HAL
open science

Contributions à l'identification et à la modélisation des solides anélastiques

Marc Louis Maurice François

To cite this version:

Marc Louis Maurice François. Contributions à l'identification et à la modélisation des solides anélastiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. tel-00435576

HAL Id: tel-00435576

https://theses.hal.science/tel-00435576v1

Submitted on 24 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LMT-Cachan
61, avenue du Président Wilson
F-94235 CACHAN CEDEX

Université P. et M. Curie
4 place Jussieu
75005 Paris

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches
de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité :
Mécanique - Génie Mécanique - Génie Civil

Contributions à l'identification et à la modélisation des solides anélastiques

Marc FRANÇOIS

Présentée au LMT-Cachan le 7 décembre 2006
devant le jury composé de :

André Dragon	(Président)
Didier Baptiste	(Rapporteur)
Djimedo Kondo	(Rapporteur)
Christian Lexcellent	(Rapporteur)
Pierre Gilormini	(Examinateur)
Yves Berthaud	(Examinateur)

Résumé

Cette contribution au domaine de la mécanique des matériaux est relative aux comportements non linéaires, dissipatifs et anisotropes. L'élasticité anisotrope est mesurée, et analysée, sur différent matériaux dont certains sont pulvérulents. En mécanique de l'endommagement, le premier modèle est micro et décrit un réseau de fissures rugueuses et frottantes. Le second est macro et utilise un potentiel non convexe afin de représenter le comportement des matériaux quasi-fragiles, notamment aux états ultimes. Les travaux en plasticité concernent l'effet de distorsion des surfaces de charge tant au niveau théorique qu'expérimental avec la mise au point d'une nouvelle éprouvette bidimensionnelle. Le domaine de la viscoélasticité anisotrope est abordé du point de vue expérimental par la réalisation d'une machine d'essais pour les bois de lutherie et les composites. Enfin la dernière partie décrit un logiciel d'intégration des lois de comportements qui permet au chercheur de visualiser rapidement, et dans différentes bases tensorielles, la réponse d'un modèle à variables internes.

Abstract

This contribution to the Mechanic of Materials concerns the non-linear, anisotropic and dissipative phenomena. Elastic anisotropy is measured, and analyzed, on various materials ; some of them are in a powder form. In the field of damage mechanics, two models for quasi-brittle materials are presented. First model constitutes a micro-mechanical approach of a network of rough sliding cracks. The second is macroscopic and introduces a non convex free energy, that allow to describe post-pic behavior of quasi brittle materials. A model and an experimental device are relevant of the yield surface distortion phenomenon in plasticity. A new testing device for the measurement of wood and composite anisotropic viscoelasticity is presented. A numerical integration software has been developed in order to allow the researcher to quickly visualize, in different tensorial basis, the response of an internal variable model.

Remerciements

Je remercie les membres du jury pour leur lecture avisée de ce document.

Je tiens à remercier Giuseppe Geymonat, Jean Lemaitre et Yves Berthaud pour leur aide durant toutes ces années de travail et pour la culture qu'ils m'ont apporté.

Je remercie l'ensemble des membres du LMT-Cachan pour leur amitié et leur dynamisme.

J'adresse mes remerciements aux collègues des autres laboratoires avec qui j'ai eu le plaisir de travailler, notamment ceux du Laboratoire d'Acoustique Musicale, du Laboratoire de la Cité de la Musique et du Laboratoire d'Imagerie Paramétrique.

Un remerciement tout particulier à Gianni Royer-Carfagni, de l'Université de Parme, avec qui d'autres recherches seront bientôt menées.

Mille remerciements à ma femme et à ma famille pour leur soutien moral depuis mon changement de carrière.

Avant propos

Comment rendre cet exercice qu'est le mémoire de thèse d'habilitation un tant soit peu digeste et agréable ? Deux méthodes sont couramment utilisées : la première consiste à collecter ses publications et à les introduire avec un bref descriptif. La seconde consiste à la rédaction d'un document auto-suffisant. J'ai pris une solution intermédiaire : prendre du recul par rapport aux publications (jointes) auxquelles le lecteur devra se référer pour une compréhension complète.

Le document justifie les actions de recherche en rappelant le contexte. Dans le cas de projets, comme le projet Piano, les travaux des autres chercheurs sont résumés.

Les idées principales des publications sont rappelées, présentées sous des angles différents.

Quelques travaux sont présentés pour la première fois. Dans le cas du modèle à fissures rugueuses, un développement ultérieur est proposé. Diverses actions en collaboration, comme la plasticité expérimentale (chapitre 5.3), certaines mesures ultrasonores (chapitre 2.5) trouvent ici leur première diffusion.

Les conclusions et perspectives des travaux anciens sont reprises à la lumière des éléments nouveaux.

Enfin, si la diversité des thématiques abordées peut surprendre (du bois de lutherie à l'acier de pipe-line...) ; la cohérence entre ces travaux réside dans le type d'approche utilisé (les bases tensorielles, la thermodynamique des processus irréversible...).

Table des matières

Résumé **3**

Abstract **5**

Remerciements **7**

Avant propos **9**

Table des matières **i**

Introduction **1**

1 Mesure de l'élasticité anisotrope par méthode ultrasonore **5**
1 Principe de la mesure (rappels) 6
2 Identification des groupes de symétries proches (rappels et compléments) 7
2.1 Tenseur symétrique obtenu par une moyenne de l'orbite du tenseur sur le groupe de symétrie considéré 7
2.2 Détermination du tenseur symétrique le plus proche du tenseur mesuré 9
3 Le logiciel SYMETRIC 9
4 Applications de ces travaux à différents matériaux 10
4.1 Superalliage à base de nickel 10
4.2 Marbre de Carrare 10
4.3 Bois de lutherie 12
4.4 Bois de lutherie et hygrométrie 13
4.5 Os 14
5 Mesure ultrasonore de matériaux pulvérulents (rouilles) 15
5.1 Palais des Papes 15
5.2 Mesure de la rouille des armature des pylônes EDF 16
6 Essai mécanique sur barres corrodées 17

2 Endommagement de matériaux quasi-fragiles **21**
1 Modèle microscopique de fissures rugueuses frottantes 22
1.1 Contexte de l'étude 22

1.2 Éléments clés de l'approche 23
1.3 Développement postérieur : initiation de la fissuration 25
1.4 Perspectives 29
2 Modèle macroscopique pour les bétons avec potentiel non convexe . . 29
2.1 Contexte de l'étude 29
2.2 L'anisotropie et la suite des travaux de thèse 30
2.3 Points clés de l'approche 33
2.4 Perspectives 52

3 Plasticité multiaxiale et distorsion des surfaces de charge 53
1 Modélisation de la distorsion des surfaces de charge 54
1.1 Contexte de l'étude 54
1.2 Bases de tenseurs et distorsion 54
1.3 État de l'art 55
1.4 Points clé du modèle 56
2 Implémentation numérique du modèle 57
2.1 Contexte 57
2.2 Description 57
2.3 Enseignements relatifs à la confrontation du modèle aux expériences 57
3 Mesure de la distorsion des surfaces de charge 59
3.1 Contexte 59
3.2 Petit état de l'art sur les réalisations technologiques des essais biaxiaux 60
3.3 Nouvelle éprouvette biaxiale 63
3.4 Le montage 65

4 Viscoélasticité anisotrope des bois de lutherie 71
1 Contexte 72
1.1 Description du BQR «Piano» 72
1.2 Synthèse des résultats obtenus par l'équipe 75
2 L'appareil de mesure développé 79
2.1 Descripteur de la viscoélasticité 79
2.2 L'état de l'art 80
2.3 Cachier des charges, principe de fonctionnement et calculs de dimensionnement 83
2.4 Premiers essais et résultats 87
2.5 Stage d'Iris Brémaud 90
2.6 Post-Doctorat de Sandie Le Conte 93
2.7 Perspectives 95
3 Orniérage des chaussées 96
3.1 Contexte 96
3.2 Thèse de doctorat de Delphine Cuisinier 97

5 Intégration des lois de comportement 99
1 Présentation 100
1.1 Qu'est ce que «MatSGen» ? 100
1.2 Forme du modèle, variables et fonction 100
2 Routines d'intégration 101
2.1 Routine *stress* de pilotage en contrainte 101
2.2 Routine *strain* de pilotage en déformation 103
2.3 Routine *mixte* de pilotage en partie en contrainte et en partie orthogonale en déformation 104
2.4 Modèle de type endommagement 106
2.5 Compléments et limitations 106
2.6 Exemple : l'écrouissage cinématique non linéaire 107
3 Sorties graphiques dans *Graphiques* 110
3.1 Le pilotage 110
3.2 Gestion des bases de représentation 110
3.3 Types de représentation proposés 111
3.4 Surfaces seuil 115
4 Identification 115

Conclusion 119

Bibliographie 121

Introduction

Le comportement anélastique des solides recouvre diverses classes dont l'endommagement, la viscosité et la plasticité qui ont en commun de considérer le solide homogène à une certaine échelle. Les modèles macroscopiques furent développés dès les années 80 (Lemaitre 1996, Marigo 1981). L'endommagement, la plasticité, ou un mélange des deux, est décrit par des variables internes, scalaires ou tensorielles, qui conditionnent l'énergie libre du matériau. Dans le formalisme des matériaux standard généralisés (Halphen & Nguyen 1975) l'évolution de ces variables internes est déterminée à partir d'une loi de normalité généralisée relative au pseudo-potentiel de dissipation et à l'existence d'une surface seuil. Ce formalisme permet d'une part de respecter le second principe de la thermodynamique, et d'autre part une grande stabilité numérique des modèles (Benallal, Billardon & Doghri 1988). Ces modèles ont connu diverses évolutions jusqu'aux années 90 (Ladevèze 1983, Chaboche 1992, Florez-Lopez, Benallal, Geymonat & Billardon 1994) ou (Jefferson 2003) pour une bibliographie exhaustive. Afin d'être de plus en plus prédictifs, ces modèles ont perdu de leur pureté et de leur robustesse. Certains modèles de plasticité utilisent de nombreux écrouissages cinématiques et isotropes. Les modèles d'endommagement s'alourdissent de parties positives sur les tenseurs des contraintes ou d'élasticité, au risque de les rendre instables (Badel 2001).

En parallèle à ces approches, les modèles micromécaniques se sont développés. En plasticité sont apparus des modèles assurant un passage micro-macro par homogénéisation (Pilvin 1990, Fivel & Forest 2004). Pour l'endommagement, ils consistent, à la base, à homogénéiser le champ analytique obtenu pour la fissure *pennyshape* (Andrieux, Bamberger & Marigo 1986). Le développement de la puissance de calcul les a rendu de plus en plus performants et prédictifs (Burr, Hild & Leckie 1995, Vardoulakis, Labuz, Papamichos & Tronvoll 1998, Pensee & Kondo 2001, Pensee, Kondo & Dormieux 2002), en prenant notamment en compte le frottement entre les lèvres de fissures et l'interaction entre fissures (Fond, Fléjou & Berthaud 1995, Karapetian & Kachanov 1997). Une des limitations de ces modèles tient à la forme plane de la fissure élémentaire. Les matériaux quasi-fragiles (Bazant & Planas 1998) de type béton possèdent une structure interne granulaire qui engendre une rugosité de la fissure. Les roches, même en absence de grains, ont un faciès de rupture rugueux et fractal (Schmittbuhl, Roux & Berthaud 1994). Cette rugosité entraîne un effet d'ouverture induite de la fissure et une possibilité de «mauvaise» refermeture par un

décalage de «dents». Cette dernière ne peut être décrite par les modèles classiques et est responsable de l'effet de «plasticité» observé sur les bétons. Le modèle micromécanique présenté (François & Royer-Carfagni 2003) propose une formulation associée permettant de décrire le cas des fissures rugueuses.

On peut établir une troisième classe de modèles, ceux qui utilisent les outils d'analyse tensorielle. La décomposition du tenseur d'élasticité (Onat 1984, Bohler, Kirillov & Onat 1994) peut en effet être utilisée pour décrire l'endommagement anisotrope (Halm & Dragon 1998, Welemane & Cormery 2002), la décomposition imposant en quelque sorte la direction tensorielle de l'endommagement, à la manière d'un tenseur de structure. Quelques modèles d'endommagement (François 1995, Schreyer 1995) utilisent la décomposition de Kelvin (Rychlewski 1984) qui représente d'une certaine façon la diagonalisation du tenseur d'élasticité. Elle ne peut constituer à elle seule un modèle mais tout modèle écrit sous ce formalisme présente l'avantage d'être indépendant du choix de l'écriture en contrainte ou en déformation.

L'approche de Kelvin est liée à l'utilisation de bases tensorielles. Celles-ci permettent,en simplifiant, de passer de l'espace des tenseurs du second ordre à trois dimensions à l'espace des tenseurs du premier ordre (vecteurs), à six dimensions (Apel 2004). Les outils de géométrie élémentaire (projection, norme) sont alors utilisables très simplement et mathématiquement définis. Le modèle à distorsion des surfaces de charge présenté ici (François 2001) fait usage de cette géométrie.

Les modèles d'endommagement actuels possèdent deux autres limitations. La première concerne la description des états ultimes, où le matériau est proche d'un matériau pulvérulent. Des mesures ultrasonores (Ouglova, Berthaud, François & Foct 2006, Ouglova, Berthaud, Foct, François, Ragueneau & Petre-Lazar 2007) montrent que l'élasticité est alors affectée par la compaction. La seconde limitation concerne le comportement adoucissant en post-pic, après que le critère de localisation (Rudnicki & Rice 1975) est atteint. Celui-ci entraîne une dépendance au maillage connue depuis une vingtaine d'années. De très nombreux travaux ont pour objet de régulariser le problème. Différentes méthodes cohabitent aujourd'hui : la prise en compte des effets non locaux (voir (Pijaudier-Cabot 2000) pour l'endommagement ou (Jirásek & Rolshoven 2003) pour la plasticité) et l'utilisation de milieux plus riches (de Cosserat, au second gradient...) (Forest & Sievert 2003). La dépendance de l'élasticité au confinement m'a amené à proposer (François n.d.) une énergie libre d'Helmoltz non convexe, avec un couplage entre les modes hydrostatiques et déviatoriques (modes propres au sens de Kelvin). La non convexité entraîne des états de mélange (Eriksen 1975) qui ont été assimilés ici au phénomène de localisation.

Les essais mécaniques, nécessaires à la compréhension des mécanismes physiques et à leur quantification, entrent dans une nouvelle période. Longtemps cantonnés à la mesure des déformations locales, les mesures de champ (Hild 2002) et les mesures thermiques (Chrisochoos & Louche 1998) se généralisent. Les moyens d'essais doivent

s'adapter : les effets dissipatifs du matériau ne doivent pas être confondus avec ceux du montage. Dans cet esprit ont été conçus une nouvelle éprouvette biaxiale (François 2005) et un montage de mesures viscoélastique (Besnainou & François 2004). Dans les deux cas, le système présente des libertés suffisantes pour ne pas pré-contraindre l'éprouvette en phase de montage et devient très rigide (et non visqueux) en phase de fonctionnement. On peut simplifier en parlant de chasse aux dissipations parasites.

Chapitre 1

Mesure de l'élasticité anisotrope par méthode ultrasonore

Ces travaux complètent ceux de ma thèse de doctorat. La partie théorique de la mesure du tenseur d'élasticité par méthode ultrasonore est reprise, sous une forme plus complète et plus claire. La mesure de la qualité d'un bois de lutherie en fonction de sa teneur en eau constitue une application et un développement de ces méthodes. De même, ce type de mesures ultrasonores a permis d'évaluer l'élasticité d'un monocristal de superalliage à base de nickel, de rouilles, de matériaux en poudre agglomérée, dont la mesure classique est fort délicate. Une de ces études, celle sur la corrosion de pylônes EDF, a donné lieu à la mise au point d'un essai quelque peu différent de celui de pull-out *classiquement pratiqué dans ce domaine.*

1 Principe de la mesure (rappels)

Pour ce chapitre, ainsi que pour le suivant, le lecteur pourra se référer à (François, Geymonat & Berthaud 1998) (jointe). Dans ma thèse de doctorat (François 1995) était présentée une méthode de mesure ultrasonore du tenseur d'élasticité anisotrope dans le cas, assez rare dans la pratique, où l'on n'a aucune information sur les directions de symétrie matérielle du matériau. Quelques applications seront montrées dans le prochain chapitre. Il s'agit de minimiser l'écart entre deux expressions du tenseur acoustique (de Christoffel) (Dieulesaint & Royer 1974) : la première est relative aux directions de propagation des ondes $\vec{n}$ et au tenseur d'élasticité $\mathbb{C}$, et la seconde aux célérités V_i et aux directions de vibrations $\vec{u}_i$ *via* la masse volumique ρ. L'indice i est alors relatif aux directions de polarisation qui forment une base orthogonale.

$$\mathbf{\Gamma} = \vec{n}.\mathbb{C}.\vec{n} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{i=1}^{3} \rho V_i^2 \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i \tag{1.2}$$

Les constantes sont la masse volumique ρ et les directions de propagation (imposées par le montage) $\vec{n}$. Les mesures sont les trois célérités V_i et les projections des directions de vibration quasi-transverses $(\vec{n}_2, \vec{n}_3)$ sur le plan de mesure $\vec{n}^{\perp}$ (les polarisations), soit cinq mesures par essai. Les inconnues sont les 21 constantes d'élasticité du tenseur $\mathbb{C}$. Il faut donc au minimum cinq essais, c'est à dire cinq direction de propagation indépendantes pour identifier toutes les constantes d'élasticité. Dans de nombreux cas, une vitesse d'énergie est trop éloignée de la direction de propagation : une des mesures est impossible et le nombre de direction de propagation doit être augmenté. L'éprouvette (figure 1.1) est conçue pour présenter 13 directions de propagation assez régulièrement espacées mais n'est pas un polyhèdre régulier afin de simplifier l'usinage. Le calcul du tenseur d'élasticité est fait réalisé en minimisant

Fig. 1.1: éprouvette à 13 faces

l'écart entre les deux expressions du tenseur de Christoffel. Deux étapes sont utilisées itérativement, une où l'on recherche les constantes d'élasticité (calcul linéaire)

et une où l'on recherche les angles de déflexion (entre les directions de vibration et le plan $\vec{n}^{\perp}$) qui est un calcul non linéaire. Une liberté est laissée aux angles de polarisation autour de la valeur mesurée et le cas des mesures incomplètes (une mesure sur les trois est manquante) est géré.

2 Identification des groupes de symétries proches (rappels et compléments)

Pour ce chapitre, le lecteur pourra se référer à (François et al. 1998) (jointe).

2.1 Tenseur symétrique obtenu par une moyenne de l'orbite du tenseur sur le groupe de symétrie considéré

Le tenseur d'élasticité, du quatrième ordre et possédant les petites et grandes symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \tag{1.3}$$
$$= C_{klij} \tag{1.4}$$

peut appartenir à huit groupes de symétries distincts. Ce résultat est relativement récent (Forte & Vianello 1996). Les groupes de symétrie sont ordonnés et la figure (1.2) les illustre en représentant les plans de symétrie de ces groupes. Cette figure est issue du cours sur l'élasticité anisotrope distribué aux étudiants de Master 2 MIS (François 2004a). Un tenseur d'élasticité $\mathbb{C}_0$ mesuré par la méthode ultrasonore

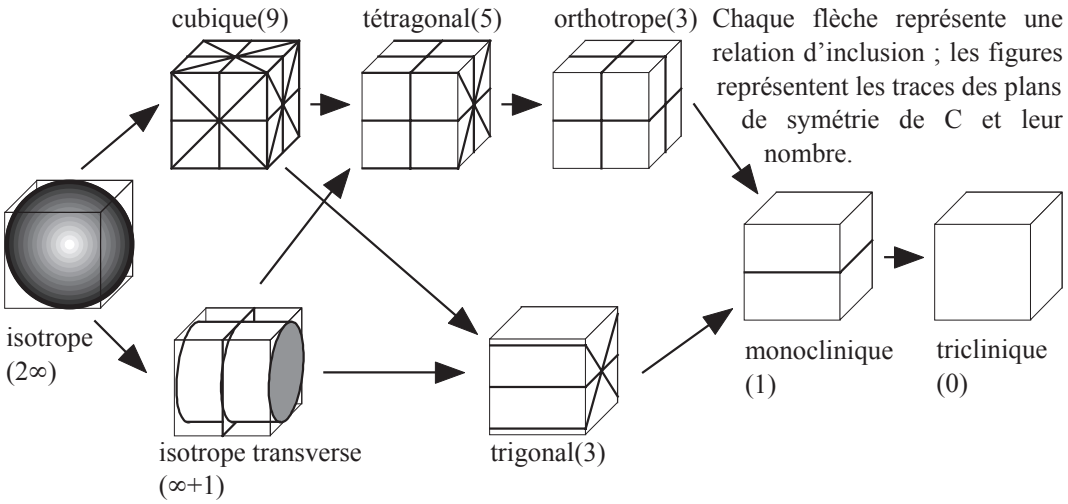


Fig. 1.2: Arbre des groupes de symétrie des tenseurs d'élasticité

ci-dessus ou par une autre méthode se représente par une matrice 6x6 symétrique

une fois exprimé en écriture de Voigt ou projeté dans une base de tenseurs. La base dans laquelle il est écrit est, en général, la base associée à l'éprouvette $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ choisie *a priori* arbitrairement par rapport aux directions de symétrie du matériau. Au cours de ma thèse, une méthode a été développée afin d'identifier le groupe de symétrie «le plus proche» pour $\mathbb{C}_0$. Bruité par les mesures, celui-ci ne respecte en général jamais exactement les relations d'invariance imposées par un groupe de symétrie. Celles-ci s'écrivent sous deux formes : dans la forme classique (1.5), on exprime que si la transformation orthogonale $\mathcal{O}$ peut être appliquée indifféremment sur la déformation ou sur la contrainte, alors $\mathcal{O}$ appartient au groupe de symétrie $\mathcal{G}(\mathbb{C})$. On peut dire que la rotation ou non du tenseur d'élasticité n'affecte pas le résultat.

$$\mathcal{O} \in \mathcal{G}(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \forall \boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{O}(\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{C} : \mathcal{O}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{1.5}$$

Cette formulation permet de n'appliquer $\mathcal{O}$ que sur un tenseur du second ordre, ce qui est aisé, mais ne permet pas de calculer $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Pour cela, il faut utiliser la relation issue de l'écriture en base canonique $\mathbb{C} = C_{ijkl}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$ suivante (Zaoui, François & Pineau 1991) :

$$O(C)_{ijkl} = A_{ip}A_{jq}A_{kr}A_{ls}C_{pqrs} \tag{1.6}$$

Dans la pratique les matrices de Bond (Auld 1973), permettent un calcul plus rapide. Depuis $\mathbb{C}_0$, un tenseur d'élasticité cubique $\mathbb{C}_S$ est obtenu en moyennant les transformées $\mathbb{C}_{\prime}$ pour toutes les transformations $\mathcal{O}$ composant le groupe générateur du groupe de symétrie considéré. Par exemple, si 'on considère un tenseur d'élasticité $\mathbb{C}_0$ moyenné avec son symétrique par rapport à un plan (soit $[\mathbb{C}_0 + \mathcal{S}_{\vec{n}}(\mathbb{C}_0)]/2$), cet objet est par nature invariant par rapport à cette symétrie plane $\mathcal{S}_{\vec{n}}$; il est monoclinique (ce calcul se mène aisément à la main). Pour un groupe de symétrie plus élevé, l'opération reste similaire en effectuant la moyenne du tenseur et de ses transformées par toutes les transformations orthogonales du groupe de symétrie. L'ensemble de ces transformées se nomme l'orbite du tenseur sur le groupe de symétrie considéré. En fait, il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes ces transformations car, en vertu d'une extension du théorème de Hermann (Wadhawan 1987, Forte & Vianello 1996), un sous groupe (du groupe de symétrie) générateur suffit pour que que le tenseur respecte le groupe de symétrie voulu. Cet aspect est bien connu (Zaoui et al. 1991) dans le cas de la symétrie orthotrope : imposer deux plans de symétrie orthogonaux suffit pour obtenir un tenseur orthotrope (on n'a pas besoin d'imposer le troisième plan de base comme plan de symétrie, il apparaît tout seul). Le théorème de Hermann peut alors se comprendre sous la forme suivante : ne pouvant (par sa structure) posséder la seule symétrie dihédrale, il prend le groupe de symétrie juste supérieur (possible pour lui) qui contient la symétrie dihédrale : on peut constater sur la figure (1.2) qu'il s'agit de la symétrie orthotrope. Les groupes générateurs n'ont pas été recherchés de façon rigoureuse mais par essai (et raisonnement sur la figure) et les transformations utilisées mixent des opérations de symétrie plane et de rotation.

À l'issue de ma thèse manquait le calcul de la symétrie isotrope (en fait, il est aisé de l'obtenir à l'aide des invariants C_{iikk} et C_{ikki}). Néanmoins, il fut trouvé

que le groupe générateur de l'icosahèdre (ou du dodécahèdre), appliqué au tenseur d'élasticité, donne un résultat isotrope ((François & Geymonat 1996), (François et al. 1998)). Toujours par le théorème de Hermann, on comprend que, ne pouvant respecter le seul groupe de symétrie de l'icosahèdre $\mathcal{I}$, le tenseur obtenu «saute» au groupe de symétrie qui le contient et c'est le groupe orthotrope.

2.2 Détermination du tenseur symétrique le plus proche du tenseur mesuré

Il reste à définir l'orientation du trièdre positionnant les opérateurs de symétrie. C'est à dire, pour la symétrie monoclinique, à positionner la normale $\vec{n}$ dans l'espace ; pour la symétrie orthotrope, à positionner le dihèdre dans l'espace. Le tenseur exactement symétrique $\mathbb{C}_S$ le plus proche de $\mathbb{C}_0$ sera alors celui pour qui la distance relative (en norme euclidienne naturelle) est la plus faible. Notons que le problème ne se pose pas dans le cas de l'isotropie. La minimisation de la distance par méthode numérique se heurte au problème des minimums locaux. Celui-ci aurait pu être géré par différentes méthodes mais, pour les distinguer et aider à la recherche du minimum absolu, j'avais créé un représentation graphique. Celle-ci consiste en des figures de pôles (projection stéréographiques) qui indiquent (par un niveau de gris) la distance entre le tenseur et son symétrique par rapport au plan de normale $\vec{n}$ considéré. Un noir indique une distance nulle, donc le tenseur $\mathbb{C}$ est monoclinique par rapport au plan de normale $\vec{n}$, un blanc indique qu'il est très éloigné de cette symétrie. La connaissance des plans de symétrie (figure 1.2) pour les huit groupes de symétrie possibles pour le tenseur d'élasticité permet alors d'identifier visuellement duquel on est proche et de se donner des conditions initiales pour lancer la recherche numérique du minimum absolu.

3 Le logiciel SYMETRIC

Le logiciel SYMETRIC est issu des lignes de codes utilisées au cours de la thèse. Ces actions sont :

- Entrée d'un tenseur d'élasticité $\mathbb{C}_0$ sous forme de matrice 6x6 (en base tensorielle)
- Représentation de la figure de pôles des symétries planes de $\mathbb{C}_0$
- Choix par l'utilisateur d'un groupe de symétrie à traiter
- Positionnement *a priori* du groupe de symétrie par rapport au repère initial (sous forme graphique sur la figure de pôle)
- Calcul du tenseur $\mathbb{C}_S$ par moyenne sur l'orbite du groupe de symétrie et recherche du positionnement donnant la distance minimale
- Représentation de la figure de pôles des symétries planes de $\mathbb{C}_S$
- Calcul des diverses constantes ingénieur $(E_{ii}, \nu_{ij}, K, \mu_{ij})$

Le logiciel SYMETRIC est disponible dans la banque de logiciels du LMT-Cachan et gratuitement disponible pour les institutions universitaires. Il est utilisé par le LIP (Laboratoire d'Imagerie Paramétrique de Paris 6) où Quentin Grimal l'utilise pour l'analyse des groupes de symétrie des os.

4 Applications de ces travaux à différents matériaux

4.1 Superalliage à base de nickel

Cette méthode de mesure a été appliquée sur un échantillon de superalliage à base de nickel (phase β seule) dans le cadre d'une collaboration avec Laurent Espié (Espié 1996, François et al. 1998). Ce dernier voulait vérifier que les modules d'élasticité trouvés par nano-indentation étaient cohérents avec d'autres méthodes. Le monocristal, faiblement anisotrope, a été usiné à la SNECMA. L'axe de l'éprouvette ne correspondait pas tout à fait à celui du monocristal. Le tenseur d'élasticité cubique le plus proche obtenu fut le suivant :

$$\mathbb{C}_{\text{cub}} = \begin{bmatrix} 264 & 183 & 183 & 0 & 0 & 0 \\ 183 & 264 & 183 & 0 & 0 & 0 \\ 183 & 183 & 2634 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 149 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 149 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 149 \end{bmatrix} \text{GPa} \tag{1.7}$$

Le premier résultat fut que avons pu vérifier la cohérence entre ces résultats et ceux de la nano-indentation. Le second, que nous avons retrouvé, avec cette méthode, sensiblement les mêmes orientations des axes de symétrie cubique que par la mesure de diffraction des rayons X.

4.2 Marbre de Carrare

Les blocs de marbre (quelque tonnes) sont taillées par des machines équipées de scies : la direction de coupe, horizontale et verticale, ne correspond pas avec les directions de symétrie naturelle du marbre. Il s'en suit des pertes, car les blocs se fissurent, et des problèmes de durabilité dans les ouvrages de Génie Civil revêtus de plaques de marbre (Arche de la Défense...). Celles-ci, taillées en dehors de leur directions de symétrie naturelle, se déforment sous l'action des conditions climatiques, provoquant l'arrachement et la chute des plaques de parement. Diverses études ont été menées à ce sujet (Royer-Carfagni 2000) mais peu portent sur l'anisotropie de ces plaques. L'objectif était d'équiper les machines de tailles de «détecteur de direction de symétries» afin de respecter celles-ci lors de la découpe. Notons que les méthodes d'abattage traditionnel, que pratiquaient les Romains, permettaient de respecter ces directions naturelles car la fissure initiée se propage dans la direction la plus faible

du matériau. Un échantillon a été fourni par Carrare et taillé par les «Compagnons du devoir» à la forme de l'éprouvette. A l'occasion d'un stage du DEA Mécanique et Matériaux (Védrines 1999), le tenseur d'élasticité suivant fut obtenu :

$$\mathbb{C}_0 = \begin{bmatrix} 86 & 29 & 31 & 1 & 2 & -2 \\ 29 & 66 & 23 & -1 & 1 & 4 \\ 32 & 23 & 67 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 21 & -3 & -0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 25 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & -0 & -3 & 23 \end{bmatrix} \text{GPa} \tag{1.8}$$

La figure de pôle obtenue est présentée figure (1.3). On y distingue les taches les plus sombres (a,b,c,d,e) où b et b' représentent en fait la même tache car la normale possède une symétrie centrale. Le plan de normale a est orthogonal aux quatre plans de normales b,c,d,e, à $\pi/4$ les uns des autres. La figure (1.2) nous indique qu'il s'agit de la symétrie tétragonale. Elle inclut la symétrie orthotrope avec ses trois plans de symétrie, par exemple a,b,d. Les taches f,g,h,i,j, plus claires, sont relatives à la symétrie cubique (qui est donc moins présente). Considérer b,g,a,f comme une bande discontinue revient à considérer la symétrie isotrope transverse d'axe d. Considérer la carte uniformément noire revient à considérer l'isotropie. Le groupe de symétrie

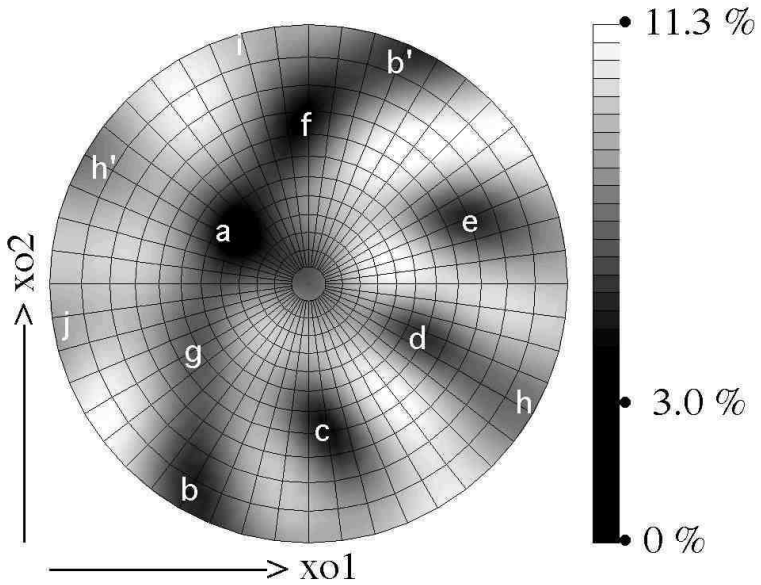


Fig. 1.3: Figure de pôle des symétries planes pour le marbre de Carrare

tétragonal s'est imposé comme groupe de symétrie «raisonnable» pour ce matériau. Avec 6 constantes indépendantes, il n'est distant du tenseur $\mathbb{C}_0$ ci-dessu que de 9%. Rappelons que l'ordre de l'arbre des symétries (figure 1.2) doit être le même que l'ordre de ces distance : on ne peut être plus près d'une symétrie plus riche que d'une

symétrie plus pauvre la contenant. Le tenseur tétragonal obtenu est :

$$\mathbb{C}_0 = \begin{bmatrix} 65 & 26 & 29 & -0 & 0 & -0 \\ 26 & 65 & 29 & 0 & -0 & 0 \\ 29 & 29 & 89 & -0 & -0 & -0 \\ -0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 & 22 & -0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 & -0 & 24 \end{bmatrix} \text{GPa} \tag{1.9}$$

Il n'est bien sûr pas exprimé dans le même repère que le précédent (le repère éprouvette), mais dans le repère «naturel» pour lequel la distance est minimale. Ces travaux sont à rapprocher de ceux dirigés par P. Rasolofolasaon de l'IFP (Arts 1993) qui menait des recherches similaires ; si les méthodes de mesures sont très similaires, le traitement des données (la résolution du problème inverse) est menée de manière sensiblement différente. J'ai pu vérifier que les mesures obtenues par l'IFP, traitées avec l'algorithme présenté dans ma thèse, ne donnait pas exactement les mêmes résultats. Dans le cas testé (grès des Vosges), la distance au groupe de symétrie orthotrope était plus faible avec la méthode présentée ici ; on peut y voir un indicateur de qualité.

4.3 Bois de lutherie

Le laboratoire de recherche et de restauration du musée de la Cité de la Musique [1] s'intéresse à la conservation du patrimoine. Une première étude fut menée en collaboration avec Laurent Espié qui était alors directeur du laboratoire ; elle s'intéressait aux coefficients de dilatation anisotropes comparés entre l'écaille de tortue et la corne de vache. L'écaille n'est plus autorisée et la restauration des décors anciens avec de la corne, ressemblante, pose des problèmes de dilatation relative. L'étude hydrothermique fut menée à l'aide de l'enceinte climatique du LMT-Cachan et du logiciel Correli2D (Hild 2002) du laboratoire.

La collaboration a continué ensuite avec une étude sur le bois de Pernambouc (Houssin 1999) où l'on a mesuré les constantes d'élasticité de ce bois très dense et très dur utilisé pour la confection des archets. L'objectif du travail était la validation d'une machine commerciale destinée à identifier la qualité du bois de lutherie par une mesure unique sur une baguette. L'étude n'a pas mis en évidence de corrélation forte entre les indications fournies et les valeurs des constantes d'élasticité obtenues. La méthode de mesure utilisée n'était pas la méthode générique décrite ci-dessus car, dans le cas d'un bois, il est simple d'identifier visuellement les axes de symétries orthotrope. Ensuite, une méthode de mesure classique sur cube permet de retrouver aisément le tenseur d'élasticité.

À l'issue de cette étude et afin d'assurer le suivi des connaissances au sein du laboratoire j'ai rédigé un document synthétisant les connaissances théoriques et pratiques nécessaires à la réalisation d'un essai ultrasonore (François 2000b).

[1] 221, avenue Jean Jaurès 75019 Paris

4.4 Bois de lutherie et hygrométrie

Pour ce chapitre, ainsi que pour le suivant, le lecteur pourra se référer à (François 2000c) (jointe) et (François 2000a). Cette action est relative à l'influence de l'hygrométrie sur la qualité du son d'un instrument de musique. L'humidité des mains, de la salle et de l'haleine des musiciens modifie la teneur en eau du bois. Sur des instruments de très haute qualité, tels les Stradivarius, la durée de jeu doit être limitée et les périodes de repos de l'instrument sont comptabilisées pour que l'hygrométrie demeure optimale (on craint aussi la création de moisissures, de champignons...). Les faits subjectifs sont que, si l'ambiance et trop humide, l'instrument ne sonne plus. Si elle est trop sèche, il sonne moins bien. Au début d'un concert les musiciens «chauffent» leurs instruments. Cette période est nécessaire pour réaliser l'équilibre hydro-thermique des instruments. Nous savons depuis peu qu'un autre effet, l'effet Sobue sur lequel nous reviendrons dans le chapitre 5, rentre aussi en ligne de compte.

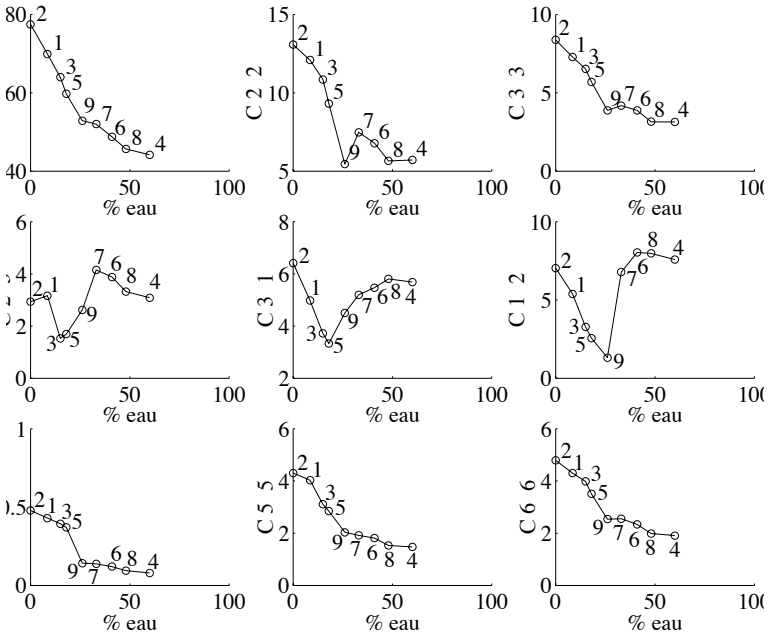


Fig. 1.4: Variation des C_{ij}/ρ^2 en fonction de la teneur en eau

Nous avons réalisé une campagne d'essai pour identifier et quantifier ces phénomènes (Choqueux 1999). Un morceau d'épicéa a été taillé sous forme d'éprouvette (pour la mesure en symétrie orthotrope) et soumis à des variations d'hygrométrie dans l'enceinte climatique du LMT-Cachan. Les mesures du tenseur d'élasticité ont été effectuées à divers niveaux d'hygrométrie. Puis nous avons comparé les évolutions des neuf constantes d'élasticité orthotrope avec les observations des musiciens. Une corrélation raisonnable, compte tenu de l'incertitude des mesures (nous n'avions pas le temps d'accéder à une hygrométrie constante dans la bois et une des dernières

dessications a endommagé le bois) a été trouvée sur les termes en C_{ij}/ρ^2 où ρ est la masse volumique (figure1.4). On retrouve le critère en E/ρ^2 comme critère de qualité des plaques vibrantes avec une analyse à la Ashby et Jones ((Barlow 1997), (Ashby 1992)).

Les termes en C_{ii} présentent sans surprise une décroissance continue avec l'augmentation de la teneur en eau. La surprise porte sur les termes en C_{ij} avec $j \neq i$ qui présentent une remontée pour les fortes teneurs en eau : D'un point de vue mécanique ces termes sont fortement liés au coefficient de Poisson ν et il est possible que l'eau, aux forte teneurs, remplisse les cavités disponibles et impose son «incompressibilité» à la structure (ν plus fort). Ces résultats ont étés communiqués à Voichita Bucur pour être introduit dans la deuxième édition de son ouvrage *Acoustic of Woods* (Bucur 2005).

