



HAL
open science

Propagation d'ondes dans un milieu excitable: simulations numériques et approche analytique

Benjamin Ambrosio

► **To cite this version:**

Benjamin Ambrosio. Propagation d'ondes dans un milieu excitable: simulations numériques et approche analytique. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT: . tel-00437402

HAL Id: tel-00437402

<https://theses.hal.science/tel-00437402>

Submitted on 30 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propagation d'ondes dans un milieu excitable : simulations numériques et approche analytique

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 8 avril 2009

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Benjamin AMBROSIO

Composition du jury

Rapporteurs : Jacques DEMONGEOT
Danielle HILHORST

Examineurs : Frédérique CLÉMENT
Jean-Pierre FRANÇOISE (Directeur)
Alain HARAUX
Khashayar PAKDAMAN

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je remercie d'abord mon directeur Jean-Pierre Françoise pour sa sympathie, son rôle primordial dans la thèse et pour avoir su répondre présent aux moments décisifs du processus.

Je remercie l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté l'invitation.

Je remercie tous les membres du laboratoire Jacque Louis Lions qui m'ont accueilli et permis d'évoluer dans un cadre scientifique de grande qualité.

Merci à tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse que ce soit pour leur compétences mathématiques, biologiques, informatiques, techniques ou toute autre aide.

Une mention spéciale à tous les thésards du laboratoire JLL et de Chevaleret en général, tant d'émules qui ont partagé les joies et les peines de cette aventure, et qui ont teinté de manière particulière chaque journée de cette période.

Un grand merci à ma famille et mes amis pour leur aide.

Un immense merci à mes parents pour leur soutien inconditionnel.

*A mes parents,
à une perle...*

Table des matières

Introduction	1
I Etude d'un système d'EDO de type FitzHugh-Nagumo	7
1 Le cas où f est une cubique	9
1.1 Comportement qualitatif général	9
1.2 Etude de la stabilité	11
1.3 Etude générale	12
2 Le cas où f est affine par morceaux	20
2.1 Comportement qualitatif général	20
2.2 Etude de la stabilité	22
2.3 Etude générale	22
3 Oscillations en salves	24
4 Bornage des solutions pour le système d'EDO avec forçage périodique et pour un système approché	25
4.1 Bornage des solutions pour le système d'EDO avec forçage pé- riodique	25
4.2 Bornage des solutions pour un système d'EDO approché avec forçage périodique	25
5 Le système $\lambda - \omega$	27
6 Quelques théorèmes sur l'existence de cycles limites	28
6.1 La bifurcation de Hopf	28
6.2 Le théorème de Poincaré-Bendixon	28

II	Liens avec la physiologie et la biologie	29
7	Quelques modèles en électrophysiologie	31
7.1	Quelques notions d'électrophysiologie	31
7.2	Le modèle de Hodgkin-Huxley	32
7.3	Le modèle de FitzHugh-Nagumo	34
7.4	La conduction électrique cardiaque et quelques pathologies	34
7.5	Expériences physiologiques et phénomènes chaotiques	36
7.6	Oscillations en salves	37
8	Quelques patterns en chimie, biologie et physiologie	37
8.1	La réaction de Belousov-Zhabotinsky	37
8.2	La bactérie <i>Bacillus Subtilis</i>	38
8.3	L'amibe <i>Dictyostelium discoideum</i>	38
8.4	Ondes spirales dans le coeur et le cerveau	39
9	Les liens avec cette thèse	39
9.1	Les spirales	40
9.2	Pacemaker	41
9.3	Oscillations en salves	42
9.4	Patterns et spirales	43
III	Génération d'ondes spirales dans un réseau d'oscillateurs couplés et dans un milieu excitable : le cas van Der Pol, le cas $\lambda - \omega$.	45
10	Simulations numériques	49
10.1	Le cas van Der Pol	49
10.2	Le cas $\lambda - \omega$	62
11	Etude de deux oscillateurs couplés de type $\lambda - \omega$	65
11.1	Mise en équation et présentation du comportement du système	65
11.2	Existence et unicité des solutions	68
11.3	Comportement des solutions dans le cas où $r_1(0) = r_2(0)$	69
11.4	Comportement des solutions dans le cas où $r_1(0) \neq r_2(0)$	72
12	Anneaux de N oscillateurs et ondes spirales	76
12.1	N oscillateurs couplés de type $\lambda - \omega$	76
12.2	Quelques références sur le sujet	80

IV Propagation d'ondes à partir d'un pacemaker central dans un milieu excitable. Le cas d'un système d'EDP de réaction-diffusion avec hétérogénéité spatiale 83

13	Simulations numériques, variations du paramètre c	86
13.1	Le cas cubique	87
13.2	Le cas affine par morceaux	94
14	Simulations numériques pour un problème approché	99
15	Semi-groupes et attracteurs	107
16	Analyse mathématique de l'EDP	112
16.1	Existence et unicité des solutions	112
16.2	Attracteurs, stabilité et bassin d'attraction dans le cas où $\epsilon = 1$	119
16.3	Attracteur pour ϵ quelconque pour un problème approché	123

V Propagation d'ondes à partir d'un pacemaker central dans un milieu excitable

Cas d'une EDP de type équation des ondes avec hétérogénéité spatiale 129

17	Simulations numériques, variations du paramètre c	132
17.1	Le cas où f est cubique	132
17.2	Le cas où f est affine par morceaux	140
18	Analyse mathématique	146
18.1	Existence et unicité de la solution	146
18.2	Etude de la stabilité	148

VI Propagation d'ondes à partir d'un oscillateur en salves central dans un milieu excitable

Cas d'un système d'EDP de réaction-diffusion avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique

Cas d'une EDP de type équation des ondes avec hétérogénéité

spatiale et forçage périodique	157
19 Propagation d'oscillations en salves	159
19.1 Cas d'un système d'EDP de réaction-diffusion avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique	159
19.2 Cas d'une EDP de type équation des ondes avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique	166
20 Ondes spirales, patterns pour l'EDP de type équation des ondes avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique	166
A Commentaires sur l'algorithme utilisé pour les simulations numériques	171
A.1 Description de la méthode utilisée	171
A.2 Commentaires sur le choix de cette méthode	173
A.3 Schéma à neuf points pour le laplacien	173
Bibliographie	175

Introduction

Ce travail porte essentiellement sur l'étude des phénomènes de propagation d'ondes dans un milieu excitable. Il s'appuie sur des méthodes développées dans la théorie des oscillateurs couplés pour laquelle on obtient quelques contributions originales ainsi que sur les méthodes classiques d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions d'EDP. Dans les années 1950, Hodgkin et Huxley ont révolutionné l'électrophysiologie, d'une part en réalisant de nouveaux protocoles expérimentaux (voltage clamp), et d'autre part (et c'est ce qui est le plus pertinent dans le cadre de notre étude) en considérant une approche mathématique fondée à la fois sur des études numériques poussées et sur le cadre théorique des systèmes dynamiques et des équations aux dérivées partielles (de type réaction-diffusion). Conçu initialement pour expliquer la propagation de l'influx nerveux le long de l'axone géant du calmar, l'approche de Hodgkin-Huxley s'est vite étendue à l'électrophysiologie cardiaque puis aux neurosciences. Cette approche a aussi beaucoup inspiré l'étude des dynamiques calciques et plus généralement celles des rythmes du vivant. Elle est actuellement développée dans la physiologie des rythmes hormonaux (axe hypothalamo-hypophysaire, cf [16]).

Le bon cadre mathématique pour analyser l'excitabilité est celui de la théorie des dynamiques lente-rapides et le modèle paradigmatique est celui de l'oscillateur de van der Pol (cf [68]) (et plus généralement du système de FitzHugh-Nagumo). Son étude est (depuis Lefschetz [43]) bien connue mais il n'est pas facile de repérer les bonnes démonstrations et c'est pourquoi elles sont intégrées au début de ce travail.

Van der Pol (cf [69]) s'est très vite intéressé au lien avec la physiologie cardiaque. L'étude mathématique du système forcé a été entreprise par M. Cartwright et J. Littlewood [12]. Devant l'ampleur de la tâche, Levinson [45] proposa de remplacer la cubique de van der Pol par une approximation affine par morceaux. Ces travaux se révélèrent fondamentaux pour l'évolution des systèmes dynamiques puisqu'ils sont à l'origine du horseshoe de Smale. C'est pour son importance que ce système affine par morceaux est aussi repris dans la première partie du travail. Il y a des différences notables avec le système initial qui ne sont pas non plus très souvent explicitées dans la littérature.

Les équations aux dérivées partielles interviennent en premier lieu dans cette thèse dans la troisième partie, avec des systèmes de Turing : on ajoute un terme de diffusion au système de van der Pol (système (12) p 48). On a aussi pris la forme normale de la bifurcation de Hopf ('modèle $\lambda - \omega$ ') auquel on ajoute une diffusion (système (13), p 63). Ce qui est discuté ici, c'est une approche de type oscillateurs couplés (obtenue après discrétisation spatiale des équations (12) et (13)). On étudie plus particulièrement l'influence des déphasages entre les oscillateurs dans la formation de patterns (qui sont des attracteurs des systèmes (12) et (13)) du type ondes spirales. Cette partie est surtout constituée d'une exploration numérique avec laquelle on a discuté plusieurs aspects comme :

- influence des conditions aux bords sur les déphasages,
- apparition transitoire de fronts d'ondes,
- solution miroir créée par des conditions initiales en antiphase,
- inhomogénéité spatiale (cas où c dépend de la variable spatiale). Dans ce cas, la spirale se déplace dans le domaine contrairement au cas où $c = 0$.
- Le système (12) peut aussi être étudié dans le cas excitable c'est à dire lorsque $c < -1$ et c proche de -1 . Dans ce cas également, pour des conditions initiales adéquates, on observe une spirale qui se déplace dans le domaine.

A cette exploration numérique est ajoutée une analyse complète des trajectoires pour deux oscillateurs couplés. Il est difficile d'étendre ces théorèmes au cas d'un nombre quelconque d'oscillateurs. Néanmoins, une généralisation partielle est possible pour N oscillateurs en anneau (théorème 12). Si on se limite aux variables de phase, on montre dans le théorème 13 la convergence asymptotique vers une solution front d'ondes dans l'anneau. La démonstration de ce théorème repose en partie sur des idées que l'on trouve dans [58]. Dans cette référence, les auteurs montrent la convergence vers une solution rotative dans un tableau de $N * N$ oscillateurs ne prenant en compte que les phases, et soumis aux conditions aux bords de Neumann. Par extension les mêmes auteurs montrent dans [59] l'existence d'une onde spirale pour $N * N$ oscillateurs de type $\lambda - \omega$ grâce au théorème des fonctions implicites. Cette partie se termine par une revue de la bibliographie rencontrée sur le sujet.

La partie 4 est inspirée initialement (comme il est expliqué au chapitre 2) par la fibrillation ventriculaire et l'électrophysiologie cardiaque. En particulier, dans [14], J. Jalife et ses collaborateurs ont fait des expériences *in vitro* sur la propagation de l'influx cardiaque le long d'une fibre de Purkinje (dimension 1) sous l'influence d'une stimulation électrique périodique. D'autres études ([15] et les références citées) portent sur l'effet d'un signal périodique électrique vagal sur les cellules du noeud sinusal (dimension 2). En ce qui nous concerne, il s'agit de comprendre mathématiquement comment une onde peut naître et se propager à partir d'un noeud central (qui représente une cellule pacemaker, c'est à dire une cellule qui impose son rythme aux cellules voisines). La démarche pour passer du système d'équations différentielles à l'équation aux dérivées partielles est la même que celle suivie à la partie 3. On ajoute un terme de diffusion représentée par un laplacien aux deux équations du système. Le système étudié est alors

$$\begin{aligned} \epsilon u_t &= f(u) - v + \alpha \Delta u \\ v_t &= u - c(x) - \delta v + \beta \Delta v, \end{aligned}$$

avec

$$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

qui est un système de type réaction diffusion avec hétérogénéité spatiale :

$$c(x) = 0, x \in B(0, r)$$

$$c(x) = c_0 < -1, x \in \Omega - B(0, r).$$

Et avec conditions aux bords de Neumann.

Son étude analytique est faite et on démontre des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions faibles et fortes. L'étude mathématique des propagations d'ondes dans les milieux excitable est probablement assez nouvelle. Dans la partie 1, on a expliqué le rôle du paramètre c_0 dans la transition du régime périodique vers le régime excitable. La normalisation choisie est telle que la transition se produit pour $c_0 = -1$. Pour quelques cellules centrales, on choisit $c = 0$ et le comportement dynamique associé est celui d'un oscillateur. On fixe la valeur de $c(x, y) = c_0$ pour les autres points de sorte que la dynamique soit excitable ($c_0 < -1$, et pas trop éloigné de -1). On prend comme non linéarité soit la cubique de van der Pol, soit l'approximation affine par morceaux de Levinson. Dans le cas de la cubique les simulations numériques montrent que l'on a (pour $\alpha = \beta = 1$, $\delta = 0$, $\epsilon = 0.1$) :

- si $c = -1.5$, l'asymptotique est un point stationnaire.
- Si $c = -1.22$, il y a des petites oscillations transitoires et l'asymptotique est toujours un point stationnaire.
- Si $c = -1.2188$, l'asymptotique est une solution périodique mais on n'observe pas une propagation d'onde sur tout le domaine : les cellules centrales oscillent, mais ces oscillations ne se transmettent pas aux cellules voisines.
- Pour $c = -1.21$, il y a une onde progressive globale.

On observe essentiellement les mêmes phénomènes pour le cas de Levinson. L'asymptotique est d'abord stationnaire puis apparait une onde progressive. Mais les asymptotiques pour les valeurs critiques de bifurcation sont toutefois différentes. Il n'existe pas de petites oscillations comme dans le cas cubique car il n'y a plus la bifurcation de Hopf pour le système sans diffusion. La dynamique des cellules centrales est celle d'une connexion hétérocline entre deux cycles limites. L'analyse mathématique repose sur des techniques classiques. On obtient l'existence d'un semi-groupe associé. Dans le cas où $\delta > 0$, on montre l'existence d'un attracteur global dans $(L^2(\Omega))^2$.

Dans la cinquième partie, on étudie le système de type équation des ondes suivant :

$$\epsilon u_{tt} = f'(u)u_t - u + c(x) + \Delta u$$

avec hétérogénéité spatiale :

$$c(x) = 0, x \in B(0, r)$$

$$c(x) = c_0 < -1, x \in \Omega - B(0, r).$$

et avec les conditions aux bords de Neumann.

On observe dans les simulations numériques la propagation d'ondes progressives pour c_0 assez proche de -1 et l'évolution vers la solution stationnaire lorsque c_0 est trop petit. Pour les valeurs intermédiaires de c_0 , on observe des phénomènes de propagation particuliers. On observe notamment des phénomènes de 'death-spot' et de variation de Stimulus Response Ratio (SRR). L'analyse mathématique est plus difficile et plus partielle que dans le cas précédent de réaction-diffusion.

Dans la dernière partie on propose un mécanisme plausible de propagation d'oscillations en salves. On sait qu'il est possible (cf [21]) de générer des oscillations en salves par forçage de dynamique excitable. L'idée est de placer une dynamique alternativement oscillatoire et stationnaire au centre d'un milieu excitable. On considère pour cela le système :

$$\begin{aligned} \epsilon u_t &= f(u) - v + \alpha \Delta u \\ v_t &= u - c(x, t) - \delta v + \beta \Delta v, \end{aligned}$$

puis le système

$$\epsilon u_{tt} = f'(u)u_t - u + c(x, t) + \Delta u$$

Pour le cas de la réaction-diffusion, l'étude faite dans la partie 4 reste valable, et on démontre aussi l'existence d'un attracteur ($\delta > 0$). Dans le cas de l'équation des ondes on peut aussi reprendre l'analyse de la partie 5.

Une partie importante du travail de cette thèse a consisté à simuler numériquement les équations et à en interpréter les résultats. L'annexe A décrit le schéma utilisé ainsi que quelques tests de stabilité numérique.

Première partie

Etude d'un système d'EDO de type FitzHugh-Nagumo

Dans cette partie, on étudie le comportement du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v \\ v_t = u - c \end{cases} \quad (1)$$

où $\epsilon > 0$, petit.

Ce système est donc du type dynamiques lente-rapides. En effet, la présence du ϵ devant le u_t , implique une dynamique rapide en u et une dynamique lente en v . On considère deux fonctions f différentes. On considère d'abord le cas où f est une cubique (système de van der Pol) :

$$f(u) = -u^3 + 3u$$

Puis le cas où f est affine par morceaux (système de Levinson), et choisie de telle sorte que le système ait les mêmes propriétés qualitatives que dans le cas de la cubique :

$$f(u) = \begin{cases} -u - 2 & \text{si } u < -1 \\ -u + 2 & \text{si } u > 1 \\ u & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces deux fonctions admettent un minimum local et un maximum local respectivement en $u = -1$ et $u = 1$. Ces valeurs sont des valeurs critiques de bifurcation pour le paramètre c , puisque le diagramme des trajectoires change de nature lorsque le paramètre traverse ces valeurs.

Dans les deux cas, les trajectoires du système évoluent vers un cycle limite si $|c| < 1$. On dit alors que le système est oscillant. Si $|c| \geq 1$ les trajectoires tendent vers le point stationnaire $(c, f(c))$. Dans ce dernier cas, le comportement diffère selon la valeur initiale. Le système peut tendre directement et sans détour vers le point stationnaire, ou bien faire une excursion vers des valeurs éloignées avant de tendre, finalement, vers le point stationnaire. On dit dans ce cas que le système est excitable.

Cette partie est divisée de la manière suivante. On considère d'abord le cas où f est la cubique. On décrit intuitivement le comportement du système. On fait ensuite l'analyse de la stabilité. On démontre enfin les propriétés qualitatives globales. La même chose est faite pour le cas où f est affine par morceaux. On décrit alors le phénomène d'oscillations en salves ainsi que le système $\lambda - \omega$. On termine cette partie en énonçant deux théorèmes classiques donnant l'existence de cycles limites : le théorème de la bifurcation de Hopf, et le théorème de Poincaré-Bendixson.

1 Le cas où f est une cubique

On considère le système (1) où $f(u) = -u^3 + 3u$.

1.1 Comportement qualitatif général

On décrit ici intuitivement, selon ce qu'on observe sur les figures, le comportement qualitatif du système en fonction des différentes valeurs de c . Dans les sections suivantes, on sera plus précis et on démontrera les principaux résultats.

Comportement si $|c| \geq 1$

On ne traite que le cas où $c < -1$, le cas $c > 1$ est analogue et s'en déduit par symétrie. Dans ce cas, ce système a la propriété d'excitabilité, grâce au phénomène suivant : on choisit la condition initiale $(u(0), v(0))$, à gauche de la branche infinie gauche de la cubique. Alors

- si $(u(0), v(0))$ est tel que la trajectoire ne va pas en dessous du minimum local de la cubique, $f(-1) = -2$, (par exemple si $u(0) < -1$ et $f(u(0)) > v(0) \gg -2$), alors la solution se rapproche rapidement du point stationnaire $(c, f(c))$. Plus précisément, au départ on a $u_t > 0$, $v_t < 0$, et sous l'effet de la dynamique rapide, la trajectoire se rapproche de la branche infinie. La solution tend alors vers le point stationnaire, sous l'effet de la dynamique lente (Voir figure 1a). On étudiera plus précisément ce comportement dans les sections à venir.
- soit on choisit $(u(0), v(0))$ de telle sorte que la trajectoire aille en dessous du minimum local, (par exemple si $u(0) < -1$ et $v(0) < f(-1) = -2$), alors cette fois la trajectoire n'est plus bloquée par la branche infinie gauche et atteint la branche infinie droite sous l'effet de la dynamique rapide. Elle remonte ensuite cette branche (car $v_t > 0$), sous l'effet de la dynamique lente, jusqu'à ce que v dépasse le maximum local $f(1) = 2$, elle rejoint alors rapidement la branche gauche, avant de finalement tendre lentement vers l'état d'équilibre. Ce système est donc dit excitable, puisque lorsque la solution est proche de son état d'équilibre, une perturbation peut l'amener à changer considérablement de valeurs avant de retourner à son état d'équilibre (Voir figure 1b). Ce système constitue ainsi un modèle simple de l'excitabilité que l'on observe dans diverses cellules (neurones, cardiomyocytes...).

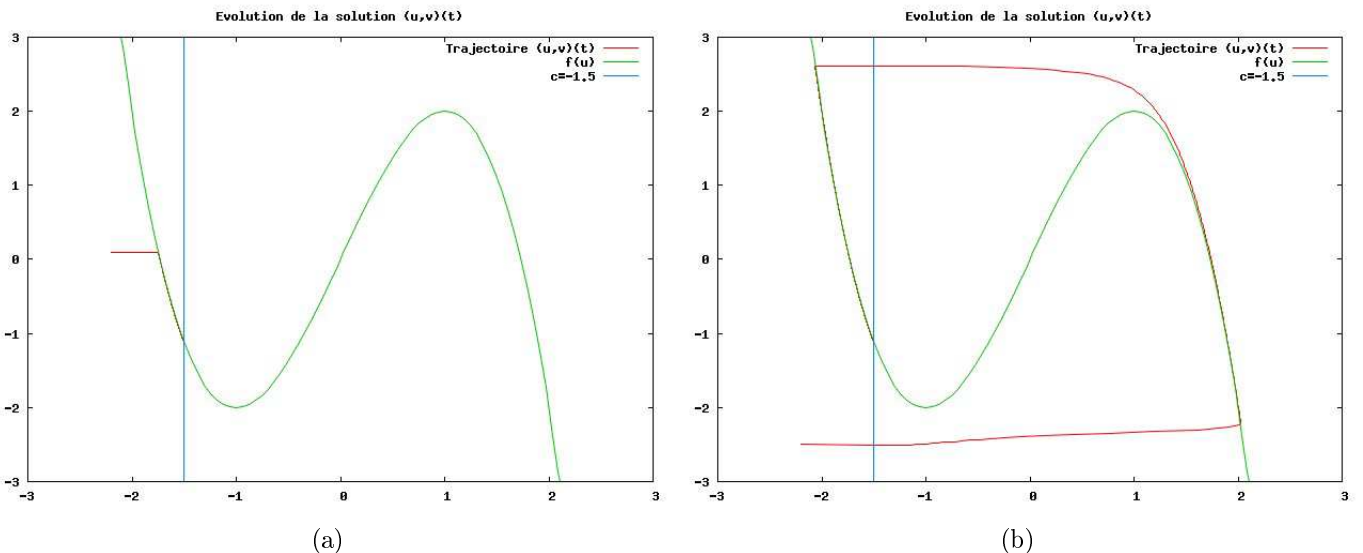
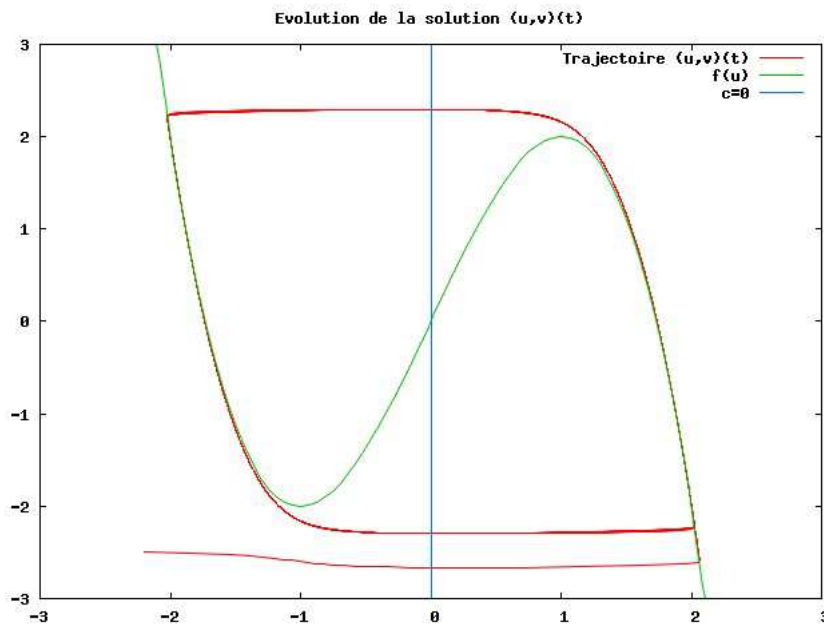


FIG. 1 – Solutions du système (1), pour f cubique et $c = -1.5$.

Comportement si $|c| < 1$

Dans le cas où $|c| < 1$ les solutions évoluent toutes rapidement vers un cycle limite. Comme précédemment, ceci s'explique intuitivement grâce à la dynamique lente-rapide et aux signes de u_t et v_t : supposons que la condition initiale est la même que précédemment. Alors, la trajectoire atteint rapidement la branche droite sous l'effet de la dynamique rapide. Puis, elle remonte cette branche jusqu'au maximum local grâce à la dynamique lente. Une fois ce maximum dépassé, elle rejoint la branche gauche grâce à la dynamique rapide. Elle redescend la branche gauche jusqu'au minimum local grâce à la dynamique lente, une fois ce minimum dépassé elle rejoint rapidement la branche droite. L'asymptotique du cycle limite apparaît ainsi clairement.

FIG. 2 – Solutions du système (1), pour f cubique et $c = 0$.**1.2 Etude de la stabilité**

Le système (1) admet une unique solution locale grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz. On verra à la section suivante que cette solution est globale. Il admet un unique point stationnaire de coordonnées $(c, f(c))$. Pour se ramener en $(0, 0)$, on effectue le changement de variable $\tilde{u} = u - c$ et $\tilde{v} = v - f(c)$, que l'on continue à noter u et v , pour simplifier les notations. Le système devient donc :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= g_c(u) - v \\ v_t &= u \end{cases} \quad (2)$$

où $g_c(u) = -u^3 - 3cu^2 + 3(1 - c^2)u$

En étudiant le linéarisé de ce système on obtient le résultat suivant :

Théorème 1. – Si $|c| < 1$ le point stationnaire est asymptotiquement instable ; si $|c| > 1$, il est asymptotiquement stable.
 – Si $c^2 \in]1 - \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon}, 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon}[$, le point stationnaire est un foyer, sinon c'est un noeud.
 – Lorsque $|c|$ traverse la valeur 1, il se produit une bifurcation de Hopf : il existe une fonction λ de classe C^∞ définie sur un voisinage de 0, à valeurs dans $[-1; +\infty[$ telle que, $(u, 0)$ appartient à une orbite périodique pour $c = \lambda(u)$.

Démonstration. Le linéarisé associé au système (2) est :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= 3(1 - c^2)u - v \\ v_t &= u \end{cases}$$

On cherche donc les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\epsilon}(1 - c^2) & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui sont :

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}(3(1 - c^2) \pm \sqrt{\Delta_\epsilon}) & \text{si } \Delta_\epsilon \geq 0 \\ \frac{1}{2\epsilon}(3(1 - c^2) \pm i\sqrt{-\Delta_\epsilon}) & \text{si } \Delta_\epsilon < 0 \end{cases}$$

où $\Delta_\epsilon = 9(1 - c^2)^2 - 4\epsilon$.

Grâce à la théorie classique sur l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques (voir par exemple [61], [28]), on peut déduire les points suivants :

si $c^2 > 1$, la partie réelle des racines est strictement négative et le point stationnaire est asymptotiquement stable.

Si $c^2 < 1$, la partie réelle des racines est strictement positive et le point stationnaire est instable.

Si $c^2 = 1$, on ne peut pas conclure à l'aide du linéarisé mais on verra à la section suivante, que dans ce cas, le point stationnaire est asymptotiquement stable.

Si $c^2 \in]1 - \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon}, 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon}[$ alors $\Delta_\epsilon < 0$, les deux racines sont complexes conjuguées et le point stationnaire est un foyer.

Si $c^2 \notin]1 - \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon}, 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon}[$, les deux racines (éventuellement la racine double) sont réelles et le point stationnaire est un noeud.

Par ailleurs, on peut appliquer le théorème de la bifurcation de Hopf ([28], Théorème 36 p 61) pour $c = -1$ et $c = 1$, ce qui donne l'existence de la solution périodique du théorème. \square

1.3 Etude générale

Théorème 2. *Le système (1) admet une unique solution définie pour tout temps.*

Si $|c| \geq 1$, le point stationnaire est un attracteur global.

Si $|c| < 1$, alors il existe un cycle limite. Ce cycle est unique et attire toutes les trajectoires autres que le point stationnaire.

Démonstration. On peut trouver ce résultat dans [46]. On refait ici la démonstration. Pour l'existence du cycle limite on s'inspire de [34] (p. 217 et suivantes), [43] et pour

l'unicité on suit [46].

L'existence locale de la solution est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz. La démonstration de l'existence globale est incluse dans la démonstration des points suivants. On démontre d'abord le résultat pour le cas où $|c| \geq 1$, et ensuite le résultat pour le cas $|c| < 1$.

Le cas $|c| \geq 1$

On suppose $c \leq -1$, puisque le cas $c \geq 1$ s'en déduit par symétrie.

On va d'abord montrer un lemme concernant le système suivant :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= -3cu^2 - v \\ v_t &= u \end{cases} \quad (3)$$

Lemme 1. *Le point $(0, 0)$ est un centre pour le système (3), et toutes les trajectoires passant par le demi-axe v^+ (l'axe $(u = 0, v > 0)$) sont périodiques.*

Démonstration. On constate d'abord que les trajectoires sont symétriques par rapport à l'axe $u = 0$. En effet, si (u, v) est solution de (3), alors $(-u(-t), v(-t))$ l'est également.

Soit v^+ le demi-axe $(u = 0, v > 0)$, et v^- le demi-axe $(u = 0, v < 0)$.

Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que toute trajectoire partant de v^+ , atteint le demi-axe v^- en un temps fini. Soit $(0, v_0), v_0 > 0$ la condition initiale. La trajectoire atteint la demi-parabole $(u < 0, -3cu^2)$ en un temps fini. Sinon, on aurait que $\exists t_0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall t > t_0, v_t < -\beta$ et donc $v(t) \rightarrow -\infty$, ce qui est une contradiction. De même, on peut montrer que si la trajectoire atteint l'axe $(u < 0, v = 0)$, alors elle atteint v^- (sinon, on aurait que $\exists t_0$ et $\beta > 0$ tels que $u_t > \beta \dots$). Il reste donc à montrer que toute trajectoire partant de la demi-parabole atteint l'axe $(u < 0, v = 0)$ en un temps fini. Supposons le contraire, alors la trajectoire resterait dans la zone délimitée par la demi-parabole, l'axe $v = 0$ et un axe $u = u_1$ (avec $u_1 < 0, u_1$ étant l'abscisse du premier point d'intersection entre la trajectoire et la parabole). Mais alors, on aurait

$$\frac{dv}{du} = \frac{\epsilon u}{-3cu^2 - v} \leq \frac{-\epsilon}{3cu}$$

et donc par intégration,

$$v(u) \leq \frac{-\epsilon \ln(-u)}{3c} + K \rightarrow -\infty \text{ quand } u \rightarrow 0$$

Ce qui est une contradiction. Et le lemme est démontré. \square

On montre maintenant le résultat du théorème dans le cas où $|c| \geq 1$.

Lemme 2. *Si $|c| \geq 1$ toutes les trajectoires de (2) tendent vers le point stationnaire $(0, 0)$*

Démonstration. Maintenant, on va comparer les trajectoires des solutions de (2) et les trajectoires de (3). Puisque $|c| \geq 1$, on a que $-u^3 + (1 - c^2)u$ est strictement positif si $u < 0$, et strictement négatif si $u > 0$.

Donc, le champ de vecteur associé à (2) pointe à l'intérieur des trajectoires de (3). Pour

démontrer le lemme, il suffit donc de montrer que quelque soit la condition initiale la trajectoire de (2) atteint l'axe v^+ en un temps fini. Ceci se démontre par les mêmes raisonnements que ceux utilisés dans le début de la démonstration du lemme précédent. (On peut aussi consulter [34], p 219). \square

Remarque 1. *Toutes les trajectoires du système (3) ne sont pas périodiques. En fait, suivant [46] (p 347) on a une intégrale première pour ce système donnée par :*

$$G(u, v) = \exp\left(\frac{6c}{\epsilon}v\right)\left(\frac{-3cu^2 - v}{\epsilon} + \frac{1}{6c}\right)$$

C'est une fonction de Lyapounov stricte pour (2). On donnera un peu plus bas le comportement global du système (3).

Le cas $|c| < 1$

On montre d'abord l'existence d'une solution périodique non triviale.

Existence d'un cycle

En fait, l'existence d'un cycle limite découle du théorème de Poincaré-Bendixon, mais on reprend ici la démonstration, en s'inspirant de [34]. Comme au paragraphe précédent, on peut montrer que toute trajectoire partant du demi-axe v^+ atteint la courbe $(g_c(u), u < 0)$, puis v^- , puis $(g_c(u), u > 0)$ avant de retrouver le demi-axe v^+ . On définit donc l'application de premier retour σ , qui à chaque point p de v^+ lui associe le premier point de v^+ que la trajectoire issue de p intersecte.

Pour montrer l'existence du cycle limite, on montre qu'il existe un point fixe de σ .

Soit

$$V(u, v) = \frac{1}{2}(\epsilon u^2 + v^2)$$

Alors,

$$\sigma(p) = p \Leftrightarrow V(\sigma(p)) = V(p)$$

On identifie p à son ordonnée.

On va montrer que :

$$V(\sigma(p)) - V(p) > 0 \text{ pour } p \text{ assez petit,}$$

et que,

$$V(\sigma(p)) - V(p) < 0 \text{ pour } p \text{ assez grand.}$$

Par continuité de l'application $V(\sigma(p)) - V(p)$, on aura donc un 0 de $V(\sigma(p)) - V(p)$ et un point fixe de σ .

Pour toute trajectoire partant de p au temps 0, et arrivant en $\sigma(p)$ au temps t_f , on a donc :

$$V(\sigma(p)) - V(p) = \int_0^{t_f} \frac{dV(u, v)}{dt} dt = \int_0^{t_f} g_c(u) u dt$$

Soit u_1 et u_2 les deux racines non nulles de g_c , alors pour p assez petit, par continuité de l'application de premier retour de Poincaré, toute trajectoire (u, v) est telle que

$u_1 \leq u \leq u_2$ (pour le premier tour).

Donc, pour p assez petit, $g_c(u)u > 0$, et donc,

$$\int_0^{t_f} g_c(u)u dt > 0$$

On montre maintenant que pour p assez grand, $V(\sigma(p)) - V(p) < 0$.

Soit pour tout p la trajectoire intersecte le demi-axe ($u > 0, v = 0$) pour $u < u_2$ et alors $V(\sigma(p)) - V(p) < 0$ pour p assez grand. Soit pour p assez grand la trajectoire issue de p intersecte le demi-axe $u > 0, v = 0$ à l'extérieur du segment $]u_1, u_2[$. Soit alors p_1 un tel point, on va montrer que pour tout $p > p_1$, $V(\sigma(p)) - V(p)$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Soit donc $p > p_1$,

$$V(\sigma(p)) - V(p) = \int_0^{t_f} g_c(u)u dt = \sum_{i=0}^5 \int_{t_i}^{t_{i+1}} g_c(u)u dt$$

où les t_i sont les temps auxquels la trajectoire intersecte les axes $u = u_1, u = 0$ et $u = u_2$, avec $t_0 = 0$ et $t_6 = t_f$.

Maintenant,

$$\int_0^{t_1} g_c(u)u dt = \int_0^{u_1} \frac{g_c(u)u}{g_c(u) - v} du$$

Lorsque p croît, v croît et cette intégrale (positive) décroît. On montre de même que les intégrales entre t_2 et t_3 , t_3 et t_4 , t_5 et t_6 sont décroissantes par rapport à p .

Par ailleurs, soient v_1 et v_2 les ordonnées des points d'intersection de la trajectoire et de l'axe $u = u_1$ ($v_1 > v_2$), alors,

$$\int_{t_1}^{t_2} g_c(u)u dt = \int_{v_1}^{v_2} g_c(u) dv$$

décroît vers $-\infty$ lorsque p tend vers $+\infty$.

De même, on montre que $\int_{t_4}^{t_5} g_c(u)u dt$ décroît.

On a donc démontré que $V(\sigma(p)) - V(p)$ est strictement décroissante et tend vers $-\infty$ pour p assez grand, et la démonstration de l'existence du cycle est terminée.

On montre maintenant l'unicité du cycle.

Unicité du cycle

Pour l'unicité du cycle, on suit la démonstration de [46].

On note

$$F(u, v) = (g_c(u) - v, u)^t$$

Cette démonstration est basée sur la proposition suivante (voir [61], Corollaire p.198) :

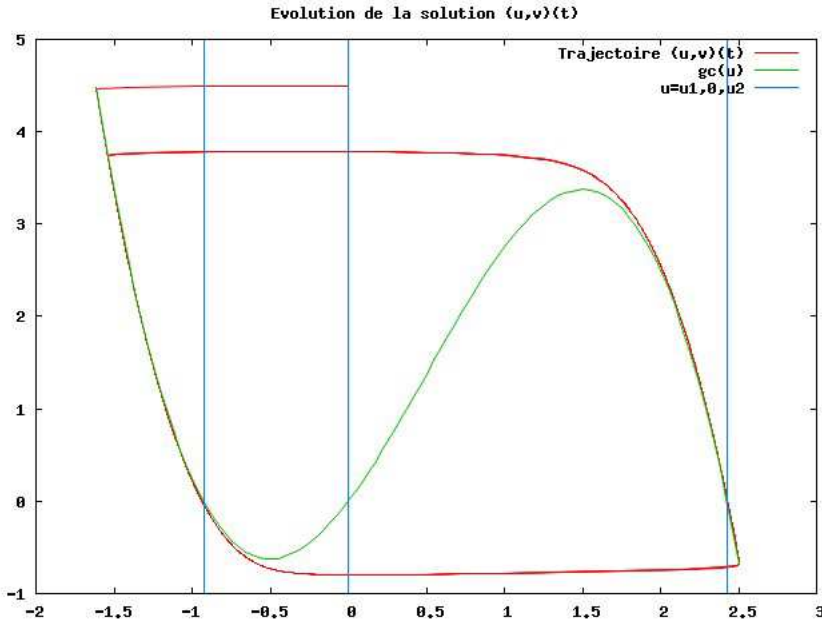


FIG. 3 – Solution du système (2) pour $c = -1.5$ et droites d'équation $u = u_1$ $u = u_2$.

Proposition. Soit $\gamma(t)$ un cycle de période T dans \mathbb{R}^2 , alors :

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt < 0 \Rightarrow \gamma \text{ est stable}$$

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt > 0 \Rightarrow \gamma \text{ est instable}$$

Le cycle peut être stable, instable, semi-stable ou appartenir à une bande continue de cycles si la quantité précédente est nulle.

On montre d'abord que le système n'admet pas plus de deux cycles puis qu'il ne peut pas exister exactement deux cycles.

On montre en premier lieu qu'aucun cycle ne peut être contenu dans le domaine intérieur délimité par les axes $u = \pm \sqrt{3(1 - c^2)}$.

Pour cela, on utilise à nouveau les trajectoires de la solution de (3).

Pour

$$|u| < \sqrt{3(1 - c^2)}$$

on a

$$-u^2 + 3(1 - c^2) > 0$$

donc si $H = (-3cu^2 - v, u)$

$$\det(F, H) > 0$$

et le champ de vecteur F pointe à l'extérieur des trajectoires fermées solutions de (3). Aucune trajectoire de (2) ne peut se refermer tant que $|u| < \sqrt{3(1 - c^2)}$. Grâce à la

symétrie des trajectoires de (3), si la trajectoire de (1) intersecte l'axe $u = -\sqrt{3(1-c^2)}$, alors elle intersecte l'axe $u = \sqrt{3(1-c^2)}$ et réciproquement.

On montre maintenant que le système n'a pas plus de deux cycles limites.

Soit γ , le plus petit cycle (au sens de l'inclusion dans \mathbb{R}^2) contenant $(0,0)$ et T sa période. Grâce à la proposition précédente, et puisque le point $(0,0)$ est instable, on sait que

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt \leq 0$$

Soit γ' le plus petit cycle contenant γ et T' sa période on va montrer que :

$$\int_0^{T'} \nabla \cdot F(\gamma'(t)) dt < \int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt \leq 0$$

On a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt \\ &= \int_0^T (-3u^2 - 6cu + 3(1-c^2)) dt \\ &= \int_0^T (-3u^2 + 3(1-c^2)) dt \\ \text{car } & \int_0^T u dt = \int_0^T \frac{dv}{dt} dt = 0 \end{aligned}$$

Soit $u_3 = -\sqrt{1-c^2}$ et $u_4 = \sqrt{1-c^2}$,
on écrit :

$$\int_0^T \nabla \cdot F(\gamma(t)) dt = \sum_{i=1}^3 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (-3u^2 + 3(1-c^2)) dt$$

où les t_i sont les temps auxquels le cycle intersecte les axes $u = u_3$ et $u = u_4$. On fixe t_1 égal au temps où la trajectoire intersecte le demi-axe ($u = u_4, v > 0$). On note enfin $I_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}}$. On fait la même chose pour γ' .

$$\text{On a : } I'_1 = \int_{t'_1}^{t'_2} (-3u^2 + 3(1-c^2)) dt$$

$$= \int_{u_4}^{u_3} \frac{-3u^2 + 3(1-c^2)}{g_c(u) - v'} du$$

$$< \int_{u_4}^{u_3} \frac{-3u^2 + 3(1-c^2)}{g_c(u) - v} du = I_1$$

Car cette dernière intégrale décroît lorsque v croît et que $v(u) < v'(u)$ pour $u = u' \in [u_3, u_4]$ ((u, v) et (u', v') sont les trajectoires respectives de γ et γ').

De même, $I'_3 < I_3$.

Par ailleurs,

$$I'_2 = \int_{t'_2}^{t'_3} (-3u^2 + 3(1-c^2)) dt$$

$$= \int_{v'_2}^{v'_3} \frac{-3u^2 + 3(1-c^2)}{u} dv$$

$$< \int_{v_2}^{v_3} (-u + \frac{3(1-c^2)}{u}) dv$$

$= I_2$

De même, $I_4' < I_4$.

Maintenant si γ^* est le plus petit cycle contenant γ' , alors, on a

$$\int_0^{T^*} \nabla \cdot F(\gamma^*(t)) dt < 0$$

On a alors deux cycles attractifs consécutifs, ce qui n'est pas possible. Il ne peut donc pas y avoir plus de deux cycles.

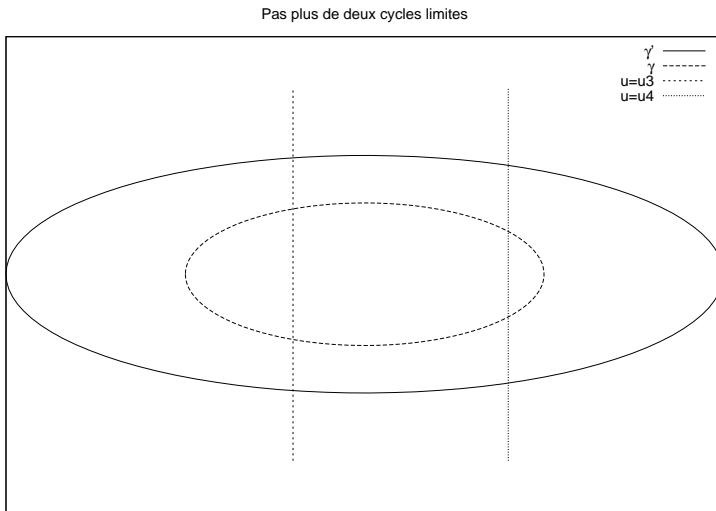


FIG. 4 – Pas plus de deux cycles limites : figure illustrant la démonstration.

On montre maintenant qu'il ne peut pas y avoir exactement deux cycles.

Supposons qu'il y en ait exactement deux qui sont γ et γ' . Alors on construit deux courbes fermées C_1 et C_2 telles que :

$$C_1 \subset \gamma \subset C_2 \subset \gamma'$$

et telles que le champ de vecteurs F pointe à l'extérieur de ces deux courbes.

On considère alors le système

$$\begin{cases} \epsilon u_t = g_c(u) - v - \alpha u \\ v_t = u \end{cases}$$

On note $F_\alpha = (g_c(u) - v - \alpha u, u)^t$.

Alors, puisque γ' est hyperbolique, pour α assez petit ce système admet un cycle limite γ'_α extérieur à C_2 tel que F_α pointe à l'extérieur de C_2 et de C_1 . Mais F_α pointe à l'intérieur de γ . Ceci implique alors l'existence de trois cycles limites, un entre C_1 et γ , un entre γ et C_2 , et un à l'extérieur de C_2 . Ce qui contredit le fait qu'il n'y ait pas plus de deux cycles puisque ce résultat reste valable pour le champ de vecteur F_α si α est assez petit.

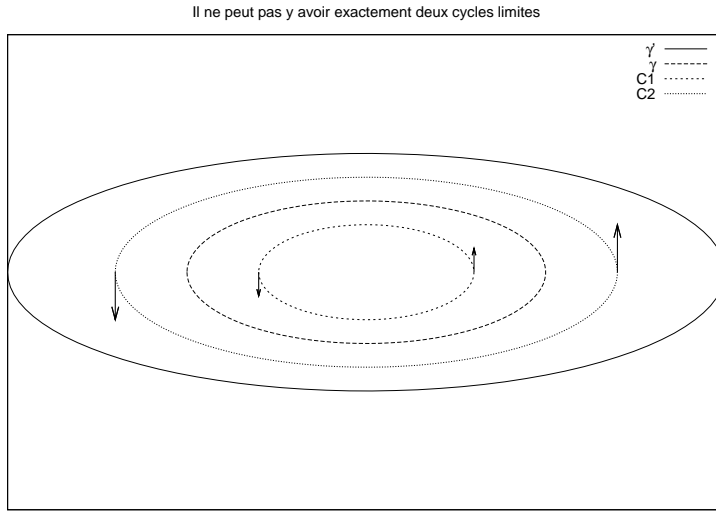


FIG. 5 – Il ne peut pas y avoir exactement deux cycles limites : figure illustrant la démonstration.

□

On donne maintenant en complément une description complète des trajectoires de (3)

Théorème 3. *Les trajectoires de (3) se situent sur les courbes d'équation :*

$$u =_{\pm}^+ \left(-K \frac{\epsilon}{3c} \exp\left(\frac{-6c}{\epsilon}v\right) - \frac{v}{3c} + \frac{\epsilon}{18c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

où $K \in [\frac{1}{6c}, +\infty[$ est déterminé par la condition initiale.

Toutes les trajectoires sont symétriques par rapport à l'axe $u = 0$, et intersectent cet axe. Et, si v_0 est l'ordonnée du point d'intersection, alors on a :

- si $v_0 > \frac{\epsilon}{6c}$ la trajectoire est périodique,
- sinon $|u|$ tend vers $+\infty$ quand v tend vers $+\infty$.

Démonstration. Une intégrale première de (3) est :

$$G(u, v) = \left(\frac{-3cu^2 - v}{\epsilon} + \frac{1}{6c} \right) \exp\left(\frac{6c}{\epsilon}v\right)$$

Comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 1, toutes les trajectoires sont symétriques et coupent l'axe $v = 0$. Donc les trajectoires de (3) se situent sur les courbes de niveau :

$$G(u, v) = K, \quad K \in \{G(u, 0)_{u \in \mathbb{R}}\} = \left\{ \frac{-3cu^2}{\epsilon} + \frac{1}{6c} \right\}_{u \in \mathbb{R}} = \left[\frac{1}{6c}, +\infty[$$

Sachant que toutes les trajectoires coupent l'axe $u = 0$ (voir démonstration du 1), on obtient alors le résultat en isolant u au premier membre et en étudiant le signe de $K = G(0, v)$ suivant les valeurs de v .

On peut remarquer que les trajectoires solutions parcourent bien les courbes intégrales données par (4), sauf pour $K = G(0, 0)$ qui correspond à la solution stationnaire. \square

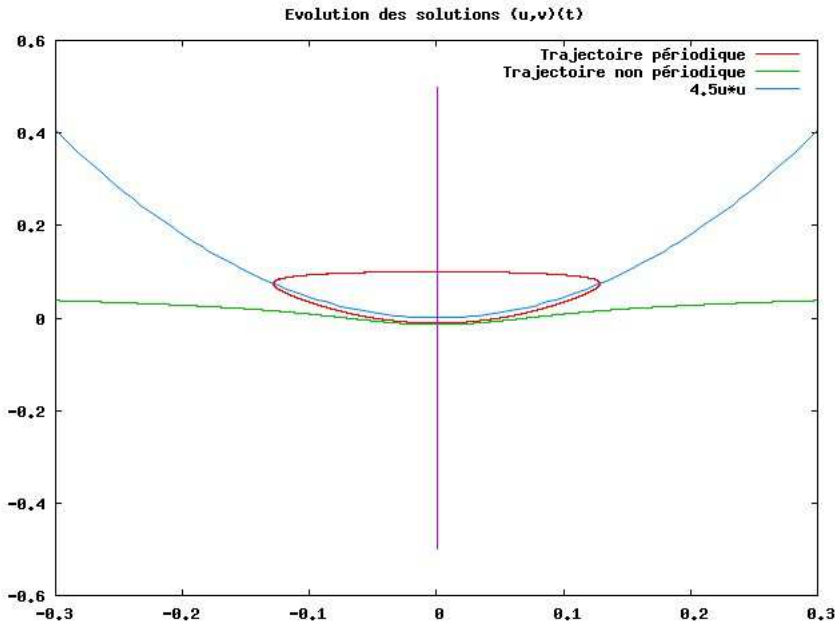


FIG. 6 – Solutions du système (3) pour différentes conditions initiales, $c = -1.5$.

2 Le cas où f est affine par morceaux

On considère maintenant le système de Levinson (1) pour

$$f(u) = \begin{cases} -u - 2 & \text{si } u < -1 \\ -u + 2 & \text{si } u > 1 \\ u & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1 Comportement qualitatif général

En première approche, pour ϵ petit, le système (1) avec f affine par morceaux a les mêmes propriétés que dans le cas où f est cubique. En effet, pour $|c| > 1$, le système est excitable tandis que pour $|c| < 1$, il évolue vers un cycle limite.

Comportement si $|c| < 1$

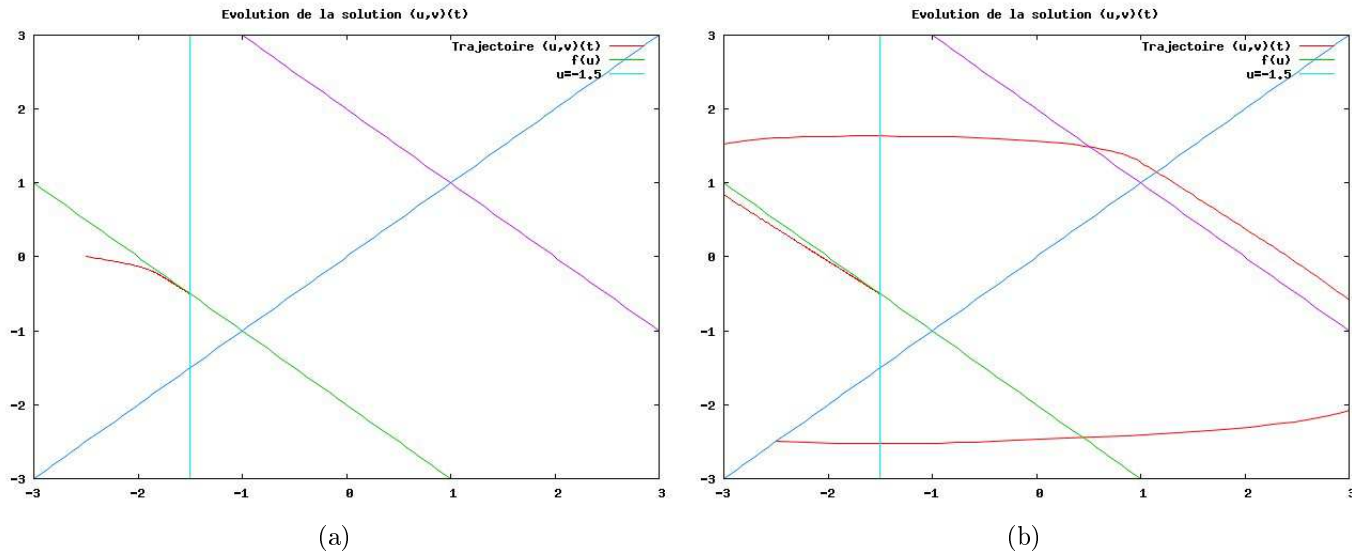


FIG. 7 – Solutions du système 1, pour f affine par morceaux et $c = -1.5$.

Comportement si $|c| < 1$

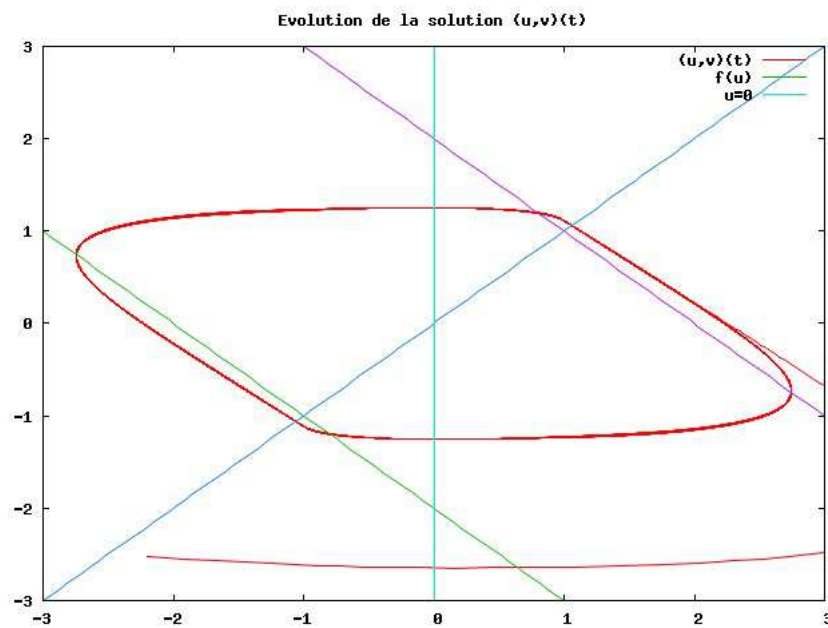


FIG. 8 – Solutions du système 1, pour f affine par morceaux et $c = 0$.

2.2 Etude de la stabilité

Comme dans le cas de la cubique, on donne la stabilité des points stationnaires grâce à l'étude du linéarisé. Les propriétés de stabilité restent les mêmes puisque pour $|c| < 1$ le point stationnaire est instable alors que pour $|c| > 1$ il est asymptotiquement stable. Par contre il y a une différence qualitative. Dans le cas de la cubique, les points stationnaires, qui sont des noeuds pour des valeurs de $|c|$ éloignées de 1, deviennent des foyers pour $|c|$ assez proche de 1. Apparaît ainsi la bifurcation de Hopf au franchissement de $|c| = 1$. Dans le cas, affine par morceaux, ce phénomène disparaît et le type des points stationnaires est déterminé par la valeur de ϵ . C'est ce que stipule le théorème suivant :

Théorème 4. – Si $|c| < 1$ le point stationnaire est instable ; si $|c| > 1$, il est asymptotiquement stable.
– si $\epsilon \leq \frac{1}{4}$, le point stationnaire est un noeud, sinon c'est un foyer.

Démonstration. Si $|c| < 1$, alors le système linéarisé de 1 autour du point $(c, f(c))$ s'écrit :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = -u - v \\ v_t = u \end{cases}$$

□

Les valeurs propres associées à la matrice correspondante sont donc :

$$\lambda_2^1 = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}(-1_- \sqrt{1 - 4\epsilon}) & \text{si } \epsilon \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2\epsilon}(-1_+ i \sqrt{4\epsilon - 1}) & \text{si } \epsilon > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Dans le cas $|c| > 1$, les valeurs propres associée au linéarisé sont :

$$\lambda_2^1 = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}(1_- \sqrt{1 - 4\epsilon}) & \text{si } \epsilon \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2\epsilon}(1_+ i \sqrt{4\epsilon - 1}) & \text{si } \epsilon > \frac{1}{4} \end{cases}$$

d'où les conclusions du théorème.

2.3 Etude générale

Voici l'analogie du théorème 2 dans le cas où f est affine par morceaux.

Théorème 5. *Le système (1) admet une unique solution définie pour tout temps.
Si $|c| > 1$, le point stationnaire est un attracteur global.
Si $|c| < 1$, alors il existe un cycle limite. Ce cycle est unique et attire toutes les trajectoires autres que le point stationnaire.
Si $|c| = 1$ et si $\epsilon \leq \frac{1}{4}$, le point stationnaire attire toutes les trajectoires, et on a notamment une bande continue d'homoclines.
Si $|c| = 1$ et si $\epsilon > \frac{1}{4}$, le point stationnaire est un centre. On a une bande continue de cycles, et le plus grand de ces cycles attire toutes les trajectoires qui lui sont extérieures.*

Démonstration. **Le cas $|c| > 1$**

On suppose $c < -1$, le cas $c > 1$ étant analogue.

En ramenant le point stationnaire en $(0, 0)$, le système devient :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = g_c(u) - v \\ v_t = u \end{cases} \quad (2)$$

où cette fois,

$$g_c(u) = \begin{cases} -u & \text{si } u \leq -1 - c \\ -u + 2(1 + c) & \text{si } -1 < u < 1 - c \\ -u + 4 & \text{si } u \geq 1 - c \end{cases}$$

On considère d'abord le cas où $\epsilon < \frac{1}{4}$.

Tant que $u < -1 - c$, les solutions du système linéaire sont données par

$$\begin{cases} u(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(u_0 - \lambda_2 v_0)e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 v_0 - u_0)e^{\lambda_2 t} \\ v(t) = \frac{u_0 - \lambda_2 v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 v_0 - u_0}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres associées au système, déjà calculées à la section précédente.

Les droites d'équation $v = \frac{1}{\lambda_1}u$ et $v = \frac{1}{\lambda_2}u$ forment ainsi des séparatrices pour les trajectoires du système tant que $u < -1 - c$. On peut alors montrer que toute trajectoire, après un éventuel détour excitable, reste dans la zone $u < -1 - c$ et tend donc vers $(0, 0)$ comme la solution ci-dessus.

Pour $\epsilon = \frac{1}{4}$, il n'y a qu'une racine double $\lambda - 1 = -2$ et les solutions sont données par :

$$\begin{cases} u(t) = (u_0 + \lambda_1(u_0 - \lambda_1 v_0)t)e^{\lambda_1 t} \\ v(t) = (v_0 + (u_0 - \lambda_1 v_0)t)e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

et on a la même conclusion.

Maintenant, si $\epsilon > \frac{1}{4}$, le point stationnaire est un foyer et on ne peut pas utiliser directement l'expression exacte des solutions pour conclure. On procède alors comme dans le cas cubique. On compare les trajectoires de (2) avec celles solutions du système :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = h(u) - v \\ v_t = u \end{cases} \quad (5)$$

où,

$$h(u) = \begin{cases} -\frac{1}{2}u & \text{si } u \leq 0 \\ \frac{1}{2}u & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

Mais, comme $\epsilon > \frac{1}{4}$, on vérifie que les trajectoires de (5) sont des cycles autour du point stationnaire. On vérifie également que les trajectoires de (2) rentrent strictement à l'intérieur de ces cycles, ce qui implique la convergence vers le point stationnaire.

