HAL open science

Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies

Hélène Eynard-Bontemps

▶ **To cite this version:**

Hélène Eynard-Bontemps. Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies. Mathématiques [math]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2009. Français. NNT : . tel-00436304

HAL Id: tel-00436304

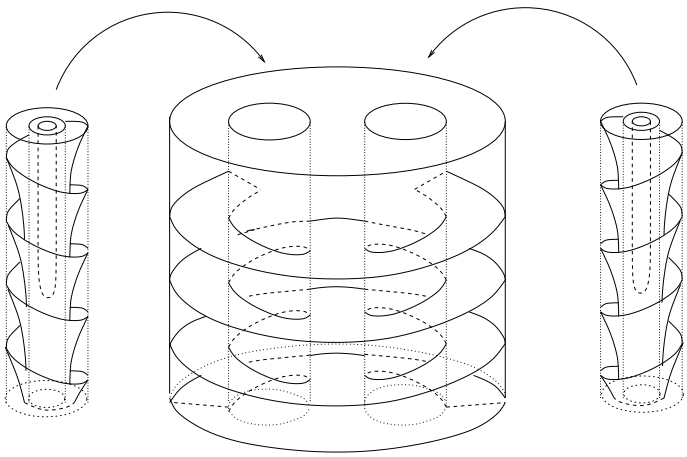
https://theses.hal.science/tel-00436304

Submitted on 26 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies



Hélène Eynard-Bontemps
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07 – France

Remerciements

Quand j'ai rencontré Emmanuel Giroux, j'*étudiais* ma discipline froidement, avec une distance « scolaire ». Dès nos premiers échanges et au cours des sept années qui ont suivi, j'ai découvert une nouvelle façon de *faire* des maths, de les raconter, de les contempler, de jouer avec. Par sa façon unique d'exprimer les idées pour que je les comprenne, sa patience, son humour, son sens de l'esthétique et de l'autodérision, il a su me les faire *aimer*. Je ne saurais assez lui exprimer ma gratitude pour l'énergie qu'il a consacrée à l'encadrement de cette thèse et pour m'avoir soutenue du début à la fin.

Je tiens ensuite à remercier mes rapporteurs, Patrice Le Calvez et Yakov Eliashberg, qui m'ont fait un grand honneur en acceptant ce rôle. La lecture minutieuse de P. Le Clavez m'a permis d'améliorer substantiellement le texte original, et je le remercie vivement pour le temps qu'il a consacré à cette tâche pendant ces derniers mois. L'appréciation de Y. Eliashberg m'est quant à elle d'autant plus précieuse que ses travaux ont directement inspiré un chapitre clé de cette thèse.

Je suis très heureuse de pouvoir compter en outre parmi les membres de mon jury :

– Sylvain Crovisier, dont les explications et les suggestions ont été décisives dans l'élaboration de mon premier article. Je lui suis très reconnaissante pour sa gentillesse spontanée et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail jusqu'ici ;

– Étienne Ghys, dont l'éloquence et l'enthousiasme ne sont pas étrangers à mon orientation vers la géométrie. J'ai eu la chance de lui exposer mon travail, et de repartir avec une multitude de nouvelles pistes de réflexion (que je n'ai malheureusement pas encore eu le temps d'explorer) ;

– Jean-Christophe Yoccoz, qui a bien voulu se pencher sur mes questions et partager avec moi ses connaissances sur l'un de ses domaines d'expertise pour en dégager des pistes de recherche. J'ai beaucoup apprécié son accueil et son accessibilité.

Je remercie plus généralement tous ceux qui m'ont prêté un peu de leur savoir ainsi que ceux qui m'ont écouté raconter mes travaux, pour leurs avis, leurs suggestions, leurs encouragements.[1] Merci en particulier à

1. Le plus sage, pour n'oublier personne, serait de m'arrêter ici. Je choisis plutôt de remercier tout-de-suite les oubliés, en espérant que cette attention les aidera à pardonner mon étourderie.

– Takashi Tsuboi qui, par son invitation à Tokyo et les échanges que nous avons pu avoir lors de ce séjour, a joué un rôle déterminant dans ma thèse. C'est avec enthousiasme que je me prépare à passer un an de plus dans son université ;

– François Laudenbach, qui m'a fait bénéficier plus d'une fois de son expérience, de sa pédagogie et de son écoute attentive.

Certaines de ces rencontres ont été possibles grâce au financement du projet ANR Symplexe dont je remercie les instigateurs.

J'adresse aussi un grand merci collectif à tous les membres (passés et présents) de l'UMPA qui contribuent à faire de son laboratoire un lieu de travail vivant et accueillant, et parmi eux aux secrétaires pour leur patience et leur efficacité.

Un merci tout particulier à Patrick, pour n'avoir jamais été avare de son temps avec moi, pour ses dépannages informatiques, son « soutien scolaire », son soutien tout court, et ce satané enthousiasme dont je manque et dont il a justement à revendre.

Un grand merci également à Boubou, dont la vivacité d'esprit et l'humour m'émerveillent toujours, à mes co-bureaux successifs (Pierre P., Maxime Z., l'autre Pierre P. et Séverine) pour leur patience et leur indulgence (il en fallait), à Benoît et Patrick pour avoir veillé à mon acclimatation, aux fléchiverbistes du midi (et aux cruciverbistes du mercredi), à Klaus pour sa présence apaisante en salle passerelle, à Agnès pour son épatante empathie, à Paul, Camille et Gérard pour un peu de vie dans les couloirs au mois d'août, à Léa pour avoir rendu vivable un dernier semestre bien chargé...

Un merci spécial à Pierre D. et Maxime B. qui ont eu le courage de relire l'un plusieurs versions successives de ce manuscrit et l'autre la partie dont personne d'autre ne voulait.

Enfin, depuis de nombreuses années, l'immense soutien de mes proches m'a bien souvent remise sur les rails. Merci donc à mes parents, mon frère, ma soeur, mes grands-parents, Rémi, Julia, pour leur présence, leur fierté, leur affection, leur indulgence ; à Ameline, Evelyne, Xavier, Simon, Loris pour des moments de détente salutaires (même anciens) et simplement pour leur amitié ; à Catherine pour d'autres grands moments à venir ; à Sébastien, pour l'humour et la patience avec lesquels il m'a aidée à traverser la dernière ligne droite.

Notations

On note :

- $D^k f$, $k \in \mathbb{N}$, la différentielle d'ordre k d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ (même pour les fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ;
- $\mathcal{D}^r(M)$, $r \in \mathbb{N}^*$, le groupe des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$ d'une variété M, et $\mathcal{D}^r_+(M)$ le sous-groupe de ceux qui préservent l'orientation ;
- $\mathbb{D}^n$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{D}^n_\rho$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $\rho > 0$;
- $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$;
- $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n ;
- $\mathrm{Op}(A)$ un voisinage ouvert d'un sous-ensemble A d'un espace topologique (une variété), lorsqu'on ne tient pas à préciser lequel.

Introduction

La question de connexité qui fait l'objet de la seconde partie de cette thèse concerne l'espace des feuilletages de codimension 1 sur les variétés de dimension 3, ce qui suppose de doter cet espace d'une topologie. Pour ce faire, commençons par rappeler la définition des feuilletages.

Un *feuilletage de codimension* k sur une variété M de dimension n est une partition de M en ensembles connexes, nommés *feuilles*, telle que chaque point de M possède un voisinage U muni de coordonnés $(x, y)\colon U \to \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ dans lesquelles toute composante de $F \cap U$, où F est une feuille, est définie par $y =$ constante. On dit habituellement que le feuilletage est de classe $\mathcal{C}^r$ si les cartes (x, y) sont $\mathcal{C}^r$-lisses. Cependant, nous utiliserons une notion un peu différente qui mène plus facilement à la définition d'une topologie.

Les feuilles d'un feuilletage $\mathcal{C}^r$ au sens ci-dessus sont naturellement des sous-variétés immergées de classe $\mathcal{C}^r$. Pour $r \geq 1$, elles admettent donc en tout point un espace tangent, et l'ensemble de ces sous-espaces forme un champ de $(n-k)$-plans de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur M, c'est-à-dire défini localement par des 1-formes linéairement indépendantes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ de classe $\mathcal{C}^{r-1}$. Ce champ de $(n-k)$-plans est loin d'être quelconque : il est intégrable, ce qui, pour $r \geq 2$, signifie que

$$d\Omega = \alpha \wedge \Omega \quad \text{pour une certaine 1-forme } \alpha,$$

où $\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$. Réciproquement, le théorème de Frobenius montre que si un champ de $(n-k)$-plans de classe $\mathcal{C}^{r-1}$, $r \geq 2$, est intégrable, c'est le champ des plans tangents à un (unique) feuilletage, mais celui-ci n'est en général que de classe $\mathcal{C}^{r-1}$.

Dans cette thèse nous appellerons feuilletage $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, de codimension 1 tout champ d'hyperplans $\mathcal{C}^r$ sur M qui est intégrable. Pour $r = \infty$, cette définition coïncide avec la définition classique. D'autre part, l'espace $\mathcal{P}^r(M)$ des champs d'hyperplans $\mathcal{C}^r$ (intégrables ou non) possède une topologie naturelle : la topologie $\mathcal{C}^r$ sur l'espace des sections du fibré des hyperplans tangents à M. L'espace $\mathcal{F}^r(M) \subset \mathcal{P}^r(M)$ des feuilletages $\mathcal{C}^r$ hérite ainsi de la topologie induite. En fait, nous nous limiterons dans la suite aux feuilletages et aux champs d'hyperplans coorientés sur des variétés orientées.

La topologie de l'espace $\mathcal{F}^r(M)$ semble mal connue. On dispose principalement du résultat suivant, démontré par M. Gromov, A. Haefliger et A. Phillips pour les variétés ouvertes (*i.e* sans composante connexe compacte sans bord)

et, pour les variétés closes (*i.e* compactes sans bord), par J. Wood en dimension 3 et W. P. Thurston en dimension supérieure.

Théorème ([Gr1, Ha2, Ha3, Ph, Wo, Th3])**.** *Tout champ d'hyperplans $\mathcal{C}^\infty$ sur M est homotope à un champ intégrable $\mathcal{C}^\infty$.*

Autrement dit, l'application $\pi_0\mathcal{F}^\infty(M) \to \pi_0\mathcal{P}^\infty(M)$ induite par l'inclusion $\mathcal{F}^\infty(M) \to \mathcal{P}^\infty(M)$ est surjective. La question qui nous intéresse est de savoir si cette application est aussi injective. En d'autres termes,

Question 1. *Deux feuilletages dans $\mathcal{F}^\infty(M)$ dont les champs de plans tangents sont homotopes dans $\mathcal{P}^\infty(M)$ peuvent-ils être reliés par un chemin continu dans $\mathcal{F}^\infty(M)$?*

Nous obtenons la réponse partielle suivante :

Théorème A. *Soit M une variété close orientée de dimension 3. Deux feuilletages coorientés dans $\mathcal{F}^\infty(M)$ dont les champs de plans tangents sont homotopes dans $\mathcal{P}^\infty(M)$ peuvent être reliés par un chemin continu dans $\mathcal{F}^1(M)$.*

En fait, les feuilletages du chemin que nous construisons sont $\mathcal{C}^\infty$-lisses en dehors de tores épais $\mathbb{T}^2 \times [0,1] \subset M$ sur lesquels ils sont transverses au facteur $[0,1]$. Se pose alors une autre question de connexité, traitée dans la première partie de cette thèse : l'espace des feuilletages de $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ tangents au bord et transverses au facteur $[0,1]$ est-il connexe par arcs ? Un tel feuilletage étant décrit par sa représentation d'holonomie $\mathbb{Z}^2 \to \mathcal{D}^\infty_+([0,1])$, ce problème se ramène au suivant :

Question 2. *L'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ est-il connexe par arcs ?*

Notons qu'une telle représentation n'est rien d'autre que la donnée d'un couple de difféomorphismes f, $g \in \mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ qui commutent.

Pour attaquer cette question, plusieurs idées se présentent naturellement.

Première idée naïve. Soit $\mathcal{Z}^r_f = \{h \in \mathcal{D}^r_+([0,1])\,;\, h \circ f = f \circ h\}$, $1 \leq r \leq \infty$. Si $\mathcal{Z}^\infty_f$ est connexe par arcs, on relie g à Id dans $\mathcal{Z}^\infty_f$, et donc (f,g) à (f,Id) parmi les couples de difféomorphismes qui commutent, puis, $\mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ étant contractile, on relie f à Id, et donc (f,Id) à $(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$.

Malheureusement, $\mathcal{Z}^\infty_f$ est rarement connexe. Il y a à cela au moins deux types d'obstructions.

Obstruction de nature locale. Si $[a,b] \subset [0,1]$ est un intervalle stable par f, où f a pour seuls points fixes a et b, le centralisateur $\mathcal{C}^1$ de $f\,|_{[a,b[}$ est toujours un groupe à un paramètre, d'après des résultats de G. Szekeres [Sz] et N. Kopell [Ko] rappelés au chapitre 1. En revanche, son centralisateur $\mathcal{C}^\infty$ est en général plus petit et peut notamment être réduit au groupe cyclique infini engendré par $f|_{[a,b[}$. Nous présentons au chapitre 2 un tel exemple, construit par F. Sergeraert dans [Se, §4].

Obstruction de nature globale. Bien que les centralisateurs $\mathcal{C}^1$ de $f\mid_{[a,b[}$ et $f\mid_{]a,b]}$ soient des groupes à un paramètre, Kopell [Ko] a montré que le centralisateur $\mathcal{C}^1$ (et *a fortiori* $\mathcal{C}^\infty$) de $f\mid_{[a,b]}$ est génériquement réduit au groupe cyclique infini engendré par $f\mid_{[a,b]}$. Comme l'explique J.-C. Yoccoz dans [Yo], l'obstruction à ce que le centralisateur $\mathcal{C}^1$ de $f\mid_{[a,b]}$ soit un groupe à un paramètre est mesurée par un invariant introduit par J. Mather dans [Ma2], qui prend ses valeurs essentiellement dans $\mathcal{D}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$.

Deuxième idée naïve. Si $\mathcal{Z}^\infty_f$ est le groupe cyclique engendré par f, il est très facile de relier $(f,g)=(f,f^k)$ à $(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ par des couples de difféomorphismes qui commutent : n'importe quelle isotopie $(f_t)_{t\in[0,1]}$ reliant f à l'identité donne un chemin (f_t,f_t^k) qui convient.

Malheureusement il existe des cas où $\mathcal{Z}^\infty_f$ n'est ni connexe, ni cyclique. Ceci découle des constructions du chapitre 2, dont le résultat principal est le suivant (cf. théorème 2.1).

Théorème B. *Il existe un difféomorphisme lisse f de $\mathbb{R}_+$ ne fixant que l'origine dont le centralisateur $\mathcal{C}^r$, $2\le r\le\infty$, est un sous-groupe propre, dense et non dénombrable de son centralisateur $\mathcal{C}^1$.*

Concernant la question 2, on obtient tout de même au chapitre 3 le résultat suivant en exploitant les travaux de Szekeres et Kopell.

Théorème C. *Toute représentation de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ peut être reliée à la représentation triviale par un chemin continu de représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^1_+([0,1])$.*

Remarque. La preuve de ce théorème fonctionne encore pour des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$, $r\ge 2$, mais pas pour des difféomorphismes $\mathcal{C}^1$. Ce théorème ne dit donc rien sur la connexité de l'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^1_+([0,1])$.

Revenons maintenant à la question 1 et au théorème A. La démonstration de ce dernier s'inspire de la preuve du théorème de Wood (voir plus haut) proposée par Thurston dans [Th2] dont nous rappelons maintenant les différentes étapes.

Étape 1. Soit M une variété close de dimension 3 et ξ un champ de plans coorientés sur M. Thurston construit sur M une triangulation Δ dont les arêtes et les faces sont transverses à ξ et telle que ξ ait une direction presque constante sur chaque 3-simplexe. On déforme ξ pour le rendre intégrable sur un voisinage V du 2-squelette. On procède en trois temps : on rend ξ intégrable d'abord au voisinage des sommets, puis près des arêtes, puis près des faces. À chaque fois, le point important est qu'il existe, au voisinage du simplexe σ considéré, un champ de vecteurs non singulier ν contenu dans ξ et transverse à σ. La déformation consiste à rendre ξ invariant par ν près de σ. Comme ξ est déjà intégrable près de $\partial\sigma$, il y est invariant par ν et on ne l'y change donc pas. Au terme de cette étape, chaque composante de ∂V est une sphère S incluse dans un 3-simplexe

sur laquelle ξ est presque horizontal au sens où il trace sur S un feuilletage ayant seulement deux singularités (les pôles) qui sont reliées par un arc transverse.

Étape 2. On tente d'étendre le feuilletage $\xi\,|_V$ à M tout entière. À vrai dire, en raison du théorème de stabilité de Reeb, ceci n'est possible que si chaque feuilletage $\xi|_S$ est un feuilletage par cercles en dehors des pôles. Une observation fondamentale de Thurston est qu'on peut néanmoins s'en sortir si, pour chaque sphère S, il existe dans V un arc proprement plongé A transverse au feuilletage $\xi|_V$ qui relie les pôles de S. En effet, dans ce cas, l'union de la boule B bordée par S et d'un tube autour de A feuilleté par disques forme un tore plein $W = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ sur le bord duquel ξ induit un feuilletage transverse à $\mathbb{S}^1$. Un tel feuilletage de $\partial W = \partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ est décrit par son holonomie, qui est un difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$. Thurston note que les holonomies des feuilletages qui se prolongent à $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ forment un sous-groupe distingué de $\mathcal{D}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$ qui contient les rotations. Or d'après un théoréme de M. Herman et J. Mather, $\mathcal{D}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$ est un groupe simple. Par conséquent, le feuilletage $\xi\,|_{\partial W}$ se prolonge en un feuilletage de W.

Étape 3. Malheureusement, les arcs transverses A utilisés ci-dessus n'existent pas forcément. Une condition suffisante pour qu'il y en ait est que toutes les feuilles de $\xi\,|_V$ soient non compactes. Thurston se ramène à cette situation en sacrifiant l'intégrabilité de ξ sur de nouvelles boules contenues dans V (cf. chap. 8, section 8.6).

Donnons maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème A.

Étape 1. Soit M une variété close de dimension 3 et τ_0, τ_1 deux feuilletages dans $\mathcal{F}^\infty(M)$, reliés par un chemin ξ_t, $t \in [0,1]$, dans $\mathcal{P}^\infty(M)$ (*i.e.* $\xi_0 = \tau_0$ et $\xi_1 = \tau_1$). On choisit une triangulation Δ de M telle que chaque ξ_t ait une direction presque constante sur chaque 3-simplexe. Malheureusement, comme la direction de ξ_t change avec t, on ne peut garantir que les arêtes et les faces de Δ soient toutes transverses à tous les champs de plans ξ_t. Pire, si l'un des champs ξ_t est tangent à une face σ en un certain point p, on ne peut trouver un champ de vecteurs non singulier ν_t près de σ qui soit contenu dans ξ_t et transverse à σ. Par chance, ce problème a déjà été envisagé par Y. Eliashberg dans [El] pour étudier non pas les feuilletages mais les structures de contact. L'idée principale est de considérer ces 2-simplexes σ comme de « gros sommets » et de les traiter avant tous les autres simplexes du 2-squelette. En adaptant la technique d'Eliashberg, on montre au chapitre 8 qu'on peut supposer tous les champs de plans ξ_t intégrables sur un voisinage V du 2-squelette de Δ, et presque horizontaux sur chaque sphère S de ∂V, les pôles variant cependant avec t.

Étape 2. On tente d'étendre les feuilletages $\xi_t\,|_V$ à M tout entière. Comme dans la preuve de Thurston, une situation très favorable est celle où, pour chaque sphère S de ∂V et pour chaque t, il existe dans V un arc proprement plongé A_t transverse au feuilletage $\xi_t\,|_V$ qui relie les pôles de S et dépend continûment de t. L'outil crucial est ici un travail d'A. Larcanché [La], fondé à nouveau sur un théorème d'Herman concernant les difféomorphismes du cercle. Ce travail, décrit au chapitre 6, donne un procédé continu explicite pour prolonger à $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$

des feuilletages de $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ transverses au facteur $\mathbb{S}^1$. Ces prolongements seront appelés dans la suite feuilletages de Larcanché.

Malheureusement, deux problèmes se présentent :
- de tels arcs transverses A_t n'existent pas toujours, notamment pour $t = 0$ et 1 où on ne peut utiliser l'astuce de Thurston (étape 3) puisqu'on doit garder intacts τ_0 et τ_1 ;
- même quand on peut construire ces arcs A_t, il n'est en général pas possible de les faire dépendre continûment de t.

Étape 3. On résout le second problème grâce à l'observation suivante. À un instant t, soient A_t et A'_t deux arcs transverses à $\xi_t \mid_V$ joignant les pôles d'une sphère S de ∂V. Soient B la boule bordée par S, et W (resp. W') le tore plein obtenu comme union de B et d'un tube autour de A_t (resp. A'_t) feuilleté par disques. Le lemme des vases communicants du chapitre 7 montre que les feuilletages de $V \cup B$ produits en appliquant la construction de Larcanché dans W d'une part et dans W' d'autre part sont homotopes dans $\mathcal{F}^\infty(V \cup B)$ relativement à $V \setminus \mathrm{Int}(W \cup W')$.

La résolution du premier problème demande plus d'efforts. Il s'agit principalement de déformer τ_i, $i = 0, 1$, dans $\mathcal{F}^1(M)$ en un feuilletage τ'_i « malléable », c'est-à-dire pour lequel il existe un nombre fini de tores pleins ayant les propriétés suivantes :
- en dehors de ces tores pleins, toute feuille de τ'_i rencontre une transversale fermée ;
- τ'_i induit un feuilletage de Larcanché sur chacun de ces tores pleins $W = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$;
- la restriction de τ'_i à chaque $\partial W = \partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ a des paquets de feuilles du type $\partial\mathbb{D}^2 \times \{z\}$ où z décrit tout un intervalle de $\mathbb{S}^1$.

On note désormais τ l'un ou l'autre des τ_i.

Étape 4. D'après la théorie de S. P. Novikov [No] (cf. chapitre 4), il existe dans M un nombre fini de tores épais disjoints $\mathbb{T}^2 \times J$ (où J désigne un segment éventuellement ponctuel) tels que toute feuille du complémentaire coupe une transversale fermée et que la restriction de τ à chaque $\mathbb{T}^2 \times J$ soit tangente au bord et transverse au facteur J. On dira que τ est *net* si chaque segment J est réduit à un point et si pour chaque tore $T = \mathbb{T}^2 \times J$, il existe un champ de vecteurs ν de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tel que les représentations d'holonomie $\mathbb{Z}^2 \to \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}_\pm, 0)$ définies par τ de part et d'autre de T soient à valeurs dans le flot de ν. Le théorème C permet de démontrer au chapitre 5 :

Théorème D. *Tout feuilletage τ de $\mathcal{F}^\infty(M)$ est homotope dans $\mathcal{F}^1(M)$ à un feuilletage net $\bar{\tau} \in \mathcal{F}^\infty(M)$.*

Étape 5. Un avantage des feuilletages nets est que leurs feuilles toriques ont une holonomie flexible. Grâce à l'étude au chapitre 6 des feuilletages sur $\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ transverses au facteur $\mathbb{S}^1$, où $\mathbb{P}$ est le pantalon, on démontre au chapitre 7 :

Théorème E. *Tout feuilletage net $\bar{\tau} \in \mathcal{F}^\infty(M)$ est homotope dans $\mathcal{F}^\infty(M)$ à un feuilletage malléable τ'.*

On se retrouve alors dans la situation favorable envisagée à l'étape 3, et on montre dans ce même chapitre :

Théorème F. *Deux feuilletages malléables τ'_0, $\tau'_1 \in \mathcal{F}^\infty(M)$ dont les champs de plans tangents sont homotopes dans $\mathcal{P}^\infty(M)$ sont homotopes dans $\mathcal{F}^\infty(M)$.*

La plupart des méthodes mises en oeuvre pour démontrer le théorème A s'appliquent à des familles de feuilletages dépendant d'un nombre quelconque de paramètres. Dès lors, la conjecture suivante semble très accessible :

Conjecture. *Soit $\mathcal{N}^\infty(M)$ l'espace des feuilletages nets d'une variété close M de dimension 3. L'inclusion $\mathcal{N}^\infty(M) \to \mathcal{P}^\infty(M)$ est une équivalence d'homotopie faible.*

On aimerait aussi conjecturer que l'espace des représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ est connexe, et même contractile, ce qui entraînerait que l'inclusion $\mathcal{F}^\infty(M) \to \mathcal{P}^\infty(M)$ est une équivalence d'homotopie faible (conformément au h-principe de Gromov [Gr2, E–M]), mais cela paraît nettement plus hasardeux...

Première partie

Sur une question de connexité concernant les difféomorphismes de l'intervalle

Plan de la partie I

Cette première partie est constituée de trois chapitres. Dans le premier, on rappelle les résultats connus concernant le centralisateur $\mathcal{C}^1$ d'un difféomorphisme $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, d'un intervalle $[a, b[$ dont a est l'unique point fixe. On démontre d'abord le théorème de Szekeres [Sz] qui affirme qu'un tel difféomorphisme est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $]a, b[$. On donne ensuite l'énoncé et la démonstration du *lemme de Kopell* [Ko] qui implique entre autres qu'un tel champ est unique et que le centralisateur $\mathcal{C}^1$ du difféomorphisme est réduit au flot de ce champ de vecteurs, et est donc toujours un groupe à un paramètre.

Dans le chapitre 2, on étudie les centralisateurs en régularité plus grande. Dans une première section, on donne la preuve du Théorème B de l'introduction (cf. théorème 2.1). Celle-ci repose sur la construction, combinant des techniques de Sergeraert [Se] et d'Anosov–Katok [A–K], d'un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ dont le flot au temps t est lisse pour un ensemble dense et non dénombrable $\hat{K}$ de t mais pas $\mathcal{C}^2$ pour $t = 1/2$. On complète ce résultat en montrant dans la section 2.2 que $\hat{K}$ ne contient que des rationnels et des nombres de Liouville, et dans la section 2.3 que l'ensemble $\mathscr{A}$ des nombres τ pour lesquels il existe un champ de vecteurs dont le flot est lisse aux temps 1 et τ mais pas $\mathcal{C}^2$ pour d'autres temps est résiduel. Dans la section 2.4, on revient sur l'exemple de Sergeraert [Se, §4] et on prouve que le centralisateur $\mathcal{C}^2$ du difféomorphisme f qu'il construit est réduit au groupe des itérés.

Enfin, dans le chapitre 3, on exploite les résultats rappelés au chapitre 1 pour démontrer le théorème C de l'introduction (cf. théorème 3.1).

Quelques formules utiles

Dérivées

Si g est une application $\mathcal{C}^k$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (ouvert ou fermé), on note

$$\|g\|_k = \sup\left\{\left|D^m g(x)\right|,\ 0 \leq m \leq k,\ x \in I\right\} \in [0, +\infty].$$

Si $g\colon I \to g(I)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ préservant l'orientation, on note :

$$Lg = D \log Dg = \frac{D^2 g}{Dg}.$$

On retient en particulier la formule de « dérivation » d'une composée par l'opérateur L :

$$L(h \circ g) = Lh \circ g \cdot Dg + Lg. \tag{1}$$

Pour calculer des dérivées d'ordre supérieur de fonctions composées, on utilisera également la formule de Faà di Bruno sous la forme :

$$D^m(h \circ g) = \sum_{\pi \in \Pi_m} \left(\left(D^{|\pi|} h\right) \circ g \cdot \prod_{B \in \pi} D^{|B|} g \right) \tag{2}$$

où Π_m désigne l'ensemble des partitions π de $\{1, \cdots, m\}$ et $|X|$ le cardinal de l'ensemble fini X.

Champs de vecteurs et leur flot

Soit η un champ de vecteurs sur un intervalle J. Tout au long de la partie I, on fera peu de différence entre η et la fonction $dx(\eta)$, x étant la coordonnée sur J. Si $g\colon I \to J$ est un difféomorphisme, le *tiré-en-arrière de η par g* est le champ de vecteurs sur I défini par :

$$g^*\eta = \frac{\eta \circ g}{Dg}.$$

Si η est $\mathcal{C}^1$ et complet sur J, son flot $\{f^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est bien défini et ses éléments sont des difféomorphismes $\mathcal{C}^1$ de J qui préservent η au sens où $(f^t)^*\eta = \eta$ pour tout t, soit

$$\eta \circ f^t = Df^t \times \eta \quad \text{sur } J. \tag{3}$$

Si $a \in J$ est un zéro de η, on utilisera souvent les faits suivant :

$$f^t(a) = a, \quad Df^t(a) = e^{tD\eta(a)}$$

$$\text{et} \quad f^t(x) - x \underset{x \to a}{\sim} \frac{e^{tD\eta(a)} - 1}{tD\eta(a)} t\eta(x) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}^*, \tag{4}$$

en remplaçant $\frac{e^{tD\eta(a)}-1}{tD\eta(a)}$ par 1 si $D\eta(a) = 0$.

Démonstration. Le premier fait est clair. Le second découle directement de l'équation aux variations

$$Df^t(x) = \exp\left(\int_0^t D\eta \circ f^s(x) ds\right)$$

appliquée en a. L'équivalence (I) est triviale si $\eta(x) = 0$ et s'obtient facilement si $D\eta(a) \neq 0$ (et donc $Df^t(a) \neq 1$). En effet, dans ce cas,

$$f^t(x) - x \underset{x \to a}{\sim} (f^t(a) - a) + (Df^t(a) - 1)(x - a) = \left(e^{tD\eta(a)} - 1\right)(x - a)$$

et

$$t\eta(x) \underset{x \to a}{\sim} t\eta(a) + tD\eta(a)(x - a) = tD\eta(a)(x - a).$$

Si $D\eta(a) = 0$, on écrit

$$\frac{f^t(x) - x}{t\eta(x)} = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\eta \circ f^s(x)}{\eta(x)} ds = \frac{1}{t} \int_0^t Df^s(x) ds.$$

Comme le flot de η est $\mathcal{C}^1$, $Df^s(x)$ tend vers $Df^s(a) = 1$ quand x tend vers a, et ce uniformément en $s \in [0, t]$, ce qui fournit l'équivalence souhaitée. $\square$

Chapitre 1

Résultats classiques sur le centralisateur $\mathcal{C}^1$

On s'intéresse dans ce chapitre aux difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, de l'intervalle $[a, b[$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, sans point fixe dans $]a, b[$. Le centralisateur dans $\mathcal{D}^1([a, b[)$ d'un tel difféomorphisme est toujours un groupe à un paramètre. Cette affirmation découle de résultats classiques de Szekeres [Sz] et Kopell [Ko] dont on rappelle les énoncés et les démonstrations dans les sections 1.1 et 1.2 respectivement. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [Na] et [Yo] par exemple.

1.1 Existence des champs de Szekeres

Théorème 1.1 (Szekeres)**.** *Tout difféomorphisme $f \in \mathcal{D}^r([a, b[)$, $r \geq 2$, sans point fixe dans $]a, b[$ est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $]a, b[$.*

On appellera *champ de Szekeres de f* tout champ de vecteurs ayant ces propriétés. On verra dans la section suivante qu'un tel champ est en fait unique. La proposition 1.3 donne des informations plus précises sur ce champ, qui seront utiles au chapitre 3.

Remarque 1.2. Si f n'est pas $\mathcal{C}^r$-tangent à l'identité en a, un théorème de F. Takens [Ta] (cf. théorème 3.4) affirme que f admet un champ de Szekeres de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ sur $[a, b[$. En revanche, il existe des difféomorphismes $f \in \mathcal{D}^\infty([a, b[)$ (infiniment tangents à l'identité en a) qui ne sont pas sur un flot $\mathcal{C}^2$ (cf. chapitre 2). Ce défaut de régularité motive toute la première partie de cette thèse et nous complique bien la tâche dans la seconde (cf. chapitre 5).

Étant donné $f \in \mathcal{D}^r([a, b[)$, on pose $\eta_0 = (f - \mathrm{Id})\partial_x$ et $\eta_k = (f^k)^*(\eta_0)$ pour $k \geq 1$. Ces champs de vecteurs sur $[a, b[$ sont de classe $\mathcal{C}^r$ et $\mathcal{C}^{r-1}$ respectivement.

Proposition 1.3. *Soit $f \in \mathcal{D}^r([a, b[)$ satisfaisant $f(x) < x$ pour tout $x \in]a, b[$.*

1. *La suite η_k converge $\mathcal{C}^1$-uniformément sur tout compact de $[a,b[$ vers un champ $\eta_f = \eta_\infty$ dont f est le flot au temps $\frac{\log Df(a)}{Df(a)-1}$ (1 si $Df(a)=1$).*
2. *La convergence de η_k est $\mathcal{C}^{r-1}$-uniforme sur tout compact de $]a,b[$. La restriction de η_f à $]a,b[$ est donc $\mathcal{C}^{r-1}$.*
3. *Pour tous $0 \le i,j \le \infty$ et tout $c \in]a,b[$,*
$$\sup_{]a,c]} \left| \log \frac{\eta_j}{\eta_i} \right| \le \left\| D \log Df \mid_{[a,c]} \right\|_0 (c-a).$$
4. *Si $\left\|(f-\mathrm{Id}) \mid_{[a,c]}\right\|_2 < \delta < 1$ pour un $c \in]a,b[$,*
$$\sup_{[a,c]} |D\eta_k| < \delta + \frac{\delta(c-a)}{1-\delta} e^{\frac{\delta(c-a)}{1-\delta}} \quad \textit{pour tout } 0 \le k \le \infty.$$

Démonstration du théorème 1.1 à partir de 1.3. Si $f \in \mathcal{D}^r([a,b[)$ satisfait $f(x) < x$ pour tout $x \in]a,b[$, le champ $\frac{\log Df(a)}{Df(a)-1}\eta_f$ est un champ de Szekeres de f. Dans le cas contraire, on applique la proposition 1.3 à f^{-1}, qui est donc le temps 1 du flot de $\frac{\log Df^{-1}(a)}{Df^{-1}(a)-1}\eta_{f^{-1}}$, et l'opposé de ce champ de vecteurs fournit un champ de Szekeres de f. □

Corollaire 1.4. *Soient a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f \in \mathcal{D}^r([a,b[)$, sans point fixe dans $]a,b[$, vérifie $\|f-\mathrm{Id}\|_2 < \delta < 1$, alors f admet un champ de Szekeres ν satisfaisant*
$$\sup_{]a,b[} \left| \log \frac{\nu}{f-\mathrm{Id}} \right| < u(\delta) \quad \textit{et} \quad \sup_{[a,b[} |D\nu| < u(\delta)$$
pour une fonction $u\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ indépendante de f et tendant vers 0 en 0.

Remarque. La fonction u dépend a priori de la longueur du segment $[a,b]$ mais peut être choisie indépendante de cet intervalle si par exemple on sait que $[a,b] \subset [0,1]$ (cf. chapitre 3 où le corollaire 1.4 est utilisé).

Notons que si f est un difféomorphisme du *segment* $[a,b]$ préservant l'orientation et sans point fixe dans $]a,b[$, il possède (au moins) un champ de Szekeres sur $[a,b[$ et un autre sur $]a,b]$. En général cependant, f n'appartient pas à un flot $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ tout entier (cf. Kopell [Ko] et Mather [Ma2]).

Démonstration de la proposition 1.3. On s'inspire ici des preuves du théorème de Szekeres données par Yoccoz dans [Yo] et A. Navas dans [Na]. La clef de la démonstration est l'étude de la fonction θ définie sur $[a,b[$ par
$$\theta(x) = \log\left(\int_0^1 Df\big(x+s(f(x)-x)\big)\,ds\right) - \log(Df(x)).$$
La fonction Df est $\mathcal{C}^{r-1}$ et strictement positive sur $[a,b[$, donc θ est bien définie et $\mathcal{C}^{r-1}$ elle aussi. D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [a,b[$,
$$\int_0^1 Df\big(x+s(f(x)-x)\big)\,ds = Df(x_0) \quad \text{pour un certain} \quad x_0 \in [f(x),x].$$

Soit $c \in [a, b[$ fixé et $C = \left\| Lf \mid_{[a,c]} \right\|_0$, où $Lf = D \log Df$. Pour tout $x \in [a, c]$,

$$\begin{aligned} |\theta(x)| &= |\log Df(x_0) - \log Df(x)| \quad \text{pour un certain} \quad x_0 \in [f(x), x] \subset [a, c], \\ &\leq C|x_0 - x| \leq C(x - f(x)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

De plus, pour tout $x \in]a, b[$, la formule de Taylor avec reste intégral au premier ordre donne

$$\frac{f^2(x) - f(x)}{f(x) - x} = \int_0^1 Df\big(x + s(f(x) - x)\big)\, ds,$$

donc

$$\theta(x) = \log \frac{f^2(x) - f(x)}{Df(x)\,(f(x) - x)} = \log \frac{\eta_1(x)}{\eta_0(x)}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq 0$,

$$\log \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} = \log \frac{(f^k)^* \eta_1}{(f^k)^* \eta_0} = \log \frac{\eta_1 \circ f^k}{\eta_0 \circ f^k} = \theta \circ f^k$$

et pour tous $0 \leq i \leq j$,

$$\log \frac{\eta_j}{\eta_i} = \sum_{k=i}^{j-1} \theta \circ f^k. \tag{1.2}$$

On peut d'ores et déjà démontrer le point 3 de la proposition pour $i, j < \infty$. En effet, pour tout $x \in]a, c]$, les itérés $f^k(x)$, $k \geq 1$, restent dans $]a, c]$ donc (1.1) et (1.2) entraînent

$$\left| \log \frac{\eta_j}{\eta_i}(x) \right| \leq C \sum_{k=i}^{j-1} (f^k(x) - f^{k+1}(x)) = C(f^i(x) - f^j(x)) \leq C(c - a). \tag{1.3}$$

On montre maintenant que η_k converge $\mathcal{C}^1$-uniformément sur $[a, c]$. Sur ce segment, la suite f^k converge $\mathcal{C}^0$-uniformément vers la constante a, étant donné que

$$\left\| (f^k - a) \mid_{[a,c]} \right\| \leq |f^k(c) - a| \to 0.$$

On pose

$$\Theta_k = \sum_{i=0}^{k-1} \theta \circ f^i.$$

D'après (1.3),

$$\left\| (\Theta_j - \Theta_i) \mid_{[a,c]} \right\|_0 \leq C \left\| (f^j - f^i) \mid_{[a,c]} \right\|_0.$$

La suite Θ_k converge donc $\mathcal{C}^0$-uniformément sur $[a, c]$, et c'est aussi le cas de $\eta_k = \eta_0 \exp \Theta_k$ (cf. (1.2)). Notons que la limite $\eta_f = \lim \eta_k = \eta_0 \exp \lim \Theta_k$

a les mêmes zéros que $\eta_0 = (f - \mathrm{Id})\partial_x$, donc ne s'annule qu'en a. On étudie maintenant la convergence $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned} D\eta_k = D\left(\frac{\eta_0 \circ f^k}{Df^k}\right) &= D\eta_0 \circ f^k + (\eta_0 \circ f^k) D\left(\frac{1}{Df^k}\right) \qquad (1.4)\\ &= D\eta_0 \circ f^k - (\eta_k Df^k)\frac{D^2 f^k}{(Df^k)^2} \\ &= D\eta_0 \circ f^k - Lf^k \eta_k \\ &= D\eta_0 \circ f^k - \sum_{i=0}^{k-1} (Lf \circ f^i)\, Df^i\, \eta_k \\ &= D\eta_0 \circ f^k - \sum_{i=0}^{k-1} (Lf \circ f^i)(f^{i+1} - f^i)\frac{\eta_k}{\eta_i}. \qquad (1.5) \end{aligned}$$

Le premier terme de l'expression (1.5) converge uniformément vers $D\eta_0(a)$ sur $[a, c]$, le champ η_0 étant de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$. D'autre part, les fonctions $Lf \circ f^i$ et η_k/η_i sont bornées sur $[a, c]$ indépendamment de i et k, par C et $e^{C(c-a)}$ respectivement (cf. 1.3). Comme pour le point 3, la positivité de $f^i - f^{i+1}$ et la convergence uniforme de f^k sur $[a, c]$ entraînent alors celle de

$$\sum_{i=0}^{k-1} (Lf \circ f^i)(f^{i+1} - f^i)\frac{\eta_k}{\eta_i}$$

et donc celle de $D\eta_k$. La suite η_k converge donc $\mathcal{C}^1$-uniformément sur tout compact de $[a, b[$ vers un champ de vecteurs qu'on note η_f. L'expression (1.5) appliquée en $x \in]a, c]$ donne en outre :

$$|D\eta_k(x)| \leq \left\| D(f - \mathrm{Id}) \mid_{[a,c]} \right\|_0 + C(c-a)e^{C(c-a)}.$$

Si $\left\|(f - \mathrm{Id}) \mid_{[a,c]}\right\|_2 < \delta < 1$,

$$C = \left\| Lf \mid_{[a,c]} \right\|_0 = \left\| \frac{D^2 f}{Df} \mid_{[a,c]} \right\|_0 \leq \frac{\delta}{1-\delta}$$

donc finalement, pour tout $x \in]a, c]$,

$$|D\eta_k(x)| \leq \delta + \frac{\delta}{1-\delta}(c-a)e^{\frac{\delta}{1-\delta}(c-a)}.$$

Cette inégalité reste vraie pour $x = a$ par continuité de $D\eta_k$, et le point 4 est démontré.

Revenons à la preuve du point 1. Il s'agit de vérifier que f coïncide avec le temps $\log Df(a)/(Df(a) - 1)$ (1 si $Df(a) = 1$) du flot de η_f sur $[a, b[$. Par définition, $f^*\eta_k = \eta_{k+1}$ pour tout k. En passant à la limite, on obtient $f^*\eta_f = \eta_f$, soit

$$\frac{\eta_f \circ f}{Df} = \eta_f, \quad \text{ou encore} \quad \frac{Df}{\eta_f \circ f} - \frac{1}{\eta_f} = 0 \text{ sur }]a, b[$$

(on a vu que η_f ne s'annulait pas en dehors de a). Mais cette quantité est la dérivée de la fonction

$$y \in]a,b[\mapsto \int_y^{f(y)} \frac{dx}{\eta_f(x)},$$

qui est donc constante égale à $\tau \in \mathbb{R}$ sur $]a,b[$. Cela signifie précisément que f coïncide sur $]a,b[$ (et donc sur $[a,b[$ par continuité) avec le flot de η_f au temps τ. La dérivée de f en a vaut alors $Df(a) = \exp(\tau D\eta_f(a))$. Comme $f^k(a) = a$, la formule (1.4) implique que $D\eta_k(a) = D\eta_0(a)$ pour tout k, et

$$D\eta_f(a) = \lim_{k\to\infty} D\eta_k(a) = D\eta_0(a) = D(f - \mathrm{Id})(a) = Df(a) - 1,$$

ce qui donne bien $\tau = \log Df(a)/(Df(a) - 1)$ si $Df(a) \neq 1$. Le cas $Df(a) = 1$ est plus délicat. On veut montrer que

$$\int_y^{f(y)} \frac{dx}{\eta_f(x)} = 1 \qquad \text{pour tout } y \in]a,b[.$$

La fonction $1/\eta_0$ étant bornée sur $[f(y), y]$, la suite $1/\eta_k = (1/\eta_0)\exp(-\Theta_k)$ converge uniformément vers $1/\eta_f$ sur ce segment. Il faut donc montrer que

$$\int_y^{f(y)} \frac{dx}{\eta_k(x)} = \int_y^{f(y)} \frac{Df^k(x)}{f^{k+1}(x) - f^k(x)} dx \to 1 \qquad \text{quand } k \to \infty.$$

Pour cela, on écrit

$$\frac{Df^k(x)}{f^{k+1}(x) - f^k(x)} = \frac{Df^k(x)}{f^{k+1}(y) - f^k(y)} \times \frac{f^{k+1}(y) - f^k(y)}{f^{k+1}(x) - f^k(x)}$$

et on note que

$$\int_y^{f(y)} \frac{Df^k(x)}{f^{k+1}(y) - f^k(y)} dx = 1 \qquad \text{pour tout } k.$$

Il suffit donc de vérifier que les quotients

$$\frac{f^{k+1}(x) - f^k(x)}{f^{k+1}(y) - f^k(y)}$$

tendent uniformément vers 1. Or, par le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned}(f^{k+1}(x) - f^k(x)) - (f^{k+1}(y) - f^k(y)) &= (f - \mathrm{Id})(f^k(x)) - (f - \mathrm{Id})(f^k(y)) \\ &= (Df(x_k) - 1)\,(f^k(x) - f^k(y))\end{aligned}$$

pour un certain $x_k \in [f^k(x), f^k(y)] \subset [a, f^k(y)]$. Par suite,

$$\left|\frac{f^{k+1}(x) - f^k(x)}{f^{k+1}(y) - f^k(y)} - 1\right| = |Df(x_k) - 1| \left|\frac{f^k(x) - f^k(y)}{f^{k+1}(y) - f^k(y)}\right| \leq |Df(x_k) - 1|.$$

Comme Df est continue et vaut 1 en a, on obtient la convergence voulue.

