

# ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES NON-LINÉAIRES : COUPLAGE DE MODÈLES & CHOCS NON CLASSIQUES

**Benjamin BOUTIN**



CEA Saclay  
DEN/DANS/DM2S/SFME/LETR  
&

Université Pierre et Marie Curie Paris 6  
Laboratoire J.-L. Lions



Sous la direction de : Philippe G. LEFLOCH  
Encadrement CEA : Annalisa AMBROSO  
Co-encadrement universitaire : Frédéric COQUEL, Frédéric LAGOUTIÈRE

*Paris, 27 novembre 2009*

- 1 Équations hyperboliques non-linéaires
- 2 Couplage de systèmes hyperboliques
- 3 Analyse mathématique du couplage non-conservatif
- 4 Modèle d'interface épaisse et schéma équilibre
- 5 Conclusions et perspectives

## 1 Équations hyperboliques non-linéaires

- Modèle hyperbolique et critères de sélection
- Problème de Riemann
- Solutions non-classiques
- Schéma numérique pour les solutions non classiques

## 2 Couplage de systèmes hyperboliques

## 3 Analyse mathématique du couplage non-conservatif

## 4 Modèle d'interface épaisse et schéma équilibre

## 5 Conclusions et perspectives

## Notations :

$$u := u(x, t) \in \mathbb{R}^N, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N),$$

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Non-linéarités  $\Rightarrow$  perte de régularité des solutions (apparition de discontinuités en temps fini)

Non-unicité des solutions faibles : **le modèle est incomplet !**

**Limite de diffusion**

$$u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon$$

$$\partial_t u^\epsilon + \partial_x f(u^\epsilon) = \epsilon \partial_x (b(u^\epsilon) \partial_x u^\epsilon)$$

## Critères macroscopiques dérivés :

Critère de LAX (caractère compressif des chocs)

Critère de OLEINIK/LIU (stabilité structurelle des chocs)

Solutions KRUŽKOV / Inégalités d'entropie

## Définition : problème de Riemann

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_\ell, & x < 0, \\ u_r, & x > 0. \end{cases}$$

Solutions auto-semblables en  $\xi = x/t$

$$(-\xi \text{Id} + \nabla f(u)) \frac{du}{d\xi} = 0$$

Avec  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = u_\ell$  et  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = u_r$ .

**Remarque** : capture du comportement asymptotique en temps grand des solutions du problème de CAUCHY pour des données initiales  $u_0(x)$  avec pour limites aux infinis  $u_\ell$  et  $u_r$ .

## Limite diffusion-dispersion

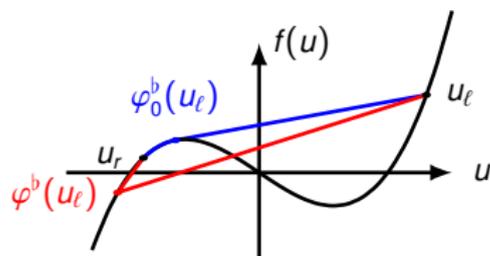
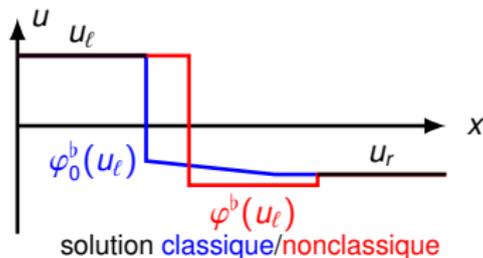
$$\partial_t u^\epsilon + \partial_x f(u^\epsilon) = \epsilon \partial_{xx} u^\epsilon + \delta \epsilon^2 \partial_{xxx} u^\epsilon, \quad f \text{ non-convexe.}$$

phénomènes visco-dispersifs (LEFLOCH)

Exemples :

dynamique des transitions de phase (TRUSKINOVSKY)

écoulement de films liquides minces (BERTOZZI, MÜNCH, SCHEARER).



## Propriétés des solutions non-classiques :

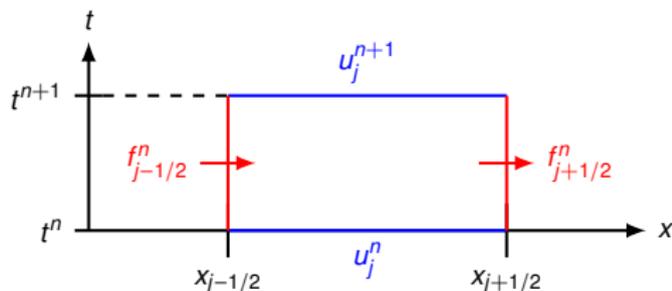
- Violent les inégalités de LAX (chocs sous-compressifs)
- Ne dissipent qu'une seule entropie
- Augmentent la variation totale de la solution
- Satisfont une relation cinétique  $u_r = \varphi^b(u_\ell)$

- Schémas d'ordre élevé (CHALONS, HAYES, LEFLOCH, ROHDE) : conservatifs, consistance avec la formulation visco-dispersive, solutions oscillantes.

$$u_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx$$

$$f_{j-1/2}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x, t)) dt$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$



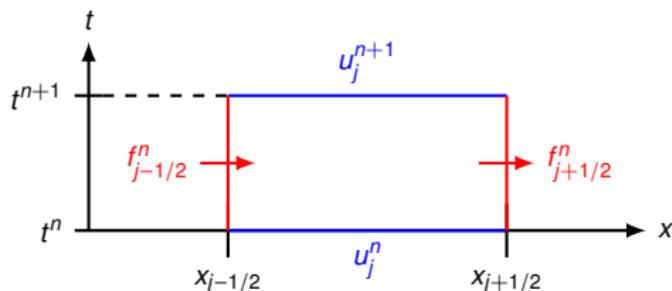
# SCHEMA NUMERIQUE POUR LES SOLUTIONS NON CLASSIQUES

- Schémas d'ordre élevé (CHALONS, HAYES, LEFLOCH, ROHDE) : conservatifs, consistance avec la formulation visco-dispersive, solutions oscillantes.
- Schéma de type GLIMM (CHALONS, LEFLOCH) : utilisent la fonction cinétique  $\varphi^b$  via le solveur de RIEMANN non-classique, seulement statistiquement conservatifs, sans étape de projection.

$$u_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx$$

$$f_{j-1/2}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x, t)) dt$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$



# SCHEMA NUMERIQUE POUR LES SOLUTIONS NON CLASSIQUES

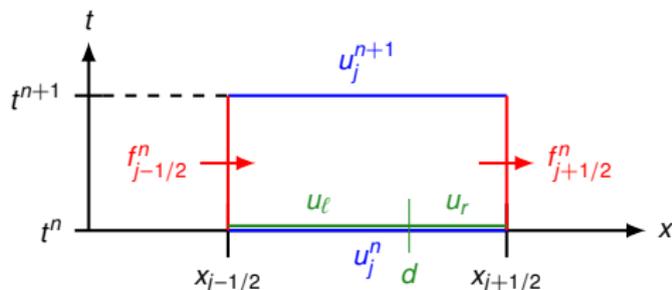
- Schémas d'ordre élevé (CHALONS, HAYES, LEFLOCH, ROHDE) : conservatifs, consistance avec la formulation visco-dispersive, solutions oscillantes.
- Schéma de type GLIMM (CHALONS, LEFLOCH) : utilisent la fonction cinétique  $\varphi^b$  via le solveur de RIEMANN non-classique, seulement statistiquement conservatifs, sans étape de projection.