4.5 Os

Cette action se situe dans le cadre des recherches du Laboratoire d'Imagerie Paramétrique de Paris 6 sur «l'imagerie et la caractérisation ultrasonore du système ostéoarticulaire (ostéoporose, arthrose, arthrite,...)». L'os malade (d'ostéoporose) présente une élasticité spécifique (de type E/ρ) plus faible que celle de l'os sain. La méthode de détection actuelle, par scintigraphie, ne détecte que la variation de densité ρ tandis que les utrasons mesurent naturellement ce rapport (équations 1.1 et 1.2). La difficulté de mesures *in vivo*, par la présence d'autres corps sur le passage de l'onde, limite encore l'utilisation de la mesure ulstrasonore à un stade expérimental.

	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}
Mesure (GPa)	**21.3**	**12**	**12.3**	**9.1**	**10.2**	**7**
Méth. Mécanique (Levy, Stern & Bass 2000)	22.7 *(-3%)*	10.3 *(8%)*	10.3 *(9%)*	3.57 *(44%)*	3.57 *(48%)*	
Méth. Ultrasonore (Levy et al. 2000)	21.9 *(-1%)*	11.6 *(2%)*	14.6 *(-9%)*	6.29 *(18%)*	6.99 *(19%)*	5.29 *(14%)*
	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}
Mesure	**0.56**	**0.25**	**0.56**	**0.32**	**0.14**	**0.58**
Méth. Mécanique (Levy et al. 2000)	0.36 *(22%)*	0.36 *(-18%)*	0.51 *(5%)*			0.51 *(8%)*
Méth. Ultrasonore (Levy et al. 2000)	0.21 *(45%)*	0.31 *(-11%)*	0.30 *(30%)*	0.11 *(49%)*	0.21 *(-20%)*	0.38 *(21%)*

Tab. 1.1: Constantes d'élasticité du fémur de bovin. *En italique : distance relative.*

Quentin Grimal et moi-même avons lancé dans le cadre d'un stage de DEA (Kabbaj & Rasoldier 2002) une campagne de mesures ultrasonores *in vitro* sur un fémur frais de bovin. Les mesures sont de type «classique», sur six directions de

mesures, la direction d'orthotropie de l'os étant connue. Les échantillons ont été préparés à l'ENS-Cachan sur fraiseuse et mesurés au LIP à l'aide de nos matériels joints (LMT et LIP). Les résultats obtenus, présentés dans la table (1.1) ci-dessous, sont en bon accord avec celles de la littérature.

Les distances aux symétries ont été calculées. Une voie envisagée pour la poursuite de cette étude est de tenir compte de l'axisymétrie de l'os ; une autre est de passer au *in vivo*, où les problèmes de saturation de fluide pourront se poser comme dans le cas du bois de lutherie.

5 Mesure ultrasonore de matériaux pulvérulents (rouilles)

5.1 Palais des Papes

Le Palais des Papes, en Avignon, est une construction du moyen âge en pierres calcaires assemblées (comme depuis l'antiquité) par des agrafes métalliques et renforcées par des barres d'acier qui présentent une corrosion inquiétante. Le CEA-Saclay participe à la conservation de cet ouvrage et Valérie l'Hostis m'a demandé de mesurer les caractéristiques métalliques d'un échantillon de rouille (François 2004b). Celui-ci possédait une structure extrêmement fragile, une dimension caractéristique d'environ 4 mm et une forme des plus irrégulières. Une simple mesure ultrasonore de célérité d'onde longitudinale a nécessité la préparation d'un échantillon dans une résine protectrice, un usinage de lamelle, la réalisation d'un collimateur et l'utilisation de mesures par immersion différentielles entre l'eau et l'échantillon.

Fig. 1.5: Échantillon de rouille du Palais des Papes enrobé avec son collimateur, en immersion

La valeur du module d'Young obtenue, d'environ 60 GPa, est considérablement élevée par rapport aux autres études sur la rouille (notamment celles que nous aborderons plus tard). L'explication provient de la structure feuilletée des fers du moyen-âge, obtenus par battage successifs, qui crée une rouille feuilletée qui contient encore beaucoup de fer : l'échantillon est attiré par un aimant. Ce mélange de rouille

et de fer feuilleté ne présente plus beaucoup de résistance au cisaillement. Néanmoins le module d'Young (en compression), même dans le sens orthogonal au feuillets, est élevé et donc le module de compressibilité aussi. Associé à l'augmentation de volume lors de la transformation de fer à rouille, ceci engendre de fortes pression au sein de la pierre environnante qui peut engendrer un éclatement de celle-ci.

5.2 Mesure de la rouille des armature des pylônes EDF

Pour ce chapitre, le lecteur pourra se référer à (Ouglova et al. 2006) (jointe). La thèse d'Anna Ouglova (Ouglova 2004), encadrée par Yves Berthaud et co-encadrée par Frédéric Ragueneau, est relative à la tenue en service des structures du génie civil lorsque les armatures sont corrodées. La question des caractéristiques mécaniques de la rouille se présentait alors, de façon quelque peu similaire à celle de l'étude du Palais des Papes. En effet, les produits de corrosion (il existe une quantité de variantes de rouilles : Fe_2O_3, Fe_3O_4...), ont un volume spécifique supérieur à celui de l'acier natif (donc une masse volumique moins importante). Cela provoque la dilatation du béton environnant, puis son éclatement (épaufrure). Une fois à l'air libre, la corrosion du fer s'emballe. Les dangers sont bien sûr structurels, mais aussi sécuritaires (chute de blocs de bétons) et esthétiques.

Fig. 1.6: Une épaufrure sur un pylône EDF

La simulation numérique du phénomène (Millard, Lancel, Beddiar, Berthaud, Caré & L'Hostis 2004) nécessitait les caractéristiques mécaniques de la rouille. Celle-ci, au contraire de la rouille des fers anciens du Palais des Papes, est totalement pulvérulente. La simulation numérique, pour donner des résultats cohérents avec l'expérience, devait utiliser un module de compressibilité proche de celui de l'eau (2,2 GPa). Or, la littérature indique pour les cristaux d'oxyde de fer, des modules de l'ordre de 300GPa. La différence de plusieurs ordres de grandeur est à attribuer à la structure pulvérulente : les contacts entre particules anguleuses sont, comme dans le cas d'un enrobé bitumineux que nous aborderons ensuite, générateurs d'une élasticité non linéaire et de modules élastiques très faibles pour de faibles charges. L'homogénéisation de type bornes d'Hashin-Strickman pratiquée par certains auteurs (Zohdi, Monteiro & Lamour 2002) fournit des bornes très espacées, car on se situe au niveau du «ventre» des fuseaux décrits par ces bornes (Zaoui et al. 1991), d'autant plus que les deux phases ont une très grande différence de module. D'autre

part les hypothèses relatives à ces bornes ne sont, selon moi, pas vraiment compatibles avec le contact entre particules.

Fig. 1.7: œdomètre et mesures ultrasonores

EDF nous a fourni quelques cm^3 de rouille lépidocrocite $\gamma FeO(OH)$ synthétisée en laboratoire (pas exactement la rouille naturelle qui contient aussi de la goethite et de la maghémite). Nous avons conçu un œdomètre (figure 1.7), un système piston-cylindre avec lequel une compaction a été réalisée sur machine d'essai. Outre la courbe effort-déplacement, nous avons, à chaque pas de l'essai, réalisé une mesure de célérité ultrasonore. Le traitement de ces données nécessite, bien sûr, de tenir compte des caractéristiques de l'acier de l'œdomètre. Le coefficient de Poisson, inaccessible par simple mesure de célérité longitudinale (les ondes de cisaillement ne passent pas dans ce matériau), a été estimé à 0,2, valeur usuelle pour les poudres ; dans la gamme 0...0,2, il n'affecte que très peu la mesure du module d'Young. Les modules d'Young obtenus sont présentés figure 1.8.

Afin de rapprocher ces modules très faibles de ceux des cristaux, nous avons fait un modèle d'empilement de sphères en contact hertzien. Un essai de validation a été pratiqué sur des particules d'alumine, calibrées, dont les propriétés mécaniques sont connues. Le module d'Young retrouvé pour les particules est du bon ordre de grandeur avec la littérature.

6 Essai mécanique sur barres corrodées

Pour ce chapitre, le lecteur pourra se référer à (Ouglova et al. 2007) (jointe). Toujours dans le cadre de la thèse d'Anna Ouglova, un essai d'arrachement a été conçu par Anna Ouglova, Yves Berthaud et moi-même. Celui-ci présente une géométrie permettant :

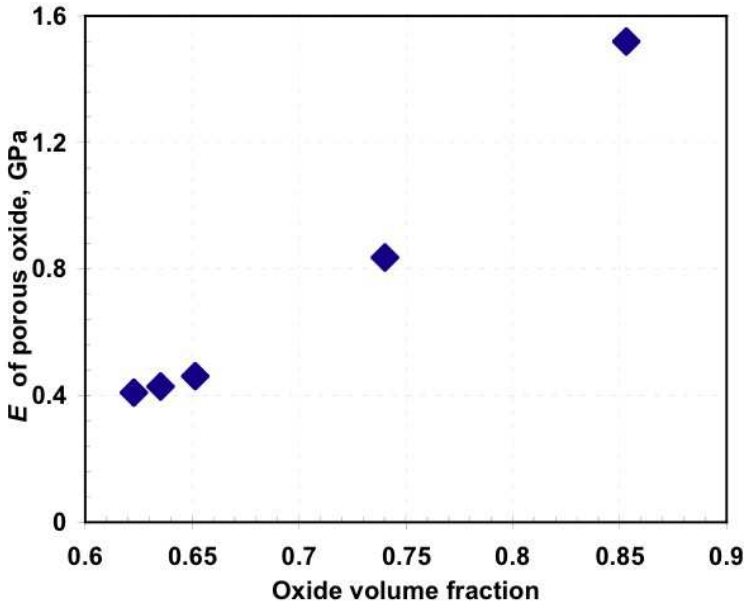


Fig. 1.8: Module d'Young de la lépidocrocite pulvérulente sous différents niveaux de compaction

- une expansion latérale possible d'où un confinement ne dépendant pas de l'arrachement, au contraire de l'essai de *pull-out* classique (Malvar 1992). Les derniers essais présentent la possibilité d'un réglage de la force de confinement à l'aide de tirants).
- une surface libre et plane permettant une mesure de champ par corrélation d'image (Hild, Raka, Baudequin, Roux & Cantalube 2002).
- des effets de bord supprimés par interposition d'un film plastique aux extrémités de la barre

La corrosion a été contrôlée et obtenue par méthode électrique (Beddiar 2002). Les courbes effort-déplacement montrent une mise en charge linéaire (élastique), puis un palier quasi-horizontal dès que la décohésion apparaît (confirmée par l'analyse d'image). L'adhérence peut, avec cet essai, être quantifiée de façon directe au contraire de la mesure par l'essai classique de *pull-out*. La force maximale décroît avec l'augmentation de la corrosion car l'interface de rouille, non confinée, ne présente qu'une faible résistance au cisaillement. Ces travaux ont depuis donné lieu à des compléments (influence des stries des fers à béton) auxquels je n'ai pas participé.

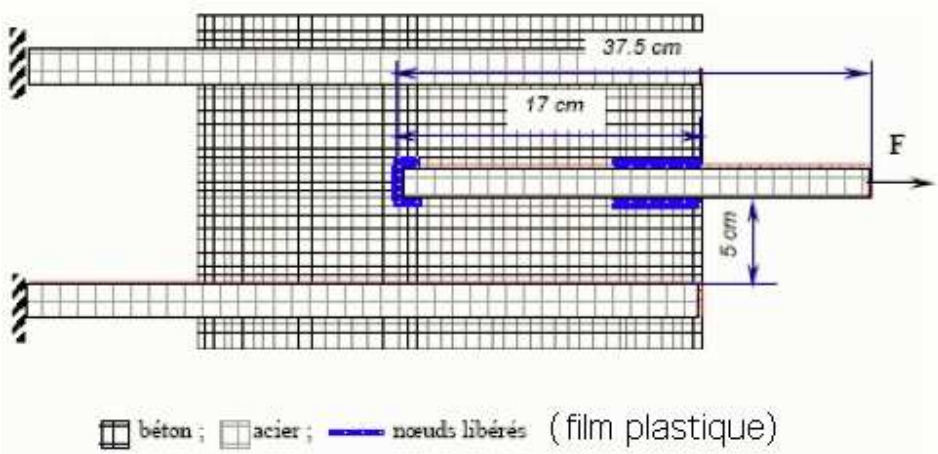


Fig. 1.9: Plan de l'éprouvette de l'essai d'arrachement sur barres corrodées.

Fig. 1.10: Essai d'arrachement sur barres corrodées.

Chapitre 2

Endommagement de matériaux quasi-fragiles

Cette partie est relative à la mécanique de l'endommagement des matériaux quasi-fragiles. Le premier modèle est micromécanique et s'intéresse aux fissures rugueuses et frottantes, la rugosité étant liée à la nature granulaire du matériau initial (béton ou roche). Le second modèle est macroscopique ; il introduit un terme de couplage entre déformations hydrostatiques et déviatoriques au niveau du potentiel d'état. Associé à une nouvelle surface de charge, il prévoit un état biphasé en post-pic qui donne une nouvelle interprétation de la dissipation associée aux boucles d'hystérésis.

1 Modèle microscopique de fissures rugueuses frottantes

Cette partie fait référence à la publication jointe (François & Royer_Carfagni 2005).

1.1 Contexte de l'étude

Le béton est constitué d'agrégats de différentes tailles, dont les plus petits sont les grains de sable (qui se retrouvent aussi dans le mortier) qui sont liés par de la pâte de ciment. Si, dans les bétons modernes, le liant est suffisamment résistant pour que les gros agrégats (pierre) soient rompus en sollicitation ultime, les grains de sable présentant que très peu de défauts (du fait de leur taille) ne le sont pas. La fissure, à l'échelle du Volume Élémentaire Représentatif, sera donc rugueuse. Cette

Fig. 2.1: Bâtiment fissuré par le séisme d'Izmit (Turquie, août 1999)

rugosité a plusieurs conséquences :

1. le glissement des lèvres de la fissure induit une ouverture de celle-ci
2. un confinement de la fissure assure le blocage de celle-ci, bien au delà de l'approche Coulombienne du frottement sur une fissure lisse, par un mécanisme proche de celui d'un engrenage.
3. l'ouverture n'est pas complètement réversible car des débris empêchent «le puzzle» de se rassembler parfaitement
4. sous une charge-décharge, la fissure peut se bloquer avec ses lèvres décalées par rapport à leur position d'origine, à la manière d'un engrenage qui aurait sauté une dent. Ce mécanisme pourrait, selon moi, être l'élément majeur du

phénomène toujours surprenant de la «plasticité» des bétons : bien qu'une déformation permanente soit observée, aucune plasticité au sens des métaux ne peut être observée dans un béton (hormis au jeune âge).

La connaissance de ces phénomènes est cruciale pour le dimensionnement des bâtiments exposés à un risque sismique, car la majorité de l'énergie (fournie par le séisme) est dissipée par le frottement des fissures. Celle-ci est en effet bien supérieure à l'énergie absorbée par l'endommagement ; preuve en est que les fissures apparaissent aux premiers instants des essais sur table vibrante. Une partie de l'énergie du séisme est absorbée par le sol mais nous ne nous y intéresserons pas.

La notion de matériau quasi-fragile est donnée par Bazant (Bazant & Planas 1998)). La modélisation de milieux fissurés par des fissures planes est obtenue soit par des approches de type mécanique de la rupture (Andrieux et al. 1986, Bazant 1988), soit par des approches de type analyse tensorielle et théorèmes de représentation (Onat 1984, Ladeveze 1993, Bohler et al. 1994, Halm & Dragon 1998) dont certains problèmes théoriques (Welemane & Cormery 2002) sont en passe d'être résolus, soit enfin par des approches de type homogénéisation (Eshelby 1959, Nemat-Nasser & Hori 1999) par ailleurs aussi utilisées dans les composites (Gillormini 1992, Keyvani, François & Baptiste 1992).

Même dans les implémentations les plus complètes de modèles de comportement des matériaux quasi-fragiles (Pensee & Kondo 2001, Pensee et al. 2002) (qui utilisent le premier type d'approche) ou encore par des approches performantes issues des modèles mciroplans (LaBorderie 2003) subsistent, à mon sens quelques lacunes : si le point 1) ci-dessus est bien décrit, le point 2) est décrit par un frottement de Coulomb qui exclut le blocage dû à la rugosité des fissures. De fait, le point 4) n'est pas, lui non plus décrit. Quand au point 3) je ne connais pas de modèle pour les matériaux quasi-fragiles qui en tienne compte. Au contraire, de nombreux modèles de tribologie modélisent les débris : il serait possible de les adapter.

1.2 Éléments clés de l'approche

Gianni Royer-Carfagni et moi-même avons travaillé ensemble sur une approche qui s'appuie sur (une partie de) la théorie des déformations structurées (Del_Piero & Owen 1993). Cette approche est en fait déjà présente ou sous-jacente dans de nombreux modèles micromécaniques.

La fissure rugueuse est décrite par son profil, qui est une courbe périodique et invariante par symétrie par rapport au plan moyen. Les cas des profils triangulaire et sinusoïdal sont abordés. Ce dernier peut permettre, par décomposition en série de Fourier, d'atteindre le cas de la fissure de forme quelconque périodique. Dans l'article l'approche est plane, mais toute l'écriture est tridimensionelle, c'est à dire que l'on a traité le cas de la fissure en forme de boite d'oeuf (ondulations identiques dans les deux sens) mais toujours plane ou, avec un peu de travail, en forme de tuile (ondulation dans un seul sens, théorie additionnée de frottement de Coulomb dans la direction perpendiculaire). L'ouverture de la fissure est donnée par une considération

géométrique, le contact s'établit en un point. La partie homogénéisation reprend les travaux existants (Del_Piero & Owen 1993) et permet de définir la déformation structurée $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{s}}$.

L'énergie libre de Helmoltz (équation 3.1 de l'article) représente classiquement l'énergie élastique stockée dans les parties saines du matériau. La contrainte, associée à la déformation, se trouve alors être naturellement obtenue par la loi d'élasticité du matériau vierge appliquée à la déformation élastique $\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{e}}$, avec $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{e}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{s}}$. La variable associée au glissement s des lèvres de la fissure est la force thermodynamique S, scalaire, qui représente la contribution de la contrainte au glissement des lèvres de la fissure (ce point n'est malheureusement pas bien illustré dans l'article). Pourtant, à partir de l'équation (3.5), et en se souvenant que $\boldsymbol{E}_{11} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$ et $\boldsymbol{E}_{12} = (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2)^s$, on accède à la représentation de la figure (2.2) exposée en colloque (François & Royer-Carfagni 2003) (dans laquelle $\boldsymbol{E}_{11} = \boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{E}_{12} = \boldsymbol{S}$, par changement de notation entre la publication et la conférence).

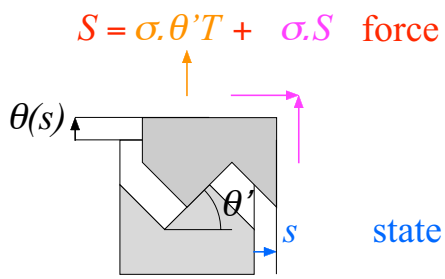


Fig. 2.2: Aspect physique de la force thermodynamique S

La surface de charge est décrite comme une limitation de la force thermodynamique $|S|$, avec un second membre composé d'une cohésion à la Barenblatt B et d'un terme associé au frottement de Coulomb (au niveau macroscopique) $-\varphi\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{E}_{11}$ (équation 3.6). Ce second membre représente les contributions opposées au glissement de la fissure. On montre dans l'article que la positivité de ce second membre équivaut à la positivité de la dissipation intrinsèque. Le modèle ne fonctionne bien sûr pas en cas d'ouverture des lèvres de la fissure (il peut être facilement complété dans ce cas). C'est un modèle associé, à une seule variable interne, ce qui garanti sa stabilité numérique.

Le reste de l'article est une application analytique au cas du cisaillement combiné avec une compression verticale, cas de l'essai pris comme référence (Mayes & Clough 1975). La surface de charge en $\sigma - \tau$ est à rapprocher de celle de Mohr-Coulomb, mais avec un sommet variable selon la valeur du glissement (figure 4.2). Une frontière apparaît naturellement entre les cas où $M < \varphi$ ou non (M représente la pente maximale de la fonction d'ouverture, apparaissant automatiquement au voisinage du glissement nul à n périodes près) ; elle sépare les cas des fissures rugueuses des fissures «collantes». Différents trajets de chargement cycliques sont décrits et on

se rend compte que l'essai de référence est assez bien décrit par la cas de fissures faiblement adhérentes mais rugueuses (figure (4.3.b)). Dans de nombreux cas, des problèmes d'instabilité ont dû être gérés.

1.3 Développement postérieur : initiation de la fissuration

Le modèle ne présente pas, dans sa version publiée, d'évolution de la densité de fissuration. J'avais rédigé le chapitre suivant (resté en anglais, avec mes excuses) dans lequel, partant d'un milieu vierge, la fissure d'orientation la plus défavorable allait se créer. C'est une vision, bien qu'exprimée en terme de forces (thermodynamiques) et non d'énergie, à rapprocher d'autres approches (Francfort & Marigo 1998) en mécanique de la rupture. Rappelons tout d'abord les équations génériques de l'article (la forme de la fissure est supposée ici sinusoidale) :

$$\theta(s) = A|\sin(\pi s/p)| \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} = \theta(s).\boldsymbol{T} + s.\boldsymbol{S} \tag{2.2}$$

$$\text{with } \boldsymbol{T} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \qquad \text{and } \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1) \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} \tag{2.4}$$

$$S = \boldsymbol{\sigma}.(\theta'\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}) \tag{2.5}$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, S) = |S| - (B - \varphi\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{T}) \tag{2.6}$$

$$\dot{D} = (B - \varphi\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{T})|\dot{s}| \tag{2.7}$$

We suppose a tension (or compression) test in the direction $\vec{e}_1$. Under the loading, a damage will occur and we call α_{t} (in the tension case) or α_{c} (in the compression case) the angle between the normal $\vec{n}$ (to the microcracks average plane) and $\vec{e}_1$, see figure(2.3) which defines as well the bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ and $(\vec{n},\vec{m})$. The angles α_{t},α_{c} are not defined in the virgin material. We shall define them as the ones for which the criterion $f = 0$ (eqn. 2.6) is reached for the lowest stress (in absolute value) σ_{t} (in the tension case) or σ_{c} (in the compression case). Then, a variable angle α is supposed until it's value α_{t} or α_{c} is defined. We suppose, without any restriction, that α belongs to the interval $[0, \pi/2]$, as the direction $\vec{e}_2$ can be chosen that way (see figure 2.3). The damage of the material is supposed induced by the micromechanical sliding s, reducing the value of the Barenblatt's cohesive term $B(s)$ from it's initial value B_0, at virgin state, to 0, when$s = p/2$ (the crack's lips are "head to head") with a simple linear relation. The stress to strain relationship in tension is deduced from the strain definitions (eqn. 2.2 and 2.4) and from the expressions of the structural tensors $\boldsymbol{T}$ and $\boldsymbol{S}$ (eqn. 2.3), in projection in the natural frame in tension $[\vec{e}_1,\vec{e}_2]$:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \theta(s)\cos^2(\alpha) + s\sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_2 = -\nu\frac{\sigma}{E} + \theta(s)\sin^2(\alpha) - s\sin(\alpha)\cos(\alpha), \tag{2.9}$$

where ε is the axial strain, ε_2 the lateral strain, E the Young modulus and ν the Poisson's ratio. From eqn. (2.3,2.5) we deduce the expression of the thermodynamical force S.

$$S = \sigma\cos^2(\alpha)(\tan(\alpha) + \theta') \tag{2.10}$$

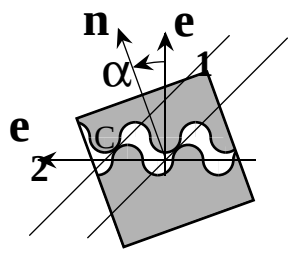


Fig. 2.3: RVE in tension/ compression

Let us consider the case of tension : $\sigma > 0$. The positiveness of the dissipation (eqn. 2.7) leads $\dot{s}$ to have the same sign than S, *i.e.* than $(\tan(\alpha) + \theta')$. We first analyse the case when the hypothesis $H1$ (eqn. 2.11) is fulfilled :

$$H1 \iff \tan(\alpha) + \theta' > 0, \tag{2.11}$$

leading to $\dot{s} \geq 0$. The expression of θ' implies that $\theta'(s = 0^+) = M$ (and θ' decreases after until $\theta'(p/2) = 0$). Then, when the criterion (eqn. 2.6) is fulfilled for the first time, from (eqn. 2.10), the stress can be expressed as :

$$\sigma = \frac{2B_0}{\sin(2\alpha) + (1 + \cos(2\alpha))(\varphi + M)} \tag{2.12}$$

The crack angle in tension α_t is determined as the one that minimizes the stress σ to it's value $sigma_t$. It is obtained from the maximum of the denominator in eqn. (2.12) and one can find :

$$\tan(2\alpha_t) = \frac{1}{\varphi + M} \tag{2.13}$$

As $(\varphi + M) > 0$, the value of α_t is obtained straightforward from the previous equation : α_t belongs to the interval $[0, \pi/4]$.

$$\alpha_t = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\varphi + M}\right) \tag{2.14}$$

It can be noticed that, when φ and M are close to 0, the crack angle α_t is set at 45 degrees, as for steels. On the contrary, if M is set to a large value as for material with very rough crack surface (as a Lego brick !), the crack angle is naturally close to 0. Once the crack angle α_t defined, the eqn. (2.12) gives the corresponding stress σ_t :

$$\sigma_t = \frac{2B_0}{\varphi + M + \sqrt{1 + (\varphi + M)^2}} \tag{2.15}$$

It can be verified easily (although it is already obvious from the positiveness of the dissipation) that the admissibility condition is fullfilled. Let us analyze briefly the case $\overline{H1}$ where the hypothesis $H1$ (eqn. 2.11) is not fulfilled. We have then $\dot{s} < 0$ and $\theta'(s = 0^+) = -M$. The calculation leads to replace in eqn. 2.12 the denominator by the term $-\sin(2\alpha) + (\varphi - M)(1 + \cos(2\alpha))$. The maximum of this denominator is either $(\varphi - M)$ or

0, each of these values leading to higher values for σ than the value obtained in eqn. 2.15. Once the first non elastic point reached for the stress σ_t, we suppose that the testing is continued, driven (in a theoretical point of view) by the monotonic increasing of the sliding s. As specified in the introduction of this chapter, we consider a simple damage mechanism in which the Barenblatt's cohesive term B decreases linearly respect to the maximum absolute value reached sliding s during the history of the material (eqn. 2.16). One can think about micro-scale bridging, where the bridges are fully broken when the crack's lips are "teeth to teeth", i.e. $s = p/2$. The loss of cohesion is the basic idea of the Damage Theory ; introducing it at the microscale level, respect to the active crack's orientation, naturally lead to an anisotropic damage theory containing unilateral effects. We have :

$$B(s) = B_0 \left(1 - \frac{2max_t(|s|)}{p}\right), \tag{2.16}$$

in which max_t denotes the maximum over the time history. The evolution of the stress σ is driven by the same set of equations than before, in which the opening function θ' replaces the value M which was it's first value $\theta'(0^+)$; the eqn. 2.12 becomes :

$$\sigma = \frac{2B(s)}{(\varphi + \theta') + \sqrt{1 + (\varphi + \theta')^2}} \tag{2.17}$$

Replacing the expression of $B(s)$ (eqn. 2.16) in the expression of σ (eqn. 2.17) lead to obtain a single values function $\sigma(s)$. The derivative of this function is given by :

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{2B'}{(\varphi + \theta') + \sqrt{1 + (\varphi + \theta')^2}} + \frac{2B\theta''((\varphi + \theta') + \sqrt{1 + (\varphi + \theta')^2})}{\sqrt{1 + (\varphi + \theta')^2)}\left((\varphi + \theta') + \sqrt{1 + (\varphi + \theta')^2}\right)^2} \tag{2.18}$$

as the function $x \to x + \sqrt{1 + x^2}$ has only positive images, the previous derivative is negative as B, B' and θ'' are both negatives in the considered case. Then, as the stress will only decrease under the value σ_t, no new crack system can be activated in monotonic tension. The evolution in the stress to strain space is obtained in varying s from 0 to $p/2$

B_0	A	p	φ	E	ν
100 MPa	4 10^{-4}	$0.5\pi A$	0.1	70 GPa	0.2

Tab. 2.1: material's constants

in eqn. (2.16, 2.17 and 2.8) for the axial strain or (2.16, 2.17 and 2.9) for the radial strain. The result is shown on the figure 2.4 in which the typical microcrack's profile is sketched. The linear transformation is elastic ; the sliding s is null, the material is at the virgin state.

At the peak, the microcracking occurs at the angle α_t (eqn. 2.14) which is found to be 12.7 degrees with the retained numerical values (table 2.1) ; that value can be measured by precise observations on crack surfaces but seems to be coherent with common experience as, in most common macroscopic models, the retained criterion of maximum strain correspond in this case to a 0 degrees angle. Moreover the crack's orientation remains, in our theory, undefined respect to any rotation around the tensile loading direction $\vec{n}$, as the direction $\vec{e}_2$

has been chosen along the crack's plane (see figure 2.3). That lead to consider a macroscopic fracture statistically orientated along 0 degrees, but, composed of a quantity of microcracks orientated respect to α_t.

After the peak, the material has non elastic and dissipative evolution, the sliding s increases from 0 to $p/2$. The axial strain evolution describes quite well the post-peak effect common for concrete-like materials.
The final state is obtained for $s = p/2$ then $B = 0$ and $\sigma = 0$; it corresponds to the complete damage for the considered microcracks at the angle α_t : the body is completely separated respect to that orientation. The testing cannot go further in tension. Nevertheless, from eqn. (2.6) it keeps loading capacities if further stress is such as $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{T} < 0$. The residual strain is easily deduced from eqn. (2.8) with $\sigma = 0$, $s = p/2$ and $\alpha = \alpha_t$. It represent the permanent residual strain as in the plasticity theory, but here, it is related to the microscopic incompatibility in the microcracks system.

The radial strain ε_2 computed respect to eqn. (2.9) exhibits some surprising reinforcement of the Poisson's effect related also to microscopic incompatibility. In fact, the RVE also exhibits a large shear strain ε_{12} in the direction $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2$, (i.e. along $\boldsymbol{T}$) as we can deduce from the strain's expression (eqn. 2.3) that $\boldsymbol{T}.\boldsymbol{\varepsilon} = \theta$. As this shearing is randomly distributed between each RVE, an homogenization should be necessary in order to define the lateral strain of the complete body.

La compression se traite de manière équivalente.

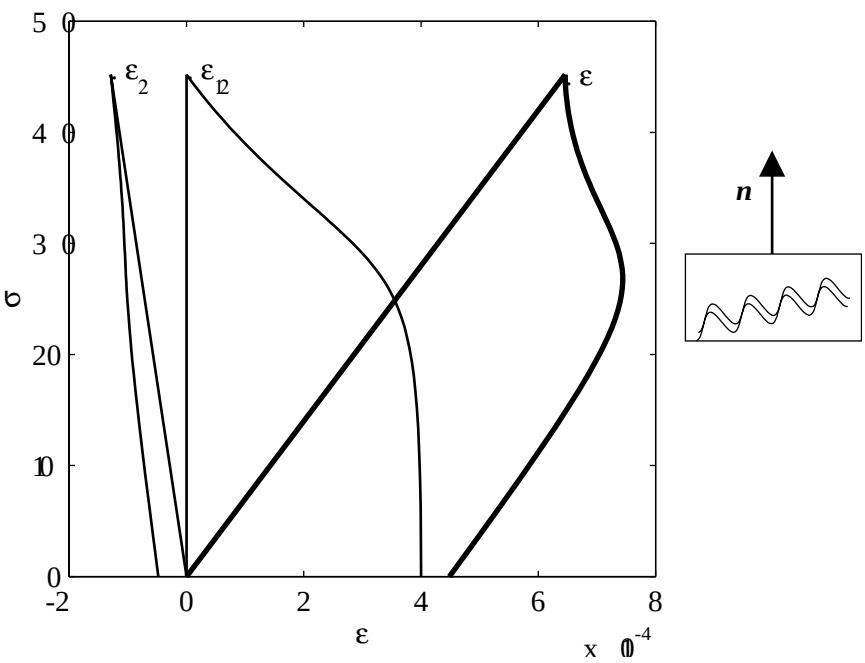


Fig. 2.4: stress to strain curve in tension

1.4 Perspectives

Suite à une discussion avec Djimedo Kondo, il nous est apparu que ce type d'approche pouvait aider à pallier le point 4) évoqué au chapitre 1.1 : il serait alors possible de décrire la «plasticité» induite par la refermeture des fissures avec les lèvres décalées, ce qui est encore impossible avec les modèles actuels.

Une autre perspective est de partir, non de la forme même de la fissure, mais de la fonction d'ouverture qui en résulte. Celle-ci est aisément identifiable par les essais (*c.f.* figure 5.1 de l'article (François & Royer_Carfagni 2005)). La fissure périodique, telle que décrite dans l'article, est bien sûr très irréaliste. Une fissure réelle est proche d'une fractale (Schmittbuhl et al. 1994). La non-périodicité de celle-ci empêche la refermeture exacte (et irréaliste) périodique. Néanmoins, il devrait être possible d'avoir des imbrications des lèvres de la fissure d'autant plus «franches» que le décalage est faible.

Pour ce qui est du point 2), l'abrasion, il sera nécessaire d'introduire une nouvelle variable dissipative. Celle-ci pourrait être reliée à la hauteur des aspérités (le A de l'article), dont l'émoussement est responsable de la perte de module constatée au niveau des essais (*c.f.* figure 5.1 de l'article).

Bien sûr, le premier travail à faire est, sur le modèle actuel, la gestion de l'évolution des fissures par un mécanisme dissipatif, sans doute avec une approche similaire à celle du chapitre précédent. Le passage du réseau de fissures diffuses à la fissure macroscopique, avec une étude de localisation, est aussi à faire et est sans doute un point plus délicat ; cependant, la partie micro de la théorie peut tout à fait représenter le comportement d'une fissure unique macroscopique.

2 Modèle macroscopique pour les bétons avec potentiel non convexe

Le lecteur pourra se référer à (François n.d.) (article soumis, joint).

2.1 Contexte de l'étude

La thèse de Hung Le Tuan (Tuan 2005), co-encadrée par moi même et Yves Berthaud avait pour but de reprendre, de remettre au goût du jour, les modèles d'endommagement des années 80 (Lemaitre 1996) dans le cadre des matériaux quasi-fragiles (Bazant & Planas 1998). Le modèle isotrope de Marigo (Marigo 1981) et anisotrope de Ladevèze (Ladevèze 1983) en sont les représentants les plus emblématiques notamment par la robustesse de leur construction. Ces modèles se révèlent toutefois insuffisamment flexibles pour être réellement prédictifs. Pourtant, certaines améliorations (Royer-Carfagni & Lancioni 2005) peuvent rendre ces modèles performants, du moins pour des niveaux de dommage raisonnables car, au delà, d'autres phénomènes entrent en ligne de compte. Un matériau très endommagé peut-il en-

core être décrit par la mécanique de l'endommagement ? Le concept de contrainte équivalente $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/(1-d)$, associé à l'existence de cavités, voire de micro-fissures, ne peut, selon moi, être étendu au cas ultime du tas de sable dans lequel la cohésion, le frottement de Coulomb et la déformation volumique assurent la consistance, ce que décrit la mécanique des sols. Le document présenté (François n.d.), proposé à publication, représente une tentative de passage continu entre le matériau élastique isotrope et le matériau granulaire régi par les forces de cohésion.

Comme il a été écrit au chapitre précédent, ces modèles ont été enrichis dans les années 90, en général par de la plasticité, afin de mieux décrire les phénomènes observés. Puis, les années 2000 ont vu l'émergence de modèles à bases micromécaniques, de plus en plus performants notamment grâce à l'augmentation de la puissance de calcul. Pourtant, depuis quelques années, d'autres auteurs se penchent sur des modèles simplifiés : Desmorat (Lemaitre & Desmorat 2005) développe une classe de modèles (issu des modèles de plasticité des métaux) dont le champ d'application est très vaste, des caoutchoucs aux bétons entre autres ; Badel (Badel 2001) présente un cadre mathématiquement très rigoureux dont des enrichissements récents sont prometteurs (séminaire de J.B. Leblond au LMT-Cachan).

Au cours de la thèse d'Hung (Tuan 2005) ont été écrits certaines formes de potentiel thermodynamique présentant un couplage entre parties hydrostatique et déviatorique qui furent testées dans les cas de sollicitations simples en pré-pic. La non convexité induite par ces formes de potentiel n'avait donc pas été abordée.

2.2 L'anisotropie et la suite des travaux de thèse

Dans ma thèse de doctorat (François 1995), je proposais une extension anisotrope de ce type de modèle, basée sur l'utilisation de la décomposition de Kelvin (Rychlewski 1984) (décomposition en modes propres de l'élasticité linéaire équivalente à une diagonalisation du tenseur d'élasticité). Néanmoins je n'ai pas réussi à compléter ce type de modélisation pour la rendre exploitable à cause d'un écueil portant sur l'interaction entre les modes de Kelvin. Par exemple, supposons un matériau élastique isotrope : ses modes propres sont la pression hydrostatique et l'espace des déviateurs, ce qui se résume par la loi de Hooke suivante dans laquelle $\mathbb{P}^{\mathsf{h}}$ est le projecteur hydrostatique, $\mathbb{P}^{\mathsf{d}}$ le projecteur déviatorique, $\boldsymbol{I}$ l'identité du second ordre et $\mathbb{I}$ l'identité du quatrième ordre.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (3K\mathbb{P}^{\mathsf{h}} + 2\mu\mathbb{P}^{\mathsf{d}})\boldsymbol{\varepsilon} && (2.19)\\ &= 3K\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} \\ \mathbb{P}^{\mathsf{h}} &= \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} && (2.20)\\ \mathbb{P}^{\mathsf{d}} &= \mathbb{I} - \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} && (2.21) \end{aligned}$$

Rappelons la construction de la base des tenseurs symétriques du second ordre :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_1 &= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \\
\boldsymbol{B}_2 &= \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\
\boldsymbol{B}_3 &= \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
\boldsymbol{B}_4 &= \frac{1}{2}(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2) \\
\boldsymbol{B}_5 &= \frac{1}{2}(\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3) \\
\boldsymbol{B}_6 &= \frac{1}{2}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Les tenseurs du quatrième ordre s'écrivent alors dans la base $\boldsymbol{B}_i \otimes \boldsymbol{B}_j$ et donc sous la forme d'une matrice 6x6. Cette écriture diffère de l'écriture en contraction de Voigt par une multiplication des lignes 4 à 6 et des colonnes 4 à 6 par $\sqrt{2}$ (le dernier quadrant est donc multiplié par 2). Les avantages de cette base sont nombreux ; citons au moins qu'elle permet une inversion des tenseurs d'élasticité pour donner le tenseur des souplesses (ce qui est vaux en notation de Voigt). Les projecteurs $\mathbb{P}^{\mathsf{d}}$ et $\mathbb{P}^{\mathsf{h}}$ s'écrivent simplement dans cette base :

$$\mathbb{P}^{\mathsf{h}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$$\mathbb{P}^{\mathsf{d}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Supposons que ce milieu est endommagé par une sollicitation de traction $\sigma\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$. Le modèle de la thèse prévoyait une altération de la raideur pour les projections de la direction (tensorielle) de sollicitation (ici $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$). Soit, dans ce cas :

$$\mathbb{C} = 3K(\mathbb{P}^{\mathsf{h}} - d_h(\mathbb{P}^{\mathsf{h}} : \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)^{\otimes 2}) + 2\mu(\mathbb{P}^{\mathsf{d}} - d_d(\mathbb{P}^{\mathsf{d}} : \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)^{\otimes 2}) \tag{2.25}$$

$$= 3K\left(1 - \frac{d_h}{3}\right)\mathbb{P}^{\mathsf{h}} + 2\mu\left(\mathbb{P}^{\mathsf{d}} - d_d(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 - \frac{\boldsymbol{I}}{3})^{\otimes 2}\right) \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} &= 3K\left(1 - \frac{d_h}{3}\right)\mathbb{P}^{\mathsf{h}} \\ &+ 2\mu\left(\mathbb{P}^{\mathsf{d}} - d_d\left(\frac{2}{3}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3\right)^{\otimes 2}\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\tag{2.28}$$

où d_h et d_d sont des endommagements hydrostatiques et déviatoriques et $\boldsymbol{A}^{\otimes 2}$ représente le produit tensoriel $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A}$. En base de tenseurs, nous obtenons :

$$\mathbb{C} = 3K \begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & \frac{1}{3}-\frac{1}{9}d_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$+ \; 2\mu \begin{bmatrix} \frac{2}{3}-\frac{4}{9}d_d & -\frac{1}{3}+\frac{2}{9}d_d & -\frac{1}{3}+\frac{2}{9}d_d & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{9}d_d & \frac{2}{3}-\frac{1}{9}d_d & -\frac{1}{3}+\frac{2}{9}d_d & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{9}d_d & -\frac{1}{3}+\frac{2}{9}d_d & \frac{2}{3}-\frac{1}{9}d_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

On remarque que, même si les endommagements sont poussés à 1, l'élasticité du corps ne devient pas nulle : ce ne serait le cas que pour une sollicitation de type tri-traction $\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}$ (ou tri-compression aussi, *a priori*...). Ce formalisme respecte le principe de Curie : le groupe de symétrie de la conséquence (le tenseur d'élasticité après endommagement) contient les groupes de symétrie des causes (isotrope pour l'élasticité initiale et isotrope transverse pour la sollicitation). On remarque qu'il n'implique pas tous les couplages possibles : par exemple les endommagements suivant 2323 ne sont pas affectés. Il est simple de remédier à ce problème en donnant de l'effet à d non seulement sur les parties propres comme ici mais aussi sur leur orthogonal, par exemple en affectant le $2\mu\mathbb{P}^{\mathsf{d}}$ et le $3K\mathbb{P}^{\mathsf{h}}$ d'un terme de type $(1-d)$.

