évidences expérimentales nettes de telles transitions. Cependant, dans des situations expérimentales exceptionnelles, les différences entre instabilités absolues et convectives peuvent être observées : c'est le cas par exemple des jets liquides en micro-gravité. L'instabilité observée sur un jet liquide est en générale convective : une perturbation est amplifiée et advectée par l'écoulement, ce qui conduit à la brisure du jet en gouttes (c'est le cas sur Terre). Cependant, en l'absence de gravité, un jet peut devenir absolument instable car les forces de tension de surface deviennent importantes (S.J. Leib et M.E. Goldstein (59; 60)).

Dans le cas absolu, une perturbation remonte l'écoulement et le jet se brise à la sortie de l'alimentation. Ainsi, la transition absolu/convectif (AC) est donnée par la transition jetting/dripping (goutte à goutte/jet qui se brise après une certaine distance) et a été mise en évidence expérimentalement par S. P. Lin et al. (102; 61) lors d'expériences en micro-gravité (vols paraboliques).

Une bonne approche pour étudier la transition AC dans un écoulement de base homogène, est de coupler une instabilité bien connue en système fermé à un écoulement moyen. On peut par exemple utiliser un système de Taylor-Couette entre deux cylindres concentriques, le cylindre central étant en rotation dans le cylindre extérieur fixe, auquel on superpose un écoulement dans la direction axiale (Tsameret et Steinberg (100)). Dans cet écoulement, il apparaît des structures (vortex de Taylor) provenant de l'amplification des perturbations de l'écoulement en entrée (c'est-à-dire du bruit ambiant). La transition AC est alors caractérisée par le changement dans la forme et le spectre de puissance de ces structures. Plus exactement, les régimes absolus sont caractérisés par des structures dont le spectre présente un pic étroit ce qui correspond à la sélection d'une seule longueur d'onde bien définie caractéristique d'un oscillateur auto-entretenu. En revanche, dans les régimes convectifs, le spectre de puissance des structures présente un pic large correspondant à un amplificateur de bruit large bande. Le passage d'un pic large à un pic étroit permet d'identifier la transition AC, qui dans ce cas est linéaire. Il existe en effet deux types de transition AC : linéaire et non linéaire. Dans notre cas, on considérera une transition linéaire.

L'instabilité de Kelvin-Helmoltz se développant entre deux fluides à co-courant dans une cellule de Hele-Shaw est quant à elle un bon exemple de transition AC non-linéaire obtenue à la fois expérimentalement et numériquement (P. Gondret et al. (33)). Dans ce cas, le critère expérimental permettant de discriminer entre instabilité convective et absolue est le suivant. En régime convectif, l'interface originellement plane est perturbée localement en appliquant un "burst" de pression en entrée de la cellule. Cette perturbation s'étend en aval et est advectée hors du système, laissant l'interface non perturbée. En régime absolu, il apparaît, sans perturbations, des ondes auto-entretenuës qui ne sont pas advectées hors du domaine mais l'envahissent ; de plus, la longueur de *cicatrisation* (ou longueur à partir de laquelle les ondes apparaissent) est finie et bien définie. En revanche, le train d'ondes obtenu est irrégulier, et on ne retrouve pas un comportement d'oscillateur.

Revenons à notre problème, où, de la même manière que dans les exemples cités précédemment, une instabilité (dans notre cas l'instabilité de Rayleigh-Plateau) est couplée à l'advection des ondes par l'écoulement (qui résulte dans notre système d'un équilibre viscosité-gravité). On s'attend donc à avoir compétition entre ces deux mécanismes. Dans notre cas, l'écoulement est toujours instable et des structures (gouttes) provenant de l'amplification du bruit ambiant apparaissent toujours quelques centimètres après l'entrée le long de la fibre. Les régimes réguliers que l'on observe semblent être la signature d'une instabilité absolue, tandis que les régimes irréguliers amplificateurs de bruit sont caractéristiques d'une instabilité convective.

Pour étudier la transition absolu/convectif, il est d'usage de faire une étude spatiale, c'est-à-dire d'établir une relation de dispersion $\mathcal{D}(k, \omega)$ dont on cherche les solutions avec une pulsation ω réelle et un nombre d'onde k complexe. Cette approche sera faite à la section 3.2.3, page 51, pour obtenir le critère exact de transition AC. Cependant, dans un premier temps, on va tenter de comprendre la transition entre instabilités convective et absolue en raisonnant sur les mécanismes physiques en jeu, à savoir l'advection des ondes par l'écoulement et la croissance de l'instabilité, en s'inspirant des travaux de David Quéré (81). Dans ces

expériences, une fibre (de faible rayon $80\mu\text{m} < R < 400\mu\text{m}$) est tirée verticalement d'un bain d'huile V500 à vitesse constante et est de ce fait enrobée d'un film mince d'épaisseur uniforme proportionnelle au rayon R de la fibre et à la vitesse de tirage (via le nombre capillaire) suivant la loi de Deryaguin. Les épaisseurs ainsi obtenues vont de la dizaine à la centaine de μm . La fibre est ensuite placée horizontalement. Le film liquide est alors soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau et ondule. La fibre est ensuite placée verticalement et l'épaisseur est mesurée au cours du temps avec une précision de l'ordre du μm . En-deçà d'un épaisseur critique h_c , les ondulations disparaissent : l'écoulement restaure une interface apparemment plane. D. Quéré parle alors de *saturation* de l'instabilité. Pour des films d'épaisseur élevée ($h > h_c$), des gouttes sont formées et se propagent le long de la fibre. L'épaisseur critique en-deçà de laquelle l'écoulement permet de saturer l'instabilité évolue alors avec le rayon de la fibre ($h_c \propto R^3$). Si le phénomène observé par D. Quéré n'est bien évidemment pas une transition entre une instabilité absolue et une instabilité convective, les mécanismes entrant en jeu dans cette saturation sont aussi l'advection des ondes par l'écoulement qui entre en compétition avec la croissance de l'instabilité. Pour caractériser ce phénomène, D. Quéré a donc eu l'idée de comparer le temps de croissance de l'instabilité τ_{RP} (le temps que met l'onde la plus amplifiée linéairement pour croître) et le temps d'advection des ondes par l'écoulement τ_a (i.e. le temps que met l'écoulement pour déplacer une onde de sa propre longueur). Le calcul de ces temps caractéristiques a été fait grâce à la relation de dispersion obtenue à partir de l'équation d'évolution dérivée par Babchin et al. (31) pour un film d'épaisseur h faible s'écoulant dans un tube de rayon R . Quéré se sert alors de ce calcul linéaire pour expliquer le phénomène non-linéaire de saturation de l'instabilité : lorsque le temps d'advection est inférieur au temps de croissance de l'instabilité, les ondes sont advectées plus vite qu'elles ne croissent, ce que Quéré assimile à la saturation de l'instabilité (l'écoulement fait disparaître les ondulations). Au-delà, l'instabilité prend le dessus, et l'écoulement ne peut advecter les gouttes formées.

On voit donc bien que, même si le phénomène observé est différent, il se base sur les mêmes mécanismes physiques. Nous avons donc décidé de suivre cette approche. Je vais, dans un premier temps, présenter les calculs permettant d'obtenir l'équation d'évolution et les temps caractéristiques dans l'hypothèse où $h \ll R$. Nous verrons alors comment la condition $\tau_a < \tau_{RP}$ se traduit en terme d'épaisseur critique et nous comparerons les résultats obtenus aux expériences de D. Quéré. Je reprendrai alors ces calculs dans le cas où l'épaisseur h est de l'ordre du rayon de la fibre, ce qui est plus proche de nos conditions expérimentales. Ces résultats seront ensuite comparés à la transition AC obtenue par une étude spatiale analytique nous donnant un critère exact. Finalement, cette transition sera comparée à la transition entre régimes réguliers et irréguliers observée expérimentalement, ainsi qu'aux solutions numériques des équations de Navier-Stokes axisymétriques.

3.2.2 Détermination des temps caractéristiques

3.2.2.1 Epaisseur faible devant le rayon

Comme défini dans le chapitre 2, on note x la coordonnée dans le sens de l'écoulement et $y = r - R$ la coordonnée radiale. L'écoulement est supposé parallèle ($\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$). Dans le cadre de l'approximation de lubrification, l'équation de Navier-Stokes projetée sur (Ox) se réduit, si $h \ll R$ (ce qui revient à se placer en coordonnées cartésiennes) à

$$\rho g - \partial_x P + \eta \partial_{yy} u = 0 \quad (3.1)$$

ce qui conduit, avec les conditions aux limites de non-glissement à la paroi et de contraintes tangentielles nulles à l'interface, à un profil de vitesse de type Poiseuille dans le film

$$u(y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \right) y(y - 2h) \quad (3.2)$$

On en déduit alors le débit linéique q par unité de longueur suivant (Oz) (axe perpendiculaire à l'axe de la fibre)

$$q = \int_0^h u(y) dy = -\frac{h^3}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \right) \quad (3.3)$$

La conservation du débit entre deux positions x et $x + dx$ par unité de longueur suivant (Oz) s'écrit

$$\partial_t h + \partial_x q = 0 \quad (3.4)$$

La surpression due à la déformation de la couche de fluide s'écrit, dans le cas de faibles déformations de l'interface,

$$P = \gamma C(x) \simeq \gamma \left(\frac{1}{R+h} - \partial_{xx} h \right).$$

Le gradient de pression s'écrit alors (en utilisant l'hypothèse $h \ll R$)

$$\partial_x P = -\gamma \left(\frac{\partial_x h}{(R+h)^2} + \partial_{xxx} h \right) \quad (3.5)$$

En injectant ce gradient (3.5) dans (3.3) on obtient le débit

$$q = \frac{h^3}{3\eta} \left(\rho g + \gamma \left(\frac{\partial_x h}{(R+h)^2} + \partial_{xxx} h \right) \right) \quad (3.6)$$

Le bilan de masse (3.4) nous donne finalement une équation d'évolution pour l'épaisseur h

$$\partial_t h + \frac{\rho g}{3\eta} \partial_x (h^3) + \frac{\gamma}{3\eta} \partial_x \left(\frac{h^3}{(R+h)^2} \partial_x h \right) + \frac{\gamma}{3\eta} \partial_x (h^3 \partial_{xxx} h) = 0 \quad (3.7)$$

On peut ensuite faire un développement faiblement non linéaire de (3.7) autour d'un film plat d'épaisseur h_N en posant

$$h \sim h_N + \tilde{h}$$

avec $h_N \ll R$ et $\tilde{h} \ll h_N$, ce qui nous donne au premier ordre en \tilde{h}

$$\partial_t \tilde{h} + \frac{\rho g h_N^2}{\eta} \partial_x \tilde{h} + \frac{\gamma h_N^3}{3\eta R^2} \partial_{xx} \tilde{h} + \frac{\gamma h_N^3}{3\eta} \partial_{xxx} \tilde{h} = 0 \quad (3.8)$$

ce qui correspond à l'équation dérivée par la suite par Frenkel (30) à ceci près que l'on a négligé le terme quadratique du second ordre $h \partial_x h$.

La vitesse d'advection des ondes est donnée par le coefficient du terme convectif ($\partial_x h$), soit $V = \rho g h_N^2 / \eta$ ce qui correspond à deux fois la vitesse du fluide à l'interface $u_{if} = \rho g h_N^2 / (2\eta)$ pour un film plat d'épaisseur h_N . Le terme dû à la tension de surface via la courbure azimutale ($\partial_{xxx} h$) contribue à diminuer localement l'épaisseur et a donc un rôle stabilisant, tandis que le terme dû à la courbure axiale ($\partial_{xx} h$) a lui un rôle déstabilisant. On étudie alors une perturbation de l'interface telle que $\tilde{h} = A e^{i(kx - \omega t)}$. L'équation (5.2) nous donne la relation de dispersion

$$\omega = \underbrace{\frac{\rho g h_N^2}{\eta} k}_{\text{advection}} + i \underbrace{\frac{\rho g h_N^3}{3\eta} \frac{l_c^2}{R^2} k^2 (1 - k^2 R^2)}_{\text{croissance de l'instabilité}} \quad (3.9)$$

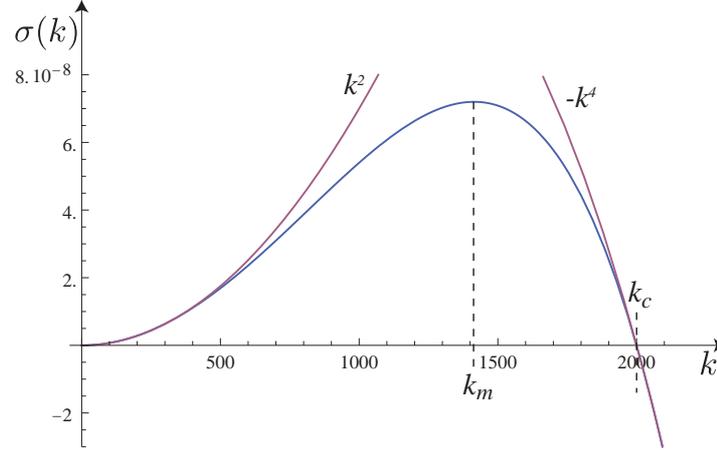


Fig. 3.8. Taux de croissance pour $R=0.5$ mm, $h_N=10^{-3}R$, huile V50 ($\eta=48$ mPa.s, $\gamma=20.8$ mN/m, $\rho=963$ kg/m³).

en notant $l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ la longueur capillaire. La partie imaginaire de ω représente le taux de croissance de l'instabilité $\sigma(k)$

$$\sigma(k) = \frac{\rho g h_N^3}{3\eta} \frac{l_c^2}{R^2} k^2 (1 - k^2 R^2)$$

dont l'allure caractéristique est tracée sur la figure 3.8. La forme du taux de croissance est caractéristique des mécanismes en jeu (détaillés au chapitre 2) : pour les faibles nombres d'ondes, c'est à dire les basses fréquences, le taux de croissance augmente en k^2 : la tension de surface via la courbure axiale (terme en $\partial_{xx}h$) a un effet déstabilisant ; en revanche, aux grands nombres d'ondes, $\sigma(k)$ décroît rapidement en $-k^4$: c'est l'effet stabilisant de la tension de surface via la courbure azimutale (terme en $\partial_{xxxx}h$) qui joue aux hautes fréquences. Ainsi, il existe un nombre d'onde de coupure k_c tel que $\sigma(k_c) = 0$, soit

$$k_c = \frac{1}{R}.$$

Pour $0 < k < k_c$, le taux de croissance est positif et l'écoulement est instable. Le nombre d'onde k_m correspondant au maximum du taux de croissance est donné par $d\sigma/dk|_{k=k_m} = 0$ soit

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}R}.$$

On obtient ainsi la longueur d'onde la plus instable

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{2}R$$

et la longueur d'onde de coupure

$$\lambda_c = 2\pi R.$$

On retrouve bien la longueur d'onde de Rayleigh-Plateau dans le cas $h_N \ll R$. On peut alors calculer le temps caractéristique de croissance de l'instabilité (défini comme l'inverse du taux de croissance pris au nombre d'onde maximale, soit $\tau_{RP} = \sigma^{-1}(k_m)$) et le temps caractéristique d'advection, i.e. le temps que met une onde pour se déplacer (à la vitesse d'advection $2u_{if}$) de sa propre longueur (λ_m), soit $\tau_a = \lambda_m/(2u_{if})$.

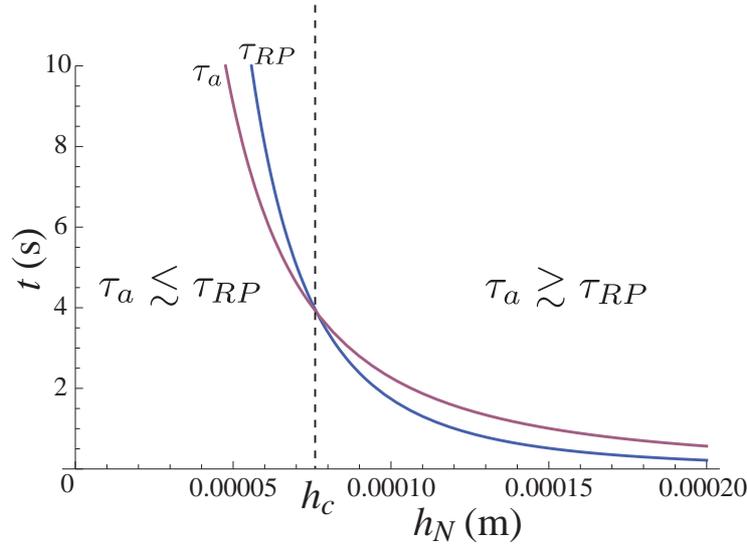


Fig. 3.9. Evolution des temps caractéristiques de croissance de l'instabilité τ_{RP} et d'advection des ondes par l'écoulement τ_a pour $R = 0.5$ mm, huile V50 ($\eta = 48$ mPa.s, $\gamma = 20.8$ mN/m, $\rho = 963$ kg/m³). Les courbes se croisent pour une valeur critique $h_c = 0.077$ mm. Pour $h < h_c$, $\tau_a < \tau_{RP}$. Pour $h > h_c$, $\tau_a > \tau_{RP}$.

On obtient alors :

$$\tau_{RP} = \frac{12R^4\nu}{gh_N^3l_c^2} \quad (3.10)$$

$$\tau_a = \frac{2\pi\sqrt{2}R\nu}{gh_N^2} \quad (3.11)$$

Le rapport des temps s'écrit donc

$$\frac{\tau_a}{\tau_{RP}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{12}\alpha_N\left(\frac{l_c}{R}\right)^2,$$

avec $\alpha_N = h_N/R$ d'où la condition suivante pour $\tau_a = \tau_{RP}$

$$\boxed{\alpha_N = a\left(\frac{R}{l_c}\right)^2} \quad (3.12)$$

où a est une constante proche de l'unité ($a = 2\pi\sqrt{2}/12 \simeq 0.75$). L'évolution des temps caractéristiques est donnée sur la figure 3.9. Ainsi, il existe une épaisseur critique h_c en deçà de laquelle $\tau_a < \tau_{RP}$, c'est-à-dire en deçà de laquelle les ondes sont advectées plus vite qu'elles ne grandissent, l'instabilité étant alors convective. La relation (3.12) peut s'écrire

$$h_c = \frac{a}{l_c^2}R^3.$$

On retrouve bien la tendance obtenue expérimentalement par D. Quéré ($h_c \propto R^3$), avec une constante $a \simeq 1.4 \pm 1$ déterminée expérimentalement. Il est intéressant de voir que ce critère linéaire donne la bonne tendance. Dans nos expériences cependant, l'épaisseur h_N est de l'ordre du rayon. De plus, on observe que l'instabilité est convective aux fortes épaisseurs, et absolue aux faibles épaisseurs, soit un comportement inverse de celui prédit par la loi (3.12) ! On va donc refaire le raisonnement précédent pour $h_N \sim R$.

3.2.2.2 Epaisseur de l'ordre du rayon

On cherche donc à dériver une équation d'évolution simple pour l'épaisseur lorsque $h \sim R$, c'est-à-dire lorsque les effets de courbure sont importants. Dans ce cas, il existe différentes techniques plus ou moins compliquées. On pourrait ainsi penser à faire un développement de type longues ondes comme utilisé dans le cas d'un film s'écoulant sur un plan incliné. En supposant les effets de tension de surface importants, les ondes sont longues (faible amplitude h comparée à l'étalement de l'onde selon x) et la courbure de l'interface faible. Dans le cas d'un film s'écoulant sur un cylindre en revanche, la tension de surface joue dans le sens de l'écoulement et dans la direction radiale, et, comme on peut le voir d'après la forme des ondes obtenues, rien ne garantit que les ondes soient longues... Une telle approche (Benney (7)) demanderait alors plusieurs itérations et ne conduirait pas à un modèle simple. Ce développement a été fait récemment par Craster et Matar (18) en supposant que la tension de surface dominait, c'est-à-dire en prenant comme petit paramètre pour le développement longues ondes le nombre de Bond, soit $\epsilon = \rho g(R + h_N)^2/\gamma$. Ce modèle sera utilisé au chapitre suivant.

Une autre approche possible est l'approximation de type couche-limite (voir Chang (13)) qui, bien qu'efficace, ne conduit pas non plus à un modèle simple. Ce type de modèle a été largement utilisé pour décrire un film tombant sur un plan incliné (85). Christian Ruyer-Quil a développé un modèle similaire pour le cas d'un film tombant le long d'une fibre verticale (87). Cette approche repose sur l'approximation de couche limite (IBL pour *integral boundary-layer*) et est obtenue en moyennant les équations sur l'épaisseur, par la méthode des résidus pondérés (WR pour *weighted residual*) et en faisant un développement longues ondes. Ce modèle WRIBL ainsi obtenu sera détaillé au chapitre suivant.

Finalement, Kliakhandler (53) fait le raisonnement suivant : il se place dans l'hypothèse de lubrification et considère que le profil de vitesse dans le film varie peu, et dérive ainsi, pour de faibles modulations de l'interface, une équation d'évolution pour l'épaisseur h .

Ce qui nous intéresse ici est d'obtenir une expression analytique simple de la relation de dispersion afin de pouvoir estimer les temps caractéristiques. On va donc procéder de la même manière que précédemment, mais cette fois en supposant que l'épaisseur est de l'ordre du rayon, et en faisant un développement au premier ordre en \tilde{h} . La relation de dispersion obtenue sera comparée à celles dérivées par Kliakhandler (53) et Craster et Mater (18). On se place donc en coordonnées cylindriques et toujours dans le cadre de l'approximation de lubrification. Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à

$$\rho g - \partial_x p + \eta \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u) = 0 \quad (3.13)$$

avec comme conditions aux limites $u = 0$ en $r = R$ et $\partial_r u = 0$ en $r = R + h$. Le profil de vitesse s'écrit alors

$$u(r) = \frac{\partial_x p - \rho g}{4\eta} \left[(r^2 - R^2) - 2(R + h) \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (3.14)$$

On retrouve bien la vitesse dite de Nusselt $U(h_N)$ pour un film plat d'épaisseur uniforme $h = h_N$. Le débit linéique s'écrit alors

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2\pi(R + h)} \int_R^{R+h} u(r) 2\pi r dr \\ &= \frac{(\rho g - \partial_x p)}{3\eta} \frac{R}{R + h} h^3 \phi(h/R) \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $\phi(x)$ est la fonction définie au chapitre précédent par

$$\phi(x) = \frac{3(-x(x+2)(3x^2 + 6x + 2) + 4(1+x)^4 \ln(1+x))}{16x^3}.$$

La conservation de la masse en géométrie cylindrique, dans une tranche dx de fluide, s'écrit

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \rho \frac{\partial(\pi(R+h)^2 - \pi R^2)}{\partial t} dx = \rho(q(x) - q(x+dx))2\pi R \quad (3.16)$$

Si h reste faible, $(R+h)^2 \simeq R^2 + 2Rh$ donc

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \rho \frac{\partial h}{\partial t} 2\pi R dx.$$

De plus,

$$q(x) - q(x+dx) = -\frac{\partial q}{\partial x} dx,$$

d'où finalement

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (3.17)$$

Le gradient de pression dû à la déformation de l'interface s'écrit comme précédemment, en considérant toujours des pentes faibles de l'interface ($\partial_x h \ll 1$)

$$\partial_x P = -\gamma \left(\frac{\partial_x h}{(R+h)^2} + \partial_{xxx} h \right) \quad (3.18)$$

En utilisant la conservation de la masse (3.17), on obtient l'équation d'évolution pour h

$$\partial_t h + \partial_x \left[\left(\frac{\rho g - \partial_x P}{3\eta} \right) \frac{R}{R+h} h^3 \phi(h/R) \right] = 0 \quad (3.19)$$

soit

$$\partial_t h + \partial_x \left(\frac{R}{R+h} \frac{\rho g h^3}{3\eta} \phi(h/R) \right) + \partial_x \left[\frac{R}{R+h} \left(\frac{\gamma}{3\eta} h^3 \phi(h/R) \right) \left(\partial_{xxx} h + \frac{\partial_x h}{(R+h)^2} \right) \right] = 0 \quad (3.20)$$

Un développement faiblement non-linéaire $h = h_N + \tilde{h}$ conduit au premier ordre à

$$\partial_t \tilde{h} + u_k \partial_x \tilde{h} + \frac{\gamma}{3\eta} \frac{R}{R+h_N} h_N^3 \phi(h_N/R) \left(\partial_{xxx} \tilde{h} + \frac{\partial_{xx} \tilde{h}}{(R+h_N)^2} \right) = 0 \quad (3.21)$$

on pose $\alpha_N = h_N/R$ et

$$u_k = \frac{\rho g R^2}{16\eta} \left(\frac{-\alpha_N(2+\alpha_N)(6+5\alpha_N(2+\alpha_N)) + 12(1+\alpha_N)^4 \ln(1+\alpha_N)}{(1+\alpha_N)^2} \right) \quad (3.22)$$

est la vitesse d'advection des ondes. Quand $h \ll R$, on a vu que les ondes étaient advectées à deux fois la vitesse du fluide à l'interface. On va donc comparer u_k à la vitesse du fluide à l'interface u_i

$$u_i = u(r = h_N + R) = \frac{\rho g h_N^2}{4\eta} \left(\frac{-\alpha_N(\alpha_N + 2) + 2(\alpha_N + 1)^2 \ln(1 + \alpha_N)}{\alpha_N^2} \right) \quad (3.23)$$

Le rapport u_k/u_i ne dépend que de α_N et est présenté sur la figure 3.10. On remarque que $u_k \rightarrow 2u_i$ lorsque $\alpha_N \rightarrow 0$. Lorsque α_N augmente, le rapport u_k/u_i reste proche de 2 (cf Fig. 3.10 : $1.6 < u_k/u_i < 2$). Lorsque $h_N \ll R$ (soit $\alpha_N \ll 1$), le facteur de forme $\phi(h_N/R) \rightarrow 1$, $u_k \rightarrow \frac{\rho g h_N^2}{\eta} = 2u_{if}$, et l'équation (3.21) se ramène bien à (3.7). En écrivant $\tilde{h} = A e^{i(kx - \omega t)}$ on obtient la relation de dispersion

$$\omega = u_k k + i \frac{\gamma R}{3\eta(R+h_N)} h_N^3 \phi(\alpha_N) k^2 \left(\frac{1}{(R+h_N)^2} - k^2 \right) \quad (3.24)$$

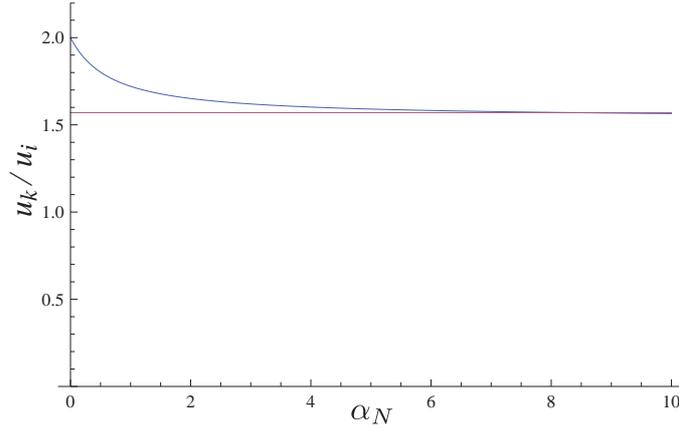


Fig. 3.10. Evolution du rapport u_k/u_i en fonction de α_N .

Au chapitre 2, nous avons défini le débit de Nusselt $q_N = \rho g h_N^3 \phi(\alpha_N) / (3\eta)$. On introduit ici la vitesse moyenne de l'écoulement

$$u_N = \frac{q_N}{h_N} = \frac{\rho g h_N^2}{3\eta} \phi(\alpha_N).$$

Notons que lorsqu'on se rapproche du cas plan ($\alpha_N \ll 1$), on retrouve la relation classique $u_i/u_N = 3/2$. On peut réécrire la relation de dispersion précédente

$$\omega = \underbrace{u_k k}_{\text{advection}} + i \underbrace{\frac{l_c^2 R h_N u_N k^2}{(h_N + R)^3} (1 - k^2 (h_N + R)^2)}_{\text{croissance de l'instabilité}} \quad (3.25)$$

on retrouve la relation de dispersion obtenue par Craster et Matar (18) en faisant le développement longues ondes et en supposant que la tension de surface dominait.

On note le taux de croissance

$$\sigma'(k) = \frac{l_c^2 R h_N u_N k^2}{(h_N + R)^3} (1 - k^2 (h_N + R)^2)$$

dont l'allure caractéristique est tracée sur la figure 3.11. La forme du taux de croissance est identique à celle obtenue dans le cas $h \ll R$, mais ici les nombres d'onde maximum et de coupure dépendent de l'épaisseur de film. Ainsi le nombre d'onde de coupure s'écrit

$$k_c = \frac{1}{R + h_N},$$

soit

$$\lambda_c = 2\pi(R + h_N).$$

Le nombre d'onde k_m correspondant au maximum du taux de croissance s'écrit

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}(R + h_N)},$$

soit

$$\lambda_m = 2\pi \sqrt{2}(R + h_N).$$

On retrouve la longueur d'onde de Rayleigh-Plateau lorsque $h_N \ll R$.

La figure 3.12 compare les taux de croissance obtenus dans le cas $h \ll R$ (relation de dispersion (3.9)) et

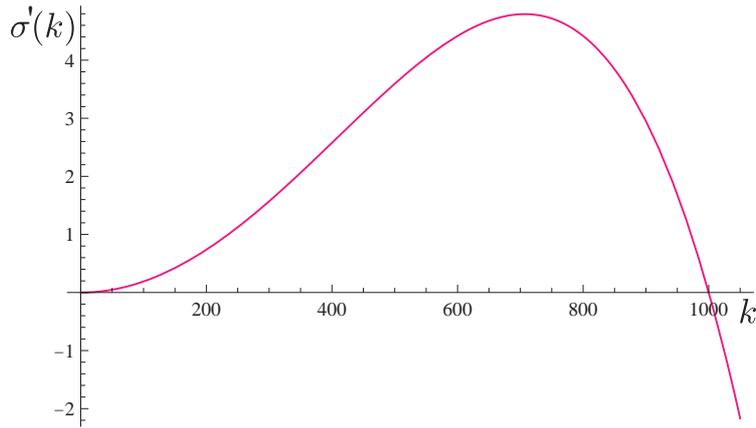


Fig. 3.11. Taux de croissance pour $R = 0.5 \text{ mm}$, $h_N = R$, huile V50 ($\eta = 48 \text{ mPa.s}$, $\gamma = 20.8 \text{ mN/m}$, $\rho = 963 \text{ kg/m}^3$).

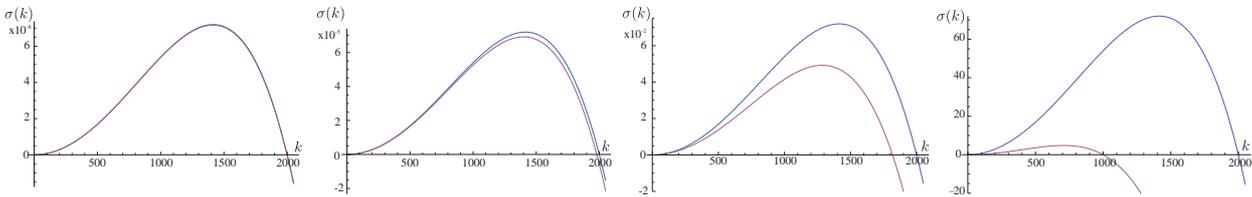


Fig. 3.12. Taux de croissance obtenus à partir des relations de dispersion (3.9) en bleu et (3.25) en rose pour $R = 0.5 \text{ mm}$, huile V50 et de gauche à droite $h_N = 10^{-3} R$, $h_N = 10^{-2} R$, $h_N = 10^{-1} R$, $h_N = R$. Le taux de croissance maximal augmente fortement avec l'épaisseur ; l'échelle verticale est différente pour les 4 cas présentés.

$h \sim R$ (relation de dispersion (3.25)). La limite $h \ll R$ est bien retrouvée. La différence entre les deux taux n'est plus négligeable à partir de $h \sim 10^{-1} R$. Dans nos expériences, il faut donc bien prendre en compte le fait que h n'est pas petit devant R et utiliser les modèles adéquats.

On peut alors calculer les temps caractéristiques de croissance de l'instabilité et d'advection

$$\tau_{RP} = \frac{4(R + h_N)^5}{R h_N l_c^2 u_N} \quad (3.26)$$

$$\tau_a = \frac{2\pi \sqrt{2}(R + h_N)}{u_k} \quad (3.27)$$

Le rapport des temps τ_{RP}/τ_a est alors égal à :

$$\frac{\tau_{RP}}{\tau_a} = \frac{\sqrt{2}(1 + \alpha_N)^4 (u_k/u_N)}{\alpha_N} \left(\frac{R}{l_c}\right)^2 \quad (3.28)$$

D'où la condition suivante pour $\tau_a = \tau_{RP}$

$$\boxed{\frac{\alpha_N}{(u_k/u_N)(1 + \alpha_N)^4} = b \left(\frac{R}{l_c}\right)^2} \quad (3.29)$$

où le rapport u_k/u_N n'est fonction que de α_N et b est une constante numérique proche de 1 ($b = \sqrt{2}/\pi \approx 0.45$). Cette relation se ramène bien à la relation (3.12) dans la limite $h_N \ll R$. Les deux temps caractéristiques sont tracés sur la figure 3.13. L'équation (3.29) admet deux racines pour h_N . Il existe donc deux

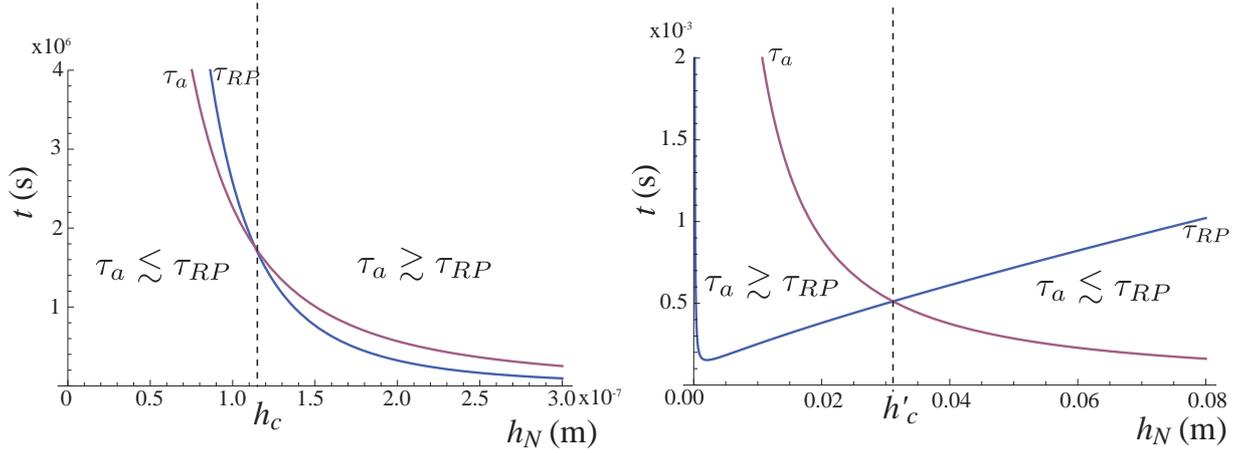


Fig. 3.13. Evolution des temps caractéristiques de croissance de l'instabilité τ_{RP} et d'advection des ondes par l'écoulement τ_a (à gauche : zoom sur les faibles épaisseurs) pour $R=0.5$ mm, huile V50 ($\eta=48$ mPa.s, $\gamma=20.8$ mN/m, $\rho=963$ kg/m³). Les courbes se croisent pour une valeur critique $h_c=0.115 \cdot 10^{-3}$ mm et $h'_c=31$ mm. Pour des épaisseurs h_N comprises entre $h_c < h_N < h'_c$, $\tau_a > \tau_{RP}$. Sinon, $\tau_a < \tau_{RP}$.

épaisseurs critiques telles que $\tau_{RP} = \tau_a$: h_c aux petites épaisseurs et h'_c aux épaisseurs élevées. Il existe donc une gamme d'épaisseur $h_c < h_N < h'_c$ pour laquelle le temps d'avection est supérieur au temps de croissance de l'instabilité, c'est-à-dire lorsque les ondes croissent plus vite qu'elles ne sont advectées et l'instabilité est donc absolue. Au-delà de cette zone ($h_N < h_c$ ou $h_N > h'_c$), $\tau_{RP} > \tau_a$, les ondes sont advectées plus vite qu'elles ne croissent et l'instabilité est convective. On retrouve bien le comportement observé expérimentalement dans la limite supérieure : il existe une épaisseur critique au-delà de laquelle l'instabilité est convective et le système se comporte comme un amplificateur de bruit, et en-deçà de laquelle l'instabilité est absolue et le système se comporte comme un oscillateur auto-entretenu.

Si le calcul précédent permet bien de comprendre les mécanismes physiques mis en jeu dans la transition Absolu/Convectif, il ne peut nous donner la transition de manière exacte ; on s'attend à ce que celle-ci se produise lorsque $\tau_a \sim \tau_{RP}$, mais il nous reste à déterminer les constantes a et b précisément. Un autre moyen, plus formel, permet de retrouver cette transition. Il s'agit d'utiliser les critères de transition décrits par Huerre (4) à partir de la réponse impulsionnelle du système. Pour ce faire, nous allons tout d'abord adimensionner les équations d'évolution obtenues dans les deux cas ($h \ll R$ et $h \sim R$) puis nous précisons les critères exacts afin d'obtenir la transition absolu/convectif.

3.2.3 Calcul complet

3.2.3.1 Adimensionnement

On adimensionne les relations de dispersion précédentes. Les barres horizontales indiquent les grandeurs adimensionnées. En suivant l'idée introduite pour la première fois par Shkadov (92), on définit deux échelles de longueur : une perpendiculaire à l'écoulement ($h = \bar{h}h_N$) et une dans la direction de l'écoulement ($x = \bar{x}\mathcal{L} = \bar{x}\kappa h_N$). Le rapport d'échelle κ est déterminé en équilibrant la pression hydrostatique ρg et

le terme dominant de la pression de Laplace $\gamma \partial_{xxx} h$ soit $\kappa = [\gamma / (\rho g h_N^2)]^{1/3}$, d'où finalement $\mathcal{L} = h_N^{1/3} l_c^{2/3}$. L'échelle de temps est calculée comme $\mathcal{T} = \mathcal{L} / (3u_N)$ où u_N est la vitesse moyenne dans le film uniforme d'épaisseur h_N ($u_N = q_N / h_N = \phi(\alpha_N) \rho g h_N^2 / (3\eta)$). L'échelle de vitesse choisie est donc $\mathcal{V} = 3u_N$, ce qui permet de retrouver les résultats connus pour le cas plan. Avec cet adimensionnement, l'équation d'évolution (5.2) pour l'épaisseur, dans le cas où $h \ll R$ (et donc $\phi(\alpha_N) = 1$), devient

$$\partial_{\bar{t}} \bar{h} + \partial_{\bar{x}} \bar{h} + \frac{\beta}{3} \partial_{\bar{x}\bar{x}} \bar{h} + \frac{1}{3} \partial_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \bar{h} = 0 \quad (3.30)$$

où il ne reste qu'un seul paramètre

$$\beta = \frac{l_c^{4/3} h_N^{2/3}}{R^2} = \alpha_N^{2/3} \left(\frac{l_c}{R} \right)^{4/3}.$$

Ce paramètre compare les effets de la courbure axiale et de la courbure azimutale, c'est-à-dire mesure l'importance de l'instabilité de Rayleigh-Plateau dans le cas où l'épaisseur h_N reste faible devant le rayon. La relation de dispersion s'écrit alors

$$\omega = k + i \frac{k^2}{3} (\beta - k^2) \quad (3.31)$$

De même, dans le cas $h \sim R$, on procède à l'adimensionnement de l'équation (3.21) qui devient

$$\partial_{\bar{t}} \bar{h} + c_k \partial_{\bar{x}} \bar{h} + \frac{\beta}{3(1 + \alpha_N)^3} \partial_{\bar{x}\bar{x}} \bar{h} + \frac{1}{3(1 + \alpha_N)} \partial_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \bar{h} = 0 \quad (3.32)$$

où

$$c_k = \frac{u_k}{3u_N}$$

est la vitesse des ondes dites cinématiques adimensionnée. On obtient alors la relation de dispersion

$$\omega = kc_k + i \frac{k^2}{3(1 + \alpha_N)^3} \left(\frac{\beta}{(1 + \alpha_N)^2} - k^2 \right) \quad (3.33)$$

Notons que l'on peut passer de (4.6) à (4.7) par la transformation

$$\begin{aligned} k &\rightarrow kc_k^{-1/3} (1 + \alpha_N)^{-1/3} \\ \omega &\rightarrow \omega c_k^{-4/3} (1 + \alpha_N)^{-1/3} \\ \beta &\rightarrow \beta c_k^{-2/3} (1 + \alpha_N)^{-8/3} \end{aligned} \quad (3.34)$$

On définit alors le paramètre

$$\beta^* = \beta c_k^{-2/3} (1 + \alpha_N)^{-8/3} = \left(\frac{\alpha_N}{c_k (1 + \alpha_N)^4} \right)^{2/3} \left(\frac{l_c}{R} \right)^{4/3}$$

qui est un paramètre qui compare l'importance de l'instabilité de Rayleigh-Plateau par rapport à l'écoulement dans le cas où $h_N \sim R$.

Ainsi, les deux cas $h \ll R$ et $h \sim R$ se ramènent à la même relation de dispersion. On va donc pouvoir faire l'étude de la transition AC pour la relation de dispersion simple (4.6) puis extrapoler le résultat à (4.7) via la transformation (3.34).

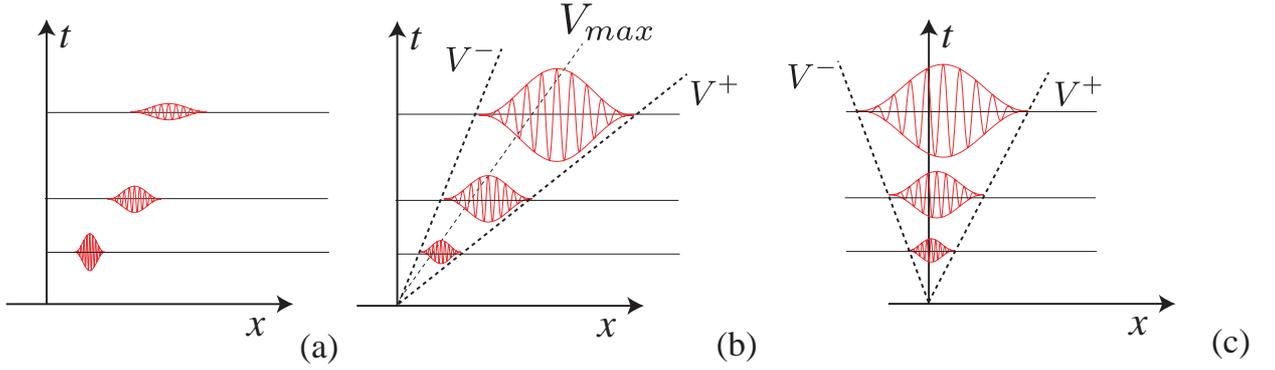


Fig. 3.14. Evolution d'une perturbation dans le plan (x, t) pour un écoulement (a) stable, (b) instable convectif (c) absolu instable.

3.2.3.2 Transition Absolu/Convectif

Dans cette section, on établit un critère exact directement applicable à la relation de dispersion $\mathcal{D}(k, \omega)$ permettant de décrire la transition absolu/convectif. Une description mathématique complète de l'obtention d'un tel critère peut être trouvée dans (4) Chap.4. Nous allons en donner ici une description synthétique. Il s'agit d'étudier, par une analyse linéaire spatiale (k et ω sont désormais complexes), l'évolution spatio-temporelle (dans le plan (x, t)) d'une perturbation localisée en temps et en espace. En absence de forçage, le système est décrit par $\mathcal{D}(k, \omega) = 0$. Si on impose un forçage, c'est-à-dire que l'on rajoute une source $S(x, t)$, la réponse du système $\Psi(x, t)$ est alors telle que

$$\mathcal{D}(k, \omega) * \Psi(x, t) = S(x, t) \quad (3.35)$$

où $*$ est le produit de convolution. Dans le cas où le terme source est une impulsion de Dirac (perturbation localisée en temps et en espace), on a

$$S(x, t) = \delta(x)\delta(t).$$

Dans ce cas, la réponse $\Psi(x, t)$ est la réponse impulsionnelle (ou fonction de Green $G(x, t)$), et on a donc

$$\mathcal{D}(k, \omega) * G(x, t) = \delta(x)\delta(t) \quad (3.36)$$

On s'intéresse à l'évolution aux temps longs ($t \rightarrow \infty$) de cette perturbation le long d'une ligne spatio-temporelle $x/t = \text{cste}$. Son évolution typique est donnée Fig. 3.14. La réponse impulsionnelle est un paquet d'ondes périodiques confinées entre deux bords dans le plan (x, t) . L'écoulement est linéairement stable (Fig. 3.14(a)) si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0 \quad \text{le long de toutes les lignes } \frac{x}{t} = \text{const.} \quad (3.37)$$

La réponse impulsionnelle est alors un paquet d'ondes s'amortissant. L'écoulement est instable si $G(x, t)$ tend vers l'infini sur au moins une ligne spatio-temporelle x/t . On peut alors faire les deux distinctions suivantes :

l'écoulement est linéairement instable convectif (Fig. 3.14(b)) si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0 \quad \text{le long de la ligne } \frac{x}{t} = 0. \quad (3.38)$$

c'est-à-dire que le paquet d'ondes croît mais est emporté, laissant l'écoulement non perturbé.

L'écoulement est linéairement instable absolu (Fig. 3.14(c)) si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty \quad \text{le long de la ligne} \quad \frac{x}{t} = 0. \quad (3.39)$$

c'est-à-dire que le paquet d'ondes entoure la source et graduellement contamine tout le milieu.

Pour caractériser l'instabilité et notamment la transition Absolu/Convectif, on cherche donc à déterminer l'expression de $G(x, t)$ aux temps longs le long d'une ligne $x/t=\text{const}$. Pour ce faire, on passe dans l'espace de Fourier où le produit de convolution devient un produit simple. On fait donc la transformée de Fourier de (3.35), ce qui conduit à

$$\widetilde{\mathcal{D}}(k, \omega) \cdot \widetilde{\Psi}(k, \omega) = \widetilde{S}(k, \omega) \quad (3.40)$$

On fait ensuite la TF inverse

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \frac{\widetilde{S}(k, \omega)}{\widetilde{\mathcal{D}}(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.41)$$

qui se résout en utilisant le théorème des résidus (ce que je ne détaillerai pas ici). Finalement, on obtient

$$\Psi(x, t) = \frac{-i}{2\pi} \int_{F_k} \frac{\widetilde{S}[k, \omega(k)]}{(\partial \widetilde{\mathcal{D}} / \partial \omega)[k, \omega(k)]} e^{i[kx - \omega(k)t]} dk \quad (3.42)$$

que l'on va appliquer à notre problème, à savoir une source sous la forme d'une impulsion de Dirac (d'où $\widetilde{S}(k, \omega) = \text{TF}(\delta(x)\delta(t)) = 1$) avec $\Psi(x, t) = G(x, t)$ la réponse impulsionnelle. Ainsi,

$$G(x, t) = \frac{-i}{2\pi} \int_{F_k} \frac{1}{(\partial \mathcal{D} / \partial \omega)[k, \omega(k)]} e^{i[kx - \omega(k)t]} dk \quad (3.43)$$

ce qui peut être réécrit sous la forme générale

$$G(x, t) = \frac{-i}{2\pi} \int_{F_k} f(k) e^{\rho(k; x/t)t} dk \quad (3.44)$$

avec

$$f(k) = \frac{1}{(\partial \mathcal{D} / \partial \omega)[k, \omega(k)]}, \quad \rho\left(k; \frac{x}{t}\right) = i \left[k \frac{x}{t} - \omega(k) \right]. \quad (3.45)$$

Notons que dans (3.44), le temps t est un grand paramètre. On cherche alors à calculer cette intégrale lorsque $t \rightarrow \infty$ le long d'une ligne $x/t=\text{const}$. Aux temps longs, l'ordre de grandeur de l'intégrale est contrôlé par la partie réelle de l'exponentielle, i.e. par $\rho_r(k, x/t)$. Pour la plupart des instabilités, $\rho(k, x/t)$ admet un point stationnaire k_* tel que

$$\frac{\partial \rho}{\partial k} \left(k_*, \frac{x}{t} \right) = i \left[\frac{x}{t} - \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_*) \right] = 0 \quad (3.46)$$

soit

$$\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_*) = \frac{x}{t} = V \quad (3.47)$$

Au voisinage de ce point fixe, on fait un développement de Taylor de la fonction $\rho(k, x/t)$

$$\rho\left(k; \frac{x}{t}\right) \sim \rho\left(k_*, \frac{x}{t}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial k^2} \left(k_*, \frac{x}{t} \right) (k - k_*)^2, \quad (3.48)$$

et on aboutit finalement à une expression de $G(x, t)$ aux temps longs, le long d'un ligne $x/t=\text{const}$, de la forme

$$G(x, t) \sim \frac{e^{i[\pi/4 + k_* x - \omega(k_*)t]}}{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}[k_*, \omega(k_*)] \left[2\pi \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(k_*)t \right]^{1/2}}. \quad (3.49)$$

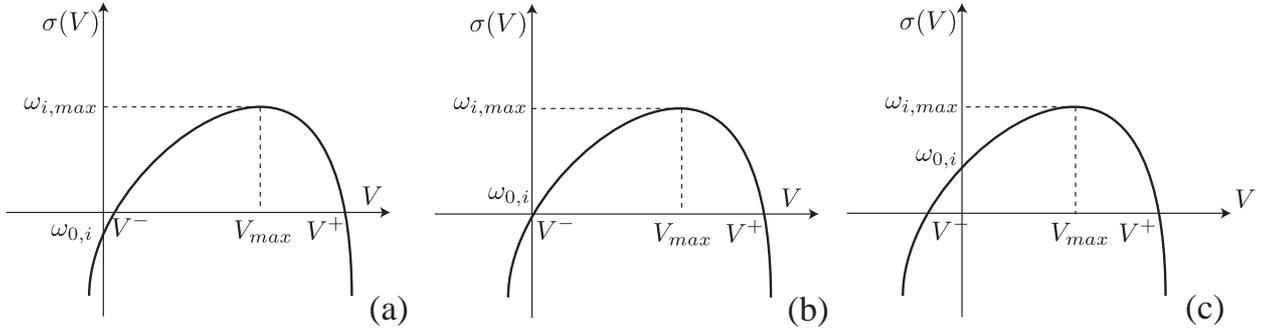


Fig. 3.15. Taux de croissance temporel en fonction de la vitesse de l'observateur V pour un écoulement (a) instable convectif, (b) à la transition convectif/absolu et (c) absolu instable.

Cette estimation asymptotique décrit bien la réponse à une impulsion, qui prend donc la forme d'un paquet d'ondes comme anticipé sur la figure 3.14. D'après la relation (3.47), un observateur se déplaçant à la vitesse V (le long de la ligne spatio-temporelle $x/t = V$) "voit" un nombre d'onde k_* et une pulsation $\omega_* = \omega(k_*)$ tels que la vitesse de groupe $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_*) = V$. Cet observateur "voit" un taux de croissance temporel $\sigma(V) = \omega_{*,i} - V k_{*,i}$ (les indices i indiquent les parties imaginaires). Si $\sigma(V) > 0$ (resp. < 0), les perturbations croissent (resp. décroissent) de manière exponentielle le long de la ligne $x/t = V$. Le domaine occupé par le paquet d'ondes instable est défini par la condition $\sigma(x/t) > 0$. Ainsi, la gamme de vitesses V telles que $\sigma(V) > 0$ donne une mesure de l'extension (dans le sens de l'écoulement x) du paquet d'ondes. Les vitesses de l'avant ($x/t = V^+$) et de l'arrière (V^-) du paquet d'ondes sont définies par $\sigma(V^+) = \sigma(V^-) = 0$, avec $V^+ > V^-$ (Fig. 3.14).

La forme typique du taux de croissance $\sigma(V)$ est donnée Fig. 3.15. Ce taux de croissance temporel ($\sigma = \omega_i(k)$) admet un maximum $\omega_{i,max} = \omega_i(k_{max})$ avec une vitesse de groupe réelle $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_{max}) = V_{max}$. V_{max} mesure alors la vitesse de propagation du centre du paquet d'ondes. On peut donc distinguer deux cas :
 si $\omega_{i,max} < 0$, le taux de croissance temporel σ est négatif pour tout x/t et l'écoulement est stable ;
 si $\omega_{i,max} > 0$, il existe une gamme finie de vitesses $x/t = V$ telles que le taux de croissance temporel σ est positif et l'écoulement est instable.

Pour discriminer entre instabilités absolue et convective lorsque l'écoulement est instable (Fig. 3.15), on étudie le cas d'un observateur stationnaire dans le référentiel fixe du laboratoire (qui observe donc le long de la ligne $V = 0$). Il "voit" un nombre d'onde k_0 tel que, d'après l'équation (3.47), $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = V = 0$ (vitesse de groupe nulle). $\omega_0 = \omega(k_0)$ est appelée fréquence (ou mode) absolue. Le taux de croissance associé $\sigma(0) = \omega_{0,i}$, appelé taux de croissance absolu, mesure la croissance ou la décroissance du paquet d'ondes telle qu'observée dans le référentiel du laboratoire. On a alors deux cas (ce qui correspond au critère de Briggs-Bers) :

(a) si $\omega_{0,i} < 0$, les perturbations décroissent dans le référentiel du laboratoire. On a alors obligatoirement (Fig. 3.15a) $0 < V^- < V_{max} < V^+$: les deux bords du paquet se propagent dans le même sens en s'éloignant de la source (V^- et V^+ positives) et la perturbation quitte le domaine (Fig. 3.14a). L'instabilité est convective.

(b) si $\omega_{0,i} > 0$, les perturbations croissent dans le référentiel du laboratoire. On a alors (Fig. 3.15c) $V^- < 0 < V_{max} < V^+$ (ou $V^- < V_{max} < 0 < V^+$) : les deux bords du paquet se propagent en sens

contraire, $V^+ > 0$ et $V^- < 0$ et la perturbation finit par envahir tout le domaine (Fig. 3.14c). L'instabilité est absolue.

La transition entre les deux types d'instabilité a donc lieu pour $\omega_{0,i} = 0$ (Fig. 3.15b).

Pour déterminer le lieu exact de la transition absolu/convectif, on va donc procéder ainsi : on va chercher les couples (k_0, ω_0) tels que $\omega_0 = \omega(k_0)$ avec une vitesse de groupe nulle $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0$. La transition s'obtient pour $\omega_{0,i} = 0$.

On cherche, pour la relation de dispersion (4.6), à trouver les couples (k_0, ω_0) tels que $\omega_0 = \omega(k_0)$, $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0$, c'est-à-dire à résoudre le système :

$$\omega = k + i \frac{k^2}{3} (\beta - k^2) \quad (3.50)$$

$$\frac{d\omega}{dk} = 1 + i \frac{k}{3} (2\beta - 4k^2) = 0 \quad (3.51)$$

L'équation (3.51) admet trois racines : $k_{0,1}$ imaginaire pure (ce qui conduit à ω imaginaire pur, qui ne nous intéresse pas ici) et $k_{0,2,3}$ complexes conjuguées. On injecte ensuite $k_{0,2}$ (ou $k_{0,3}$) dans (3.50). On obtient alors une expression pour ω de la forme

$$\omega_0 = \pm f(\beta) + ig(\beta) \quad (3.52)$$

La partie imaginaire $\omega_{0,i} = g(\beta)$ est tracée sur la figure 3.16. Elle s'annule pour

$$\boxed{\beta = \beta_{ca} \approx 1.507} \quad (3.53)$$

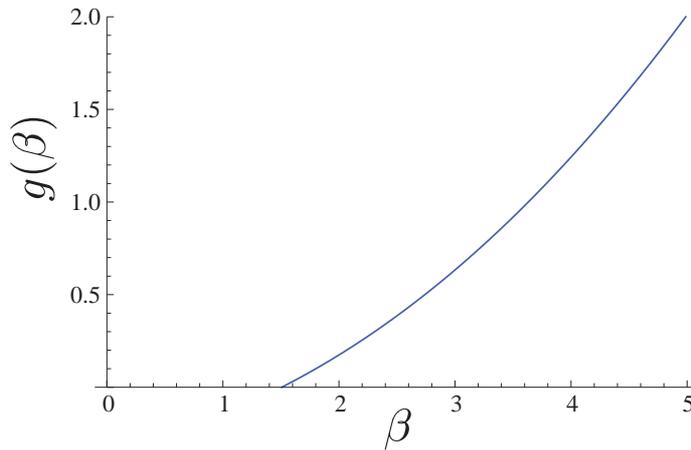


Fig. 3.16. Evolution de la partie imaginaire de ω_0 en fonction du paramètre β .

Ainsi, la transition Absolu/Convectif a lieu pour $\omega_{0,i}=0$, c'est-à-dire pour $\beta = \beta_{ca}$. Le taux de croissance $\omega_{0,i}$ est positif (l'instabilité est absolue) lorsque $\beta > \beta_{ca}$. Au contraire, lorsque $\beta < \beta_{ca}$, $\omega_{0,i} < 0$ et l'instabilité est convective.

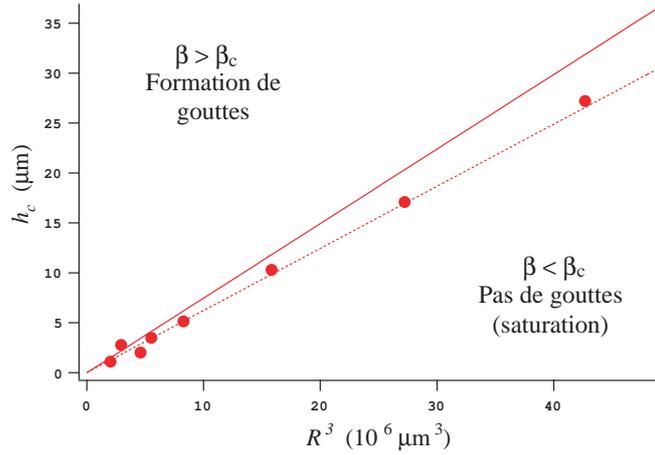


Fig. 3.17. Expérience de D. Quéré (81) du fil tiré hors d'un bain : épaisseur critique h_c en-deçà de laquelle l'instabilité sature. La transition est donnée par la loi (3.12) qui s'écrit aussi $h_c = (a/l_c^2)R^3$. Points expérimentaux obtenus par D. Quéré (81), ligne pointillée : ajustement expérimental ($a=1.4$) et ligne continue : loi obtenue par (46) ($a=1.68$).

Comme $\beta = \alpha_N^{2/3}(l_c/R)^{4/3}$, la condition $\beta = \beta_{ca}$ (i.e. le lieu de la transition) s'écrit

$$\alpha_N = \beta_{ca}^{3/2}(R/l_c)^2 \quad (3.54)$$

ce qui correspond à la condition (3.12) avec $a = \beta_{ca}^{3/2} \approx 1.85$. Le calcul des temps caractéristiques nous a donc bien permis de trouver la transition absolu/convectif, qui est ici précisé par le calcul exact de la constante a . Cette valeur est en accord avec les expériences de Quéré, avec cependant une différence non négligeable. En effet, ce critère provient d'une étude purement linéaire ; le mécanisme de saturation de l'instabilité est quant à lui un phénomène non-linéaire. Les mécanismes physiques (compétition entre croissance de l'instabilité et l'advection par l'écoulement) sont effectivement les mécanismes dominants dans ce phénomène aussi la loi obtenue par Quéré donne-t-elle la bonne tendance. L'accord quantitatif ne peut lui être obtenu qu'en faisant une étude non linéaire, ce qui a été fait par Kalliadasis et Chang (46). Ils ont déterminé le seuil précis de formation de gouttes, qui s'exprime aussi en fonction du nombre β , pour une valeur critique $\beta_{sat} = 1.413$, soit $a=1.68$, ce qui se compare favorablement aux expériences de Quéré (Fig. 3.17). En effet, lorsque l'épaisseur $h > h_c$, les perturbations de l'interface dues à l'instabilité de Rayleigh-Plateau sont amplifiées jusqu'à créer des gouttes beaucoup plus larges que l'épaisseur du film. Cette formation de gouttes (ou *blow up*) est un effet fortement non-linéaire. En revanche, lorsque $h < h_c$, il existe un couplage non-linéaire entre l'écoulement moyen et la courbure axiale, ce qui génère une onde solitaire qui empêche qu'on atteigne la limite asymptotique (blow-up) et donc la formation de gouttes. Ainsi, la saturation observée par David Quéré est bien un phénomène non linéaire, qui met néanmoins en jeu les effets combinés de l'instabilité de Rayleigh-Plateau et d'un écoulement. Il est intéressant de noter l'existence d'une transition AC très proche de ce seuil ; pour la déterminer expérimentalement, il faudrait avoir accès aux faibles épaisseurs, ce qui n'est pas possible avec notre dispositif.

En utilisant la transformation (3.34), on va pouvoir déterminer le lieu de la transition AC lorsque $h \sim R$, i.e. pour la relation de dispersion (4.7). β devient β^* , ainsi la transition a ainsi lieu lorsque $\beta^* = \beta_{ca}$ ce qui

s'écrit

$$\beta^* = \left(\frac{\alpha_N}{c_k(1 + \alpha_N)^4} \right)^{2/3} \left(\frac{l_c}{R} \right)^{4/3} = \beta_{ca} \quad (3.55)$$

soit

$$\boxed{\frac{\alpha_N}{(u_k/u_N)(1 + \alpha_N)^4} = \frac{1}{3} \beta_{ca}^{3/2} \left(\frac{R}{l_c} \right)^2} \quad (3.56)$$

Encore une fois, on obtient bien la relation (3.29) obtenue par notre calcul des temps caractéristiques avec $b = (1/3) \beta_{ca}^{3/2} = 0.62$. Rappelons aussi que $u_k/u_N = F(\alpha_N)$ ne dépend que de α_N avec

$$F(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha(2 + \alpha)(6 + 5\alpha(2 + \alpha)) + 12(1 + \alpha)^4 \ln[1 + \alpha])}{(1 + \alpha)^2(-1 + 4(1 + \alpha)^2 + (1 + \alpha)^4(-3 + 4 \ln[1 + \alpha]))}.$$

La transition AC, donnée par les relations (3.54) et (3.56) (c'est-à-dire $\beta=1.507$ et $\beta^*=1.507$ respectivement) ne dépend donc que du rapport d'aspect $\alpha_N = h_N/R$ et du rapport R/l_c qui caractérise la courbure de la fibre.

3.2.4 Lieu de la transition

On va donc tracer le lieu de la transition AC dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$ obtenu analytiquement, et on va y reporter les points expérimentaux correspondants aux régimes réguliers et irréguliers. Les résultats sont présentés sur la figure 3.18. Notons que pour tracer le lieu de la transition ($\beta=1.507$ pour $h_N \ll R$, $\beta^*=1.507$ pour $h_N \sim R$, ce qui correspond à $\tau_a \sim \tau_{RP}$), on peut réécrire les relations (3.54) et (3.56) sous la forme

$$\frac{R}{l_c} = \frac{1}{\beta_{ca}^{3/4}} \alpha_N^{1/2} = f_1(\alpha_N) \quad (3.57)$$

et

$$\frac{R}{l_c} = \frac{\sqrt{3}}{\beta_{ca}^{3/4}} \left(\frac{\alpha_N}{(u_k/u_N)(1 + \alpha_N)^4} \right)^{1/2} = f_2(\alpha_N) \quad (3.58)$$

On obtient finalement le lieu de la transition AC dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$. Notons aussi que la transition ainsi prédite ne dépend pas de la viscosité du fluide, mais uniquement de sa tension de surface via la longueur capillaire. On devrait donc avoir, à rayon de fibre fixé, une transition pour la même épaisseur h_N quelle que soit la viscosité. Cependant, une même épaisseur ne signifie pas un même débit ! En effet, le débit et l'épaisseur sont reliés par $Q/(2\pi\rho R) = \rho g h_N^3 \phi(\alpha_N)/(3\eta)$. On va donc observer la transition pour des débits différents (comme présenté au début du chapitre), mais correspondant à la même épaisseur de Nusselt. Par la suite, nos deux paramètres de contrôle pertinents seront donc l'épaisseur de Nusselt h_N (ou plutôt le rapport d'aspect $\alpha_N = h_N/R$) plutôt que le débit, et le nombre de *Goucher* $G_o = R/l_c$ plutôt que le rayon de la fibre.

Dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$, la courbe correspondant à l'équation (3.58) $\beta^*=1.507$ (courbe 2 Fig. 3.18) représente bien la transition entre régimes réguliers (croix) et régimes irréguliers (ronds) observée dans l'expérience. On a donc bien identifié une transition Absolu/Convectif. Les points indiqués ici correspondent à l'huile V50 (la transition obtenue pour l'huile V100 sera présentée à la section suivante). On observe aussi que l'équation (3.57) correspond à la limite faible épaisseur de la relation (3.58) comme l'indique la superposition de la courbe (courbe 1 Fig. 3.18) avec la courbe 2 aux faibles épaisseurs.

Il existe donc une gamme de valeurs de α_N pour lesquelles le mécanisme d'instabilité de Rayleigh-Plateau

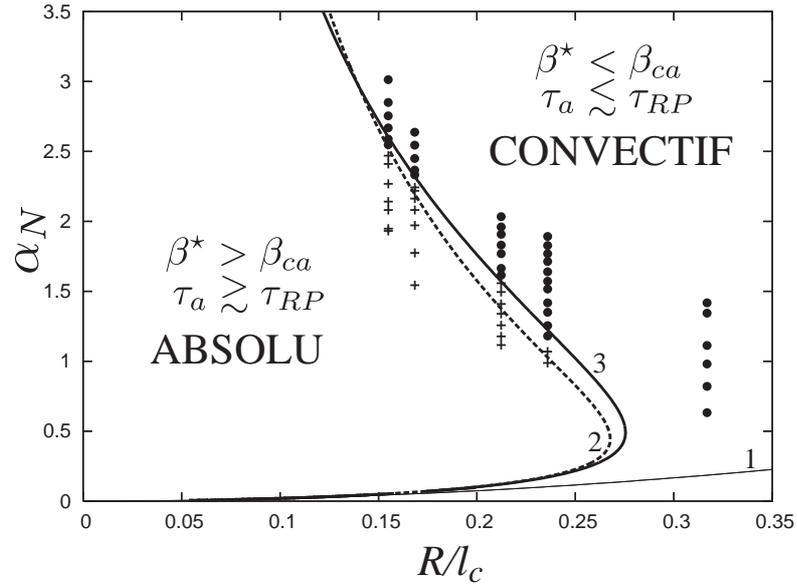


Fig. 3.18. Lieu de la transition entre instabilités convective et absolue en fonction du rapport de forme α_N et R/l_c ($\nu = 50 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$). Points expérimentaux pour de l'huile V50 : croix (régimes réguliers) et ronds (régimes irréguliers), relations (3.57) (pointillés, 2), (3.58) (fin 1) et solution des équations d'Orr-Sommerfeld (plein 3).

domine sur l'advection de ondes, l'instabilité étant alors absolue. La limite $\alpha_N \rightarrow 0$ de films minces devant le rayon de la fibre correspond au cas d'un film tombant le long d'un plan vertical pour lequel l'instabilité est toujours convective. A l'autre extrême, pour des films épais, i.e α_N grand, l'effet déstabilisant de la courbure azimutale $1/(R + h_N)$, moteur de l'instabilité de Rayleigh-Plateau, diminue. L'advection des ondes l'emporte alors sur l'instabilité et on est encore en régime convectif.

On observe de plus que la fonction $f_2(\alpha_N)$ admet un maximum. On calcule alors la dérivée $df_2/d\alpha_N$ qui s'annule pour $\alpha_N \simeq 0.49$, soit pour une valeur de $R/l_c = f_2(0.49) \simeq 0.28$. Ainsi, pour des fibres de grands rayons ($R > 0.28l_c$), le mécanisme de Rayleigh-Plateau est affaibli, on se rapproche du cas plan et l'instabilité est toujours convective. On peut revenir à la carte des régimes donnée par J. A. Tallmadge et D. A. White (96) et présentée en introduction. Rappelons que dans leur cas, une fibre est tirée d'un bain à vitesse constante. Ils indiquent ainsi, sans précisions, qu'il existe une zone où "des gouttes peuvent se former", à faible vitesse, c'est-à-dire faibles épaisseurs et lorsque $Go = R/l_c < 0.3$. On note une similitude entre la région absolue et cette région d'apparition de gouttes que l'on peut comprendre ainsi : dans cette région, l'instabilité est absolue, la croissance de l'instabilité l'emporte sur l'advection des ondes par l'écoulement. Ainsi, les gouttes ont le temps de croître. Hors de cette zone, l'écoulement l'emporte, les gouttes n'ont pas le temps de se former et le film reste d'épaisseur uniforme. Cette étude gagnerait à être menée finement, d'autant que l'enrobage de fibre par cette méthode permet d'accéder à des épaisseurs fines, et donc potentiellement d'observer la transition AC à faible épaisseur.

Nous avons pour finir comparé nos résultats aux solutions numériques des équations dites de Orr-Sommerfeld prenant en compte les effets inertiels. Cette analyse correspond à une étude de stabilité linéaire d'un écoulement parallèle visqueux $U(y)\vec{e}_x$. On considère des perturbations de vitesse bidimensionnelles

(u dans la direction de l'écoulement et v dans la direction transverse). On introduit alors la fonction de courant ψ de la perturbation de vitesse, définie par $u = \partial_y \psi$ et $v = -\partial_x \psi$. La linéarisation des équations du mouvement et une décomposition en modes normaux conduisent à l'équation d'Orr-Sommerfeld. Solorio et Sen (93) ont procédé à cette étude en coordonnées cylindriques, et aboutissent à l'équation suivante

$$[(c - u_x)(D^2 - k^2) + D^2 u_x] \psi = \frac{i}{kRe} (D^2 - k^2)^2 \psi, \quad (3.59)$$

où

$$D^2 = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right),$$

k est le nombre d'onde réel, c la vitesse complexe de l'onde Re le nombre de Reynolds et $u_x(r)$ la composante suivant x de la vitesse non perturbée du fluide. A cette équation se rajoute les conditions aux limites (non glissement sur la fibre, contrainte tangentielle nulle à l'interface et équilibre de la contrainte normale à l'interface). La solution de ces équations est obtenue numériquement à l'aide du logiciel AUTO 97 (ou plus récemment AUTO07p). Ce logiciel libre, développé par Doedel (21), est basé sur une méthode de continuation correcteur-prédicteur permettant de résoudre des équations différentielles. On cherche donc à résoudre une équation du type $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (les variables notées en gras correspondent à des vecteurs). On peut noter $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, \lambda)$. λ sera notre paramètre de continuation. On part alors d'une solution connue \mathbf{x}_0 (\mathbf{u}_0, λ_0) et on suit la branche de solution en faisant varier le paramètre de continuation λ , c'est-à-dire que l'on calcule la solution \mathbf{u}_1 à $\lambda_1 \equiv \lambda_0 + \Delta\lambda$. Pour résoudre l'équation $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \lambda_1) = \mathbf{0}$, on utilise la méthode de Newton en utilisant comme première approximation

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = \mathbf{u}_0 + \Delta\lambda \dot{\mathbf{u}}_0.$$

On procède alors à plusieurs itérations, en calculant à chaque pas ν

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1^{(\nu)}, \lambda_1) \Delta \mathbf{u}_1^{(\nu)} &= -\mathbf{G}(\mathbf{u}_1^{(\nu)}, \lambda_1), \\ \mathbf{u}_1^{(\nu+1)} &= \mathbf{u}_1^{(\nu)} + \Delta \mathbf{u}_1^{(\nu)}, \end{aligned}$$

pour $\nu=0,1,2,\dots$. Si le pas $\Delta\lambda$ est suffisamment petit, le calcul par la méthode de Newton converge et on peut alors calculer le nouveau vecteur $\dot{\mathbf{u}}_1$ en calculant $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1, \lambda_1) \dot{\mathbf{u}}_1 = -\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$. La méthode est bien détaillée dans le cours d'Eusebius Doedel (20) et j'en donne une interprétation graphique sur la figure 3.19.