Il reste à prouver le point 2. Pour cela, on montre maintenant que Θ_k converge $\mathcal{C}^{r-1}$-uniformément sur tout compact de $]a,b[$. On a déjà prouvé la convergence $\mathcal{C}^0$ en démontrant le point 1. La convergence $\mathcal{C}^1$ découle également du point 1. En effet,

$$D\Theta_k = \frac{D\eta_k}{\eta_k} - \frac{D\eta_0}{\eta_0} \quad \text{sur }]a,b[$$

et $D\eta_k$ et $1/\eta_k$ convergent uniformément sur tout compact de $]a,b[$.

Soit $c \in]a,b[$. Si $\{f_0^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ désigne le flot de η_0, l'application $\psi\colon t \in \mathbb{R} \mapsto f_0^t(c)$ définit un difféomorphisme $\mathcal{C}^r$ de $\mathbb{R}$ dans $]a,b[$, satisfaisant

$$D\psi = \eta_0 \circ \psi.$$

Pour démontrer le point 2, il suffit donc de prouver la convergence $\mathcal{C}^{r-1}$-uniforme de $\Theta_k \circ \psi$ sur tout compact K de $\mathbb{R}$. Celle-ci résulte de l'existence pour tout $n \leq r$ d'une constante M_n vérifiant

$$\left| \frac{D^n(f^i \circ \psi)}{(f^{i+1} - f^i) \circ \psi}(t) \right| \leq M_n \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N},\ t \in K. \tag{H_n}$$

On va obtenir ces constantes par récurrence, en montrant au passage que les inégalités (H_l) pour $l \leq n \leq r-1$ entraînent la convergence $\mathcal{C}^n$-uniforme de $\Theta_k \circ \psi$.

Pour $n = 1$, il suffit de remarquer que

$$D(f^i \circ \psi) = (Df^i \circ \psi)D\psi = \frac{(f^{i+1} - f^i) \circ \psi}{\eta_i \circ \psi}(\eta_0 \circ \psi)$$

donc

$$\frac{D(f^i \circ \psi)}{(f^{i+1} - f^i) \circ \psi} = e^{-\Theta_i \circ \psi} \tag{1.6}$$

qui est borné uniformément en $i \in \mathbb{N}$ et $t \in K$ par une constante M_1 puisque la suite $(\Theta_i)_i$ converge uniformément sur $\psi(K)$.

On suppose maintenant qu'il existe des constantes M_l satisfaisant (H_l) pour tout $l \leq n \leq r-1$. On réécrit (1.6) sous la forme :

$$D(f^i \circ \psi)e^{\Theta_i \circ \psi} = (f^{i+1} - f^i) \circ \psi.$$

On dérive n fois le membre de gauche :

$$\begin{aligned} D^n\left(D(f^i \circ \psi)\, e^{\Theta_i \circ \psi}\right) &= e^{\Theta_i \circ \psi} D^{n+1}(f^i \circ \psi) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} C_n^j\, D^j(e^{\Theta_i \circ \psi})\, D^{n-j+1}(f^i \circ \psi), \end{aligned} \tag{1.7}$$

puis celui de droite :

$$\begin{aligned}\left|D^n\big((f^{i+1}-f^i)\circ\psi\big)\right| &= \left|D^n(f^{i+1}\circ\psi)-D^n(f^i\circ\psi)\right| \\ &\le M_n\left(|f^{i+2}-f^{i+1}|\circ\psi+|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\right) \text{ d'après } (H_n) \\ &\le M_n\Big(|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\Big)\left(\frac{|f^{i+2}-f^{i+1}|\circ\psi}{|f^{i+1}-f^i|\circ\psi}+1\right) \\ &\le M_n\left(|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\right)\left(\left\|Df\mid_{\psi(K)}\right\|_0+1\right) \\ &\le M'_n\left(|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\right).\end{aligned} \tag{1.8}$$

En combinant (1.7), (1.8) et (H_l) pour $l\le n$, on obtient

$$|D^{n+1}(f^i\circ\psi)|\le M_1\left(M'_n+\sum_{j=1}^{n}C_n^j\,M_{n-j+1}|D^j(e^{\Theta_i\circ\psi})|\right)\left(|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\right).$$

Pour obtenir une constante M_{n+1} satisfaisant (H_{n+1}), il suffit donc de montrer que $|D^j(e^{\Theta_i\circ\psi})|$ est borné uniformément en i sur K pour tout $j\le n$. Pour cela, on montre maintenant que les inégalités (H_l) pour $l\le n\le r-1$ entraînent la convergence $\mathcal{C}^n$-uniforme de $(\Theta_k\circ\psi)_k$ sur K. D'après la formule de Faà di Bruno (2),

$$D^l(\theta\circ f^i\circ\psi)=\sum_{\pi\in\Pi_l}\Big(D^{|\pi|}\theta\Big)\circ(f^i\circ\psi)\cdot\prod_{B\in\pi}D^{|B|}(f^i\circ\psi),$$

où Π_l désigne l'ensemble des partitions π de $\{1,\cdots,l\}$ et $|X|$ le cardinal de l'ensemble fini X. Pour toute partition $\pi\in\Pi_l$, les inégalités (H_j) pour $j\le l\le n$ entraînent :

$$\left|\prod_{B\in\pi}D^{|B|}(f^i\circ\psi)\right|\le\left(\prod_{B\in\pi}M_{|B|}\right)\cdot\left(|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\right)^{|\pi|}.$$

En posant

$$M=\prod_{l\le n}\max(1,M_l)^n\quad\text{et}\quad d=\max\psi(K)$$

(de sorte que $f^i\circ\psi(K)\subset[a,d]$ pour tout $i\in\mathbb{N}$), on a donc

$$\left|\prod_{B\in\pi}D^{|B|}(f^i\circ\psi)\right|\le M\times\max\left(1,(d-a)^{l-1}\right)\times\left(|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\right),$$

et par suite

$$D^l(\theta\circ f^i\circ\psi)\le|\Pi_l|\times\left\|\theta\mid_{[a,d]}\right\|_l\times M\times\max\left(1,(d-a)^{l-1}\right)\times\left(|f^{i+1}-f^i|\circ\psi\right).$$

La série $\sum_i D^l(\theta\circ f^i\circ\psi)$ converge donc uniformément sur K par l'argument habituel, et ce pour tout $l\le n$. Autrement dit, $(\Theta_k\circ\psi)_k$ converge $\mathcal{C}^n$-uniformément sur K. □

1.2 Unicité du champ de Szekeres

Théorème 1.5 (Lemme de Kopell)**.** *Soient f et g deux difféomorphismes de $[a, b[$ qui commutent, de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^1$ respectivement. Si f n'a pas de point fixe dans $]a, b[$ et si g en a au moins un, alors $g = \mathrm{Id}$.*

Démonstration. Notre référence pour cette preuve est le livre de Navas [Na]. Soit $c \in]a, b[$ un point fixe de g. Quitte à remplacer f par f^{-1}, on peut supposer que $f(x) < x$ pour tout $x \in]a, b[$. Comme f et g commutent, $g^p \circ f^n = f^n \circ g^p$ pour tous n, $p \in \mathbb{N}$, donc :

$$g(f^n(c)) = f^n(c) \quad \text{et}$$
$$Dg^p \circ f^n \times Df^n = Df^n \circ g^p \times Dg^p.$$

D'après la première égalité, $(f^n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite de points fixes de g qui s'accumule sur a, donc comme Dg est continue, $Dg(a) = 1$. On réécrit la deuxième égalité sous la forme :

$$Dg^p(x) = \frac{Df^n(x)}{Df^n(g^p(x))} Dg^p(f^n(x)) \quad \text{pour tout } \ x \in [a, b[. \tag{1.9}$$

Soit x un point du segment $[f(c), c]$ qui est stable par g. La suite $(g^p(x))_{p\in\mathbb{N}} \subset [f(c), c]$ est monotone. On la suppose croissante pour fixer les idées. Les intervalles $]f^j(x), f^j \circ g^p(x)[\subset]f^{j+1}(c), f^j(c)[$, $j \in \mathbb{N}$, sont disjoints et inclus dans $[a, c]$, donc

$$\begin{aligned}
\left|\log\left(\frac{Df^n(x)}{Df^n(g^p(x))}\right)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \log Df \circ f^i(x) - \log Df \circ f^i \circ g^p(x)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left|\log Df \circ f^i(x) - \log Df \circ f^i \circ g^p(x)\right| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left|\int_{f^i(x)}^{f^i\circ g^p(x)} D\log Df\right| \\
&\leq \int_a^c |D\log Df| =: C.
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini dans (1.9), comme Dg^p est continue et vaut 1 en a, on obtient :

$$e^{-C} \leq |Dg^p(x)| \leq e^C \quad \text{pour tout } \ x \in [f(c), c],\ p \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Ceci implique que g vaut l'identité sur $[f(c), c]$. En effet, supposons par l'absurde que $x \in [f(c), c]$ soit déplacé par g — disons $g(x) > x$. Alors $(g^p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante dans $[f(c), c]$, et la longueur des intervalles disjoints $]g^p(x), g^{p+1}(x)[$ tend nécessairement vers 0. Mais d'après (1.10), cette longueur est minorée par $e^{-C}|g(x) - x|$, ce qui constitue une contradiction.

Ainsi, g vaut l'identité sur $[f(c), c]$, et comme g commute avec f, c'est l'identité sur $[a, b[$ tout entier. □

Pour tout $f \in \mathcal{D}^r([a,b[)$, $1 \leq r \leq \infty$, et tout $1 \leq k \leq r$, on note $\mathcal{Z}_f^k$ le centralisateur de f dans $\mathcal{D}^k([a,b[)$:

$$\mathcal{Z}_f^k = \{g \in \mathcal{D}^k([a,b[)\,;\, g \circ f = f \circ g\}.$$

Corollaire 1.6. *Soit $f \in \mathcal{D}^r([a,b[)$, $r \geq 2$, sans point fixe dans $]a,b[$. Il existe un unique champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$ dont f soit le flot au temps 1. Le centralisateur $\mathcal{Z}_f^1$ est réduit au flot de ce champ de vecteurs et est donc un groupe à un paramètre de difféomorphismes $\mathcal{C}^1$.*

Ce corollaire montre en particulier que f admet un unique champ de Szekeres.

Démonstration. Soit ν un champ de Szekeres de f (cf. théorème 1.1). Il suffit de vérifier que tout $g \in \mathcal{Z}_f^1$ appartient au flot $\{f^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de ν. Soit $c \in]a,b[$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $f^t(c) = g(c)$. Un tel t existe et est unique, ν étant partout non nul sur $]a,b[$. Le difféomorphisme $f^{-t} \circ g$ de $[a,b[$ est de classe $\mathcal{C}^1$, commute avec f et fixe $c \in]a,b[$. C'est donc l'identité d'après le lemme de Kopell 1.5. $\square$

On peut démontrer un énoncé similaire pour les germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}_+$ en 0, tout germe se prolongeant en difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Chapitre 2

Centralisateur $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$

> ... des fois, la pire des choses qui peut arriver aux questions, c'est la réponse.
>
> Romain Gary
> *L'angoisse du roi Salomon*

Dans ce chapitre, on se place sur $[a, b[= \mathbb{R}_+$, et on s'intéresse aux centralisateurs $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, d'un difféomorphisme ($\mathcal{C}^\infty$-)lisse f fixant seulement l'origine. D'après le corollaire 1.6, un tel difféomorphisme possède un unique champ de Szekeres ν_f, i.e un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le flot au temps 1 coïncide avec f. De plus, le centralisateur $\mathcal{C}^1$ de f se réduit aux éléments du flot de ν_f. L'étude des centralisateurs $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, s'avère plus subtile. On peut certes faire deux remarques élémentaires : d'une part, $\mathcal{Z}_f^r$ décroît quand r augmente, donc $\mathcal{Z}_f^r \subset \mathcal{Z}_f^1$ pour tout $r \geq 1$, et d'autre part, $\mathcal{Z}_f^r$ contient tous les itérés de f et de son inverse. Mais on ne peut rien dire de plus en général. En effet, les deux cas limites permis par les inclusions :

$$\mathbb{Z} \cong \{f^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \quad \subset \quad \mathcal{Z}_f^r \quad \subset \quad \mathcal{Z}_f^1 \cong \mathbb{R}$$

peuvent se produire. Si le champ de Szekeres de f est lisse, alors $\mathcal{Z}_f^r = \mathcal{Z}_f^1$ pour tout r. D'après un résultat de Takens [Ta], c'est notamment le cas si f n'est pas infiniment tangent à l'identité en 0. Pour les difféomorphismes infiniment tangents à l'identité en 0, Sergeraert [Se, §3] a aussi donné un critère de régularité : si f n'oscille pas trop autour de l'identité au sens où

$$\sup_{0<y\leq x} \big(y - f(y)\big) = O\left(\big(x - f(x)\big)^\lambda\right) \qquad \text{pour un } \lambda > \frac{r-1}{r},$$

alors $\mathcal{Z}_f^r = \mathcal{Z}_f^1$. Mais dans le même article, il construit un difféomorphisme f dont le centralisateur $\mathcal{C}^2$ est strictement contenu dans $\mathcal{Z}_f^1$, et on vérifie dans la section 2.4 que $\mathcal{Z}_f^2$ est en fait réduit au groupe engendré par f. Le premier but de

ce chapitre est de montrer qu'il existe des exemples intermédiaires témoignant de phénomènes plus complexes :

Théorème 2.1. *Il existe un difféomorphisme lisse f de $\mathbb{R}_+$ fixant seulement l'origine, dont le centralisateur $\mathcal{C}^r$, $2 \leq r \leq \infty$, est un sous-groupe propre, dense et non dénombrable du groupe à un paramètre $\mathcal{Z}_f^1$.*

Ce théorème découle de la proposition suivante, démontrée dans la section 2.1 [1], en prenant pour f le flot au temps 1 du champ de vecteurs ν qu'elle fournit :

Proposition 2.2. *Il existe un champ de vecteurs ν complet $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant qu'en 0 dont le flot f^t au temps t n'est pas $\mathcal{C}^2$ en 0 pour $t = 1/2$ mais est lisse sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{Z} \oplus \sum_{\tau \in K} \tau\mathbb{Z}$, où $K \subset \mathbb{R}$ est un ensemble de Cantor.*

Il est alors naturel de se demander si les difféomorphismes f de $\mathbb{R}_+$ fixant seulement l'origine dont le centralisateur $\mathcal{Z}_f^r$, $r \geq 2$, n'est ni le groupe à un paramètre $\mathcal{Z}_f^1 \cong \mathbb{R}$, ni le groupe discret des itérés $\{f^n, n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, sont des phénomènes isolés ou non. Notons tout d'abord que d'après les travaux de Takens [Ta], ce phénomène se limite au sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}_+)$ des difféomorphismes infiniment tangents à l'identité en 0. À notre connaissance, il n'y a pas de topologie sur $\mathcal{S}$ qui soit vraiment adaptée à ce problème. En particulier, la restriction à $\mathcal{S}$ de la topologie de la convergence $\mathcal{C}^\infty$ sur les compacts de $\mathbb{R}_+$ est extrêmement grossière : étant donnés deux difféomorphismes contractants $f, g \in \mathcal{S}$ on construit facilement une suite de difféomorphismes $f_k \in \mathcal{S}$ qui convergent vers f en topologie $\mathcal{C}^\infty$ et dont les germes en 0 sont tous égaux à ceux de g. En d'autres termes, la topologie $\mathcal{C}^\infty$ ne voit pas le germe en 0, alors que c'est précisément ce germe qui détermine la régularité du champ de Szekeres, et donc la nature des centralisateurs $\mathcal{Z}^r$ pour $r \geq 2$. Néanmoins, même si on ne peut pas parler de généricité, le résultat suivant montre que le phénomène illustré dans le théorème 2.1 n'est pas rare, au sens où tout difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ fixant seulement l'origine, appartenant à un flot lisse et satisfaisant une certaine condition d'oscillation peut être approché (en un sens précisé dans l'énoncé) par des difféomorphismes f dont les centralisateurs $\mathcal{Z}_f^r$ sont comme dans le théorème 2.1 :

Théorème 2.3. *Soit f_0 un difféomorphisme lisse et contractant de $\mathbb{R}_+$ (i.e. $f(x) < x$ pour tout $x > 0$) ayant un champ de Szekeres lisse $\mathcal{C}^1$-borné et satisfaisant la condition d'oscillation suivante :*

$$\limsup_{x \to 0} \left(\sup_{0 < y \leq x} \frac{\log\big(x - f_0(x)\big)}{\log\big(y - f_0(y)\big)} \right) = +\infty.$$

Alors, pour tout $k \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un difféomorphisme lisse f de $\mathbb{R}_+$ proche de f_0 au sens où

$$\big|D^m(f - f_0)(x)\big| \leq \varepsilon \big|D^m(f_0 - \mathrm{Id})(x)\big| \qquad \textit{pour tout } m \leq k \textit{ et tout } x \in \mathbb{R}_+,$$

1. La section 2.1 reprend l'essentiel de l'article [Ey] à paraître dans Commentarii Mathematici Helvitici.

et dont le centralisateur $\mathcal{Z}_f^\infty$ est un sous-groupe propre, dense et non-dénombrable de $\mathcal{Z}_f^1$.

La preuve de ce théorème est très similaire à celle du théorème 2.1, avec quelques détails techniques supplémentaires. Pour plus de lisibilité, on ne donne ici que la preuve du théorème 2.1, et on renvoie le lecteur à [Ey] pour la preuve de 2.3.

Une autre question intéressante concerne la nature arithmétique des éléments d'un centralisateur $\mathcal{Z}_f^r$ qui diffère de $\mathcal{Z}_f^1$. Autrement dit, soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des $\tau \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe un champ de vecteurs ν de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, non nul en dehors de 0, dont le flot est lisse aux temps 1 et τ mais pas $\mathcal{C}^2$ pour d'autres temps ; que peut-on dire de $\mathscr{A}$? Grâce à l'exemple de Sergeraert [Se, §4] (cf. proposition 2.13), on voit facilement que $\mathscr{A}$ contient tous les rationnels. En améliorant la preuve de la proposition 2.2, on montre dans la section 2.3 que $\mathscr{A}$ est résiduel. En revanche, les éléments de $\mathscr{A}$ fournis par la construction de la section 2.1 sont tous des nombres de Liouville (cf. section 2.2). Deux questions subsistent encore :

$\mathscr{A}$ contient-il tous les nombres de Liouville ?

$\mathscr{A}$ contient-il un nombre diophantien ?

La formulation des questions n'est pas anodine. La très bonne approximation des temps $\tau \in K$ par des rationnels est essentielle dans la construction de la section 2.1, et on peut penser qu'à l'inverse, des techniques similaires à celles de l'étude des difféomorphismes du cercle (cf. [He], [Yo]) permettraient de montrer qu'un champ dont les temps 1 et τ sont lisses pour un τ diophantien est forcément lisse.

2.1 Exemples de centralisateurs exotiques

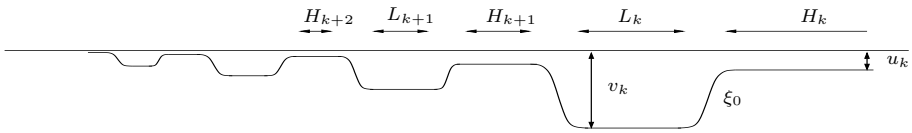
Cette section présente la démonstration de la proposition 2.2.

2.1.1 Principe de la construction

Cette démonstration combine la stratégie de Sergeraert dans [Se] et la méthode d'approximation par conjugaison introduite par Anosov et Katok dans [A–K] et développée ensuite par de nombreux auteurs (voir l'article [F–K] et les références qui y sont données). Sergeraert explique comment perturber un champ de vecteurs lisse (spécifique) pour rendre son temps 1/2 irrégulier, en préservant la régularité du temps 1. La méthode de déformation par conjugaison permet quant à elle de préserver la régularité d'autres temps du flot, en particulier de temps irrationnels. Dans cette section, on décrit rapidement la construction de Sergeraert, dans un langage un peu différent du sien, puis on explique comment la généraliser grâce à des méthodes de type Anosov–Katok.

Construction de Sergeraert

La construction exposée ici en termes de déformations par conjugaison est bien celle de Sergeraert, même si les conjugaisons n'apparaissent pas explicitement dans [Se]. On commence avec un champ de vecteurs lisse particulier ν_0 (dont la définition précise est donnée au paragraphe 2.1.2) et on construit le champ ν voulu (*i.e* un champ dont le flot est lisse au temps 1 et pas $\mathcal{C}^2$ au temps 1/2) comme limite d'une suite de déformations ν_k, chaque ν_k étant le tiré-en-arrière $h_k^*\nu_0$ de ν_0 par un difféomorphisme lisse h_k de $\mathbb{R}_+$. Le flot f_k^t de ν_k est alors relié au flot f_0^t de ν_0 par $f_k^t = h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$. Il s'agit donc de construire les conjugaisons h_k de sorte que f_k^1 converge en topologie $\mathcal{C}^\infty$ mais que $f_k^{1/2}$ ne converge qu'en topologie $\mathcal{C}^1$. Pour cela, l'allure du champ initial est déterminante : il ne s'annule qu'en 0, est négatif ailleurs, et son graphe a l'allure d'un paysage sous-marin formé d'une alternance de fosses L_k et de plateaux H_k dont les altitudes respectives $-v_k$ et $-u_k$ (mesurées depuis la surface, de sorte que $0 < u_k < v_k$), tendent vers 0 quand k tend vers $+\infty$, mais oscillent violemment au sens où les quotients v_k/u_k tendent vers l'infini.



Il découle de ce comportement que si un élément f_0^t du flot envoie un segment $S \subset H_k$ dans la région L_k pour un k assez grand, alors sa restriction à S est une application affine de grande pente v_k/u_k.

Les conjugaisons h_k sont définies inductivement. On construit à l'étape k un difféomorphisme g_k, et on définit $h_k = g_k \circ h_{k-1}$ et $\nu_k = h_k^*\nu_0 = h_{k-1}^* g_k^* \nu_0$, si bien que les flots de ν_k et ν_{k-1} sont donnés respectivement par

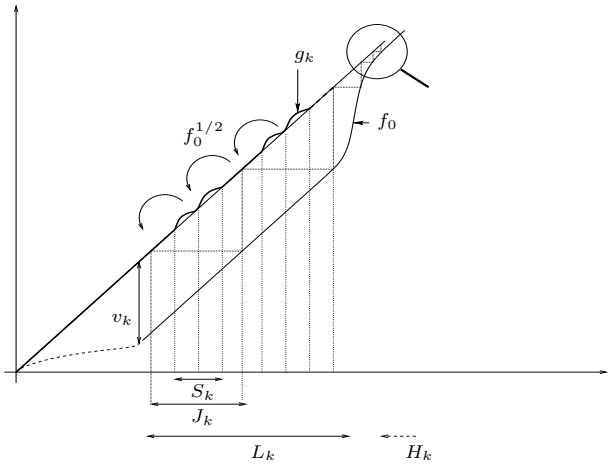
$$f_k^t = h_{k-1}^{-1} \circ (g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k) \circ h_{k-1} \quad \text{et}$$
$$f_{k-1}^t = h_{k-1}^{-1} \circ f_0^t \circ h_{k-1}.$$

Il faut construire g_k de sorte que $g_k^{-1} \circ f_0^1 \circ g_k - f_0^1$ soit très petit en norme $\mathcal{C}^k$ (disons borné par 2^{-k}) mais que $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$ soit grand en norme $\mathcal{C}^2$. Pour cela, l'idée est de prendre un g_k qui coïncide avec l'identité près de 0, commute avec f_0^1 en dehors d'un intervalle fondamental $S_k \subset L_k$ de $f_0^{1/2}$, est petit en norme $\mathcal{C}^k$ sur cet intervalle, mais ne commute pas avec $f_0^{1/2}$.

Plus précisément, on fait en sorte que $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$ soit « de l'ordre de » $g_k - \mathrm{Id}$. Soit $J_k \subset L_k$ un intervalle fondamental de f_0^1 contenant S_k. Comme g_k commute avec f_0^1 en dehors de J_k et vaut l'identité près de 0, g_k vaut l'identité sur $[0, \min J_k]$, et, pour tout $p \geq 1$, si J_k^p désigne le segment $f_0^{-p}(J_k)$,

$$g_k \mid_{J_k^p} = f_0^{-p} \circ (g_k \mid_{J_k}) \circ f_0^p.$$

Or si p est tel que $J_k^p \subset H_k$, on a vu que la restriction de f_0^p à J_k^p était une



application affine de la forme

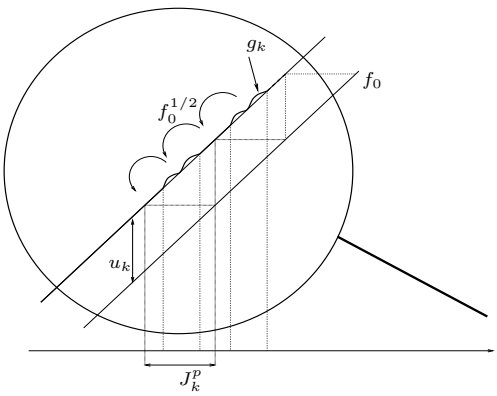
$$x \in J_k^p \mapsto \frac{v_k}{u_k}\, x + c_k,$$

où c_k désigne une constante réelle. Mais alors

$$\left(g_k \mid_{J_k^p}\right)(x) = \left(\frac{v_k}{u_k}\right)^{-1} (g_k \mid_{J_k}) \left(\frac{v_k}{u_k}\, x + c_k\right) - \frac{c_k u_k}{v_k},$$

Donc pour tout $m \geq 1$,

$$D^m \left((g_k - \mathrm{Id}) \mid_{J_k^p}\right)(x) = \left(\frac{v_k}{u_k}\right)^{m-1} D^m \left((g_k - \mathrm{Id}) \mid_{J_k}\right) \left(\frac{v_k}{u_k}\, x + c_k\right).$$



Ainsi, $(g_k - \mathrm{Id})$ est petit en norme $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, mais les dérivées supérieures sont grandes par endroits (dans la zone H_k), et de même pour $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$. On vérifie alors que la superposition h_k des perturbations g_k produit l'effet souhaité sur les temps 1 et 1/2 du flot de ν_0.

Combinaison avec les méthodes d'Anosov–Katok

On part du même champ de vecteurs ν_0, et on définit là aussi ν comme limite de déformations ν_k, chaque ν_k étant le tiré en arrière $h_k^*\nu_0$ de ν_0 par un difféomorphisme lisse h_k de $\mathbb{R}_+$. Là encore, le flot f_k^t de ν_k est relié au flot de ν_0 par $f_k^t = h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$. Mais cette fois, on construit les h_k de sorte que les difféomorphismes f_k^t convergent en topologie $\mathcal{C}^\infty$ pour un ensemble dense de t, et seulement en topologie $\mathcal{C}^1$ pour le temps $t = 1/2$. Pour cela, on construit inductivement les difféomorphismes $g_k = h_k \circ h_{k-1}^{-1}$ de sorte qu'à l'étape k, g_k commute avec f_0^{1/q_k}, pour un certain entier q_k, en dehors d'un intervalle fondamental S_k de $f_0^{1/2q_k}$ situé dans la région L_{n_k}, pour un entier n_k, mais pas avec $f_0^{1/2q_k}$. On impose de plus que la norme $\mathcal{C}^k$ de $g_k - \mathrm{Id}$ soit suffisamment petite sur S_k pour que les normes $\mathcal{C}^k$ des applications

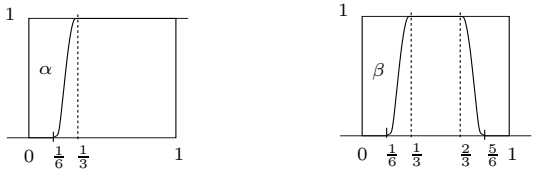
$$g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k - f_0^t \quad \text{et} \quad h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k - h_{k-1}^{-1} \circ f_0^t \circ h_{k-1}\ , \quad t \in \frac{1}{q_k}\mathbb{Z} \cap [0,1],$$

soient strictement inférieures à 2^{-k}, et on note I_k un voisinage compact de $\frac{1}{q_k}\mathbb{Z} \cap]0,1[$ tel que l'inégalité large soit vérifiée pour tout $t \in I_k$. Pour un choix convenable de q_k et n_k, on peut faire en sorte que l'intersection des compacts I_k soit un ensemble de Cantor K constitué de temps t pour lesquels les difféomorphismes $h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$, $k \geq 1$, convergent en topologie $\mathcal{C}^\infty$. Il faut pour cela choisir à chaque étape q_k assez grand pour que $\frac{1}{q_k}\mathbb{Z}$ rencontre chaque composante connexe de I_{k-1} en au moins deux points. L'irrégularité de la limite des $f_k^{1/2}$ s'obtient exactement comme dans la construction de Sergeraert.

2.1.2 Le champ de vecteurs initial

On part du champ de vecteurs défini par Sergeraert dans [Se]. Pour le définir, on utilise deux fonctions $\alpha, \beta \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ satisfaisant les conditions suivantes :

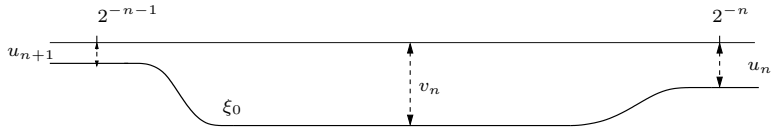
- $\alpha(x)$ vaut 0 pour $x \leq 1/6$ et 1 pour $x \geq 1/3$;
- $\beta(x)$ vaut 0 pour $x \leq 1/6$ ou $x \geq 5/6$, et 1 pour $1/3 \leq x \leq 2/3$;



En posant $u_n = 2^{-n^4}$ et $v_n = 2^{-n^2}$, on définit ν_0 par

$$\nu_0(x) = -u_{n+1} - (u_n - u_{n+1})\ \alpha(2^{n+1}x - 1) - (v_n - u_n)\ \beta(2^{n+1}x - 1)$$
$$\text{pour } x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}], \quad \nu_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad \nu_0(x) = -1 \quad \text{pour } x \geq 1.$$

On vérifie facilement que ν_0 est lisse sur $\mathbb{R}_+$, borné (donc complet), infiniment plat en 0 et $\mathcal{C}^1$-borné — avec $1 < \|\nu_0\|_1 < +\infty$. On note $\{f_0^t, t \in \mathbb{R}\}$ son flot,



et on fixe deux orbites $\{a_l, l \in \mathbb{Z}\}$ et $\{b_l, l \in \mathbb{Z}\}$ de $f_0 = f_0^1$, avec $a_0 = 1$, $b_0 = f_0^{-1/2}(a_0)$, $a_l = f_0(a_{l-1})$ et $b_l = f_0(b_{l-1})$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$. Comme ν_0 est constant égal à $-v_n$ sur le tiers central de $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$, c'est-à-dire $[2^{-n-1} + 2^{-n-1}/3, 2^{-n} - 2^{-n-1}/3]$, et à $-u_n$ sur $[2^{-n} - 2^{-n-1}/6, 2^{-n} + 2^{-n}/6]$, un calcul rapide de temps de parcours à vitesse constante montre que pour tout $n \geq 4$, il existe des entiers $i(n)$ et $j(n)$ tels que

$$\begin{aligned} & 2^{-n} - \frac{1}{6}2^{-n-1} \leq a_{i(n)+2} < a_{i(n)-2} \leq 2^{-n} + \frac{1}{6}2^{-n} \\ \text{et} \quad & 2^{-n-1} + \frac{1}{3}2^{-n-1} \leq a_{j(n)+2} < a_{j(n)-2} \leq 2^{-n} - \frac{1}{3}2^{-n-1}. \end{aligned}$$

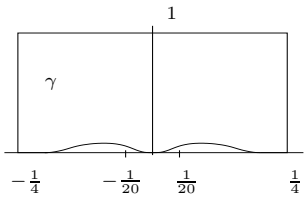
Ainsi ν_0 vaut $-v_n$ sur $[a_{j(n)+2}, a_{j(n)-2}]$, donc f_0^t induit sur $[a_{j(n)+1}, a_{j(n)-1}]$ la translation de $-tv_n$ pour $0 \leq t \leq 1$. De même, au voisinage de $a_{i(n)}$, f_0^t induit la translation de $-tu_n$.

2.1.3 Processus de déformation

On veut maintenant construire une suite h_k de difféomorphismes lisses de $\mathbb{R}_+$ tels que les champs de vecteurs $\nu_k = h_k^* \nu_0$ convergent en topologie $\mathcal{C}^1$ vers le champ ν de la proposition 2.2. Conformément au schéma classique du procédé de déformation par conjugaison, h_k est obtenu comme composé

$$h_k = g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1$$

de difféomorphismes g_k fabriqués inductivement (ici à partir d'une fonction γ fixée et de deux paramètres d'ajustement q_k et n_k), de sorte que (cf. section 2.1.1) $g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k - f_0^t$, $t \in \frac{1}{q_k}\mathbb{Z} \cap [0,1]$, soit « négligeable » par rapport à $g_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ g_k - f_0^{1/2}$. On donne maintenant les détails de la construction des g_k.



Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction lisse à support dans $[-1/4, 1/4]$, satisfaisant $\gamma(t) = 1 - \cos t$ au voisinage de 0, disons sur $[-1/20, 1/20]$, et $\|\gamma\|_1 < 1$. Pour des entiers q et n, on note $w_n = 2^{-n^3}$ et $\gamma_{q,n}\colon \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ la fonction lisse définie par

$$\gamma_{q,n}(x) = w_n \gamma\Big(\frac{q}{v_n}\big(x - a_{j(n)}\big)\Big) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

La fonction $\gamma_{q,n}$ est à support dans $S_{q,n} = \left[a_{j(n)} - \frac{v_n}{4q}, a_{j(n)} + \frac{v_n}{4q}\right]$, qui est un intervalle fondamental de $f_0^{1/2q}$ car il est inclus dans $[a_{j(n)+1}, a_{j(n)-1}]$ où le flot f_0^s de ν_0 au temps $0 \leq s \leq 1$ coïncide avec la translation de $-sv_n$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$D\gamma_{q,n}(x) = \frac{w_n q}{v_n} D\gamma\Big(\frac{q}{v_n}(x - a_{j(n)})\Big)$$

et donc

$$\|\gamma_{q,n}\|_1 = \max\left(w_n, \frac{w_n q}{v_n}\right) \|\gamma\|_1 < \max\left(w_n, \frac{w_n q}{v_n}\right).$$

En particulier, en prenant n assez grand par rapport à q, on peut rendre la norme $\mathcal{C}^1$ de $\gamma_{q,n}$ arbitrairement petite.

On note $J_{q,n}$ l'intervalle fondamental $\left[a_{j(n)} - \frac{v_n}{2q}, a_{j(n)} + \frac{v_n}{2q}\right]$ de $f_0^{1/q}$. On définit $g_{q,n} \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ comme l'unique application satisfaisant les propriétés suivantes :

- $g_{q,n}(x) = x$ pour $x < a_{j(n)} - \frac{v_n}{2q}$;
- $g_{q,n}(x) = x + \gamma_{q,n}(x)$ pour $x \in J_{q,n}$;
- $g_{q,n}$ commute avec $f_0^{1/q}$ en dehors de $J_{q,n}$, et donc

$$g_{q,n} = f_0^{-p/q} \circ (\mathrm{Id} + \gamma_{q,n}) \circ f_0^{p/q} \quad \text{sur } f_0^{-p/q}(J_{q,n}),\ p \geq 0. \tag{2.2}$$

En particulier, $g_{q,n}$ fixe tous les segments $f_0^{-p/q}(J_{q,n})$, $p \in \mathbb{Z}$. On donne maintenant quelques propriétés remarquables de $g_{q,n}$ concernant notamment son support et sa dérivée, qui nous serviront tout au long de la preuve de la proposition 2.2.

Quelques propriétés de $g_{q,n}$

Pour $0 \leq p \leq q$, $f_0^{-p/q}$ et $f_0^{p/q}$ coïncident avec les translations de $\frac{p}{q}v_n$ et $-\frac{p}{q}v_n$ sur $J_{q,n}$ et $f_0^{-p/q}(J_{q,n})$ respectivement, donc (2.2) se simplifie en :

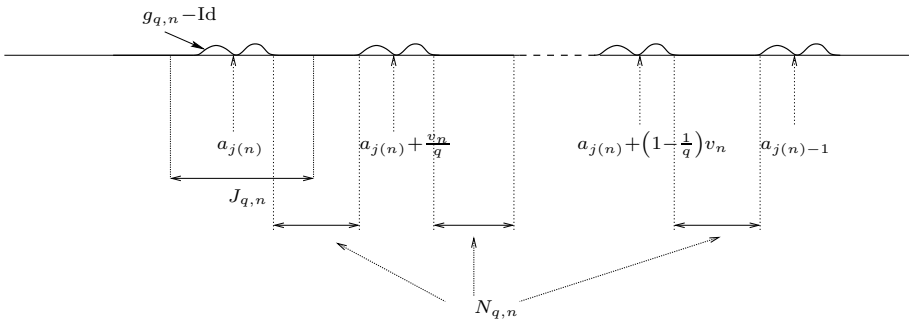
$$g_{q,n} = \mathrm{Id} + \gamma_{q,n} \circ \left(\mathrm{Id} - \frac{p}{q}v_n\right) \quad \text{sur } f_0^{-p/q}(J_{q,n}),\ 0 \leq p \leq q. \tag{2.3}$$

En particulier, $g_{q,n}$ vaut l'identité sur

$$N_{q,n} = \bigcup_{p=0}^{q-1} \left(a_{j(n)} + (2p+1)\frac{v_n}{2q} + \left[-\frac{v_n}{4q}, \frac{v_n}{4q}\right]\right), \tag{2.4}$$

et *a fortiori* sur tous les $f_0^{-p/q}(N_{q,n})$, $p \geq 0$. C'est trivialement vrai pour les $p < 0$ puisque $g_{q,n}$ vaut l'identité sur $[0, a_{j(n)} - v_n/4q]$.

Notons de plus que comme ν_0 est constant égal à -1 sur $[1, +\infty[$, $f_0^{-1/q}$ coïncide avec la translation de $1/q$ sur $[1, +\infty[$, donc $g_{q,n}$ commute à la translation de $1/q$ sur cet intervalle. En particulier, quels que soient q et n, $g_{q,n}$



commute à la translation de 1 sur $[1,+\infty[$. De plus,

$$\begin{aligned} g_{q,n}(a_0=1) &= f_0^{-j(n)} \circ g_{q,n} \circ f_0^{j(n)}(a_0) \\ &= f_0^{-j(n)}(g_{q,n}(a_{j(n)})) = f_0^{-j(n)}(a_{j(n)}) = a_0 = 1, \end{aligned}$$

donc $[1,+\infty[$ est stable par $g_{q,n}$.

En dérivant (2.2), on obtient

$$Dg_{q,n} = \frac{Df_0^{p/q}}{Df_0^{p/q} \circ g_{q,n}} \times \left(1 + D\gamma_{q,n} \circ f_0^{p/q}\right) \quad \text{sur } f_0^{-p/q}\left(J_{q,n}\right),\ p \geq 0, \tag{2.5}$$

donc $g_{q,n}$ est un difféomorphisme si $\|\gamma_{q,n}\|_1 < 1$. On peut en fait simplifier l'expression (2.5). Le champ ν_0 étant invariant par les difféomorphismes de son flot, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Df_0^t = \frac{\nu_0 \circ f_0^t}{\nu_0} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

donc

$$\frac{Df_0^{p/q}}{Df_0^{p/q} \circ g_{q,n}} = \frac{\nu_0 \circ f_0^{p/q}}{\nu_0} \times \frac{\nu_0 \circ g_{q,n}}{\nu_0 \circ f_0^{p/q} \circ g_{q,n}}.$$

Mais pour $x \in f_0^{-p/q}\left(J_{q,n}\right)$,

$$\nu_0 \circ f_0^{p/q}(x) = \nu_0 \circ f_0^{p/q} \circ g_{q,n}(x) = -v_n$$

donc

$$Dg_{q,n} = \frac{\nu_0 \circ g_{q,n}}{\nu_0} \times \left(1 + D\gamma_{q,n} \circ f_0^{p/q}\right) \quad \text{sur } f_0^{-p/q}\left(J_{q,n}\right),\ p \geq 0. \tag{2.6}$$

Le lemme suivant sera utile dans la preuve du lemme 2.7 pour prouver que le flot limite issu de notre construction n'est pas lisse au temps 1/2 :

Lemme 2.4. *Soient $(q_k)_{k\geq 1}$ et $(n_k)_{k\geq 1}$ deux familles d'entiers positifs, avec q_k impair et $w_{n_k} q_k v_{n_k}^{-1} < 1$ pour tout k (de sorte que $\|\gamma_{q_k,n_k}\|_1 < 1$). Alors pour tout $k \geq 1$, l'expression*

$$h_k = g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1, \quad \textit{où} \quad g_l = g_{q_l,n_l},$$

définit un difféomorphisme lisse de $\mathbb{R}_+$ qui commute avec la translation de longueur 1 sur $[1, +\infty[$ et a le comportement suivant sur les orbites $\{a_l,\, l \in \mathbb{Z}\}$ et $\{b_l,\, l \in \mathbb{Z}\}$ de f_0 :

1. *h_k coincide avec l'identité au voisinage de b_l pour tout $l \in \mathbb{Z}$;*
2. *h_k est tangent à l'identité sur $\{a_l,\, l \in \mathbb{Z}\}$ — i.e $h_k(a_l) = a_l$ et $Dh_k(a_l) = 1$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$;*
3. *$(Lh_k - Lh_{k-1})(a_l)$ vaut $\frac{w_{n_k} q_k^2}{v_{n_k} |\nu_0(a_l)|}$ si $l \leq j(n_k)$ et 0 sinon.*

Démonstration. Soit $k \geq 1$. Comme $\|\gamma_{q_l,n_l}\|_1 < 1$ pour tout $l \leq k$, (2.6) montre que g_l est un difféomorphisme lisse de $\mathbb{R}_+$, qui commute avec la translation de 1 sur $[1, +\infty[$ et préserve cet intervalle d'après les « propriétés remarquables » des $g_{q,n}$. C'est donc aussi le cas de $h_k = g_k \circ \cdots \circ g_1$.