Lors de mes tentatives pour continuer ces travaux, je me suis confronté à des difficultés : tout d'abord comment gérer le chargement non proportionnel ? En effet, le premier chargement qui endommage le matériau impose l'anisotropie élastique de celui-ci. Un critère énergétique sur les modes propres (l'énergie de chaque mode est bornée) avait été employé dans la thèse. Ce critère est fortement anguleux et pose des problèmes numériques. Les termes de couplage dans l'évolution ne peuvent être trouvés par cette approche macroscopique. D'autres auteurs ont publié des travaux dans ce domaine mais n'ont pas, à mes yeux, non plus réussi à résoudre ces problèmes : le modèle de Shreyer (Schreyer 1995) comporte un flou au niveau des couplages entre modes et manque de sens physique au niveau de la rotation des tenseurs propres. Une autre remarque que l'on peut faire est que, lors de la localisation, il y a rupture de symétrie. Par exemple, le critère d'Hadamart et Rice (Rudnicki & Rice 1975) prévoit l'amorçage d'une fissure de normale $\vec{n}$ qui est en général non colinéaire à la direction de traction. Si, statistiquement, les fissures sont iso-probables autour de $\vec{e}_1$ (respectant donc le groupe de symétrie initial isotrope transverse autour de $\vec{e}_1$), une seule fissure représente une rupture de symétrie car le matériau devient monoclinique par rapport au plan de normale $\vec{n}$ ce qui ne contient pas le groupe de symétrie du problème initial.

L'approche en décomposition de Kelvin me parait être un cadre indispensable aux modèles anisotropes, au même titre que le cadre thermodynamique, notamment par le fait qu'il permet de ne pas avoir à choisir entre représentation en contrainte et représentation en déformation. Un axe de recherche futur est pour moi de l'associer avec de la micromécanique afin de déterminer des fonctions d'endommagement réalistes. Les travaux présentés dans ce chapitre ont justement eu pour base de réflexion cet aspect micromécanique, comme décrit dans le paragraphe précédent, par l'effet de renforcement sous confinement dû au frottement de Coulomb mais la difficulté de l'étude isotrope fut telle que le modèle anisotrope demeure encore à venir.

2.3 Points clés de l'approche

Afin de décrire le passage progressif sous l'effet de l'endommagement d d'un matériau élastique linéaire à un matériau granulaire, le potentiel suivant a été proposé :

$$2\rho\Psi = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}} + 2\mu\left(1 - d - 2\varphi d\varepsilon^{\mathsf{h}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} \tag{2.31}$$

dans cette équation et après $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}} = \mathbb{P}^{\mathsf{h}} : \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} = \mathbb{P}^{\mathsf{d}} : \boldsymbol{\varepsilon}$ et ε^{h} et ε^{d} sont les normes euclidiennes naturelles de ces tenseurs. Par souci de simplicité et d'efficacité du modèle final par rapport aux essais, le premier membre n'est pas affecté par l'endommagement. Le couplage est dû au terme en $2\varphi d\varepsilon^{\mathsf{h}}$: il a pour effet de renforcer le matériau pour des déformations hydrostatiques ε^{h} négatives, proportionnellement à celles-ci. Le module de cisaillement apparent peut même devenir supérieur à celui du matériau vierge 2μ. Cela se voit encore plus nettement dans la loi de comportement qui dérive de ce potentiel :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{h}} = 3K\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}} - 2\mu\varphi d(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}})^2\frac{\boldsymbol{I}}{\sqrt{3}} \tag{2.32}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} = 2\mu\left(1 - d - 2\varphi d\varepsilon^{\mathsf{h}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} \tag{2.33}$$

Dans une surface seuil de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager la *résistance* du matériau est proportionnelle à son confinement. Ici, le *module de cisaillement* est proportionnel à celui-ci, qui est d'ailleurs exprimé en déformation et ce n'est pas tout à fait équivalent. Il ne s'agit donc pas de la même chose. L'idée micro-mécanique sous-jacente est que le confinement va augmenter les surfaces en contact et par conséquent densifier le matériau, et rigidifier son élasticité. Les relations ci-dessus induisent des phénomènes physiquement convenables dont les équations sont détaillées dans la publication :

1. augmentation de la pression hydrostatique σ^{h} pour un de cisaillement ε^{d} croissant sous confinement $\varepsilon^{\mathsf{h}} = 0$
2. inversement dilatation volumique $\varepsilon^{\mathsf{h}} > 0$ pour un de cisaillement ε^{d} croissant sous pression hydrostatique σ^{h} constante

Classique dans les surfaces de charge, un tel couplage l'est moins dans les potentiels d'état. En effet, il induit un potentiel non convexe, ici cubique en déformation. Ceux-ci furent introduits par Eriksen (Eriksen 1975). La positivité de l'énergie libre de Gibbs n'est plus assurée. Celle-ci se résume, pour un matériau isotrope, à la positivité des constantes de Kelvin $3K$ et 2μ de laquelle on déduit les bornes classiques de l'élasticité linéaire isotrope en module d'Young $E \leq 0$ et coefficient de Poisson$-1 \leq \nu \leq 0.5$. Ici, dans un graphe ε^{h}, ε^{d} apparaît une zone «interdite», de potentiel négatif. Cette zone interdite correspond à de grandes déformations hydrostatiques

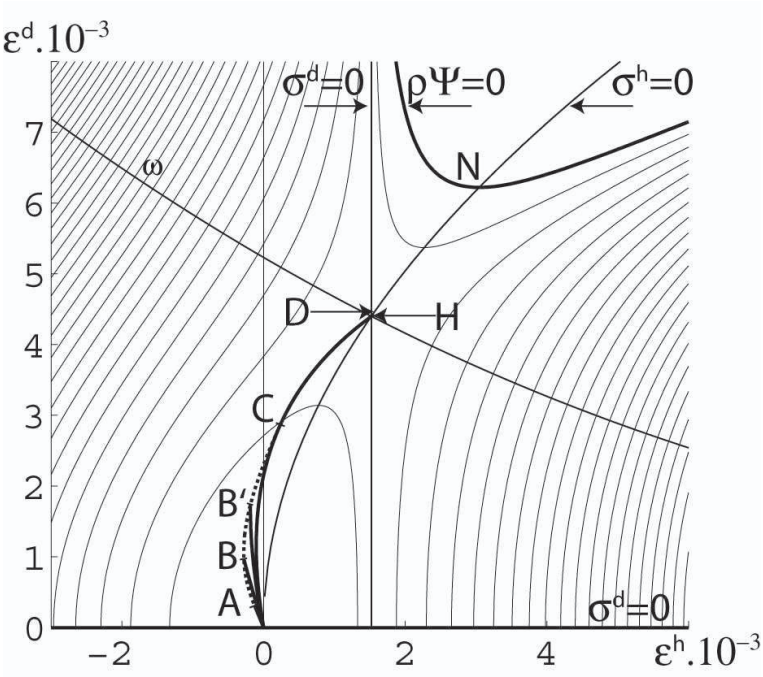


Fig. 2.5: Iso-valeurs de l'énergie libre dans le plan de Drucker-Prager pour d=0.588

et déviatoriques. Si ce point m'a causé de grande inquiétudes au départ, il peut être interprété positivement : un matériau fortement endommagé peut continuer d'avoir une capacité portante s'il est confiné mais n'en a plus aucune dans le cas contraire. Dans la mécanique de l'endommagement classique ce n'est pas le cas, sauf à utiliser des parties positives toujours dangereuses car non dérivables. Je propose dans l'article de n'attribuer aucune raideur à un élément qui tomberait dans ce cas. Il est évident que cela définit une seconde surface seuil en plus de celle qui pilote l'endommagement. Cela reste problématique au niveau de la stabilité, aux points d'intersection entre les surfaces seuil. Mais il existe des moyens de gérer de multiples surfaces seuil, utilisés en plasticité et en endommagement.

Une autre limitation vient de la positivité de la dissipation intrinsèque $\dot{q}_i^d$ associée à l'évolution de l'endommagement, réduite dans notre cas à $Y\dot{d}$ qui induit que l'endommagement ne peut plus croître dès que la force thermodynamique Y

devient négative. C'est une sorte de blocage, qui apparaît aux forts confinements et faibles endommagements.

$$\varepsilon^{\mathsf{h}} < \frac{-1}{2\varphi} \Rightarrow \dot{d} = 0 \tag{2.34}$$

Cette limitation aussi peut prendre un sens physique, en considérant les essais sous forts confinement de Burlion (Burlion 1997) qui montrent un tel type de blocage. Ceux-ci sont obtenus pour des confinements d'un ordre de grandeur plus élevé que ceux donnés par cette équation, mais pas pour le même matériau.

Un autre effet intéressant est celui de la possibilité de modules tangents de compressibilité hydrostatique $3\tilde{K}$ négatifs (à droite de la ligne $\sigma^{\mathsf{h}} = 0$) et de modules tangents de cisaillement $2\tilde{\mu}$ négatifs (à droite de la ligne $\sigma^{\mathsf{d}} = 0$), tandis que l'énergie libre est toujours positive. Cet effet avait déjà été trouvé dans certains cas dans l'étude précédente sur la micromécanique des fissures rugueuses (François & Royer_Carfagni 2005).

Un domaine qui reste à étudier à ce niveau est celui de l'instabilité au delà de la ligne ω. Cette ligne de courant, obtenue numériquement, sépare le domaine inférieur dans lequel la minimisation de l'énergie libre (en l'absence d'action extérieure) induit un retour vers l'état initial ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$), du domaine supérieur où le système tend à aller seul vers la zone interdite $\rho\Psi < 0$. Le long de ω s'agit d'une instabilité «à la Lyapunov» où une petite fluctuation de part et d'autre influe sur l'état final. Les simulations en traction et compression, bi-traction et bi-compression équilibrées ne rencontrent pas ce domaine car, pour ces états, les déformations hydrostatiques et déviatoriques s'annulent en même temps et l'on passe alors systématiquement par le point selle H. Toutefois une étude plus poussée serait à mener si ce modèle était amené à évoluer.

Les surfaces seuil les plus employées pour les bétons sont peu prédictives en dehors de la traction-compression. Ragueneau et Desmorat (Desmorat, Ragueneau & Gatuingt 2006) le montrent dans la figure (2.6) où, par rapport aux essais (Kupfer, Hilsdorf & Rusch 1969) représentés figure (2.7) :

- les fonds plats, c'est à dire la plus grande résistance en bi-compression, ne sont pas représentés pour beaucoup de modèles
- autour de la direction de traction simple, la courbure importante ne l'est pas non plus : l'effet d'une faible compression suivant l'autre axe induit une très grande surestimation de la contrainte seuil

La surface seuil proposée est basée sur une surface mixte de Von Mises pour les compressions et de Rankine pour les tractions. Telle quelle, une telle surface seuil est convenablement prédictive mais induit des angles vifs aux points d'intersection des surfaces et, sans précautions, les algorithmes ont, dans ce cas, tendance à «sauter» d'un côté à l'autre. La solution habituelle à ce genre de problème est l'utilisation d'un sous-différentiel dont le sens physique est discutable et qui consomme du temps de calcul. La surface seuil proposée est composée d'un critère de Von Mises et d'un terme en norme de l'exponentielle du tenseur des contraintes. Cette exponentielle donne de petites valeurs pour les contraintes principales négatives mais devient

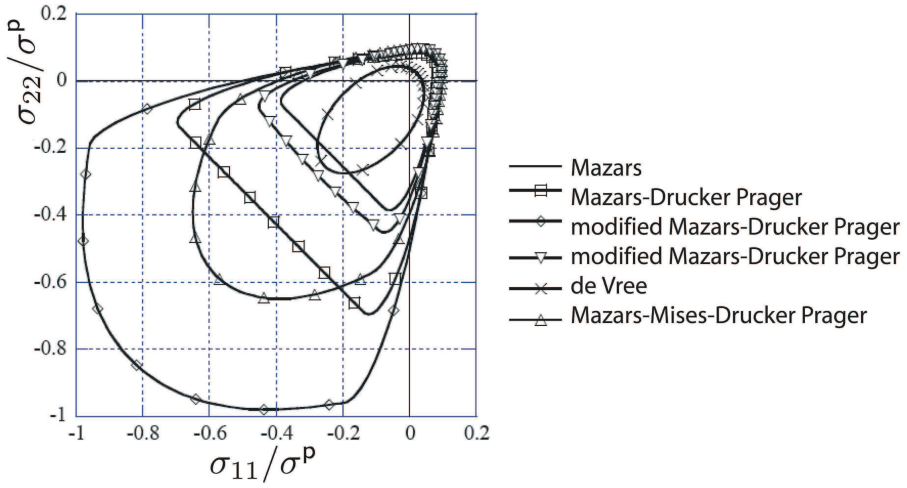


Fig. 2.6: Surfaces seuil initiales pour les principaux modèles (Desmorat)

rapidement prépondérante pour les valeurs principales positives, remplissant alors l'office de critère de Rankine. Les fonctions f et g sont des fonctions d'écrouissage «fitées» sur les essais valant $f(0) = g(0) = 1$ pour la surface seuil initiale.Les constantes matériau ne sont donc que deux : σ_0 qui gère essentiellement la résistance en traction et σ_y qui gère essentiellement la résistance en compression. Mis à part le point en bi-compression équilibrée, cette surface est bien en rapport avec les essais de Kupfer (Kupfer et al. 1969).

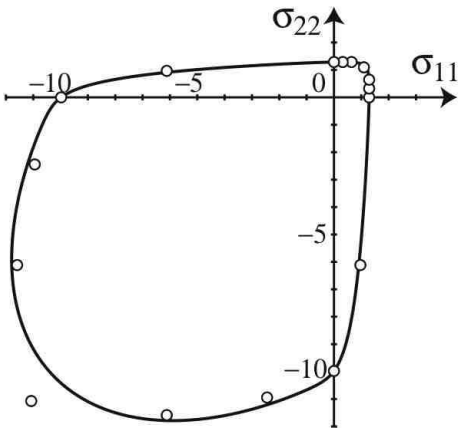


Fig. 2.7: Surface seuil initiale proposée (ligne continue) et essais de Kupfer (cercles)

Un autre défaut connu de la surface seuil de Mazars est d'autoriser des cisaillements infinis ; au contraire, celle-ci, assimilable au cylindre de Von Mises en compression, ne les autorise pas. Enfin la surface seuil proposée est continûment dérivable.

On fera toutefois attention, pour une implantation numérique, à borner l'exponentielle qui peut prendre des valeurs très importantes lors du prédicteur élastique, par exemple.

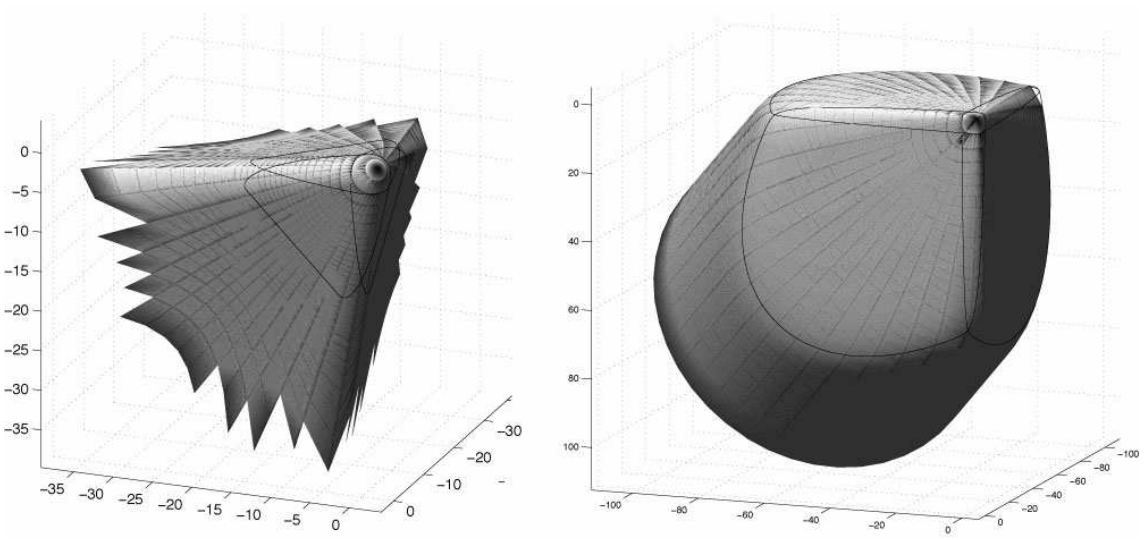


Fig. 2.8: Surfaces seuil de Mazars (à gauche) et nouvelle (à droite) dans l'espace des contraintes principales. La courbe noire correspond à l'intersection avec les plans de base soit la surface seuil en bi-compression.

L'essai de traction-compression est encore l'essai de référence en mécanique. L'écriture du modèle dans ce cas ne pose pas de difficultés particulières si ce n'est celle liée à la multiplicité des solutions. Le comportement pré-pic (figure 2.9) n'appelle pas de commentaire particulier par rapport à un modèle d'endommagement classique si ce n'est l'apparition de coefficients de poisson apparents supérieurs à 0.5 (figure 2.20) : les points finaux affichent une valeur d'environ 2/3, ce qui est tout à fait impossible avec une élasticité linéaire endommageable.

En post-pic le modèle autorise deux déformations pour un même niveau de contrainte [1]. Le matériau va, à l'instar d'un milieu biphasé comme le mélange liquide-vapeur, pouvoir minimiser son énergie interne (équivalente ici à l'énergie libre de Gibbs) en adoptant le mélange le plus favorable. La droite Δ (figure 2.9) montre le lieu de ces minimums d'énergie pour une déformation donnée (par exemple J*) ; c'est vers cette droite que vont aller toutes les transformations. On note au passage que l'évolution en post-pic est décrite ici à déformation imposée (hypothèse de machine rigide).

Des considérations sur les aires ont été choisies en partie pour leur aspect visuel explicite mais aussi car les équations analytiques, avec les cas multiples, sont inextricables. Suivant la thermodynamique des processus irréversibles (Halphen &

[1] en réalité trois, la troisième étant en traction, dans une zone ou le potentiel est négatif et donc interdite

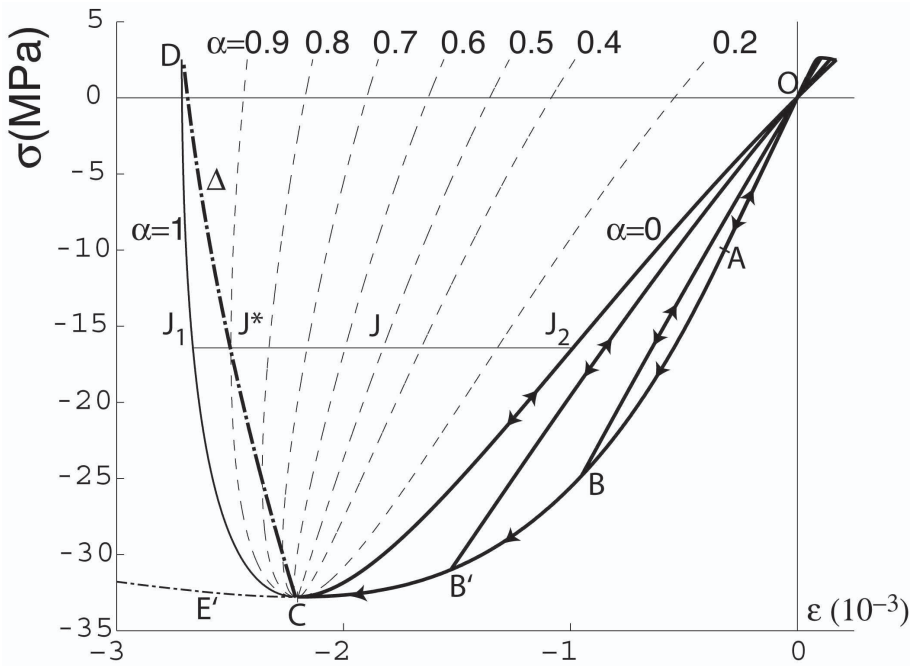


Fig. 2.9: Comportement en pré-pic et configuration de mélange en J.

Nguyen 1975, Germain, Nguyen & Suquet 1983, Lemaitre 1984, Zaoui et al. 1991, Kuiken 1994, Halphen 1997, Kondepudi & Prigogine 1998), la forme différentielle de l'énergie libre est :

$$\mathsf{d}\rho\Psi = (\rho\Psi_1 - \rho\Psi_2 - \sigma(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))\,\mathsf{d}\alpha + \sigma\mathsf{d}\varepsilon - Y\mathsf{d}d \tag{2.35}$$

Le bilan énergétique (Halphen & Nguyen 1975) et l'expression du travail des efforts extérieurs en négligeant l'énergie cinétique s'expriment comme :

$$\begin{aligned} \delta w_e &= \rho\mathsf{d}\Psi + \delta q_i & (2.36)\\ &= \sigma\mathsf{d}\varepsilon & (2.37) \end{aligned}$$

Ce qui permet de distinguer deux formes de dissipation intrinsèque, δq_i^dassociée à l'évolution de l'endommagement et δq_i^α associées aux variations de fraction volumique de mélange entre les deux phases présentes.

$$\begin{aligned} \delta q_i &= \delta q_i^\alpha + \delta q_i^d & (2.38)\\ \delta q_i^\alpha &= (\rho\Psi_2 - \rho\Psi_1 - \sigma(\varepsilon_2 - \varepsilon_1))\,\mathsf{d}\alpha & (2.39)\\ \delta q_i^d &= Y\mathsf{d}d & (2.40)\\ Y &= \alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2 & (2.41) \end{aligned}$$

Ces expressions permettent de quantifier la variation d'énergie libre entre deux états en terme d'aire : celle-ci ne dépendant pas du chemin parcouru on peut considérer

les transformations élastiques, non dissipatives, c'est à dire pour lesquelles d ou α restent constants. L'expression (2.36) montre alors que cette variation est l'aire sous la courbe des transformations élastiques reliant ces deux états (où l'aire sous cette courbe si l'on se réfère à l'état de référence en O). Un considération sur les proportions des aires montre que ceci est encore valable pour les états de mélanges. Sur la figure (2.9) on peut vérifier que $\rho\Psi(\mathrm{J}_1) > \rho\Psi(\mathrm{J}) > \rho\Psi(\mathrm{J}_2)$. Le travail extérieur étant, depuis (2.37) l'aire sous la courbe de la transformation réellement parcourue, la différence entre ces aires est la dissipation intrinsèque totale δq_i.

Afin de déterminer une solution unique à ces évolutions il manque un principe. A l'instar de Truskinovsky et Puglisi (Puglisi & Truskinovsky 2005) je choisis d'utiliser le *principe de dissipation intrinsèque maximale* : parmi toutes les transformations possibles, celle qui aura lieu sera celle pour laquelle δq_i est maximum. Ce principe n'est pas démontré mais communément accepté par nombre de communautés, Truskinovsky et Puglisi donnent l'exemple de la mécanique des fluides visqueux. Ces auteurs auraient pu aussi citer le cas de la plasticité où Hill crée ou fait référence à un principe de travail plastique maximal. Il respecte bien sûr l'ensemble des autres principes de thermodynamique. Un point intéressant est à souligner : donnons nous un état initial i et un état final f. L'équation (2.36), sous forme intégrale, entre ces deux états donne :

$$\Delta q_i = \Delta w_e - \left(\rho\Psi^f - \rho\Psi^i\right) \tag{2.42}$$

Et l'on constate que

1. maximiser l'énergie dissipée implique de minimiser l'énergie libre à l'état final $\rho\Psi^f$. On retrouve le concept d'équilibre associé avec un minimum d'énergie. Cet équilibre concerne donc l'état final seul ; les états intermédiaires, instables, peuvent donc être hors équilibre pour maximiser le travail.

2. si le travail extérieur est reçu et donc positif, il sera maximisé ; s'il est fourni et donc négatif, il sera minimisé. On retrouve alors le concept de travail minimal ou de «paresse naturelle» qui gère donc la partie hors équilibre de la transformation.

La dissipation intrinsèque se répartit en deux termes : $\delta q_i = \delta q_i^\alpha + \delta q_i^d$. Faut-il maximiser δq_i (avec la contrainte du second principe $\delta q_i \geq 0$) et laisser toute liberté aux deux termes δq_i^α et δq_i^d dont l'un des deux peut devenir négatif au bénéfice de la somme ? En ayant appliqué en premier cette règle je me suis rendu compte de l'étrangeté de certains trajets de chargements. En fait, si l'on considère qu'un des phénomènes peut «récupérer» de l'énergie dissipée de l'autre pour la convertir en énergie libre (ou en travail) c'est qu'il se comporte à la manière d'une machine thermique. Même si ce n'est pas impossible d'un point de vue général, je ne pense pas que ce le soit dans notre cas d'évolutions dissipatives au sein des matériaux. Bien que ce raisonnement ne soit pas des plus clairs, et après concertation avec d'autres chercheurs, j'ai donc appliqué le second principe sur chaque partie de dissipation

intrinsèque soit :

$$\delta q_i^d \geq 0 \tag{2.43}$$
$$\delta q_i^\alpha \geq 0 \tag{2.44}$$

En associant ces principes avec les considérations sur les aires il est alors possible de décrire les transformations dans le cas d'école de la traction-compression. Dans le béton la traction est d'un intérêt accessoire pour le calcul de structures et délicate au point de vue des essais ; j'ai donc simulé la compression (d'autre part le cas traction est en tout point similaire). En compression les déformations sont négatives : on

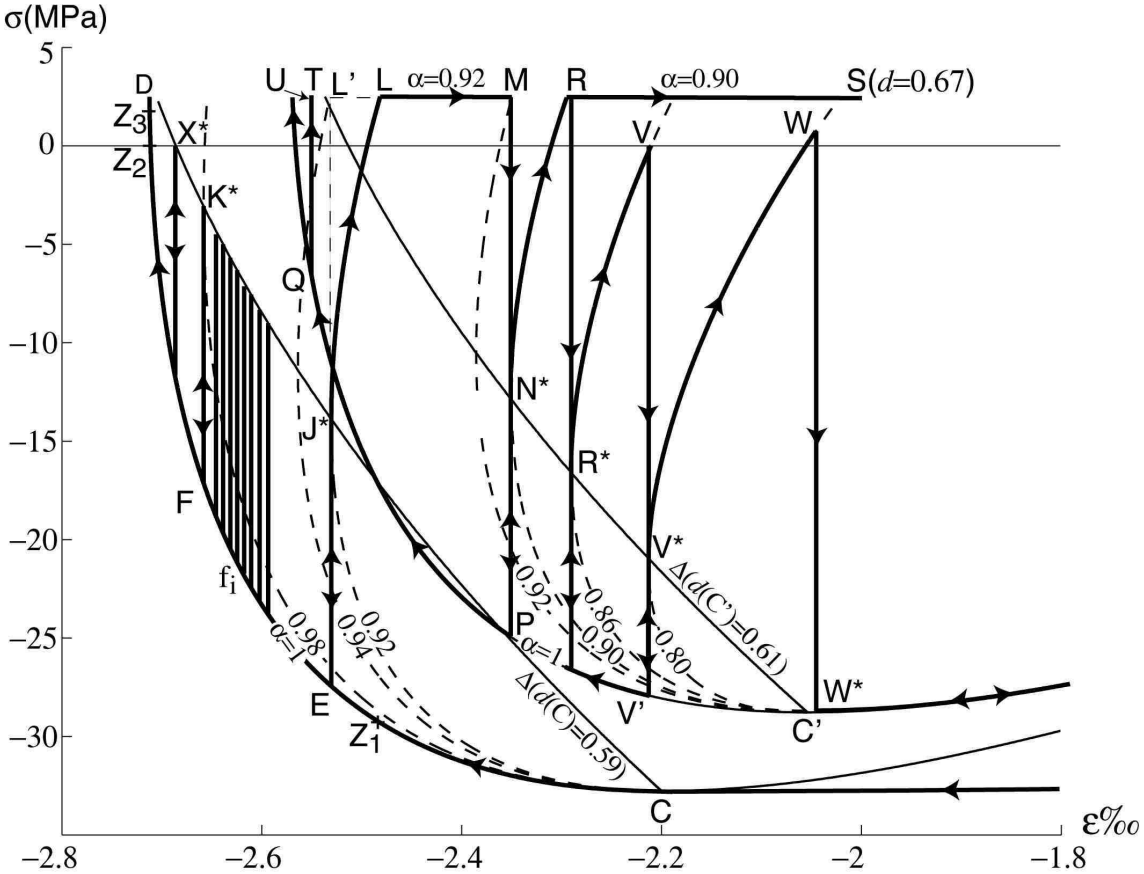


Fig. 2.10: Évolutions post-pic et boucles d'hystérésis.

appellera *charge* la diminution de cette déformation et *décharge* l'augmentation de celle-ci (retour vers la déformation nulle). Les principes ci-dessus reviennent, d'un point de vue graphique, à trouver le chemin le plus bas possible en charge et le plus haut possible en décharge, en vérifiant toutefois la positivité des dissipations intrinsèques instantanées δq_i^d et δq_i^α. La dissipation intrinsèque δq_i^d est automatiquement positive au sens ou elle impose un blocage de l'endommagement (voir le

détail dans l'article) dans un cas de fort confinement que l'on ne rencontrera pas en compression uniaxiale mais qui est intéressante et phénoménologique dans le cas des évolutions à fort confinement. La seconde équation associée avec l'équation (2.39) montre que la fraction volumique ne peut que diminuer ou rester constante, sauf en C ou le membre précédent $\mathsf{d}\alpha$ est nul.

Les figures présentes dans la partie suivante représentent le bilan énergétique en terme d'aires. Le code couleur est le suivant :

1. rouge : dissipation Δq_i^d associée à l'évolution de l'endommagement.
2. orange : dissipation Δq_i^α positive associée à l'évolution de la fraction volumique.
3. bleu : dissipation Δq_i^α négative associée à l'évolution de la fraction volumique. Celle-ci n'apparaît que dans des processus instantanés ou elle est compensée par la précédente.
4. violet : superposition de rouge et de bleu en terme de zones aussi, comme dans la figure (2.19).
5. blanc : non concerné ou annulation de bleu et d'orange comme dans la figure (2.13) au dessus de CE

Charge en pré-pic OC

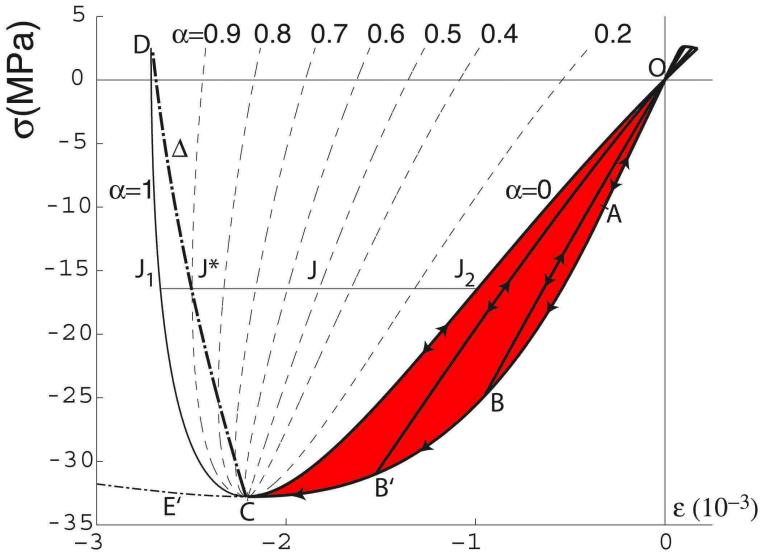


Fig. 2.11: Transformation OC

La charge en pré-pic suit le trajet élastique linéaire OA suivi par le trajet ABB'C ou l'endommagement d croit de $d = 0$ à $d = 0.588$. Il n'y a pas de différence majeure avec un autre modèle d'endommagement si ce n'est les retours BOB, B'OB' et COC qui sont légèrement élastiques non linéaires.

Charge en post-pic CEJ*

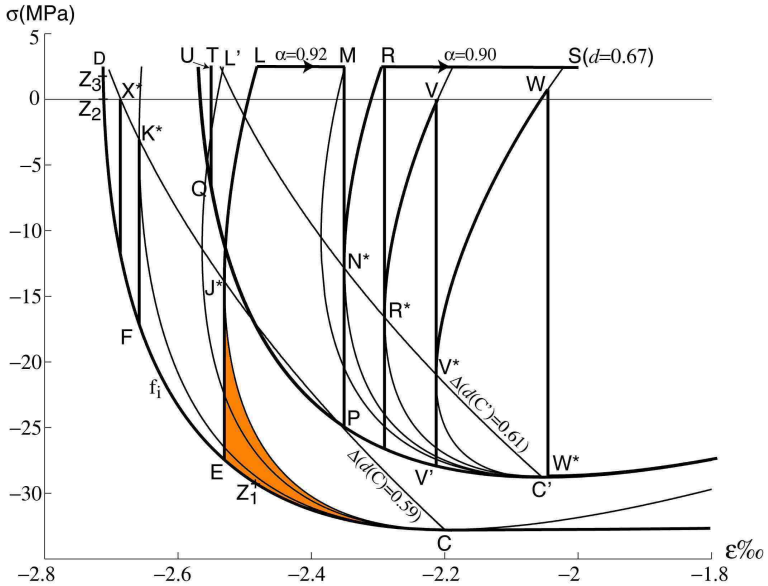


Fig. 2.12: Transformation CEJ*

Passé le pic en C le modèle suit la branche élastique CE avec $\alpha = 1$. L'endommagement ne croit plus car la contrainte redescend en dessous de la contrainte au seuil d(C). Au moment de l'arrêt le retour à la droite Δ d'équilibre se fait par la transformation iso-ε qui restitue une dissipation Δq_i^d(EJ*) associée à la variation de fraction volumique α. Cette transformation a lieu lors de l'arrêt de la machine, la déformation et donc le travail échangé est nul : c'est une déformation spontanée et instantanée. C'est pourtant au cours de celle-ci qu'à lieu la dissipation.

Arrêt et re-charge en post-pic J*EFK*

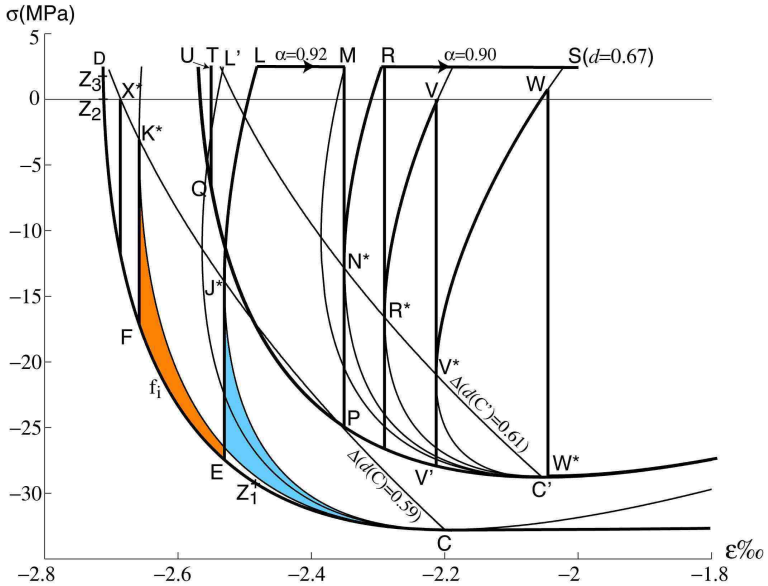


Fig. 2.13: Transformation J*EFK*

Un trajet infiniment lent, quasi-statique, peut être considéré comme une collection d'arrêts. Ceux-ci sont matérialisés par les transformations f_i (figure 2.9) pour lesquelles de petites transformations $d\varepsilon$ à $\alpha = 1$ sont interrompues par une «infinité» de retours à l'équilibre. Cette transformation est possible si ces sauts de puce sont *instantanés*. En effet la partie de type J*E ou la contrainte augmente (en valeur absolue) possède une dissipation intrinsèque Δq_i^α négative ; par contre l'ensemble de la transformation du type J*EFK*, quelle que soit sa largeur en déformation, finie ou infinitésimale, possède une dissipation globale Δq_i^α positive (la surface orange est plus grande que la surface bleue, même si une impression visuelle fait penser le contraire). Ceci se démontre analytiquement (voir l'article). Il faut donc que ces sauts de puce soient instantanés. Cet aspect me fait penser au phénomène de stick-slip.

Décharge et arrêt J*LMN*

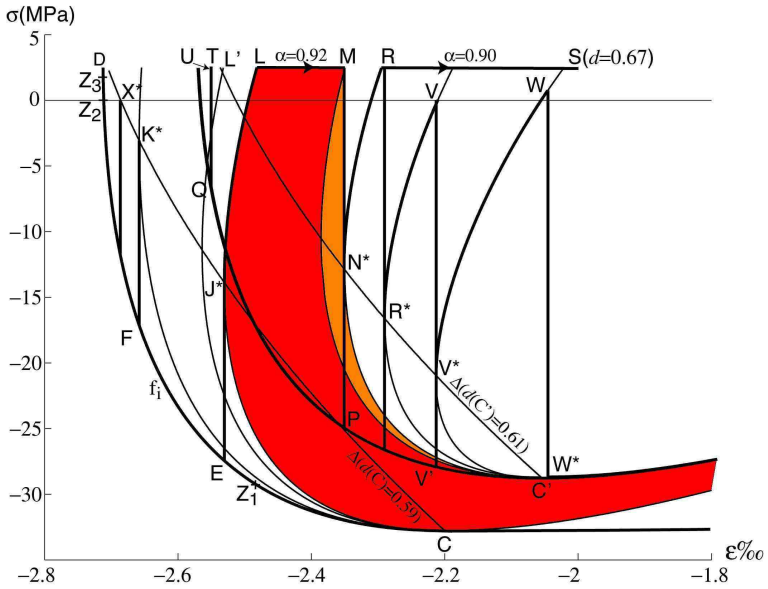


Fig. 2.14: Transformation J*LMN*

Au cours de la décharge, le bilan d'aire et le principe de dissipation maximale reviennent à rechercher le trajet «le plus haut» entre deux états d'équilibre. Le trajet optimal serait le trajet J*L'MN* (figure 2.15) mais la compensation des dissipations intrinsèques Δq_I^α qui était positive dans le cas de la charge (figure 2.13) est, dans ce cas de décharge, négative : la zone bleue est visiblement plus grande que la zone orange. Ce trajet est donc interdit. L'évolution est donc non instantanée (ε n'est pas constant) et la seule évolution possible est l'évolution élastique iso-α J*L. Durant le trajet LM l'endommagement d croit, entraînant une grande dissipation Δq_i^d. Le retour spontané et instantané à l'équilibre MN* dissipe une énergie Δq_i^α.