Ici, on considère le vecteur $\mathbf{U} = \left[\psi, \frac{d\psi}{dr}, \frac{d^2\psi}{dr^2}, \frac{d^3\psi}{dr^3} \right]$ solution de l'équation (3.59) et de ses conditions aux limites. La solution est alors obtenue en initialisant le calcul à l'aide de la solution pour $k = 0$ qui peut être obtenue de manière analytique. On obtient ainsi la solution complète de l'analyse de stabilité linéaire, et on peut rechercher les valeurs des paramètres pour lesquels on a la transition AC ($\omega_{0,i}=0$). La courbe ainsi obtenue est présentée sur la figure 3.18 et est notée 3.

La prise en compte de l'inertie modifie légèrement le lieu de la transition, mais l'effet n'est pas très important ici ; la courbe $\beta^*=1.507$ se compare favorablement au résultat de l'analyse de stabilité à partir des équations d'Orr-Sommerfeld obtenu numériquement. Pour l'huile V50, la prise en compte de l'inertie permet de se rapprocher légèrement de la transition expérimentale. Pour des huiles plus visqueuses, l'effet est négligeable.

Comme nous l'avons précisé en introduction, il existe peu d'évidences expérimentales nettes d'une transition AC. Une telle transition a été observée très récemment pour des écoulements diphasiques en

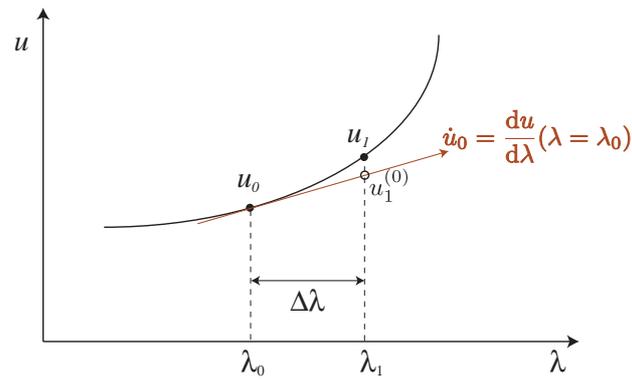


Fig. 3.19. Représentation graphique de la résolution numérique par continuation.

microfluidique (35) : un jet de rayon initial r_i^0 , de viscosité η_i est injecté à un débit Q_i dans un fluide de viscosité η_e s'écoulant à co-courant à un débit Q_e dans un capillaire de rayon R_c . Différentes situations sont alors observées ; soit un jet se forme, on observe des modulations advectées en aval mais le jet ne se brise pas (instabilité convective), soit on observe un goutte à goutte à la sortie de l'alimentation (instabilité absolue). La transition correspond à des jets qui restent uniforme sur une certaine distance puis se brisent en gouttes à une distance fixe bien définie de l'alimentation (régime "transitoire"). La transition est bien définie pour différents rapports de viscosité η_i/η_e et différents débits et est bien retrouvée par une analyse de stabilité linéaire. Cependant, ces différences goutte à goutte/jet sont délicates à faire ; de plus, le seuil est difficile à déterminer ; le régime transitoire (ou le jet se brise en gouttes après une certaine distance) correspond en fait à une instabilité absolue. Ainsi, sa détermination dépend fortement de la taille de la cellule... De même, une transition AC a pu être mise en évidence dans le cas de l'écoulement concentrique, cette fois de deux fluides miscibles (22). Cet écoulement est instable et le jet de fluide central (le cœur) se déforme. Les structures ainsi créées sont qualifiées de "champignons". Dans ce cas, les critères retenus pour discriminer expérimentalement entre les instabilités absolue et convective sont proches des critères que nous avons utilisés : le spectre de puissance des structures observées présente soit un pic fin (instabilité absolue) soit un pic large (instabilité convective). Ces mesures ont été couplées à des mesures de la "rapidité" de la croissance de l'instabilité : en régime absolu, l'instabilité apparaît rapidement (faible longueur d'apparition et fort taux de croissance), tandis qu'en régime convectif elle apparaît plus lentement. Ainsi, une carte des régimes en fonction des paramètres du système (le nombre de Re et le rayon initial R_i de l'écoulement central) a pu être établie, définissant une région de l'espace des paramètres dans laquelle l'instabilité était plutôt régulière et sa croissance rapide (région absolue), tandis que le reste de l'espace comprenait plutôt des régimes irréguliers à croissance lente. Cependant, la région ainsi définie ne comprend pas de frontières nettes.

Dans notre système, les deux types d'instabilité provoquent des comportements bien distincts : formation d'un train de gouttes régulier lorsque l'instabilité est absolue, et d'un train d'ondes irrégulier lorsque l'instabilité est convective. Cette transition expérimentale nette est en bon accord avec le résultat analytique d'une analyse de stabilité linéaire d'une équation modèle simple, ainsi qu'avec un calcul de temps caractéristiques qui permet de donner un sens physique à la transition. De plus, les solutions numériques de l'équation d'Orr-Sommerfeld sont aussi en bon accord avec les résultats expérimentaux et théoriques. On peut ainsi conclure que l'écoulement parallèle d'un film visqueux sur une fibre verticale est un système

ouvert idéal pour étudier ces instabilités, et présente une manifestation visuelle d'un phénomène présent dans de nombreux systèmes dissipatifs.

Comme noté au début du chapitre et présenté sur la figure 3.1 page 36, nous avons observé un deuxième type de transition au sein des régimes réguliers absolus, entre des régimes stables (régime **A**) et des régimes instables (régime **B**). Nous allons étudier cette transition en comparant de nouveau les deux mécanismes dominants, à savoir l'instabilité de Rayleigh-Plateau et l'écoulement.

3.3 Transition entre les régimes absolus stable/instable

On se place maintenant à petit rayon de fibre et à faible épaisseur, lorsque l'instabilité est absolue. Dans ce cas, des *modes globaux* avec une fréquence propre bien définie se développent sur la fibre. Si le développement de l'instabilité primaire est identique dans tous les cas (apparition d'un train d'ondes régulier à distance fixe de l'alimentation), nous avons noté une différence de comportement plus bas sur la fibre. En effet, à faible épaisseur (régime **A**), les modes globaux sont stables sur toute la fibre (Fig. 3.20). Pour des épaisseurs plus élevées (régime **B**), le train d'onde primaire se déstabilise sous l'effet d'instabilité secondaires conduisant à des coalescences de gouttes. On qualifie ces régimes de modes globaux instables. Pour déterminer cette transition précisément, comme nous l'avons fait pour la transition Absolu/Convectif, il conviendrait de faire une analyse de stabilité secondaire du train d'ondes primaire (analyse de Floquet) qui demande un effort mathématique considérable. Je me contenterai dans cette section de proposer une explication à cette transition en raisonnant sur les mécanismes physiques en jeu.

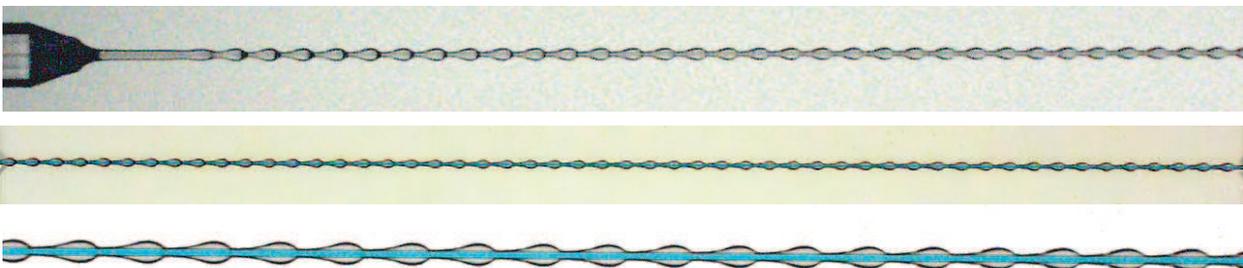


Fig. 3.20. *Colliers de perles... Modes globaux stables observés à faible épaisseur sur des fibres de rayons $R=0.2\text{ mm}$ et $R=0.23\text{ mm}$.*

3.3.1 Evidences expérimentales

Ainsi, à faible épaisseur, on peut observer un train de gouttes régulièrement espacées sur toute la longueur de la fibre, formant un "collier de perles" parfaitement stable (Fig. 3.20). On peut tout d'abord vérifier que ce régime ne résulte pas d'un mécanisme différent (un goutte-à-goutte par exemple) en observant les premiers centimètres de la fibre : si la longueur d'apparition des gouttes est faible (généralement de l'ordre du cm), il existe une distance finie sur laquelle le film reste d'épaisseur uniforme. Cette distance est suffisamment longue pour que puisse s'établir notre écoulement de base, l'écoulement de Nusselt. Des mesures

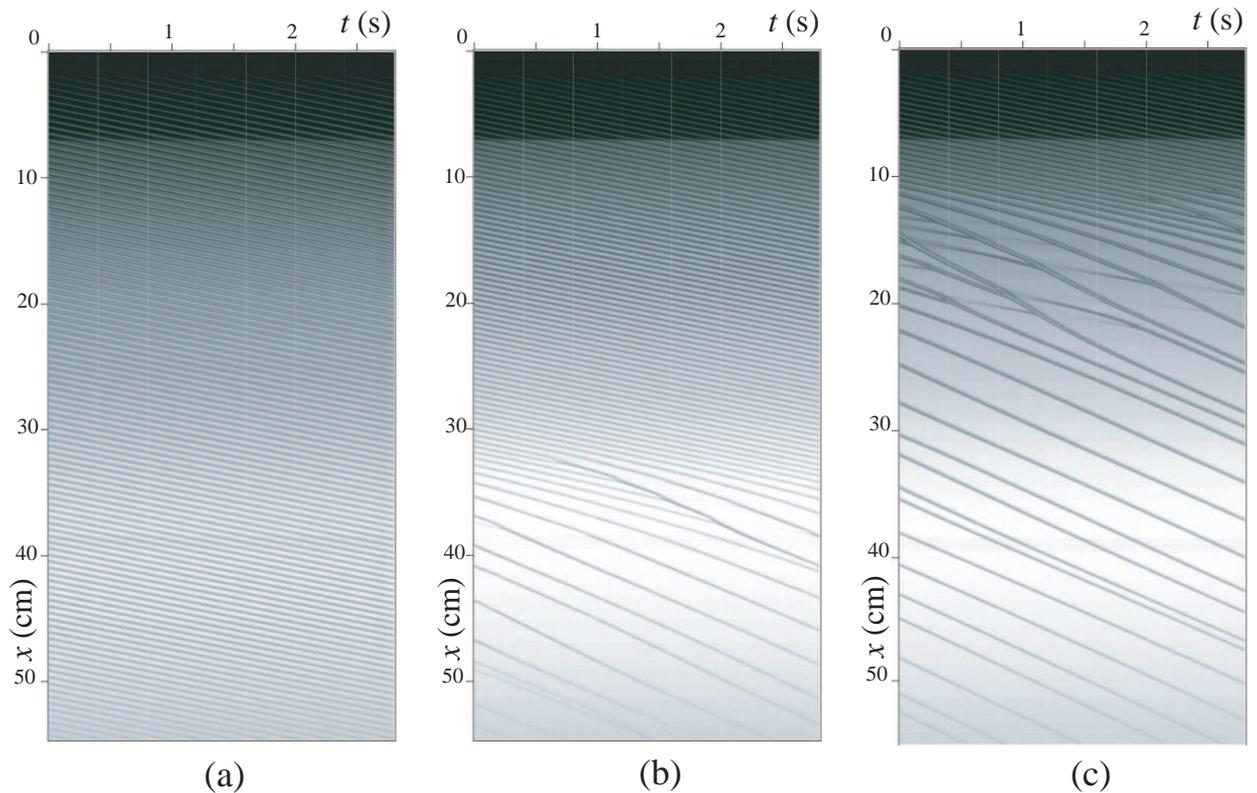


Fig. 3.21. Diagrammes spatio-temporels obtenus sur une fibre de rayon $R = 0.23$ mm, huile V100 pour (a) $h_N = 0.544$ mm, (b) $h_N = 0.547$ mm, (c) $h_N = 0.548$ mm.

de l'épaisseur en haut de la fibre en fonction du débit nous permettent bien de retrouver l'épaisseur de Nusselt h_N . Bien évidemment, notre fibre a une longueur finie, et rien n'indique que l'on n'observerait pas une déstabilisation du train d'ondes plus bas. Kliakhandler et al. (53) avait quant à lui observé ce phénomène sur plus de 2 mètres. Cependant, la transition entre régimes stables et instables est assez nette. Sur la figure 3.21, je présente des diagrammes spatio-temporels obtenus sur une fibre de rayon $R=0.23$ mm, en régime absolu et pour différentes épaisseurs. A faible épaisseur ($h_N=0.544$ mm), le train de goutte est stable sur au moins 1m50. En augmentant légèrement l'épaisseur ($h_N=0.547$ mm), le train d'onde se déstabilise spontanément à une distance de l'alimentation d'environ 30 cm. Ce changement de comportement brutal a été observé sur toutes les petites fibres étudiées ($0.175 < R < 0.25$). Pour des fibres de plus grand rayon, le mode stable n'a jamais été observé. En augmentant très légèrement à nouveau l'épaisseur ($h_N=0.548$ mm), la distance sur laquelle le train d'ondes est régulier diminue, et n'est plus que d'une dizaine de cm. Cette distance reste de cet ordre de grandeur pour tous les régimes absolus. Ainsi, on a bien une distinction nette entre modes globaux stables (MGs) et instables (MGi). On peut néanmoins chercher un critère quantitatif permettant de discriminer entre ces deux régimes.

On peut par exemple mesurer la fréquence du train d'ondes formé juste après le film uniforme (en $x \simeq 5$ cm) ; son évolution avec l'épaisseur initiale h_N est donnée sur la figure 3.22. La transition obtenue "visuellement" (apparition de la déstabilisation) est indiquée par une ligne pointillée. L'évolution de la fréquence est monotone, avec cependant une brisure de pente au moment de la transition : la fréquence augmente plus rapidement dans la partie stable.

Lorsque l'instabilité est absolue, et a fortiori lorsque l'on a un mode global stable, l'instabilité de Rayleigh-

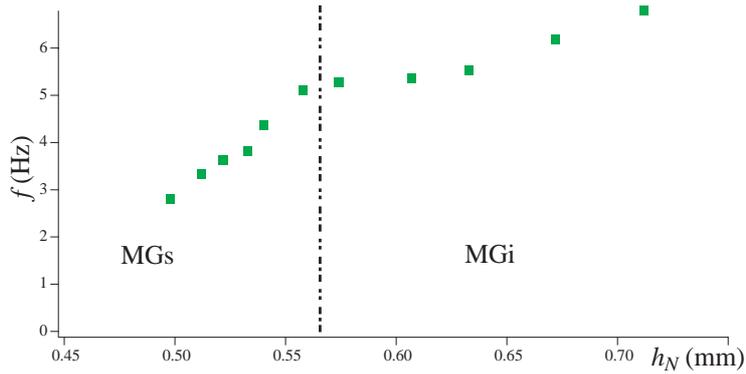


Fig. 3.22. Evolution de la fréquence mesurée à $x \approx 5$ cm avec l'épaisseur h_N sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm, huile V100.

Plateau domine. Nous avons mesuré la longueur d'onde du train d'ondes primaire en fonction de l'épaisseur h_N (Fig. 3.23). A faible épaisseur, cette longueur d'onde diminue contrairement à la longueur d'onde de Rayleigh-Plateau $\lambda_{RP} = 2\pi\sqrt{2}(R + h_N)$ qui elle augmente avec l'épaisseur, là où on s'attendait justement à la retrouver ! Dans un second temps, la longueur d'onde augmente, et son minimum correspond précisément au passage des modes stables aux modes instables. Il correspond de plus à $\lambda_{min} = 2\pi(R + h_N)$ qui est la longueur d'onde minimale (ou longueur d'onde de coupure) de l'instabilité de Rayleigh-Plateau lorsque $h_N \sim R$. Pour cette longueur d'onde, la plus petite que l'on peut atteindre, on observe un "empilement stérique" : les gouttes se touchent. Cette différence d'évolution de la longueur d'onde nous donne un critère pour différencier entre modes globaux stables et instables. On peut de plus noter que la longueur d'onde dans la partie stable ne dépend pas de la viscosité du fluide.

Un second critère peut être obtenu en mesurant la taille et la forme des gouttes formant le train d'ondes primaire. Je présente les valeurs mesurées pour $R=0.2$ mm et différentes viscosités sur la figure 3.24. Je vais ici comparer ces résultats à la forme d'"onduloïde" que prend une goutte posée sur une fibre. Les gouttes formées sont de diamètre constant dans les modes stables, puis leur diamètre augmente avec l'épaisseur dans le mode instable (Fig. 3.24). On peut noter que le diamètre des gouttes ($2h_{max} \approx 1.4$ mm) est de l'ordre de la longueur capillaire $l_c = 1.5$ mm. De plus, on observe que dans le régime stable, les gouttes ont toutes la même forme. Lorsqu'on augmente l'épaisseur, on change de régime et la forme des gouttes s'éloignent de la forme du régime stable (Fig. 3.24). Cette différence commence à être marquée à partir de $h_N=0.607$ mm, soit au milieu de la zone instable. Comme pour la longueur d'onde, il semble ici encore que la viscosité ne joue pas ou peu sur la forme des gouttes ; celle-ci doit simplement résulter d'un équilibre entre les deux courbures et ne dépend donc que de la tension de surface, les gouttes étant légèrement déformées par la gravité. Sans gravité, on peut calculer analytiquement la forme d'onduloïde que prend une goutte sur une fibre ainsi que son volume ; le calcul est détaillé dans l'annexe A. Pour un volume donné, on peut alors déterminer les couples (h_m, R) correspondants. On peut aussi calculer, pour un rayon de fibre R donné, le volume de la goutte Ω en fonction de la hauteur h_m (voir Annexe A et E. Lorenceau et al. (66)). L'évolution du volume en fonction de l'épaisseur h_m est tracée sur la figure 3.25 pour les rayons des fibres que j'ai utilisées. On observe dans ce cas que lorsque le volume de la goutte devient important, $\Omega \propto h_m^3$: les gouttes sont homothétiques et adoptent une forme quasi sphérique. Pour des volumes plus faibles, la hauteur h_m tend vers un plateau ($h_m=R$) : les gouttes prennent une forme cylindrique. Nos valeurs de h_m , entre 0.6 et 1 mm, nous placent plutôt dans le cas de gouttes sphériques ou à la transition entre les deux régimes.

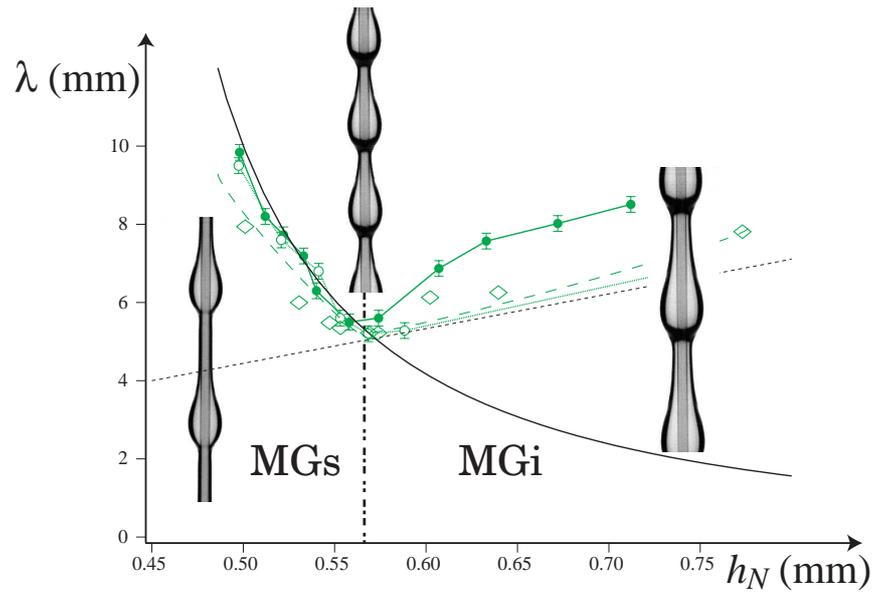


Fig. 3.23. Longueur d'onde mesurée à $x = 7$ cm en fonction de h_N et images de l'écoulement pour $R=0.2$ mm, \diamond V50, \bullet V100 et \circ V500. Les lignes vertes sont des guides pour les yeux. La ligne pleine correspond à la loi (3.60), la ligne en pointillés noirs à la longueur d'onde minimale de Rayleigh-Plateau ($\lambda_{min} = 2\pi(R + h_N)$) et la ligne point-tiret noire à la transition entre les modes globaux stable (MGs) et instable (MGi) pour $h_N = 0.56$ mm.

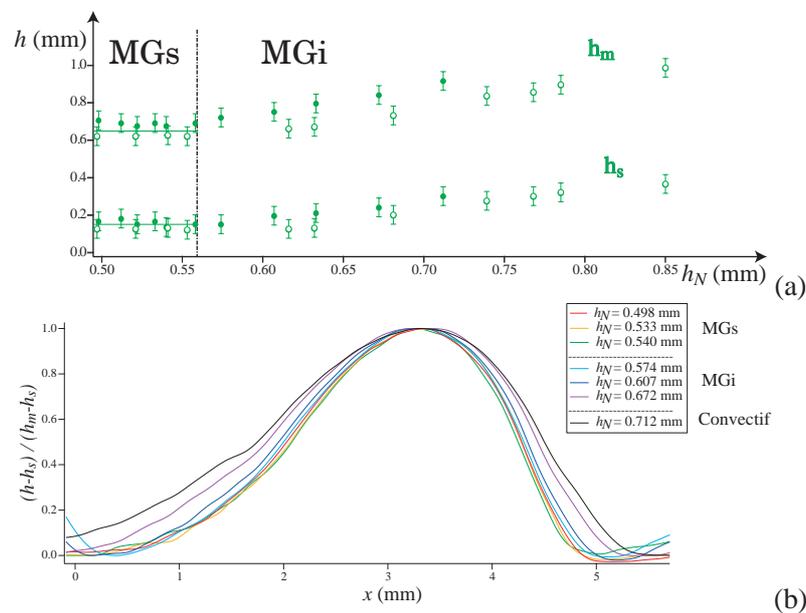


Fig. 3.24. (a) Taille maximale des gouttes h_m séparées d'un film plat d'épaisseur h_s pour $R=0.2$ mm, V500 (\circ) et V100 (\bullet). La ligne point-tiret $h_N = 0.56$ mm indique la transition entre les modes globaux stable (MGs) et instable (MGi). (b) Forme des gouttes normalisée pour différentes épaisseurs pour $R=0.2$ mm, V100.

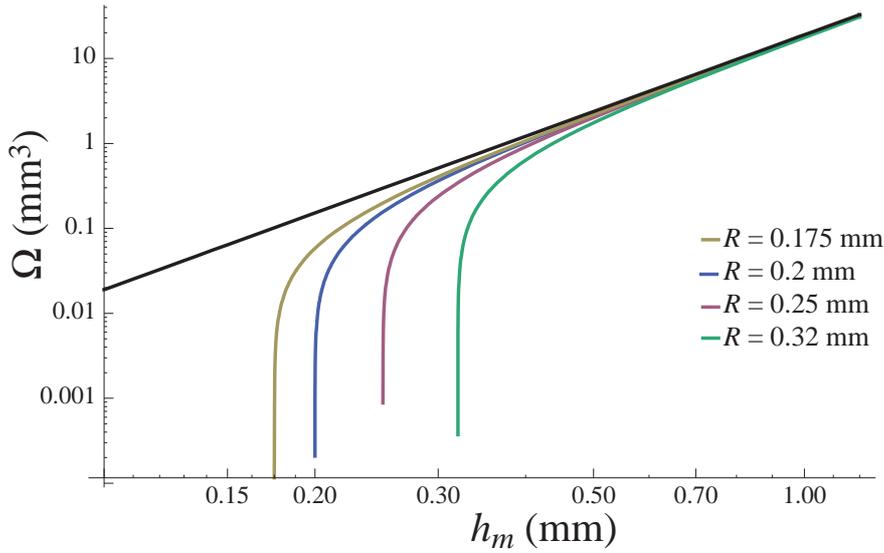


Fig. 3.25. Volume Ω des "onduloïdes" en fonction de l'épaisseur maximale de la goutte h_m pour les rayons de fibre étudiés, (courbe Log-Log). La ligne noire correspond à une droite de pente 3.

$h_m + h_s$ (mm)	Ω_{exp} (mm ³)	Ω_{sphere} (mm ³)	$\Omega_{onduloïde}$ (mm ³)
0.88	3.17	2.74	3.22
0.87	3.04	2.65	3.15
0.9	3.32	2.94	3.32

Tab. 3.1. Volume des gouttes obtenu expérimentalement, en les supposant sphériques ou en prenant la forme d'onduloïde pour des gouttes de différentes épaisseurs sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm.

Cette courbe nous donne de plus l'ordre de grandeur des volumes observés, à savoir $1 < \Omega < 10$ mm³. On peut ainsi comparer le volume des gouttes obtenues expérimentalement à ceux calculés en supposant que la goutte adopte une forme sphérique ou lorsqu'elle adopte la forme d'onduloïde. Quelques valeurs, obtenues dans le cas des modes globaux stables, sont présentées dans le tableau 3.1 pour des gouttes de différentes tailles h_m sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm. Le volume Ω de la goutte est déterminé expérimentalement en appliquant le théorème de Guldin (1635) : ce théorème permet de calculer le volume d'un objet de révolution en multipliant l'aire de l'objet (ici la goutte, dont on calcule l'aire en intégrant le profil) par la distance du centre de gravité à l'axe de révolution (ici l'axe de la fibre). En considérant la goutte comme une sphère, on sousestime le volume, avec une erreur d'environ 15 %. En revanche, le volume donné par le calcul en onduloïde donne une valeur très proche de la valeur obtenue expérimentalement tant que les gouttes restent de petite taille.

Le calcul précédent ne tient cependant pas compte de la présence d'un film uniforme plat entre les gouttes. Pour comparer les résultats expérimentaux aux profils calculés, on peut considérer que la goutte est posée, en mouillage total, sur un cylindre formé de la fibre et du film uniforme (cf Fig.3.26). La goutte "voit" alors une courbure $b = R + h_s$. On ajuste donc R ($\rightarrow R + h_s$) et h_m ($\rightarrow h_m + h_s$) pour calculer le profil théorique et le comparer aux expériences, comme présenté Fig. 3.27. On remarque que le profil théorique calculé sans gravité est proche du profil expérimental, sauf pour la légère dissymétrie à l'avant de la goutte (ou en

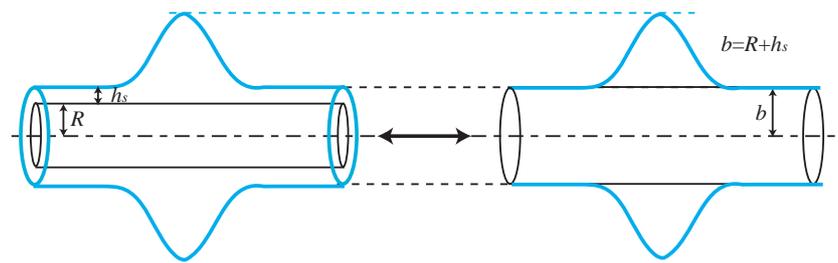


Fig. 3.26. Goutte posée sur un film plat d'épaisseur constante h_s .

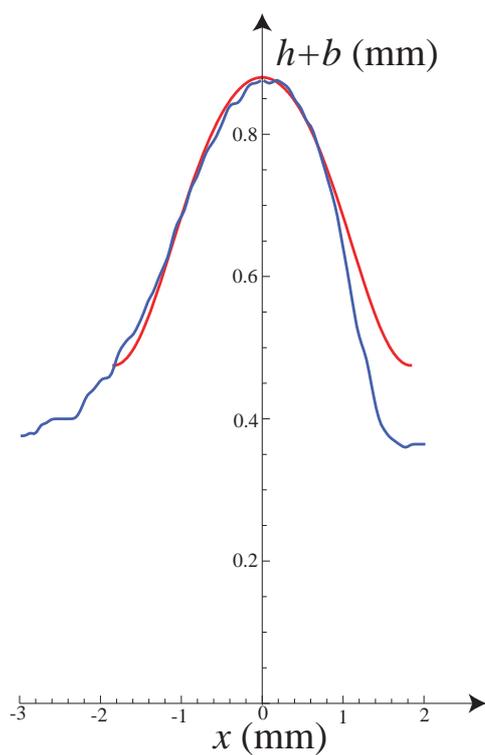


Fig. 3.27. Comparaison entre le profil d'une goutte sur une fibre horizontale calculé sans gravité (rouge) et profil expérimental (bleu) sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm pour une goutte en mode global stable.

bas) dû à la gravité. Sans faire le calcul avec gravité (dans ce cas, on ne peut obtenir de formule analytique (54; 55)), on peut en déduire que la forme des gouttes est assez bien gouvernée par la seule tension de surface ; la gravité la déforme seulement légèrement.

Tous ces comportements ont été observés pour les autres rayons de fibres étudiés ($R=0.25$ mm et $R=0.175$ mm). Pour étudier l'effet de la tension de surface, nous avons voulu tester un fluide de tension de surface différente mais de viscosité semblable. Pour cela, on utilise un mélange eau-glycérol à 80 % ($\gamma = 67$ mN/m, $l_c \approx 2.4$ mm). On n'observe jamais de régime stable, le train d'ondes se déstabilise toujours. Cependant, la déstabilisation est due au démouillage des gouttes, le fluide étant en mouillage partiel sur la fibre. Dans ce cas, les gouttes perdent rapidement leur axisymétrie et le film se brise. Ce phénomène sera notamment étudié au chapitre 6. La taille totale des gouttes est de l'ordre de $2h_{max} \approx 2.6$ mm ce qui est bien de l'ordre de l_c . On observe néanmoins un comportement similaire à celui de l'huile silicone pour la longueur d'onde, tracée en fonction de h_N sur la figure 3.28 pour une fibre de rayon $R=0.2$ mm. Celle-ci diminue jusqu'à une valeur proche de $\lambda = 2\pi(R + h_N)$ donnée par la ligne pointillée sur la figure. 3.28, puis réaugmente. On a cependant de grandes incertitudes, sur la longueur d'onde (le train d'ondes n'étant pas toujours régulier) et sur la valeur de h_N . De plus, la température variait durant les expériences, la viscosité du glycérol variant alors considérablement (de $\eta=60$ mPa.s à 20° à $\eta=33.9$ mPa.s à 30°). De la même manière, on a une incertitude non négligeable sur la masse volumique ρ . Ainsi, la valeur de h_N à laquelle la transition Stable/Instable a lieu n'est pas précise ; elle est cependant proche de la valeur obtenue pour l'huile silicone et on retrouve un comportement semblable.

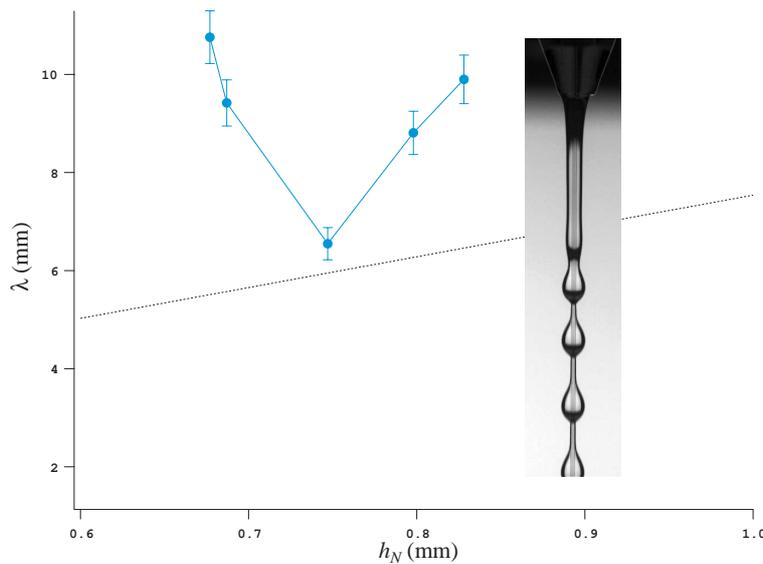


Fig. 3.28. Longueur d'onde pour un mélange eau-glycérol à 80%. Image de l'écoulement à la sortie de l'alimentation. Ligne pointillée : $\lambda = 2\pi(R + h_N)$.

3.3.2 Quand l'écoulement entre en jeu...

Nous allons dans un premier temps chercher à comprendre la diminution de la longueur d'onde avec h_N pour les modes globaux stables. Lorsque l'écoulement est stable, la longueur d'onde et la taille des gouttes semblent ne dépendre que de la tension de surface : seuls les effets capillaires entrent en jeu. On peut donc penser que seule l'instabilité de Rayleigh-Plateau joue dans cette gamme de paramètres, le film

R (mm)	h_{max} (mm)	h_{min} (mm)	A	A_{sph}	A_{ond}
0.2	0.68	0.16	0.5	0.42	0.58
0.25	0.65	0.16	0.38	0.37	0.41
0.175	0.6	0.1	0.4	0.29	0.52

Tab. 3.2. Taille des gouttes et constante A dans le régime MGs.

se brisant en un train d'ondes régulier dès sa sortie de la vanne, les gouttes se déplaçant ensuite sous l'effet de la gravité. On peut dans un premier temps comprendre la diminution de la longueur d'onde en faisant simplement une conservation du volume de fluide entre le cylindre de départ d'épaisseur h_N et les gouttes formées de volume Ω_g en supposant qu'il n'y a pas de film entre les gouttes. Sur une longueur d'onde λ , cette conservation s'écrit

$$\lambda(\pi(R + h_N)^2 - \pi R^2) = \Omega_g$$

soit

$$\lambda = \frac{\Omega_g/\pi}{h_N^2 + 2Rh_N} \quad (3.60)$$

Expérimentalement, comme le montre la figure. 3.23, on trouve bien dans le régime MG stable

$$\lambda = \frac{A}{h_N^2 + 2Rh_N}$$

où A est une constante numérique. Pour $R=0.2$ mm, l'ajustement des données expérimentales donne $A=0.5$. On peut calculer A ($A = \Omega_g/\pi$) en supposant une goutte sphérique ($\Omega_g = (4/3)\pi h_m^3$) ou une onduloïde (volume défini précédemment). Les résultats obtenus pour différentes fibres sont donnés dans le tableau 3.2. La constante A obtenue expérimentalement est comprise entre celle prédite dans le cas d'une goutte sphérique et celle prédite pour une onduloïde.

On peut alors comparer les résultats obtenus pour différents rayons de fibre, en traçant λ/A en fonction de $h_N^2 + 2Rh_N$ (Fig. 3.29(a)). On remarque que tous les points dans le régime stable se regroupent bien sur une seule courbe en $1/x$. On peut de plus représenter les données expérimentales sur la fréquence du train d'ondes primaire (Fig. 3.29(b)) : on observe le même comportement pour tous les rayons de fibre. La fréquence augmente fortement dans la partie stable car λ diminue rapidement, tandis que la vitesse c des ondes est constante (les gouttes étant identiques) et donc $f = c/\lambda$ augmente rapidement. Dans la partie instable, λ et c augmente, la fréquence augmentant alors un peu moins.

Ainsi, l'instabilité de Rayleigh-Plateau conduit à la formation de gouttes dont la forme est gouvernée par la tension de surface (avec une légère déformation due à la gravité). La longueur d'onde diminue jusqu'à arriver à λ_{min} , c'est-à-dire au moment où l'instabilité de Rayleigh-Plateau ne domine plus et l'écoulement entre en jeu. On peut donc raisonner de la même manière que pour la transition absolu/convectif et comparer les temps caractéristiques de croissance de l'instabilité τ_{RP} et d'advection des ondes par l'écoulement via le paramètre β^* défini au paragraphe précédent par

$$\beta^* \propto (\tau_a/\tau_{RP})^{(2/3)}.$$

Pour l'huile de viscosité V100, on présente le lieu de la transition MGs/MGi et celui de la transition absolu convectif AC dans le plan ($\alpha_N = h_N/R$, R/l_c) sur la figure 3.30. La transition AC correspond à $\beta^*=1.507$.

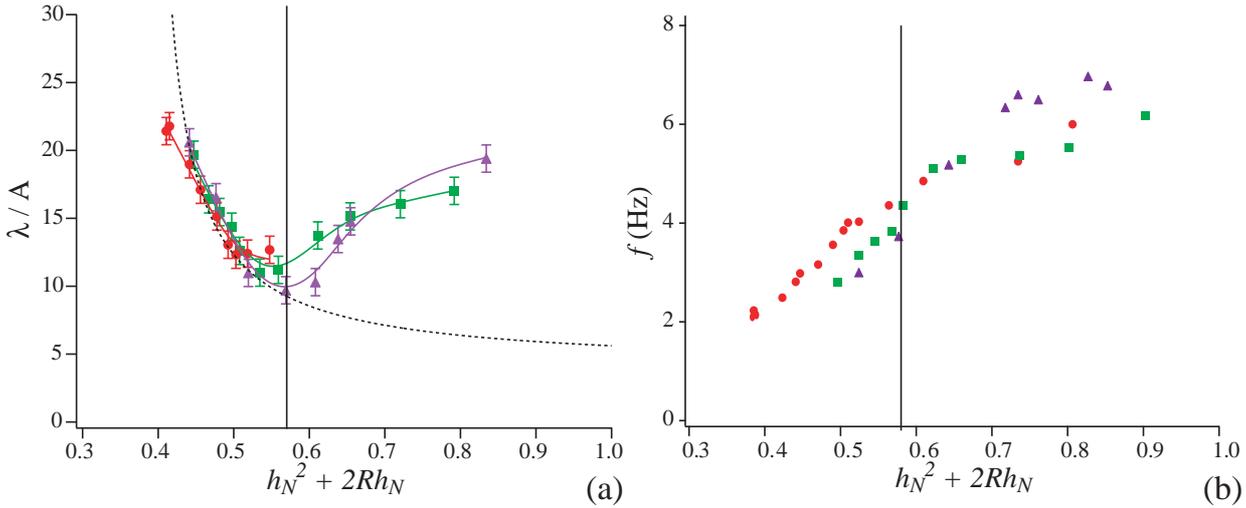


Fig. 3.29. (a) Longueur d'onde λ/A et (b) fréquence du train d'onde primaire en fonction de $h_N^2 + 2Rh_N$ pour (■) $R=0.2$ mm, (●) $R=0.25$ mm et (▲) $R=0.175$ mm. La ligne pointillée correspond à $1/(h_N^2 + 2Rh_N)$, la ligne noire verticale à la transition entre les modes globaux stable (MGs) et instable (MGi).

On a vu que $\beta^* > \beta_c$ correspondait à $\tau_a \gtrsim \tau_{RP}$. On ne peut déterminer précisément la valeur du rapport τ_{RP}/τ_a , les temps étant déterminés par une étude linéaire ; on ignore donc le préfacteur.

On calcule alors la valeur du paramètre β^* à la transition MGs/MGi obtenue expérimentalement pour différents rayons de fibre (cf Tab.3.3). On observe que celle-ci est quasiment constante $\beta^* = 1.64 \pm 0.05$ et on trace la courbe correspondante. Cette valeur de β^* correspond à un rapport τ_{RP}/τ_a inférieur au rapport obtenu à la transition AC.

R (mm)	Transition SI
0.175	$1.70 > \beta^* > 1.66$
0.2	$1.71 > \beta^* > 1.67$
0.23	$1.6 > \beta^* > 1.57$
0.25	$1.62 > \beta^* > 1.61$

Tab. 3.3. Valeur du paramètre β^* à la transition MGs/MGi pour l'huile V100.

La compétition entre les deux mécanismes (instabilité de Rayleigh-Plateau et écoulement) conduit donc à l'apparition de différents régimes dynamiques. La valeur du paramètre β^* comparant ces deux effets permet de discriminer entre les régimes, comme présenté sur la figure 3.31 :

- Lorsque $\beta^* > 1.64$, l'instabilité RP domine : on observe la formation de modes globaux stables le long de la fibre. Dans ce cas, on observe des gouttes quasi-symétriques dont la forme est donnée par la tension de surface et légèrement déformée par la gravité.
- Lorsque $1.64 > \beta^* > 1.507$, l'écoulement commence à jouer un rôle mais l'instabilité RP domine toujours : l'instabilité est toujours absolue mais les modes globaux sont instables, des coalescences successives désorganisent l'écoulement.

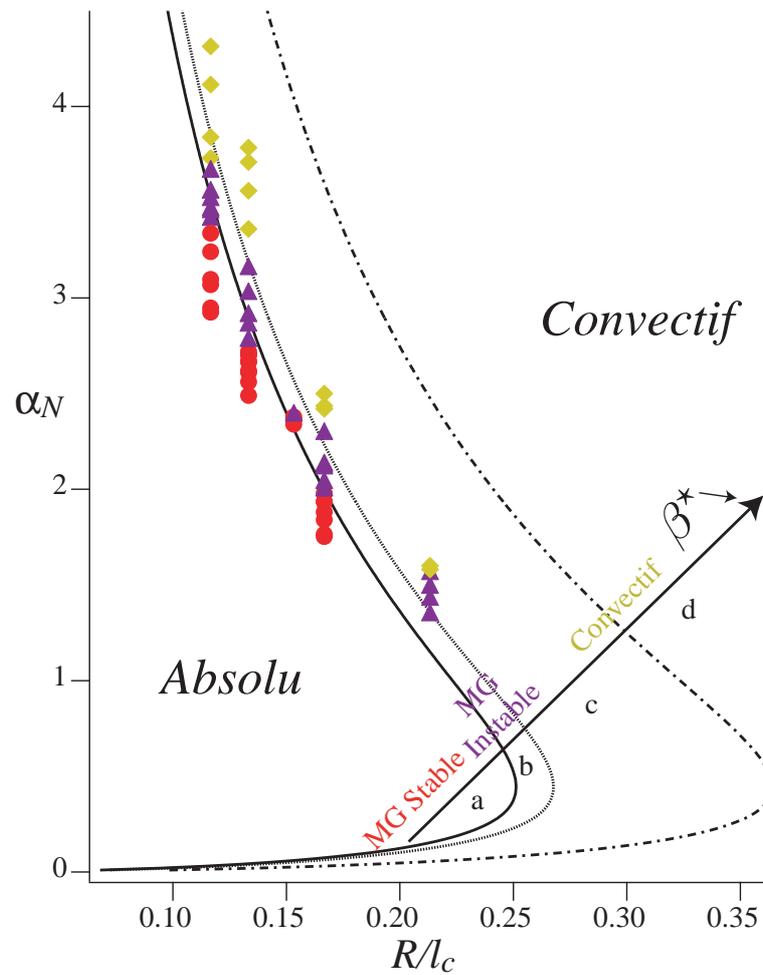


Fig. 3.30. Transitions entre les différents régimes pour la V100. Points expérimentaux : (●) MGs, (▲) MGi et (◇) convectif. Ligne continue : $\beta^* = 1.64$ (transition MGs/MGi); ligne pointillée : $\beta^* = 1.507$ (transition AC); ligne points-tirets : $\beta^* = 1$.

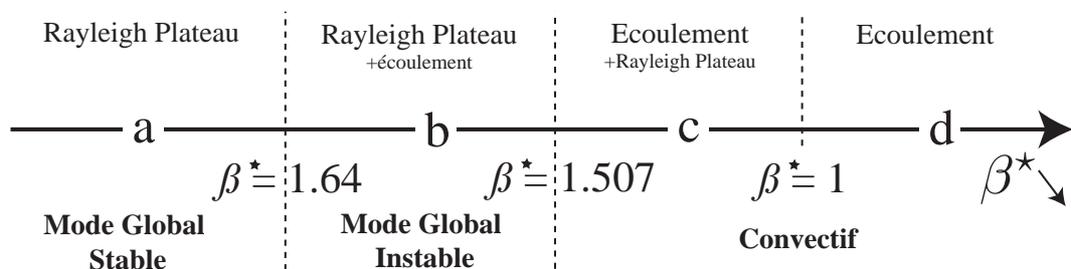


Fig. 3.31. Les différents régimes observés en fonction de l'importance relative des mécanismes (β^* décroissant).

- Pour $\beta^* < 1.507$, l'instabilité est convective, l'écoulement domine. Cependant, tant que $\beta^* > 1$, les effets de tension de surface continuent à jouer un rôle ; s'ils n'affectent pas la dynamique de l'écoulement, on s'attend à ce qu'ils jouent un rôle sur les caractéristiques des structures (gouttes) observées.

Notons que sur des fibres de grand rayon, lorsqu'on se rapproche du cas plan, on a $\beta^* \ll 1$.

Remarquons que la limite $\beta^* = 1.64$ est cohérente avec les observations de Kliakhandler (53) : il observe un mode global stable régulier (régime b) sur toute la hauteur de la fibre pour $\beta^* = 1.8 > 1.64$, et un régime irrégulier (régime a) pour $\beta^* = 1.56 < 1.64$.

3.4 Carte des régimes

Finalement, nos observations et l'analyse de stabilité linéaire présentées dans ce chapitre vont nous permettre de tracer une carte des régimes en fonction des paramètres pertinents du problème, à savoir le facteur de forme $\alpha_N = h_N/R$ et le rayon de la fibre comparé à la longueur capillaire R/l_c . L'écoulement va être caractérisé d'une part par l'importance relative du mécanisme d'instabilité de Rayleigh-Plateau, de l'advection des ondes par l'écoulement et du mécanisme de Kapitza.

Le paramètre

$$\beta^* = \left(\frac{\alpha_N}{c_k(1 + \alpha_N)^4} \right)^{2/3} \left(\frac{l_c}{R} \right)^{4/3}$$

mesure l'importance de l'instabilité de Rayleigh-Plateau (RP) par rapport à l'écoulement (l'advection à la vitesse c_k). Afin de comparer les autres effets (viscosité, gravité et inertie), nous allons nous inspirer du cas d'un film tombant sur un plan où les mêmes mécanismes interagissent. Pour le cas plan, on peut introduire un nombre de Reynolds réduit δ non trivial (94) qui compare le nombre de Reynolds classique $Re = u_N h_N / \nu$ (inertie/viscosité) au nombre W puissance 1/3. Le nombre W (inverse du nombre de Bond) compare la pression de Laplace γ/h_N à la contrainte sur la fibre τ_n , c'est-à-dire à la pression due aux frottements sur la fibre (effets de la viscosité et de la gravité) qui peut s'exprimer comme $\tau_n = \eta(\partial u/\partial r)(r = h_N) \sim \rho g h_N$. Ainsi, $W = \gamma/(\rho g h_N^2)$ (comme défini au chapitre 2) et

$$\delta = \frac{Re}{W^{1/3}}$$

On obtient le même résultat en suivant l'idée de Shkadov (92), qui fixe un rapport d'échelle κ déterminé en équilibrant la pression hydrostatique et le terme dominant de la pression de Laplace ($\kappa = [\gamma/(\rho g h_N^2)]^{1/3}$).

On a alors $\kappa = W^{1/3}$ et

$$\delta \equiv \frac{Re}{\kappa}$$

qui compare donc les effets de l'inertie et de la viscosité sur une échelle de longueur fixée par la tension de surface, la gravité et la viscosité. Ce nombre de Reynolds réduit peut s'écrire sous la forme

$$\delta = \left(\frac{l_c}{l_v} \right)^3 \left(\frac{R}{l_c} \right)^{11/3} \alpha_N^{11/3} \phi(\alpha_N)$$

où $l_v = (\nu^2/g)^{1/3}$ est une longueur qui compare les effets visqueux et les effets de la gravité (*viscous-gravity length*).

Ooshida Takeshi (94) a montré que dans le cas plan, $\delta \sim 1$ signalait la transition entre deux régimes : un régime où l'inertie et la tension de surface jouent uniquement un rôle perturbatif comparé aux effets du frottement visqueux et de la gravité (régime *drag-gravity* (DG), $\delta < 1$) et un régime où l'inertie domine

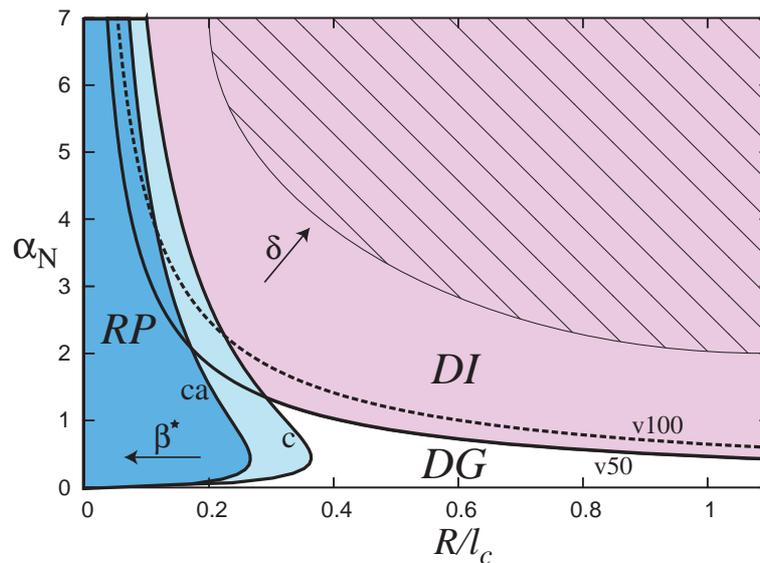


Fig. 3.32. Carte des régimes dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$ pour les huiles V50 et V100. Les courbes correspondent à $\beta^* = 1$ (c), $\beta^* = \beta_{ca}^* = 1.507$ (ca) et $\delta = 1$ (labels v50 et v100). La partie hachurée correspond aux épaisseurs importantes que l'on ne peut pas atteindre expérimentalement, et est donnée par $R + h_N \simeq l_c$. Les différentes régions sont précisées dans le texte.

(*drag-inertia* (DI), $\delta > 1$). Ooshida Takeshi (94) a établi cette distinction en observant la forme des ondes, plus exactement la pente de leur queue caractérisée par une longueur l_{tail} (la forme asymptotique de l'arrière de l'onde étant donnée par $e^{x/l_{tail}}$, ce qui sera précisé au chapitre suivant). Il y a alors un changement de comportement dans l'évolution de l_{tail} en fonction de δ signalant le passage du régime DG au régime DI. Il s'avère qu'à fort δ , l'inertie joue et il y a des changements de vitesse importants dans le fluide, conduisant à la formation d'ondes de grande amplitude, tandis qu'à petit δ , l'inertie ne joue pas et les accélérations et ralentissements de fluide dans l'onde sont faibles, les ondes restant de faible amplitude. Ainsi, la forme des ondes (et de leur queue l_{tail}) change.

La carte des régimes attendus est présentée sur la figure 3.32, sur laquelle on a tracé les courbes $\beta^* = 1$ (c), $\beta^* = \beta_{ca}^* = 1.507$ (ca) et $\delta = 1$ pour deux viscosités (v50 et v100). Cette délimitation, en utilisant les courbes $\beta^* = 1$ et $\delta = 1$ est purement indicative. Les transitions entre régimes DG et DI ou entre régimes de gouttes et régimes d'ondes devraient se produire pour $\beta^* = O(1)$ et $\delta = O(1)$.

La région du plan $(\alpha_N, R/l_c)$ située à gauche de la courbe (ca) et notée RP (bleu foncé) correspond donc à la formation d'un régime régulier (instabilité absolue) promu par l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Dans la région située entre les courbes (ca) et (c), l'instabilité est convective mais le mécanisme d'instabilité dominant reste l'instabilité de Rayleigh-Plateau (bleu clair). Dans ce régime, on observe des gouttes symétriques posées sur un film très mince (Fig. 3.33(a)) promues par la tension de surface. On parle de régime de gouttes (*drop like*).

La région située sous la courbe $\delta = 1$ et notée DG correspond au régime drag-gravity dans lequel l'écoulement (dû à un équilibre frottements visqueux/gravité) domine (blanc). Cet écoulement est faiblement affecté par les deux mécanismes d'instabilité (Rayleigh-Plateau et Kapitza). On observe alors la formation d'ondes d'amplitude modérée (Fig. 3.33(b)) et l'on parle de régime d'ondes (*wave like*). Lorsque $\delta \gg 1$ (rose), les effets inertiels dominent : on est encore dans le régime d'ondes mais on peut observer des ondes solitaires

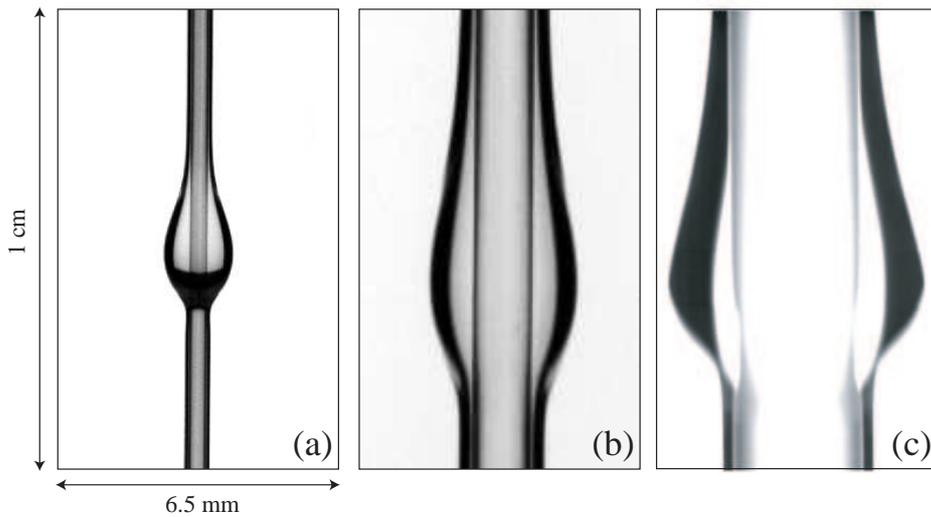


Fig. 3.33. Images des structures pour (a) : $R=0.2$ mm, (b) : $R=0.475$ mm et (c) : $R=1.5$ mm. Les trois images sont à la même échelle (10×6.5 mm).

d'amplitude importante avec un front très raide, semblables aux structures observées sur les plans inclinés (Fig. 3.33(c)). On peut noter que les transitions c et ca sont indépendantes des propriétés du fluide, tandis que la transition $\delta \sim 1$ varie légèrement en fonction de la viscosité du fluide.

On va donc explorer cette carte à l'aide de différents rayons de fibre. Les régimes où l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine sont observés pour les fibres de rayons $0.175 \text{ mm} < R < 0.36 \text{ mm}$. La fibre de rayon $R=0.475 \text{ mm}$ permet d'observer des régimes dans lesquels tous les mécanismes sont du même ordre. Enfin, la fibre de rayon $R=1.5 \text{ mm}$ nous donne accès aux régimes où l'écoulement est dominant et pour lesquels des effets inertiels apparaissent. Un des buts de cette étude est de déterminer des critères quantitatifs entre les différentes structures (gouttes et ondes) observées.

Au chapitre suivant, on s'intéressera aux régimes convectifs, en balayant la carte des régimes. On s'attachera peu à l'étude du régime DI, celui-ci étant plutôt attendu à grand rayon de fibre et grande épaisseur et se rapprochant donc du cas plan déjà bien étudié dans la littérature.

Chapitre 4

Quand l'écoulement domine...

On a montré au chapitre précédent qu'il existait une zone convective pour laquelle l'advection des ondes par l'écoulement l'emporte sur l'instabilité. Je me place ici dans ces régimes où le système se comporte comme un amplificateur de bruit. Dans ce cas, le film répond à toute excitation créée en entrée (bruit ambiant ou perturbation périodique). Dans un premier temps, je m'intéresse à la réponse du système à un bruit blanc (le bruit ambiant) en étudiant l'apparition de l'instabilité, c'est-à-dire en faisant une analyse de stabilité linéaire. Puis, j'étudierai la réponse à un forçage périodique, et montrerai que l'on peut alors synchroniser l'écoulement. Des ondes périodiques propagatives saturées appelées *travelling waves* sont alors observées ; j'étudierai leurs caractéristiques (forme, amplitude, vitesse) qui seront comparées aux solutions numériques de deux modèles. Dans tout ce chapitre, je veillerai aussi à explorer la carte des régimes définie au chapitre précédent afin de mettre en évidence les différentes structures observées et de trouver des critères quantitatifs permettant de discriminer entre ces structures. La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont reportés dans (27; 87; 88).

4.1 Positionnement dans la carte des régimes et modèles adéquats

Revenons tout d'abord à la carte des régimes définie au chapitre précédent, et reportée sur la figure 4.1.

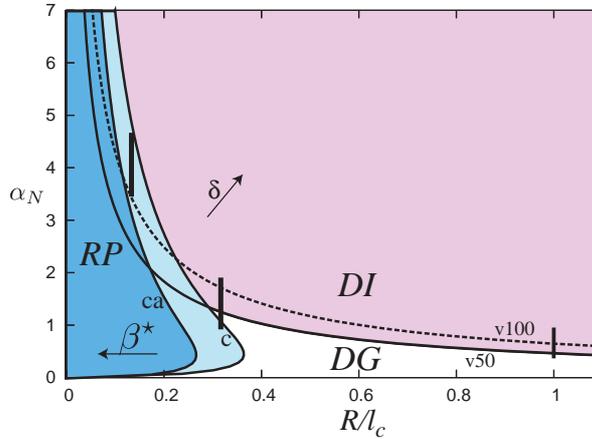


Fig. 4.1. Carte des régimes. Les segments verticaux correspondent aux gammes de paramètres principalement explorées dans cette section. Dans la zone bleue notée RP et délimitée par la frontière (c) $\beta^* = 1$, l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine. La zone bleue foncée, délimitée par la frontière (ca) $\beta^* = 1.507$, correspond à la région où l'instabilité est absolue. Dans la zone rose notée DI et délimitée par les frontières V50/V100 $\delta = 1$, l'inertie domine. La zone blanche notée DG correspond à la région où l'écoulement domine.

Nous allons explorer ce diagramme de phase dans la zone convective, c'est-à-dire à droite de la courbe $\beta^* = 1.507$ pour trois rayons différents :

- la fibre de rayon $R=0.2$ mm ($R/l_c=0.12$) correspond à un régime pour lequel l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine (régime de gouttes, zone bleue).
- la fibre de rayon $R=1.5$ mm ($R/l_c=1$) présente un régime pour lequel c'est l'instabilité de Kapitza (régime d'ondes, zone rose) qui est prédominante.
- la fibre de rayon $R=0.475$ mm ($R/l_c=0.32$) a été choisie afin d'étudier les effets combinés des deux mécanismes.

Les débits atteints (i.e. les épaisseurs, ou α_N) pour ces trois rayons de fibre sont présentées par des segments sur la figure 4.1. En fonction du régime, on pourra utiliser différents modèles théoriques. Je présente ici brièvement ces modèles. J'ai choisi l'adimensionnement de Shkadov présenté au chapitre précédent afin de faire apparaître les nombres sans dimension pertinents. Ainsi, pour des films minces tels que $\alpha_N \ll 1$, on obtient l'équation d'évolution présentée au chapitre 3, dérivée par Frenkel (30) et utilisée par Kalliadasis et Chang (46) :

$$\underbrace{\partial_t h + \partial_x \left(\frac{h^3}{3} \right)}_{\text{advection}} + \underbrace{\partial_x \left[\frac{h^3}{3} (\beta \partial_x h + \partial_{xxx} h) \right]}_{\text{courbure}} = 0. \quad (4.1)$$

On a les termes d'advection (proportionnel à $\partial_x h$) et de tension de surface via la courbure axiale ($\propto \partial_{xx} h$) et azimutale ($\propto \partial_{xxx} h$). On voit apparaître le nombre sans dimension $\beta = \alpha_N^{2/3} (l_c/R)^{4/3}$ défini au chapitre précédent qui compare les effets de la courbure axiale et de la courbure azimutale.

Dans les régimes convectifs, et pour nos expériences, on a plutôt $\alpha_N \sim 1$ et l'équation de Craster et Matar (CM) s'avère plus adaptée (18). Elle correspond à l'équation d'évolution dérivée au chapitre précédent lorsqu'on prend une expression approchée de la courbure (en supposant $\partial h/\partial x \ll 1$) et en négligeant les effets inertiels, soit

$$\partial_t \left(h + \frac{\alpha_N}{2} h^2 \right) + \underbrace{\partial_x \left[\frac{h^3 \phi(\alpha_N h)}{3 \phi(\alpha_N)} \right]}_{\text{advection}} + \underbrace{\partial_x \left[\frac{h^3 \phi(\alpha_N h)}{3 \phi(\alpha_N)} \left(\frac{\beta}{(1 + \alpha_N h)^2} \partial_x h + \partial_{xxx} h \right) \right]}_{\text{courbure}} = 0. \quad (4.2)$$

Rappelons que l'équation d'évolution CM peut être obtenue de deux manières différentes : soit en supposant de faibles modulations de l'interface (i.e. en faisant un développement faiblement non-linéaire $h = h_N + \tilde{h}$ au premier ordre en \tilde{h}), comme je l'ai fait (voir Chap. 3), soit en faisant un développement longues ondes (18). Pour cela, Craster et Matar ont introduit un petit paramètre $\epsilon = \rho g(R + h_N)^2/\gamma$ qui correspond à un nombre de Bond, et que l'on peut réécrire

$$\epsilon = Bo = \left(\frac{R + h_N}{l_c} \right)^2$$

Ainsi, faire un développement au premier ordre en ϵ revient à faire l'hypothèse que l'écoulement est dominé par la tension de surface et les effets de la courbure.

On s'attend donc à avoir un bon accord entre nos expériences et les résultats de l'équation CM dans les régimes de gouttes lorsque les effets de la tension de surface dominent sur les effets de l'inertie. De plus, un autre effet n'est pas pris en compte dans le modèle CM : il s'agit de la diffusion des contraintes visqueuses. Ainsi, si l'on veut prendre ces effets en compte, il faut se tourner vers un modèle plus complexe obtenu en moyennant les équations de Navier-Stokes sur l'épaisseur du film (modèle dit WRIBL décrit dans C. Ruyer-Quil et al. (87)). Ce modèle, développé initialement pour le cas plan (85; 86; 92; 16), se place dans l'hypothèse de lubrification en supposant des variations lentes dans la direction de l'écoulement ($\lambda \gg h_N$). On a une dynamique lente en temps et en espace et on peut définir un paramètre formel $\epsilon \sim \partial_{x,t}$ (appelé paramètre de film) tel que $\epsilon \ll 1$ (approche IBL pour integral boundary-layer). On se place en coordonnées cylindriques (voir schéma Chap.2). On fait alors un développement à l'ordre 2 en ϵ des équations de Navier-Stokes avec comme conditions aux limites : non glissement sur la fibre, équilibre des contraintes normales avec la pression induite par la tension de surface et annulation des contraintes tangentielles à l'interface, couplées à une condition cinématique à la surface libre. Ces équations et l'obtention du modèle sont détaillées dans C. Ruyer-Quil et al. (87), je me contenterai ici d'en donner les principales étapes. On obtient une équation pour le bilan de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement x qui s'écrit à l'ordre ϵ^2

$$\begin{aligned} & \delta \left(\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u \right) - \left[\partial_{yy} + \frac{\alpha h_N}{1 + \alpha h_N y} \partial_y + \frac{2}{\kappa^2} \partial_{xx} \right] u \\ & = \frac{1}{\phi \alpha h_N} \left\{ 1 + \partial_{xxx} h + \frac{\alpha h_N}{1 + \alpha h_N h} \partial_x h \left[\partial_{xx} h + \frac{\alpha h_N}{1 + \alpha h_N h} \left(\kappa^2 - \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 \right) \right] \right\} \\ & - \mu \partial_x \left[\partial_x u \Big|_h + 2 \partial_y v \Big|_h \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

où δ est le nombre de Reynolds réduit, κ le rapport d'échelles et ϕ une fonction de la géométrie définis au chapitre précédent et où l'on voit apparaître le paramètre $\mu = (h_N/l_c)^{4/3}$ devant le terme de diffusion visqueuse dans le sens de l'écoulement. Ce paramètre mesure l'effet de la viscosité sur la vitesse des ondes linéaires. On moyenne l'équation (4.3) sur l'épaisseur suivant la méthode des résidus pondérés ($\int_0^h (1 + \alpha y) W(y/h) dy$), où $W(y/h)$ est la fonction poids. On suppose alors que le profil de vitesse reste celui de la

solution de Nusselt pour un film uniforme, soit

$$u = \frac{3q}{h\phi(\alpha h)} f\left(\frac{y}{h}\right)$$

où

$$f(y/h) = -\frac{1}{4}(y/h)^2 - \frac{1}{2\alpha h}(y/h) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha h} + 1\right]^2 \ln(1 + \alpha h(y/h)).$$

On choisit un poids $W = f$ (ce qui correspond à la méthode de Galerkin) et on obtient finalement pour le bilan de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement

$$\begin{aligned} \delta\partial_t q = & \underbrace{\delta \left[-F(\alpha_N h) \frac{q}{h} \partial_x q + G(\alpha_N h) \frac{q^2}{h^2} \partial_x h \right]}_{\text{advection}} \\ & - \underbrace{\frac{I(\alpha_N h)}{\phi(\alpha_N)} \frac{3\phi(\alpha_N)}{\phi(\alpha_N h)} \frac{q}{h^2}}_{\text{friction}} + \underbrace{\frac{I(\alpha_N h)}{\phi(\alpha_N)} h}_{\text{gravite}} \\ & + \underbrace{\frac{I(\alpha_N h)}{\phi(\alpha_N)} h \left[\partial_{xxx} h + \frac{\beta}{(1 + \alpha_N h)^2} \partial_x h - \frac{\alpha_N \partial_x h \partial_{xx} h}{(1 + \alpha_N h)} + \frac{\alpha_N^2 \partial_x h^3}{2(1 + \alpha_N h)^2} \right]}_{\text{courbure}} \\ & + \underbrace{\mu \left[J(\alpha_N h) \frac{q}{h^2} (\partial_x h)^2 - K(\alpha_N h) \frac{\partial_x q \partial_x h}{h} - L(\alpha_N h) \frac{q}{h} \partial_{xx} h + M(\alpha_N h) \partial_{xx} q \right]}_{\text{diffusion visqueuse}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les coefficients de F à M sont détaillés dans (87). On a les termes d'advection (et d'inertie, caractérisée par le nombre de Reynolds réduit δ), friction pariétale, gravité, tension de surface (courbure) et diffusion visqueuse. L'équation (4.4) est couplée à l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t h(1 + \alpha_N h) + \partial_x q = 0 \quad (4.5)$$

On a donc deux équations couplées en épaisseur h et en débit q , qui se ramènent à l'équation d'évolution (4.2) lorsque l'on néglige les effets de l'inertie et de la diffusion visqueuse, c'est-à-dire lorsque $\delta = \mu = 0$. L'intérêt de ce modèle réside principalement dans la prise en compte des effets de la diffusion visqueuse, négligée jusque là, l'inertie ayant été prise en compte par Trifonov (99). Ces effets visqueux ont un effet dispersif sur les ondes linéaires, que l'on peut mettre en évidence en étudiant la relation de dispersion.

Relations de dispersion et effets de la diffusion visqueuse

Lorsque $\alpha_N \ll 1$, l'équation de Frenkel (4.1) conduit à la relation de dispersion (voir Chap.3)

$$\omega = k + i \frac{k^2}{3} (\beta - k^2) \quad (4.6)$$

Si l'on relaxe l'hypothèse de film mince et qu'on se place dans le cas où $h_N \sim R$, on obtient l'équation CM (4.2) qui conduit à la relation de dispersion

$$\omega = kc_k + i \frac{k^2}{3(1 + \alpha_N)} \left(\frac{\beta}{(1 + \alpha_N)^2} - k^2 \right) \quad (4.7)$$

La relation de dispersion obtenue à partir du modèle donné par les équations (4.4) et (4.5) s'écrit

$$\delta(1 + \alpha_N) \left[-\omega^2 + \frac{F}{3} \omega k \right] - k^2 \left[\delta \frac{G}{9} + \frac{\beta}{(1 + \alpha_N)^2} \frac{I}{\phi} \right] + k^4 \frac{I}{\phi} + i \left\{ 3(1 + \alpha_N) \frac{I}{\phi} [c_k k - \omega] + \mu k^2 \left[k \frac{L}{3} - \omega(1 + \alpha_N) M \right] \right\} = 0 \quad (4.8)$$

où ϕ , c_k et les coefficients de F à M sont des fonctions de α_N notées ainsi pour plus de clarté. Afin de mesurer les effets de la diffusion visqueuse seule, on considère la limite sans inertie ($\delta \rightarrow 0$) et la relation de dispersion obtenue à partir du modèle (4.4) et (4.5) devient

$$\omega = kc_k - \mu \Upsilon_\mu k^3 + \frac{ik^2}{3(1 + \alpha_N)} \left(\frac{\beta}{(1 + \alpha_N)^2} - k^2 \right) \quad (4.9)$$

où $\Upsilon_\mu = \phi[(1 + \alpha_N)Mc_k - L/3]/[3(1 + \alpha_N)I]$ est une fonction positive de α_N . On retrouve la relation de dispersion (4.7) à laquelle on a rajouté le terme de diffusion visqueuse $\mu \Upsilon_\mu k^3$. On voit alors bien que ces effets visqueux ont un effet dispersif sur les ondes, réduisant la vitesse des ondes linéaires de c_k à $c_k - \mu \Upsilon_\mu k^2$. Mais revenons à l'expérience.