Pour démontrer le point 1, il suffit de prouver que pour tous k et l, g_k vaut l'identité près de b_l. Pour cela il suffit, d'après (2.4), de vérifier que $b_{l_0} \in \operatorname{Int} N_{q_k,n_k}$ pour un $l_0 \in \mathbb{Z}$. Mais q_k est impair – disons $q_k = 2s_k + 1$ – donc

$$b_{j(n_k)} = f_0^{-1/2}(a_{j(n_k)}) = a_{j(n_k)} + \frac{1}{2} v_{n_k} = a_{j(n_k)} + (2s_k + 1)\frac{v_{n_k}}{2q_k} \in N_{q_k,n_k}.$$

D'autre part, comme $\gamma(0) = D\gamma(0) = 0$, $\gamma_k(a_{j(n_k)}) = D\gamma_k(a_{j(n_k)}) = 0$ d'après (2.1), et l'expression de g_k sur $J_k = J_{q_k,n_k}$ implique alors que g_k est tangent à l'identité en $a_{j(n_k)}$. C'est donc aussi le cas en tout point $f_0^{-p/q_k}(a_j(n_k)), p \geq 0$, par définition de g_k (cf. (2.2)), donc en particulier en tout a_l, $l \leq j(n_k)$, et c'est évidemment vrai en tout a_l, $l > j(n_k)$ vu que $g_k = \mathrm{Id}$ au voisinage de $[0, a_{j(n_k)+1}] = [0, a_{j(n_k)} - v_{n_k}]$. Ceci démontre le point 2.

En appliquant à présent la règle de dérivation (1) à $h_k = g_k \circ h_{k-1}$, on obtient :

$$Lh_k = Lg_k \circ h_{k-1} \times Dh_{k-1} + Lh_{k-1}.$$

Pour $l \in \mathbb{Z}$, on sait maintenant d'après le point 2 que $h_{k-1}(a_l) = a_l$ et $Dh_{k-1}(a_l) = 1$, donc

$$(Lh_k - Lh_{k-1})(a_l) = Lg_k(a_l).$$

Si $l > j(n_k)$, $Lg_k(a_l) = 0$ puisque g_k vaut l'identité au voisinage de $\left[0, a_{j(n_k)+1}\right]$. Supposons à présent que $l \leq j(n_k)$. Notons $p = j(n_k) - l \geq 0$. D'après (2.2), au voisinage de a_l, g_k est donné par :

$$g_k = f_0^{-p} \circ (\mathrm{Id} + \gamma_k) \circ f_0^p.$$

Écrivons également

$$\mathrm{Id} = f_0^{-p} \circ \mathrm{Id} \circ f_0^p,$$

et appliquons la formule (1) à ces deux égalités. On obtient :

$$\begin{aligned} Lg_k = Lg_k - L\,\mathrm{Id} = {} & Lf_0^{-p} \circ (\mathrm{Id} + \gamma_k) \circ f_0^p \times D\,(\mathrm{Id} + \gamma_k) \circ f_0^p \times Df_0^p \\ & + L(\mathrm{Id} + \gamma_k) \circ f_0^p \times Df_0^p - Lf_0^{-p} \circ f_0^p \times Df_0^p, \end{aligned}$$

qui donne, en $a_l = f_0^{-p}(a_{j(n_k)})$,

$$\begin{aligned} Lg_k(a_l) = Lf_0^{-p}\left(a_{j(n_k)} + \gamma_k(a_{j(n_k)})\right) \times (1 + D\gamma_k(a_{j(n_k)})) \times Df_0^p(a_l) \\ - Lf_0^{-p}(a_{j(n_k)}) \times Df_0^p(a_l) + L(\mathrm{Id} + \gamma_k)(a_{j(n_k)}) \times Df_0^p(a_l). \end{aligned}$$

Comme $\gamma_k(a_{j(n_k)}) = D\gamma_k(a_{j(n_k)}) = 0$, les deux premiers termes se compensent. Finalement, en appliquant la relation d'invariance $\nu_0 \circ f_0^p = Df_0^p \times \nu_0$ en a_l et en notant que $D^2\gamma(0) = D^2(1-\cos)(0) = 1$, on obtient

$$Lg_k(a_l) = L(\mathrm{Id} + \gamma_k)(a_{j(n_k)}) \times \frac{\nu_0(a_{j(n_k)})}{\nu_0(a_l)} = \frac{w_{n_k} q_k^2}{v_{n_k}^2} \times \frac{v_{n_k}}{|\nu_0(a_l)|}.$$

□

On pose $h_0 = \mathrm{Id}$, $I_0 = [0,1]$ et, comme dans le lemme 2.4, on abrège g_{q_k,n_k} par g_k, γ_{q_k,n_k} par γ_k et J_{q_k,n_k} par J_k.

Lemme 2.5. *Il existe des suites croissantes d'entiers positifs q_k et n_k pour lesquelles les difféomorphismes $h_k = g_k \circ \cdots \circ g_1$, les champs de vecteurs $\nu_k = h_k^* \nu_0$ et leurs flots f_k^t satisfont les estimations suivantes pour tout $k \geq 1$:*

$$\left\|\nu_k - \nu_{k-1}\right\|_1 \leq 2^{-k}, \tag{i$_k$}$$

$$\left\|f_k^t - f_{k-1}^t\right\|_k \leq 2^{-k} \quad \textit{pour tout} \quad t \in I_k \cup \{1\}, \tag{ii$_k$}$$

où $I_k \subset I_{k-1}$ désigne un compact constitué de 2^k segments disjoints d'intérieur non vide, deux dans chaque composante de I_{k-1}.

Démonstration. Soit $k \geq 1$ et supposons qu'on a déjà choisi q_l et n_l pour $1 \leq l \leq k-1$ (avec $w_{n_l} v_{n_l}^{-1} q_l < 1$ pour que les g_l soit des difféomorphismes) de sorte que les estimations (i$_l$) et (ii$_l$) soient satisfaites. En particulier, h_{k-1} est un difféomorphisme lisse de $\mathbb{R}_+$ qui commute à la translation de 1 sur $[1, +\infty[$ d'après le lemme 2.4. Sa différentielle est donc minorée sur $\mathbb{R}_+$ et $\|h_{k-1}\|_2 < \infty$. Prenons un entier impair $q_k > q_{k-1}$ tel que $\frac{1}{q_k}\mathbb{Z}$ rencontre l'intérieur de chaque composante connexe de I_{k-1} en au moins deux points. On choisit alors $n_k > n_{k-1}$ tel que

$$\left\|\gamma_k\right\|_{k+1} \leq \frac{2^{-k-4}(\inf|Dh_{k-1}|)^2}{\|\nu_0\|_1 \|h_{k-1}\|_2}, \tag{2.7}$$

i.e.

$$\frac{w_{n_k}}{v_{n_k}^{k+1}} \leq \frac{2^{-k-4}\ (\inf|Dh_{k-1}|)^2\ q_k^{-k-1}}{\|\gamma\|_{k+1}\ \|\nu_0\|_1\ \|h_{k-1}\|_2},$$

ce qui est possible car

$$\frac{w_n}{v_n^{k+1}} = 2^{-n^3+(k+1)n^2} = o(1).$$

Notons que l'inégalité (2.7) entraîne clairement $\|\gamma_k\|_1 < 1$ donc g_k est un difféomorphisme d'après (2.5).

Pour prouver (i_k), on pose

$$\eta_k = g_k^* \nu_0 - \nu_0 \quad \text{de sorte que} \quad \nu_k - \nu_{k-1} = h_{k-1}^* \eta_k.$$

Comme fonction, η_k s'écrit

$$\eta_k = \frac{\nu_0 \circ g_k}{Dg_k} - \nu_0.$$

D'après (2.6), sur chaque $f_0^{-p/q_k}(J_k)$, $p \geq 0$, on a donc

$$\eta_k = \nu_0 \left(\frac{1}{1 + D\gamma_k \circ f_0^{p/q_k}} - 1 \right), \tag{2.8}$$

et $\eta_k = 0$ sur $[0, \min J_k]$. Comme $|\nu_0| \leq 1$ sur $\mathbb{R}_+$, le choix de n_k (2.7) entraîne alors :

$$\|\eta_k\|_0 \leq \frac{\|D\gamma_k\|_0}{1 - \|D\gamma_k\|_0} \leq 2 \|\gamma_k\|_1 \tag{2.9}$$

et

$$|\nu_k - \nu_{k-1}| = |h_{k-1}^* \eta_k| = \left| \frac{\eta_k \circ h_{k-1}}{Dh_{k-1}} \right| \leq \frac{2 \|\gamma_k\|_1}{\inf |Dh_{k-1}|} \leq 2^{-k-4} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+.$$

En dérivant (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} D\eta_k &= D\nu_0 \left(\frac{1}{1 + D\gamma_k \circ f_0^{p/q_k}} - 1 \right) + \nu_0 \frac{D^2\gamma_k \circ f_0^{p/q_k} \times Df_0^{p/q_k}}{(1 + D\gamma_k \circ f_0^{p/q_k})^2} \\ &= D\nu_0 \left(\frac{1}{1 + D\gamma_k \circ f_0^{p/q_k}} - 1 \right) + (\nu_0 \circ f_0^{p/q_k}) \frac{D^2\gamma_k \circ f_0^{p/q_k}}{(1 + D\gamma_k \circ f_0^{p/q_k})^2}, \end{aligned}$$

en appliquant la relation d'invariance $\nu_0 \circ f_0^t = Df_0^t \times \nu_0$ à $t = p/q_k$. Le choix de n_k (2.7) garantit alors :

$$\|D\eta_k\|_0 \leq 2 \|\nu_0\|_1 \|\gamma_k\|_1 + 4 \|\gamma_k\|_2 . \tag{2.10}$$

Or

$$\begin{aligned} |D(\nu_k - \nu_{k-1})| = |D(h_{k-1}^* \eta_k)| &= \left| D\eta_k \circ h_{k-1} - \frac{D^2 h_{k-1}}{(Dh_{k-1})^2} \eta_k \circ h_{k-1} \right| \\ &\leq \|D\eta_k\|_0 + \frac{\|h_{k-1}\|_2}{(\inf |Dh_{k-1}|)^2} \|\eta_k\|_0 \end{aligned}$$

donc d'après (2.9), (2.10) et le choix de n_k (2.7),

$$\begin{aligned} |D(\nu_k - \nu_{k-1})| &\leq 2 \|\nu_0\|_1 \|\gamma_k\|_1 + 4 \|\gamma_k\|_2 + 2 \|\gamma_k\|_1 \frac{\|h_{k-1}\|_2}{(\inf |Dh_{k-1}|)^2} \\ &\leq 2^{-k-3} + 2^{-k-2} + 2^{-k-3} = 2^{-k-1} \end{aligned}$$

et l'estimation (i_k) est satisfaite.

On démontre maintenant (ii_k). On note σ_k^t le flot de $g_k^*\nu_0$, de sorte que

$$\sigma_k^t = g_k^{-1} \circ f_0^t \circ g_k.$$

Comme

$$\nu_k = h_k^*\nu_0 = h_{k-1}^* g_k^* \nu_0 \qquad \text{et} \qquad \nu_{k-1} = h_{k-1}^*\nu_0,$$

les flots de ν_k et ν_{k-1} sont donnés par

$$f_k^t = h_{k-1}^{-1} \circ \sigma_k^t \circ h_{k-1} \quad \text{et} \quad f_{k-1}^t = h_{k-1}^{-1} \circ f_0^t \circ h_{k-1}.$$

Par définition, $g_k = g_{q_k,n_k}$ commute avec f_0^{1/q_k} en dehors de $J_k = J_{q_k,n_k}$. Par conséquent, g_k commute avec tout itéré f_0^{p/q_k}, $p \geq 1$, en dehors de l'intervalle

$$\bigcup_{q=0}^{p-1} f_0^{-q/q_k}(J_k).$$

Ainsi, σ_k^{p/q_k} coïncide avec f_0^{p/q_k} en dehors de cet intervalle. En particulier, pour $0 \leq p \leq q_k$, comme f_0^s coïncide avec la translation de $-sv_{n_k}$ sur $[a_{j(n_k)} - v_{n_k}, a_{j(n_k)} + v_{n_k}]$ pour tout $0 \leq s \leq 1$, σ_k^{p/q_k} coïncide avec f_0^{p/q_k} en dehors de

$$M_k = \left[a_{j(n_k)} - \frac{v_{n_k}}{2q_k}, a_{j(n_k)} + v_{n_k} - \frac{v_{n_k}}{2q_k}\right].$$

D'autre part, pour $x \in J_k$,

$$\begin{aligned}
\sigma_k^{1/q_k}(x) &= g_k^{-1} \circ f_0^{1/q_k} \circ g_k(x) \\
&= g_k^{-1}\left(g_k(x) - \frac{v_{n_k}}{q_k}\right) \\
&= g_k^{-1}\left(x + \gamma_k(x) - \frac{v_{n_k}}{q_k}\right) \quad \text{par définition de } g_k \text{ sur } J_k \\
&= x - \frac{v_{n_k}}{q_k} + \gamma_k(x) \quad \text{car } x + \gamma_k(x) - \frac{v_{n_k}}{q_k} < \min(\operatorname{Supp} g_k^{-1}) \\
&= f_0^{1/q_k}(x) + \gamma_k(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme σ_k^{1/q_k} coïncide avec f_0^{1/q_k} en dehors de J_k, $\sigma_k^{1/q_k} - f_0^{1/q_k} = \gamma_k$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. De même, pour tout $0 \leq p \leq q_k$,

$$\sigma_k^{p/q_k}(x) - f_0^{p/q_k}(x) = \sum_{q=0}^{p-1} \gamma_k\left(x - \frac{qv_{n_k}}{q_k}\right) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \tag{2.11}$$

$$\text{donc } \left\|\sigma_k^{p/q_k} - f_0^{p/q_k}\right\|_m = \|\gamma_k\|_m \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Or, dans la région M_k où σ_k^{p/q_k} et f_0^{p/q_k} diffèrent pour $0 \leq p \leq q_k$, le difféomorphisme h_{k-1} vaut l'identité puisque $n_k > n_l$ pour tout $l < k$ et

$$\operatorname{Supp} h_{k-1} \subset \bigcup_{l \leq k-1} \operatorname{Supp} g_l \subset \left[a_{j(n_{k-1})} - \frac{v_{n_{k-1}}}{2q_{k-1}}, +\infty \right[.$$

Par conséquent, pour $0 \leq p \leq q_k$, les relations

$$f_k^{p/q_k} = h_{k-1}^{-1} \circ \sigma_k^{p/q_k} \circ h_{k-1}$$

et

$$f_{k-1}^{p/q_k} = h_{k-1}^{-1} \circ f_0^{p/q_k} \circ h_{k-1}$$

donnent :

$$f_k^{p/q_k} - f_{k-1}^{p/q_k} = \begin{cases} \sigma_k^{p/q_k} - f_0^{p/q_k} & \text{sur } M_k \\ 0 \quad \text{en dehors.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Ainsi, pour $0 \leq p \leq q_k$ et $0 \leq m \leq k$, le choix de n_k (2.7) garantit :

$$\begin{aligned} \left| D^m \left(f_k^{p/q_k} - f_{k-1}^{p/q_k} \right) \right| \leq \left\| \sigma_k^{p/q_k} - f_0^{p/q_k} \right\|_m &= \left\| \gamma_k \right\|_m \\ &\leq \left\| \gamma_k \right\|_k \leq 2^{-k-4}, \end{aligned}$$

et donc

$$\left\| f_k^t - f_{k-1}^t \right\|_k \leq 2^{-k-4} \quad \text{pour tout} \quad t \in \frac{1}{q_k}\mathbb{Z} \cap [0,1].$$

Soit maintenant T_k un sous-ensemble de $\frac{1}{q_k}\mathbb{Z} \cap I_{k-1}$ avec exactement deux points dans chacune des 2^{k-1} composantes connexes de I_{k-1} (on rappelle que q_k a été choisi de sorte que de tels points existent). Les champs ν_k et ν_{k-1} étant lisses sur $\mathbb{R}_+$, il existe un voisinage compact I_k de T_k dans I_{k-1} formé de 2^k segments tel que

$$\left\| \left(f_k^t - f_{k-1}^t \right) |_{[0,3]} \right\|_k \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout} \quad t \in I_k \cup \{1\}. \tag{2.13}$$

Pour avoir l'estimation (ii$_k$), il suffit alors de vérifier que pour tout $t \in [0,1]$, l'application $f_k^t - f_{k-1}^t$ est 1-périodique sur $[2, +\infty[$, ou encore que pour tout $l \leq k$, f_l^t commute à la translation de 1 sur $[2, +\infty[$. C'est bien le cas car

$$f_l^t = h_l^{-1} \circ f_0^t \circ h_l,$$

h_l commute à la translation de 1 sur $[1, +\infty[$ et f_0^t coïncide avec la translation de $-t$ sur $[2, +\infty[$. Ceci conclut la preuve de (ii$_k$) et donc du lemme 2.5. □

Proposition 2.6. *Pour de tels choix de q_k, n_k et I_k, les éléments irrationnels de $K = \bigcap_{k \geq 1} I_k$ sont des nombres de Liouville.*

On renvoie à la section 2.2 pour la preuve de cette proposition.

2.1.4 Le champ de vecteurs limite

Lemme 2.7. *Les champs de vecteurs ν_k, $k \geq 1$, du lemme 2.5 convergent en topologie $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ vers un champ de vecteurs ν satisfaisant toutes les propriétés de la proposition 2.2 avec $K = \bigcap_{k\geq 1} I_k$.*

Démonstration. La convergence $\mathcal{C}^1$ des champs de vecteurs ν_k découle directement des estimations (i_k) du lemme 2.5.

Les flots f_k^t de ces champs de vecteurs convergent donc en topologie $\mathcal{C}^1$ vers le flot f^t du champ limite ν. De plus, l'estimation (ii_k) du lemme 2.5 montre que pour tout $t \in K \cup \{1\}$, la suite f_k^t converge en fait en topologie $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, f^t est lisse pour tout $t \in K \cup \{1\}$, et donc pour tout $t \in \mathbb{Z} \oplus \sum_{\tau\in K} \tau\mathbb{Z}$. Chaque I_k étant par construction un compact composé de 2^k segments, deux dans chaque composante de I_{k-1}, l'intersection $K = \cap I_k$ est bien un ensemble de Cantor.

Il ne reste plus qu'à prouver que $f^{1/2}$ n'est pas $\mathcal{C}^2$ en 0, ou encore que $Lf^{1/2}$ n'est pas continue en 0. Pour cela, on calcule $Lf^{1/2}$ aux points $b_{i(n_l)}$, $l \in \mathbb{N}$. Le champ ν étant invariant par son flot,

$$Df^t = \frac{\nu \circ f^t}{\nu} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui entraîne

$$Lf^t = \frac{D\nu \circ f^t - D\nu}{\nu}.$$

En particulier,

$$Lf^{1/2}(b_{i(n_l)}) = -\frac{D\nu(f^{1/2}(b_{i(n_l)})) - D\nu(b_{i(n_l)})}{u_{n_l}}.$$

Or pour tout k,

$$\begin{aligned} f_k^{1/2}(b_{i(n_l)}) &= h_k^{-1} \circ f_0^{1/2} \circ h_k(b_{i(n_l)}) \\ &= h_k^{-1} \circ f_0^{1/2}(b_{i(n_l)}) \quad \text{d'après le lemme 2.4,} \\ &= h_k^{-1} \circ (a_{i(n_l)}) = a_{i(n_l)} \quad \text{toujours d'après 2.4,} \end{aligned}$$

donc $f^{1/2}(b_{i(n_l)}) = \lim_k f_k^{1/2}(b_{i(n_l)}) = a_{i(n_l)}$. De plus, $\nu_k = h_k^*\nu_0$ pour tout k, donc

$$D\nu_k = D\nu_0 \circ h_k - (\nu_0 \circ h_k)\frac{Lh_k}{Dh_k},$$

ce qui donne pour $k \geq l$, d'après les points 2 et 3 du lemme 2.4,

$$D\nu_k(a_{i(n_l)}) = D\nu_0(a_{i(n_l)}) - \nu_0(a_{i(n_l)})Lh_k(a_{i(n_l)}) = \sum_{m=l}^{k} \frac{w_{n_m} q_m^2}{v_{n_m}}, \tag{2.14}$$

et d'après le point 1 du même lemme,

$$D\nu_k(b_{i(n_l)}) = D\nu_0(b_{i(n_l)}) - \frac{Lh_k}{Dh_k}(b_{i(n_l)})\nu_0(b_{i(n_l)}) = 0 - 0 = 0. \tag{2.15}$$

Remarque 2.8. Notons pour plus tard que, ν_k étant lisse, il existe $c \in [a_{i(n_l)}, b_{i(n_l)}]$ tel que

$$\frac{D\nu_k(b_{i(n_l)}) - D\nu_k(a_{i(n_l)})}{b_{i(n_l)} - a_{i(n_l)}} = D^2\nu_k(c), \text{ de sorte que } |D^2\nu_k(c)| > \frac{2w_{n_l}q_l^2}{v_{n_l}u_{n_l}}.$$

La suite ν_k converge vers ν en topologie $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc, en faisant tendre k vers l'infini dans (2.14) et (2.15), on obtient :

$$D\nu(a_{i(n_l)}) = \sum_{m \geq l} \frac{w_{n_m}q_m^2}{v_{n_m}} \quad \text{et} \quad D\nu(b_{i(n_l)}) = 0.$$

Finalement,

$$Lf^{1/2}(b_{i(n_l)}) = -\sum_{m \geq l} \frac{w_{n_m}q_m^2}{v_{n_m}u_{n_l}} < -\frac{w_{n_l}q_l^2}{v_{n_l}u_{n_l}} \to -\infty \quad [l \to \infty] \; ;$$

$f^{1/2}$ n'est donc pas $\mathcal{C}^2$ en 0. □

2.2 Nature arithmétique des temps réguliers

Dans cette section, on démontre la proposition 2.6, à savoir que les éléments irrationnels du Cantor K construit dans la preuve de la proposition 2.2 sont des nombres de Liouville. On rappelle qu'un *nombre de Liouville* est un nombre irrationnel τ qu'on peut approcher par une suite de rationnels p_k/q_k vérifiant

$$\left|\tau - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^k} \quad \text{pour tout } k.$$

Revenons un instant sur le choix des paramètres q_k et n_k dans la preuve du lemme 2.5. À l'étape k, une fois q_k fixé, on doit choisir n_k d'autant plus grand que q_k est grand d'après (2.7). Mais plus n_k est grand, plus $\|\nu_k\|_2$ est grand (cf. remarque 2.8), et donc plus le voisinage I_k de $\frac{1}{q_k}\mathbb{Z} \cap]0,1[$ satisfaisant

$$\left\|f_k^t - f_{k-1}^t\right\|_k \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout } t \in I_k$$

est petit (cf. (2.13)). À l'étape suivante, on doit alors choisir q_{k+1} très grand pour que chaque composante connexe de I_k contienne deux éléments de $\frac{1}{q_{k+1}}\mathbb{Z}$. C'est ce phénomène qui va contraindre la nature arithmétique des éléments de K, qui s'obtiennent comme limites de rationnels p_k/q_k, $p_k \in \mathbb{N}$. La proposition 2.6 découle du lemme suivant.

Lemme 2.9. *Pour tout k impair assez grand, les composantes connexes de I_k sont de diamètre inférieur à $1/q_k^{k+3}$.*

Démonstration de 2.6 à partir de 2.9. Soit $\tau \in K$. Pour tout $k \geq 1$, il existe un rationnel p_k/q_k appartenant à la même composante connexe de I_k que τ. Pour k impair assez grand, le lemme 2.9 entraîne alors

$$\left|\tau - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \frac{1}{q_k^{k+3}}.$$

Autrement dit, τ est un nombre de Liouville. □

Démonstration de 2.9. Soit $k > 1$ impair, p_k/q_k un élément de I_k et $0 < t < 1/40q_k$ tel que $\left[\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k}{q_k} + t\right] \subset I_k$. On va montrer que pour k assez grand, ceci entraîne nécessairement que $t < 1/2q_k^{k+3}$. Le cas $t < 0$ étant similaire, le lemme 2.9 en découlera. On pose $s = t + p_k/q_k$. On rappelle que σ_k^s désigne le flot du champ $g_k^*\nu_0$ au temps s, de sorte que

$$\sigma_k^s = g_k^{-1} \circ f_0^s \circ g_k.$$

Affirmation 1.

$$D^k g_k - (D^k g_k \circ \sigma_k^s)(D\sigma_k^s)^k = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_k \\ |\pi| < k}} \left(D^{|\pi|} g_k \circ \sigma_k^s \prod_{B \in \pi} D^{|B|} \sigma_k^s \right).$$

On rappelle que Π_k désigne l'ensemble des partitions de $\{1, \cdots, k\}$ et $|X|$ le cardinal de l'ensemble fini X.

Démonstration. Sur $[a_{i(n_k)+1}, a_{i(n_k)-1}]$ (qui est stable par g_k), f_0^s coïncide avec la translation de $-su_{n_k}$. La relation

$$f_0^s \circ g_k = g_k \circ \sigma_k^s$$

se réécrit donc

$$g_k - su_{n_k} = g_k \circ \sigma_k^s.$$

On lui applique la formule de Faà di Bruno (cf. (2)) :

$$D^k g_k = \sum_{\pi \in \Pi_k} \left(D^{|\pi|} g_k \circ \sigma_k^s \prod_{B \in \pi} D^{|B|} \sigma_k^s \right).$$

En isolant l'unique partition de $\{1, \cdots, k\}$ en k blocs de taille 1, on obtient l'égalité voulue. □

Pour démontrer le lemme 2.9, on va appliquer cette formule en $a_{i(n_k)}$. On cherche donc à calculer chacun des termes.

Affirmation 2.

$$D^k g_k(a_{i(n_k)}) = 0.$$

Démonstration. Par définition de $g_k = g_{q_k,n_k}$ (2.2),

$$g_k = \mathrm{Id} + \gamma_k \quad \text{sur } J_k = \left[a_{j(n_k)} - \frac{v_{n_k}}{2q_k}, a_{j(n_k)} + \frac{v_{n_k}}{2q_k}\right],$$

et si on note $p = j(n_k) - i(n_k)$,

$$g_k = f_0^{-p} \circ (\mathrm{Id} + \gamma_k) \circ f_0^p \quad \text{sur } f_0^{-p}(J_k).$$

Mais sur $f_0^{-p}(J_k) \subset H_{n_k}$, f_0^p coïncide avec une application affine de pente v_{n_k}/u_{n_k}. En effet, pour tout x dans cet intervalle,

$$Df_0^p(x) = \frac{\nu_0(f_0^p(x))}{\nu_0(x)} = \frac{-v_{n_k}}{-u_{n_k}}.$$

Donc $f_0^{-p}(J_k) = \left[a_{i(n_k)} - \frac{u_{n_k}}{2q_k}, a_{i(n_k)} + \frac{u_{n_k}}{2q_k}\right]$ et sur cet intervalle, pour tout $l \geq 1$,

$$D^l g_k = \left(\frac{u_{n_k}}{v_{n_k}}\right)^{1-l} D^l(\mathrm{Id} + \gamma_k) \circ f_0^p.$$

En particulier, comme $k > 1$,

$$D^k g_k(a_{i(n_k)}) = \left(\frac{u_{n_k}}{v_{n_k}}\right)^{1-k} D^k \gamma_k(a_{j(n_k)}).$$

Or

$$\gamma_k(x) = w_{n_k} \gamma\left(\frac{q_k}{v_{n_k}}(x - a_{j(n_k)})\right),$$

donc

$$D^l \gamma_k(x) = \frac{w_{n_k} q_k^l}{v_{n_k}^l} D^l \gamma\left(\frac{q_k}{v_{n_k}}(x - a_{j(n_k)})\right), \tag{2.16}$$

avec $\gamma = 1 - \cos$ au voisinage de 0. Comme k est impair, $D^k\gamma(0) = 0$ donc $D^k\gamma_k(a_{j(n_k)}) = 0$ et $D^k g_k(a_{i(n_k)}) = 0$. □

Affirmation 3. Pour tout $l \leq k$,

$$D^l g_k(\sigma_k^s(a_{i(n_k)})) = \frac{w_{n_k} q_k^l}{v_{n_k} u_{n_k}^{l-1}} D^l(1 - \cos)\left(\frac{q_k}{u_{n_k}}(\sigma_k^s - f_0^{p_k/q_k})(a_{i(n_k)})\right)$$
$$(+1 \text{ si} l = 1)$$

Démonstration. D'après l'expression (2.3), comme $0 \leq p_k \leq q_k$,

$$g_k = \mathrm{Id} + \gamma_k \circ \left(\mathrm{Id} - \frac{q_k - p_k}{q_k} v_{n_k}\right) \quad \text{sur } f_0^{-1+p_k/q_k}(J_k).$$

Comme dans la preuve de l'affirmation 2, on pose $p = j(n_k) - i(n_k)$ et on montre que sur $f_0^{-(p-1)}\left(f_0^{-1+p_k/q_k}(J_k)\right) = f_0^{-(p-p_k/q_k)}(J_k)$,

$$\begin{aligned} D^l g_k &= \left(\frac{u_{n_k}}{v_{n_k}}\right)^{1-l} D^l\left(\mathrm{Id} + \gamma_k \circ \left(\mathrm{Id} - \frac{q_k - p_k}{q_k} v_{n_k}\right)\right) \circ f_0^{p-1} \\ &= \left(\frac{u_{n_k}}{v_{n_k}}\right)^{1-l} D^l(\mathrm{Id} + \gamma_k) \circ f_0^{p-p_k/q_k} \quad \text{pour } l \geq 1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Comme précédemment, $f_0^{p-p_k/q_k}$ est affine de pente v_{n_k}/u_{n_k} sur $f_0^{-(p-p_k/q_k)}(J_k)$ et envoie $f_0^{p_k/q_k}(a_{i(n_k)})$ sur $a_{j(n_k)}$. Autrement dit,

$$f_0^{p-p_k/q_k}(x) = \frac{v_{n_k}}{u_{n_k}}\left(x - f_0^{p_k/q_k}(a_{i(n_k)})\right) + a_j(n_k) \text{ pour tout } \ x \in f_0^{-(p-p_k/q_k)}(J_k).$$

Ainsi, sur $f_0^{-(p-p_k/q_k)}(J_k)$, (2.16) et (2.17) donnent :

$$D^l g_k(x) = \left(\frac{u_{n_k}}{v_{n_k}}\right)^{1-l} \frac{w_{n_k} q_k^l}{v_{n_k}^l} D^l \gamma\left(\frac{q_k}{u_{n_k}}\left(x - f_0^{p_k/q_k}(a_{i(n_k)})\right)\right) \tag{2.18}$$
$$(+1 \text{ si} l = 1)\,.$$

Vérifions maintenant que

$$\frac{q_k}{u_{n_k}}\left|\sigma_k^s(a_{i(n_k)}) - f_0^{p_k/q_k}(a_{i(n_k)})\right| \leq \frac{1}{20},$$

afin de remplacer $D^l\gamma$ par $D^l(1-\cos)$ dans l'expression (2.18) pour $x = \sigma_k^s(a_{i(n_k)})$, et de démontrer ainsi l'affirmation 3. Pour cela, notons que

$$f_0^{-p_k/q_k}(a_{i(n_k)}) = g_k^{-1} \circ f_0^{-p_k/q_k} \circ g_k(a_{i(n_k)}) = \sigma_k^{-p_k/q_k}(a_{i(n_k)})$$

car, par définition, g_k fixe tous les points de l'orbite de $a_{j(n_k)}$ par f_0^{1/q_k}. Il s'agit donc en fait de montrer que

$$\left|\sigma_k^s(a_{i(n_k)}) - \sigma_k^{p_k/q_k}(a_{i(n_k)})\right| \leq \frac{u_{n_k}}{20 q_k}.$$

Pour cela, on rappelle que σ_k^u désigne le flot de $g_k^*\nu_0$ au temps u, et que n_k a été choisi de sorte que $|g_k^*\nu_0 - \nu_0| \leq 2^{-k-3}|\nu_0|$ sur $\mathbb{R}_+$ (cf. (2.9)). Donc, sur $\left[a_{i(n_k)+1}, a_{i(n_k)-1}\right]$,

$$|g_k^*\nu_0| \leq 2u_{n_k},$$

et donc toujours sur cet intervalle,

$$\left|\sigma_k^s(x) - \sigma_k^{p_k/q_k}(x)\right| \leq 2u_{n_k}\left|s - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{u_{n_k}}{20 q_k}$$

par hypothèse sur $t = s - p_k/q_k$. □

Affirmation 4.

$$\|\sigma_k^s - f_0^s\|_k < 2^{-k} \quad \text{sur} \quad [a_{i(n_k)+1}, a_{i(n_k)-1}].$$

Démonstration. On rappelle que

$$f_{k-1}^s = h_{k-1}^{-1} \circ f_0^s \circ h_{k-1} \quad \text{et} \quad f_k^s = h_{k-1}^{-1} \circ \sigma_k^s \circ h_{k-1}.$$

Sur $[a_{i(n_k)+2}, a_{i(n_k)-2}] \subset H_{n_k}$, $h_{k-1} = \mathrm{Id}$, et sur $[a_{i(n_k)+1}, a_{i(n_k)-1}]$, f_0^s coïncide avec la translation de $-su_{n_k}$, donc sur ce même intervalle, pour tout $l \geq 0$,

$$D^l(f_k^s - f_{k-1}^s) = D^l(\sigma_k^s - f_0^s).$$

Or $s \in I_k$ donc $\left\|f_k^s - f_{k-1}^s\right\|_k < 2^{-k}$. □

D'après l'affirmation 4, $|D\sigma_k^s - Df_0^s| \leq 2^{-k}$ sur $[a_{i(n_k)+1}, a_{i(n_k)-1}]$ où f_0^{-s} est une translation, donc

$$\frac{1}{(D\sigma_k^s)^k} \leq \left(\frac{1}{1-2^{-k}}\right)^k \leq 2 \text{ pour } k \text{ assez grand.}$$

La formule de l'affirmation 1 calculée en $a_{i(n_k)}$ donne alors, en utilisant les affirmations 2 et 3 et en remplaçant $|D^k(1-\cos)|$ par $|\sin|$, k étant impair :

$$\frac{w_{n_k} q_k^k}{v_{n_k} u_{n_k}^{k-1}} \left|\sin\left(\frac{q_k}{u_{n_k}}(\sigma_k^s - f_0^{p_k/q_k})(a_{i(n_k)})\right)\right| \leq 2 \sum_{\substack{\pi \in \Pi_k \\ |\pi| < k}} \frac{w_{n_k} q_k^l}{v_{n_k} u_{n_k}^{l-1}} \prod_{B \in \pi} |D^{|B|}\sigma_k^s(a_{i(n_k)})|.$$

Pour toute partition π de $\{1, \cdots, k\}$ en moins de k blocs, au moins un bloc a plus de deux éléments, donc d'après l'affirmation 4, en se souvenant que $Df_0^s \equiv 1$ sur $[a_{i(n_k)+1}, a_{i(n_k)-1}]$,

$$\prod_{B \in \pi} |D^{|B|}\sigma_k^s(a_{i(n_k)})| < 2^{-k}(1+2^{-k})^{k-2} \leq 2^{-k+1}.$$

pour tout $\pi \in \Pi_k$ satisfaisant $|\pi| < k$. Finalement,

$$\left|\sin\left(\frac{q_k}{u_{n_k}}(\sigma_k^s - f_0^{p_k/q_k})(a_{i(n_k)})\right)\right| \leq 2^{-k+2} u_{n_k} q_k^{-1} |\Pi_k|.$$

Sur $[-1/20, 1/20]$, $|\sin x| \geq |x|/2$ donc

$$\left|(\sigma_k^s - f_0^{p_k/q_k})(a_{i(n_k)})\right| \leq 2^{-k+3} u_{n_k}^2 q_k^{-2} |\Pi_k|.$$

Cette fois-ci on utilise l'inégalité (2.8) dans l'autre sens pour montrer que

$$|g_k^* \nu_0| \geq (1 - 2^{-k-2})|\nu_0| > \frac{u_{n_k}}{2} \quad \text{sur} \quad \left[a_{i(n_k)+1}, a_{i(n_k)-1}\right]$$

donc

$$\left|(\sigma_k^s - \sigma_k^{p_k/q_k})(a_{i(n_k)})\right| > \frac{u_{n_k}}{2}\left|s - \frac{p_k}{q_k}\right|$$

et

$$t = \left|s - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq 2^{-k+4} u_{n_k} q_k^{-2} |\Pi_k|.$$

On voit facilement que $|\Pi_k| = o(2^{k^3})$ donc

$$u_{n_k}|\Pi_k| = o(w_{n_k})$$

et le choix de n_k (2.7) entraîne alors

$$t = \left|s - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq 2^{-k+4} w_{n_k} q_k^{-2} \leq q_k^{-k-3}.$$

□

2.3 Généricité des temps admissibles

On rappelle que $\mathscr{A}$ désigne l'ensemble des $\tau \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe un champ de vecteurs ν de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ dont le flot est lisse aux temps 1 et τ mais pas $\mathcal{C}^2$ pour certains autres temps. L'ensemble $\mathscr{A}$ est clairement stable par translations entières. D'après Sergeraert [Se, théorème 4.1] (cf. section 2.4), il contient tous les rationnels. La proposition 2.2 montre qu'il contient également des irrationnels (en fait des nombres de Liouville d'après la section 2.2). On ne sait malheureusement pas si cet ensemble contient des nombres diophantiens, ou s'il contient tous les nombres de Liouville, mais on peut montrer qu'il est tout de même très gros :

Proposition 2.10. *L'ensemble $\mathscr{A}$ est résiduel.*

La preuve de ce résultat, qui occupe tout le reste de la section, consiste à améliorer le lemme central 2.5 de la démonstration de la proposition 2.2, en utilisant encore les techniques d'Anosov–Katok. On répète la construction de la section 2.1 jusqu'au lemme 2.4 inclus. On remplace alors l'énoncé de 2.5 par :

Lemme 2.11. *Il existe deux familles $(q_{k,i})_{k,i\in\mathbb{N}^*}$ et $(n_{k,i})_{k,i\in\mathbb{N}^*}$ et une suite décroissante d'ouverts denses $U_k = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}^*} U_k^i \subset]0,1[$ tels que pour chaque composante connexe $U_k^{i_k}$ de U_k avec*

$$U_k^{i_k} \subset U_{k-1}^{i_{k-1}} \subset \cdots \subset U_1^{i_1},$$

les difféomorphismes

$$h_k = g_{n_k,q_k} \circ \cdots \circ g_{n_1,q_1} \quad \text{où} \quad n_l = n_{l,i_l} \text{ et } q_l = q_{l,i_l},$$

les champs de vecteurs $\nu_k = h_k^*\nu_0$ et leurs flots f_k^t satisfont les estimations

$$\left\|\nu_k - \nu_{k-1}\right\|_1 \leq 2^{-k}, \tag{i$_k$}$$

$$\left\|f_k^t - f_{k-1}^t\right\|_k \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout} \quad t \in U_k^{i_k} \cup \{1\}, \tag{ii$_k$}$$

On remplace alors le lemme 2.7 par :

Lemme 2.12. *Soit $\tau \in \bigcap_{k\geq 1} U_k$ et $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'unique suite telle que $\tau \in \bigcap_{k\geq 1} U_k^{i_k}$. Alors les champs ν_k définis dans le lemme 2.11 convergent en topologie $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ vers un champ de vecteurs ν dont le flot au temps t est lisse pour $t = 1$ et τ, mais pas $\mathcal{C}^2$ pour $t = 1/2$.*

La preuve de 2.12 à partir de 2.11 est strictement identique à celle de 2.7 à partir de 2.5. L'intersection des ouverts denses U_k est résiduelle dans $]0, 1[$ et incluse dans $\mathscr{A}$ d'après 2.12. La proposition 2.10 en résulte puisque $\mathscr{A}$ est stable par translation entière. Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme 2.11.

Démonstration de 2.11. On procède par récurrence sur k. Pour $k \geq 1$, soient $(q_{l,i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(n_{l,i})_{i\in\mathbb{N}^*}$, $l \leq k-1$, des familles d'entiers, et $U_l = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}^*} U_l^i$, $l \leq k-1$, des ouverts emboîtés denses dans $]0, 1[$ tels que, pour chaque composante connexe $U_l^{i_l}$ de U_l, $l \leq k-1$, les estimations (i_l) et (ii_l) soient satisfaites. On va répéter la construction qui suit pour chaque composante $U = U_{k-1}^{i_{k-1}} \subset \cdots \subset U_1^{i_1}$ de U_{k-1} pour construire les composantes connexes de $U_k \cap U$. On pose

$$h_{k-1} = g_{n_{k-1},q_{k-1}} \circ \cdots \circ g_{n_1,q_1} \quad \text{où} \quad n_l = n_{l,i_l} \text{ et } q_l = q_{l,i_l}.$$

Soit $q_1(U) > q_{k-1}$ un nombre impair tel que $\frac{1}{q_1(U)}\mathbb{Z} \cap U$ a au moins deux éléments. On choisit $n_1(U) > n_{k-1}$ satisfaisant :

$$\left\|\gamma_{q_1(U),n_1(U)}\right\|_{k+1} \leq \frac{2^{-k-4}(\inf|Dh_{k-1}|)^2}{\left\|\nu_0\right\|_1 \|h_{k-1}\|_2}, \tag{2.19}$$

(cf (2.7)). On montre exactement comme dans la preuve du lemme 2.5 que, pour $h_k = g_{n_1(U),q_1(U)} \circ h_{k-1}$, le champ $\nu_k = h_k^*\nu_0$ et son flot f_k^t satisfont les estimations (i_k) et (ii_k) où $U_k^{i_k}$ est remplacé par un voisinage suffisamment petit de $\frac{1}{q_1(U)}\mathbb{Z} \cap U$ dans U, qu'on note $V_1(U)$.

Pour tout $j \geq 1$, on pose $q_j(U) = q_1(U) + 2j$, on choisit $n_j(U)$ satisfaisant (2.19) en remplaçant $n_1(U)$ et $q_1(U)$ par $n_j(U)$ et $q_j(U)$, et on définit $V_j(U)$ de la même façon que $V_1(U)$, en imposant de plus que les $V_j(U)$ soient deux à deux disjoints.

Par construction, l'ouvert $V(U) = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} V_j(U)$ est dense dans $U = U_{k-1}^{i_{k-1}}$. L'ouvert

$$U_k = \bigsqcup_{i_{k-1}\in\mathbb{N}^*} V(U_{k-1}^{i_{k-1}}) \quad \subset \quad U_{k-1}$$

est donc dense dans U_{k-1}, et donc dans $]0, 1[$. On note $U_k^{i_k}$, $i_k \in \mathbb{N}^*$, les composantes connexes de U_k, qui ne sont autre que les $V_j(U_{k-1}^{i_{k-1}})$, i_{k-1}, $j \in \mathbb{N}^*$. On définit n_{k,i_k} et q_{k,i_k} par

$$n_{k,i_k} = n_j(U_{k-1}^{i_{k-1}}) \quad \text{et} \quad q_{k,i_k} = q_j(U_{k-1}^{i_{k-1}}) \quad \text{si} \quad U_k^{i_k} = V_j(U_{k-1}^{i_{k-1}}).$$

Les estimations vérifiées sur les $V_j(U)$ sont exactement les estimations voulues sur les composantes connexes $U_k^{i_k}$ de U_k pour conclure la récurrence. $\square$

2.4 Retour sur l'exemple de Sergeraert

On explique ici comment se situe l'exemple de Sergeraert [Se, §4] par rapport à la section 2.1 et pourquoi dans sa construction, le centralisateur $\mathcal{Z}_f^2$ est réduit au groupe des itérés. Observons d'abord que le difféomorphisme qu'il construit n'est autre que celui obtenu en prenant $q_k = 1$ et $n_k = k$ dans la construction de la section 2.1 (et en démarrant au cran k_0, pour un k_0 assez grand). En effet, pour un tel choix de paramètres, $w_{n_k} q_k v_{n_k}^{-1} \|\gamma\|_1 < 1$ donc $g_k = g_{q_k,n_k}$ et $h_k = g_k \circ \cdots \circ g_1$ sont des difféomorphismes, et on peut définir $\nu_k = h_k^* \nu_0$ et son flot $f_k^t = h_k^{-1} \circ f_0^t \circ h_k$. Les relations (2.11) et (2.12) deviennent alors :

$$f_k - f_{k-1} = \gamma_k.$$

On vérifie facilement que pour ce choix de paramètres, $\|\gamma_k\|_k \leq 2^{-k-4}$. La suite f_k converge donc en topologie $\mathcal{C}^\infty$ vers

$$f = f_0 + \sum_{k \geq k_0} w_k \gamma \left(\frac{1}{v_k} (\mathrm{Id} - a_{j(k)}) \right), \tag{2.20}$$

qui est exactement le difféomorphisme construit par Sergeraert dans [Se], à ceci près qu'on a choisi la fonction γ égale à $1-\cos$ au voisinage de 0 (pour faciliter la démonstration de la proposition 2.6) alors que Sergeraert l'a prise égale à $x^2/2$. En ce sens, notre construction est bien une généralisation de celle de Sergeraert.