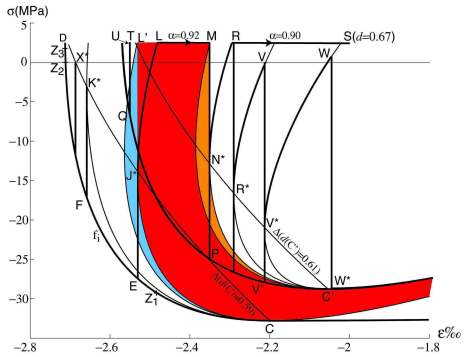


Fig. 2.15: Transformation impossible J*L'MN*

Décharge et retour à déformation nulle N*RSO

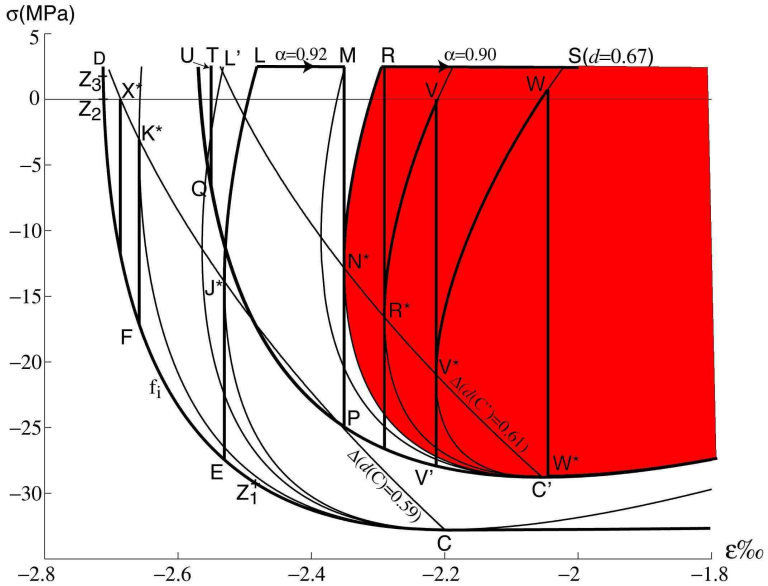


Fig. 2.16: Transformation N*RSO

La décharge commence à l'identique de J*L par une transformation élastique iso-α suivie de la transformation dissipative RS qui peut aller jusqu'à $d = 1$. Toute l'énergie libre initiale $\rho\Psi(\mathrm{R})$ est alors libérée sous forme de dissipation Δq_i^d.

Une des caractéristiques de ce modèle est d'endommager au sens classique, sur d, en post pic, au moment des décharges qui s'effectuent en traction. Est-ce vraiment irréaliste ? Les essais (figure 2.21) sont limités à des contraintes négatives et ce n'est sans doute pas un hasard car il est probable que toute incursion en traction aurait pour conséquence de briser l'éprouvette, ce que prévoit le présent modèle. L'essai est donc plutôt à rapprocher d'une suite de décharges interrompues décrites au chapitre suivant.

Décharges interrompues N*RR*, R*VV* et V*WW*

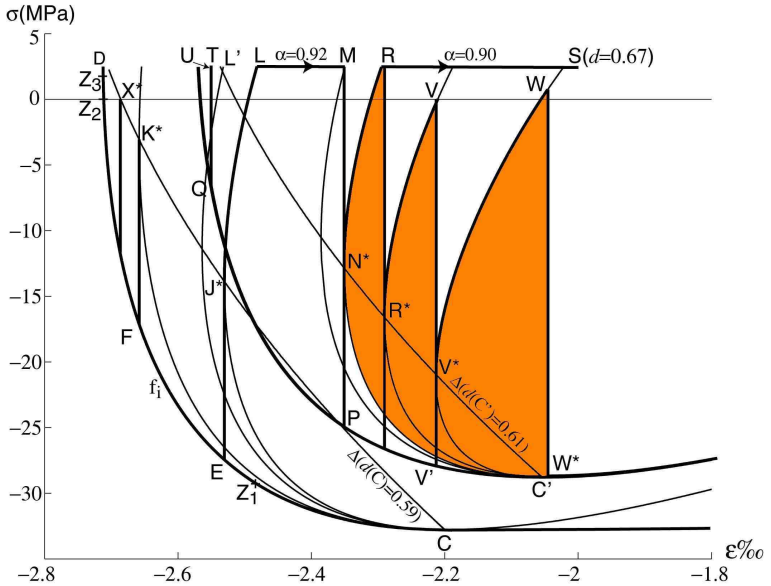


Fig. 2.17: Transformations N*RR*, R*VV* et V*WW*

Ces décharges partielles sont arrêtées avant d'atteindre la surface seuil en traction σ(R). Les retours iso-déformation RR*, VV* et WW* sont dissipatifs sous la forme d'une dissipation associée à la diminution de fraction volumique Δq_i^α. Un des aspect irréalistes de ce modèle est que l'on peut alors recouvrer la contrainte post-pic σ(C), comme en W. Toute décharge à partir de W suit la transformation élastique OC' éventuellement jusqu'à 0.

Ce retour interrompu par des arrêts est de nature très différente du retour continu N*RSO précédent. En considérant une suite de transformations très proches les unes des autres on suit la droite Δ et la dissipation tend vers l'aire C'PN*. L'endommagement ne croît pas dans ce cas. Le côté réaliste de la chose est cependant douteux.

Boucles en déformation N*R*, R*V* et V*W*

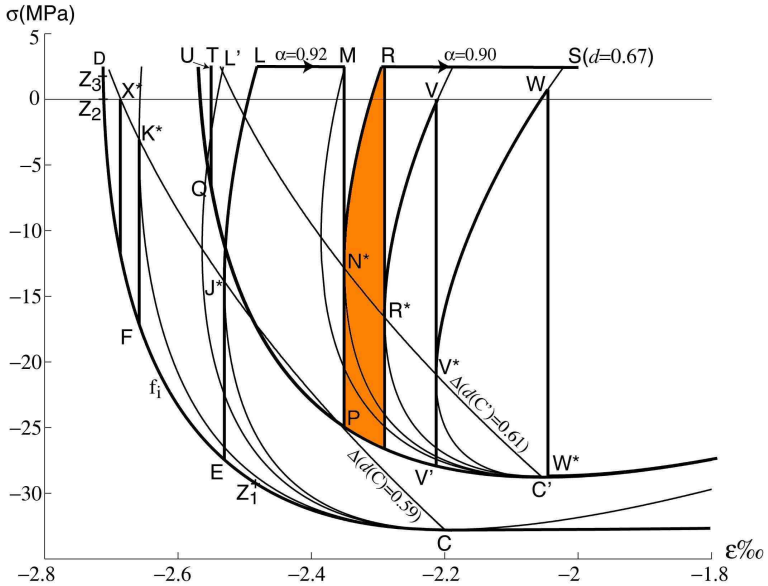


Fig. 2.18: Transformations N*R*, R*V* et V*W*

Le bilan des aires est un peu plus long à établir mais on retrouve naturellement le fait que l'énergie dissipée est égale à l'aire de la boucle, sous la forme de la seule dissipation associée à la variation de fraction volumique Δq_i^α. La recharge vers P peut être instantanée comme dans le cas de la figure ou composée d'un grand nombre de petits segments f_i comme dans le cas de la figure (2.9).

Recharge hors équilibre N*PQTU

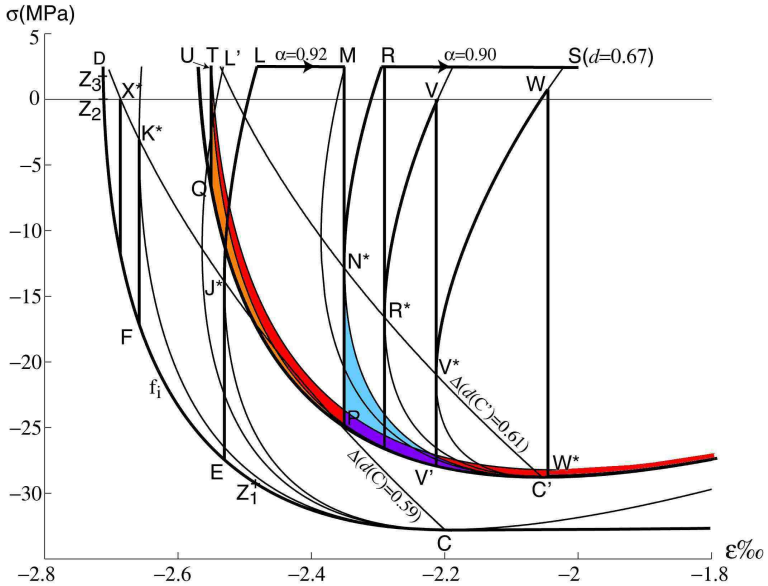


Fig. 2.19: Transformation N*PQTU

Basiquement cette transformation ressemble à J*EFK*. Cependant la droite Δ d'énergie minimale ne peut être atteinte car elle est au delà de la contrainte seuil actuelle en traction σ(T). Une évolution dissipative TU a lieu alors dans laquelle d augmente. Dans le cas de la figure on a d(T)=0,61 et d(U)=0,6131. Cette faible différence est néanmoins visible car l'aire rouge correspond à l'énergie Δq_i^d dissipée au cours de TU. En U l'endommagement ne peut plus croître car α(U)=1 ; n'étant plus en configuration de mélange, ce nouvel état est stable. On se retrouve alors en un point limite du modèle, comme D, où toute déformation inférieure ne peut plus être supportée. Dans le cadre d'une implémentation numérique il faudrait supprimer l'élément, quitte à le «remettre en service» au cas ou le chargement induirait des déformations $\varepsilon > \varepsilon$(U) (l'endommagement n'est pas à 1).

De façon similaire à OEJ*, une transformation peut tout à fait amener le matériau au point X*, à l'intersection d'une droite de minimum d'énergie Δ, à l'équilibre donc, et tel que $\sigma = 0$. Ce point est un nouveau point libre de contrainte et on a ici un effet de plasticité. Hors, celui-ci est introduit sans l'aide d'aucune variable de déformation plastique ε^{p}. Ceci est un point intéressant de ce modèle car il est toujours délicat d'introduire de la plasticité pour décrire le comportement des bétons. Associée à des mécanismes tels que le glissement des dislocations au niveau micro et représentant divers états libres de contraintes possibles au niveau macro, la plasticité n'est pas un phénomène rencontré dans les matériaux granulaires. La contrainte résiduelle qu'exhibent les essais est associée à des refermetures de fissures partielles ou a lèvres décalées comme on l'a étudié dans le chapitre précédent.

La confrontation aux expériences de Kupfer (figure 2.20) ne présente pas d'intérêt majeur au niveau théorique car ces essais ne présentent pas de décharge et la zone OABC «fitée» est essentiellement gérée par les fonctions d'écrouissage f et g du modèle et celles-ci sont déterminées par rapport à cette expérience. Toutefois les déformations transversales importantes correspondent à des coefficients de Poisson apparents $\tilde{\nu}$ plus grand que 0,5 et cela est un point positif par rapport aux modèles d'endommagement habituels.

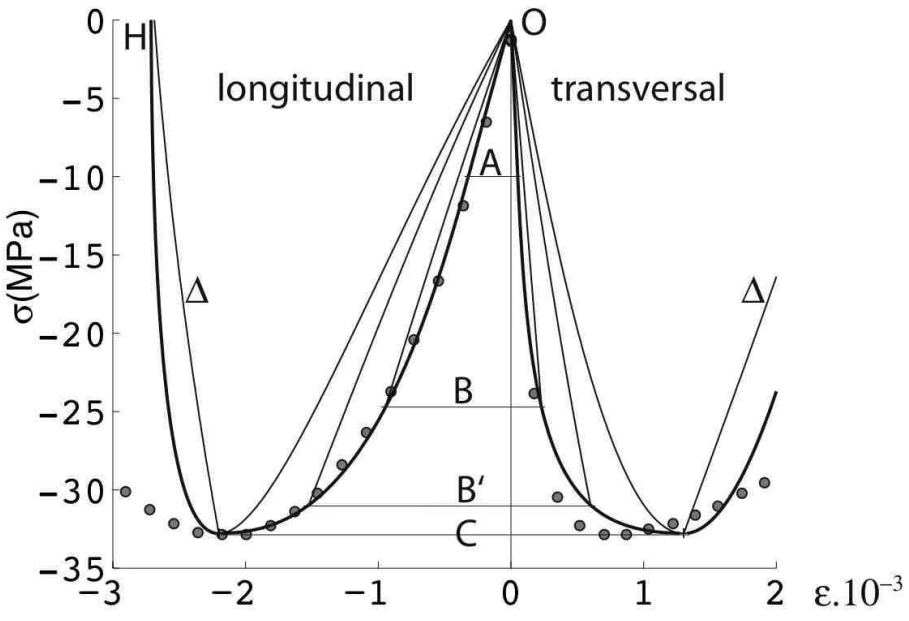


Fig. 2.20: Déformations longitudinales et transversales en compression monotone comparées à l'expérience de Kupfer (cercles).

Les boucles d'hystérésis ne sont pas, dans la forme actuelle du modèle, bien représentatives des retours élastiques observés par exemple par Ramtani (Ramtani 1990) (figure 2.21) : celles-ci sont inclinées selon la pente élastique, qui augmente avec l'endommagement, tandis que le modèle les prédit beaucoup trop droites (figure

2.18). Ce point reste donc à améliorer pour rendre ce modèle plus prédictif. Toutefois le retour N*R est bien incurvé comme le montrent les essais et les modèles issus de la plasticité. Notons que ces derniers présentent en général des boucles à symétrie centrale peu réalistes elles aussi.

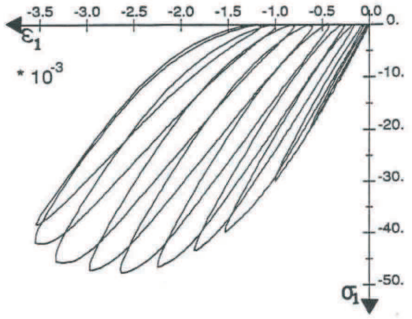


Fig. 2.21: Expérience de compression (Ramtani).

À partir de quand a-t-on un retour dissipatif ? Sans plus de précautions, on peut penser que celui-ci est possible dès que la contrainte pic, en C, est atteinte (à moins de considérer un démon autorisant des fluctuations de contraintes dès avant, à la façon de Maxwell), ce qui correspond au critère de Considère. Néanmoins en considérant que le cohabitation de deux phases, une contractée, une étendue, est un phénomène de localisation, j'ai choisi de considérer le critère de Hadamart et Rice (Rudnicki & Rice 1975) qui donne la possibilité de localisation dès que $\det(\vec{n}.\mathbb{H}.\vec{n}) = 0$, où $\vec{n}$ est un vecteur qui est ici choisi dans le plan $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ puisque $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ ont des rôles équivalents par symétrie. Il y a alors rupture de symétrie car cette normale $\vec{n}$ ne respecte pas la symétrie isotrope transverse du problème de départ (traction sur un matériau isotrope). Le calcul, détaillé dans l'article, donne un déterminant négatif entre les points Z_1 et Z_2, puis au dessus de Z_3. Un débat reste à établir pour savoir si, une fois la localisation établie, celle-ci doit disparaître quand le critère n'est plus respecté (entre Z_2 et Z_3 par exemple) ; je ne le pense pas. Toujours est-il que ce critère retarde l'apparition de la localisation du point C au point Z_2. Les angles trouvés, de 56 degrés environ entre le plan $[\vec{e}_2, \vec{e}_3]$ et $\vec{n}$ est raisonnable par rapport aux expériences (figure 2.22). De plus celui-ci croit jusqu'à 90 degrés en Z_3, reprenant alors l'ancien schéma de la fissuration du béton en compression par des fissures contenant l'axe de compression. Toutefois le passage en 3D de cette approche ne donnera sûrement pas les mêmes résultats car les coefficients de Poisson apparents très différents des deux phases risquent de donner, dans un calcul de structure, des contraintes induites si les phases apparaissent au hasard. Il donnera le même résultat si les phases 1 et 2 sont mises en parallèle (de façon à se dilater latéralement librement).

L'article proposé montre aussi la simulation d'un essai de bi-compression équilibrée qui est pessimiste par rapport aux essais mais fonctionne.

Fig. 2.22: Faciès de rupture d'un béton en compression (Département de Génie Civil)

2.4 Perspectives

Cette approche présente, à mes yeux, des intérêts pour la modélisation des bétons. Même si, dans sa forme actuelle elle n'est pas encore la panacée (au regard des critiques déjà formulées et de ses performances en bi-traction), elle a le mérite d'être, à ma connaissance, nouvelle. Ses points faibles connus sont la mauvaise description du retour qui repasse par la contrainte pic et l'allure trop droite de ses boucles. Ses points forts sont la description de la forte dilatance des bétons et la description de boucles d'hystérésis et de déformations permanentes sans plasticité. Enfin il faut considérer le faible nombre de paramètres mis en cause, avec trois constantes $(\sigma_0, \sigma_y, \varphi)$ et deux fonction d'écrouissage (f, g).

La limitation en endommagement bloqué aux forts confinements est réaliste au niveau des essais. La limitation en énergie libre positive s'est finalement révélée réaliste aussi : dans une sollicitation de traction-compresison, la capacité portante peut tout à fait disparaître sans que l'endommagement soit à 1 : une fissure unique peut conduire à cela. Dans le cas d'un chargement purement hydrostatique, ce blocage n'est d'ailleurs pas rencontré.

Peut être peut-on enrichir de modèle de considérations micromécaniques, lui donner un plus fort contenu mécanique pour la rendre plus prédictive. Pour ma part, j'aimerais la rapprocher des travaux sur les fissures rugueuses, bien sûr. Néanmoins, l'intégration dans un code sera un point très délicat, je pense notamment à l'application du principe de dissipation maximale qui risque de consommer du de temps de calcul. Les résultats présentés n'ont d'ailleurs pas été faits avec le logiciel MatSGen car celui-ci ne peut réaliser le *snap-back* ni rechercher la dissipation maximale. La surface seuil proposée peut par contre être exploitée sans difficultés en s'intégrant dans les modèles actuels.

Chapitre 3

Plasticité multiaxiale et distorsion des surfaces de charge

Cette partie contient essai, modèle et implantation numérique sur le thème de la plasticité multiaxiale et plus précisément de la distorsion des surfaces seuil. Cette contribution, au niveau expérimental, a été réalisée en grande partie pour l'Institut Français du Pétrole.

1 Modélisation de la distorsion des surfaces de charge

Le lecteur pourra se référer à (François 2001) (joint).

1.1 Contexte de l'étude

Cette action de recherche a été menée alors que je travaillais dans l'équipe de Jean Lemaitre, aujourd'hui en retraite.

1.2 Bases de tenseurs et distorsion

La grande majorité des modèles de plasticité utilisent des critères (surfaces seuil) issus du critère de Von Mises, en lui permettant soit une dilatation dans le cas de l'écrouissage isotrope soit une translation dans le cas de l'écrouissage cinématique, soit une combinaison des deux. Séparant les parties déviatorique et hydrostatique (depuis les expériences de Bridgman on sait que l'effet de la pression hydrostatique sur les métaux est négligeable), on peut écrire ce critère sous la forme suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R) = ||\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} - \boldsymbol{X}|| - R - \sigma_{\mathsf{y}} \tag{3.1}$$

Cette écriture n'est pas tout à fait équivalente à l'écriture classique en $\sigma_{\mathsf{eq}} - R' - \sigma'_{\mathsf{y}}$ car le terme en σ_{eq} fait intervenir $\sqrt{3/2}$ afin de valoir exactement $|\sigma|$ en traction tandis que l'expression ci-dessus, en traction simple vaut $\sqrt{2/3}|\sigma| - R - \sigma_{\mathsf{y}}$. Mais, à l'heure actuelle, est-il indispensable de se référer toujours à la traction simple ? Les essais structurels prenant le dessus, je ne le pense pas. D'autre part, au niveau pédagogique, il est plus facile de faire comprendre aux étudiants que les métaux, insensibles à la pression hydrostatique, sont sensibles à l'intensité du déviateur. Car la norme de $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}$ est en effet son intensité en base tensorielle. Cela permet aussi de s'affranchir de la notation en p et q de mécanique des sols, équivalente, a quelques coefficients près, à σ^{h} et σ^{d} qui représentent les intensités des projections $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{h}} = \mathbb{P}^{\mathsf{h}} : \boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} = \mathbb{P}^{\mathsf{d}} : \boldsymbol{\sigma}$.

Dans l'espace des tenseurs du second ordre le critère de Von Mises est donc un (hyper)cylindre et il est une (hyper)sphère dans l'espace des déviateurs à 5 dimensions. Une représentation convenable doit, selon moi, le représenter de forme circulaire et non elliptique comme on obtient dans un graphe (σ , τ) habituel en traction-torsion. Beaucoup de gens ont l'habitude de corriger τ en $\tau\sqrt{3}$ pour pallier cela, mais combien de coefficients faudra-t-il pour des essais plus complexes ? À l'instar d'autres chercheurs, je suggérais, dans cet article, l'utilisation des bases de tenseurs afin d'éviter une fois pour toute ce problème.

Les essais de Marc Rousset ont été menés au LMT-Cachan dans les années 80 sur de l'aluminium Au4g (Rousset 1985, Rousset & Marquis 1985). Sur un graphe

«elliptique», ont distingue mal la distorsion réelle de celle de la représentation. Le graphe (3.1) est représenté dans la base tensorielle suivante :

$$s_1 = \sigma : \boldsymbol{e}_1 \tag{3.2}$$

$$s_2 = \sigma : \boldsymbol{e}_2 \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = 2\frac{\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1}{\sqrt{6}} - \frac{\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3}{\sqrt{6}} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1}{\sqrt{2}} \tag{3.5}$$

Soit, si l'on considère le tenseur des contraintes appliqué en traction torsion $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \tau(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)$,

$$s_1 = \frac{2\sigma}{\sqrt{6}} \tag{3.6}$$

$$s_2 = \sqrt{2}\tau \tag{3.7}$$

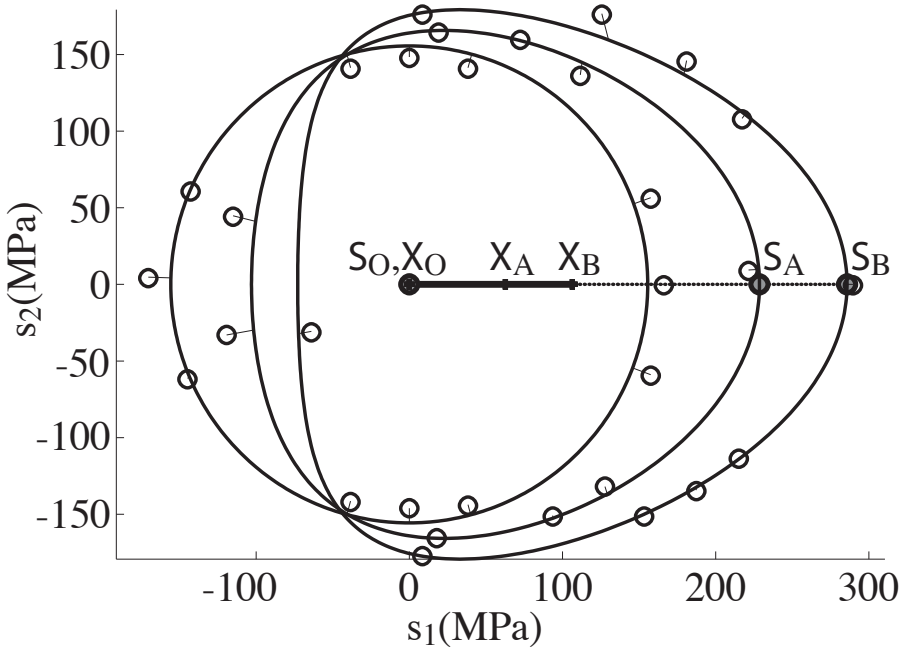


Fig. 3.1: Surface seuil mesurée par M. Rousset (cercles) et simulée lors d'un essai de traction

1.3 État de l'art

Fort de ces représentations je souhaitais décrire l'effet de distorsion, qui rend ovoïde la surface de charge dans le cas de la traction, en modifiant l'expression de

Von Mises et en gardant au maximum sa simplicité. Diverses approches convenablement écrites d'un point de vue thermodynamique existaient déjà : au niveau du laboratoire, une équipe (Boucher, Cayla & Cordebois 1995) a développé une approche dans laquelle est introduite une variable interne. Cette approche, pertinente dans les cas de chargement dans lesquels les directions principales du tenseur des contraintes ne tournent pas, devient délicate dans le cas contraire, par «l'interférence» entre les fonctions (distinctes) créant le «nez» et le «fond» de l'oeuf.

L'approche de Kurtyka et Zyczkowski (Kurtyka & Zyczkowski 1985, Kurtyka & Zyczkowski 1996) consiste à utiliser des propriétés géométriques du cercle, étendues à la sphère, afin de représenter la distorsion. La partie évolution a été calée sur des essais lors de la thèse de Ludovic Vincent (Vincent 2002). Cette approche est efficace mais nécessite 10 nouvelles variables internes et, écrite en directions principales, ne permet (dans sa version exploitable) que l'existance de 3 couples de «nez» et «fond» (dans un espace à cinq dimensions). Au vu des courbes expérimentales j'ai opté pour un modèle simplifié dans lequel la distorsion serait colinéaire à l'écrouissage cinématique (même si ce postulat peut être mis en défaut dans des essais complexes mais pour lesquels la dispersion des points de mesure devient grande et la forme même de la surface sujette à interprétation). On pourra à ce sujet consulter l'article de base de Philips (Phillips & Gray 1961) ou même les mesures de (Rousset 1985).

1.4 Points clé du modèle

Le modèle utilise une contrainte équivalente $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathsf{d}}$ ou «contrainte distordue» conçue de façon à ce que la norme euclidienne de celle-ci représente la forme ovoïdale décrite figure (3.1) : le déviateur $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}$ est séparé en sa partie $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{x}}$ colinéaire à $\boldsymbol{X}$ et son complément $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{o}}$ (on remarque que, $\boldsymbol{X}$ étant déviatorique, $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} : \boldsymbol{X}$).

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{x}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{o}} \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{x}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{X}}{||\boldsymbol{X}||^2}\boldsymbol{X} \tag{3.9}$$

La contrainte distordue prend donc la forme suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathsf{d}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{o}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}_{\mathsf{o}}}{2X_l(R + \sigma_{\mathsf{y}})}\boldsymbol{X} \tag{3.10}$$

dans laquelle X_l est la nouvelle constante introduite dans le modèle, qui correspond à un écrouissage cinématique limite (quand $||\boldsymbol{X}|| = X_l$ la distorsion est complète. Le critère s'écrit alors sous une forme proche de celle d'Armstrong-Fredericks, classique :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R) = ||\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathsf{d}} - \boldsymbol{X}|| - R - \sigma_{\mathsf{y}} \tag{3.11}$$

La surface seuil obtenue, représentée en traction-torsion figure (3.1) est bien représentative des essais de Rousset ou de Philips pour les trajets de chargement faiblement non proportionnels. Les chargement fortement non proportionnels de Philips montrent

des surfaces de charge très déformées, parfois non convexes, et d'après J. Lemaitre, sujettes à caution au niveau de leur réalisme. Le reste du modèle reprend l'écriture classique de l'élastoplasticité, en gérant des problèmes techniques dont le plus ardu est la variable r, associée à R, qui ne représente plus tout à fait l'incrément de plasticité cumulée $||\mathsf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{p}}||$. La surface seuil est convexe et les conditions de dissipation positive sont vérifiées.

2 Implémentation numérique du modèle

2.1 Contexte

Ce modèle, publié dans l'IJSS en 2001, a intéressé l'Institut Français du Pétrole (Michael Martinez et Francis Pradel de l'IFP) pour des calculs de sécurité dont je ne peux pas donner le détail. Nous avons donc signé en novembre 2002 un contrat dans lequel je m'engageais à fournir à l'IFP une UMAT (le module externe d'un modèle pour le logiciel ABAQUS) contenant ce modèle dans une version avec écrouissage cinématique seul. Ce travail a été réalisé dans le cadre du stage de DEA d'Alioune Ciss, étudiant à Paris 6 (Ciss 2003). Cet étudiant, brillant lors de ces études, n'a pas pu mener à bien son travail en raison de problèmes médicaux et la suite en thèse n'a pas été menée. Une bourse CIFRE a été lancée l'année suivante mais, suite à la défection d'un candidat au dernier moment, aucun autre candidat n'a été trouvé à ce moment et la bourse fut perdue. La collaboration a néanmoins continué avec l'IFP sous la forme d'essais qui seront décrits au prochain chapitre.

2.2 Description

Une UMAT reçoit du code la description de l'état actuel $(\boldsymbol{\sigma}(n), \boldsymbol{\varepsilon}(n), \boldsymbol{X}(n), \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{p}}(n))$ et le niveau de déformation à l'état suivant $\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)$. Les sorties réclamées sont l'état correspondant à cette nouvelle déformation et le jacobien (module tangent) de cette transformation $(\boldsymbol{\sigma}(n+1), \boldsymbol{X}(n+1), \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{p}}(n), \mathbb{H}(n+1))$. La programmation de l'UMAT n'appelle pas de commentaire particulier, ce n'était pas une version optimisée pour la rapidité mais une version de développement. Celle-ci a tourné à l'IFP dans la simulation du problème industriel.

2.3 Enseignements relatifs à la confrontation du modèle aux expériences

L'UMAT a été utilisée en comparaison avec le modèle élastoplastique standard afin de déterminer l'influence de la distorsion de la surface de charge sur la réponse globale de la structure. On s'attendait à une influence non négligeable car nous simulions un procédé de fabrication dans lequel le trajet de chargement est non proportionnel : des tensions suivant une direction $\vec{e}_1$ sont suivies de tensions ou de

compressions suivant $\vec{e}_2$. Les modèles ont été calés sur la même réponse en traction (mêmes constantes sauf X_l) et la constante X_l fut testée de façon décroissante ($X_l = \infty$ correspond au modèle classique).

La réponse fut en effet affectée dans le bon sens : le modèle classique prévoyait un déplacement (entre deux points représentatifs de la structure) d'un ordre de grandeur trop grand et le modèle à distorsion réduisait cet écart. Malheureusement, en arrivant à des petites valeurs de X_l la simulation ne convergeait plus. J'ai donc recherché la cause de ce blocage tant au niveau numérique qu'expérimental. J'ai pu identifier la séquence suivante sur un élément de volume comme «minimale et bloquante», à l'aide du logiciel d'intégration MatSGen : une traction suivant $\vec{e}_1$, OA, saturant presque la distorsion, suivie d'une décharge AO puis une traction suivant la direction perpendiculaire $\vec{e}_2$, OB (figure 3.2).

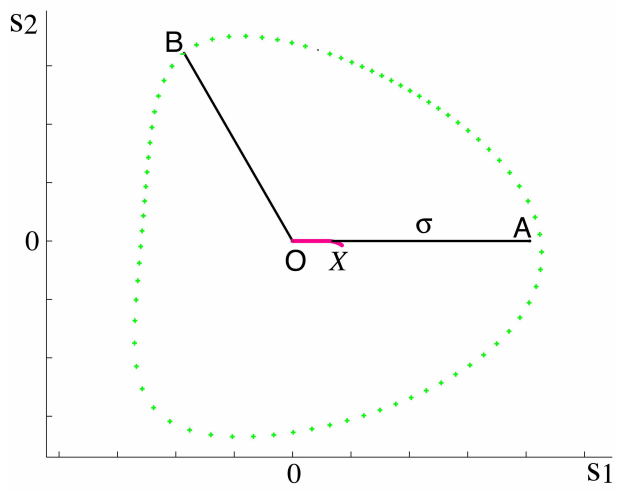


Fig. 3.2: Situation de blocage en B après chargement OAOB

Au moment de la traction suivant OA la surface de charge initiale est atteinte puis la distorsion s'installe et la pointe de l'oeuf est créée au niveau de A. La décharge AO se fait en élasticité. Les tractions, dans l'espace des déviateurs, forment un angle $\theta = 120^\circ$ qui se calcule aisément en base de tenseurs par le produit scalaire entre les deux déviateurs normés :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

La traction suivante, OB atteint donc presque exactement dans un des coins arrière de la surface de charge. Celle-ci est donc amenée à «reculer» pour accompagner la contrainte : l'écrouissage cinématique $\boldsymbol{X}$ doit diminuer. Mais la distorsion est proportionnelle à l'écrouissage cinématique $\boldsymbol{X}$ (équation 3.9) et donc la distorsion

décroît : la surface de charge tend à reprendre sa forme circulaire de type Von Mises. Et ce dernier effet est plus «rapide» que la variation de $\boldsymbol{X}$; la situation est alors bloquée (seul un saut permettrait d'aller chercher un autre $\boldsymbol{X}$ solution).

Une telle situation de blocage, purement géométrique, n'est pas mise en évidence dans les test classiques de validité de modèles. Elle n'apparaît que dans des cas où deux mécanismes sont en compétition (ici la distorsion et l'écrouissage cinématique) et passe les tests de validité des modèles habituels, notamment les test de chargement en forme d'hélicoïde projetée sur une sphère représenté figure (3.3). Celui-ci ne rend pas compte de mon cas de problème qui apparaît lors d'un trajet «en étoile». Les tests de robustesse des modèles demeurent, à ma connaissance, un domaine où une approche rigoureuse reste à déterminer.

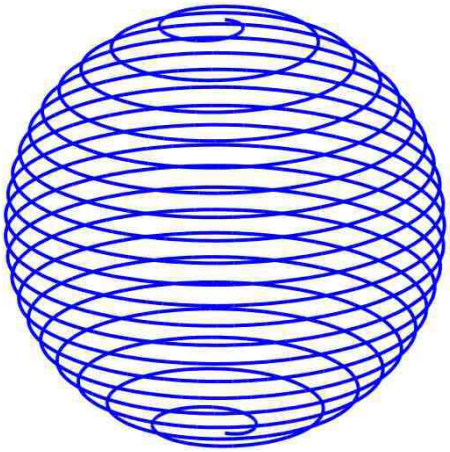


Fig. 3.3: Trajet de test de stabilité classique de pilotage en déformations (ou contraintes) principales

3 Mesure de la distorsion des surfaces de charge

Le lecteur pourra se référer au rapport (François 2005) (joint, en version expurgée de ses valeurs et des enjeux industriels).

3.1 Contexte

Le problème industriel de l'IFP est redevenu de première importance en 2004. Plutôt que de «caler» les modèles sur la réponse macroscopique de la structure, a été décidé de réaliser une campagne d'essais en bonne et due forme. L'objectif était d'identifier la surface de charge initiale, dans un premier temps, et au cours des diverses phases de la mise en forme, dans un second temps. L'ensemble, associé à une nouvelle version du modèle, devait constituer le départ d'une thèse qui n'a

pas eu lieu pour les raisons évoquées précédemment. Néanmoins le contrat signé a été honoré et nous avons mené à bien l'identification de la surface de charge sur le matériau prélevé dans le produit à l'état initial. Le principe général retenu fut de passer d'une conception induisant des mesures à efforts imposés (dans les réalisations précédentes) à des déplacement imposés.

3.2 Petit état de l'art sur les réalisations technologiques des essais biaxiaux

Les éprouvettes biaxiales les plus «simples» (figure 3.4) sont réalisées en forme de croix, avec des zones chanfreinées destinées à limiter les concentrations de contrainte adapter le champ de contrainte. Le concept est basé sur une approche de type poutre supposant, au centre de l'éprouvette, une zone ou se superposeraient les deux états de tension.

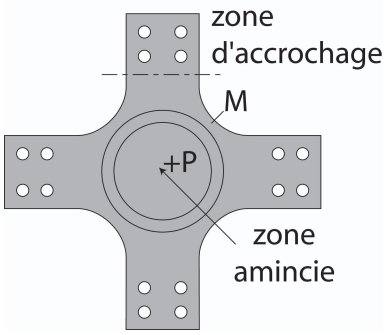


Fig. 3.4: Éprouvette en croix «basique»

Diverses études montrent que seul le point central et les points P proches de ce centre sont effectivement en état de bi-traction ; plus grave, les points les plus sollicités (au sens de Von Mises, relativement au champ purement élastique et donc là ou se produira la première plasticité), sont les points tels que M au niveau du congé de raccordement. En ce point le bord libre, associé à une épaisseur «faible» donc une hypothèse de contraintes planes, implique un état de contrainte uniaxiale qui provoque une contrainte de Von Mises élevée. Cette géométrie d'éprouvette est d'ailleurs encore utilisée dans ce but pour des études concernant les effets de surface et de fatigue (Sermage 1998). Afin d'intensifier le champ de contrainte au niveau de la zone d'intérêt, du centre de l'éprouvette, celui-ci est communément affiné. Le bord extérieur plastifie alors généralement avant, son seul rôle étant de maintenir l'intégrité de la structure et de distribuer les efforts dans la zone d'intérêt.

Le problème qu'exhibent les simulations éléments finis sur ce genre de structure est que le massif de la zone d'accrochage interdit quasiment l'allongement en direction perpendiculaire. La solution adoptée au laboratoire (par différents acteurs) a consisté à appliquer une solution issue du Génie Civil, l'essai PIED (Mazars &

Berthaud 1989, Kupfer et al. 1969) qui consiste (notamment) à appliquer un effort sur une éprouvette par l'intermédiaire d'un «peigne» qui le laisse libre en extension latérale. La géométrie utilisée au LMT, souvent adaptée depuis sa création (Calloch 1997) est typiquement celle représentée figure 3.5.

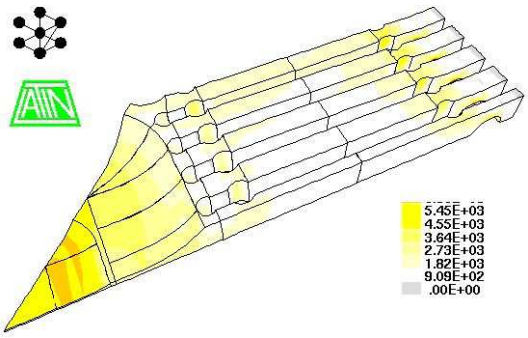


Fig. 3.5: Carte iso-Von Mises de l'éprouvette bi-dimensionnelle LMT (Laurent Champaney)

Rappelons à ce niveau que la machine ASTREE (figure 3.6, on raisonne ici sur le seul axe x) fonctionne avec un asservissement de nature double : le pilotage des vérins impose un «centre» de l'éprouvette fixe au sens où :

$$u_+ + u_- = 0 \tag{3.13}$$

et l'effort de tension sur l'axe x est alors donné par la moyenne suivante :

$$X = \frac{X_L^+ - X_L^-}{2} \tag{3.14}$$

Les peignes sont donc censés annuler les composantes parasites Y_T^+ et Y_T^- représentés. Leur amincissement au pied et au bout des lames du peigne (figure 3.5) se comporte à la manière d'une liaison pivot élastique (développées à l'ENS par Stanislas Konieszka qui a inventé l'architecture des balances électroniques modernes). L'ensemble de ces liaisons pivot se comporte alors comme un mécanisme à barres et autorise un débattement axial (figure 3.7) qui permet d'annuler les efforts parasites Y_T^+ et Y_T^- tout en conservant un déplacement de translation du centre (mécanisme à quatre barres).

Le système fonctionne en supposant que :

- la rigidité des barres, y compris les liaisons souples, est grande devant celle de l'éprouvette
- le corps central conserve une géométrie de parallélogramme en plasticité.

Le premier point ne peux bien sûr pas être réellement vérifié, il s'agit d'un compromis. L'expérience de Cédric Doudart en la matière est que les déformations en face supérieure et inférieure présentent souvent une dissymétrie importante. Une

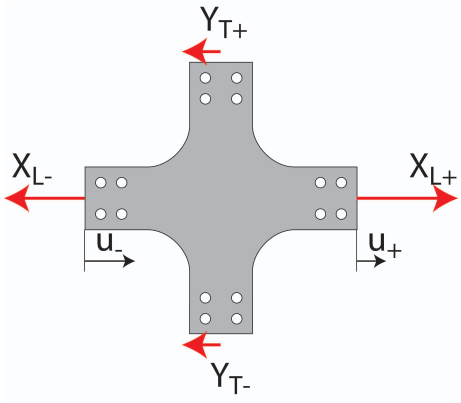


Fig. 3.6: Paramétrage des efforts et déplacements de l'éprouvette en configuration avec des efforts parasites

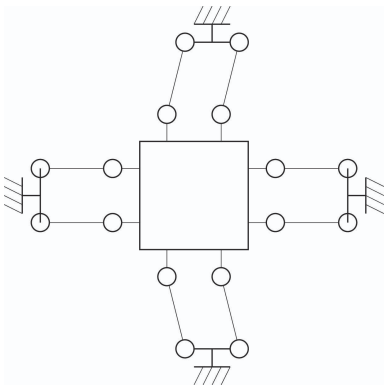


Fig. 3.7: Cinématique désirée avec les peignes et leurs liaisons pivots souples

vue de côté permet de comprendre qu'en compression, une instabilité en flambement est proche de se réaliser ; si le dimensionnement permet de l'éviter facilement en élasticité, la mise en plasticité, même localisée, va considérablement faciliter le phénomène par création de rotules plastiques au niveau des liaisons ou du corps de l'éprouvette (figure 3.8).