4.2 Réponse à un bruit blanc

4.2.1 Observations

Lorsque l'instabilité est convective, toute perturbation créée à l'entrée du système (bruit blanc ou perturbations contrôlées) est amplifiée (de manière sélective) et se propage le long de la fibre. Dans un premier temps, on s'intéresse à la réponse du système à un bruit blanc, à savoir le bruit ambiant. Dans ce cas, on parle de réponse *naturelle* et l'évolution spatiotemporelle du film est représentée sur la figure 4.2. Le film

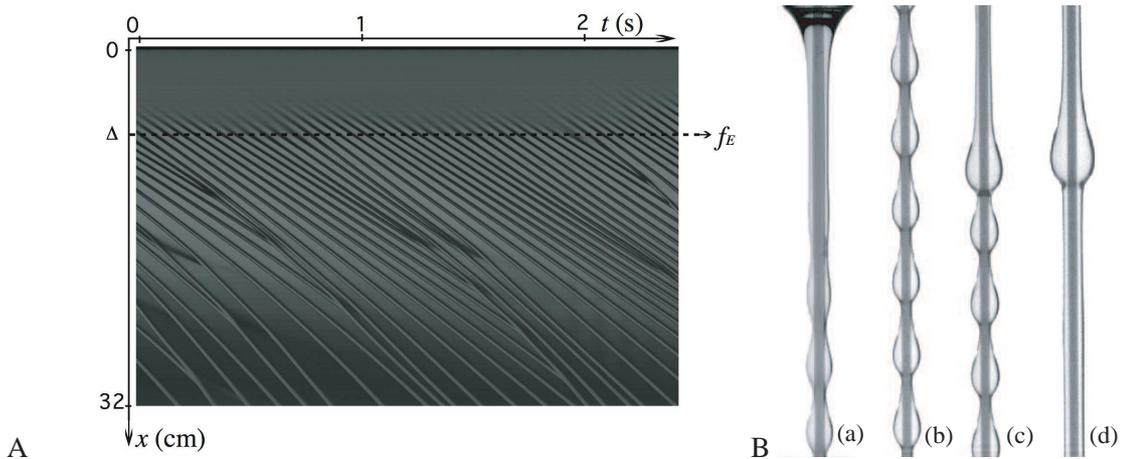


Fig. 4.2. A : Evolution spatiotemporelle naturelle (sans forçage) en haut de la fibre ($0 < x < 32$ cm) pour $R=0.475$ mm, $h_N=0.78$ mm ($Re=1.8$). B : Photos de l'écoulement pour un régime convectif à différentes hauteurs sur la fibre ((a)-(d) : de haut en bas).

reste uniforme sur une distance Δ , puis se déstabilise en un train d'ondes quasi-régulier à une fréquence (nombre de crêtes passant à une position x par unité de temps) $f(x = \Delta) = f_E$ (Fig. 4.2A,B(a)-(b)). L'évolution de la fréquence moyenne (obtenue avec la caméra linéaire suivant la procédure détaillée Annexe B) en fonction de la distance x à l'alimentation est donnée sur la figure 4.3. La fréquence est constante sur quelques centimètres (train d'ondes primaires régulier), puis le train d'ondes se déstabilise en aval sous l'effet d'instabilités secondaires qui conduisent à des coalescences et donc à une diminution de la fréquence. Les coalescences se traduisent pas des fusions de lignes sur le diagramme spatio-temporel et sont visualisées à l'aide de la caméra rapide (Fig. 4.2A, B(c)). Le motif régulier est remplacé par un régime désordonné comportant des ondes solitaires plus bas sur la fibre (Fig. 4.2B(d)), c'est-à-dire des ondes très distantes les

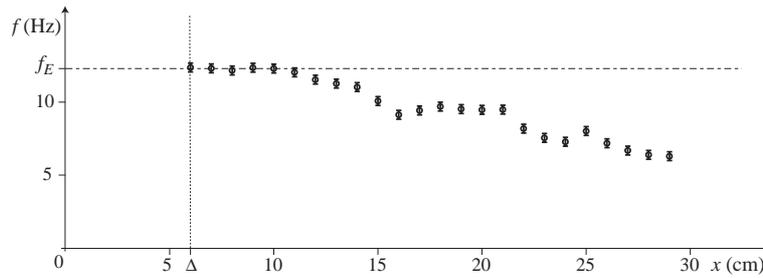


Fig. 4.3. Evolution de la fréquence f avec la distance x sans forçage pour $R=0.475$ mm, $h_N=0.78$ mm ($Re=1.8$)

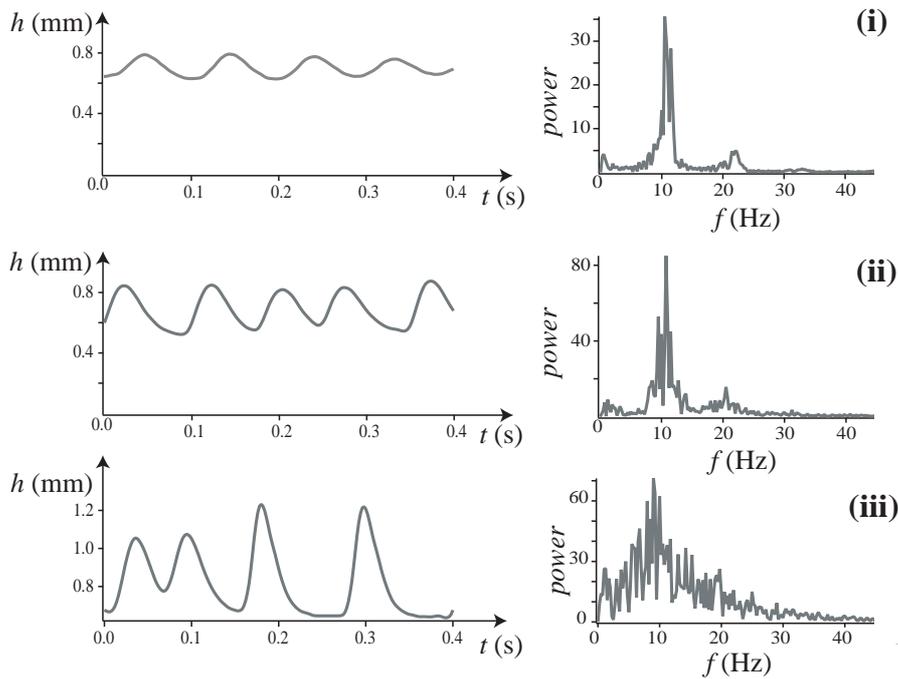


Fig. 4.4. Evolution de l'épaisseur pour $R=1.5$ mm, $h_N=0.8$ mm, sans forçage, à (i) $x = 8$ cm, (ii) $x = 30$ cm et (iii) $x = 45$ cm ; spectres temporels correspondants.

unes des autres et séparées par un film plat. A partir d'une certaine distance sur la fibre (typiquement 80 cm), on n'observe plus de coalescences et dans certains cas les ondes se réorganisent via des interactions complexes qui seront étudiées au chapitre suivant.

L'évolution de l'épaisseur $h(t)$ à différentes positions x est donnée sur la figure 4.4. Au niveau de la longueur d'apparition Δ , les ondes primaires sont quasiment sinusoïdales (Figs. 4.4(i)). Le spectre présente un pic centré sur f_E avec toutefois un niveau de bruit assez important. En aval, les ondes sont amplifiées et le pic de fréquence s'élargit ; rapidement, on arrive à un régime désordonné (Fig. 4.4(ii),(iii)). Finalement, on observe des ondes solitaires de grande amplitude avec un front raide, séparées d'un film plat (Figs. 4.4(iii)). Dans ce chapitre, je m'intéresse principalement à l'instabilité primaire de l'écoulement (la déstabilisation du train d'ondes primaire, i.e. les interactions entre ondes, sera étudiée au chapitre suivant). Je montrerai de plus que l'écoulement peut être synchronisé à l'aide d'un forçage en entrée. Ainsi, on peut obtenir des ondes propagatives périodiques et les caractériser en fonction des différents paramètres de l'expérience.

4.2.2 Analyse de stabilité linéaire

Les observations précédentes nous indiquent que l'écoulement amplifie de manière sélective les perturbations à l'entrée : alors que le bruit ambiant est un bruit blanc (il contient une large gamme de fréquences), le système répond à une fréquence définie f_E . Nous allons donc faire une analyse de stabilité linéaire du modèle WRIBL. On procède à une étude spatiale en supposant une petite perturbation à l'écoulement de base de Nusselt telle que, sous forme adimensionnée, $h = 1 + \varepsilon \tilde{h} \exp[i(kx - \omega t)]$ et $q = 1/3 + \varepsilon \tilde{q} \exp[i(kx - \omega t)]$, où $k = k_r + ik_i$ est complexe, ω est réel (analyse spatiale) et $\varepsilon \ll 1$. On obtient alors la relation de dispersion (4.8). On peut donc tracer le taux de croissance spatiale $\sigma = -k_i$ en fonction de la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ réelle (Fig. 4.5). Ce taux de croissance est comparé à celui obtenu avec l'analyse de stabilité linéaire des équations de Navier-Stokes (analyse d'Orr-Sommerfeld) avec un bon accord (cette analyse en géométrie cylindrique, prenant compte de l'inertie, est donnée dans Solorio et Sen (93)).

Le taux de croissance est maximal pour la fréquence f_M et f_C correspond à la fréquence pour laquelle le

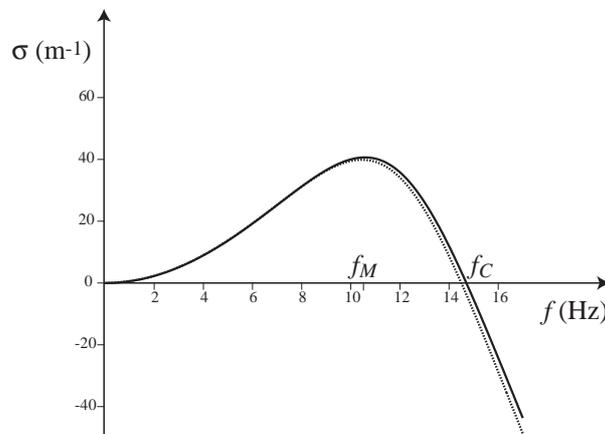


Fig. 4.5. Taux de croissance pour $R=1.5 \text{ mm}$, $h_N=0.87 \text{ mm}$ ($Re=1.4$). Ligne continue : solution des équations d'Orr-Sommerfeld. Ligne pointillée : solution du modèle WRIBL.

taux de croissance est nul. Pour $0 < f < f_c$, le taux de croissance spatial est positif et le système est donc instable. Pour $f > f_c$, le taux de croissance est négatif, le système est alors stable. Dans notre étude, il existe différents mécanismes déstabilisants :

- la tension de surface via la courbure axiale
- l'inertie

Il existe aussi des mécanismes stabilisants :

- la tension de surface via la courbure azimutale qui est stabilisante pour les ondes courtes (haute fréquence)
- la viscosité (diffusion de la quantité de mouvement) qui permet à un élément de fluide écarté de sa position d'équilibre de se mettre en équilibre de vitesse, par frottement visqueux, avec le fluide environnant.

On comprend donc que les ondes longues vont être amplifiées et les ondes courtes amorties par la tension de surface. La viscosité, stabilisante, diminue la gamme de nombres d'onde instables, tandis que l'inertie déstabilisante l'augmente. Dans tous les cas il existe une fréquence de coupure au-delà de laquelle le système est stable à cause du caractère stabilisant de la tension de surface. La forme du taux de croissance est similaire à celle trouvée au chapitre 3 et est donnée par la tension de surface via la courbure axiale

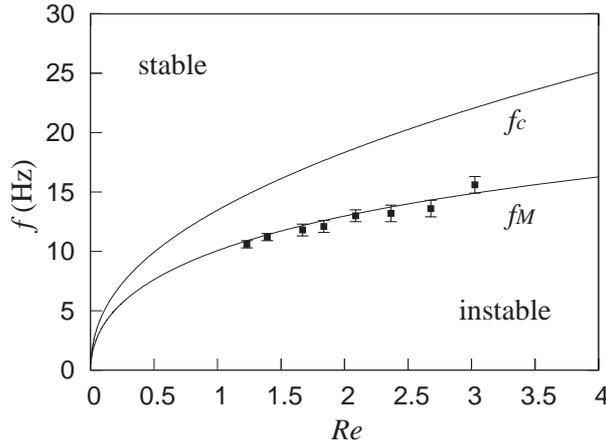


Fig. 4.6. Fréquences maximale f_M et de coupure f_c pour $R=0.475$ mm. Lignes : solutions des équations d'Orr-Sommerfeld. Points : fréquence expérimentale f_E du train d'ondes primaire.

aux basses fréquences (terme en $\partial_{xx}h$, soit en k^2) et par la tension de surface via la courbure azimutale qui domine pour les ondes courtes aux hautes fréquences (terme en $\partial_{xxx}h$, soit en $-k^4$).

On peut déterminer f_M et f_C en fonction de paramètres de l'expérience numériquement avec le logiciel AUTO. En effet, au maximum du taux de croissance, $\partial(-k_i)/\partial k_r = 0$ et k_i est constant. Ainsi la vitesse de groupe s'écrit :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial\omega}{\partial k_r}$$

On a donc $v_g \in \mathbf{R}$ car ω est réel. On part donc de la branche $k = 0$ et on met la partie imaginaire de la vitesse de groupe v_{gi} à 0. On suit alors la branche en augmentant h_N pour obtenir $f_M(Re)$. On cherche alors les solutions correspondant à $k_i = 0$ pour obtenir $f_C(Re)$. L'évolution de f_M et f_C avec le nombre de Reynolds est donnée sur la figure 4.6.

On observe que la gamme de fréquences instables augmente lorsque Re augmente, c'est-à-dire lorsque les effets de l'inertie augmente et que ceux de la viscosité diminuent. Les valeurs expérimentales de la fréquence du train d'ondes primaire f_E sont en excellent accord avec la valeur de f_M obtenue par l'analyse de stabilité linéaire. La fréquence de coupure expérimentale sera déterminée au paragraphe suivant grâce au dispositif de forçage.

L'étude de stabilité linéaire nous donne donc un bon accord avec les résultats expérimentaux. On va maintenant se concentrer sur l'évolution spatiale du train d'ondes le long de la fibre en étudiant la réponse à un forçage.

4.3 Réponse à une perturbation périodique

Le système se comportant comme un amplificateur de bruit, toute perturbation créée en entrée va être amplifiée et l'écoulement peut alors être synchronisé. Je présente dans cette partie l'évolution non-linéaire du train d'ondes alors créé. Rappelons que le forçage est obtenu en imposant des perturbations de pression dans le réservoir supérieur à l'aide d'un vibreur.

4.3.1 Evolution spatiale

En fonction de la fréquence de forçage f_{for} , quatre types de réponses sont observées.

- Lorsque l'on force à une fréquence proche de la fréquence f_M prédite par l'analyse de stabilité linéaire, le système répond précisément à la fréquence de forçage et le train d'ondes est régulier sur toute la longueur de la fibre (Fig. 4.7(a)). L'évolution de l'épaisseur en fonction du temps est enregistrée à trois positions le long de la fibre ($x=8, 18$ et 30 cm). Le signal en entrée de la fibre ($x=8$ cm) est quasi-sinusoidal et le spectre révèle un pic bien défini à f_{for} et quelques harmoniques faiblement amplifiées. On observe une légère redistribution de l'énergie entre la fréquence de forçage et ses harmoniques, en faveur de la fréquence de forçage ($x=18$ cm). Plus bas en aval ($x=30$ cm), les ondes saturent ; ce mécanisme non-linéaire conduit à l'apparition d'harmoniques dans le signal. L'évolution de la fréquence moyenne en fonction de la position x est donnée sur la figure 4.8 et est obtenue en suivant la procédure habituelle (Annexe 2). Généralement, le signal reste parfaitement périodique tout le long de la fibre. Cependant, il arrive que le signal se déstabilise légèrement, comme en témoignent l'élargissement des pics dans le spectre et la légère déstabilisation observée à $x \approx 30$ cm sur la Fig. 4.7(a) et la légère diminution de la fréquence sur la figure 4.8 car le bruit ambiant, quoique faible, est aussi amplifié par l'écoulement.
- On observe un deuxième type de réponse lorsque l'on force à une fréquence plus petite que f_M . Dans ce cas, le système a besoin de plusieurs étapes avant de répondre à la fréquence de forçage. Un exemple de réponse en deux étapes est donné Fig. 4.7(b). On force alors à une fréquence $f_{for} \approx f_M/2$. Le système répond d'abord à l'harmonique $2f_{for}$ avec un signal périodique quasi sinusoidal ($x=8$ cm). En se propageant le long de la fibre, les ondes croissent et le signal s'éloigne de la forme sinusoidale et contient plus d'harmoniques ($x=18$ cm). La seconde étape consiste en une suite de coalescences qui se produit à distance fixe de l'alimentation ($x \approx 23$ cm) de manière périodique de façon à former un train d'ondes périodiques à la fréquence f_{for} . L'évolution de la fréquence moyenne présentée Fig. 4.8 montre ce passage rapide d'un train d'ondes régulier à $2f_{for}=10$ Hz à un train d'ondes régulier à $f_{for}=5$ Hz. En bas de la fibre ($x=30$ cm), on observe la formation d'ondes saturées séparées par un film plat. Le signal contient de nombreuses harmoniques ; on a alors un train d'ondes fortement non-linéaire. Les deux étapes conduisant à la formation du train d'ondes stationnaires sont donc un transfert d'énergie de $2f_{for}$ à f_{for} (coalescence) puis un phénomène de saturation non-linéaire. Un exemple de réponse en trois étapes est donné Fig. 4.7(c). On force alors à une fréquence $f_{for} \approx f_M/3$. Le système répond d'abord à l'harmonique $3f_{for}$ ($x=8$ cm). Ce signal est fortement modulé, avec deux enveloppes à f_{for} et $2f_{for}$ (comme en témoignent les deux pics correspondants dans le spectre). Une première série de coalescences se produit à $x \approx 10$ cm, conduisant à un train d'ondes périodique à $2f_{for}$ ($x=18$ cm). L'étude du spectre à différentes positions révèle que le pic à $3f_{for}$

diminue tandis que le pic à $2f_{for}$ augmente : il y a un transfert d'énergie entre les harmoniques. Un même transfert est observé plus bas sur la fibre : le pic à $2f_{for}$ diminue tandis que le pic à f_{for} augmente. Une autre série de coalescences se produit à $x \simeq 19$ cm. Les ondes émergeant de cette dernière coalescence saturent à $x \sim 30$ cm pour former un train fortement non-linéaire d'ondes périodiques séparées d'un film plat. L'évolution de la fréquence moyenne présentée Fig. 4.8 montre le passage rapide d'un train d'ondes régulier à $3f_{for}=15$ Hz à un train d'ondes régulier à $2f_{for}=10$ Hz, puis à $f_{for}=5$ Hz. Notons la difficulté de forcer à plus basse fréquence, due aux limitations de notre système de forçage (une partie du signal étant amortie par la vanne d'entrée) et à la faible amplification des basses fréquences par le système.

- Finalement, on observe un dernier type de réponse pour des fréquences de forçage supérieures à f_M lorsqu'on se rapproche de la fréquence de coupure prédite par l'analyse de stabilité linéaire f_c . Expérimentalement, on définit la fréquence de coupure f_{ce} comme la fréquence à laquelle le système ne répond plus au forçage. Les résultats sont présentés sur la figure 4.9. Lorsque $f_{for} \lesssim f_{ce}$, l'écoulement commence à répondre sur quelques centimètres mais recouvre rapidement son évolution naturelle : le train d'ondes se déstabilise et la fréquence diminue. Lorsque $f_{for} \gtrsim f_{ce}$, le système ne répond plus au forçage : le train d'ondes généré à f_{for} est immédiatement amorti et le système se comporte comme en absence de forçage : la longueur d'apparition Δ fluctue au cours du temps et le train d'ondes primaire présente un pic large à f_M . L'évolution de la fréquence moyenne en fonction de la position sur la fibre montre que la dynamique est la même sans et avec forçage $> f_{ce}$; de plus, statistiquement (rappelons que chaque point représente le nombre moyen de crêtes passant en une position x sur une centaine de crêtes) la dynamique de déstabilisation est la même avec ou sans forçage. Pour l'exemple donné Fig. 4.9, le système répond à la fréquence $f_{for}=17.5$ Hz mais plus pour $f_{for}=18.5$ Hz. On en déduit donc $f_{ce} = 18 \pm 1$ Hz. Cette figure nous permet aussi de vérifier, comme nous l'avions remarqué au chapitre 2, que l'amplitude des fluctuations d'épaisseur en haut de la fibre est plus importante lorsqu'on force (Fig. 4.9(b)) qu'en présence du seul bruit blanc (Fig. 4.9(a)) : en effet, les ondes apparaissent bien plus tôt sur la fibre. Finalement, on compare la valeur f_{ce} obtenue expérimentalement à la valeur prédite par l'analyse de stabilité linéaire (Fig. 4.10(a)) à partir des équations d'Orr-Sommerfeld. On a encore un très bon accord.

On peut aussi obtenir f_M de manière analytique avec la relation de dispersion obtenue à partir de l'équation d'évolution (4.2) dérivée au chapitre suivant

$$\omega = u_k k + i \frac{\gamma R}{3\eta(R + h_N)} h_N^3 \phi(\alpha_N) k^2 \left(\frac{1}{(R + h_N)^2} - k^2 \right) \quad (4.10)$$

qui nous donne donc

$$\begin{aligned} f_M &= \frac{k_M u_k}{2\pi} \\ &= \frac{gR}{4\sqrt{2}\pi\nu} \frac{-\alpha_N(2 - \alpha_N) + 2(1 + \alpha_N)^2 \ln(1 + \alpha_N)}{1 + \alpha_N} \end{aligned} \quad (4.11)$$

où k_M est le taux de croissance maximal et u_k la vitesse des ondes. On peut alors calculer $f_c = 1/k_c$ soit $f_c = \sqrt{2}f_M$ (car $k_c = \sqrt{2}k_M$). Si l'on réécrit ces formules en fonction du nombre de Reynolds $Re = gh_N^3/\nu^2$,

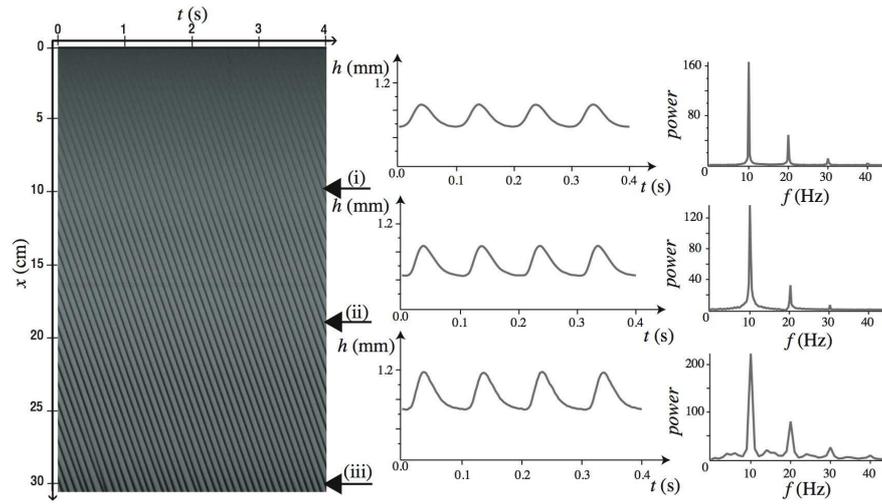
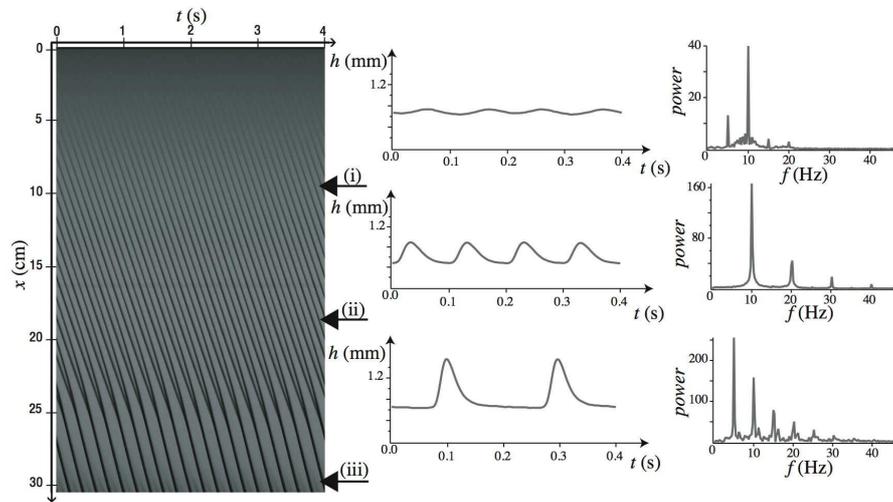
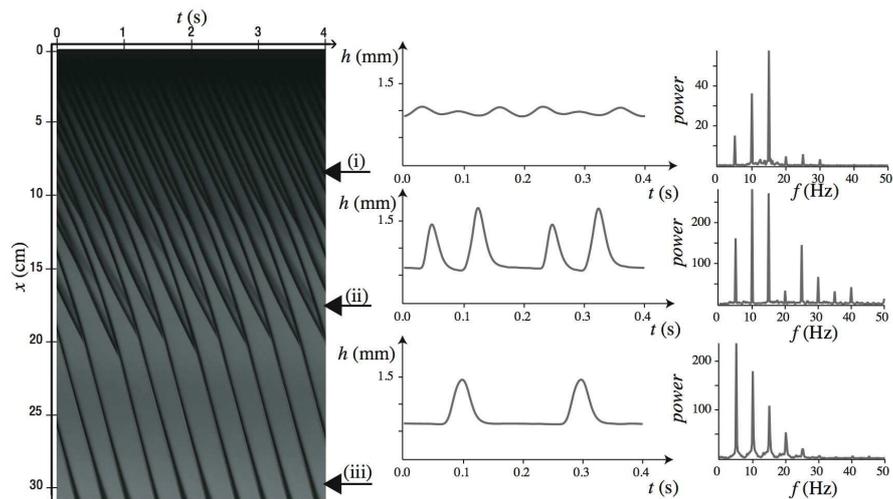
(a) $h_N = 0.87$ mm ($\alpha_N = 0.58$) and $f_{for} = 10$ Hz(b) $h_N = 0.87$ mm ($\alpha_N = 0.58$) and $f_{for} = 5$ Hz(c) $h_N = 1.14$ mm ($\alpha_N = 0.76$) and $f_{for} = 5$ Hz

Fig. 4.7. Réponses à un forçage ($R = 1.5$ mm and $R/l_c = 1$). Gauche : diagrammes spatio-temporels. Droite : évolution de l'épaisseur en fonction du temps et spectres correspondants pris à trois positions sur la fibre (indiquées par des flèches) : (i) $x = 8$ cm, (ii) $x = 18$ cm and (iii) $x = 30$ cm.

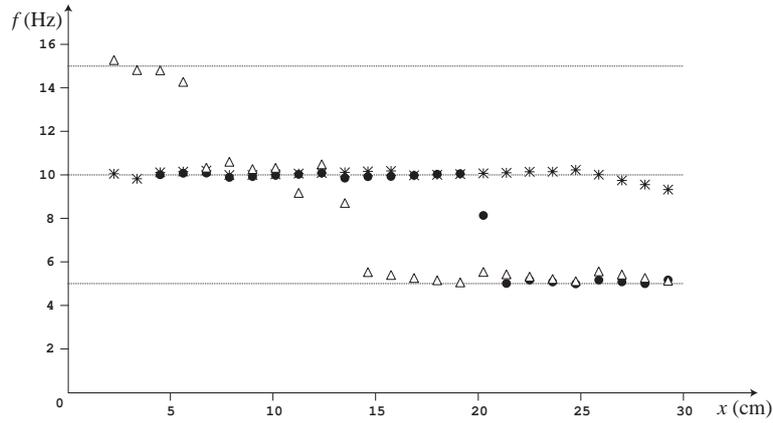


Fig. 4.8. Evolution de la fréquence en fonction de la position x sur la fibre pour $R = 1.5$ mm ($R/l_c = 1$) et : (*) $h_N = 0.87$ mm ($\alpha_N = 0.58$) et $f_{for} = 10$ Hz; (●) $h_N = 0.87$ mm ($\alpha_N = 0.58$) et $f_{for} = 5$ Hz; (Δ) $h_N = 1.14$ mm ($\alpha_N = 0.76$) et $f_{for} = 5$ Hz. Ces trois situations correspondent aux cas présentés sur la figure 4.7(a),(b),(c) respectivement.

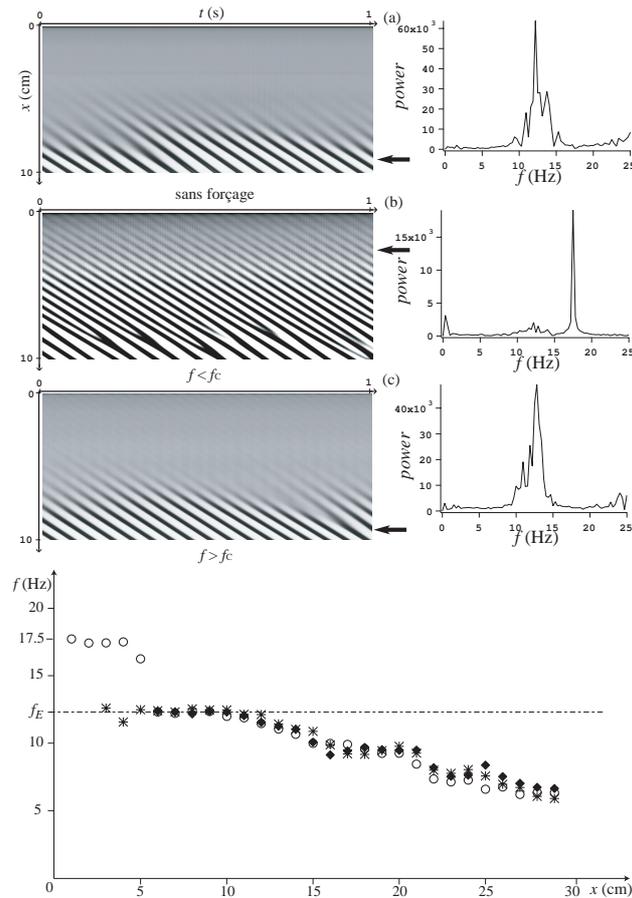


Fig. 4.9. Réponse et fréquence des ondes pour $R=0.475$ mm, $h_N=0.78$ ($Re=1.8$) sans forçage (● et (a)), pour $f_{for}=17.5$ Hz (○ et (b)) et pour $f_{for}=18.5$ Hz (* et (c)).

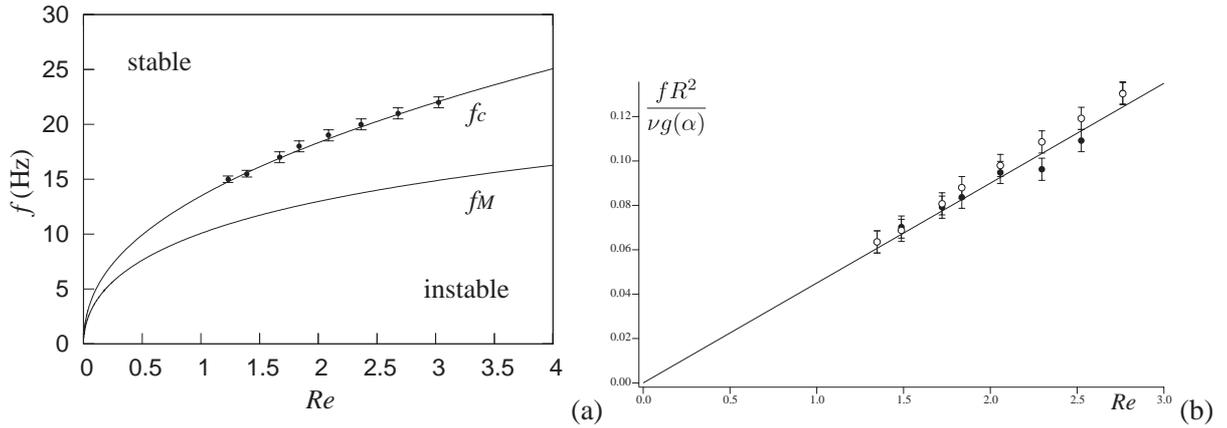


Fig. 4.10. Fréquences maximale f_M et de coupure f_c en fonction du nombre de Reynolds pour $R=0.475$ mm. (a) : Lignes : solutions Orr-Sommerfeld, (●) f_{ce} expérimentale. (b) Fréquences renormalisées f_M (●) et $f_c/\sqrt{2}$ (○) expérimentales, ligne : ajustement linéaire selon l'équation (4.12).

on obtient

$$f_M = \frac{g(\alpha_N)\nu}{R^2} \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} Re \quad (4.12)$$

$$f_c = \frac{g(\alpha_N)\nu}{R^2} \frac{1}{4\pi} Re$$

où $g(\alpha_N) = (-\alpha_N(2 - \alpha_N) + 2(1 + \alpha_N)^2 \ln(1 + \alpha_N)) / (\alpha_N^3(1 + \alpha_N))$. J'ai donc tracé, pour la fibre de rayon $R=0.475$ mm, l'allure de la fréquence renormalisée ($\frac{f_M R^2}{g(\alpha_N)\nu}$ et $\frac{f_c R^2}{\sqrt{2}g(\alpha_N)\nu}$) en fonction du nombre de Reynolds (Fig. 4.10(b)). On a effectivement une évolution linéaire ; la pente est alors égale à 0.045 (en bon accord avec $1/(4\pi\sqrt{2}) = 0.056$ prédit par le raisonnement précédent).

Le taux de croissance présenté sur la figure 4.11 permet de résumer les différentes réponses observées. La réponse du système dépend de la différence relative entre le taux de croissance du signal de forçage à f_{for} et celui du maximum à f_M . La dynamique observée résulte d'une compétition entre l'amplification du bruit ambiant, du signal de forçage et de ses harmoniques. On distingue alors cinq zones. Dans la première zone, l'amplification du signal est très faible et dominée par l'amplification du bruit ambiant autour de f_M ; ainsi on ne peut pas synchroniser l'écoulement aux très basses fréquences. Dans la seconde (resp. troisième) zone du diagramme, la deuxième (resp. première) harmonique correspond à une fréquence proche du maximum f_M qui est fortement amplifiée par l'instabilité primaire, d'où une réponse à $3f_{for}$ (resp. $2f_{for}$) en haut de la fibre. Un transfert d'énergie non-linéaire entre les harmoniques et le fondamental est responsable de la suite de coalescences qui conduit à la synchronisation de l'écoulement à la fréquence de forçage. Dans la quatrième région, f_{for} est proche de f_M et le signal de forçage est autant amplifié que le bruit ambiant, ce qui explique la synchronisation de l'écoulement sur toute la hauteur de la fibre. Finalement, dans la cinquième région, seul le fondamental du signal de forçage est amplifié et naturellement, le système y répond. Cependant, lorsqu'on se rapproche de f_c , le taux de croissance diminue fortement ce qui explique que le bruit ambiant, lui grandement amplifié, prenne le dessus et déstabilise l'écoulement rapidement. L'amplification du signal en entrée est donc sélective, le système répondant d'abord à la fréquence la plus amplifiée spatialement (signal de forçage, harmonique ou bruit ambiant).

Tous les rayons de fibre étudiés présentent le même type de réponse, excepté à basse fréquence ; sur des fibres de petits rayons, il arrive que la suite de coalescence ne soit pas (ou soit partiellement) observée et on

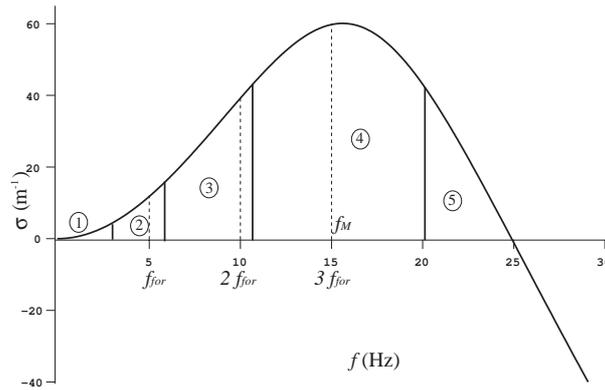


Fig. 4.11. Taux de croissance pour $h_N=1.14$ mm, $\alpha_N = 0.76$, $R/l_c = 1$. Les lignes pointillées représentent l'expérience de la figure 4.7(c).

n'observe pas la synchronisation de l'écoulement à f_{for} . On ne peut exclure le fait qu'elle se produise plus en aval, notre fibre ayant une longueur finie. De plus, dans certains cas étudiés plus en détail au chapitre suivant, un signal fortement modulé en entrée (i.e. à basse fréquence) conduit à la formation d'états liés. Notons que lorsque l'on augmente l'amplitude de forçage (i.e. l'amplitude des battements de la tige fixée au vibreur), le signal contient plus d'harmoniques, les séries de coalescence se produisent plus tôt sur la fibre et les ondes saturent plus rapidement.

4.3.2 Caractéristiques des ondes

J'ai montré dans la partie précédente que l'on pouvait synchroniser l'écoulement dans une certaine gamme de fréquences ; on obtient alors des ondes périodiques. L'amplitude et la forme de ces ondes évoluent lorsqu'elles se propagent le long de la fibre, pour finalement saturer : on obtient alors des ondes d'amplitude constante qui se propagent à vitesse constante sans se déformer. Ces ondes saturées sont appelées *travelling waves*. Je vais dans cette section étudier les caractéristiques de ces ondes en fonction des différents paramètres de l'expérience (α_N , R/l_c , η) que je comparerai aux solutions des modèles CM et WRIBL. De plus, nous verrons et caractériserons les différences observées entre les structures en fonction du régime dans lequel on se trouve (régimes de *gouttes* lorsque l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine (région RP), et d'*ondes* lorsque l'écoulement domine sur les mécanismes d'instabilité (région DG) ou lorsque l'instabilité de Kapitza prend le dessus (région DI).

La Fig. 4.12 présente l'évolution typique de la forme de l'onde à différentes altitudes le long de la fibre (ici pour $R=1.5$ mm). La forme des ondes évolue pour finalement saturer à $x \approx 30$ cm. Au delà, leur forme reste constante. Notons que l'épaisseur du substrat h_s et l'épaisseur maximale h_{max} augmentent ; ainsi, l'épaisseur moyenne augmente. Pourtant, la conservation du débit est bien respectée puisque la vitesse c des gouttes augmente elle aussi (une onde plus grosse se déplace évidemment plus vite). Etant à fréquence f fixe, la longueur d'onde $\lambda = c/f$ augmente et on observe des ondes plus espacées.

Les profils des ondes saturées sont obtenus à l'aide de la caméra linéaire placée perpendiculairement à l'écoulement à une distance $x \sim 50$ cm de l'alimentation. Cette mesure nous donne une résolution pour l'épaisseur de ± 0.02 mm et une résolution temporelle $\sim 10^{-3}$ s. Les ondes que l'on étudie dans cette section

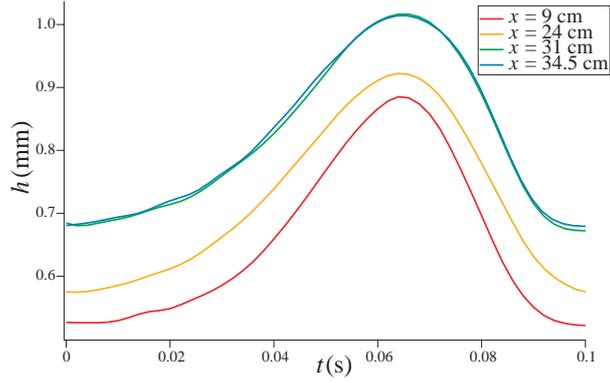


Fig. 4.12. Profils expérimentaux pour $R=1.5$ mm, $h_N=0.87$ mm et $f_{for}=10$ Hz à différentes altitudes le long de la fibre.

sont stationnaires, elles se propagent à vitesse constante c : les profils en temps $h(t)$ sont donc identiques à des profils en espace $h(x = ct)$. Quelques profils en espace obtenus avec la caméra rapide seront présentés ici ; cependant, la résolution étant bien meilleure avec la caméra linéaire, on présentera principalement des profils en temps.

La figure 4.13 représente l'évolution typique de ces profils avec le débit et la fréquence pour $R=0.475$ mm, c'est-à-dire lorsque tous les effets sont du même ordre. Les profils expérimentaux extraits des images de la caméra linéaire sont ensuite comparés aux solutions obtenues numériquement à partir du modèle WRIBL. Pour une onde stationnaire se propageant à la vitesse c , dans le référentiel de l'onde ($\xi = x - ct$), l'écoulement est stationnaire et la conservation de la masse s'écrit alors

$$-c \left(h + \frac{\alpha_N}{2} h^2 \right)' + q' = 0 \quad (4.13)$$

où les "primes" indiquent la dérivée par rapport à ξ , qui s'intègre en

$$q - c \left(h + \frac{\alpha_N}{2} h^2 \right) \equiv q_0, \quad (4.14)$$

où la constante q_0 ainsi définie est le débit sous l'onde. En reportant (4.14) dans (4.4) réécrit dans le référentiel en mouvement de l'onde $\xi = x - ct$, on obtient une relation dépendant uniquement de h et de ses dérivées par rapport à ξ , que l'on peut réécrire de manière à obtenir $h''' = f(h, h', h'')$ où f est une fonction de h , de ses dérivées première et seconde et des paramètres δ , α_N , μ et c . Si l'on note $U_1 = h$, $U_2 = h'$, $U_3 = h''$, on peut réécrire le système d'équations précédentes sous la forme d'un système dynamique de dimension 3

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ f(U_1, U_2, U_3) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

On va pouvoir résoudre ce système dynamique numériquement à l'aide du logiciel AUTO97 (et AUTO07p) et de son extension HOMCONT. J'ai donc obtenu ces solutions par continuation avec le logiciel AUTO à partir des codes développés par C. Ruyer-Quil. Les calculs sont initialisés avec les ondes linéaires infinitésimales obtenues par l'analyse de stabilité linéaire. On peut alors suivre la branche de solution en amenant les paramètres (α_N , δ , μ et f) aux valeurs correspondants aux expériences. On obtient alors la solution de type *travelling wave* correspondante (profil, amplitude, vitesse, longueur d'onde) sans paramètres ajustables.

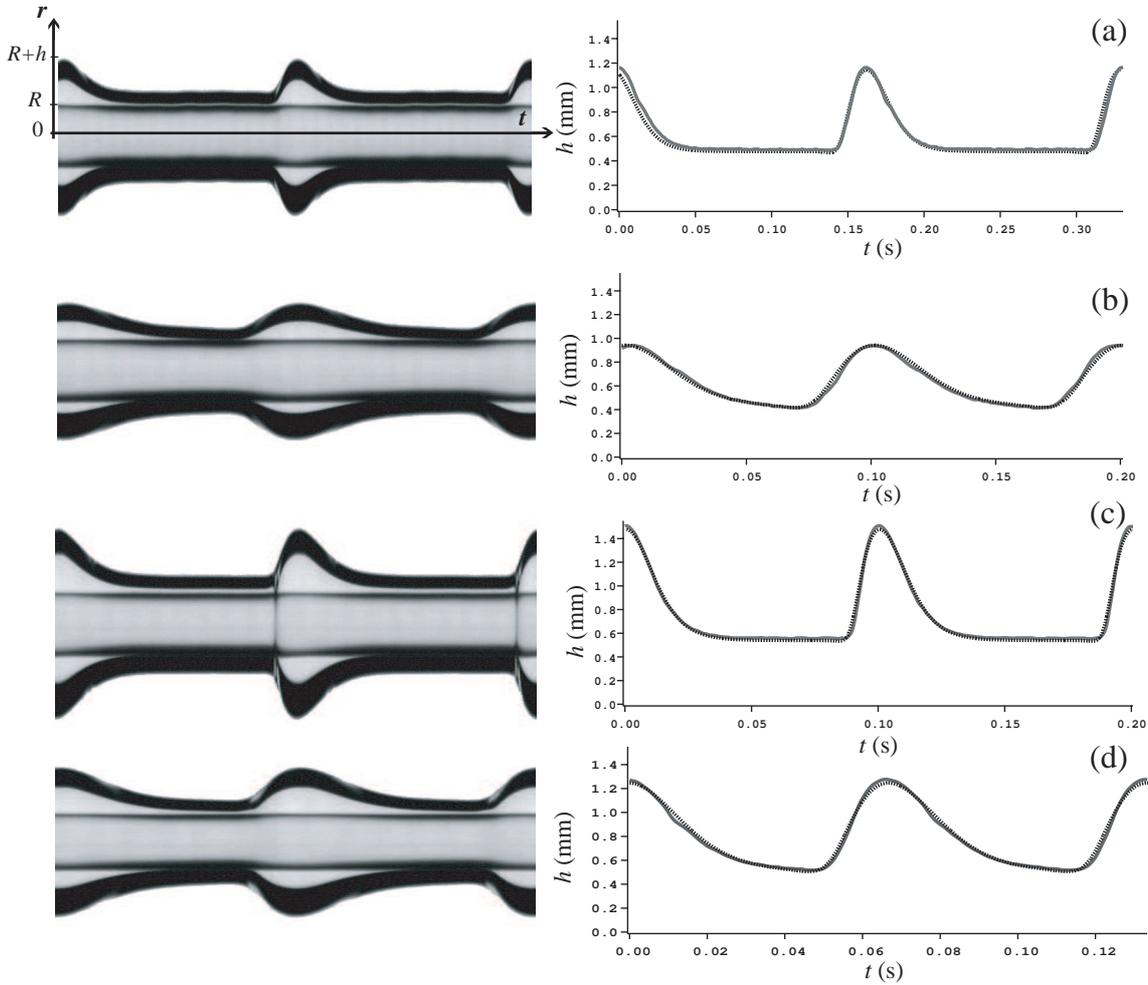


Fig. 4.13. Evolution de l'épaisseur en temps obtenus avec la caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement et profils des ondes saturées périodiques mesurés à $x=50$ cm pour $R=0.475$ mm ($R/l_c=0.32$). Les lignes pleines et pointillées correspondent respectivement aux profils expérimentaux et numériques. De haut en bas : (a) $h_N = 0.68$ mm ($\alpha_N = 1.43$) et $f_{\text{for}} = 6$ Hz ; (b) $h_N = 0.68$ mm et $f_{\text{for}} = 10$ Hz ; (c) $h_N = 0.88$ mm, ($\alpha_N = 1.85$) et $f_{\text{for}} = 10$ Hz ; (d) $h_N = 0.88$ mm et $f_{\text{for}} = 15$ Hz.

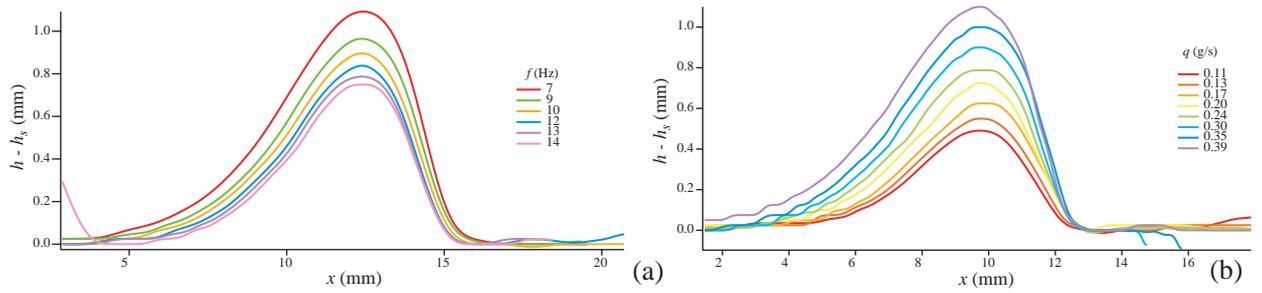


Fig. 4.14. Profils expérimentaux (en espace) pour $R=0.475$ mm, (a) $h_N=0.87$ mm et différentes fréquences ; (b) $f=7$ Hz et différents débits.

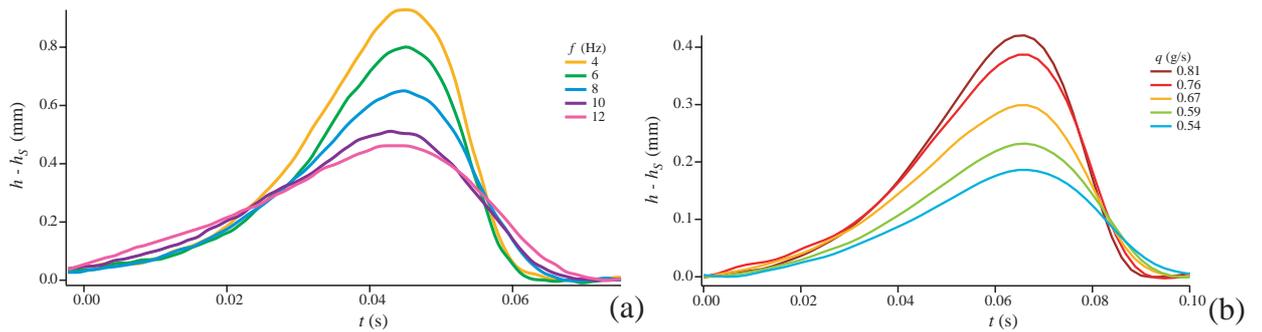


Fig. 4.15. Profils expérimentaux (en temps) pour $R=1.5$ mm, (a) $h_N=0.87$ mm et différentes fréquences ; (b) $f=10$ Hz et différents débits.

Les solutions du modèle sont en excellent accord avec les profils expérimentaux, comme en témoigne la superposition des profils sur la figure 4.13.

Je vais dans cette section présenter les caractéristiques des ondes, à savoir leur amplitude, leur forme et leur vitesse et leur évolution en fonction du débit, de la fréquence de forçage et du rayon de la fibre.

4.3.2.1 Amplitude et longueur d'onde

Les deux expériences pour deux débits et différentes fréquences de forçage présentées Fig. 4.13 illustrent l'évolution des ondes avec les paramètres de contrôle (h_N et f_{for}). A débit fixé (Fig. 4.13 (a-b) et (c-d)), diminuer la fréquence revient à créer des ondes à l'allure d'ondes solitaires se propageant sur un film plat d'épaisseur h_S . A haute fréquence, les ondes ne sont plus isolées (elles touchent les ondes voisines) et ont une amplitude moindre. La comparaison des profils pour différentes fréquences est donnée Fig. 4.14a. Le même comportement est observé sur la fibre de rayon $R=1.5$ mm (Fig. 4.15a) : diminuer la fréquence revient à augmenter l'amplitude. Sur la fibre de rayon $R=0.2$ mm (Fig. 4.16), on observe aussi une augmentation de l'amplitude avec une diminution de la fréquence (1.21 mm $\leq h_m \leq 1.54$ mm ; les valeurs sont données dans le tableau 4.1, page 99. Sur cette figure on présente aussi une onde solitaire *naturelle* obtenue sans forçage en bas de la fibre après déstabilisation du train d'ondes. Dans ce cas, l'onde a une amplitude importante et est très isolée, n'interagissant pas avec ses voisines. Ainsi, l'épaisseur maximale h_m des ondes augmente lorsqu'on diminue la fréquence de forçage, c'est-à-dire lorsque les ondes sont plus isolées.

A fréquence donnée (Fig. 4.13 (b-c)), augmenter le débit revient aussi à "isoler" les ondes. En effet, aug-

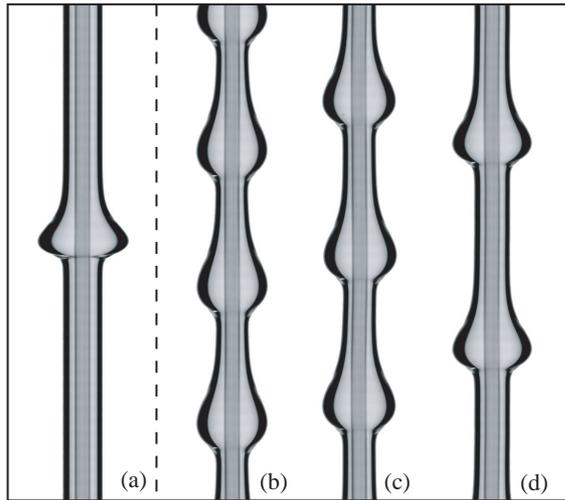


Fig. 4.16. Evolution de l'épaisseur en temps à 75 cm de l'alimentation pour $R = 0.2$ mm en régime convectif et pour $h_N = 0.84$ mm : (a) évolution naturelle (sans forçage), (b) $f_{for} = 9$ Hz, (c) $f_{for} = 8$ Hz, (d) $f_{for} = 6$ Hz.

menter le débit revient à augmenter la vitesse des structures, et donc la longueur d'onde. L'évolution de λ avec la fréquence et le débit est donnée Fig. 4.17. L'évolution de l'amplitude de l'onde est alors identique : l'amplitude augmente lorsque les ondes sont plus isolées. L'évolution du profil avec le débit à fréquence fixe est donnée Fig. 4.14b pour une fibre de rayon $R = 0.475$ mm. Le même comportement est observé sur la fibre de rayon $R = 1.5$ mm (Fig. 4.15b). Ainsi, l'épaisseur maximale h_m des ondes augmente lorsqu'on augmente le débit, c'est-à-dire lorsque les ondes sont plus isolées.

L'évolution de l'amplitude h_m des ondes est donc identique quelle que soit le rayon (et donc le régime) étudié et est présentée sur les figures 4.18 ($R = 0.475$ mm) pour trois débits et 4.19 ($R = 1.5$ mm). Encore une fois, notons l'excellent accord entre points expérimentaux et solutions numériques. On retrouve le comportement décrit précédemment : h_m diminue avec la fréquence et à fréquence fixe, augmenter le débit revient à augmenter h_m . Lorsque les ondes sont localisées, elles sont fortement non-linéaires et n'interagissent pas avec leurs voisines. On obtient des ondes d'amplitude d'autant plus importante qu'elles sont solitaires. Cependant, l'augmentation de l'amplitude est limitée. Nous avons mis en évidence une valeur critique de l'épaisseur (h_m de l'ordre de la longueur capillaire l_c) au-delà de laquelle la tension de surface ne peut plus maintenir l'onde et celle-ci déferle. Un exemple est donné sur la figure 4.19 : l'onde à 4 Hz croît jusqu'à une valeur critique $h_m \simeq l_c$ où elle déferle : elle perd son axisymétrie et se brise en deux, laissant une plus petite onde derrière elle comme présenté sur le diagramme spatio-temporel.

Intéressons nous maintenant à la forme des structures.

4.3.2.2 Forme

De manière générale, les ondes présentent un front avant raide et une queue allongée. Cette forme est similaire à celle des ondes observées sur un plan incliné. On peut cependant noter l'absence d'oscillations capillaires devant les ondes qui sont séparées d'un film parfaitement plat, contrairement aux expériences conduites sur un plan incliné (64; 65). En effet, l'énergie de surface est dissipée par frottements visqueux. Cet effet d'amortissement des ondes capillaires par la diffusion visqueuse a aussi été noté numé-

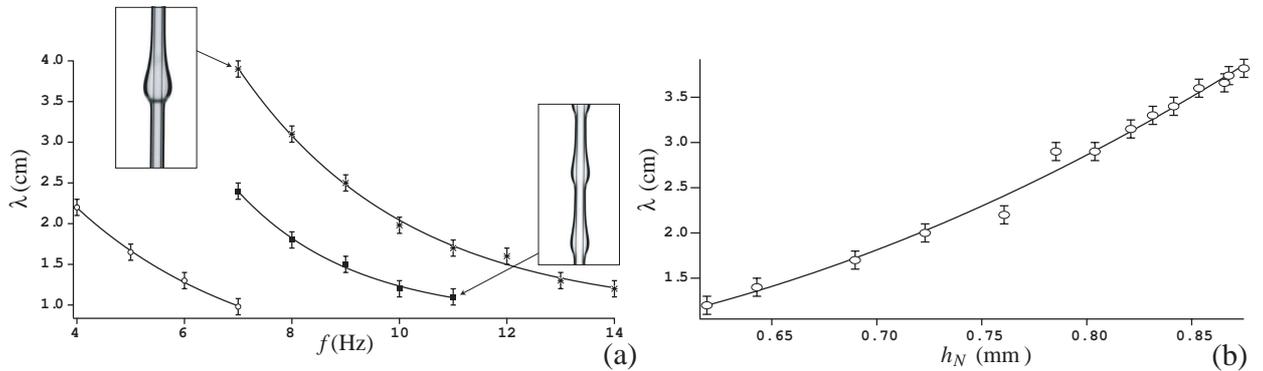


Fig. 4.17. Evolution de la longueur d'onde obtenue expérimentalement pour $R = 0.475$ mm : (a) en fonction de la fréquence pour trois débits (de bas en haut : $h_N = 0.61$ mm, $h_N = 0.75$ mm et $h_N = 0.87$ mm ; (b) en fonction de h_N (i.e. du débit) à $f = 7$ Hz. Photos (12.5x25 mm) obtenues avec la caméra rapide. Les lignes sont des guides pour les yeux.

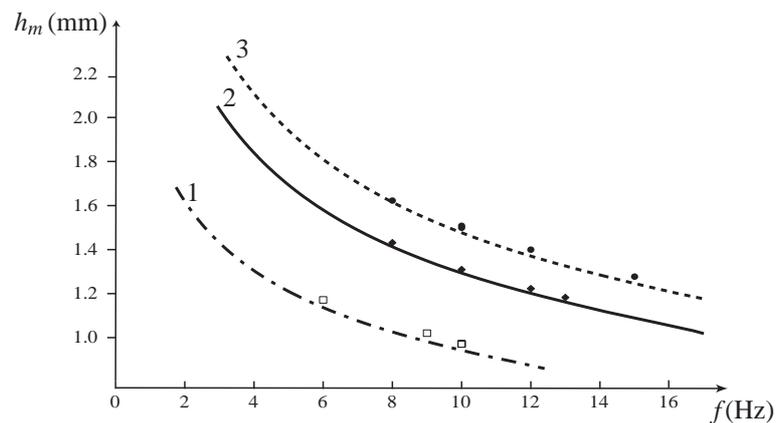


Fig. 4.18. Epaisseur maximale h_m en fonction de la fréquence de forçage pour $R=0.475$ mm et trois différents débits : 1 : $h_N=0.68$ mm, 2 : $h_N=0.83$ mm, 3 : $h_N=0.88$ mm. Lignes : résultats des simulations numériques du modèle WRIBL. Points : données expérimentales

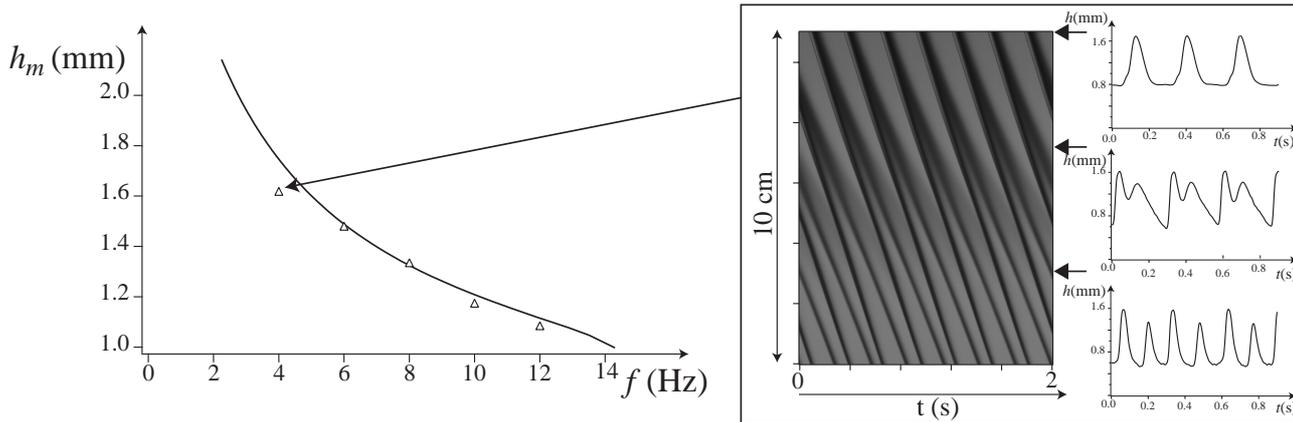


Fig. 4.19. Pour $R=1.5$ mm et $h_N=0.87$ mm, épaisseur maximale h_m en fonction de la fréquence de forçage : points expérimentaux et résultats des simulations numériques du modèle WRIBL. Diagramme spatio-temporel correspondant montrant le "déferlement" de l'onde de grande amplitude ($h_m \sim l_c$) qui se brise en deux.

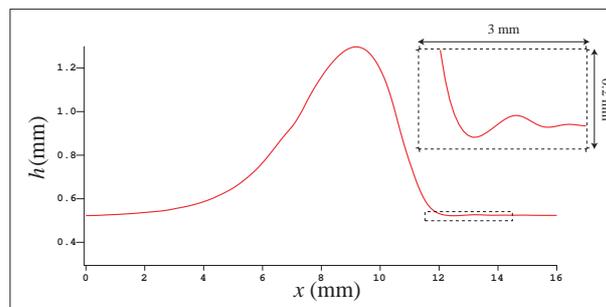


Fig. 4.20. Profil expérimental typique d'une onde (obtenu sur une fibre de rayon $R=0.45$ mm avec la caméra linéaire). Insert : zoom sur le front de l'onde.

riquement (87). Les expériences réalisées sur un plan incliné ont été pour la plupart faites avec des fluides à faible viscosité et forte tension de surface (eau, alcool), conduisant à la formation d'oscillations capillaires de grande amplitude devant les ondes (62). Cependant, on ne peut exclure la possibilité d'une résolution trop faible pour détecter des oscillations. Dans certains cas, on peut noter la présence d'au moins un léger creux au front de l'onde, voire de quelques oscillations rapidement amorties. Un profil typique est présenté sur la figure. 4.20 : un léger creux est présent au front de l'onde. Un zoom permet de mettre en évidence l'existence d'oscillations rapidement amorties.

Il semble de plus que le front des ondes raidissent lorsqu'elles sont isolées, quel que soit le rayon de la fibre, et notamment pour $R=1.5$ mm où ce raidissement semble très important (Fig. 4.15). Sur un plan vertical, Kapitza a noté un tel raidissement : "*The wave consist of a basic crest with a somewhat steeper front.*" On cherche à aller au delà de cette observation qualitative (*somewhat*) et à caractériser quantitativement le raidissement. On va donc décrire les extrémités de l'onde. L'avant et l'arrière de l'onde croissent pratiquement exponentiellement. Ainsi, l'avant de l'onde croît comme $e^{x/l_{front}}$ et l'arrière comme $e^{x/l_{tail}}$, l_{front} (resp. l_{tail}) étant la longueur caractéristique de front (resp. de queue). Expérimentalement, on isole un profil $h - h_s$. On peut alors tracer $\ln(h - h_s)$ (Fig. 4.21). On observe effectivement une évolution linéaire à l'arrière de l'onde

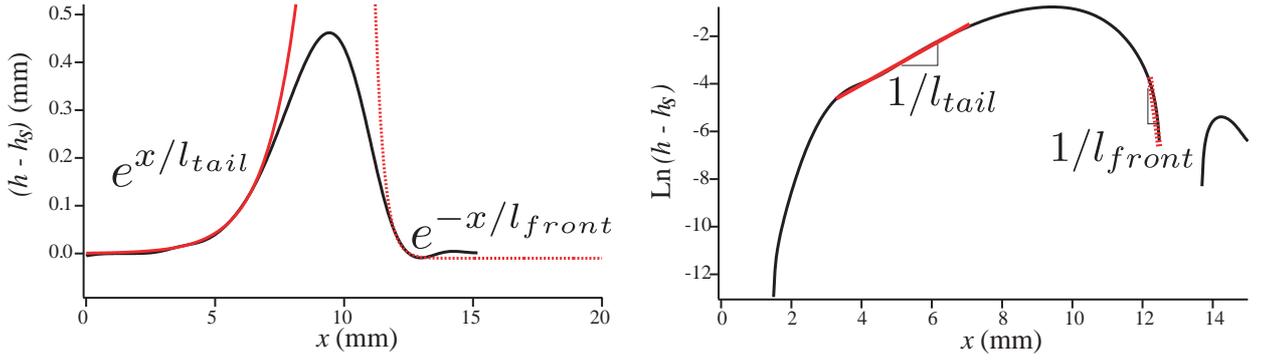


Fig. 4.21. Détermination expérimentale des longueurs de queue l_{tail} et de front l_{front} . Exemple donné sur la figure : $R=0.475$ mm, $h_N=0.61$ mm, $f_{for}=5$ Hz. On trouve $l_{tail}=1.25$ mm et $l_{front}=0.33$ mm.

avec une pente correspondant à $1/l_{tail}$. L'allure $e^{x/l_{tail}}$ correspondante représente bien l'arrière de l'onde. À l'avant, il existe une courte région où l'évolution est linéaire avec une pente $-1/l_{front}$. Cependant, pour l_{front} , la valeur obtenue est peu précise. On peut tout de même noter qu'elle représente bien le raidissement de l'onde ($l_{tail}/l_{front} \sim 4 > 1$). Quelques valeurs de l_{tail} obtenues expérimentalement pour les trois rayons de fibre étudiés sont présentés Table 4.1, page 99.

Afin de mettre en évidence le raidissement des ondes, on renormalise les profils $(h - h_s)/(h_{max} - h_s)$ que l'on présente en fonction de la distance x/l_{tail} . Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.22. On a alors des comportements différents en fonction du rayon. La figure 4.22(a) compare les profils obtenus sur la fibre de rayon $R=0.2$ mm pour différentes fréquences (correspondant aux images de la figure 4.16). Les profils normalisés sont quasiment identiques et les ondes semblent avoir une forme générique indépendante des conditions d'écoulement, même dans le cas d'une onde solitaire de grande amplitude (évolution naturelle). La figure 4.22(b) compare les profils obtenus sur la fibre de rayon $R=0.475$ mm en forçant à basse fréquence ($f_{for}=7$ Hz) pour différents débits. Cette fois, on observe une différence importante, le front avant se raidissant lorsque l'on augmente h_N . Un raidissement similaire est observé à débit fixe lorsque les ondes deviennent plus localisées (i.e. en diminuant la fréquence). Pour la fibre de rayon $R=1.5$ mm, on observe aussi un raidissement des ondes lorsqu'elles deviennent plus localisées. Ce raidissement est très marqué pour l'onde solitaire naturelle. On peut aussi noter que l'asymétrie avant/arrière des ondes augmente avec le rayon : les ondes obtenues pour $R=0.2$ mm s'éloignent peu de la forme symétrique ($l_{tail} \sim 2l_{front}$), le raidissement étant plus marqué pour $R=0.475$ mm ($l_{tail} \sim 4l_{front}$) tandis que les ondes obtenues pour $R=1.5$ mm sont fortement asymétriques ($l_{tail} \sim 8l_{front}$). Afin de quantifier le raidissement, on va déterminer la longueur de front l_{front} à partir des résultats numériques, la détection expérimentale du substrat et du front de l'onde, notamment des oscillations le précédant, étant limitée.

Afin de déterminer théoriquement l_{tail} et l_{front} , nous allons suivre la procédure suivante. On part de l'hypothèse que la forme des extrémités de l'onde se raccorde asymptotiquement à l'évolution d'une petite perturbation autour de l'épaisseur du substrat. Ainsi, l'arrière de l'onde croît comme $e^{\lambda_1 x}$ et l'avant comme $e^{\lambda_2 x}$. On s'attend à avoir un front oscillant ($\lambda_2 \in \mathbb{C}$) avec une partie imaginaire faible (décroissance rapide des oscillations) et une queue monotone ($\lambda_1 \in \mathbb{R}$). De plus, $\lambda_1 > 0$ et $\Re(\lambda_2) < 0$. On s'attend aussi à avoir un front plus raide que la queue, à savoir $-\Re(\lambda_2)/\lambda_1 > 1$. Les valeurs ainsi obtenues seront comparées aux valeurs expérimentales de la longueur de queue $l_{tail} = 1/\lambda_1$ et de front $l_{front} = -1/\Re(\lambda_2)$.

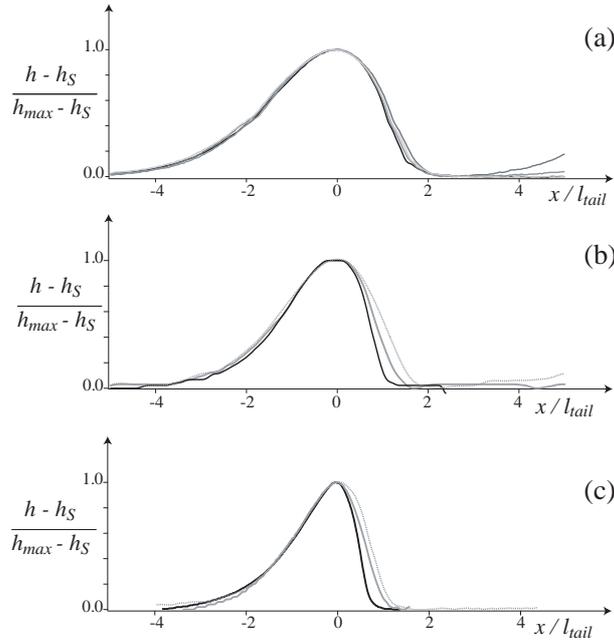


Fig. 4.22. Profils expérimentaux normalisés $h_{\max} - h_S$ en fonction de la distance normalisée par la longueur de queue l_{tail} . (a) : $R = 0.2$ mm, $h_N = 0.84$ mm et du clair au foncé $f_{\text{for}} = 6, 8$ et 9 Hz et évolution naturelle (voir aussi la légende de la figure 4.16). (b) : $R = 0.475$ mm, $f_{\text{for}} = 7$ Hz et du clair au foncé $h_N = 0.62$ mm, 0.76 mm et $h_N = 0.86$ mm. (c) : $R = 1.5$ mm et du clair au foncé $h_N = 0.87$ mm, $f_{\text{for}} = 4$ et 10 Hz, et évolution naturelle pour $h_N = 0.93$ mm.