✉ BOUTIN, CHALONS, LAGOUTIERE, LEFLOCH (2008). *A convergent and conservative schemes for nonclassical solutions based on kinetic relations. I. Interfaces and Free Boundaries,*

$$u_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx$$

$$f_{j-1/2}^n \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x, t)) dt$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$



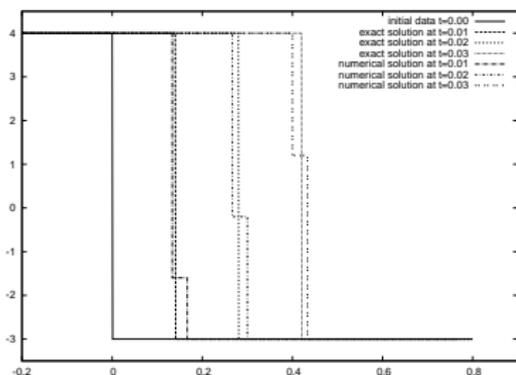
**Principe** : étape de **reconstruction** avant calcul des flux  $f_{j-1/2}^n, f_{j+1/2}^n$

« conservative » :  $u_r(1 - d) + u_l(1 + d) = u_j^n$ ,

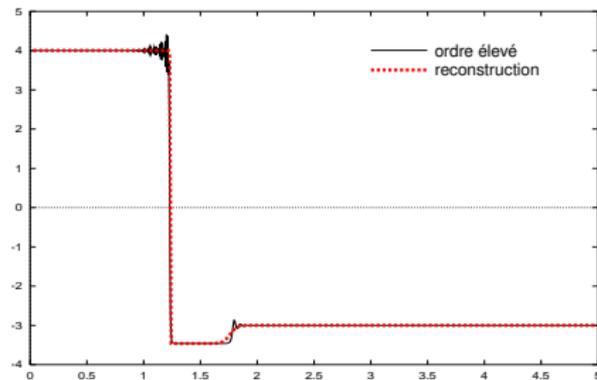
« consistante » avec la relation cinétique :  $u_r = \varphi^b(u_l)$ .

## Propriétés remarquables du schéma de reconstruction

- coïncide en dehors des discontinuités non classiques avec le schéma classique choisi
- préserve les chocs non classiques « isolés »
- converge numériquement vers la bonne solution non classique (convergence en maillage de la relation cinétique numérique vers la relation cinétique prescrite).



Choc non-classique isolé



Comparaison avec un schéma d'ordre élevé

## 1 Équations hyperboliques non-linéaires

## 2 **Couplage de systèmes hyperboliques**

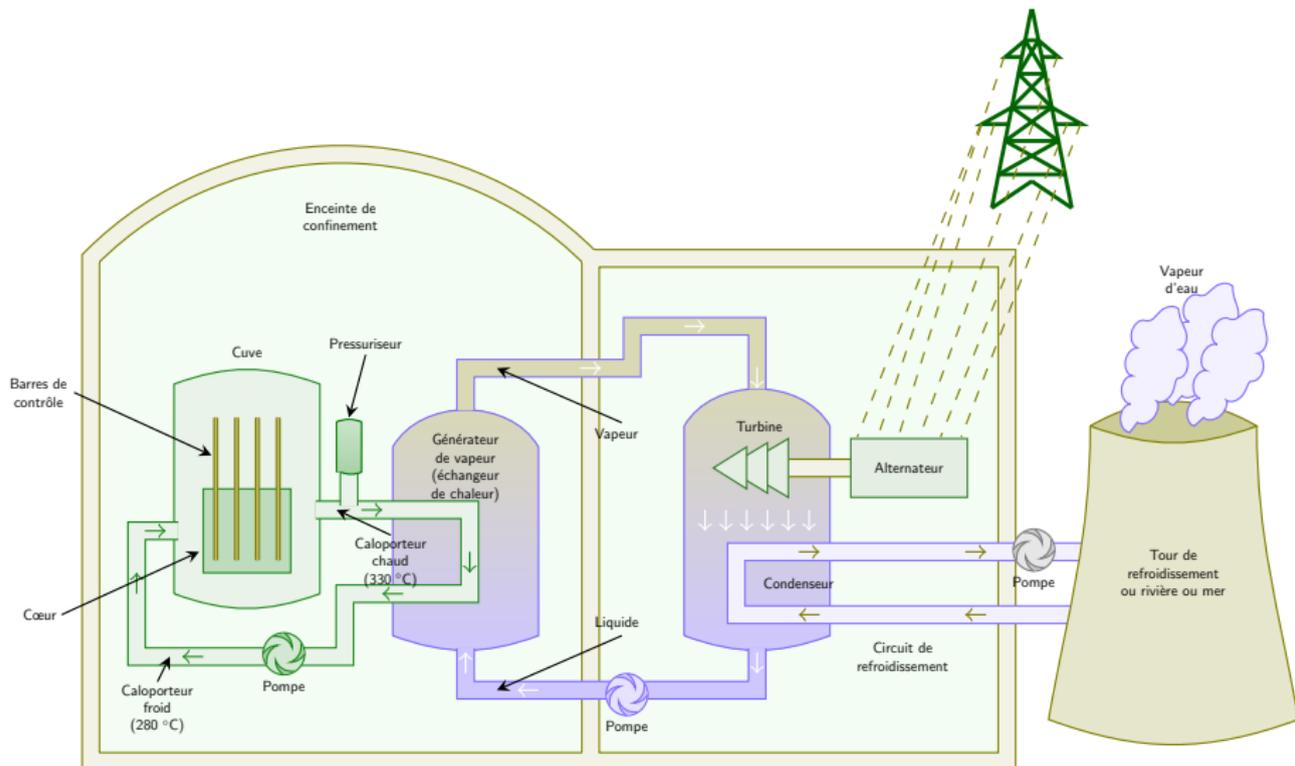
- Introduction à la problématique du couplage
- Couplages conservatif et non-conservatif
- Formulation faible de la relation de couplage
- Existence pour le problème de RIEMANN couplé scalaire
- Démarche proposée