Proposition 2.13. *Le centralisateur $\mathcal{Z}_f^2$ est réduit au groupe cyclique infini engendré par f.*

Dans [Se, §4], le théorème 4.1 affirme seulement que le centralisateur $\mathcal{Z}_f^2$ est strictement inclus dans le centralisateur $\mathcal{Z}_f^1$. Néanmoins, tous les éléments de la démonstration de 2.13 sont déjà présents dans l'article de Sergeraert, on ne fait ici que les expliciter.

Démonstration. Soit ν le champ de Szekeres de f (cf. 1.3). D'après le corollaire 1.6, le centralisateur $\mathcal{C}^1$ de f coïncide avec le flot $\{f^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de ν. Il s'agit donc de montrer que pour tout temps t non entier, f^t n'est pas $\mathcal{C}^2$. Il suffit en fait de le prouver pour $t \in]1/4, 3/4[$. En effet, l'ensemble des temps non $\mathcal{C}^2$ étant clairement symétrique par rapport à 0 et stable par translation et division entière, il contiendra alors

$$\bigcup_{n\geq 1} \left]\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right[= \left]0, \frac{3}{4}\right[\quad \text{et} \quad \left]\frac{1}{4}, 1\right[,$$

donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tout entier.

L'expression explicite du champ de Szekeres d'un difféomorphisme en fonction de ce difféomorphisme (cf. proposition 1.3) et la formule (2.20) définissant f permettent d'obtenir le résultat suivant.

Lemme 2.14. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $l \geq k_0$,*

$$\nu(a_i) = \nu_0(a_i) \quad \textit{et} \quad D\nu(a_{i(l)}) = \sum_{m \geq l} \frac{w_m}{v_m}.$$

Soit $n > 0$ fixé, $t_- = \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$ et $t_+ = \frac{3}{4} - \frac{1}{n}$. On pose

$$c_i^0 = f_0^{t_+}(a_i), \quad d_i^0 = f_0^{t_-}(a_i),$$

$$c_i = f^{t_+}(a_i) \quad \text{et} \quad d_i = f^{t_-}(a_i),$$

de sorte que

$$c_{i+1} = f(c_i) \quad \text{et} \quad d_{i+1} = f(d_i).$$

En particulier, comme le flot f_0^s de ν_0 au temps $s \in [0,1]$ coïncide avec la translation de $-su_l$ sur le plateau H_l,

$$c_{i(l)}^0 = a_{i(l)} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{n}\right) u_l \quad \text{et} \quad d_{i(l)}^0 = a_{i(l)} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\right) u_l. \tag{2.21}$$

Lemme 2.15. *Pour l assez grand,*

$$|c_{i(l)} - c_{i(l)}^0| \leq \frac{u_l}{n} \quad \textit{et} \quad |d_{i(l)} - d_{i(l)}^0| \leq \frac{u_l}{n}$$

Preuve du lemme 2.15. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f^t(x) - x \sim t\nu(x) \quad \text{quand} \quad x \to 0 \quad \text{d'après (3)}$$

donc

$$\frac{f^t(a_i) - a_i}{\nu(a_i)} \to t \quad \text{et} \quad \frac{f_0^t(a_i) - a_i}{\nu_0(a_i)} \to t \quad \text{quand} \quad i \to \infty.$$

D'après le lemme 2.14, ceci entraîne

$$\frac{f^t(a_i) - f_0^t(a_i)}{\nu_0(a_i)} \to 0.$$

Comme $\nu_0(a_{i(l)}) = -u_l$, le lemme 2.15 en résulte, en prenant $t = t_+$ ou t_- et $i = i(l)$ avec l assez grand. □

Lemme 2.16. *Pour l assez grand, pour tout $t \in [t_-, t_+]$,*

$$Lf^t(a_{i(l)}) = -\frac{D\nu(a_{i(l)})}{u_l}.$$

Preuve du lemme 2.16. En dérivant la relation $\nu \circ f^t = Df^t \times \nu$, qui exprime l'invariance de ν par son flot, on obtient

$$Lf^t = \frac{D\nu \circ f^t - D\nu}{\nu}$$

donc

$$Lf^t(a_{i(l)}) = -\frac{D\nu(f^t(a_{i(l)}) - D\nu(a_{i(l)})}{u_l}.$$

Il s'agit donc de vérifier que $D\nu$ est nul sur $[f^{t_+}(a_{i(l)}), f^{t_-}(a_{i(l)})] = [c_{i(l)}, d_{i(l)}]$ pour l assez grand, ou encore que $\nu = \nu_0$ sur cet intervalle (car ν_0 y est constant égal à $-u_l$). Pour cela, il suffit de voir que $\nu_k = g_k^*\nu_{k-1}$ et ν_{k-1} coïncident sur cet intervalle pour tout k, ou encore que g_k y vaut l'identité. D'après (2.4), cela revient à vérifier que $[c_{i(l)}, d_{i(l)}] \subset \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} f_0^p(N_{1,k})$ pour tout k, où $N_{1,k} = N_{q,n}$ avec $q = 1$ et $n = k$, c'est-à-dire

$$N_{1,k} = \left[a_{j(k)} + \frac{v_k}{4}, a_{j(k)} + \frac{3v_k}{4}\right].$$

C'est bien le cas :

$$\begin{aligned}
[c_{i(l)}, d_{i(l)}] &\subset \left[c^0_{i(l)} - \frac{u_l}{n}, d^0_{i(l)} + \frac{u_l}{n}\right] \quad \text{d'après le lemme 2.15 ;}\\
&= \left[a_{i(l)} - \frac{3u_l}{4}, a_{i(l)} - \frac{u_l}{4}\right] \quad \text{d'après (2.21) ;}\\
&= f_0^{i(l)-j(k)}\left(\left[a_{j(k)} - \frac{3v_k}{4}, a_{j(k)} - \frac{v_k}{4}\right]\right)\\
&\subset f_0^{i(l)-j(k)+1}(N_{1,k}).
\end{aligned}$$

□

Les lemmes 2.14 et 2.16 montrent que pour tout $t \in \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{n}; \frac{3}{4} - \frac{1}{n}\right]$,

$$Lf^t(a_{j(l)}) < -\frac{w_l}{v_l u_l} \to -\infty \quad \text{quand} \quad l \to \infty.$$

Ainsi, pour tout $t \in \left]\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{n}; \frac{3}{4} - \frac{1}{n}\right]$, f^t n'est pas $\mathcal{C}^2$. □

Chapitre 3

Chemins de difféomorphismes commutant

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Toute représentation de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ peut être reliée à la représentation triviale par un chemin continu de représentations de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{D}^1_+([0,1])$.*

Notons qu'une représentation $\mathbb{Z}^2 \to \mathcal{D}^r_+([0,1])$ n'est rien d'autre que la donnée de deux difféomorphismes $f, g \in \mathcal{D}^r_+([0,1])$ qui commutent.

3.1 Composantes rationnelles et irrationnelles

Définition 3.2. Soient $f, g \in \mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ deux difféomorphismes qui commutent et $F \subset [0,1]$ l'ensemble de leurs points fixes communs. Une composante connexe $]a,b[$ de l'ouvert $U = [0,1] \setminus F$ est dite *rationnelle* ou *irrationnelle* selon qu'il existe ou non des entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que f^p coïncide avec g^q sur $]a,b[$.

Par exemple, une composante $]a,b[$ sur laquelle f ou g induit l'identité est rationnelle car 0 et 1 sont premiers entre eux.

Lemme 3.3. *Soient $f, g \in \mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ deux difféomorphismes qui commutent, F l'ensemble de leurs points fixes communs et $]a,b[$ une composante connexe de $U = [0,1] \setminus F$.*

0. Si $f|_{]a,b[}$ n'est pas l'identité, f n'a aucun point fixe dans $]a,b[$ et définit deux champs de Szekeres, $\nu_f^{[a,b[}$ sur $[a,b[$ et $\nu_f^{]a,b]}$ sur $]a,b]$.

1. *Si la composante* $]a,b[$ *est rationnelle, il existe un difféomorphisme* $h \in \mathcal{D}^\infty_+([a,b])$ *et des entiers* $p,q \in \mathbb{Z}$ *premiers entre eux tels que* $f\mid_{[a,b]} = h^q$ *et* $g\mid_{[a,b]} = h^p$. *De plus, si* $f\mid_{[a,b]}$ *n'est pas l'identité,* $h\mid_{]a,b[}$ *coïncide avec le flot au temps* $1/q$ *de chacun des champs de Szekeres* $\nu_f^{[a,b[}$ *et* $\nu_f^{]a,b]}$.
2. *Si la composante* $]a,b[$ *est irrationnelle, il existe un champ de vecteurs* $\nu_f^{[a,b]}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *dont* $f\mid_{[a,b]}$ *est le flot au temps* 1 *et* $g\mid_{[a,b]}$ *le flot à un temps* $\tau \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Démonstration. Si f fixe un point $c \in]a,b[$, la suite $g^n(c)$, $n \in \mathbb{Z}$, reste dans $]a,b[$, est formée de points fixes de f (car f et g commutent) et tend donc en $+\infty$ et en $-\infty$ vers des points de F, à savoir (quitte à remplacer g par g^{-1}) vers a en $+\infty$ et vers b en $-\infty$. Par suite, g n'a aucun point fixe dans $]a,b[$ et le lemme de Kopell (cf. théorème 1.5) affirme que f est l'identité sur $[a,b]$. Ainsi, si f n'est pas l'identité sur $]a,b[$, elle n'y a aucun point fixe et les champs de vecteurs $\nu_f^{[a,b[}$ et $\nu_f^{]a,b]}$ sont ceux associés à f par le corollaire 1.4.

Si la composante $]a,b[$ est rationnelle, il existe des entiers $p,q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que f^p coïncide avec g^q sur $[a,b]$. En posant alors $h = (f^s g^r)\mid_{[a,b]}$ où $pr+qs=1$, $r,s \in \mathbb{Z}$, on a bien $f\mid_{[a,b]} = h^q$ et $g\mid_{[a,b]} = h^p$. Si $f\mid_{[a,b]}$ n'est pas l'identité, les restrictions de f, g et h à $[a,b[$ (resp. à $]a,b]$), d'après le corollaire 1.6, appartiennent au flot du champ de Szekeres $\nu_f^{[a,b[}$ (resp. $\nu_f^{]a,b]}$). Pour h, le temps correspondant est $1/q$ puisque $h^q = f\mid_{[a,b]}$.

Si la composante $]a,b[$ est irrationnelle, il suffit de montrer que les champs de Szekeres $\nu_f^{[a,b[}$ et $\nu_f^{]a,b]}$ coïncident sur $]a,b[$. Soient $\{f_a^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ et $\{f_b^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ leurs flots respectifs et $c \in]a,b[$ un point fixé. Les difféomorphismes $\psi_a, \psi_b \colon \mathbb{R} \to]a,b[$ définis par $\psi_a(t) = f_a^t(c)$ et $\psi_b(t) = f_b^t(c)$ conjuguent respectivement $f_a^\tau\mid_{]a,b[}$ et $f_b^\tau\mid_{]a,b[}$, $\tau \in \mathbb{R}$, à la translation $T_\tau \colon t \mapsto t+\tau$:

$$T_\tau = \psi_a^{-1} \circ f_a^\tau \circ \psi_a = \psi_b^{-1} \circ f_b^\tau \circ \psi_b.$$

En particulier,

$$T_1 = \psi_a^{-1} \circ f \circ \psi_a = \psi_b^{-1} \circ f \circ \psi_b,$$

donc

$$T_1 = (\psi_a^{-1} \circ \psi_b) \circ T_1 \circ (\psi_b^{-1} \circ \psi_a).$$

Autrement dit, $\psi_b^{-1} \circ \psi_a$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ qui commute avec la translation T_1.

D'après le corollaire 1.6, $g\mid_{[a,b[}$ (resp. $g\mid_{]a,b]}$) coïncide avec $f_a^{\tau_a}$ (resp. $f_b^{\tau_b}$) pour un certain temps τ_a (resp. τ_b). Mais alors

$$T_{\tau_a} = \psi_a^{-1} \circ g \circ \psi_a \quad \text{et} \quad T_{\tau_b} = \psi_b^{-1} \circ g \circ \psi_b$$

Donc

$$T_{\tau_a} = (\psi_a^{-1} \circ \psi_b) \circ T_{\tau_b} \circ (\psi_b^{-1} \circ \psi_a).$$

Tous ces difféomorphismes de $\mathbb{R}$ commutent à la translation de 1 donc l'invariance par conjugaison du nombre de rotation entraîne $\tau_a = \tau_b = \tau$. Ce nombre

est nécessairement irrationnel car, si $\tau = p/q$, clairement f^p coïncide avec g^q sur $]a,b[$. Le difféomorphisme $\psi_b^{-1} \circ \psi_a$, commutant à la fois avec T_1 et T_τ, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est donc nécessairement une translation. Comme il fixe l'origine par construction, c'est en fait l'identité. Ainsi, les champs $\nu_f^{[a,b[}$ et $\nu_f^{]a,b]}$ ont des flots qui coïncident sur $]a,b[$ et sont donc égaux sur $]a,b[$. □

On va voir ci-après que le type des composantes de $[0,1] \setminus F$ est en fait constant sur les composantes de $[0,1] \setminus F_0$, où F_0 est le sous-ensemble de F constitué des points fixes où f et g sont infiniment tangents à l'identité. Ceci découle d'un théorème de Takens [Ta] que nous utiliserons sous la forme suivante :

Théorème 3.4 (Takens)**.** *Soit $f \in \mathcal{D}_+^\infty(]a,b[)$ un difféomorphisme ayant un unique point fixe c dans $]a,b[$. Si f n'est pas infiniment tangent à l'identité en c, les champs $\nu_f^{]a,c]}$ et $\nu_f^{[c,b[}$ se recollent en un champ lisse sur $]a,b[$ dont f est le flot au temps 1. De plus, tout difféomorphisme lisse de $]a,b[$ qui fixe c et commute avec f coïncide avec un temps τ de ce même flot.*

Démonstration. On renvoie à [Ta] ou [Yo] pour la preuve du fait principal, à savoir que $\nu_f^{]a,c]}$ et $\nu_f^{[c,b[}$ se recollent en un champ $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$. On note ν ce champ. Si k est l'ordre de la première dérivée non nulle de $f - \mathrm{Id}$ en c, on vérifie sans peine que le k-jet de ν en c est $\log Df(c)$ si $k = 1$ et $(0, \cdots, 0, D^k f(c))$ si $k > 1$. En effet, au voisinage de c,

$$\nu(x) \sim \frac{\log Df(c)}{Df(c) - 1}\big(f(x) - x\big) \quad \text{avec} \quad \frac{\log Df(c)}{Df(c) - 1} = 1 \text{ si } Df(c) = 1$$

(cf. formule (I) dans la rubrique « Quelques formules utiles », au début de la partie I). Soit $g \in \mathcal{D}_+^\infty(]a,b[)$ un difféomorphisme qui fixe c et commute avec f. D'après le corollaire 1.6, g coïncide sur $]a,c]$ et $[c,b[$ avec le flot de ν à des temps τ_a et τ_b, respectivement. Les k-jets de g en c à gauche et à droite sont alors $\exp(\tau_a \log Df(c))$ et $\exp(\tau_b \log Df(c))$ si $k = 1$, et $(1, 0, \cdots, \tau_a D^k f(c))$ et $(1, 0, \cdots, 0, \tau_b D^k f(c))$ si $k > 1$. Comme g est lisse en c, nécessairement $\tau_b = \tau_a$. □

Une conséquence immédiate de ce théorème et du lemme 3.3 est :

Corollaire 3.5. *Soient $f, g \in \mathcal{D}_+^\infty([0,1])$ deux difféomorphismes qui commutent, F l'ensemble de leurs points fixes communs, $F_0 \subset F$ le sous-ensemble de ceux où f et g sont infiniment tangents à l'identité et $]a,b[$ une composante connexe de $U_0 = [0,1] \setminus F_0$.*

1. *Si $]a,b[$ contient une composante rationnelle de $U = [0,1] \setminus F$, il existe un difféomorphisme $h \in \mathcal{D}_+^\infty([a,b])$ et des entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $f\,|_{[a,b]} = h^q$ et $g\,|_{[a,b]} = h^p$.*
2. *Si $]a,b[$ contient une composante irrationnelle de $U = [0,1] \setminus F$, il existe un champ de vecteurs $\nu_f^{[a,b]}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$, $\mathcal{C}^1$-plat au bord, dont $f\,|_{[a,b]}$ est le flot au temps 1 et $g\,|_{[a,b]}$ le flot à un temps $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

On dira désormais qu'une composante connexe de $U_0 = [0,1] \setminus F_0$ est *rationnelle* ou *irrationnelle* selon que les composantes de $[0,1] \setminus F$ qu'elle contient sont rationnelles ou irrationnelles. Avec les notations ci-dessus, on aura besoin de l'estimation suivante.

Lemme 3.6. *Soit $]a,b[$ une composante rationnelle de U_0 où $f = h^q$ et $g = h^p$, avec $p,q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et $q \neq 0$. Si $\left\|f - \mathrm{Id}\,|_{[a,b]}\right\|_2 < \delta$, alors $\left\|h - \mathrm{Id}\,|_{[a,b]}\right\|_1 < \frac{1}{q}v(\delta)$ pour une fonction $v : [0,1[\to \mathbb{R}$ indépendante de f et g et tendant vers 0 en 0.*

Démonstration. Soit $z \in]a,b[$. Par continuité de Dh, il suffit de traiter le cas où $z \in U = [0,1] \setminus F$. Soient $]c,d[$ la composante de U contenant z, et ν le champ de Szekeres de f sur $[c,d[$. Le difféomorphisme h coïncide sur $[c,d[$ avec le temps $\frac{1}{q}$ du flot f^t de ν. Comme ν est lisse sur $]c,d[$, l'équation aux variations associée s'écrit

$$\frac{d}{dt}Df^t(x) = D\nu\left(f^t(x)\right)Df^t(x).$$

Comme $\left\|f - \mathrm{Id}\,|_{[a,b]}\right\|_2 < \delta$, le corollaire 1.4 entraîne

$$|D\nu| \leq u(\delta) \quad \text{sur }]c,d[.$$

En posant $y(t) = Df^t(z)$ et en intégrant l'équation aux variations, on obtient

$$|y(t) - 1| \leq u(\delta)t\exp(u(\delta)t).$$

Comme $h = f^{1/q}$, on en déduit

$$|Dh(z) - 1| \leq \frac{1}{q}u(\delta)\exp(u(\delta)).$$

□

3.2 Régularité aux points fixes infiniment dégénérés

Lemme 3.7. *Soient $f,g \in \mathcal{D}^\infty_+([0,1])$ deux difféomorphismes qui commutent, F_0 l'ensemble de leurs points fixes communs où ils sont infiniment tangents à l'identité. Le champ de vecteurs ν sur $[0,1]$ qui coïncide avec $\nu_f^{[a,b]}$ sur l'adhérence de chaque composante irrationnelle $]a,b[$ de $U_0 = [0,1] \setminus F_0$ et qui est nul partout ailleurs est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. On observe d'abord que ν est $\mathcal{C}^\infty$ sur U_0. On va maintenant montrer que ν a des dérivées à gauche $D^-\nu(c)$ et à droite $D^+\nu(c)$ en tout point de F_0, qu'elles sont nulles, et que $D\nu$ ainsi définie est continue à gauche et à droite.

Soit $c \in F_0$. Si c est l'extrémité d'une composante $]c,d[$ de U_0, ou bien $]c,d[$ est rationnelle, et $\nu\,|_{[c,d]} = 0$, ou bien $]c,d[$ est irrationnelle, et $\nu\,|_{[c,d]} = \nu_f^{[c,d]}$ est $\mathcal{C}^1$-plat en c et en d d'après 3.5. Dans les deux cas, $D^+\nu(c)$ est définie et nulle.

On suppose maintenant que c est un point d'accumulation de F_0 à droite. Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $d \in F_0 \cap]c, 1]$ tel que

$$\left\| f - \mathrm{Id}\,|_{[c,d]} \right\|_2 < \delta.$$

Soit $x \in [c, d]$. Si x appartient à F_0 ou à une composante rationnelle de U_0, $\nu(x) = 0$. Si x appartient à une composante irrationnelle $]a, b[$ de U_0, $\nu\,|_{[a,b]} = \nu_f^{[a,b]}$ et, d'après le corollaire 1.4,

$$\left| \frac{\nu(x)}{f(x) - x} \right| \leq u(\delta)$$

pour une certaine fonction u qui tend vers 0 avec δ. D'autre part,

$$\left| \frac{f(x) - x}{x - c} \right| = \left| \frac{(f(x) - x) - (f(c) - c)}{x - c} \right| \leq \left\| f - \mathrm{Id}\,|_{[c,d]} \right\|_1 \leq \delta$$

donc

$$\left| \frac{\nu(x)}{x - c} \right| \leq \delta e^{u(\delta)} \quad \text{pour tout } x \in [c, d].$$

Il en résulte que $D^+\nu(c)$ existe et vaut 0. On montre de même que $D^-\nu$ est bien définie et identiquement nulle sur F_0.

On vérifie maintenant que $D\nu$ est continue à droite en tout point $c \in F_0$. Si c est l'extrémité d'une composante $]c, d[$ de U_0, ou bien $]c, d[$ est rationnelle, et $D\nu$ est identiquement nul sur $[c, d]$, ou bien $]c, d[$ est irrationnelle, et $\nu\,|_{[c,d]}$ est $\mathcal{C}^1$ d'après 3.5. Dans les deux cas, $D\nu$ est continue à droite en c. On suppose maintenant que c est un point d'accumulation de F_0 à droite. Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $d \in F_0 \cap]c, 1]$ tel que

$$\left\| f - \mathrm{Id}\,|_{[c,d]} \right\|_2 < \delta.$$

Soit $x \in [c, d]$. Si x appartient à F_0 ou à une composante rationnelle de U_0, $D\nu(x) = 0$. Si x appartient à une composante irrationnelle $]a, b[$ de U_0, $\nu\,|_{[a,b]} = \nu_f^{[a,b]}$ et, d'après le corollaire 1.4,

$$|D\nu(x)| \leq u(\delta). \tag{3.1}$$

Par suite, $D\nu(x)$ tend vers 0 quand $x \to c^+$, donc $D\nu$ est continue à droite en c. On montre de même la continuité à gauche. □

Le théorème 3.1 résulte directement du lemme suivant.

Lemme 3.8. *Soient $f, g \in \mathcal{D}_+^\infty([0, 1])$ deux difféomorphismes qui commutent, F_0 l'ensemble de leurs points fixes communs où ils sont infiniment tangents à l'identité, $U_0 = [0, 1] \setminus F_0$ et ν le champ de vecteurs du lemme précédent. Pour tout $t \in [0, 1]$, on définit $f_t, g_t \colon [0, 1] \to [0, 1]$ de la façon suivante :*

- *sur F_0, $f_t = f = \mathrm{Id}$ et $g_t = g = \mathrm{Id}$;*

– *sur chaque composante rationnelle de* U_0 *où* $f = h^q$ *et* $g = h^p$ *avec* $p, q \in \mathbb{Z}$ *premiers entre eux, on pose* $f_t = h_t^q$ *et* $g_t = h_t^p$*, où* $h_t = (1-t)h + t\,\mathrm{Id}$ *;*
– *sur chaque composante irrationnelle de* U_0 *où* f *et* g *coïncident avec les temps* 1 *et* $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *du champ* ν*, on définit* f_t *et* g_t *comme les temps* $1-t$ *et* $(1-t)\tau$ *du flot de* ν*.*

L'application $t \in [0,1] \mapsto (f_t, g_t)$ *définit un chemin continu dans* $\mathcal{D}^1_+([0,1])^2$*, et* f_t *et* g_t *commutent pour tout* $t \in [0,1]$*.*

Démonstration. Il est clair que les applications f_t et g_t commutent pour tout $t \in [0,1]$. Comme f et g jouent des rôles équivalents dans la construction, il suffit de démontrer que $t \mapsto f_t$ définit un chemin continu dans $\mathcal{D}^1_+([0,1])$. On observe d'abord que pour tout $t \in [0,1]$, f_t définit un homéomorphisme de $[0,1]$, et induit sur U_0 un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$, d'après le corollaire 3.5. On montre maintenant que f_t est dérivable en tout point c de F_0, de dérivée 1.

Soit $c \in F_0$. Par construction,

$$|f_t(x) - x| \leq |f(x) - x| \quad \text{pour tout } (t,x) \in [0,1] \times [0,1].$$

Pour tout $x \neq c$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f_t(x) - f_t(c)}{x - c} - 1 \right| &= \left| \frac{(f_t(x) - x) - (f_t(c) - c)}{x - c} \right| \\
&= \left| \frac{f_t(x) - x}{x - c} \right| \\
&\leq \left| \frac{f(x) - x}{x - c} \right| \\
&= \left| \frac{(f(x) - x) - (f(c) - c)}{x - c} \right|.
\end{aligned}$$

Comme $c \in F_0$, $f - \mathrm{Id}$ est $\mathcal{C}^1$-plate en c, donc cette quantité tend vers 0 quand x tend vers c, et f_t est bien dérivable en c, de dérivée 1.

Pour terminer la preuve, il reste à vérifier que l'application $\Psi\colon (t,x) \mapsto Df_t(x)$ (maintenant bien définie) est continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Pour toute composante $]c,d[$ de U_0, la continuité sur $[0,1] \times [c,d]$ découle directement du corollaire 3.5. En particulier, la limite de $Df_s(x)$ quand $(s,x) \to (t,c)$ dans $[0,1] \times [c,1]$ existe et vaut $Df_t(c) = 1$. On suppose maintenant que c est un point d'accumulation de F_0 à droite. Pour tout $\delta > 0$, il existe un point $d \in F_0 \cap]c,1]$ tel que

$$\left\| f - \mathrm{Id}\,|_{[c,d]} \right\|_2 < \delta.$$

Soit $(s,x) \in [0,1] \times [c,d]$. Si x appartient à F_0, $Df_s(x) = 1$. Si x appartient à une composante irrationnelle $]a,b[$ de $U_0 \cap [c,d]$, $f_s\,|_{[a,b]}$ appartient au flot de ν, donc $\nu \circ f_s(x) = \nu(x) \times Df_s(x)$. Si x n'est pas un point fixe de f (*i.e.* un zéro

de ν),

$$\begin{aligned}
|Df_s(x)-1| &= \left|\frac{\nu\circ f_s(x)-\nu(x)}{\nu(x)}\right| \\
&\leq \sup_{]a,b[}|D\nu|\left|\frac{f_s(x)-x}{\nu(x)}\right| \\
&\leq \sup_{]a,b[}|D\nu_f^{[a,b]}|\left|\frac{f(x)-x}{\nu(x)}\right| \leq u(\delta)e^{u(\delta)} \quad \text{d'après le corollaire 1.4.}
\end{aligned}$$

Cette majoration reste valable pour tout $x\in[a,b]$ puisqu'on sait déjà que Ψ est continue sur $[0,1]\times[a,b]$.

On suppose maintenant que x appartient à une composante rationnelle $]a,b[$ de $U_0\cap[c,d]$ où $f=h^q$ et $g=h^p$, avec $p,q\in\mathbb{Z}$ premiers entre eux. Si q est nul, $f_s=\mathrm{Id}$ sur $[a,b]$ donc $Df_s(x)=1$. Si q est non nul, le lemme 3.6 assure que $\|h-\mathrm{Id}\|_1<\frac{1}{q}v(\delta)$, pour une fonction v qui tend vers 0 quand $\delta\to 0$. En particulier, pour δ assez petit, $\|h-\mathrm{Id}\|_1<1/2$. Comme $f_s=h_s^q$ sur $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
|\log Df_s(x)| = |\log D(h_s^q)(x)| &= \left|\sum_{i=0}^{q-1}\log Dh_s\left(h_s^i(x)\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{q-1}\left|\log\left(1+(1-s)\left(Dh\left(h_s^i(x)\right)-1\right)\right)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{q-1}2(1-s)\|h-\mathrm{Id}\|_1 \leq 2v(\delta).
\end{aligned}$$

Ainsi, la limite de $Df_s(x)$ quand $(s,x)\to(t,c)$ dans $[0,1]\times[c,1]$ existe et vaut $Df_t(c)=1$. On montre de même que la limite quand $(s,x)\to(t,c)$ dans $[0,1]\times[0,c]$ existe et vaut 1, ce qui entraîne la continuité de Ψ en tout point $(t,c)\in[0,1]\times F_0$, et donc sur $[0,1]\times[0,1]$. □

Remarque 3.9. Il découle directement de cette démonstration que si les difféomorphismes f et $g\in\mathcal{D}_+^\infty([0,1])$ sont infiniment tangents à l'identité au bord, tous les difféomorphismes f_t, $g_t\in\mathcal{D}_+^1([0,1])$ y sont $\mathcal{C}^1$-tangents à l'identité.

Deuxième partie

Sur une question de connexité concernant les feuilletages en dimension trois

Plan de la partie II

Cette seconde partie se compose de cinq chapitres, dont l'objectif commun est la démonstration du théorème A de l'introduction.

Dans le chapitre 4, on rappelle des résultats de Novikov, Goodman et Haefliger [No, Go, Ha1] sur la structure géométrique des feuilletages.

Le chapitre 5 est consacré aux feuilletages de $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ transverses au second facteur. Ces deux chapitres aboutissent à la démonstration du théorème D de l'introduction (cf. théorème 5.2).

Le chapitre 6 présente le théorème de Larcanché [La] sur le prolongement à $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ des feuilletages de $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ transverses au facteur $\mathbb{S}^1$. Il donne une première application de ce résultat, à savoir que l'espace des feuilletages agréables sur un fibré en cercles est connexe. Un feuilletage coorienté sur un tel fibré est dit agréable s'il est positivement transverse aux fibres en dehors des préimages de quelques courbes fermées simples qui sont des feuilles toriques.

Le chapitre 7 est le coeur de cette partie. On commence par définir proprement les feuilletages malléables, puis on démontre le théorème E (cf. théorème 7.2). On introduit ensuite une classe particulière de champs de plans, dits presque intégrables, et on met en évidence une correspondance naturelle entre ces champs de plans et les feuilletages malléables. Des champs presque intégrables vers les feuilletages malléables, cette correspondance dépend *a priori* du choix d'un lot d'arcs transverses, mais le lemme des vases communicants 7.8 montre qu'il n'en est rien à homotopie près parmi les feuilletages. Le chapitre se termine par la démonstration du théorème F (cf. 7.9) qui exploite la grande flexibilité des champs de plans presque intégrables.

On établit cette flexibilité au chapitre 8, en adaptant les techniques développées par Eliashberg dans [El].

Chapitre 4

Structure géométrique des feuilletages

Une idée fondamentale de Novikov [No] pour clarifier la structure des feuilletages de codimension 1 sur une variété close de dimension n est d'utiliser les transversales fermées pour définir les « composantes connexes » d'un feuilletage. Dans le cas particulier de la dimension 3, S. Goodman [Go] démontre que ces composantes sont toujours bordées par des tores.

Dans ce chapitre, on rappelle ces résultats (comme ils sont énoncés dans [Go]) ainsi que leurs preuves, puis on les exploite dans la proposition 4.8 pour regrouper toutes les feuilles toriques d'un feuilletage qui ne sont pas coupées par des transversales fermées dans une union finie de compacts saturés fibrant sur le tore. On introduit également la notion de feuilletage tendu.

Définition 4.1. Soit M une variété quelconque de dimension n et τ un feuilletage de codimension 1 sur M transversalement orienté.

L'*ensemble accessible* d'une feuille F de τ, noté $A(F)$, est l'ensemble des points x de M pour lesquels il existe une transversale positive au feuilletage (non triviale) allant de F à x.

4.1 Dimension quelconque

Dans toute cette section, M désigne une variété *compacte à bord* (éventuellement vide) orientée de dimension n et τ un feuilletage de codimension 1 sur M transversalement orienté tel que chaque composante de bord est soit une feuille, soit une hypersurface transverse au feuilletage.

Théorème 4.2 (Novikov [No])**.** *L'ensemble accessible $A(F)$ de toute feuille F est un ouvert saturé pour le feuilletage dont la frontière est une union finie de feuilles compactes.*

Démonstration. On voit facilement que $A(F)$ est ouvert et saturé. Soit $\bigcup_{i=1}^{k} U_i$ un recouvrement fini de M par des cartes feuilletées dans lesquelles le feuilletage a pour équation $dx_n = 0$. Si U_i contient un point p de la frontière $\partial A(F)$ de $A(F)$, alors $A(F) \cap U_i$ est nécessairement le « demi-espace » $\{x \in U_i \ ; \ x_n > x_n(p)\}$, et $\partial A(F) \cap U_i = \{x \in U_i \ ; \ x_n = x_n(p)\}$. Ainsi, $\partial A(F)$ intersecte chaque carte feuilletée en sur unique plaque. C'est donc une union finie de feuilles compactes. □

Définition 4.3. On appelle *feuille de Novikov* toute feuille qui n'est coupée par aucune transversale fermée.

Il est clair qu'une feuille de Novikov est dans le bord de son ensemble accessible, et est donc compacte d'après le théorème 4.2.

Corollaire 4.4. *Toute feuille non compacte est coupée par une transversale fermée.*

Théorème 4.5 (Haefliger [Ha1])**.** *L'union des feuilles compactes est un compact de M.*

Être coupé par une transversale fermée étant une condition ouverte, les feuilles de Novikov forment un fermé de l'union des feuilles compactes.

Corollaire 4.6. *L'union des feuilles de Novikov est un compact de M.*

Démonstration du théorème 4.5. On note K l'adhérence de l'union des feuilles compactes du feuilletage τ. La coorientation de τ et l'orientation de M induisent une orientation des feuilles. L'ensemble des feuilles compactes engendre donc un sous-groupe du groupe abélien de type fini $H_{n-1}(M;\mathbb{Z})$. Soit $\{F_1 \dots F_k\}$ une famille génératrice finie de ce sous-groupe.

Supposons qu'il existe $p \in K$ appartenant à une feuille non-compacte F. En appliquant le corollaire 4.4 dans la variété à bord feuilletée obtenue en découpant M le long des F_i, on voit qu'il existe dans $M \setminus \bigcup F_i$ une transversale fermée positive coupant F. On peut alors facilement en construire une passant par p. Mais une telle courbe coupe nécessairement une feuille compacte F' (suffisamment proche de x), et ce avec un nombre d'intersection homologique positif. Ceci est contradictoire avec le fait que la classe de F' est une combinaison linéaire des classes des F_i. □

4.2 Dimension trois

Théorème 4.7 (Goodman)**.** *Sur les variétés closes (compactes sans bord) de dimension* 3*, les feuilles de Novikov sont des tores.*

Démonstration. Soit F une feuille de Novikov d'un feuilletage de codimension 1 sur une variété close M de dimension 3. Alors $F \subset \partial A(F)$, et *a fortiori* $A(F) \neq M$. D'après le théorème 4.2, $\partial A(F)$ est donc une union finie de feuilles compactes $F_1 \cup \dots \cup F_k$. Le champ normal positif au feuilletage (pour une

métrique riemannienne fixée) définit un champ de vecteurs non singulier sur $A(F)$, rentrant sur toutes les composantes de bord. D'après le théorème de Poincaré-Hopf, la caractéristique d'Euler $\chi(A(F))$ de $A(F)$ est donc nulle.

On note N la variété close de dimension 3 (donc de caractéristique d'Euler nulle) obtenue en doublant $A(F)$. La relation $\chi(N) = 2\chi(A(F)) + \chi(\partial A(F))$ entraîne $\chi(\partial A(F)) = 0$, soit $\sum_{j=1}^{k} \chi(F_j) = 0$. Supposons qu'une feuille F_j de $\partial A(F)$ soit une sphère. D'après le théorème de stabilité de Reeb [Re], la variété est alors difféomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ feuilletée par $\mathbb{S}^2 \times \{\cdot\}$. Mais alors F_j est coupée par une transversale fermée, ce qui est contradictoire. Toutes les F_j ont donc des caractéristiques d'Euler négatives, et donc nulles, puisque leur somme est nulle. Ce sont donc toutes des tores. □

Proposition 4.8. *Pour tout feuilletage de codimension* 1 *sur une variété close de dimension* 3*, il existe un nombre fini d'ensembles saturés disjoints de la forme* $\mathbb{T}^2 \times J \subset M$*, où* J *est un intervalle compact pouvant être réduit à un point, ayant les propriétés suivantes :*

- *sur chaque* $\mathbb{T}^2 \times J$*, le feuilletage est transverse au facteur* J*,*
- *par tout point du complémentaire passe une transversale fermée.*

Autrement dit, la réunion de ces ensembles contient tous les tores de Novikov du feuilletage.

Démonstration. Cette proposition est un cas particulier du théorème 2 démontré par Thurston dans [Th1]. On reprend ici sa preuve. Soit T un tore de Novikov du feuilletage. On peut paramétrer un voisinage compact U_T de T par $\mathbb{T}^2 \times I_T$, où I_T est un segment, de sorte que le feuilletage soit transverse au facteur I_T et que toute feuille compacte intersectant U_T soit de la forme $\mathbb{T}^2 \times \{z\}$, $z \in I_T$. Les intérieurs des U_T forment un recouvrement ouvert de l'union des tores de Novikov, qui est compacte d'après le corollaire 4.6.

Soit $\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Int} U_{T_i}$ un sous-recouvrement fini. En retirant à chaque U_{T_i} l'ensemble des feuilles non-compactes qui intersectent son bord, on obtient un nouveau recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^{n} N_{T_i}$. Chaque composante connexe de cet ensemble fibre sur le tore (la fibre peut éventuellement être un point), le feuilletage étant transverse aux fibres. La fibre ne peut pas être un cercle, sinon les tores de Novikov de la composante en question seraient coupés par une transversale fermée. La fibre est donc forcément un intervalle compact, et les composantes connexes sont les ensembles compacts saturés recherchés. □

4.3 Feuilletages tendus

Définition 4.9. Un feuilletage τ de codimension 1 sur une variété M (quelconque) est dit *tendu* si tout arc transverse à τ se prolonge en transversale fermée.

Proposition 4.10. *Un feuilletage est tendu si et seulement si par tout point passe une transversale fermée.*

Remarque 4.11. Ainsi, sur une variété compacte connexe, un feuilletage co-orienté est tendu si et seulement si l'ensemble accessible de toute feuille est la variété tout entière.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire : étant donné un feuilletage tendu, par tout point passe un petit arc transverse, qui se prolonge en transversale fermée.

Soit maintenant un feuilletage tel que par tout point passe une transversale fermée et $A : [0,1] \to M$ un arc transverse. Soit $I \subset [0,1]$ l'ensemble des t tels que $A([t,1])$ se prolonge en transversale fermée. On veut montrer que $I = [0,1]$.

Par hypothèse, il existe une transversale fermée passant par le point $A(1)$, donc $1 \in I$.

De plus, I est ouvert car toute transversale fermée C qui prolonge $A([t,1])$ peut être déformée parmi les courbes transverses en une courbe qui contient $A([s,1])$ pour $s < t$ assez proche de t.

On montre maintenant que I est fermé. Soit $a = \inf I$. Par hypothèse, il existe une transversale fermée C_a passant par $A(a)$, que l'on peut déformer parmi les transversales pour qu'elle contienne $A([a,t])$ pour un $t > a$ assez proche. Il existe une transversale fermée C_t contenant $A([t,1])$. On obtient une transversale fermée contenant $A([a,1])$ en prenant $C_t \cup C_a$. Ainsi, $a \in I$. $\square$

Chapitre 5

Nettoyage de feuilletages

On note $\mathcal{S}^r(\mathbb{T}^k \times [0,1])$, $k = 1$ ou 2, l'espace des feuilletages de codimension 1 coorientés de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{T}^k \times [0,1]$ qui sont positivement transverses à $[0,1]$ et tels que $\mathbb{T}^k \times \{i\}$, $i = 0$ ou 1, est soit une feuille, soit transverse au feuilletage, le feuilletage induit sur $\mathbb{T}^k \times \{i\}$ étant dans ce cas supposé linéarisable (*i.e* défini par une forme fermée). On rappelle que feuilletage $\mathcal{C}^r$ signifie pour nous champ de plans intégrable de classe $\mathcal{C}^r$. On note $\mathcal{S}^r(\ T^k \times [0,1], \partial) \subset \mathcal{S}^r(\mathbb{T}^k \times [0,1])$ le sous-espace formé des feuilletages qui coïncident le long du bord avec un élèment de $\mathcal{S}^r(\mathbb{T}^k \times [0,1])$ donné quelconque, et $\mathcal{S}^r_0(\mathbb{T}^k \times [0,1]) \subset \mathcal{S}^r(\mathbb{T}^k \times [0,1])$ le sous-espace des feuilletages tangents au bord.

Le but de ce chapitre est de démontrer les résultats suivants :

Théorème 5.1. *Deux feuilletages quelconques de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ sont reliés par un chemin continu dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$.*

Théorème 5.2 (Nettoyage)**.** *Tout feuilletage $\mathcal{C}^\infty$ de codimension 1 coorienté sur une variété close M de dimension 3 peut être relié à un feuilletage net par un chemin continu de feuilletages $\mathcal{C}^1$.*

La définition de feuilletage net est rappelée dans la section 5.2, et les théorèmes sont démontrés dans les sections 5.3 et 5.4 respectivement.

5.1 Holonomie

Dans cette section, on s'intéresse à l'espace $\mathcal{S}^r_0(\mathbb{T}^k \times [0,1])$, $k = 1$ ou 2, des feuilletages de codimension 1 coorientés de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{T}^k \times [0,1]$ positivement transverses à $[0,1]$ et tangents au bord.

Remarque. La plupart des énoncés de cette section seraient clairs si on prenait pour $\mathcal{S}^r(\mathbb{T}^k \times [0,1])$ l'espace des feuilletages qui ont une représentation d'holonomie $\mathcal{C}^r$. La subtilité vient de ce qu'on demande aux feuilletages d'être engendrés par des champs de plans $\mathcal{C}^r$ (cf. Introduction).

Soit $\tau \in \mathcal{S}_0^r(\mathbb{T}^k \times [0,1])$ et $\widetilde{\tau}$ sa préimage par la projection $\mathbb{R}^k \times [0,1] \to \mathbb{T}^k \times [0,1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, on notera $\bar{x}$ sa projection sur $\mathbb{T}^k$.