A partir de l'équation d'évolution simplifiée (4.2) pour $h_N \sim R$ (obtenue pour un développement faiblement non-linéaire autour de l'épaisseur du substrat $h = h_S + \tilde{h}$), on se place dans le référentiel en mouvement des ondes $\xi = x - ct$ ($c = u_k$),

$$-c\tilde{h}' + A\tilde{h}'' + B\tilde{h}'''' = 0 \quad (4.16)$$

avec

$$A = \frac{\gamma}{3\eta} \frac{R}{(R + h_S)^3} h_S^3 \phi(h_S/R)$$

et

$$B = \frac{\gamma}{3\eta} \frac{R}{R + h_S} h_S^3 \phi(h_S/R)$$

En faisant le développement $\tilde{h} \propto e^{\lambda\xi}$, on obtient un polynôme caractéristique

$$B\lambda^3 + A\lambda - c = 0 \quad (4.17)$$

dont les solutions sont les trois valeurs propres λ_1 réelle et $\lambda_{2,3}$ complexes conjuguées. Prenons l'exemple d'une expérience : $R=0.475$ mm, V50, pour une onde se déplaçant sur un substrat d'épaisseur $h_S=0.6$ mm. Expérimentalement, on trouve $l_{\text{tail}} \simeq 2.5$ mm et $l_{\text{front}} \simeq 0.4$ mm. Selon l'équation (4.2), l'onde se propage à la vitesse $u_k=9.7$ cm.s⁻¹ ; on trouve alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\simeq 1197 \\ \lambda_{2,3} &\simeq -599 \pm 1387 i \end{aligned} \quad (4.18)$$

soit une queue monotone $l_{tail} \simeq 0.83$ mm et un front oscillant $l_{front} \simeq 1.5$ mm. L'ordre de grandeur est correct, mais on peut noter que le raidissement de l'onde n'est pas retrouvé : en effet, on a négligé les effets non-linéaires et inertiels qui provoquent ce raidissement. De même, l'amplitude des oscillations prédites est grande : en effet, les effets de la dissipation visqueuse qui amortie les oscillations capillaires sont négligés. On va donc chercher les solutions correspondantes pour le modèle WRIBL.

On part donc du modèle complet pour une onde stationnaire se propageant à la vitesse c . Si l'on note $U_1 = h$, $U_2 = h'$, $U_3 = h''$, on a vu que l'on obtenait un système dynamique de la forme

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ f(U_1, U_2, U_3) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

On s'intéresse à l'allure des extrémités de l'onde, c'est-à-dire à l'évolution asymptotique de petites perturbations autour de l'épaisseur du substrat h_s . On va donc faire un développement de Taylor au premier ordre autour du point fixe ($U_1 = h_s, U_2 = 0, U_3 = 0$). Le développement de $f(U_1, U_2, U_3)$ s'écrit

$$f(U_1, U_2, U_3) = f(h_s, 0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial U_1} \right|_{(h_s, 0, 0)} U_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial U_2} \right|_{(h_s, 0, 0)} U_2 + \left. \frac{\partial f}{\partial U_3} \right|_{(h_s, 0, 0)} U_3 \quad (4.20)$$

avec $f(h_s, 0, 0) = 0$, ce qui permet de réécrire (4.19) (en notant pour plus de simplicité $(h_s, 0, 0)$ pf)

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial U_1} \right|_{pf} U_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial U_2} \right|_{pf} U_2 + \left. \frac{\partial f}{\partial U_3} \right|_{pf} U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial U_1} \right|_{pf} & \left. \frac{\partial f}{\partial U_2} \right|_{pf} & \left. \frac{\partial f}{\partial U_3} \right|_{pf} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

ou encore

$$\mathbf{U}' = \mathbf{J}\mathbf{U} \quad (4.22)$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial U_1} \right|_{pf} & \left. \frac{\partial f}{\partial U_2} \right|_{pf} & \left. \frac{\partial f}{\partial U_3} \right|_{pf} \end{pmatrix}.$$

On va donc, pour une expérience donnée, déterminer (avec Mathematica) cette matrice \mathbf{J} et ses valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 qui vont caractériser la croissance asymptotique d'une perturbation autour de h_s sous la forme $e^{\lambda_1 \xi}$.

Reprenons l'exemple précédent : $R=0.475$ mm, V50, pour une onde se déplaçant sur un substrat d'épaisseur $h_s = 0.6$ mm à la vitesse (adimensionnée) $c=0.99$. Dans ce cas, on obtient les valeurs propres suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\simeq 0.53 \\ \lambda_{2,3} &\simeq -2.7 \pm 0.96 i \end{aligned} \quad (4.23)$$

On obtient bien une valeur propre réelle positive correspondant à la queue monotone de l'onde ($e^{\lambda_1 x}$) et deux valeurs propres complexes conjuguées à partie réelle négative, correspondant au front oscillant de l'onde.

On remarque de plus que le front est bien plus raide que la queue ($-\Re(\lambda_2)/\lambda_1 \simeq 5$) et que les oscillations décroissent rapidement (faible partie imaginaire). On obtient ainsi $l_{tail}=2$ mm et $l_{front}=0.41$ mm, ce qui est en bon accord avec les valeurs expérimentales ($l_{tail} \simeq 2.5$ mm et $l_{front} \simeq 0.4$ mm). Quelques valeurs de l_{tail} et l_{front} ainsi trouvées sont présentées dans le tableau 4.1 pour les ondes présentées sur la figure 4.22. On a un bon accord pour l_{tail} avec les résultats expérimentaux. On peut donc avoir relativement confiance en la valeur de l_{front} obtenue. De plus, les calculs précédents nous indiquent que la grandeur pertinente pour caractériser le raidissement est l'épaisseur du substrat h_s . Effectivement, à débit fixe, changer la fréquence revient à modifier l'épaisseur du substrat et la forme des ondes changent ; on ne peut donc pas se baser sur les paramètres calculés sur l'épaisseur de Nusselt h_N pour caractériser le raidissement. De plus, pour les ondes présentées Fig. 4.22 et Table 4.1, lorsqu'il y a raidissement, celui-ci est d'autant plus accentué que l'épaisseur du substrat est importante. On va donc calculer les paramètres caractéristiques β_s^* et δ_s basés sur l'épaisseur du substrat afin d'identifier les mécanismes dominants.

Pour la figure 4.22(a) ($R=0.2$ mm), on trouve $\delta_s \sim 0.1$, $\beta_s^* \sim 2$ ce qui signifie qu'on se place dans la région RP du diagramme de phase (Fig. 4.1). L'instabilité capillaire conduit à la formation de *gouttes* axisymétriques légèrement affectées par la gravité et dont la forme varie peu avec l'épaisseur du substrat (le rapport l_{tail}/l_{front} varie très peu, même pour une onde solitaire de grande amplitude). Cette forme générique semble être donnée par un simple équilibre tension de surface/gravité. En revanche, le rapport l_{tail}/l_{front} varie fortement pour les *ondes* observées sur des rayons plus grands. Pour $R=0.475$ mm, les valeurs des paramètres $\delta_s \sim 0.5$, $\beta_s^* \sim 1$ suggèrent que les deux mécanismes d'instabilité (RP et Kapitza) sont importants (cf Fig. 4.1). Le front des ondes se raidit lorsqu'on augmente les effets de l'inertie, c'est-à-dire lorsque δ_s augmente. Finalement, pour la fibre de rayon $R=1.5$ mm, le raidissement est très marqué et le rapport l_{tail}/l_{front} augmente fortement avec l'épaisseur du substrat. Les valeurs des paramètres $\delta_s \sim 1$, $\beta_s^* \sim 0.25$ nous indiquent qu'ici c'est l'instabilité de Kapitza qui domine, les effets de la tension de surface étant négligeables. L'inertie tend donc à créer des ondes asymétriques présentant un front raide, comme observé sur un plan incliné (98).

On peut tracer l'évolution de l_{tail} et l_{front} obtenus expérimentalement en fonction de δ_s comme présenté sur la figure 4.23 pour la fibre de rayon $R=0.475$ mm pour laquelle on a balayé une grande gamme de débits et fréquences, allant ainsi d'ondes peu séparées ($\lambda \simeq 1$ cm) à des ondes isolées ($\lambda \simeq 4$ cm). On observe que l_{tail} augmente toujours avec δ_s . Ce comportement est retrouvé quel que soit le rayon de la fibre. En revanche, on peut noter que l_{front} semble stagner puis diminuer légèrement. On retrouve ici le raidissement des ondes, que l'on peut quantifier en regardant l'évolution de l_{tail}/l_{front} en fonction de δ_s . On observe alors qu'à faible δ_s ($\delta_s \lesssim 0.5$), lorsque les effets de l'inertie ne jouent pas, l_{tail}/l_{front} est constant, il n'y a pas de raidissement. En revanche, l_{tail}/l_{front} augmente de manière significative à partir de $\delta \simeq 0.6$, pour devenir très important lorsque $\delta \gtrsim 1$. Sur la fibre $R=0.2$ mm, seule la partie quasi-constante est observée, tandis que sur la fibre $R=1.5$ mm, le rapport l_{tail}/l_{front} augmente toujours. La fibre de rayon $R=0.475$ mm permet donc bien de se situer dans une région où tous les effets sont du même ordre, et où l'on passe progressivement de régions où les effets capillaires dominent à des régions où l'inertie commence à jouer un rôle et donc de mettre en évidence une valeur "critique" des paramètres δ_s et β_s pour lesquels on passe des *gouttes* aux *ondes*. Ainsi, la forme des structures observées est la signature des mécanismes physiques dominants. Les ondes sont précédées d'ondes capillaires (dues à la tension de surface) amorties par frottements visqueux. Lorsque la tension de surface domine (régime RP), les gouttes créées sont légèrement déformées par la gravité et on n'observe pas (ou peu) de raidissement du front lorsque les ondes deviennent plus localisées. En revanche, lorsque l'écoulement domine (régime DG), les ondes sont plus asymétriques et leur front se raidit sous

fluide	R (mm)	f_{for} (Hz)	h_N (mm)	h_s (mm)		h_m (mm)		l_{tail} (mm)		l_{tail}/l_{front}	δ_s	β_s^*
			exp ± 0.01	exp ± 0.05	num	exp ± 0.05	num	exp ± 0.1	num	num	num	num
v100	0.2	9	0.84	0.414	0.410	1.12	1.21	1.51	1.37	3.0	0.10	2.15
–	–	8	–	0.42	0.435	1.16	1.27	1.40	1.41	3.3	0.13	2.06
–	–	6	–	0.47	0.49	1.28	1.40	1.64	1.52	4.0	0.22	1.88
–	–	sol	sol	0.54	0.54	1.54	1.54	1.53	1.63	3.0	0.35	1.7
v50	0.475	7	0.62	0.4	0.41	0.925	0.91	1.55	1.41	1.9	0.22	1.1
–	–	–	0.76	0.54	0.51	1.325	1.30	1.95	1.7	3.2	0.55	0.99
–	–	–	0.86	0.61	0.56	1.7	1.64	2.5	2.0	4.9	0.85	0.94
v50	1.5	10	0.87	0.66	0.63	1.17	1.18	2.9	2.1	2.6	0.82	0.26
–	–	4	0.87	0.7	0.69	1.7	1.68	2.4	2.3	4.2	1.1	0.26
–	–	sol	sol	0.95	0.78	2.66	2.66	3.85	3.9	11	1.9	0.25

Tab. 4.1. Comparaison des mesures expérimentales de l'épaisseur du substrat h_s , de l'épaisseur maximum h_m et de la longueur caractéristique de queue l_{tail} aux valeurs obtenues par intégration du modèle WRIBL (4.5), (4.4) pour les ondes présentées sur la figure 4.22. Le rapport l_{tail}/l_{front} , le nombre de Reynolds réduit δ_s et le paramètre de saturation β_s^* correspondant à l'épaisseur du substrat h_s sont donnés à partir des résultats numériques. Dans le cas des deux ondes solitaires (indiquées 'sol') on a ajusté l'épaisseur maximum (en gras dans le tableau).

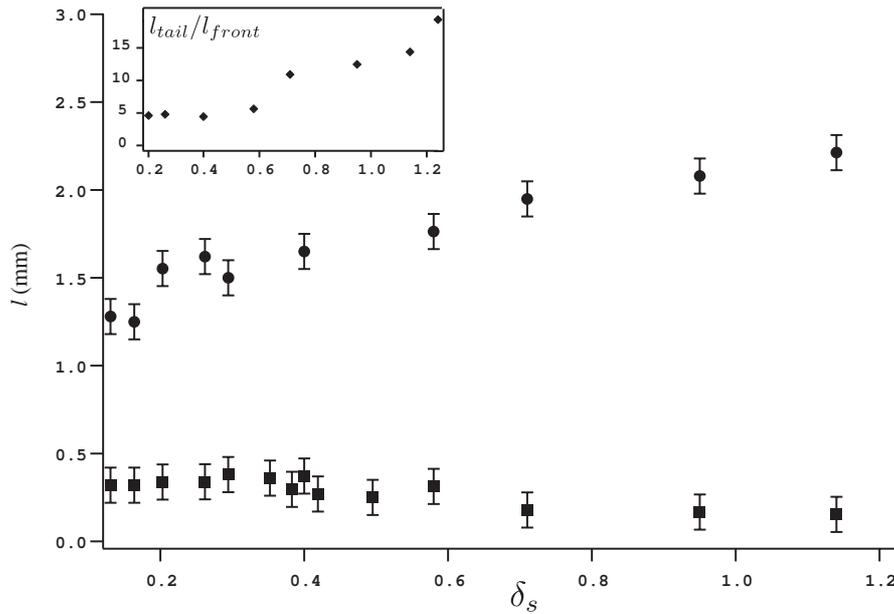


Fig. 4.23. Evolution de $\bullet l_{tail}$ et $\blacksquare l_{front}$ en fonction du Reynolds réduit basé sur l'épaisseur du substrat, pour $R=0.475$ mm, différents débits et différentes fréquences. Insert : Evolution du rapport l_{tail}/l_{front} en fonction de δ_s .

l'effet des non-linéarités. Un équilibre entre frottement visqueux, gravité et inertie induit une queue de l'onde augmentant doucement, de manière monotone. L'asymétrie et le raidissement devient plus marqué lorsque les effets inertiels sont dominants (régime DI). Finalement, on peut redessiner notre diagramme de phase en se plaçant dans le plan des paramètres (β_s^*, δ_s) comme présenté sur la figure 4.24 :

- Le régime **DG**, en jaune, est caractérisé par des ondes d'amplitude modérée dont le front avant se raidit légèrement sous l'effet de l'inertie (lorsqu'on augmente δ_s).
- Le régime **DI**, en vert, est caractérisé par des ondes fortement dissymétriques de grande amplitude présentant un front avant très raide.
- Le régime **RP**, en rouge, est caractérisé par des gouttes dont la forme générique ne semble pas dépendre des conditions de l'écoulement (débit, fréquence).

Les frontières sont volontairement diffuses ; on ne peut arrêter de valeur précise de transition entre ces régimes de gouttes et régimes d'ondes. On note cependant que l'inertie commence à jouer pour $\delta_s \gtrsim 0.5$, tandis que les effets de courbure sont importants pour $\beta_s^* \gtrsim 1$.

4.3.2.3 Vitesse des ondes

Une caractéristique importante des ondes est leur vitesse et notamment son évolution avec l'amplitude. Expérimentalement, la vitesse des ondes est mesurée sur les diagrammes spatio-temporels (on détermine la pente moyenne des lignes de trajectoire). L'évolution de la vitesse en fonction de la fréquence à rayon et débit fixés est présentée Fig. 4.25. La vitesse des solutions du modèle WRIBL est en bon accord avec les résultats expérimentaux. J'ai de plus tracé la partie réelle de la vitesse de phase des ondes linéaires (ω/k_r) obtenues à même débit par l'analyse de stabilité linéaire (Orr-Sommerfeld). Les deux courbes présentent un minimum pour une fréquence intermédiaire ($f \sim 13$ Hz). Les non-linéarités sont responsables d'une

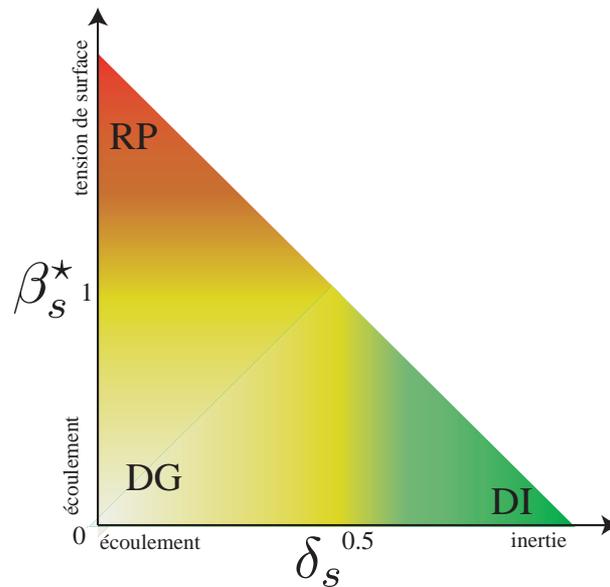


Fig. 4.24. Diagramme de phase des différents régimes dans le plan (β_s^*, δ_s) . En augmentant β_s^* , on passe d'un régime dominé par l'écoulement (DG, en jaune) à un régime dominé par la tension de surface (RP, en rouge). En augmentant δ_s , on passe du régime DG à un régime où l'inertie domine (DI, en vert).

élévation de la vitesse lorsque la fréquence s'éloigne de la fréquence de coupure f_c . A faible fréquence, les ondes sont fortement non-linéaires et quasi-solitaires et s'éloignent de la forme et de la vitesse des ondes linéaires créées en entrée de l'écoulement.

On s'intéresse maintenant à l'évolution de la vitesse en fonction de l'amplitude h_m . Sur la Fig. 4.26(a), la vitesse et l'amplitude des ondes ont été renormalisée par la vitesse et l'épaisseur de la solution de Nusselt u_N et h_N . Pour un débit donné, i.e. pour une épaisseur h_N donnée, c/u_N varie linéairement avec h_m/h_N . Un ajustement des données expérimentales donne

$$\frac{c}{u_N} \approx a \frac{h_m}{h_N} - b, \quad (4.24)$$

où la pente a est proche de 1.5 et b est une constante proche de 1 ($b = 0.82, 1$ et 1.3). Aucune corrélation n'est observée entre les données lorsque l'on adimensionne la vitesse et l'amplitude avec les valeurs de Nusselt, ce qui nous indique que ce n'est pas l'échelle correcte. Une corrélation est cependant trouvée (Fig. 4.26(b)) lorsque les échelles de longueur et de vitesse sont définies par rapport à l'épaisseur du substrat h_s sur lequel les ondes se propagent et à la vitesse c_{ks} des ondes cinématiques (ou ondes linéaires) sur un film d'épaisseur h_s (c'est-à-dire deux fois la vitesse du fluide à l'interface pour un film plat d'épaisseur h_s). Tous les points expérimentaux se rassemblent sur une seule ligne comme observé pour des ondes solitaires dans le cas plan par Tihon et al. (98). La figure 4.26(b) est complétée par la relation vitesse/amplitude correspondant aux solutions de type onde solitaire du modèle WRIBL, qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Ainsi, les ondes stationnaires observées sont des ondes solitaires qui ne sont pas caractérisées par l'épaisseur de Nusselt mais plutôt par l'épaisseur du substrat sur lequel elles se propagent. Comme dans le cas d'ondes solitaires se propageant à la surface d'un film sur un plan incliné (98), la vitesse

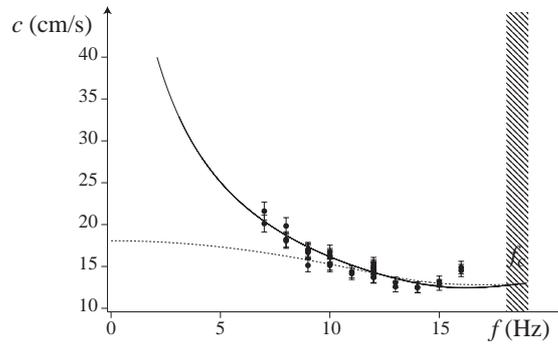


Fig. 4.25. Vitesse des ondes en fonction de la fréquence, $R = 0.475 \text{ mm}$ et $h_N = 0.80 \text{ mm}$. Données expérimentales (points) comparées à la solution du modèle WRIBL (ligne continue). La partie réelle de la vitesse de phase des ondes linéaires est indiquée par une ligne pointillée. La région hachurée correspond à la détermination expérimentale de la fréquence de coupure.

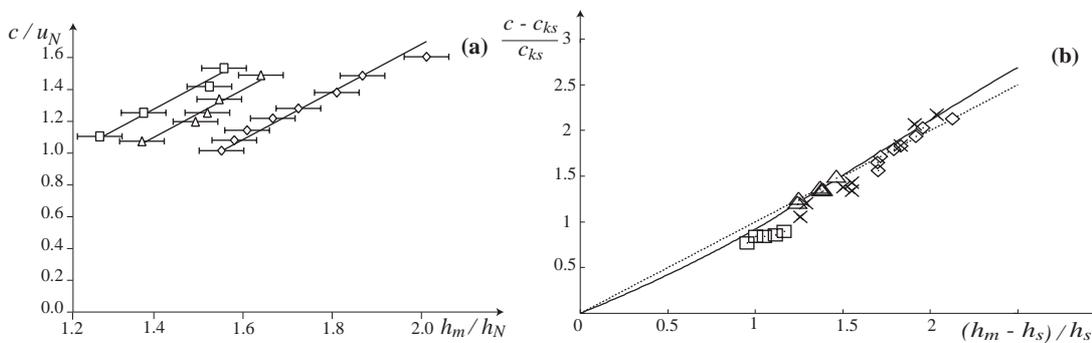


Fig. 4.26. (a) : Vitesse adimensionnée c/u_N en fonction de l'épaisseur maximale adimensionnée h_{\max}/h_N . $R = 0.475 \text{ mm}$, $V50$. \square : $h_N = 0.61 \text{ mm}$; \triangle : $h_N = 0.76 \text{ mm}$ et \diamond : $h_N = 0.87 \text{ mm}$ et différentes fréquences de forçage ($5 \text{ Hz} < f_{\text{for}} < 14 \text{ Hz}$). Les lignes sont des fits linéaires. (b) : $(c - c_{ks})/c_{ks}$ en fonction de l'amplitude adimensionnée $(h_{\max} - h_s)/h_s$. Les symboles $\square, \triangle, \diamond$ correspondent aux mêmes données expérimentales présentées en (a). Les croix correspondent à des ondes solitaires obtenues à $f_{\text{for}} = 7 \text{ Hz}$ et différents débits. Ligne continue : solution de type ondes solitaires du modèle WRIBL. Ligne pointillée : approximation linéaire (4.25).

adimensionnée c/c_{ks} varie linéairement avec l'amplitude h_m/h_s , soit

$$\frac{c}{c_{ks}} \approx \frac{h_m}{h_s}. \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) correspond à la relation obtenue par Chang et al. (14) en faisant une analyse de modes normaux des solutions *travelling-wave* de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Nous allons montrer que cette équation est effectivement applicable ici. On reprend la relation faiblement non-linéaire de Frenkel (pour $h \ll R$ et sans inertie), mais en gardant le terme convectif d'ordre 2 (en $\tilde{h}\partial_x\tilde{h}$), soit

$$\partial_t\tilde{h} + \frac{\rho gh_N^2}{\eta}\partial_x\tilde{h} + 2\frac{\rho gh_N}{\eta}\tilde{h}\partial_x\tilde{h} + \frac{\gamma h_N^3}{3\eta R^2}\partial_{xx}\tilde{h} + \frac{\gamma h_N^3}{3\eta}\partial_{xxx}\tilde{h} = 0 \quad (4.26)$$

On procède à l'adimensionnement proposé par Kalliadasis et Chang(46). L'épaisseur h est adimensionnée par l'épaisseur de Nusselt h_N , la coordonnée x par $\lambda_{RP} = 2\pi\sqrt{2}R$, la longueur d'onde de Rayleigh-Plateau et le temps t par le temps d'advection des ondes défini comme précédemment par le temps que met une onde pour se déplacer sur sa propre longueur (λ_{RP} à la vitesse d'advection $\rho gh_N^2/\eta$, soit $\tau = \lambda_{RP}\eta/(\rho gh_N^2)$). On obtient alors l'expression

$$\partial_t\tilde{h} + 2\partial_x\tilde{h} + 4\tilde{h}\partial_x\tilde{h} + \frac{2We\epsilon}{3a^2}\partial_{xx}\tilde{h} + \frac{2We\epsilon^3}{3}\partial_{xxx}\tilde{h} = 0 \quad (4.27)$$

où on a introduit le nombre de Weber $We = \gamma/(\rho gh_N^2)$, le paramètre $\epsilon = h_N/\lambda_{RP}$ et le rayon adimensionné $a = R/h_N$. Le terme convectif conduit à la formation de région de grande courbure (l'onde se raidit). En effet, chaque point de l'interface se déplace avec une vitesse proportionnelle à x . La tension de surface stabilisante empêche l'onde de déferler. Kalliadasis (46) propose donc l'adimensionnement suivant afin de rendre compte de cet équilibre entre terme convectif et terme de courbure. Ainsi, on fait la transformation suivante

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \epsilon We^{1/3} x \\ t &\rightarrow \frac{3}{2}\epsilon We^{1/3} t \end{aligned} \quad (4.28)$$

qui conduit à l'équation

$$\partial_t\tilde{h} + 3\partial_x\tilde{h} + 6\tilde{h}\partial_x\tilde{h} + \beta\partial_{xx}\tilde{h} + \partial_{xxx}\tilde{h} = 0 \quad (4.29)$$

qui est l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (57; 91; 56) avec

$$\beta = We^{2/3}/a^2 = \alpha_N^{2/3} \left(\frac{l_c}{R}\right)^{4/3}$$

qui est notre paramètre de saturation déjà introduit pour la transition AC. Cette équation non linéaire simple et générique permet de décrire les ondes longues sur un film visqueux, dans l'hypothèse d'une forte tension de surface et d'effets inertiels négligeables. Elle peut néanmoins être appliquée à de nombreux domaines (front de flammes, dynamique de la phase de motifs cellulaires).

Ainsi, on peut reprendre l'analyse de Chang (14) et obtenir la relation (4.25), qui est en très bon accord avec les résultats expérimentaux, et ce pour différents rayons de fibre. On peut donc considérer que les effets inertiels jouent peu ici ; on est principalement en régime DG, dans lequel l'écoulement (induit par la gravité et ralenti par les frottements visqueux) domine. On est ici à la limite du régime DI dans lequel

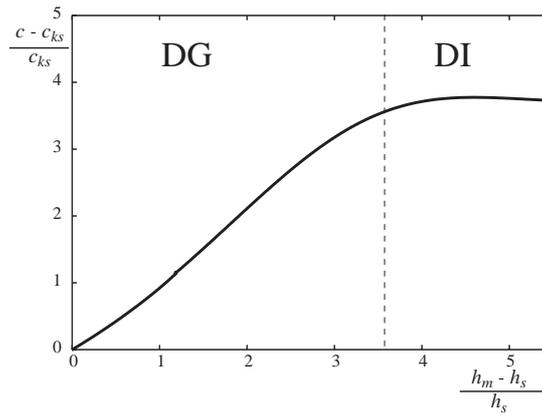


Fig. 4.27. Vitesse adimensionnée des ondes solitaires en fonction de l'amplitude adimensionnée obtenue numériquement à partir du modèle WRIBL.

une saturation de la vitesse est observée numériquement (Fig. 4.27) à forte amplitude lorsqu'on prend en compte les effets de l'inertie (l'équation de Kuramoto-Sivashinsky prévoit elle une croissance illimitée avec l'amplitude). Cette saturation est similaire à celle observée dans le cas plan (94) lorsqu'on passe en régime DI. On reviendra en détail sur cette transition à la section suivante, où les lignes de courant au sein des structures ainsi que leur amplitude seront discutées. Notons cependant qu'expérimentalement, on peut difficilement obtenir des ondes d'amplitude $(h_m - h_s)/h_s > 3$ et donc observer la saturation de la vitesse.

En caractérisant les ondes (forme, vitesse) on a constaté un comportement uniforme pour la vitesse mais un changement sur la forme en fonction des mécanismes prépondérants ; on va approfondir cette étude en identifiant le type d'écoulement présent au sein des structures en traçant les lignes de courant, numériquement à partir du modèle WRIBL maintenant validé, à partir de l'équation d'évolution de Craster et Matar (18) puis expérimentalement en suivant un traceur (particule) dans l'écoulement.

4.3.2.4 Lignes de courant

On s'intéresse à la distribution de vitesse dans les *travelling waves*, et plus précisément aux lignes de courant. Ces lignes de courant peuvent être obtenues numériquement dans le référentiel en mouvement de l'onde à partir des solutions *travelling waves* du modèle WRIBL. En effet, on peut calculer la fonction courant en tous points. Pour un fluide incompressible axisymétrique, on peut écrire la fonction de courant de Stokes Ψ tel que

$$\vec{u} = \text{rot} \frac{\Psi}{r} \vec{e}_\theta.$$

On peut donc exprimer la vitesse

$$\vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \vec{e}_x - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{e}_r,$$

et donc

$$\vec{u} - c \vec{e}_x = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - c \right) \vec{e}_x - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{e}_r$$

dans le référentiel en mouvement de l'onde. On recherche les lignes de courants en écrivant $d\vec{M} \wedge (\vec{u} - c \vec{e}_x) = 0$, ce qui conduit à

$$\Psi - c \frac{r^2}{2} = cste.$$

On peut donc, en faisant le changement de variable $y = r - R$, exprimer Ψ de la manière suivante :

$$\Psi(y, \xi) = R \int_0^y (u(\xi) - c)(1 + \alpha_N \tilde{y}) d\tilde{y} = cste.$$

La paroi correspond à $\Psi(0) = 0$ et la surface libre à $\Psi(h) = Rq_0$, où q_0 est le débit sous l'onde défini par l'équation (4.14). On peut ainsi présenter les lignes de courant $\Psi = aRq_0$ avec $0 \leq a \leq 1$.

Les lignes de courant présentées étant dans le référentiel en mouvement de l'onde (qui est stationnaire et se propage à une vitesse c), des lignes serrées correspondent à une vitesse faible (typiquement près de la paroi) tandis que des lignes espacées correspondent à une vitesse proche de la vitesse de l'onde. L'intersection de deux lignes de courant correspond à un point de vitesse nulle, ou *point de stagnation*. On fera de la même manière des comparaisons avec le modèle de Craster et Matar (CM) dans cette partie.

Quatre cas typiques sont présentés sur la figure 4.28 avec l'image expérimentale correspondante, obtenue avec la caméra rapide.

Jusqu'à présent, on s'est intéressé aux ondes stationnaires obtenues en régime convectif. On peut cependant appliquer le modèle à tout type d'onde stationnaire se propageant à vitesse et amplitude constante le long de la fibre. On va donc étendre notre étude aux *modes globaux* observés sur des fibres de petit rayon à faible épaisseur et présentés au chapitre 3. L'étude de ces régimes, et notamment des structures alors observées et de leur dynamique, sera présentée au chapitre 6. On présente un tel mode global, obtenu sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm sur la figure 4.28(a). Dans ce cas, seule l'instabilité de Rayleigh-Plateau joue (comme l'indiquent les nombres sans dimension $\delta_s=0.03$, $\beta_s^*=3.36$). On observe alors des gouttes quasi-symétriques d'amplitude importante ($h_m/h_s=4.5$). On observe la présence d'une large zone de recirculation entre deux points de stagnation. La goutte est alors assimilable à un anneau de liquide glissant en mouillage total sur un film uniforme mince quasi-immobile (comme en témoignent les lignes de courant très resserrées dans le film).

Lorsque l'on est en régime convectif mais toujours sur une fibre de petit rayon, (Fig. 4.28(b)), c'est-à-dire proche du régime RP ($\delta_s=0.2$, $\beta_s^*=2.36$), les structures ont une amplitude grande ($h_m/h_s=3.4$) et on voit apparaître une zone de recirculation. Les structures sont légèrement déformées à l'avant ; il n'y a pas d'asymétrie ou de raidissement notoires. Dans ce cas, la tension de surface domine et l'instabilité de Rayleigh-Plateau conduit à la formation de gouttes symétriques de grande amplitude se propageant sur un film mince quasi immobile.

La plupart des ondes étudiées dans ce chapitre correspondent cependant au cas Fig. 4.28(c), sur une fibre de rayon $R=0.475$ mm. Dans ce cas, i.e. en régime DG ($\delta_s=0.5$, $\beta_s^*=0.95$), on observe des ondes d'amplitude modérée ($h_m/h_s=2.6$). Les lignes de courant indiquent qu'il n'y a pas de transport de matière ; on a simplement une onde qui se propage le long de la fibre, le profil de vitesse restant proche de celui semi-parabolique de l'écoulement de base.

En augmentant le rayon et l'épaisseur (Fig. 4.28(d)), c'est-à-dire en se rapprochant du cas où l'instabilité de Kapitza domine ($\delta_s=1.9$, $\beta_s^*=0.25$), on voit apparaître une autre structure, sous la forme d'une onde de grande amplitude ($h_m/h_s=3.4$) présentant un front raide. Dans ce cas, on voit apparaître une zone de recirculation entre deux points de stagnation. Si l'on retourne à la figure 4.27, on voit que pour cette amplitude on est à la limite du régime DI (juste à la saturation de la vitesse). Ce changement de comportement semble

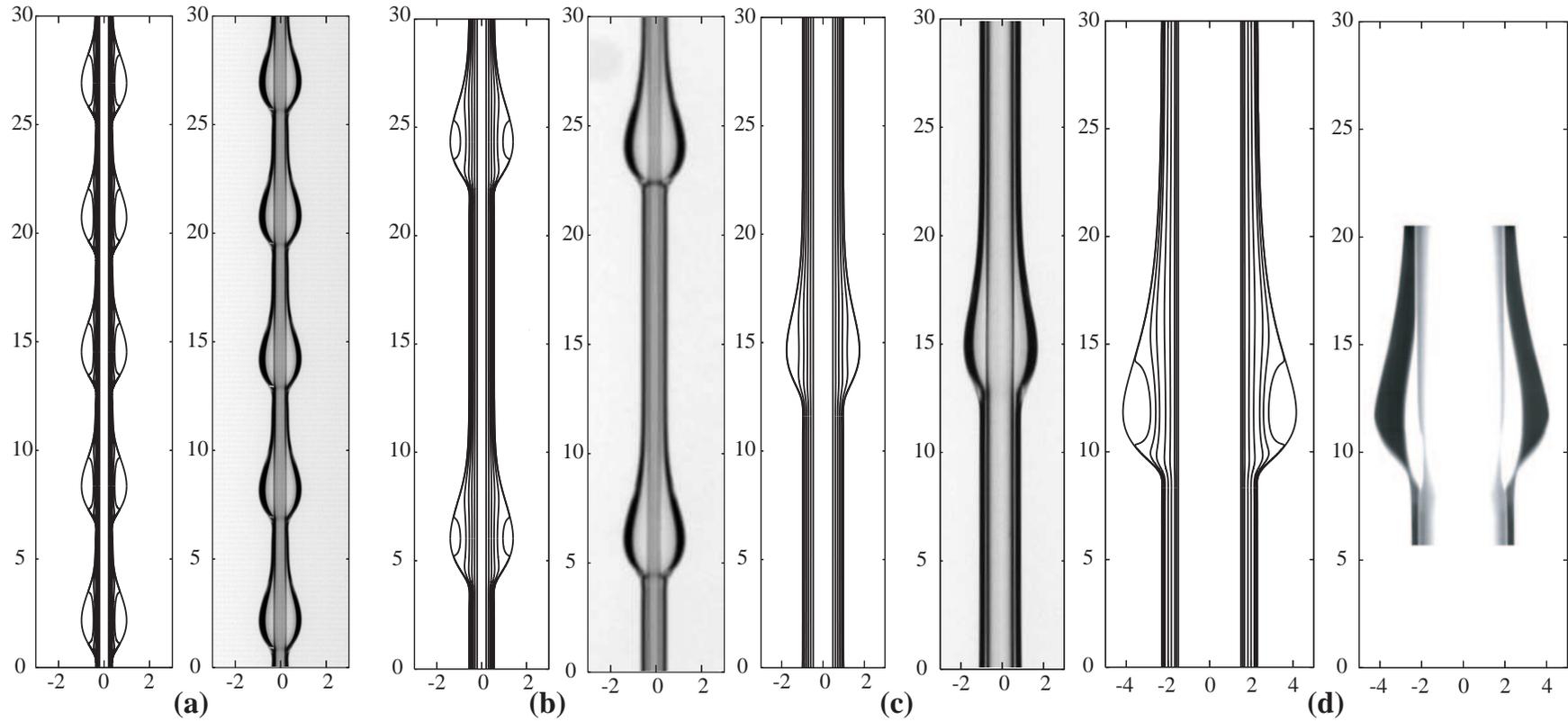


Fig. 4.28. Lignes de courant dans le référentiel en mouvement de l'onde obtenues avec le modèle WRIBL et images expérimentales avec des huiles silicone pour (a) huile V100, $R = 0.2 \text{ mm}$, $h_N = 0.52 \text{ mm}$ et $f = 4 \text{ Hz}$; (b) huile V50, $R = 0.2 \text{ mm}$, $h_N = 0.64 \text{ mm}$ et $f_{\text{for}} = 8 \text{ Hz}$; (c) V50, $R = 0.475 \text{ mm}$, $h_N = 0.76 \text{ mm}$ et $f_{\text{for}} = 7 \text{ Hz}$; (d) V50, $R = 1.5 \text{ mm}$, onde solitaire avec $h_m = 2.66 \text{ mm}$.

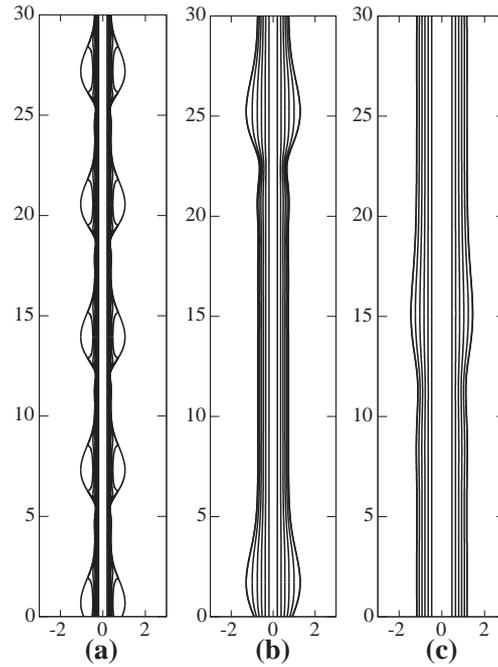


Fig. 4.29. Lignes de courant dans le référentiel en mouvement de l'onde obtenues avec le modèle CM, correspondant aux paramètres de la figure 4.28 panels (a),(b) and (c).

Figs. 22-23	Bo	c_{exp}	h_{exp}	c_{WRIBL}	h_{WRIBL}	c_{CM}	h_{CM}
(a)	0.2	28 ± 4	0.75 ± 0.05	24.7	0.79	26.5	0.84
(b)	0.3	150 ± 8	1.2 ± 0.1	156	1.17	188	1.09
(c)	0.7	160 ± 8	1.3 ± 0.1	171	1.16	180	0.870

Tab. 4.2. Vitesse c (en mm/s) et amplitude h (en mm) des ondes présentées Figs. 4.28-4.29 : valeurs expérimentales, solutions numériques du modèle WRIBL et de l'équation CM.

donc correspondre à la transition vers le régime DI. L'inertie devient le mécanisme d'instabilité prépondérant et crée des ondes de grande amplitude présentant une zone de recirculation (comme observé dans les ondes de grande amplitude dans le cas plan (106)).

On obtient aussi un critère permettant de qualifier les régimes où l'instabilité de Rayleigh-Plateau seule joue, et où les larges gouttes créées glissent simplement en mouillage total sous l'effet de la gravité (Fig. 4.28(a)), les régimes où l'instabilité RP est couplée à un écoulement mais reste dominante (Fig. 4.28(b)), les régimes où l'écoulement domine (Fig. 4.28(c)) où l'on observe des ondes et finalement celui où l'inertie et le mode Kapitza dominant (Fig. 4.28(d)).

On va maintenant comparer les résultats présentés sur la figure 4.28 aux solutions de l'équation d'évolution (4.2) notée CM. Ces comparaisons sont présentées sur la figure 4.29 et dans le tableau 4.2. Rappelons que l'équation d'évolution CM peut être obtenue de deux manières différentes : soit en supposant de faibles modulations de l'interface (i.e. en faisant un développement faiblement non-linéaire $h = h_N + \tilde{h}$ au premier ordre en \tilde{h}), comme je l'ai fait (voir Chap. 3), soit en faisant un développement longues ondes (18). On s'attend à avoir un bon accord avec les expériences dans les régimes de gouttes. Effectivement, on peut noter un bon accord dans le premier régime (Fig 4.28(a)), que ce soit sur l'amplitude, la forme et la vitesse

des ondes. On est dans le cas absolu, où, comme on l'a vu, la relation de dispersion tirée de l'équation d'évolution simple (4.2) donnait des résultats en bon accord avec l'expérience ; on sait maintenant que cette équation est aussi capable de bien décrire les structures pleinement développées. L'accord est toujours correct en régime convectif sur une petite fibre (régime b : Fig 4.28(b)). La forme et l'amplitude sont en bon accord. En revanche, on surestime un peu la vitesse (et donc la longueur d'onde). En effet, contrairement au modèle WRIBL, on n'a pas pris en compte les effets de la diffusion visqueuse, qui commence ici à jouer, et ralentit les ondes. Ces effets seront étudiés au chapitre suivant. L'écart entre les solutions de l'équation CM et les expériences est plus important pour les régimes d'ondes (Fig 4.28(c)) ; en effet, l'inertie, qui n'est pas prise en compte dans l'équation CM commence à jouer et le nombre de Bond se rapproche de 1. De plus, on ne peut reproduire l'onde observée Fig 4.28(d). Dans ce cas, le principal mécanisme d'instabilité n'est plus l'instabilité de Rayleigh-Plateau (tension de surface) mais l'instabilité de Kapitza (inertie) ; on est en régime DI et l'amplitude de la solution CM dans ce cas est d'à peine 8% car elle n'est plus valide, comme en témoigne le nombre de Bond ($Bo=2.7$).

Finalement, un dernier critère permettant de discriminer entre les différentes structures (goutte ou onde), dues à des mécanismes différents, est leur amplitude. En effet, on a vu que la tension de surface et l'inertie conduisaient à la création de gouttes de grande amplitude, tandis que les ondes du régime DG, dans lequel la tension de surface et l'inertie jouent un rôle perturbatif et l'écoulement domine tout, avaient une amplitude modérée. Je trace donc l'évolution de l'amplitude en fonction des paramètres basés sur l'épaisseur du substrat β_s^* et δ_s (Fig. 4.30). Je trace les "lignes de niveaux" de l'amplitude, c'est-à-dire les valeurs de β_s^* et δ_s pour lesquelles l'amplitude d'une onde prend une valeur donnée (de 1.5 à 4.5 sur environ 50 ondes). Les amplitudes se regroupent de manière homogène dans l'espace (β_s^*, δ_s) . On observe que l'on trouve des ondes d'amplitude élevée ($3 < h_m/h_s < 4.5$) soit lorsque la tension de surface domine, pour β_s^* grand et δ_s petit (ce qui est la signature du régime RP), soit lorsque l'inertie domine, pour β_s^* petit et δ_s grand (ce qui est la signature du régime DI). Lorsque β_s^* et δ_s sont de l'ordre de 1, les ondes ont une amplitude modérée ($h_m/h_s \sim 2.5$). A δ_s fixé, augmenter β_s^* (ce qui revient à augmenter l'effet de la tension de surface), revient à se déplacer verticalement dans le diagramme 4.30 et l'amplitude augmente ; de la même manière, en se déplaçant horizontalement dans le diagramme, c'est-à-dire en augmentant δ_s à β_s^* fixé (ce qui revient à augmenter l'effet de l'inertie), on augmente l'amplitude.

4.3.2.5 Les trois régimes de Kliakhandler et al.

On peut noter la similitude des motifs de la figure 4.28(a-b) avec les régimes b et a (respectivement) observés dans les expériences de Kliakhandler et al. (53) dont les lignes de courant ont été tracées dans (87) pour le modèle WRIBL et le modèle CM (sans aucune différence notable) et sont reproduites Fig. 4.31. Les expériences de Kliakhandler ont été réalisées sur une fibre de rayon $R=0.25$ mm, pour de l'huile de ricin (Castor oil) qui a les propriétés suivantes : $\rho=961$ kg.m⁻³, $\nu=44 \cdot 10^{-5}$ m².s⁻¹, $\gamma=31 \cdot 10^{-3}$ N.m⁻¹. Les paramètres de l'expériences et les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau 4.3. Kliakhandler a effectué ses mesures à 2 mètres de l'alimentation, et a donc observé des ondes saturées. Les valeurs de β^* nous indiquent que le régime b, régulier tout au long de la fibre, correspond effectivement à un mode global stable ($\beta^*=1.8 > 1.64$) caractérisé par des gouttes de grande amplitude se propageant sur un substrat mince. Le régime a est un régime instable proche de la transition vers une instabilité convective ($\beta^*=1.56 \gtrsim 1.507$). Il en résulte une déstabilisation du train d'ondes conduisant à la formation d'ondes isolées telles que celles

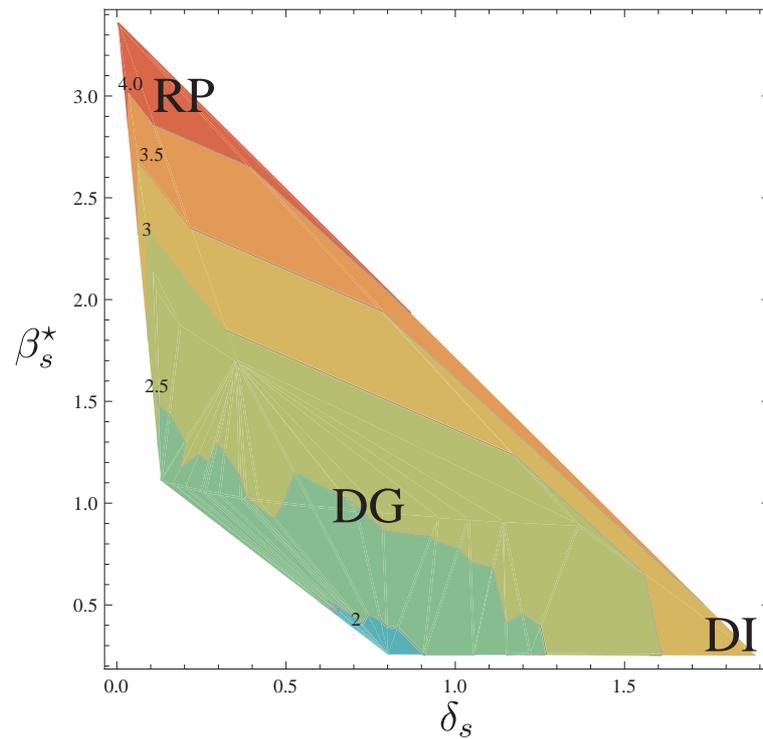


Fig. 4.30. Courbes de niveaux de l'amplitude des ondes h_m/h_s (mesurée expérimentalement sur environ 50 ondes). Chaque zone colorée représente une région dans laquelle les ondes prennent une amplitude comprise entre les deux valeurs frontières indiquées sur la figure (de 2 à 4), des basses amplitudes (en bleu) aux grandes amplitudes (en rouge).

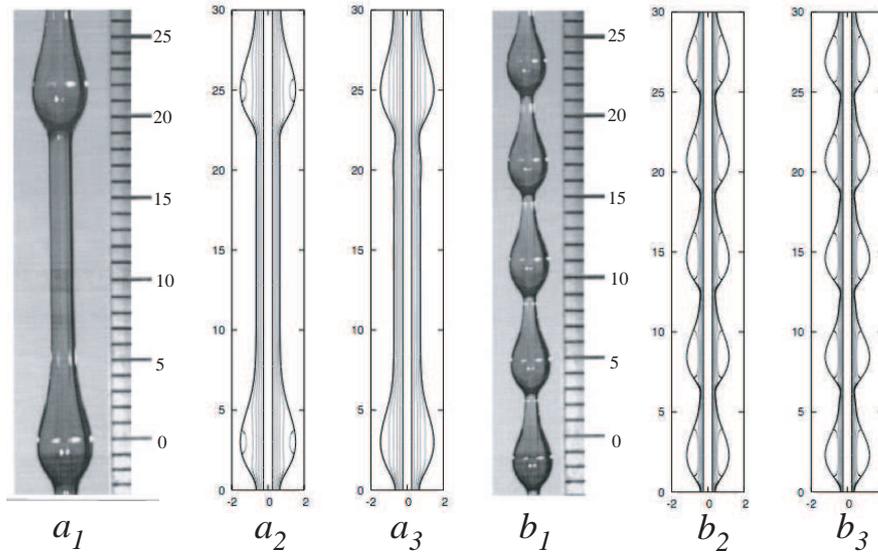


Fig. 4.31. *Expérience de Kliakhandler et al. (53). Régime a : Image a_1 et simulations avec les modèles WRIBL a_2 et CM a_3 . Régime b : Image b_1 et simulations avec les modèles WRIBL b_2 et CM b_3*

Exp.	Fluide	R (mm)	h_N (mm)	δ	β^*	λ (cm)	h_m/h_s	c (cm/s)	c/c_{ks}	δ_s	β_s^*
A	Huile de ricin	0.25	0.73	0.05	1.56	3	3.1	2.5	5	0.004	2.42
B	Huile de ricin	0.25	0.62	0.02	1.80	0.62	4.9	0.54	7.71	0.00002	3.43
C	V100	0.2	0.52	0.3	1.78	0.63	4.5	2.8	6.7	0.003	3.36
D	V50	0.2	0.64	4	1.4	1.8	3.4	15	4.17	0.2	2.36

Tab. 4.3. *A : Kliakhandler et al.(53) Régime a ; B : Kliakhandler et al.(53) Régime b ; C : Fig. 4.28 (a) ; D : Fig. 4.28 (b)*

observées par Kliakhandler. Dans les deux cas, on est en régime de gouttes (β^* grand et δ petit), ce que l'on peut aussi voir en constatant que les solutions de l'équation d'évolution CM sont en bon accord avec les expériences (voir (18) et (87) pour une comparaison quantitative). Si les valeurs de β^* sont identiques avec celles de nos expériences, les valeurs de δ sont elles beaucoup plus faibles (l'huile de ricin étant environ 10 fois plus visqueuse que l'huile silicone V50). Cependant, l'allure mais surtout l'amplitude h_m/h_s et les lignes de courant sont très proches ; il convient donc de comparer les quatre expériences en se basant sur l'épaisseur du substrat. Ainsi, on observe que, si les vitesses sont différentes, les vitesses rapportées à c_{ks} sont similaires. Les valeurs de β_s^* et δ_s nous indiquent que l'on est effectivement dans le même régime. On a donc bien identifié les paramètres pertinents permettant de discriminer entre les différents régimes, quel que soit le fluide utilisé.

Kliakhandler et al. ont également observé un régime (c) où des gouttes de grandes amplitudes sont éloignées les unes des autres ; dans ce cas, le film entre les gouttes n'est pas plat mais présente des oscillations. Ce régime correspond en fait au mode "goutte-à-goutte" (ou dripping) évoqué au chapitre 2. Dans ce cas, on ne forme pas de film uniforme mais le liquide coule comme à la sortie d'un robinet. Il est possible dans ce cas d'avoir un goutte-à-goutte régulier (comme pour le cas du robinet, voir par exemple (72)). Je présente sur la figure 4.32 des images que j'ai obtenues en mode dripping ; on peut noter la similitude avec le régime

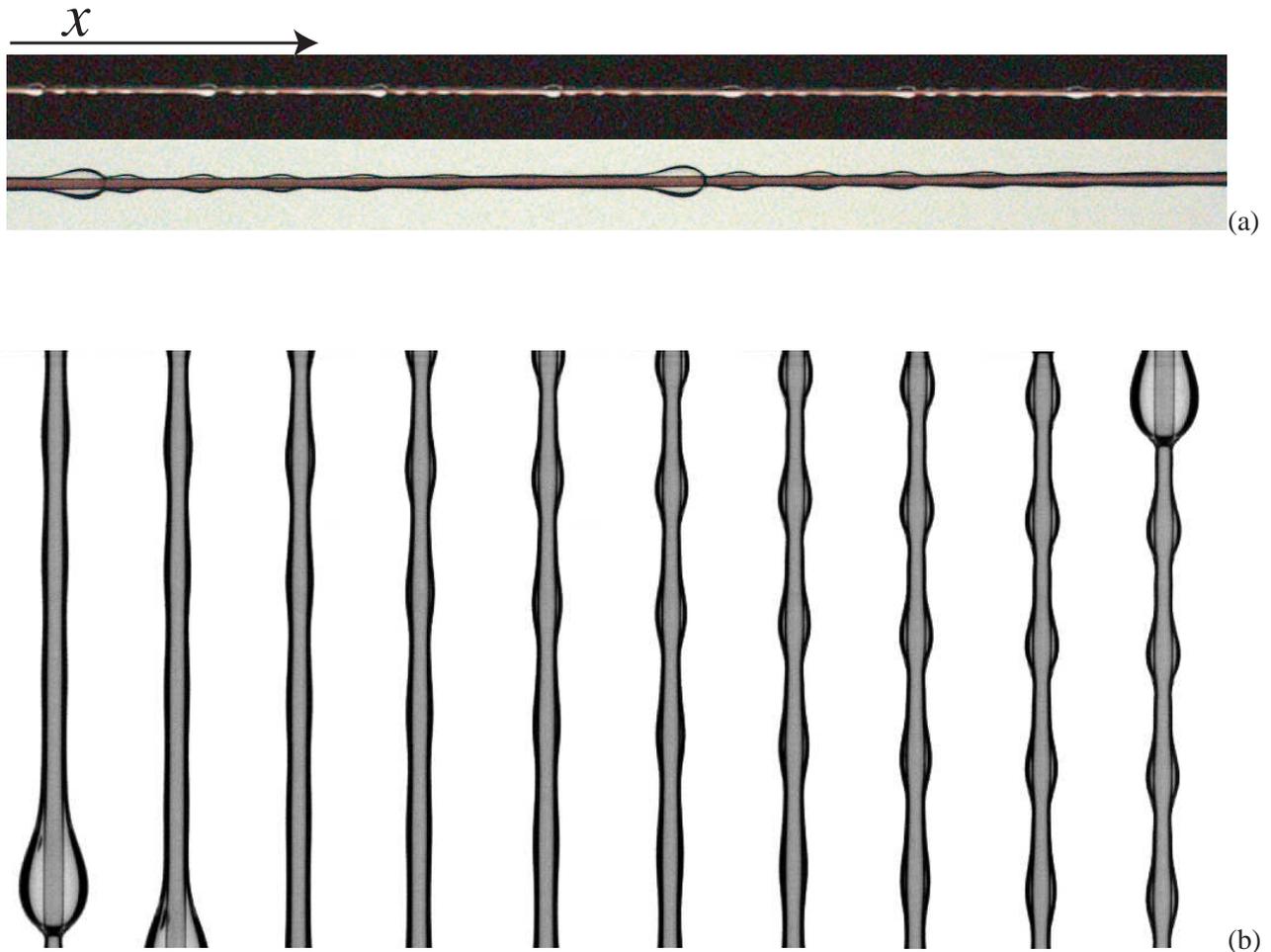


Fig. 4.32. (a) : Régime goutte à goutte sur une fibre de rayon $R=0.25$ mm. (b) : Instabilité de Rayleigh-Plateau entre deux gouttes sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm dans un régime goutte à goutte. La goutte laisse un film d'épaisseur uniforme quasi-statique $h=0.105$ mm, il se crée des oscillations régulièrement espacées, à la longueur d'onde $\lambda \simeq 3$ mm $\simeq \lambda_{RP} = 2.7$ mm, qui se déplacent lentement. Temps entre deux images successives : 0.12 s.

c de Kliakhandler. Comme l'a noté Kliakhandler, il y apparition d'oscillations régulièrement espacées entre ces gouttes. En effet, le film qui les sépare est très mince, plat et quasi statique. Si ce film reste non perturbé suffisamment longtemps, il est déstabilisé sous l'effet de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Mes mesures confirment que la longueur d'onde sélectionnée est effectivement la longueur d'onde $\lambda_{RP} = 2\pi\sqrt{2}(R+h)$. Ce comportement se retrouve dans mes expériences (dans le cas d'un film d'épaisseur uniforme s'écoulant sur la fibre) entre deux ondes suffisamment espacées, même à fort débit : si le film reste plat et non-perturbé suffisamment longtemps (pour une durée supérieure au temps de croissance de l'instabilité), il apparaît toujours ces oscillations régulières (Fig. 4.33). On retrouve ici la description très détaillée de Joseph Plateau : "Un fait curieux, c'est que l'identité entre les figures laminaires et les figures pleines se soutient dans le phénomène particulier que nous venons d'étudier ; en d'autres termes, quand une figure laminaire instable se partage spontanément en portions isolées, la séparation de celles-ci est de même accompagnée de la formation des filets, qui, eux aussi, se convertissent en sphérules, et ces filets, ainsi, que ces sphérules, sont

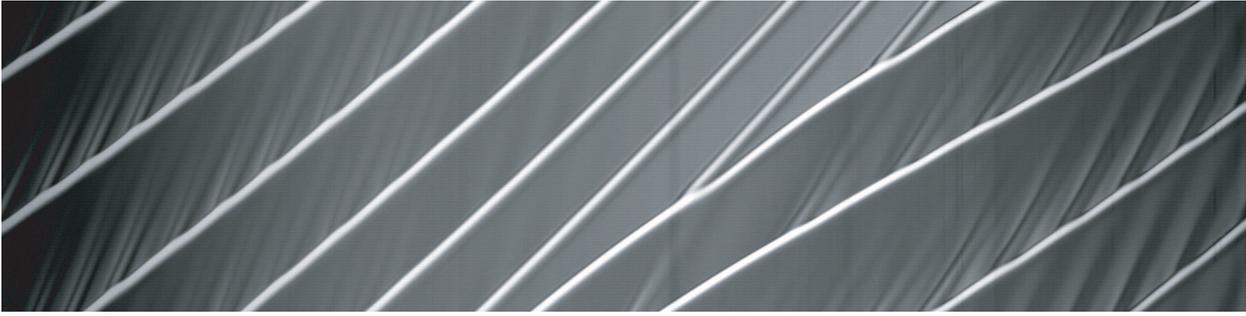


Fig. 4.33. *Diagramme spatio-temporel (durée : 1s) en bas de la fibre ($63\text{ cm} < x < 88\text{ cm}$) obtenu pour $R=0.32\text{ mm}$ ($R/l_c=0.21$) et $h_N=0.48\text{ mm}$ ($\alpha_N=1.5$). Présence d'oscillations régulières entre les gouttes ($\lambda \approx 5.8\text{ mm} \approx \lambda_{RP} \approx 5.4\text{ mm}$) alors que l'on est à fort débit et pas dans le mode goutte à goutte.*

alors laminaires comme la figure d'où ils proviennent."

4.3.2.6 Mise en évidence expérimentale des lignes de courant

Expérimentalement, il est difficile de mettre en évidence les lignes de courant au sein des structures. Un des moyens possibles serait de faire de la PIV, c'est-à-dire d'ensemencer notre huile de particules et d'envoyer une nappe laser afin de suivre leur mouvement dans un plan donné. Or, la PIV sur des petites structures (de taille inférieure au millimètre pour la plupart), rapides (vitesses de l'ordre du cm/s, voire de la dizaine de cm/s), qui plus est cylindriques est difficile. On se contente donc de retrouver qualitativement les comportements prédits numériquement, et notamment l'existence (ou la non-existence) d'une zone de recirculation. Pour cela, on "injecte" des particules de latex (d'environ $200\text{ }\mu\text{m}$) dans le fluide. Dans le cas d'une goutte se déplaçant relativement lentement (à environ 30 mm/s), on peut, avec un peu de doigté, déposer une seule particule posée sur l'extrémité d'une aiguille avec laquelle on "pique" la goutte. De la même manière, on peut déposer une particule dans le film mince. Dans le cas d'un régime d'ondes, les structures se déplacent à environ 10 cm/s et cette technique devient difficile à contrôler. De plus, on ne peut pas choisir l'endroit où l'on injecte la particule dans l'onde. On va donc injecter quelques particules dans le fluide et filmer l'écoulement en aval. Les mouvements du fluide et des particules sont suivis avec la caméra rapide, grâce à laquelle on effectue des diagrammes spatio-temporels permettant de visualiser la goutte et la particule (voir Annexe B pour la technique utilisée).

Sur la fibre de rayon $R=0.2\text{ mm}$, on peut observer des ondes à fort débit en régime convectif. On suit avec la caméra rapide (Fig. 4.34) quelques particules injectées dans le fluide (et entourées de ronds de différentes couleurs). Dans le film, la particule se déplace très lentement (le film est quasi statique). Elle est déplacée et accélérée lorsqu'elle se trouve dans une onde, mais n'est pas emportée. On a bien une onde qui se propage à la surface, sans transport de matière.

En revanche, à faible débit (pour un mode global) on est en présence de gouttes (Fig. 4.35). Une particule reste piégée dans la goutte, et effectue un mouvement de rotation, comme on peut le voir sur la succession d'images ou sur le diagramme spatio-temporel : la particule passe d'un bord à l'autre de la goutte sans en sortir. Elle remonte rapidement le long de la paroi, puis redescend plus lentement près de l'interface, pour

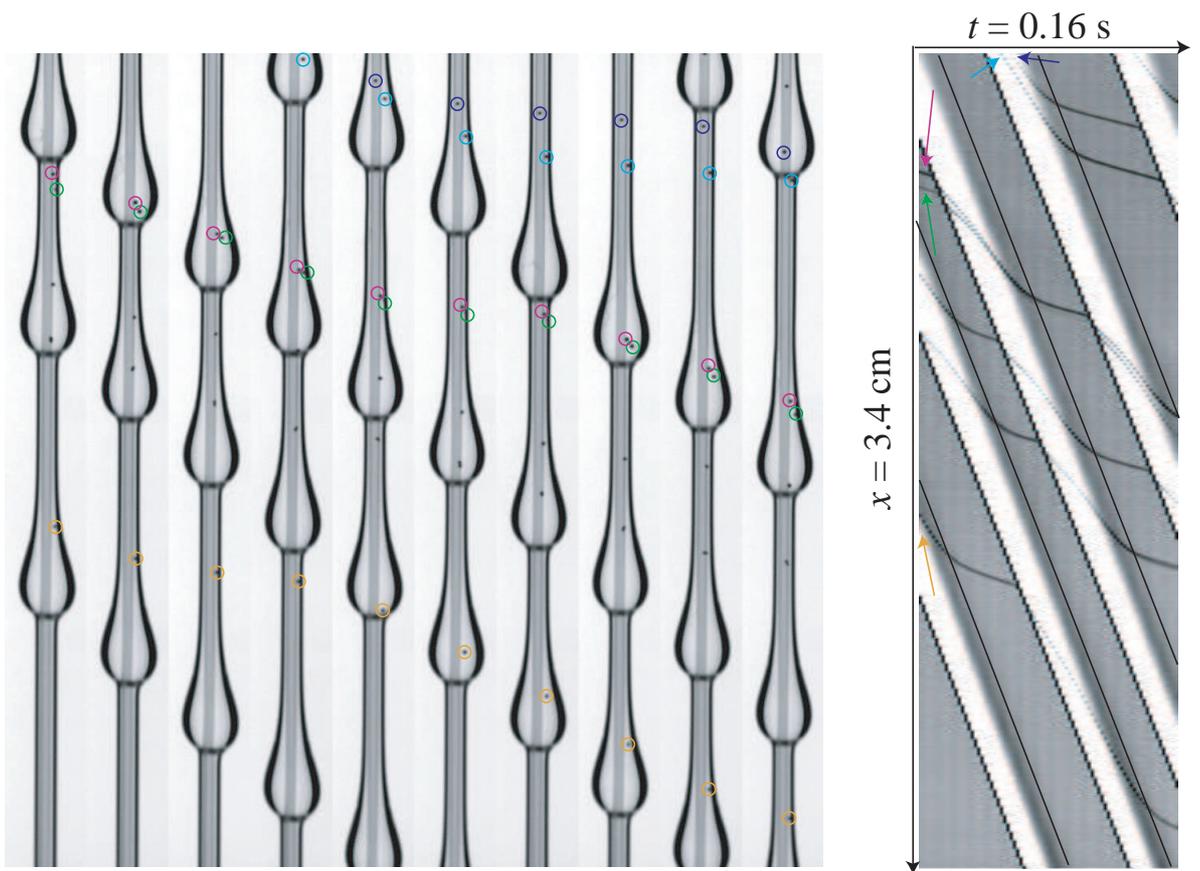


Fig. 4.34. Une onde : succession d'images et diagramme spatio-temporel (les ondes sont en blanc, le film mince en gris et les particules en noir). Les flèches indiquent les particules que l'on suit.

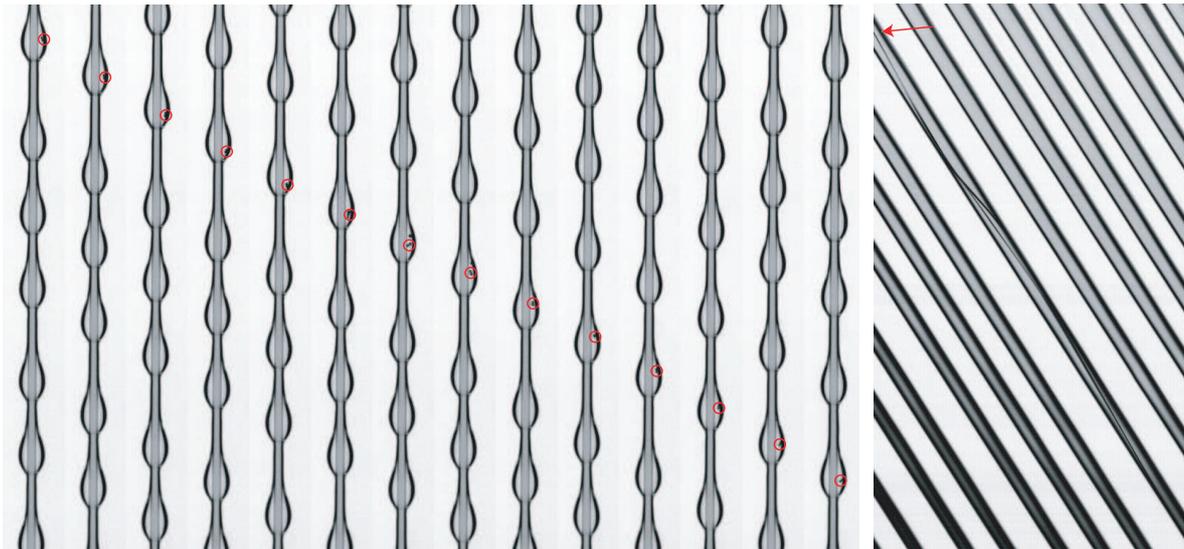


Fig. 4.35. Une goutte : succession d'images et diagramme spatio-temporel. Cette fois, les gouttes sont en gris et l'espace entre les gouttes (film très mince) est représenté en blanc. La flèche indique la particule que l'on suit.

ensuite remonter... Ce mouvement est isolé sur la figure 4.36.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai étudié les régimes convectifs pour lesquels le système se comporte comme un amplificateur de bruit. Le système amplifie alors toute perturbation créée en entrée de manière sélective. L'analyse de stabilité linéaire permet d'obtenir le taux de croissance de l'instabilité, et ainsi d'identifier différents type de réponse. Lorsque l'excitation en entrée est un bruit blanc (le bruit ambiant), le système répond à une fréquence f_E correspondant à la fréquence la plus amplifiée spatialement f_M . En présence d'un forçage (i.e. de perturbations périodiques), la réponse du système résulte d'une compétition entre l'amplification du bruit ambiant à la fréquence f_M , l'amplification du signal de forçage f_{for} et de ses harmoniques. Le système répond en premier lieu à la fréquence la plus amplifiée, i.e. la plus proche de f_M . Un phénomène non-linéaire peut conduire au transfert d'énergie d'une harmonique à une autre. En imposant un forçage, on peut synchroniser l'écoulement. Lorsque le bruit ambiant est autant amplifié que le signal de forçage, l'écoulement est déstabilisé. Finalement, il existe une fréquence de coupure au-delà de laquelle les perturbations ne sont plus amplifiées, et le système se comporte comme en absence de forçage.

La synchronisation de l'écoulement s'accompagne de la création d'ondes non-linéaires saturées, appelées ondes propagatives, ou *travelling waves*. La forme, la vitesse et les lignes de courant internes de ces ondes ont été caractérisées et dépendent du régime dans lequel on se trouve. Dans les régimes de gouttes, l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine et on l'observe des gouttes de grande amplitude dont la forme ne dépend pas des conditions d'écoulement. De plus, les lignes de courant indique la formation d'une large zone de recirculation. Dans les régimes d'ondes (Drag Gravity, DG), l'écoulement domine et on observe des ondes d'amplitude modérée dont le front se raidit lorsque les ondes sont plus isolées. Dans la plupart des cas, on

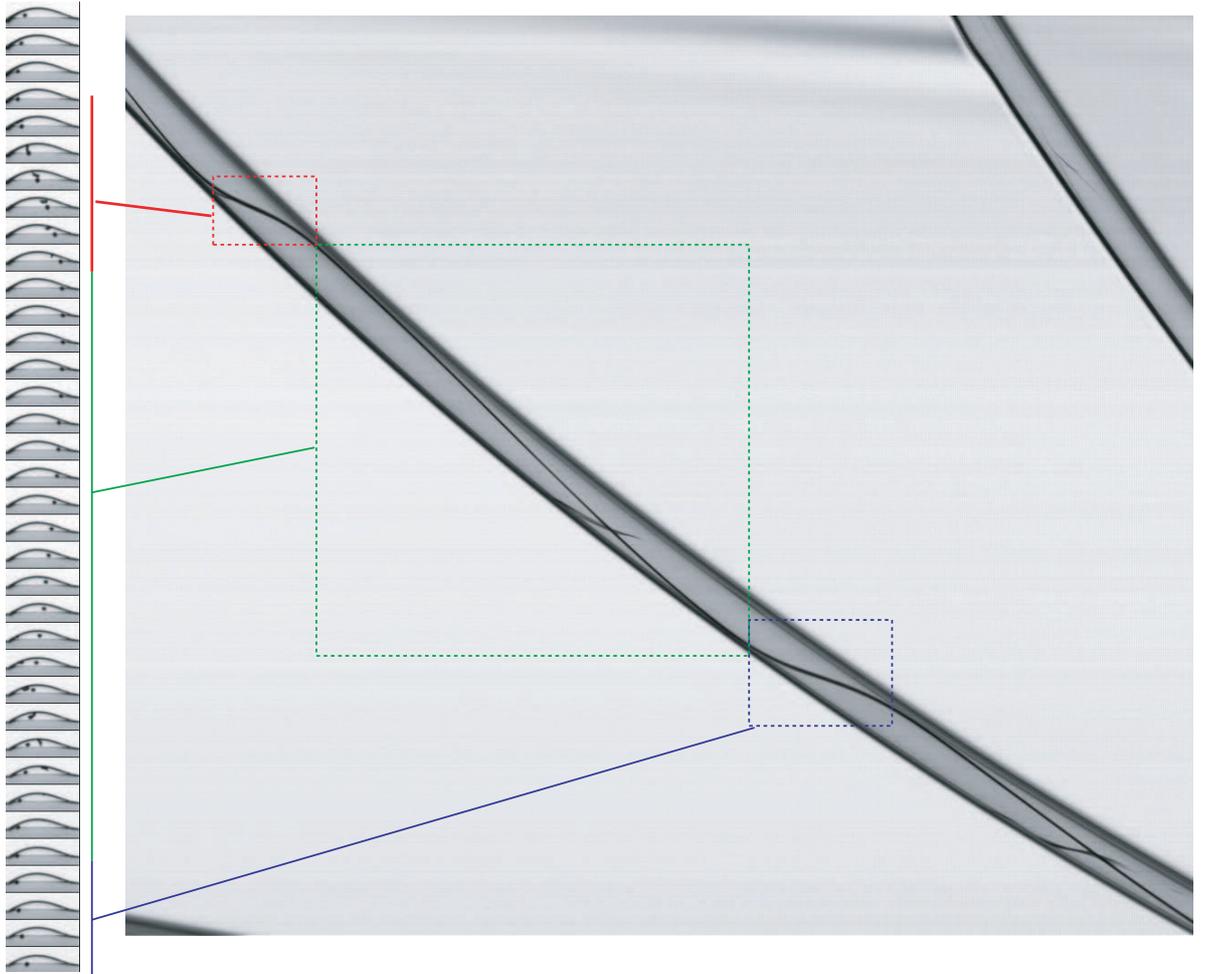


Fig. 4.36. Mise en évidence d'une zone de recirculation dans une goutte en suivant une particule (point noir sur les images et ligne noire sur le diagramme spatio-temporel).

ne note pas de recirculation et les ondes se propagent sans transporter de masse. Si l'on a peu exploré la région où l'instabilité de Kapitza dominait (Drag Inertia, DI), c'est-à-dire lorsqu'on se rapproche du cas plan, on a tout de même noté que la transition du régime DG au régime DI se manifestait par l'apparition d'ondes de grande amplitude présentant une zone de recirculation et une saturation de la vitesse.