## 3 Analyse mathématique du couplage non-conservatif

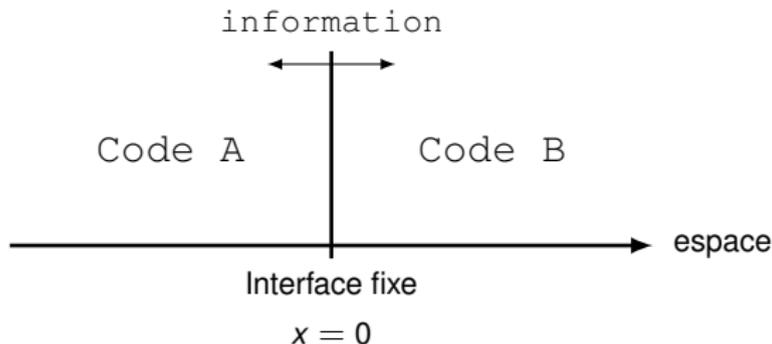
## 4 Modèle d'interface épaisse et schéma équilibre

## 5 Conclusions et perspectives

# MOTIVATIONS INDUSTRIELLES



## Couplage de codes :



## Quelle information transmettre ?

- Conservation de certaines quantités physiques
- Continuité de certaines variables pertinentes
- Définition des états « stationnaires » du problème

Inconnue  $w \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f_-(w) = 0, & x < 0, t > 0, \\ \partial_t w + \partial_x f_+(w) = 0, & x > 0, t > 0. \end{cases}$$

## Couplage par flux

$$f_-(w(0^-, t)) = f_+(w(0^+, t)), \quad t > 0.$$

AUDUSSE, PERTHAME, SEGUIN, VOVELLE, TOWERS, KARLSEN, RISEBRO

Couplage conservatif à flux discontinu  
Conditions entropiques à l'interface

## Couplage par état

$$w(0^-, t) = w(0^+, t), \quad t > 0.$$

ou plus généralement

$$\theta_-(w(0^-, t)) = \theta_+(w(0^+, t)), \quad t > 0.$$

$\theta_{\pm}$  changements de variable.

GODLEWSKI, RAVIART

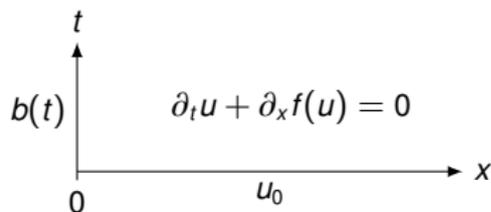
Pas de critère entropique naturel à l'interface  
( $\Rightarrow$  besoin d'un retour au niveau microscopique)

**Difficulté** : Les approches sont généralement incompatibles !

**Exemple du couplage de deux Euler** (lois de pressions distinctes)

formulé en  $w = (\rho, u, p) \Rightarrow$  continuité de  $u$  et  $p$ , conservation de  $\rho$  et  $\rho u$ ,  
mais  $\rho e$  n'est pas conservée

## Demi-problème de RIEMANN (DUBOIS & LEFLOCH, 1988)



Condition de bord :  $u(0^+, t) = b(t)$ .

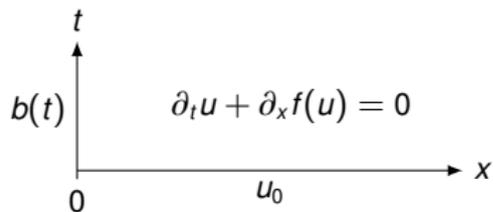
Forme affaiblie :

$$u(0^+, t) \in \mathcal{O}(b(t)), \text{ où}$$

$$\mathcal{O}(b(t)) = \{\mathcal{W}(0^+, b(t), \tilde{u}), \tilde{u} \in \Omega\}$$

→ Problème bien posé.

## Demi-problème de RIEMANN (DUBOIS & LEFLOCH, 1988)



Condition de bord :  $u(0^+, t) = b(t)$ .

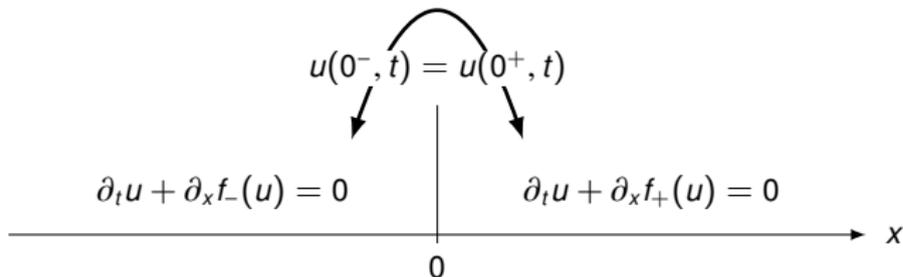
Forme affaiblie :

$u(0^+, t) \in O(b(t))$ , où

$$O(b(t)) = \{W(0^+, b(t), \tilde{u}), \tilde{u} \in \Omega\}$$

→ Problème bien posé.

## Recollement de deux demi-problèmes de RIEMANN (GODLEWSKI & RAVIART, 2004)



$$\begin{cases} u(0^-, t) \in O_-(u(0^+, t)), \\ u(0^+, t) \in O_+(u(0^-, t)). \end{cases}$$

## Théorème (BOUTIN, CHALONS, RAVIART)

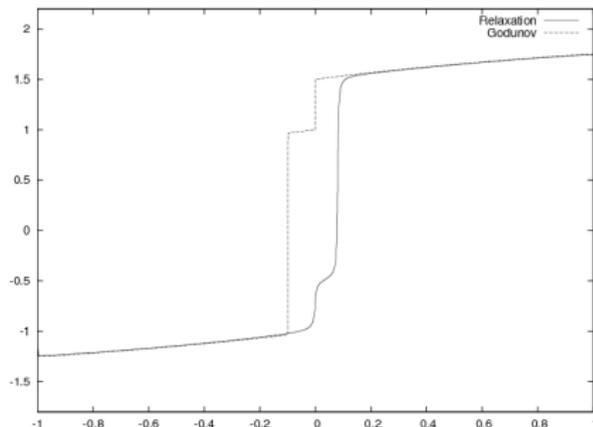
Cas scalaire  $N = 1$ , flux  $f_-$  et  $f_+$  de classe  $C^1$ , fonctions de couplage  $\theta_{\pm}$  de même monotonie alors il existe une solution autosemblable (non nécessairement unique) du problème de RIEMANN couplé :

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f_-(w) = 0, & x < 0, t > 0, \\ \partial_t w + \partial_x f_+(w) = 0, & x > 0, t > 0, \end{cases} \quad w(x, 0) = \begin{cases} w_\ell, & x < 0, \\ w_r, & x > 0, \end{cases}$$

avec la formulation faible de  
 $\theta_-(w(0^-, t)) = \theta_+(w(0^+, t)), \quad t > 0.$

### Remarque :

Dans les cas de non-unicité, la mise en œuvre numérique témoigne de la sensibilité de la solution capturée au schéma choisi.