Remarque 2. *On peut également remarquer que si $\epsilon \leq \frac{1}{4}$ les trajectoires de (5) ne sont plus des cycles mais des homoclines ou des trajectoires partant à l'infini, symétriques par rapport à l'axe $u = 0$.*

Le cas $|c|=1$

Pour $c = -1$, on a :

$$g_c(u) = \begin{cases} -u & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 < u < 2 \\ -u + 4 & \text{si } u \geq 2 \end{cases}$$

Pour $\epsilon > \frac{1}{4}$, grâce à la symétrie, les trajectoires telles que u reste dans $[0, 2]$ sont des cycles. Le plus grand cycle est le cycle passant par $(2, g_c(2) = 2)$. Ce cycle attire toutes les trajectoires qui lui sont extérieures, car pour $u > 2$, les trajectoires du système rentrent strictement à l'intérieur des cycles formés par les trajectoires du système symétrique :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = h(u) - v \\ v_t = u \end{cases} \quad (6)$$

où,

$$h(u) = \begin{cases} -u & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

Pour $\epsilon \leq \frac{1}{4}$, on a des séparatrices. En utilisant la position de ces séparatrices, on montre alors que toutes les trajectoires tendent vers le point stationnaire. On a une bande infinie d'homoclines (car, compte tenu des séparatrices, les trajectoires partant de v^+ n'atteignent pas v^- mais tendent vers le point stationnaire). D'autres trajectoires, viennent (pour $t \rightarrow -\infty$) de $(-\infty, +\infty)$.

Le cas $|c| < 1$ **Existence et unicité du cycle**

L'existence et l'unicité du cycle s'obtiennent globalement de la même manière que dans le cas cubique.

□

3 Oscillations en salves

Suivant les idées de [28], [21], on peut, en faisant varier c périodiquement autour de la valeur -1 obtenir des oscillations en salves. Une oscillation en salve est un phénomène périodique caractérisé par l'alternance d'une phase quiescente et d'une phase pulsatile. Ainsi, si la vitesse de variation de c est choisie de manière adéquate, le système suit la valeur $(c, f(c))$, tant que $c < -1$, puis devient oscillant, et le phénomène est ainsi répété de manière périodique. C'est ce qui se produit si l'on remplace la constante c dans (1) par la fonction $-1 + \sin(0.1t)$.

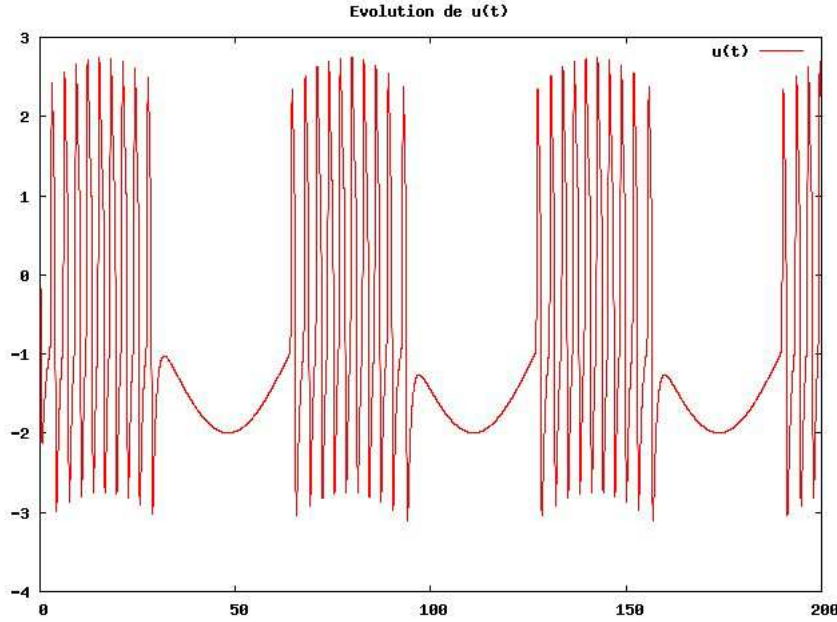


FIG. 9 – Solutions du système (1), pour f cubique et $c(t) = -1 + \sin(0.1t)$.

4 Bornage des solutions pour le système d'EDO avec forçage périodique et pour un système approché

4.1 Bornage des solutions pour le système d'EDO avec forçage périodique

On considère le système (1) où c est une fonction dépendante du temps qui vérifie

$$\exists K > 0 \forall t > 0 |c(t)| < K \text{ et } \left| \int_0^t c(s) ds \right| < K$$

Alors on peut appliquer le théorème 1 p 162 de [42], et on a :

Théorème 6.

$$\exists B > 0 \text{ tel que } \forall (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \exists T(u_0, v_0) \text{ tels que } \forall t > T |(u(t), v(t))| < B$$

4.2 Bornage des solutions pour un système d'EDO approché avec forçage périodique

Si on remplace le système (1) par le système obtenu en ajoutant un terme dissipatif $-\delta v$ ($\delta > 0$) au second membre de la seconde équation. Le théorème précédent reste valable et la démonstration en est simplifiée. On verra dans la partie 4 que cette démonstration se généralise au cas d'un système de réaction diffusion.

Soit le système

$$\begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v \\ v_t = u - c(t) - \delta v \end{cases} \quad (7)$$

où c vérifie les mêmes hypothèses que précédemment. Alors pour $(u(0), v(0))$ donnée, si $(u(t), v(t))$ est la solution de (7), on a

Théorème 7.

$\exists B > 0$ tel que $\forall (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \exists T(u_0, v_0)$ tels que $\forall t > T |(u(t), v(t))| < B$

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas de la cubique. Le cas affine par morceaux est similaire.

Multipliant la première équation par u , la deuxième par v et en sommant, on obtient

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon u^2 + v^2) = -u^4 + 3u^2 - cv - \delta v^2$$

Mais on peut trouver $\beta > 0$ et $K > 0$ tels que

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon u^2 + v^2) \leq -\beta u^4 + K - cv - \delta v^2$$

Et par l'inégalité de young, $\forall a > 0$

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon u^2 + v^2) \leq -\beta u^4 + K + \frac{1}{2a}c^2 + \frac{a}{2}v^2 - \delta v^2$$

Mais puisque

$$u^2 \leq \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}$$

on a

$$-\beta u^4 \leq -2\beta u^2 + \beta$$

Donc,

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon u^2 + v^2) \leq -2\beta u^2 + \beta + K + \frac{1}{2a}c^2 + \frac{a}{2}v^2 - \delta v^2$$

Finalement en choisissant a assez petit, on peut trouver d'autres constantes $\beta > 0$ et $K > 0$ telles que

$$\frac{d}{dt}(\epsilon u^2 + v^2) \leq -\beta(\epsilon u^2 + v^2) + K$$

Multipliant les deux membres par $\exp(\beta t)$ on obtient

$$\frac{d}{dt}(\exp(\beta t)(\epsilon u^2 + v^2)) \leq K \exp(\beta t)$$

Et en intégrant

$$\exp(\beta t)(\epsilon u^2 + v^2) \leq (\epsilon u^2 + v^2)(0) + \frac{K}{\beta}(\exp(\beta t) - 1)$$

ou encore

$$(\epsilon u^2 + v^2)(t) \leq \exp(-\beta t)(\epsilon u^2 + v^2)(0) + \frac{K}{\beta}(1 - \exp(-\beta t))$$

□

5 Le système $\lambda - \omega$

On présente ici le système $\lambda - \omega$. C'est un système qui possède un unique cycle limite qui attire toutes les trajectoires. Un intérêt de ce système réside dans le fait que l'on peut calculer explicitement la solution de son cycle limite. On peut ainsi tenter de s'en servir pour expliquer des phénomènes apparaissant dans les systèmes oscillants. Il faut noter que ce système n'est autre que la forme normale de la bifurcation de Hopf.

$$\begin{cases} u_t = \lambda(r)u - \omega(r)v \\ v_t = \lambda(r)v + \omega(r)u \end{cases} \quad (8)$$

où $r = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, $\lambda(r)$ est une fonction continue définie sur \mathbb{R}^+ telle que $\lambda(r) > 0$ si $r \in]0, 1[$, $\lambda(r) < 0$ si $r \in]1, +\infty[$

Théorème 8. *Le système (8) admet un unique cycle limite qui attire toutes les trajectoires différentes de $(0, 0)$: c'est le cercle d'équation $r = 1$. De plus, les solutions périodiques du système différentes de $(0, 0)$, sont données, pour tout (u_0, v_0) tels que $u_0^2 + v_0^2 = 1$, par*

$$u(t) = u(0) \cos(\omega(1)t) \quad (9)$$

$$v(t) = \sin(\omega(1)t) \quad (10)$$

$$(11)$$

Démonstration. On vérifie que la solution périodique du théorème est bien solution d'où l'existence du cycle. Pour l'unicité, on pose :

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

Alors

$$H_t = \lambda(r)(u^2 + v^2)$$

Donc, $H_t > 0$ si $r \in]0, 1[$, $H_t < 0$ si $r \in]1, +\infty[$. L'unicité découle du fait du signe de H_t . Aucune trajectoire différente de $r = 1$ ou $r = 0$ ne peut repasser par son point de départ. □

6 Quelques théorèmes sur l'existence de cycles limites

6.1 La bifurcation de Hopf

Le théorème suivant donne l'existence d'un cycle limite, localement auprès d'une valeur critique du paramètre, lorsque les valeurs propres de la matrice du linéarisé sont complexes et que leur partie réelle passe de la valeur nulle, à des valeurs strictement positives. Il est également nécessaire que la dérivée de la partie réelle par rapport au paramètre soit strictement positive. On trouve ce théorème dans [28] (Théorème 36 p. 61).

On considère un champ de vecteurs X_λ de classe C^k , $k \geq 3$,

$$\dot{x} = F(x, \lambda)$$

défini sur un domaine $D \times [-\lambda_0, +\lambda_0]$

Théorème 9. *On suppose que $X_\lambda(0) = 0$ pour toute valeur de λ et que le linéarisé de X_λ à l'origine a deux valeurs propres conjuguées $\mu(\lambda)$ et $\bar{\mu}(\lambda)$, telles que pour $\lambda > 0$, $\text{Re}(\mu(\lambda)) > 0$ et, $\text{Re}(\mu(0)) = 0$. Si on a de plus*

$$\frac{d(\text{Re}(\mu(\lambda)))}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} > 0,$$

alors il y a une fonction de classe C^{k-2} , $\lambda : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(x_1, 0, \lambda(x_1))$ appartient à une orbite périodique de période proche de $\frac{2\pi}{|\mu(0)|}$ et de rayon proche de $\sqrt{\lambda}$, telle que $\lambda(0) = 0$.

6.2 Le théorème de Poincaré-Bendixon

Ce théorème donne l'existence d'une orbite périodique lorsque le champ de vecteurs est dans \mathbb{R}^2 .

On rappelle d'abord la définition d'un ensemble ω – limite lorsque Φ est la solution d'un système dynamique à valeurs dans un espace de Banach B .

Définition 1. *L'ensemble ω – limite d'un point $m \in B$, noté $\omega(m)$ est défini par :*

$$\omega(m) = \{q \in B / \exists t_n \rightarrow +\infty / \Phi(t_n)(m) \rightarrow q \text{ quand } n \rightarrow +\infty\}$$

L'ensemble ω – limite d'un ensemble $E \subset B$, est l'ensemble formé par les ensembles ω – limite de tous les points de E .

Le théorème s'énonce (voir [28])

Théorème 10. *Soit $\dot{X} = F(X)$, $X(0) = m$, une équation différentielle du plan. On suppose que $X(t)$ reste dans un domaine borné et que le champ X a un nombre fini de singularités. Alors, il y a trois possibilités. Si $\omega(m)$ ne contient pas de points singuliers, c'est une orbite périodique. Si $\omega(m)$ contient des points singuliers et des points réguliers, $\omega(m)$ est constitué d'un ensemble d'orbites, et chacune d'entre elles tend vers un point singulier lorsque t tend vers $+\infty$ (on dit ce cas que $\omega(m)$ est un graphique). Si $\omega(m)$ ne contient aucun point régulier, c'est un point stationnaire.*

Deuxième partie

Liens avec la physiologie et la biologie

Dans cette partie, on fait le lien entre les travaux mathématiques et numériques de la thèse et les applications en physiologie et biologie. Elle est divisée en trois sections. La première traite de problèmes électrophysiologiques et des modèles qui y sont associés. La seconde donne des exemples d'apparition de patterns en chimie et biologie. La dernière donne des figures obtenues par simulations numériques, qui sont pertinentes en vue des applications des deux premières sections. Ainsi, pour la première partie, après avoir décrit les mécanismes physiologiques inhérents aux potentiels d'action des cellules nerveuses, on présente les modèles de Hodgkin et Huxley, et de FitzHugh-Nagumo. On donne ensuite un aperçu du mécanisme de dépolarisation du muscle cardiaque. Un des axes de recherche actuels est la simulation du comportement électro-mécanique du coeur. De tels projets ont des applications potentielles majeures, notamment dans le domaine clinique. Enfin, on termine la section par une courte présentation des oscillations en salves. Dans la deuxième section, on s'intéresse à des domaines où l'on a pu mettre en évidence des formations de patterns. La réaction de Belousov-Zhabotinsky, la bactérie *Bacillus Subtilis*, l'amibe *Dictyostelium discoideum*, la dépolarisation cardiaque, les ondes électriques cérébrales sont autant d'applications où apparaissent des formes géométriques telles que des ondes concentriques ou des ondes spirales. Au cours de cette thèse, des comportements de type pacemaker et d'oscillations en salves ont été simulés à l'aide du système (1) couplé par de la diffusion ou par l'opérateur des ondes. Des patterns et des ondes spirales ont également été simulés. On donne un aperçu de ces figures dans la dernière section.

7 Quelques modèles en électrophysiologie

7.1 Quelques notions d'électrophysiologie

Les phénomènes électriques liés au vivant sont connus depuis longtemps puisque certains poissons présentent la particularité de produire des décharges électriques. Une expérience célèbre de Galvani en 1791 met en évidence la contraction d'une cuisse de grenouille à l'aide d'une pince métallique. En 1794, l'école de Bologne montre la présence d'électricité dans cette cuisse de grenouille sans l'aide d'aucun outil extérieur : un nerf mis au contact de deux points d'un muscle fraîchement sectionné, un point à l'extérieur, l'autre à l'intérieur, induit la contraction du muscle. Les premiers traités d'électrophysiologie datent de 1840 et 1848. Dans les années 1920-1930 les découvertes se multiplient avec l'apport des techniques de pointe de l'électronique¹.

On s'intéresse ici au mécanisme du potentiel d'action dans les neurones. On décrit d'abord le potentiel transmembranaire de repos. Pour toute cellule de l'organisme, il existe une différence de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur, ce potentiel est appelé potentiel membranaire de repos. Les principaux solutés du liquide extra cellulaire sont les ions sodium et chlore. Le liquide intracellulaire contient de fortes concentrations de potassium et de molécules ionisées non diffusibles. L'amplitude du potentiel membranaire de repos varie de -5 à -100mv suivant le type de cellule. Il s'explique par un léger surplus d'ions négatifs à l'intérieur et un léger surplus d'ions positifs à l'extérieur. En général, les ions

¹Cette brève introduction historique est inspirée de l'article 'Electrophysiologie' de l'encyclopédie Universalis.

sodium et potassium sont les principaux déterminants du potentiel de repos. L'amplitude du potentiel de repos dépend principalement de la différence de concentration des ions spécifiques dans les liquides intra et extra-cellulaires et des différences de perméabilité membranaires aux différents ions. En fait, il y a un mouvement constant d'ions entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule. Par exemple, les différences de concentration du sodium et du potassium sont déterminées par la pompe sodium-potassium, d'autre part certaines protéines peuvent constituer des canaux ioniques et laisser passer certains ions. Les ions diffusent alors sous l'effet des gradients électro-chimiques. Supposons qu'il n'y ait qu'un seul ion libre de circuler, alors sa circulation au travers de la membrane, est déterminée d'une part par le gradient de concentration, et d'autre part par la différence de potentiel de cet ion. Pour un ion donné, la valeur d'équilibre de la différence de potentiel relative au gradient de concentration de cet ion est donnée par l'équation de Nerst : $V = K \log \frac{C_e}{C_i}$ (où $K = 60$ est une constante dépendant de la constante universelle des gaz parfaits, de la température, de la valence de l'ion et de la constante électrique de Faraday, C_e (C_i) est la concentration extra (intra)-cellulaire de l'ion). Certaines cellules, comme par exemple les cellules nerveuses et musculaires peuvent générer des potentiels d'action. Ces cellules sont dites excitables. Les potentiels d'action sont initiés par une modification transitoire de la perméabilité membranaire permettant la diffusion des ions sodium et potassium le long de leur gradient de concentration. Au repos, ce sont principalement les canaux potassiques qui sont ouverts et le potentiel de repos est proche du potentiel d'équilibre du potassium. Suite à un stimulus, une dépolarisation graduelle est initiée par des mouvements d'ions sodiques et potassique. Lorsque la dépolarisation atteint un seuil donné, des canaux sodiques potentiels dépendants s'ouvrent sous l'action de protéines. Le potentiel de membrane s'inverse alors et se rapproche du potentiel d'équilibre du sodium sans l'atteindre. Au sommet du potentiel d'action, les canaux potassiques se ferment, les canaux potentiels dépendants potassiques s'ouvrent, et le potentiel se rapproche de la valeur de repos. A la fermeture des canaux sodiques, certains canaux potassiques sont encore ouverts ce qui induit une hyperpolarisation. Une fois les canaux potassiques fermés le potentiel retrouve sa valeur de repos. A noter que la fermeture des canaux potassiques est due à la fermeture de l'extrémité intracellulaire du canal par une portion de l'une des protéines du canal. L'ouverture des canaux potassiques est elle déclenchée par les détecteurs qui répondent à la même dépolarisation qui ouvrent les canaux sodiques mais avec du retard. Ces potentiels d'action se propagent le long des tissus excitables. Cette description est en grande partie reprise de [49].

7.2 Le modèle de Hodgkin-Huxley

En se basant sur des expérimentations faites sur l'axone géant du calmar, Hodgkin et Huxley proposent en 1952, dans [35], un modèle mathématique capable de reproduire la forme du potentiel d'action. Ce modèle prend en compte l'activation des canaux ioniques.

Il est constitué de quatre équations différentielles ordinaires et s'écrit :

$$\begin{cases} I &= C \frac{d}{dt}V + \bar{g}_k(V - V_k)n^4 + \bar{g}_{Na}(V - V_{Na})m^3h + \bar{g}_l(V - V_l) \\ \frac{d}{dt}m &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \frac{d}{dt}n &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\ \frac{d}{dt}h &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \end{cases}$$

Dans cette équation, I représente le courant transmembranaire total.

C est une constante de capacitance.

V est le potentiel transmembranaire. V_k , V_{Na} , et V_l sont les potentiels transmembranaires de repos liés au potassium, au sodium et aux autres ions (la lettre l est relative à tous les autres ions).

Les termes apparaissant devant les potentiels représentent les différentes conductances. Ainsi \bar{g}_k , \bar{g}_{Na} , \bar{g}_l sont des constantes. n et h sont des fonctions comprises entre 0 et 1 faisant dépendre les différentes conductances de la valeur de potentiel transmembranaire. Elles sont solutions d'équations différentielles et permettent de modéliser les ouvertures des canaux ioniques. Les α et β sont différentes fonctions de V , déterminées par les auteurs pour être en adéquation avec les données expérimentales (voir [35] ou par exemple [28], [37], pour l'expression exacte des fonctions). La forme de ces fonctions dépendantes de V est une des clefs du travail de Hodgkin et Huxley. Grâce à la technique du Patch Clamp, qui permet de fixer V , ils ont pu mesurer les conductances expérimentalement, et trouver les nombres (à V fixé) α et β tels que les conductances calculées analytiquement correspondent aux mesures (voir [35]²).

Ces équations modélisent l'activité électrique de la cellule par un circuit électrique constitué d'un condensateur et de 3 générateurs associés à des résistances. Les auteurs ont donné un modèle mathématique permettant de prendre en compte les variations de conductance en fonction de la valeur de la différence de potentiel. Ils ont ainsi donné un modèle simulant l'activité des canaux potentiels dépendant. Ils ont numériquement reproduit la forme du potentiel d'action grâce à ce modèle. A partir de cette équation, les auteurs peuvent aussi modéliser la propagation du potentiel d'action le long de l'axone en ajoutant un terme de diffusion (voir [28] p 152 pour la pertinence physique du terme de diffusion). On obtient ainsi les équations de Hodgkin-Huxley

$$\begin{cases} C \frac{d}{dt}V &= -\bar{g}_k(V - V_k)n^4 - \bar{g}_{Na}(V - V_{Na})m^3h - \bar{g}_l(V - V_l) + \frac{a}{2R} \frac{\delta^2}{\delta x^2} V \\ \frac{d}{dt}m &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \frac{d}{dt}n &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\ \frac{d}{dt}h &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \end{cases}$$

où a est le rayon de l'axone, et R la résistance. Si on cherche une solution ondes stationnaire de la forme $V(x,t)=V(x-ct)$, on peut se ramener à une EDO du second ordre. Hodgkin et Huxley purent ainsi déterminer numériquement une valeur de vitesse de propagation proche de celle observée expérimentalement. Ils obtinrent le prix Nobel de Physiologie en 1963 pour l'ensemble de leur travaux conjointement à J.C. Eccles pour son travail sur la synapse.

²On pourra aussi consulter l'article instructif de Scholarpedia sur le sujet.

7.3 Le modèle de FitzHugh-Nagumo

Le modèle de Hodgkin et Huxley est difficile à analyser mathématiquement et en 1961, R. FitzHugh propose dans [27] un modèle à deux équations, qui peut être vu comme une modification de l'équation de Van der Pol, destiné à reproduire les caractéristiques d'excitabilité du modèle de Hodgkin et Huxley. Au même moment, Nagumo donne un circuit électrique dont le comportement est décrit par les mêmes équations. Le modèle, connu sous le nom de système de FitzHugh-Nagumo est de la forme :

$$\begin{cases} u_t = v - f(u) + I \\ v_t = au + bv \end{cases}$$

Sous les conditions adéquates de a et b ce modèle est excitable par le même mécanisme que celui présenté dans la première partie.

7.4 La conduction électrique cardiaque et quelques pathologies

La conduction électrique cardiaque

La contraction du muscle cardiaque est déclenchée par la dépolarisation de la membrane plasmique. Un groupe de cellules situé au sommet de l'oreillette droite se dépolarise à un rythme régulier et engendre la propagation des potentiels d'action qui s'étendent à l'ensemble des cellules cardiaques (voir figure 10³). Ce groupe de cellules est appelé noeud sinoatrial (SA) et constitue un pacemaker. La propagation dans les oreillettes n'utilise pas de système de conduction particulier et se fait de cellules en cellules. La propagation aux ventricules passe par contre par le système de conduction cardiaque. Les oreillettes et les ventricules sont séparés par une paroi non conductrice. La liaison électrique entre oreillettes et ventricules est assurée par le noeud atrioventriculaire (AV) situé en bas à gauche de l'oreillette droite, et un système de fibres de conduction nommé le faisceau de His. Après avoir quitté le noeud AV la dépolarisation rejoint ainsi la paroi séparant les deux ventricules, le septum interventriculaire, via le faisceau de His. Le faisceau se divise en deux branches, et quitte le septum pour rejoindre la paroi des deux ventricules. Le faisceau entre alors en contact avec les fibres de Purkinje qui transmettent rapidement l'influx dans la plus grande partie des ventricules. Finalement, les fibres de Purkinje se connectent aux myocytes ventriculaires par lesquels l'influx se propage dans tout le reste des ventricules.

Le potentiel d'action des myocytes ventriculaires est dans l'ensemble dû au même phénomène que celui décrit pour les cellules nerveuses. Une différence significative est qu'il présente une phase de plateau lors de la dépolarisation qui leur est spécifique. Ce plateau, qui signifie une persistance de la dépolarisation, s'explique par une perméabilité aux ions potassium inférieure à la valeur de repos et une augmentation marquée de la perméabilité au calcium. Cette perméabilité au calcium est le fait le plus important et s'explique de la manière suivante : la dépolarisation membranaire initiale implique l'ouverture des canaux calciques potentiels dépendants, mais d'une manière plus lente que les canaux sodiques. Les ions calciques entrant compensent les ions potassiques sortant, ce qui maintient le

³Source : <http://www.embryology.ch/francais/pcardio/funktion01.html>

plateau de dépolarisation membranaire. La repolarisation intervient lorsque les perméabilités retrouvent leur valeur de repos. Les potentiels d'action des cellules musculaires atriales ressemblent à celles des cellules ventriculaires mais leur plateau est plus court. Les potentiels d'action des cellules du noeud SA sont eux générés périodiquement et de manière différente de ceux des cellules ventriculaires. D'autres cellules sont capables d'engendrer des potentiels d'action. Mais leur rythme est moins rapide que celui des cellules du noeud SA et dans les circonstances normales, il sont forcés par ceux engendrés par le SA. Dans certaines circonstances, il est possible qu'elles engendrent leur propre rythme, on parle alors de foyers ectopiques. Certaines cellules du faisceau de His peuvent notamment jouer ce rôle. Pour plus de détails, on pourra consulter [49], dont ce passage est largement inspiré.

De nombreux modèles, basés sur l'approche de Hodgkin et Huxley ont été proposés pour modéliser l'activité électrique cardiaque (voir [28], [57]) . Actuellement, de nombreuses recherches sont menées dans le but de modéliser le fonctionnement electro-mécanique du coeur. Une telle modélisation présente de nombreux intérêts pour la compréhension biomécanique du coeur, pour prévoir l'effet de certains paramètres, pour l'aide au diagnostic, pour la meilleure compréhension de certaines pathologies... Pour la partie dépolarisation cardiaque, certaines approches, héritées, du modèle de Hodgkin et Huxley, incluent des modèles ioniques inspirés des propriétés fines des nouvelles données physiologiques (voir [57], [6]). D'autres, cherchant un compromis entre réalité physiologique et rapidité et simplicité des calculs, se basent sur des approches phénoménologiques de type Fitzugh-Nagumo, pour reproduire les propriétés qualitatives globales. On pourra par exemple consulter [65] dans lequel est établi un modèle du coeur pour l'obtention d'images ou encore [10] dans lequel les auteurs cherchent à reproduire des électrocardiogrammes cohérents avec les données expérimentales.

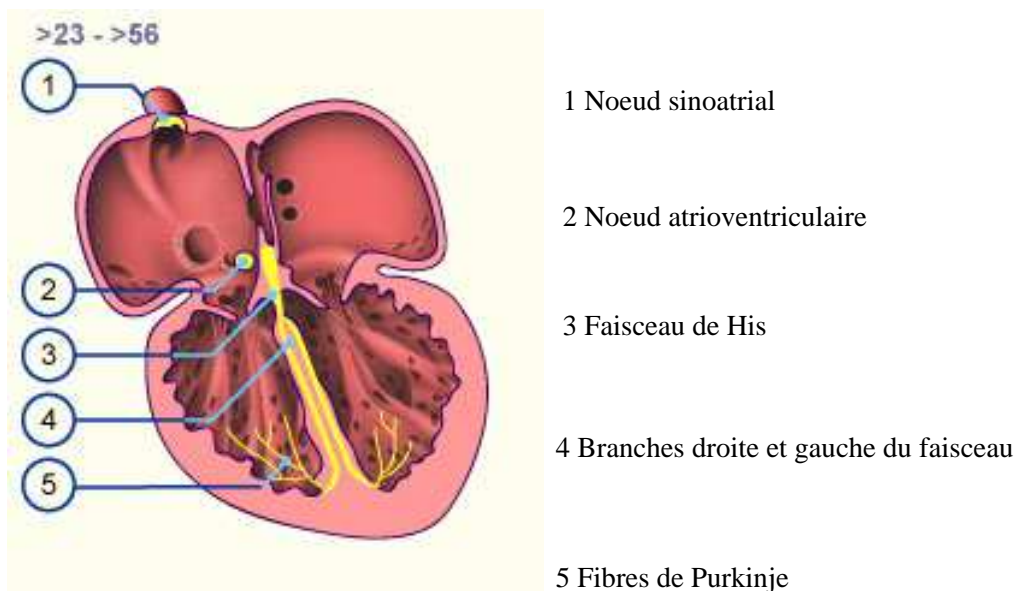


FIG. 10 – Le système de conduction cardiaque

Quelques pathologies

Lorsque des dysfonctionnements apparaissent dans les cellules du système de conduction, le rythme cardiaque s'en trouve affecté, pouvant entraîner dans les cas les plus graves tels que la fibrillation ventriculaire, l'arrêt de la fonction cardiaque et le décès.

Le rythme cardiaque est normalement donné par les cellules du noeud sinusal à une fréquence de soixante à cent oscillations par minute. En cas de défaillance, les cellules du noeud auriculoventriculaire prennent le relai à une fréquence de 40 à 60 oscillations par minute. Des cellules situées dans les fibres de Purkinje peuvent également faire office de pacemaker à une fréquence de 20 à 40 oscillations par minute. Les troubles du rythme cardiaque, décelés par l'électrocardiogramme peuvent être classés suivant leur origine dans le système de conduction.

Parmi les troubles recensés du rythme sinusal, on peut citer la bradycardie sinusale (ralentissement du rythme qui n'est pas forcément un trouble puisqu'elle peut apparaître chez des sujets sains durant le sommeil, chez les sportifs...), la tachychardie sinusale (accélération du rythme, apparaît aussi durant l'effort, avec les émotions...), arythmie sinusale, bloc sinoauriculaire, arrêt sinusal. Parmi les troubles à l'étage auriculaire, on peut citer : les extrasystoles auriculaires, la tachychardie atriale, le flutter atrial, la fibrillation auriculaire. Pour les troubles intervenant au niveau auriculo-ventriculaire : l'extrasystole jonctionnelle, le rythme d'échappement jonctionnel, le rythme jonctionnel accéléré, la tachycardie jonctionnelle. Pour les troubles du rythme ventriculaire : l'extrasystole ventriculaire, le rythme d'échappement ventriculaire, rythme idioventriculaire accéléré, tachycardie ventriculaire, tachycardie ventriculaire polymorphe (notamment torsades de pointe), la fibrillation ventriculaire et l'asystolie. Ces troubles ont diverses origines, on peut notamment citer ces causes qui reviennent souvent et qui apparaissent naturellement dans les modèles mathématiques : zones ischémiques, foyers ectopiques, phénomènes de réentrées, salves. Pour des descriptions plus précises sur ces pathologies et leur détection à l'ECG, on peut consulter [1], [19].