J'ai de plus montré que les échelles pertinentes pour adimensionner l'amplitude et la vitesse des ondes était l'épaisseur et la vitesse du substrat. La carte des régimes établie en fonction de l'épaisseur de Nusselt donne une première bonne indication sur les mécanismes dominants. En revanche, pour discriminer finement entre régimes de gouttes et régimes d'ondes et au sein de ces régimes, il faut prendre en compte d'autres paramètres, comme la fréquence de forçage, c'est-à-dire l'épaisseur du substrat sélectionnée. Ainsi, les paramètres β_s^* et δ_s basés sur l'épaisseur du substrat permettent de caractériser les différents régimes. Lorsque $\beta_s^* > 2$, la tension de surface domine, conduisant à la formation de *gouttes*. Lorsque $\delta_s \sim 0.5$, les effets de l'inertie commencent à jouer et les ondes se raidissent lorsque δ_s augmente. Pour $\delta \sim 1.5$, l'inertie devient le mécanisme prépondérant, conduisant à la formation d'ondes de grande amplitude.

Finalement, nous avons aussi mis en évidence le rôle particulier de la viscosité qui ralentit les ondes et supprime les oscillations capillaires au front des ondes. La diffusion visqueuse a un effet dispersif sur les ondes linéaires. On s'attend à ce que ces effets dispersifs jouent un rôle dans les interactions entre ondes que l'on va étudier au chapitre suivant.

Chapitre 5

Des ondes qui s'aiment ... ou se détestent

La proximité installe, à la longue, une étrange distance.

Nathalie Petrowski, Il restera toujours le Nébraska (1991)

Dans ce chapitre, on se place en régime convectif à rayon de fibre modéré ($0.2 \text{ mm} < R < 0.475 \text{ mm}$). Dans ce cas, les effets visqueux et capillaires sont importants ($\beta^* \sim 1$, $\delta \sim 0.5$). Dans ces régimes, on observe trois domaines distincts le long de la fibre :

- le film se déstabilise en un train d'ondes primaire régulier.
- ce train d'ondes primaire se déstabilise à son tour.
- les ondes solitaires émergeant de cette déstabilisation se réorganisent alors via des interactions complexes.

Dans ce chapitre, nous étudions ces interactions. Cette étude a été menée en collaboration avec Serafim Kalliadasis et Dmitri Tseluiko de l'Imperial College (Londres). Un accord franco-britannique (partenariat Hubert Curien 2006/2008) a permis plusieurs séjours afin de nous même *interagir* sur ces interactions, d'un point de vue à la fois expérimental et théorique. La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont reportés dans (25; 101).

5.1 Observations

Sérendipité : Capacité, à la suite d'un concours de circonstances particulier, à trouver quelque chose que l'on ne cherchait pas, d'en comprendre l'intérêt et de décider de l'exploiter immédiatement (5).

La notion de sérendipité, issue de l'aventure des Trois princes de Sérendip, conte persan du XIII^{ème} siècle repris par Voltaire dans Zadig, est créée en 1754 par Horace Walpole pour signifier des "*découvertes inattendues, faites grâce au hasard et à l'intelligence*". Alors que j'étudiais les régimes convectifs sur des fibres de petits rayons, j'ai observé un phénomène curieux et particulièrement esthétique : les ondes se repoussaient parfois, et semblaient se regrouper par "paquets" de deux ou trois ondes. En imposant un forçage, j'ai pu observer la formation régulière et périodique de tels paquets... En les observant de plus près, j'ai pu noter qu'ils provenaient des interactions complexes entre les ondes, celles-ci se repoussant ou s'attirant. Ce phénomène n'avait jamais été observé sur la fibre de grand rayon, ni à faible débit. Ainsi, ces interactions particulière et la formation de "paquets" qui en découle se fait dans les régimes où l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau est en compétition avec les effets de la viscosité, à savoir pour des rayons de fibre $0.2 \text{ mm} < R < 0.475 \text{ mm}$, de l'huile V50 et des épaisseurs $0.6 \text{ mm} < h_N < 0.95 \text{ mm}$. Les paramètres sans dimensions pertinents pour décrire l'écoulement sont alors le nombre de Reynolds, $Re = \rho U_0 h_N / \eta$, et le nombre de Weber, $We = \gamma / (\rho U_0^2 h_N)$ où $U_0 = \rho g h_N^2 / (2\eta)$ est une vitesse caractéristique définie par un équilibre gravité/viscosité. Ainsi, les "paquets" (dont on donnera une définition plus précise au cours du chapitre) se produisent pour des épaisseurs telles que l'on est à grand nombre de Weber ($30 > We > 3$) et à faible Reynolds ($0.4 < Re < 1.7$). Dans ce chapitre, nous allons donc détailler les observations faites dans ces régimes visco-capillaires, puis nous proposerons une explication qualitative des phénomènes d'interactions observés. Nous verrons alors comment ces interactions conduisent à la formation d'états liés. Je décrirai ensuite la théorie d'interactions de structures cohérentes développée à l'Imperial College par Serafim Kalliadasis, Dmitri Tseluiko et Sergey Saprykin, et nous verrons qu'elle permet de retrouver les comportements observés.

5.1.1 Dynamique

Comme on a pu l'observer tout au long de cette thèse, dans la plupart des régimes, le train d'ondes primaires se déstabilise. L'évolution naturelle typique le long de la fibre est présentée sur la figure 5.1. Le train d'ondes primaire reste régulier sur environ 20 cm, puis se déstabilise : on observe de nombreuses coalescences (Fig. 5.1A) et des répulsions (Fig. 5.1B) au cours desquelles les ondes échangent du fluide via le film mince les séparant. Les coalescences (ou appariements) sont caractérisé par des fusions de lignes sur le spatio, tandis que les répulsions correspondent à des "pincements" de lignes. Après une certaine distance sur la fibre (typiquement 60-80 cm), on n'observe plus de coalescences. Les ondes formées sont quasi-stationnaires ; en effet, elles se propagent à vitesse quasi constante sans changer de forme. On nommera ces structures bien localisées pulses (elles ont en effet un aspect corpusculaire plutôt qu'ondulatoire). La dynamique de l'écoulement en bas de la fibre ($x > 70 \text{ cm}$) est présentée sur la figure 5.2 pour deux débits. A faible débit (Fig. 5.2(a)), on observe que les pulses se propagent à vitesse quasi-constante et que tous les pulses ont une vitesse proche ; dans cet exemple, la vitesse moyenne des pulses passant en bas de la fibre est de $12.8 \pm 0.2 \text{ cm/s}$ (soit 1.6% d'écart maximum). De plus, la forme et l'amplitude de ces pulses sont identiques. Ces pulses se réorganisent quelque peu via des interactions faibles avec leurs voisins : deux

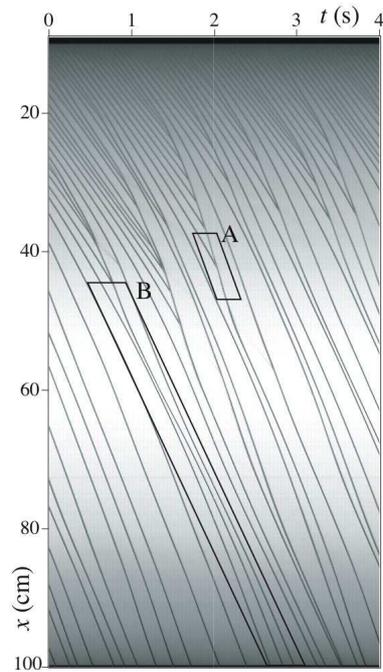


Fig. 5.1. Evolution naturelle le long de la fibre : diagramme spatio-temporel pour $R=0.35$ mm, $h_N=0.85$ mm. Interactions fortes : A coalescence, B répulsion.

pulses voisins s'attirent (Fig. 5.2A) ou se repoussent (Fig. 5.2B) jusqu'à être à une distance donnée l'un de l'autre. Cette distance reste constante par la suite, les pulses se propageant alors à vitesse constante. Ainsi, les deux pulses se comportent comme un seul objet, formant un *état lié*. Ces mécanismes d'interaction sont lents par rapport à la vitesse d'advection des ondes. A plus fort débit (Fig. 5.2(b)), les pulses deviennent stationnaires plus bas sur la fibre et continuent à se réorganiser sur une distance plus longue, les ondes étant advectées plus rapidement. On observe néanmoins la formation d'états liés à deux pulses (Fig. 5.2C : attraction) ou à trois pulses (Fig. 5.2D : répulsion). Dans un premier temps, on va s'attacher à décrire les mécanismes d'interaction en étudiant en détail les interactions avec échange de masse observées en haut de la fibre puis entre pulses stationnaires observées en bas de la fibre. On s'intéressera ensuite à ce dernier type d'interaction, et on verra comment le système se réorganise.

5.1.2 Interactions

5.1.2.1 Avec échange de masse : interactions fortes

Ces interactions ont lieu au milieu de la fibre ($10 < x < 60$ cm) lors de la déstabilisation du train d'ondes primaire et peuvent mettre en jeu des ondes d'amplitude et vitesse initiale différentes.

Nous allons tout d'abord détailler une coalescence. Ce phénomène est représenté sur les figures 5.3 et 5.4. Une onde (notée **1**) se rapproche rapidement d'une onde **2** qui la précède. Les deux ondes entrent en contact et s'attirent : l'onde 1 accélère légèrement (augmentation de la pente sur le spatio 5.4) tandis que l'onde 2 ralentit légèrement (diminution de la pente sur le spatio). Du fluide est drainé des crêtes des ondes vers le creux situé entre les ondes, jusqu'à former une goutte parfaitement plate allongée (image centrale sur la figure 5.3). Cette goutte s'"arrondit" alors, jusqu'à retrouver une forme d'onde avec un front raide. L'onde

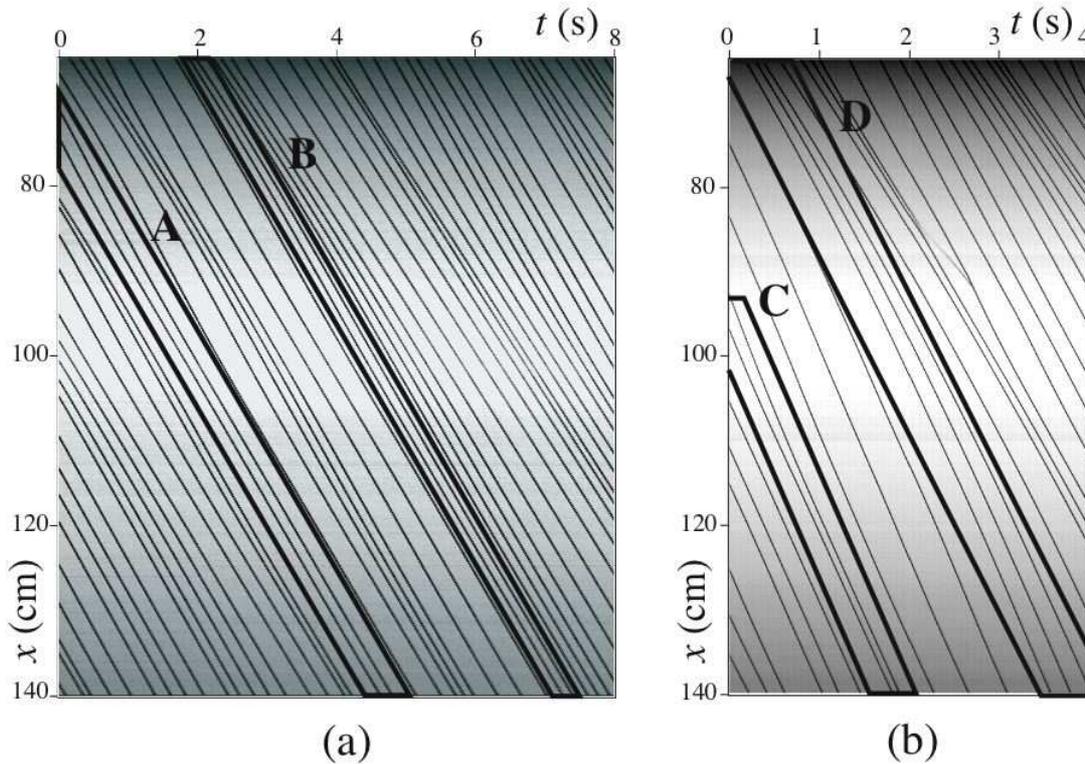


Fig. 5.2. Evolution naturelle en bas de la fibre : diagramme spatio-temporel pour $R=0.45$ mm, (a) : $h_N=0.66$ mm ($We=18$, $Re=0.56$), (b) : $h_N=0.74$ mm ($We=10$, $Re=0.8$). Interactions faibles et formation d'états liés : attractions (A et C) et répulsions (B et D).

ainsi obtenue a une amplitude plus importante, d'où l'augmentation de vitesse observée sur le spatio 5.4 et sur la succession d'image 5.3.

Nous allons maintenant détailler une répulsion. Ce phénomène est représenté sur la figure 5.5. Une onde **1** se déplace avec une vitesse plus grande que l'onde **2** qui la précède. Comme précédemment, elles vont donc se rapprocher l'une de l'autre. Lorsqu'elles sont proches, l'amplitude de **1** diminue subitement, et donc l'onde ralentit. Dans le même temps, l'amplitude de **2** augmente, celle-ci accélérant donc (ces comportements sont facilement déduit des pentes des lignes sur le spatio 5.5.). Les ondes échangent du fluide et s'éloignent l'une de l'autre : elles se repoussent jusqu'à un ré-équilibre de la taille des pulses. Lorsqu'elles sont distantes d'une certaine longueur, leurs vitesses deviennent constantes et égales (on observe deux lignes parallèles sur le spatio). On obtient donc deux ondes stationnaires de mêmes taille et vitesse séparées d'une distance fixe.

Finalement, ces interactions conduisent à la formation de pulses quasi-stationnaires, d'amplitude et vitesse quasi-constante interagissant faiblement avec leurs voisins.

5.1.2.2 Interactions faibles

Ces interactions se produisent en bas de la fibre ($x > 60$ cm). Dans ce cas, les échanges de fluide semblent alors faibles. Les interactions ont lieu entre pulses d'amplitude et de vitesse très proches.

La figure 5.6 présente une attraction et une répulsion conduisant à la formation d'états liés de deux pulses.



Fig. 5.3. Coalescence de deux ondes : succession d'images tous les $\Delta t = 0.02s$.

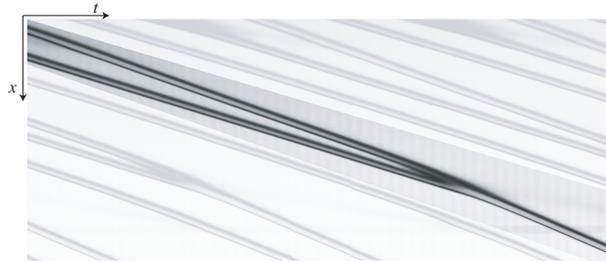


Fig. 5.4. Coalescence de deux ondes : diagramme spatio-temporel.

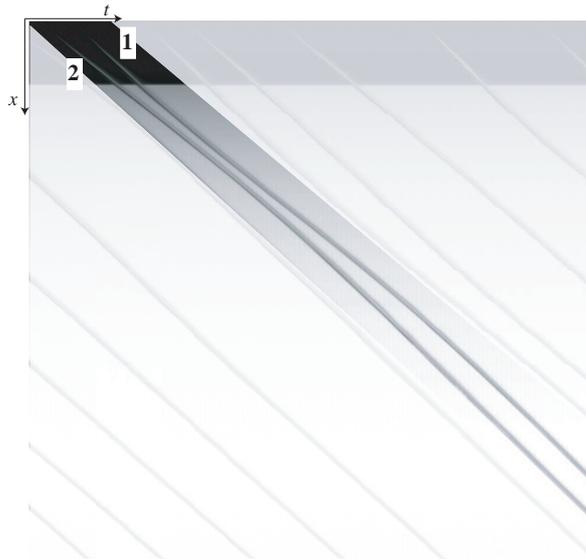


Fig. 5.5. Répulsion de deux ondes : diagramme spatio-temporel.

Lors d'une attraction, l'onde amont **1** accélère légèrement, tandis que l'onde aval **2** ralentit légèrement. Les ondes se rapprochent donc, jusqu'à ce qu'elles soient toutes deux à la même vitesse ; la distance entre les pulses restent alors constante et les pulses forment un état lié. Cette attraction est difficile à observer. Il arrive même parfois que le rapprochement de deux ondes soit le résultat d'une répulsion à courte distance : l'onde amont se déplace plus vite que l'onde aval, et donc les deux ondes se rapprochent, jusqu'à être à une distance proche l'une de l'autre (de l'ordre de 2 cm). L'onde aval accélère alors rapidement, pour se trouver à la même vitesse que l'onde amont et donc former un état lié, en limitant le rapprochement des ondes. La répulsion est elle plus nette. Lors d'une répulsion, l'onde amont **1** ralentit légèrement, tandis que l'onde aval **2** accélère légèrement. Les ondes s'éloignent donc, jusqu'à ce qu'elles soient toutes deux à la même vitesse ; la distance entre les pulses restent alors constante et les pulses forment un état lié.

5.1.2.3 Mécanismes d'interaction

Le mécanisme d'interaction est d'origine hydrodynamique, par le recouvrement des extrémités de pulses voisins. Les interactions dépendent donc fortement de la forme des pulses. Rappelons que dans ces régimes (voir Chap.4), les ondes présentent un front raide (dû à une effet cinématique non-linéaire) précédé de quelques oscillations capillaires rapidement amortie par la friction visqueuse. Les frottements visqueux et la gravité sont responsable de la queue monotone en pente douce.

On peut comprendre les interactions qualitativement en observant les gradients de pression capillaire qui se produisent lorsqu'un front oscillant recouvre une queue monotone en s'inspirant du mécanisme décrit par Chang et Demekhin (16). Sachant que deux ondes interagissent via leur extrémités, nous allons considérer deux pulses identiques **1** et **2** qui interagissent via le front de **1** et la queue de **2**. Ces pulses sont stationnaires, leur forme est constante, la surpression de Laplace au sein d'une telle onde est donc constante. On va pouvoir décrire deux processus d'interaction possibles représentés schématiquement sur la figure 5.7 :

- (a) Les deux ondes sont séparées d'une distance telle que la queue de **2** rencontre un creux d'une des oscillations présentes devant **1**. La courbure de l'interface étant plus forte au niveau de ce creux que dans la queue de **2**, la surpression de Laplace ($\Delta P = -\gamma d^2 h / dx^2$) y est plus faible. Il y a donc un gradient de pression qui draine du fluide de l'onde **2** vers le front de **1**. La courbure du front de **1** diminue, provoquant un mouvement de fluide vers la crête de **1** dont l'amplitude, et donc la vitesse augmente. Parallèlement, l'amplitude de **2** diminue et l'onde ralentit. Ainsi, les deux ondes vont se rapprocher de manière quasi-uniforme (on considère que les gradients de pression capillaire, et donc les échanges de fluides, sont faibles). On a donc là attraction des ondes. Ces mouvements relatifs se rajoutent au mouvement global des ondes qui sont advectées à une vitesse c .
- (b) Les deux ondes sont séparées d'une distance telle que la queue de **2** rencontre une bosse d'une des oscillations présentes devant **1**. Dans ce cas, la pression dans le fluide sous la bosse est supérieure à la pression du fluide dans la queue de **2** qui présente une courbure dans l'autre sens. Le gradient de pression est donc cette fois tel que le fluide est drainé de **1** vers **2**. La courbure de la queue de **2** diminue, provoquant un mouvement de fluide vers sa crête. Ainsi l'amplitude de **2** augmente et celle-ci accélère tandis que l'amplitude de **1** diminue et que celle-ci ralentit. Ainsi, les deux ondes vont s'éloigner l'une de l'autre de manière quasi-stationnaire.

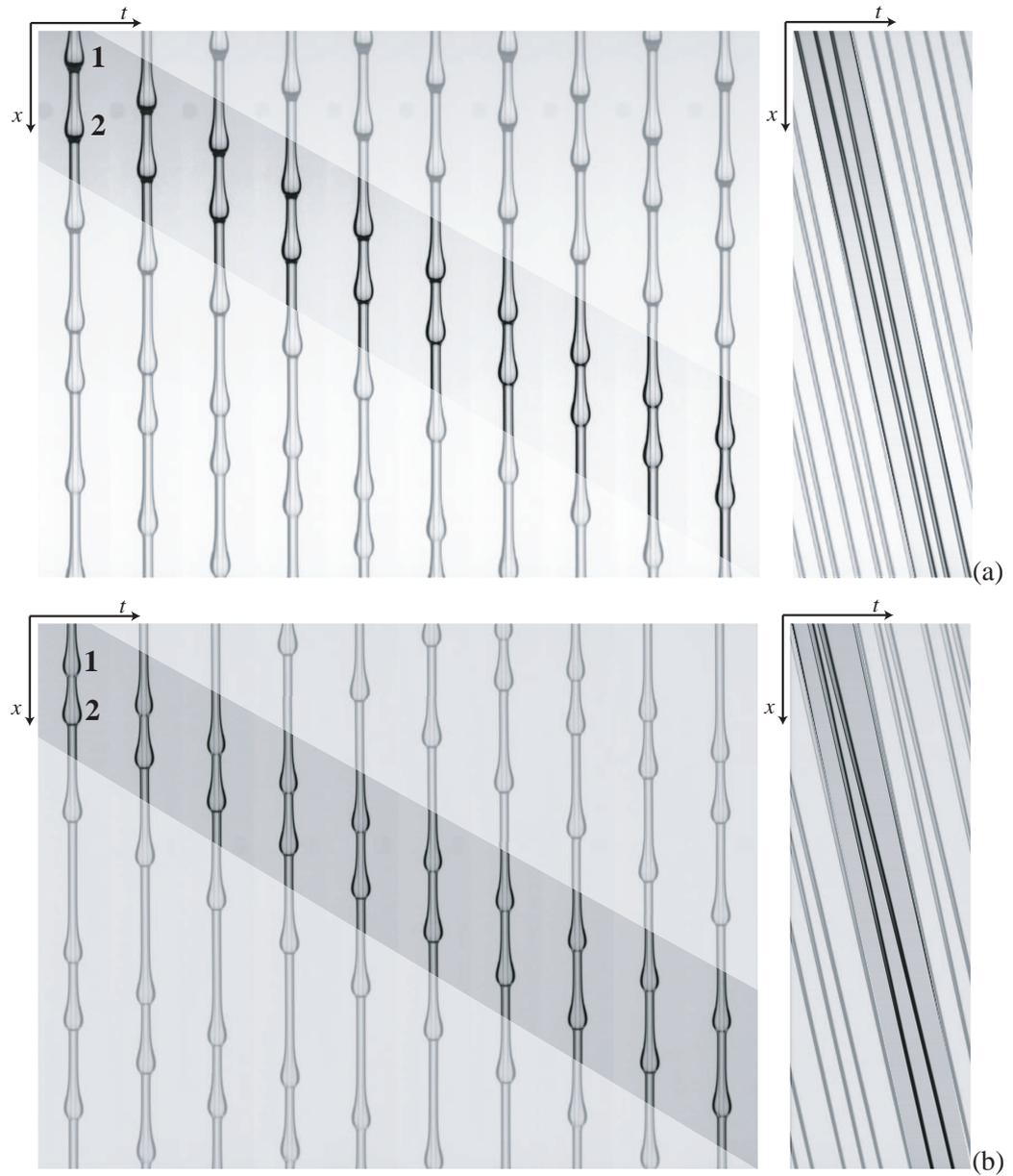


Fig. 5.6. (a) Attraction : $R = 0.35 \text{ mm}$, $h_N = 0.85 \text{ mm}$, V50 (hauteur sur la fibre : 9 cm) et (b) repulsion : $R = 0.35 \text{ mm}$, $h_N = 0.92 \text{ mm}$, V50 (hauteur sur la fibre : 7 cm). Chronophotographie réalisée en prenant une image toutes les 0.08 s. Diagramme spatio-temporel correspondant.

Ce mécanisme suggère l'existence d'un potentiel d'interaction périodique et donc l'existence de plusieurs "tailles" d'états liés possibles. Dans le cas d'interactions fortes, ce phénomène de drainage capillaire est

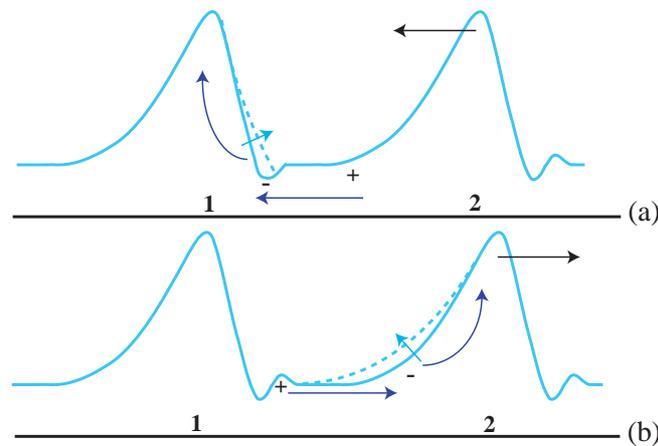


Fig. 5.7. (a) : *Attraction de deux ondes* ; (b) : *Répulsion de deux ondes*. Les mouvements relatifs des ondes (flèches noires) sont donnés dans le référentiel en mouvement de l'onde 1.

renforcé, et les ondes ne sont pas toujours de même amplitude. Dans le cas d'une attraction résultant en une coalescence (Fig. 5.3), du fluide est aussi drainé des crêtes vers le creux suivant un gradient de pression capillaire, jusqu'à fusion complète des deux gouttes. Dans le cas d'une répulsion forte, les mouvements de fluide sont aussi amplifiés : l'onde amont échange une grande quantité de fluide avec l'onde aval, ce qui produit le brusque et important changement de vitesse observé expérimentalement (particulièrement visible dans le "pincement" Fig. 5.1B).

Comme noté en début de chapitre, ces diverses interactions tendent à réorganiser le système. Lors de cette réorganisation, en bas de la fibre, le mécanisme dominant semble être les interactions faibles (le recouvrement des extrémités des ondes), les échanges de fluides étant faibles et aucune coalescence n'étant observée. On va donc se concentrer sur ce mécanisme par la suite. Dans un premier temps, on va étudier la réorganisation de l'écoulement.

5.1.3 Formation d'états liés

Les pulses interagissant entre eux finissent par former des états liés, gardant ensuite une distance fixe entre eux. On n'observe cependant aucune régularité évidente en bas de la fibre qui serait la signature de ces réarrangements. Les interactions étant moins rapides que l'advection des ondes par l'écoulement, une telle régularité n'est peut-être pas observable sur une fibre de longueur raisonnable. Afin de voir si le système se dirige vers un réarrangement, j'ai donc fait des statistiques sur les distances entre pulses en bas de la fibre.

5.1.3.1 Un désordre secrètement bien ordonné

On se place donc en bas de la fibre ($1.2 \text{ m} < x < 1.4 \text{ m}$) et on mesure la distance entre deux pulses successifs sur les diagrammes spatio-temporels. On répète cette mesure sur un grand nombre de pulses (de 500 à 800), c'est-à-dire sur une durée importante, en prenant soin de ne compter chaque pulse qu'une fois lors de son passage dans notre fenêtre de mesure. On peut alors tracer la distribution des distances entre

pulses. De tels histogrammes sont présentés sur la figure 5.8. Bien que la distribution de distances soit large, on voit apparaître quelques pics distincts. Par exemple, pour $R=0.45$ mm et $h_N=0.66$ mm (Fig. 5.8(a)) correspond au diagramme spatio-temporel 5.2(a)), quatre distances sortent du lot : $L_1 = 1.2 \pm 0.2$ cm, $L_2 = 1.8 \pm 0.3$ cm, $L_3 = 2.6 \pm 0.2$ cm et $L_4 = 3.35 \pm 0.25$ cm. Ainsi, des statistiques conduites en bas de la fibre indiquent une certaine réorganisation du système, avec quelques distances préférentielles entre les pulses. Ces observations sont identiques pour une large gamme d'épaisseur et pour des rayons R de 0.35 et 0.45 mm. Les pics observés sur l'histogramme s'affinent lorsqu'on descend le long de la fibre. En augmentant l'épaisseur initiale, la réorganisation est retardée, les ondes étant advectées plus rapidement, comme on peut le noter sur l'histogramme Fig. 5.8(b) et sur le diagramme spatio-temporel 5.2(b) ; les pics sont moins bien définis, néanmoins cinq distances préférentielles émergent : $L_1 = 1.57 \pm 0.13$ cm, $L_2 = 2.07 \pm 0.13$ cm, $L_3 = 2.7 \pm 0.25$ cm, $L_4 = 3.7 \pm 0.25$ cm et $L_5 = 4.34 \pm 0.13$ cm. Ainsi, le système semble se diriger vers un régime ordonné, composé d'états liés, les pulses étant placés à un nombre fini de distances préférentielles.

Rappelons que le système est en régime convectif et qu'il existe trois domaines le long de la fibre : un

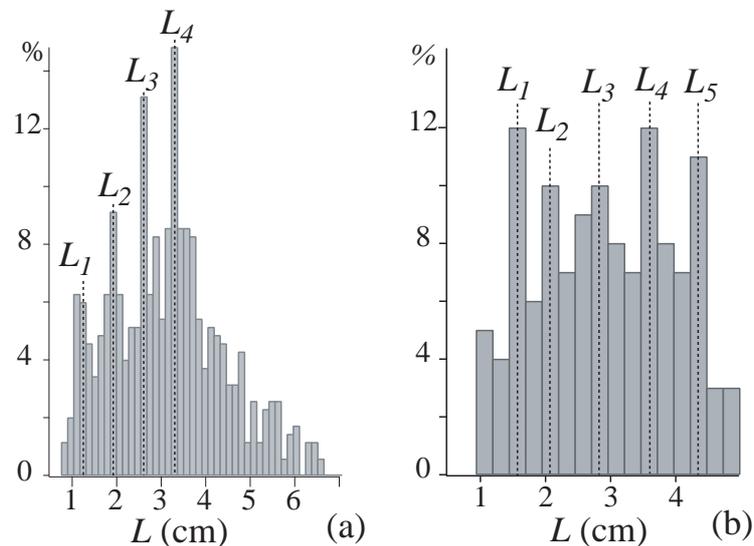


Fig. 5.8. Histogrammes des distances entre pulses (par rapport au nombre total de pulses) réalisés en bas de la fibre ($1.2 \text{ m} < x < 1.4 \text{ m}$) pour $R=0.45$ mm, (a) : $h_N=0.66$ mm, (b) : $h_N=0.74$ mm correspondant à la figure 5.2.

train d'ondes primaire qui se déstabilise, conduisant à une large distribution de distances entre pulses qui se réorganise alors lentement pour faire émerger un certain nombre de distances préférentielles (ou états liés). Il apparaît qu'en imposant un forçage particulier (décrit par la suite), on peut capturer ces distances préférées plus rapidement en réduisant la distribution initiale de distances.

5.1.3.2 Un ordre forcé

Le forçage est obtenu en imposant des perturbations de pression dans le réservoir supérieur, selon la procédure décrite au chapitre 2 et utilisée au chapitre 4. Ici, le forçage doit être faible, afin de laisser aux ondes la liberté d'interagir pour que le système relaxe vers son équilibre sans être synchronisé. On peut

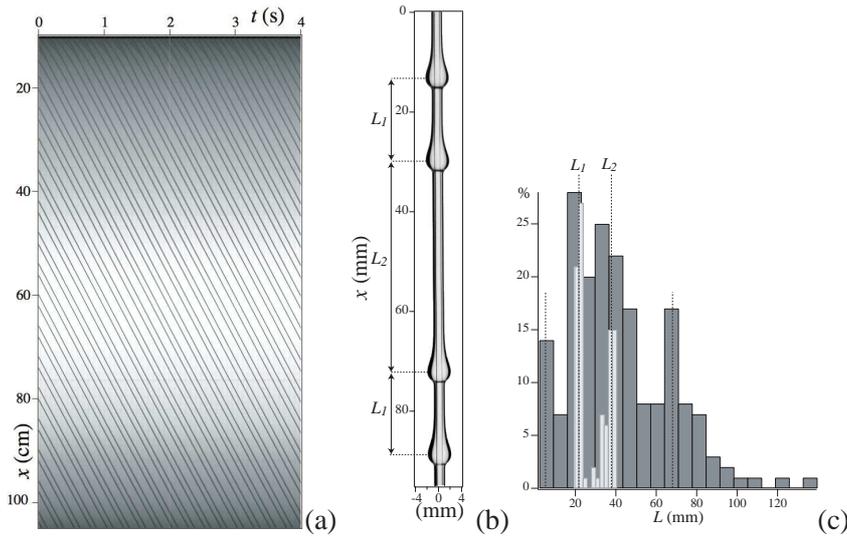


Fig. 5.9. *Etat lié forcé pour $R=0.35$ mm, $h_N=0.85$ mm (a) diagramme spatio-temporel, (b) photo de l'écoulement à $x \sim 45$ cm de l'alimentation (c) Histogrammes des distances entre pulses (par rapport au nombre total de pulses) sans forcer (sombre) et en forçant (clair).*

obtenir un tel forçage en forçant à basse fréquence et à faible amplitude. Si l'on force à haute fréquence ou grande amplitude, le signal n'est pas modulé et la réponse du système est périodique. Dans le cas d'un forçage faible, comme noté au chapitre 4, le signal de forçage entre en compétition avec l'amplification du bruit ambiant et on obtient un signal périodique fortement modulé. Le signal en entrée de la fibre est alors à une fréquence proche de f_M mais assez désorganisé (modulé en amplitude) pour laisser les ondes libres de se réorganiser via des interactions entre proches voisins. Ainsi, on peut s'affranchir du régime transitoire (train d'ondes primaire régulier et déstabilisation) et directement accrocher les distances préférentielles du système.

Effectivement, on observe alors que le système sélectionne deux ou trois distances uniquement, c'est-à-dire que les ondes se regroupent par paquets (formant ce qu'on appellera par la suite régime d'états liés). Le plus souvent, le système sélectionne deux distances (entre ondes à l'intérieur du paquet et entre paquets), et les ondes se regroupent par paquets de deux ou trois, suivant la forme (fréquence et amplitude) du signal d'entrée. On ne peut contrôler précisément la modulation du signal en entrée et donc donner de relation explicite entre les paramètres du forçage (fréquence et amplitude) et type d'état lié observé. En revanche, on peut mesurer le signal en entrée sur la fibre et en déduire la dynamique observée, comme présenté pour un cas dans la suite de ce chapitre.

Un exemple d'état lié à 2-pulses est montré sur la figure 5.9 pour le cas présenté figure 5.1. Le regroupement des ondes par paquets de deux est clairement identifiable sur le diagramme spatio-temporel et l'image de l'écoulement (Fig. 5.9 (a-b)). Des statistiques identiques à celles effectuées sans forçage indique que le système sélectionne deux distances L_1 et L_2 (pics fins sur les histogrammes de la figure 5.9 (c)) correspondant respectivement à la distance entre pulses et entre paquets de pulses, identiques à celles obtenues sans forcer comme on peut le noter sur l'histogramme.

Pour l'exemple donné sur la figure 5.2(a), un forçage faible conduit à la formation d'états liés à 2 ou 3 pulses comme présenté sur la figure 5.10. Pour l'état lié 2-pulses (Fig. 5.10(a)), on retrouve bien deux des quatre distances obtenues sans forcer, à savoir $L_{2'} = 1.6 \pm 0.1$ cm $\simeq L_2 = 1.8 \pm 0.3$ cm entre les pulses et

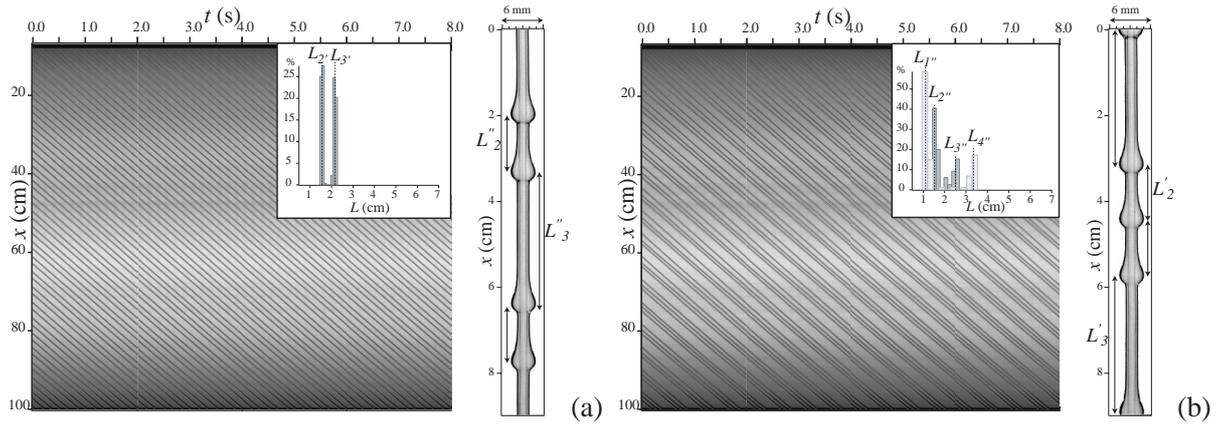


Fig. 5.10. *Etats liés forcés* : photos de l'écoulement à $x \sim 90$ cm, diagramme spatio-temporel et histogrammes des distances entre pulses (par rapport au nombre total de pulses) en bas de la fibre $1.20 \text{ m} < x < 1.40 \text{ m}$, pour $R=0.45 \text{ mm}$, $We=18$, $Re=0.56$ et différents signaux en entrée : (a) état lié 2-pulses et (b) état lié 3-pulses.

$L_{3'} = 2.2 \pm 0.2 \text{ cm} \approx L_3 = 2.6 \pm 0.2 \text{ cm}$ entre paquets. Avec un signal d'entrée différent (i.e. une fréquence différente), on observe le regroupement par paquets de trois pulses, avec deux nouvelles distances qui émergent sur l'histogramme, à savoir $L_{1''} = 1.2 \pm 0.2 \text{ cm} \approx L_1 = 1.2 \pm 0.2 \text{ cm}$ entre les pulses et $L_{4''} = 3.2 \pm 0.2 \text{ cm} \approx L_4 = 3.35 \pm 0.25 \text{ cm}$ entre les paquets. En changeant l'amplitude du forçage, i.e. la modulation du signal initial, on retrouve les distances précédentes : $L_{2''} = 1.6 \pm 0.2 \text{ cm} \approx L_2$ et $L_{3''} = 2.45 \pm 0.15 \text{ cm} \approx L_3$. Le forçage permet donc d'accrocher les distances préférentielles, et la distance initiale entre les pulses (c'est-à-dire implicitement la forme du signal de forçage) conditionne les distances sélectionnées.

On retrouve le même comportement pour le cas présenté Fig. 5.2(b). Les états liés forcés sont présentés Fig. 5.11. Dans ce cas, on obtient $L_{1'} = 1.45 \pm 0.07 \text{ cm} \approx L_1$ et $L_{3'} = 2.6 \pm 0.1 \text{ cm} \approx L_3$ pour l'état lié 2-pulses et $L_{1''} = 1.45 \pm 0.06 \text{ cm} \approx L_1$ et $L_{2''} = 2.03 \pm 0.06 \text{ cm} \approx L_2$ pour l'état lié à 3-pulses.

Plus rarement, le système peut sélectionner trois distances : on observe alors des regroupements particuliers. Par exemple, les pulses peuvent se réorganiser par paquets de 2 suivis d'un pulse seul, et ce de manière périodique (avec donc un arrangement final sous la forme 2-1-2-1-2). On peut aussi observer un arrangement similaire avec la formation de paquets de 3 pulses séparés par un pulse unique, sous la forme 3-1-3-1-3. Rarement, on observe aussi des regroupements par 4 ou 5 pulses. Dans les régimes étudiés au cours de ce chapitre, on observe toujours la formation d'états liés. Le système sélectionne toujours un nombre fini de distances.

On va maintenant étudier plus en détail un état lié forcé. La dynamique est identique pour tous les régimes d'états liés forcés, et on se concentre ici sur un régime à 3 pulses, obtenu pour $R = 0.475 \text{ mm}$ et $h_N = 0.82 \text{ mm}$ en forçant à 3 Hz présenté sur la figure 5.12. Tout d'abord, on observe la formation des paquets sur le diagramme spatio-temporel (Fig. 5.12a). On va isoler et suivre six pulses sur ce diagramme afin de bien caractériser la dynamique de formation de l'état lié. On reporte ainsi la position de ces six pulses (x_1 à x_6) en fonction du temps (Fig. 5.12a). A l'origine, on a un signal périodique (longueur d'onde constante). Les ondes créés en entrée se propagent à vitesse constante avec une fréquence f donnée. Le signal d'entrée est représenté sur la figure 5.12(b) avec sa transformée de Fourier. On remarque que l'on a un signal périodique ($f=12 \text{ Hz}$) modulé en amplitude. La porteuse sinusoïdale a une fréquence $\Delta f=3 \text{ Hz}$. La TF présente donc

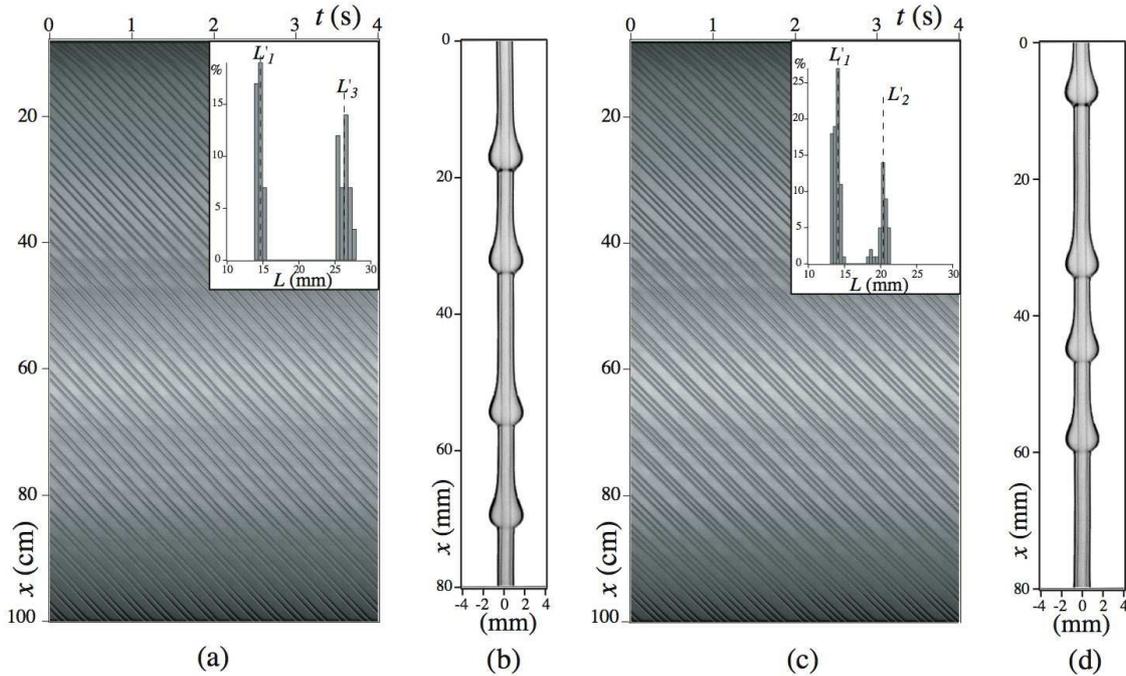
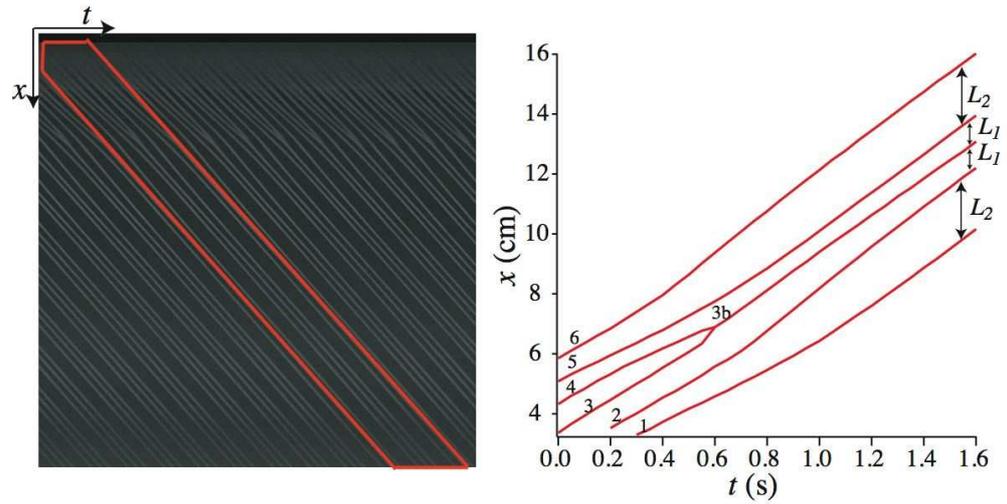


Fig. 5.11. *Etats liés forcés pour $R=0.45$ mm, $h_N=0.74$ mm : photos de l'écoulement à $x \sim 90$ cm, diagramme spatio-temporel et histogrammes des distances entre pulses (par rapport au nombre total de pulses) en bas de la fibre 1.20 m $< x < 1.40$ m.*

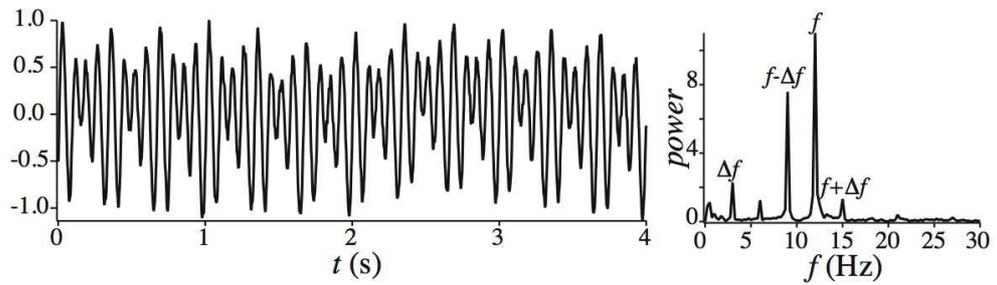
un pic à 12 Hz, un à 3 Hz et deux autres pics à $f + \Delta f = 15$ Hz et $f - \Delta f = 9$ Hz. Ce signal modulé conduit aux interactions observées plus bas sur la fibre. Suivons l'évolution spatio-temporelle de nos six ondes :

- Lorsque $0 < t < 0.6$ s, deux ondes (3 et 4) se rapprochent et coalescent pour former 3b (à $t=0.6$ s). 1 et 2 ainsi que 5 et 6 s'éloignent l'une de l'autre.
- Lorsque $t > 0.6$ s, Les trois ondes centrales (2,3b et 5) se réorganisent : l'onde 3b se déplace jusqu'à être à égale distance de ses deux voisines. 1 et 6 se déplacent jusqu'à être à distance égale des ondes centrales ; elles interagissent avec leurs voisines pour former leurs propres *paquets de trois*.

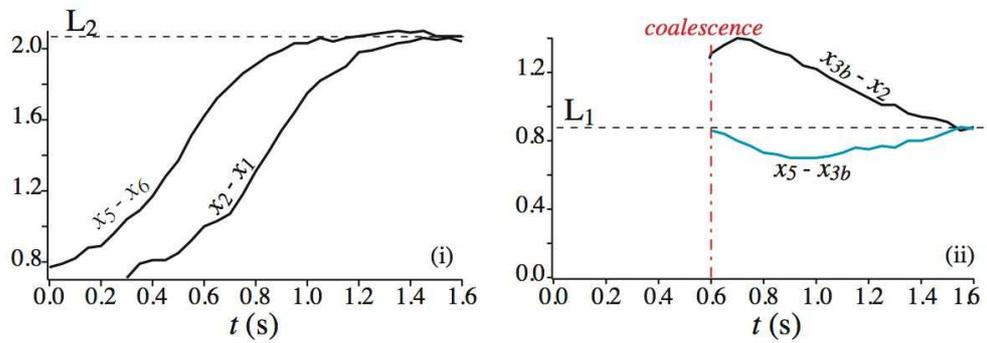
Les distances relatives entre ondes sont représentées sur la figure 5.12 (c). 6 et 1 s'éloignent pour être finalement à même distance du paquet central, que l'on appelle L_2 . La distance finale entre ondes au sein du paquet est donnée par L_1 . Finalement, les ondes ne se déplacent plus relativement les unes aux autres. Le train de trois ondes se déplace comme un tout, les ondes ayant alors la même forme (on a alors superposition parfaite des profils) et la même vitesse. Le signal final est présenté sur la figure 5.12(d). Les ondes au sein de chaque paquet ont une fréquence bien définie $f_i = 12$ Hz correspondant à la distance finale L_1 avec une vitesse constante c . Entre chaque paquet, on a aussi une fréquence bien définie $f_e = 3$ Hz correspondant à la distance finale L_2 avec une vitesse constante c identique pour toutes les ondes. Le signal est périodique en temps et en espace, ce qui permet d'étudier finement les interactions entre ondes en se plaçant à hauteur donnée sur la fibre. Les ondes (2,3,4,5) qui forment l'état lié à 3 pulses correspondent aux ondes contenues dans une période de modulation du signal initial. Chacun de ces paquets d'ondes se réorganise de la même manière, d'où cette périodicité des états liés. Cette formation d'état lié est bien le résultat d'attractions et de répulsions faibles entre ondes et on voit ici l'importance de la forme du signal en entrée, qui conditionne les distances sélectionnées. On a injecté "doucement" un nombre de distances réduit, le système sélectionnant alors deux de ses distances préférentielles, les plus proches des distances initiales injectées.



(a): Dynamique de formation de l'état lié 3-pulses. Diagramme spatio-temporel et positions des 6 ondes isolées (dans le cadre rouge) en fonction du temps.

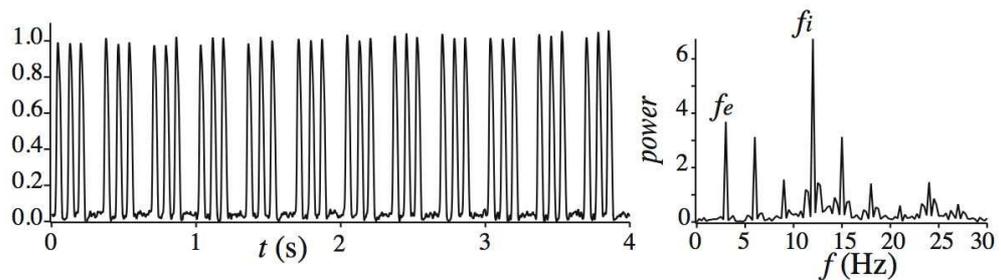


(b): Signal temporel en entrée de l'écoulement ($x=5$ cm) extrait du diagramme spatio-temporel. Amplitude normalisée $(h-h_{moy})/h_{moy}$ et spectre correspondant.



(c): Evolution de la distance entre ondes en fonction du temps.

(i) distance entre paquets (5-6) et (1-2) et (ii) distances au sein du paquet (2-3b-5)



(d): Signal temporel en sortie de l'écoulement ($x=50$ cm) extrait du diagramme spatio-temporel. Amplitude normalisée h/h_m et spectre correspondant.

Fig. 5.12. Etat lié forcé à 3-pulses pour $R = 0.475$ mm et $h_N = 0.82$ mm.

5.2 Théorie d'interactions de structures cohérentes

Nous avons un système non linéaire avec un mécanisme d'instabilité (Rayleigh-Plateau), de la dissipation et de la dispersion. Les effets non-linéaires conduisent à la formation de pulses stationnaires. Ces structures, appelées aussi *structures cohérentes*, vont interagir pour donner lieu à une dynamique particulière. Une synthèse de l'étude de ces systèmes peut être trouvée dans l'article de Sergey Saprykin et al. (89). De tels systèmes actifs (instables), dissipatifs et dispersifs peuvent être décrits par une équation d'évolution générale, à savoir l'équation de Kuramoto-Shivashinsky introduite au chapitre précédent à laquelle on a rajouté la dispersion (terme en dérivée troisième) de la forme

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \delta_d \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0 \quad (5.1)$$

où le paramètre δ_d est appelé paramètre de dispersion. Cette équation est appelée équation de Kuramoto-Shivashinsky généralisée (gKS) et s'applique à de nombreux systèmes, des films tombants aux plasmas en passant par les films liquides cisailés par des écoulements de gaz turbulent. A partir de cette équation, Kawahara et Toh (51) ont réalisé des simulations numériques mettant en évidence deux types de dynamiques en fonction du paramètre δ_d : lorsque δ_d est petit ou grand, le système est chaotique. Pour des valeurs intermédiaires de δ_d , l'évolution du système peut être décrite par des interactions faibles entre pulses, conduisant parfois à la formation d'états liés, certaines distances étant sélectionnées. En se basant sur ces travaux, Sergey Saprykin et al. (89) ont utilisé l'équation gKS à 2D afin d'étudier les interactions entre ondes sur un film tombant. Ils ont construit numériquement des solutions de type soliton puis ont développé une théorie d'interactions faibles de structures cohérentes. S. Kalliadasis, S. Saprykin et D. Tseluiko ont alors adapté cette étude à notre système afin d'expliquer nos résultats expérimentaux. Notons que si les états liés ont été largement décrits théoriquement et numériquement pour des films liquides, ils n'ont jamais été observés expérimentalement. Notre système constitue un bon prototype de système actif, dissipatif et dispersif permettant de mettre en évidence ce phénomène. Nous allons dans un premier temps montrer que l'on peut dériver une équation de type gKS pour un film mince s'écoulant le long d'une fibre, puis je vais décrire brièvement la théorie d'interactions de structures cohérentes développée et adaptée à notre système par l'équipe de l'Imperial College (la théorie est détaillée dans (101)).

5.2.1 Equation gKS pour un film visqueux s'écoulant sur une fibre verticale

On a montré au chapitre 4 que l'on pouvait obtenir une équation d'évolution pour l'épaisseur $h(x, t)$ de type Kuramoto-Shivashinsky lorsque $h \ll R$ en partant des équations de Navier-Stokes associées aux conditions aux limites de non-frottement sur la paroi et de surface libre. On cherche ici à aller à un ordre supérieur afin d'introduire le terme dispersif ($\partial_{xxx} h$). Cette dérivation a été menée à bien par Dmitri Tseluiko. On introduit un petit paramètre $\epsilon \ll 1$. On suppose ici que $R/h_N = O(\epsilon^{-1})$, $We = O(\epsilon^{-2})$, $Re = O(\epsilon)$. De plus, on suppose que les variations sont lentes dans la direction de l'écoulement (hypothèse longues ondes) et que la composante de la vitesse dans la direction transverse de l'écoulement $v = O(\epsilon)$. On procède alors à une expansion faiblement non-linéaire où $h = h_N + \tilde{h}$ à l'ordre 2 en \tilde{h} , soit $\tilde{h} = O(\epsilon^2)$. Finalement, on obtient

$$\partial_t \tilde{h} + \frac{\rho g h_N^2}{\eta} \partial_x \tilde{h} + 2 \frac{\rho g h_N}{\eta} \tilde{h} \partial_x \tilde{h} + \left(\frac{\gamma h_N^3}{3\eta R^2} + \frac{2\rho^3 g^2 h_N^6}{15\eta^3} \right) \partial_{xx} \tilde{h} + \frac{\rho g h_N^4}{\mu} \partial_{xxx} \tilde{h} + \frac{\gamma h_N^3}{3\eta} \partial_{xxxx} \tilde{h} = 0 \quad (5.2)$$

qui se distingue de l'équation dérivée au chapitre 3 par l'apparition (en vert dans l'équation (5.2)) d'un terme non-linéaire ($\tilde{h}\partial_x\tilde{h}$) d'origine cinématique, un terme déstabilisant ($\partial_{xx}\tilde{h}$) provenant des effets de l'inertie et un terme dispersif ($\partial_{xxx}\tilde{h}$) provenant de la diffusion des contraintes visqueuses. Après changement de variable, on obtient l'équation gKS

$$H_T - c_\delta H_X + HH_X + H_{XX} + \delta_d H_{XXX} + H_{XXXX} = 0, \quad (5.3)$$

pour un pulse à la vitesse c_δ . Les paramètres X , T et H sont définis comme

$$\begin{aligned} x &= h_N A^{-1/2} (X - c_\delta T) + 3B[2 + (2/3)a - (1/2)a^2]T, \\ t &= 3U_0^{-1} BT, \quad H = 12A^{1/2} B h_N^{-2} (h - h_N), \end{aligned}$$

où $A = 8/(5We) + a^2$, $B = h_N/(WeReA^2)$ et $a = h_N/R$.

L'équation (5.3) est le prototype le plus simple contenant tous les mécanismes physiques jouant dans un milieu non-linéaire, actif (instable), dissipatif et dispersif : le terme non-linéaire dominant HH_X , l'instabilité (H_{XX}), la stabilité (H_{XXX}) et la dispersion ($\delta_d H_{XXX}$), où le paramètre de dispersion δ_d est défini comme

$$\delta_d = \frac{6}{We Re A^{1/2}}. \quad (5.4)$$

Notons qu'une dérivation faiblement non linéaire consistante, pour laquelle tous les termes s'équilibrent, n'est possible que dans le cas où R est grand devant h_N . Dans les expériences, l'hypothèse $h_N \ll R$ n'est pas satisfaite ; cependant, les mécanismes dominants sont bien pris en compte, et les régimes concernés sont caractérisés par des nombre de Reynolds faibles et de grands nombres de Weber. On s'attend donc à avoir un accord au mieux qualitatif.

5.2.2 Théorie d'interactions

On cherche d'abord la forme $H_0 = H_0(X)$ d'un pulse satisfaisant la version stationnaire de l'équation (5.3). On suppose ensuite que la solution H de (5.3) peut s'écrire sous la forme d'une superposition de n pulses identiques quasi-stationnaires H_1, \dots, H_n situé à $X_1(T), \dots, X_n(T)$ respectivement (cf Fig. 5.13), chaque pulse i étant une solution de (5.3) stationnaire, c'est-à-dire $H_i(X, T) = H_0(X - X_i(t))$; $1 \leq i \leq n$; on ajoute à ces n pulses une petite fonction de recouvrement \hat{H} , i.e. on utilise l'ansatz,

$$H = \sum_{i=1}^n H_i + \hat{H}. \quad (5.5)$$

On note L la distance entre deux pulses ($L_i = X_{i+1} - X_i$). On considère des interactions faibles entre les pulses, ceux-ci n'interagissant qu'avec leur voisins immédiats. Plus précisément, on suppose les pulses suffisamment séparés ce qui se traduit pas $L_i \equiv X_{i+1} - X_i = \log \varepsilon + O(1)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\varepsilon \ll 1$. On considère de plus que les pulses sont quasi-stationnaires, i.e. que leur vitesse X'_i est d'ordre $O(\varepsilon)$. Le recouvrement est lui aussi faible, i.e. $\hat{H} = O(\varepsilon)$.

On injecte alors (5.5) dans (5.3), et on obtient finalement l'équation linéarisée pour \hat{H} au voisinage du i^{eme} pulse :

$$\hat{H}_T - X'_i H_{iX} = \mathcal{L}_i \hat{H} - \alpha_i (H_{i-1} H_i)_X - \beta_i (H_i H_{i+1})_X \quad (5.6)$$

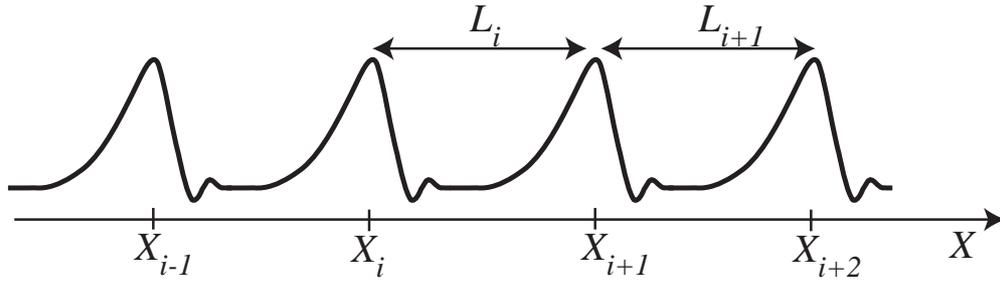


Fig. 5.13. Solution sous la forme d'une somme de n pulses identiques

où $\alpha_i = \beta_i = 1$ pour $1 < i < n$, $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$ et $\alpha_n = 1, \beta_n = 0$ pour les pulses extrêmes (qui n'interagissent qu'avec un seul voisin). Les \mathcal{L}_i sont des opérateurs linéaires définis comme

$$\mathcal{L}_i F = c_\delta F_X - F_{XX} - \delta F_{XXX} - F_{XXXX} - (H_i F)_X$$

Afin de résoudre l'équation (5.6) et de déterminer la dynamique des pulses X'_i (les primes dénotant la dérivée par rapport au temps), un peu de technique mathématique est nécessaire. Sans rentrer dans les détails, notons qu'il faut notamment bien définir le spectre des opérateurs linéaires définis ci-dessus et de leurs adjoints. D. Tseluiko a mené cette étude mathématique rigoureuse pour arriver finalement à une équation décrivant la dynamique des pulses. La position du $i^{\text{ème}}$ pulse est gouvernée par son interaction avec le front oscillant du pulse le suivant ($i - 1$) décrite par une fonction S_2 et par son interaction avec la queue monotone du pulse le précédent ($i + 1$) décrite par une fonction S_1 . Dans le référentiel en mouvement des pulses à la vitesse c_δ , la vitesse des pulses s'écrit alors

$$X'_i = S_2(X_i - X_{i-1}) + S_1(X_{i+1} - X_i); \quad 1 < i < n \quad (5.7)$$

$$X'_1 = S_1(X_2 - X_1)$$

$$X'_n = S_2(X_n - X_{n-1})$$

(5.8)

Les fonctionnelles $S_{1,2}$ sont données par

$$S_{1,2}(L) \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} H_0(X + L/2) H_0(X - L/2) \Psi_X^0(X \pm L/2) dX, \quad (5.9)$$

où le signe "+" correspond à S_1 et le signe "-" à S_2 . La fonction Ψ tend exponentiellement vers une constante lorsque $X \rightarrow \pm\infty$.

5.3 Résultats et discussion

On s'intéresse maintenant à l'interaction de deux pulses H_1 et H_2 situés à X_1 et X_2 . D'après l'équation (5.7), on a

$$X'_1 = S_1(X_2 - X_1)$$

$$X'_2 = S_2(X_2 - X_1)$$

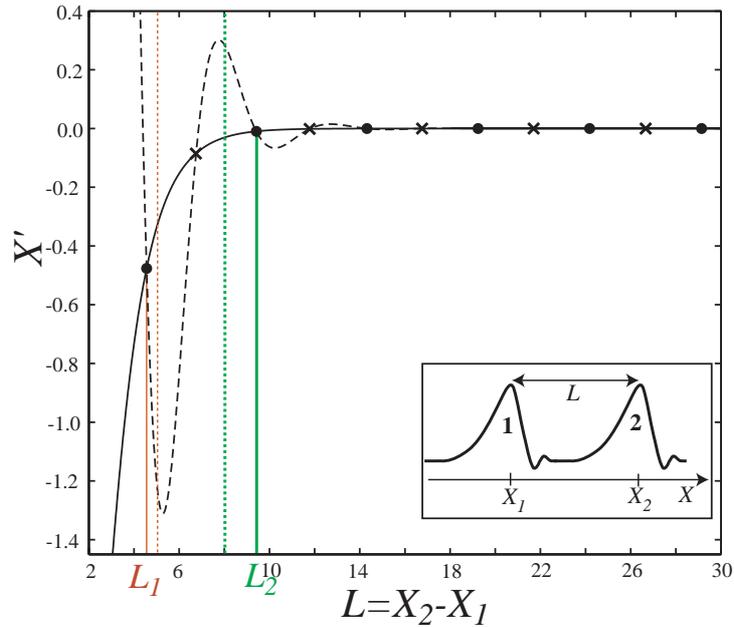


Fig. 5.14. Evolution de S_1 (ligne pleine) et S_2 (ligne pointillée) en fonction de la distance L entre deux pulses pour $\delta_d = 0.4$. \bullet : état lié stable, \times : état lié instable. Les lignes pleines verticales indiquent les distances L_1 (rouge, fin) et L_2 (vert, épais) des deux premiers états liés. Les lignes verticales pointillées représentent les valeurs L_0 prises pour expliquer une attraction (rouge, fin) et une répulsion (vert, épais) (voir dans le texte ci-dessous).

Dans ce cas, $S_{1,2}$ représentent donc les vitesses des 1^{er} et 2^{me} pulses par rapport à c_δ respectivement (i.e $c_1 - c_\delta$ et $c_2 - c_\delta$, où $c_{1,2}$ sont les vitesses des pulses dans le référentiel du labo). Ainsi, on représente les mouvements relatifs des ondes et l'écart de vitesse par rapport à leur vitesse de départ qu'elles subissent en interagissant. S_1 et S_2 sont présentées Fig. 5.14 pour $\delta_d = 0.4$ (ce qui correspond aux expériences présentées Figs. 5.2, 5.8 et 5.10). On observe que S_1 , représentant l'interaction avec la queue monotone, est elle-même monotone, tandis que S_2 est oscillante, représentant l'interaction avec le front oscillant de l'onde.

En fonction de la distance L_0 initiale entre les pulses, ceux-ci vont s'attirer ou se repousser. Prenons par exemple $L_0 = 5$ (ligne rouge fine pointillée sur la figure 5.14). Dans ce cas, $S_1 > S_2$, et donc $c_1 > c_2$: le pulse amont 1 se propage plus rapidement que le pulse aval 2. Ainsi, les deux pulses se rapprochent (L diminue). Au fur et à mesure qu'ils se rapprochent, l'écart de vitesse entre les deux pulses diminue, jusqu'à ce que ceux-ci se propagent à la même vitesse (intersection de S_1 et S_2) ; il vont donc rester à distance fixe l'un de l'autre, à savoir $L_1 = 4.5 < L_0$. Ce mécanisme est similaire à celui des attractions observé expérimentalement. Si maintenant $L_0 = 8$ (ligne verte épaisse pointillée sur la figure 5.14), $S_1 < S_2$, et donc $c_1 < c_2$: le pulse 2 est plus rapide que le pulse 1, les deux pulses vont donc s'éloigner l'un de l'autre. Au fur et à mesure que L augmente, l'écart de vitesse entre les pulses diminue, jusqu'à ce que ceux-ci se propagent à vitesse constante, séparés d'une distance $L_2 = 9.5 > L_0$. Ce mécanisme correspond aux répulsions observées expérimentalement. On comprend ainsi que les pulses s'attirent ou se repoussent jusqu'à former des états liés : les distances inter-pulses L_a auxquelles les états liés peuvent être formés sont données par $S_1(L_a) = S_2(L_a)$. Cependant, toutes ces distances ne conduisent pas à des états stables (cf Fig. 5.14).

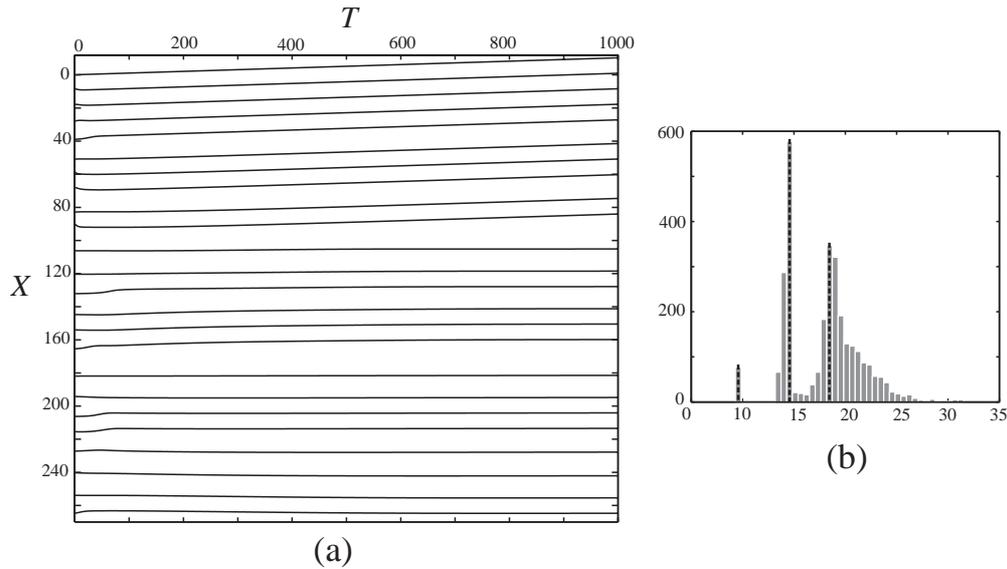


Fig. 5.15. (a) Diagramme spatio-temporel obtenu numériquement en résolvant le système (5.7) pour $\delta_d = 0.4$, dans le référentiel en mouvement à la vitesse c_δ . (b) Histogramme des distances entre pulses obtenu en faisant des statistiques sur 3000 pulses à $t=1000$. La distribution initiale des distances a été prise gaussienne, de moyenne 18 et de largeur 3.