Nous proposons d'ajouter au modèle de couplage une « **structure d'interface** »

- ➊ **suffisamment enrichissante** pour assurer un problème global mathématiquement bien posé/mieux posé.
- ➋ **suffisamment souple** pour envisager de prendre a posteriori des considérations physiques discriminantes (dissipation d'entropie à l'interface, relation cinétique)
- ➌ implémentable numériquement

Nous proposons d'ajouter au modèle de couplage une « **structure d'interface** »

- ➊ **suffisamment enrichissante** pour assurer un problème global mathématiquement bien posé/mieux posé.
- ➋ **suffisamment souple** pour envisager de prendre a posteriori des considérations physiques discriminantes (dissipation d'entropie à l'interface, relation cinétique)
- ➌ implémentable numériquement

Deux travaux complémentaires dans cette voie :

- Modèle d'interface mince et analyse de la résonance retour à une régularisation parabolique du problème en considération.
- Modèle d'interface épaisse (zone tampon) et mise en œuvre numérique

1 Équations hyperboliques non-linéaires

2 Couplage de systèmes hyperboliques

**3 Analyse mathématique du couplage non-conservatif**

- Formulation augmentée du couplage
- Analyse du couplage résonnant par la méthode de DAFERMOS
- Profil d'interface des solutions RIEMANN-DAFERMOS
- L'exemple quadratique

4 Modèle d'interface épaisse et schéma équilibre

5 Conclusions et perspectives

Inconnue  $u \in \mathbb{R}^N$ , traité ici pour une transmission en  $u$

$$\begin{array}{c}
 u(0^-, t) = u(0^+, t) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \partial_t u + \partial_x f_-(u) = 0 \quad \bigg| \quad \partial_t u + \partial_x f_+(u) = 0 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Système augmenté

$$\begin{cases}
 \partial_t u + A_1(u, v) \partial_x u = 0, \\
 \partial_t v = 0,
 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Fonction de couleur :

$$v(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

exemple :

$$A_1(u, v) = \frac{1-v}{2} \nabla f_-(u) + \frac{1+v}{2} \nabla f_+(u), \quad \mathbb{R} - \text{diagonalisable.}$$

Propriétés :

Système global hyperbolique non-conservatif,

Système en  $u$  de taille  $N$  strictement hyperbolique

Système en  $(u, v)$  de taille  $N + 1$  : **perte d'hyperbolicité**

$\lambda = 0$  est valeur propre multiple si  $A_1(u, v)$  n'est pas inversible

(**Manifestation de la résonance à l'interface**).

Hors de la résonance, **les composantes de  $u$  sont des invariants de RIEMANN pour les ondes de vitesse nulle.**

Régularisation parabolique de DAFERMOS : étude des solutions autosemblables en temps grand

## Système augmenté régularisé

$$\partial_t u^\epsilon + A_1(u^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x u^\epsilon = \epsilon t \partial_x (B_0(u^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x u^\epsilon),$$

$$\partial_t v^\epsilon = \epsilon^2 t \partial_{xx} v^\epsilon.$$

Régularisation parabolique de DAFERMOS : étude des solutions autosemblables en temps grand

### Système augmenté régularisé

$$\begin{aligned}\partial_t u^\epsilon + A_1(u^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x u^\epsilon &= \epsilon t \partial_x (B_0(u^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x u^\epsilon), \\ \partial_t v^\epsilon &= \epsilon^2 t \partial_{xx} v^\epsilon.\end{aligned}$$

### Théorème d'existence (BOUTIN, COQUEL, LEFLOCH)

Sous des hypothèses de proximité des données, le problème de RIEMANN pour ce système admet une solution  $u^\epsilon$ , qui converge simplement vers  $u$  à variation bornée, autosemblable, solution entropique (sur chaque demi-espace) de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f_-(u) = 0, & x < 0, t > 0, \\ \partial_t u + \partial_x f_+(u) = 0, & x > 0, t > 0. \end{cases}$$

Cas système  $u \in \mathbb{R}^N$ , pour des couplages généraux  $\theta_\pm$  suffisamment proches.

### Principe de démonstration : Théorème de point fixe

Représentation de la solution sur une base héritée de l'hyperbolicité du système en  $u$

Contrôle des coefficients d'interactions entre les ondes élémentaires qui constituent la solution

Contrôle des coefficients d' **interactions avec l'onde résonnante**

Régularisation parabolique de DAFERMOS : étude des solutions autosemblables en temps grand

### Système augmenté régularisé

$$\begin{aligned}\partial_t u^\epsilon + A_1(u^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x u^\epsilon &= \epsilon t \partial_x (B_0(u^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x u^\epsilon), \\ \partial_t v^\epsilon &= \epsilon^2 t \partial_{xx} v^\epsilon.\end{aligned}$$

### Théorème d'existence (BOUTIN, COQUEL, LEFLOCH)

Sous des hypothèses de proximité des données, le problème de RIEMANN pour ce système admet une solution  $u^\epsilon$ , qui converge simplement vers  $u$  à variation bornée, autosemblable, solution entropique (sur chaque demi-espace) de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f_-(u) = 0, & x < 0, t > 0, \\ \partial_t u + \partial_x f_+(u) = 0, & x > 0, t > 0. \end{cases}$$

Cas système  $u \in \mathbb{R}^N$ , pour des couplages généraux  $\theta_\pm$  suffisamment proches.