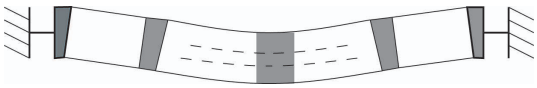


Fig. 3.8: Mode de flambement parasite. Zones de rotules plastiques en grisé. Zone d'intérêt en pointillés.

Le calcul de ce genre de phénomène est délicat et ne peux être que relatif au matériau et à sa plasticité. D'autres problèmes peuvent survenir en liaison avec cette élasticité supplémentaire que représente les peignes et les liaisons souples :

- il est possible d'avoir une rotation solide du corps central (autour de l'axe de symétrie)
- une élasticité supplémentaire dans une machine rend impossible le pilotage précis en déplacement : c'est alors l'effort qui est imposé
- le bon fonctionnement du montage présuppose une géométrie de la machine, y compris sous charge, très rigoureuse. Or, d'une part la machine ASTREE est de très grande dimensions et d'autre part un empilement de pièces intermédiaires (vérins, paliers, têtes...) ne le permet pas.

Enfin cette réalisation est onéreuse et nécessite, dans le cas où l'on ne dispose pas de brut suffisamment grand, la soudure des peignes sur l'éprouvette, près du corps central.

3.3 Nouvelle éprouvette biaxiale

Afin de pallier ces problèmes a été décidée l'étude d'une nouvelle éprouvette. Elle est basée sur deux concepts différents par rapport à la précédente :

- l'éprouvette, au niveau de ses liaisons sera la plus rigide possible
- on ne cherche plus à éliminer les efforts Y_T parasites. La symétrie de l'essai sera imposée en déplacement (on conserve bien sûr le même asservissement en déplacement moyen nul).
- la compensation des défauts géométriques de la machine sera confiée au montage. En service, les liaisons éprouvette-machine seront des liaisons complètes les plus rigides possibles.
- pour réaliser les points précédents, la liberté d'expansion latérale ne sera plus confiée à des peignes.

Pour réaliser la liberté d'expansion latérale sans peignes, le raisonnement suivi est que le bord épais commun à toutes ces éprouvettes impose plus ou moins une condition de déplacement au voile qui est la zone d'intérêt. Dans la géométrie LMT, ce

bord est carré avec des arrondis. Dans la nouvelle géométrie ce bord épais a été réalisé avec un décrochement intermédiaire dont la vocation est de réaliser un soufflet. Celui-ci pourra donc accommoder aisément les déformations relatives à l'autre axe. Un paramètre important pour l'éprouvette est le coefficient de couplage (page 8 du rapport) : le paramètre B^{-1} est ici très important (du même ordre de grandeur que l'éprouvette LMT). Une action des vérins suivant x entraînera alors presque exclusivement une traction suivant x, sans traction ou compression parasite suivant y. Pour des raisons du budget et de temps nous n'avons pas complexifié plus la géométrie de l'éprouvette afin de rechercher un état de contrainte parfaitement homogène dans la zone d'intérêt. Le champ élastique iso-Von Mises et la forme de l'éprouvette sont montrés figure (3.9).

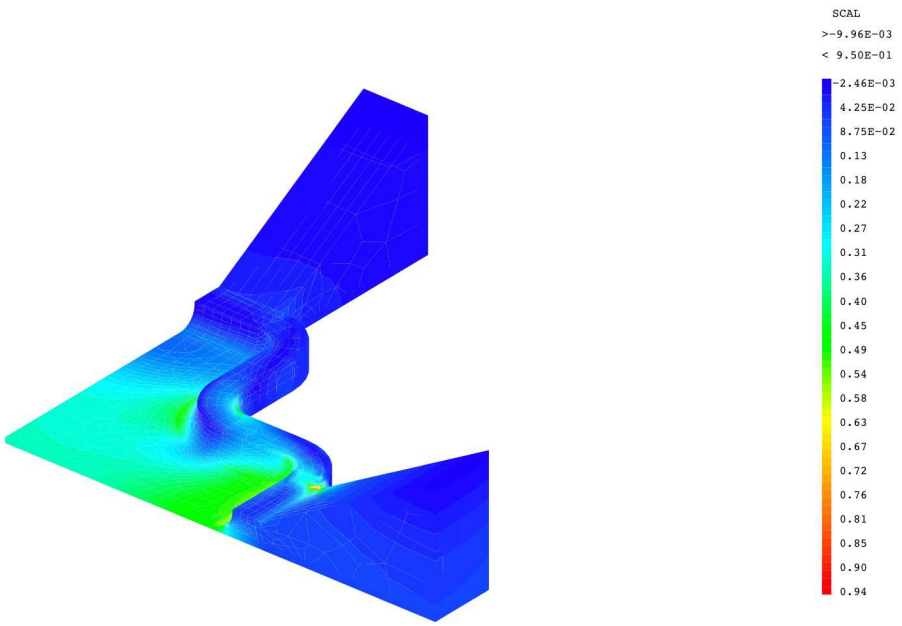


Fig. 3.9: Nouvelle éprouvette bi-dimensionelle : iso-VonMises, soumise à des forces axiales $X_L, -X_L$ et libre suivant l'autre axe $Y_L = 0$.

Le matériau brut étant disponible en faibles quantités, les pyramides d'accrochage sont rapportées par soudure, ce qui ne devrait pas altérer les caractéristiques de l'acier utilisé car c'est assez loin de la zone d'étude. L'usinage était un fraisage UGV et la surface de la zone d'étude fut polie électrolytiquement. La géométrie a été optimisée à l'aide d'un maillage paramétrable dans CAST3M. Les critères de performance étaient la constance de la contrainte dans la zone d'étude, l'importance du paramètre de couplage et la taille de la zone d'étude. Comme nous le verrons ensuite, la concentration de contrainte au bord de la soudure va poser problème... C'est un point améliorable.

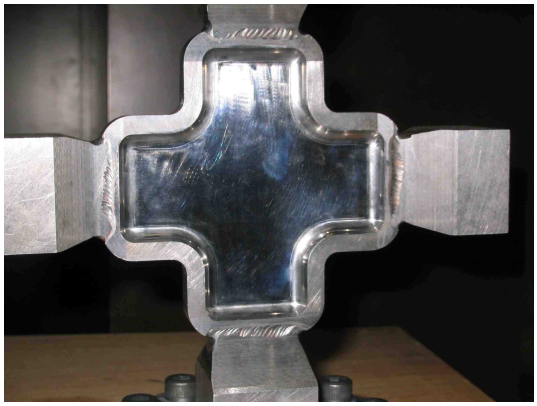


Fig. 3.10: L'éprouvette réalisée pour l'IFP.

3.4 Le montage

Le montage a été réalisé, conformément à ce qui précède, selon le cahier des charges suivant :

- permettre un positionnement isostatique en phase de montage.
- être le plus rigide possible en phase de fonctionnement.

Le positionnement isostatique en phase de montage est réalisé par le schéma cinématique figure (3.11). Le choix du type de liaison a été guidé par des impératifs technologiques afin de simplifier le système de blocage qui sera décrit ensuite.

La liaison machine ASTREE-vérin est structurellement une liaison pivot glissant. Les liaisons aux points P_i pour $i \neq 1$ sont des liaisons rotule. La liberté interne (rotation propre des vérins) n'influe pas le fonctionnement. La liaison en P_1 est la combinaison d'une rotule et d'un appui plan. En considérant le torseur cinématique éprouvette-bâti (où e est l'éprouvette et 0 le bâti de la machine) défini par chaque liaison :

$$\left\{\mathcal{V}_{e/0}\right\} = \left\{\vec{V} \quad \vec{\Omega}\right\}_{P_1} \tag{3.15}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{e/0}\right\} = \left\{v_2\vec{e}_2 \quad \vec{\Omega}\right\}_{P_2} \tag{3.16}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{e/0}\right\} = \left\{v_3\vec{e}_1 \quad \vec{\Omega}\right\}_{P_3} \tag{3.17}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{e/0}\right\} = \left\{v_4\vec{e}_2 \quad \vec{\Omega}\right\}_{P_4} \tag{3.18}$$

Il est aisé de prouver que toutes les composantes de ce torseur sont nulles et que le système est isostatique. La mise en place de l'éprouvette pourra alors se faire sans générer d'efforts parasites et plus aisément qu'à l'accoutumée : une fois l'éprouvette pré-installée, il suffit de faire avancer les vérins avec un «faible» effort imposé et le système se met en place de lui-même.

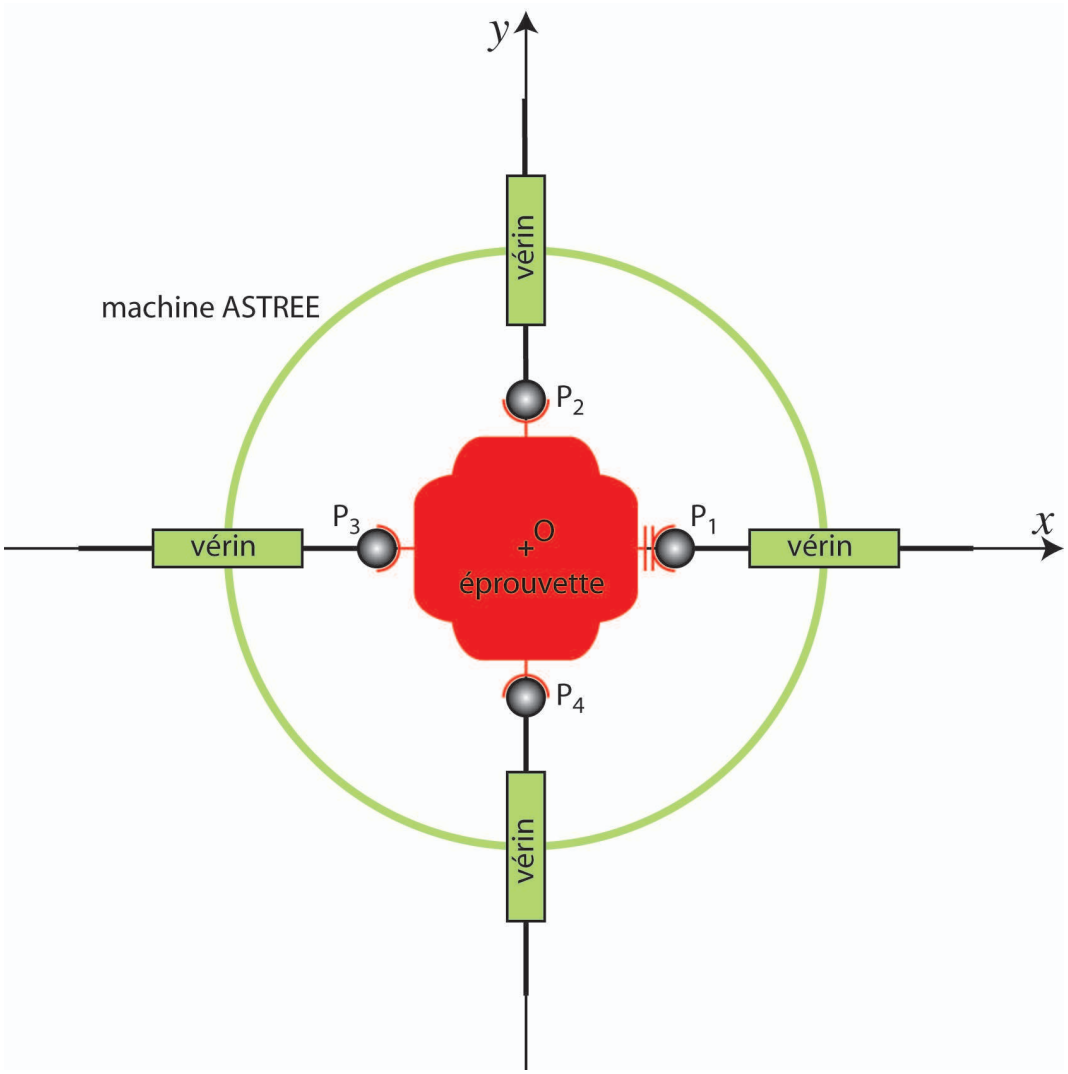


Fig. 3.11: Schéma cinématique du montage.

Les liaisons rotules sont constituées de sphères prises entre deux plateaux munis de portées coniques à faible pente ; une couronne de vis serre l'ensemble et le bloque. La faible pente minimise l'effort de serrage nécessaire. La couronne mobile, une bague, est serrée une fois la machine mise en «faible» compression suivant les deux axes de façon à ce que les efforts de serrage ne soient pas reçus par l'éprouvette (à l'exception du couple de serrage). La liaison plane supplémentaire est simplement obtenue par le non centrage des cônes sur les têtes de la machine. Voir la figure (3.12).

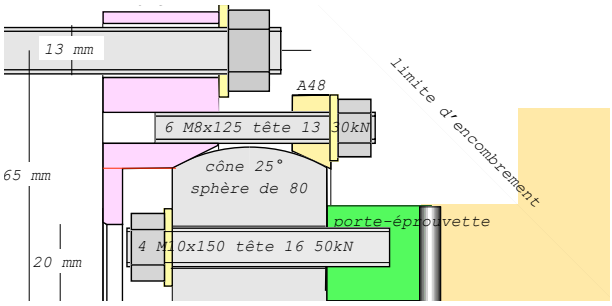


Fig. 3.12: Plan d'une liaison rotule blocable.

La liaison sphère-porte éprouvette est serrée en premier à l'étau. Les mords sont positionnés sur les pyramides afin de ne pas affecter l'éprouvette. Cette liaison est dimensionnée en traction et au glissement en supposant la machine à effort maximal sur l'axe perpendiculaire. Le liaison entre le plateau fixe et la tête de la machine utilise les perçages pré-existants. La couronne de vis de blocage de la liaison rotule (les vis les plus petites) est dimensionnée de façon à résister, par frottement, à ce même effort maximal sur l'axe perpendiculaire. (celle-ci s'est avérée correcte lors de l'essai mais sous dimensionnée lors du dysfonctionnement du programme de pilotage).

Le reste de l'étude est une détection de surface seuil «habituelle», avec un trajet de détection en étoile afin de recentrer au maximum la surface seuil, c'est à dire de minimiser l'influence de la microplasticité développée lors de la détection (voir le chapitre 4 du rapport pour de plus amples renseignements). La surface seuil est considérée atteinte au moment de la détection d'une non linéarité dans le graphe $(\sigma^{\mathsf{eq}}, \varepsilon^{\mathsf{eq}})$ qui s'exprime (à quelques coefficients près) en base de tenseur $(||\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}}||, ||\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}}||)$: il s'agit donc de comparer la module de cisaillement actuel $2\tilde{\mu}$ avec le module de cisaillement 2μ élastique initial. La détection se fait donc à l'aide d'un *offset*, c'est à dire d'une bande de tolérance en déformation autour de la droite élastique. L'offset retenu ici fut de $5\ 10^{-6}$ ce qui est une valeur très faible pour ce type d'essais. La nouvelle géométrie a d'autre part permis de réduire l'écart entre déformations inférieures et supérieures en dessous de $5\ 10^{-5}$, à comparer aux 10% obtenus pour les précédentes générations d'éprouvettes. Les surfaces seuil obtenues, en base de tenseurs, ont permis à l'IFP d'identifier les distorsions associées au procédé

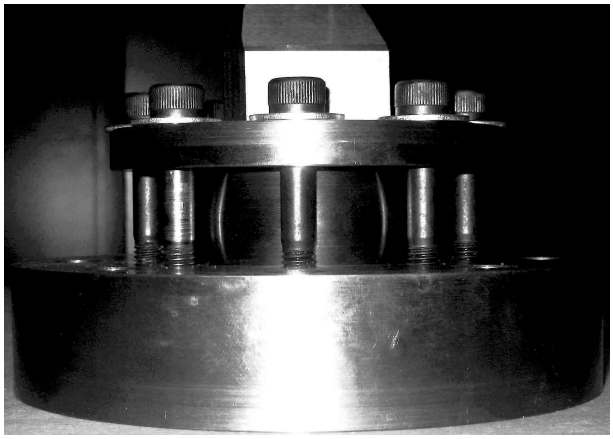


Fig. 3.13: Photo d'une liaison rotule blocable.

d'obtention.

L'éprouvette proposée a permis, lors de sa première utilisation, d'égaler ou de dépasser les précisions obtenues par les générations précédentes, validant ainsi le fait qu'il est préférable d'imposer des déplacements plutôt que des efforts au niveau de la frontière de l'éprouvette. Au niveau des liaisons, les blocages des rotules sont à renforcer et l'ergonomie pourrait être améliorée. L'éprouvette n'a pas été utilisée en plasticité (généralisée) ni en fatigue, il conviendrait de le faire. Enfin, la zone d'étude pourrait prendre une forme plus complexe afin d'optimiser mieux la constance du champ de contrainte en zone d'intérêt.

D'un point de vue plus général je souhaiterai appliquer ce type de concepts (montage isostatique en phase d'assemblage puis rigide en fonctionnement) aussi bien aux machines uniaxiales classiques qu'à des développements futurs, comme le le projet SÉSAME de la Fédération Ile de France Sud pour lequel j'ai proposé le texte suivant :

«Les machines d'essai actuelles (uni ou multi-) axiales ont des structures conçues pour le quasi-statique : leur flexibilité introduit des modes propres de résonance qui rendent les mesures difficiles dès quelques dizaines de Hz. Les machines à haute fréquence sont encore essentiellement uniaxiales et ne permettent pas des mesures aussi fines que les machines quasi-statiques.

Les machines d'essai de nouvelles génération devront réaliser des mesures avec une gamme de fréquence de sollicitation pouvant varier continûment du quasi-statique au dynamique rapide, tout en conservant une précision sur les mesures. Le bâti devra évoluer vers des structures de grande rigidité avec des masses mobiles réduites au minimum. Un saut technologique semble se profiler au niveau d'actionneurs électriques produits par la société Bose permettant une gamme de forces suffisante (6kN) sur une large gamme de fréquences. On constate d'ailleurs une tendance à la réduction de la taille des éprouvettes qui rend les machines actuelles surdimensionnées en terme de force.

Au niveau de l'architecture, les prochaines machines multiaxiales devront être modulaires pour permettre une plus grande flexibilité qu'aujourd'hui. Un minimum de 6 actionneurs est nécessaire pour identifier des comportements anisotropes (qu'ils soient natifs ou induits). Le système constitué doit alors pouvoir être associé à des conditions environnementales (température, gaz,...) et à des moyens de mesures physiques (mesure de champs, de déplacement, de température, de phases,...). La machine doit être isolée du reste du monde et la plateforme d'essais du LMT-Cachan est prévue pour cela.

La séparation essais-calculs doit aussi se réduire progressivement : par exemple les essais multiaxiaux se font en général sur des structures qui ne sont pas des zones de champ constant (éprouvettes) mais des structures : leur traitement nécessite un calcul de simulation mené en temps réel. De même, la mesure sur matériaux intelligents (AMF, composites piezzoélectriques...) nécessite de considérer le matériau comme un actionneur, c'est à dire à identifier une fonction de transfert. Le système d'essai devra alors être capable d'alimenter l'éprouvette elle-même.

Enfin un tel système nécessite un logiciel de pilotage adapté aux chercheurs et un environnement comme celui proposé par LabView semble adapté à nos besoins en recherche, au contraire des logiciels actuels dédiés aux essais répétitifs.»

Concevoir une telle machine représente une activité à plein temps et d'une durée d'un an au minimum mais ce projet me semble d'une importance vitale pour un laboratoire comme le LMT ou un autre de taille comparable. La révolution des mesures de champ de ces dernières années n'a pas eu son pendant au niveau des machines d'essais.

Par exemple, que penser d'une mesure de champ effectuée sur une barre prismatique en tension dans une machine uniaxiale classique munie de mords en cale pentée ? Ceux-ci, à cause du frottement tantôt sur la pente d'un mords tantôt sur l'autre, sont instables et génèrent des flexions parasites. Dans une mesure thermique fine, ces frottements, dissipatifs, viennent eux aussi fausser la mesure. La masse des têtes, de l'ordre d'une dizaine de kg, consomme toute l'énergie de la machine dès que les fréquences dépassent la dizaine de Hz. Il est temps, à mon sens, de travailler sur des machines de nouvelle génération adaptées aux essais que nous menons.

Chapitre 4

Viscoélasticité anisotrope des bois de lutherie

En suite logique des mesures sur l'élasticité anisotrope (François 2000c), mes travaux se sont portés vers la mesure de la viscoélasticité anisotrope des bois de lutherie ou de leur successeur possible, les composites viscoélastiques. Ce chapitre est essentiellement dédié au montage d'essais développé pour le Laboratoire d'Analyse Musicale de Paris 6 qui est actuellement en cours d'industrialisation au laboratoire de la Cité de la Musique. La dernière partie montre les travaux en cours sur les bétons bitumineux.

1 Contexte

1.1 Description du BQR «Piano»

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un BQR de Paris 6 nommé «optimisation des paramètres mécaniques de la facture de piano en relation avec les attributs perceptifs de la qualité sonore selon plusieurs points de vue esthétiques». Le responsable de ce projet est Charles Besnainou, IR CNRS au LAM (Laboratoire d'Analyse Musicale, 11 rue de Lourmel 75015 Paris). Le projet a été accepté en juillet 2002. Voici le bilan du BQR du 25 octobre 2004, rédigé par C. Besnainou :

Optimisation des paramètres mécaniques de la facture de piano en relation avec les attributs perceptifs de la qualité sonore selon plusieurs points de vue esthétiques

Responsable du projet : Charles Besnainou, ingénieur de recherche

Laboratoires concernés :

- Laboratoire d'Acoustique Musicale, UMR7604 du CNRS, Michèle Castellengo (émérite), Danièle Dubois (DR), Julien Bensa (postdoc), Laurent Daudet (MdC), Pascale Cheminée
- Laboratoire de Modélisation en Mécanique, UMR 7607 du CNRS, Joël Frelat (CR), Pascal Ray (IE), Adrien Mamou-Mani (doctorant)
- Laboratoire de Mécanique et de Technologie, LMT-Cachan, Marc François (PrAg)
- Laboratoire de Recherche en Informatique, Michèle Sebag (DR) + José Antunes (DR, ITN-Portugal)

Problématique générale

Depuis maintenant trois années consécutives, l'Atelier Piano tient une réunion mensuelle, réunions au cours desquelles une partie du temps est consacrée à des exposés spécialisés soit de membres de l'atelier ou bien de personnes invitées, une autre partie étant dédiée à l'élaboration de projets d'études ou à l'exposé de résultats. Ces réunions ont permis la confrontation et l'articulation des compétences des divers partenaires afin de répondre à la question de la qualité sonore, tant à partir des expertises en mécanique qu'en évaluation perceptive.

Bilan

1. Sur la base d'un premier corpus de jugements des qualités sonores de 9 pianos par 18 pianistes (corpus recueilli par S. Busson lors de son stage de DEA en 2002), l'analyse linguistique menée par Pascale Cheminée (chercheure associée) a permis d'identifier que le vocabulaire des pianistes, leur « jargon », s'oriente autour de deux grands axes : la percussion et la résonance. Sur un plan linguistique et sémantique, c'est ainsi la conjonction de la résonance et de la percussion qui détermine, le timbre et la plus ou moins grande variété de ses couleurs, notions à laquelle il s'agit maintenant de donner une transcription dans un modèle physique.

2. À partir des enregistrements acoustiques effectués en 2002 sur ces mêmes 9 pianos, Cosmin Gherghinoiu (étudiant d'acoustique musicale au CNSMDP) a construit un test perceptif de similarité-dissimilarité afin de préciser les catégories perceptives et cognitives du timbre du piano. L'analyse des distances subjectives ainsi repérées à partir des jugements de 40 sujets a permis de confirmer les classements catégoriels précédement identifiés par les 18 pianistes qui avaient participé au test de S. Busson. (Ce travail a en outre permis de valider la robustesse du protocole de questionnement mis au point par le LCPE (Danièle Dubois, LAM).
3. Symétriquement, rejoignant la démarche psychophysique classique, la production de sons de synthèse réalisée par Julien Bensa (postdoctorat du CNRS) a permis l'élaboration d'un test d'évaluation subjective des paramètres d'inharmonicité, de raideur ainsi que les couplages non-linéaires entre modes transverses et modes longitudinaux des sons de piano. Trois groupes de 12 sujets (pianistes, musiciens, amateurs) devaient regrouper comme ils l'entendaient ces 16 sons de synthèse en plus d'un son naturel enregistré. Un des résultats principal est que les pianistes sont plus homogènes et plus proches dans leurs jugements de la description physique du signal que les sujets musiciens, mais non pianistes, qui ont adopté des stratégies d'écoute et donc de classement, tout aussi cohérentes mais différentes et davantage associées à des propriétés physique de l'instrument.
4. Marc François (LMT-Cachan) a mis au point une méthode originale de mesure de la viscoélasticité qui a permis de montrer que les éprouvettes en matériaux composites préparées par Charles Besnainou (LAM) se distinguaient des éprouvettes de références en bois et étaient plus proche du duralumin. Ainsi, en élaborant un nouveau composite dont la viscoélasticité a les mêmes valeurs que celles du bois, plusieurs instruments ont été construits (luths, guitares, violon). Ces instruments sont bien mieux appréciés que les précedents, les musiciens leurs trouvent des qualités sonores similaires à de bons instruments en bois.
5. Au cours de son stage de DEA, Adrien Mamou-Mani a fait la mesure de l'impédance au chevalet du piano du LAM. Cet instrument a été modifié par Eric Marandas (facteur de piano) pour modifier la charge des cordes sur la table d'harmonie. En effet, ce paramètre de charge combiné avec une précontrainte appliquée à la table lors du collage est considéré par les professionnels comme étant essentiel aux qualités sonores de l'instrument. Pour trois charges différentes, les mesures de l'impédance au chevalet ont pu montrer que notre instrument, vieux d'un siècle, avait perdu depuis longtemps la précontrainte d'origine (Ibach, 1904). Dans le même temps, nous avons constitué une base de données acoustiques avec l'enregistrement de toutes les notes de cet instrument pour trois charges différentes et récolté les verbalisations libres de cinq pianistes et de cinq facteurs de piano au cours des différents états de charge.
6. Joël Frelat (LMM) a entrepris de modéliser les effets combinés de la précontrainte d'une plaque soumise à une charge statique. Plusieurs étudiants ont pris part à ce travail au cours de stages. Les premiers résultats indiquent une forte dépendance des masses modales et de raideurs modales des modes propres de la plaque. Plus récemment, avec Adrien Mamou-Mani (doctorant), un modèle de plaque avec comportement de flambage a été réalisé, et les premières mesures sur notre piano corroborent le modèle.

7. Bernard Richardon (Pr. invité, Université de Cardiff), A. Mamou-Mani et Ch. Besnainou ont fait des mesures sur notre modèle expérimental qui attestent d'un comportement non-linéaire des structures précontraintes chargées.

Réunion de l'AtelierPiano

- Pirouz Djoharian : «Modèles viscoélastiques»
- Claire Simmonet : «Viscoélasticité des vernis de lutherie»
- Marc François : «Dispositif de mesure de la viscoélasticité»
- Danièle Dubois : «Les méthodes psycholinguistiques en science cognitive»
- Michèle Castellengo : «Comment aborder l'étude de la qualité sonore des instruments de musique»
- José Antunes : «Optimisation de forme pour la production ciblée d'un spectre de fréquence»
- Charles Besnainou : «Des matériaux composites pour la lutherie, et descripteurs de la qualité»
- Michèle Sebag : «La fouille de données et les théories de l'optimisation»
- Julien Bensa : «La modélisation et la synthèse des sons de pianos»
- Joël Frelat : «La modélisation de la précontrainte et de la charge des cordes sur un piano»
- Pascale Cheminée : «Analyse lexicologique d'une enquête sur les pianos au Laboratoire d'Acoustique Musicale»

Dans le même temps plusieurs stages d'étudiants ont été organisés sur les thématiques du projet BQR (...)

Collaborations

A l'initiative de Marc François un dispositif original de mesure de la viscoélasticité à été mis au point et les résultats obtenus sont actuellement confrontés avec ceux d'Iris Brémaud, doctorante au LMGC à Montpellier. Une convention de recherche sur ce sujet a été signé entre le Musée de la Musique, le LAM, le LMT et le LMGC.

Contact industriel

Les responsables de la société de production des pianos Pleyel nous ont rencontré et ce premier contact nous permet d'envisager d'avoir accès aux instruments de série pour une collaboration à construire.

Colloques (Besnainou & François 2004, Besnainou & Gibiat 2004)

Plusieurs membres de l'AtelierPiano participent soit en tant que conférenciers soit en tant qu'auditeurs à l'école "Science et Musique" dont le but est de mettre en contact l'univers des sciences cognitives et celui des sciences physique du 27 septembre au 3 octobre 2004

1.2 Synthèse des résultats obtenus par l'équipe

1.2.1 Le niveau perceptif

Un ensemble de 9 pianos de concert du CNSMD (Conservatoire national supérieur de musique et de danse de Paris) ont étés auditionnés par 18 personnes de profils distincts : concertistes, professeurs, accordeurs et étudiants. Ceux-ci ont livré leurs impressions auditives. Danièle Dubois, DR dans l'équipe Langage, Cognition, Perception, Ergonomie du CNRS a géré l'analyse psycholinguistique pour accéder aux descripteurs des qualités sonores et celles qui sont recherchées par les experts qu'a recensé Michèle Castellengo (DR émérite LAM) (Castellengo, Besnainou & Dubois 1999, Bensa, Dubois, Kronland-Martinet & Ystad 2006). Par exemple, qu'est-ce qu'un son «léger» ; est-ce pareil que «cristallin» ? Veut-on un son «rond» ou «sec» ? Le corpus de mots obtenus a été analysé aussi par Pascale Cheminée (Linguiste à Paris 3) qui a déduit des relations intéressantes et surprenantes sur le sens des mots (Cheminée, Gherghinoiu & Besnainou 2005). À titre d'exemple, si on dit qu'un piano a un son *clair* : qu'est-ce que cela signifie ? Suivant le contexte, on pourra comprendre une connotation positive pour les sens (clair=défini, net, précis...) ou négative (clair=sec, agressif, clinquant) ou encore positive mais différente (clair=lumineux, chaud).

1.2.2 Modélisation et mesures de la table d'harmonie

L'objectif est de retrouver par la simulation les effets de divers réglages et choix de procédés de fabrication. Ces effets sont connus de façon empirique par les facteurs. Au niveau des réglages, la précontrainte, la charge (force exercée par les cordes sur la table d'harmonie) de la table est, semble-t-il un facteur très important. La courbure initiale (en chapeau de gendarme) en est un autre et la densification du bois de la table un troisième.

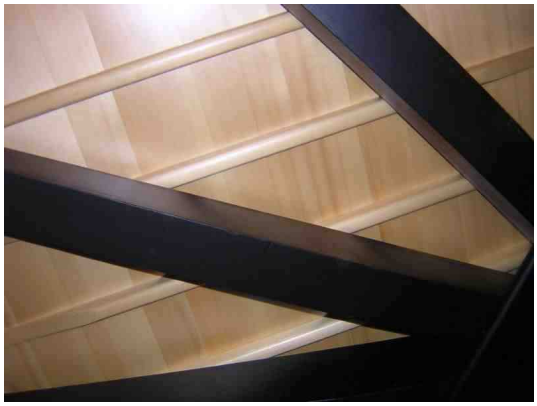


Fig. 4.1: Table d'harmonie avec son barrage (raidisseurs) au dessus du cadre en fonte (noir) (Wikipedia)

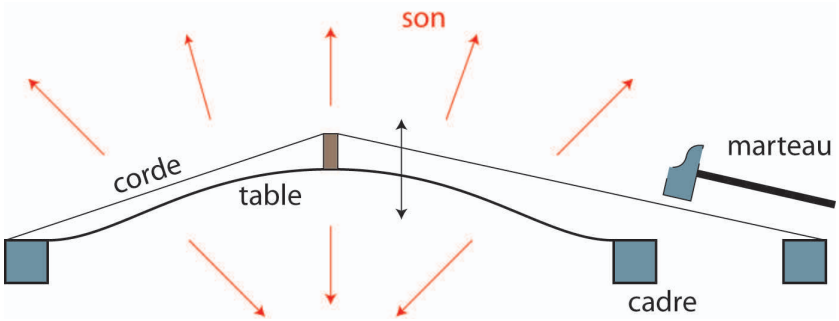


Fig. 4.2: Schéma de principe du piano

Une étude analytique a été menée (Mamou-Mani, Frelat & Besnainou 2005) sur un modèle simplifié de la table de piano (figure 4.3) qui a pour but de mettre en évidence l'influence de la précharge sur la réponse de la table. Ce modèle est composé de deux barres élastiques articulées au bâti et entre elles via une masse ponctuelle.

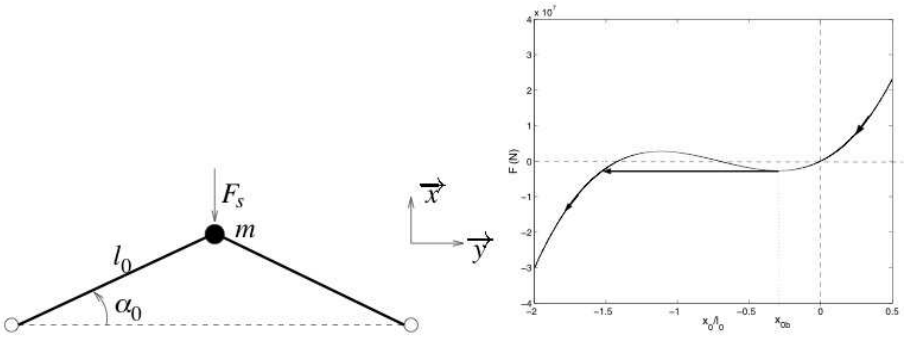


Fig. 4.3: Modèle simplifié de la table et sa réponse statique (A. Mamou-Mani)

Ce mécanisme n'est pas sans rappeler les barres non linéaires d'Erikssen (Eriksen 1975) Dans le régime des petites perturbations, la précharge abaisse la fréquence propre du système ; lorsque la précharge correspond au point d'instabilité (noeud au milieu des points d'appui) la fréquence de résonance est évidemment nulle. Dans le régime des grandes perturbations on constate deux phénomènes qui augmentent tous deux avec la précharge :

- la fréquence de résonance décroît avec l'amplitude de vibration ;
- la seconde harmonique croît.

Ces effets sont a rapprocher de ceux décrits par les facteurs sur l'influence de la précharge, même si la structure est encore très simplifiée. Des travaux plus récents ont été menés par la même équipe sur une poutre en arche à laquelle on impose un déplacement δ en son centre (figure 4.4) et une force imposée en un point représentant la corde. Le matériau est élastique et faiblement visqueux. Deux conclusions majeures sont apparues depuis cette étude et les travaux de Vincent Maurel

et Cécile Lacroix (étude des masses modales sur une table d'harmonie en fonction de la précharge) :

- pour chaque mode de vibration, il existe une précharge qui minimise la masse modale ; en extrapolant, il existe une précharge qui maximise l'amplitude de vibration et le son émis.
- lorsque l'on se rapproche de la bifurcation (le point ou la structure, à la manière d'une boite de Cachou, se retourne), il y a rapprochement des pics de réponse et enrichissement spectral (figure 4.5).

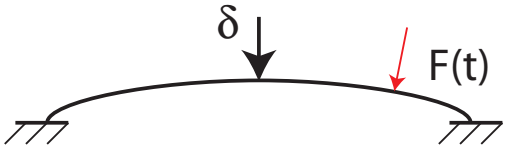


Fig. 4.4: Modèle arche (J. Frelat)

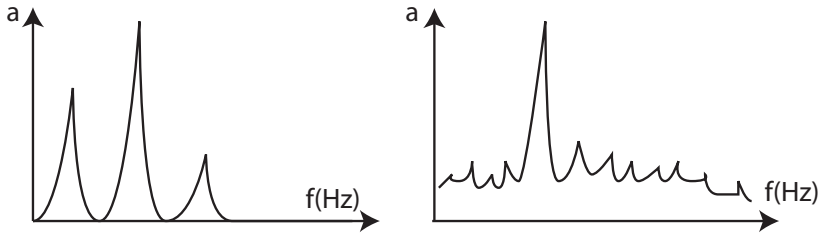


Fig. 4.5: Réponse en fréquence schématisée sans précharge ($\delta = 0$) à gauche et avec, près de la bifurcation, à droite

Le premier effet correspond à la tendance générale de l'évolution des instruments de musique au cours de l'histoire : faire plus de bruit. Le second effet correspond lui aussi à une amélioration en terme de perception sonore car l'oreille apprécie dans une certaine mesure l'enrichissement spectral. La présence d'un optimum correspond à ce que décrivent les facteurs.

L'étrangeté de la réponse près de la bifurcation a conduit le groupe de recherche à réaliser une maquette de la table d'harmonie, réalisée par C. Besnainou. Celle-ci se compose (figure 4.6) d'une poutre en carbone époxy bridée à ses extrémités et qui prend donc naturellement la forme de chapeau de gendarme. C. Besnainou et Adrien Mamou-Mani (en doctorat avec C. Besnainou et J. Frelat) sont venus au LMT où nous avons installé le dispositif dans la machine MTS. Le capteur de force était branché via un boîtier Edirol à un Macintosh portable ; le signal était analysé par le logiciel gratuit Audacity. La précharge était obtenue par un déplacement statique de la traverse et, ne pouvant imposer une force si petite avec la machine nous avons imposé un déplacement d'amplitude et de fréquence données. Nous avons balayé

l'espace des fréquences, des amplitudes et des précharges de façon intuitive pour ce premier essai et testé aussi le décalage du point de contact.

Fig. 4.6: Maquette de la table d'harmonie du piano et machine MTS

Nous avons pu considérer à notre tour les enrichissements spectraux près de la charge critique. Un mode de fonctionnement très chaotique est apparu lorsque le système «hésitait» entre deux configurations de pré-flambement (figure 4.7) : le système saute de manière erratique de l'une à l'autre de ces configurations. Il se trouve que certains facteurs ont confirmé la possibilité d'existence de ce mode chaotique sur un piano ; certains musiciens parviendraient même à le générer dans certaines phases de jeu. Le chaos est par ailleurs présent dans certains instruments, comme la clarinette, il n'est donc pas systématiquement perçu comme inharmonique. Les instruments de référence (Stradivarius pour les violons) sont réputés à la limite de l'instabilité ; I. Gitlis a mis pas moins d'un an à se familiariser avec le sien. Cette limite de l'instabilité est apparemment ce que recherche le musicien qui pourra (à la manière de Paganini) en jouant sur des subtiles différences de jeu, produire des effets surprenants.

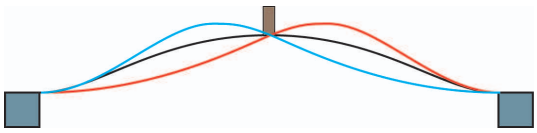


Fig. 4.7: Mode chaotique composé des modes rouges et bleus iso-probables

1.2.3 Synthèse sonore

Pascal Rey, (IR LMM) réalise des synthèses sonores à partir de modèles physiques dans le but de relier ces grandeurs physiques aux éléments de perception auditives du chapitre (1.2.1). Julien Bensa, en postdoctorat au LAM, travaille sur l'analyse et

la synthèse des sons du piano ; il a mis en évidence l'importance perceptive des couplages de modes (ceux-ci sont souvent liés à la viscoélasticité du matériau, chapitre 1.2.4) et a confirmé la pureté du spectre en jeu *ppp (piano)*, à l'opposé du spectre très enrichi en jeu *fff (forte)*.

Grâce à une subvention de recherche accordée par le Ministère de la Culture (50.000 F), un piano quart de queue a été acheté et restauré. Celui-ci va intégrer un dispositif de charge variable afin de pouvoir mettre en pratique les idées obtenues et au final d'avoir une possibilité de régler la charge en dynamique afin de faire varier le son à la demande du musicien.

1.2.4 Mesure de la viscoélasticité du bois de lutherie

C. Besnainou m'a confié l'étude de l'autre «piste» concernant la cause de la sonorité des instruments : la viscoélasticité des matériaux. Cette piste lui avait été suggérée par son expérience (d'une vingtaine d'années) de facteur sur les instruments en composite. Depuis une vingtaine d'années ceux-ci n'arrivent pas à concurrencer les instruments classiques ailleurs que dans le bas de gamme. Les musiciens en livrent une analyse que l'on peut résumer à «on ne distingue pas le piano du forte». En d'autres termes, jouer plus fort revient à augmenter le volume à la manière d'une chaîne HiFi mais l'on a pas ou peu *d'enrichissement spectral*, qui constitue l'essence du *piano / forte*. Par intuition C. Besnainou a créé des composites munis d'une zone centrale visqueuse : le résultat fut immédiatement probant.

Mon problème était donc de mesurer la viscoélasticité du matériau de référence, le bois d'épicéa, et des matériaux concurrents, les composites carbone-époxy chargés de diverses manières. C'est ce qui sera décrit dans la section suivante.