Prenons par exemple la troisième intersection, $L = L_2 = 9.5$, correspondant à un état lié stable : en effet, on a déjà vu que si $L \lesssim 9.5$, les deux pulses se repoussaient de manière à retourner à L_2 . De la même manière, si $L \gtrsim 9.5$, $S_1 > S_2$ et les pulses s'attirent, retournant à L_2 . En revanche, la position $L = L_3 = 7$ est instable à des petits déplacements : si $L \lesssim L_3$, $S_1 > S_2$ et les pulses se rapprochent, s'éloignant de L_3 tandis que si $L \gtrsim L_3$, $S_1 < S_2$ et les pulses se repoussent, s'éloignant de L_3 . En fonction de leur distance initiale, les deux pulses vont donc accrocher une distance correspondant à un état lié stable. Dans le cas présenté ici, les premières distances possibles (ou préférentielles) sont donc 4.5, 9.5, 14 et 18.5.

On peut résoudre numériquement (5.7) pour $\delta_d = 0.4$, correspondant à la figure 5.2. L'évolution typique des pulses est donné sur la figure 5.15 pour 24 pulses, dans le référentiel en mouvement à la vitesse c_δ . On note que les pulses s'écartent peu de leur vitesse initiale (lignes quasi horizontales), interagissant faiblement avec leurs voisins comme observé expérimentalement. On observe alors des attractions, des répulsions, ainsi que la formation d'états liés à 2-pulses et à 3-pulses. La dynamique et l'allure du diagramme spatio-temporel sont similaire à celle observée expérimentalement. De plus, un histogramme obtenu par des statistiques sur 3000 distances entre pulses à $t = 1000$ montre trois pics distincts à 9.5, 14, and 18.5 ce qui est en très bon accord avec les distances présentées sur la figure 5.14. La distance 4.5 correspond en fait à une onde à deux bosses qui n'est jamais observée, ni dans les simulations, ni dans les expériences et est donc mise de côté. On peut noter que les distances auxquelles on trouve des états liés semblent périodiquement réparties. Cette périodicité est liée à la périodicité des oscillations précédant les ondes et est retrouvée dans les expériences. On a donc vu que l'on avait un accord qualitatif entre la théorie et les expériences. Cependant, si on convertit les distances adimensionnées 9.5, 14, and 18.5 (pour $\delta = 0.4$) en valeurs dimensionnées, on trouve 0.42 cm, 0.62 cm, et 0.82 cm. Comparé aux trois premiers pics de la figure 5.8 à $L_1 \approx 1.2$ cm, $L_2 \approx 1.8$ cm, and $L_3 \approx 2.6$ cm, on trouve que les distances expérimentales sont environ trois

fois supérieures aux valeurs théoriques. Cela s'explique par le fait que l'on a considéré $h \ll R$. Violer cette hypothèse change considérablement la constante A , et donc le "rescaling" des distances. Cependant, on ne peut développer rigoureusement l'équation gKS pour $h = O(R)$, et ce modèle est le plus simple contenant tous mécanismes physiques importants du système, et donc capable de décrire qualitativement les expériences.

On peut différencier différents régimes en fonction du paramètre δ_d , qui est le paramètre pertinent pour décrire les effets dispersifs. Ces régimes sont présentés sur la figure 5.16 :

- Lorsque $\delta_d < 0.1$, le système est purement dissipatif. Les ondes présentent des oscillations de grande amplitude devant leur front. Dans ce cas, il y a de nombreuses coalescences et les interactions faibles ne peuvent plus décrire la dynamique observée. Ce régime est alors fortement chaotique. Le cas $\delta_d \rightarrow 0$ conduit à l'équation KS et correspond par exemple aux expériences menées sur un plan incliné avec de l'eau, pour lesquelles des interactions uniquement attractives ont été observées (64).
- Lorsqu' au contraire $\delta_d > 1$, le système est purement dispersif les ondes ne présentent aucune (ou quelques) oscillations capillaires devant leur front. Les interactions sont alors purement répulsives. Quand $\delta_d \gg 1$, on s'approche de l'équation de Kordeveg de Vries, pour laquelle on a uniquement des effets non-linéaires et dispersifs. Le régime est alors aussi chaotique.
- Pour des valeurs de δ_d intermédiaires, la forme des ondes induit des interactions à la fois attractives et répulsives conduisant à la formation d'états liés. Le système semble sélectionner un nombre fini de distances préférentielles aux temps longs.

Nous avons exploré expérimentalement la carte $(\alpha_N, R/l_c)$ et observé des états liés pour des fibres de rayons tels que $0.2 < R/l_c < 0.32$ et des épaisseurs telles que $1 < \alpha_N < 4.5$ indiquées par des segments verticaux sur la figure 5.16, ce qui correspond bien à la zone pour laquelle on s'attend à voir à la fois de l'attraction et de la répulsion ($0.3 \leq \delta_d \leq 0.55$). Pour la fibre de grand rayon ($R=1.5$ mm), je n'ai jamais observé d'état lié ; dans ce cas, $\delta_d > 1$, et on observe effectivement un régime chaotique. Le paramètre de dispersion défini ici est donc bien le paramètre pertinent pour mesurer les effets dispersifs et décrire les interactions.

5.4 Conclusion : un nouveau type d'état lié

Nous avons donc montré que lorsque les effets dissipatifs et les effets dispersifs étaient importants, c'est-à-dire lorsque la tension de surface et la viscosité sont importants, les pulses quasi-stationnaires émergeant de la déstabilisation du train d'ondes primaire se réorganisaient via des interactions faibles avec leurs voisins. Ainsi, les pulses s'attirent ou se repoussent jusqu'à être à une distance donnée l'un de l'autre, voyageant alors à vitesse constante formant un *état lié*. Des statistiques sur les distances entre pulses montrent que le système sélectionne un nombre fini de distances préférentielles. Une théorie d'interaction faible de structures cohérentes, déjà utilisée sur les plans inclinés et appliquée ici à un modèle simple pour l'écoulement, permet de décrire qualitativement les expériences et prédit la formation d'états liés, avec un nombre donné de distances possibles, en bon accord avec l'étude statistique expérimentale. Ainsi, nous avons mis en évidence expérimentalement (et théoriquement) l'existence d'un nouveau type d'état lié hydrodynamique. Ce phénomène (deux entités se comportant comme un seul objet) est présent dans de nombreux systèmes, de la physique atomique et quantique aux systèmes biologiques. Par exemple, le noyau de *deutérium* est

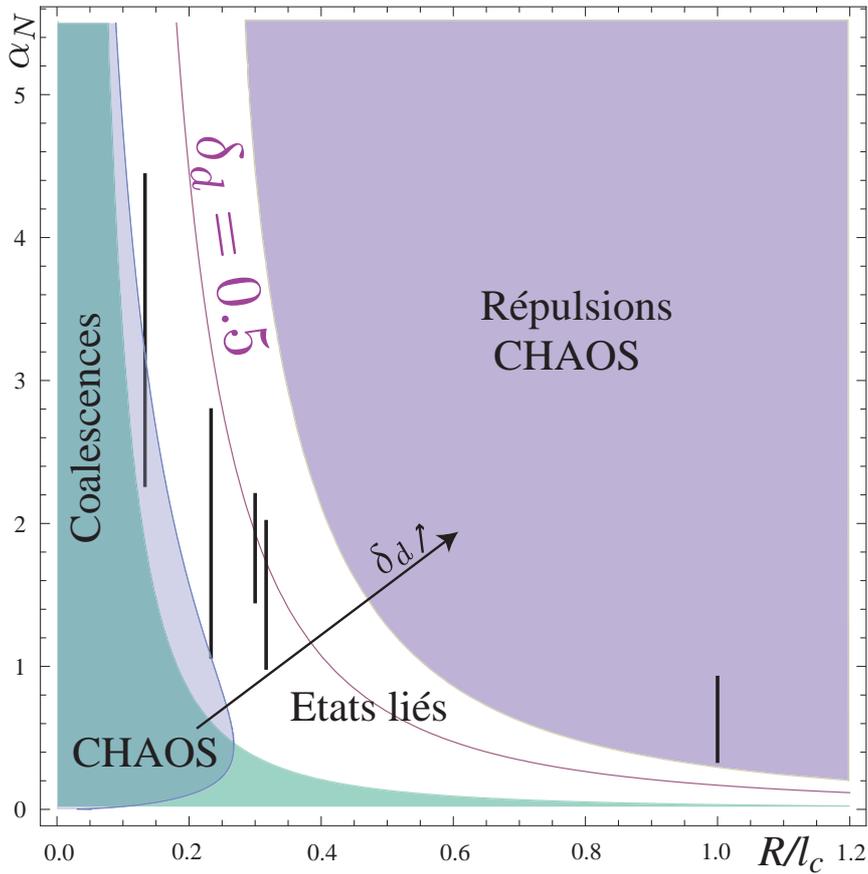


Fig. 5.16. Carte des régimes dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$. Les segments verticaux correspondent aux épaisseurs et rayons explorés jusque-là. La zone bleu clair à gauche du diagramme représente la région absolue. La zone bleu-vert en bas à gauche du diagramme est définie par $\delta_d \leq 0.1$ et correspond aux régimes chaotiques dissipatifs. La zone violette en haut à droite est définie par $\delta_d \geq 1$ et correspond aux régimes chaotiques dispersifs. La zone blanche au centre de la carte correspond à des valeurs intermédiaires de δ_d pour laquelle on observe des états liés.

composé d'un proton et d'un neutron liés par l'interaction forte (2). Ce phénomène est aussi observé en biologie : lorsque deux colonies d'algues *Volvox* nagent l'une à côté de l'autre près d'une paroi (comme par exemple à la surface de l'eau), elles peuvent s'attirer et former un état lié stable dû aux forces hydrodynamiques et à la lubrification (23). Un dernier exemple met aussi en jeu des forces hydrodynamiques : des particules en suspension dans un fluide en vibration subissent des interactions, à la fois attractives et répulsives. De la même manière que pour nos ondes, l'existence d'interactions à la fois attractives et répulsives conduit à la formation d'états liés, conduisant à l'apparition de motifs ordonnés (103). Ici, l'écoulement d'un film liquide visqueux sur une fibre fournit un prototype de milieu non-linéaire, dissipatif et dispersif idéal pour visualiser ces états liés.

Chapitre 6

Quand les gouttes prennent le dessus...

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, on peut mettre en évidence deux structures différentes, à savoir soit des ondes d'amplitude modérée se propageant sur la fibre sans transport de masse présentes dans les régimes DG, soit des gouttes de grande amplitude présentant une zone de recirculation présentes dans les régimes absolus ou pour des petites fibres ($R/l_c < 0.3$). On cherche dans ce chapitre à caractériser les différences entre ces structures, notamment au niveau de leur dynamique.

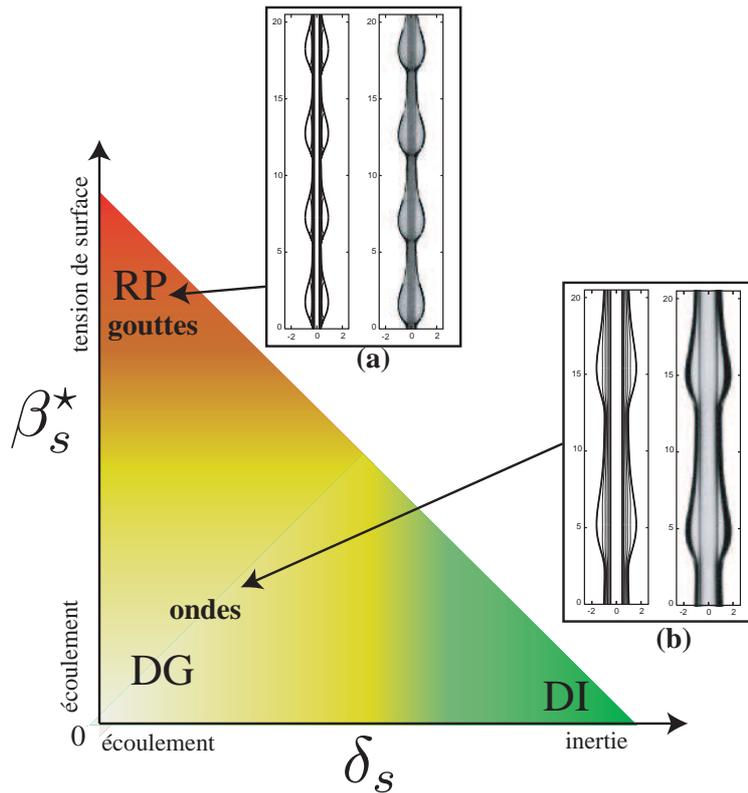


Fig. 6.1. Diagramme de phase indicatif des différentes structures observées dans le plan (β_s^*, δ_s) . L'écoulement domine pour $\beta_s^* \lesssim 0.5$ et $\delta_s \lesssim 0.5$, on est en régime Drag Gravity (DG) indiqué par une zone jaune. Les structures observées sont des ondes d'amplitude modérée (encart (b)) : $R=0.475$ mm, $h_N=0.81$ mm). Lorsque $\beta_s^* \gg 1$ et $\delta_s \ll 1$, l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine (zone rouge) et on observe des gouttes de grande amplitude (encart (a)) : $R=0.2$ mm, $h_N=0.45$ mm). Lorsque $\beta_s^* \ll 1$ et $\delta_s \gg 1$, les effets inertiels dominent ; le mécanisme prépondérant est l'instabilité de Kapitza et on est en régime Drag Inertia (DI) indiqué par la zone verte.

Revenons tout d'abord au diagramme de phase des structures présenté sur la figure 6.1. Au chapitre 4, nous avons identifié les paramètres pertinents permettant de discriminer entre les différents régimes, à savoir β_s^* qui compare les effets de l'instabilité de Rayleigh-Plateau et de l'écoulement, et δ_s qui compare les effets de l'écoulement et de l'inertie. Lorsque $\beta_s^* \gg 1$ et $\delta_s \ll 1$, l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine (zone rouge) ; ce régime est caractérisé par des gouttes de grande amplitude présentant une zone de recirculation (encart (a)). Ce régime est obtenu pour des fibres de petit rayon ($R/l_c < 0.3$, i.e. pour des fibres de rayon 0.175 mm $< R < 0.28$ mm). Lorsque $\beta_s^* \lesssim 0.5$ et $\delta_s \lesssim 0.5$, l'écoulement domine, on est en régime Drag Gravity (DG) indiqué par une zone jaune ; les structures sont alors des ondes d'amplitude modérée se propageant sans transport de masse (encart (b)). Ce régime est obtenu pour des fibres de rayon moyen ($R/l_c \sim 0.3$ i.e. pour des fibres de rayon 0.35 mm $< R < 0.475$ mm). Dans ce chapitre, on s'intéressera uniquement à ces deux régimes, et notamment à la différence entre les ondes et les gouttes. On ne s'intéresse pas ici au régime Drag Inertia (zone verte sur la figure 6.1) proche du cas plan déjà bien étudié dans la littérature.

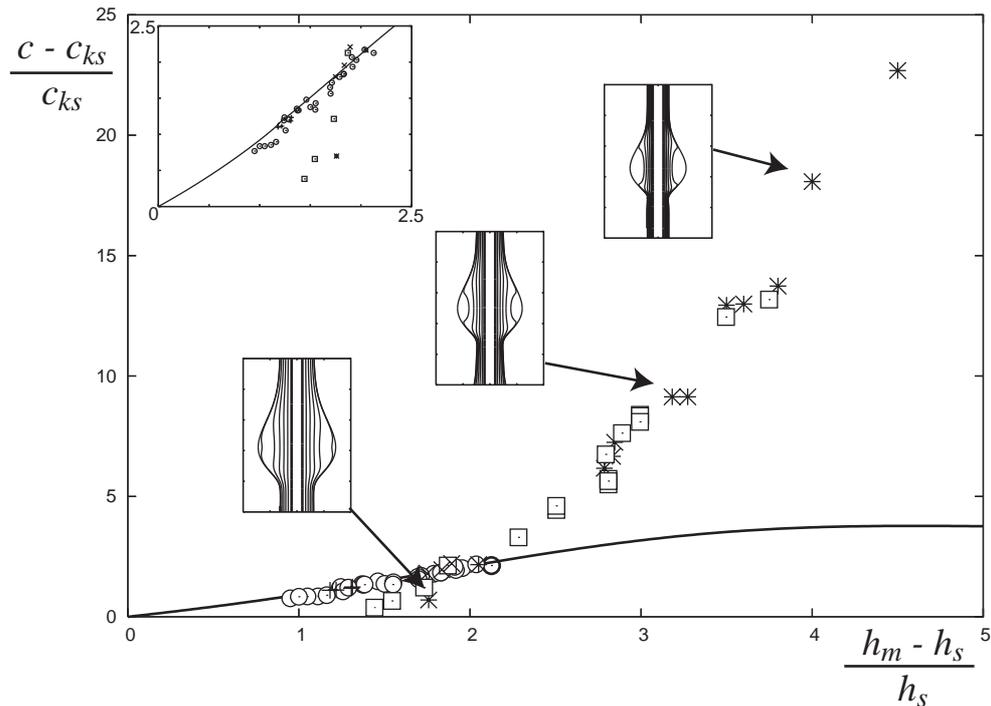


Fig. 6.2. Vitesse c normalisée par la vitesse à la surface du substrat $(c - c_{ks})/c_{ks}$ en fonction de l'amplitude $(h_m - h_s)/h_s$: \circ $R=0.475$ mm, $+$ $R=0.45$ mm, \times $R=0.35$ mm, \square $R=0.25$ mm, $*$ $R=0.2$ mm. Profils et lignes de courant obtenus numériquement à partir du modèle WRIBL pour une fibre de rayon $R=0.2$ mm. Encart : zoom sur les faibles amplitudes.

6.1 Des ondes aux gouttes...

Nous avons démontré au chapitre 4 que la vitesse des ondes c adimensionnée par la vitesse des ondes linéaires à la surface du substrat c_{ks} variait linéairement avec l'amplitude h_m/h_s , quels que soient le rayon ou la viscosité. Je rassemble sur la figure 6.2 l'ensemble des résultats obtenus pour des ondes ainsi que pour des gouttes observées sur des petites fibres. Sur des fibres de rayon modéré ($0.35 \text{ mm} \leq R \leq 0.475 \text{ mm}$), la vitesse suit bien la loi $c/c_{ks} = h_m/h_s$ (encart sur la figure 6.2) établie au chapitre 4 (équation (4.25), page 103). Pour ces paramètres, on obtient des structures d'amplitude modérée ($h_m/h_s < 2.5$) et des simulations numériques à partir du modèle WRIBL montrent que pour tous ces cas on a une onde se déplaçant sans transport de masse (i.e. sans recirculation). En revanche, les structures obtenues sur des petites fibres ($R=0.2$ et 0.25 mm) s'écartent franchement de cette loi ; dans ce cas, on a des gouttes présentant une zone de recirculation. Plus l'amplitude des gouttes est grande, et plus on s'éloigne de la vitesse des ondes ; l'examen des lignes de courant nous indique que lorsque l'amplitude des gouttes augmente, la zone de recirculation grandit pour finalement contenir toute la goutte, qui peut alors être vue comme un anneau liquide glissant en mouillage total sur un film mince immobile. Dans ce cas, la vitesse de la goutte est très supérieure à la vitesse à la surface du film et le rapport c/c_{ks} augmente fortement. L'apparition de la zone de recirculation ainsi que le changement de dynamique observé semblent corrélés : c'est ce que nous allons étudier en détail dans ce chapitre.

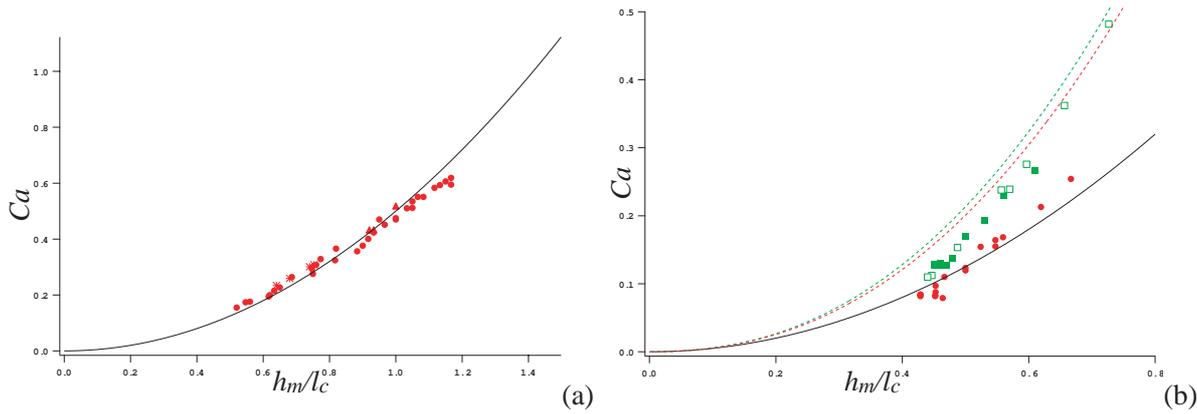


Fig. 6.3. Evolution de Ca en fonction de h_m/l_c pour des ondes (a) de l'huile V50 : \bullet $R=0.475$ mm, \blacktriangle $R=0.35$ mm, $*$ $R=0.45$ mm et des gouttes (b) \bullet $R=0.25$ mm V100, \blacksquare $R=0.2$ mm V100 et \square $R=0.2$ mm V500. Ligne pleine : loi (6.2). Lignes pointillées : vitesse du fluide à l'interface pour un film d'épaisseur h_m , en considérant un profil de Nusselt sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm (rouge) et $R=0.25$ mm (vert).

Dans le cas simple d'une onde se propageant à la surface du film, on peut penser que la vitesse dépend principalement de l'épaisseur maximale de l'onde, celle-ci se propageant alors à la vitesse du fluide à l'interface. Pour renormaliser la vitesse, on introduit le nombre capillaire construit sur la vitesse c des structures $Ca = \eta c / \gamma$, les deux mécanismes dominant étant la viscosité et la tension de surface. On trace donc, dans le cas des ondes, l'évolution de ce nombre capillaire avec h_m (Fig. 6.3(a)). On voit dans ce cas que la vitesse semble ne pas dépendre du rayon (ou faiblement, le rayon variant peu ici) et suit une évolution parabolique avec h_m . Si l'on considère que la vitesse est simplement donnée par la vitesse à l'interface en h_m , on peut écrire, en considérant un profil parabolique dans l'onde (comme dans le cas plan),

$$c = u_{if} = \frac{\rho g h_m^2}{2\eta} \quad (6.1)$$

et donc

$$Ca = \frac{1}{2} \left(\frac{h_m}{l_c} \right)^2 \quad (6.2)$$

La loi (6.2) est en bon accord avec les résultats expérimentaux. On peut donc en conclure que dans ce cas les structures sont des ondes et que le profil de vitesse s'éloigne peu du profil parabolique obtenu dans le cas d'un film d'épaisseur uniforme. Lorsqu'on regarde la même évolution pour des faibles rayons (Fig. 6.3(b)), on constate un écart significatif entre la loi (6.2) et les résultats expérimentaux, surtout pour les fibres de très faible rayon. De plus, la vitesse dépend du rayon de la fibre. Si l'on veut prendre en compte les effets de la courbure, il suffit de supposer que l'écoulement dans la goutte suit le profil de Nusselt. La vitesse du fluide à l'interface en h_m est donnée sur la figure 6.3(b) : on surestime alors la vitesse. Ces résultats nous indiquent bien qu'ici la dynamique est différente : on n'a plus une onde dont le profil est proche de celui présent dans un film d'épaisseur uniforme, mais bien une goutte présentant une zone de recirculation dans laquelle les frottements visqueux sont importants ; sa vitesse est alors plus faible que dans une onde de même amplitude. Cette goutte glisse en mouillage total sur un film uniforme mince quasi-statique. On observe de plus que, à rayon et viscosité fixés, il peut y avoir plusieurs vitesses différentes pour la même épaisseur maximale h_m . La vitesse dépend alors aussi de l'épaisseur du film h_s sur lequel la goutte glisse : la goutte se déplace

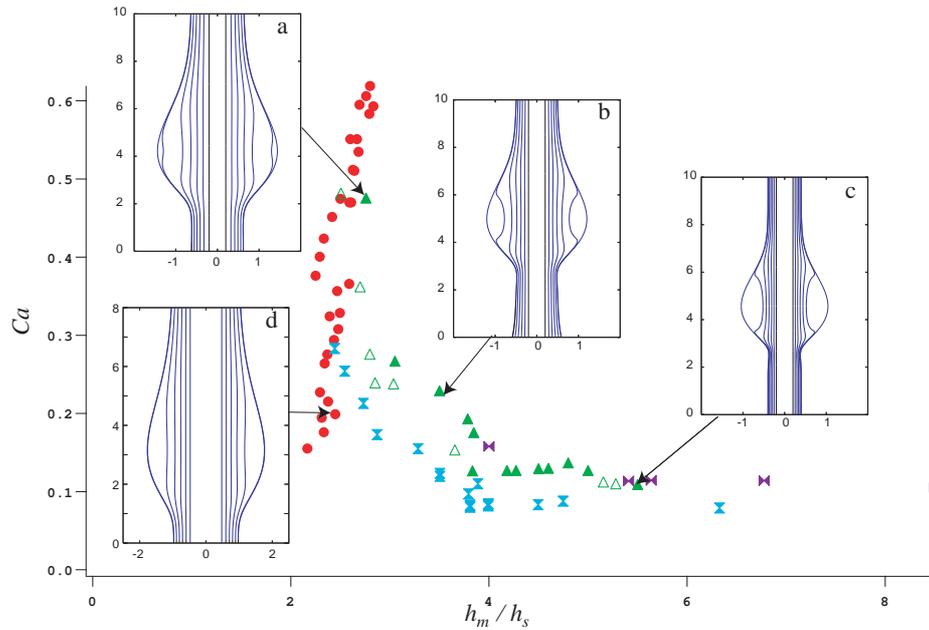


Fig. 6.4. Nombre capillaire (vitesse normalisée $Ca = \eta c / \gamma$) en fonction de l'amplitude h_m/h_s pour $R=0.475$ mm, V50 (●), $R=0.2$ mm, V100 (▲), $R=0.2$ mm, V500 (△), $R=0.25$ mm, V100 (♣) et $R=0.175$ mm, V100 (♠). Encarts : Profils et lignes de courant obtenus numériquement correspondant aux expériences indiquées par des flèches.

d'autant plus vite que le film est épais, i.e. la friction est moindre. On sait alors que la vitesse des structures dépend de l'épaisseur maximale h_m , et de l'épaisseur du film h_s ; de plus, elle dépend du type de structure dont la sélection semble être faite via l'amplitude h_m/h_s . On sait de plus que renormaliser la vitesse via le nombre capillaire Ca permet de regrouper les mesures pour différentes viscosités. Ainsi, afin de mettre en évidence l'évolution de la vitesse avec h_m et h_s , on va tracer l'évolution du nombre capillaire Ca en fonction de l'amplitude h_m/h_s . Les résultats obtenus pour des fibres de différents rayons et pour des huiles de différentes viscosités sont présentés sur la figure 6.4. Il semble y avoir deux tendances différentes :

- A faible amplitude ($h_m/h_s \lesssim 3$), le nombre capillaire (et donc la vitesse) augmente avec l'amplitude. Dans ce cas, on a des ondes (encarts d-a) et la vitesse croît avec l'épaisseur maximale.
- A forte amplitude, ($h_m/h_s \gtrsim 3$), le nombre capillaire (et donc la vitesse) diminue avec l'amplitude. Dans ces cas, on voit apparaître une zone de recirculation dont la taille augmente avec l'amplitude (encarts b-c).

On va donc chercher à comprendre les mécanismes dans ces régimes de gouttes, et notamment à quantifier l'influence du film sur lequel la goutte glisse. Cependant, dans notre expérience, on ne peut contrôler ni la taille des gouttes, ni l'épaisseur du film sur lequel elles se propagent. J'ai donc entrepris de déposer moi-même des gouttes de volume donné (et donc de taille donnée) afin de faire varier finement la taille de la goutte. On verra par la suite comment enrober la fibre d'un film d'épaisseur donnée.



Fig. 6.5. *Dispositif expérimental : on dépose, à l'aide d'une aiguille, une goutte de volume contrôlé sur une fibre verticale.*

6.2 Déposer une goutte...

Il s'agit donc de déposer une goutte de volume donné sur la fibre, comme présenté sur la figure 6.5. J'ai donc mis en place un dispositif expérimental identique au précédent, mais en dimensions réduites (environ 30 cm de hauteur) afin de faciliter les manipulations et sans alimentation en amont. Les huiles que j'ai utilisées sont en mouillage total sur la fibre, et adoptent donc spontanément la forme axisymétrique d'onduloïde décrite au chapitre 3 (et dans l'annexe 1) lorsqu'on les dépose. La principale difficulté est donc d'obtenir des gouttes de volume fixe de manière reproductible. Pour cela, on dispose de seringues microlitres Hamilton : une pour des volumes de 0 à 100 μL avec une précision de 1 μL , et une de 0 à 5 μL avec une précision de 0.05 μL . Pour des huiles très visqueuses (jusqu'à 500 fois la viscosité de l'eau), l'utilisation de ces seringues est compliquée : on ne peut garantir que tout le volume contenu dans la seringue se retrouve bien dans la goutte formée au niveau de l'embout. En effet, les gouttes se détachent rapidement, parfois avant même d'avoir poussé le piston jusqu'au bout pour les volumes importants, et du fluide reste sur les parois de la seringue. Cette méthode s'avère donc peu reproductible (excepté à faibles volumes et viscosités), ce qui a été confirmé par des mesures de masse des gouttes à l'aide d'une micro-balance sur un grand nombre de gouttes supposées de même volume. J'ai donc utilisé une autre technique (employée dans la plupart des expériences présentées ici) : on plonge une aiguille dans de l'huile jusqu'à une marque sur l'aiguille. On retire l'aiguille et il se forme alors une goutte de volume constant. En effet, les mesures de masse nous indiquent que l'on peut ainsi, avec différents embouts et différentes marques, obtenir des gouttes de volume (par exemple) $\Omega = 4 \pm 0.2 \text{ mm}^3$, $\Omega = 9 \pm 0.2 \text{ mm}^3$ ou encore $\Omega = 10 \pm 0.4 \text{ mm}^3$ (moyennes faites sur 20 gouttes) où l'incertitude (0.2 ou 0.4 mm^3) correspond à l'écart maximal mesuré entre deux gouttes formées sur la même aiguille, soit un écart sur la taille totale des gouttes de l'ordre de 10^{-1} mm. Cette méthode est donc reproductible.

Ainsi, on va pouvoir obtenir des gouttes de volume donné que l'on peut déposer (en s'assurant de bien obtenir des gouttes axisymétriques) sur notre "petite manip". Dans un premier temps, on dépose ces gouttes sur une fibre sèche. On fera par la suite des expériences sur une fibre prémouillée d'un film uniforme afin d'étudier l'influence du film mince sur lequel les gouttes glissent.

6.3 Gouttes sur une fibre sèche

On dépose une seule goutte sur une fibre sèche (c'est-à-dire séchée avec un papier de nettoyage d'optique qui absorbe bien l'huile et ne laisse pas de tissu sur la fibre) et on suit son évolution le long de la fibre. Celle-ci s'écoule par gravité le long de la fibre et son mouvement est donné sur la succession d'image présentée sur la figure 6.6. On voit que la goutte ralentit fortement, et que sa taille (et donc son volume)

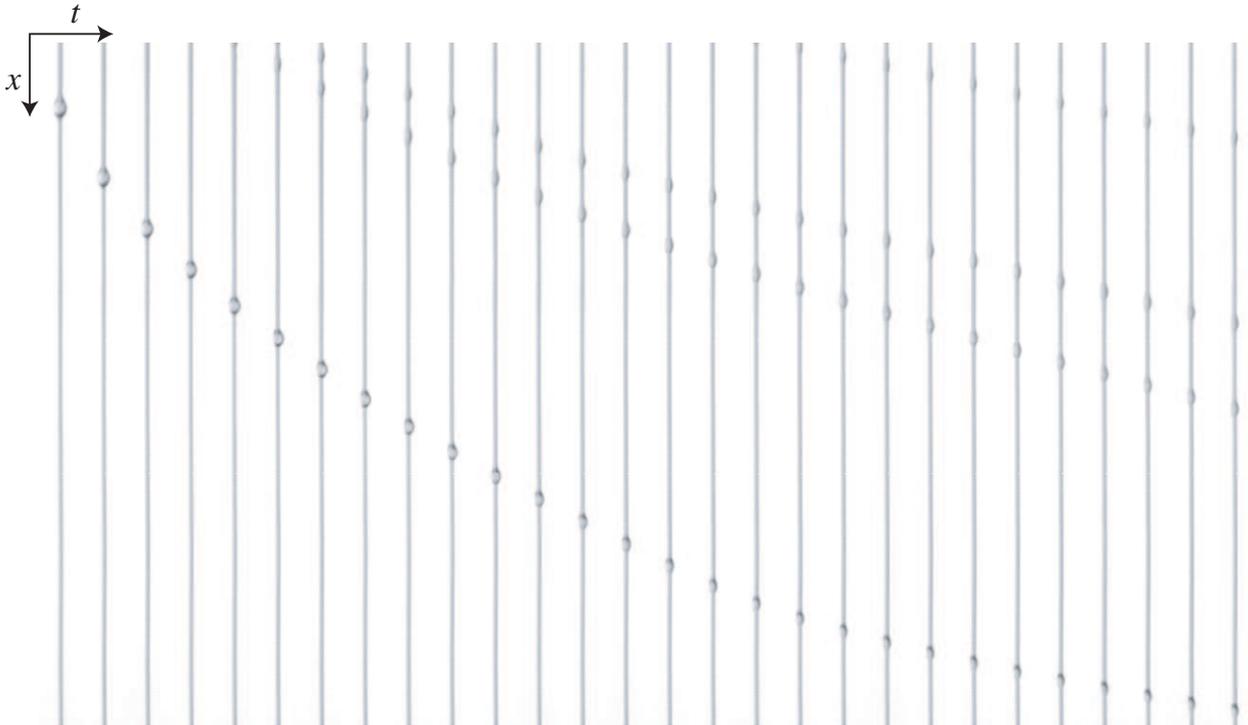


Fig. 6.6. Evolution d'une goutte de volume $\Omega=9 \text{ mm}^3$ glissant le long d'une fibre sèche de rayon $R=0.2 \text{ mm}$. Succession d'images (hauteur : 8 cm) à intervalle régulier ($\Delta t=1.3 \text{ s}$). La déstabilisation du film laissé par la goutte conduit à l'apparition de gouttes secondaires.

diminue. En effet, la goutte dépose derrière elle un film liquide, son volume et par conséquent sa vitesse vont donc diminuer. S'il n'est pas évident d'observer le film, très mince, déposé par la goutte, son existence est révélée par l'apparition de petites gouttes derrière la première ; ces gouttes proviennent de la déstabilisation du film laissé par la goutte déposée, soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau. On va dans cette partie étudier précisément la dynamique de la goutte et quantifier l'épaisseur du dépôt laissé par la goutte.

6.3.1 Trainée d'une goutte

On repère la position de la goutte par x (axe descendant) et on mesure sa vitesse V instantanée à différents instants (à différentes positions x). Afin d'avoir une précision correcte, on réduit le champ de la caméra qui acquiert alors des images autour d'une position x_1 d'une hauteur $\Delta x \simeq 3 \text{ cm}$ sur la fibre. Pour suivre l'évolution de la vitesse de la goutte en fonction de sa position, deux méthodes sont possibles. Soit on dépose une goutte de volume constant $\Omega = 9 \pm 0.2 \text{ mm}^3$ à une hauteur fixe x_0 , et on répète cette expérience plusieurs fois en déplaçant la caméra, i.e. en faisant varier x_1 de 3 à 12 cm. On peut aussi modifier la position

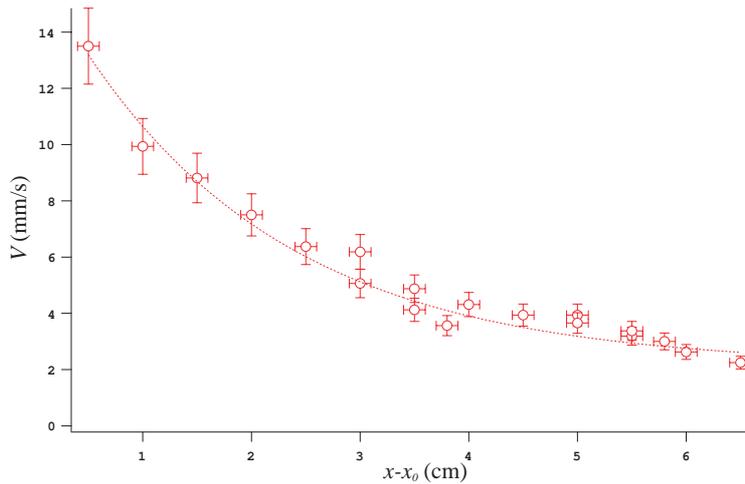


Fig. 6.7. Vitesse d'une goutte d'huile V100 de volume $\Omega=9 \text{ mm}^3$ glissant sur une fibre sèche de rayon $R=0.2 \text{ mm}$ en fonction de sa position $x - x_0$.

de dépôt de la goutte x_0 , en laissant la caméra fixe. Pour chaque goutte, on mesure sa vitesse en fonction de la distance parcourue le long de la fibre ($x - x_0$) : tous les points se regroupent sur une courbe unique : une goutte de taille donnée se déplace à vitesse donnée et la dynamique de dépôt de fluide sur la fibre semble être dictée par une loi fixe, elle ne varie pas d'une expérience à l'autre. La figure 6.7 présente l'évolution de la vitesse d'une goutte de volume $\Omega = 9 \pm 0.2 \text{ mm}^3$ et rassemble plusieurs expériences. On observe comme précédemment que la vitesse de la goutte diminue lorsqu'elle descend. Pour une même expérience, on peut suivre l'évolution de la taille de la goutte notée L , comme présenté sur la figure 6.8. A mesure que la goutte glisse sur la fibre, sa taille diminue, ce qui confirme le fait qu'elle dépose un film derrière elle. Sa vitesse suit la même évolution. On mesure le profil de gouttes de différentes tailles de manière précise avec la caméra rapide munie d'un objectif Macro, comme présenté sur la figure 6.9. Sur ces profils, on observe bien la formation derrière la goutte d'un film d'épaisseur h . Ce film est d'autant plus épais que la goutte a une taille L , et donc une vitesse, importante. Ces observations permettent d'expliquer l'allure de la courbe d'évolution de la vitesse de la figure 6.7 : la décroissance de la vitesse est plus rapide à faibles x ; en effet, la goutte laisse derrière elle un film d'autant plus épais qu'elle s'écoule rapidement, ainsi son volume (et donc sa vitesse) diminue plus fortement à grande vitesse qu'à faible vitesse.

On a donc un comportement similaire à celui d'un solide tiré d'un bain : l'épaisseur déposée augmente avec la vitesse. En effet, lorsqu'on tire à faible vitesse V un solide d'un bain de liquide visqueux, il se forme sur le solide un dépôt de liquide d'épaisseur h . Ce dépôt résulte d'un compromis entre forces visqueuses et forces capillaires : la viscosité η favorise l'entraînement car le liquide près du solide (à la paroi) va à la vitesse du solide, tandis que la tension de surface γ s'oppose à la déformation de l'interface et donc à la formation du dépôt. L'épaisseur déposée augmente alors avec le nombre capillaire. On peut alors penser que notre système (une goutte glissant sur un fil) est analogue au système décrit sur la figure 6.10(a-b), à savoir tirer une fibre d'un bain ou vider un tube. Ici, le "réservoir" est une goutte se déplaçant à la vitesse V ; dans le référentiel de la goutte, tout se passe comme si on tirait la fibre au-travers de la goutte à une vitesse $-V$. Si on prend comme axe de référence l'axe x ascendant, la vitesse de la fibre devient $+V$ (figure 6.10(c)). Nous allons dans un premier temps rappeler les lois qui régissent le mouillage dynamique des solides, c'est-à-dire qui caractérisent le dépôt liquide qui se forme sur un solide tiré d'un bain ; en particulier, on

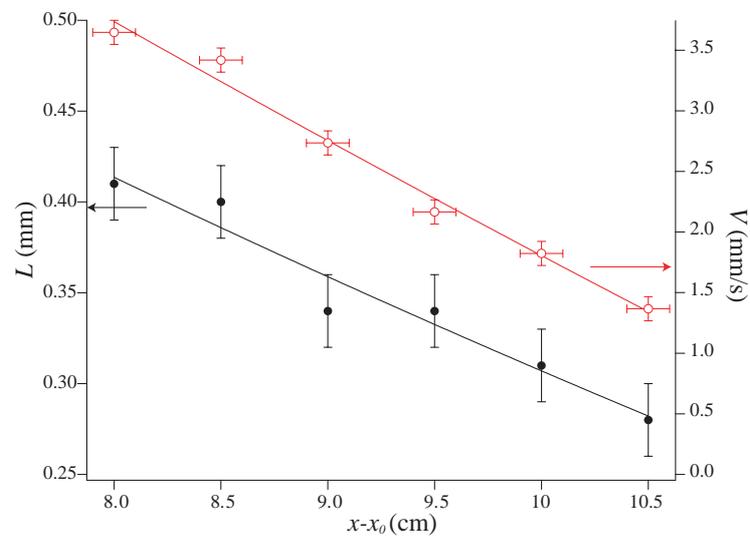


Fig. 6.8. Vitesse V et taille L d'une goutte d'huile V100 de volume $\Omega=9 \text{ mm}^3$ glissant sur une fibre sèche de rayon $R=0.2 \text{ mm}$ en fonction de sa position $x - x_0$.

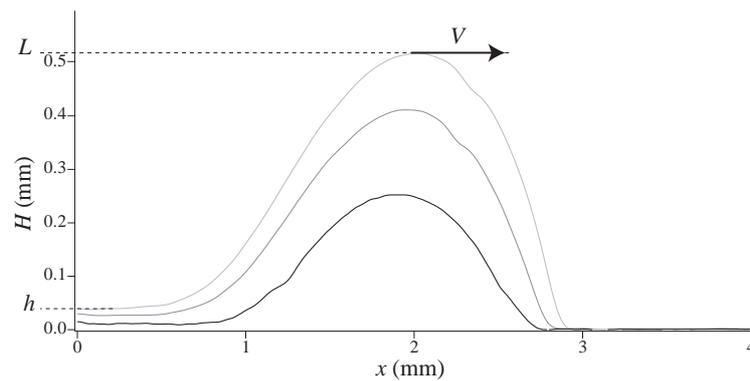


Fig. 6.9. Profils $H(x)$ de plusieurs gouttes d'huile V50 de tailles L différentes glissant sur une fibre sèche de rayon $R=0.2 \text{ mm}$. Les gouttes se déplacent à une vitesse V et laissent derrière elles un film d'épaisseur h .

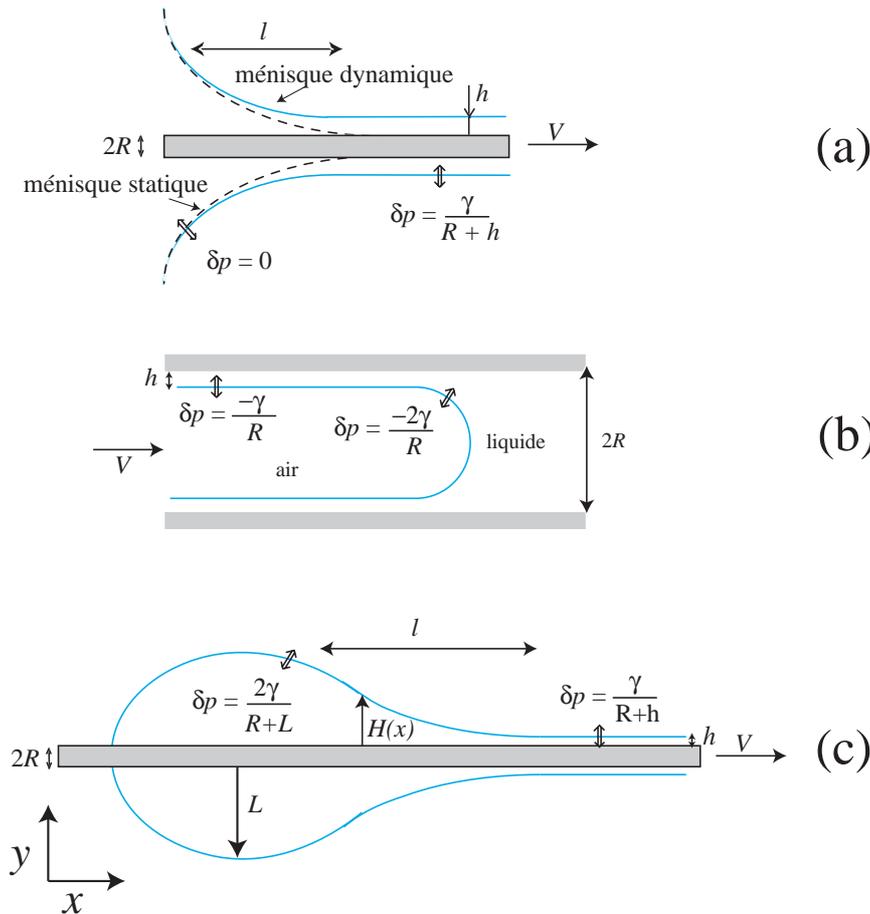


Fig. 6.10. Trois situations de mouillage dynamique : (a) en tirant une fibre de rayon R hors d'un bain, (b) lors de la vidange d'un tube de rayon R et (c) quand une goutte de taille L glisse sur une fibre de rayon R . Le film déposé d'épaisseur h dépend de la vitesse V . Les surpressions indiquées sur le schéma sont responsables de gradients de pression et donc d'écoulement de fluide du réservoir (bain ou goutte) vers le film.

s'intéressera au mouillage dynamique des fibres et tubes (voir la revue de David Quéré (83)) et on adaptera ces études à notre système.

Le profil $H(x)$ du film se décompose en trois régions (comme présenté sur la figure 6.10(a)) : on a d'abord un morceau de ménisque statique non perturbé par l'écoulement (en pointillés), qui correspond au ménisque présent sans écoulement lorsqu'on met le solide en contact avec un bain liquide (le raccordement d'une interface libre avec un solide imposant une déformation de l'interface). En aval, on a une autre région qui est le film plat d'épaisseur h . Entre les deux, il y a une zone de raccord, appelée ménisque dynamique, d'extension l où le film se forme. L'étude de l'évolution de ce profil permet de déterminer l'épaisseur entraînée h . Dans la limite des faibles vitesses (petits nombres capillaires $Ca < 10^{-3}$), et en négligeant la gravité ($h \ll l_c$), Landau, Levich et Derjaguin (58; 19) ont proposé une solution analytique pour l'épaisseur h entraînée par une plaque tirée d'un bain

$$h = 0.94l_c Ca^{2/3} \quad (6.3)$$

que l'on appelle *loi de Landau*. Dans le cas d'une fibre tirée à faible vitesse (82), cette loi est modifiée. Seule la courbure du ménisque statique change, en valeur absolue, de $\sqrt{2}/l_c$ pour une plaque à $1/R$ pour une fibre. Ainsi, la loi (6.3) devient

$$h = 1.34RCa^{2/3} \quad (6.4)$$

Lorsque le rayon de la fibre augmente, on passe continûment de (6.4) à (6.3), la transition ayant lieu autour de $R = l_c$, comme montré par White et Tallmadge (104). Lorsqu'un tube se vide d'un liquide visqueux, celui-ci laisse un film sur les parois du tube dont l'épaisseur suit la loi (6.4) comme démontré par Bretherton (9).

Contrairement aux deux situations de mouillage dynamique présentées ci-dessus, dans notre expérience, le "réservoir" est une goutte dans laquelle la surpression de Laplace est finie et dépend de sa taille L ($\Delta p = 2\gamma/(R + L)$). Nous allons donc reprendre le raisonnement suivi par David Quéré (83) afin d'établir une loi de Landau adaptée au cas d'une goutte glissant sur une fibre.

On peut tout d'abord faire une estimation de l'épaisseur déposée en loi d'échelle en reprenant le raisonnement de David Quéré (82) mais en considérant une surpression de Laplace finie et constante dans la goutte $\Delta p = 2\gamma/(R + L)$. La goutte se déplace à la vitesse V . On suppose que l'épaisseur déposée est petite devant le rayon de la fibre, i.e. $h \ll R$ (dans nos expériences, $h/R \sim O(10^{-1})$), on néglige la gravité et on suppose $L > R$. La goutte et le film sont reliés par un ménisque dynamique de longueur l . Les différentes notations sont indiquées sur la figure 6.10 (c). Dans ce ménisque, il existe un gradient de pression

$$\nabla p \sim \frac{\gamma}{l} \left(\frac{1}{R} - \frac{2}{R+L} \right).$$

Ceci induit un écoulement de Poiseuille de la forme

$$\eta V \sim \frac{h^2 \gamma}{lR} \frac{L-R}{L+R} \quad (6.5)$$

On peut de plus écrire le raccordement entre la pression dans le ménisque dynamique et celle dans la goutte en écrivant qu'à la distance l ces deux pressions sont égales, soit

$$\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma h}{l^2} \sim \frac{2\gamma}{R+L} \quad (6.6)$$

ce qui permet, en combinant (6.5) et (6.6), de trouver l puis h , soit :

$$l \sim Ca^{1/3} R \frac{L+R}{L-R} \quad (6.7)$$

$$h \sim Ca^{2/3} R \frac{L+R}{L-R} \quad (6.8)$$

Lorsque la goutte se déplace rapidement, l'hypothèse d'un écoulement de Poiseuille ne tient plus. L'épaisseur laissée par la goutte va diverger ; c'est l'inertie qui est à l'origine de cette divergence. Raisonnons encore aux dimensions. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$-\rho \frac{V^2}{l} = -\frac{\gamma(L-R)}{lR(L+R)} + \eta \frac{V}{h^2} \quad (6.9)$$

Le signe $-$ devant le terme d'inertie $\rho V^2/l$ vient du fait que l'inertie et la tension de surface jouent ici des rôles antagonistes : la tension de surface veut ramener le fluide dans la goutte, tandis que l'inertie favorise le dépôt d'un film. On réécrit cette équation sous la forme

$$\eta V = \frac{h^2}{l} \left(\frac{\gamma(L-R)}{R(L+R)} - \rho V^2 \right) \quad (6.10)$$

L'inertie étant importante, on peut appliquer la relation de Bernoulli entre le ménisque statique et la goutte dynamique :

$$\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma h}{l^2} \sim \rho V^2 + \frac{2\gamma}{R+L} \quad (6.11)$$

En utilisant (6.10) et (6.11), on obtient une expression pour l'épaisseur

$$h \sim \frac{(R(L+R)/(L-R))Ca^{2/3}}{1 - (R(L+R)/(L-R))\frac{\rho V^2}{\gamma}} \quad (6.12)$$

On note

$$a = \frac{R(L+R)}{L-R}$$

le facteur de forme et

$$We = \frac{\rho V^2 a}{\gamma}$$

le nombre de Weber qui compare les effets de l'inertie et de la tension de surface. On obtient finalement

$$h \sim \frac{a Ca^{2/3}}{1 - We} \quad (6.13)$$

A basse vitesse, l'inertie est négligeable ($We \ll 1$) et l'équation (6.13) se réduit à (6.7). A mesure que We augmente, c'est à dire lorsque la vitesse augmente, l'épaisseur s'écarte de la loi de Landau pour diverger lorsque $We = 1$. Dans notre cas, les nombres capillaires restent faibles ($Ca < 0.02$) et on devrait pouvoir négliger l'inertie.

On cherche maintenant à déterminer de manière exacte la relation liant l'épaisseur h au nombre capillaire Ca . Pour cela, on cherche la forme du profil du film $H(x)$. On se place dans le cas où $h < R$ et on néglige l'effet de la gravité (car $h \ll l_c$), c'est-à-dire qu'on ne prend en compte que la pression de Laplace. On se place alors en coordonnées cartésiennes et l'équation de Navier-Stokes s'écrit

$$\eta u_{yy} = -\gamma H_{xxx} \quad (6.14)$$

où u est la composante de la vitesse parallèle à la fibre, et où l'interface a été supposée faiblement courbée ($p_x = -\gamma H_{xxx}$). On suppose alors que l'écoulement dans le ménisque dynamique présente un profil de vitesse parabolique, la pression effective $A(x)$ le provoquant étant inconnue. On a comme conditions aux limites $u(0) = V$ et $u_y(H) = 0$, soit

$$u = A(x) \left(\frac{y^2}{2} - yH(x) \right) + V.$$

La conservation du débit par unité de largeur s'écrit

$$Q = hV = \int_0^H u dy = HV - A(x) \frac{H^3}{3} \quad (6.15)$$

ce qui permet de déterminer $A(x)$, et donc de réécrire le profil de vitesse

$$u = 3 \frac{H-h}{H^3} \left(\frac{y^2}{2} - yH \right) V + V \quad (6.16)$$

On injecte ce profil de vitesse dans l'équation (6.14), ce qui conduit à

$$3\eta \frac{H-h}{H^3} V = -\gamma H_{xxx} \quad (6.17)$$

On effectue le changement de variable $H = hY$ et $x = h Ca^{-1/3}X$, ce qui conduit finalement à

$$Y''' = 3 \frac{1-Y}{Y^3} \quad (6.18)$$

où les ' dénotent la dérivée par rapport à X . On a comme conditions aux limites en $X \rightarrow \infty : Y \rightarrow 1$ (car $H \rightarrow h$ pour $x \rightarrow \infty$), $Y' \rightarrow 0$ et $Y'' \rightarrow 0$ (car le film est plat et d'épaisseur constante). En intégrant numériquement (6.18), on trouve (82; 9)

$$\left. \frac{d^2 Y}{dX^2} \right|_{Y \rightarrow \infty} = 1.34 \quad (6.19)$$

soit

$$\left. \frac{d^2 H}{dx^2} \right|_{H \rightarrow \infty} = 1.34 \frac{Ca^{2/3}}{h} \quad (6.20)$$

Reste à faire le raccord entre les ménisques statique et dynamique. Au point de raccord, les pressions, et donc les dérivées secondes des profils sont égales. Cette condition dite *condition de Landau* s'écrit :

$$\left. \frac{d^2 H}{dx^2} \right|_{H \rightarrow \infty} = \left. \frac{d^2 H}{dx^2} \right|_{H \rightarrow h}^{statique} \quad (6.21)$$

Dans le cas d'une fibre tirée d'un bain, la courbure totale du ménisque statique est nul, ce qui se traduit par la relation

$$0 = \frac{1}{R} - \left. \frac{d^2 H}{dx^2} \right|_{H \rightarrow h}^{statique} \quad (6.22)$$

En faisant le raccord (6.21), on obtient alors la relation (6.4). Dans notre cas, la courbure totale du ménisque n'est pas nulle, mais est égale à la courbure de la goutte, soit

$$\frac{2}{R+L} = \frac{1}{R} - \left. \frac{d^2 H}{dx^2} \right|_{H \rightarrow h}^{statique} \quad (6.23)$$

d'où

$$\left. \frac{d^2 H}{dx^2} \right|_{H \rightarrow h}^{statique} = \frac{L-R}{R(L+R)} = \frac{1}{a} \quad (6.24)$$

L'égalité (6.21) donne alors

$$Ca^{2/3} \frac{1.34}{h} = \frac{1}{a},$$

soit

$$h = 1,34 a Ca^{2/3} \quad (6.25)$$

ce qui correspond à la loi de Landau, avec notre facteur de forme a comme échelle caractéristique, comme déduit par le raisonnement en loi d'échelle.

Cette loi est valable pour un régime stationnaire. Expérimentalement, on dépose des gouttes de différents volumes sur une fibre sèche, et leur vitesse diminue au fur et à mesure qu'elles glissent le long de la fibre. Les mesures sont prises ici sur une distance réduite ($\Delta x = 3$ mm) sur laquelle la forme et la vitesse de la goutte sont pratiquement constantes. L'épaisseur déposée h est mesurée immédiatement derrière la goutte et est constante sur notre plage de mesure. On mesure l'épaisseur h déposée derrière différentes gouttes de taille L se déplaçant à une vitesse V , pour différents rayons de fibre et différentes viscosités. On représente l'évolution de h/a en fonction du nombre capillaire (Fig.6.11). On note qu'une fois l'épaisseur correctement adimensionnée par $a(L)$, tous les points se regroupent sur une même courbe et que la loi type Landau (6.25)

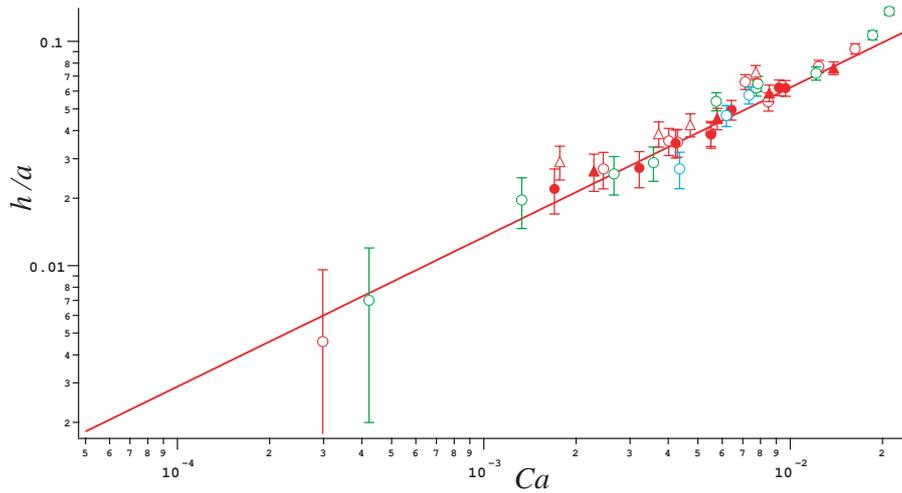


Fig. 6.11. Epaisseur normalisée par le facteur de forme h/a avec $a = R \frac{L+R}{L-R}$ en fonction du nombre capillaire Ca en échelle logarithmique pour : $R=0.2$ mm V20 (\square), V50 (\circ), V100 (\triangle) et V500 (\diamond); $R=0.175$ mm V50 (\circ) et $R=0.28$ mm V50 (\circ). Ligne : loi (6.25).

est en très bon accord avec l'expérience.

On peut également à partir des calculs précédents déterminer la forme du ménisque. On part de l'équation différentielle (6.18) pour le profil du ménisque. Autour du film plat $Y = 1$, on peut linéariser cette équation en écrivant $Y = 1 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$, ce qui conduit à

$$\epsilon''' = -3\epsilon$$

dont une solution acceptable est $\epsilon = Ce^{-3^{1/3}X}$, c'est-à-dire en variables dimensionnelles

$$H(x) = h(1 + Ce^{-x/l}) \quad (6.26)$$

où l est la longueur caractéristique du ménisque $l \sim hCa^{-1/3}$. Dans le cas du ménisque s'établissant à la sortie de la vanne, on est dans la même situation que lorsqu'on tire une fibre d'un bain (la vitesse dans le film d'épaisseur uniforme est constante et on considère que la vanne a une ouverture grande). Ainsi, on a $h = 1.34RCa^{2/3}$, d'où $l = hCa^{-1/3} = 1.34 R Ca^{1/3}$. L'épaisseur entraînée h correspond à l'épaisseur de Nusselt h_N . Expérimentalement, on trouve bien, comme présenté au chapitre 2 sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm, $H = h_N(1 + Ce^{-x/l})$ avec $C \simeq 2.5$ et $l \simeq 1.25$ mm. On observe de plus que l augmente bien avec le débit. Dans le cas de la goutte, on peut supposer que l'arrière suit également une évolution exponentielle ; après ajustements avec le profil expérimental, on vérifie bien que l'extension l augmente avec le débit. Cependant, les mesures ne sont pas assez précises pour être catégorique quant à la forme de la goutte, ni pour vérifier les lois de variation de l'extension l .

6.3.2 Vitesse des gouttes

On s'intéresse maintenant à la vitesse d'une goutte stationnaire, avançant à vitesse V constante sans se déformer. On cherche dans un premier temps à déterminer le profil de vitesse dans la goutte d'interface $H(x)$ présentée sur la figure 6.12. Les conditions aux limites (vitesse tangentielle nulle en $r=R$ et contrainte

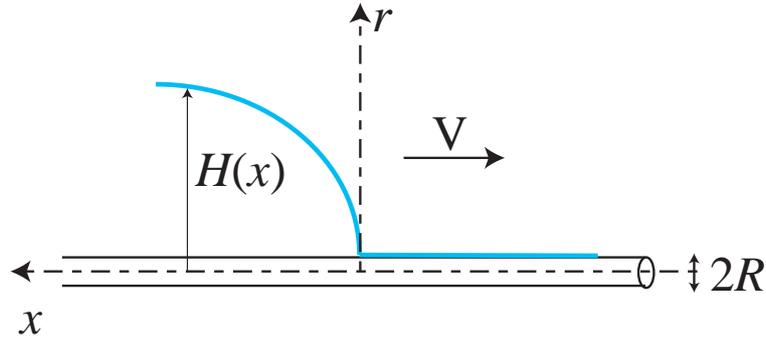


Fig. 6.12. Goutte avançant sur une fibre

nulle à l'interface liquide/air) imposent, dans les hypothèses de lubrification, un profil parabolique dans la goutte, soit

$$u(r) = A(x)\frac{r^2}{2} + B(x)r + C$$

où u est la composante de la vitesse selon l'axe (Ox). En utilisant les conditions aux limites, le profil s'écrit

$$u(r) = A(x)\left(\frac{1}{2}(r^2 - R^2) - H(x)(r - R)\right) \quad (6.27)$$

On peut calculer le débit par unité de longueur

$$Q(x) = \int_R^H u(r)dr = \frac{A(x)}{3}(R - H)^3 \quad (6.28)$$

La conservation du volume dans la goutte impose

$$Q(x) = (H - R)V \quad (6.29)$$

qui nous permet de déterminer $A(x)$, et on obtient finalement le profil suivant :

$$u(r) = -\frac{3V}{2(H - R)^2} \left[(r^2 - R^2) - 2H(r - R) \right] \quad (6.30)$$

Notons que la vitesse à l'interface $u(H) = (3/2)V$ est plus grande que la vitesse de la goutte. La dynamique d'une telle goutte n'est pas triviale. Dussan et Davis (29) ont mis en évidence expérimentalement l'existence d'une recirculation dans une goutte en mouvement le long d'un plan incliné : une petite tâche de colorant placée sur la surface supérieure de la goutte rattrape la ligne de contact puis se fixe sur le support. On a un mouvement de roulement analogue à celui d'une chenille de tank : lorsque la chenille ne touche pas le sol, elle avance plus vite que le tank.

Dans notre expérience, on peut injecter une particule dans la goutte afin de suivre le mouvement du fluide en son sein, comme décrit au chapitre 4. L'évolution d'une goutte s'écoulant sur une fibre sèche est présentée sur la figure 6.13 : la goutte glisse en déposant un film mince derrière elle. Sa vitesse diminue alors légèrement. Ce ralentissement est bien mis en évidence en comparant la vitesse de la goutte après quelques centimètres à sa vitesse initiale, indiquée par la ligne en pointillés sur la figure 6.13. Cependant, sur une distance courte (de l'ordre de 4 mm), la vitesse de la goutte est constante et on ne peut déceler de changement de forme ; on va donc considérer que la goutte est stationnaire. L'injection d'une particule dans la

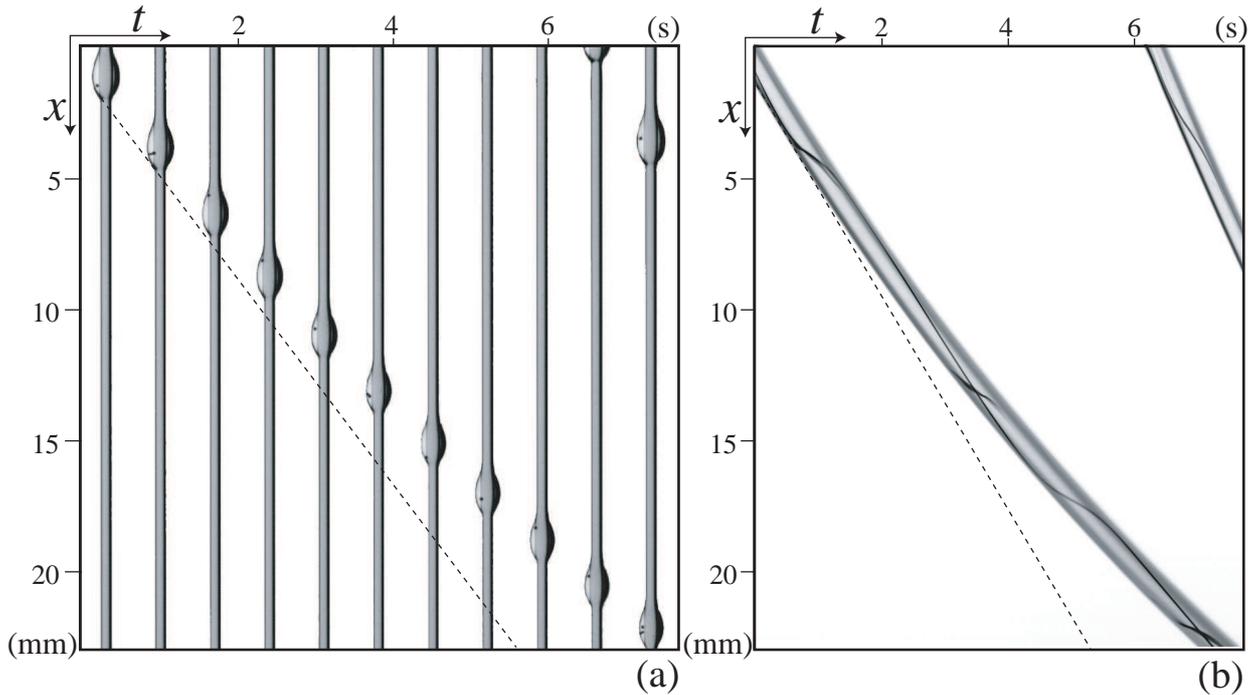


Fig. 6.13. Evolution d'une goutte posée sur une fibre sèche de rayon $R=0.2$ mm. (a) : Succession d'images (hauteur $\Delta x = 23$ mm) prises toutes les $\Delta t = 0.7$ s. (b) Diagramme spatio-temporel correspondant. La particule de latex (taille environ $100\mu\text{m}$) indique la large zone de recirculation qui englobe toute la goutte. Les lignes pointillées indiquent la vitesse initiale de la goutte (pente initiale).

goutte nous indique la présence d'une large zone de recirculation, englobant toute la goutte (la particule longe la fibre en remontant, et descend en suivant l'interface) comme on peut le voir sur la succession d'images (Fig. 6.13(a)). Ce comportement est particulièrement visible sur le diagramme spatio-temporel (Fig. 6.13(b)). Il n'est pas évident de déterminer alors la dynamique de la goutte, qui s'écoule par gravité et dans laquelle se développe une force de friction qui s'oppose au mouvement. L'écoulement d'une goutte glissant en mouillage partiel sur un plan incliné a été notamment étudié par H. Y. Kim et al. (52) avec une approche énergétique en considérant que l'énergie gravitationnelle est dissipée par viscosité et au niveau la ligne de contact. Dans notre cas, on est en mouillage total et on suppose que la dissipation n'est que d'origine visqueuse. L'estimation de la dissipation visqueuse dans la goutte en mouvement est un problème délicat ; cette dissipation peut être vue comme la somme de trois contributions : la dissipation dans le coin qui domine pour les gouttes de petite taille, la dissipation dans le film et la dissipation dans le volume prépondérante dans le cas de grosses gouttes. On considère ici que la dissipation se fait principalement dans le volume, c'est-à-dire dans la zone de recirculation ; dans ce cas, la dissipation due au mouvement du fluide s'écrit

$$\Phi_v \sim \eta \int_{\Omega_b} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 d\Omega \quad (6.31)$$

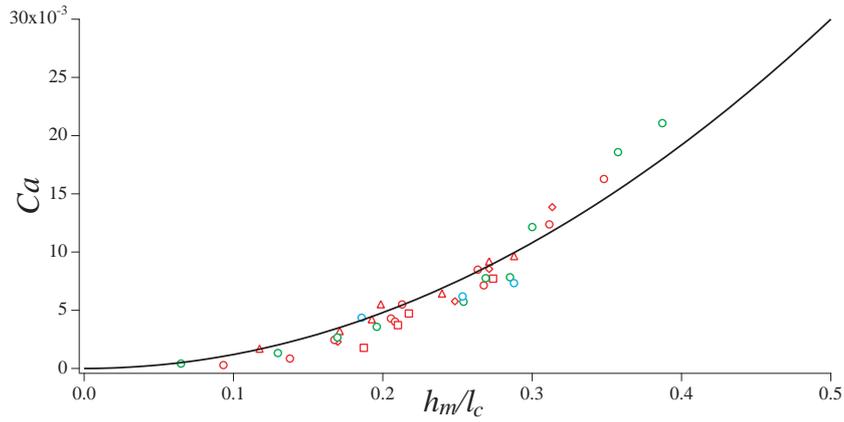


Fig. 6.14. Evolution de Ca en fonction de h_m/l_c pour des gouttes sur une fibre sèche : $R = 0.2$ mm V20 (\square), V50 (\circ), V100 (\triangle) et V500 (\diamond) ; $R = 0.175$ mm V50 (\circ) et $R = 0.28$ mm V50 (\circ). Ligne : loi (6.35) ajustée pour la valeur $A = 0.12$.

où Ω_b est le volume de la partie centrale de la goutte et $\Omega_b \simeq \Omega$ le volume total de la goutte, la zone de recirculation englobant toute la goutte. On peut de plus écrire

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sim \frac{V}{h_m}$$

avec h_m la hauteur de la goutte, ce qui conduit finalement, en ordre de grandeur, à

$$\Phi_v \sim \eta \Omega \left(\frac{V}{h_m} \right)^2 \quad (6.32)$$

L'énergie gravitationnelle s'écrit

$$\Phi_g = \rho g \Omega V \quad (6.33)$$

ce qui conduit, en égalant les deux dissipations $\Phi_g \sim \Phi_v$, à une expression pour la vitesse

$$V \sim \frac{\rho g h_m^2}{\eta} \quad (6.34)$$

ce qui se réécrit

$$Ca = A \left(\frac{h_m}{l_c} \right)^2 \quad (6.35)$$

où A est une constante que l'on déterminera expérimentalement. On s'attend à avoir un préfacteur différent de celui correspondant au cas d'une onde (rappelons que dans le cas d'une onde, la vitesse est donnée par la loi (6.2), c'est-à-dire la loi (6.35) avec $A=0.5$).

Expérimentalement, on dépose une seule goutte sur une fibre sèche et on mesure sa vitesse instantanée, c'est-à-dire sur une courte distance (de l'ordre de 2-3 mm) sur laquelle on s'assure que la taille de la goutte n'a pas changé. On représente sur la figure 6.14 le nombre capillaire en fonction du rapport h_m/l_c pour différentes viscosités et différents rayons. Les points se regroupent sur une seule courbe dont un ajustement permet de trouver le préfacteur $A = 0.12$. Cette constante est plus faible que dans le cas d'une onde ($A=0.5$) : en effet, il y a ici une large zone de recirculation, qui contient l'ensemble de la goutte. Finalement, que ce soit dans le cas d'une onde, ou d'une goutte, la dissipation se fait principalement dans le volume ; on va maintenant s'intéresser au cas où le film de prémouillage joue un rôle sur la vitesse.