7.5 Expériences physiologiques et phénomènes chaotiques

Il convient ici de signaler les travaux de J. Jalife et ses collaborateurs qui établissent un lien entre l'activité électrique cardiaque et les phénomènes de type chaotiques observés dans les systèmes non linéaires. Ainsi dans [14], les auteurs mettent en évidence des phénomènes de type chaotique (doublement de période, de variation du Stimulus Response Ratio (SRR) ...) dans la réponse des fibres de Purkinje à des stimulations électriques périodiques. Par exemple, pour une durée du stimulus fixé et une période fixée, la variation d'intensité induit une variation de SRR entre nombre de stimulus émis et excitations des cellules. Un autre phénomène observé est que pour une augmentation des fréquences de stimulation les vitesses de propagation du potentiel d'action peuvent occuper des segments continus tandis que certaines valeurs ne sont pas atteintes. Sur le même thème on peut aussi citer l'article [15] qui porte sur un modèle mathématique décrivant l'influence d'une stimulation vagale sur les cellules du noeud sinusal. Encore sur le même thème, on peut consulter l'article d'expériences physiologiques de J. Nagumo *et al.* [52] qui porte sur les phénomènes chaotiques dans la propagation de l'influx nerveux sur l'axone géant du

calmar.

7.6 Oscillations en salves

Les oscillations en salves (bursting oscillations) ont été mises en évidence dans diverses expériences biologiques, physiques et chimiques ([38]). On a notamment observé ce phénomène dans les cellules β du pancréas. Des salves de potentiels d'action sont générées périodiquement par ces cellules en réponse à une augmentation extra cellulaire de glucose, elles entraînent des sécrétions d'insuline, permettant la consommation du glucose par les tissus et le maintien du taux de glucose à un niveau normal (voir [4]). De nombreux modèles ont été proposés sur ce sujet. Les cellules nerveuses de l'aplysie sont un autre exemple d'apparition d'oscillations en salves. On renvoie à [28] pour une présentation générale du phénomène et de quelques modèles.

8 Quelques patterns en chimie, biologie et physiologie

On observe souvent dans les domaines de la biologie la formation de figures particulières : ondes concentriques, spirales, fractales. On présente ici quelques exemples chimiques, biologiques et physiologiques d'apparition de telles figures ou patterns. La référence, pour une première approche des patterns en biologie et pour les mathématiques en biologie, est le livre de J.D. Murray [55]. On peut aussi consulter [70] qui traite de la plupart des applications évoquées dans cette partie.

8.1 La réaction de Belousov-Zhabotinsky

Cette célèbre et importante réaction chimique a été découverte par Belousov en 1951, les recherches ont été poursuivies par Zhabotinsky à partir de 1964. A partir de 1970, l'expérience est sortie de l'ex-URSS et a fait l'objet de nombreuses recherches. Aujourd'hui on peut trouver la description expérimentale de l'expérience facilement sur internet. Lorsqu'on mélange les solutions appropriées dans un récipient, on peut observer la couleur de la solution résultante qui oscille périodiquement entre le rouge et le bleu (d'autres couleurs sont possibles suivant les solutions). Si on place la solution dans une assiette de Petri, on peut observer des anneaux concentriques et des spirales (voir figure 11⁴). Il y a maintenant plusieurs variantes de cette réaction. La plus basique consiste en l'oxydation d'un acide malonique par des ions bromure, dans un milieu acide, en présence d'un catalyseur, le cerium. Cette réaction a été modélisée par un système de trois équations différentielles. On peut rajouter la diffusion et on obtient alors un système de réaction diffusion. On peut consulter [55] pour une approche mathématique.

⁴Ces figures ont été prises dans l'article de Scholarpedia sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky.

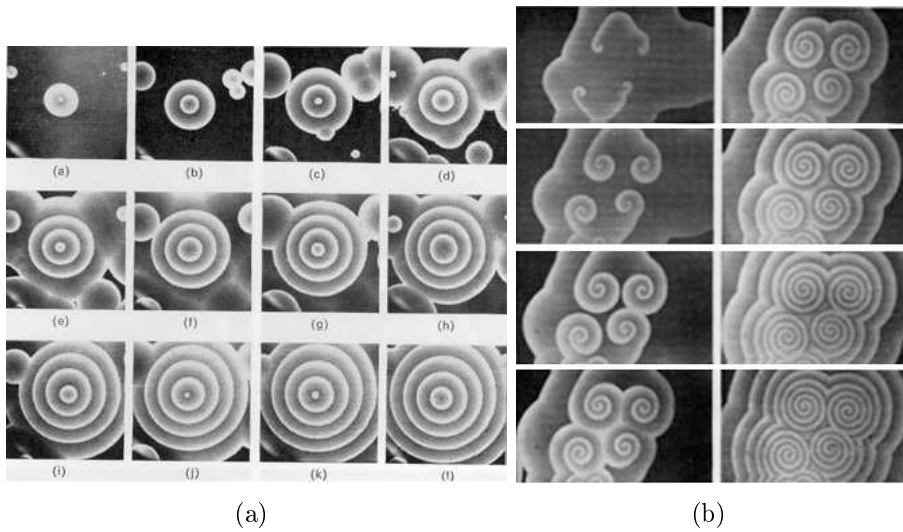


FIG. 11 – Ondes concentriques et ondes spirales dans la réaction de Belousov-Zhabotinsky

8.2 La bactérie *Bacillus Subtilis*

La bactérie *Bacillus Subtilis* est capable de former différents patterns. Lorsqu'on la place, en présence de nutriment, dans une assiette de Petri contenant de l'agar-agar⁵, elle peut adopter différentes formes. Ces formes dépendent des concentrations initiales de l'agar et de nutriment. Ces patterns sont classés en cinq types connus sous le nom de : diffusion limited aggregation like, Eden-like, concentric rings, rough disk, dense-branching morphology. Ces patterns ont pu être retrouvés à l'aide d'E.D.P inspirées des modèles proie-prédateur. On renvoie à [53], [54], [5] pour plus de détails.

8.3 L'amibe *Dictyostelium discoideum*

Dictyostelium discoideum est un organisme eucaryote. Il possède la propriété de pouvoir vivre à l'état de cellules isolées ou de colonies multicellulaires. Dans des conditions nutritionnelles favorables, *Dictyostelium* se développe à l'état unicellulaire. Mais dans des conditions de carence nutritive, les cellules s'engagent dans un cycle de différenciation et de morphogénèse les conduisant à la formation d'un pseudo-champignon. Au début de leur évolution, les cellules passent par une phase d'aggrégation, durant laquelle *Dictyostelium* passe d'un état unicellulaire à un état pluricellulaire. L'aggrégation est dirigée par les gradients chimiques d'AMP cyclique. Certaines cellules émettent de l'AMPc, qui est captée par les autres et transmis de proche en proche. Durant ce processus, elles forment des cercles concentriques ou des ondes spirales⁶. La figure 12⁷ représente le cycle de dé-

⁵L'agar-agar est un gélifiant dérivé d'algues rouges utilisé comme milieu de culture pour les micro-organismes.

⁶Ce paragraphe est inspiré de <http://lpmcn.univ-lyon1.fr/rieu/dicty.htm> et de [41].

⁷source : <http://www.zi.biologie.uni-muenchen.de/zoologie/dicty/dicty.html>

veloppement de l'amibe⁸.

Dans [41], les auteurs cherchent à obtenir des ondes spirales à partir d'un modèle de réaction-diffusion à trois variables. Les trois variables représentent la quantité d'AMPc intra et extra-cellulaire, ainsi que la quantité de récepteurs à l'AMPc actifs. Le modèle dépend également de deux paramètres représentant la quantité d'enzymes (adenylate cyclase et phosphodiesterase). Suivant la valeur des deux paramètres, le système peut être dans un état bistable, stable, excitable ou oscillant. L'idée des auteurs est alors de faire évoluer, pour chaque cellule, ces deux paramètres en fonction du temps, suivant différents chemins dans l'espace des paramètres. Pour chaque cellule, les paramètres suivent le même chemin, mais les unes sont en retard par rapport aux autres. Ce retard est introduit, en ajoutant un délai dans le parcours des paramètres de chaque cellule⁹. Ce délai suit une loi exponentielle. Les auteurs simulent alors les EDP. Ils obtiennent de belles spirales lorsqu'ils choisissent le chemin : stable-excitable-oscillant-excitable. Cela est présenté comme un scénario possible pour le développement de *Dictyostelium discoideum*.

8.4 Ondes spirales dans le coeur et le cerveau

Des ondes spirales ont pu être observées dans le coeur et le cerveau. Dans le coeur, ces patterns n'apparaissent pas lors d'un fonctionnement normal et sont donc liés aux arythmies. Des auteurs comme A.T. Winfree, ont étudié les modèles d'oscillations en vue de leur application aux arythmies. C'est une perspective de grand intérêt. On renvoie à [55] pour quelques références sur le sujet. On y trouvera également une illustration de spirales produites dans un coeur de lapin, et dans le cortex cerebral lésionné d'un rat. Dans [18], on met également en évidence des spirales dans le coeur d'un mouton.

9 Les liens avec cette thèse

Une des motivations de cette thèse était l'amélioration de la compréhension des patterns en général, et des spirales en particulier dans les phénomènes biologiques. Un des liens avec la biologie est donc de faire apparaître ces patterns dans un système oscillant ou/et excitable. Une autre motivation était l'application à la physiologie. Le système que l'on a étudié est un système de type Fitzugh-Nagumo légèrement différent du système standard. Il est donc lié à la physiologie comme on l'a vu plus haut. D'autre part il présente l'intérêt d'être oscillant ou excitable lorsqu'on varie le paramètre c . Les phénomènes observés sont donc susceptibles de se généraliser à d'autres systèmes excitables ou oscillants. Une des attentes d'un tel travail et des mathématiques en général, est d'aider à comprendre les mécanismes généraux apparaissant dans les applications. Dans cette

⁸Les amibes sont des organismes unicellulaires eucaryotes de taille variant entre 20 μm et 1 mm de longueur (mais plus généralement entre 200 μm et 500 μm), vivant en eaux douces ou salées, capable de se déplacer par de multiples déformations du cytosquelette ou plus rarement à l'aide de flagelles, (définition inspirée de wikipedia).

⁹Concrètement, les paramètres sont des fonctions déterminées du temps auxquelles on rajoute un délai qui dépend de chaque cellule.

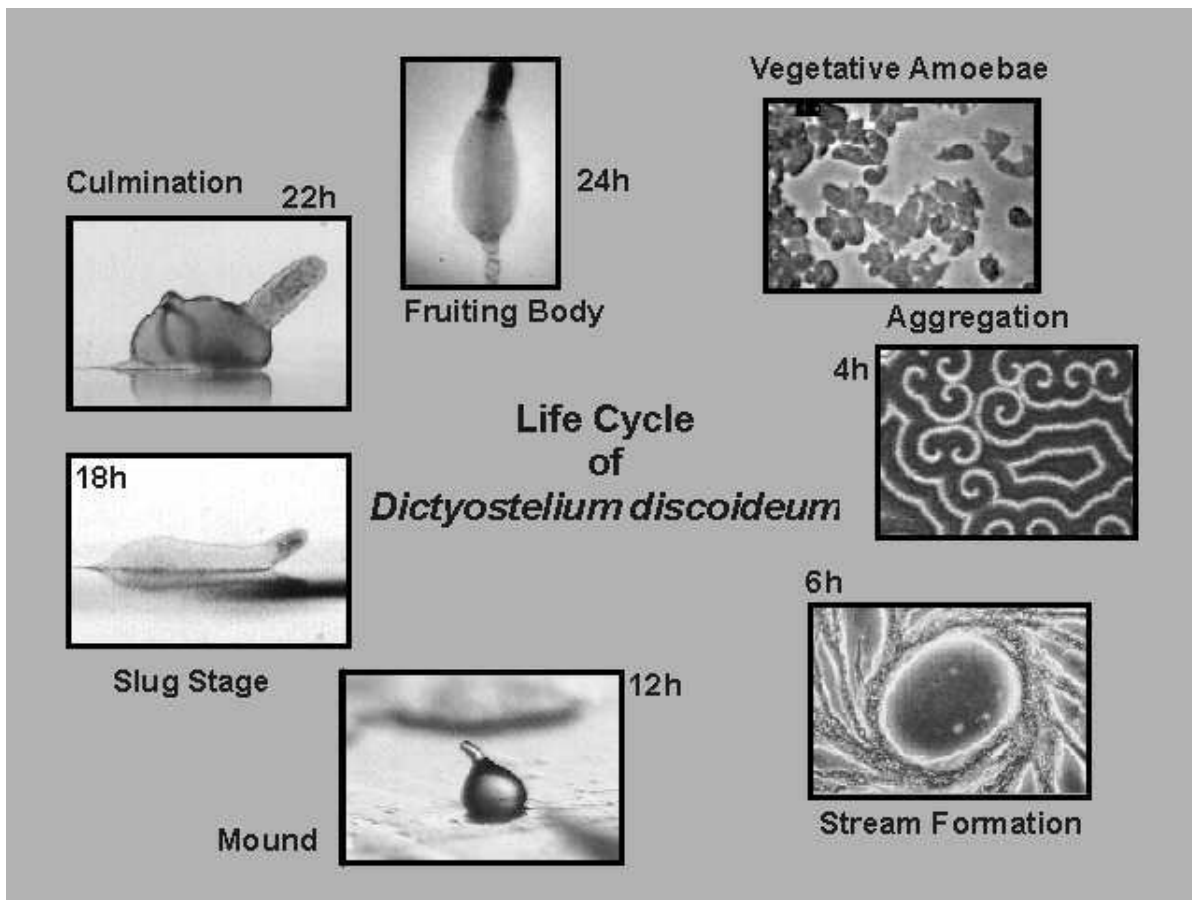


FIG. 12 – Développement de *Dictyostelium dicoideum* en état de carence alimentaire

optique, les mécanismes décrits ici sont susceptibles d'apparaître dans de nombreux domaines, tels que les arythmies cardiaques ou l'aggrégation de *Dictyostelium dicoideum*. On présente maintenant en images quelques aspects du travail pertinents en biologie ou physiologie.

9.1 Les spirales

On a vu que les spirales apparaissent dans de nombreuses applications. On verra au chapitre 3 comment faire apparaître les ondes spirales en rapport avec le déphasage des conditions initiales, dans le système (1), lorsqu'on le couple avec la diffusion. On insiste dans la partie 3 sur le cas où $c = 0$, c'est à dire lorsque le système est oscillant, mais les spirales subsistent si le système est excitable, par exemple si $c = -1.1$. On va voir ci dessous comment simuler un comportement de type pacemaker. Les spirales persistent dans le système pacemaker si l'on prend des conditions initiales adéquates (voir partie 3). On reproduit ci-dessous une simulation numérique dans laquelle on observe une spirale.

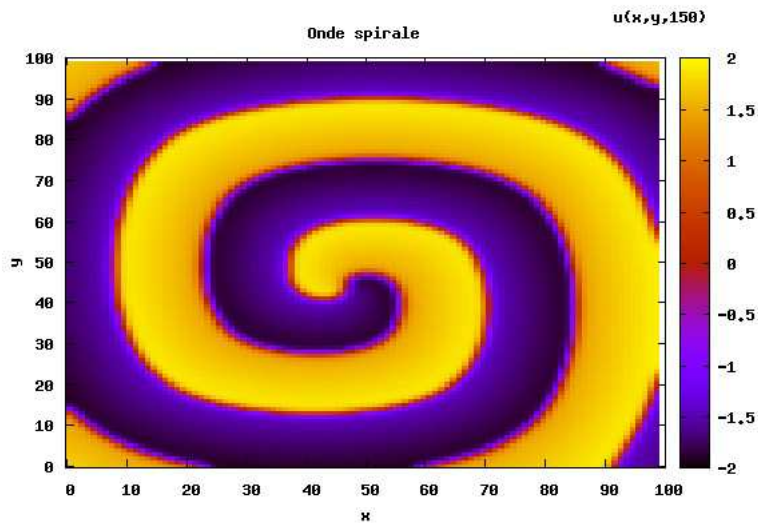


FIG. 13 – Spirale

9.2 Pacemaker

Si on choisit $c = 0$ pour les cellules au centre et $c = -1.1$ pour les autres cellules, et que l'on couple avec l'opérateur de diffusion ou des ondes, on a un pacemaker. La motivation est l'analogie avec l'onde de dépolarisation du muscle cardiaque et les pathologies observées telles que la fibrillation ventriculaire. Dans la figure 14, on a représenté les fronts d'ondes circulaires pour le système couplé avec la diffusion (a)) et l'opérateur des ondes (b)). Dans la figure c), on montre la spirale obtenue lorsque l'on prend les conditions initiales du type de celle de la figure 28 de la partie 3 avec la valeur de c ci-dessus induisant le pacemaker et le couplage par réaction diffusion.

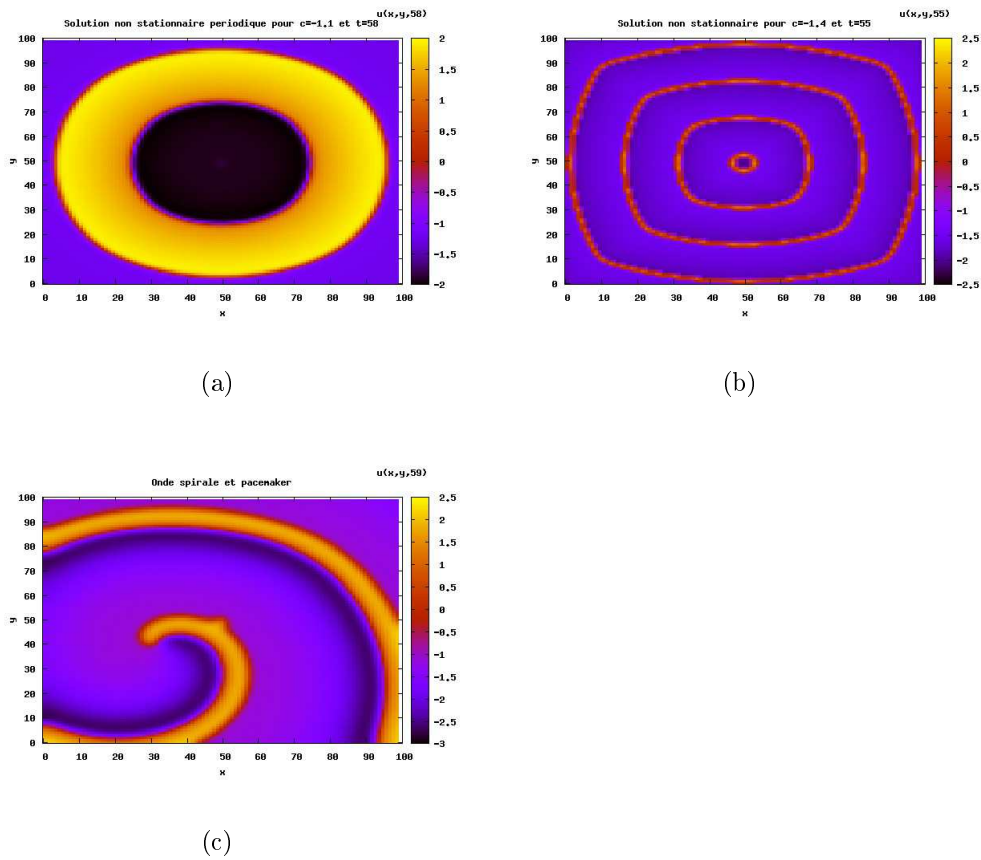


FIG. 14 – Pacemaker

9.3 Oscillations en salves

Selon le même mode que précédemment, on peut générer des propagations d'oscillations en salves, que le couplage soit fait avec la diffusion ou avec l'opérateur des ondes, lorsqu'au centre la valeur de c varie périodiquement en fonction du temps entre des valeurs qui rendent le système stationnaire ou oscillant. Une description détaillée sera donnée dans la partie 5. On se contente de montrer ici quelques figures illustrant la propagation d'oscillations en salves.

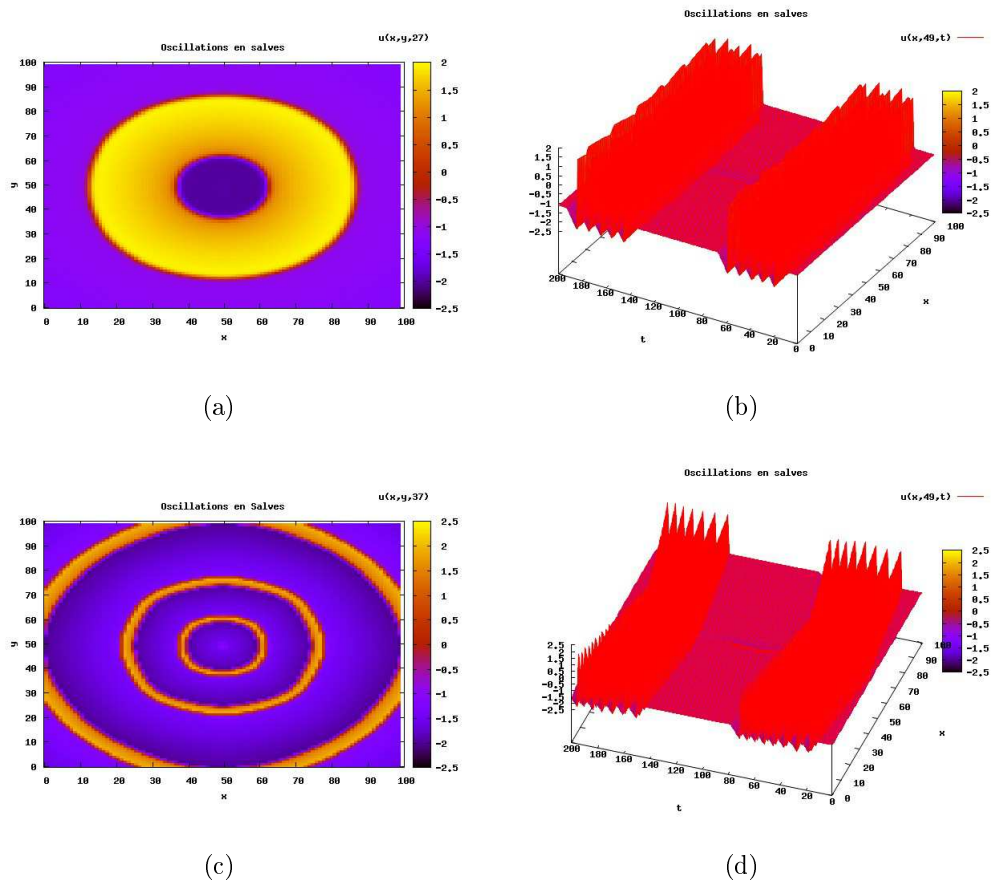
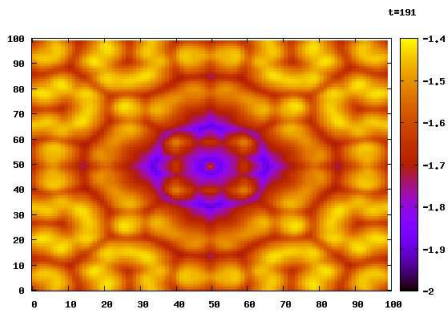


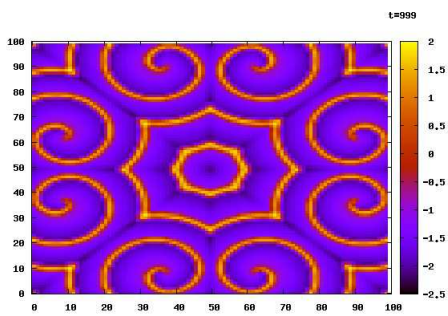
FIG. 15 – Oscillations en salves.

9.4 Patterns et spirales

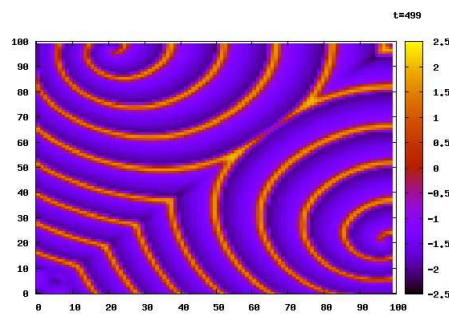
Enfin, il est possible d'obtenir des patterns assez complexes lorsqu'on prend la valeur $c = -1$ pour les cellules non centrales et que l'on fait le couplage par l'opérateur des ondes. Au centre, le paramètre c varie toujours périodiquement en fonction du temps. Dans ce cas, les cellules excitées retournent vers leur valeur d'équilibre par de petites oscillations. On notera la similitude entre les spirales obtenues par simulation numérique du système, et les spirales obtenues pour *Dictyostelium dicodeum*, expérimentalement (voir figure 12) et numériquement dans [41].



(a)



(b)



(c)

FIG. 16 – Patterns et spirales

Troisième partie

Génération d'ondes spirales dans un réseau d'oscillateurs couplés et dans un milieu excitable : le cas van Der Pol, le cas $\lambda - \omega$.

Préliminaires

Les simulations numériques effectuées laissent à penser que dans le cas $c = 0$, la solution asymptotique du système (12) $(u + iv)(x, y, t)$ peut s'écrire sous la forme

$R(x, y, t) \exp(i(\Phi(t - t_0(x, y))))$ où R et Φ sont des fonctions périodiques en temps de même période, et où Φ ne dépend que du temps tandis que t_0 ne dépend que de (x, y) . En fait, on observe numériquement que la solution asymptotique est périodique et qu'en chaque point de l'espace, elle évolue selon un cycle pas trop éloigné du cycle limite de (1), de sorte que les patterns observés sont dûs aux différences de phase selon la variable d'espace.

On a vu que le cycle limite de (1) attire toutes les trajectoires différentes du point stationnaire. Il existe une partition de \mathbb{R}^2 en ensemble de points qui ont une phase asymptotique fixée (cf [28] p 108), ces régions définissent les isochrones. Cette phase est définie à une origine près sur l'orbite périodique. On peut la compléter pour former un système de coordonnées dans un voisinage du cycle limite (cf [28] p 108 ou [55] p 219 pour une approche légèrement différente). Si l'on considère maintenant N oscillateurs suivant la dynamique (1) et couplés faiblement, on peut, sous réserve que les coordonnées restent dans le voisinage de définition, réécrire le système de N oscillateurs, à l'aide de ces nouvelles coordonnées ([28],[55]). Il existe alors des théorèmes d'accrochage des phases (cf [28]). Mais leur validité repose à priori sur l'hypothèse d'un couplage faible. Il semble que le phénomène décrit par ces théorèmes soit le même que celui observé numériquement. Sur la notion d'isochrone, on pourra consulter [70], [32], [20], [28].

L'objet principal de cette partie est la mise en évidence de l'apparition d'ondes spirales dans le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v + \Delta u \\ v_t &= u - c + \Delta v \end{cases} \quad (12)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0 \\ v(0, x) &= v_0 \\ \frac{\delta u}{\delta n} &= \frac{\delta v}{\delta n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega \end{aligned}$$

où n est la normale extérieure au domaine Ω .

On illustre comment il est possible de faire apparaître de telles ondes en utilisant la propriété attractive du cycle limite du système sans diffusion (1) et la propriété de la diffusion. On considère d'abord le cas où $c = 0$, ce système est alors un système de type Van Der Pol. On observe alors que la solution asymptotique est périodique en temps. En chaque point de l'espace (que l'on appelle aussi cellule), la solution est attirée par un cycle limite. Asymptotiquement, selon la répartition des déphasages, on peut voir apparaître des patterns particuliers. On montre ainsi comment on peut obtenir des ondes spirales en jouant sur les conditions initiales : on choisit des conditions initiales régulièrement réparties sur le cycle limite attracteur de (1), de sorte qu'asymptotiquement les déphasages obtenus, impliquent une solution de type onde spirale. C'est l'objet principal de cette partie. Il est également possible de faire apparaître d'autres patterns. Par exemple, en prenant une condition de Dirichlet sur une partie du bord et en laissant les conditions aux bords de Neumann ailleurs, la condition de Dirichlet induit un décalage de phase, et une solution initialement constante évolue alors asymptotiquement vers une solution front d'ondes. Il est difficile d'obtenir asymptotiquement des solutions fronts d'ondes en n'utilisant que des conditions aux bords de Neumann s'il n'y a pas de phénomène de réentrée comme dans le cas des spirales, ou un autre phénomène d'auto-entretien comme dans le cas de certaines solutions symétriques. Par exemple, si on partage le domaine en deux parties égales identiques et connexes, et que l'on prend des conditions initiales non diamétralement opposées sur le cycle limite, on crée un décalage, et on observe des fronts d'ondes. Mais ces fronts d'ondes ne sont qu'un régime transitoire, car asymptotiquement, les cellules se synchronisent. Par contre, si les deux valeurs des conditions initiales sont diamétralement opposées sur le cycle limite, on observe asymptotiquement un pattern où les cellules ne sont pas en phase, mais où apparaît une symétrie par rapport à la frontière des deux valeurs des conditions initiales. On met ce phénomène en évidence sous l'appellation de solution miroir. Cette solution est très analogue, à une solution d'un système de deux oscillateurs couplés. On montre également comment déformer l'aspect des spirales lorsqu'on fait dépendre c de x . On peut aussi, avec la dépendance en x , faire déplacer la spirale dans le domaine Ω . Lorsque le milieu est excitable, par exemple $c = -1.1$, on obtient également l'onde spirale, si on choisit des conditions initiales du même type que précédemment, et qui permettent une réentrée de l'onde d'excitabilité. La spirale

se déplace dans ce cas aussi dans le domaine, contrairement au cas où $c = 0$ pour lequel le centre de la spirale reste fixe. D'autres variantes sont présentées. On met ensuite en évidence les spirales dans le cas des systèmes $\lambda - \omega$, qui constituent une forme normale de systèmes oscillants. Pour mieux comprendre, on considère le système discrétisé, on obtient alors un système d'oscillateurs couplés. On donne une analyse complète des trajectoires du système lorsqu'on se limite à deux oscillateurs couplés. Cette analyse met en évidence une solution en opposition de phase qui s'apparente à la solution miroir présentée plus haut. Elle met également en évidence que, dans la majorité des cas, les deux cellules se synchronisent, ce qui confirme la difficulté à obtenir des patterns pour Van Der Pol, sans symétrie, auto-entretien ou réentrée. On donne une petite généralisation dans le cas de N oscillateurs. L'étude de ces phénomènes n'est pas nouvelle. La dernière section de ce chapitre est consacrée à la présentation des références rencontrées durant cette étude.