### Principe de démonstration : Théorème de point fixe

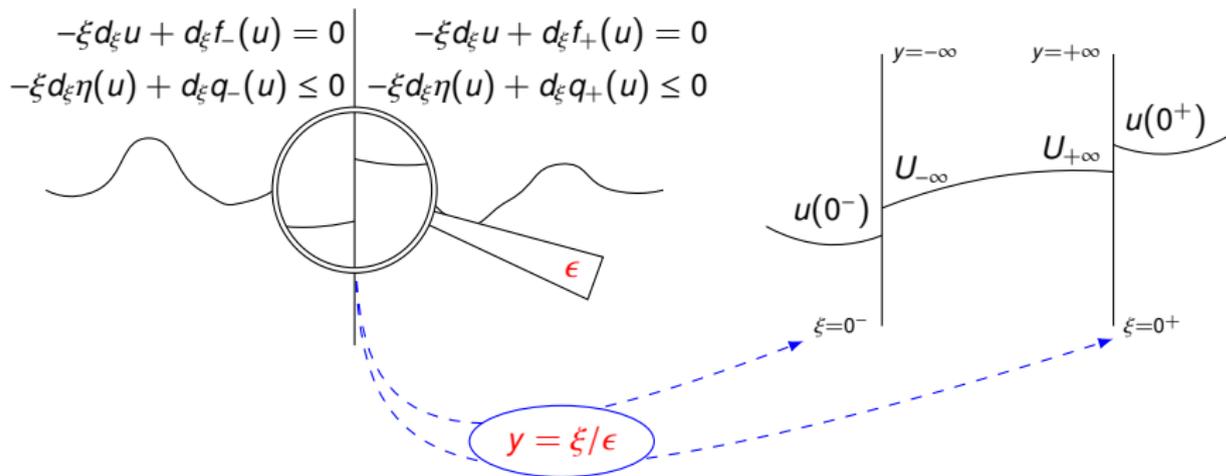
Représentation de la solution sur une base héritée de l'hyperbolicité du système en  $u$

Contrôle des coefficients d'interactions entre les ondes élémentaires qui constituent la solution

Contrôle des coefficients d' **interactions avec l'onde résonnante**

Qu'en est-il des traces à l'interface ?

# RENORMALISATION À L'INTERFACE



Principe de renormalisation de la solution révélant la structure à l'interface.

$$U^{\epsilon}(y) = u^{\epsilon}(\epsilon y) \text{ et } V^{\epsilon}(y) = v^{\epsilon}(\epsilon y).$$

Résultat obtenu dans le cas scalaire  $u \in \mathbb{R}$  par un procédé constructif :

$\exists U \in C^2(\mathbb{R})$  avec des limites aux infinis  $U_{-\infty}$  et  $U_{+\infty}$  t.q.

$$\min(u_\ell, u_r) \leq U_{\pm\infty} \leq \max(u_\ell, u_r).$$

## Équation de profil visqueux

$$A_1(U, V)U_y = (B_0(U, V)U_y)_y,$$

## Chocs stationnaires de part et d'autre de l'interface

$$\begin{aligned} f_-(u(0^-)) &= f_-(U_{-\infty}), & q_-(u(0^-)) &\geq q_-(U_{-\infty}), \\ f_+(U_{+\infty}) &= f_+(u(0^+)), & q_+(U_{+\infty}) &\geq q_+(u(0^+)). \end{aligned}$$

Si de plus  $f'_-(U_{-\infty}) < 0$  ou  $f'_+(U_{+\infty}) > 0$ , alors  $U$  est constante et  $U_{-\infty} = U_{+\infty}$ .

# L'EXEMPLE QUADRATIQUE : SOLUTIONS SÉLECTIONNÉES

$$f_L(u) = u^2/2$$

$$f_R(u) = (u - c)^2/2 \text{ avec } c = -1$$

## Remarques :

**Non-unicité** dans certains domaines

Les solutions à deux ondes ont un **état intermédiaire bien déterminé** (après analyse complémentaire par une méthode de Laplace).

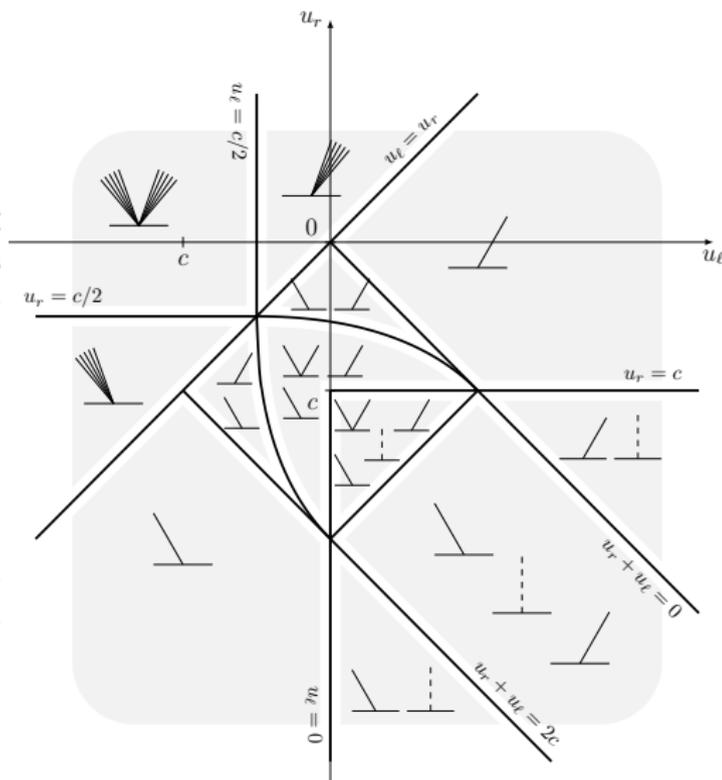
**Au plus 4 solutions**

## Conclusion :

L'approche visqueuse a sélectionné certaines solutions parmi toutes celles satisfaisant à la condition de couplage.

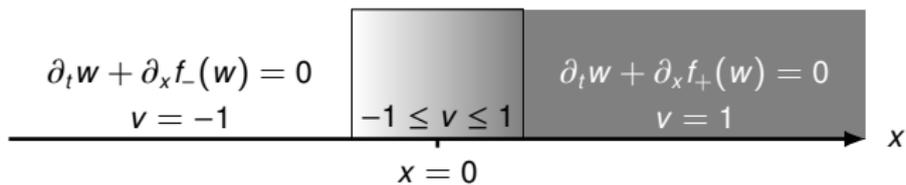
Pourquoi plusieurs solutions ?

Interprétation du problème de Riemann  
Cas résonnants.