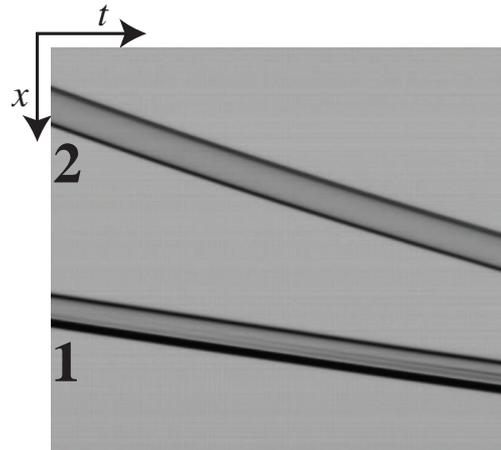


Fig. 6.15. Diagramme spatio-temporel ($\Delta t=2.9$ s, $\Delta x=12.8$ mm) représentant l'expérience suivante : on pose une goutte **1** d'huile V50 de volume $\Omega=5$ μL sur une fibre sèche de rayon $R=0.2$ mm. Cette goutte se déplace sur la fibre en laissant un film derrière elle, et donc en ralentissant. On pose alors une goutte **2** juste derrière ; cette goutte se déplace alors sur le film créé par **1** avec une vitesse plus importante.

6.4 Influence du film sur la vitesse des gouttes : gouttes sur fibre prémouillée

Sur ce second montage de petite taille, on peut dorénavant contrôler l'épaisseur du film en déposant des gouttes sur une fibre sèche de manière à enrober la fibre d'un film d'épaisseur h . On dépose alors rapidement des gouttes sur le film ainsi créé. Il est important de déposer les gouttes rapidement, car le film mince est soumis à l'instabilité de Rayleigh-Plateau et des oscillations apparaissent. De plus, le film est drainé et s'amincit sous l'effet de la gravité. Nous avons donc mener des expériences principalement avec de l'huile V500 de forte viscosité, pour laquelle le taux de croissance et le drainage sont lents. Des expériences ont ainsi été réalisées en grande partie par Christelle Douay lors d'un stage de Master 1 avec une fibre de petit rayon ($R=0.2$ mm) sur laquelle on peut obtenir des gouttes de grande amplitude et avec une fibre de rayon moyen ($R=0.45$ mm) sur laquelle les structures ont une forme plus allongée et sont de petite amplitude. Une expérience typique est présentée sur le diagramme spatio-temporel 6.15 : on dépose une goutte **1** d'huile V50 de volume $\Omega=5$ μL sur une fibre sèche de rayon $R=0.2$ mm. Cette goutte se déplace sur la fibre en laissant un film derrière elle, et donc en ralentissant. On pose alors une goutte **2** de même volume juste derrière ; cette goutte se déplace alors sur le film créé par **1** avec une vitesse plus importante, comme en témoigne l'augmentation de la pente sur le diagramme spatio-temporel. Pour étudier la dynamique de gouttes à l'équilibre, on a sélectionné des gouttes ne changeant pratiquement pas de volume, c'est-à-dire que le film sur lequel elles glissent a la même épaisseur de part et d'autre de la goutte. On peut alors faire varier l'épaisseur du film de prémouillage, en déposant des gouttes de plus ou moins grand volume ; un film épais est obtenu après le passage successif de plusieurs gouttes. On peut aussi faire varier la taille des gouttes en modifiant leur volume initial. On obtient ainsi des gouttes dont l'amplitude varie fortement ($1.3 < h_m/h_s < 15.5$), avec des épaisseurs de film 0.0282 mm $< h_s < 0.213$ mm et des tailles de gouttes 0.158 mm $< h_m < 0.821$ mm avec une précision $\Delta h = 0.002$ mm.

Sur la fibre de rayon $R=0.2$ mm, on obtient des gouttes de grande amplitude ($3.8 < h_m/h_s < 15.5$) et on note toujours que la vitesse de gouttes est d'autant plus importante que l'épaisseur de film est importante. On

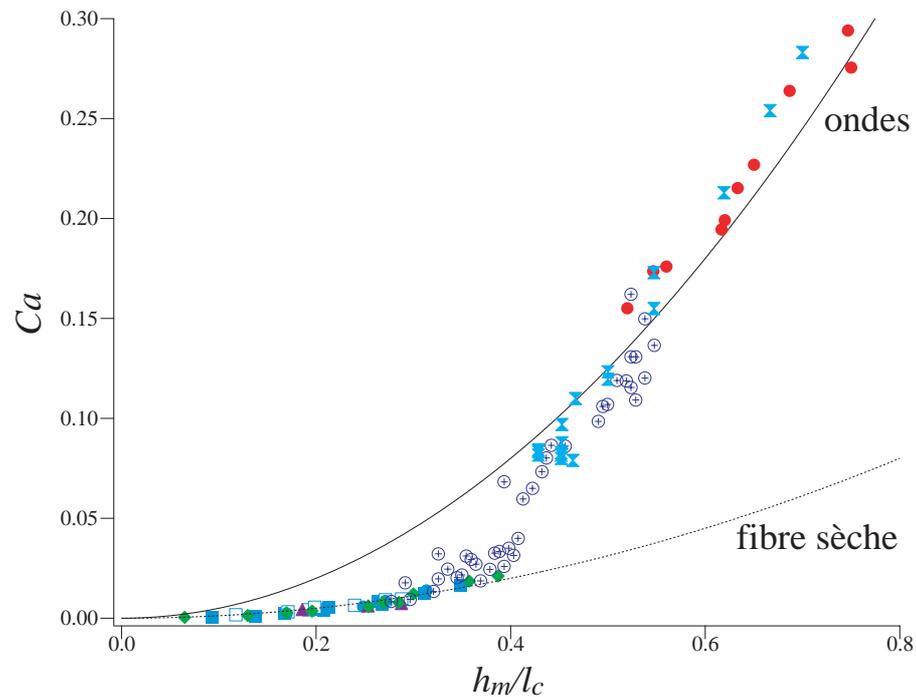


Fig. 6.16. Evolution du nombre capillaire en fonction du rapport h_m/l_c pour différentes expériences, sur une fibre sèche ($R=0.2$ mm ■ V50, □ V100, ● V500 ; $R=0.28$ mm V50 ▲, $R=0.175$ mm V50 ◆), sur une fibre prémouillée dans le cadre de notre expérience complète (● $R=0.475$ mm V50, ▲ $R=0.25$ mm V100), et sur une fibre prémouillée en déposant des gouttes sur un film d'épaisseur contrôlée (⊕ $R=0.2$ mm V500). La ligne pointillée correspond à la loi (6.35) de gouttes glissant sur une fibre sèche et la ligne en trait plein correspond à la loi (6.2) d'une onde se propageant sans transport de masse.

peut tracer l'évolution de la vitesse en fonction de de h_m/l_c . On présente cette évolution avec les résultats obtenus jusqu'ici (sur le montage principal et sur l'expérience satellite avec une fibre sèche) sur la figure 6.16. Les points se regroupent et suivent deux tendances distinctes. La ligne pointillée correspond à la loi (6.35) avec $A=0.12$, c'est-à-dire à la vitesse de gouttes sur une fibre sèche. La ligne en trait plein correspond à la loi (6.2), c'est-à-dire à la vitesse d'une onde (avec $A=0.5$). Les points ⊕ correspondent à des gouttes déposées sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm sur des films de différentes épaisseurs. Lorsque l'épaisseur est faible, tous les points se regroupent sur la courbe (6.35) : on retrouve le même comportement que sur une fibre sèche. Pour les grandes épaisseurs, tous les points se regroupent sur la loi (6.2) : on a un comportement identique à celui d'une onde (sans recirculation). Pour des épaisseurs intermédiaires, on passe continûment de la vitesse d'une goutte sur une sur fibre sèche V_s à la vitesse d'une onde u_{if} . Cette représentation (en fonction uniquement de l'épaisseur maximale h_m) ne permet cependant pas de voir l'influence du film h_s sur lequel les gouttes glissent. Afin d'identifier l'effet de du film mince de prémouillage h_s sur ce changement de vitesse, on mesure l'écart de vitesse entre la vitesse V de la goutte sur la fibre prémouillée et la vitesse V_s qu'aurait une goutte de même taille sur une fibre sèche, calculée avec la loi (6.35). On présente cet écart sur la figure 6.17 en fonction de l'épaisseur du film de prémouillage h_s (Fig. 6.17 (a)) et en fonction de l'amplitude h_m/h_s (Fig. 6.17 (b)). On observe qu'à faible épaisseur de film, ou à grande amplitude, l'écart de vitesse tend vers zéro. La goutte se comporte comme sur une fibre sèche et ne ressent pas l'effet du film

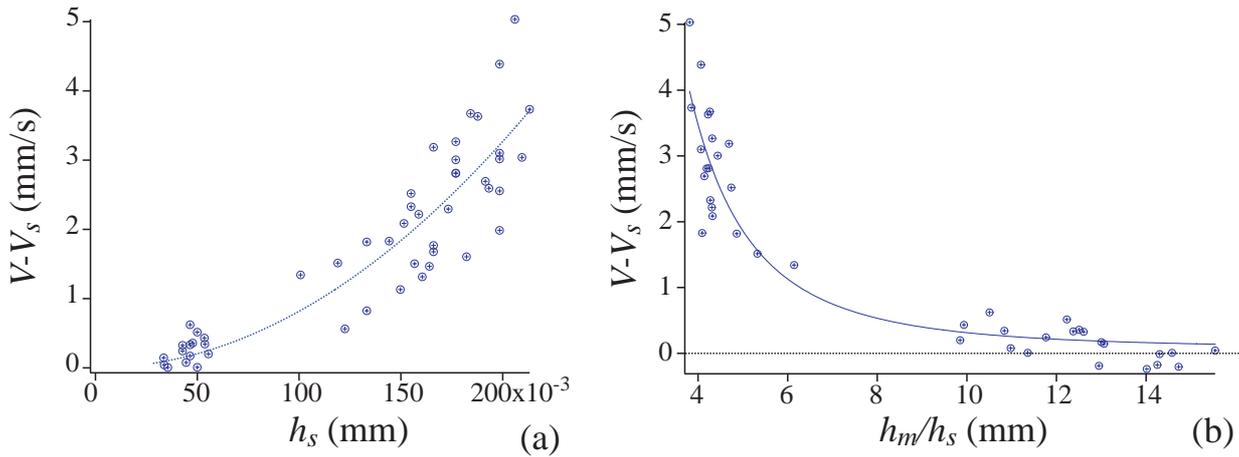


Fig. 6.17. Evolution de l'écart entre la vitesse des gouttes V sur un film d'épaisseur h_s contrôlée et la vitesse sur une fibre sèche $V_s = 0.12 \frac{\rho g}{\eta} h_m^2$ pour $R=0.2$ mm, V500 en fonction de (a) l'épaisseur du film h_s (b) l'amplitude des gouttes h_m/h_s . Les lignes pointillées sont là pour guider l'œil.

sur lequel elle glisse. Au-delà d'une certaine épaisseur, ou en deçà d'une amplitude ($h_m/h_s \sim 8$), on s'écarte de cette vitesse V_s et la vitesse croît. La goutte glisse sur le film, la friction est moindre. De plus, les simulations nous indiquent que la zone de recirculation diminue lorsqu'on diminue l'amplitude des structures, ce qui conduit à une augmentation de la vitesse ; on ne peut décorréler l'effet de la diminution de la friction due à l'épaisseur du film de prémouillage et à la diminution de la zone de recirculation.

Les résultats obtenus en déposant des gouttes sur une fibre de rayon $R=0.45$ mm nous ont permis d'obtenir des faibles amplitudes ($1.3 < h_m/h_s < 2.2$) qui suivent alors la même tendance que les ondes, comme présenté sur la figure 6.18. Ceci confirme les résultats déduits de l'étude numérique des lignes de courant : à faible amplitude, le profil de vitesse reste proche d'un profil parabolique. D'après les figures 6.16 et 6.18, notons qu'à même amplitude, les vitesses obtenues sur le montage principal et en déposant des gouttes sont identiques.

Finalement, tous les résultats obtenus, sur les deux montages et pour différents rayons et viscosités sont regroupés sur la figure 6.19. Les expériences réalisées en déposant les gouttes nous permettent de confirmer les deux tendances observées, indiquées par des lignes pointillées :

- A faible amplitude ($h_m/h_s < 3$), on obtient des ondes dont la vitesse croît avec l'amplitude ; cette vitesse correspond à la vitesse du fluide à l'interface en h_m en supposant que le profil de vitesse reste proche du profil parabolique présent dans un film d'épaisseur uniforme, à savoir

$$u_{if} = \frac{\rho g h_m^2}{2\eta}$$

- A forte amplitude ($h_m/h_s \gtrsim 8$), les gouttes tendent vers une vitesse que l'on appelle V_s (car c'est la vitesse qu'aurait une goutte de même taille posée sur une fibre sèche) qui s'exprime

$$V_s = 0.12 \frac{\rho g h_m^2}{\eta}$$

On suppose que les gouttes contiennent alors une large zone de recirculation qui englobe toute la goutte.

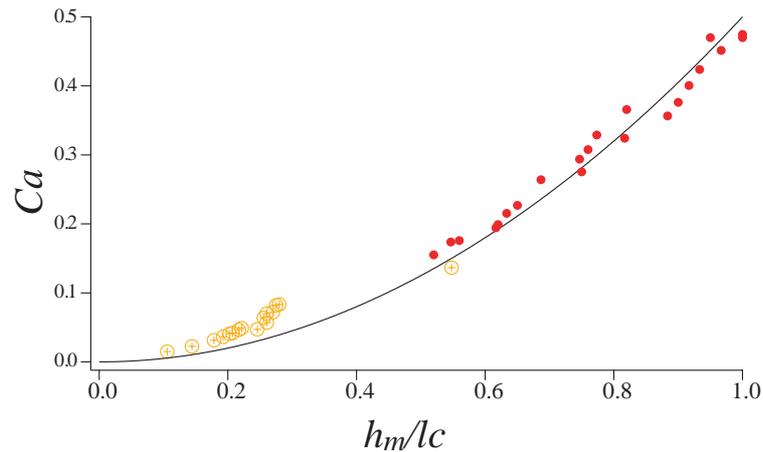


Fig. 6.18. Evolution du nombre capillaire en fonction du rapport h_m/l_c pour différentes expériences, sur une fibre pré-mouillée (\oplus $R=0.45$ mm V500), sur une fibre pré-mouillée dans le cadre de notre expérience complète (\bullet $R=0.475$ mm V50). La ligne en trait plein correspond à la loi (6.2) d'une onde se propageant sans transport de masse.

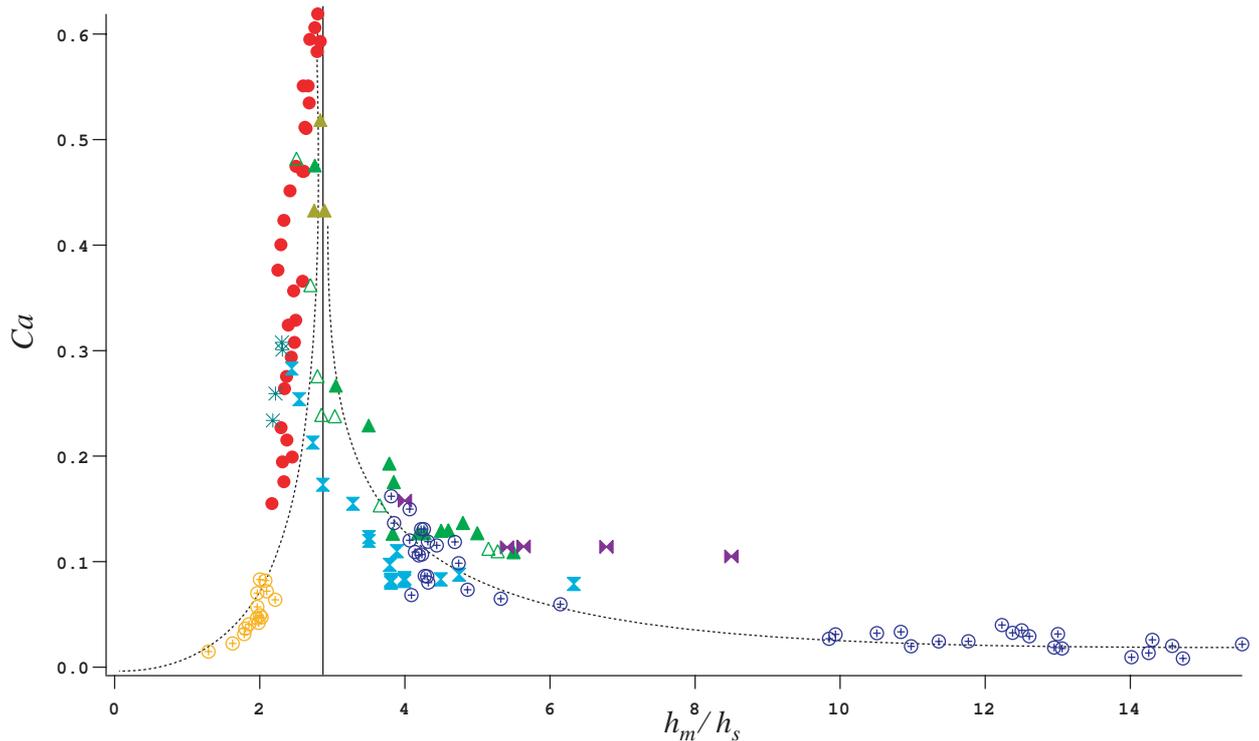


Fig. 6.19. Nombre capillaire Ca en fonction de l'amplitude h_m/h_s pour $R=0.475$ mm, V50 (\bullet), $R=0.2$ mm, V100 (\blacktriangle), $R=0.2$ mm, V500 (\triangle), $R=0.25$ mm, V100 (\blacktriangledown), $R=0.175$ mm, V100 (\blacktriangleright), $R=0.45$ mm, V50 ($*$), $R=0.35$ mm, V50 (\blacktriangle); $R=0.45$ mm, V500 (\oplus), $R=0.2$ mm, V500 (\oplus). Les lignes pointillées sont là pour guider l'œil et symbolisent les deux tendances observées; la ligne en trait plein verticale indique l'amplitude à laquelle ces deux tendances se rejoignent.

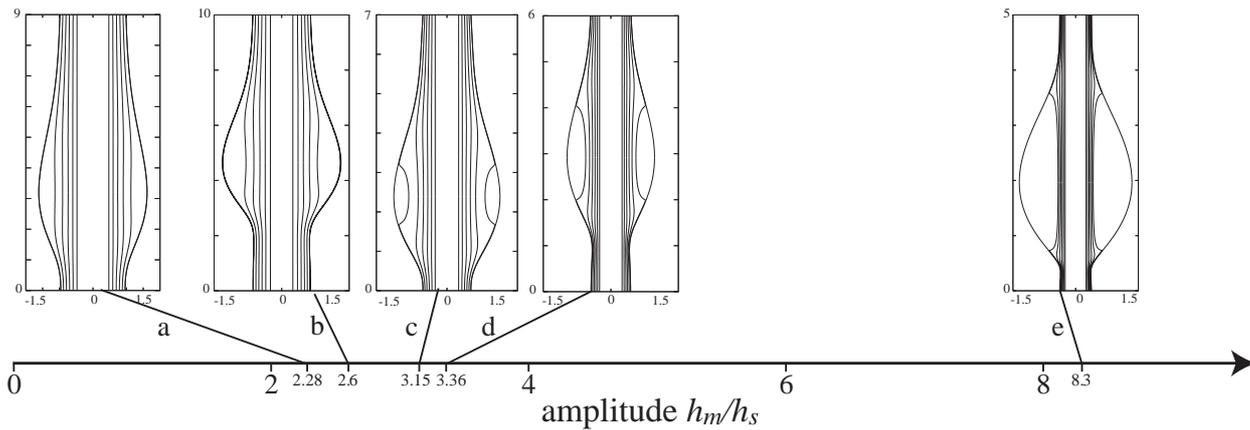


Fig. 6.20. Evolution du profil de vitesse en fonction de l'amplitude ; lignes de courant obtenues à partir des solutions du modèle WRIBL pour (a) $R=0.475$ mm, (b,c,d) $R=0.25$ mm, (e) $R=0.2$ mm.

- En diminuant progressivement l'amplitude, la vitesse des gouttes augmente jusqu'à rejoindre la vitesse V_o d'une onde autour de $h_m/h_s \approx 3$. On suppose ici que la zone de recirculation diminue jusqu'à disparaître lorsque $h_m/h_s \lesssim 3$.

Je résume ces comportements déduits des observations sur la vitesse des structures sur la figure 6.20, sur laquelle je reporte quelques résultats numériques présentant les lignes de courant au sein de plusieurs structures, sur trois rayons de fibre. Pour une fibre de grand rayon ($R=0.475$ mm, encart a), on observe des ondes de faible amplitude ($h_m/h_s \sim 2$), sans transport de masse. Sur une fibre de petit rayon ($R=0.25$ mm), on peut observer à la fois des ondes (encart b) et des gouttes (encarts c et d). La zone de recirculation apparaît pour une amplitude $h_m/h_s \approx 3$, qui est l'amplitude à laquelle un changement de comportement est observé sur la vitesse. Finalement, en augmentant l'amplitude, la zone de recirculation grandit (encarts c, d et e) jusqu'à finalement englober toute la goutte lorsque $h_m/h_s \gtrsim 8$ (encart e), ce qui est en bon accord avec l'amplitude pour laquelle les gouttes adoptent la vitesse d'une goutte sur une fibre sèche, ne ressentant plus l'effet du film très mince.

En conclusion, nous avons identifié expérimentalement une transition entre deux structures différentes : des gouttes de grande amplitude présentant une zone de recirculation et des ondes se propageant sans transfert de masse. Les deux comportements extrêmes ont été modélisés. Il nous reste à comprendre et modéliser le régime intermédiaire, notamment à décrire la dissipation visqueuse précisément en prenant en compte le film sous la goutte et la zone de recirculation. Nos expériences, avec en particulier la possibilité de contrôler finement l'épaisseur du film de prémouillage décrit par une loi de type Landau, offrent un cadre privilégié pour comprendre la dynamique de gouttes en mouillage total.

6.5 Perspectives : des gouttes complexes...

Tous les résultats obtenus dans cette thèse concernent des huiles, newtoniennes et en mouillage total sur la fibre. Nous avons cependant évoqué une expérience faite avec un mélange eau-glycérol au chapitre 3, afin de faire varier la tension de surface. Dans ce cas, on se trouve alors en situation de mouillage partiel : l'angle de contact à l'équilibre du mélange eau-glycérol utilisé (à 78%) sur le nylon est de 30° . Je

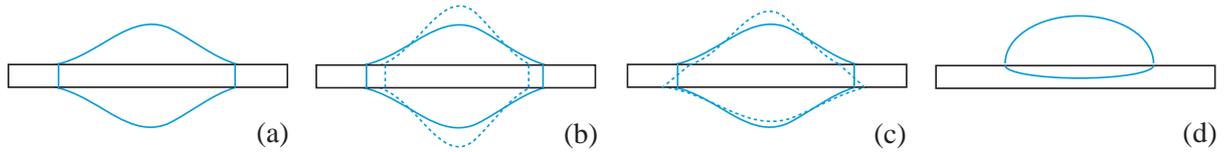


Fig. 6.21. *Transition roll-up* : passage de la conformation en manchon (a) à la conformation en coquille (d). Les lignes pointillées correspondent au profil perturbé nécessaire au raisonnement de B. J. Carroll (12).

présente ici des résultats préliminaires sur les fluides en mouillage partiel le long de la fibre. Nous verrons alors comment ces effets compliquent l'étude, notamment avec la perte de l'axisymétrie. Ces remarques seront de grande importance dans l'étude de l'écoulement de fluides non-newtoniens, souvent des solutions aqueuses de polymères et donc souvent en mouillage partiel. Cette étude, avec des fluides viscoélastiques, est présentée succinctement dans la suite de cette section. Ces deux sujets, très récents, ouvrent de nombreuses perspectives pour une suite possible de cette étude.

6.5.1 Gouttes en mouillage partiel

Comme nous l'avons vu en introduction, lorsque l'on est en mouillage partiel, le liquide se raccorde au solide avec un angle de contact non nul. Ici, la goutte se raccorde à la fibre avec un angle θ_E correspondant à l'angle de contact à l'équilibre. Dans certaines conditions, les gouttes alors posées sur la fibre peuvent ne pas adopter la conformation axisymétrique (*manchon*) mais rouler sur un côté de la fibre pour se placer en position de *coquille* (*clam shell* en anglais) comme présenté sur la figure 6.21 : c'est ce qu'on appelle la transition *roll-up* décrite pour la première fois en 1937 par Adam (1).

Rappelons l'expression de la surpression dans une goutte posée sur une fibre horizontale obtenu dans l'annexe A :

$$\Delta P = \frac{2\gamma n - \cos \theta_E}{R} \frac{1}{n^2 - 1} \quad (6.36)$$

en fonction de $n = h_m/R$ et θ_E l'angle de contact à l'équilibre. B. J. Carroll (12) propose alors le raisonnement suivant pour expliquer la transition *roll-up* observée. Dans un premier temps, il définit les deux rayons de courbure réduits longitudinal et transverse R_1^{-1} et R_2^{-1} à l'apex de la goutte par

$$R_1^{-1} = \frac{R}{R_1} = \frac{n^2 - 2n \cos \theta_E + 1}{n(n^2 - 1)} \quad (6.37)$$

$$R_2^{-1} = \frac{R}{R_2} = \frac{1}{n} \quad (6.38)$$

Il considère une petite perturbation δn axisymétrique induite par un petit déplacement des deux lignes triples (Fig. 6.21 (b)). A volume constant, cette déformation induit une augmentation de R_1^{-1} et une diminution de R_2^{-1} . A l'apex de la goutte (i.e. au point A), la pression est modifiée d'une quantité $\delta \Delta P = \gamma (\delta R_1^{-1} + \delta R_2^{-1})$ qui s'écrit

$$\delta \Delta P = -2n\gamma \left(\frac{2n^3 \cos \theta_E - 3n^2 + 1}{n^2(n^2 - 1)^2} \right) \quad (6.39)$$

Le signe de $\delta \Delta P$ dépend donc du signe du polynôme

$$2n^3 \cos \theta_E - 3n^2 + 1.$$

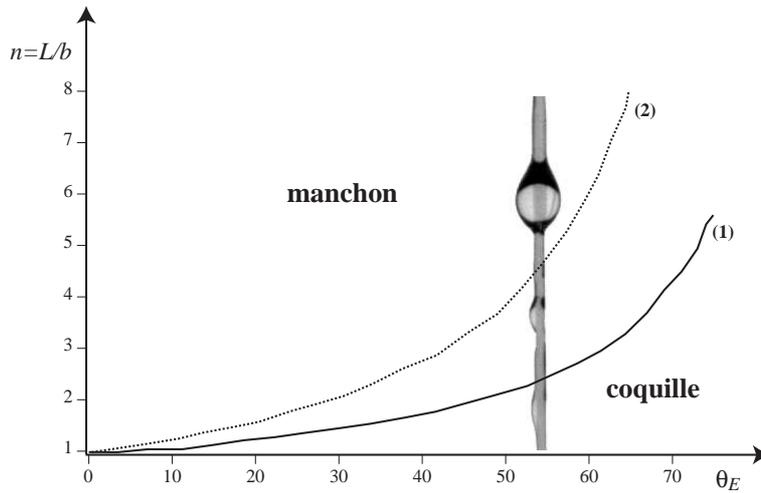


Fig. 6.22. *Domaine de stabilité des conformations manchon et coquille. (1) condition de métastabilité. (2) condition de stabilité d'après (67). Photo de gouttes de différentes tailles dans les deux conformations pour un mélange eau-glycérol 78% sur une fibre verticale de rayon $R=0.2$ mm.*

Il considère alors une perturbation non axisymétrique (Fig. 6.21(c)) telle que dans la partie supérieure de la goutte, les deux lignes se rapprochent l'une de l'autre tandis que dans la partie inférieure elles s'écartent l'une de l'autre. En considérant que les surfaces créées compensent exactement les surfaces "disparues" (les variations d'énergie libre sont nulles), la réponse du système est intégralement contrôlée par la variation de la surpression de Laplace au sein de la goutte. Si $\delta\Delta P \neq 0$, il y a une différence de pression entre les deux sommets hauts et bas de la goutte. Si, au point A, $\delta\Delta P > 0$, la différence de pression induit un écoulement du haut vers le bas de la goutte, ce qui a pour effet d'accentuer la déformation (R_2^{-1} continue à diminuer et les lignes triples en haut de la gouttes se rapprochent) jusqu'à atteindre la configuration asymétrique représentée sur la figure 6.21(d). Dans le plan n et θ_E , le point où s'annule ce polynôme est donné sur la Fig. 6.22 courbe (1). Si le polynôme est positif (au dessus de la courbe (1)) alors $\delta\Delta P < 0$, ce qui a pour effet de restaurer la forme axisymétrique de la goutte. La conformation *manchon* est alors stable. En revanche, sous la courbe (1), $\delta\Delta P > 0$. L'écoulement se fait vers la partie basse de la goutte jusqu'à ce que la goutte ait complètement basculé d'un côté de la fibre. C'est alors la conformation *coquille* qui est stable (condition décrite sur la Fig. 6.21).

Cette condition de métastabilité, bien que séduisante, n'est pas vraiment une condition de stabilité au sens où elle ne sélectionne pas la conformation de plus basse énergie. Par un calcul d'éléments finis (avec le logiciel Surface Evolver), réalisé par G. McHale et M. I. Newton (68; 67), il est possible de déterminer l'énergie libre des deux conformations et de déterminer la conformation de moindre énergie qui sera sélectionnée par le système. Cette condition est représentée sur la Fig. 6.22 courbe (2). En mouillage total (par exemple avec l'huile silicone), la conformation stable est toujours la conformation axisymétrique. En revanche, en mouillage partiel (par exemple pour mes expériences, avec un mélange eau-glycerol pour lequel $\theta_E=30^\circ$), les deux conformations sont possibles en fonction de la taille de la goutte (grosses gouttes en manchon, petites gouttes en coquille). Sur la fibre verticale, nous avons observé ces deux conformations. Les gouttes étant en mouvement, nous avons aussi pu observer une transition roll-up *dynamique* présentée sur la figure 6.23. Une goutte d'amplitude importante, de forme axisymétrique, s'écoule sur la fibre et diminue légèrement de volume : la conformation stable devient alors la forme non axisymétrique de coquille,

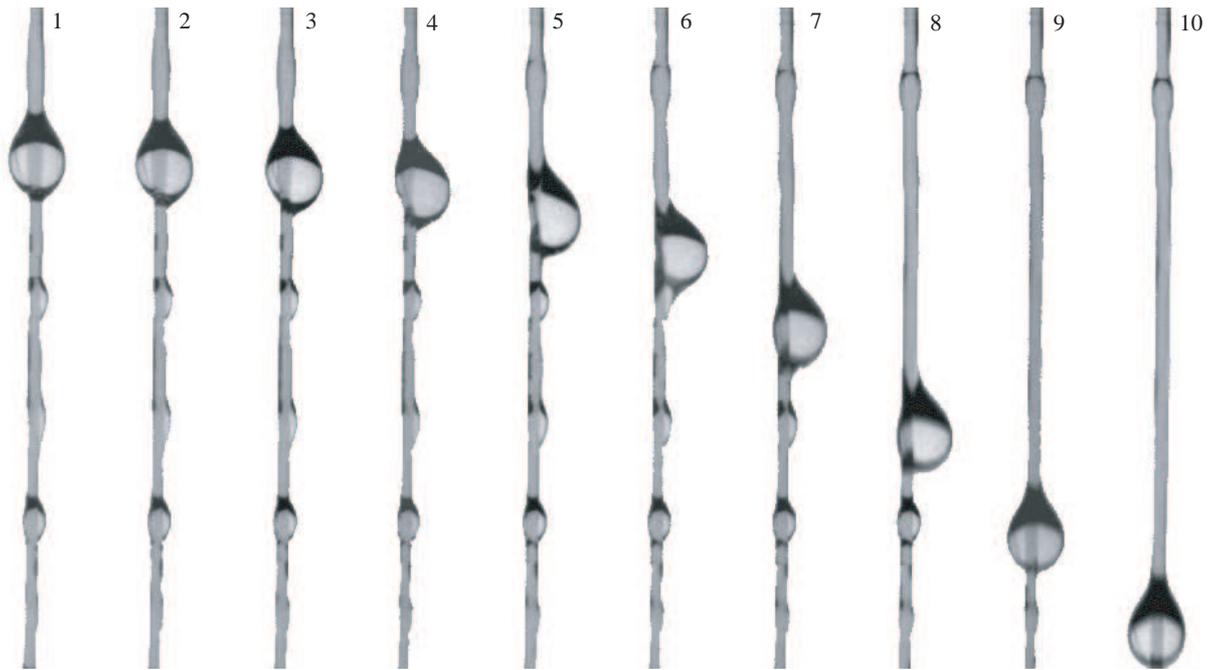


Fig. 6.23. *Transition roll-up dynamique sur une fibre de rayon $R=0.2$ mm et un mélange eau-glycérol 78%. Hauteur : 18 mm, temps entre deux images successives 0.07 s. Passage de la conformation en manchon à la conformation en coquille (2-6) puis de coquille en manchon (8-10).*

et la goutte roule sur le côté pour adopter cette conformation. Sur son passage, elle s'apparie avec de nombreuses petites gouttes et gagne ainsi en volume : elle rebascule alors pour reprendre une forme de manchon parfaitement axisymétrique. Cette forme axisymétrique est confirmée par des observations à l'œil dans le plan perpendiculaire à celui de la caméra.

Ainsi, les structures peuvent perdre leur axisymétrie au cours de leur propagation, ce qui participe à la déstabilisation de l'écoulement. Un autre problème survient fréquemment : c'est le démouillage du film mince séparant les gouttes. Sur un plan horizontal, on peut obtenir un critère de démouillage, comme présenté dans P.-G. De Gennes et al. (32). L'épaisseur critique en-deçà de laquelle le film démouille est calculée comme étant l'épaisseur d'équilibre d'une flaque posée sur un plan. En effet, cette épaisseur e_0 , qui résulte d'un compromis entre gravité et forces capillaires, représente l'épaisseur pour laquelle l'énergie totale (somme de l'énergie de surface et de l'énergie de gravité) est minimale. Si l'épaisseur du film $h < e_0$, le film aminci est instable et démouille : il se sépare en deux phases de coexistence (flaque d'épaisseur $h = e_0$ et solide sec) afin de minimiser son énergie. Pour le mélange eau-glycérol, la valeur de $e_0 \approx 1$ cm est bien supérieure aux épaisseurs observées sur la fibre ; il serait alors intéressant d'effectuer un calcul similaire dans le cas d'un film sur une fibre verticale. Cependant, ce calcul n'est pas simple car il faut aussi prendre en compte la gravité et le fait que le liquide est en mouvement. Dans le cas de l'écoulement d'un tel film sur une fibre, l'instabilité qui se développe tend à créer des gouttes séparées d'un film qui peut être très mince. Lorsque son épaisseur est très petite (de l'ordre de 0.5 mm), celui-ci se brise et les gouttes se détachent. Ainsi, de grosses gouttes peuvent se détacher et, lorsqu'elles rencontrent un défaut (une poussière par exemple) peuvent basculer d'un côté de la fibre (Fig. 6.24(a)) ; elles sont alors entraînées dans un mouvement hélicoïdal autour de la fibre, mis en évidence par l'aspect "torsadé" des lignes de trajectoire sur le diagramme spatio-temporel (Fig. 6.24(b)). Les lignes horizontales entre les gouttes représentent les nombreuses petites

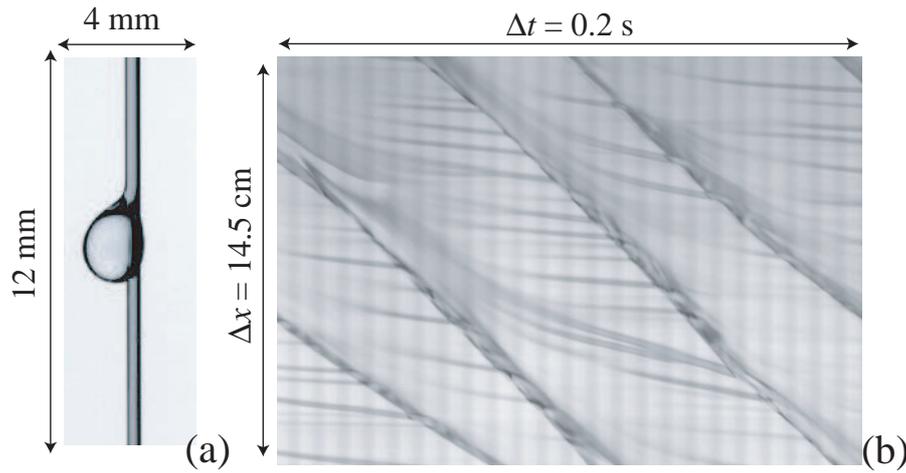


Fig. 6.24. (a) : Photo d'une grosse goutte non axisymétrique détachée du film et (b) : diagramme spatio-temporel mettant en évidence le mouvement hélicoïdal de la goutte autour de la fibre pour un mélange eau-glycérol à 78%.

gouttes secondaires qui apparaissent sur le film immobile ; ces gouttes prennent alors la forme de petites coquilles accrochées à la fibre, comme montré dans l'article de K. Hattori et al (37) et présenté au chapitre 1.

6.5.2 Gouttes viscoélastiques

Dans la plupart des procédés d'enrobage, les fils sont enduits d'une couche de fluide, appelée résine (coating resin) souvent composée de polymères et qui a donc les propriétés d'un fluide non-newtonien. D'un point de vue plus fondamental, et maintenant que la dynamique et les structures ont été caractérisées pour des fluides newtoniens, il est intéressant de voir l'influence des forces normales ainsi que de l'effet rhéofluidifiant sur cette dynamique et sur la forme des structures. Nous avons amorcé cette étude au travers des stages de M1 de Pascale Cordonnier et Christelle Douay. Les résultats préliminaires présentés dans ce chapitre proviennent de ce dernier stage. Ce travail a été fait en collaboration avec Ludovic Pauchard (laboratoire FAST). Je vais ici brièvement introduire cette étude, et présenter les questions qu'elle soulève et qui restent à explorer.

6.5.2.1 Les fluides non-newtoniens

On note x la direction de l'écoulement et y la direction transverse. On s'intéressera ici à la réponse du fluide à un cisaillement simple $\dot{\gamma}$ tel que la vitesse s'écrit $\vec{u} = (\dot{\gamma}y, 0)$. Dans le cas d'un fluide newtonien, comme l'huile silicone présentée dans cette thèse, les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse, ce qui implique notamment que la viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement et que dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement, i.e. les contraintes tangentielles $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma$. La contrainte σ est reliée au cisaillement par

$$\sigma = \eta\dot{\gamma}.$$

Nous allons nous intéresser ici à un fluide dont le comportement dévie de ces deux lois.

Effet rhéofluidifiant

Un fluide rhéofluidifiant est un fluide dont la viscosité diminue avec la contrainte (ou taux de cisaillement). De nombreux fluides du quotidien ont un comportement rhéofluidifiant : citons par exemple les encres, les peintures, la lessive, le sang... Les solutions diluées de polymères, comme celles que nous utiliserons ici, ont cette propriété. Pour décrire le comportement de ces fluides, on peut utiliser la loi empirique proposée par Ostwald en 1925

$$\sigma = k\dot{\gamma}^n$$

soit pour la viscosité

$$\eta = \sigma/\dot{\gamma} = k\dot{\gamma}^{n-1}$$

où le coefficient k et l'exposant n sont à déterminer expérimentalement. Le cas $n = 1$ correspond au comportement newtonien, tandis que $n < 1$ représente un fluide rhéofluidifiant. Ce modèle, s'il permet de caractériser la décroissance de la viscosité, est cependant incomplet et ne prend pas en compte les comportements à faibles et forts cisaillements. En effet, à bas cisaillement, la viscosité est constante avec une valeur η_0 (appelée viscosité à cisaillement nul). Elle décroît ensuite en suivant une loi de puissance bien donnée par la loi d'Ostwald. A fort cisaillement, elle se stabilise de nouveau sur un plateau de valeur η_∞ (appelée viscosité à cisaillement infini qui tend vers la viscosité du solvant). Le modèle plus sophistiqué de Carreau tient compte de ces deux plateaux newtoniens, et s'écrit

$$\eta = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + (\lambda_p \dot{\gamma})^2\right]^{\frac{p}{2}}} \quad (6.40)$$

où λ_p est une constante de temps qui mesure le cisaillement à partir duquel les effets rhéofluidifiants deviennent importants et p est l'exposant de la région en loi de puissance.

Viscoélasticité

Un autre comportement non-newtonien intéressant est le caractère viscoélastique, très fréquent dans les solutions de polymères. Le fluide répond à une déformation avec un comportement à la fois visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). La pâte de silicone¹ est un exemple particulièrement impressionnant de ce caractère viscoélastique. Lorsqu'elle est soumise à une sollicitation rapide (par exemple lorsqu'on la jette sur le sol), ses composants élémentaires n'ont pas le temps de se déformer de manière importante et la pâte répond de manière élastique : elle rebondit telle une balle en caoutchouc. Lorsque le temps de sollicitation est plus grand que le temps caractéristique du matériau (si on la pose sur une surface plane par exemple), sa réponse est de type visqueux : la pâte s'étale pour former une flaque. Sous l'effet d'un cisaillement simple, cette élasticité se manifeste (plus sobrement) par l'apparition de contraintes normales : il peut y avoir une tension le long des lignes de courant et une pression perpendiculaire à celles-ci. On peut comprendre l'apparition de ces contraintes normales en regardant l'effet du cisaillement sur les chaînes de polymères flexibles qui composent notre fluide, comme présenté sur la figure 6.25 : au repos, la chaîne de polymère est en moyenne sphérique ; lors du cisaillement, cette sphère est déformée en ellipsoïde et le fluide devient anisotrope. Pour restaurer la forme sphérique, il apparaît alors des forces traduites par les contraintes normales σ_{xx} et σ_{yy} . Dans le cas d'un fluide newtonien, les contraintes normales restent isotrope et égales à la pression $-p$.

¹ commercialisée sous le nom de Silly Putty ou Bounce Putty. Un distributeur (en France) : <http://www.imaginascience.com>

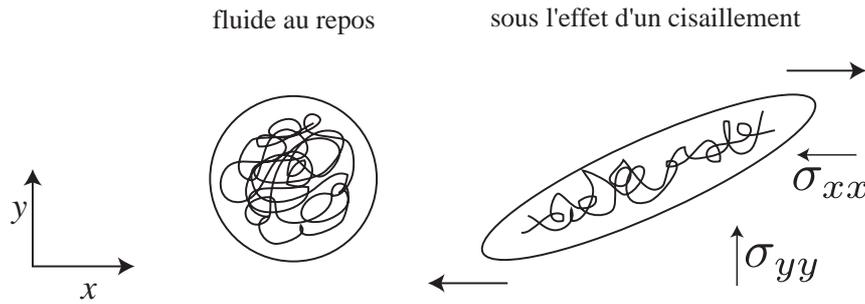


Fig. 6.25. Déformation d'une chaîne de polymère flexible sous l'effet d'un cisaillement : apparition d'une contrainte normale.

Dans le cas de notre fluide non-newtonien, nous avons vu que l'écoulement de cisaillement peut induire des contraintes normales ; on définit alors la différence entre contraintes normales par

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \quad (6.41)$$

qui est généralement positive (les forces tendant à restaurer la forme sphérique sont plus grandes dans la direction de l'écoulement, comme en témoigne la forme de l'ellipsoïde présentée sur la figure 6.25) et du même ordre de grandeur (voire plus grande) que la contrainte de cisaillement. A faible cisaillement, cette différence est généralement décrite par une fonction quadratique en $\dot{\gamma}$, c'est-à-dire

$$N_1 = \Psi_1 \dot{\gamma}^2 \quad (6.42)$$

où Ψ_1 est le premier coefficient de la contrainte normale. Une manifestation de cette anisotropie des contraintes normales peut être observée à la sortie d'un tube, comme présenté sur la figure 6.26 : alors qu'un fluide newtonien présente un jet de diamètre quasiment constant à la sortie d'un tube, les fluides viscoélastiques (ici une solution de polymères Polyox que nous décrivons en détail par la suite) "gonflent". Lorsqu'il s'écoule à l'intérieur du tube, le fluide est soumis à d'importantes contraintes σ_{xx} (x est ici la direction de l'axe du tube) qui relaxent en provoquant une expansion latérale (dans la direction y) du jet. On s'attend à ce que cet effet soit important dans notre expérience, le fluide étant soumis à des cisaillements importants. Notamment, on peut penser que les contraintes normales vont tendre à maintenir une épaisseur constante, et donc à stabiliser l'écoulement.

6.5.2.2 Rhéologie

On s'attend donc à avoir un effet des forces normales sur l'instabilité : pour cela, on cherche à avoir un fluide viscoélastique avec une différence N_1 importante. Ainsi, on va utiliser une solution de polymères à longues chaînes flexibles qui a aussi un caractère rhéofluidifiant. On peut estimer les cisaillements auxquels est soumis le fluide en se basant sur nos expériences avec des fluides newtoniens, pour lesquels le cisaillement s'exprime comme le rapport de la vitesse du fluide à l'interface u_i sur l'épaisseur h , soit

$$\dot{\gamma} = \frac{u_i}{h}$$

soit des cisaillements de l'ordre de 10 pour l'huile V500 à 100 pour l'huile V50. Nous avons alors choisi d'utiliser du Polyox (WSR 303, DOW) de masse moléculaire $M_w=7.000.000$, le polymère ayant alors de

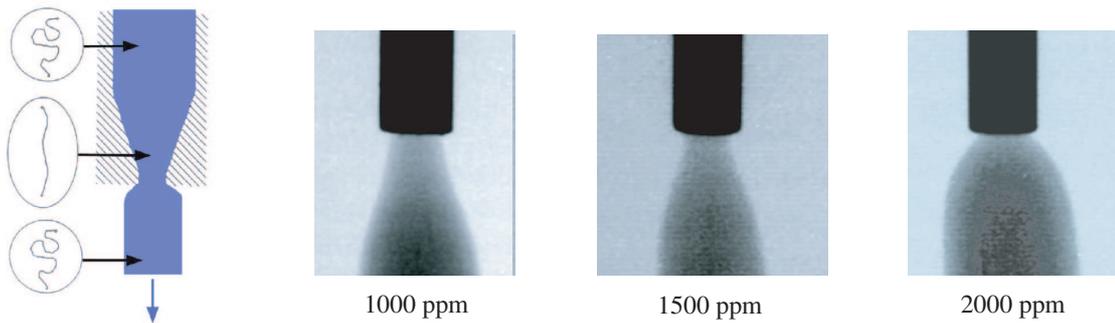


Fig. 6.26. Effet de l'anisotropie des contraintes normales : gonflement de jet à l'extrusion d'un tube de diamètre 0.9 mm pour une solution de Polyox de différentes concentrations (Photos : Ludovic Pauchard).

longues chaînes flexibles. Nous avons utilisé de l'eau et du glycérol (à 50%) comme solvant afin d'obtenir des viscosités importantes.

L'étude rhéologique des fluides a été faite avec un rhéomètre Anton Paar en géométrie cône-plan et à contrainte imposée. Les résultats sont présentés sur la figure 6.27. On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution de la viscosité avec $\dot{\gamma}$: on observe le premier plateau newtonien à faibles cisaillements, puis une décroissance de la viscosité selon une loi de puissance typique des fluides rhéofluidifiants. Les données expérimentales sont ajustées avec la loi de Carreau ; les paramètres obtenus sont présentés dans le tableau 6.1.

Concentration (ppm)	η_0 (Pa.s)	η_∞ (Pa.s)	λ_p	p
7500	1.21	0.006	0.73	0.465
5000	0.11	0.006	0.14	0.34
1000	0.125	0.006	0.1	0.35
200	0.0039	0.006	0.04	0.2

Tab. 6.1. Valeurs des paramètres de la loi de Carreau selon l'expression (6.40) obtenus par ajustement des mesures rhéologiques du Polyox à différentes concentrations.

On observe qu'à faible concentration en polymère ($c < 1000\text{ppm}$), la viscosité est quasiment constante dans notre gamme de cisaillement. Cependant, elle est alors plus faible que pour nos huiles ($\eta < 10\text{mPa.s}$) et les effets inertiels seront alors importants. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec de tels fluides aux résultats obtenus avec les fluides newtoniens (les huiles de viscosité $50\text{ mPa s} \lesssim \eta \lesssim 500\text{ mPa.s}$), il faut augmenter la viscosité, soit en augmentant la concentration en polymère, soit en ajoutant du glycérol. Dans ces deux cas, ceci a pour effet de translater les courbes vers les plus grandes viscosités comme présenté sur la figure 6.27 (a). Dans ce cas, on a un effet rhéofluidifiant dans la gamme de cisaillement étudiée. On mesure également l'effet des contraintes normales (figure 6.27 (b)) : la différence des contraintes normales est d'autant plus élevée que la concentration en polymère est importante. Cette différence suivant la loi (6.42) aux faibles cisaillements, on peut déterminer le coefficient Ψ_1 caractéristique du polymère, et extrapoler la tendance obtenue aux cisaillements qui nous intéressent. On s'attend à avoir un effet notable des contraintes

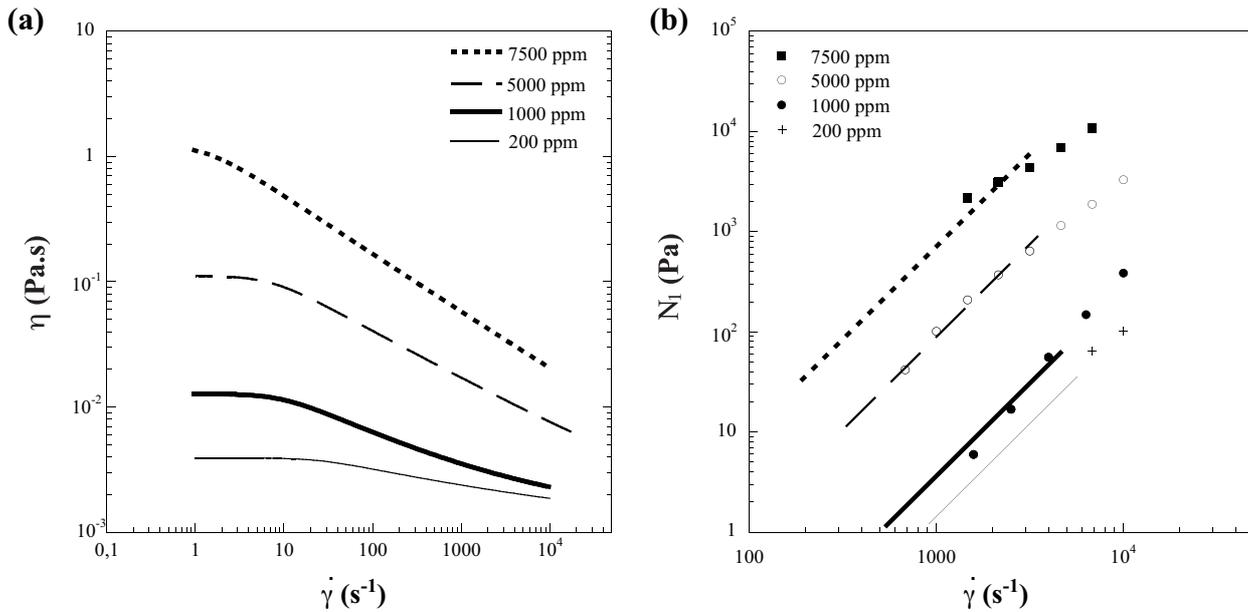


Fig. 6.27. *Rhéologie des solutions de Polyox dans de l'eau : évolution de la viscosité (a) et de la différence des contraintes normales (b) avec le taux de cisaillement pour différentes concentrations en polymère.*

normales car cette différence est de l'ordre de la contrainte de cisaillement ($1 \text{ Pa} < N_1 < 100 \text{ Pa}$). Cet effet va entrer en compétition avec les effets de la viscosité et avec l'effet rhéofluidifiant. Notons que la tension de surface de notre solution de Polyox est plus élevée que celle des huiles, et varie peu avec la concentration en polymère ($\gamma \simeq 55 \text{ mN/m}$).

6.5.2.3 Ecoulement sur la fibre : résultats préliminaires.

Les fluides utilisés présentent des propriétés viscoélastiques qui vont jouer sur l'instabilité. Notamment, on peut penser que, les contraintes normales s'opposant à des déformations de l'interface, l'ajout de polymères retardent l'instabilité. On s'est donc intéressé à l'apparition de l'instabilité, sur une fibre de rayon $R = 0.23 \text{ mm}$, en mesurant la longueur Δ sur laquelle le film reste d'épaisseur uniforme et la longueur d'onde des premières gouttes observées. Notons que nous sommes ici en situation de mouillage partiel, et l'écoulement n'est jamais régulier (notamment en raison des problèmes de démouillage). Il faudra par la suite réfléchir à un solvant et/ou à un revêtement de la fibre permettant de s'affranchir de ces problèmes de mouillage pour une étude plus approfondie. Les effets combinés du caractère rhéofluidifiant, des contraintes normales et des problèmes de mouillage rendent cette étude très complexe ; nous avons donc mené une première étude exploratoire présentée ici, afin de préparer et d'orienter ce travail.

Apparition de l'instabilité

L'évolution de la hauteur d'apparition Δ est donnée en fonction du nombre capillaire (calculé à partir de la vitesse moyenne des premières gouttes observées) sur la figure 6.28. Comme dans le cas des fluides newtoniens, la longueur d'apparition augmente avec le débit, jusqu'à des valeurs de l'ordre de 20 cm, soit plus que dans le cas newtonien (où $\Delta \lesssim 10\text{-}15 \text{ cm}$), malgré une tension de surface plus élevée qui

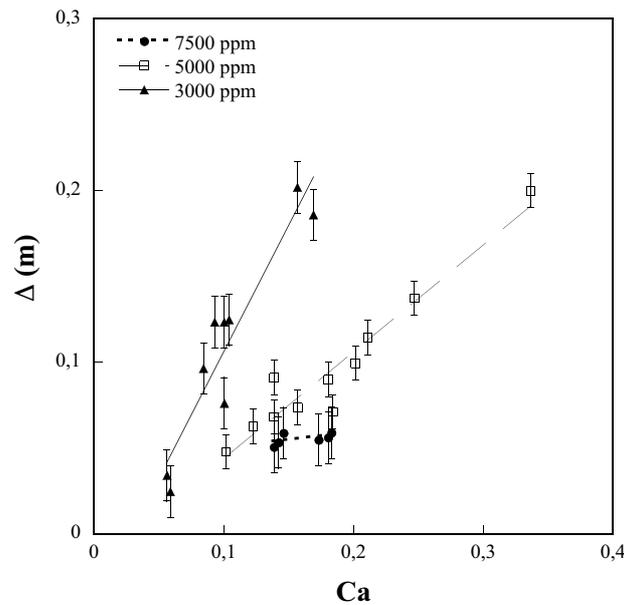


Fig. 6.28. Evolution de la hauteur d'apparition Δ en fonction du nombre capillaire $Ca = \eta_0 V / \gamma$ avec V la vitesse moyenne des premières gouttes observées, pour différentes concentrations en polymère.

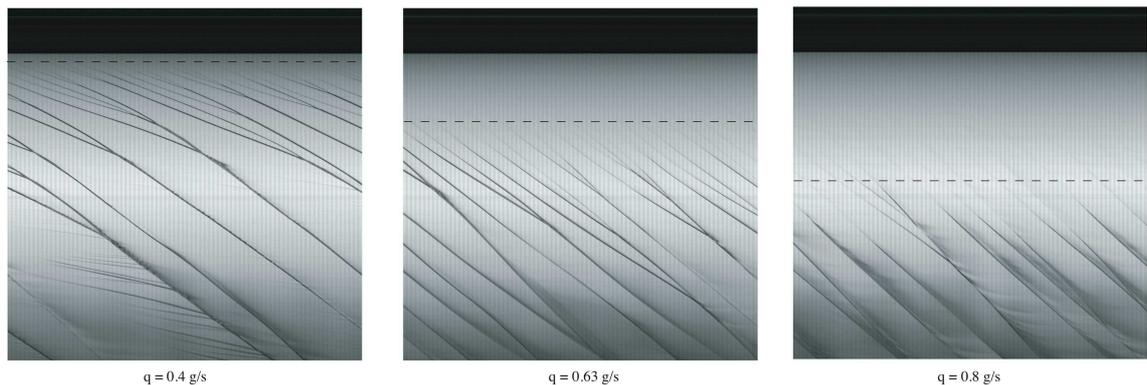


Fig. 6.29. Diagrammes spatio-temporels pour un fluide viscoélastique de concentration 1000 ppm pour trois débits différents : 0.396 ; 0.62 ; 0.79 g/s.

favorise l'apparition de l'instabilité. On a donc bien un effet de retard de l'instabilité. La figure 6.29 présente trois diagrammes spatio-temporels montrant l'influence du débit sur Δ (indiqué par une ligne horizontale pointillée).

Pour les huiles newtoniennes, on remarquait aussi que la longueur d'apparition augmentait avec la viscosité. On s'attend donc ici, avec l'effet combiné de l'augmentation de la viscosité et des forces normales, à avoir une augmentation importante de Δ lorsqu'on augmente la concentration. Cependant, comme observé sur la figure 6.28, pour un même nombre capillaire, une solution plus concentrée en polymères se déstabilise plus tôt sur la fibre. De manière générale, plus on augmente la concentration et plus Δ diminue. Ce résultat contre-intuitif n'est pas trivial à interpréter. On peut cependant penser qu'ici l'effet rhéofluidifiant de la viscosité entre en jeu et domine sur l'effet des forces normales : aux cisaillements importants, la viscosité diminue fortement et l'apparition de l'instabilité est plus rapide. Le développement de l'instabilité, d'origine capillaire, semble donc être un compromis entre deux effets antagonistes présentés sur la figure 6.30 : le

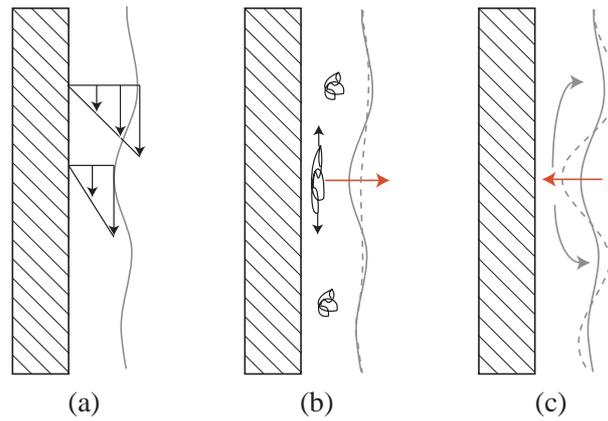


Fig. 6.30. Mécanismes agissant sur le développement de l'instabilité : (a) profils de vitesse et cisaillement ; (b) effet des forces normales et (c) effet rhéofluidifiant : les mouvements de l'interface sont indiqués par des flèches rouges et l'interface modifiée est représentée en pointillés.

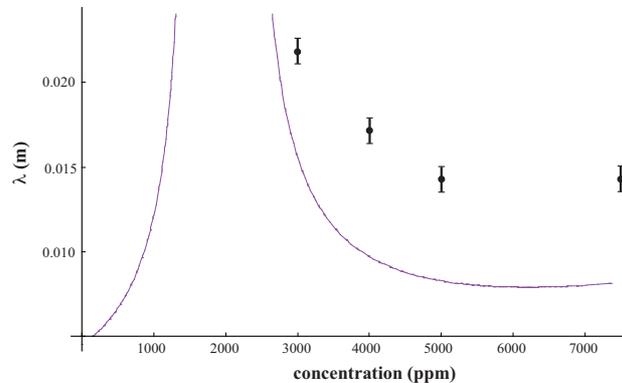


Fig. 6.31. Evolution de longueur d'onde en fonction de la concentration en polymère (débit 0.08 g/s). Points : donnée expérimentales, Lignes : solution du modèle.

fluide étant plus cisailé sous les creux que sous les bosses (Fig. 6.30(a)), les forces normales tendent à restaurer une interface plane (Fig. 6.30(b)) et l'effet rhéofluidifiant tend à augmenter les déformations en drainant du fluide (moins visqueux sous les creux) des creux vers les bosses (Fig. 6.30(c)). On pourrait s'affranchir de cet effet en construisant un nombre capillaire effectif, basé non sur la viscosité η_0 mais sur la viscosité η du fluide en fonction du cisaillement $\dot{\gamma}$.

Instabilité primaire

On s'intéresse maintenant aux premières gouttes observées, c'est-à-dire à l'instabilité primaire. On mesure alors la longueur d'onde primaire pour plusieurs débits et plusieurs concentrations. L'évolution de la longueur d'onde λ en fonction de la concentration à débit fixé est donnée sur la figure 6.31. Les expériences montrent que la longueur d'onde diminue avec la concentration dans une large gamme de concentrations. Ces mesures sont comparées à celles prédites par une théorie linéaire établie par Frédérique Giorgiutti et Ludovic Pauchard, en ajoutant l'effet des contraintes normales dans l'équation de Frenkel. La longueur d'onde suit bien la décroissance prédite par la théorie. Cependant, la théorie ne prend pas en compte les variations de la viscosité avec le cisaillement, ce qui explique sans doute l'écart avec les données expéri-

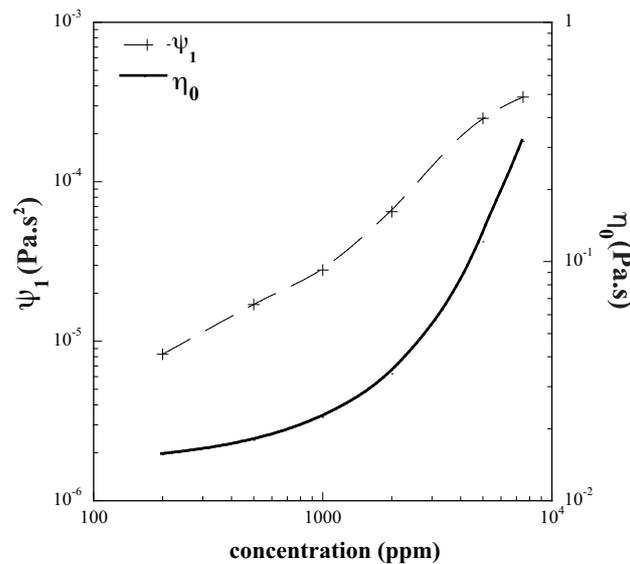


Fig. 6.32. Rhéologie des solutions de Polyox : évolution du paramètre Ψ_1 et de la viscosité η_0 en fonction de la concentration en polymère.

mentales. Ce modèle prédit aussi une évolution différente à plus faibles concentrations : lorsque $c < 2000$, la longueur d'onde augmente, ce qui reste à confirmer par des mesures expérimentales. En supposant que l'effet rhéofluidifiant est faible et que le modèle est applicable ici, on peut penser que cette différence de comportement est liée à l'importance relative des deux mécanismes prépondérants et pris en compte dans le modèle, à savoir les effets visqueux et les effets élastiques (contraintes normales). Afin de caractériser l'importance relative de la viscosité et des forces normales, on mesure l'évolution de Ψ_1 et de la viscosité du plateau newtonien η_0 en fonction de la concentration en polymère comme présenté sur la figure 6.32. On remarque qu'à faible concentration, l'augmentation de Ψ_1 est plus rapide que l'augmentation de η_0 ; à forte concentration (au-delà de 2000 ppm), c'est l'effet inverse qui est observé. Ainsi, les forces normales dominent sur l'effet de la viscosité à faible concentration, tandis qu'à fortes concentrations l'écoulement est dominé par les effets visqueux. On pourrait donc s'attendre à avoir un effet notable des contraintes normales pour des concentrations inférieures à 2000 ppm, dont l'augmentation de la longueur d'onde pourrait être la signature. Cela pourrait aussi conduire à des longueurs d'apparition plus importantes. Il semble donc y avoir deux régimes distincts en fonction de la concentration en polymère : un régime principalement élastique, où les forces normales dominent, et un régime principalement visqueux où la viscosité (et donc l'effet rhéofluidifiant) domine. Cependant, il est ici difficile de conclure, tant les effets combinés des contraintes normales, de la viscosité, de l'effet rhéofluidifiant et de la tension de surface rendent la dynamique complexe. Il s'agit donc maintenant de poursuivre cette étude de manière systématique, pour une grande gamme de concentration et dans des conditions optimales, c'est-à-dire en améliorant le mouillage du fil. On pourrait par exemple utiliser des fluides purement élastiques (fluides de Boger) dont la viscosité est constante sur une grande gamme de cisaillement afin d'isoler l'effet des forces normales. Il faudrait aussi réaliser des expériences avec un fluide purement rhéofluidifiant (par exemple une solution de Xanthane).

Une autre perspective, plus éloignée de notre étude mais plus proche des applications industrielles, consiste à étudier la morphologie des structures lors de la consolidation par séchage.

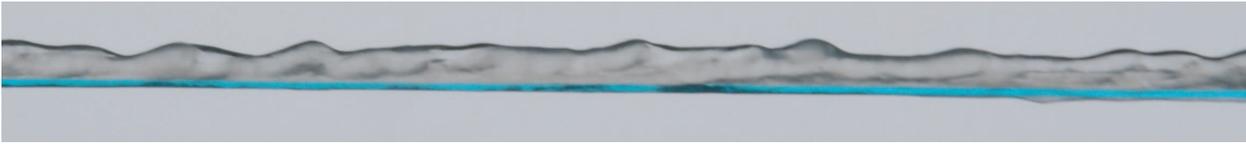


Fig. 6.33. Formation d'un dépôt après séchage d'une solution de Polyox à 7500 ppm sur une fibre de rayon $R = 0.23$ mm (en bleu). L'image est tournée de 90° (le haut de la fibre est donc à gauche), le fluide s'écoulant à faible débit ayant séché sur la fibre verticale.

Formation d'un dépôt après séchage

Nous avons donc mené quelques expériences qualitatives préliminaires de la formation d'un dépôt, en laissant sécher les fluides à température ambiante. Comme présenté sur la figure 6.33, il se forme après séchage une couche d'enrobage dure de polymères. Cette couche est loin d'être uniforme, en raison de l'instabilité qui se développe rapidement lorsque le fluide s'écoule le long de la fibre. L'étude de la formation de cette couche par évaporation du solvant, pour différentes concentrations, vitesses d'écoulement et conditions de température et d'humidité ouvre de nombreuses perspectives.

En conclusion, j'ai présenté dans ce chapitre des études ouvertes, présentant de nombreuses perspectives. Dans un premier temps, j'ai étudié la dynamique de gouttes déposées manuellement sur la fibre en condition de mouillage total. Si les résultats expérimentaux permettent de discriminer entre les structures (gouttes ou ondes), il reste à comprendre et modéliser l'influence du film de prémouillage sur la vitesse des gouttes. Il sera aussi intéressant de faire varier la tension de surface du fluide ; ce faisant, nous avons cependant rencontré des problèmes de mouillage en utilisant des solutions aqueuses. Ceux-ci conduisent à une dynamique complexe, notamment à des mouvements hélicoïdaux des gouttes autour du fil, et reste à explorer à la fois expérimentalement et théoriquement. Finalement, j'ai présenté des résultats préliminaires concernant l'écoulement de fluides non-newtoniens le long de la fibre. Ce montage semble fournir un système idéal pour étudier les effets combinés des contraintes normales et de la rhéofluidité sur l'instabilité capillaire. Les expériences menées jusqu'ici sur des jets de fluides viscoélastiques ont mis en avant les effets de l'élongation qui dominent dans ces systèmes et retardent l'apparition de l'instabilité ; dans notre cas, en raison de la condition de vitesse nulle à la paroi, nous n'avons pas de composante élongationnelle dans l'écoulement. On peut donc ici isoler et observer l'effet des contraintes normales. De plus, ces études se rapprochent des applications industrielles qui ont en partie motivée cette étude, à savoir l'enrobage de fibre par des résines complexes et notamment la morphologie de la couche déposée après séchage.

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons exploré expérimentalement l'instabilité d'un film mince le long d'une fibre verticale, en balayant une large gamme de rayons, d'épaisseurs et en utilisant des huiles de différentes viscosités en mouillage total sur le fil. En raison des effets combinés de la tension de surface, de la viscosité, de la gravité, de l'advection et de l'inertie, il a été difficile de définir des paramètres sans dimensions permettant de mesurer l'importance relative de tous ces effets, les nombres "classiques" donnant uniquement une première indication. Nous avons cependant défini trois nombres non triviaux, à savoir le paramètre dit de saturation β^* qui compare l'importance relative de l'instabilité de Rayleigh-Plateau et de l'écoulement, le nombre de Reynolds réduit δ qui mesure les effets de l'inertie par rapport à l'écoulement et à la tension de surface et le paramètre dit de dispersion δ_d qui compare les effets dissipatifs et les effets dispersifs (c'est-à-dire, en fait, les effets de la viscosité et de la tension de surface). A l'aide de ces nombres sans dimension et d'une étude expérimentale et théorique, nous avons identifié différents régimes et structures. Les diagrammes de phase (pour la dynamique et pour les structures) sont présentés sur les figures 6.34 et 6.35 respectivement.

En particulier, nous avons mis en évidence l'existence de deux dynamiques différentes au niveau de l'instabilité primaire. Lorsque l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine sur l'écoulement, l'instabilité est dite *absolue* et se caractérise par l'apparition, à distance fixe de l'alimentation, d'un train d'ondes régulier. Lorsqu'au contraire l'advection des ondes par l'écoulement l'emporte sur la croissance de l'instabilité, on est en régime *convectif* où le système se comporte comme un amplificateur de bruit. Cette transition Absolu/Convectif a été caractérisée en comparant les temps caractéristiques de croissance de l'instabilité et d'advection des ondes par l'écoulement. Un calcul complet, à partir de la réponse impulsionnelle du système, a permis d'obtenir analytiquement le lieu de cette transition ; elle se traduit par une valeur critique du paramètre de saturation, à savoir $\beta^* = 1.507$.