10 Simulations numériques

10.1 Le cas van Der Pol

Une onde spirale

On considère le système (12) avec $c = 0$. On considère un domaine Ω carré. On prend comme conditions aux bords des conditions de Neumann. On divise le domaine en trois parties d'aires à peu près égales. On prend comme condition initiale une fonction $(u(x, 0), v(x, 0))$ constante sur chacune de ces parties, de telle sorte que ces trois constantes soient régulièrement déphasées sur le cycle limite du système sans diffusion (1). Ces conditions initiales sont illustrées sur la figure 18. On simule alors le système numériquement en discrétisant le domaine en 100×100 carrés et on utilise la méthode d'Euler explicite. On obtient la solution asymptotique de la figure 17 :

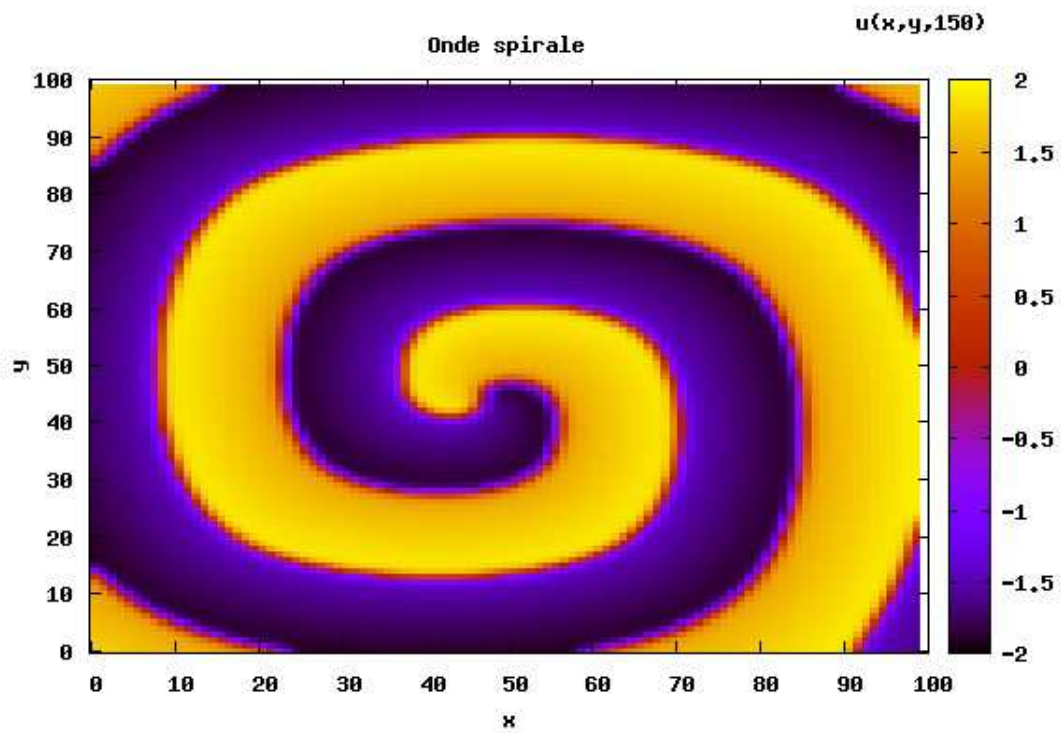


FIG. 17 – Solution onde spirale du système (12), pour f cubique et $c = 0$, obtenue grâce à la condition initiale de la figure 18.

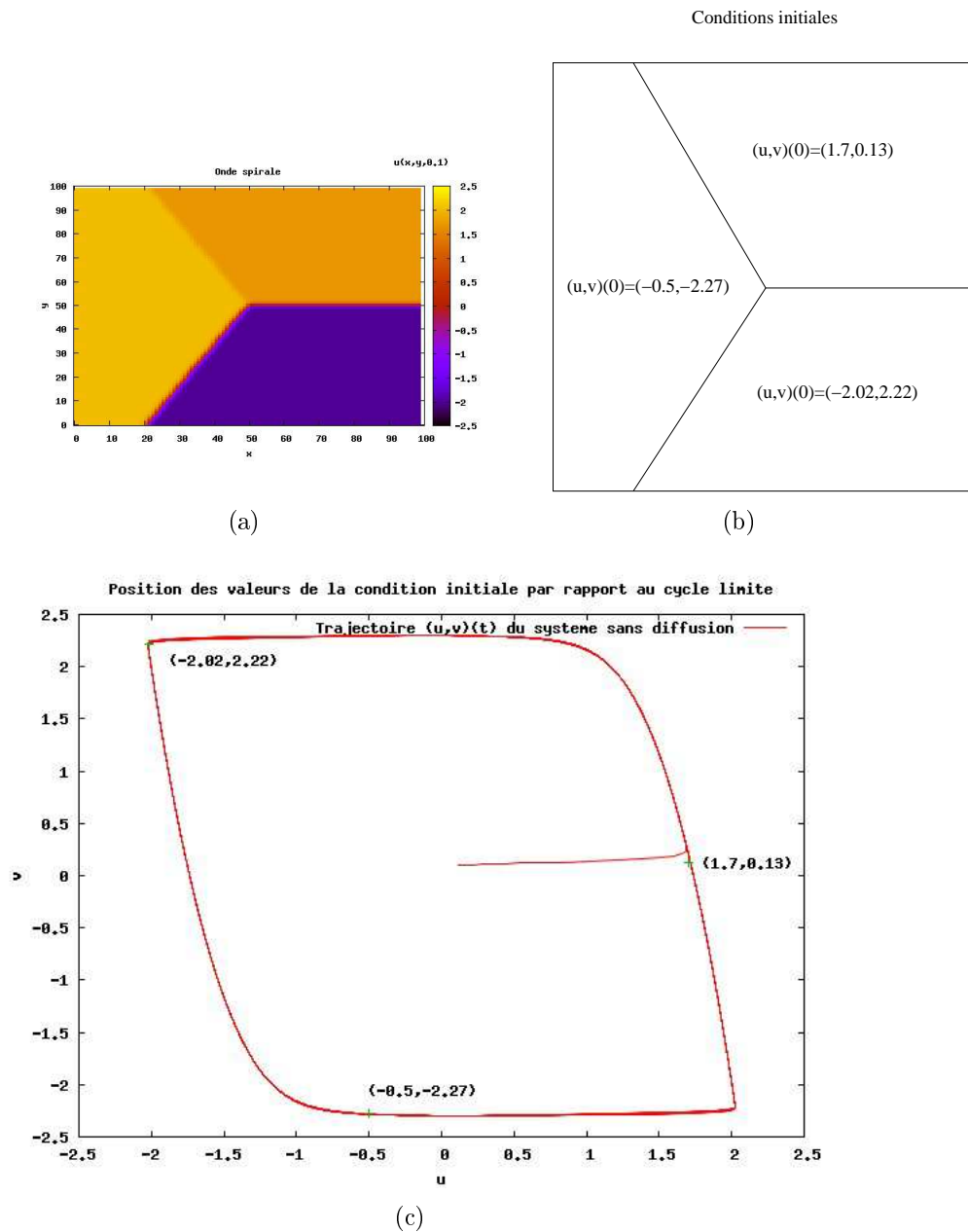


FIG. 18 – Conditions initiales donnant lieu à la spirale.

Comment apparaît cette onde spirale? En observant l'évolution en chaque point de l'espace, on constate que les solutions sont périodiques. Toutes les cellules semblent évoluer asymptotiquement avec la même période. Cette période ($\simeq 3.6$ pour la solution représentée plus haut) est plus courte que celle de la solution du système (1) ($\simeq 5.8$). Chaque cellule évolue asymptotiquement autour d'un cycle limite. Ces cycles limites, plus petits que celui du système sans diffusion (1), varient très peu pour la condition initiale de la figure 18, comme le montre la figure 19. Par contre, si on bouge un peu les conditions initiales, on

observe toujours une onde spirale qui paraît identique, mais en étant plus attentif, on remarque que les cycles limites varient assez nettement (mais la période reste la même $\simeq 3.6$) selon les cellules : plus on s'éloigne des cellules centrales, plus le cycle s'agrandit. Dans les figures 20, 21 et 22, on a représenté cette solution. Cette remarque semble montrer que la spirale de la figure 17 n'est pas un attracteur isolé mais qu'elle fait plutôt partie d'un continuum d'attracteurs.

Les simulations numériques montrent que la propagation des ondes est due au déphasage des cellules selon une configuration donnée. Ainsi, si on a une solution périodique et un déphasage régulier horizontal, on observe une propagation d'onde horizontale. Le sens de la propagation se faisant des cellules les plus en avance vers les cellules les plus en retard. Compte tenu de notre condition initiale, on comprend que l'on puisse avoir des propagations d'ondes dans le sens contraire des aiguilles d'une montre car cela correspond à la position des conditions initiales sur le cycle limite. Et en fait, pour changer ce sens, il suffit de permuter deux des valeurs de la condition initiale. Mais pour avoir des ondes spirales, il faut un peu plus. Il faut que l'onde s'auto-entretienne. C'est à dire qu'il faut que l'onde fasse un tour, puis recommence un autre. Au niveau des phases, il faut qu'elles se suivent régulièrement selon la configuration spirale, c'est à dire qu'à la fin du tour de l'onde, les cellules suivantes oscillent avec le retard juste nécessaire pour que l'onde puisse continuer. C'est dans cette optique qu'ont été choisies les conditions initiales. Quant au fait que la propagation ait lieu de l'intérieur vers l'extérieur, on peut l'expliquer intuitivement de la manière suivante. On a vu que dans notre cas la période du système avec diffusion est plus courte que celle du système sans diffusion. Les cellules d'abord les plus touchées par la diffusion sont les cellules centrales. Elles vont donc réduire leur période, et prendre de l'avance dans l'espace des phases, impliquant une direction d'ondes de l'intérieur vers l'extérieur. Il y a donc un impact sur le déphasage lié à l'éloignement au centre, et un déphasage lié à la position des solutions initiales sur le cycle limite de (1). Le déphasage dans ces deux directions se retrouve dans la configuration spirale. Enfin, on constate sur ces simulations numériques, l'effet régulateur de la diffusion : les cellules démarrant initialement avec trois positions distinctes se rapprochent progressivement les unes des autres, jusqu'à aboutir à une configuration périodique stable où chacune d'elle évolue selon son cycle limite.

Remarque 3. *On peut faire le lien avec la notion d'isochrone, les constantes des conditions initiales sont en effet choisies de telle sorte que leur phase asymptotique soit distincte de $\frac{T}{3}$ où T est la période du cycle limite de (1)*

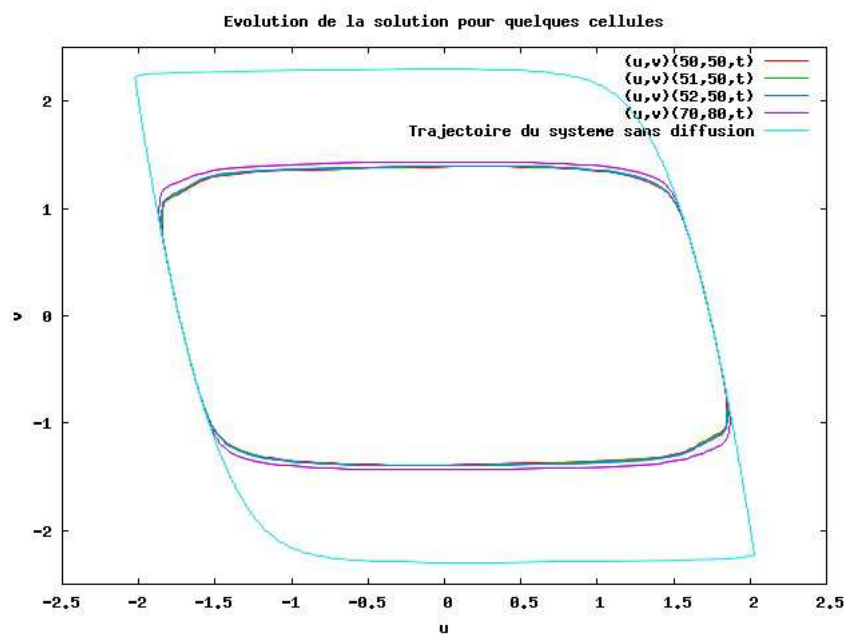
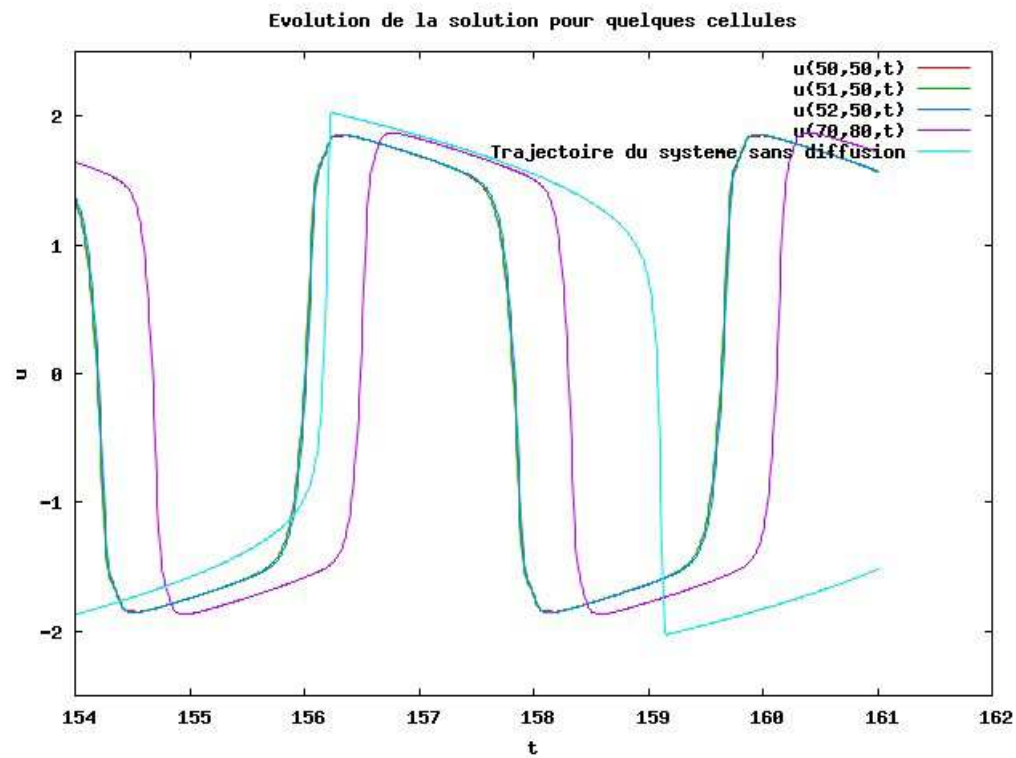


FIG. 19 – Evolution de la solution onde spirale en quelques points de l'espace fixés.

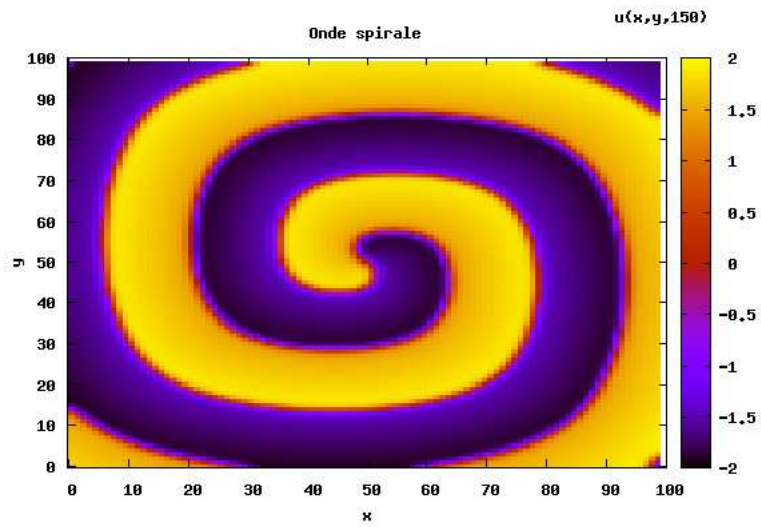


FIG. 20 – Solution onde spirale du système (12), pour f cubique et $c = 0$, obtenue grâce à la condition initiale de la figure 21.

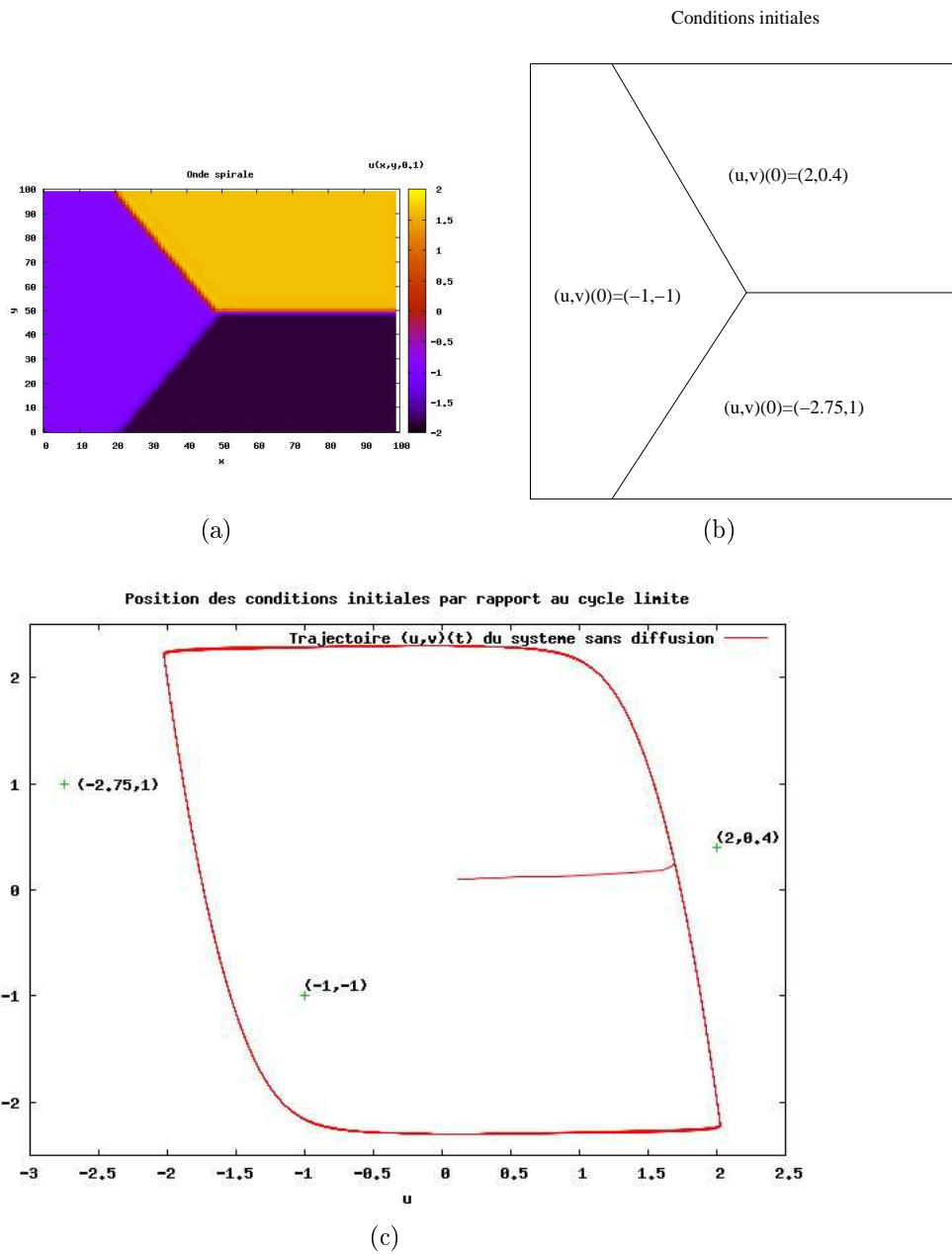


FIG. 21 – Conditions initiales donnant lieu à la spirale.

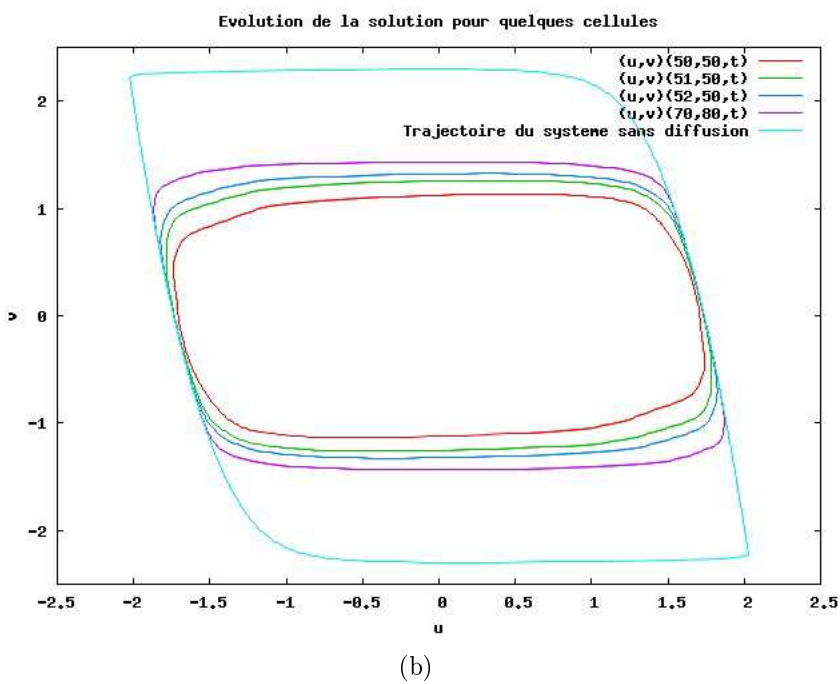
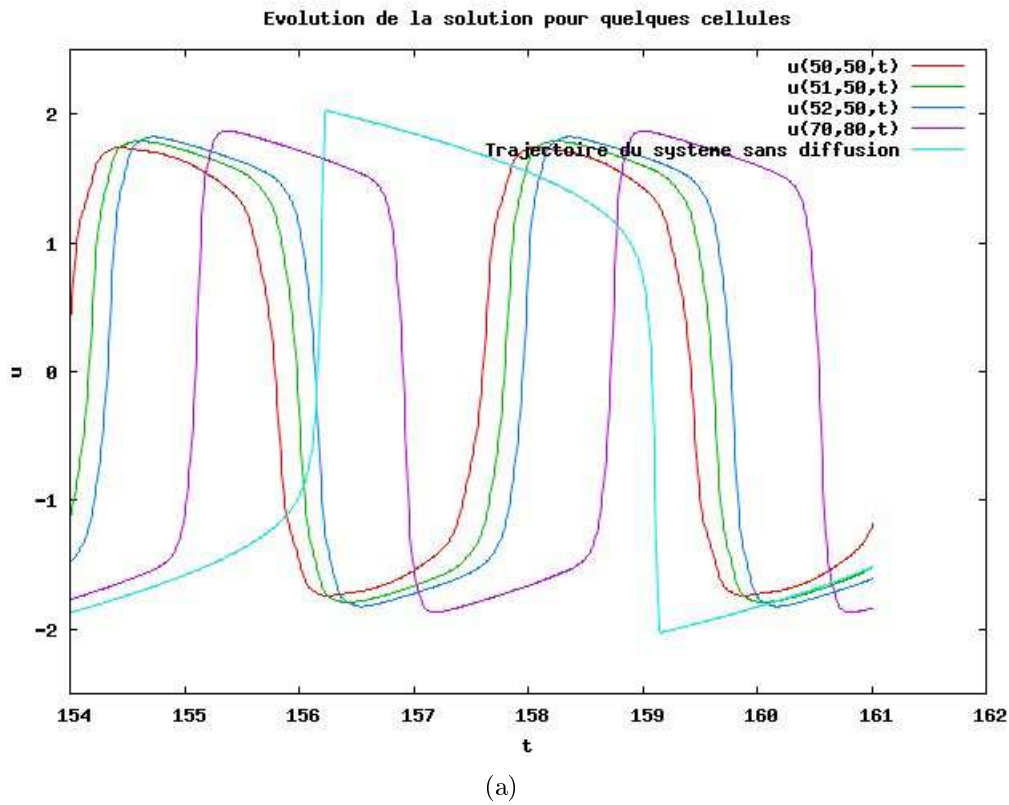


FIG. 22 – Evolution de la solution onde spirale en quelques points de l'espace fixés.

Propagation d'ondes

En ajoutant une condition de Dirichlet, on peut créer des déphasages dans les solutions et ainsi des fronts d'ondes. Par exemple, en prenant une condition de Dirichlet sur un des bords et des conditions de Neumann sur les autres, on obtient des fronts d'ondes. On s'est intéressé principalement à des situations où l'on ne prend que des conditions aux bords de Neumann. Il est alors difficile d'obtenir asymptotiquement des fronts d'ondes pour le système s'il n'y a pas de réentrée de l'onde comme par exemple dans le cas précédent. A terme toutes les cellules se synchronisent. Par exemple, on peut séparer le domaine en deux et prendre une condition initiale constante par morceaux sur chaque partie. On prend sur chaque partie des conditions initiales qui ne sont pas diamétralement opposées sur le cycle. Alors on observe au départ, des déphasages qui s'apparentent à des propagations d'ondes mais les cellules se synchronisent progressivement, et asymptotiquement elles sont toutes en phase. Un cas intéressant, est celui où les conditions initiales sont diamétralement opposées. Alors compte tenu de la symétrie du système, chaque cellule évolue en opposition de phase avec sa symétrique par rapport à la frontière des deux demi-domaines initiaux. A l'intérieur des deux demi-domaines, le déphasage entre les cellules est petit. Visuellement on peut difficilement parler de propagation d'ondes mais plutôt d'oscillations en opposition de phase. A noter que les cellules n'évoluent pas selon le même cycle limite, mais que les cycles s'aggrandissent en s'éloignant de la frontière des deux demi-domaines. Ces observations sont illustrées sur les figures 23, 24, 25, on a intitulé cette solution 'Miroir'. Bien sûr, cette configuration n'est pas stable, et une perturbation de la condition initiale implique que la solution tend asymptotiquement vers une solution où toutes les cellules sont en phase, après un passage vers des états transitoires de type propagation d'ondes. Dans la suite, on étudie analytiquement un système de deux oscillateurs couplés de type $\lambda - \omega$. Ce système a un comportement très analogue aux solutions décrites ici.

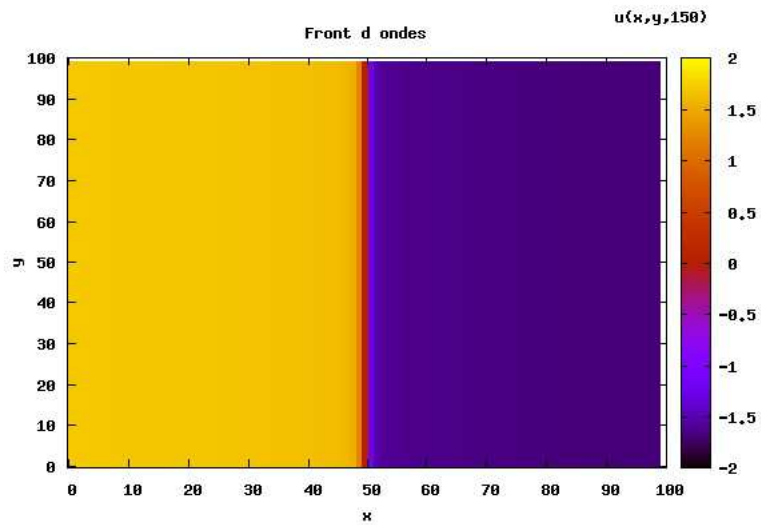


FIG. 23 – Solution ‘Miroir’ du système (12), pour f cubique et $c = 0$, obtenue grâce à la condition initiale de la figure 24.

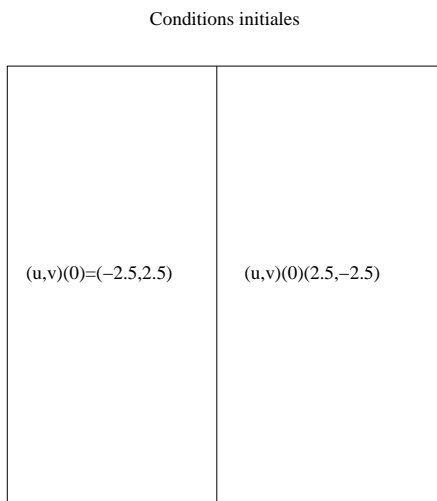


FIG. 24 – Conditions initiales donnant lieu à la solution ‘Miroir’.