Pour un $z \in [0,1]$ donné, tout chemin $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^k$ se relève de façon unique en un chemin $\widetilde{\gamma}$ tangent à $\widetilde{\tau}$ d'origine $(\gamma(0), z)$. On note $(\gamma(1), \psi_\gamma(z))$ son extrémité. L'application $\psi_\gamma\colon [0,1] \to [0,1]$ ainsi définie est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie de γ à extrémités fixées. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins dans $\mathbb{R}^k$ tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, leur composé $\gamma_1 * \gamma_2$ vérifie

$$\psi_{\gamma_1 * \gamma_2} = \psi_{\gamma_2} \circ \psi_{\gamma_1}.$$

Si $\gamma + p$, $p \in \mathbb{Z}^k$, désigne l'image de γ par une translation entière, la périodicité de $\widetilde{\tau}$ entraîne

$$\psi_{\gamma+p} = \psi_\gamma.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, on définit $\psi_x := \psi_\gamma$, où $\gamma(t) = tx$. D'après ce qui précède, la *représentation d'holonomie* de τ définie par

$$\begin{aligned} h(\tau) :\ \mathbb{Z}^k &\to \mathcal{D}_+^r([0,1]) \\ x &\mapsto \quad \psi_x \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. On appellera *holonomie* de τ la famille de difféomorphismes $(\psi_x)_{x \in \mathbb{R}^k}$.

Remarque 5.3. On note $\mathcal{S}_0^r(\mathbb{T}^k \times [0,1[)$ l'espace des feuilletages $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{T}^k \times [0,1[$ transverses à $[0,1[$ et tangents à $\mathbb{T}^k \times \{0\}$. Étant donné un feuilletage $\tau \in \mathcal{S}_0^r(\mathbb{T}^k \times [0,1[)$, on peut définir de façon similaire l'holonomie de τ *le long de* $\mathbb{T}^k \times \{0\}$, les ψ_x, $x \in \mathbb{R}^k$, étant alors des germes de difféomorphismes $\mathcal{C}^r$ de $\mathbb{R}_+$ en 0, et la représentation d'holonomie $h(\tau)$ un morphisme à valeurs dans l'espace de ces germes.

Soit $\mathcal{R}(\mathbb{Z}^k \to \mathcal{D}_+^r([0,1]))$ l'espace des représentations de $\mathbb{Z}^k$ dans $\mathcal{D}_+^r([0,1])$. Notons qu'une telle représentation n'est rien d'autre que la donnée d'un ou deux difféomorphismes qui commutent. On munit donc $\mathcal{R}(\mathbb{Z}^k \to \mathcal{D}_+^r([0,1]))$ de la topologie induite par celle de $(\mathcal{D}_+^r([0,1]))^k$.

Lemme 5.4. *L'application d'holonomie*

$$h : \mathcal{S}_0^r(\mathbb{T}^k \times [0,1]) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathbb{Z}^k \to \mathcal{D}_+^r([0,1]))$$

est une fibration à fibres contractiles.

Démonstration. On commence par le cas $k = 1$. Soit $\rho\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction lisse valant 0 près de 0 et 1 près de 1. Etant donné $f \in \mathcal{D}_+^r([0,1])$, on lui associe l'arc ψ_x, $x \in \mathbb{R}$, défini par :

$$\begin{aligned} \psi_x &= (1 - \rho(x))\,\mathrm{Id} + \rho(x) f && \text{pour tout } x \in [0,1], \\ \psi_{x+1} &= \psi_x \circ f && \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les courbes paramétrées $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, \psi_x(z))$, $z \in [0,1]$, définissent un feuilletage τ de $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$ d'holonomie $h(\tau) = f$. Le relevé ∂^τ du champ de vecteurs unitaire ∂_x sur $\mathbb{T}^1$ en champ de vecteurs tangent à τ sur $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$ vérifie :

$$\partial^\tau(\bar{x}, \psi_x(z)) = \partial_x + \rho'(x)(f(z) - z)\partial_z \quad \text{pour tout } (x,z) \in [0,1]^2.$$

Le feuilletage τ est donc $\mathcal{C}^r$, et cette construction donne une section continue de h.

Soient maintenant τ, τ' deux feuilletages de $\mathcal{S}_0^r(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$ satisfaisant $h(\tau) = h(\tau')$, et $(\psi_x)_{x\in\mathbb{R}}$, $(\psi'_x)_{x\in\mathbb{R}}$ leurs holonomies respectives, de sorte que $\psi_p = \psi'_p$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. L'expression

$$\Psi(\bar{x}, z) = (\bar{x}, \psi'_x \circ \psi_x^{-1}(z)), \quad (x,z) \in \mathbb{R}^k \times [0,1],$$

définit alors un difféomorphisme fibré de $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^r$ qui envoie τ sur τ', de sorte que $\partial^{\tau'} = \Psi_* \partial^\tau$. On définit une isotopie Ψ_t, $t \in [0,1]$, de $\mathbb{T}^1 \times [0,1]$ par

$$\Psi_t(\bar{x}, z) = \big(\ \bar{x}\ ,\ (1 - \rho(t))\, z\ +\ \rho(t)\, (\psi'_x \circ \psi_x^{-1})(z)\big), \quad (x,z) \in \mathbb{R} \times [0,1],$$

où $\rho\colon [0,1] \to [0,1]$ désigne toujours une fonction lisse valant 0 en 0 et 1 en 1, et on pose $\tau_t = (\Psi_t)_* \tau$. Ces feuilletages ont tous la même représentation d'holonomie – ils sont tous image de τ_0 par un difféomorphisme fibré valant l'identité sur la fibre $\{0\} \times [0,1]$ – et relient τ_0 à τ_1. Cependant, les difféomorphismes Ψ_t étant de classe $\mathcal{C}^r$, les feuilletages τ_t ne sont *a priori* que $\mathcal{C}^{r-1}$. En fait, on vérifie facilement que

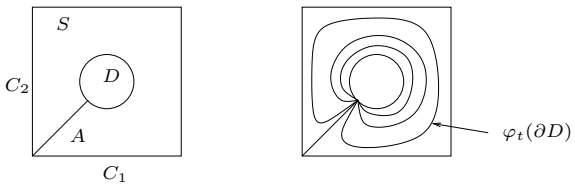
$$\partial^{\tau_t} = (1 - \rho(t))\, (\partial^\tau \circ \Psi_t^{-1}) + \rho(t)\, (\partial^{\tau'} \circ \Psi \circ \Psi_t^{-1}),$$

et le chemin τ_t, $t \in [0,1]$, est donc continu dans $\mathcal{S}_0^r(\mathbb{T}^k \times [0,1])$.

On considère maintenant le cas $k = 2$. On commence par construire une section de h. On note C_1 et C_2 les cercles $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{T}^1$ de $\mathbb{T}^2$, D un disque dans $\mathbb{T}^2 \setminus (C_1 \cup C_2)$, A un arc joignant $(0,0)$ à ∂D dans $\mathbb{T}^2$ sans recouper $C_1 \cup C_2$, et on pose $C = C_1 \cup C_2 \cup A$ et $S = \mathbb{T}^2 \setminus \operatorname{Int} D$.

Il existe une famille φ_t, $t \in [0,1]$, d'applications lisses de S dans S ayant les propriétés suivantes :

– $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et φ_t pour tout $t \in [0,1]$ induit l'identité sur C,
– φ_1 envoie S dans C et φ_t est un plongement pour tout $t < 1$.



L'homotopie de rétraction φ_t se relève sur $S \times [0,1]$ en une homotopie $\widetilde{\varphi}_t = \varphi_t \times \mathrm{Id}$ préservant chaque $S \times \{\cdot\}$.

Soient f et $g \in \mathcal{D}^r_+([0,1])$ des difféomorphismes qui commutent. On définit un feuilletage sur $C \times [0,1]$ en prenant sur $A \times [0,1]$ le feuilletage horizontal par les $A \times \{\cdot\}$ et sur $C_1 \times [0,1]$ et $C_2 \times [0,1] \subset \mathbb{T}^2 \times [0,1]$ les feuilletages $\mathcal{C}^r$ d'holonomies respectives f et g donnés par la section de l'application h : $\mathcal{S}^r_0(\mathbb{T}^1 \times [0,1]) \to \mathcal{R}(\mathbb{Z} \to \mathcal{D}^r_+([0,1]))$ construite précédemment. On épaissit « trivialement » ce feuilletage en feuilletage d'un voisinage de $C \times [0,1]$, et on prend l'image inverse de cet épaississement par $\widetilde{\varphi}_t$ pour t assez proche de 1.

Le feuilletage obtenu sur $S \times [0,1]$ induit sur $\partial D \times [0,1]$ un feuilletage τ de classe $\mathcal{C}^r$ ayant pour représentation d'holonomie le commutateur de f et g, c'est-à-dire l'identité puisque ces difféomorphismes commutent. D'après le cas $k = 1$, on peut relier τ au feuilletage produit de $\partial D \times [0,1]$ par un chemin continu $(\Psi_t)_*\tau$ de feuilletages $\mathcal{C}^r$ sur $\partial D \times [0,1]$. Soit $D' \subset \operatorname{Int} D$ un disque plus petit. L'isotopie Ψ_t permet de construire un feuilletage $\mathcal{C}^r$ sur $(D \setminus \operatorname{Int} D') \times [0,1]$ induisant τ sur $\partial D \times [0,1]$ et le feuilletage produit sur $\partial D' \times [0,1]$, qu'on prolonge trivialement en feuilletage $\mathcal{C}^r$ de $D \times [0,1]$. Le feuilletage ainsi construit sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ dépend continûment de f et g.

Le reste de la preuve est identique au cas $k = 1$. □

Le résultat suivant se démontre de façon similaire.

Lemme 5.5. *Soient τ_0 et τ_1 deux feuilletages de $\mathcal{S}^r_0(\mathbb{T}^k \times [0,1[)$, $k = 1$ ou 2, qui ont la même représentation d'holonomie le long de $\mathbb{T}^k \times \{0\}$. Alors il existe une isotopie Ψ_t, $t \in [0,1]$, de $\mathbb{T}^k \times [0,1[$ à support compact de classe $\mathcal{C}^r$ telle que*

- *$t \mapsto (\Psi_t)_*\tau_0$ définit un chemin continu dans $\mathcal{S}^r_0(\mathbb{T}^k \times [0,1[)$;*
- *$(\Psi_1)_*\tau_0$ coïncide avec τ_1 sur $\mathbb{T}^2 \times [0,\varepsilon]$ pour un $\varepsilon > 0$.*

Remarque 5.6. Il découle directement de la preuve de 5.4 (adaptée au cas des germes) que, si τ_0 et τ_1 sont $\mathcal{C}^\infty$-lisses en dehors de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$, les difféomorphismes Ψ_t le sont aussi. On aura besoin de ce fait pour démontrer le lemme 5.21.

5.2 Modélisation près des feuilles nettes

On précise la définition de feuille nette évoquée dans l'introduction en la généralisant au cas des variétés à bord.

Définition 5.7. Soit τ un feuilletage $\mathcal{C}^\infty$-lisse sur une variété compacte de dimension 3 dont chaque composante de bord est soit une feuille, soit transverse à τ. On dit qu'une feuille torique T de τ est *nette* s'il existe un champ de vecteurs ($\mathcal{C}^\infty$-)lisse ν sur $\mathbb{R}$ s'annulant seulement en 0 tel que les représentations d'holonomie de τ de part et d'autre de T (d'un seul côté si T est une composante de bord) appartiennent au flot de ν. Noter que si ν est infiniment plat en 0, les temps correspondant peuvent différer d'un côté à l'autre.

On dit que τ est *net* si tous ses tores de Novikov sont nets.

Remarque. En particulier, un feuilletage net a un nombre fini de tores de Novikov.

Le modèle suivant nous servira à perturber l'holonomie d'un feuilletage au voisinage d'une feuille nette.

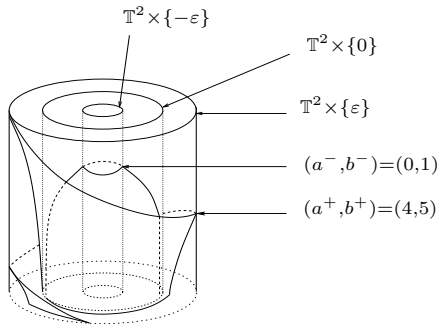
Lemme 5.8. *Une feuille torique T est nette si et seulement si elle possède un voisinage paramétré par $\mathbb{T}^2\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ où le feuilletage a une équation lisse qui s'écrit*

$$dz - u(z)(a^+dx_1 + b^+dx_2) \quad sur \quad \mathbb{T}^2 \times [0,\varepsilon[$$

et

$$dz - u(z)(a^-dx_1 + b^-dx_2) \quad sur \quad \mathbb{T}^2\times]-\varepsilon,0]$$

avec $(a^\pm, b^\pm) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et u une fonction lisse ne s'annulant qu'en 0.



Remarque. Si u n'est pas infiniment plate en 0, alors $(a^+, b^+) = (a^-, b^-)$ car l'équation est supposée $\mathcal{C}^\infty$. Si u est infiniment plate en 0 en revanche, les vecteurs (a^+, b^+) et (a^-, b^-) peuvent être différents.

Démonstration. Soit T une feuille nette et ν un champ de vecteurs lisse sur $\mathbb{R}$, de flot f^t, tel que les représentations d'holonomie $\mathbb{Z}^2 \to \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}, 0_\pm)$ définies par τ de part et d'autre de T (pour un certain paramétrage d'un voisinage de T par $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{D}^1$) associent à tout élément $(q,p) \in \mathbb{Z}^2$ la restriction de $f^{pa^\pm+qb^\pm}$ à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_\pm$, où $(a^\pm, b^\pm) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Posons $\nu(z) = u(z)\partial_z$ et considérons sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{D}^1$ le feuilletage $\bar\tau$ donné par

$$\begin{aligned} &dz - u(z)\,(a^+dx_1 + b^+dx_2) && \text{sur } \mathbb{T}^2 \times [0,1],\\ &dz - u(z)\,(a^-dx_1 + b^-dx_2) && \text{sur } \mathbb{T}^2 \times [-1,0]. \end{aligned}$$

Les feuilletages lisses τ et $\bar\tau$ ont la même représentation d'holonomie le long de T, et on construit comme dans le lemme 5.4, avec les mêmes notations, un difféomorphisme fibré $\mathcal{C}^\infty$ qui conjugue τ et $\bar\tau$ au voisinage de T. □

Le lemme suivant est un corollaire direct du théorème de Takens (cf. théorème 3.4).

Lemme 5.9. *Toute feuille torique dont la représentation d'holonomie n'est pas infiniment tangente à l'identité est nette.*

5.3 Feuilletages sur le tore épais

Dans cette section, on démontre le théorème 5.1. On rappelle que $\mathcal{S}^r(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ désigne l'espace des feuilletages de codimension 1 coorientés de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ qui sont positivement transverses à $[0,1]$ et tels que $\mathbb{T}^2 \times \{i\}$, $i = 0$ ou 1, est soit une feuille, soit transverse au feuilletage, le feuilletage induit sur $\mathbb{T}^2 \times \{i\}$ étant dans ce cas supposé linéarisable. On note $\mathcal{S}^r(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial) \subset \mathcal{S}^r(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ le sous-espace formé des feuilletages qui coïncident le long du bord avec un élément de $\mathcal{S}^r(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ donné quelconque, et $\mathcal{S}^r_0(\mathbb{T}^2 \times [0,1]) \subset \mathcal{S}^r(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ le sous-espace des feuilletages tangents au bord.

Définition 5.10. On appelle *pente* d'un feuilletage coorienté linéarisable de $\mathbb{T}^2$ la demi-droite de $H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ engendrée par la classe de cohomologie de toute forme fermée qui le définit (avec la bonne coorientation).

Lemme 5.11. *Deux feuilletages de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ sans feuille torique sont reliés par un chemin continu dans $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$.*

Ce lemme découle du résultat suivant :

Lemme 5.12. *Tout feuilletage τ de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ sans feuille torique est conjugué au feuilletage produit par l'intervalle d'un feuilletage linéarisable de $\mathbb{T}^2$, et est donc le noyau d'une forme fermée. En particulier, les feuilletages linéarisables induits par τ sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ ont la même pente.*

Preuve de 5.11 à partir de 5.12. Soient τ_0 et τ_1 deux feuilletages de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ sans feuille torique et qui coïncident le long du bord. D'après le lemme 5.12, ils sont définis par des formes fermées ω_0 et ω_1, qui satisfont $\omega_i(\partial_z) > 0$. Les formes $(1-t)\omega_0 + t\omega_1$ sont fermées, définissent le même feuilletage au bord et ne s'annulent pas puisque

$$((1-t)\omega_0 + t\omega_1)(\partial_z) > 0.$$

Elles définissent donc le chemin voulu. □

Pour démontrer le lemme 5.12, on utilise le fait suivant :

Affirmation 5.13. Étant donnée une forme fermée ω_0 sur $\mathbb{T}^2$, il existe un feuilletage sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ positivement transverse à $[0,1]$, transverse aux tores $\mathbb{T}^2 \times \{\cdot\}$, qui trace sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ le feuilletage défini par ω_0 et sur $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ un feuilletage linéaire.

Preuve de l'affirmation. Une forme fermée sur $\mathbb{T}^2$ est linéarisable par isotopie (la linéarisation découle du théorème de Poincaré-Bendixson et on obtient la linéarisation par isotopie grâce à la classification des difféomorphismes de $\mathbb{T}^2$). Ainsi, il existe une isotopie φ_t, $t \in [0,1]$, du tore $\mathbb{T}^2$ telle que $\varphi_1^*\omega_0$ soit une forme linéaire. Les formes $\omega_t = \varphi_t^*\omega_0$ sont non singulières et cohomologues. Il existe donc des fonctions f_t, $t \in [0,1]$, sur le tore telles que

$$\frac{d\omega_t}{dt} = df_t.$$

On peut supposer chaque f_t strictement positive, quitte à lui ajouter une constante c_t. On définit alors sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ la forme

$$\Omega(x,t) = \omega_t(x) + f_t(x)dt, \quad (x,t) \in \mathbb{T}^2 \times [0,1].$$

Cette forme est non singulière et son noyau en chaque point est positivement coorienté par $[0,1]$ (par positivité de f_t) et transverse à $\mathbb{T}^2 \times \{\cdot\}$ (car les formes ω_t sont non singulières). Elle trace bien le feuilletage défini par ω_0 sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ et un feuilletage linéaire sur $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$. Reste à vérifier qu'elle est intégrable. Elle est en fait fermée :

$$d\Omega = d\omega_t + dt \wedge \dot{\omega}_t + df_t \wedge dt = 0 + dt \wedge (\dot{\omega}_t - df_t) = 0,$$

le premier 0 venant de ce que les ω_t sont des formes fermées. □

Démonstration du lemme 5.12. Soit τ un feuilletage de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ sans feuille torique (donc en particulier transverse au bord). Pour prouver 5.12, l'idée est de construire un champ de vecteurs η non singulier sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ tangent à τ, transverse au bord et dont chaque orbite va d'une composante de bord à l'autre (en un temps égal à 1). Le flot de ce champ de vecteurs donnera alors une nouvelle structure produit sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ pour laquelle τ sera un feuilletage produit.

On commence par se ramener, grâce à l'affirmation 5.13, au cas où τ induit sur chaque composante de bord un feuilletage linéaire. Quitte à changer de coordonnées sur le tore, on peut supposer que τ induit déjà sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ un feuilletage linéaire. Comme τ est transverse à $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$, sur $\mathbb{T}^2 \times [1-\varepsilon, 1]$ avec ε assez petit, τ est transverse à la fois au facteur $[1-\varepsilon, 1]$ et aux tores $\mathbb{T}^2 \times \{\cdot\}$. Le feuilletage induit par τ sur $\mathbb{T}^2 \times \{1-\varepsilon\}$ est linéarisable (car isotope à celui induit sur $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$), défini par une forme fermée ω. L'affirmation 5.13 appliquée à ω donne sur $\mathbb{T}^2 \times [1-\varepsilon, 1]$ un nouveau feuilletage avec les mêmes propriétés de transversalité, dont la trace sur $\mathbb{T}^2 \times \{1-\varepsilon\}$ a pour équation ω et dont la trace sur $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ est linéaire. On vérifie facilement que ce feuilletage est isotope à $\tau|_{\mathbb{T}^2 \times [1-\varepsilon,1]}$ relativement à $\mathbb{T}^2 \times \{1-\varepsilon\}$. Ainsi, τ est isotope à un feuilletage lui aussi transverse au facteur $[0,1]$ qui induit sur chaque composante de bord un feuilletage linéaire.

On suppose donc maintenant que τ trace sur le bord de $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ des feuilletages linéaires. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées sur le tore, on peut supposer que le feuilletage par cercles $\{\cdot\} \times \mathbb{S}^1 \times \{i\}$ de $\mathbb{T}^2 \times \{i\}$, $i = 0, 1$, est transverse à la trace de τ sur $\mathbb{T}^2 \times \{i\}$. Le feuilletage τ, transverse au facteur $[0,1]$, trace alors sur chaque anneau $A_\theta = \{\theta\} \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, un feuilletage (non singulier) $\tau \cap A_\theta$ transverse au bord et au facteur $[0,1]$. Grâce à une partition de l'unité, on peut construire un champ de vecteurs ν sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ tangent au feuilletage τ ainsi qu'à chaque composante de bord et satisfaisant $d\theta(\nu) = 1$. Le flot φ^t de ν au temps t envoie chaque anneau feuilleté $(A_\theta, \tau \cap A_\theta)$ sur $(A_{\theta+t}, \tau \cap A_{\theta+t})$, avec $A_{\theta+1} = A_\theta$.

On se place maintenant dans un anneau A_θ. D'après Poincaré-Bendixson, soit toutes les feuilles de $\tau \cap A_\theta$ vont d'un bord à l'autre de A_θ, soit $\tau \cap A_\theta$ a

des feuilles circulaires isotopes aux composantes de bord. Supposons que $\tau \cap A_\theta$ ait de telles feuilles, et notons C la plus proche de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Alors φ^1 envoie nécessairement C sur elle-même, et $\bigcup_{t\in[0,1]} \varphi^t(C)$ forme une feuille torique de τ, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, toute feuille de $\tau \cap A_\theta$ va d'un bord à l'autre de A_θ.

Il existe un champ de vecteurs non singulier sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ tangent au feuilletage de dimension 1 ainsi défini et on obtient le champ η recherché (cf. début de la preuve) en renormalisant ce champ de sorte que le temps de parcours de chaque orbite soit égal à 1. Par suite, le feuilletage τ est conjugué au feuilletage produit par l'intervalle d'un feuilletage linéarisable de $\mathbb{T}^2$, et donc défini par une forme fermée.

Les pentes des feuilletages induits par τ sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ sont bien les mêmes car, pour $j \in \{0,1\}$, l'application

$$\iota_j^* \colon \mathbb{R}^2 = H^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1]) \to H^1(\mathbb{T}^2 \times \{j\}) = \mathbb{R}^2$$

induite par l'inclusion $\iota_j \colon \mathbb{T}^2 \times [0,1] \to \mathbb{T}^2 \times \{j\}$ est l'identité. □

Lemme 5.14. *Deux feuilletages de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ ayant pour seule feuille torique $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ sont reliés par un chemin continu dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$.*

Démonstration. Soient τ_0 et τ_1 les feuilletages considérés. L'holonomie de τ_i, $i = 0,1$, le long de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ est donnée par deux germes f_i, $g_i \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}_+, 0)$ qui commutent et ont 0 comme unique point fixe commun. D'après le corollaire 1.4, f_i et g_i sont les temps a_i et b_i du flot d'un champ de vecteurs $\nu_i = u_i \partial_z$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0. On peut de plus supposer $u_i \geq 0$.

Le feuilletage $\mathcal{C}^1$ défini par l'equation

$$dz - u_i(z)(a_i dx_1 + b_i dx_2) \quad \text{sur} \quad \mathbb{T}^2 \times [0,1] \tag{5.1}$$

a la même représentation d'holonomie que τ_i le long de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. D'après le lemme 5.5, on peut déformer τ_i continûment dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ par isotopie en un feuilletage τ_i' d'équation (5.1) sur un voisinage $\mathbb{T}^2 \times [0,\varepsilon]$ de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$.

Observons maintenant que (a_1, b_1) est nécessairement un multiple positif de (a_0, b_0). En effet, pour $i \in \{0,1\}$, $\tau_i' |_{T^2 \times [\varepsilon,1]}$ n'a pas de feuille torique. D'après le lemme 5.12, les feuilletages induits par τ_i' sur $\mathbb{T}^2 \times \{\varepsilon\}$ et $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ ont la même pente. Comme τ_0' et τ_1' coïncident le long de $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$, ceci implique que les feuilletages tracés par τ_0' et τ_1' sur $\mathbb{T}^2 \times \{\varepsilon\}$ ont la même pente, *i.e.* exactement que (a_1, b_1) est un multiple positif de (a_0, b_0). Quitte a multiplier u_1 par une constante positive, on peut donc supposer que $(a_0, b_0) = (a_1, b_1)$.

Soit $\bar{u}_t$, $t \in [0,1]$, un chemin continu de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\varepsilon]$ ne s'annulant qu'en 0, telles que $\bar{u}_0 = u_0$ sur $[0,\varepsilon]$, $\bar{u}_t = u_0$ au voisinage de ε pour tout t et $\bar{u}_1 = u_1$ sur $[0,\varepsilon/2]$. On construit grâce à ces fonctions un chemin continu dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ entre τ_0' et un feuilletage τ_0'' qui coïncide avec τ_0' sur $\mathbb{T}^2 \times [\varepsilon,1]$ et avec τ_1' sur $\mathbb{T}^2 \times [0,\varepsilon/2]$. Les feuilletages τ_0'' et τ_1' n'ayant en outre pas de feuille torique dans $\mathbb{T}^2 \times [\varepsilon/2,1]$, on peut les relier par un chemin continu dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ d'après le lemme 5.11, ce qui conclut la preuve du lemme 5.14.

Notons au passage que τ_0', et donc τ_0, peut être relié à un feuilletage net : il suffit pour cela de déformer u_0 au voisinage de 0 en une fonction lisse, grâce à un chemin continu de fonctions $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant qu'en 0. On énonce cette observation dans le corollaire 5.16 ci-dessous. □

Remarque 5.15. Si les feuilletages initiaux τ_0 et $\tau_1 \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ ont une représentation d'holonomie $\mathcal{C}^1$-tangente à l'identité en 0, les fonctions u_0 et u_1 sont $\mathcal{C}^1$-plates en 0 et tous les feuilletages du chemin reliant τ_0 à τ_1 sont $\mathcal{C}^1$-plats le long de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$.

Corollaire 5.16. *Tout feuilletage de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ ayant pour seule feuille torique $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ est relié à un feuilletage net par un chemin continu dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$.*

Le lemme suivant découle directement du théorème 3.1 et du lemme 5.4.

Lemme 5.17. *Deux feuilletages quelconques de $\mathcal{S}_0^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ sont reliés par un chemin continu dans $\mathcal{S}_0^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$.*

Remarque 5.18. Il découle également du théorème 3.1 et du lemme 5.4 que si les deux feuilletages donnés sont infiniment plats au bord, les feuilletages du chemin sont $\mathcal{C}^1$-plats au bord.

Comme $\mathcal{S}_0^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ contient clairement un feuilletage net, par exemple d'équation $dz - u(z)dx_1$, avec $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lisse ne s'annulant qu'en 0 et 1, le lemme 5.17 entraîne directement :

Corollaire 5.19. *Tout feuilletage de $\mathcal{S}_0^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ est relié à un feuilletage net par un chemin continu dans $\mathcal{S}_0^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$.*

Démonstration du théorème 5.1. On traite seulement le cas de feuilletages transverses aux deux bords, les autres cas étant similaires.

Soit $\tau \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ transverse au bord. On peut perturber τ par une isotopie lisse (par exemple grâce au lemme 5.4) de sorte que ses feuilles toriques soient toutes de la forme $\mathbb{T}^2 \times \{z\}$, $z \in]0,1[$. On note $[a,b]$ le plus petit segment contenant tous ces z (s'il en existe).

Si la représentation d'holonomie de τ n'est pas infiniment tangente à l'identité en a et b, d'après le lemme 5.9, les feuilles $\mathbb{T}^2 \times \{a\}$ et $\mathbb{T}^2 \times \{b\}$ sont nettes, et on perturbe facilement l'équation du feuilletage au voisinage de ces feuilles (cf. 5.8) pour se ramener au cas infiniment plat.

D'après le lemme 5.17, on peut relier τ au feuilletage trivial par les $\mathbb{T}^2 \times \{\cdot\}$ dans $\mathbb{T}^2 \times [a,b]$ par un chemin continu dans $\mathcal{S}_0^1(\mathbb{T}^2 \times [a,b])$, formé de feuilletages $\mathcal{C}^1$-plats au bord (cf. remarque 5.18). On peut alors écraser le paquet de feuilles compactes $\mathbb{T}^2 \times [a,b]$ sur une unique feuille compacte $\mathbb{T}^2 \times \{c\}$, tout en dilatant le feuilletage de $\mathbb{T}^2 \times ([0,1] \backslash]a,b[)$, et ce par un chemin continu dans $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$. Notons qu'on peut rendre nette la feuille $\mathbb{T}^2 \times \{c\}$ du feuilletage final en appliquant le corollaire 5.16 de part et d'autre.

Soient maintenant τ_0 et $\tau_1 \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$ qui coïncident le long du bord et lui sont transverses. Si ces deux feuilletages ont des feuilles toriques, on applique à chacun le procédé ci-dessus, et on relie les deux feuilletages obtenus en appliquant le lemme 5.14 de part et d'autre de $\mathbb{T}^2 \times \{c\}$.

Si ni l'un ni l'autre n'a de feuille torique, le lemme 5.11 permet de les relier.

Reste à traiter le cas où l'un a des feuilles toriques et l'autre non. Supposons que τ_0 a des feuilles toriques. On lui applique le procédé ci-dessus, qui donne un feuilletage τ_0' avec une seule feuille torique $\mathbb{T}^2 \times \{c\}$, qu'on peut supposer nette et de représentation d'holonomie infiniment tangente à l'identité. D'après le lemme 5.8, ce feuilletage a alors une équation du type

$$dz - u(z-c)(a^\pm dx_1 + b^\pm dx_2), \quad z - c \in \mathbb{R}_\pm,$$

au voisinage de $\mathbb{T}^2 \times \{c\}$, avec u une fonction lisse positive s'annulant seulement en 0 où elle est infiniment plate. Mais (comme dans la preuve du lemme 5.14) le fait que τ_0 (et donc τ_0') coïncide avec τ_1 au bord, que τ_0 n'ait pas d'autre feuille compacte que $\mathbb{T}^2 \times \{c\}$ et que τ_1 n'en ait aucune entraîne $(a^+, b^+) = (a^-, b^-) = (a, b)$ (quitte à multiplier la fonction u d'un côté par une constante positive, ce qui n'altère pas sa régularité puisqu'elle est infiniment plate en 0). L'équation de τ_0' au voisinage de $\mathbb{T}^2 \times \{c\}$ s'écrit alors

$$dz - u(z-c)(adx_1 + bdx_2) = 0.$$

On perturbe u (et donc τ_0') au voisinage de 0 par un chemin continu de fonctions lisses u_t (donnant des feuilletages lisses τ_t'), $t \in [0,1]$, satisfaisant $u_0 = u$, $u_t = u$ en dehors d'un voisinage de 0 et $u_t > 0$ pour tout $t > 0$. Le feuilletage τ_1' coïncide toujours avec τ_1 au bord de $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ et n'a pas de feuille compacte. Le lemme 5.11 permet alors de conclure. □

Le résultat suivant est un corollaire direct de la démonstration du théorème 5.1.

Corollaire 5.20. *Tout feuilletage de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$ peut être relié à un feuilletage net par un chemin continu dans $\mathcal{S}^1(\mathbb{T}^2 \times [0,1], \partial)$.*

5.4 Nettoyage sur une variété close

Cette section a pour but de démontrer le théorème 5.2. Pour cela, on a besoin du :

Lemme 5.21. *Soit τ un feuilletage lisse coorienté de codimension 1 sur une variété close M de dimension 3 et T une feuille torique de τ dont un collier du côté positif ne rencontre pas de feuille compacte. Alors il existe un plongement lisse $\varphi : \mathbb{T}^2 \times [0,1] \to M$ tel que $\varphi(\mathbb{T}^2 \times \{0\}) = T$ et $\varphi^*\tau \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,1])$.*

Démonstration. Soit $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ un collier paramétré de $T = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ du côté positif sur lequel τ est transverse à $[0,1]$. L'holonomie de τ le long de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$

est donnée par deux germes f, $g \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}_+, 0)$ qui commutent et ont 0 comme unique point fixe commun. D'après le corollaire 1.4, f et g sont les temps a et b du flot d'un champ de vecteurs $\nu = u\partial_z$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0.

Le feuilletage $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ et lisse sur $\mathbb{T}^2 \times]0,1]$ défini par l'equation

$$dz - u(z)(adx_1 + bdx_2) \tag{5.2}$$

a la même représentation d'holonomie que τ le long de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. D'après le lemme 5.5 et la remarque 5.6, il existe un difféomorphisme ψ de $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ ayant les propriétés suivantes :

- ψ est de la forme $(x,z) \in \mathbb{T}^2 \times [0,1] \mapsto (x, \psi_x(z))$;
- ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{T}^2 \times]0,1]$;
- le feuilletage $\tau' = \psi^*\tau$ a pour équation (5.2) sur un voisinage $\mathbb{T}^2 \times [0,\varepsilon]$ de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ et coïncide avec τ près de $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$.

En particulier, comme τ' trace sur $\mathbb{T}^2 \times \{\varepsilon\}$ un feuilletage linéaire, τ trace sur $\psi(\mathbb{T}^2 \times \{\varepsilon\})$ un feuilletage défini par une forme fermée. Pour obtenir le plongement souhaité, il suffit de reparamétrer fibre à fibre et de façon lisse la région comprise entre $T = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ et $\psi(\mathbb{T}^2 \times \{\varepsilon\}) = \{(x, \psi_\varepsilon(x)),\ x \in \mathbb{T}^2\}$ par $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Ceci est possible car la fonction $x \mapsto \psi_x(\varepsilon)$ est lisse. □

Démonstration du théorème 5.2. Soit M une variété close de dimension 3, τ un feuilletage lisse coorienté sur M et $\bigcup_{i=1}^n \mathbb{T}^2 \times J_i$ les ensembles saturés disjoints donnés par la proposition 4.8. On suppose bien entendu que chacun de ces ensembles contient *vraiment* un tore de Novikov de τ. Le lemme 5.21 montre qu'il existe des voisinages compacts disjoints de ces ensembles, paramétrés par $\mathbb{T}^2 \times I_i$, $\operatorname{Int} I_i \supset J_i$, sur lesquels τ est transverse au second facteur ainsi qu'au bord et induit sur chaque composante de $\mathbb{T}^2 \times \partial I_i$ un feuilletage linéarisable. Notons que par tout point $p \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{T}^2 \times I_i$ passe une transversale fermée C à τ disjointe de $\bigcup_{i=1}^n \mathbb{T}^2 \times J_i$ (car chaque composante de $\mathbb{T}^2 \times \partial J_i$ est un tore de Novikov). Il passe donc aussi par p une transversale fermée disjointe de $\bigcup_{i=1}^n \mathbb{T}^2 \times I_i$: on l'obtient soit en poussant C hors des $\mathbb{T}^2 \times I_i$ à l'aide des lemmes 5.11 et 5.14, soit en remplaçant chaque arc d'intersection de $C \cap \mathbb{T}^2 \times I_i$ par un arc sur $\mathbb{T}^2 \times \partial I_i$ transverse à τ (il en existe car le feuilletage induit est linéarisable).

Le corollaire 5.20 appliqué à τ dans chaque $\mathbb{T}^2 \times I_i$ fournit un feuilletage τ' qui coïncide avec τ hors de $\bigcup_{i=1}^n \mathbb{T}^2 \times I_i$ et a dans chaque $\mathbb{T}^2 \times I_i$ une seule feuille compacte qui est un tore net. La remarque précédente sur les transversales montre que τ' est net. □

Chapitre 6

Théorème de Larcanché et feuilletages agréables

Tous les feuilletages et les difféomorphismes considérés dans ce chapitre sont lisses (*i.e.* $\mathcal{C}^\infty$).

6.1 Feuilletages en suspension au-dessus du pantalon

Pour une variété B (éventuellement à bord), on note $\mathcal{S}(B \times \mathbb{S}^1)$ ($\mathcal{S}$ pour « suspension ») l'espace des feuilletages de codimension 1 sur $B \times \mathbb{S}^1$ transverses au facteur $\mathbb{S}^1$. On désigne par $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ le revêtement universel du groupe $\mathcal{D}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$, *i.e* le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ qui préservent l'orientation et commutent à la translation de 1.

Soit τ un feuilletage de $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$. Observons pour commencer que le transport le long des feuilles de τ définit une famille continue de difféomorphismes d'holonomie

$$\psi_x : \mathbb{S}^1 = \{0\} \times \mathbb{S}^1 \to \{x\} \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1, \quad x \in \mathbb{R},$$

vérifiant $\psi_0 = \mathrm{Id}$ et $\psi_{x+1} = \psi_x \circ \psi_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette famille est même lisse au sens où l'application $(x, y) \mapsto \psi_x(y)$ est lisse. Inversement, tout chemin ψ_x vérifiant les conditions ci-dessus définit un feuilletage lisse sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. En outre l'arc ψ_x, $x \in \mathbb{R}$, se relève dans $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ en un arc lisse f_x issu de l'identité, et on définit l'holonomie de τ comme le difféomorphisme $h(\tau) = f_1$.

On note $\mathcal{G}$ la composante neutre du groupe des difféomorphismes de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ qui sont l'identité sur le premier facteur et qui fixent $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ point par point.

Lemme 6.1. *L'application d'holonomie*

$$h : \mathcal{S}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$$

est une fibration triviale dont les fibres sont les orbites du groupe $\mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $\rho : [0,1] \to [0,1]$ une fonction lisse valant 0 près de 0 et 1 près de 1. Étant donné $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$, on lui associe l'arc f_x, $x \in \mathbb{R}$, défini par :

$$\begin{aligned} f_x &= (1-\rho(x))\,\mathrm{Id} + \rho(x) f && \text{pour tout } x \in [0,1], \\ f_{x+1} &= f_x \circ f && \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par construction, le feuilletage τ défini par l'arc f_x vérifie $h(\tau) = f$ donc les formules ci-dessus donnent une section de l'application h. Soit maintenant $\tau' \in \mathcal{S}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ un feuilletage quelconque tel que $h(\tau') = h(\tau) = f$. Alors τ' est donné par un arc $f'_x \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ entre $f'_0 = \mathrm{Id}$ et $f'_1 = f$. Pour tout x, on pose $\varphi_x = f'_x \circ f_x^{-1}$. Il est facile de voir que l'application $(x,y) \mapsto (x, \varphi_x(y))$ induit un élément de $\mathcal{G}$ qui envoie τ sur τ'. □

Dans ce qui suit, $\mathbb{P}$ désigne le pantalon (orienté) obtenu en ôtant au disque unité $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ l'intérieur des disques $D_\pm$ de rayon $1/4$ centrés en $\pm(1/2, 0)$. On pose $\partial_\pm \mathbb{P} = \partial D_\pm$ (orientés à l'opposé de $\partial \mathbb{P}$) et $\partial_0 \mathbb{P} = \partial \mathbb{D}^2$. Le lemme 6.2 a pour but de préciser l'affirmation suivante : étant donnés deux feuilletages $\tau_\pm$ transverses au facteur $\mathbb{S}^1$ respectivement sur $\partial_\pm \mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$, on peut les prolonger en un feuilletage de $\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ transverse à $\mathbb{S}^1$ et réaliser cette extension continûment en fonction des données.

Soit $V \subset \mathbb{P}$ l'union des deux segments qui joignent $(0,-1) \in \partial \mathbb{D}^2$ à $\pm(1/4, 0) \subset \partial_\pm \mathbb{P}$ respectivement, et $\mathcal{S}_0(\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1)$ le sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1)$ formé des feuilletages qui induisent sur $V \times \mathbb{S}^1$ le feuilletage horizontal par les $V \times \{\cdot\}$. On note $\mathcal{G}_0$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ fibrés au-dessus de l'identité et qui induisent l'identité sur $(V \cup \partial_\pm \mathbb{P}) \times \mathbb{S}^1$. Le groupe $\mathcal{G}_0$ est contractile et opère sur $\mathcal{S}_0(\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1)$. En utilisant $V \cap \partial_i \mathbb{P}$ comme point base sur $\partial_i \mathbb{P}$, $i \in \{+,-,0\}$, on obtient des applications d'holonomie $h_i : \mathcal{S}_0(\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1) \to \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$, $h_i(\tau) = h(\partial_i \tau)$, où $\partial_i \tau$ désigne le feuilletage induit par τ sur $\partial_i \mathbb{P}$, qui vérifient $h_0(\tau) = h_-(\tau) \circ h_+(\tau)$.

Lemme 6.2. *L'application de restriction*

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0(\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1) \to \mathcal{S}(\partial_- \mathbb{P} \times \mathbb{S}^1) \times \mathcal{S}(\partial_+ \mathbb{P} \times \mathbb{S}^1) \\ \qquad \tau \mapsto (\partial_- \tau, \partial_+ \tau) \end{cases}$$

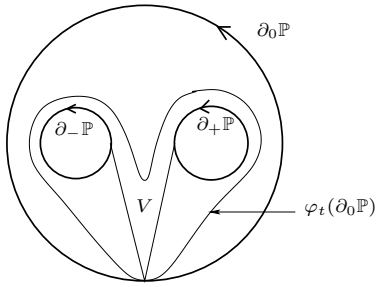
est une fibration triviale dont les fibres sont les orbites de $\mathcal{G}_0$.

Démonstration. Il existe une famille φ_t, $t \in [0,1]$, d'applications de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ ayant les propriétés suivantes :

- $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et φ_t pour tout $t \in [0,1]$ induit l'identité sur $V \cup \partial_\pm \mathbb{P}$,
- φ_1 envoie $\mathbb{P}$ dans $V \cup \partial_\pm \mathbb{P}$ et φ_t est un plongement pour tout $t < 1$.

L'homotopie de rétraction φ_t se relève sur $\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ en une homotopie $\widetilde{\varphi}_t = \varphi_t \times \mathrm{Id}$ préservant chaque $\mathbb{P} \times \{\cdot\}$.

Soient $(\tau_-, \tau_+) \in \mathcal{S}(\partial_- \mathbb{P} \times \mathbb{S}^1) \times \mathcal{S}(\partial_+ \mathbb{P} \times \mathbb{S}^1)$. On prolonge $\tau_- \cup \tau_+$ en un feuilletage de $(V \cup \partial_- \mathbb{P} \cup \partial_+ \mathbb{P}) \times \mathbb{S}^1$ horizontal au dessus de V. On le prolonge « trivialement » à un petit voisinage, et on définit τ comme l'image inverse de ce prolongement par $\widetilde{\varphi}_t$ pour t assez proche de 1. Ceci définit une section continue de l'application $\partial_\pm := (\partial_-, \partial_+)$. Un argument similaire à celui de la preuve de 6.1 permet d'identifier les fibres de l'application $\partial_\pm$ aux orbites de $\mathcal{G}_0$. □



6.2 Feuilletages de Larcanché dans le tore plein

On se pose maintenant la question suivante : est-il possible de prolonger tout feuilletage de $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ transverse au facteur $\mathbb{S}^1$ en un feuilletage de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ et, si oui, comment faire concrètement ? Un théorème de W. Thurston [Th2] répond affirmativement à la première partie mais ne propose pas de méthode pratique. On présente ici une construction d'A. Larcanché [La] qui offre une « solution géométrique explicite » variant continûment avec la donnée au bord. Cette construction est un ingrédient crucial pour fabriquer des familles à un ou plusieurs paramètres de feuilletages.