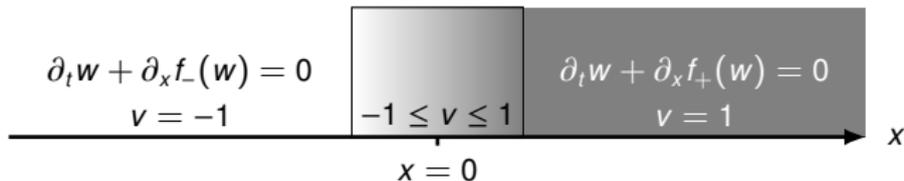


- 1 Équations hyperboliques non-linéaires
- 2 Couplage de systèmes hyperboliques
- 3 Analyse mathématique du couplage non-conservatif
- 4 Modèle d'interface épaisse et schéma équilibre**
  - Modèle d'interface épaisse
  - Schéma équilibre multidimensionnel
  - Résultats numériques
- 5 Conclusions et perspectives

# MODÈLE D'INTERFACE ÉPAISSE



## MODÈLE D'INTERFACE ÉPAISSE



Le couplage par état  $\theta_-(w(0^-, t)) = \theta_+(w(0^+, t))$   
est ici restitué sous la forme

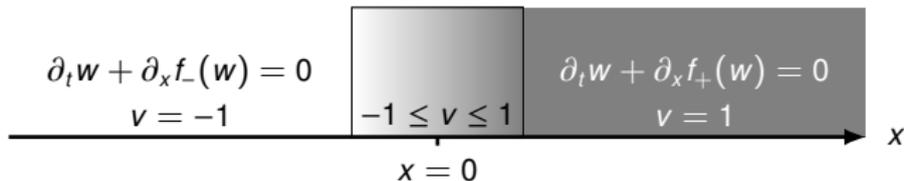
"les états à  $u$  constant sont stationnaires", où

$$u = C_0(w, v), \quad C_0(w, \pm 1) = \theta_{\pm}(w),$$

### Modèle d'interface épaisse

$$\partial_t w + \partial_x f(w, v) = \partial_v f(w, v) \partial_x v. \quad (1)$$

# MODÈLE D'INTERFACE ÉPAISSE



Le couplage par état  $\theta_-(w(0^-, t)) = \theta_+(w(0^+, t))$   
est ici restitué sous la forme

"les états à  $u$  constant sont stationnaires", où

$$u = C_0(w, v), \quad C_0(w, \pm 1) = \theta_{\pm}(w),$$

## Modèle d'interface épaisse

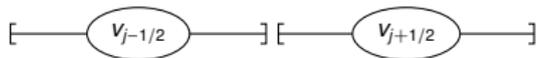
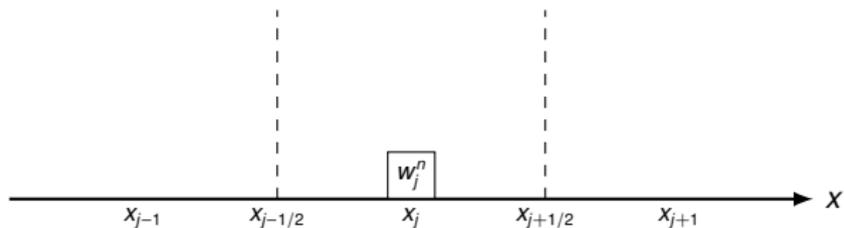
$$\partial_t w + \partial_x f(w, v) = \partial_v f(w, v) \partial_x v. \quad (1)$$

### Théorème à la Kružkov non-homogène avec terme source lipschitzien

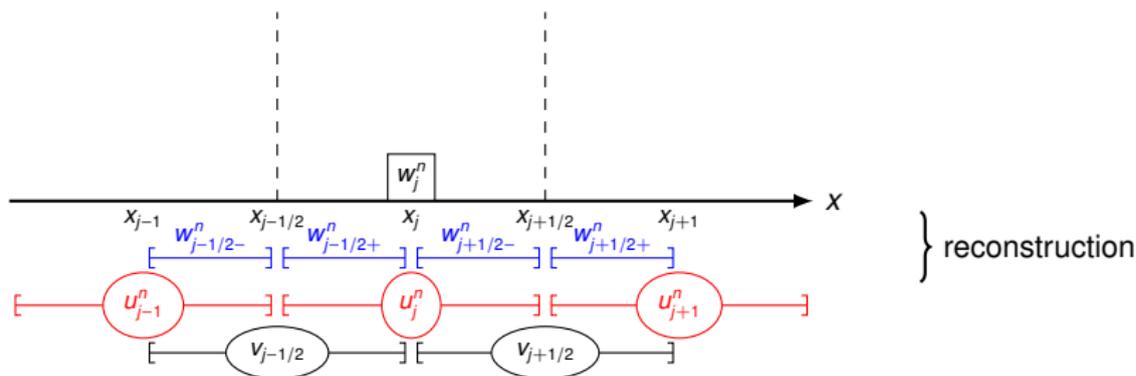
Soit une à de CAUCHY  $w_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  et  $v \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ , alors

$\exists! w \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}))$  solution « entropique » de (1).

$$\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x)$$



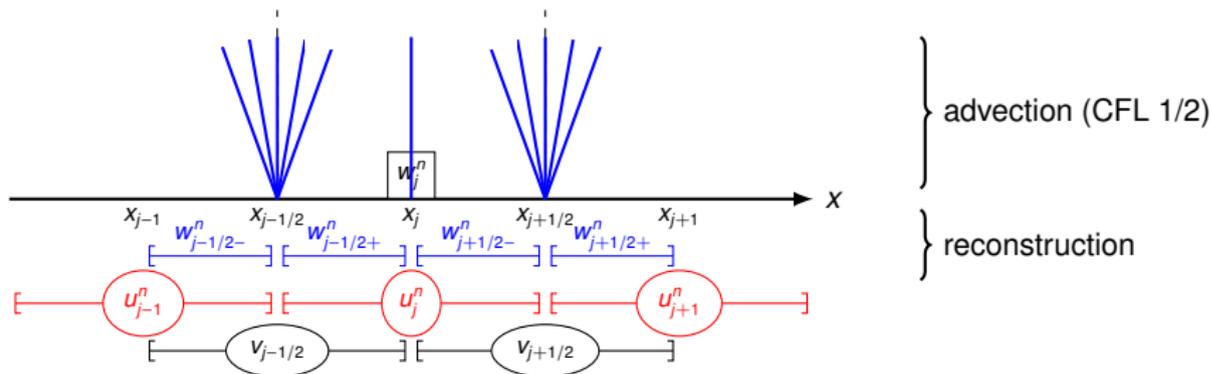
$$\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x)$$