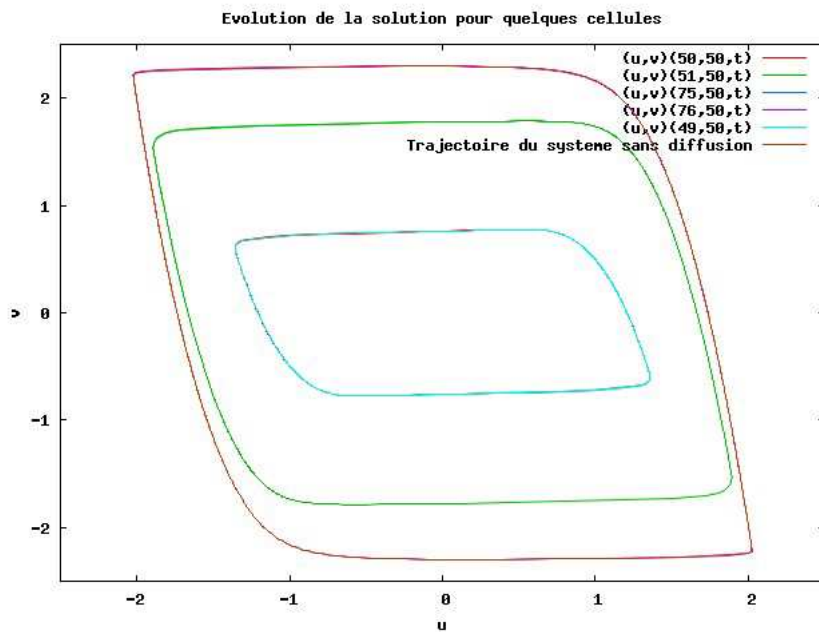
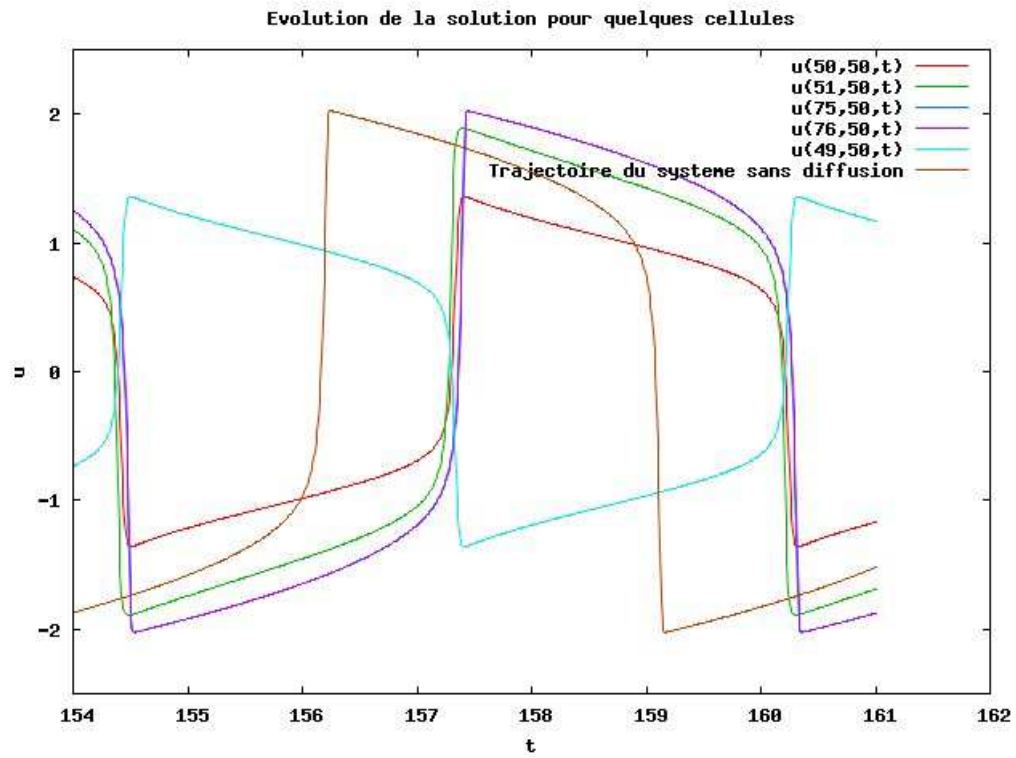


FIG. 25 – Evolution de la solution ‘Miroir’ en quelques points de l’espace fixés.

Plusieurs ondes spirales

Si au lieu de diviser le domaine en trois, on le divise en quatre, et que l'on prend comme condition initiale une fonction $(u(0), v(0))$ constante sur chacune des quatre divisions du domaine de telle sorte que ces valeurs soient régulièrement réparties sur le cycle limite (voir 26a)), on obtient également une spirale. Puis au lieu de diviser en quatre, on peut diviser en 16 et reproduire la configuration précédente symétriquement. On peut ainsi obtenir 4 spirales. Renouvelant l'opération on peut avoir 16 spirales (figure 26)¹⁰.

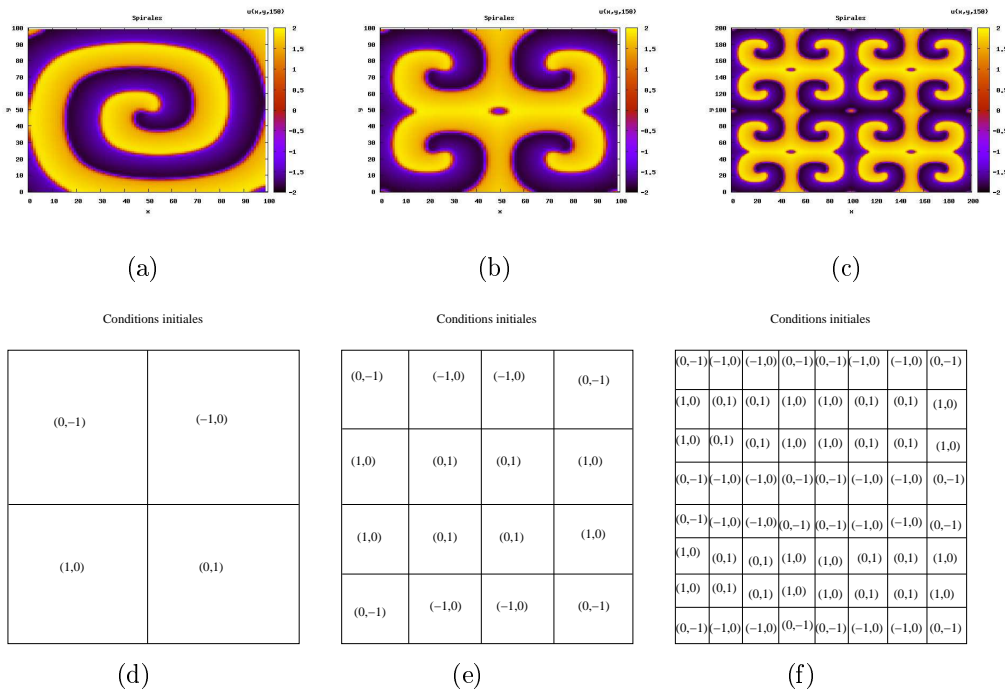


FIG. 26 – Plusieurs ondes spirales solutions du système (12) ainsi que les conditions initiales correspondantes.

Persistence et déformation des spirales lorsque l'on fait dépendre c de x

Si on fait maintenant dépendre c de x , de telle sorte que c reste entre -1 et 1 pour que toutes les cellules soient oscillantes, ou mêmes facilement excitables (c'est à dire c proche de -1 et $c \leq -1$), les spirales persistent dans de nombreux cas. On peut obtenir des spirales déformées, des spirales dont le centre bouge jusqu'à sortir du domaine, des spirales dont le centre bouge de manière périodique. On peut cependant observer dans ces cas que les cellules n'évoluent plus forcément autour d'un cycle limite comme c'était le cas précédemment. Les trajectoires peuvent être plus complexes. Nous n'avons pas étudié

¹⁰La figure c) a été réalisée sur une discrétisation de 200×200 cellules. Les spirales sont donc exactement les mêmes que dans le cas précédent.

l'impact des changements de c sur la forme des spirales d'une manière systématique et approfondie. Cela constitue une éventuelle perspective. Cependant, la prédominance du jaune (valeurs proches de 2) de certaines spirales est due à la prédominance de valeurs de c positives. Pour ces valeurs de c , le cycle limite est plus ample à droite qu'à gauche ce qui augmente la durée du plateau (pour u) pour les valeurs positives relativement à celle du plateau pour les valeurs négatives, entraînant une prédominance de jaune. Le mouvement du centre des spirales est sans doute lié à la durée des périodes des cycles, raccourcies pour les valeurs de c proches de 0. Quelques spirales déformées sont illustrées ci dessous. La figure 27 a) est obtenue en prenant $c = 0.75$ sur quelques cellules au centre, et $c = 0$ ailleurs, tandis que la figure 27 b) est obtenue en prenant $c = -0.75$ sur un rectangle qui part du centre vers la gauche. Dans ce dernier cas la spirale observée fait des aller-retours périodiques le long de ce rectangle.

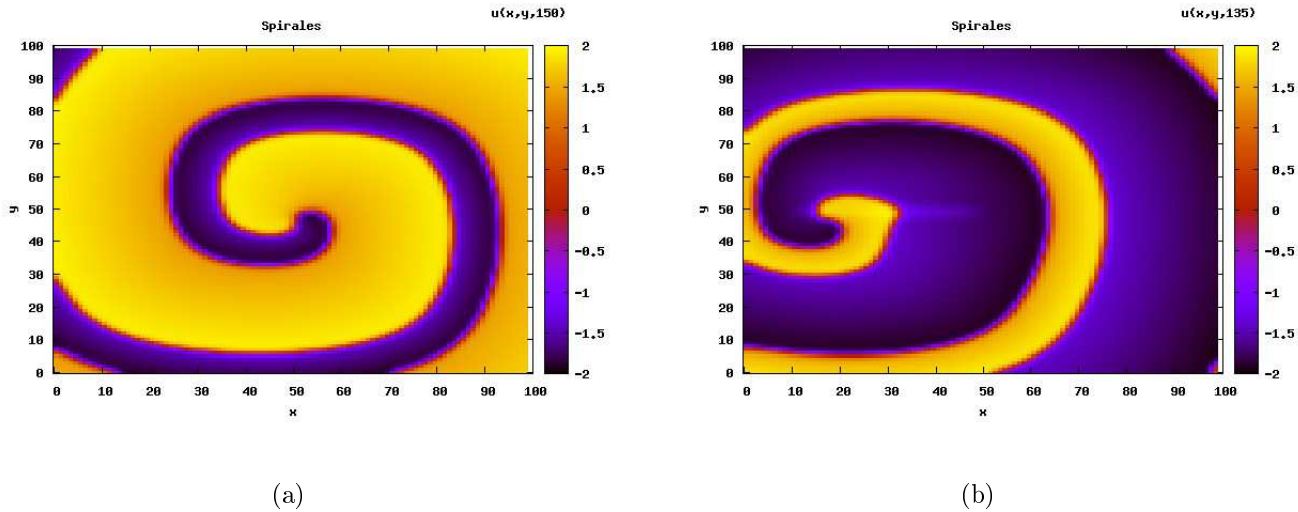


FIG. 27 – Ondes spirales solutions du système (12) obtenues pour différentes valeurs de $c(x, y)$.

Ondes spirales dans un milieu excitable

Si l'on remplace la valeur $c = 0$ par la valeur $c = -1.1$, les cellules sont alors dans un état excitable. En prenant des conditions initiales comme celles de la figure 28, on obtient également une spirale. Cette fois, le coeur de la spirale n'est plus fixe mais se déplace dans le domaine. Il convient de noter que l'on n'obtient pas la spirale si l'on reprend exactement les conditions initiales de la figure 18. La différence entre ces deux conditions initiales est que dans celles de la figure 28, la valeur dans le triangle gauche correspond à un état excitable alors que dans celles de la figure 18 elle correspond à un état non excitable qui arrête l'onde. Dans ce cas la solution asymptotique est la solution stationnaire (car $c = -1.1$ correspond à un point stationnaire attractif).

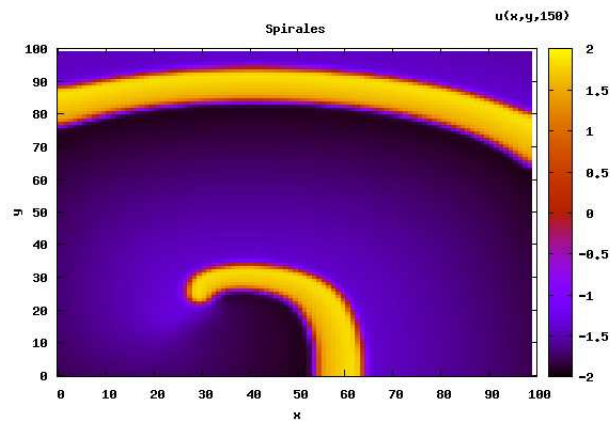
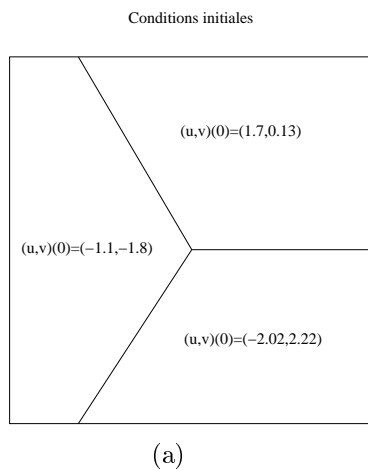


FIG. 28 – Conditions initiales et spirale dans un milieu excitable.

10.2 Le cas $\lambda - \omega$

Le système (8) introduit à la fin de la première partie, constitue un modèle pour les systèmes oscillants. On peut se demander si les spirales apparaissent aussi dans le modèle auquel on rajoute de la diffusion¹¹. Auquel cas, on pourrait s'appuyer sur ce modèle pour mieux comprendre le phénomène. De fait, ce système a beaucoup été étudié et l'émergence de spirales dans ce modèle est connue comme on le verra dans la suite. En tout cas, on retrouve bien les spirales, même si on peut remarquer quelques différences. Dans cette

¹¹Le système $\lambda - \omega$ avec diffusion a été introduit par N.Kopell et L.N. Howard dans l'article [39] comme modèle de base pour les systèmes de réaction-diffusion oscillants.

partie, on s'intéresse donc aux solutions du système :

$$\begin{cases} u_t = \lambda(r)u - \omega(r)v + \Delta u \\ v_t = \lambda(r)v + \omega(r)u + \Delta v \end{cases} \quad (13)$$

avec conditions aux bords de Neumann. On prend $\lambda(r) = 1 - r^2$ et $\omega(r) = \beta r^2$. Sauf mention du contraire, on prendra $\beta = 1$.

Une onde spirale

En utilisant le même procédé que pour le système (12), on obtient également une spirale. À noter que la spirale évolue maintenant de l'extérieur vers l'intérieur. La diffusion a maintenant pour effet de ralentir la période du cycle des cellules par rapport au cycle du système sans diffusion (8) ce qui explique ce phénomène. Voici donc l'analogie de la figure 17 pour le système (13).

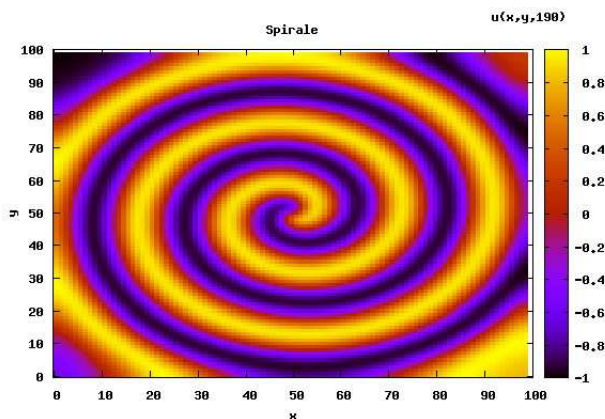


FIG. 29 – Onde spirale solution du système (13).

Plusieurs ondes spirales

Comme pour le système (12), on peut obtenir plusieurs spirales.

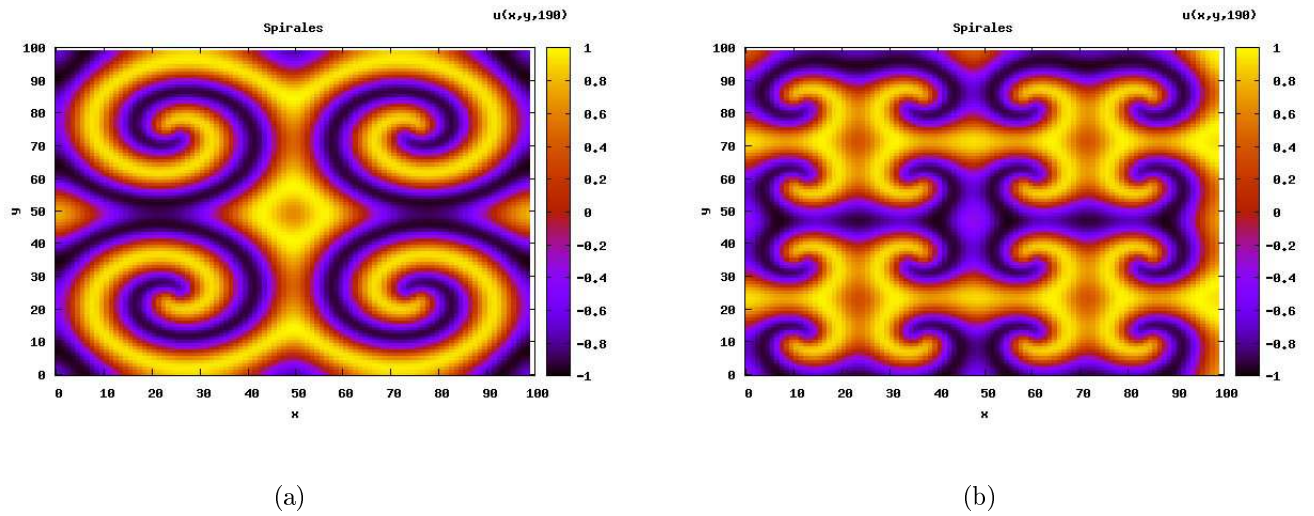
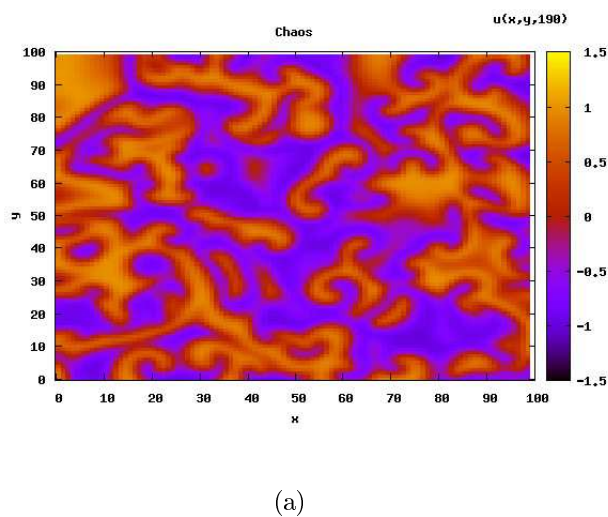


FIG. 30 – Plusieurs ondes spirales solutions du système (13).

Variation de β et Chaos

On peut obtenir une figure chaotique en faisant varier β . Dès que β est trop grand, on perd la spirale. Dans la figure 31, on a représenté le résultat obtenu avec les mêmes conditions initiales que pour la figure 29 mais avec $\beta = 2$. Cette simulation est présentée dans [55], p 354.



(a)

FIG. 31 – Perte de l'onde spirale, solution du système (13) pour $\beta = 2$ et les conditions initiales de la figure 29.

11 Etude de deux oscillateurs couplés de type $\lambda - \omega$

Le système (13) admet une unique solution. Une étude de solutions fortes et faibles est présentée dans [29]. On peut aussi se placer dans le cadre des solutions classiques. Ce système admet une unique solution classique définie pour tout temps. En effet, ce système admet une région invariante (voir [66]), et on peut appliquer alors les théorèmes d'existence et d'unicité de [64]. On fera ce type d'étude pour le système (12) dans la partie suivante. Ici, on s'intéresse à l'approche oscillateurs couplés pour essayer de comprendre ce qui se passe dans (12) et (13). En effet, lorsqu'on discrétise l'espace dans notre schéma aux différences finies, alors chaque cellule évolue selon un oscillateur couplé à ses quatre voisines (dans le cas \mathbb{R}^2) par l'intermédiaire de la diffusion. On peut tenter une étude analytique de ces oscillateurs couplés. On présente ici le cas le plus simple : l'analyse du système (13) discrétisé lorsqu'il n'y a que deux cellules. L'étude analytique, n'utilisant que des outils de base, montre que les deux cellules, vont dans presque tous les cas, se synchroniser asymptotiquement, et évoluer en phase (pas de déphasage entre les deux cellules). Une exception tout de même : si les deux conditions initiales sont opposées, c'est à dire si les deux cellules démarrent en opposition de phase et si elles ont le même rayon, alors ce déphasage de π est conservé et les solutions tendent vers 0. Dans tous les autres cas, les cellules évoluent asymptotiquement en phase autour de leur cycle limite. L'analogie avec la solution 'miroir' de la figure 23 semble pertinente.

11.1 Mise en équation et présentation du comportement du système

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} (u_1)_t = \lambda(r_1)u_1 - \omega(r_1)v_1 + u_2 - u_1 \\ (v_1)_t = \lambda(r_1)v_1 + \omega(r_1)u_1 + v_2 - v_1 \\ (u_2)_t = \lambda(r_2)u_2 - \omega(r_2)v_2 + u_1 - u_2 \\ (v_2)_t = \lambda(r_2)v_2 + \omega(r_2)u_2 + v_1 - v_2 \end{cases} \quad (14)$$

Où on a :

$$r_k = (u_k^2 + v_k^2)^{\frac{1}{2}} \quad k \in \{1, 2\}, \quad \lambda(r) = 1 - r^2, \quad \omega(r) = r^2.$$

Ce système correspond à des conditions aux bords de Neumann.

On passe en coordonnées polaires¹². En passant au plan complexe le système devient :

$$\begin{cases} (u + iv)_{1t} = (\lambda(r_1) + i\omega(r_1))(u + iv)_1 + (u + iv)_2 - (u + iv)_1 \\ (u + iv)_{2t} = (\lambda(r_2) + i\omega(r_2))(u + iv)_2 + (u + iv)_1 - (u + iv)_2 \end{cases}$$

¹²Il convient cependant d'être prudent, puisque ce changement de coordonnées n'est une bijection que de \mathbb{R}^{2*} dans $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. Lorsque qu'on inclut le point $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 , on perd le caractère bijectif puisque ce point est associé à l'ensemble des points de $0 \times]0, 2\pi[$. On va donner le système en coordonnées polaires équivalent à (14). L'équivalence sera valable tant que $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$ (en fait, presque tout le temps). Mais, il sera parfois nécessaire de revenir au système (14).

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} (r_1 e^{i\theta_1})_t = (\lambda(r_1) + i\omega(r_1))(r_1 e^{i\theta_1}) + r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} \\ (r_2 e^{i\theta_2})_t = (\lambda(r_2) + i\omega(r_2))(r_2 e^{i\theta_2}) + r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r_{1t} e^{i\theta_1} + i r_1 \theta_{1t} e^{i\theta_1} = (\lambda(r_1) + i\omega(r_1)) r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} - r_1 e^{i\theta_1} \\ r_{2t} e^{i\theta_2} + i r_2 \theta_{2t} e^{i\theta_2} = (\lambda(r_2) + i\omega(r_2)) r_2 e^{i\theta_2} + r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r_{1t} + i r_1 \theta_{1t} = (\lambda(r_1) + i\omega(r_1)) r_1 + r_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)} - r_1 \\ r_{2t} + i r_2 \theta_{2t} = (\lambda(r_2) + i\omega(r_2)) r_2 + r_1 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} - r_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} r_{1t} = \lambda(r_1) r_1 + r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - r_1 \\ r_1 \theta_{1t} = r_1 \omega(r_1) + r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ r_{2t} = \lambda(r_2) r_2 + r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - r_2 \\ r_2 \theta_{2t} = r_2 \omega(r_2) + r_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r_{1t} = \lambda(r_1) r_1 + r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - r_1 \\ \theta_{1t} = \omega(r_1) + \frac{r_2}{r_1} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ r_{2t} = \lambda(r_2) r_2 + r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - r_2 \\ \theta_{2t} = \omega(r_2) + \frac{r_1}{r_2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}
\end{aligned}$$

On pose $\phi = \theta_2 - \theta_1$. Le système devient alors :

$$\begin{cases} r_{1t} = \lambda(r_1) r_1 + r_2 \cos(\phi) - r_1 \\ r_{2t} = \lambda(r_2) r_2 + r_1 \cos(-\phi) - r_2 \\ \phi_t = \omega(r_2) - \omega(r_1) - \sin(\phi) \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} \right) \\ \theta_{1t} = \omega(r_1) + \frac{r_2}{r_1} \sin(\phi) \end{cases}$$

Une fois connus r_1, r_2 et ϕ , on connaît θ_1 par intégration, on considère donc le système :

$$\begin{cases} r_{1t} = \lambda(r_1) r_1 + r_2 \cos(\phi) - r_1 \\ r_{2t} = \lambda(r_2) r_2 + r_1 \cos(-\phi) - r_2 \\ \phi_t = \omega(r_2) - \omega(r_1) - \sin(\phi) \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} \right) \end{cases}$$

ou encore,

$$\begin{cases} r_{1t} = -r_1^3 + r_2 \cos \phi \\ r_{2t} = -r_2^3 + r_1 \cos \phi \\ \phi_t = r_2^2 - r_1^2 - \sin \phi \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} \right) \end{cases} \quad (15)$$

Le système (14) admet pour solution la solution nulle $r_1 = 0, r_2 = 0$. On ne s'intéresse dans la suite qu'aux autres solutions.

On a le résultat suivant :

Théorème 11. 1. Si $r_1(0) = r_2(0) \neq 0$ alors $\forall t \quad r_1(t) = r_2(t) \neq 0$ et alors :

- si $\phi(0) = 0$, la solution du système (15) est donnée par :

$$\begin{aligned} r_1(t) &= (1 + (r_1(0)^{-2} - 1)e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow 1 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \\ \phi(t) &= 0 \\ \theta_1(t) &= \int_0^t r_1^2(s)ds + \theta_1(0) \end{aligned}$$

- si $\phi(0) = \pi$, la solution du système est donnée par :

$$\begin{aligned} r_1(t) = r_2(t) &= r_1(t) = ((r_1^{-2}(0) + 1)e^{2t} - 1)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \\ \phi(t) &= \pi \\ \theta_1(t) &= \int_0^t r_1^2(s)ds + \theta_1(0) \end{aligned}$$

- si $\phi(0) \notin \{0, \pi\}$, alors :

$$\begin{aligned} \phi(t) &\longrightarrow 0 \pmod{2\pi} \\ r_1(t) = r_2(t) &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

2. Si $r_1(0) \neq r_2(0)$ pour t assez grand $r_1(t) \neq 0$, $r_2(t) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \phi(t) &\longrightarrow 0 \pmod{2\pi} \\ r_1(t) &\longrightarrow 1 \\ r_2(t) &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

On illustre les différents cas du théorème 11, dans la figure 32.

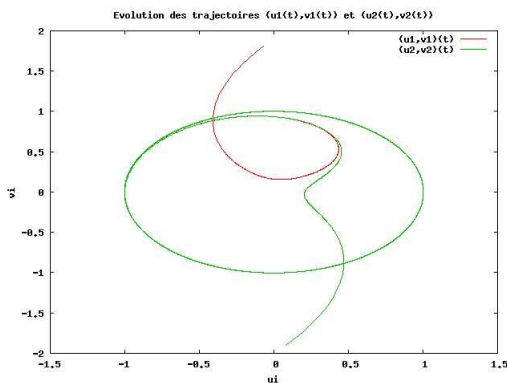
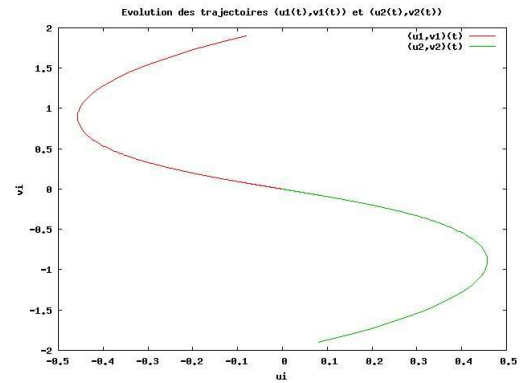
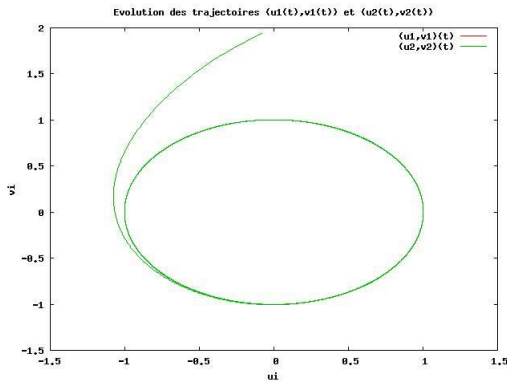


FIG. 32 – Evolution des deux oscillateurs suivant différentes conditions initiales.

Dans la suite, on démontre le théorème 11. Après avoir démontré l'existence et l'unicité de la solution pour tout temps, on étudie d'abord le comportement asymptotique de la solution lorsque $r_1(0) = r_2(0)$ avant de passer au cas où $r_1(0) \neq r_2(0)$. A chaque fois, on essaye d'abord de déterminer le comportement de ϕ puis celui de r_1 et r_2 .

11.2 Existence et unicité des solutions

Lemme 3. *Le système (14) admet une unique solution définie sur \mathbb{R}^+ .*

Démonstration. Soit $X = (u_1, v_1, u_2, v_2)$, on a :

$$(14) \Leftrightarrow X_t = F(X)$$

où F est une fonction C^1 . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir par exemple [34]), il existe une unique solution sur un intervalle $[0, t_0[$. Et pour montrer l'existence et l'unicité de la solution pour tout temps, il suffit de montrer que pour chaque condition initiale donnée X_0 la solution reste dans un compact.

$$\begin{aligned}
\text{Or on a } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|X\|^2 &= -(u_1^2 + v_1^2)^2 - (u_2^2 + v_2^2)^2 + 2u_1u_2 + 2v_1v_2 \\
&\leq -(u_1^2 + v_1^2)^2 - (u_2^2 + v_2^2)^2 + u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \\
&= -(u_1^2 + v_1^2)(u_1^2 + v_1^2 - 1) - (u_2^2 + v_2^2)(u_2^2 + v_2^2 - 1) \\
&< 0 \text{ dès que } \|X\|^2 > 1 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Quelque soit la condition initiale X_0 la solution reste donc contenue dans la boule $B(0, \max(\|X_0\|, \sqrt{1 + \sqrt{2}}))^{13}$. Le système (14) admet ainsi une unique solution de classe C^1 définie sur $[0, +\infty[$. \square

11.3 Comportement des solutions dans le cas où $r_1(0) = r_2(0)$

On a d'abord un lemme qui précise que si $r_1(0) = r_2(0)$ alors $\forall t \ r_1(t) = r_2(t)$ et on peut donc remplacer le système (14) par un système plus simple.