Remarque 6.3. Le disque étant simplement connexe, le seul feuilletage de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, à isotopie fibrée près, transverse à $\mathbb{S}^1$ est le feuilletage par les disques méridiens $\mathbb{D}^2 \times \{\cdot\}$. Autrement dit, seul le feuilletage de $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ d'holonomie triviale se prolonge à $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ en un feuilletage transverse à $\mathbb{S}^1$. Les prolongements qu'on décrit ci-après ne sont donc pas partout transverses à $\mathbb{S}^1$.

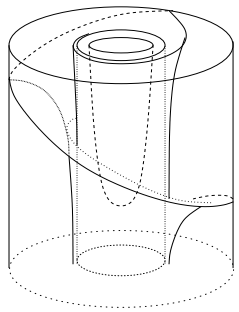
Soit $\mathcal{S}_\partial = \mathcal{S}_\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)$ l'ensemble des feuilletages de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ transverses au facteur $\mathbb{S}^1$ *près du bord* et soit $h_\partial \colon \mathcal{S}_\partial \to \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ l'application continue qui, à tout feuilletage τ de $\mathcal{S}_\partial$, associe l'holonomie $h_\partial(\tau)$ de sa restriction au bord $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Théorème 6.4 (Larcanché [La])**.** *L'application $h_\partial \colon \mathcal{S}_\partial \to \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ admet une section continue $\ell : \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1) \to \mathcal{S}_\partial$ ayant en outre la propriété que, pour tout $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$, le champ de plans tangent au feuilletage $\ell_f := \ell(f)$ est homotope relativement au bord à un champ de plans transverse au facteur $\mathbb{S}^1$.*

Avant de démontrer ce théorème, rappelons une construction classique pour étendre dans $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ un feuilletage linéarisable de $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Elle consiste à épaissir le feuilletage sur un voisinage du bord et à faire spiraler les feuilles autour d'une feuille torique qu'on remplit alors par une composante de Reeb (cf. figure suivante).

Décrivons maintenant analytiquement cette construction, qui sera appelée remplissage par un feuilletage de Reeb. Comme dans [Th2], notons (r, φ) les coordonnées polaires sur $\mathbb{D}^2$, θ la coordonnée sur $\mathbb{S}^1$, et considérons une partition de l'unité $\{\lambda_0, \lambda_{1/2}, \lambda_1\}$ sur $[0, 1]$ vérifiant les conditions suivantes :

– λ_1 vaut 1 près de 1 et 0 exactement sur $[0, 1/2]$;



– $\lambda_{1/2}$ vaut 1 près de 1/2 et 0 près de $\{0,1\}$;
– λ_0 vaut 1 près de 0 et 0 exactement sur $[1/2,1]$.

Lemme 6.5. *Pour toute* 1*-forme fermée non-singulière* ω *sur* $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$*, la* 1*-forme*

$$\bar{\omega} = \lambda_1(r)\,\omega + \lambda_{1/2}(r)\,dr + \lambda_0(r)\,d\theta$$

est non singulière, intégrable sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ *et induit* ω *sur le bord. De plus, si* $w(\partial_\theta) > 0$*, les* 1*-formes*

$$\bar{\omega}_t = \lambda_1(r)\,\omega + \lambda_{1/2}(r)\,(t\,d\theta + (1-t)\,dr) + \lambda_0(r)\,d\theta, \quad t \in [0,1],$$

sont toutes non singulières, intégrables si $\omega = d\theta$ *(mais pas en général) et définissent une homotopie de champs de plans relative au bord qui relie le champ tangent au feuilletage à un champ de plans transverse au facteur* $\mathbb{S}^1$*.*

Remarque 6.6. En particulier, si $\omega = d\theta$, l'homotopie $\bar{\omega}_t$ définit un chemin de feuilletages entre le feuilletage produit par disques méridiens et un feuilletage avec une composante de Reeb.

Pour démontrer son résultat, l'ingrédient clé utilisé par A. Larcanché est le théorème suivant de M. Herman [He], dans lequel $T_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne la translation $x \mapsto x + \lambda$.

Théorème 6.7. *Soit* $\mu = (1+\sqrt{5})/2$ *le nombre d'or. Il existe une application continue*

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R} \times \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1) \\ \qquad f \mapsto (\lambda_f, g_f) \end{cases}$$

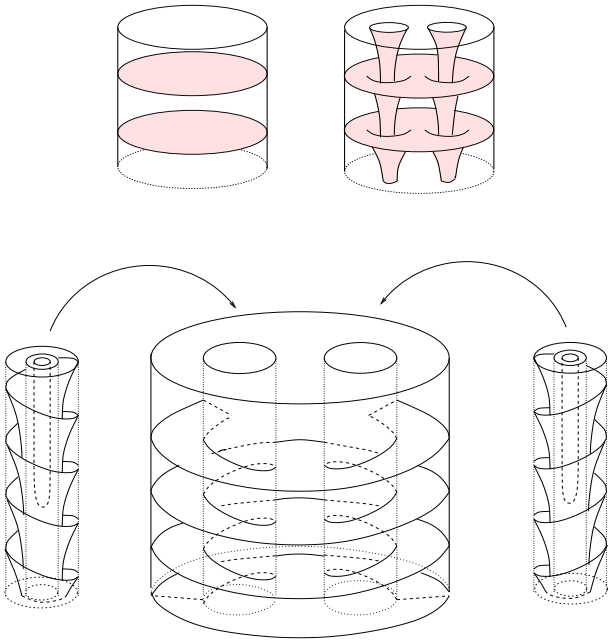
telle que $f = T_{\lambda_f} \circ (g_f^{-1} \circ T_\mu \circ g_f)$ *pour tout* $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$*, et* $(\lambda_{\mathrm{Id}}, g_{\mathrm{Id}}) = (-\mu, \mathrm{Id})$*.*

Remarque. En fait, Herman prouve ce résultat pour tout nombre μ dans un ensemble de mesure totale et les travaux de J.-C. Yoccoz [Yo] montrent qu'il est vrai pour tout nombre μ diophantien. Dans la suite, nous aurons seulement besoin qu'il soit valable pour au moins un μ.

Démonstration de 6.4. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$. On définit sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ deux formes fermées $\omega_+ = g_f'(\theta)d\theta - \mu d\varphi$ et $\omega_- = d\theta - \lambda_f d\varphi$, qui définissent des feuilletages

d'holonomies respectives $g_f^{-1} \circ T_\mu \circ g_f$ et T_{λ_f}. D'après le lemme 6.2, il existe un feuilletage τ de $\mathcal{S}_0(\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1)$ dont les restrictions $\partial_\pm \tau$ à $\partial_\pm \mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ sont les feuilletages définis par les formes $\omega_\pm$ et dont la restriction $\partial_0 \tau$ à $\partial_0 \mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ a pour holonomie $f = T_{\lambda_f} \circ (g_f^{-1} \circ T_\mu \circ g_f)$. On applique ensuite le lemme de remplissage de Reeb 6.5 aux formes $\omega_\pm$ pour définir ℓ_f dans $D_\pm \times \mathbb{S}^1$. □

Remarque 6.8. Comme prévu (cf. remarque 6.3) le prolongement ℓ_{Id} du feuilletage de $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ par cercles méridiens n'est pas le feuilletage par disques méridiens, mais il lui est homotope relativement au bord *parmi les feuilletages* $\mathcal{C}^\infty$ (cf. figure ci-dessous). En effet, étant donné le feuilletage produit sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, on creuse deux composantes de Reeb parallèles dans $D_\pm \times \mathbb{S}^1$ (cf. remarque 6.6). On fait varier la pente des feuilletages induits sur $\partial D_\pm$ de 0 à $\pm\mu$ respectivement. Cette déformation se prolonge à $\mathbb{P} \times \mathbb{S}^1$ d'après 6.2, et à $D_\pm \times \mathbb{S}^1$ d'après 6.5.



6.3 Feuilletages agréables sur les fibrés en cercles

On s'intéresse ici à des feuilletages particuliers sur les variétés fibrées en cercles au-dessus des surfaces et on montre, à l'aide du théorème de Larcanché, que ces feuilletages forment un espace connexe.

Définition 6.9. Soit $\pi\colon M \to S$ un fibré en cercles orientés au-dessus d'une surface orientable S.

On dit qu'un feuilletage (coorienté) τ sur M est *agréable* s'il est positivement transverse aux fibres sauf au-dessus d'un nombre fini de courbes fermées simples $C_i \subset S$ dont les préimages $\pi^{-1}(C_i)$ sont des feuilles toriques nettes de τ.

Exemple 6.10. Si $\omega(\partial_\theta) > 0$, la forme $\bar{\omega}$ du lemme 6.5 définit un feuilletage agréable sur le fibré trivial $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{D}^2$. Par construction, tout élément de l'image de la section de Larcanché ℓ (cf. théorème 6.4) est également un feuilletage agréable sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Définition 6.11. Soit $\pi\colon M \to S$ un fibré en cercles orientés au-dessus d'une surface orientable S, et $D \subset \operatorname{Int} S$ un disque.

On appelle *feuilletage de Larcanché concentré sur* D, tout feuilletage agréable sur M qui est transverse aux fibres hors de $\pi^{-1}(D)$ et, sur $\pi^{-1}(D)$, est dans l'image de la section de Larcanché ℓ du théorème 6.4 – pour un certain paramétrage fibré fixé de $\pi^{-1}(D)$ par $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

On note $\mathcal{A}(M)$ l'espace des feuilletages agréables sur M et $\mathcal{A}(M, \partial) \subset \mathcal{A}(M)$ le sous-espace de ceux qui impriment sur le bord un feuilletage donné, transverse aux fibres.

Théorème 6.12. *Pour tout fibré M en cercles orientés au-dessus d'une surface compacte, les espaces $\mathcal{A}(M)$ et $\mathcal{A}(M, \partial)$ sont connexes.*

En fait, les espaces $\mathcal{A}(M)$ et $\mathcal{A}(M, \partial)$ sont contractiles mais la preuve de ce résultat plus général nécessite quelques efforts techniques supplémentaires.

Remarque 6.13. Ce théorème est une généralisation du théorème suivant de Larcanché [La] : l'inclusion $\mathcal{S}(M) \to \mathcal{F}(M)$ de l'espace des feuilletages transverses aux fibres dans celui de tous les feuilletages est une application homotope à une constante.

Le lemme suivant servira dans la démonstration du théorème 6.12 pour éliminer des feuilles compactes.

Lemme 6.14. *Soient $\pi\colon M \to S$ un fibré en cercles orientés au-dessus de l'anneau $S = \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$ et τ un feuilletage agréable sur M ayant pour seule feuille torique $\pi^{-1}(C)$, où $C = \{0\} \times \mathbb{S}^1$. On peut relier τ à un feuilletage transverse aux fibres par une homotopie de feuilletages agréables relative à un voisinage de l'une quelconque des composantes de bord.*

Démonstration. Il suffit de construire la déformation près du tore $T = \pi^{-1}(C)$ car on peut y rétracter M par une isotopie fibrée préservant τ (tout champ de vecteurs qui rétracte l'anneau S sur un voisinage de C se relève en un champ de vecteurs sur M tangent au feuilletage qui rétracte M sur un voisinage de $\pi^{-1}(C)$). Par hypothèse de netteté, T possède un voisinage W muni de coordonnées $(z, \varphi, \theta) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dans lesquelles $T = \{z = 0\}$ et τ a pour équation

$$dz - u(z)\big(a(z)\,d\theta + b(z)\,d\varphi\big),$$

où $u\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ s'annulant en 0 (et pas ailleurs), et $(a, b)\colon [-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une fonction localement constante, et même

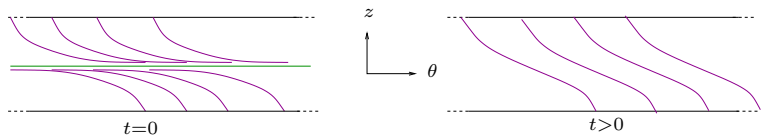
constante si u n'est pas infiniment plate en 0. Notons que, dans tous les cas, les fonctions au et bu sont $\mathcal{C}^\infty$.

Décrivons maintenant l'allure qu'aura, dans W, la déformation de τ qu'on va réaliser. Pour cela, quitte à faire un changement linéaire des coordonnées $(\varphi, \theta) \in \mathbb{T}^2$ sur T, on suppose que les fibres de $\pi\,|_T$ ont pour classe d'homologie $(0, 1)$. On verra plus loin que la transversalité de τ aux fibres de π en dehors de T assure que le produit au est négatif sauf en 0.

Si le vecteur (a, b) est constant, u a le même signe à gauche et à droite de 0 et on peut donc en trouver une déformation u_t, $t \in [0, 1]$, formée de fonctions sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ qui, pour $t > 0$, ne s'annulent pas et coïncident avec $u_0 = u$ près du bord. Les équations

$$dz - u_t(z)\,(a\,d\theta + b\,d\varphi)$$

définissent alors sur W des feuilletages τ_t qui, pour $t > 0$, n'ont pas de feuille compacte. La figure ci-dessous représente la trace de ces feuilletages dans un anneau $\varphi = \text{cte}$.



Si le vecteur (a, b) prend des valeurs différentes à gauche et à droite, respectivement (a^-, b^-) et (a^+, b^+), la fonction u est infiniment plate en 0 et, quitte à la multiplier par a^- sur $[-\varepsilon, 0]$ et par a^+ sur $[0, \varepsilon]$ (ce qui la laisse $\mathcal{C}^\infty$), on suppose qu'elle est positive sauf en 0 et que $a^- = a^+ = 1$. On choisit alors un chemin $b_t^- \in \mathbb{R}$ entre $b_0^- = b^-$ et $b_1^- = b^+$. Les feuilletages τ_t définis, pour $t \in [0, 1]$, par

$$\begin{aligned} &dz - u(z)\,(d\theta + b_t^- d\varphi) && \text{sur } [-\varepsilon, 0] \times \mathbb{T}^2, \\ &dz - u(z)\,(d\theta + b^+ d\varphi) && \text{sur } [0, \varepsilon] \times \mathbb{T}^2, \end{aligned}$$

constituent alors une déformation de $\tau = \tau_0$ qui ramène au cas traité précédemment où le vecteur (a, b) est constant.

Pour démontrer le lemme à partir de ces déformations types, il faut avoir un voisinage modèle W « compatible » avec la fibration π afin que tous les feuilletages décrits plus haut soient transverses aux fibres en dehors de T. On construit ci-dessous un voisinage W dans lequel chaque fibre de π assez proche de T est contenue dans un anneau $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \{\cdot\} \times \mathbb{S}^1$ et transverse au facteur $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Elle a donc, dans cet anneau, une équation du type $z = z(\theta)$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, et, en un maximum de z, la transversalité de τ aux fibres garantit la négativité de au hors de 0. Vérifions que dans un tel voisinage modèle, les feuilletages des deux types de déformations décrites précédemment sont transverses aux fibres.

Les feuilletages d'une déformation du premier type (*i.e* lorsque (a, b) est constant) sont tous transverses aux anneaux $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \{\cdot\} \times \mathbb{S}^1$ et y tracent des feuilletages d'équation $dz - au_t(z)d\theta$. Une fibre dans un tel anneau a une équation du type $z = z(\theta)$, $\theta \in \mathbb{S}^1$, et est positivement transverse au feuilletage

initial, de sorte que $z'(\theta) > au(z(\theta))$. Comme au est négatif, on peut choisir u_t satisfaisant $au_t(z) < au(z) < 0$ pour tout $z \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, et alors $z'(\theta) > au_t(z(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, ce qui signifie que la fibre considérée reste transverse à tous les feuilletages de la déformation.

Les feuilletages d'une déformation du deuxième type sont eux aussi transverses aux anneaux $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \{\cdot\} \times \mathbb{S}^1$, mais y tracent cette fois-ci un feuilletage *fixe* transverse aux fibres (puisque le feuilletage initial τ est transverse aux fibres). Ces feuilletages sont donc transverses aux fibres.

On construit maintenant W. On note (r, φ) les coordonnées sur $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$ et on trivialise π, ce qui donne sur M des coordonnées globales $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dans lesquelles π est la projection. Comme T est une feuille nette, il existe un champ de vecteurs lisse ν sur $\mathbb{R}$, de flot f^t, tel que les représentations d'holonomie

$$\pi_1(T, 0) = \mathbb{Z}^2 \to \mathcal{D}(\mathbb{R}, 0_\pm)$$

définies par τ de part et d'autre de T associent à tout élément $(q, p) \in \mathbb{Z}^2$ la restriction de $f^{pa^\pm + qb^\pm}$ à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_\pm$, où $(a^\pm, b^\pm) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ces deux vecteurs ne pouvant différer que si ν est infiniment plat en 0.

Posons $\nu(z) = u(z)\partial_z$ et considérons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ le feuilletage $\bar{\tau}$ donné par

$$\begin{aligned} &dz - u(z)\,(a^- d\theta + b^- d\varphi) && \text{sur } \mathbb{R}_- \times \mathbb{T}^2, \\ &dz - u(z)\,(a^+ d\theta + b^+ d\varphi) && \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2. \end{aligned}$$

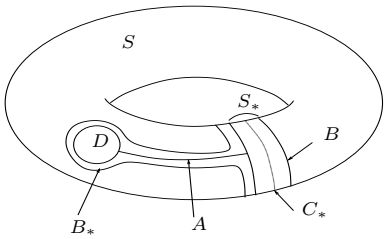
Comme dans le chapitre 5, on peut construire un plongement d'un voisinage de $T \subset M$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$, de la forme

$$(r, \varphi, \theta) \in [-\delta, \delta] \times \mathbb{T}^2 \longmapsto \big(z(r, \varphi, \theta), \varphi, \theta\big),$$

qui envoie T sur $\{0\} \times \mathbb{T}^2$ et τ sur $\bar{\tau}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la préimage de $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{T}^2$ est alors un voisinage modèle de T ayant les propriétés voulues vis-à-vis de la fibration π. □

Démonstration du théorème 6.12. Pour fixer les idées, supposons M close et connexe. Soient $\tau \in \mathcal{A}(M)$ et $C = \bigcup_1^n C_i$ l'union des courbes dans la base S dont les préimages sont des feuilles toriques de τ. Soient d'autre part $D \subset \operatorname{Int} S \setminus C$ un disque et $C_-, C_+ \subset \operatorname{Int} D$ deux courbes fermées simples bordant des disques disjoints. Comme τ est transverse aux fibres en dehors de $\pi^{-1}(C)$, il induit sur $\pi^{-1}(D)$ un feuilletage par disques méridiens.

On commence par déformer τ dans $\mathcal{A}(M)$ en un feuilletage de Larcanché concentré sur D et dont les seules feuilles toriques sont $\pi^{-1}(C_\pm)$. En premier lieu, on implante dans $\pi^{-1}(D)$ la déformation de la remarque 6.8 entre le feuilletage par méridiens et le feuilletage ℓ_{Id}. Si C est vide, on a le feuilletage de Larcanché cherché. Si C n'est pas vide, on en considère une composante C_* accessible depuis D sans traverser C. Soient $S_* \supset C_*$ un petit anneau, A un arc reliant D à S_* et proprement plongé dans $S \setminus \operatorname{Int}(S_* \cup D \cup C)$ et R_* un anneau plus grand obtenu en épaississant légèrement $S_* \cup A \cup D$ autour de A et D de sorte



que R_* contienne $A \cup D$ dans son intérieur et que $\partial R_* \cap S_*$ soit la composante B de ∂S_* qui ne touche pas A. On pose $B_* = \partial R_* \setminus B$.

Le lemme 6.14 donne une déformation de τ sur $\pi^{-1}(S_*)$ relative à $\pi^{-1}(B)$ qui élimine la feuille compacte $\pi^{-1}(C_*)$. Comme $R_* \setminus \mathrm{Int}(S_* \cup D)$ est un pantalon, le lemme 6.2 permet d'étendre cette déformation à $\pi^{-1}(R_* \setminus \mathrm{Int}\, D)$ relativement à $\pi^{-1}(B \cup B_*)$, donc à $\pi^{-1}(S \setminus \mathrm{Int}\, D)$ relativement à $\pi^{-1}(S \setminus \mathrm{Int}\, R_*)$. On utilise alors le lemme 6.1 et le théorème de Larcanché pour prolonger la déformation à M. En appliquant cette construction successivement aux diverses composantes de C (qui deviennent accessibles au fur et à mesure), on obtient le feuilletage de Larcanché souhaité.

Soient maintenant τ_0 et τ_1 deux feuilletages de Larcanché concentrés sur D dont les feuilles toriques sont $\pi^{-1}(C_\pm)$. Soit $K \subset S \setminus \mathrm{Int}\, D$ un bouquet de $2g$ cercles $A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g$ (où g est le genre de S) tel que le lacet ∂D contienne le point-base et soit homotope au produit des commutateurs $[A_1, B_1] \ldots [A_g, B_g]$. On trivialise la fibration π au-dessus de $S \setminus \mathrm{Int}\, D$ et on note $h_k(A_i), h_k(B_i) \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$, $1 \leq i \leq g$, les difféomorphismes d'holonomie définis par τ_k, $k = 0, 1$. Tout g-uplet de chemins dans $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ reliant respectivement $h_0(A_1)$ à $h_1(A_1)$, $\ldots$, $h_0(B_g)$ à $h_1(B_g)$ donne sur $M \setminus \pi^{-1}(\mathrm{Int}\, D)$, par suspension, un chemin de feuilletages transverses aux fibres entre les restrictions de τ_0 et τ_1, chemin que le théorème de Larcanché permet d'étendre en un chemin de feuilletages de Larcanché sur M.

Isolons l'énoncé suivant, explicitement démontré ci-dessus :

Lemme 6.15. *Tout feuilletage agréable sur un fibré en cercle est homotope à un feuilletage de Larcanché.*

□

Chapitre 7

Feuilletages malléables et flexibilité

Dans ce chapitre, M désigne une variété close (*i.e.* compacte sans bord) de dimension 3 et tous les champs de plans considérés sont coorientés.

Définition 7.1. Soit τ un feuilletage lisse de codimension 1 sur M. On dit que τ est *malléable* s'il existe un *lot de tores pleins* $W \subset M$ (c'est-à-dire une union finie de tores pleins disjoints) tels que :
- τ induit sur W un feuilletage agréable, et l'holonomie du feuilletage induit sur chaque composante de bord, vue comme élément de $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$, possède un intervalle de points fixes ;
- τ induit sur $M \setminus \operatorname{Int} W$ un feuilletage tendu au sens où tout arc transverse dans $M \setminus \operatorname{Int} W$ se prolonge en transversale fermée dans $M \setminus \operatorname{Int} W$.

Remarque. En particulier, un feuilletage tendu sur une variété close est malléable.

7.1 Malléabilisation

Théorème 7.2 (Malléabilisation)**.** *On peut relier tout feuilletage net à un feuilletage malléable par un chemin continu de feuilletages lisses.*

On démontre d'abord deux lemmes.

Lemme 7.3. *Tout feuilletage net τ sur M est homotope parmi les feuilletages nets à un feuilletage $\bar{\tau}$ tendu en dehors d'un lot de tores pleins sur lesquels il induit un feuilletage de Larcanché.*

Démonstration. Soit T un tore de Novikov de τ. Comme T est net, il possède un voisinage N paramétré par $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{T}^2$ où le feuilletage est défini par les équations $dz - u(z)(a^{\pm} d\theta + b^{\pm} d\varphi)$ pour $(z, \varphi, \theta) \in [0, \pm 1] \times \mathbb{T}^2$, avec $(a^{\pm}, b^{\pm}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et u une fonction lisse ne s'annulant qu'en 0. Quitte à déformer continûment u près de 0 (et donc τ parmi les feuilletages) on peut supposer cette fonction

infiniment plate en 0. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées sur le tore $\mathbb{T}^2$, on peut supposer que $a^\pm \neq 0$. La fonction v valant $|a^+u|$ sur $[0,1]$ et $|a^-u|$ sur $[-1,0]$ est lisse, donc τ est en fait toujours décrit par des équations de la forme $dz - v(z)(a^\pm d\theta + b^\pm d\varphi)$ avec v lisse, positive, ne s'annulant qu'en 0 et $a^\pm \in \{-1,1\}$. On distingue deux cas, selon que (a^+, b^+) diffère ou non de $-(a^-, b^-)$.

Dans le premier cas, il existe un vecteur entier de $\mathbb{Z}^2$ qui forme avec (a^+, b^+) comme avec (a^-, b^-) une base directe. Autrement dit, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées sur $\mathbb{T}^2$, on peut supposer que $a^\pm > 0$. Cela signifie que la restriction de τ à $N = (\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$ vu comme fibré sur $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$ est un feuilletage agréable. Le lemme 6.15 donne une homotopie relative au bord entre $\tau \mid_N$ et un feuilletage de Larcanché τ_N concentré sur un disque $D \subset \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$. En particulier, en dehors du tore plein $D \times \mathbb{S}^1$, τ_N est transverse aux fibres.

Dans le second cas, on se ramène au premier en dédoublant la feuille compacte et en insérant au milieu un feuilletage net dont la trace sur les tores intercalés a une direction différente de $\pm(a^+, b^+)$.

On effectue une telle déformation dans un voisinage modèle N_i de chaque tore de Novikov T_i de τ, $i = 1 \cdots k$ (les tores de Novikov de τ sont en nombre fini car τ est net) et on note $\bar{\tau}$ le feuilletage obtenu. Remarquons que par tout point p de $M \setminus \bigcup_{i=1}^k N_i$ passe une transversale fermée à τ disjointe de $\bigcup_{i=1}^k T_i$, que l'on peut facilement déformer en transversale fermée à τ passant toujours par p et disjointe de $\bigcup_{i=1}^k N_i$ vue l'équation de τ dans un voisinage modèle N_i. On vérifie maintenant que le feuilletages $\bar{\tau}$ a les propriétés voulues.

Dans chaque $N_i = (\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$, la restriction de $\bar{\tau}$ est un feuilletage de Larcanché concentré sur un disque $D_i \subset \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$. On note W le lot de tores pleins $\bigcup_{i=1}^k W_i = D_i \times \mathbb{S}^1$. Il s'agit de vérifier que $\bar{\tau}$ est tendu en dehors de W, *i.e* (cf. proposition 4.10) que par tout point de $M \setminus \operatorname{Int} W$ passe une transversale fermée. C'est le cas pour tout point de $M \setminus \bigcup_{i=1}^k N_i$ d'après le paragraphe précédent, la déformation étant à support dans $\bigcup_{i=1}^k N_i$, et c'est aussi vrai pour tout point p de $N_i \setminus W_i$: il suffit de prendre la fibre de p dans le fibré N_i. □

Lemme 7.4 (Lemme de fragmentation)**.** *Tout élément de $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ est le produit d'un nombre fini d'éléments de $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ ayant chacun un intervalle de points fixes.*

Démonstration. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$. Si $|f(x) - x| < 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un difféomorphisme $g \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ qui coïncide avec l'identité près de 0 et avec f près de $1/2$. Ainsi $f = g \circ (g^{-1} \circ f)$, où g et $g^{-1} \circ f$ ont chacun un intervalle de points fixes.

Dans le cas général, la fonction $v = f - \mathrm{Id}$ est 1-périodique et vérifie $\max v - \min v < 1$. Elle s'écrit donc $v = n\lambda + w$ pour un certain entier n, où $|w(x)| < 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]-1/2, 1/2[$. Ainsi,

$$f = T_\lambda^n \circ (\mathrm{Id} + w)$$

et on est ramené au cas du début. □

Démonstration du théorème 7.2. D'après le lemme 7.3, il suffit de démontrer que tout feuilletage de Larcanché τ sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ est homotope parmi les feuilletages (agréables) à un feuilletage malléable. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ l'holonomie de τ sur $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. D'après le lemme 7.4, $f = f_1 \circ \cdots \circ f_p$, où chaque $f_i \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ a un intervalle de points fixes. Soient $D_1, \ldots, D_n$ des disques disjoints dans $\operatorname{Int}\mathbb{D}^2$. Les lemmes 6.1 et 6.2 permettent de construire sur $(\mathbb{D}^2 \setminus \operatorname{Int}\bigcup D_i) \times \mathbb{S}^1$ un feuilletage transverse à $\mathbb{S}^1$ d'holonomie f_i sur $\partial D_i \times \mathbb{S}^1$. Grâce au théorème 6.4, on le prolonge en un feuilletage agréable $\bar{\tau}$ de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Le théorème 6.12 assure que τ et $\bar{\tau}$ sont homotopes parmi les feuilletages agréables. □

7.2 Feuilletages malléables et champs presque intégrables

Définition 7.5. Soit ξ un champ de plans sur M et $B \subset M$ un *lot de boules*, c'est-à-dire une union finie de boules disjointes.

On dit que ξ est *presque horizontal* sur B s'il est intégrable près de ∂B et s'il vérifie les conditions suivantes pour un certain paramétrage (dit *adapté*) de chaque boule B_i de B par $\mathbb{D}^3$:

- ξ est tangent à $S_i = \partial B_i = \partial\mathbb{D}^3$ exactement aux pôles ;
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un champ de vecteurs non singulier ν sur $B_i = \mathbb{D}^3$ qui pointe partout transversalement du côté positif de ξ ainsi que du champ de plans $dz = 0$ et qui est tangent à S_i hors du ε-voisinage des pôles.

On dit que ξ est *B-presque intégrable* si :

- ξ est presque horizontal sur B ;
- ξ est intégrable sur $M \setminus \operatorname{Int} B$ et le feuilletage qu'il y définit est *tendu* au sens où tout arc transverse dans $M \setminus \operatorname{Int} B$ se prolonge en une transversale fermée dans $M \setminus \operatorname{Int} B$.

Enfin, on dit que ξ est *presque intégrable* s'il est B-presque intégrable pour un certain lot de boules $B \subset M$.

Il existe une correspondance naturelle entre les feuilletages malléables et les champs de plans presque intégrables équipés d'une donnée supplémentaire, celle, pour chaque boule du lot B associé, d'un arc transverse reliant ses pôles dans $M \setminus \operatorname{Int} B$:

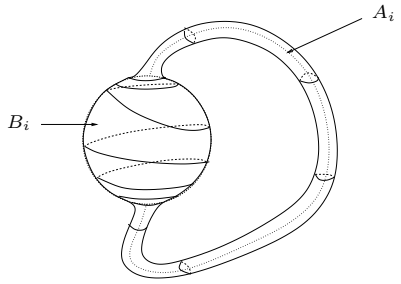
Lemme 7.6. *Soient $B = \bigcup_1^n B_i \subset M$ un lot de boules, ξ un champ de plans B-presque intégrable sur M et $A = \bigcup A_i \subset M \setminus \operatorname{Int} B$ un lot d'arcs transverses à ξ tel que chaque A_i relie l'un à l'autre les pôles de B_i. Il existe alors un feuilletage malléable τ sur M ayant les propriétés suivantes :*

- *le lot W de tores pleins associé à τ a n composantes W_i, chacune étant un voisinage de $B_i \cup A_i$;*
- *les champs de plans ξ et τ sont homotopes relativement à $M \setminus \operatorname{Int} W$.*

Inversement :

Lemme 7.7. *Soient τ un feuilletage malléable sur M et $W = \bigcup_1^n W_i$ son lot de tores pleins. Il existe des boules $B_i \subset W_i$, des arcs $A_i \subset \operatorname{Int} W_i \setminus \operatorname{Int} B_i$ et un champ de plans ξ ayant les propriétés suivantes :*
- *ξ est B-presque intégrable où $B = \bigcup B_i$;*
- *chaque arc A_i est transverse à ξ et relie l'un à l'autre les pôles de B_i ;*
- *les champs de plans τ et ξ sont homotopes relativement à $M \setminus \operatorname{Int} W$.*

Les deux lemmes ci-dessus donnent des constructions qui peuvent en fait être réalisées continûment sur des familles de données dépendant d'un nombre arbitraire de paramètres.



Démonstration de 7.6. Pour $1 \leq i \leq n$, on peut paramétrer un voisinage W_i de $B_i \cup A_i$ par $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, de sorte que :
- $A_i = \{0\} \times J_i$ pour un intervalle J_i de $\mathbb{S}^1$ et ξ est tangent à $\mathbb{D}^2 \times \{\cdot\}$ sur $\mathbb{D}^2 \times J_i$;
- ξ est transverse à $\mathbb{S}^1$, et intégrable au voisinage de ∂W_i.

Soit $f_i \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ l'holonomie du feuilletage induit par ξ sur ∂W_i. D'après le théorème 6.4, le feuilletage agréable ℓ_{f_i} a un champ de plans tangent homotope à ξ relativement à ∂W_i. □

Démonstration de 7.7. Pour $1 \leq i \leq n$ et pour un paramétrage convenable de W_i par $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, le feuilletage agréable $\tau \mid_{W_i}$ est homotope relativement au bord à un champ de plans $\bar{\xi}$ transverse au facteur $\mathbb{S}^1$, et dont la restriction à $\partial W_i = \partial \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ est tangente à $\partial \mathbb{D}^2 \times \{z\}$ pour tout z dans un intervalle J_i de $\mathbb{S}^1$. On peut alors déformer $\bar{\xi}$ relativement au bord parmi les champs de plans transverses au facteur $\mathbb{S}^1$ en un champ ξ tangent à $\mathbb{D}^2 \times \{\cdot\}$ sur $\mathbb{D}^2 \times J_i$. On définit B_i comme la boule obtenue en arrondissant vers l'extérieur le fond et le couvercle de la boîte $\mathbb{D}^2 \times (\mathbb{S}^1 \setminus J_i)$, et en s'arrangeant pour que ∂B_i ait exactement deux points de tangence avec $\bar{\xi}$: les pôles, situés sur l'âme $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ de W_i. Si on paramètre B_i par $\mathbb{D}^3$ de sorte que la troisième coordonnée coïncide avec la coordonnée θ sur $\mathbb{S}^1$, pour tout $\varepsilon > 0$, le champ ∂_θ sur $\mathbb{D}^2 \times (\mathbb{S}^1 \setminus J_i)$ se prolonge facilement en champ ν satisfaisant toutes les propriétés de 7.5. Le sous-arc A_i de $\{0\} \times J_i$ joignant les pôles de B_i est transverse à ξ. □

7.3 Le lemme des vases communicants

Le lemme qu'on présente dans cette section montre que la classe d'homotopie du feuilletage malléable construit à partir d'un champ presque intégrable ne dépend pas du choix des arcs transverses reliant les pôles des boules. Autrement dit, il complète les lemmes 7.6 et 7.7 pour donner une « équivalence d'homotopie » entre l'espace des champs de plans presque intégrables et celui des feuilletages malléables.

Lemme 7.8 (Lemme des vases communicants)**.** *Soient $B = \bigcup_1^n B_i \subset M$ un lot de boules, ξ un champ de plans B-presque intégrable sur M et $A^\pm = \bigcup A_i^\pm \subset M \setminus \operatorname{Int} B$ deux lots d'arcs transverses à ξ tels que chaque $A_i^\pm$ relie l'un à l'autre les pôles de B_i. Les feuilletages malléables $\tau^\pm$ construits à partir de ξ et $A^\pm$ peuvent être reliés par un chemin de feuilletages malléables.*

Démonstration. Pour alléger les notations, on suppose $n = 1$, de sorte que B désigne une boule, et $A^\pm$ deux arcs transverses à ξ reliant les pôles de B. On paramètre B privé de deux petites calottes polaires par $\mathbb{D}^2 \times [-1/4, 1/4]$ de sorte que ξ soit transverse au second facteur et tangent à $\mathbb{D}^2 \times \{\cdot\}$ au voisinage de $\mathbb{D}^2 \times \{\pm 1/4\}$. On déforme légèrement les arcs $A^\pm$ en arcs disjoints $\bar{A}^\pm$ reliant respectivement $(\pm 1/2, 0, 1/4)$ à $(\pm 1/2, 0, -1/4) \in C = \mathbb{D}^2 \times [-1/4, 1/4]$ transversalement à ξ dans $M \setminus (\mathbb{D}^2 \times]-1/4, 1/4[)$. On note

$$D^\pm = \mathbb{D}^2 \cap \{\pm x \geq 0\},$$

où x désigne la première coordonnée sur $\mathbb{D}^2$,

$$C^\pm = C \cap \{\pm x \geq 0\} = D^\pm \times [-1/4, 1/4] \subset C$$

et $W^\pm$ des tores pleins obtenus en lissant la réunion de $C^\pm$ et d'un voisinage de $\bar{A}^\pm$ feuilleté trivialement par ξ, tels que

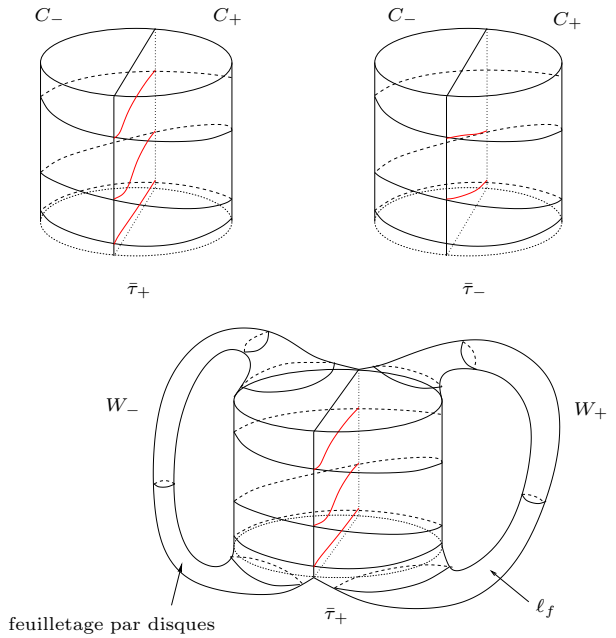
$$W^+ \cap W^- = C \cap \{x = 0\} = C^+ \cap C^-.$$

On paramétre $W^\pm$ par $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de sorte que

$$C^\pm = D^\pm \times [-1/4, 1/4] \subset D^\pm \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = W^\pm.$$

On note enfin $g \in \mathcal{D}_+^\infty([-1/4, 1/4])$ l'holonomie, pour le point base $(0, -1) \in \partial\mathbb{D}^2$, du feuilletage induit par ξ sur le bord latéral de C, $\bar{f}$ son prolongement par l'identité en difféomorphisme de $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbb{S}^1)$ le relevé de $\bar{f}$.

On construit à présent deux feuilletages $\bar{\tau}^+$ et $\bar{\tau}^-$ sur M. Sur $M \setminus \operatorname{Int}(W^+ \cup W^-)$, on prend $\bar{\tau}^\pm = \xi$ (qui est supposé intégrable dans cette région). On définit ensuite la restriction de $\bar{\tau}^\pm$ au rectangle $R = C \cap \{x = 0\} = C^+ \cap C^-$ comme un feuilletage partout transverse au facteur $[-1/4, 1/4]$ et tel que le feuilletage induit par $\bar{\tau}^\pm$ sur $\partial W^\mp$ ait pour holonomie l'identité. L'holonomie du feuilletage induit par $\bar{\tau}^\pm$ sur $\partial W^\pm = \partial D^\pm \times \mathbb{S}^1$ pour le point base $(0, -1) \in \partial D^\pm \subset \partial\mathbb{D}^2$ est alors f. On peut donc prolonger $\bar{\tau}^\pm$ par le feuilletage de Larcanché ℓ_f dans



$W^{\pm}$ (cf. théorème 6.4) et par un feuilletage par disques dans $W^{\mp}$. Le feuilletage $\bar{\tau}^{\pm}$ ainsi obtenu est clairement isotope au feuilletage $\tau^{\pm}$ construit à partir de ξ et de l'arc transverse $A^{\pm}$ selon le procédé 7.6.

Il s'agit maintenant de vérifier que $\bar{\tau}^+$ peut être relié à $\bar{\tau}^-$par un chemin de feuilletages malléables. Pour cela, on commence par déformer $\bar{\tau}^+$ en ℓ_{Id} dans W^- parmi les feuilletages (cf. remarque 6.8). On note encore $\bar{\tau}^+$ le feuilletage obtenu. On décrit ensuite la déformation sur R : les feuilletages induits par $\bar{\tau}^+$ et $\bar{\tau}^-$ sur R sont tous deux transverses au facteur $[-1/4, 1/4]$ et horizontaux près de $\{\pm 1/4\}$, on peut donc déformer $\bar{\tau}^+ \mid_R$ en $\bar{\tau}^- \mid_R$ relativement au bord, parmi les feuilletages transverses au facteur $[-1/4, 1/4]$. Cette déformation fait varier l'holonomie du feuilletage induit sur ∂W^+ de f à Id, et de Id à f sur ∂W^-. On prolonge cette déformation dans W^+ et W^- grâce au théorème de Larcanché 6.4. Notons bien que cette déformation est relative au bord de $W^+ \cup W^-$ et se prolonge donc trivialement à M. □

7.4 Flexibilité des champs de plans presque intégrables

Théorème 7.9 (Flexibilité)**.** *Si deux feuilletages malléables ont des champs de plans tangents homotopes, alors ils sont reliés par un chemin de feuilletages malléables.*

Tout feuilletage tendu sur une variété close étant (par définition) malléable, l'énoncé qui suit est un corollaire direct du théorème 7.9.

Corollaire 7.10. *Deux feuilletages tendus sur une variété close dont les champs de plans tangents sont homotopes sont reliés par un chemin de feuilletages.*

Remarque 7.11. Dans [La], A. Larcanché démontre ce résultat dans le cas particulier de feuilletages tendus suffisamment proches (en un sens convenable).

Notons que les feuilletages du chemin construit (ici comme dans [La]) sont malléables, mais pas tendus. Au contraire, ils ont beaucoup de composantes de Reeb.

Pour prouver le théorème 7.9, on a besoin du lemme 7.12 et de la proposition 7.14.

Lemme 7.12. *Deux champs de plans homotopes et presque horizontaux sur B sont reliés par un chemin de champs de plans presque horizontaux sur B.*

La preuve de ce lemme utilise l'affirmation suivante.

Affirmation 7.13. Soit ξ un champ de plans presque horizontal sur une boule B de M et (x, y, z) les coordonnées induites sur B par un paramétrage adapté. On peut déformer ξ relativement à $M \setminus \mathrm{Op}(B)$ parmi les champs de plans presque horizontaux sur B en un champ qui sur B a pour équation $dz = 0$.

Preuve de l'affirmation 7.13. Soit α une équation de Pfaff de ξ qui, sur un voisinage de chaque pôle de B, coïncide avec la différentielle d'une fonction f. On définit ξ_t, $t \in [0, 1]$, comme le champ des noyaux de la forme

$$\alpha_t = (1 - \rho)\alpha + \rho\left((1 - t)\alpha + t\, dz\right),$$

où $\rho\colon M \to [0, 1]$ est une fonction lisse égale à 1 près de B et à support compact dans un voisinage U de B assez petit (pour que toutes les formes $(1-t)\alpha + t\, dz$ soient non singulières sur U).

Clairement, $\xi_0 = \xi$, tous les champs ξ_t coïncident avec ξ hors de U, et $\xi_1 \mid_B$ a pour équation $dz = 0$. De plus, les champs ξ_t sont tous intégrables près des pôles de B car α_t y vaut $(1 - t)\, df + t\, dz$.

Montrons maintenant que ξ_t est tangent à ∂B uniquement aux pôles $p_\pm$. Soit $p \in \partial B \setminus \{p_\pm\}$ et $\varepsilon < \mathrm{dist}(p, \{p_\pm\})$. D'après la définition 7.5, il existe un champ de vecteurs ν sur B positivement transverse à ξ ainsi qu'aux niveaux de z et tangent à ∂B en dehors du ε-voisinage des pôles. Par construction, $\alpha_t(\nu) > 0$, et comme ν est tangent à ∂B en p, aucun champ ξ_t n'est tangent à ∂B en p. On voit au passage que le champ ν est positivement transverse à la fois à ξ_t et aux niveaux de z.