**Reconstruction :**

$$u_j^n \text{ solution de } w_j^n = \frac{1}{2} \left( \overbrace{C_0(u_j^n, v_{j-1/2})}^{w_{j-1/2+}^n :=} + \overbrace{C_0(u_j^n, v_{j+1/2})}^{w_{j+1/2-}^n :=} \right)$$

$$\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x)$$



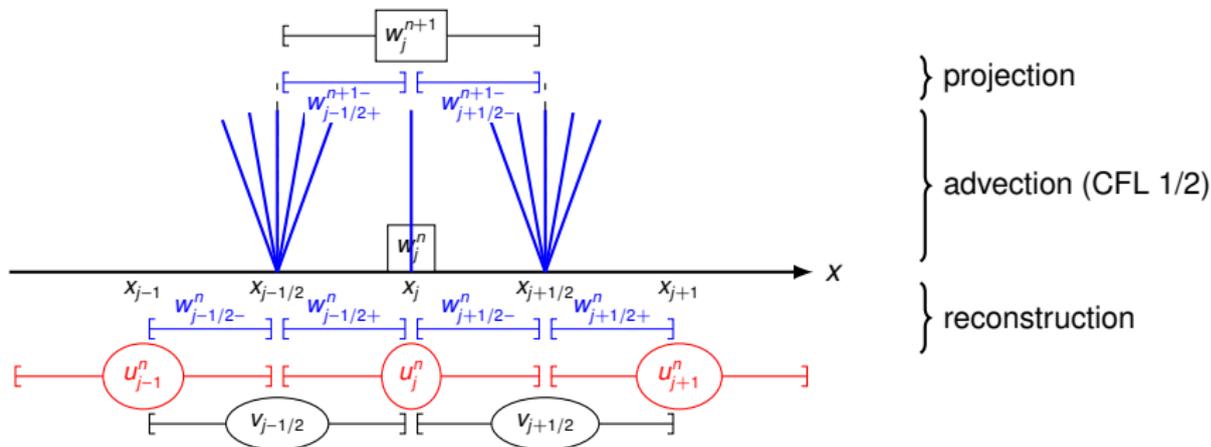
**Reconstruction :**

$$u_j^n \text{ solution de } w_j^n = \frac{1}{2} \left( \overbrace{C_0(u_j^n, v_{j-1/2})}^{w_{j-1/2+}^n :=} + \overbrace{C_0(u_j^n, v_{j+1/2})}^{w_{j+1/2-}^n :=} \right)$$

**Evolution en temps et projection :**

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( H_{j+1/2}^n - H_{j-1/2}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( h(w_{j-1/2+}^n, v_{j-1/2}) - h(w_{j+1/2-}^n, v_{j+1/2}) \right)$$

$$\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x)$$



**Reconstruction :**

$$u_j^n \text{ solution de } w_j^n = \frac{1}{2} \left( \overbrace{C_0(u_j^n, v_{j-1/2})}^{w_{j-1/2+}^n :=} + \overbrace{C_0(u_j^n, v_{j+1/2})}^{w_{j+1/2-}^n :=} \right)$$

**Evolution en temps et projection :**

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( H_{j+1/2}^n - H_{j-1/2}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( h(w_{j-1/2+}^n, v_{j-1/2}) - h(w_{j+1/2-}^n, v_{j+1/2}) \right)$$

## Propriété équilibre / Couplage

Une solution numérique  $w_j^0$  telle que  $u_j^0 := C_0(w_j^0, v_j) = cste$  est stationnaire.

## Théorème de convergence du schéma 1D (BOUTIN, COQUEL, LEFLOCH)

La solution numérique converge vers l'unique solution Kružkov de

$$\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x).$$

## Propriété équilibre / Couplage

Une solution numérique  $w_j^0$  telle que  $u_j^0 := C_0(w_j^0, v_j) = cste$  est stationnaire.

## Théorème de convergence du schéma 1D (BOUTIN, COQUEL, LEFLOCH)

La solution numérique converge vers l'unique solution Kružkov de

$$\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x).$$

### La preuve :

Stabilité  $L^\infty$  : (sous CFL 1/2)  $\min_k u_k^0 \leq u_j^n \leq \max_k u_k^0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}.$

Consistance avec les inégalités d'entropie associées à :  $\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x)$

Pas d'estimation en variation totale (à cause des reconstructions)

Estimation faible sur les dérivées discrètes

Passage à la limite au sens des solutions à valeurs mesures entropiques de DiPerna

Limite au sens des mesures d'Young = solution Kružkov, par unicité des solutions à valeurs mesures entropiques

**Extension du schéma au cas multiD :**

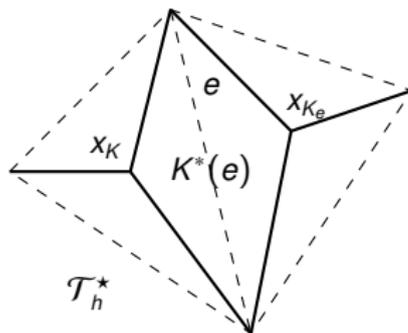
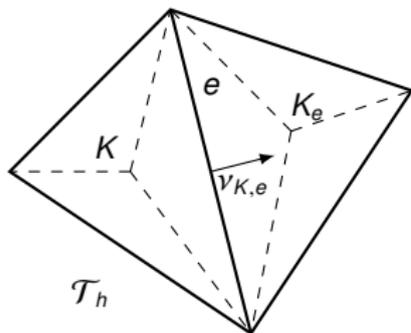
$L + 1$  domaines (géométrie, flux, fonction de couplage) de  $\mathbb{R}^d$

Fonction couleur vectorielle :  $v(x) \in \mathbb{R}^L$

Possible recouvrement des domaines

Étape de reconstruction effectuée via un maillage « dual »  $\mathcal{T}_h^*$

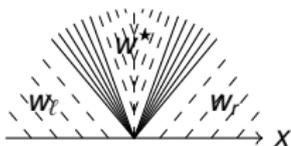
Hypothèse de non-dégénérescence du maillage.

**Théorème de convergence du schéma multiD (BOUTIN, COQUEL, LEFLOCH)**

La solution numérique converge vers l'unique solution Kružkov de

$$\partial_t w + \partial_x h(w, x) = S(w, x).$$

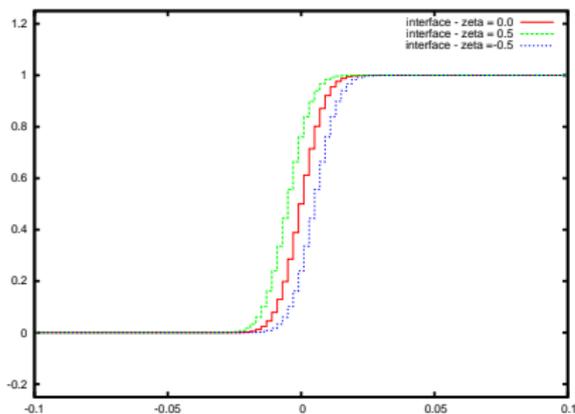
# RÉSULTATS NUMÉRIQUES (1) - CAS RÉSONNANTS EN 1D