Lemme 4. *Si $r_1(0) = r_2(0) \neq 0$, alors $\forall t \ r_1(t) = r_2(t) \neq 0$ et la solution du système (14) est donnée par l'unique solution du système :*

$$\begin{cases} r_{1t} &= -r_1^3 + r_1 \cos \phi \\ r_2(t) &= r_1(t) \\ \phi_t &= -2 \sin \phi \end{cases}$$

Démonstration. On montre d'abord que le système précédent admet une unique solution définie pour tout temps et telle que le rayon ne s'annule pas. Cette solution est alors, par équivalence des systèmes, l'unique solution du système (14).

Si on se donne $r_1(0)$ et $\phi(0)$, ce système admet une unique solution définie sur \mathbb{R}^+ . En effet, la fonction donnant r_{1t} et ϕ_t en fonction de r_1 et ϕ est de classe C^1 , donc l'équation admet une unique solution sur un certain intervalle de temps. Par ailleurs, les trajectoires sont bornées et le rayon ne s'annule pas. En effet, par unicité de la solution et puisque $r_{1t} < 0$ dès que $r_1 > 1$, on a pour tout t , $0 < r_1(t) < \max(r_1(0), 1)$. D'autre part, comme $\phi_t < 0$ si $\phi \in]0, \pi[$, on a que $\phi(t) \in]0, \pi[$ si $\phi(0) \in]0, \pi[$. De même, comme $\phi_t > 0$ si $\phi \in]\pi, 2\pi[$, on a que $\phi(t) \in]\pi, 2\pi[$ si $\phi(0) \in]\pi, 2\pi[$. Pour chaque condition initiale donnée, la solution reste dans un compact, les solutions sont donc définies pour tout temps. Maintenant, la solution de ce système est également solution du système initial (14) avec des conditions initiales vérifiant $r_1(0) = r_2(0)$. Or le système (14) admet une unique solution. Donc, si $r_1(0) = r_2(0)$, alors $r_1(t) = r_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. \square

Cas où $\phi(0) = 0$

Dans le cas où $\phi(0) = 0$, on a une solution explicite donnée par le lemme suivant.

Lemme 5. *Si $\phi(0) = 0$, alors l'unique solution de (15) est donnée par :*

$$\begin{cases} r_1(t) &= (1 + (r(0))^{-2} - 1)e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \\ \phi(t) &= 0 \end{cases}$$

¹³ $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|X\|^2 = -a(a-1) - b(b-1)$ or $a(a-1) > \frac{1}{4}$ donc $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|X\|^2 < 0$ dès que $\max(a(a-1), b(b-1)) > \frac{1}{4}$ donc dès que $\max(a, b) > \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Démonstration. Si $\phi(0) = 0$, alors l'unique solution de $\phi_t = -2 \sin \phi$ est donnée par $\phi(t) = 0$.

On cherche alors $r_1(t)$ solution de : $r_{1t} = -r_1^3 + r_1$.

Cette équation est une équation de type Ricatti que l'on peut résoudre explicitement. On rappelle que $r_1(t) > 0$.

$$\begin{aligned}
r_{1t} = -r_1^3 + r_1 &\Leftrightarrow r_1^{-3} r_{1t} = -1 + r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(r_1^{-2})_t = -1 + r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}z_t = -1 + z \text{ où } z = r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow z_t = 2 - 2z, z = r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow z(t) = (z(0) - 1)e^{-2t} + 1, z = r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow r_1(t) = ((r_1^{-2}(0) - 1)e^{-2t} + 1)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On donne ici une autre preuve du fait que $r_1 \rightarrow 1$ dans ce cas, car c'est ce type de preuve qui sera utilisé dans la suite.

On va montrer que $\forall \epsilon$ donné $r_1(t) \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$ pour t assez grand. Si $r_1(t) \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$ alors il y reste puisque $r_{1t} > 0$ si $r_1 = 1 - \epsilon$ et $r_{1t} < 0$ si $r_1 = 1 + \epsilon$. Sinon, si $r_1 < 1 - \epsilon$ alors $\exists \mu$ tel $r_{1t} > \mu > 0$ tant que $r_1 < 1 - \epsilon$ et donc r_1 atteint $1 - \epsilon$ en un temps fini. Le cas $r_1 > 1 + \epsilon$ est similaire. On aurait aussi pu utiliser le fait $(r_1 - 1)^2$ est une fonction de Lyapunov. \square

Cas où $\phi(0) = \pi$

Dans ce cas, on a comme dans le cas précédent, une solution explicite donnée par le lemme suivant.

Lemme 6. *Si $\phi(0) = \pi$, alors l'unique solution de (15) est donnée par :*

$$\begin{cases} r_1(t) &= r_1(t) = ((r_1^{-2}(0) + 1)e^{2t} - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ \phi(t) &= \pi \end{cases}$$

Démonstration. C'est la même démonstration que pour le lemme précédent. Si $\phi(0) = \pi$, alors l'unique solution de $\phi_t = -2 \sin \phi$ est donnée par $\phi(t) = \pi$.

On cherche alors $r_1(t)$ solution de : $r_{1t} = -r_1^3 - r_1$

Cette équation est une équation de type Ricatti et on peut la résoudre explicitement. On rappelle que $r_1(t) > 0$.

$$\begin{aligned}
r_{1t} = -r_1^3 - r_1 &\Leftrightarrow r_1^{-3} r_{1t} = -1 - r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(r_1^{-2})_t = -1 - r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}z_t = -1 - z \text{ où } z = r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow z_t = 2 + 2z, z = r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow z(t) = (z(0) + 1)e^{2t} - 1, z = r_1^{-2} \\
&\Leftrightarrow r_1(t) = ((r_1^{-2}(0) + 1)e^{2t} - 1)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

\square

Cas où $\phi(0) \notin \{0, \pi\}$

Dans ce cas, la solution n'est plus donnée explicitement mais on peut prouver ce qui se passe asymptotiquement. On montre d'abord que $\phi \rightarrow 0$ puis que $r_1 \rightarrow 1$.

Lemme 7. Si $\phi(0) \notin \{0, \pi\}$ alors,

si $\phi(0) \in]0, \pi[$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0$,

si $\phi(0) \in]\pi, 2\pi[$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 2\pi$, et

$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_1(t) = 1$.

Démonstration. On suppose donc $\phi(0) \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Comme $\phi_t = -2 \sin \phi$, on peut faire le même raisonnement que plus haut. Pour tout ϵ donné, si $\phi \in]-\epsilon, \epsilon[$ elle y reste. Sinon, si $\phi \in]\epsilon, \pi[$ alors $\exists \mu$ tel $\phi_t = -2 \sin \phi < -\mu < 0$ tant que $\phi > \epsilon$ et donc ϕ atteint ϵ en un temps fini. Le cas $\phi \in]\pi, -\epsilon[$ se traite de manière similaire.

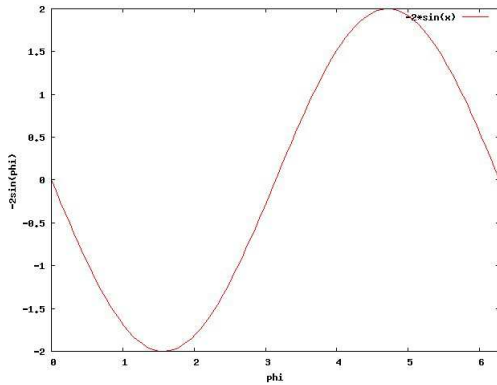


FIG. 33 – Courbe représentative de ϕ_t suivant les valeurs de ϕ : si $\phi \in]0, \pi[$ $\phi_t = -2 \sin(\phi) < 0$, si $\phi \in]\pi, 2\pi[$ $\phi_t > 0$.

On montre maintenant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} r_1 = 1$.

On a :

$r_{1t} = -r_1^3 + r_1 \cos \phi$ où $\phi \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$.

Donc,

$$\begin{aligned} r_{1t} \geq 0 &\Leftrightarrow -r_1^3 + r_1 \cos \phi \geq 0 \\ &\Leftrightarrow r_1 \leq (\cos \phi)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour ϕ fixé, r_{1t} est une cubique (comme fonction de r_1) de racines $\pm(\cos \phi)^{\frac{1}{2}}$ et 0. La démonstration est maintenant analogue à celle utilisée dans le cas $\phi = 0$. Soit $\epsilon > 0$. On montre que pour t assez grand $r_1 \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$.

Comme $\cos \phi \rightarrow 1$, pour t assez grand, $\sqrt{\cos \phi} \in]1 - \frac{\epsilon}{2}, 1 + \frac{\epsilon}{2}[$. Pour $r_1 = 1 - \epsilon$ on a $r_{1t} > 0$, pour $r_1 = 1 + \epsilon$, on a $r_{1t} < 0$, donc dès que $r_1 \in]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$, r_1 reste dans $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$.

Maintenant, si $r_1 \notin]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$. Alors, si $r_1 < 1 - \epsilon$, $r_1 < 1 - \epsilon < 1 - \frac{\epsilon}{2} < \sqrt{\cos \phi}$ et donc $\exists \mu > 0$ tel que $r_{1t} > \mu$ tant que $r_1 < 1 - \epsilon$ donc r_1 atteint $1 - \epsilon$ en un temps fini. Le cas $r_1 > 1 + \epsilon$ est similaire.

□

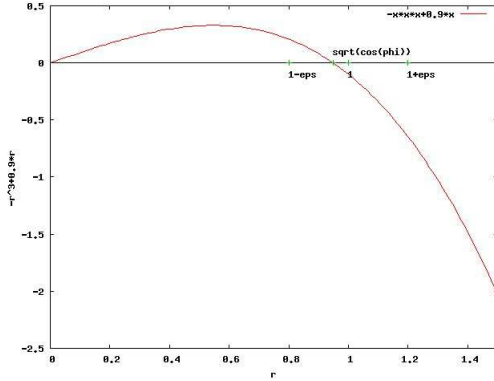


FIG. 34 – Courbe représentative de r_{1t} suivant les valeurs de r_1 : $\forall \epsilon > 0$, pour t assez grand, $\exists \mu > 0$ tel que $r_{1t} > \mu$ tant que $r_1 < 1 - \epsilon$.

11.4 Comportement des solutions dans le cas où $r_1(0) \neq r_2(0)$

Dans le cas où $r_1(0) \neq r_2(0)$, les démonstrations sont légèrement plus compliquées mais on montre également que l'on a le comportement asymptotique suivant.

Lemme 8. Si $r_1(0) \neq r_2(0)$,
alors

$$\begin{aligned} \phi(t) &\longrightarrow 0 \pmod{2\pi} \\ r_1(t) &\longrightarrow 1 \\ r_2(t) &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Démonstration. On va d'abord montrer que $\phi(t)$ tend vers $0 \pmod{2\pi}$. On montrera ensuite que r_1 et r_2 tendent vers 1. Pour montrer que ϕ tend vers 0, on étudie le signe de ϕ_t et on cherche à montrer que quelque soit ϵ donné, $|\phi| < \epsilon$ pour t assez grand. On suppose $r_2 > r_1$. On a $\phi_t = r_2^2 - r_1^2 - \sin \phi \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 r_2} \right)$
Donc,

$$\begin{aligned} \phi_t < 0 &\Leftrightarrow \sin \phi > \frac{(r_2^2 - r_1^2)r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \\ &\Leftrightarrow \phi \in] \arcsin \left(\frac{(r_2^2 - r_1^2)r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \right), \pi - \arcsin \left(\frac{(r_2^2 - r_1^2)r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \right) [\end{aligned}$$

et en posant $f(r_1, r_2) = \frac{(r_2^2 - r_1^2)r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2}$,
on a :

$$\phi_t < 0 \Leftrightarrow \phi \in] \arcsin f, \pi - \arcsin f [.$$

On a ici utilisé le système sous la forme (15), cependant il est possible d'avoir $r_1(t_1) = 0$ pour un certain t_1 . Et nos deux systèmes (14) et (15) ne sont alors plus équivalents (on a alors $\phi_t(t_1)$ qui n'est pas définie). En fait, cela ne pose pas vraiment de problème, car dans ce cas (14) est bien défini, et on va voir que pour t assez grand $r_1(t) > 0$, on pourra donc raisonner sur le système (15). On remarque d'abord que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (r_2^2(t) - r_1^2(t)) = 0$$

En effet, si $r_1(0) < r_2(0)$ (resp. $r_1(0) > r_2(0)$), alors par unicité de la solution $r_1(t) < r_2(t)$ (resp. $r_1(t) > r_2(t)$). On considère le cas $r_1(0) < r_2(0)$.

On a, $(r_2^2 - r_1^2)_t = -2(r_2^4 - r_1^4) < 0$. Donc $(r_2^2 - r_1^2)(t)$ est décroissante minorée par 0, donc elle converge. Et elle converge nécessairement vers 0¹⁴ (ce raisonnement est valable pour le système (14)).

Comme on a $f(r_1, r_2) = \frac{(r_2^2 - r_1^2)r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} < \frac{(r_2^2 - r_1^2)(r_1^2 + r_2^2)}{2(r_1^2 + r_2^2)} < \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2}$,

on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(r_1, r_2) = 0.$$

Maintenant, soit $1 > \epsilon > 0$ et t_0 tel que $\forall t > t_0$ $(r_2^2 - r_1^2)(t) < \epsilon$.

Supposons d'abord que $\phi(t_0) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors dans ce cas, $r_1(t) > 0$ pour $t > t_0$.

En effet, tant que $r_1 \neq 0$, $\phi(t) \in]-\frac{\pi}{2} + \beta, \frac{\pi}{2} - \beta[$ pour un certain $\beta > 0$, car alors $\phi_t < 0$ si $\phi(t_0) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\phi_t > 0$ si $\phi(t_0) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Et alors $r_{1t} = -r_1^3 + r_2 \cos \phi > -r_1^3 + r_2 \cos \beta > 0$ dès que $r_2 > \frac{r_1^3}{\cos \beta}$. Ceci empêche donc $r_1(t)$ de s'annuler, compte tenu du fait que $r_2 > r_1$.

Montrons maintenant que $\phi(t)$ tend vers 0.

Pour $t > t_0$, on a $f(r_1, r_2) < \frac{\epsilon}{2}$.

Et alors si $\phi(t_0) \in]-\epsilon, \epsilon[$ alors compte tenu du signe de ϕ_t elle y reste. Si $\phi(t_0) \in [\epsilon, \frac{\pi}{2}]$, alors $\phi(t)$ finit par atteindre ϵ , puisqu'alors $\phi_t < -\mu$ tant que $\phi(t) \in [\epsilon, \frac{\pi}{2}]$. De même si $\phi(t_0) \in]-\frac{3\pi}{2}, -\epsilon[$ alors $\phi(t)$ finit par atteindre $-\epsilon$. On a donc montré que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0 \pmod{2\pi}$ dans le cas où $\phi(t_0) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On traite maintenant le cas où $\phi(t_0) \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Il est alors possible d'avoir $r_1(t_1) = 0$ pour un certain t_1 . Mais alors en regardant le système (14), on remarque que $\phi(t_1 + h) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour h assez petit (la trajectoire (u_1, v_1) passe d'un demi-plan au demi-plan opposé, il y a une discontinuité pour ϕ), et on est ramené au cas déjà traité.

Maintenant,

- si $\phi(t_0) \in]\frac{\pi}{2}, \pi - \epsilon[$, alors $\forall t > t_0$ $\phi_t < 0$ et $\exists t_1$ tel que $\phi(t_1) = \frac{3\pi}{2}$. On est ramené au cas précédent.
- Si $\phi(t_0) \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, alors, $\exists t_1$ tel que $\phi(t_1) = \frac{3\pi}{2}$. On est ramené au cas précédent.
- Si $\phi(t_0) \in]\pi - \epsilon, \pi[$ alors soit $\phi \rightarrow \pi$ (et $\phi < \pi$), soit on peut se ramener aux cas précédents (en changeant de ϵ). Mais si $\phi \rightarrow \pi$, alors on va voir ci dessous que $\exists t_1$ tel que $r_1(t_1) = 0$ et on est ramené au cas précédent. La fonction ϕ ne tend donc pas vers π .

Reste à montrer que si $\phi \rightarrow \pi$, alors $\exists t_1$ tel que $r_1(t_1) = 0$. Et donc ϕ ne peut pas tendre vers π , puisqu'on a vu qu'alors $\phi(t_1 + h) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Lorsque $\phi = \pi$ le champ de vecteurs associé à (15) semble indiquer que $R(t) = (r_1(t), r_2(t))$ tend vers $J = (-1, 1)$. Dans notre cas, on a $r_2 > r_1 \geq 0$ (car $r_1 = u_1^2 + v_1^2$, pour (15) cela se traduit par un saut de ϕ pour la valeur $r_1 = 0$, qui empêche r_1 de devenir strictement négatif). Mais on va montrer que pour t assez grand $\|R - J\|$ décroît et que R ne tend pas vers 0, ce qui implique que la trajectoire atteint l'axe $r_1 = 0$ car elle ne peut pas sortir par ailleurs.

Finalement, il reste à montrer que pour ϕ assez proche de π , R ne tend pas vers 0 et $\|R - J\|_t < 0$ pour t assez grand.

¹⁴Sinon, $\exists (r_2^2 - r_1^2)_t < -\alpha$ pour t assez grand, donc $r_2^2 - r_1^2 \rightarrow -\infty$ ce qui contredit le fait que $r_2 > r_1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|R - J\|_t &= \frac{1}{\|R - J\|}((r_1 + 1)r_{1t} + (r_2 - 1)r_{2t}) \\ &= \frac{1}{\|R - J\|}((r_1 + 1)(-r_1^3 + r_2 \cos \phi) + (r_2 - 1)(-r_2^3 + r_1 \cos \phi))\end{aligned}$$

Si $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ alors,

$r_1^3 - r_2 \cos \phi - r_2^3 + r_1 \cos \phi = (r_2 - r_1)(-\cos \phi - (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)) > 0$ dès que ϕ est assez proche de π .

Donc, $r_1^3 - r_2 \cos \phi > r_2^3 - r_1 \cos \phi$,

donc $(r_1 + 1)(r_1^3 - r_2 \cos \phi) > (1 - r_2)(r_2^3 - r_1 \cos \phi)$ (car $(1 + r_1) > (1 - r_2)$),

donc $(r_1 + 1)(-r_1^3 + r_2 \cos \phi) + (r_2 - 1)(-r_2^3 + r_1 \cos \phi) < 0$,

et $\|R - J\|_t < 0$.

Et comme $r_{2t} = -r_2^3 - r_1 \cos \phi < -\frac{1}{8} < 0$ tant que $r_2 > \frac{1}{2}$ r_2 finit par atteindre l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$ Mais r_1 ne peut pas tendre vers 0. En effet, si ϕ_1 est un réel tel que $\cos \phi < \cos \phi_1 < 0$, alors $r_2(\cos \phi - \cos \phi_1) < r_1(\cos \phi - \cos \phi_1)$ (c'est à dire que la différence des deux vecteurs dérivées se situe dans le plan $v > u$). Cela implique que pour $r_2 > r_1 > 0$ les trajectoires de (15) sont à l'intérieur des trajectoires du système obtenu en posant $\phi = \phi_1$ fixé dans (15). Mais $(0, 0)$ est un noeud pour ce système et les seules solutions qui tendent vers 0 sont les solutions telles que $r_1 = r_2$. Donc, comme on a $r_2 > r_1$, la trajectoire ne peut pas tendre vers 0.

On a donc montré que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0$.

On va maintenant montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} r_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} r_2(t) = 1$.

$$\begin{cases} r_{1t} = 0 \\ r_{2t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r_1 = r_2 = \sqrt{\cos(\phi)}$$

Soit $R = (r_1, r_2)$, $I = (1, 1)$, $S = (s, s) = (\sqrt{\cos(\phi)}, \sqrt{\cos(\phi)})$ et $D = \{R/r_2 > r_1 > 0\}$.

Si ϕ était égal à 0, on pourrait montrer en partageant le domaine (r_1, r_2) de manière adéquate que $\|R - I\|$ est une fonction de Lyapunov. Comme ϕ est pour t assez grand aussi proche de 0 que l'on veut, on peut s'appuyer sur la même idée pour montrer que pour t assez grand R reste contenu dans une boule de centre I et de rayon aussi petit que l'on veut. Cette démonstration s'appuie sur l'intuition suggérée par la figure 35.

Soit donc $\epsilon > 0$.

Pour t assez grand, $S \in B(I, \frac{\epsilon}{2})$.

Tout d'abord, comme on l'a vu, les valeurs de r_{1t} et r_{2t} montrent que les trajectoires sont dans un compact. Ensuite, on va montrer que pour t assez grand et $R \in D \cap \mathcal{C}B(I, \epsilon)$, $\|R - I\|_t = \frac{1}{\|R - I\|}(R - I) \cdot R_t < 0$. Ceci impliquant que pour t assez grand, $R \in B(I, \epsilon)$ ¹⁵, car la trajectoire ne peut pas sortir par un autre endroit.

Pour cela, on partage le domaine D , suivant les signes de $r_1 - 1, r_{1t}, r_2 - 1$ et r_{2t} . Dans la majorité des cas on utilise juste le fait que le vecteur R_t pointe en direction de I

Soit :

¹⁵C'est le même raisonnement que pour une fonction de Lyapunov classique

- $A = \{R \in D - B(I, \epsilon) / (r_{1t} > 0) \cap (r_{2t} \leq 0)\} = \{R \in D - B(I, \epsilon) / (r_2 > \frac{r_1^3}{\cos \phi}) \cap (r_1 \leq \frac{r_2^3}{\cos \phi})\}$
- $B = \{R \in D - B(I, \epsilon) / (r_{1t} \leq 0) \cap (r_{2t} \leq 0)\} = \{R \in D - B(I, \epsilon) / (r_2 \leq \frac{r_1^3}{\cos \phi}) \cap (r_1 \leq \frac{r_2^3}{\cos \phi})\}$
- $C = \{R \in D - B(I, \epsilon) / (r_{1t} > 0) \cap r_{2t} > 0\} = \{R \in D - B(I, \epsilon) / r_2 > \frac{r_1^3}{\cos \phi} \cap r_1 > \frac{r_2^3}{\cos \phi}\}$
- $A_1 = \{R \in A \cap (r_1 - 1 \leq 0) \cap (r_2 - 1 > 0)\}$
- $A_2 = \{R \in A \cap (r_1 - 1) > 0\}$
- $A_3 = \{R \in A \cap (r_1 - 1) \leq 0 \cap (r_2 - 1) \leq 0\}$

Compte tenu des formes de r_{1t} et r_{2t} , ce partage constitue une partition du domaine $D - B(I, \epsilon)$

On a :

$$\|R - I\|_t = \frac{(r_1 - 1)r_{1t} + (r_2 - 1)r_{2t}}{\|R - I\|} = \frac{(R - I) \cdot R_t}{\|R - I\|}.$$

- si $R \in B$ alors $r_1 - 1 \geq 0$, $r_2 - 1 > 0$, $r_{1t} \leq 0$, et $r_{2t} < 0$. Et donc $\|R - I\|_t < 0$ (R_t pointe vers I).
 - si $R \in A$ alors
 - si $R \in A_1$, alors $r_1 - 1 \leq 0$, $r_2 - 1 > 0$, $r_{1t} > 0$, et $r_{2t} \leq 0$. Et donc $\|R - I\|_t < 0$ (R_t pointe vers I).
 - si $R \in A_2$, alors $r_1 - 1 > 0$, $r_2 - 1 > 0$, $r_{1t} > 0$, et $r_{2t} < 0$. Ici, R_t ne pointe plus en direction de I mais alors $r_2 - 1 > r_1 - 1$ et $-r_{2t} > r_{1t}$ ce qui assure le résultat.
- Plus précisément :

$$\begin{aligned} -r_{2t} &= r_2^3 - r_1 \cos \phi \\ &> r_2 - r_1 \cos \phi \\ &> r_2 - r_1 \\ &> r_2 \cos \phi - r_1 \\ &> r_2 \cos \phi - r_1^3 \\ &= r_{1t} > 0 \end{aligned}$$

Or puisque $r_2 > r_1$, on a $(r_2 - 1) > (r_1 - 1)$,

donc $-r_{2t}(r_2 - 1) > r_{1t}(r_1 - 1)$, et $\|R - I\|_t < 0$.

- si $R \in A_3$, alors $r_1 - 1 \leq 0$, $r_2 - 1 < 0$, $r_{1t} > 0$, et $r_{2t} \leq 0$.

En fait, comme $S \in B(I, \frac{\epsilon}{2})$, que $R \notin B(I, \epsilon)$. On a donc (voir graphique) :

$$\frac{r_1^3}{\cos \phi} < r_1 < \frac{r_2^3}{\cos \phi} < r_2$$

ce qui implique

$$r_2 \cos \phi - r_1^3 > r_2^3 - r_1 \cos \phi$$

Comme $0 < 1 - r_2 < 1 - r_1$, on a

$$-r_{2t}(1 - r_2) < r_{1t}(1 - r_1)$$

et donc $\|R - I\|_t < 0$.

Finalement si $R \in A$ alors $\|R - I\|_t < 0$.

– si $R \in C$ alors $r_1 - 1 < 0$, $r_2 - 1 < 0$, $r_{1t} > 0$, et $r_{2t} > 0$. Et donc $\|R - I\|_t < 0$.

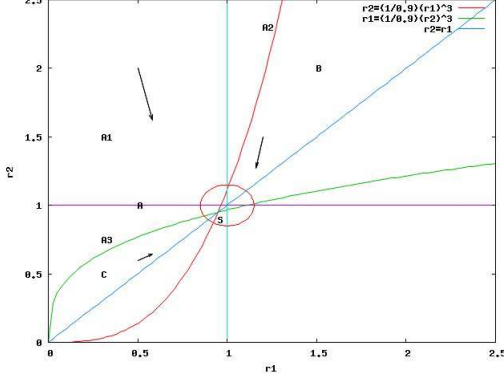


FIG. 35 – Partage du domaine $r_2 > r_1$ suivant le signe de r_{1t}, r_{2t} , $r_1 - 1$ et $r_2 - 1$.

□

12 Anneaux de N oscillateurs et ondes spirales

12.1 N oscillateurs couplés de type $\lambda - \omega$

On peut essayer de généraliser l'étude précédente au cas où l'on a plus d'oscillateurs. On donne juste un exemple car il explique l'apparition de spirales. On considère N oscillateurs de type $\lambda - \omega$ couplés entre eux en forme d'anneaux. C'est à dire que chaque oscillateur est couplé à ses deux voisins, et que le dernier est relié au premier de sorte qu'ils forment un anneau et qu'il n'y a alors plus de condition au bord. Soit donc le système de N oscillateurs, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{cases} (u_i)_t = \lambda(r_i)u_i - \omega(r_i)v_i + u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ (v_i)_t = \lambda(r_i)v_i + \omega(r_i)u_i + v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{cases} \quad (16)$$

où l'on pose $(u_{N+1}, v_{N+1}) = (u_1, v_1)$ et $(u_0, v_0) = (u_N, v_N)$. En coordonnées polaires (16) devient

$$\begin{cases} r_{it} = -r_i^3 - r_i + r_{i+1} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + r_{i-1} \cos(\theta_{i-1} - \theta_i) \\ \theta_{it} = r_i^2 \frac{r_{i+1}}{r_i} \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\right) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) \end{cases}$$

En posant $\phi_{i+1} = \theta_{i+1} - \theta_i$, $1 \leq i \leq N$, on obtient pour $1 \leq i \leq N - 1$:

$$\begin{cases} r_{it} = -r_i^3 - r_i + r_{i+1} \cos \phi_i + r_{i-1} \cos(\phi_{i-1}) \\ \phi_{it} = r_{i+1}^2 - r_i^2 + \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}} \sin \phi_{i+1} - \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_i}\right) \sin \phi_i + \frac{r_{i-1}}{r_i} \sin \phi_{i-1} \\ \theta_{1t} = r_1^2 + \frac{r_2}{r_1} \sin(\phi_1) + \left(\frac{r_N}{r_1}\right) \sin(-\phi_N) \end{cases}$$

Puis en enlevant l'équation en θ_1 déterminée par les autres au choix d'une condition initiale $\theta_1(0)$ près on a :

$$\begin{cases} r_{it} = -r_i^3 - r_i + r_{i+1} \cos \phi_i + r_{i-1} \cos \phi_{i-1} \\ \phi_{it} = r_{i+1}^2 - r_i^2 + \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}} \sin \phi_{i+1} - \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} + \frac{r_{i+1}}{r_i}\right) \sin \phi_i + \frac{r_{i-1}}{r_i} \sin \phi_{i-1} \end{cases} \quad (17)$$

On remarque alors que $\phi_i = \frac{2\pi}{N}$, $r_i = r(t)$ est solution. Ce que l'on énonce sous le théorème suivant, déjà présent dans [23] :

Théorème 12. *Le système (17) admet la solution suivante :*

$$\phi_i = \frac{2\pi}{N}, r_i = r(t)$$

où r est solution de $r_t = -r^3 + r(2 \cos \phi - 1)$. En particulier, pour $N > 6$, cette solution tend vers la solution stationnaire

$$\phi_i = \frac{2\pi}{N}, r = \sqrt{2 \cos \phi - 1}.$$

Tandis que pour $N \leq 6$ elle tend vers la solution stationnaire

$$\phi_i = \frac{2\pi}{N}, r = 0$$

On voit ici apparaître le lien avec les spirales. Si on dispose $N (> 6)$ oscillateurs de type $\lambda - \omega$ en anneau, la solution précédente est un front d'ondes évoluant autour de l'anneau. C'est à peu près le phénomène que l'on observe pour les spirales. A ceci près que le couplage n'est plus sur deux voisins mais sur quatre et que l'onde n'évolue pas en anneau mais en spirale. Dans [58], les auteurs montrent l'existence d'une solution rotative attractive pour un tableau de $N * N$ oscillateurs correspondant à la discrétisation simplifiée de (13), lorsque seules les phases sont considérées. Par extension, l'existence d'une onde spirale est prouvée dans [59] pour le même système, mais incluant les rayons, grâce au théorème des fonctions implicites. On reviendra un peu plus en détail sur cet article à la section suivante. Pour l'instant, on vérifie seulement que la solution stationnaire précédente est attractive pour la version simplifiée de (16), où l'on ne considère des oscillateurs ne dépendant pas du rayon. Soit le système

$$\phi_{it} = \sin \phi_{i+1} - 2 \sin \phi_i + \sin \phi_{i-1} \quad 1 \leq i \leq N - 1 \quad (18)$$

On a alors le théorème suivant

Théorème 13. *On suppose $N > 4$, $\forall i \in [1, N]$, $0 < \phi_i(0) < \frac{\pi}{2}$. Alors toutes les solutions de (18) convergent vers la solution*

$$\phi_i = \frac{2\pi}{N}$$

Démonstration. On pose

$$\Phi(\phi_1, \dots, \phi_N)$$

Dans le cas où la condition initiale n'est pas la solution stationnaire recherchée on va montrer que la fonction

$$E(\Phi) = \max_{i \in [1, N]} \phi_i(t) - \min_{i \in [1, N]} \phi_i(t)$$

est strictement décroissante et que la seule limite possible est 0.