2 L'appareil de mesure développé

2.1 Descripteur de la viscoélasticité

La viscoélasticité intègre une réponse élastique du type $\sigma = E\varepsilon$ et une réponse visqueuse du type $\sigma = \nu\dot{\varepsilon}$. Dans le domaine de la lutherie la sollicitation statique due aux précontraintes, généralement associée à l'effort de tension des cordes, est largement supérieure à la sollicitation dynamique due au jeu proprement dit. La description de la viscosité est principalement issue de deux phénomènes distincts, bien qu'en rapport l'un avec l'autre : les phénomènes de fluage / relaxation et le déphasage entre contrainte et déformation observé dans les essais harmoniques.

Les phénomènes fluage de et relaxation (linéaires) sont décrits par leurs fonctions associées J et R telles que :

$$\sigma = \sigma_0 H(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sigma_0 J(t-\tau) \tag{4.1}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \varepsilon_0 R(t-\tau) \tag{4.2}$$

où H désigne la fonction échelon de Heavyside. Ces deux fonctions permettent, par additivité, de définir la réponse à une sollicitation quelconque, ce qui peut s'écrire aisément avec les produits de convolution $\otimes$. Les fonctions J et R sont aussi reliées entre elles par une équation simple :

$$\varepsilon = J \otimes \dot{\sigma} \tag{4.3}$$
$$\sigma = R \otimes \dot{\varepsilon} \tag{4.4}$$
$$H = J \otimes \dot{R} = R \otimes \dot{J} \tag{4.5}$$

Cette représentation de la viscosité permet, à l'aide d'une transformée de Laplace-Carson, une résolution des problèmes viscoélastiques presque aussi simple que la résolution du problème élastique. Néanmoins pour les bois de lutherie, le fluage et la relaxation sont difficilement accessibles (ils peuvent être par ailleurs étudiés car associés au besoin de réaccordage des instruments). Mais il serait illusoire, à mon sens, d'utiliser ces résultats pour décrire les réponses en (relativement haute) fréquence des instruments car les phénomènes mis en jeu au niveau de la microstructure du bois ont peu de chance d'être identiques.

La description en modules complexes est du type suivant :

$$\sigma^* = E^* \varepsilon^* \tag{4.6}$$
$$\sigma^* = \sigma \exp(i\omega t + \varphi) \tag{4.7}$$
$$\varepsilon^* = \varepsilon \exp(i\omega t) \tag{4.8}$$
$$E^* = E \exp(i\varphi) \tag{4.9}$$

Le déphasage φ est positif, l'énergie dissipée sur un cycle vaut $P = \pi E \varepsilon^2 \sin(\varphi)$. Le déphasage peut être fonction de la pulsation $\varphi(\omega)$; le seule hypothèse contenue dans ce formalisme est la linéarité ($2\varepsilon^* \rightarrow 2\sigma^*$) ; compte tenu de nos faibles contraintes dynamiques elle paraît acceptable. Il ne semble pas nécessaire, à ce niveau, d'avoir recours à un modèle rhéologique ; ceci pourrait être fait à la lumière des résultats d'essais. Cette description contenant l'aspect fréquenciel semble plus adaptée que la précédente à la présente problématique.

2.2 L'état de l'art

Deux types de mesures sont en compétition : les vibrations libres et forcées.

Vibrations libres

Un défaut commun des méthodes de vibrations libres est d'inclure la viscosité de l'air ambiant. On peut soit le négliger soit réaliser un post-traitement ; on ne peut pas, pour du bois, réaliser un essai sous vide qui endommagerait le bois. Un autre défaut est de nécessiter un jeu de masses afin de balayer une plage de fréquences. Plusieurs géométries sont utilisées. La plus courante est la poutre cantilever (figure 4.8). Son inconvénient majeur réside dans l'encastrement : le moindre défaut de celui-ci sera hautement dissipatif et faussera la mesure. Il doit être aussi extrêmement lourd afin de ne pas bouger du tout.

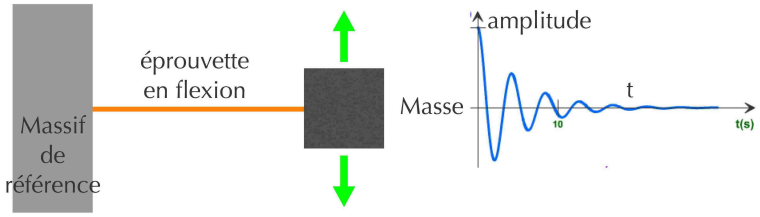


Fig. 4.8: Mesure de l'amortissement par poutre cantilver

Une autre géométrie est la vibration de poutres libres en flexion (Brémaud 2006). Le dessin est assez similaire, avec une seconde masse à la place du massif de référence. Le problème de sa masse disparaît donc mais les autres demeurent. Les appuis doivent, en flexion, être pris aux noeuds de vibration car toute erreur de positionnement engendrera elle aussi une dissipation énergétique.

Dans le domaine des métaux où l'amortissement interne est très faible, une géométrie de barre en torsion et volant d'inertie est souvent retenue (Brodt, Cook & Lakes 1995). Diverses méthodes expérimentales ont été mises au point afin de permettre une mesure très fine de φ (figure 4.9). Ce type d'essai devient problématique dans notre cas : le module de cisaillement (complexe) ainsi mesuré n'est pas lié au module d'Young et coefficient de Poisson comme dans le cas de l'acier car le bois est fortement anisotrope ; nous souhaitons au moins identifier les modules d'Young longitudinaux et transverses.

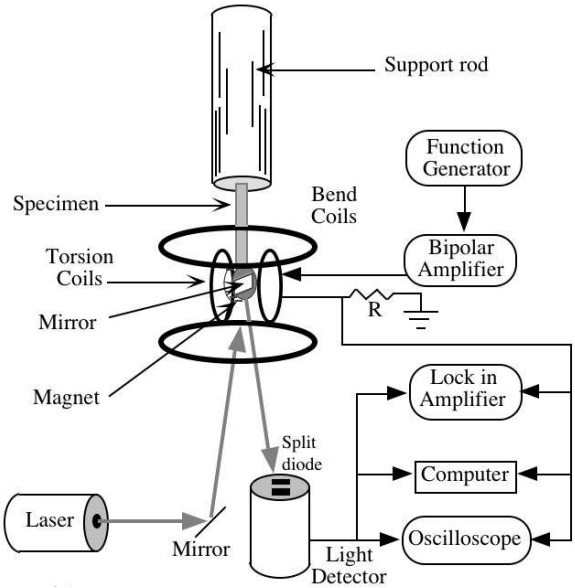


Fig. 4.9: Pendule de torsion équipé pour la mesure de l'amortissement interne (Brodt, Cook & Lakes)

Sur le bois les méthodes précédentes pêchent essentiellement par manque de reproductibilité. On peut remarquer que la mesure obtenue, le décrément logarithmique, n'est pas directement une donnée matériau mais représente la réponse structurelle. Remonter aux modules complexes depuis cette grandeur ne semble pas si aisé que cela. Enfin une mesure relative à une sollicitation de flexion est fortement influencé par la surface de l'échantillon qui doit être alors réalisée avec soin ; d'un autre point de vue la flexion est la sollicitation rencontrée *in situ*. Enfin les montages en vibration libre interdisent l'application d'une précontrainte représentant la charge.

Vibrations forcées

La machine «Metravib» (figure 4.10) est commercialisée ; elle permet la mesure de déphasages φ. Elle est constituée d'un bâti rigide, d'un pot vibrant (actionneur électromagnétique) et d'un capteur de force. L'actionneur crée un déplacement $u\exp(i\omega t)$ et le capteur mesure la force $F\exp(i\omega t+\varphi)$. Son domaine d'emploi couvre essentiellement les polymères ; les fréquences disponibles sont un peu basses pour nous (5 à 1000 Hz) ; le système d'ancrage nécessite une liaison complète par collage dont on connaît la propension à devenir dissipative sans un soin extrême mais surtout cette machine est extrêmement onéreuse (de l'ordre de 100k€).

Fig. 4.10: Machine d'essais Metravib

Citons enfin le développement de méthodes prometteuses d'identification de caractéristiques élastiques à partir de mesures de champ sur plaques en vibration forcées (Grediac, Toussaint & Pierron 2003), récemment adaptées en viscoélasticité.

Le Lucchi

La machine «Lucchi» (Lucchi & Seghetti 1984) est commercialisée depuis une dizaine d'années. Elle est constituée d'une paire de transducteurs basse fréquence que l'opérateur colle aux extrémités d'une baguette de bois à mesurer. Le Laboratoire de la Cité de la Musique (alors dirigé par L. Espié) et moi-même avions expertisé cet appareil et déduit que sa mesure était un mélange des caractéristiques du bois recherchées, de la masse des capteurs ,de la géométrie de l'éprouvette, de sa masse volumique... Néanmoins de nombreux luthiers l'utilisent de part le monde ; on peut

imaginer que, pour une faible variabilité des paramètres parasites et en bloquant la géométrie de l'éprouvette les résultats obtenus aient une certaine représentativité.

2.3 Cachier des charges, principe de fonctionnement et calculs de dimensionnement

Compte tenu des observations précédentes, je me suis donné le cahier des charges suivant pour la machine à réaliser :

1. La machine soumet une éprouvette à des vibrations forcées
2. L'éprouvette est sollicitée en compression afin de ne pas (ou très peu) mettre d'air ambiant en mouvement et de ne pas avoir de mords ou liaison complète à réaliser (le frottement maintiendra l'éprouvette.
3. La taille de l'éprouvette est un volume élémentaire représentatif du bois de lutherie ; un côté de 5mm est retenu.
4. La longueur de l'éprouvette est suffisante pour représenter l'élancement d'une poutre ; un élancement de 11 est retenu, donnant une longueur de 55mm
5. On vérifiera qu'aucun mode de propagation d'ondes n'est présent pour ces dimensions dans le domaine de fréquence retenu.
6. Le domaine fréquentiel est l'audio (20Hz-20kHz)
7. La sollicitation est un déplacement imposé à une extrémité et le mesurande est la force à l'autre extrémité.
8. Le montage ne résonne pas dans le domaine de mesure afin de ne pas perturber la mesure.

Une solution avec actionneurs piézoélectriques a été retenue pour sa simplicité de mise en oeuvre, sa rigidité et sa compacité. Une première étude de faisabilité a été réalisée lors d'un stage de DEA (Malras 2002). Elle a mis en évidence la nécessité d'avoir un montage monobloc ne présentant absolument aucune liaison mécanique autre que complète ; cette observation a été confirmée par une conversation avec Guylaine Poulin qui a réalisé dans le cadre de sa thèse un actionneur de même nature (Poulin 2004). L'ensemble réalisé reprend la structure d'une ligne à retard (composant d'électronique analogique) à la différence que ce dernier utilise des modes de propagations d'onde et ici un mouvement de corps solide. Un capteur piezoélectrique est prévu pour fonctionner à sa fréquence de résonance de l'ordre du MHz ; dans le domaine audio celui-ci est en mode statique, sa réponse est de très faible amplitude mais sera suffisante pour nos applications. Le montage a été conçu à l'aide de deux transducteurs Panasonic disponibles avec pastilles d'un demi pouce et résonance à un MHz. Le corps a été réalisé en acier doux pour la simplicité de réalisation, le prix et le grand rapport E/ρ de ce matériau ($E = 220$ MPa pour l'acier doux, la valeur la plus élevée des aciers). La mise en place des transducteurs se fait par pincement à l'aide d'une liaison pivot glissant déformable ; le contact alors assuré sur toute la

périphérie garantit une très faible dissipation parasite. Le plan (figure 4.11) a alors été réalisé. L'appareil a été réalisé par la société DIM-Industrie à Cachan.

Le transducteur émetteur est excité par un générateur de signal produisant une signal sinusoïdal à la fréquence désirée *via* un ampli haute tension (220V). Le récepteur est branché à un oscilloscope *via* un amplificateur de charge Bruel et Kjaer, nécessaire pour éviter les effets «décharge de condensateur» des piézos qui parasitent la mesure à basse fréquence. Le déphasage φ se lit alors simplement entre les deux sinusoïdes.

Afin de vérifier la non vibration du corps de l'appareil, un calcul est mené en modélisant le corps comme une poutre pesante ($E = 220\text{GPa}, S = 25\,10^{-6}\text{m}^2, \rho = 7,8\,10^3\text{kg/m}^3, 2L = 5,5\,\text{cm}$) munie de deux masses ($M = 160\text{g}$)à ses extrémités qui représentent les capteurs et le tube métallique fin autour. La résolution analytique est classique (Meirovitch 2001) et donne les fréquences de résonnance ω comme solutions (numérique) de l'équation (4.10).

$$\begin{aligned} \tan(\beta L) &= \frac{\rho}{M\beta} \\ \beta &= \omega\sqrt{\frac{\rho}{ES}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Avec le design retenu la plus basse fréquence de résonance longi est de 27 kHz, au delà du spectre audio. Bien sûr, comme nous le verrons plus loin, d'autre modes parasites de flexion viendront pour des fréquences plus basses ; le corps métallique, nu, tinte dans l'audio mais au delà de 10 kHz. La structure métallique, très faiblement dissipative, garantit que ces pics de résonance seront très étroits et n'occulteront qu'une bande de fréquence réduite. En retenant un module d'Young de 10 GPa (pessimiste), une masse volumique de 0,5 (pessimiste aussi), la longueur d'onde à 20 kHz est de l'ordre de 22 cm (en utilisant $E = \rho C^2$), bien au delà de la longueur de l'échantillon de 5,5 cm, nous prévenant dans une certaine mesure d'effets de propagation.

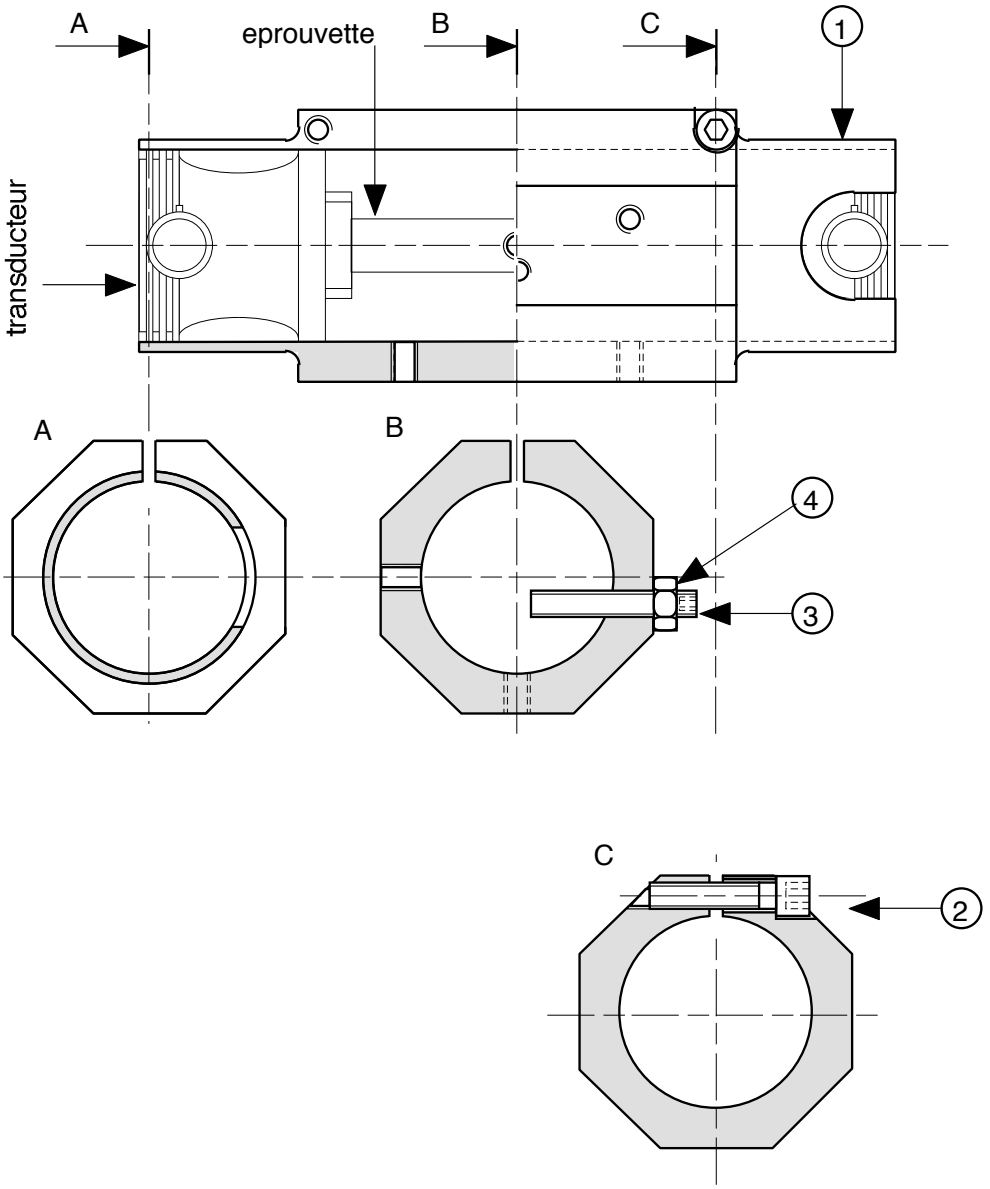
Il faut vérifier que ce montage correspond bien à l'hypothèse de déformation imposée $\varepsilon\cos(\omega t)$ et de contrainte $\sigma\cos(\omega t + \varphi)$ mesurée. Pour cela on considère le montage comme un empilement de barres (figure 4.12).

Les lois de la piézoélectricité en statique et en unidimensionnel s'écrivent :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + de \tag{4.11}$$

$$D = \epsilon^{-1}e + d\sigma \tag{4.12}$$

où e (V/m) est le champ électrique, D le déplacement électrique avec $D = Q/S$ où Q est la charge électrique et S la section droite ; ϵ la permittivité diélectrique et d la constante piézoélectrique (m/V ou C/N). Pour l'émetteur la tension électrique u est imposée par le générateur et donc le champ électrique $e = u/l$ est connu. Pour le récepteur couplé à l'amplificateur de charge le champ électrique e' est nul et la charge Q' est mesurée. L'équilibre statique des barres indique que la contrainte σ est



4	6	ECROU HM4		
3	6	Vis HC M4-25		téton possible
2	2	VIS ChC M4-20		
1	1	TUBE 27 kHz	XC 10	bruni
REP.	NB.	DESIGNATION	MATIERE	OBS.

Echelle 1:1	MONTAGE DE MESURES VISCOELASTIQUES	Dessiné par: François	
		Le: 26/11/02	
A4	*Révision du 25/04/03*		

Fig. 4.11: Plan du montage de mesures viscoélastique

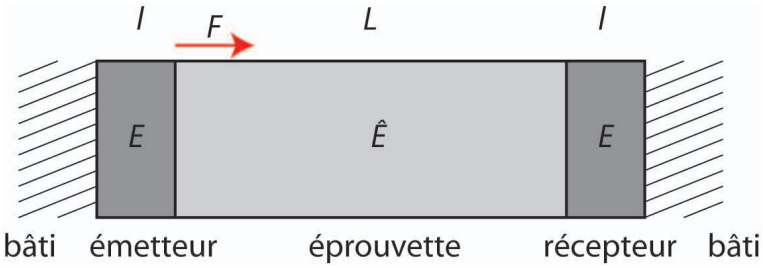


Fig. 4.12: Modèle barres

la même pour les trois. Les équations de statique donnent alors respectivement, pour l'émetteur, le récepteur (de caractéristiques identiques) et l'éprouvette mesurée :

$$\sigma = E\left(\varepsilon - d\frac{u}{l}\right) \tag{4.13}$$
$$= E\varepsilon' \tag{4.14}$$
$$= \hat{E}\hat{\varepsilon} \tag{4.15}$$

La charge Q' mesurée par le récepteur vaut alors :

$$Q' = Sd\sigma \tag{4.16}$$

ce qui montre que le montage mesure bien la contrainte dans l'éprouvette.

Le montage impose (par sa rigidité supposée infinie par rapport à celle des autres corps) que la somme des déplacements soit nulle :

$$l\varepsilon + l\varepsilon' + L\hat{\varepsilon} = 0 \tag{4.17}$$

En injectant (4.13, 4.14, 4.15) dans (4.17) on obtient :

$$\sigma\left(\frac{2\hat{E}l + EL}{E\hat{E}}\right) = -du \tag{4.18}$$

et comme $E \simeq 60$ GPa, $\hat{E} \simeq 10$GPa et surtout $2l = 2$mm et $L = 55$ mm, on peut approximer :

$$\sigma\frac{L}{\hat{E}} = -du \tag{4.19}$$

et donc :

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{du}{L} \tag{4.20}$$

ce qui montre que la déformation dans la barre est bien pilotée par la tension imposée par le générateur, tant que le module d'Young de l'éprouvette n'est pas trop grand par rapport à celui des piézos.

Si les constantes diélectriques sont connues, depuis (4.16 et 4.19), la mesure de la contrainte et donc donne accès au module d'Young (sa partie réelle) :

$$\hat{E} = -\frac{QL}{Sd^2u} \tag{4.21}$$

Mais cette mesure n'a pas été utilisée car nous ne nous intéressions qu'au déphasage φ. Pour une céramique PZT, la constante $d \simeq 425\,10^{-12}$ C/N entraîne toutefois, pour $\hat{E} = 10$ GPa, des charges de l'ordre de 180 pC assez difficiles à mesurer. Enfin la contrainte dans le bois de lutherie se calcule depuis (4.19) et vaut $\sigma = 17$ kPa (pour $\hat{E} = 10$ GPa). Ce niveau de contrainte est très faible par rapport au matériau. D'autre part, la contrainte statique de mise en place par effort manuel de compression (estimé à 10N) sur les transducteurs, est de l'ordre de -400 kPa ; on peut vérifier analytiquement que cette contrainte statique n'influe pas la mesure. Elle doit être bien sûr en valeur absolue plus importante que le maximum de la contrainte dynamique au risque de laisser tomber l'éprouvette.

2.4 Premiers essais et résultats

L'utilisation de l'appareil nécessite d'installer un des transducteurs avec l'éprouvette centrée dessus dans le tube ; si aucune colle n'est utilisée, il faut une table bien stable. Ensuite le second transducteur est mis en place. L'effort statique de mise en compression est réalisé manuellement ou avec une masse donnée et les vis de serrage par pincement sont serrées. Dans la conception j'espérais que les faces de l'éprouvette s'écraseraient quelque peu au contact des transducteurs afin de réaliser une liaison complète par adhérence sans élément extérieur. Il est rapidement apparu et fut confirmé par des campagnes plus rigoureuses ((Brémaud 2004), (LeConte 2006)) que les meilleures signaux et la meilleure «répétabilité» était obtenu avec du scotch double face fin (comparé avec un solide à bas point de fusion, du miel, de la graisse silicone et le contact direct). Un calcul similaire au précédent montre facilement que si l'épaisseur est fine, les propriétés du couplant employé n'interviennent théoriquement pas. Au niveau de l'environnement, après divers essais de suspension (figure 4.14), la chambre sourde a été retenue comme meilleur environnement pour isoler ce système très sensible.

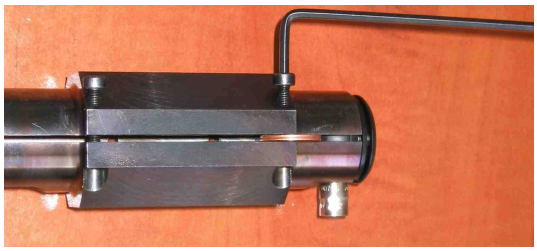


Fig. 4.13: Montage d'essai en phase d'assemblage

La première campagne de mesure (figures 4.14, 4.15) fut lancée au LAM avec C. Besnainou en 2003. À cette occasion une série d'éprouvettes a été réalisée :

- une éprouvette de référence en duralumin (Au4gT4),
- une éprouvette d'épicéa en sens long,
- une éprouvette d'épicéa en sens transverse,
- une éprouvette de PVC, choisie pour servir de référence visqueuse
- une éprouvette de composite carbone-époxy en sens long,
- une éprouvette de composite carbone-époxy en sens transverse,
- une éprouvette de composite carbone-époxy et coeur visqueux en sens long,
- une éprouvette de composite carbone-époxy et coeur visqueux en sens transverse,

L'éprouvette en Au4g (Duralumin), réputé non visqueux, a fourni la courbe de déphasage de référence $\varphi_0(\omega)$. Celui-ci provient essentiellement de la réponse du couple générateur-pastilles piézoélectriques et un travail reste à réaliser au niveau des équations de la piézoélectricité pour déterminer cette courbe. L'éprouvette en Duralumin est en effet environ 5 fois plus raide que le bois mesuré et la réponse du montage devrait être idéalement calée sur un matériau de même module mais non visqueux ou à viscosité connue. Nous avons tenté d'utiliser à cet effet une éprouvette en PMMA (plexyglass) mais il est apparu que l'angle φ de ce matériau dépendait fortement de facteurs non maîtrisés tels que le fabriquant ou l'âge du PMMA.

Fig. 4.14: Campagne de mesures de 2003

Le déphasage $\varphi^m(\omega)$ mesuré est donc affecté du déphasage $\varphi_0(\omega)$ de la chaîne de mesure. Supposant une additivité, le déphasage intrinsèque au matériau $\varphi(\omega)$ recherché est donc obtenu par $\varphi(\omega) = \varphi^m(\omega) - \varphi_0(\omega)$. Nous avons alors obtenu les courbes figure (4.16).

Il est apparu que le composite non visqueux (standard des instruments actuels) était plus proche du Duraumin que du bois, même dans son sens long, qui correspond à un amortissement proche de celui du PVC (environ 4 degrés). Quand au bois transverse, son amortissement de l'ordre de 10 degrés n'est approché que par le composite à coeur visqueux.

Fig. 4.15: Montage et éprouvettes

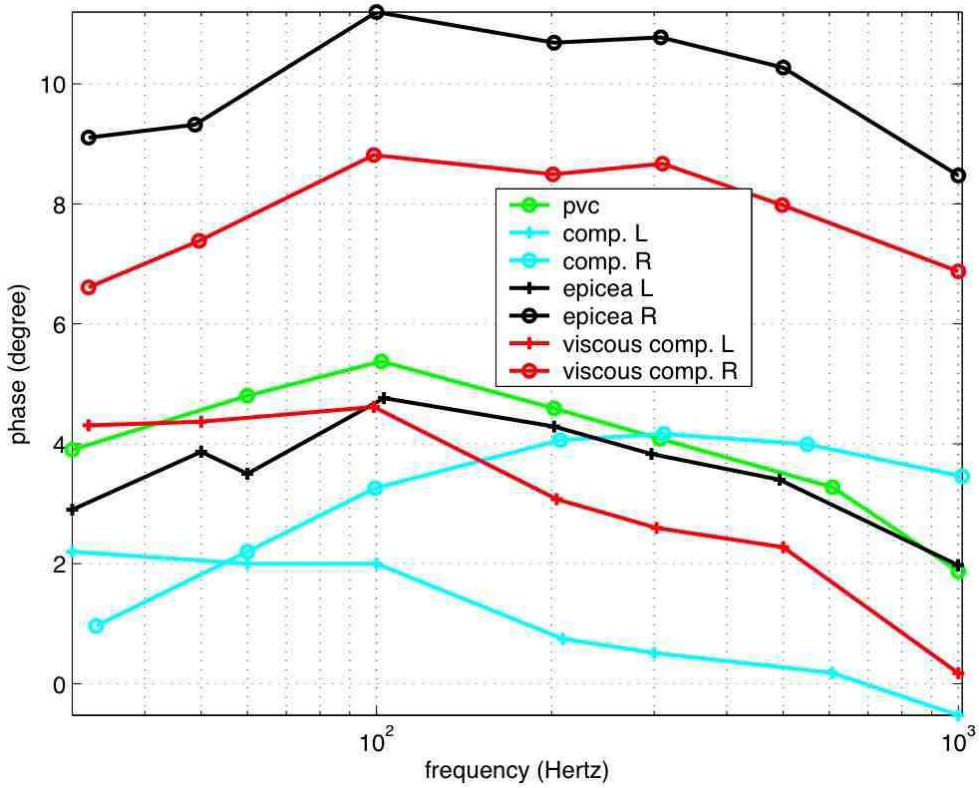


Fig. 4.16: Résultats de la campagne 2003

La relative proximité des viscosité du bois de référence et du composite visqueux ont apporté à C. Besnainou une confirmation et un moyen de mesure et d'étalonage pour les futurs composites.

La courbe obtenue (4.16) est ici limitée à 1 kHz environ car les résonances parasites ont perturbé la mesure au delà. Ces résonnances ont pu être identifiées comme faiblement liées au corps de l'appareil car une apposition des doigts ne change pas la mesure. Par contre, le *backing*, amortisseur en arrière des transducteurs, dont le rôle est en mesures ultrasonores de limiter le signal émis à une période et demi environ, s'est avéré le grand responsable de ces résonances parasites. Les développements futurs feront appel à des céramiques nues plutôt qu'a des transducteurs ultrasonores. Enfin, il est probable que des modes de flexion de l'éprouvette apparaissent eux aussi ; le matériau étant faiblement visqueux, ces modes devraient demeurer bien découplés et très limités en bande de fréquence.

2.5 Stage d'Iris Brémaud

Le Laboratoire de la Cité de la Musique, dirigé par Stéphane Vaidelich, se heurte aujourd'hui à une question cruciale : jouer les instruments aide-t-il à leur conservation ? Les éléments de réponse actuels sont partagés. On sait (Sobue 1995) que la mise en vibration d'un bois affecte sa réponse viscoélastique : l'angle de déphasage φ décroît pendant environ trois heures de «jeu», puis reste stable ou remonte un peu. Les bases physiques des mécanismes de ce phénomène sont connus (Struick 1978). Mais la question n'est pas éludée pour des durées plus importantes, de l'ordre de quelque siècles : on sait que les instruments «de référence» comme les Stradivarius qui n'ont cessé d'être joués et conservés avec soin depuis leur fabrication (3 siècles) n'ont jamais été aussi bons ; d'aucuns pensent que cet optimum (plateau) sera maintenu en jouant l'instrument. Mais certains chercheurs japonais mette en évidence une dégradation des bois au delà de cette durée. L'enjeu est donc de taille.

Mes travaux au sein du BQR «Piano» ont intéressé le Laboratoire de la Cité de la Musique avec lequel de nombreuses collaborations avaient déjà été effectuées (voir au chapitre 1 les mesures ultrasonores sur bois de lutherie et l'hygrométrie mais aussi l'action sur l'écaille et la corne). Afin de déterminer ce que pouvait apporter l'appareil à cette problématique il fut décidé une campagne d'essais ayant pour but la validation de l'appareil et éventuellement une amélioration du protocole expérimental.

Pour ce faire, S. Vaidelich a fait réaliser un stage à Iris Brémaud, alors doctorante au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil Université de Montpellier 2 dirigé par Joseph Gril. Une convention cadre de coopération scientifique a été signée entre les quatre parties (Cité de la Musique - UPMC/LAM - Montpellier 2/LMGC et ENS Cachan/LMT) dans laquelle j'étais co-encadrant pour le LMT.

I. Brémaud (Brémaud 2004) a commencé par tester les couplants et, comme précisé plus haut, le scotch double face fin s'est avéré le meilleur choix. Il est à noter que, si le module de la fonction de transfert (donc la partie réelle du module

d'Young) était affecté par le couplant, la phase l'était très peu. Une mesure de référence a été réalisée sur le duralumin. Puis un essai de mesure sur de l'épicéa (de référence) a donné des résultats plus précis que ceux de la campagne de mise au point précédente par l'utilisation d'un chirp et de l'analyse numérique de la fonction de transfert (figure 4.17).

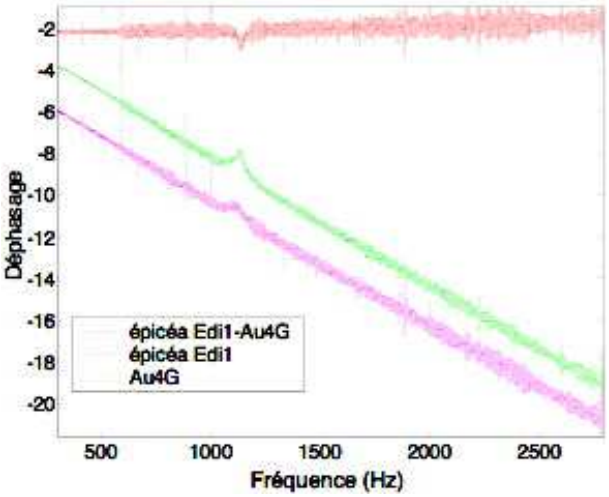


Fig. 4.17: Mesure fréquence - phase sur dural (vert), épicéa brut (mauve) et différence épicéa corrigé (rouge) (I. Brémaud)

Le résultat est une phase de 2 degrés quasiment constante sur la plage de fréquence balayée. Le pic vers 1250 Hz semble être un artefact associé au montage. Un autre phénomène parasite, plus gênant, a été mis en évidence : il existe une diminution de la phase φ au cours du temps (de l'ordre de 0,2 degrés pour 15 heures). Pour le bois elle est peut-être à rapprocher de l'effet Sobue décrit plus haut (Sobue 1995) mais on soupçonne qu'elle se produit aussi pour l'éprouvette en duralumin ; la cause serait alors à rechercher dans un autre composant mécanique *(backing ?)* ou électronique du montage. I. Brémaud a aussi tenté de corréler la mesure du module de la fonction de transfert avec le module d'Young (connu car les échantillons utilisés avait été mesurés par des méthodes classiques auparavant) et par delà vérifier la proportionnalité suggérée par l'équation (4.21) ($\hat{E} \sim Q/u$). Elle a obtenu une corrélation convenable sauf (il fallait s'y attendre) pour le duralumin dont le module est trop élevé pour laisser la chaîne de mesure en fonctionnement linéaire (figure 4.18).

La campagne de mesure a été menée sur une collection d'éprouvettes du LMGC et les résultats suivants (figure 4.19) ont été obtenus.

Afin de valider la méthode, une corrélation entre les mesures par le nouvel appareil et la méthode classique de mesure de décrément logarithmique en vibrations libres a été menée ; la courbe suivante (4.18) a été obtenue. Une évidente corrélation existe mais comme toujours en pareil cas on ne sait quelle méthode valide l'autre.

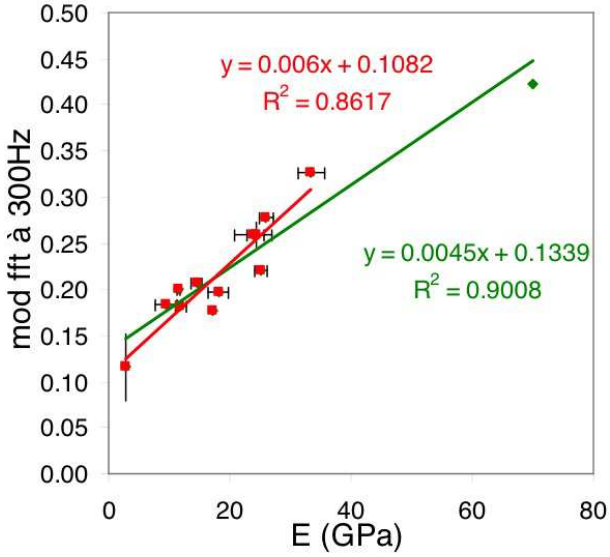


Fig. 4.18: Corrélation module d'Young et module de la fonction de transfert (I. Brémaud)

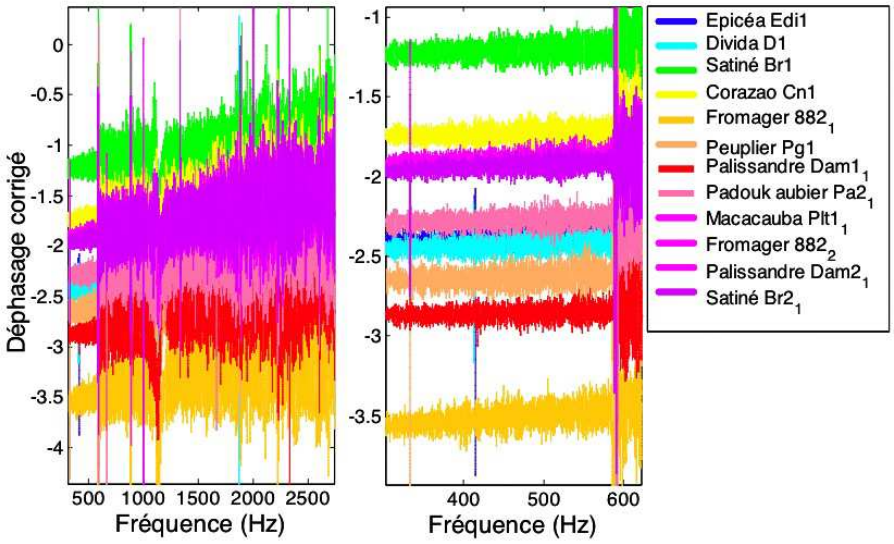


Fig. 4.19: Résultats de mesure sur diverses essences de lutherie (I. Brémaud)

Notons par ailleurs qu'il n'y a pas de correspondance analytique simple entre le décrément logarithmique et le déphasage φ ; l'étude de la poutre viscoélastique en vibrations libres n'est pas simple. La présente méthode a au moins l'avantage de procurer une donnée matériau.

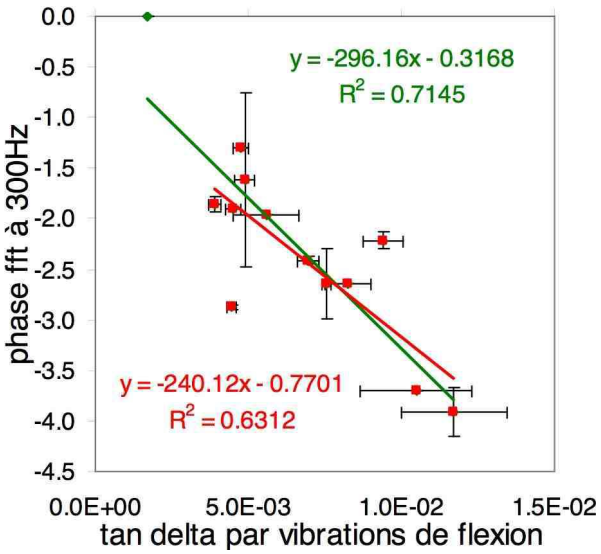


Fig. 4.20: Corrélation entre $tan(\delta)$ par vibrations libres et φ mesuré (I. Brémaud)

2.6 Post-Doctorat de Sandie Le Conte

Au vu des résultats obtenus, le Laboratoire de la Cité de la Musique a pu, grâce à l'obtention d'une subvention, employer Sandie Le conte pour un Post-Doctorat de deux ans. Les objectifs sont décrits dans le texte suivant, introduction du document proposé pour l'attribution de la subvention MRT :

Conservation préventive des instruments de musique à cordes maintenus en état de jeu : évolution des propriétés mécaniques du bois mis en vibration en environnement thermique et hygrométrique variable.

Résumé du projet :

Les institutions patrimoniales possèdent dans leurs collections des instruments maintenus en état de jeu, nécessitant de notre part une attention toute particulière. Les conséquences de ce type de conservation, doivent être plus précisément appréhendées, notamment la cinétique d'évolution du matériau bois. On se propose, dans un champ de contraintes, associant une mise en vibration sur des temps et dans des conditions hygrométriques variables, de mesurer les propriétés viscoélastiques du bois, principaux paramètres responsables de la qualité du matériau au sens de la facture instrumentale, de la fonction sonore des instruments et de la stabilité des structures. Il conviendra pour ce

faire de mettre en place et d'optimiser une expérience innovante permettant la mesure de ces paramètres jusqu'à 27 KHz. L'étude sera menée sur un ensemble de bois représentatifs des œuvres des collections . Des investigations plus approfondies seront menées sur l'épicéa pour lequel un panel d'échantillons sera constitué de bois dont l'ancienneté variera de 20 à 400 ans. On cherchera, par l'exploitation des résultats expérimentaux, à concevoir une aide au diagnostic sur les instruments actuellement maintenus en état de jeu et à mettre en évidence des lois de comportement afin de tenter d'anticiper l'évolution du matériau sur le long terme.

S. Le Conte développe donc actuellement une version modifiée du montage présenté. Outre l'élimination des défauts constatés, le système est adapté au nouveau cahier des charges.