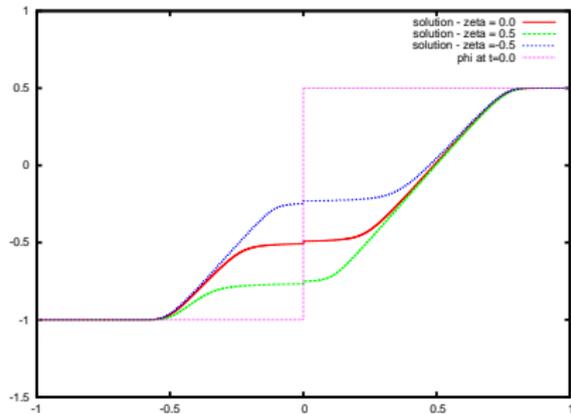
Continuum de solutions admissibles

$$w^* \in [w_\ell, w_r]$$

$$v(x) = \frac{\operatorname{erf}(x/\eta + \zeta) + 1}{2}.$$

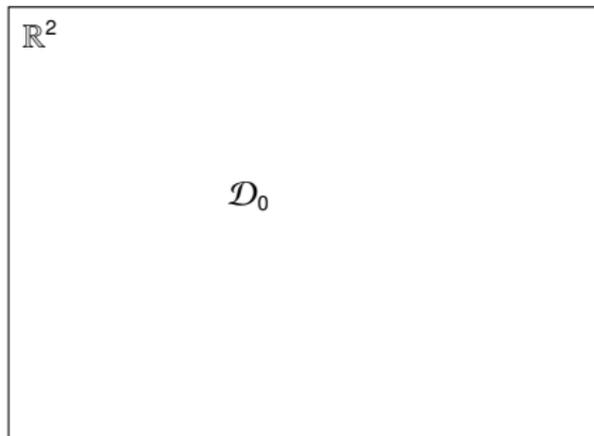


Interfaces



Solutions correspondantes ( $N = 1000$ )

Configuration géométrique :

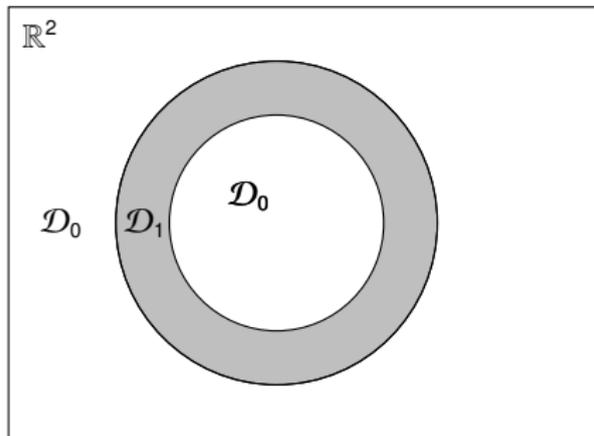


$$\partial_t w + \partial_x f_i(w) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_i, \quad i = 0$$

$$f_0(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\theta_i(w(x^i, t)) = \theta_j(w(x^j, t)), \quad i \neq j.$$

Configuration géométrique :



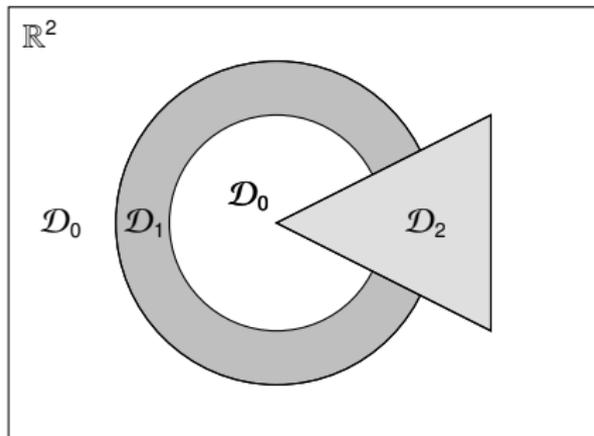
$$\partial_t w + \partial_x f_i(w) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_i, \quad i = 0, 1$$

$$f_0(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_0(w) = w,$$

$$f_1(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1(w) = w/2,$$

$$\theta_i(w(x^i, t)) = \theta_j(w(x^j, t)), \quad i \neq j.$$

## Configuration géométrique :



$$\partial_t w + \partial_x f_i(w) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$f_0(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_0(w) = w,$$

$$f_1(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1(w) = w/2,$$

$$f_2(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_2(w) = w/3.$$

$$\theta_i(w(x^i, t)) = \theta_j(w(x^j, t)), \quad i \neq j.$$

Test réalisé avec  $200 \times 200$  mailles cartésiennes sur le rectangle  $[-1, 1]^2$

[click here](#)

- 1 Équations hyperboliques non-linéaires
- 2 Couplage de systèmes hyperboliques
- 3 Analyse mathématique du couplage non-conservatif
- 4 Modèle d'interface épaisse et schéma équilibre
- 5 Conclusions et perspectives**

## Solutions non-classiques :

- ✓ Schéma de reconstruction efficace pour des flux scalaires concave-convexes généraux.
- ✗ Preuve de convergence (schéma « entropique » , propriété TVB)
- ✗ Extension au cas système (elastodynamique non-linéaire)

## Formulation ensembliste de la relation de couplage :

$$\begin{cases} u(0^-, t) \in \mathcal{O}_-(u(0^+, t)), \\ u(0^+, t) \in \mathcal{O}_+(u(0^-, t)). \end{cases}$$

- ✓ Résultat d'existence d'une solution au problème de RIEMANN couplé dans le cas scalaire 1D pour des flux généraux.
- ✓ Possible non-unicité des solutions confirmée numériquement.

## Système augmenté :

$$\begin{cases} A_0(u, v)\partial_t u + A_1(u, v)\partial_x u = 0, \\ \partial_t v = 0, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

- ✓ Analyse par la régularisation de DAFERMOS pour un critère de sélection et une étude de stabilité des solutions du problème de RIEMANN couplé
- ✓ Non-unicité réduite des solutions après dégagement d'un critère sélectif de type profil visqueux à l'interface.

## Modèle d'interface épaisse :

$$\partial_t w + \partial_x f(w, v) = \partial_v f(w, v)\partial_x v, \quad w \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0.$$

- ✓ Problème bien posé.
- ✓ Schéma de volumes finis de type "well-balanced" conservant les équilibres du couplage.
- ✗ Sensibilité des solutions à la forme d'interface choisie.