On va finalement déformer chaque ξ_t par une déformation $\mathcal{C}^0$-petite pour le rendre intégrable près de ∂B afin d'obtenir les champs presque horizontaux voulus. On fixe un ε assez petit pour que tous les champs ξ_t soient intégrables dans un 2ε-voisinage des pôles, on note ν le champ associé et on l'étend à un voisinage de B en un champ transverse aux ξ_t. Soit S la surface ∂B privée du ε-voisinage des pôles. On peut paramétrer un épaississement $W = S \times \mathbb{D}^1$ de S par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1$ de sorte que $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1 \times \{0\}$ et que chaque courbe $\{\cdot\} \times \mathbb{D}^1 \times \{\cdot\}$ soit un segment d'orbite de ν. Comme ν est transverse à ξ_t, il existe

un unique champ de vecteurs η_t sur W qui est tangent à ξ_t ainsi qu'à chaque rectangle $\{\cdot\} \times \mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1$ et dont la dernière composante vaut 1. On obtient la déformation $\bar{\xi}_t$ voulue comme suit. La perturbation cherchée de ξ_t est un champ $\bar{\xi}_t$ arbitrairement $\mathcal{C}^0$-proche ayant les propriétés suivantes :

- $\bar{\xi}_t$ coïncide avec ξ_t le long de S et en dehors de $S\times]-\delta,\delta[\subset W$ avec δ arbitrairement petit ;
- $\bar{\xi}_t$ contient η_t en tout point de W ;
- $\bar{\xi}_t$ est invariant par η_t près de S et y est donc intégrable.

Notons que sur toute région du type $S'\times]-\delta',\delta'[\subset S\times\mathbb{D}^1$ où ξ_t est intégrable, $\bar{\xi}_t$ est égal à ξ_t. Ceci prouve en particulier que $\bar{\xi}_i = \xi_i$ pour $i = 0, 1$ et que $\bar{\xi}_t = \xi_t$ près de $\partial S \times \mathbb{D}^1$ pour tout t. □

Démonstration du lemme 7.12. Il suffit de considérer le cas où le lot B est constitué d'une unique boule. Soient ξ_0 et ξ_1 deux champs de plans presque horizontaux sur B reliés par une homotopie de champs de plans ξ_t, $t \in [0, 1]$. D'après l'affirmation 7.13, on peut supposer que dans un paramétrage adapté $\psi_i : \mathbb{D}^3 \to B$, le champ ξ_i, $i = 0, 1$, a pour équation $dz = 0$. Comme le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{D}^3$ est connexe (d'après un théorème de Cerf [Ce]), il existe une isotopie de B entre Id et $\psi_1 \circ \psi_0^{-1}$. En déformant ξ_0 par un prolongement de cette isotopie à M (parmi des champs qui sont évidemment presque horizontaux sur B), on se ramène au cas où ξ_0 coïncide avec ξ_1 sur B et où $\psi_0 = \psi_1 = \psi$.

Quitte à reparamétrer l'homotopie ξ_t et à la déformer légèrement à extrémités fixes au voisinage de $\psi(0)$, on peut supposer que ξ_t coïncide avec ξ_0 pour $t \in [0, 1/3]$ et avec ξ_1 pour $t \in [2/3, 1]$, et que chaque champ $\psi^*\xi_t$ est constant sur la boule euclidienne de rayon ε centrée en 0.

On définit la famille suivante de boules :

- B_t est l'image par ψ de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $3(\varepsilon - 1)t + 1$ pour $t \in [0, 1/3]$;
- $B_t = B_{1/3}$ pour tout $t \in [1/3, 2/3]$;
- $B_t = B_{1-t}$ pour $t \in [2/3, 1]$.

Par construction, ξ_t est presque horizontal sur B_t pour tout $t \in [0, 1]$. Soit ϕ_t une isotopie à support dans un voisinage de B satisfaisant $\phi_0 = \phi_1 = \mathrm{Id}$ et $\phi_t(B) = B_t$ pour tout t. Les champs de plans $\phi_t^*\xi_t$ sont presque horizontaux sur B et fournissent le chemin voulu entre ξ_0 et ξ_1. □

La proposition suivante est une adaptation dans le cadre des feuilletages d'un résultat d'Eliashberg [El] pour les structures de contact, combiné avec une astuce de Thurston [Th1] pour rendre un feuilletage tendu en dehors de trous. On renvoie au chapitre 8 pour la preuve de ce résultat.

Proposition 7.14 (voir [El]). *Soit B un lot de boules dans M et ξ_t, $t \in [0, 1]$, un chemin continu de champs de plans presque horizontaux sur B, ξ_0 et ξ_1 étant en outre B-presque intégrables. Alors il existe un chemin $\bar{\xi}_t$, $t \in [0, 1]$, de champs de plans satisfaisant :*

- *$\bar{\xi}_0 = \xi_0$ et $\bar{\xi}_1 = \xi_1$ sur M ;*
- *pour tout t, $\bar{\xi}_t = \xi_t$ au voisinage de B ;*

– *$\bar{\xi}_t$ est $\bar{B}$-presque intégrable pour tout t, où $\bar{B}$ est un lot de boules comprenant B.*

Démonstration du théorème 7.9. Soient τ_0 et τ_1 des feuilletages malléables homotopes parmi les champs de plans, et W_0 et W_1 leurs lots de tores pleins associés. D'après le lemme 6.15, il suffit de traiter le cas où la restriction de τ_i, $i = 0, 1$, à chaque tore plein de W_i est un feuilletage de Larcanché.

Le lemme 7.7 associe à τ_i et W_i un lot de boules B_i et un champ de plans ξ_i homotope à τ_i et B_i-presque intégrable. Les champs de plans ξ_0 et ξ_1 sont donc eux aussi homotopes. Quitte à ajouter à B_i, $i = 0$ ou 1, de petites boules $\mathbb{D}^3$ sur lesquelles ξ_i est horizontal, on peut supposer que B_0 et B_1 ont le même nombre de boules, et quitte à déformer ξ_0 par une isotopie de M, on peut supposer que $B_0 = B_1 = B$. D'après le lemme 7.12 et la proposition 7.14, ξ_0 et ξ_1 sont reliés par un chemin $\bar{\xi}_t$, $t \in [0, 1]$, de champs de plans $\bar{B}$-presque intégrables, où $\bar{B} = \bigcup_{j=1}^n \bar{B}_j$ est un lot de boules comprenant B.

À chaque champ $\bar{B}$-presque intégrable $\bar{\xi}_t$ correspond un paramétrage particulier de $\bar{B}_j$, $j \in \{1 \cdots n\}$, par la boule unité euclidienne $\mathbb{D}^3$. On note p_t^j et $q_t^j \in \bar{B}_j$ les pôles Nord et Sud associés. Pour tout t, n'importe quel arc sur $\partial \bar{B}_j$ transverse à $\bar{\xi}_t$ joignant les pôles p_t^j et q_t^j se prolonge dans $M \setminus \operatorname{Int} \bar{B}$ en une transversale fermée, puisque le feuilletage défini par $\bar{\xi}_t$ sur $M \setminus \operatorname{Int} \bar{B}$ est tendu. On obtient ainsi une collection A_t d'arcs transverses $A_t^j \subset M \setminus \operatorname{Int} \bar{B}$ reliant chacun les pôles de $\bar{B}_j$ par l'extérieur. Pour tout s voisin de t, ces arcs restent transverses à $\bar{\xi}_s$, et on peut perturber continûment leurs extrémités pour qu'elles coïncident pour tout s avec p_s^j et q_s^j. Par compacité, sur chaque intervalle $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$, $0 \leq k \leq m-1$, avec m assez grand, on a donc un chemin continu $t \mapsto A_t(k) = \bigcup_{j=1}^n A_t^j(k)$ de lots d'arcs transverses. D'après le lemme 7.6, on peut alors construire un chemin continu $t \in [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}] \mapsto \tau_t(k)$ de feuilletages malléables à partir des champs de plans presque intégrables $\bar{\xi}_t$ et des arcs transverses $A_t^j(k)$. De plus, par le lemme des vases communicants 7.8, les feuilletages $\tau_{\frac{k+1}{m}}(k)$ et $\tau_{\frac{k+1}{m}}(k+1)$ sont reliés par un chemin continu de feuilletages malléables. Ce même lemme et la remarque 6.8 permettent de relier τ_0 à $\tau_0(0)$ et $\tau_1(m-1)$ à τ_1 par des chemins continus de feuilletages. □

Chapitre 8

Construction de champs de plans presque intégrables

> Il n'y a pas d'efforts inutiles, Sisyphe se faisait des muscles.
>
> Roger Caillois

Ce chapitre a pour objet la démonstration de la proposition 7.14. On établit en fait un énoncé plus général, en remplaçant l'espace des paramètres $[0,1]$ et ses extrémités $\{0,1\}$ par un polyèdre compact K de dimension finie et un sous-polyèdre (fermé) L de K (typiquement, $K = \mathbb{D}^n$ et $L = \mathbb{S}^{n-1}$). Pour cela on introduit le vocabulaire suivant. On appelle *K-champ de plans* ξ sur M une famille continue ξ_t, $t \in K$, de champs de plans sur M. Étant donnée une partie $X \subset K \times M$, on dit qu'un K-champ de plans ξ est intégrable sur X si, pour tout $t \in K$, le champ ξ_t est intégrable sur $X_t = X \cap (\{t\} \times M)$. En pratique, X est souvent de la forme $(K \times A) \cup (L \times M)$ où $A \subset M$. On dit qu'un K-champ de plans ξ est presque horizontal sur un lot de boules B si, pour tout $t \in K$, le champ ξ_t est presque horizontal sur B. Enfin, on dit qu'un K-champ de plans ξ est $K' \times B$-presque intégrable si, pour tout $t \in K' \subset K$, le champ ξ_t est B-presque intégrable.

On rappelle que la notation $\mathrm{Op}(A)$ désigne un petit voisinage ouvert d'une région A d'un espace topologique donné.

Proposition 8.1. *Soit B un lot de boules dans M et ξ un K-champ de plans $L \times B$-presque intégrable. Il existe un K-champ de plans $\bar{\xi}$ ayant les propriétés suivantes :*

1. *$\bar{\xi}$ est homotope à ξ relativement à $(K \times \mathrm{Op}\, B) \cup (L \times M)$;*
2. *$\bar{\xi}$ est intégrable sur $K \times (M \setminus \mathrm{Int}\, \bar{B})$ et presque horizontal sur $K \times \bar{B}$, où $\bar{B}$ est un lot de boules comprenant B ;*
3. *le feuilletage défini par $\bar{\xi}_t$ sur $M \setminus \mathrm{Int}\, \bar{B}$ est tendu pour tout $t \in K$.*

Les deux derniers points signifient que $\bar{\xi}$ est $K \times \bar{B}$-presque intégrable.

La démonstration se déroule en deux temps. Dans les sections 8.1 à 8.5, on démontre l'énoncé 8.1 amputé du point 3 en adaptant les techniques d'Eliashberg dans [El]. On établit ensuite le résultat complet en utilisant une astuce de Thurston [Th3] pour rendre des feuilletages tendus en dehors de boules.

Pour déformer des champs de plans en champs intégrables, Thurston a, le premier, pensé à utiliser des triangulations et a prouvé l'efficacité de cette idée dans [Th1, Th2, Th3]. Eliashberg a ensuite adapté les techniques de [Th2] dans [El] pour déformer des champs de plans en structures de contact et les a étendues à des familles de champs de plans dépendant d'un nombre quelconque de paramètres. En retour, l'énoncé 8.1-(1 et 2) et la démonstration qui suit sont calqués sur une partie de [El], à savoir le lemme 3.2.1 et sa preuve, laquelle s'appuie sur les sections 2.3 et 2.4 du même article. Notre but ici est simplement de détailler et préciser les arguments d'Eliashberg.

Présentons maintenant la stratégie de la preuve (de 8.1-(1 et 2)) et ses difficultés. L'idée est de trianguler $M \setminus \operatorname{Int} B$ assez finement pour que chaque ξ_t bouge très peu sur chaque 3-simplexe, puis de perturber ξ_t, continûment en t, pour le rendre intégrable au voisinage du 2-squelette, donc en dehors de boules (une par 3-simplexe) remplissant presque tout le complémentaire du 2-squelette. Plusieurs problèmes se posent :

– Comment rendre les champs ξ_t intégrables au voisinage d'un simplexe σ de dimension au plus 2 ? La méthode est celle inventée par Thurston dans [Th2] et étendue au cas paramétrique par Eliashberg dans [El]. S'il existe un champ de vecteurs non singulier ν_t au voisinage de σ qui soit transversal à σ et tangent à ξ_t, on rend ξ_t invariant par ν_t tout en le préservant le long de σ. Sinon, cela signifie essentiellement que σ est de dimension 2 et que ξ_t est tangent à σ en un point p. On prend alors un champ de vecteurs ν_t tangent à ξ_t et dont une boîte de flot recouvre σ. On traite alors σ comme un « gros sommet ». Un point important est que ces simplexes « spéciaux » sont disjoints.

– Comment garantir la presque horizontalité des champs déformés $\bar{\xi}_t$? Il faut contrôler l'amplitude de la perturbation (en pratique, des normes $\mathcal{C}^1$) pour que chaque $\bar{\xi}_t$ bouge encore très peu sur chaque 3-simplexe σ. On prend alors dans σ une boule B_σ dont le bord approche suffisamment $\partial\sigma$ pour se trouver dans la zone où $\bar{\xi}_t$ est intégrable. Si cette zone est assez large, on peut prendre B_σ assez courbée pour que $\bar{\xi}_t$ soit presque horizontal sur B_σ. Pour faciliter les estimations géométriques nécessaires, on commence par se ramener à des ouverts de $\mathbb{R}^3$, via des cartes.

8.1 Réduction à des ouverts de l'espace euclidien

L'énoncé dont nous avons besoin dans $\mathbb{R}^3$ est le suivant :

Lemme 8.2. *Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, F un fermé de U et ξ un K-champ de plans sur U intégrable sur $(K \times \operatorname{Op} F) \cup (L \times U)$. Étant donné un compact $A \subset U$, il existe un K-champ de plans $\bar{\xi}$ sur U ayant les propriétés suivantes :*

1. *$\bar{\xi}$ est homotope à ξ relativement à $(K \times (U \setminus G)) \cup (L \times U)$ où $G \subset U$ est un compact disjoint de F – contenant donc le support de la déformation ;*
2. *$\bar{\xi}$ est intégrable sur $K \times (A_* \setminus B)$ et presque horizontal sur $K \times B$, où A_* est un voisinage compact de A et B un lot de boules dans $\operatorname{Int} A_* \setminus F$.*

Démonstration de 8.2 $\Rightarrow$ 8.1-(1,2). Soient B et ξ comme dans 8.1 et A_{0*} un voisinage compact de B tel que ξ est intégrable sur $K \times (A_{0*} \setminus B)$. On se donne des ouverts de cartes $V_i \subset M$, $1 \leq i \leq p$, et des compacts $W_i \subset V_i$ tels que $M = \bigcup W_i$. Le lemme 8.2 appliqué à

$$U_1 = V_1 \setminus B, \quad F_1 = U_1 \cap A_{0*}, \quad A_1 = W_1 \setminus \operatorname{Int} A_{0*}$$

et au K-champ ξ restreint à U_1, fournit un compact A_{1*}, un lot de boules $B_1 \subset \operatorname{Int} A_{1*}$ et un nouveau K-champ de plans ξ_1 sur U_1, qui s'étend à M par $\xi_1 = \xi$ sur $M \setminus U_1$. On applique alors 8.2 à

$$U_2 = V_2 \setminus (B \cup B_1), \quad F_2 = U_2 \cap (A_{0*} \cup A_{1*}), \quad A_2 = W_2 \setminus \operatorname{Int}(A_{0*} \cup A_{1*})$$

et au K-champ ξ_1 restreint à U_2, etc... □

8.2 Presque-horizontalité et courbure

Le lemme ci-dessous servira à vérifier que les champs de plans construits ont les propriétés voulues de presque-horizontalité. Il joue ici le rôle des lemmes 2.4.1 et 2.4.2 de [El].

Soit ξ un champ de plans (coorienté) quelconque sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $p \in U$, on note $\xi^+(p)$ le demi-espace ouvert de $T_p\mathbb{R}^3$ qui se trouve du côté positif de $\xi(p)$ et $\xi^\perp(p) \in \xi^+(p)$ le vecteur normal direct unitaire. En d'autres termes, $\xi^\perp \colon U \to \mathbb{S}^2$ est l'application de Gauss de ξ et, pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$\|\xi\|_k = \sup_{p \in U} \|(D^k \xi^\perp)(p)\|.$$

Observons d'autre part qu'étant donnés deux points $p, q \in U$, les plans affines P_p et P_q tangents respectivement à $\xi(p)$ et $\xi(q)$ déterminent un pinceau, à savoir l'ensemble des plans qui contiennent la droite $P_p \cap P_q$ nommée axe du pinceau et éventuellement située à l'infini (auquel cas tous les plans du pinceau sont parallèles).

Lemme 8.3. *Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, ξ un champ de plans $\mathcal{C}^1$-borné sur U et $S_* \subset \mathbb{R}^3$ une sphère strictement convexe. Pour $d_0 > 0$ assez petit, toute sphère $S \subset U$ image de S_* par une homothétie affine de rapport $d \leq d_0$ a les propriétés suivantes :*

1. *ξ est tangent à S en exactement deux points, un pôle nord p_+ où leurs coorientations s'accordent et un pôle sud p_- où elles s'opposent – on note η le champ des plans tangents au pinceau déterminé par ξ_{p_-} et ξ_{p_+} (la coorientation de ξ munit naturellement η d'une coorientation) ;*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un champ de vecteurs non singulier ν sur la boule B bordée par S qui est partout dans le cône diédral $\Omega_p = \xi_p^+ \cap \eta_p^+$ et est tangent à S en dehors du ε-voisinage des pôles.*

Démonstration. Soient $c = \|\xi\|_1$ et $k > 0$ un minorant des courbures principales de S_* en tout point – de sorte que celles de S valent partout au moins k/d.

Soit $\gamma\colon S \to \mathbb{S}^2$ l'application de Gauss de S. Les hypothèses de courbure assurent que γ est un difféomorphisme et que son inverse vérifie $\left\|D\gamma^{-1}\right\| \leq d/k$. Par suite,

$$\left\|D(\xi^\perp \circ \gamma^{-1})\right\| \leq cd/k.$$

Pour $d < k/c$, les applications $\pm\xi^\perp \circ \gamma^{-1}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ sont donc des contractions et ont chacune un unique point fixe qu'on note $\gamma(p_\pm)$. Les points $p_\pm$ sont les pôles cherchés.

Pour ce qui est du champ ν, une partition de l'unité permet facilement de le construire pour peu que Ω_p (resp. $T_pS \cap \Omega_p$) soit non vide en tout point p de B (resp. de $S \setminus \{p_-, p_+\}$).

Soit $p \in B$. Clairement,

$$\angle(\xi_p^\perp, \eta_p^\perp) \leq \angle(\xi_p^\perp, \xi_{p_+}^\perp) + \angle(\xi_{p_+}^\perp, \xi_{p_-}^\perp) \leq 2\,\|\xi\|_1\, d\delta_*$$

où δ_* est le diamètre de S_*. Par suite, si $d < \pi/2c\delta_*$, les plans ξ_p et $-\eta_p$ diffèrent donc Ω_p n'est pas vide.

Soit maintenant $p \in S \setminus \{p_-, p_+\}$. Le plan T_pS est transverse à la fois à ξ_p (par définition de $p_\pm$) et à η_p (par convexité de S) et on voit sans peine que l'intersection $T_pS \cap \Omega_p$ est vide si et seulement si $\pm\gamma(p)$ appartient au segment géodésique minimisant de $\mathbb{S}^2$ joignant $\xi_p^\perp$ et $\eta_p^\perp$. On discute ci-après le cas de $\gamma(p)$; celui de $-\gamma(p)$ se traite en remplaçant p_+ par p_-.

Soit ρ la distance dans B entre p et p_+. Sur $\mathbb{S}^2$, le disque D de rayon $c\rho$ centré en $\xi_{p_+}^\perp$ contient $\xi_p^\perp$ mais pas $\gamma(p)$ si $d < k/c$ car les courbures principales de S sont alors supérieures à c. De plus, comme $d < \pi/2c\delta_*$, le disque D est géodésiquement convexe : $c\rho \leq cd\delta_* < \pi/2$. Pour conclure, il suffit donc de voir que, si d est assez petit, D contient $\eta_p^\perp$. On le prouve ci-dessous en montrant que

$$\left\|\eta \mid_B\right\|_1 \leq \kappa c$$

pour une certaine constante κ fournie par la géométrie de S_*.

On note d'abord que la norme de $D\eta^\perp$ en un point quelconque p est l'inverse de la distance de p à l'axe A du pinceau. En fait, dans des coordonnées euclidiennes où A est l'axe des z, l'application $\eta^\perp$ s'écrit

$$(x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(-y, x, 0),$$

ce qui permet de calculer la différentielle et sa norme.

On observe ensuite que l'axe A n'est pas trop proche de B. Cela vient de ce que B contient une boule euclidienne (ronde) B' de rayon dr_* où r_* ne dépend que de la géométrie de S_*. Le secteur du pinceau situé entre P_- et P_+ (les plans affines tangents à S en p_- et p_+) a un angle d'ouverture majoré par $cd\delta_*$. Le fait que ce secteur contienne B' assure que la distance l du centre de B' à A vérifie $dr_*/l \leq \sin(cd\delta_*/2)$. L'estimation voulue s'en déduit pour peu que d soit assez petit. □

8.3 Triangulation et lemme clé

Le résultat présenté ci-dessous, qui est la clé pour démontrer le lemme 8.2, est une adaptation du lemme 2.3.4 de [El]. Avant de l'énoncer, on définit la triangulation spécifique Δ de $\mathbb{R}^3$ qu'il met en jeu.

Le cube unité $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ se subdivise en six tétraèdres ayant en commun la grande diagonale entre $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$. En translatant cette subdivision du cube par $\mathbb{Z}^3$, on construit une triangulation infinie de $\mathbb{R}^3$ dite parfois cristalline et dont les sommets sont les points entiers. On prend alors la première subdivision barycentrique de cette triangulation et, grâce au « Jiggling Lemma » de [Th1], on la « secoue » de façon $(2\mathbb{Z}^3)$-périodique pour que trois arêtes quelconques issues d'un même sommet aient des directions linéairement indépendantes.

On note Δ la triangulation ainsi obtenue et $d\Delta$, pour tout $d > 0$, son image par l'homothétie de rapport d. On désigne en outre par $N_\varepsilon(V)$, $\varepsilon > 0$, le ε-voisinage (fermé) d'une région V de $\mathbb{R}^3$.

Lemme 8.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, F un fermé de U et ξ un K-champ de plans sur U intégrable sur $(K \times \operatorname{Op} F) \cup (L \times U)$. Étant donné un compact $A \subset U$, on peut trouver des nombres positifs d_*, μ et c tels que, pour tout $d < d_*$, il existe un K-champ de plans $\bar{\xi}$ sur U ayant les propriétés suivantes :*

1. *$\bar{\xi}$ est homotope à ξ relativement à $(K \times (U \setminus G_d)) \cup (L \times U)$ où G_d est un compact disjoint de $N_d(F)$;*
2. *$\bar{\xi}$ est intégrable sur $K \times N_{\mu d}(A_d^2)$ où A_d est un voisinage polyédral compact de A dans $d\Delta$ et A_d^2 le 2-squelette de A_d ;*
3. *$\left\|\bar{\xi}_t \mid_{N_{\mu d}(A_d)}\right\|_1 \leq c$ pour tout $t \in K$.*

Démonstration de 8.2 à partir de 8.3 et 8.4. Soient U, F, ξ et A satisfaisant les hypothèses de 8.2, et d_*, μ et c les nombres positifs que 8.4 leur associe. Notons σ_i, $1 \leq i \leq p$, les 3-simplexes modèles de la triangulation Δ. Chacun contient une sphère S_i strictement convexe incluse dans le μ-voisinage de son bord. Pour tout $d < d_*$, 8.4 fournit un K-champ de plans $\bar{\xi}$ et un voisinage polyédral A_d de A. Chaque 3-simplexe σ de A_d contient une boule B_σ dont le bord est l'image par une homothétie de rapport d d'une des sphères modèles S_i. Or, quel que soit d, le champ $\bar{\xi}$ fourni par 8.4 satisfait : $\left\|\bar{\xi}_t \mid_{N_{\mu d}(A_d)}\right\|_1 \leq c$ pour tout $t \in K$. Donc d'après le lemme 8.3, si on prend d assez petit, $\bar{\xi}$ est presque horizontal sur chacune des boules B_σ. Le K-champ $\bar{\xi}$, le compact $G = G_d$, le voisinage $A_* = A_d$ de A et le lot de boules B constitué des B_σ rencontrant $A_d \cap G_d$

(de sorte que $B \subset (\operatorname{Int} A_*) \setminus F$) satisfont alors toutes les propriétés du lemme 8.2. □

Le lemme 8.4 est de loin le plus technique. Sa preuve occupe les deux sections suivantes.

8.4 Le modèle de déformation

On décrit ici en détail le modèle de déformation qu'on utilisera dans la section suivante au voisinage de chaque simplexe du 2-squelette. Notre construction s'inspire directement de celle proposée par Eliashberg dans le lemme 2.3.2 de [El]. Prévenons tout de suite le lecteur que les explications géométriques d'Eliashberg sont plus limpides que le texte technique qui suit. En fait, la principale raison d'être de cette section est la :

Remarque 8.5. Contrairement à ce que voudrait la note 2.3.3 de [El], la norme $\mathcal{C}^1$ du champ ξ^1 donné par notre modèle de déformation n'est pas contrôlée par la norme $\mathcal{C}^1$ du champ initial ξ mais seulement par sa norme $\mathcal{C}^2$. Plus généralement, la norme $\mathcal{C}^m$ de ξ^1 est contrôlée par la norme $\mathcal{C}^{m+1}$ de ξ. Cette « consommation » d'une dérivée complique les calculs mais est au bout du compte sans conséquence : comme on n'applique le modèle qu'un nombre fini de fois, une borne adéquate sur une norme $\mathcal{C}^m$ du champ initial avec m assez grand permettra d'obtenir l'estimation requise sur la norme $\mathcal{C}^1$ du champ final.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une triangulation $d\Delta$ mais les coordonnées euclidiennes qu'on utilise ne sont pas celles employées pour définir Δ. On note V le $d\delta/2$-voisinage d'un simplexe σ de $d\Delta$, où δ est la distance minimale entre deux simplexes disjoints de Δ. Pour tout champ de plans ξ sur V et tout entier $m \geq 1$, on pose

$$\|\xi\|_m = \max_{1\leq k\leq m} \sup_{p\in V} \left|D^k \xi^\perp(p)\right|,$$
$$\|\xi\|_{d,m} = \max_{1\leq k\leq m} d^{k-1} \sup_{p\in V} \left|D^k \xi^\perp(p)\right|.$$

On munit V du feuilletage horizontal η d'équation $dz = 0$ et les champs de plans ξ qu'on déforme ci-après satisfont la condition suivante :

(∗) l'angle entre les vecteurs $\xi^\perp$ et ∂_x est partout inférieur à un nombre fixé $\tilde{\theta} \in]0, \pi/2[$.

En particulier, ξ est transverse à η et le champ de droites $\xi \cap \eta$ fait avec ∂_y un angle partout inférieur à $\tilde{\theta}$.

Toutes les déformations de ξ que nous allons construire consistent à faire pivoter ξ autour de $\xi \cap \eta$ et sont à support compact dans $\operatorname{Int} V$. On dira donc qu'un champ de plans est *admissible* s'il contient $\xi \cap \eta$ et coïncide avec ξ près du bord ∂V.

Lemme 8.6. *Soient ξ un champ de plans sur V vérifiant la condition (∗) et S une surface proprement plongée dans V. On suppose que $S \setminus \partial S$ contient un*

disque D transverse à $\xi \cap \eta$ dont le saturé par $\xi \cap \eta$ recouvre le $2\mu d$-voisinage de σ et dont la trace $D \cap P$ sur chaque feuille P de η est une courbe connexe faisant avec $\xi \cap \eta$ un angle au moins $\kappa > 0$. On peut alors déformer $\xi = \xi^0$ par une homotopie ξ^u, $u \in [0,1]$, de champs de plans admissibles ayant les propriétés suivantes :

- *ξ^1 coïncide avec ξ le long de D et est intégrable sur le λd-voisinage de σ ;*
- *$\|\xi^u\|_{d,m} \leq \chi_m\big(\|\xi\|_{d,m+1}\big)$ pour tout $u \in [0,1]$ et tout $m \geq 1$, où χ_m est une fonction dépendant des nombres $\tilde{\theta}$, κ, μ et du triplet (σ, D, η) mais seulement à similitude près et donc pas de d.*

De plus, l'homotopie ξ^u varie continûment avec ξ.

Démonstration. Soit C le saturé de D par $\xi \cap \eta$. Comme D a une intersection connexe avec chaque feuille de η, le théorème de Poincaré–Bendixson assure qu'aucune courbe intégrale de $\xi \cap \eta$ n'a de retour sur D. Autrement dit, C est un « fibré en intervalles » au-dessus de D. L'observation de départ est qu'il existe sur C un seul champ de plans intégrable $\bar{\xi}$ qui contienne $\xi \cap \eta$ et coïncide avec ξ en tout point de D : c'est l'unique champ de plans invariant par l'holonomie de $\xi \cap \eta$ et égal à ξ le long de D. La preuve du lemme consiste à mesurer les variations de ce champ puis à le tronquer et à le relier à ξ par une homotopie linéaire.

D'après l'hypothèse $(*)$, le champ ξ admet une (unique) équation de Pfaff de la forme $\omega = dx + v\,dy + w\,dz$ et les fonctions v, w satisfont $v^2 + w^2 < \tan^2\tilde{\theta}$. Avec ces notations, l'application de Gauss $\xi^\perp$ est donnée par

$$\xi^\perp = (1 + v^2 + w^2)^{-\frac{1}{2}}(1, v, w).$$

Soit $\nu = \partial_y - v\,\partial_x$ le champ de vecteurs dirigeant $\xi \cap \eta$ et vérifiant $\nu \cdot y = 1$. On note $\phi\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times V \to V$ son flot, $h\colon C \to \mathbb{R}$ la fonction qui à chaque point p associe l'unique instant t tel que $\phi^t(p) \in D$ et $\bar{h}\colon C \to \mathbb{R} \times C$ l'application $p \mapsto (h(p), p)$. Observons que la condition $\nu \cdot y = 1$ entraîne que Ω est contenu dans $[-2d, 2d] \times V$ et que la fonction $|h|$ est bornée par $2d$. Le champ de plans $\bar{\xi}$ est le noyau de la forme $\bar{\omega} = \bar{h}^*\phi^*\omega$.

La forme $\phi^*\omega$ habite le domaine de définition $\Omega \subset \mathbb{R} \times V$ du flot ϕ mais, comme ω est nulle sur ν, la première composante de $\phi^*\omega$ est nulle. Ainsi, les composantes non nulles de $\phi^*\omega$ fournissent une application $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ et l'application $\bar{\Phi}\colon C \to \mathbb{R}^3$ donnée par les composantes de $\bar{\omega}$ n'est autre que $\bar{\Phi} = \Phi \circ \bar{h}$. En pratique, si $F\colon V \to \mathbb{R}^3$ est l'application qui représente ω, *i.e.* $F(p) = (1, v(p), w(p))$, alors Φ s'exprime comme un produit matriciel :

$$\Phi(t,p) = (F \circ \phi)(t,p)\, D\phi^t(p).$$

On va maintenant établir toute une série d'estimations pour mesurer les variations de Φ et $\bar{\Phi}$. Dans ces calculs, le symbole χ_m désigne pour tout entier m une fonction universelle dépendant, comme dans le lemme, des paramètres $\tilde{\theta}$ et $\hat{\theta}$ ainsi que du type de similitude de (σ, D, η) – mais pas de d – et qui peut changer d'une occurence à l'autre.

Pour commencer, l'expression explicite de ν en fonction de $\xi^\perp$ entraîne :

Affirmation 8.7. Pour tout $m \geq 1$,

$$\|\nu\|_{d,m} \leq \chi_m\big(\|\xi\|_{d,m}\big).$$

En fait, $D^m\nu$ est borné par un polynôme en les dérivées $D^k\xi^\perp$ pour $1 \leq k \leq m$, le poids total de dérivation de chaque monôme étant m.

Affirmation 8.8. Pour tout $m \geq 1$ et pour $|t| \leq 2d \leq 2$,

$$d^{m-1}\|D^{m+1}\phi^t\|_0 \leq \chi_m\big(\|\xi\|_{d,m+1}\big).$$

Démonstration. La différentielle $D\phi^t(p)$ en un point p quelconque satisfait l'équation aux variations

$$\frac{d}{dt}D\phi^t(p) = D\nu\big(\phi^t(p)\big)\, D\phi^t(p)$$

avec $D\phi^0(p) = \mathrm{Id}$ comme condition initiale. L'inégalité de Gronwall assure alors que

$$\|D\phi^t\|_0 \leq \exp\big(|t|\|\nu\|_1\big) \leq \exp\big(2\|\nu\|_1\big), \qquad |t| \leq 2. \tag{8.1}$$

Pour tout $m \geq 1$, la dérivée $D^{m+1}\phi^t(p)$, vérifie de même une équation différentielle linéaire, à savoir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}D^{m+1}\phi^t(p) &= D\nu\big(\phi^t(p)\big)\, D^{m+1}\phi^t(p) + \psi_t^m(p), \\ \text{où} \quad \psi_t^m(p) &= \sum_{\substack{\pi\in\Pi_{m+1}\\ |\pi|\geq 2}} D^{|\pi|}\nu\big(\phi^t(p)\big) \prod_{B\in\pi} D^{|B|}\phi^t(p), \end{aligned}$$

avec $D^{m+1}\phi^0(p) = 0$ comme condition initiale. On démontre ci-dessous l'affirmation par récurrence sur m.

Pour $m = 1$, l'estimation (8.1) implique que

$$d\|\psi_t^1\|_0 \leq d\|\nu\|_2 \exp\big(4\|\nu\|_1\big)$$

donc $D^2\phi^t(p)$ vérifie une inéquation différentielle

$$\left|\frac{d}{dt}D^2\phi^t(p)\right| \leq \|\nu\|_1 \left|D^2\phi^t(p)\right| + d^{-1}\chi_1\big(\|\nu\|_{d,2}\big).$$

L'inégalité de Gronwall dit alors que

$$\|D^2\phi^t\|_0 \leq cd^{-1}|t|\,\chi_1\big(\|\nu\|_{d,2}\big)$$

où la constante c satisfait $e^x - 1 \leq cx$ pour $0 \leq x \leq 2\|\nu\|_1$. Par suite, pour $|t| \leq 2d$ et moyennant l'affirmation 8.7,

$$\|D^2\phi^t\|_0 \leq 2c\chi_1\big(\|\nu\|_{d,2}\big) = \chi_1\big(\|\xi\|_{d,2}\big).$$

Pour $m \geq 2$, on observe d'abord que

$$d^m \psi_t^m(p) = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{m+1} \\ |\pi| \geq 2}} d^{|\pi|-1} D^{|\pi|} \nu\big(\phi^t(p)\big) \prod_{B \in \pi} d^{|B|-1} D^{|B|} \phi^t(p)$$

donc, par hypothèse de récurrence,

$$d^m \|\psi_t^m\|_0 \leq \chi_m\big(\|\nu\|_{d,m+1}\big) \quad \text{pour } |t| \leq 2d.$$

Ainsi, sur l'intervalle $|t| \leq 2d$, la dérivée $D^{m+1}\phi^t(p)$ satisfait une inéquation différentielle

$$\left| \frac{d}{dt} D^{m+1} \phi^t(p) \right| \leq \|\nu\|_1 \left| D^{m+1} \phi^t(p) \right| + d^{-m} \chi_m\big(\|\nu\|_{d,m+1}\big).$$

Il découle alors de l'inégalité de Gronwall que

$$d^{m-1} \|D^{m+1} \phi^t\|_0 \leq c d^{-1} |t| \chi_m\big(\|\nu\|_{d,m+1}\big) \leq \chi_m\big(\|\xi\|_{d,m+1}\big),$$

ce qu'on voulait démontrer. □

Affirmation 8.9. Pour tout $m \geq 1$,

$$d^{m-1} \|D^m \Phi\|_0 \leq \chi_m\big(\|\xi\|_{d,m+1}\big).$$

Démonstration. Pour l'application Φ, on note ∂ la dérivation spatiale, ∂_t la dérivation temporelle, et on considère un opérateur du type $D^m = \partial^{m-i} \partial_t^i$. Pour les autres applications, D désigne la différentielle totale. On écrit

$$\partial_t^i \Phi = (F^{(i)} \circ \phi^t) D\phi^t$$

où $F^{(i)}$ est l'application qui donne les coefficients de la i-ième dérivée de Lie de ω dans la direction de ν. Ainsi, $D^k F^{(i)}$ est borné par un polynôme en les dérivées de $\xi^\perp$ dont chaque monôme a un ordre total de dérivation au plus $k+i$.

Maintenant,

$$D^m \Phi = \sum_{\pi \in \Pi_{m-i+1}} \left(D^{|\pi|-1} F^{(i)} \circ \phi^t \prod_{B \in \pi} D^{|B|} \phi^t \right)$$

donc

$$d^{m-1} D^m \Phi = \sum_{\pi \in \Pi_{m-i+1}} \left(d^{|\pi|+i-2} D^{|\pi|-1} F^{(i)} \circ \phi^t \right) \left(d^{m-|\pi|-i+1} \prod_{B \in \pi} D^{|B|} \phi^t \right).$$

Si $i \geq 1$, on peut borner la première parenthèse par $\chi_{|\pi|+i-1}(\|\xi\|_{d,|\pi|+i-1})$ d'après la remarque ci-dessus concernant les dérivées de $F^{(i)}$. Pour borner la seconde parenthèse, on observe que

$$d^{m-|\pi|-i+1} = \prod_{B \in \pi} d^{|B|-1}$$

et on applique l'affirmation 8.8.

Si $i = 0$, il faut isoler de la somme l'unique partition π en un seul bloc de taille $m+1$, le reste se majorant comme précédemment. Ce terme s'écrit

$$d^{m-1}(F \circ \phi^t) D^{m+1} \phi^t$$

et l'affirmation 8.8 permet une fois encore de conclure. □

Affirmation 8.10. Pour tout $m \geq 1$,

$$d^{m-1} \|D^m \bar{h}\|_0 \leq \chi_m(\|\xi\|_{d,m+1}).$$

Démonstration. Comme $h \circ \phi^t = h - t$, l'affirmation 8.8 montre qu'il suffit d'estimer les dérivées de $\bar{h}$ (*i.e* en fait celles de h) le long de S.

Soit h_0 la fonction définie au voisinage de D et dont la restriction à chaque plan P de η est la distance algébrique à $S \cap P$, où S est coorientée pour que h et h_0 aient le même signe. On pose $\nu_0 = f\nu$ où $f = \frac{1}{\nu \cdot h_0}$ et on note ϕ_0^t son flot, défini sur un voisinage Ω_0 de $\{0\} \times D$ dans $\mathbb{R} \times V$. Les flots ϕ_0^t et ϕ^t satisfont la relation

$$\phi_0^t(p) = \phi^{s(t,p)}(p)$$

où la fonction s vérifie l'identité $s(0,p) = 0$ pour tout $(0,p) \in \Omega_0$ et l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} s(t,p) = f\left(\phi^{s(t,p)}(p)\right). \tag{8.2}$$

Comme

$$\phi_0^{h_0(p)}(p) = \phi^{h(p)}(p) = \phi^{s(h_0(p),p)}(p),$$

on a $h(p) = s(h_0(p), p) = s \circ \bar{h}_0(p)$ où $\bar{h}_0(p) = (h_0(p), p)$. D'après la formule de Faà di Bruno, pour $m \geq 1$,

$$D^m h = \sum_{\pi \in \Pi_m} \left(D^{|\pi|} s \circ \bar{h}_0 \prod_{B \in \pi} D^{|B|} \bar{h}_0 \right).$$

Comme dans la preuve de l'affirmation 8.9, l'opérateur de dérivation totale D pour s se scinde en une partie temporelle ∂_t et une partie spatiale ∂. Comme $s(0,p) = 0$ pour tout p voisin de D dans C, les dérivées spatiales $\partial^k s(0,p)$ sont toutes nulles. Par suite, pour $p \in D$, la formule ci-dessus donne

$$D^m h(p) = \sum_{\pi \in \Pi_m} \left(\partial_t^{|\pi|} s(0,p) \prod_{B \in \pi} D^{|B|} h_0(p) \right),$$

et donc

$$d^{m-1} D^m h(p) = \sum_{\pi \in \Pi_m} \left(d^{|\pi|-1} \partial_t^{|\pi|} s(0,p) \right) \prod_{B \in \pi} \left(d^{|B|-1} D^{|B|} h_0(p) \right). \tag{8.3}$$

Les quantités $d^{|B|-1}\|D^{|B|}h_0\|_0$ ne dépendent que de la géométrie de S à similitude près. D'autre part, l'équation (8.2) s'écrit

$$\partial_t s = (f \circ \phi) \circ \bar{s}$$

où $\bar{s}(t,p) = (s(t,p),p)$ donc

$$\partial_t^{k+1} s = \sum_{\pi \in \Pi_k} \left((\partial_\nu^{|\pi|} f \circ \phi) \circ \bar{s} \prod_{B \in \pi} \partial_t^{|B|} s \right),$$

où ∂_ν désigne la dérivation dans la direction de ν (autrement dit, $\partial_\nu f = \nu \cdot f$). Ainsi, pour tout $p \in D$,

$$d^k \partial_t^{k+1} s(0,p) = \sum_{\pi \in \Pi_k} \left(d^{|\pi|} \partial_\nu^{|\pi|} f(p) \right) \prod_{B \in \pi} \left(d^{|B|-1} \partial_t^{|B|} s(0,p) \right). \tag{8.4}$$

Or $f = \frac{1}{\partial_\nu h_0}$ et $\partial_\nu h_0(p)$, pour tout $p \in D$, est le produit scalaire de $\nu(p)$ et du vecteur unitaire normal à $S \cap P$ dans P, où P est le plan horizontal contenant p. La fonction $\partial_\nu h_0$ est donc minorée le long de D par une constante ne dépendant que de $\hat{\theta}$ et $\tilde{\theta}$. En outre, chaque quantité $d^l \|\partial_\nu^{l+1} h_0\|_0$ est bornée par une fonction de $\|\nu\|_{d,l}$ (qui ne dépend de S qu'à dilatation près). Ainsi, chaque quantité $d^{|\pi|}\|\partial_\nu^{|\pi|} f\,|_D\|_0$ est elle-même bornée par une fonction de $\|\nu\|_{d,|\pi|}$, et l'expression (8.4) montre par récurrence que les quantités $d^{k-1}|\partial_t^k s(0,p)|$ sont contrôlées par $\|\nu\|_{d,k}$. La formule (8.3) et l'affirmation 8.7 entraînent alors l'affirmation 8.10. □

Affirmation 8.11. Pour tout $m \geq 1$,

$$d^{m-1}\|D^m \bar{\Phi}\|_0 \leq \chi_m\big(\|\xi\|_{d,m+1}\big).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$d^{m-1} D^m \bar{\Phi} = \sum_{\pi \in \Pi_m} \left(d^{|\pi|-1} D^{|\pi|} \Phi \circ \bar{h} \right) \left(\prod_{B \in \pi} d^{|B|-1} D^{|B|} \bar{h} \right)$$

et d'appliquer aux deux parenthèses les affirmations 8.9 et 8.10 respectivement. □

L'affirmation ci-dessus montre que $\|\bar{\xi}\|_{d,m} \leq \chi_m(\|\xi\|_{d,m+1})$.