Au niveau des transducteurs, des empilements de céramiques beaucoup plus épais seront utilisés afin de générer un niveau de contrainte dynamique proche de celui rencontré dans les instruments. M. Ferrason (DUT Mesures Physiques à l'Université de Reims) est chargé de leur mise au point. Les céramiques sont achetées chez Quartz et Silice. L'effet de dérive de la mesure de phase dans le temps a disparu avec les capteurs de nouvelle génération (mesure sur le duralumin). La réponse des capteurs dans le domaine audio est bien meilleure que les Panametrics prévus pour fonctionner au MHz (figure 4.21).

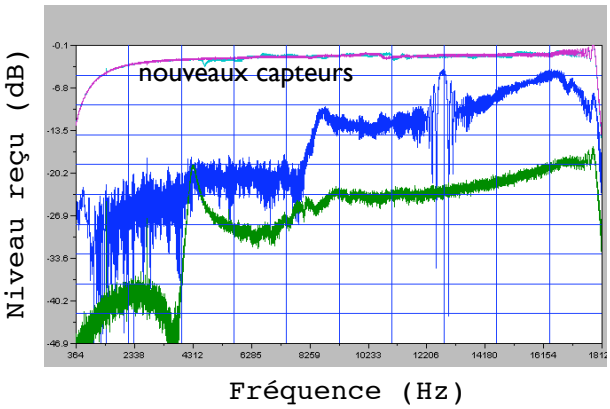


Fig. 4.21: Réponses comparées des nouveaux capteurs et des Panametrics utilisés dans la version précédente (S. Le Conte)

Un corps encore moins résonnant sera développé, sans doute dans un matériau plus noble (le titane possède un E/ρ plus élevé que l'acier par exemple). S. Le Conte et moi même devrions l'optimiser *via* Cast3m (nouvelle version du logiciel libre Castem 2000).

Au niveau électronique S. Le Conte a déjà réalisé un amplificateur HT possédant une réponse quasiment plate sur la gamme audio.

L'effet Sobue (Sobue 1995) a été retrouvé (figure 4.22) avec de plus la remontée du déphasage après 4 heures de «jeu» qui n'était pas claire dans le papier de Sobue (elle ne concernait qu'un point de mesure).

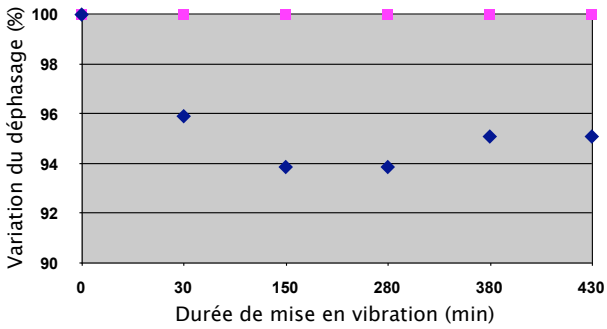


Fig. 4.22: Effet Sobue (excitation à 1 kHz) (S. Le Conte)

S. Le Conte a validé l'interface en scotch double face mais il semble que la colophane (sorte de cire dont se servent les musiciens pour améliorer le fonctionnement des archets) donne encore de meilleurs résultats ; nous aurions dû y penser avant !

La géométrie de l'éprouvette a été poussée à 6 mm de côté avec une apparition de résonances parasites plus précoce (malgré une conversion de mode plus tardive) ; la géométrie à 5 mm a donc été conservée.

Les résultats de déphasage sont dorénavant convenables jusqu'à 10 kHz.

L'influence de la précontrainte (à l'assemblage) a été étudiée : il semble que les résultats soient répétitifs au delà d'une certaine valeur.

Les effets de variation d'hygrométrie ont été vérifiés sur cinq essences pour des pertes de masse de 1 et 2%.

Des mesures sont en cours sur un bois d'épicéa prélevé sur une ferme du Jura datée précisément de 1780. Les essais de mesure de φ au cours d'une longue période, avec des phases de repos et de jeu, seront lancées prochainement. Le Laboratoire de la Cité de la Musique envisage de réaliser un grand nombre de ces machines ; elles sont au demeurant peu coûteuses dans leur configuration actuelle. Certaines d'entre elles seront affectées à l'identification de l'effet de l'hygrométrie.

2.7 Perspectives

Il est convenu que je continue à participer à ce projet, dès que la rédaction de ce document m'en laissera le temps. Une possibilité serait d'industrialiser cet appareil afin de permettre au luthiers d'avoir un instrument de mesure à leur disposition. Ils peut être aussi utilisable pour d'autres matériaux, par exemple les composites, de lutherie ou non. Les nouvelles caméras thermiques, comme celle que possède le LMT-Cachan, rendent possible la mesure des pertes par dissipation thermique ; leur zoom est suffisamment puissant pour observer ces sources à une échelle plus fine.

3 Orniérage des chaussées

3.1 Contexte

En 2004 était lancé le stage de DEA de Delphine Cuisinier (Cuisinier 2002). Celui-ci correspondait avec le lancement du programme PREDIT «Devin» organisé par Hugues Chollet pour l'INRETS (Institut National pour les Transports et leur Sécurité) qui fait intervenir diverses institutions (INRETS, LCPC, RATP, LOR, Michelin). Ce programme a pour but de comprendre, modéliser et remédier au problème de l'orniérage des chaussées. Il s'agit du phénomène de creusement de la chaussée suite au passage répété des véhicules. Le mécanisme d'orniérage qui nous intéresse est celui associé au fluage du bitume.

Depuis les années 60, les formulations de bitume utilisent des sables à grains angulaires (au lieu des sables «ronds» de rivière) et le problème d'orniérage a disparu des chaussées françaises. Récemment, l'arrivée des tramways sur pneus a relancé l'apparition d'ornières. En effet, au contraire du trafic routier habituel, le tramway passe toujours exactement au même endroit et il n'y a plus d'effet de lissage et de compensation. Cet effet se retrouve aussi au niveau des arrêts de bus, en zone de freinage.

Les calculs de dimensionnement font appel au logiciel Alizé du LCPC. Il s'agit d'un code viscoélastique n'autorisant donc pas la prédiction de déformations permanentes. Ce partenaire est en charge du développement de modèles plus sophistiqués. Le rôle du LMT est plutôt de réaliser des campagnes d'essais plus discriminantes que les essais actuels. Ceux-ci sont essentiellement réalisés sur le dispositif d'essais (figure 4.23) en place à Nantes.

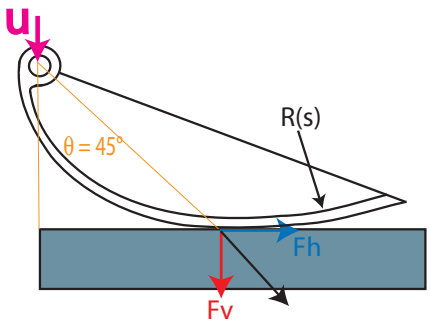


Fig. 4.23: Dispositif d'essai en spirale logarithmique (LCPC)

La spirale logarithmique équipée d'un patin de gomme assure un rapport des forces verticales et horizontales F_x/F_z constant ; ce rapport est (juste) inférieur au coefficient de frottement sinon il y aurait glissement. Le déplacement vertical du patin $\vec{u}$ est imposé ; le déplacement du point de contact et donc la déformation du bitume peut être quelconque entre vertical (enfoncement pur) et horizontal (arra-

chement pur) ; il s'agit donc d'un essai à direction de la force imposée (le module ne l'est pas) et de point de contact variable.

3.2 Thèse de doctorat de Delphine Cuisinier

Les travaux de stage de DEA de D. Cuisinier ont consisté à développer avec mon aide un montage d'essai utilisant les mesures de champ avec «Correli», système actuellement développé au LMT-Cachan (Hild et al. 2002). Afin de simuler l'état de plan de déformation rencontré dans une chaussée (par le blocage latéral induit par sa grande dimension), nous avons développé un montage (figure 4.24) dans lequel le bitume était confiné entre deux glaces de forte épaisseur. La charge était alors le simple enfoncement d'un patin parallélépipèdique en bois. Une caméra CCD filmait l'essai et la mesure de champ de déplacement était calculée par «Correli».

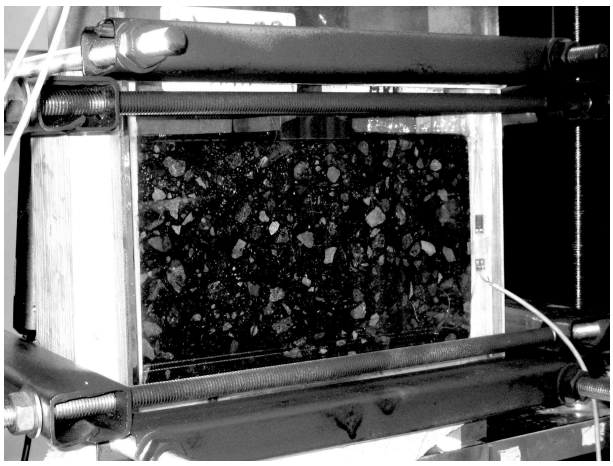


Fig. 4.24: Montage d'essai à vitre

La mesure par corrélation d'image donne les champs de déplacement (figure 4.25) et de déformation. La traverse inférieure étant mobile et le patin fixe, on se rend compte que, malgré le soin expérimental (glace enduite de graisse), certain granulats se sont «plantés» dans la glace. Celle-ci se brisera d'ailleurs plus tôt que ne le prévoyait les calculs de dimensionnement.

D. Cuisinier a commencé sa thèse en septembre 2004 en partenariat avec l'INRETS et le LMT. Ces essais et ceux au patin logarithmique (Y. Berthaud et D. Cuisinier) instrumenté avec mesure de champ sont utilisés pour identifier la loi de comportement du matériau (Cuisinier, Berthaud, François, Hammoun & Hamlat 2005, Cuisinier, Berthaud, François, Hild & Hammoun 2006, Cuisinier, Berthaud & François 2007). Dans le cas de l'élasticité, les paramètres élastiques (E, ν) sont obtenus en minimisant l'écart entre le champ expérimental et le champ analytique. Une zone de non corrélation se dégage nettement, c'est la zone plastique.

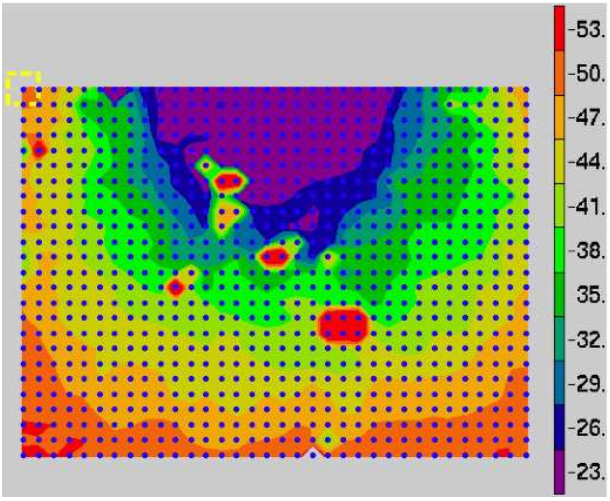


Fig. 4.25: Champ de déplacement obtenu par «Corrreli» (D. Cuisinier)

Les modèles élastoplastiques (Drucker-Prager) et viscoélastoplastiques sont en cours d'identification.

D'autres travaux sont en cours dont des essais sous enceinte de confinement hydrostatique afin d'identifier le comportement de ce matériau. Composé de granulats de diverses granulométries s'imbriquant les uns dans les autres et liés par un bitume très visqueux, ce matériau semble présenter une plasticité proche de celle d'un sable avec une dilatance transitoire associée à chaque évolution plastique et une viscoélasticité due au liant. De même que pour les essais sur la rouille précédemment décrits (Ouglova et al. 2006), je m'attends à ce que l'élasticité même soit non linéaire du fait des contacts très ponctuels entre grains. Enfin il semble que toute plasticité soit, comme dans le ballast des trains, associée à un frottement intergranulaire qui devrait être fortement dissipatif, apportant un amortissement interne au matériau.

Ce matériau constitué de bitume et de pierres remonte au néolithique. Cependant son comportement semble très complexe, difficile à mesurer d'un point de vue expérimental et difficile à modéliser. C'est un domaine de recherche où beaucoup de travail reste à faire.

Chapitre 5

Intégration des lois de comportement

Ne faisant l'objet d'aucune publication (comment le faire ?), le logiciel «MatSGen» présenté ici est un outil de travail qui réalise l'intégration des lois de comportements des modèles à variables internes. Il est disponible dans la base de données des logiciels du LMT-Cachan. Il travaille au niveau de l'élément de volume. Les sorties graphiques de toutes les variables sont proposées sur diverses bases tensorielles. Le pilotage se fait en contrainte, en déformation ou avec un mélange des deux.

1 Présentation

1.1 Qu'est ce que «MatSGen» ?

Ce logiciel est écrit sous «matlab». Il permet l'intégration d'une famille de modèles mécaniques, au niveau d'un seul élément de volume. Sa structure générale, classique, est celle d'une «UMAT» d'«Abaqus» (Ortiz & Simo 1986). Les logiciels existants comparable sont SiDoLo (Pilvin 2003) et, dans une moindre mesure car c'est un code à part entière, ZeBuLon (Feyel 2002). MatSGen se positionne en amont au niveau de l'utilisation que peut en faire un chercheur, au sens ou la programmation y est plus simple, notamment grâce à l'environnement de Matlab, les sorties plus riches mais la puissance de calcul, la rapidité et donc les performances en identification sont moindres.

Toutes les variables sur tous les pas de temps sont accessibles en fin de calcul ; une routine graphique permet un maximum de combinaison pour les représentations graphiques en exploitant différentes bases tensorielles. Plusieurs niveaux de *display* sont possibles en fonction du *debuggage* recherché. Dans la version actuelle on se limite aux petites déformations et aux comportements non dépendants du temps. La méthode d'intégration (Benallal 1987) a été choisie pour sa robustesse et sa simplicité.

1.2 Forme du modèle, variables et fonction

Deux variables sont systématiques : la contrainte (de Cauchy) $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$. Dans la version actuelle de MatSGen, nous resterons dans le cadre des *petites déformations*. Les autres variables internes, dont le nombre, la dimension (scalaire ou tensorielle du second ordre) et le nom sont au choix du modélisateur, seront regroupées sous le terme générique Q. Par exemple, en plasticité avec écrouissages isotropes et cinématiques, on aura $Q = \{\boldsymbol{X}, R)$, les variables associées à $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{p}}, r\}$. Tous les tenseurs du second ordre sont écrits sous forme de vecteur colonne 1x6 en base de tenseurs (François 2001, François 2004a) (donc avec un facteur $\sqrt{2}$ devant les termes $(4, 5, 6) = (23, 31, 12)$). Le logiciel peut traiter deux types de modèles :

Tab. 5.1: variables

nom	signification
$\boldsymbol{\sigma}$	contrainte
$\boldsymbol{\varepsilon}$	déformation
Q	variables internes

ceux du type plasticité :

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}, Q) \quad \text{surface seuil} \tag{5.1}$$
$$\dot{Q} = \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}, Q)\dot{\lambda} \quad \text{fonction d'écoulement} \tag{5.2}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathsf{h}(\boldsymbol{\varepsilon}, Q) \quad \text{loi d'élasticité} \tag{5.3}$$

et ceux du type endommagement :

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, Q) \quad \text{surface seuil} \tag{5.4}$$
$$\dot{Q} = \mathsf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}, Q)\dot{\lambda} \quad \text{fonction d'écoulement} \tag{5.5}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathsf{h}(\boldsymbol{\sigma}, Q) \quad \text{loi d'élasticité} \tag{5.6}$$

2 Routines d'intégration

Elles sont issues d'une compilation de (Benallal 1987, Benallal et al. 1988) et des cours de M2 de Pierre Gillormini et de François Hild sur le sujet. Largement utilisées, elles sont réputées stables mais pas des plus rapides, ce qui correspondait au cahier des charges de ce logiciel. Elles sont d'autre part de structure mathématique simple. La version de base est la routine *strain*, dans laquelle la déformation est imposée (le pilotage) ; c'est le mode des calculs utilisé dans les éléments finis. L'autre routine est nommée *stress* ; elle utilise la contrainte comme pilotage ; le calcul est plus simple dans ce cas. Enfin la routine *mixte* gère le cas où une partie du pilotage est en contrainte et l'autre partie, orthogonale à la première, est en déformation.

On distinguera dans cette partie le pas de temps suivant $n+1$ recherché et le pas de temps n précédent et connu. Les indices s sont relatifs au sous pas de temps utilisé dans l'algorithme de Newton.

Pour simplifier, le cas du modèle de type plasticité sera montré seul. Le passage général au cas du modèle de type endommagement est montré en dernier.

2.1 Routine *stress* de pilotage en contrainte

Dans un essai de traction piloté en effort/contrainte, par exemple, le tenseur des contraintes est supposé connu. La déformation et les variables internes ne le sont pas. En discrétisant, nous avons donc :

- Données : $\{\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, Q_n, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}\}$
- Inconnues : $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, Q_{n+1}\}$

Le prédicteur élastique consiste à analyser en premier le cas, le plus simple, ou le point suivant est dans le domaine d'élasticité. Les variables internes de Q, autres que la déformation, ne sont pas modifiées. Nous avons alors :

$$\text{si} \quad \mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_n) < 0 \tag{5.7}$$
$$Q_{n+1} = Q_n \tag{5.8}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathsf{h}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+1}) \tag{5.9}$$

où h^{-1} est la loi d'élasticité inverse qui doit être fournie au logiciel (la relation $\mathsf{h}.\mathsf{h}^{-1} = \boldsymbol{I}$ est vérifiée au début). Dans le cas où la condition (5.7) n'est pas vérifiée le comportement est dissipatif et la solution à déterminer doit appartenir à la surface seuil et vérifier la loi de normalité, soit :

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}, Q + \mathsf{d}Q) = 0 \tag{5.10}$$

$$\mathsf{d}Q = \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}, Q)\mathsf{d}\lambda \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathsf{h}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, Q + \mathsf{d}Q) \tag{5.12}$$

Le multiplicateur plastique λ représente alors une nouvelle inconnue. On se rend compte à ce niveau que l'équation (5.12) est indépendante des autres et sera traitée indépendamment. Nous discrétisons ces équations en utilisant une $\theta-$méthode (θ réglable par l'utilisateur) qui revient à calculer le gradient $\mathsf{g} = \mathsf{d}Q/\mathsf{d}\lambda$ en un point intermédiaire $n+\theta$ entre les pas de temps initiaux n (calcul explicite $\theta = 0$) et finaux $n+1$ (calcul implicite $\theta = 1$) :

$$Q_{n+\theta} = \theta Q_{n+1} + (1-\theta)Q_n \tag{5.13}$$

Les équations discrétisées deviennent alors :

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+1}) = 0 \tag{5.14}$$

$$Q_{n+1} - Q_n - \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+\theta})\Delta\lambda = 0 \tag{5.15}$$

Dans ce système l'inconnue est $q = (Q_{n+1}, \lambda)$ et on peut ramener ces équations à une forme $\mathsf{G}(q) = 0$. Celle-ci est résolue par l'algorithme de Newton (figure 5.1) qui consiste à approximer la fonction par sa tangente, en (sous) itérant (exposant s) jusqu'à obtention d'une erreur suffisamment faible. Soit :

$$\underbrace{\mathsf{G}(q^{s+1})}_{0} - \mathsf{G}(q^s) = \frac{\mathsf{dG}}{\mathsf{d}q}(q^s).(q^{s+1} - q^s) \tag{5.16}$$

$$\Rightarrow \mathsf{G}(q^s) = -\frac{\mathsf{dG}}{\mathsf{d}q}(q^s).(q^{s+1} - q^s) \tag{5.17}$$

Les équations (5.14, 5.15) permettent de remplacer la fonction générique G et nous obtenons le système suivant :

$$\theta\frac{\mathsf{dg}}{\mathsf{d}Q}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+\theta})\Delta\lambda^s CQ - CQ + \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+\theta})C\lambda = Q_n^s - Q_n - \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+\theta})\Delta\lambda^s \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial Q}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_n^s)CQ = -\mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_n^s) \tag{5.19}$$

$$\text{avec } CQ = Q_n^{s+1} - Q_n^s \tag{5.20}$$

$$\text{et } C\lambda = \Delta\lambda^{s+1} - \Delta\lambda^s \tag{5.21}$$

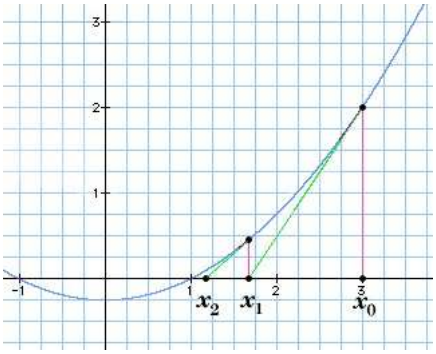


Fig. 5.1: Algorithme de Newton (http ://deadline.3x.ro)

Ce système se met sous la forme $A.X = B$ où X est un «vecteur» $X = [CQ, C\lambda]$. La dimension de la matrice carrée A est donc égale à la somme des dimensions des variables internes (dimension de Q) plus un. Après chaque boucle les valeurs recherchées sont corrigées :

$$Q_n^{s+1} = Q_n^s + CQ \tag{5.22}$$

$$\Delta\lambda^{s+1} = \Delta\lambda^s + C\lambda \tag{5.23}$$

Le critère d'arrêt se fait sur la norme du correcteur CQ, en faisant attention toutefois car un objet de type contrainte n'a pas les mêmes ordres de grandeur qu'un objet de type déformation. À convergence de la boucle de Newton, on retient la dernière valeur obtenue :

$$Q_{n+1} = Q_n^{s+1} \tag{5.24}$$

Enfin la déformation au pas $n+1$ est obtenue par la loi d'élasticité inverse (5.9).

2.2 Routine *strain* de pilotage en déformation

Un essai de cisaillement pur est, en plasticité classique, isochore. Si le gauchissement est imposé, on peut alors considérer l'élément de volume soumis à un tenseur des déformations entièrement connu. Le pilotage en déformation permet de gérer les modèles adoucissants, au contraire du pilotage en contrainte. Un essai de traction, avec ses surfaces «latérales» libres de contraintes, ne peut être simulé par *strain* même si la déformation axiale est imposée : il faudra avoir recours à *mixte*. Le bilan données-inconnues est ici :

- Données : $\{\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, Q_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\}$
- Inconues : $\{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+1}\}$

Le prédicteur élastique se gère de façon similaire au cas précédent :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathsf{h}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, Q_{n+1}) \tag{5.25}$$

$$\text{si} \quad \mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_n) < 0 \tag{5.26}$$

$$Q_{n+1} = Q_n \tag{5.27}$$

Dans le cas inverse, les équations d'évolution en plasticité deviennent :

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma} + \mathsf{d}\boldsymbol{\sigma}, Q + \mathsf{d}Q) &= 0 && (5.28)\\ \mathsf{d}Q &= \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}, Q)\mathsf{d}\lambda && (5.29)\\ \boldsymbol{\sigma} + \mathsf{d}\boldsymbol{\sigma} &= \mathsf{h}(\varepsilon, Q + \mathsf{d}Q) && (5.30) \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction (5.30) n'est pas indépendante des autres équations. Notre système discrétisé devient :

$$\begin{aligned} \mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, Q_{n+1}) &= 0 && (5.31)\\ Q_{n+1} - Q_n - \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}, Q_{n+\theta})\Delta\lambda &= 0 && (5.32)\\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathsf{h}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, Q_{n+1}) && (5.33)\\ \text{avec } \boldsymbol{\sigma}_{n+\theta} &= \theta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + (1-\theta)\boldsymbol{\sigma}_n && (5.34) \end{aligned}$$

La résolution se fait de même que précédemment par l'algorithme de Newton. En utilisant l'équation (5.1) et en introduisant le correcteur $C\boldsymbol{\sigma}$, il vient :

$$-C\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathsf{h}}{\partial Q}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, Q_n^s) - \boldsymbol{\sigma}_n^s + \mathsf{h}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, Q_n^s) \tag{5.35}$$

$$\theta\frac{\partial \mathsf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}^s, Q_{n+\theta}^s)\Delta\lambda^s C\boldsymbol{\sigma} + \theta\frac{\mathsf{d}\mathsf{g}}{\mathsf{d}Q}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}^s, Q_{n+\theta}^s)\Delta\lambda^s CQ - CQ = Q_n^s - Q_n - \mathsf{g}(\boldsymbol{\sigma}_{n+\theta}^s, Q_{n+\theta}^s)\Delta\lambda^s \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_n^s, Q_n^s)C\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathsf{f}}{\partial Q}(\boldsymbol{\sigma}_n^s, Q_n^s)CQ = -\mathsf{f}(\boldsymbol{\sigma}_n^s, Q_n^s) \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_n^{s+1} - \boldsymbol{\sigma}_n^s && (5.38)\\ CQ &= Q_n^{s+1} - Q_n^s && (5.39)\\ C\lambda &= \Delta\lambda^{s+1} - \Delta\lambda^s && (5.40) \end{aligned}$$

Ce système matriciel de type $A.X = B$ se résout de manière classique et la dimension de la matrice carrée X est ici égale à la somme des dimensions des variables internes (pour CQ), plus 6 (pour $\boldsymbol{\sigma}$) et plus un (pour $\Delta\lambda$) ; cela fait donc 6 lignes et colonnes supplémentaires par rapport au même modèle utilisé dans *stress*. Le test de convergence se fait sur la norme de CQ ou $C\boldsymbol{\sigma}$ et on retient la dernière valeur obtenue dans l'algorithme de Newton à la sortie :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n^{s+1} && (5.41)\\ Q_{n+1} &= Q_n^{s+1} && (5.42) \end{aligned}$$

2.3 Routine *mixte* de pilotage en partie en contrainte et en partie orthogonale en déformation

Dans essai de traction standard, la machine impose la déformation ε_{11} tandis que les faces libres imposent les conditions $\boldsymbol{\sigma}.\vec{e}_2 = \boldsymbol{\sigma}.\vec{e}_3 = \vec{0}$ d'où des contraintes

imposées $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$. Il s'agit d'un pilotage mixte dans lequel les parties connues de l'un et de l'autre sont orthogonales (au sens tensoriel). J'ai développé la routine *mixte* suivante qui utilise cette orthogonalité en mélangeant les calculs de *stress* et de *strain*. Le bilan données-inconnues distingue alors les parties connues $\underline{X}$ des parties inconnues $\overline{X}$:

- Données : $\{\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n, Q_n, \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}\}$
- Inconnues : $\{\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}, Q_{n+1}\}$

Les données doivent respecter l'orthogonalité entre connues et inconnues, à chaque pas de temps :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_n : \overline{\boldsymbol{\sigma}}_n = 0 \tag{5.43}$$
$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = 0 \tag{5.44}$$
$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = 0 \tag{5.45}$$

ce qui conduit à la redéfinition des grandeurs contraintes et déformations comme :

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_n + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_n \tag{5.46}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \tag{5.47}$$
$$\tag{5.48}$$

Le prédicteur élastique ne se gère pas de façon directe car la loi d'élasticité n'est pas explicite :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \mathsf{h}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}, Q_n) = 0 \tag{5.49}$$

La résolution fait encore appel à un algorithme de Newton (équation 5.1) et l'on obtient :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^s - \mathsf{h}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^s, Q_n) + C\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \mathsf{h}}{\partial \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^s, Q_n) C\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{5.50}$$

Cette équation se met sous forme matricielle $A.X = B$ où A est une matrice carrée à 6 lignes car les dimensions de $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, appartenant à des espaces complémentaires, ont une somme de 6. La loi d'élasticité étant linéaire, la résolution est faite en une itération. On remarque dans l'équation ci-dessus, le terme $\partial \mathsf{h}/\partial \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ qui n'est que la restriction du gradient $\partial \mathsf{h}/\partial \boldsymbol{\varepsilon}$ aux dimensions de l'espace relatives à $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (c'est une matrice rectangulaire $6xn$ avec n la dimension de $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$). À convergence, on obtient la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$. On peut donc vérifier que l'on est ou non dans le domaine d'élasticité par l'équation (5.7). Si oui, les variables internes sont conservées (equation 5.8) si non, il faut considérer l'évolution dissipative. De façon similaire au cas précédent, on mixe les deux problèmes (équations 5.10,5.11,5.12 pour le problème en contraintes et les équations 5.28,5.29,5.30 pour le problème en déformation) sur chaque sous-espace concerné. Le problème discrétisé s'écrit :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \mathsf{h}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}, Q_{n+1}) = 0 \tag{5.51}$$
$$Q_{n+1} + Q_n - \mathsf{g}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta}, Q_{n+\theta})\Delta\lambda = 0 \tag{5.52}$$
$$\mathsf{f}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, Q_{n+1}) = 0 \tag{5.53}$$

Sa résolution reprend l'algorithme de Newton (5.1) qui donne le système itératif suivant :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^s-\mathsf{h}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^s,Q_n^s)+C\overline{\boldsymbol{\sigma}}-\frac{\partial\mathsf{h}}{\partial\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^s,Q_n^s)C\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}-\frac{\partial\mathsf{h}}{\partial Q}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^s,Q_n^s)CQ=0 \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
& Q_n^s-Q_n-\mathsf{g}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta}^s,Q_{n+\theta}^s)\Delta\lambda^s+CQ \\
- \quad & \theta\frac{\partial\mathsf{g}}{\partial\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta}^s,Q_{n+\theta}^s)\Delta\lambda^s C\overline{\boldsymbol{\sigma}} \\
- \quad & \theta\frac{\partial\mathsf{g}}{\partial Q}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta}^s,Q_{n+\theta}^s)\Delta\lambda^s CQ \\
- \quad & \mathsf{g}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\theta}^s,Q_{n+\theta}^s)C\lambda^s=0
\end{aligned} \tag{5.55}$$

dans laquelle on a :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^\theta = \theta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+(1-\theta)\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n \tag{5.56}$$
$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^\theta = \theta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}+(1-\theta)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \tag{5.57}$$
$$C\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^{s+1}-\overline{\boldsymbol{\sigma}}_n^s \tag{5.58}$$
$$C\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{s+1}-\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^s \tag{5.59}$$
$$CQ = Q_n^{s+1}-Q_n^s \tag{5.60}$$

La somme des dimension des espaces de $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ étant de 6, la dimension du problème matriciel est la même que dans la routine *strain*, c'est à dire de six plus la somme des dimensions des variables internes plus un.

2.4 Modèle de type endommagement

L'analyse des équations dans le cas plasticité (5.1,5.2,5.3) et de celles dans le cas endommagement (5.4,5.5,5.6) montre qu'il suffit de permuter contrainte et déformation pour passer de l'un à l'autre. Un pilotage en contraintes pour un modèle de type endommagement utilise donc la routine *strain* et inversement. Pour la routine *mixte* cela fonctionne de même. Il a fallu cependant prendre des précautions numériques car les ordres de grandeurs des contraintes et des déformations sont très différents.

2.5 Compléments et limitations

Pour utiliser MatSGen, l'utilisateur doit préciser ses variables internes et les trois fonctions $(\mathsf{f},\mathsf{g},\mathsf{h})$. Les gradients nécessaires $(\partial\mathsf{f}/\partial\boldsymbol{\sigma},\partial\mathsf{f}/\partial Q,\partial\mathsf{g}/\partial\boldsymbol{\sigma},\partial\mathsf{g}/\partial Q,\partial\mathsf{h}/\partial\boldsymbol{\varepsilon},\partial\mathsf{h}/\partial Q)$ peuvent être fournis par l'utilisateur ou calculés numériquement (dérivée centrée). Dans le premier cas la valeur analytique est comparée à la valeur numérique en

début de programme. Les constantes matériau du modèle sont stockés dans un fichier séparé, dans le sous répertoire du modèle.

Une sortie spéciale est prévue pour fourni le module tangent $\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\boldsymbol{\varepsilon}$; elle est utile pour vérifier sa programmation d'une UMAT pour Abaqus.

L'utilisateur fournit la partie connue de son trajet de chargement. Les pas de calcul maximums en contrainte et en déformation sont réglables. Une routine de pilotage «intelligent» permet d'utiliser les routines rapides *strain* mais surtout *stress* entre deux pas de calculs demandés par l'utilisateur dans *mixte*.

Les modèles de plasticité classiques avec écrouissages cinématiques et isotropes diverses sont implantés, le modèle à distorsion aussi. Divers modèles d'endommagement classiques (Marigo, Lemaitre,...) et moins classiques sont implantés aussi. Une fois les équations en main, moins d'une heure est nécessaire pour tester un nouveau modèle (encore moins si l'on utilise les gradients numériques).

Le pilotage en contraintes interdit tout modèle adoucissant, par nature. Le pilotage en déformation interdit tout *snap-back* (diminution de la déformation). C'est pourquoi MatSGen n'a pas été utilisé pour le modèle d'endommagement à potentiel non convexe du second chapitre. Pour gérer ces cas, il faut programmer une recherche de solution en pilotant les variables internes.

Programmé en Matlab, donc non compilé, MatSGen est lent : plusieurs minutes sont nécessaires pour un modèle à trois variables internes tensorielles sur quelques milliers de pas de calcul. Il est possible de l'accélérer en compilant tout ou partie du code, ou en améliorant la programmation. Cette lenteur interdit raisonnablement à la version actuelle d'être utilisée sur un code EF, d'autant plus que MatSGen stocke l'intégralité des variables internes à chaque pas.

2.6 Exemple : l'écrouissage cinématique non linéaire

Il s'agit du modèle classique de Lemaitre et Chaboche dans sa version la plus simple ; c'est néanmoins un modèle non associé (le pseudo-potentiel de dissipation n'est pas égal à la surface seuil). Le minimum pour *MatSGen* est de connaître les fonctions suivantes :

2.6.1 Déclaration du modèle DeclarationModele

C'est le cadre de travail de MatSGen où l'on déclare nom et dimension des variables internes. On peut y ranger aussi toutes les constantes globales comme le projecteur hydrostatique PrHy bien commode pour calculer rapidement le déviateur.

```
   function [Q,QComp] = DeclarationModele ;
% Q contient toutes les informations sur les variables internes utilisées
% QComp contient toutes les informations sur les variables duales
% QComp est utilise pour la dissipation seulement
% Le type du modele 1 plasticite ; 2 endommagement ; 3 direct
global TypModel
```

```
TypModel = 1 ;
global PrHy s32
% PrHy est le projecteur sur l'espace isochore (pression hydrostatique)
PrHy = [1 1 1 0 0 0]'/sqrt(3) ;
s32 = sqrt(3/2) ;
% Definition des variables internes
% Q.name : le nom de la variable
% Q.type = Vk : variable d'etat
% Q.type = Ak : variable associee
% Q.dim = 'tenseur_' : dimension [6,1]
% Q.dim = 'scalaire' : dimension [1]
Q(1).name = 'Ep' ;
Q(1).type = 'Vk' ;
Q(1).dim = 'tenseur_' ;
Q(2).name = 'X' ;
Q(2).type = 'Ak' ;
Q(2).dim = 'tenseur_' ;
% Les variables complementaires
% forcement du type opposé aux variables d'etat associees
% utilisees uniquement pour le calcul eventuel et a posteriori de la dissipation
% QComp.name contient un 'string' contenant leur equation
% en fonction des variables d'etat et des constantes materiau
QComp(1).name = '-S' ;
QComp(1).type = 'Ak' ;
QComp(1).dim = Q(1).dim ;
QComp(2).name = 'alpha' ;
QComp(2).type = 'Vk' ;
QComp(2).dim = Q(2).dim ;
```

2.6.2 Surface seuil f

```
    function val=f(S,Q) ;
global Sy PrHy s32
X = Q(2).val ;
S = S - sum(PrHy.*S)*PrHy ;
X = X - sum(PrHy.*X)*PrHy ;
val = s32*norm(S-X) - Sy ;
```

2.6.3 Fonctions d'écoulement g

```
    function grad=g(S,Q)
global Erreur
global Gama Sy C PrHy s32
```

```
X = Q(2).val ;
S = S - sum(PrHy.*S)*PrHy ;
X = X - sum(PrHy.*X)*PrHy ;
normsx = norm(S-X) ;
N = (S-X)/normsx ;
gEp = s32*N ;
gX = C*N/s32 - Gama*X ;
grad = [gEp ;gX] ;
if norm(X)>(C/(Gama+1E-6))
Erreur = ['X=',num2str(norm(X)),'>C/Gama = ',num2str(C/(Gama+1E-6))] ;
end
```

2.6.4 Loi d'élasticité **h**

```
   function S=h(E,Q) ;
global mu K PrHy
Ep = Q(1).val ;
Eh = sum(PrHy.*E)*PrHy ;
Ed = E - Eh ;
Ep = Ep - sum(PrHy.*Ep)*PrHy ;
Sd = 2*mu*(Ed-Ep) ;
Sh = 3*K*Eh ;
S = Sd + Sh ;
```

2.6.5 Loi d'élasticité inverse **hinv**

```
   function E=hinv(S,Q) ;
global Erreur
global mu K PrHy
Ep = Q(1).val ;
Ep = Ep - sum(PrHy.*Ep)*PrHy ;
Sh = sum(PrHy.*S)*PrHy ;
Eh = Sh/(3*K) ;
Sd = S - Sh ;
Ed = (Sd/(2*mu)) + Ep ;
E = Ed + Eh ;
```

2.6.6 Les autres fonctions ; observations

Les autres fonctions sont essentiellement les gradients de ces fonctions ; ils ne sont pas indispensables mais bien plus rapides que le gradient numérique. La programmation sous MatLab permet d'éviter tout calcul indiciel, souvent lourd et source d'erreur ; les équations littérales sont retranscrites presque telles quelles dans le code.

3 Sorties graphiques dans *Graphiques*

À la sortie de *MatSGen*, ou de manière indépendante sur des résultats existants, est lancée la routine *Graphiques* de représentation des résultats. Les valeurs des variables elle mêmes sont stockées et accessibles dans un répertoire dédié.

3.1 Le pilotage

Le trajet de pilotage est programmé par l'utilisateur. Le sortie graphique figures (5.2) permet de bien visualiser la complémentarité entre les données connues (ici toutes les contraintes), les inconnues (cadre vide).

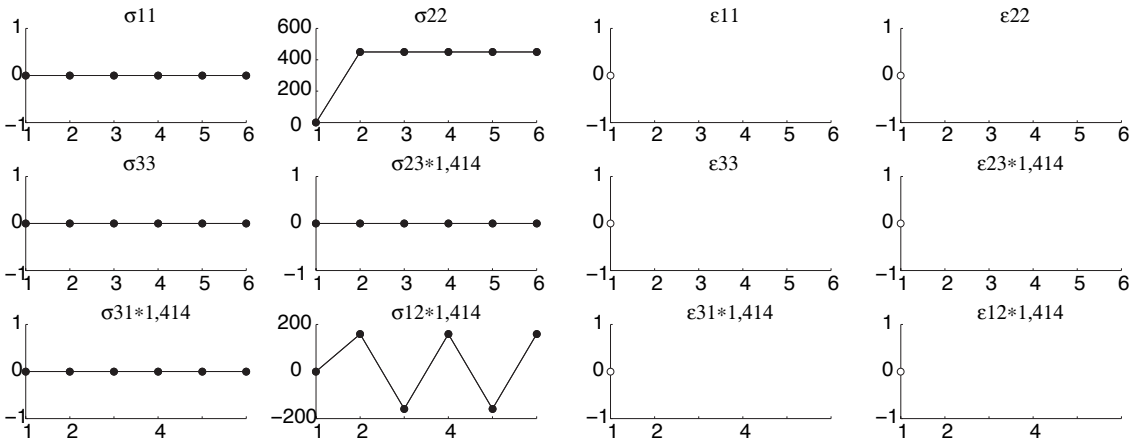


Fig. 5.2: Pilotage en contrainte (à g.) et en déformation (à d.)

3.2 Gestion des bases de représentation

Généralement les représentations sont limitées aux bases canoniques, composante par composante. Ce n'est pas toujours le choix le plus astucieux. La surface de Von Mises, sphérique dans l'espace des déviateurs, y apparaît par exemple comme une ellipse sauf à compenser par des termes en racine au bon endroit. Les représentations de Drucker-Prager (hydrostatique - déviatorique) sont généralement absentes. J'ai donc muni MatSGen de ces représentations. Un trajet de chargement (par exemple en contraintes) est contenu dans un sous espace de l'espace des tenseurs du second ordre ; la simulation génère un trajet réponse (par exemple en déformation) qui peut occuper un sous-espace plus important. Dans le cas de la traction, le chargement est (en contraintes) suivant $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1$ tandis que les déformations sont aussi suivant $\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$ du fait du rétrécissement latéral (Poisson en élasticité). Les déformations suivant 22 et 33 sont identiques : il n'est pas nécessaire de les représenter.