Au niveau des instabilités secondaires, trois comportements distincts sont observés. Le train d'ondes primaire peut être parfaitement stable et rester régulier sur toute la hauteur de la fibre ; on parle alors de *mode global stable* et ce régime peut être observé lorsque l'écoulement joue peu, à savoir pour $\beta^* \gtrsim 1.64$. Dans tous les autres cas, le train d'ondes se déstabilise. Cette déstabilisation peut conduire à un régime chaotique désordonné. Lorsque les effets visqueux et capillaires sont du même ordre, les ondes émergent de la déstabilisation du train d'ondes primaire sont localisées (on parle alors de *pulses*) et interagissent entre elles de manière complexe pour former des *états liés*. Un ordre émerge alors de l'apparent désordre de l'écoulement, un nombre fini de distances spécifiques étant sélectionnées. Ces régimes d'états liés sont observables pour $0.1 \lesssim \delta_d \lesssim 1$. L'inertie commence elle à jouer lorsque $\delta \sim 1$. On n'observe pas de changement de dynamique net, il est donc difficile de parler de transition à proprement dit. Je n'ai pas particulièrement exploré ce régime purement inertiel, noté **DI** (pour Drag Inertia), dans lequel le mécanisme d'instabilité dominant est l'inertie (ou instabilité de Kapitza) indiqué par une région rose sur le diagramme de phase de

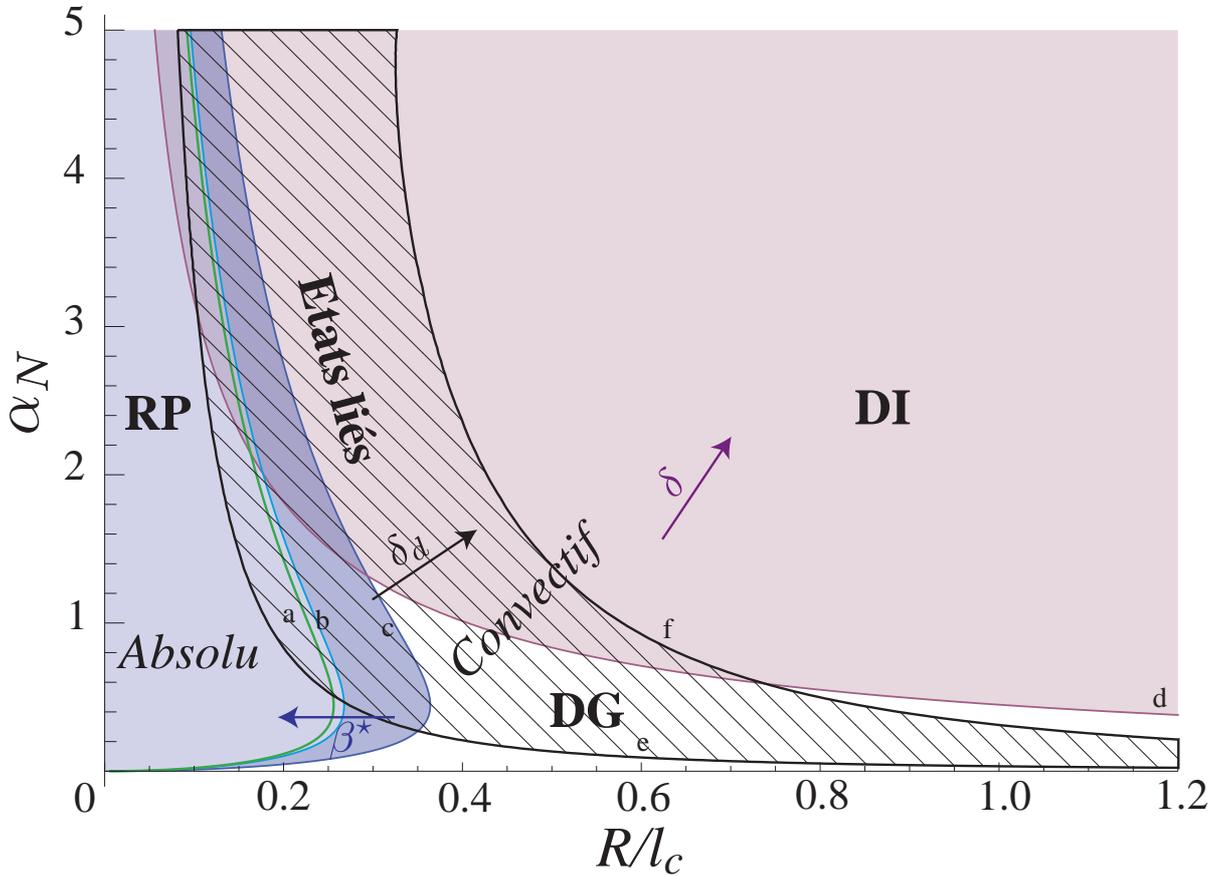


Fig. 6.34. Diagramme de phase de l'écoulement d'un film liquide sur une fibre verticale dans le plan $(\alpha_N, R/l_c)$. Les frontières sont données par : courbe *a* verte : $\beta^* = 1.64$; courbe *b* bleu clair : $\beta^* = 1.507$; courbe *c* bleu foncé : $\beta^* = 1$; courbe *d* violette : $\delta = 1$; courbe *e* noire : $\delta_d = 0.1$; courbe *f* noire : $\delta_d = 0.9$. En bleu, on indique la région où l'instabilité de Rayleigh-Plateau domine, notée **RP** ; la zone bleu ciel à gauche de la courbe *b* représente la zone absolue, tandis qu'à gauche de la courbe *a* on observe des modes globaux stables. La zone blanche correspond au régime où l'écoulement domine, noté **DG** pour Drag Gravity. La zone rose correspond à la région dans laquelle les effets inertiels commencent à jouer ; la région Drag Inertia notée **DI** indique la région dans laquelle le mécanisme d'instabilité dominant est l'inertie (instabilité de Kapitza). La zone hachurée correspond à la région dans laquelle on peut former des **états liés**. Les flèches bleue, noire et violette indiquent le sens de variation de β^* , δ_d et δ respectivement.

la figure 6.34. Le régime où le mécanisme d'instabilité dominant est l'instabilité de Rayleigh-Plateau est quant à lui indiqué en bleu sur le diagramme de phase et est noté **RP**. Le régime où l'écoulement domine et où les deux mécanismes d'instabilité sont faibles est noté **DG** pour Drag Gravity et est donné en blanc sur la diagramme. Les transitions entre régimes DG et DI, ainsi qu'entre DG et RP ne sont pas nettes et ne se manifestent pas par un changement visible de la dynamique ; j'ai tout de même noté des changements au niveau des structures (vitesse, forme) présentés sur la figure 6.35. En effet, le régime DG est caractérisé

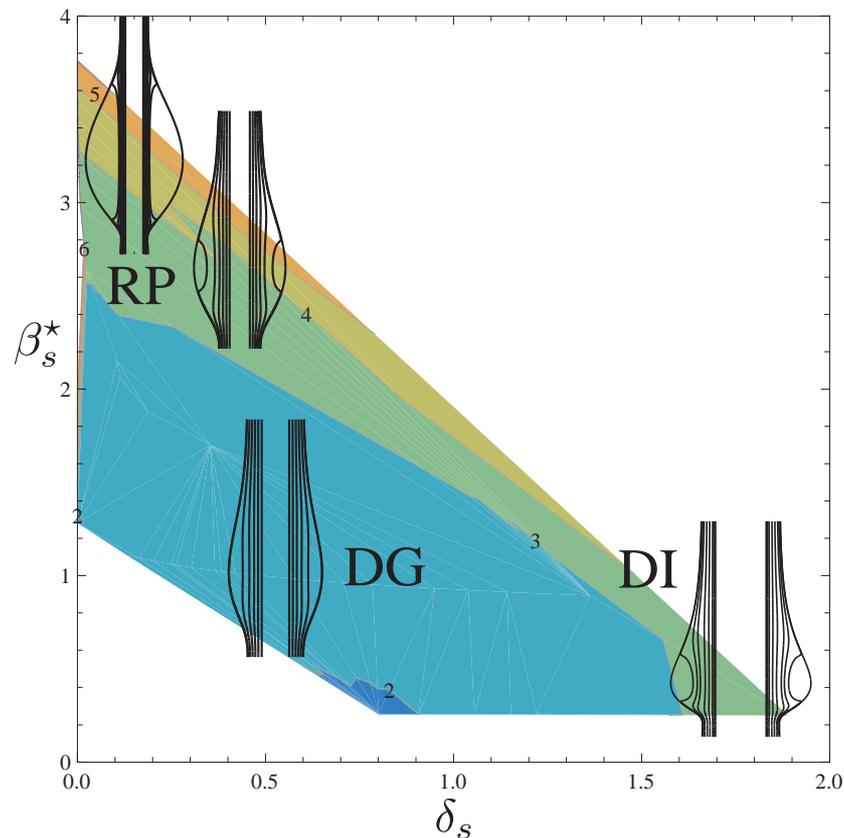


Fig. 6.35. Diagramme de phase des structures dans le plan des paramètres calculés sur l'épaisseur du substrat h_s (β_s^* , δ_s) obtenu en traçant les courbes d'isovaleurs de l'amplitude h_m/h_s mesurée expérimentalement. Chaque zone colorée représente une région dans laquelle les ondes prennent une amplitude comprise entre les deux valeurs frontières indiquées sur la figure (de 2 à 5), des basses amplitudes (en bleu) aux grandes amplitudes (en orange). Le régime **DG** est caractérisé par des ondes d'amplitude modérée ($h_m/h_s < 3$) se propageant sans transport de masse le long de la fibre et est obtenu pour $\beta_s^* < 2.5$ et $\delta_s < 1.5$. Le régime **DI** est caractérisé par des ondes de grande amplitude ($h_m/h_s > 3$) présentant un front raide et pouvant présenter une zone de recirculation, et s'obtient pour $\delta_s > 1.5$ et $\beta_s^* < 1$. Les régimes **RP** sont eux caractérisés par des gouttes de grande amplitude, présentant une zone de recirculation et s'obtient pour $\beta_s^* \gtrsim 3$ et $\delta_s < 1$. Lorsque $\delta_s \rightarrow 0$, l'amplitude augmente, et la zone de recirculation augmente pour finalement englober toute la goutte. La transition entre ondes et gouttes a lieu pour $h_m/h_s \simeq 3$.

par la formation d'ondes d'amplitude modérée se propageant sans transport de masse, dont le front se raidit légèrement sous l'effet de l'inertie. La vitesse des ondes solitaires alors créées est déterminée par leur amplitude et le substrat sur lequel elles se propagent. Dans le régime DI, on peut observer des ondes solitaires

asymétriques de grande amplitude dont le front se raidit fortement. La transition vers le régime DI se traduit par une saturation de la vitesse des ondes solitaires, qui devient alors indépendante de leur amplitude. Finalement, en régime RP, les structures prennent la forme de gouttes de grande amplitude, quasiment symétriques et dont la forme est indépendante des conditions d'écoulement. Ces gouttes présentent une zone de recirculation, dont l'apparition est corrélée à un changement de dynamique visible sur la vitesse. Nous avons identifié ce changement de dynamique en déposant des gouttes de volume contrôlé sur une fibre, prémouillée par le passage préalable d'une goutte qui laisse derrière elle, en glissant le long du fil, un film dont l'épaisseur suit une loi de type Landau. On peut ainsi identifier l'amplitude à laquelle on passe des gouttes aux ondes, qui est proche de la limite DG/RP. Lorsque l'inertie est négligeable, et que seule joue l'instabilité de Rayleigh-Plateau, on tend à former des gouttes d'amplitude très importante dans lesquelles la zone de recirculation englobe totalement la structure ; ces gouttes se comportent comme sur une fibre sèche, leur vitesse devient indépendante de l'épaisseur du film, alors négligeable.

Nous avons donc caractérisé finement la dynamique et les structures résultant de l'instabilité (ou plutôt des instabilités) du film liquide en écoulement sur une fibre verticale. Ce faisant, nous avons rencontré de nombreux phénomènes fascinants et particulièrement esthétiques. J'ai notamment observé la synchronisation de l'écoulement, parfois en plusieurs étapes, avec un forçage périodique. Les interactions entre les ondes, qui s'attirent, fusionnent parfois ou se repoussent, sont particulièrement élégantes. J'ai eu l'occasion, au cours de ma thèse, de partager cet enthousiasme pour la beauté de la physique des liquides avec des étudiants, des collégiens ou même de jeunes enfants en classe maternelle. Ces derniers, charmés par les comportements parfois surprenant des liquides, doivent cet émerveillement non seulement aux phénomènes à proprement dit, mais aussi du fait qu'ils ne les ont pas seulement appris, mais démontrés en faisant eux-mêmes les expériences afin de vérifier ou invalider leurs hypothèses. C'est cette approche expérimentale que j'ai principalement développé durant ma thèse. Comme le préconisait Pierre-Gilles de Gennes, dans ses entretiens avec les lycéens rapportés dans le livre *Les Objets Fragiles*, j'ai cependant essayé de ne pas faire preuve d'"obscurantisme anti-équation" ni d'ailleurs de "dictature pro-équation" : je me suis attachée à décrire et caractériser les comportements observés par des modèles simples, résolus de manière analytique. En parallèle, j'ai pu aussi aborder des modèles plus complexes et leur résolution numérique.

Si maintenant le comportement de fluides newtoniens, en mouillage total, est bien compris, ce système expérimental simple ouvre de nombreuses perspectives sur l'étude de fluides plus complexes. Dans un premier temps, on pourra étudier la dynamique d'un fluide en mouillage partiel, pour lequel on perd l'axisymétrie, ce qui engendre des régimes variés et complique l'approche théorique. Il semble également intéressant d'étudier l'écoulement de fluides non newtonien ; notre système, par sa géométrie et ses forts cisaillements, permet en effet d'étudier les effets combinés d'un caractère rhéofluidifiant et de l'apparition de contraintes normales. Ces études se rapprochent en outre des applications industrielles, et pourront être complétées par l'étude de la morphologie de la couche déposée après séchage, cruciale dans les procédés d'enrobage.

Pour finir, l'écoulement d'un film liquide sur une fibre fournit un bon prototype de milieu actif, dissipatif et dispersif dans lequel les nombreux phénomènes souvent engendrés par ces effets se manifestent visuellement et sont "facilement" observables. D'ailleurs, le formalisme et les termes employés pour les décrire ont été empruntés à d'autres domaines de la physique (absolu/convectif, états liés) et appliqués à l'hydrodynamique. Inversement, comme l'ont fait L. E. Johns et R. Narayanan dans leur livre sur les instabilités interfaciales (45), on peut partir de l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Plateau d'un cylindre liquide pour

expliquer d'autres types d'instabilités, comme celles apparaissant lors de la solidification d'un cylindre de glace ou lors de l'électrodéposition par électrolyse d'un fil de cuivre. Ranga Narayanan, lors d'un séminaire à Orsay² où il présentait ces instabilités "cylindriques" exhortait d'ailleurs le public à parfois aller "*au-delà de la mécanique des fluides*"...

²*Interfacial Instability from Equilibrium- Why Cylinders are so Interesting !*, séminaire FAST/LIMSI, le 27 Novembre 2008

Annexe A

Forme d'une goutte sur une fibre

Je reprends ici les calculs de Carroll (11) permettant d'obtenir le profil d'onduloïde que prend une goutte posée sur une fibre verticale. Je reprend ensuite la discussion d'Elise Lorenceau (66) sur les formes asymptotiques des gouttes sur des fibres de faible ou au contraire de grand rayon. Les notations sont données sur la figure A.1 pour une fibre de rayon R . On considère le cas d'un liquide se raccordant à la fibre avec un angle de contact θ_E .

On détermine la courbure en un point A de l'interface. Les deux rayons de courbures R_1 et R_2 sont donnés

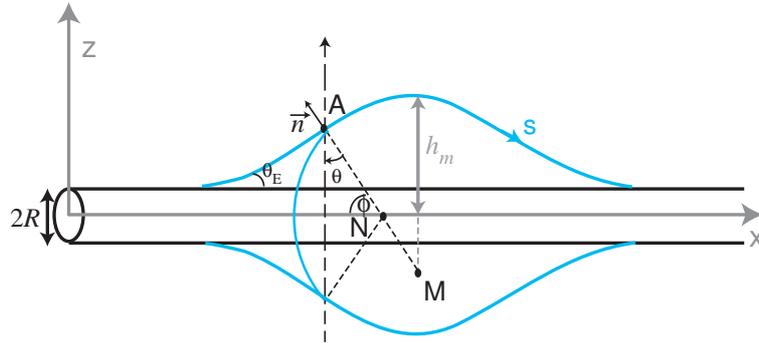


Fig. A.1. Notations dans le cas d'une goutte sur une fibre horizontale ; plan contenant \vec{n} et l'axe de la fibre. Le deuxième plan étudié contient \vec{n} et est perpendiculaire au premier.

par :

- $R_1 = AM$ où M est le centre de courbure de la méridienne dans le plan de la figure.
- $R_2 = AN$ où N est le centre de courbure dans le plan perpendiculaire à la figure (i.e. l'intersection de la normale à la surface \vec{n} et de l'axe de symétrie).

On peut alors écrire la pression de Laplace au point A

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{d\theta}{dx} \cos \theta + \frac{\cos \theta}{z} \quad (\text{A.1})$$

Cette surpression est considérée comme constante dans la goutte et égale à K (la goutte étant pratiquement à l'équilibre). L'équation (A.1) s'écrit, en fonction de l'angle ϕ défini comme $\phi = \pi/2 - \theta$,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \phi}{z} + \cos \phi \frac{d\phi}{dz} = -\frac{1}{z} \frac{d}{dz}(z \sin \phi) = K \quad (\text{A.2})$$

On intègre en introduisant une constante d'intégration K' :

$$z \sin \phi = \frac{1}{2} K z^2 + K' \quad (\text{A.3})$$

En utilisant les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\pi}{2} - \theta_E \text{ en } z = R \\ \phi &= \frac{\pi}{2} \text{ en } z = h_m \end{aligned}$$

on détermine les constantes d'intégration

$$K = \frac{2}{R + h_m}$$

et

$$K' = \frac{R h_m}{R + h_m}.$$

Finalement, l'équation (A.2), peut être intégrée. En notant

$$a = \frac{h_m \cos \theta_E - R}{h_m - R \cos \theta_E},$$

puis en faisant le changement de variable $z^2 = h_m^2(1 - k^2 \sin^2 \phi)$ et $k^2 = (h_m^2 - a^2 R^2)/h_m^2$, on peut obtenir le profil de la goutte

$$x = \pm [a R F(\phi, k) + h_m E(\phi, k)] \quad (\text{A.4})$$

où F et E sont des intégrales elliptiques de première et seconde espèce définies comme

$$\begin{aligned} F(\phi, k) &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ E(\phi, k) &= \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Notons qu'en mouillage total, comme dans le cas des huiles utilisées dans cette thèse, $\theta_E = 0$ d'où $a=1$. Des exemples de profils ainsi obtenus, en mouillage total, sont donnés Fig. A.2. Afin de déterminer l'expression de la surpression de Laplace en tout point de la goutte, reprenons l'équation (A.2) en y injectant l'expression de $z \sin \phi$ donnée dans (A.3) en remplaçant K et K' par les valeurs obtenues. On obtient alors

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \frac{n - \cos \theta_E}{n^2 - 1} \quad (\text{A.5})$$

où on a introduit $n = h_m/R$. Notons qu'en mouillage total, on a simplement

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \frac{1}{n + 1} = \frac{2\gamma}{h_m + R} \quad (\text{A.6})$$

qui est tout simplement la surpression à l'apex de la goutte. On se place dorénavant en mouillage total.

On peut déterminer la longueur de la goutte sur la fibre l

$$\begin{aligned} l &= 2|x(z = R)| = 2[RF(\phi, k) + h_m E(\phi, k)] \\ &= 2[RF(\pi/2, k) + h_m E(\pi/2, k)] \\ &= 2[RK(k) + h_m E(k)] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

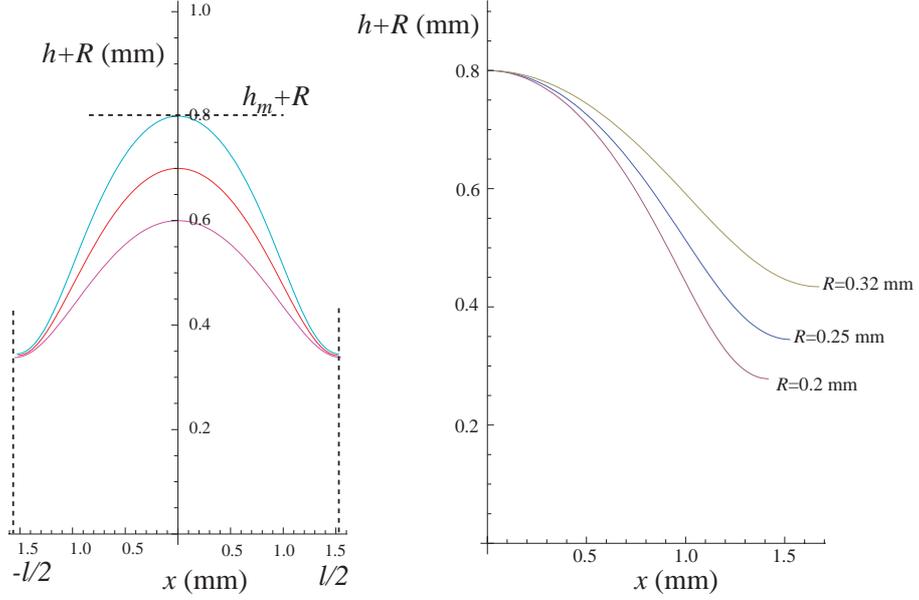


Fig. A.2. Profils pour $R = 0.25$ mm et $h_m = 0.6, 0.7$ et 0.8 mm ; $h_m = 0.8$ mm et $R = 0.2, 0.25$ et 0.32 mm.

où $K(k)$ et $E(k)$ sont les intégrales elliptiques de premier et second ordre respectivement pour $\phi = \pi/2$, qualifiées alors de *complètes*. On calcule le volume total Ω (goutte + fibre) entre deux plans $-x$ et x comme

$$\begin{aligned}\Omega(x) &= \iiint z(x) dz dx d\theta \\ &= 2\pi \iint z(x) dz dx \\ &= \pi \int_{-x}^x z^2(x) dx\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

En utilisant la transformation $z^2 = h_m^2(1 - k^2 \sin^2 \phi)$, on peut intégrer cette expression, ce qui conduit à l'expression du volume

$$\Omega(x) = \frac{2\pi h_m}{3} \left[(2R^2 + 3Rh_m + 2h_m^2)E(\phi, k) - R^2F(\phi, k) + \frac{z(x)}{h_m}(h_m^2 - z^2(x))^{1/2}(z^2(x) - R^2)^{1/2} \right] \quad (\text{A.9})$$

Le volume de la goutte Ω_g se calcule comme

$$\Omega_g = \Omega(x_0) - \pi R^2 l \quad (\text{A.10})$$

où x_0 est la valeur de x en $z = R$ (c'est à dire qu'on calcule tout le volume de la goutte, entre les deux plans $-x(z = R) = -l/2$ et $x(z = R) = l/2$), ce qui donne finalement

$$\Omega_g(h_m, R) = \frac{2\pi h_m}{3} \left[(2R^2 + 3Rh_m + 2h_m^2)K(k) - R^2E(k) \right] - \pi R^2 l \quad (\text{A.11})$$

Pour un volume donné, on peut alors déterminer les couples (h_m, R) correspondants. On peut aussi calculer, pour un rayon de fibre R donné, le volume en fonction de la hauteur h_m comme représenté sur la figure A.3 (pour des rayons de fibre et volume correspondant à nos expériences). Elise Lorenceau et David Quéré (66) ont procédé à cette étude et observé deux régimes distincts.

A volume fixé (Fig. A.3(a)),

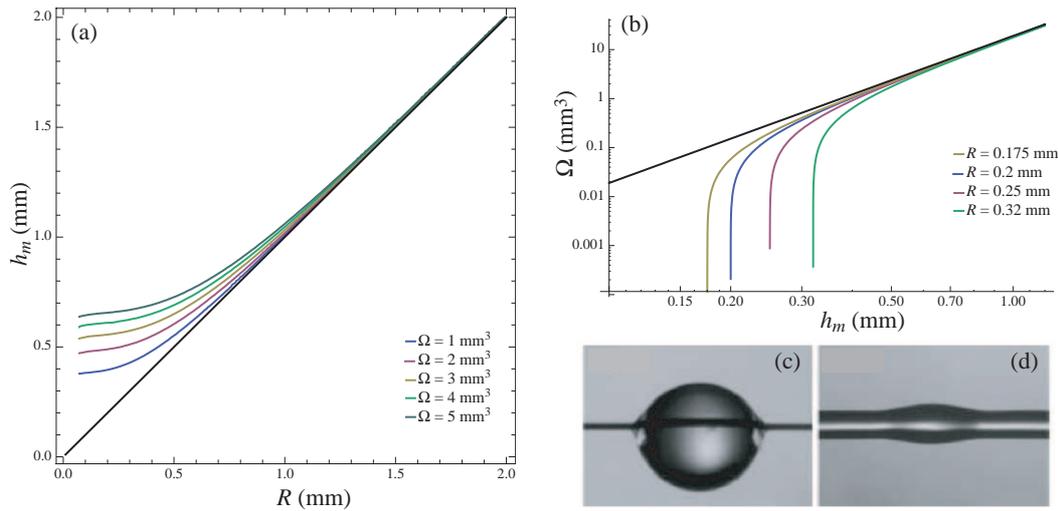


Fig. A.3. (a) Couples (h_m, R) pour différents volumes ; la ligne noire correspond à $h_m = R$. (b) Volume Ω de la goutte en fonction de sa hauteur h_m pour différents rayon de fibre, en Log-Log ; la ligne noire correspond à une droite de pente 3. (c) Goutte sphérique ($R/H=0.06$). (d) Goutte cylindrique ($R/H=1.25$). ((c) et (d) : Images (66)).

- pour des fibres de petit rayon, h_m est une constante indépendante du rayon R de la fibre. Si l'on note le volume de la goutte comme étant $\Omega = (4/3)\pi H^3$, le plateau correspond à $h_m = H$. La fibre déforme faiblement la goutte qui est donc quasi sphérique.
- Pour des fibres de grand rayon, h_m est proportionnelle à R . La goutte est plate, quasi cylindrique.

On retrouve ce comportement en se plaçant à rayon de fibre fixé (Fig. A.3(b)). On observe dans ce cas que lorsque le volume de la goutte devient important, celui-ci varie comme $\Omega \propto h_m^3$. Ceci correspond aux gouttes quasi sphériques et au plateau de la figure (Fig. A.3(a)). Pour des volumes plus faibles, la hauteur h_m tend vers un plateau ($h_m=R$) : ce sont les gouttes cylindriques. Finalement, on peut déterminer ces deux régimes en fonction du rayon de la fibre et du rayon de la *goutte équivalente*, c'est-à-dire la goutte sphérique de rayon H et de volume Ω . Lorsque $R/H < 1$, la goutte est *quasi-sphérique* et $h_m \sim H$ (Fig. A.3(c)). Lorsque $R/H > 1$, la goutte est *quasi-cylindrique* et $h_m \sim R$ (Fig. A.3(d)). La transition a lieu pour $R \sim H$. Ce comportement est aussi observé dans nos expériences (Fig. A.4).



Fig. A.4. (a) *Goutte type sphérique* ($R=0.2\text{ mm}$, $H=0.25\text{ mm}$, $R/H=0.8$). (b) *Goutte type cylindrique* ($R=1.5\text{ mm}$, $H=0.6\text{ mm}$, $R/H=2.5$).

Annexe B

Traitement et exploitation des images

B.1 Caméra linéaire parallèle à l'écoulement : diagramme spatio-temporel

Nos diagrammes spatio-temporels se présentent sous la forme d'une image représentant la position x en abscisse et le temps t en ordonnée. On obtient une image codée en niveau de gris, l'intensité représentant l'épaisseur de fluide (noir : film épais, gris : film mince, blanc : pas de film). Notons que l'intensité n'étant pas calibrée, ce diagramme ne nous donne pas d'information quantitative quant à l'épaisseur du film et nous permet simplement de détecter la position des structures (les zones sombres). Cependant, l'image étant codée en niveaux de gris, nous n'avons pas seulement une information binaire (dans ou hors goutte) mais une idée de la forme des structures. La ligne verticale de la caméra est déplacée finement jusqu'à avoir une différence nette entre les ondes sombres et le film mince les séparant en clair. Le meilleur contraste est obtenu lorsque la ligne est placée au centre des structures. La figure B.1 représente les spatios obtenus lorsque la ligne est dans le film uniforme (1), est proche de ce film (2) ou est au centre des ondes (3). On

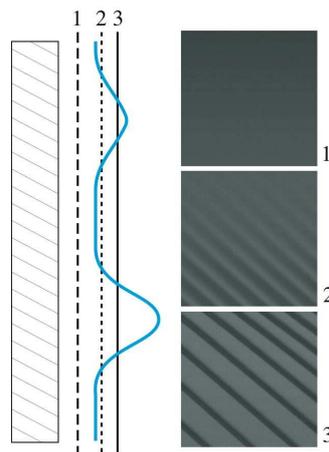


Fig. B.1. Utilisation de la caméra linéaire parallèle à l'écoulement.

peut ainsi collecter les positions des gouttes dans le plan (x,t) et suivre leurs déplacements. Un exemple de diagramme est présenté sur la figure B.2. On peut mesurer la vitesse des ondes, en mesurant la pente des lignes de crêtes (lignes noires représentant les trajectoires des crêtes). On obtient aussi deux types de profils (Fig. B.2) : l'évolution de l'intensité I (donc de l'épaisseur) en fonction de la position x à un temps t donné

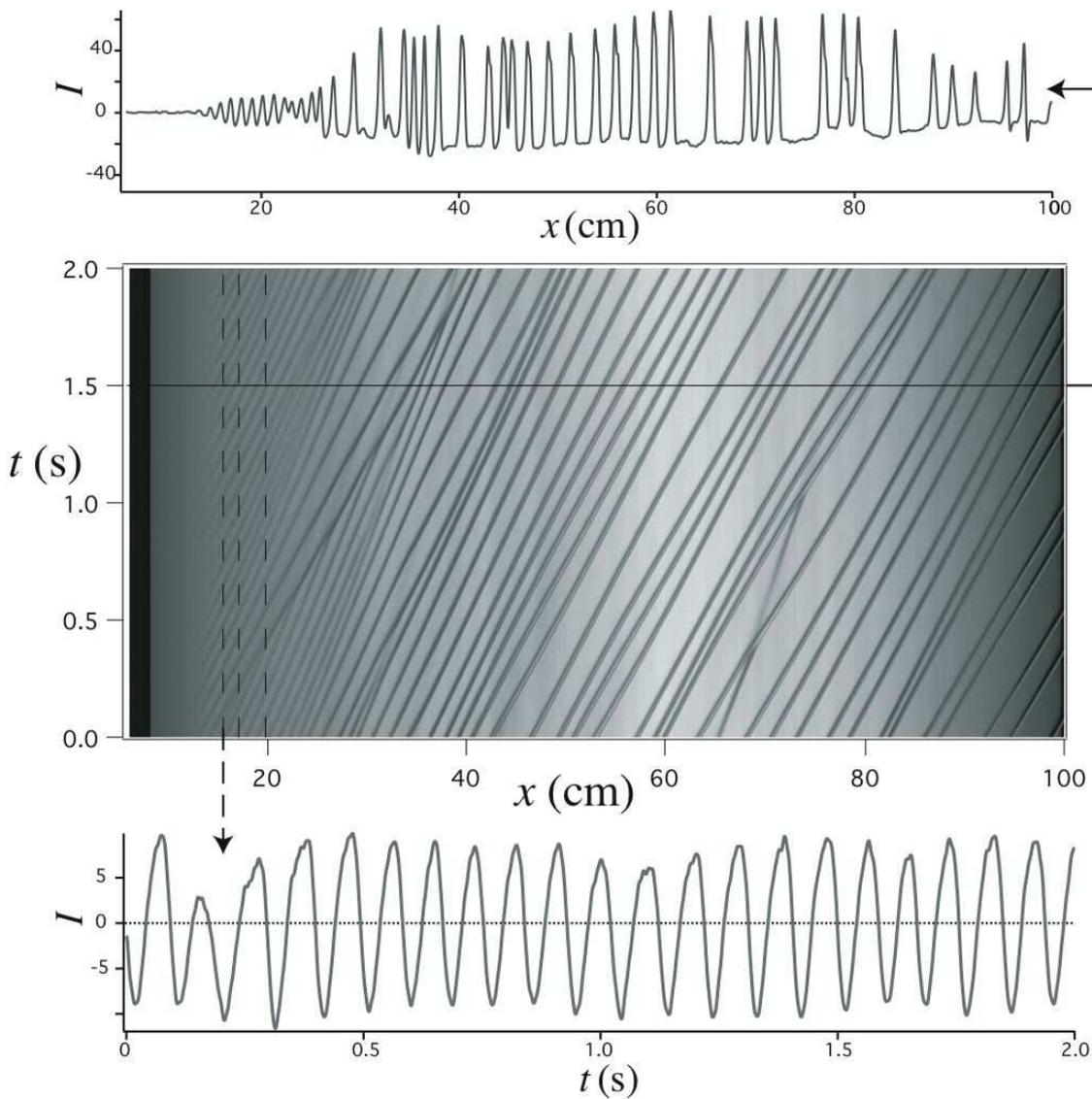


Fig. B.2. Exploitation d'un diagramme spatio-temporel : profils $I(x)$ et $I(t)$ correspondant respectivement à des lignes horizontales et verticales du diagramme spatio-temporel.

et l'intensité en fonction du temps à une distance x donnée. Ces profils sont renormalisés en retranchant l'intensité moyenne. Ainsi la distance entre deux crêtes successives est donnée par la distance entre deux passages à $I=0$ successifs. Les deux profils ainsi obtenus permettent de déterminer la fréquence (avec $I(t)$) et la longueur d'onde (avec $I(x)$). Après avoir extrait et renormalisés les profils ($\text{profil}[i]$), ceux-ci sont traités avec le logiciel Igor (Fig. B.3). On repère les passages par $I=0$ ($\text{profil}[i] \cdot \text{profil}[i+1] \leq 0$) que l'on stocke dans deux vecteurs pour les points correspondants à une montée ($\text{profil}[i] < 0$) et à une descente ($\text{profil}[i] > 0$). Le point de passage par zéro est donné par le point médian. Bien entendu, plus le nombre de points est élevée, meilleure est la précision ! La distance entre deux crêtes (période pour le profil $I(t)$ ou longueur d'onde pour le profil $I(x)$) est alors déterminée comme la distance entre deux passages par zéro successifs. Détaillons la procédure à l'aide de la figure B.3. On repère un passage par zéro *montant* entre $i=k$ et $i=k+1$. La position du zéro est stockée (on l'appellera k_0). On incrémente i jusqu'à repérer un passage par zéro *descendant* entre $i=j$ et $i=j+1$ (noté j_0). On a donc une distance correspondant à un maximum $d_{\max} = j_0 - k_0$. On continue

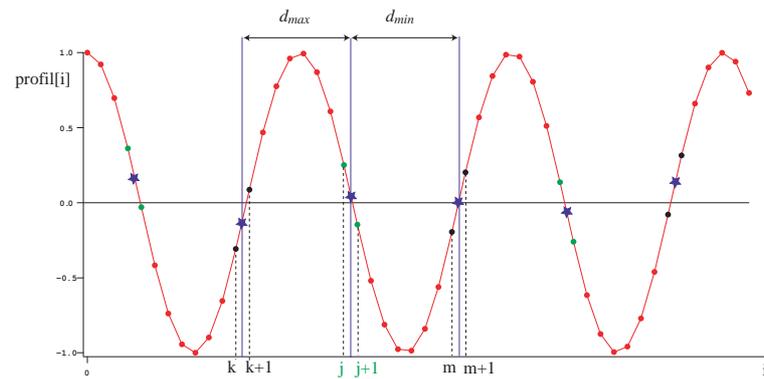


Fig. B.3. Exploitation d'un profil : Mesure des zéros et détermination des longueurs/durées.

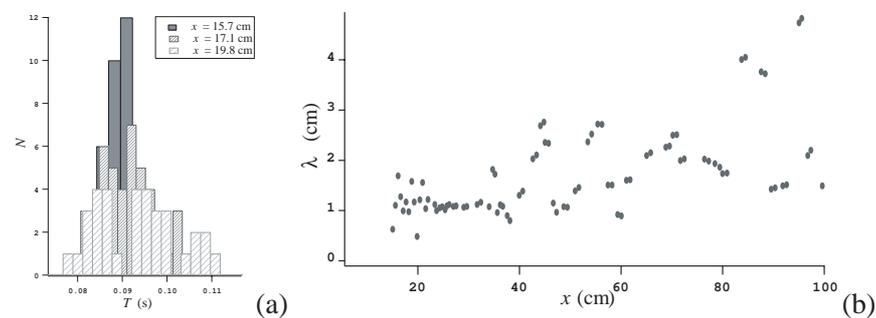


Fig. B.4. Resultats obtenus avec la caméra parallèle à l'écoulement. (a) Histogrammes des périodes à différentes positions x sur la fibre ; (b) évolution de la longueur d'onde en fonction de la position x sur la fibre.

d'incrémenter i jusqu'à croiser un autre passage *montant* entre $i=m$ et $i=m+1$ que l'on notera m_0 . On a alors une distance correspondant à un minimum $d_{min} = m_0 - j_0$. On stocke ainsi les distances maximum et minimum dans deux vecteurs distincts.

On peut ensuite les utiliser pour :

- obtenir l'évolution de la longueur d'onde (resp. la période) en fonction de la position x (resp. du temps t). Par exemple, l'évolution de la longueur d'onde en fonction de la position sur la fibre est donnée sur la figure B.4. On note bien que la longueur d'onde est constante sur quelques centimètres (train d'onde régulier) puis varie fortement avec une tendance à augmenter lorsqu'on descend le long de la fibre due aux nombreuses coalescences qui déstabilisent l'écoulement.
- obtenir la valeur moyenne de la période (resp. la longueur d'onde) et faire des statistiques. Un exemple d'histogramme des périodes mesurées à différentes altitudes est présenté sur la figure B.4. A l'apparition des ondes, le train d'onde est régulier et la distribution de périodes est fine et centrée sur la valeur f_E . Lorsque l'on descend le long de la fibre, le train d'ondes se déstabilise et la distribution de périodes s'élargit et se décale (les coalescences entraînant une diminution du nombre d'ondes et donc une augmentation de la période).

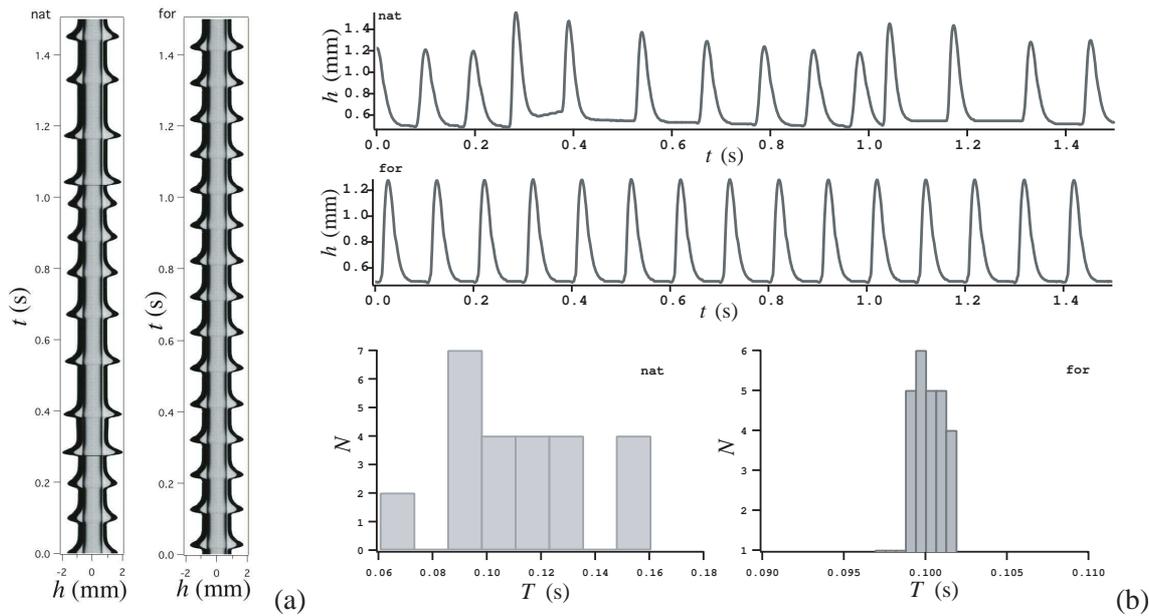


Fig. B.5. Résultats obtenus avec la caméra perpendiculaire à l'écoulement. (a) Images obtenues sans et avec forçage ; (b) signal $h(t)$ et histogramme des périodes correspondants sans et avec forçage.

B.2 Caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement : évolution temporelle de l'épaisseur

On place maintenant la caméra linéaire perpendiculaire à l'écoulement. On va donc mesurer l'évolution de l'épaisseur h en fonction du temps t à une position x donnée. Dans ce cas, en calibrant à l'aide d'une image de la fibre sèche, on va obtenir une mesure précise de l'épaisseur. On extrait le profil comme pour la caméra rapide (voir chapitre montage expérimental). On obtient alors $h(t)$. De plus, ce profil nous permet aussi de mesurer la période (donc la fréquence) avec une grande précision en utilisant la même technique que celle présentée au paragraphe précédent. Un exemple est donné sur la figure B.5 pour une même fibre, un même débit et à $x = 25$ cm de l'alimentation. On représente l'évolution naturelle (nat) sans forcer : le train d'onde commence à se déstabiliser, on voit des coalescences et la distribution des périodes est large autour de $1/f_E$ ($0.06 < T < 0.16$ soit $\Delta T/T = 45\%$). On représente aussi l'évolution de l'épaisseur en forçant (for) à la fréquence $f_E = 10$ Hz : on synchronise parfaitement l'écoulement et on obtient un train d'ondes stationnaires, d'amplitude et de période constante ($0.0988 < T < 0.101$ soit $\Delta T/T = 1\%$).

B.3 Caméra rapide

On obtient des images de l'écoulement permettant de voir "au travers" des gouttes. L'extérieur de la goutte est très clair (valeur de pixel $I \approx 250$), le bord est sombre ($I \approx 2$), l'intérieur est assez clair ($I \approx 200$). De plus, la fibre est assez foncée ($I \approx 150$) et il y a une zone d'ombre sous la goutte ($I \approx 2$) qui indique le front de l'onde. Une particule (traceur) se caractérise par une tâche sombre dans la goutte (Fig. B.6). On peut traiter les images afin d'en extraire le profil, mais on peut aussi, à partir d'un film et à l'aide du logiciel Image J, obtenir des diagrammes spatio-temporels précis permettant de visualiser l'intérieur de la goutte.

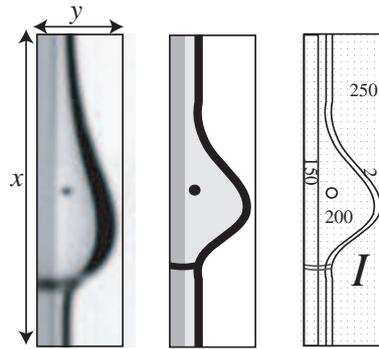


Fig. B.6. Codage en niveau de gris d'une goutte sur une fibre, avec une particule.

Un exemple est donné sur la figure B.7. On peut réaliser un diagramme classique (comme celui obtenu avec la caméra linéaire) en suivant une ligne de pixel verticale en fonction du temps : on acquière cette ligne sur toutes les images du film et on accole les lignes obtenues. Différents spatios obtenus par cette méthode sont représentés sur la figure B.7. Chaque spatio correspond au suivi d'une ligne verticale. En fonction de la position de la ligne, on obtient différents spatios. Par exemple, le spatio obtenu pour la ligne bleue ($y=10$) permet de bien suivre l'évolution des ondes. L'intérêt d'un tel spatio est de suivre à la fois la dynamique de l'écoulement, mais aussi la taille des gouttes et la dynamique de particules à l'intérieur de ces gouttes. Sur l'expérience représentée sur la figure B.7, il y a 6 particules. Selon la position de la ligne, on va voir la trajectoire de ces particules dans le film ($y=0$) ou dans les ondes ($y=5$). De plus, elles ne se trouvent pas toutes à la même épaisseur y . On ne peut donc pas suivre la dynamique globale des gouttes et des particules sur un seul spatio. Un bon moyen d'avoir cette vision globale et de procéder à une moyenne sur toutes les altitudes y . Ainsi, on réalise un spatio dont chaque point (x_i, t_i) contient la valeur moyenne de l'intensité $\langle I \rangle_y$ des points (x_i, t_i) sur toutes les lignes. Les ondes étant représentées par une forte intensité lumineuse, les points marquant leurs trajectoires (les points auxquels les ondes sont passées) ont une intensité moyenne élevée. Les points pour lesquels on a plutôt un film mince sont caractérisés par une intensité moyenne plus faible. Finalement, les points auxquels il y a eu passage de l'avant des gouttes ou de particules (zones très sombres) ont une intensité moyenne basse. Ce spatio "moyenné" permet donc de suivre l'évolution totale des ondes + particules. Notons que cette méthode est uniquement qualitative ; en effet, on ne sait pas à quel niveau ("profondeur") dans la goutte la particule se trouve, et il faudrait prendre en compte une correction optique pour estimer la position de la particule (qu'on regarde au travers de la goutte qui agit comme une lentille).

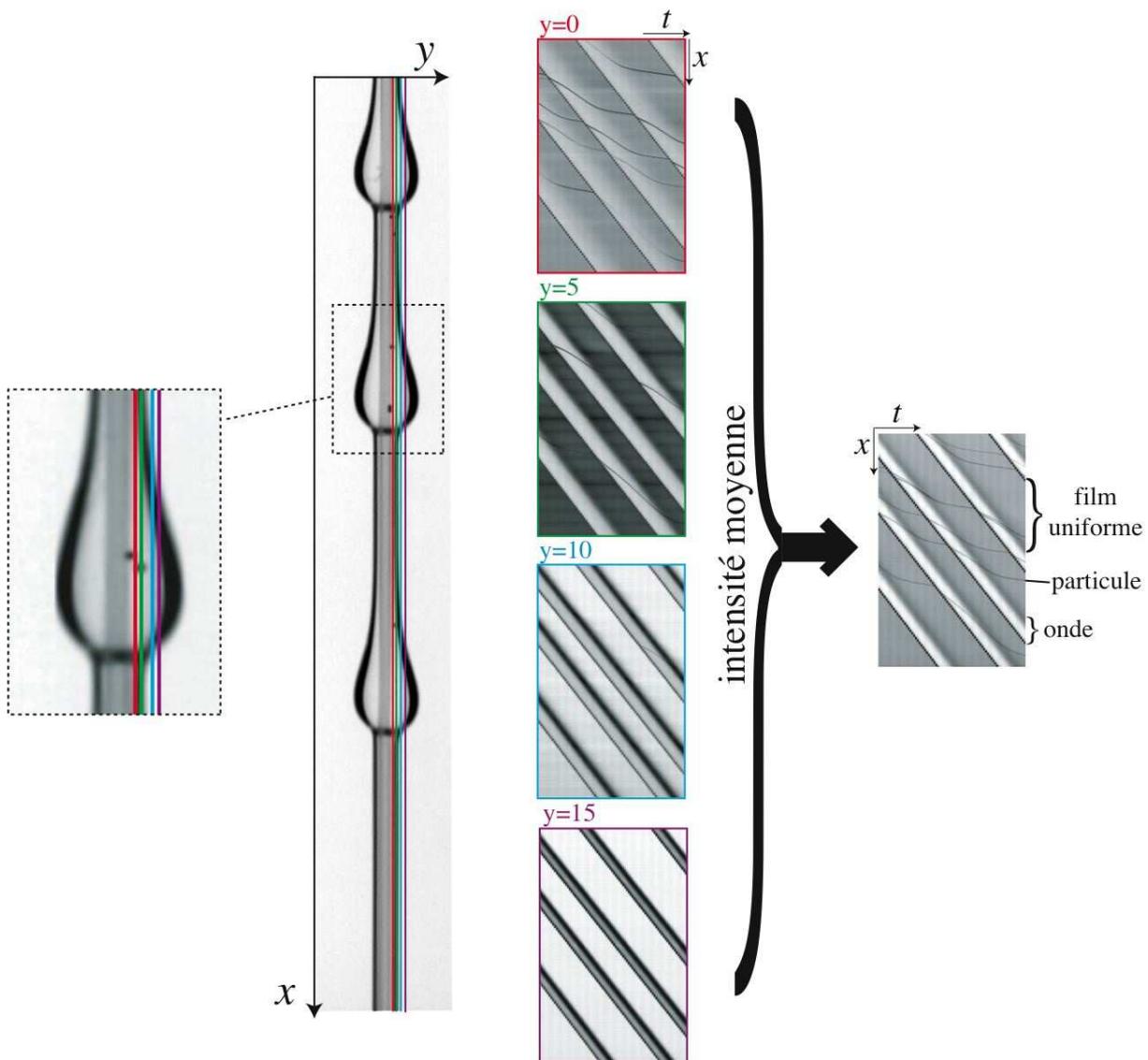


Fig. B.7. Suivi d'une onde et d'une particule : obtention du spatio.

Nomenclature

Remarque : pour les grandeurs dimensionnelles, les unités sont précisées entre parenthèses

$\alpha = 1/R$	courbure (m^{-1})
$\alpha_N = h_N/R$	rapport d'aspect
c_k	vitesse adimensionnée des ondes linéaires
η	viscosité dynamique (Pa.s)
g	accélération de la gravité (m.s^{-2})
γ	tension de surface (N.m^{-1})
h	épaisseur du film
h_N	épaisseur de Nusselt du film uniforme
h_m	épaisseur maximale (hauteur d'une structure)
h_s	épaisseur minimale (épaisseur du substrat)
k	nombre d'onde
k_c	nombre d'onde de coupure
k_m	nombre d'onde maximal
λ	longueur d'onde (m)
$l_c = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$	longueur capillaire (m)
$l_v = (\nu^2/g)^{1/3}$	échelle de longueur viscosité-gravité (m)
$\nu = \eta/\rho$	viscosité cinématique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
ω	pulsation complexe
p	pression
ψ	fonction courant
Q	débit massique (g.s^{-1})
q_N	débit linéique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
r	coordonnée radiale
R	rayon de la fibre (m)
R_1, R_2	rayons de courbure
ρ	masse volumique (kg.m^{-3})
t	temps
τ	temps caractéristique
$\mathbf{v} = (u, v)$	vecteur vitesse
u, v	composante de la vitesse dans la direction de l'écoulement et dans la direction transverse à l'écoulement
U, V	composante de la vitesse de l'écoulement de Nusselt
$U_0 = \rho g h_N^2 / (2\eta)$	vitesse caractéristique de l'écoulement
u_{if}	vitesse maximale du fluide à l'interface lorsque $hN \ll R$
u_i	vitesse maximale du fluide à l'interface lorsque $hN \sim R$
u_k	vitesse d'advection des ondes par l'écoulement
u_N	vitesse moyenne de l'écoulement $u_N = q_N/h_N$ (m.s^{-1})
x, y	coordonnées dans la direction de l'écoulement et dans la direction transverse à l'écoulement
$\xi = x - ct$	coordonnée dans un référentiel en mouvement

Ω	volume d'une goutte
$Bo = W^{-1} = (\rho g h_N^2)/\gamma$	nombre de Bond
β^*	paramètre de saturation
$Ca = \eta u_N/\gamma$	nombre capillaire
$\delta = Re/\kappa$	nombre de Reynolds réduit
$\delta_d = 6/(We Re A^{1/2})$	paramètre de dispersion ($A = 8/(5 We) + (h_N/R)^2$)
$Fr = u_N/\sqrt{gh_N}$	nombre de Froude
$G_o = R/l_c$	nombre de Goucher
$\kappa = W^{1/3}$	rapport des échelles radiale et axiale
$Re = q_N/\nu$	nombre de Reynolds
$We = \gamma/(\rho U_0^2 h_N)$	nombre de Weber
2D	à deux dimensions
AC	Absolu/Convectif (transition)
BL	boundary layer (couche limite)
CL	condition(s) aux limites
CM	Craster et Matar (équation)
DG	Drag-Gravity (régime)
DI	Drag-Inertia (régime)
IBL	integral boundary layer (intégrale couche limite)
KS	Kuramoto-Sivashinsky (équation)
MG	Mode Global
OS	Orr-Sommerfeld (analyse)
RP	Rayleigh-Plateau (instabilité)
WR	weighted residual (résidus pondérés)
∂_i	dérivée partielle par rapport à i

Bibliographie

- [1] N. K. Adam, *Detergent action and its relation to wetting and emulsification*, J. Soc. Dyers Colour **53** (1937), 122–128.
- [2] L. E. Ballentine, *Quantum mechanics : A modern development*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [3] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1967.
- [4] G. K. Batchelor, H. K. Moffat, and M. G. Worster, *Perspectives in fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2000.
- [5] Lionel Bellenger, *Libérez votre créativité*, 2005.
- [6] T. B. Benjamin, *Wave formation in laminar flow down an inclined plane*, J. Fluid Mech. **2** (1957), 554–574.
- [7] D. J. Benney, *Long waves on liquid films*, J. Math. Phys **45** (1966), 150–155.
- [8] H. Bouasse, *Capillarité, phénomènes superficiels*, Librairie Delagrave, 1924.
- [9] F.P. Bretherton, *The motion of long bubbles in tubes*, J. Fluid Mech. **10** (1961), 166.
- [10] R.J. Briggs, *Electron-stream interaction with plasmas*, MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- [11] B. J. Carroll, *The accurate measurement of contact angle, phase contact areas, drop volume and laplace excess pressure in drop-on-fiber systems*, Journal of Colloid and Interface Science **57** (1976), 488–495.
- [12] ———, *Equilibrium conformations of liquid drops on thin cylinders under forces of capillarity. a theory for the roll-up process*, Langmuir **2** (1986), 248–250.
- [13] H. Chang, *Wave evolution on a falling film*, Ann. Rev. Fluid Mech. **26** (1994), 103–136.
- [14] H.-C. Chang, *Traveling waves on fluid interfaces : Normal form analysis of the kuramoto-shivashinsky equation*, Phys. Fluids **29** (1986), 3142.
- [15] H. C. Chang and E. A. Demekhin, *Mechanism for drop formation on a coated vertical fibre*, J. Fluid Mech. **380** (1999), 233–255.
- [16] H.-C. Chang and E. A. Demekhin, *Complex wave dynamics on thin films*, Elsevier, Amsterdam, 2002.

- [17] F. Charru, *Instabilités hydrodynamiques*, EDP Sciences, Les Ulis, 2007.
- [18] R. V. Craster and O. K. Matar, *On viscous beads flowing down a vertical fibre*, *J. Fluid Mech.* **553** (2006), 85.
- [19] B. Derjaguin, *On the thickness of the liquid film adhering to the walls of a vessel after emptying*, *Acta Physicochim.* **20** (1944), 349.
- [20] E. J. Doedel, *Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations*, Montreal Concordia University (2005).
- [21] ———, *AUTO07p continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*, Montreal Concordia University (2008).
- [22] M. D’Olce, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, and L. Talon, *Convective/absolute instability in miscible core-annular flow. part I : Experiments*, *J. Fluid Mech.* **618** (2009), 305–322.
- [23] K. Drescher, K. C. Leptos, I. Tuval, T. Ishikawa, T. J. Pedley, and R. E. Goldstein, *Dancing volvox : Hydrodynamic bound states of swimming algae*, *Phys. Rev. Letters* **102** (2009), 168101.
- [24] V. Duclaux, C. Clanet, and D. Quéré, *The effects of gravity on the capillary instability in tubes*, *J. Fluid Mech.* **556** (2006), 217–226.
- [25] C. Duprat, F. Giorgiutti-Dauphiné, D. Tseluiko, S. Saprykin, and S. Kalliadasis, *Liquid film coating a fiber as a model system for the formation of bound states in active dispersive-dissipative nonlinear media*, accepté dans *Phys. Rev. Letters*.
- [26] C. Duprat, C. Ruyer-Quil, and F. Giorgiutti-Dauphiné, *Experimental study of the instability of a film flowing down a vertical fiber*, *Eur. Phys. J. Special Topics* **166** (2009), 63–66.
- [27] ———, *Spatial evolution of a film flowing down a fiber*, *Phys. Fluids* **21** (2009), 042109.
- [28] C. Duprat, C. Ruyer-Quil, S. Kalliadasis, and F. Giorgiutti-Dauphiné, *Absolute and convective instabilities of a viscous film flowing down a vertical fiber*, *Phys. Rev. Letters* **98** (2007), 244502.
- [29] E. B. Dussan and S. H. Davis, *On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface*, *J. Fluid Mech.* **65** (1974), 71–95.
- [30] A. L. Frenkel, *Nonlinear theory of strongly undulating thin films flowing down vertical cylinders*, *Europhys. Lett* **18** (1992), 583–588.
- [31] A. L. Frenkel, A. J. Babchin, B. G. Levich, T. Shlang, and G. I. Sivashinsky, *Annular flows can keep unstable films from breakup : Nonlinear saturation of capillary instability*, *AIChE J.* **115** (1987), 225–233.
- [32] P.-G. De Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré, *Gouttes, bulles, perles et ondes.*, Belin, Paris, 2005.
- [33] P. Gondret, P. Ern, L. Meignin, and M. Rabaud, *Experimental evidence of a nonlinear transition from convective to absolute instability*, *Phys. Rev. Letters* **82** (1999), 1442.

- [34] F.S. Goucher and H. Ward, *Films adhering to large wires upon withdrawal from liquid baths*, *Phil. Mag.* **44** (1922), 1002.
- [35] P. Guillot, A. Collin, A.S. Utada, and A. Ajdari, *Stability of a jet in confined pressure-driven biphasic flows at low reynolds numbers*, *Phys. Rev. Letters* **99** (2007), 104502.
- [36] C. Gutfinger and J.A. Tallmadge, *Some remarks on the problem of drainage of fluids on vertical surfaces*, *A.I.Ch.E J.* **10** (1964), 774.
- [37] K. Hattori, *Strings of liquid beads for gas-liquid contact operations*, *AIChE J.* **40** (1994), 1983–1992.
- [38] F. Homann, *Einfluß großer Zähigkeit bei Strömung um Zylinder*, *Forsch. Ing.* **7** (1936), 1.
- [39] Z. Huang, X. Liao, Y. Kang, G. Yin, and Y. Yao, *Equilibrium of drops on inclined fibers*, *Journal of Colloid and Interface Science* **330** (2009), 399–403.
- [40] P. Huerre and P. A. Monkewitz, *Local and global instabilities in spatially developing flows*, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22** (1990), 473–537.
- [41] Lord Rayleigh J. W. Strutt, *Some applications of photography*, *Nature* **44** (1891), 249–254.
- [42] ———, *On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force*, *Scientific papers* **iii** (1899), 585.
- [43] ———, *On the instability of jets*, *Scientific papers* **i** (1899), 361.
- [44] Q. Jiang, F. Yang, and R. Pitchumani, *Analysis of coating thickness variation during optical fiber processing*, *Journal of Lightwave Technology* **23** (2005), 1261–1272.
- [45] L. E. Johns and R. Narayanan, *Interfacial instability*, Springer, New York, 2002.
- [46] S. Kalliadasis and H. C. Chang, *Drop formation during coating of vertical fibres*, *J. Fluid Mech.* **261** (1994), 135–168.
- [47] S. Kalliadasis, E. A. Demekhin, C. Ruyer-Quil, and M. G. Velarde, *Thermocapillary instability and wave formation on a film flowing down a uniformly heated plane*, *J. Fluid Mech.* **492** (2003), 303–338.
- [48] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M. G. Velarde, *Film flows, wave instabilities and thermocapillarity*, to appear in Springer Series on Applied Mathematical Sciences, 2009.
- [49] P. L. Kapitza and S. P. Kapitza, *Wave flow of thin layers of a viscous fluid*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **19** (1949), 105–120.
- [50] P.L. Kapitza, *Wave flow of thin layers of a viscous fluid*, *Collected papers of P.L. Kapitza* (D. Ter Haar, ed.), Pergamon, 1948, (Article original en russe : ZETF **18**, 3–28), pp. 105–120.
- [51] T. Kawahara and S. Toh, *Pulse interactions in an unstable dissipative-dispersive nonlinear system*, *Phys. Fluids* **31** (1988), 2103–2111.
- [52] H. Y. Kim, H. J. Lee, and B. H. Kang, *Sliding of liquid drops down an inclined solid surface*, *Journal of Colloid and Interface Science* **247** (2002), 372–380.

- [53] I. L. Kliakhandler, S. H. Davis, and S. G. Bankoff, *Viscous beads on vertical fibre*, J. Fluid Mech. **249** (2001), 381–390.
- [54] A. Kumar and S. Hartland, *Shape of a drop on a vertical fiber*, Journal of Colloid and Interface Science **124** (1987).
- [55] ———, *Measurement of contact angles from the shape of a drop on a vertical fiber*, Journal of Colloid and Interface Science **136** (1989).
- [56] Y. Kuramoto, *Diffusion-induced chaos in reaction systems.*, Suppl. Prog. Theor. Phys **64** (1978), 346.
- [57] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki, *Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium.*, Prog. Theor. Phys **55** (1976), 356.
- [58] L. Landau and B. Levitch, *Dragging of a liquid by a moving plate*, Acta Pysicochim. **17** (1942), 42.
- [59] S.J. Leib and M.E. Goldstein, *Convective and absolute instability of a viscous liquid jet*, Phys. Fluids **29** (1986), 952–954.
- [60] ———, *The generation of capillary instability on liquid jet*, J. Fluid Mech. **168** (1986), 479–500.
- [61] S.P. Lin, M. Hudman, and J.N. Chen, *Absolute and convective instability of a liquid jet*, Microgravity Fluid Physics and Transport Phenomena 4th Conference, Cleveland (1998), 534–538.
- [62] Jun Liu, *Nonlinear dynamics of wavy film flows*, Ph.D. thesis, University of Pennsylvania, 1994.
- [63] Jun Liu and J. P. Gollub, *Onset of spatially chaotic waves on flowing films*, Phys. Rev. Letters **70** (1993), 2289.
- [64] ———, *Solitary wave dynamics of film flows*, Phys. Fluids **6** (1994), 69–101.
- [65] Jun Liu, J. D. Paul, and J. P. Gollub, *Measurements of the primary instabilities of film flows*, J. Fluid Mech. **455** (1993).
- [66] E. Lorenceau and D. Quéré, *Drops on a conical wire*, J. Fluid Mech. **510** (2003), 29–45.
- [67] G. McHale and M. I. Newton, *Global geometry and the equilibrium shapes of liquid drops on fibers*, Journal of Colloid and Interface Science **206** (2002), 79–86.
- [68] G. McHale, M. I. Newton, and B. J. Carroll, *The shape and stability of small liquid drops on fibers*, Oil and Gas Science and Technology **56** (2001), 47–54.
- [69] B. J. Mullins, *Study of capture, fibre wetting and flow processes in wet filtration and liquid aerosol filtration.*, Ph.D. thesis, School of Environmental Engineering, Griffith University, Australie, 1994.
- [70] B. J. Mullins, R. D. Braddock, I. E. Agranovski, R. A. Cropp, and R. A. O’Leary, *Observation and modelling of clamshell droplets on vertical fibres subjected to gravitational and drag forces*, Journal of Colloid and Interface Science **284** (2005), 245–254.
- [71] B. J. Mullins, R. D. Braddock, I. E. Agranovski, and R.A. Cropp, *Observation and modelling of barrel droplets on vertical fibres subjected to gravitational and drag forces*, Journal of Colloid and Interface Science **300** (2006), 704–712.

- [72] Z. Néda, B. Bakó, and E. Rees, *The dripping faucet revisited*, *Chaos* **6** (1996), 59–62.
- [73] C. Z. Ning and H. Haken, *Detuned lasers and the complex lorenz equations : subcritical and supercritical hopf bifurcations.*, *Phys. Rev. A* **41** (1990), 3826–3837.
- [74] W. Nusselt, *Die oberflächenkondensation des wasserdampfes*, *Z. Ver. Dtsch. Ing* **60** (1916), 541–552.
- [75] A. Oron and D.A. Edwards, *Stability of a falling liquid film in the presence of interfacial viscous stress*, *Phys. Fluids* **5** (1993), 506–508.
- [76] U. C. Paek and C. M. Schroeder, *High speed coating of optical fibers with uv curable materials at a rate of greater than 5 m/sec*, *Applied Optics* **20** (1981), 4028–4034.
- [77] ———, *Free drawing and polymer coating of silica glass optical fibers*, *Journal of Heat Transfer* **121** (1999), 774–787.
- [78] A. Panoliaskos, W. L. H. Hallett, and I. Garis, *Prediction of optical fiber coating thickness*, *Applied Optics* **24** (1985), 2309–2312.
- [79] J. Plateau, *Sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées*, *Bullet. de l'Acad. de Belgique* **2ème série, t. 24** (1867), 21.
- [80] ———, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars Paris, 1873.
- [81] D. Quéré, *Thin films flowing on vertical fibres*, *Europhys. Lett* **13** (1990), 721–726.
- [82] ———, *Fluid coating on a fiber*, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31** (1999), 347.
- [83] D. Quéré and A. de Ryck, *Le mouillage dynamique des fibres*, *Ann. Phys. Fr* **23** (1998), 1.
- [84] C. Ruyer-Quil, *Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné*, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, 1999.
- [85] C. Ruyer-Quil and P. Manneville, *Modeling film flows down inclined planes*, *Europhys. Lett* **6** (1998), 277–292.
- [86] ———, *Improved modeling of film flows down inclined planes*, *European Physical Journal* **15** (2000), 357–369.
- [87] C. Ruyer-Quil, P. Treveleyan, F. Giorgiutti-Dauphiné, C. Duprat, and S. Kalliadasis, *Film flows down fibers*, *J. Fluid Mech.* **603** (2008), 431–462.
- [88] ———, *Film flows down a fiber : Modeling and influence of streamwise viscous diffusion*, *Eur. Phys. J. Special Topics* **166** (2009), 89–92.
- [89] S. Saprykin, E. A. Demekhin, and S. Kalliadasis, *Two-dimensional wave dynamics in thin films. i. stationary solitary pulses*, *Phys. Fluids* **17** (2005).
- [90] F. Savart, *Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi.*, *Ann. Chim* **53** (1833), 337.

- [91] G. I. Shivashinsky, *Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames.i. derivation of basic equations*, Acta Astronomica **4** (1977), 1177.
- [92] V. Ya. Shkadov, *Solitary waves in a layer of viscous liquid*, Izv. Ak. Nauk. SSSR, Mekh. Zhid Gaza **1** (1977), 63–66.
- [93] F. J. Solorio and M. Sen, *Linear stability of a cylindrical falling film*, J. Fluid Mech. **183** (1987), 365–377.
- [94] O. Takeshi, *Surface equation of falling film flows with moderate reynolds number and large but finite weber number*, Phys. Fluids **11** (1999), 3247.
- [95] J.A. Tallmadge, R.A. Labine, and B.H. Wood, *Films adhering to large wires upon withdrawal from liquid baths*, Ind. Eng. Chem. Fundamen. **4** (1965), 400–407.
- [96] J.A. Tallmadge and D.A. White, *Film properties and design procedures in cylinder withdrawal*, Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. **7** (1968), 503–508.
- [97] S. Taneda, *Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low reynolds numbers*, J. Phys. Soc. Jpn. **11** (1956), 302–307.
- [98] J. Tihon, K. Serifi, K. Argyriadi, and V. Bontozoglou, *Solitary waves on inclined films : their characteristics and the effects on wall shear stress*, Exp. Fluids **41** (2006), 79.
- [99] Yu. Ya. Trifonov, *Steady-state traveling waves on the surface of a viscous liquid film falling down on vertical wires and tubes*, AIChE J. **38** (1992), 821–834.
- [100] A. Tsameret and V. Steinberg, *Absolute and convective instabilities and noise-sustained structures in the couette-taylor system with an axial flow*, Phys. Rev. E **49** (1994), 1291–1308.
- [101] D. Tseluiko, S. Saprykin, C. Duprat, F. Giorgiutti-Dauphiné, and S. Kalliadasis, *Solitary pulse interaction theory for the generalized kuramoto–sivashinsky equation*, soumis.
- [102] I. Vihinen, A.M. Honohan, and S.P. Lin, *Image of absolute instability in a liquid jet*, Phys. Fluids **9** (1997), 3117–3119.
- [103] G. A. Voth, B. Bigger, M. R. Buckley, W. Losert, M. P. Brenner, H. A. Stone, and J. P. Gollub, *Ordered clusters and dynamical states of particles in a vibrated fluid*, Phys. Rev. Letters **88** (2002), 234301.
- [104] D.A. White and J.A. Tallmadge, *A theory of withdrawal of cylinders from liquid baths*, A.I.Ch.E J. **12** (1966), 333.
- [105] C. S. Yih, *Stability of liquid flow down an inclined plane*, Phys. Fluids **6** (1963), 321–334.
- [106] P. N. Yoshimura, T. Nosoko, and T. Nagata, *Enhancement of mass transfer into a falling laminar liquid film by two dimensional surface waves : some experimental observations and modeling*, Chem. Eng. Sci. **51** (1996), 1231.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de l'instabilité d'un film liquide visqueux en écoulement sur une fibre verticale. Nous explorons expérimentalement les différents régimes dynamiques issus des effets combinés de la viscosité, de la tension de surface et de l'inertie du fluide. Nous démontrons l'existence de deux dynamiques différentes, correspondant à une instabilité absolue ou convective, résultant de la compétition entre l'écoulement induit par la gravité et la croissance de l'instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau. Nous obtenons théoriquement un critère pour décrire cette transition. Dans le cas convectif, le système se comporte comme un amplificateur de bruit et nous étudions alors la réponse spatiale sélective du film à un forçage périodique. La déstabilisation de l'écoulement s'accompagne de la création d'ondes non-linéaires propagatives caractérisées expérimentalement et numériquement à partir d'un modèle faiblement non-linéaire formulé dans le cadre de la théorie de la lubrification. Lorsque les effets visqueux et capillaires sont du même ordre, les ondes sont localisées et adoptent une forme particulière qui induit des interactions complexes entre structures ; ces interactions à la fois attractives et répulsives conduisent à la formation d'états liés. Finalement, nous étudions les régimes dominés par la tension de surface et notamment le changement de dynamique lié à l'apparition d'une zone de recirculation dans les gouttes.

Abstract

We consider the instability of a viscous liquid film flowing down a vertical fibre. We explore experimentally the various dynamical regimes arising from the interplay of viscosity, surface tension and inertia. We demonstrate the existence of two different dynamics, the instability being either absolute or convective due to the competition between the capillary Rayleigh-Plateau instability and the advection of the waves by the gravity-induced flow. We obtain a theoretical criterion describing this transition. When the instability is convective, the system behaves as a noise amplifier. We then study the selective spatial response of the film to periodic perturbations at inlet. The destabilisation of the flow leads to the creation of non-linear travelling waves. Those waves are characterised both experimentally and numerically from a non-linear model based on lubrication theory. When viscous and surface tension effects are of the same order, the waves are localised ; their particular shape gives rise to attractive or repulsive interactions leading to the formation of bound states. Finally, we focus on the surface tension dominated regime and study the change of dynamics related to the development of recirculation zones in the drops.