Soit maintenant $\rho : V \to [0,1]$ une fonction égale à 1 sur $N_{\mu d}(\sigma)$, à support dans $N_{2\mu d}(\sigma)$ et vérifiant

$$d^{m-1}\,\|D^m \rho\|_0 \leq c_m \quad \text{pour tout } m \geq 1,$$

où les constantes c_m ne dépendent pas de d. Pour tout $u \in [0,1]$, on pose :

$$\omega^u = (1 - u\rho)\omega + u\rho\bar{\omega}.$$

On observe que ces formes sont toutes non singulières car ω et $\bar{\omega}$ sont positives sur ∂_x. On vérifie immédiatement que les champs de plans ξ^u définis par les formes ω^u ont toutes les propriétés requises. □

Remarque 8.12. On note que, si le champ ξ est déjà intégrable sur un domaine du type $C' = \{\phi^t(p),\ p \in D',\ t \in [a(p), b(p)]\}$ pour un certain domaine $D' \subset D$ et des fonctions $a, b\colon D' \to \mathbb{R}$ vérifiant $a \leq 0 \leq b$, alors l'homotopie ξ^u du lemme 8.6 est stationnaire sur C'.

8.5 Démonstration du lemme clé

On reprend ici les données U, F, A et ξ du lemme 8.4 et les autres notations de la section 8.3. En particulier, Δ est la triangulation $(2\mathbb{Z})^3$-invariante de $\mathbb{R}^3$ obtenue en « secouant » la subdivision barycentrique de la triangulation cristalline à sommets entiers. Par périodicité de la construction, Δ a un nombre fini de simplexes modèles au sens où tout simplexe de Δ est un translaté de l'un d'eux. Le diamètre des simplexes de Δ est borné par 1. En outre, la distance entre deux simplexes disjoints ainsi que l'angle entre deux 1 ou 2-simplexes incidents mais non inclus l'un dans l'autre sont uniformément minorés par des nombres notés respectivement $\delta > 0$ et $\gamma \in]0, \pi/2]$ (l'angle entre une droite et un plan est l'angle entre cette droite et sa projection orthogonale sur le plan).

On fixe un angle $\theta < \gamma/2$.

Voisinages polyédraux

Par abus de langage, on appelle encore « cube » de $d\Delta$ tout sous-complexe qui provient d'un cube unité subdivisé, « secoué » et réduit. Comme A est un compact de U, pour $d_0 > 0$ suffisamment petit, $N_{2d_0}(A)$ est inclus dans U et ξ est intégrable sur $K \times N_{2d_0}(F \cap A)$. On fixe un tel nombre d_0. Dans toute la suite, $\|\zeta\|_k$ désignera pour n'importe quel champ de plans ζ sur U la norme $\mathcal{C}^k$ de la restriction de ζ à $N_{2d_0}(A)$.

Étant donné $d < d_0/4$, on note A_d et F_d les sous-complexes de $d\Delta$ constitués de tous les « cubes » rencontrant respectivement $N_{d_0}(A)$ et $N_{d_0}(F \cap A)$. Ainsi, comme $d_0 + 3d < 2d_0$,

$$\begin{aligned} & N_{d_0}(A) \subset A_d \subset N_d(A_d) \subset N_{2d_0}(A) \\ \text{et} \quad & N_{d_0}(F \cap A) \subset F_d \subset N_d(F_d) \subset N_{2d_0}(F \cap A) \end{aligned}$$

donc, en particulier, ξ est intégrable sur $K \times N_d(F_d)$.

Remarque 8.13. Tout 2-simplexe de A_d non inclus dans F_d a au plus une arête dans F_d.

En effet, soit σ un tel 2-simplexe et Q le cube de A_d qui le contient. Par hypothèse, ce cube n'est pas dans F_d, donc $\sigma \cap F_d \subset \sigma \cap \partial Q$. Comme la triangulation Δ est obtenue par subdivision barycentrique, il y a deux cas :

- si σ a un sommet dans l'intérieur de Q, il a au plus une arête dans ∂Q ;
- sinon, $\sigma \subset \partial Q$ a un sommet q dans l'intérieur d'une « face carrée » de Q ; ou bien $q \in F_d$ et alors $\sigma \subset F_d$ (car $F_d \cap Q$ est une union de « faces carrées »), ou bien $q \notin F_d$ et alors σ a au plus une arête dans F_d.

Subdivision de l'espace des paramètres

On prend maintenant une triangulation de l'espace des paramètres K compatible avec L et assez fine pour que l'inégalité suivante soit satisfaite sur chaque simplexe K_* :

$$\angle(\xi_s(p), \xi_t(p)) < \frac{\theta}{16} \quad \text{pour tous } s,\, t \in K_* \text{ et } p \in N_{2d_0}(A). \tag{$\measuredangle_0$}$$

Pour $0 \leq i \leq n$, où $n = \dim K$, on note K^i l'union du i-squelette de la triangulation et du sous-complexe L. On pose aussi $K^{-1} = L$. Le lemme clé découle de l'énoncé suivant.

Lemme 8.14. *Pour $0 \leq i \leq n+1$, on peut trouver des nombres positifs d_i, μ_i et $(c_{i,m})_{m\geq 1}$ tels que, pour tout $d < d_i$, il existe une homotopie ξ^u, $u \in [0, i]$, de K^{i-1}-champs de plans sur U ayant les propriétés suivantes :*

- *ξ^0 coïncide avec ξ (ou plus exactement avec sa restriction à $K^{i-1} \times U$) et l'homotopie est relative à $(K^{i-1} \times (U \setminus G_d^i)) \cup (L \times U)$ où G_d^i est un compact disjoint de $N_{\mu_i d}(F_d)$;*
- *ξ^i est intégrable sur $K^{i-1} \times N_{\mu_i d}(A_d^2)$;*
- *pour tout $(t, u) \in K^{i-1} \times [0, i]$,*

$$\|\xi_t^u\|_{d,m} \leq c_{i,m} \ ; \tag{$\dagger_i$}$$

- *pour tout $(t, u) \in K^{i-1} \times [0, i]$ et tout $p \in U$,*

$$\angle(\xi_t^u(p), \xi_t(p)) < \frac{\theta}{32}.$$

Démonstration du lemme clé. Pour $i = n+1$, le lemme ci-dessus donne le lemme clé avec $d_* = d_{n+1}$, $\mu = \mu_{n+1}$, $c = c_{n+1,1}$ et $G_d = G_d^{n+1}$. □

Démonstration du lemme 8.14. Elle occupe toute la fin de la section 8.5. On procède par récurrence, l'étape $i = 0$ étant trivialement franchie (avec $\mu_0 = 1$) puisque les champs de plans ξ_t, $t \in K^{-1} = L$, sont intégrables sur U tout entier.

On se place maintenant au terme de l'étape $i \geq 0$. Quitte à diminuer d_i, on suppose que

$$d_i c_{i,1} < \frac{\theta}{16}. \tag{$\diamond_i$}$$

Pour $d < d_i$, on prend une homotopie ξ^u, $u \in [0, i]$, de K^{i-1}-champs de plans donnée par l'étape i et vérifiant plus particulièrement pour tout $(t, u) \in K^{i-1} \times [0, i]$ et tout $p \in U$

$$\angle(\xi_t^u(p), \xi_t(p)) < \frac{\theta}{32} - \beta \quad \text{avec } \beta > 0. \tag{$\ddagger_i$}$$

On commence par étendre « trivialement » cette homotopie en une homotopie de K^i-champs de plans stationnaire hors d'un voisinage régulier de K^{i-1}. D'après ($\measuredangle_0$) et ($\ddagger_i$), pour tous s, t dans un même simplexe K_* de K^i et tout $p \in U$,

$$\angle(\xi_t^i(p), \xi_s^i(p)) < \frac{\theta}{8}. \tag{$\measuredangle_i$}$$

On va maintenant fabriquer une homotopie ξ^{i+u}, $u \in [0,1]$, de K^i-champs de plans relative à $K^{i-1} \times U$. Pour tout i-simplexe K_* de K^i (non inclus dans L), on va appliquer le lemme 8.6 au voisinage de chaque simplexe du 2-squelette de A_d non inclus dans F_d en prenant ces simplexes dans un ordre convenable : on traite d'abord les simplexes spéciaux (cf. 8.15), puis les sommets n'appartenant pas à de tels simplexes, puis les arêtes, et enfin les faces non spéciales.

On fixe désormais un i-simplexe K_* (non inclus dans L).

Simplexes spéciaux

Définition 8.15. On dira qu'un 2-simplexe σ de A_d est *spécial* s'il n'est pas contenu dans F_d et s'il existe $(s,q) \in K_* \times \sigma$ tel que $\angle(\sigma, \xi^i_s(q)) < \theta/2$.

Affirmation 8.16. Si σ est un simplexe spécial,

$$\angle(\sigma, \xi^i_t(p)) < \theta \quad \text{pour tout } (t,p) \in K_* \times N_d(\sigma).$$

En particulier, les simplexes spéciaux sont disjoints.

Preuve. Si $(s,q) \in K_* \times \sigma$ est tel que $\angle(\sigma, \xi^i_s(q)) < \theta/2$, alors

$$\begin{aligned}
\angle(\sigma, \xi^i_t(p)) &\leq \angle(\sigma, \xi^i_s(q)) + \angle(\xi^i_s(q), \xi^i_s(p)) + \angle(\xi^i_s(p), \xi^i_t(p)) \\
&< \frac{\theta}{2} + \left\|\xi^i_s\right\|_1 |q-p| + \frac{\theta}{8} \quad \text{d'après } (\measuredangle_i), \\
&< \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{16 d_i} \times 2d + \frac{\theta}{8} \quad \text{d'après } (\dagger_i) \text{ et } (\diamond_i), \\
&< \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{8} + \frac{\theta}{8} < \theta.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que σ et σ' soient deux simplexes spéciaux non disjoints. Soient $s, s' \in K_*$ et $q \in \sigma$, $q' \in \sigma'$ tels que

$$\angle(\sigma, \xi^i_s(q)) < \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \angle(\sigma', \xi^i_{s'}(q')) < \frac{\theta}{2}.$$

Alors

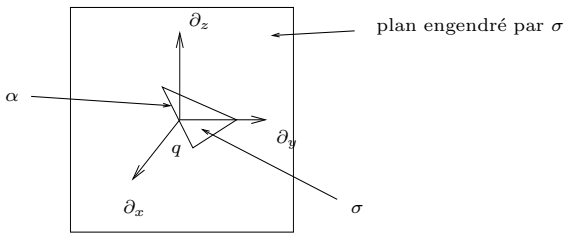
$$\begin{aligned}
\angle(\sigma, \sigma') &\leq \angle(\sigma, \xi^i_s(q)) + \angle(\xi^i_s(q), \xi^i_s(q')) + \angle(\xi^i_s(q'), \xi^i_{s'}(q')) + \angle(\xi^i_{s'}(q'), \sigma') \\
&< \frac{\theta}{2} + \left\|\xi^i_s\right\|_1 |q-q'| + \frac{\theta}{8} + \frac{\theta}{2} \quad \text{d'après } (\measuredangle_i), \\
&< \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{16 d_i} \times 2d + \frac{\theta}{8} + \frac{\theta}{2} \quad \text{d'après } (\dagger_i) \text{ et } (\diamond_i), \\
&< 2\theta < \gamma.
\end{aligned}$$

Par définition de γ, les simplexes σ et σ' sont confondus. □

On explique maintenant comment utiliser le modèle de déformation au voisinage des différents simplexes de A^2_d. En fait, on procède exactement comme Eliashberg dans [El] et on va simplement décrire les objets auxquels on applique le lemme 8.6. Comme annoncé précédemment, on traite d'abord les simplexes spéciaux, puis les sommets, puis les arêtes et enfin les faces non spéciales.

Déformation près des simplexes spéciaux

Soient σ un simplexe spécial, V son $d\delta/2$-voisinage et α une arête quelconque de σ contenant $\sigma \cap F_d$ (cf. remarque 8.13). On met en place des coordonnées adaptées : l'origine est le milieu q de α, le vecteur $\partial_y(q)$ est tangent à σ et pointe vers le sommet opposé à α et le vecteur $\partial_x(q)$ est orthogonal à σ.



Ces choix font que tout champ ξ_t^i, $t \in K_*$, satisfait l'hypothèse $(*)$ de la section 8.4 avec $\tilde{\theta} = \theta$ car, pour tout $(t,p) \in K_* \times N_d(\sigma) \supset K_* \times V$,

$$\angle({\xi_t^i}^{\perp}, \partial_x(p)) = \angle(\xi_t^i(p), \sigma) < \theta \quad \text{d'après l'affirmation 8.16.}$$

Comme dans la section 8.4, η désigne le champ de plans d'équation $dz = 0$. Par hypothèse de récurrence, le champ ξ_t^i est intégrable sur $N_{\mu_i d}(\sigma)$ pour $t \in \partial K_*$ et sur $N_{\mu_i d}(F_d)$ pour $t \in K_*$. On note S le bord lisse d'un domaine strictement convexe contenant $N_{9\mu_i d/10}(\sigma)$, inclus dans $N_{\mu_i d}(\sigma)$ et indépendant de d à similitude près.

Affirmation 8.17. Il existe des nombres positifs $d_{i+1/4}$, μ et κ tels que pour tout $d < d_{i+1/4}$ et tout $t \in K_*$, la surface S contienne un disque D_t variant continûment avec t et ayant les propriétés suivantes :
- D_t est transverse à $\xi_t^i \cap \eta$ et son saturé recouvre le $2\mu d$-voisinage de σ ;
- $D_t \cap P$ est connexe pour toute feuille P de η et fait avec $\xi_t^i \cap \eta$ un angle au moins κ.

Démonstration. Soit $\nu_t \colon V \to \mathbb{S}^1$, $t \in K_*$, le champ de vecteurs unitaire qui dirige $\xi_t^i \cap \eta$. La condition $(*)$ assure comme dans la section 8.4 (cf. affirmation 8.7) que

$$\|\nu_t\|_1 \leq c_\theta \|\xi_t^i\|_1 \quad (\leq c_\theta c_{i,1} = c \quad \text{d'après } (\dagger_i)),$$

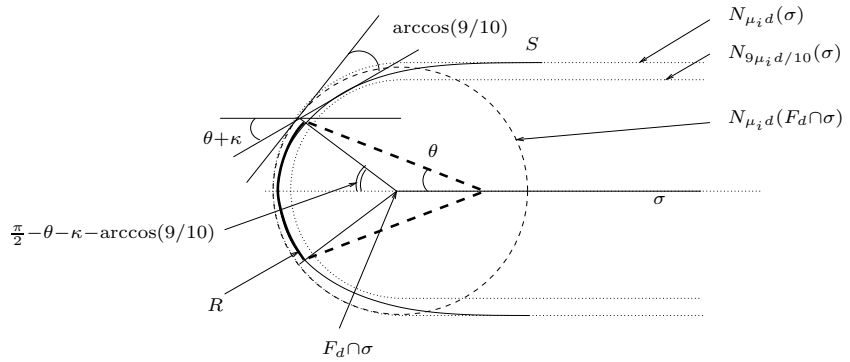
où la constante c_θ ne dépend que de θ. Soit P une feuille de η et $\gamma \colon S \cap P \to \mathbb{S}^1$ l'application de Gauss de $S \cap P$. Comme la courbure de $S \cap P$ est minorée par k/d pour une certaine constante k (indépendante de P), les applications $\pm\nu_t \circ \gamma^{-1} \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sont contractantes pour d assez petit (cf. démonstration du lemme 8.3), et ont donc chacune un unique point fixe. Ces points fixes (qu'on appellera « pôles ») partagent $S \cap P$ en deux intervalles : une face d'entrée et une face de sortie pour ν_t. De plus, pour tout point p de $S \cap P$ situé à une distance au moins εd des pôles, $\nu_t(p)$ fait avec la tangente à $S \cap P$ un angle supérieur à $(k - cd)\varepsilon$. En outre, l'intersection du saturé du εd-voisinage des pôles avec

l'ovale bordé par $S \cap P$ reste confinée dans le $2\varepsilon d$-voisinage des pôles pour peu que ε soit assez petit.

Quand P parcourt l'ensemble des feuilles de η, les pôles de ν_t sur $S \cap P$ décrivent une courbe qui partage S en une face d'entrée S_t^- et une face de sortie S_t^+. L'affirmation découle alors des observations ci-dessus en prenant pour D_t la surface S_t^- privée d'un voisinage de son bord. □

Affirmation 8.18. Quitte à diminuer μ, il existe pour tout $t \in K_*$ un disque $D'_t \subset D_t$ tel que les segments d'orbites de $\xi_t^i \cap \eta$ issus de D'_t et entièrement contenus dans $N_{\mu_i d}(F_d \cap \sigma)$ recouvrent $N_{2\mu d}(\sigma) \cap N_{\mu d}(F_d)$.

Démonstration. On observe d'abord qu'étant donné $\bar{\mu} \in [0, \mu_i]$, il existe μ tel que $N_{2\mu d}(\sigma) \cap N_{\mu d}(F_d) \subset N_{\bar{\mu} d}(F_d \cap \sigma)$. On pose alors $D'_t = D_t \cap N_{\mu_i d}(F_d \cap \sigma)$. On va montrer grâce à la figure ci-dessous que la réunion des segments d'orbites de $\xi_t^i \cap \eta$ issus de D'_t et entièrement contenus dans $N_{\mu_i d}(F_d \cap \sigma)$ contient $N_{\bar{\mu} d}(F_d \cap \sigma)$ pour un certain $\bar{\mu} \in [0, \mu_i]$ qui ne dépend pas de t.



La figure représente la trace des objets S, σ, $F_d \cap \sigma$, etc. dans un plan P du feuilletage η, dans le cas particulier où η est orthogonal à l'arête α (dans le cas général, la figure s'obtient à partir de celle-là par une distorsion de facteur borné, si bien que les mêmes arguments s'appliquent). La région R de S matérialisée par un trait continu épais est incluse dans D'_t. En effet, $R \subset N_{\mu_i d}(F_d \cap \sigma)$ et en chacun de ses points, la tangente à S fait un angle supérieur à $\theta + \kappa$ avec l'horizontale, donc supérieur à κ avec $\xi_t^i \cap \eta$ (d'après la condition $(*)$), si bien que $R \subset D_t$. Pour peu qu'on ait imposé initialement $\theta < 1/2(\pi/2 - \arccos(9/10))$ et quitte à réduire κ, on a

$$\theta < \frac{\pi}{2} - \theta - \kappa - \arccos\left(\frac{9}{10}\right) \quad \text{(cf. figure).}$$

Comme $\xi_t^i \cap \eta$ fait un angle inférieur à θ avec l'horizontale, la réunion de ses segments d'orbites issus de $R \subset D'_t$ et contenus dans $N_{\mu_i d}(F_d \cap \sigma)$ recouvre la partie du cône de sommet $q \in \sigma$ (marqué en pointillés) interceptée par R. Cette union contient donc un $\bar{\mu} d$-voisinage de $F_d \cap \sigma$ pour $\bar{\mu}$ assez petit (indépendant de t). □

L'affirmation 8.17 montre que si $d \leq d_{i+1/4}$, les hypothèses du lemme 8.6 sont satisfaites par tous les champs ξ_t^i, $t \in K_*$, pour les constantes μ et κ. En posant $\mu_{i+1/4} = \mu$, on obtient ainsi une homotopie ξ^u, $u \in [i, i+1/4]$, de K_*-champs de plans ayant les propriétés suivantes :

- ξ_t^u coïncide avec ξ_t^i hors de $N_{2\mu_{i+1/4}d}(\sigma)$;
- $\xi_t^{i+1/4}$ est intégrable sur le $\mu_{i+1/4}d$-voisinage de σ ;
- $\|\xi_t^u\|_{d,m}$ est borné par une constante $c_{i+1/4,m}$ pour tout $m \geq 1$ et tout $(t,u) \in K_* \times [0, i+1/4]$.

Quitte à réduire $d_{i+1/4}$ pour que

$$2d_{i+1/4}c_{i+1/4,1} < \frac{\beta}{4}, \tag{$\diamond_{i+1/4}$}$$

on peut faire en sorte que la variation angulaire de chaque ξ_t^u sur $V = N_{d\delta/2}(\sigma)$ soit bornée par $\beta/8$. Alors, pour tout $(t,u) \in K_* \times [i, i+1/4]$ et tout $p \in V$,

$$\angle(\xi_t^u(p), \xi_t^i(p)) < \frac{\beta}{4}. \tag{$\diamond\diamond_{i+1/4}$}$$

En effet, si $q \in V \setminus N_{2\mu_{i+1/4}d}(\sigma)$,

$$\angle(\xi_t^u(p), \xi_t^i(p)) \leq \angle(\xi_t^u(p), \xi_t^u(q)) + \angle(\xi_t^u(q), \xi_t^i(q)) + \angle(\xi_t^i(q), \xi_t^i(p)) < \frac{\beta}{8} + 0 + \frac{\beta}{8}.$$

Les inégalités ($\ddagger_i$) et ($\diamond\diamond_{i+1/4}$) entraînent, pour tout $(t,u) \in K_* \times [0, i+1/4]$ et tout $p \in U$,

$$\angle(\xi_t^u(p), \xi_t(p)) < \frac{\theta}{32} - \frac{3\beta}{4}. \tag{$\ddagger_{i+1/4}$}$$

Pour $t \in \partial K_*$, la remarque 8.12 montre que l'homotopie ξ_t^u, $u \in [i, i+1/4]$, est complètement stationnaire. En effet, l'intersection du saturé de D_t avec le domaine bordé par S (qui contient le support de l'homotopie) est un fibré en intervalles sur D_t sur lequel ξ_t^i est déjà intégrable par hypothèse pour tout $t \in \partial K_* \subset K^{i-1}$.

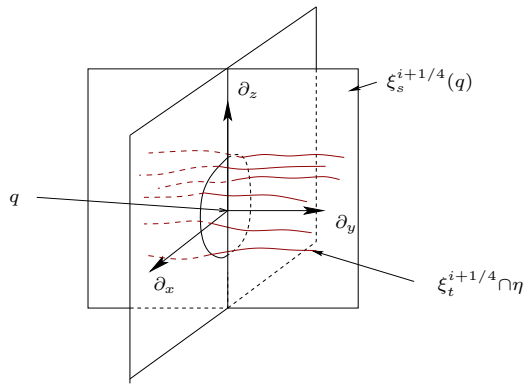
En outre, la même remarque jointe à l'affirmation 8.18 assure que pour tout $t \in K_*$, l'homotopie ξ_t^u est stationnaire sur $N_{\mu_{i+1/4}d}(F_d)$.

Comme les voisinages $V = N_{d\delta/2}(\sigma)$ des différents simplexes spéciaux σ sont deux à deux disjoints (par définition de δ et d'après l'affirmation 8.16), on peut leur appliquer le lemme 8.6 simultanément et on obtient des constantes $d_{i+1/4}$, $\mu_{i+1/4}$ et $c_{i+1/4,m}$ indépendantes de σ.

Déformation près des autres simplexes

Soient maintenant q un sommet de A_d n'appartenant ni à F_d, ni à un simplexe spécial, et V son $d\delta/2$-voisinage. Noter que V est disjoint des $d\delta/2$ voisinages des simplexes spéciaus, de sorte que $\xi_t^{i+1/4}$ coïncide avec ξ_t^i sur V pour tout $t \in K_*$. On prend comme surface S l'intersection de V avec un plan perpendiculaire à $\xi_s^{i+1/4}(q)$ pour un certain $s \in K_*$. On fixe les axes de coordonnées comme suit :

– $\partial_y(q) \in \xi_s^{i+1/4}(q)$ est orthogonal à S ;
– $\partial_x(q) \in T_qS$ est orthogonal à $\xi_s^{i+1/4}(q)$.



En combinant $(\measuredangle_0)$, $(\diamond_{i+1/4})$ et $(\ddagger_{i+1/4})$, on vérifie que la condition $(*)$ est satisfaite par tous les $\xi_t^{i+1/4}$, $t \in K_*$, pour $\tilde{\theta} = \theta/8$. Avec ces notations, on démontre facilement un analogue de l'affirmation 8.17 qui produit des nombres $d_{i+1/2}$, $\mu = \mu_{i+1/2}$, $\kappa = \pi/2 - \theta/8$ et des disques D_t qu'on peut prendre indépendants de t et contenus dans le $\mu_{i+1/4}d$-voisinage de q. Le lemme 8.6 donne alors une homotopie ξ^u, $u \in [i+1/4, i+1/2]$, de K_*-champs de plans ayant les propriétés suivantes :
– ξ_t^u coïncide avec $\xi_t^{i+1/4}$ hors de $N_{2\mu_{i+1/2}d}(q)$;
– $\xi_t^{i+1/2}$ est intégrable sur le $\mu_{i+1/2}d$-voisinage de q ;
– $\|\xi_t^u\|_{d,m}$ est borné par une constante $c_{i+1/2,m}$ pour tout $m \geq 1$ et tout $(t,u) \in K_* \times [0, i+1/2]$.

Quitte à réduire $d_{i+1/2}$ pour que

$$2d_{i+1/2}c_{i+1/2,1} < \frac{\beta}{4}, \tag{$\diamond_{i+1/2}$}$$

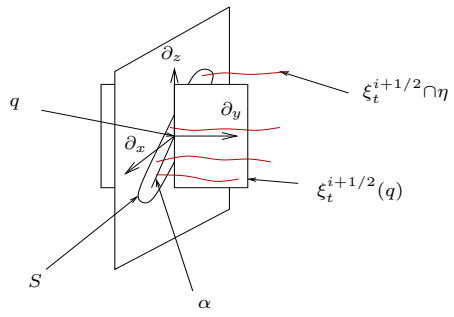
on peut faire en sorte (comme dans le cas des simplexes spéciaux) que pour tout $(t,u) \in K_* \times [i+1/4, i+1/2]$ et tout $p \in V$,

$$\angle(\xi_t^u(p), \xi_t^{i+1/4}(p)) < \frac{\beta}{4}. \tag{$\diamond\diamond_{i+1/2}$}$$

Les inégalités $(\ddagger_{i+1/4})$ et $(\diamond\diamond_{i+1/2})$ entraînent, pour tout $(t,u) \in K_* \times [0, i+1/2]$,

$$\angle(\xi_t^u(p), \xi_t(p)) < \frac{\theta}{32} - \frac{\beta}{2}. \tag{$\ddagger_{i+1/2}$}$$

Pour $t \in \partial K_*$, la remarque 8.12 montre une fois encore que l'homotopie ξ_t^u, $u \in [i+1/4, i+1/2]$, est complètement stationnaire, D_t étant contenu dans $N_{\mu_{i+1/4}d}(q)$. Comme pour les simplexes spéciaux, on applique le lemme 8.6 simultanément au voisinage de tous les sommets.



On considère à présent une arête α de A_d n'appartenant ni à F_d, ni à un simplexe spécial et on note V son $d\delta/2$-voisinage. On prend comme surface S l'intersection de V avec le plan contenant α et perpendiculaire à $\xi_s^{i+1/2}(q)$ pour un certain $s \in K_*$. On met en place des coordonnées adaptées : l'origine q est le milieu de α, le vecteur $\partial_y(q) \in \xi_s^{i+1/2}(q)$ est orthogonal à S et le vecteur $\partial_x(q) \in T_qS$ est orthogonal à $\xi_s^{i+1/2}(q)$.

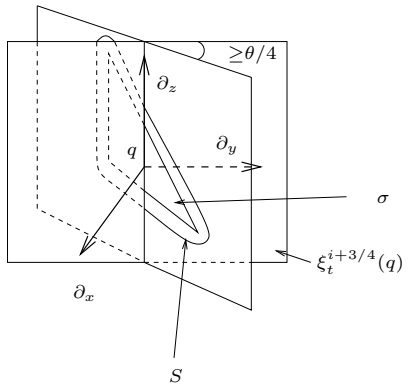
D'après $(\measuredangle_0)$, $(\diamond_{i+1/2})$ et $(\ddagger_{i+1/2})$, la condition $(*)$ est satisfaite par tous les $\xi_t^{i+1/2}$, $t \in K_*$, pour $\tilde{\theta} = \theta/8$. Cette fois encore, on peut démontrer un analogue de l'affirmation 8.17 qui produit des nombres $d_{i+3/4}$, $\mu = \mu_{i+3/4}$, $\kappa = \pi/2 - \theta/8$ et des disques D_t qu'on peut prendre indépendants de t et contenus dans le $\mu_{i+1/2}d$-voisinage de α.

Le lemme 8.6 donne alors une homotopie ξ^u, $u \in [i+1/2, i+3/4]$, de K_*-champs de plans ayant les propriétés qu'on devine. En particulier, pour $t \in \partial K_*$, la remarque 8.12 montre une fois encore que l'homotopie ξ_t^u, $u \in [i+1/2, i+3/4]$, est complètement stationnaire. En outre, pour tout $t \in K_*$, toute courbe intégrale de $\xi_t^{i+1/2} \cap \eta$ qui intersecte D_t rencontre $N_{\mu_{i+1/2}d}(\partial\alpha)$ suivant un intervalle, car $N_{\mu_{i+1/2}d}(\partial\alpha)$ est formé de deux boules strictement convexes. Il résulte alors de la même remarque 8.12 que $\xi_t^u = \xi_t^{i+1/2}$ sur $N_{\mu_{i+1/2}d}(\partial\alpha)$ pour tout $u \in [i+1/2, i+3/4]$. Autrement dit, la déformation ne change rien sur le $\mu_{i+1/2}d$-voisinage du 0-squelette et on peut donc effectuer les déformations simultanément près de toutes les arêtes.

Soient enfin σ une face non spéciale de A_d n'appartenant pas à F_d et V son $d\delta/2$-voisinage. On prend comme surface S l'intersection de V avec le plan engendré par σ et comme origine q le centre de σ. On fixe les axes de coordonnées comme suit :

- $\partial_y(q)$ appartient à $\xi_s^{i+3/4}(q)$ pour un certain $s \in K_*$ et fait un angle maximal avec σ ;
- $\partial_x(q)$ est orthogonal à $\xi_s^{i+3/4}(q)$.

Là encore, tous les $\xi_t^{i+3/4}$, $t \in K_*$, satisfont la condition $(*)$ pour $\tilde{\theta} = \theta/8$. De plus, σ n'étant pas spécial, $\angle(\xi_t^i(p), \sigma) \geq \theta/2$ pour tout $(t,p) \in K_* \times \sigma$. Les inégalités $(\diamond\diamond_{i+k/4})$, $1 \leq k \leq 3$, et $(\diamond_{i+3/4})$ (laissée en devinette au lecteur) assurent alors que $\angle(\xi_t^{i+3/4}(p), \sigma) \geq \theta/2 - \beta \geq \theta/4$ pour tout $(t,p) \in K_* \times V$.



Cette observation permet de démontrer un analogue de l'affirmation 8.17 qui produit des nombres d_{i+1}, $\mu = \mu_{i+1}$, $\kappa = \theta/4$ et des disques D_t qu'on peut prendre indépendants de t et contenus dans le $\mu_{i+3/4}d$-voisinage de σ. Le lemme 8.6 donne alors une homotopie ξ^u, $u \in [i+3/4, i+1]$, de K_*-champs de plans ayant les propriétés qu'on imagine. Comme toute courbe intégrale de $\xi_t^{i+3/4} \cap \eta$ qui intersecte D_t rencontre le $\mu_{i+3/4}$ voisinage de chaque arête de σ suivant un intervalle, la déformation ne change rien sur $N_{\mu_{i+3/4}d}(\partial\sigma)$. On peut donc cette fois encore et pour la dernière effectuer les déformations simultanément sur toutes les faces.

En faisant une telle construction pour tout i-simplexe K_* de K^i, on obtient finalement une homotopie ξ^u, $u \in [0, i+1]$, de K^i-champs de plans sur U, ce qui conclut l'étape $i+1$ de la récurrence (avec $G_d^i \subset N_{d\delta/2}(A_d^2) \setminus N_{\mu_{i+1}d}(F_d)$).

8.6 Désintégration de feuilles compactes

Les sections 8.1 à 8.5 démontrent la proposition 8.1 amputée de l'affirmation 3. Le lemme suivant, qui est une version à paramètre d'une astuce de Thurston dans [Th3], complète la preuve.

Lemme 8.19. *Soit ξ un K-champ de plans intégrable sur une variété à bord N tel que pour tout $t \in K$, aucune composante de ∂N ne soit une feuille de ξ_t, et que pour tout $t \in L \subset K$, le feuilletage défini par ξ_t soit tendu. Alors il existe un lot de boules $B \subset \operatorname{Int} N$ et un K-champ de plans $\bar{\xi}$ sur N ayant les propriétés suivantes :*
- *$\bar{\xi}$ est homotope à ξ relativement à $K \times \operatorname{Op}(\partial N) \cup L \times N$;*
- *$\bar{\xi}$ est intégrable sur $K \times (N \setminus \operatorname{Int} B)$ et presque horizontal sur $K \times B$;*
- *pour tout $t \in K$, le feuilletage $\bar{\xi}_t \mid_{N \setminus \operatorname{Int} B}$ est tendu et, pour tout $t \in K \setminus L$, il n'a même aucune feuille compacte.*

Démonstration. Pour un $t \in K$ fixé, on peut trouver un lot (fini) d'arcs dans $\operatorname{Int} N$ transverses à ξ_t qui coupe toutes les feuilles de ξ_t. Quitte à prolonger légèrement chacun de ces arcs, le lot garde la même propriété vis-à-vis de ξ_s

pour tout s voisin de t. Par compacité, l'espace des paramètres K admet une triangulation telle que, pour tout simplexe K_*, il existe un lot $A_* \subset \operatorname{Int} N$ d'arcs (fixes) transverses à tous les ξ_t, $t \in K_*$, et coupant toutes les feuilles de tous ces feuilletages. L'idée est de perturber ξ_t, $t \in K$, en grimpant sur le squelette de cette triangulation.

On illustre la construction dans le cas particulier où $K = [0,1]$, $L = \{0,1\}$, et la triangulation de K a une unique arête $K_* = K$. Si A désigne l'un des arcs transverses du lot associé, on peut supposer tous les ξ_t tangents à $\mathbb{D}^2 \times \{\cdot\}$ sur un voisinage $C = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^1$ de A, où $A = \{0\} \times [-1/2, 1/2]$. Soient D_+ et D_- deux petits disques dans $\mathbb{D}^2$ et $\mathbb{P} = \mathbb{D}^2 \setminus \operatorname{Int}(D_+ \cup D_-)$. On commence par décrire la déformation de ξ sur $\mathbb{P} \times \mathbb{D}^1 \subset C$. Soit f_u, $u \in [0,1]$, un chemin de difféomorphismes de $\mathbb{D}^1$ valant l'identité près du bord, tels que $f_0 = \mathrm{Id}$ et $f_u(x) > x$ si $x \in [-1/2, 1/2]$ pour tout $u > 0$. On construit une homotopie $\xi^u \,|_{\mathbb{P}\times\mathbb{D}^1}$ de K-champs de plans intégrables telle que :

- $\xi^0 \,|_{\mathbb{P}\times\mathbb{D}^1} = \xi \,|_{\mathbb{P}\times\mathbb{D}^1}$;
- $\xi_i^u \,|_{\mathbb{P}\times\mathbb{D}^1} = \xi_i \,|_{\mathbb{P}\times\mathbb{D}^1}$ pour tout $u \in [0,1]$, $i = 0, 1$;
- pour tout $(t,u) \in [0,1]^2$, le feuilletage $\xi_t^u|_{\mathbb{P}\times\mathbb{D}^1}$ est transverse à $\mathbb{D}^1$, coïncide avec ξ_t au voisinage de $\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^1) \cap \mathbb{P} \times \mathbb{D}^1$, et induit sur $\partial D_+ \times \mathbb{D}^1$, $\partial D_- \times \mathbb{D}^1$ et $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^1$ des feuilletages d'holonomie $f_{\rho(t)u}$, $f_{\rho(t)u}^{-1}$ et Id respectivement, où $\rho\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ désigne une fonction lisse ne s'annulant qu'en 0 et 1.

On prolonge facilement $\xi^u \,|_{\mathbb{P}\times\mathbb{D}^1}$, $u \in [0,1]$, en homotopie de K-champs de plans sur $C = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^1$ relative à $(K \times \operatorname{Op} \partial C) \cup (L \times C)$, les ξ_t^u n'étant par contre plus intégrables sur $D_\pm \times \mathbb{D}^1$ pour $(t,u) \notin ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0,1\} \times [0,1])$. On note $B_\pm$ une boule obtenue en arrondissant les angles de $D_\pm \times \mathbb{D}^1$.

Si $\bar{\xi}$ désigne le K-champ de plans sur N obtenu en effectuant la perturbation ci-dessus au voisinage de chaque arc A, et B le lot constitué de l'union des boules $B_\pm$, $\bar{\xi}$ est intégrable sur $K \times (N \setminus \operatorname{Int} B)$ et presque horizontal sur $K \times B$. Les feuilletages $\bar{\xi}_0 = \xi_0$ et $\bar{\xi}_1 = \xi_1$ sont tendus par hypothèse. Pour tout $t \in]0,1[$, chaque feuille du feuilletage défini par $\bar{\xi}_t$ sur $N \setminus \operatorname{Int} B$ rencontre le bord d'une boule $B_\pm$ dans la région centrale où le feuilletage spirale (de $-1/2$ à $1/2 \in \mathbb{D}^1$). Elle est donc non compacte et on trace facilement sur $\partial B_\pm$ une transversale fermée qui la coupe. $\square$

Bibliographie

[A–K] D. V. Anosov et A. B. Katok — *New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms.* Trans. Moscow Math. Soc. **23** (1970), 1–35.

[C–C] A. Candel et L. Conlon — *Foliations I.* Grad. Studies in Math. **23** (2000).

[Ce] J. Cerf — *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$). Springer Lecture Notes in Mathematics **53**, Springer-Verlag, Berlin (1968).

[El] Y. Eliashberg — *Classification of overtwisted contact structures on* 3-*manifolds.* Invent. Math. **98** (1989), 623–637.

[E–M] Y. Eliashberg and N. Mishachev — *Introduction to the h-Principle.* Graduate Studies in Math. **48** (2002).

[Ey] H. Eynard — *On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line.* Prépublication Comm. Math. Helv.

[F–K] B. Fayad and A. B. Katok — *Constructions in elliptic dynamics.* Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2005), no. 5, 1477–1520.

[Ge] H. Geiges — *An Introduction to Contact Topology.* Cambridge studies in advanced mathematics **109** (2008).

[Go] S. Goodman — *Closed leaves in foliations of codimension one.* Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 383–388.

[Gr1] M. Gromov — *Transversal mappings of foliations.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **182** (1968), 255–258.

[Gr2] M. Gromov — *Partial Differential Relations.* Springer-Verlag (1986).

[Ha1] A. Haefliger — *Variétés feuilletées.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16** (1962), 367–397.

[Ha2] A. Haefliger — *Feuilletages sur les variétés ouvertes.* Topology **9** (1970), 183–194.

[Ha3] A. Haefliger — *Homotopy and integrability*, Manifolds-Amsterdam 1970, Lecture Notes in Math. **197** (1971).

[He] M. R. Herman — *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **49** (1979), 5–233.

[Ko] N. Kopell — *Commuting diffeomorphisms.* In *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. XIV, Amer. Math. Soc. (1968), 165–184.

[La] A. Larcanché — *Topologie locale des espaces de feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3.* Comment. Math. Helvetici **82** (2007), 385–411.

[Ma1] J. Mather — *Commutators of $\mathcal{C}^r$-diffeomorphisms of the real line.* Preprint, version préliminaire de :

[Ma2] J. Mather — *Commutators of diffeomorphisms.* Comment.Math. Helvetici **49** (1974), 512–528.

[Na] A. Navas — *Groups of circle diffeomorphisms*, chapter 4. Arxiv.

[No] S. P. Novikov — *Topology of foliations.* Trans. Moscow Math. Soc. **14** (1965), 248–278 (Russian), A.M.S Translation (1967), 268–304.

[Ph] A. Phillips — *Submersions of open manifolds.* Topology **6** (1967), 171–206.

[Re] G. Reeb — *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées.* Actual. Sci. Ind. **1183**, Hermann, Paris (1977).

[Se] F. Sergeraert — *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité.* Invent. Math. **39** (1977), 253–275.

[Sz] G. Szekeres — *Regular iteration of real and complex functions.* Acta Math. **100** (1958), 203–258.

[Ta] F. Takens — *Normal forms for certain singularities of vector fields.* Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 163–195.

[Th1] W. P. Thurston — *Foliations of Three-Manifolds Which are Circle Bundles.* Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley (1967).

[Th2] W. P. Thurston — *A local construction of foliations for three-manifolds.* Differential topology (Proc. Sympos. Pure Math. **27**, Stanford Univ., California, 1973), Amer. Math. Soc. (1975), 315–319.

[Th3] W. P. Thurston — *The theory of foliations of codimension greater than one.* Comm. Math. Helv. **49** (1974), 214–231.

[Th4] W. P. Thurston — *Existence of codimension-one foliations.* Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 2, 249–268.

[Wo] J. Wood — *Foliations on 3-manifolds.* Ann. of Math. **89** (1969), 336–358.

[Yo] J-C. Yoccoz — *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), 333–359.

Table des matières

Remerciements **3**

Notations **5**

Introduction **7**

I Sur une question de connexité concernant les difféomorphismes de

Quelques formules utiles **17**

1 Centralisateur $\mathcal{C}^1$ **19**
1.1 Existence des champs de Szekeres 19
1.2 Unicité du champ de Szekeres 26

2 Centralisateur $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$ **29**
2.1 Exemples de centralisateurs exotiques 31
2.1.1 Principe de la construction 31
2.1.2 Le champ de vecteurs initial 34
2.1.3 Processus de déformation 35
2.1.4 Le champ de vecteurs limite 43
2.2 Nature arithmétique des temps réguliers 44
2.3 Généricité des temps admissibles 49
2.4 Retour sur l'exemple de Sergeraert 51

3 Chemins de difféomorphismes commutant **55**
3.1 Composantes rationnelles et irrationnelles 55
3.2 Régularité aux points fixes infiniment dégénérés 58

II Sur une question de connexité concernant les feuilletages

4 Structure géométrique des feuilletages **67**
4.1 Dimension quelconque 67
4.2 Dimension trois 68
4.3 Feuilletages tendus 69

5 Nettoyage de feuilletages **71**
5.1 Holonomie 71
5.2 Modélisation près des feuilles nettes 74
5.3 Feuilletages sur le tore épais 76
5.4 Nettoyage sur une variété close 80

6 Feuilletages de Larcanché **83**
6.1 Feuilletages en suspension au-dessus du pantalon 83
6.2 Feuilletages de Larcanché dans le tore plein 85
6.3 Feuilletages agréables sur les fibrés en cercles 87

7 Feuilletages malléables et flexibilité **93**
7.1 Malléabilisation 93
7.2 Malléabilité et presque intégrabilité 95
7.3 Le lemme des vases communicants 97
7.4 Flexibilité des champs presque intégrables 98

8 Champs de plans presque intégrables **103**
8.1 Réduction à des ouverts de l'espace euclidien 104
8.2 Presque-horizontalité et courbure 105
8.3 Triangulation et lemme clé 107
8.4 Le modèle de déformation 108
8.5 Démonstration du lemme clé 114
8.6 Désintégration de feuilles compactes 122

Bibliographie **125**