3.3 Types de représentation proposés

Le logiciel offre les choix suivants, dans lesquels S est la contrainte, E la déformation, Q les variables internes et t le «temps» :

```
{ [0] Tous les graphes suivants
{ [1] Graphes S-S, Q tensoriels de type Ak
{ [2] Graphes E-E, Q tensoriels de type Vk
{ [3] Graphes E-S,
{ [4] Graphes S-t
{ [5] Graphes E-t
{ [6] Graphes Q-t et ||Q||-t
{ [7] Graphes Dissipation-t
{ [8] Surface seuil en 3D en contraintes
```

Le logiciel propose de tracer ou non les variables internes. Le code couleur est vert pour les transformations élastiques et bleu pour les transformations dissipatives. Les variables internes sont en bleu pâle.

3.3.1 Généralités

Nommons $\boldsymbol{A}_p(t)$ les variables tensorielles obtenues. Pour les représenter il faut choisir deux fonctions scalaires (distinctes) de la variable tensorielle $x(t)$. Les choix possibles pour ces fonctions sont :

$$\text{le «temps» (numéro du pas) } x(t) = t \tag{5.61}$$

$$\text{une projection } x(t) = \boldsymbol{A}_p(t) : \boldsymbol{E}_i \tag{5.62}$$

$$\text{un invariant } x(t) = \mathsf{inv}(\boldsymbol{A}_p(t)) \tag{5.63}$$

L'utilisateur doit alors choisir la combinaison qui l'intéresse. Toutes ne sont pas (encore) disponibles sur MatSGen. Les calculs (5.61,5.63) n'appellent pas de commentaires particuliers. Par contre le choix de la base tensorielle n'est pas trivial. Le logiciel propose les choix suivants :

```
{ [1] Base canonique minimale
{ [2] Base minimale
{ [3] Hydrostatique / deviatorique
```

3.3.2 Base canonique minimale

Dans cette représentation classique les composantes tensorielles sont projetées sur la base classique des tenseurs (symétriques du second ordre) orthonormée :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 &= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \\
\boldsymbol{E}_2 &= \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\
\boldsymbol{E}_3 &= \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
\boldsymbol{E}_4 &= (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2)/\sqrt{2} \\
\boldsymbol{E}_5 &= (\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3)/\sqrt{2} \\
\boldsymbol{E}_6 &= (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)/\sqrt{2}
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Les composantes des tenseurs sont ainsi stockées donc il n'y a pas de calcul préliminaire. Le logiciel élimine les dimensions surs lesquelles les tenseurs sont identiquement nuls. Parmi celles qui restent il élimine ensuite celles qui sont redondantes en éliminant les projections (composantes) identiques :

$$\text{si } ||A_i(t) - A_j(t)|| < \nu \text{ alors supprimer la ligne } A_j(t) \tag{5.65}$$

où ν est un petit terme (qui pourrait être pondéré selon si la variable est homogène à une contrainte ou à une déformation). Dans le cas d'une traction simple suivant 1 resteront les dimensions 1 et 2. Prenons l'exemple d'une sortie graphique (figure 5.3) sur un simulation de l'essai de rochet bi-dimensionnel. Suivant [010000] on visualise la charge en traction suivie du plateau imposé et la déformation progressive d'allongement. La variable interne $\boldsymbol{X}$ suit presque parallèlement la contrainte : il y a peu d'écrouissage isotrope. La variable interne $-\boldsymbol{S}$ n'est autre que la variable associée à $-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{p}}$, elle n'est pas utile ici.

Suivant [000001] est montré le cisaillement (cet essai, à contrainte de torsion imposée, n'est pas l'essai le plus classique de rochet bidimensionnel où l'angle de torsion, donc la défomation de cisaillement, est imposée). On y voit l'effet d'accommodation du rochet mais aussi l'effet prédéterminant de la direction de la première torsion : l'accommodation ne se fait pas à déformation moyenne nulle.

Suivant [100000] est montré la déformation latérale, liée à l'effet de Poisson au départ puis beaucoup plus intense en plasticité qui est un processus isochore.

3.3.3 base minimale

Ici on s'affranchit de la base canonique. Le premier tenseur de base $\boldsymbol{E}_1$ est défini depuis le premier pas de temps du tenseur à projeter :

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\boldsymbol{A}(1)}{||\boldsymbol{A}(1)||} \tag{5.66}$$

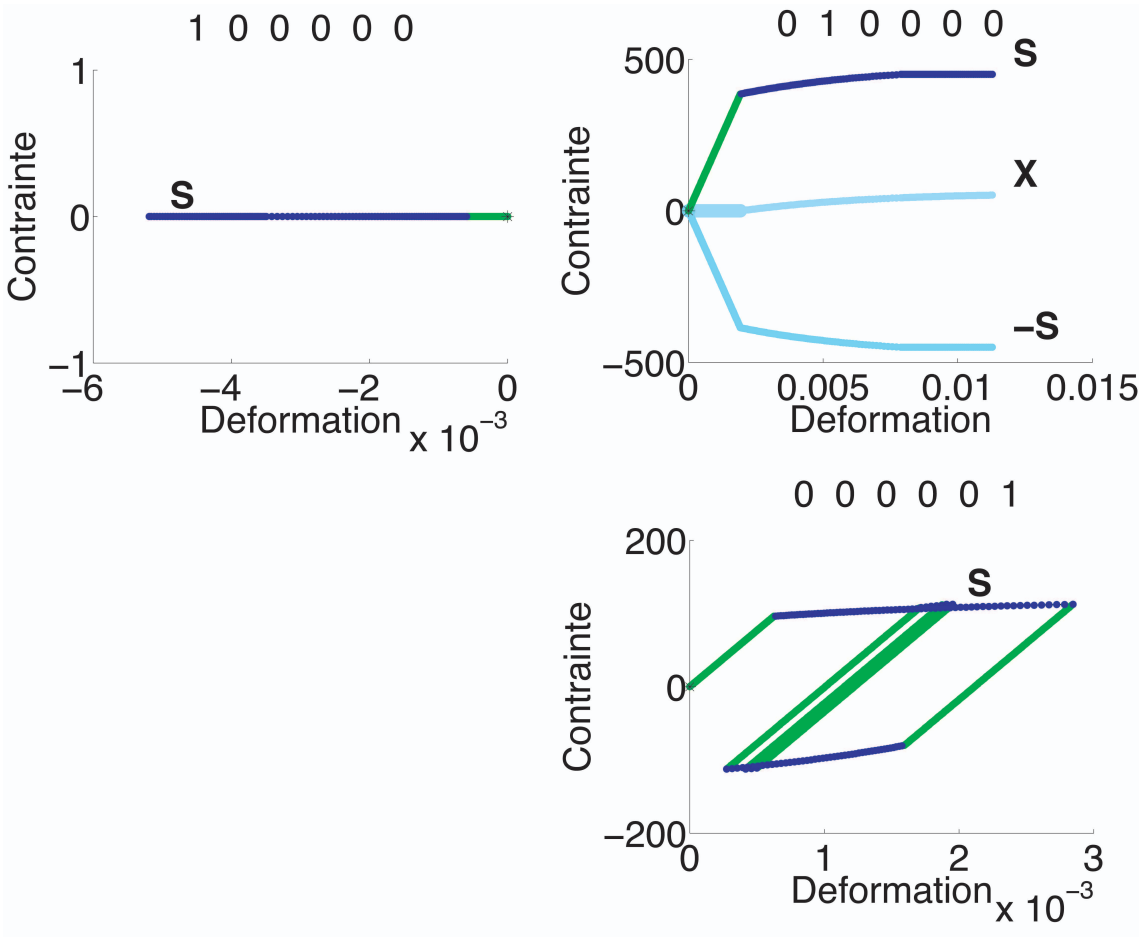


Fig. 5.3: Graphes contrainte-déformation en base canonique pour l'essai de traction-torsion

Le logiciel projette le tenseur $\boldsymbol{A}(t)$ à représenter sur cette direction. Si le projeté est confondu avec le tenseur, c'est qu'aucune autre dimension n'est concernée :

$$\text{pour} \quad \tau = 1..t$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}(\tau) - \sum_i (\boldsymbol{A}(\tau) : \boldsymbol{E}_i)\boldsymbol{E}_i \tag{5.67}$$

$$\text{si } ||\boldsymbol{R}|| > \nu \tag{5.68}$$

$$\boldsymbol{E}_{i+1} = \frac{\boldsymbol{R}}{||\boldsymbol{R}||} \tag{5.69}$$

$$\text{fin}$$

Avec cette méthode la base se construit d'elle même ; le nombre de tenseurs de base ne peut bien sûr excéder 6 car alors s'applique le théorème de «décomposition orthogonale de l'identité» et le résidu $\boldsymbol{R}$ est automatiquement nul. Avec cette approche, une famille de tenseurs de composante en base canonique $A[f(t), f(t), 0, 0, 0, g(t)]$ (f et g indépendantes) se retrouvera présenté sur deux dimensions (bases $[1, 1, 0, 0, 0, 0]/\sqrt(2)$ et $[0, 0, 0, 0, 0, 1]$ par exemple ; en base canonique il serait représenté sur trois dimensions.

3.3.4 base hydrostatique - déviatorique

La plasticité et la mécanique des sols distinguent le rôle des déviateurs et des tenseurs hydrostatiques (sphériques). Le logiciel se donne ici le tenseur hydrostatique comme premier tenseur de base :

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_1/\sqrt{3}(= [1, 1, 1, 0, 0, 0]/\sqrt{3}) \tag{5.70}$$

La suite de la détermination de la base est la même que précédemment. A titre d'exemple les figures (5.4) montrent le tracé obtenu pour une traction avec un modèle de plasticité. Elle est donc présentée suivant $[1, 1, 1, 0, 0, 0]/\sqrt{3}$, l'axe hydro-

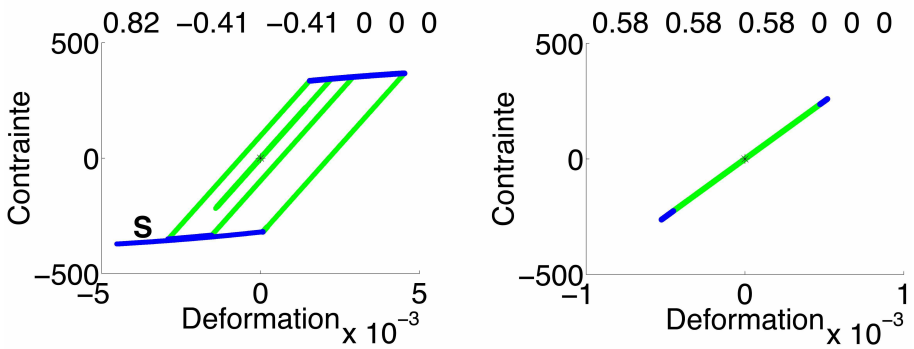


Fig. 5.4: Traction représentée en partie déviatorique (à g.) et hydrostatique (à d.)

statique et suivant $[2, -1, -1, 0, 0, 0]/\sqrt{6}$, le déviateur associé. Les pentes élastiques sont alors respectivement de K et 2μ et on visualise que la plasticité n'affecte pas l'axe hydrostatique.

3.4 Surfaces seuil

Le premier exemple est une surface seuil de plasticité, décrite par le critère de Von Mises dont le centre est translaté de $\boldsymbol{X}$. Il est représenté dans un graphe hydrostatique / déviatorique. Le tenseur $\boldsymbol{X}$ demeure déviatorique et la surface seuil est une bande car elle ne dépend pas de la pression hydrostatique. C'est une représentation dans l'espace de Drucker-Prager. La seconde illustration représente la surface seuil

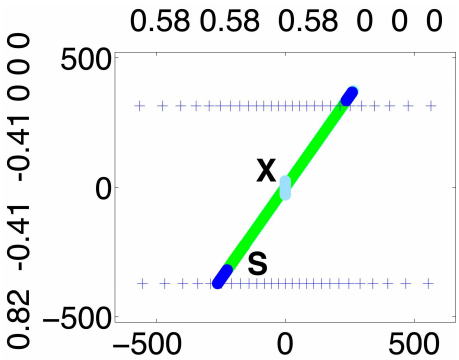


Fig. 5.5: Traction représentée en partie déviatorique (à g.) et hydrostatique (à d.)

obtenue pour la simulation de rochet bidimensionnel précédente. Le logiciel a calculé la surface seuil, circulaire, centrée en $\boldsymbol{X}$ point à point, et la direction d'évolution de $\boldsymbol{X}$ au dernier point ; celui-ci (en contrainte) est à côté de la lettre S. On visualise que l'évolution de $\boldsymbol{X}$ ne suit pas la normalité (à cause du terme de rappel en écrouissage cinématique non linéaire). On pourrait tracer $\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}$ et montrer qu'il suit la normalité à la surface seuil. La surface seuil peut aussi bien sûr être tracée dans le repère des contraintes principales. La figure suivante est utilisée dans le chapitre 2 pour le modèle d'endommagement avec potentiel non convexe. L'axe hydrostatique pointe vers nous. ll est bien sûr possible de représenter les surfaces seuil dans l'espace des déformations.

4 Identification

Le logiciel permet d'optimiser un ou plusieurs paramètres du modèle choisi. Pour ce faire, il a besoin de données d'entrée (contraintes et déformations) redondantes. Nous avons vu que six composantes orthogonales des contraintes ou déformations sont nécessaires pour le pilotage. Au moins une de plus est nécessaire pour l'identification. Prenons l'exemple de l'essai de traction : les données connues sont au moins

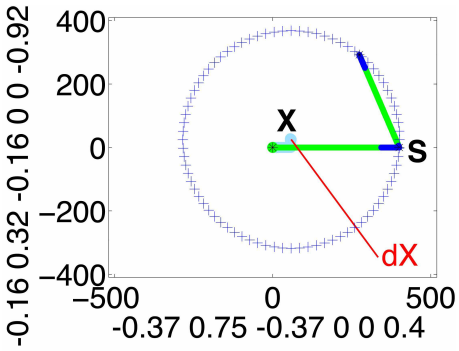


Fig. 5.6: Surface seuil de Von Mises dans l'espace déviatorique

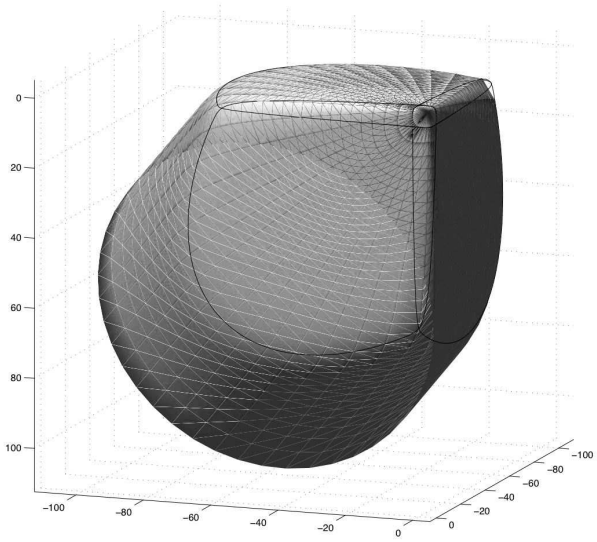


Fig. 5.7: Surface seuil en contraintes principales

$\boldsymbol{\sigma}(\sigma(t), 0, 0, 0, 0, 0)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\varepsilon(t), ?, ?, ?, ?, ?)$. Le calcul peut être mené en contrainte imposée et dans ce cas le logiciel tentera d'optimiser alors la ou les constantes pour s'approcher au mieux de la déformation connue. Il est aussi possible de lancer un calcul mixte avec pilotage suivant (ε_1 et $\sigma_2, ...,_5$) et chercher à s'approcher au mieux de σ_1. Si l'essai contient la déformation transversale $\varepsilon_2(t)$, l'identification en tiendra compte aussi. Si le matériau est suffisamment symétrique (ex. isotrope transverse autour de $\vec{e}_1$) on pourra alors identifier sur tout $\boldsymbol{\varepsilon}$, en supposant $\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t)$ et $\varepsilon_{4,5,6}(t) = 0$.

Dans l'état actuel du programme l'erreur essai-modèle en contrainte $e(\boldsymbol{\sigma})$ ou en déformation $e(\boldsymbol{\varepsilon})$ est calculée comme la moyenne quadratique des écarts entre donnée calculée $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ et mesurée $(\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^e)$ sur tous les pas de temps $t \in (1..T)$:

$$e(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{\sum_t (\boldsymbol{\sigma}^e(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)) : (\boldsymbol{\sigma}^e(t) - \boldsymbol{\sigma}(t))}{T}} \tag{5.71}$$

$$e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{\frac{\sum_t (\boldsymbol{\varepsilon}^e(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)) : (\boldsymbol{\varepsilon}^e(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t))}{T}} \tag{5.72}$$

Dans le cas où les deux écarts sont à prendre en compte, ces deux erreurs n'ayant pas la même dimension, on ne peut raisonnablement pas les ajouter. On tombe sur l'écueil des programmes d'identification : minimiser l'erreur en contrainte ou en déformation ? Une version du logiciel a été programmée avec une erreur en relation de comportement (Ladevèze 1977) limitée au cas élastique :

$$e = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^e) - \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e)\right) : \mathbb{C}^{-1} : \left((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^e) - \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e)\right) \tag{5.73}$$

C'est une erreur en énergie qui est donc valable pour une erreur en contrainte et/ou en déformation, qui peut prendre en compte l'identification par rapport à des contraintes et des déformations connues. Apparemment compliquée, cette expression est très simple dans le cas du solide isotrope, en décomposant partie hydrostatique et déviatorique :

$$\begin{aligned}
2eh &= \frac{1}{3K}\left((\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{h}} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{h}\,e}) - 3K(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}\,e})\right) : \left((\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{h}} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{h}\,e}) - 3K(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{h}\,e})\right) \\
2ed &= \frac{1}{2\mu}\left((\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}\,e}) - 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}\,e})\right) : \left((\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{d}\,e}) - 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathsf{d}\,e})\right) \\
e &= eh + ed
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Le logiciel demeure toutefois à compléter en ce qui concerne l'utilisation d'une erreur en relation de comportement plus sophistiquée et adaptée aux modèles non linéaires (existe dans le domaine du recalage).

Conclusion

Ces travaux sont relatifs aux comportements dissipatifs, à l'exception des travaux sur l'anisotropie élastique, plus anciens. Au niveau théorique, ils exploitent des concepts encore peu utilisés, les bases de tenseurs, la décomposition de Kelvin et les potentiels non convexes. Néanmoins ils demeurent compatibles avec l'école des matériaux standard généralisés pour la description de la thermodynamique des processus irréversibles. En ce sens, le modèle d'endommagement à fissures rugueuses devra prochainement être intégré aux modèles micromécaniques déjà développés, probablement avec l'équipe de D. Kondo. Pour l'approche à potentiel non convexe, beaucoup de travail reste à réaliser avant de pouvoir passer à l'étape du code de calcul. Cette intégration, faite pour le modèle de plasticité à distorsion des surfaces de charge, est pour moi l'objectif à atteindre pour un modèle.

De même, au niveau des essais, la machine de mesure de la viscoélasticité anisotrope ne sera un projet abouti que lorsqu'elle sera finalisée à la Cité de la Musique, voire commercialisée auprès des luthiers ou des industries du bois ou du matériau composite. Le concept de machine d'essai rigide et évitant toute source de dissipation parasite a permis aussi de bons résultats en plasticité biaxiale. Lors de cette étude est apparu que l'on atteignait aussi les limites des machines d'essais actuelles. La conception d'une nouvelle machine représente pour moi un domaine d'intérêt.

Ces recherches ont été effectuées au LMT-Cachan. Ce laboratoire a connu un essor rapide grâce à son implication forte au niveau des besoins industriels et son activité équilibrée entre essais et modèles. C'est vers cet équilibre que j'ai tendu au cours de ces années et je souhaite le conserver dans le futur.

Bibliographie

Andrieux, S., Bamberger, Y. & Marigo, J. J. (1986). Un modèle de matériau fissuré pour les bétons et les roches, *J. Theor. and Appl. Mech.* **5** : 471–513.

Apel, N. (2004). *Approaches to the description of anisotropic material behaviour at finite elastic and plastic deformations. Theory and numerics*, thèse de doctorat, Institut für Mechanik, Stuttgart.

Arts, R. (1993). *A study of general anisotropic elasticity in rocks by wave propagation*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.

Ashby, M. F. (1992). *Material selection in mechanical design*, Elsevier.

Auld, B. A. (1973). *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley and Sons.

Badel, P. B. (2001). *Contributions la simulation numérique de structures en béton armé*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.

Barlow, C. Y. (1997). Material selection for musical instruments, *Proceedings institute of acoustics* **19** : 69–78.

Bazant, Z. P. (1988). Microplane model for brittle plastic materials. i : Theory, ii : Verification, *J. of Engrg. Mech. ASCE* **114** : 1672–1702.

Bazant, Z. P. & Planas, J. (1998). *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-Brittle Materials*, CRC Press, New York.

Beddiar, K. (2002). étude expérimentale du couplage corrosion fissuration dans le béton armé, *Rapport*, CEA (DM2S/SEMT).

Benallal, A. (1987). On the stability of some time-integration schemes in quasi-static hardening elasto-viscoplasticity, *Engn. Analysis* **4** : 95–99.

Benallal, A., Billardon, R. & Doghri, I. (1988). An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations, *Comm. in Appl. and Num. Meth.* **4** : 731–740.

Bensa, J., Dubois, D., Kronland-Martinet, R. & Ystad, S. (2006). Perception and cognitive evaluation of a piano synthesis model, *Lecture Notes in Computer Science (à paraître)* .

Besnainou, C. & François, M. (2004). Methodology to study sound quality of string instruments : connexion between perception and mechanical design some clues about the leading rule of viscoelasticity, *Proceedings of the International symposium on Musical Acoustics FISMA 2004*, Nara, Japon.

Besnainou, C. & Gibiat, V. (2004). *Ecole d'été de Cargèse*, Cargèse, France.

Bohler, J. P., Kirillov, A. & Onat, E. T. (1994). On the polynomial invariants of elasticity tensors, *J. of Elast.* **34** : 97–110.

Boucher, M., Cayla, P. & Cordebois, J. P. (1995). Experimental studies of yield surfaces of aluminium alloy and low carbon steel under complex biaxial loadings, *Eur. J. Mech.* **14**.

Brodt, M., Cook, L. S. & Lakes, R. S. (1995). Apparatus for measuring viscoelastic properties over ten decades : refinements, *Review of Scientific Instruments* **66** : 5292–5297.

Brémaud, I. (2004). *Etude du vieillissement du bois dans les instruments de musique dans une optique de conservation préventive : effet de l'âge du matériau et des contraintes mécaniques et hygrothermiques appliquées en conditions de conservation ou de jeu*, Stage dans le cadre de la thèse, Université Montpellier 2 (co-encadrement à 33% avec le LAM (Paris 6) et Montpellier).

Brémaud, I. (2006). *Paramètres déterminants pour l'aptitude des bois denses et des bois tropicaux mal connus à la facture instrumentale*, thèse de doctorat, LMGC Université Montpellier 2.

Bucur, V. (2005). *Acoustic of Wood*, Springer-Verlag GmbH.

Burlion, N. (1997). *Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale*, Thèse de doctorat, ENS de Cachan.

Burr, A., Hild, F. & Leckie, F. (1995). Micro-mechanics and continuum damage mechanics, *Arch. of Appl. Mech.* **65** : 437–456.

Calloch, S. (1997). *Essais triaxiaux non proportionnels et ingénérie des modèles de plasticité cyclique*, Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

Castellengo, M., Besnainou, C. & Dubois, D. (1999). Acoustic quality of musical instruments and categorization, *137 th Meeting of the Acoustical society of America et Forum Acusticum*, Berlin, Allemagne, p. 1217.

Chaboche, J.-L. (1992). Une nouvelle condition unilatérale pour décrire le comportement des matériaux avec dommage anisotrope, *C.R. Acad. Sci., Série II* **314** : 1395–1401.

Cheminée, P., Gherghinoiu, C. & Besnainou, C. (2005). Analyse des verbalisations libres sur le son du piano versus analyses acoustiques, *Colloque interdisciplinaire de musicologie (CIM05)*, Montreal (Québec), Canada.

Choqueux, G. (1999). *Influence de la saturation en eau sur l'élasticité de l'épicéa utilisé en lutherie*, Rapport de master 2, Mécanique et Matériaux (Projet Pratique en Laboratoire).

Chrisochoos, A. & Louche, H. (1998). Analyse thermographique des mécanismes de localisation dans des aciers doux, *Cr. Acad. Sci. séries IIb* **326** : 345–352.

Ciss, A. (2003). *Implémentation d'une loi de comportement de plasticité avec distorsion des surfaces de charges dans abaqus*, Rapport de master 2, Mécanique et Matériaux (stage).

Cuisinier, D. (2002). *Orniérage des chaussées. comportement visco-élasto-plastique des bitumes*, Rapport de dea, DEA MSOE - École Centrale Paris.

Cuisinier, D., Berthaud, Y. & François, M. (2007). Identification of bituminous concrete elasto-plastic parameters from a structural test, *Proceedings of the international workshop on constitutive modelling - development, implementation, evaluation, and application*, Hong Kong, Chine.

Cuisinier, D., Berthaud, Y., François, M., Hammoun, F. & Hamlat, S. (2005). Recherche des paramètres élastiques d'un enrobé bitumineux à partir d'un essai structurel, *Actes du colloque méthodes et techniques optiques pour l'industrie*, Marseille.

Cuisinier, D., Berthaud, Y., François, M., Hild, F. & Hammoun, F. (2006). Utilisation de la corrélation d'images pour déterminer les paramètres élastiques d'un enrobé bitumeux, *Colloque National Mecamat. Approches multiéchelles en mécanique des matériaux*, Aussois, France.

Del_Piero, G. & Owen, D. (1993). Structured deformations of continua, *Arch. Rational Mech. Anal.* **124** : 99–155.

Desmorat, R., Ragueneau, F. & Gatuingt, F. (2006). Role of equivalent strains on the multiaxial response of an anisotropic damage model, *Proceedings of European Solid Mechanics Conference ESMC 2006*, Budapest, Hungary.

Dieulesaint, E. & Royer, D. (1974). *Ondes élastiques dans les solides*, Masson, Paris.

Eriksen, J. L. (1975). Equilibrium of bars, *Journal of Elasticity* **5** : 191–202.

Eshelby, J. D. (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, *Proc. R. Soc.* **A252** : 561–569.

Espié, L. (1996). *Étude expérimentale et modélisation numérique du comportement mécanique de monocristaux de superalliage*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Feyel, F. (2002). Some new technics regarding the parallelisation of zébulon, an object oriented finite element code for structural mechanics, *Math. Modelling and Num. Ana.* **36** : 923–935.

Fivel, M. & Forest, S. (2004). Plasticité cristalline et transition d'échelle : cas du monocristal, *Techniques de l'ingénieur. Matériaux métalliques*, Techniques de l'ingénieur, Paris, FRANCE (19) (Revue).

Florez-Lopez, J., Benallal, A., Geymonat, G. & Billardon, R. (1994). A two-field finite element formulation for elasticity coupled to damage, *Computer methods in applied mechanics and engineering* **114** : 193–212.

Fond, C., Fléjou, J.-L. & Berthaud, Y. (1995). Interactions between cracks and circular holes in bidimensional linear elastic media, *Eur. J. Mechanics /Solids* **14** : 73–96.

Forest, S. & Sievert, R. (2003). Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua, *Acta Mechanica* **160** : 71–111.

Forte, S. & Vianello, M. (1996). Symmetry classes for elasticity tensors, *J. of Elasticity* **43** : 81–101.

Francfort, G. A. & Marigo, J. J. (1998). Une approche variationnelle de la mécanique du défaut, *ESAIM : Proceedings. Actes du 30 ème Congrès d'Analyse Numérique : CANum' 98* **6** : 57–94.

François, M. (1995). *Identification des symétries matérielles de matériaux anisotropes*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.

François, M. (2000a). Couplage élasticité-teneur en eau dans des milieux poreux, *Bulletin du groupe français de mécanique des matériaux (mécamat info)* **2**.

François, M. (2000b). Mesure ultrasonore du tenseur d'élasticité orthotrope et analyse de ses symétries, *Rapport interne 236*, LMT-Cachan.

François, M. (2000c). Vers une mesure non destructive de la qualité des bois de lutherie, *Revue des composites et des matériaux avancés* **10** : 261–279.

François, M. (2001). A plasticity model with yield surface distortion for non proportional loading, *Int. J. Plast.* **17** : 703–718.

François, M. (2004a). *Elasticité anisotrope*, Cours du Master 2 MIS, UPMC-Paris 6 / ENS-Cachan / ENSAM.

François, M. (2004b). Mesure des caractéristiques mécaniques de la rouille des fers du palais des papes, *Rapport*, CEA-Saclay.

François, M. (2005). Mesure de la surface seuil initiale de l'acier x, *Rapport*, IFP.

François, M. (n.d.). Non convex potentiel and damage model for quasi-brittle material (soumis), *Eur. J. of Mech. A/Solids* .

François, M. & Geymonat, G. (1996). Distance of a stiffness tensor to the classes of symmetry. applications to the stiffness tensor measurement and to homogenization, *Proceedings of «Conférence à la mémoire du Professeur Jean-Paul Boehler» : Mécanique des matériaux hétérogènes, Grenoble, France* .

François, M., Geymonat, G. & Berthaud, Y. (1998). Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor ; application to acoustic measurements, *Int. J. Solids and Structures* **35** : 31–32.

François, M. & Royer-Carfagni, G. (2003). Damage mechanics model based on structured deformations, *Proceedings of 2nd MIT Conference, Boston* .

François, M. & Royer_Carfagni, G. (2005). Structured deformation of damaged continua with cohesive-frictional sliding rough fractures, *Eur. J. of Mech. A/Solids* **24** : 644–660.

Germain, P., Nguyen, Q. S. & Suquet, P. (1983). Continuum thermodynamics, *J. of Appl. Mech.* **50** : 1010–1020.

Gillormini, P. (1992). Une présentation simplifiée des méthodes d'homogénéisation utilisées pour les matériaux désordonnés, *Rapport interne 132*, LMT-Cachan.

Grediac, M., Toussaint, E. & Pierron, F. (2003). Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 3. application to the bending rigidities of anisotropic plates, *International Journal of Solids and Structures* **40** : 2401–2419.

Halm, D. & Dragon, A. (1998). An anisotropic model of damage and frictionnal sliding for brittle materials, *Eur. J. Mech., A/ Solids* **17** : 439–460.

Halphen, B. (1997). *Thermodynamique des milieux continus (Cours de l'ENPC)*, http ://www.enpc.fr/enseignements/node97.html, Heidelberg.

Halphen, B. & Nguyen, Q. S. (1975). Sur les matériaux standards généralisés, *J. Mécanique* **14** : 38–63.

Hild, F. (2002). Correli : a software for displacement field measurements by digital image correlation, *Rapport interne 254*, LMT-Cachan.

Hild, F., Raka, B., Baudequin, M., Roux, S. & Cantalube, F. (2002). Multi-scale displacement fields measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation, *Appl. Optics* **41** : 6815–6828.

Houssin, B. (1999). *Mesure du bois de pernambouc*, Rapport de master 2, Mécanique et Matériaux (co-encadrement à 50% avec la Cité de la Musique).

Jefferson, A. D. (2003). Craft-a plastic-damage-contact model for concrete. i. model theory and thermodynamic considerations, *Int. J. Solids Structures* **40** : 5973–5999.

Jirásek, M. & Rolshoven, S. (2003). Comparizon of integral-type nonlocal plasticity models for strain softening materials, *International Journal of Engineering Science* **41** : 1553–1602.

Kabbaj, D. & Rasoldier, N. (2002). *Mesure ultrasonore du tenseur d'élasticité d'un os de bovin*, Rapport de master 2, MIS - Paris 6 (co-encadrement à 50% avec le LIP).

Karapetian, E. & Kachanov, M. (1997). Three-dimensional interactions of a half-plane crack with point forces, dipoles and moments, *Int. J. Solids Structures* **34** : 4101–4125.

Keyvani, M., François, M. & Baptiste, D. (1992). Modélisation micromécanique du comportement endommagé de composites smc., *Comptes rendus des JNC-8, AMAC. Palaiseau, France* .

Kondepudi, D. & Prigogine, I. (1998). *Modern thermodynamics. From heat engines to dissipative structures*, John Wiley and Sons, Weinheim.

Kuiken, G. D. C. (1994). *Thermodynamics of irreversible process, applications to diffusion and rheology*, Wiley tutorial, John Wiley and Sons, Weinheim.

Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. & Rusch, H. (1969). Behavior of concrete under biaxial stresses, *ACI Journal* **66** : 656–666.

Kurtyka, T. & Zyczkowski, M. (1985). A geometric description of distortionnal plastic hardening of deviatoric metals, *Arch. Mech.* **37** : 383–395.

Kurtyka, T. & Zyczkowski, M. (1996). Evolution equations for distortionnal plastic hardening, *Int. J. Plast.* **12** : 191–213.

LaBorderie, C. (2003). *Stratégies et modèles de calculs pour les structures en béton*, Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Ladeveze, P. (1993). On anisotropic damage theory, *Failure criteria of Structured media, proceedings of the CNRS international colloquium No 351* pp. 355–363.

Ladevèze, P. (1977). Nouvelles procédures d'estimation d'erreur relative à la méthode des éléments finis et applications, *Journées éléments finis, Rennes (France).*

Ladevèze, P. (1983). On an anisotropic damage theory, *Coll. 351, Failure Criteria of Structured Media*, CNRS Int., Villars-de-Lans, France, pp. 355–363.

LeConte, S. (2006). état d'avancement, *Présentation à la Cité de la Musique.*

Lemaitre, J. (1984). *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris.

Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics*, Springer, Heidelberg.

Lemaitre, J. & Desmorat, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Fatigue and Brittle Failures*, Springer, Heidelberg.

Levy, M., Stern, R. & Bass, H. (2000). *Handbook of Elastic Properties of Solids, Liquids, and Gases. Volume III : Elastic Properties of Solids : Biological and Organic Materials, Earth and Marine Sciences*, Academic Press.

Lucchi, G. & Seghetti, P. (1984). *Ultrasoni nella luteria.*

Malras, N. (2002). *Mise au point d'un banc de mesures de viscoélasticité*, Rapport de master 2, Mécanique et Matériaux (Projet Pratique en Laboratoire).

Malvar, L. J. (1992). Bond reinforcement under radial confinement, *ACI Mat. J.* **89** : 593–601.

Mamou-Mani, A., Frelat, J. & Besnainou, C. (2005). A modelization of the down-bearing of the soundboards through a simplified system in nonlinear dynamics, *Twelfth International Congress on sound and vibration*, Lisbonne, Portugal.

Marigo, J. J. (1981). Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique, *C. R. Acad. Sci* **292** : 1309–1312.

Mayes, R. L. & Clough, R. W. (1975). State-of-the-art in seismic shear strength of masonry ? an evaluation and review, *NSF report EERC 75-21 75-21, College of Engineering, University of California at Berkeley*, LMT-Cachan.

Mazars, J. & Berthaud, Y. (1989). Une technique expérimentale apliquée au béton pour créer un endommagement diffus et mettre en évidence son caractère unilatéral, *C. R. Acad. Sci. - Série IIb* **308** : 579–584.

Meirovitch, L. (2001). *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill.

Millard, A., Lancel, M., Beddiar, K., Berthaud, Y., Caré, S. & L'Hostis, V. (2004). Modélisation de la fissuration du béton armé due à la corrosion des aciers, validation du modèle d'endommagement à partir de tests expérimentaux de corrosion/fissuration accélérés sur poutrelles métriques en béton armé, *Note technique*, CEA (DM2S/SEMT).

Nemat-Nasser, S. & Hori, M. (1999). *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials (2nd revised edition)*, North-Holland, Amsterdam.

Onat, E. T. (1984). Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids, *Int. Engrg. Sci.* **22** : 1013–1021.

Ortiz, M. & Simo, J. C. (1986). An analysis of a new class of integration algoriths for elastoplastic constitutive relations, *Int. J. of Num. Meth. in Engn.* **23** : 353–366.

Ouglova, A. (2004). *Étude du comportement mécanique des structures en béton armé atteintes par la corrosion*, Thèse de doctorat, ENS Cachan.

Ouglova, A., Berthaud, Y., Foct, F., François, M., Ragueneau, F. & Petre-Lazar, I. (2007). Influence of corrosion on bond properties between concrete and reinforcement in concrete structures, *Mechanics and materials RILEM* **accepté sous réserve de modifications**.

Ouglova, A., Berthaud, Y., François, M. & Foct, F. (2006). Mechanical properties of ferric oxide formed by corrosion in reinforced concrete structures, *J. of Corr. Sci. & Engng.* **sous presse - ref : GTB/2005/2272**.

Pensee, V. & Kondo, D. (2001). Une analyse micromécanique 3d de l'endommagement par mésofissuration, *C. R. Acad. Sci. - Série IIb* **329** : 271–276.

Pensee, V., Kondo, D. & Dormieux, L. (2002). Micromechanical analysis of anisotropic damage in brittle materials, *J. Engrg. Mech. ASCE* **128** : 889–897.

Phillips, A. & Gray, G. A. (1961). Experimental investigation of corners in the yield surface, *J. of Basic Engn. - Transactions of the ASME* pp. 275–288.

Pijaudier-Cabot, G. (2000). *Micro-Crack Clustering, Non Local and Gradient Damage Models*, Springer Verlag Pubs, pp. 170–216.

Pilvin, P. (1990). *Approches multiéchelles pour la prévison du comportement anélastique des métaux*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

Pilvin, P. (2003). Sidolo, *Notice d'utilisation 2.4495*, LGM - Université de Bretagne Sud.

Poulin, G. (2004). *Contribution au développement d'un générateur piézoélectrique pour applications nomades*, Thèse de doctorat, Université Paris 11 Orsay.

Puglisi, G. & Truskinovsky, L. (2005). Thermodynamics of rate-independant plasticity, *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **53** : 655–679.

Ramtani, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportment multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.

Rousset, M. (1985). *Surface seuil de plasticité : détermination automatique et modélisation*, Thèse de docteur ingénieur, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.

Rousset, M. & Marquis, D. (1985). Sur la déformation des surfaces seuil en plasticité cyclique, *Cr. Acad. Sci. IIb* **301** : 751–755.

Royer-Carfagni, G. (2000). Some considerations on the warping of marble façades. the example of alvar aalto's finland hall in helsinki, *Construction and Building Materials* **13** : 449–457.

Royer-Carfagni, G. & Lancioni, G. (2005). *Expériences numériques réalisées pour modéliser les dommages observés dans la maçonnerie en pierre du Panthéon*, Mémoire sur la Stabilité et les Lézardes du Panthéon Français, Ministère de la Culture et de la Communication - Service National des Travaux, Direction du Patrimoine, Paris.

Rudnicki, J. W. & Rice, J. (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **23** : 371–394.

Rychlewski, J. (1984). On hooke's law, *Prikl. Matem. Mekhan.* **48** : 420–435.

Schmittbuhl, J., Roux, S. & Berthaud, Y. (1994). Development of roughness in crack propagation, *Europhys. Lett. 28* **28** : 585–590.

Schreyer, H. L. (1995). Continuum damage based on elastic projection operators, *International journal of damage mechanics* **4** : 171–195.

Sermage, J. P. (1998). *Fatigue thermique multiaxiale à température variable*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

Sobue, N. (1995). Effect of continuous vibrations on dynamic viscoelasticity of wood, *International Symposium of Musical Acoustics*, pp. 326–334.

Struick, L. C. E. (1978). *Physical Aging in Amorphous Polymers and Other Materials*, Elsevier.

Tuan, H. L. (2005). *Contribution à la modélisation du comportement des bétons*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

Vardoulakis, I., Labuz, J. F., Papamichos, E. & Tronvoll, J. (1998). Continuum fracture mechanics of uniaxial compression on brittle materials, *Int. J. Solids Structures* **35** : 4313–4335.

Vincent, L. (2002). *Une amélioration de la description du phénomène de déformation progressive dans les métaux par la prise en compte de la distorsion du domaine d'élasticité*, Thèse de doctorat, ENS de Cachan.

Védrines, M. (1999). *Identification des symétries matérielles dans un marbre de carrare*, Rapport de master 2, Mécanique et Matériaux.

Wadhawan, V. K. (1987). The generalized curie principle, the hermann theorem, and the symmetry of macroscopic tensor properties of composites, *Materials research bulletin* **22** : 651–660.

Welemane, H. & Cormery, F. (2002). Some remarks on the damage unilateral effect for microcracked materials, *Int. J. Dam. Mech.* **11** : 65–86.

Zaoui, A., François, D. & Pineau, A. (1991). *Comportement mécanique des matériaux*, Masson, Paris.

Zohdi, T. I., Monteiro, P. J. M. & Lamour, V. (2002). Extraction of elastic moduli from granular compacts, *Int. J. of Friction* **115** : 49–54.