On considère donc que la condition initiale n'est pas la solution stationnaire du théorème. Soit $t > 0$ tel que $0 < \phi_i(t) < \frac{\pi}{2}$. Et soit $i \in [1, N]$ tel que

$$\phi_i(t) = \phi = \max_{1 \leq j \leq N} \phi_j(t)$$

Si au moins un des voisins ϕ_j , $j = i + 1$ ou $j = i - 1$ de ϕ_i vérifie

$$\phi_j < \phi_i$$

alors puisque sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, ϕ est strictement croissante

$$\phi_i'(t) = \sin \phi_{i+1} - 2 \sin \phi_i + \sin \phi_{i-1} < 0$$

Mais il se peut que pour tous les voisins ϕ_j de ϕ_i , on ait

$$\phi_i = \phi_j$$

et dans ce cas on a

$$\phi_i'(t) = 0$$

Dans ce cas, si au moins un des voisins d'ordre 2 ϕ_j , $j = i + 2$ ou $j = i - 2$ de ϕ_i vérifie

$$\phi_j < \phi_i$$

alors $\phi_i' = 0$ et $\phi_j' < 0$ pour $j = i + 1$ ou $i = j - 1$ donc,

$$\begin{aligned} \phi_i''(t) &= \cos \phi_{i+1} \phi_{i+1}' - 2 \cos \phi_i \phi_i' + \cos \phi_{i-1} \phi_{i-1}' \\ &< 0 \end{aligned}$$

On montre maintenant par récurrence que si tous les voisins ϕ_j de ϕ_i d'ordre strictement inférieur m ($j \in [i - m + 1, i - 1] \cup [i + 1, \dots, i + m - 1]$) vérifient $\phi_j = \phi_i = \phi$ alors

$$\forall k < m \quad \phi_i^{(k)}(t) = 0$$

Si de plus au moins un des deux voisins ϕ_j de ϕ_i d'ordre m ($j = i - m$ ou $j = i + m$) vérifie $\phi_j < \phi_i$, alors

$$\phi_i^{(m)}(t) < 0$$

De même si pour $m \in [1, N]$ (ou plutôt $[1, \frac{N}{2}]$), tous les voisins d'ordre inférieur à m , $\phi_j, j \in [i - m + 1, \dots, i - 1] \cup [i, \dots, i + m - 1]$ vérifient $\phi_i = \phi_j$ alors

$$\forall k \in [1, m - 1] \quad \phi_i^{(k)}(t) = 0$$

Si de plus pour $j = i + m$ ou $j = i - m$, on a $\phi_j < \phi_i$ alors

$$\phi_i^{(m)}(t) < 0$$

On a vu que ce résultat est vrai pour $m = 2$.

On suppose le résultat vrai jusqu'à l'ordre $m - 1$. On a

$$\begin{aligned}\phi_i^{(k)} &= (\sin \phi_{i-1} - 2 \sin \phi_i + \sin \phi_{i+1})^{(k-1)} \\ &= (\cos \phi_{i-1}(\phi_{i-1})' - 2 \cos \phi_i(\phi_i)' + \cos \phi_{i+1}(\phi_{i+1})')^{(k-2)} \\ &= \sum_{j=0}^{k-3} ((\cos \phi_{i-1})^{(k-2-j)}(\phi_{i-1})^j - 2(\cos \phi_i)^{(k-2-j)}(\phi_i)^j + (\cos \phi_{i+1})^{(k-2-j)}(\phi_{i+1})^j) \\ &\quad + \cos \phi_{i-1}(\phi_{i-1})^{(k-1)} - 2 \cos \phi_i(\phi_i)^{(k-1)} + \cos \phi_{i+1}(\phi_{i+1})^{(k-1)}\end{aligned}$$

Si on prend $k \leq m - 1$, on a dans tous les facteurs un terme $(\phi_j)^{(l)}$, $l \leq m - 2$. Comme tous les voisins ϕ_i d'ordre inférieur ou égal à $m - 1$ sont égaux, tous les voisins d'ordre inférieur ou égal à $m - 2$ de ϕ_{i-1} , ϕ_i et ϕ_{i+1} sont égaux ce qui implique par l'hypothèse de récurrence $\phi_i^{(k)} = 0$. Si on prend $k = m$, et que $\phi_{i+m} < \phi_i$ ou $\phi_{i-m} < \phi_i$, on vérifie grâce à l'hypothèse de récurrence que $\phi_i^{(m)} < 0$. Ce qui achève la démonstration par récurrence. Maintenant, puisque la solution n'est pas la solution stationnaire on a $\phi_j < \phi_i$ pour au moins un $j \in [1, N]$. Grace au résultat précédent, on a donc que pour h assez petit,

$$\phi_i(t+h) < \phi_i(t)$$

pour tout i tel que $\phi_i(t) = \phi = \max_{j \in [1, N]} \phi_j$. Comme pour les indices j ne satisfaisant pas à l'inégalité on a $\phi_j(t) < \phi$ on a

$$\max_{j \in [1, N]} \phi_j(t+h) < \max_{j \in [1, N]} \phi_j(t)$$

pour h assez petit.

De même

$$\min_{j \in [1, N]} \phi_j(t+h) > \min_{j \in [1, N]} \phi_j(t)$$

Ceci est vrai pour tout t tel que pour tout $i \in [1, N]$ $0 < \phi_i(t) < \frac{\pi}{2}$. Comme pour $t = 0$ la condition est vraie, elle reste vraie pour tout temps et la fonction

$$E(t) = \max_{i \in [1, N]} \phi_i(t) - \min_{i \in [1, N]} \phi_i(t)$$

est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ . Elle est donc convergente. La seule limite possible est 0 par un raisonnement classique pour les fonctions de Lyapunov. En effet, sinon soit $a > 0$ cette limite. On a pour tout $t > 0$, $E(\Phi(t)) > a$. Mais par ailleurs, on peut extraire de la trajectoire une sous suite $\Phi(t_k) = (\phi_1(t_k), \dots, \phi_N(t_k))$ qui converge vers un élément $\bar{\phi}$ de $]0, \frac{\pi}{2}[^N$. Partant de ce point limite $\bar{\Phi}$, E est strictement décroissante et vérifie $E(S(t)\bar{\phi}) < a^{16}$ pour $t > 0$. Maintenant, pour t fixé, en faisant partir la trajectoire d'un élément $\Phi(t_k)$ assez proche de $\bar{\Phi}$, on a également $E(S(t)\Phi(t_k)) < a$ ce qui est une contradiction. \square

¹⁶Où $S(t)\bar{\phi}$ est la solution de (18) pour $\Phi(0) = \bar{\Phi}$

12.2 Quelques références sur le sujet

Dans le cadre de cette thèse, motivés par les exemples issus de la biologie et de la physiologie, nous avons essayé de faire apparaître des spirales dans les systèmes de type FitzHugh-Nagumo et de comprendre les mécanismes permettant l'apparition de ces structures. Après quelques recherches bibliographiques sur le sujet, la démarche a été de faire apparaître ces spirales dans le système (12). Ensuite, puisque les systèmes $\lambda - \omega$ constituent un modèle pour les systèmes oscillants nous avons fait apparaître ces spirales dans le système (13). La discrétisation des systèmes conduit naturellement à la théorie des oscillateurs couplés. Lorsque le couplage est faible on peut se ramener à un système où chaque oscillateur est représenté par une variable de phase et il existe des théorèmes sur l'accrochage de phases ([25], [26], [56], [28]). De fait, l'étude du phénomène spirale n'est pas nouveau et on cite ici quelques références que l'on a pu rencontré lors de l'étude du phénomène.

Lorsque l'on étudie numériquement les amplitudes et les phases de la solution spirale du système (13) on constate une symétrie dans les rayons et les phases. Dans [59], les auteurs montrent l'existence d'une onde spirale pour ce système qui possèdent les propriétés de symétrie que l'on peut observer numériquement. Ils montrent également que la solution cesse d'exister lorsque le paramètre β devient trop grand ce qui correspond à la solution à l'aspect chaotique montrée pour $\beta = 2$. L'existence de cette solution est montrée grâce au théorème des fonctions implicites. Elle s'appuie sur une solution de type onde spirales ne faisant intervenir que les phases et exhibée dans un de leur article précédent : [58]. Cette solution, possédant également des propriétés de symétrie, est obtenue en partant d'une condition initiale constante par morceaux sur le domaine carré divisé en quatre. Chaque constante étant décalée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la précédente de manière analogue aux conditions initiales décrites dans les simulations numériques. Ils utilisent alors un argument de monotonie pour conclure à l'existence. La stabilité de la solution y est également démontrée grâce à un théorème de G.B. Ermentrout que l'on trouve dans : [24]. Dans [59], la nouveauté est de prendre également en compte les variables d'amplitude et non plus seulement les phases. L'étude du système avec les amplitudes avait déjà été faite par N. Kopell *et al.* dans [3] dans le cas de deux oscillateurs. Dans cet article, les auteurs s'intéressent au comportement de deux oscillateurs couplés. Ils y étudient notamment les systèmes de deux oscillateurs couplés de type $\lambda - \omega$ mais avec des paramètres en plus. Ils y font référence à l'effet 'Bar-Eli' : il arrive que deux oscillateurs couplés décroissent et s'anihilent en l'origine. L'étude que l'on a faite plus haut, décrit un système particulier de ceux considérés dans [3] (système 1.2 avec $\kappa = \gamma = 1$) de manière exhaustive par des méthodes simples et met également en évidence le phénomène. Il convient de noter ici qu'une théorie a été développée par M. Golubitsky, I. Stewart et D.G. Schaeffer (voir [30], [31]) pour tirer avantage de la symétrie apparaissant dans les systèmes de Réaction-Diffusion et les différents patterns qui y apparaissent. Les auteurs ont de nombreuses publications sur ce sujet. Nous n'avons pas pour l'instant approfondi cette perspective. D'autres techniques ont également été utilisées pour montrer l'existence des ondes spirales. On peut en effet chercher à montrer l'existence d'une onde spirale dans le système de réaction-diffusion en cherchant la solution sous une forme proche de $(u, v)(r, \theta, t) = (A(r) \cos(\Omega t + \alpha r + \beta \theta), A(r) \sin(\Omega t + \alpha r + \beta \theta))$. Ce type d'ap-

proche a beaucoup été utilisé pour montrer l'existence des ondes spirales dans les systèmes de type $\lambda - \omega$. On peut notamment citer les articles de D.S. Cohen *et al.* [17], N.Kopell et L.N Howard [40], Paulet *et al.* [60]. Les systèmes $\lambda - \omega$ ont été introduits en 1973 par N.Kopell et L.N Howard dans l'article [39] dans lequel les auteurs montrent l'existence de fronts d'ondes (domaine infini) dans les systèmes de réaction diffusion oscillants assez généraux. Il apparait que les systèmes $\lambda - \omega$ sont liés aux systèmes de Réaction-Diffusion oscillants (voir [39], [22]). Il convient également de citer les travaux de D. Barkley sur les spirales dans les milieux excitables (par exemple [8] [9] [7]) et de Winfree (par exemple [71]). Cette succinte bibliographie ne se prétend pas exhaustive, et nous n'avons pas épuisé toutes les idées qui y sont contenues dans l'étude de notre problème. Il a semblé préférable de s'orienter vers des questions plus nouvelles, sachant que cette étude trouvera un lien avec les patterns de la partie 4 et surtout ceux de la partie 5.

Quatrième partie

Propagation d'ondes à partir d'un pacemaker central dans un milieu excitable. Le cas d'un système d'EDP de réaction-diffusion avec hétérogénéité spatiale

Dans cette partie, on utilise les propriétés oscillantes et excitables du système (1) pour générer des propagations d'ondes périodiquement à partir d'un pacemaker central. La motivation en est l'analogie avec la conduction électrique dans le cœur et les liens avec la fibrillation ventriculaire. On se place dans un domaine borné Ω de R^2 . On fait dépendre c de x , de telle sorte, qu'au centre du domaine, le système soit oscillant et qu'il soit facilement excitable ($c < -1$ et c proche de -1) ailleurs. On se dit qu'en rajoutant un couplage par diffusion on doit obtenir des propagations d'ondes périodiques. On va voir dans les simulations numériques que ceci est exact si les cellules sont facilement excitables mais non si elles sont difficilement excitables ($c \ll -1$). Dans cette partie on considère un couplage par diffusion, tandis que dans la partie suivante on considère un couplage par l'équation des ondes. On présente d'abord une étude numérique. On fait varier la valeur de $c(x)$ pour des x non au centre afin de voir à partir de quand apparaissent les propagations d'ondes. On observe alors, que pour les valeurs de $c(x)$ éloignées du seuil d'excitabilité -1 , la solution évolue vers la solution stationnaire, et que pour des valeurs proches de -1 , on obtient les ondes générées par un pacemaker central. Les valeurs de transition sont intéressantes et permettent d'observer des trajectoires périodiques assez complexes. Lorsqu'on se limite à l'observation des cellules centrales on peut remarquer des comportements liés au comportements des solutions du système (1) (comportements de type foyers, noeuds...). Les études numériques montrent que le comportement est lié à la valeur de la solution stationnaire. Plus précisément, on a vu dans la première partie, que la valeur du paramètre c détermine le comportement du système sans diffusion (1). Ainsi si $|c| > 1$, le système tend vers l'unique point stationnaire, tandis que si $|c| < 1$ le système tend vers l'unique cycle limite. Les simulations numériques montrent que l'on a le même type de comportement puisqu'on observe une transition entre évolution vers la solution stationnaire et évolution vers une solution périodique. Dans le cas de l'équation des ondes, on a observé sur les simulations numériques effectuées que si pour tout x la solution stationnaire (\bar{u}, \bar{v}) vérifie $\sup_{x \in \Omega} \bar{u}(x) < -1$ le système tend vers la solution stationnaire, tandis que si $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} \in]-1, 1[$ alors le système semble évoluer vers une solution périodique. Par contre, dans le cas de la réaction-diffusion, qui est l'objet de cette partie, la condition $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} \in]-1, 1[$ n'assure plus l'évolution asymptotique vers une solution périodique, puisque cette condition peut être vérifiée bien que le système tende vers la solution stationnaire. La condition $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} < -1$ reste suffisante pour que le système tende vers la solution stationnaire. On inclut une analyse mathématique. On commence par montrer l'existence et l'unicité de solutions faibles définies pour tout temps. La démonstration s'appuie sur des travaux classiques similaires. Cela donne l'existence d'un semi-groupe associé au système. On se place ensuite dans le cas où $\epsilon = 1$. Dans ce cas, les coefficients de diffusion sont identiques, et on a l'existence de régions invariantes. Cela implique que les solutions sont classiques. Cela implique également, se donnant une région invariante D , l'existence d'un attracteur dans $L^2(\Omega, D)$ ¹⁷. On cherche à montrer ensuite des propriétés de stabilité. Cela nécessite l'existence de la solution du problème stationnaire associé. Ce résultat n'est pas trivial et n'a pas été démontré au cours de la thèse. Motivé par les simulations numériques, on conjecture l'existence et l'unicité de la solution du problème stationnaire, et admettant ce résultat, on montre la stabilité

¹⁷ $L^2(\Omega, D) = \{(u, v) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ tels que } (u, v) \in D \text{ pour presque tout } x \in \Omega\}$

asymptotique de cette solution grâce à une fonction de Lyapunov, lorsque f est cubique, dans le cas $\epsilon = 1$. Lorsque ϵ est quelconque, si on remplace le système (12) par un système approché obtenu en rajoutant le terme dissipatif $-\delta v$ au second membre de la seconde équation, on a l'existence d'un attracteur global dans $(L^2(\Omega))^2$, ainsi qu'un ensemble absorbant dans $L^\infty(\Omega)$.

On considère le système :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v + \Delta u \\ v_t &= u - c(x) + \Delta v \end{cases} \quad (12)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0 \\ v(0, x) &= v_0 \\ \frac{\delta u}{\delta n} &= \frac{\delta v}{\delta n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et n est la normale extérieure au domaine Ω .

f est la cubique $f(u) = -u^3 + 3u$ ou son approximation affine par morceaux donné à la première partie. Pour $T > 0$, on pose $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$.

On introduit également le système elliptique donnant les solutions stationnaires qui joue un rôle important dans le comportement asymptotique des trajectoires.

$$\begin{cases} 0 &= f(u) - v + \Delta u \\ 0 &= u - c(x) + \Delta v \end{cases} \quad (19)$$

et,

$$\frac{\delta u}{\delta n} = \frac{\delta v}{\delta n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega$$

On note (\bar{u}, \bar{v}) la solution de ce système.

Moyennant l'existence de cette solution, (12) devient

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= g(\bar{u}(x), u) - v + \Delta u \\ v_t &= u + \Delta v \end{cases} \quad (20)$$

où $g(\bar{u}, u) = -u^3 - 3\bar{u}u^2 + 3(1 - \bar{u}^2)u$

(et avec conditions initiales données et conditions au bord de Neumann). Par analogie avec le système sans diffusion (1) ou (2), on se dit que la fonction \bar{u} doit jouer un rôle important dans le comportement asymptotique des trajectoires.

13 Simulations numériques, variations du paramètre c

On simule le système (12) sur un domaine carré de \mathbb{R}^2 . On utilise pour cela un schéma aux différences finies explicite sur un carré de taille 100×100 . On prend $\epsilon = 0.1$. Les

conditions initiales ont généralement été choisies de manière à ce que les cellules non centrales ne s'excitent pas au départ (par exemple $(u(0, x, y), v(0, x, y))$ proches de $(-1.5, 0)$ ¹⁸. L'idée de base est d'utiliser les propriétés oscillantes et excitables de (1) pour engendrer des propagations d'ondes à partir d'un pacemaker central. Pour cela, on pense à prendre $c(x)$ tel que le système soit oscillant au centre, et, suffisamment excitable ailleurs pour que les oscillations centrales excitent, via la diffusion, les cellules voisines et que les ondes se propagent ensuite sur tout le domaine grâce à l'excitabilité et à la diffusion. Par exemple, si on prend $c(x) = 0$ dans les cellules au centre et $c(x) = -1.1$ (voir figure 40), on obtient effectivement le résultat souhaité. Par contre, si les cellules sont trop éloignées du seuil d'excitabilité, alors il n'y a plus de propagations d'ondes. Ainsi, si $c(x) = 0$ au centre et $c(x) = -1.5$ ailleurs, il n'y a plus de propagations d'ondes, mais le système évolue alors vers une solution stationnaire (voir figure 36). Plus précisément, on prend :

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est dans l'une des quatre cellules centrales} \\ c < -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

13.1 Le cas cubique

Pour le cas où f est cubique, on fait varier c entre -1.5 et -1.1 . On décrit ici le comportement du système pour quelques valeurs de c qui semblent pertinentes.

- $c = -1.5$, (voir figure 36)

le système évolue vers une solution stationnaire (\bar{u}, \bar{v}) . La solution \bar{u} est représentée à la figure 36. On remarque que comme $c(x)$, \bar{u} atteint son maximum au centre et son minimum au bord du domaine. On remarque également que $\inf_{x \in \Omega} c(x) \leq \bar{u} \leq \sup_{x \in \Omega} c(x)$.

- $c = -1.22$, (voir figure 37)

le système évolue toujours vers une solution stationnaire, mais on observe des petites oscillations avant la stabilisation. On voit ici le lien avec le fait que dans le cas où f est cubique, le point d'équilibre du système sans diffusion est un foyer, pour des valeurs de c dans un voisinage de -1 . Le cas précédent, $c = -1.5$ correspond alors à une valeur de c pour laquelle le point d'équilibre de (1) est un noeud. On peut également remarquer sur cet exemple, que l'on a $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} \in]-1, 1[$, et pourtant, le système évolue vers la solution stationnaire.

- $c = -1.2188$, (voir figure 38)

Si l'on se limite à une observation jusqu'à $T = 200$ ou 2000 la solution ne semble plus évoluer vers une solution stationnaire. Les cellules centrales semblent évoluer selon un très petit cycle limite. Ces oscillations n'ont que très peu d'influence sur

¹⁸Dans le cas du système (12), on observe le type de comportement asymptotique décrit ci-dessous pour un grand nombre de conditions initiales. En fait pour c fixé, on a observé le même type de comportement asymptotique pour toutes les conditions initiales testées. En particulier pour la plupart des c donnés ci-dessous, les simulations numériques présentées, ont également été effectuées avec des conditions initiales donnant lieu à des spirales dans le cas où $c = 0$. Dans le cas du système (12), le comportement asymptotique décrit ci-dessous est qualitativement le même pour ces conditions initiales.

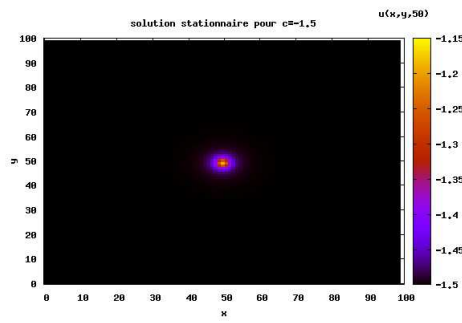
les cellules voisines qui restent quasi immobiles. On n'observe donc pas de propagation d'onde sur le domaine. Cependant en augmentant le temps d'observation, on constate que l'amplitude des oscillations diminue et que la solution évolue encore vers la solution stationnaire. Pour cette valeur de c , on est proche de la transition évolution vers solution stationnaire-évolution vers solution non stationnaire. Si l'on prend $c = -1.2187$, on obtient une propagation d'onde au bout d'un temps assez long ($\approx 190 \approx 470\dots$ selon les conditions initiales) alors qu'avant la cellule centrale effectue de petites oscillations, mais ces oscillations, de type foyer répulsif, grandissent petit à petit de sorte qu'à un moment la cellule s'excite et engendre une propagation d'onde.

– $c = -1.21$, (voir figure 39)

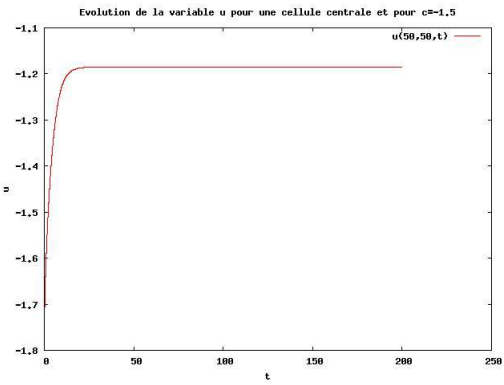
A partir de $c = -1.2187$, on voit apparaître des propagations d'ondes sur tout le domaine. Les cellules centrales effectuent d'abord des petites oscillations de type foyer répulsif, puis s'excitent et évoluent selon un grand cycle, avant de revenir près de la position d'équilibre et de renouveler l'opération. Les petites oscillations n'ont que peu d'influence sur les cellules voisines, par contre, l'évolution autour du grand cycle, les excite et génère une propagation d'ondes. Le phénomène est répété périodiquement. Il n'a pas été observé d'autre comportement jusqu'à la valeur -1.19 .

– $c = -1.1$, (voir figure 40)

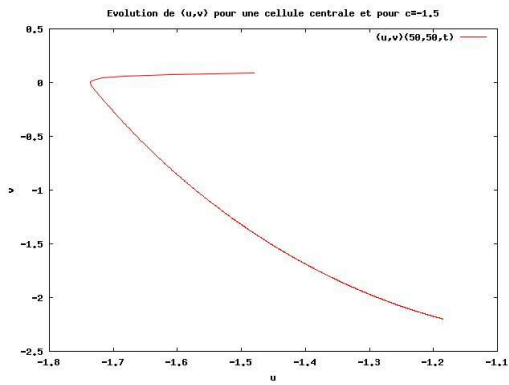
à partir de la valeur -1.19 , il n'y a plus de petites oscillations pour les cellules centrales. Elles évoluent exclusivement autour du grand cycle limite, et engendrent des propagations d'ondes périodiquement.



(a)

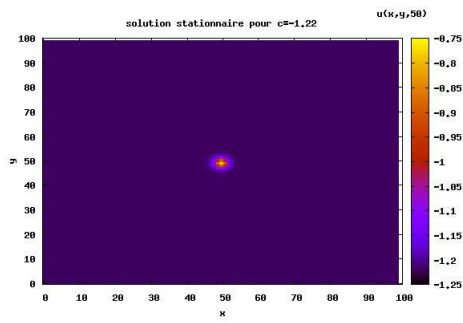


(b)

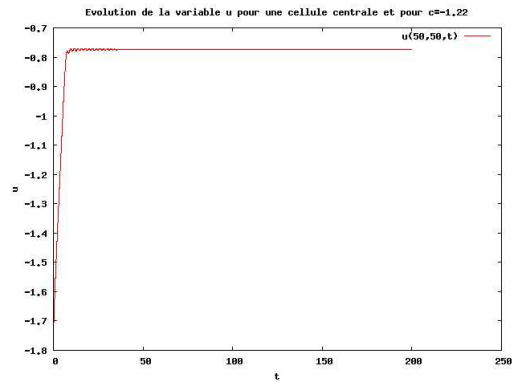


(c)

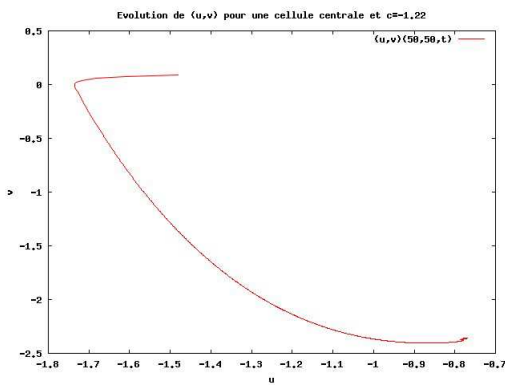
FIG. 36 – Solutions du système (12), pour f cubique et $c = -1.5$.



(a)



(b)



(c)

FIG. 37 – Solutions du système (12), pour f cubique et $c = -1.22$.

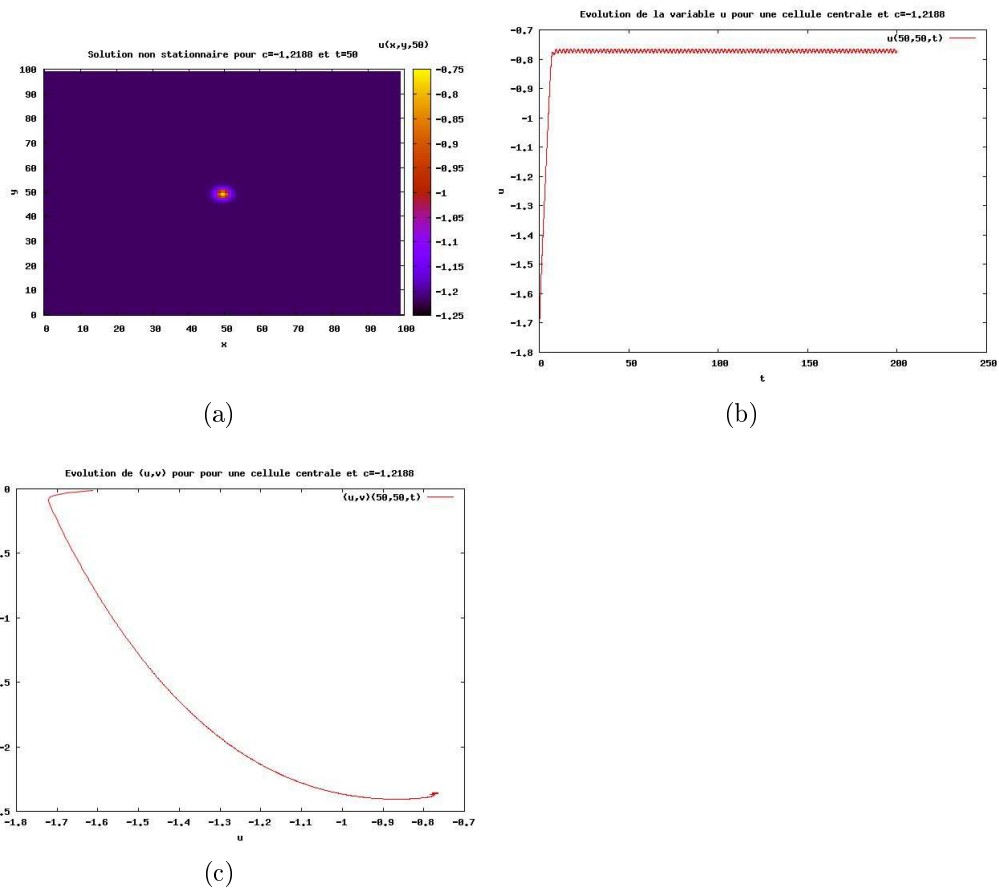
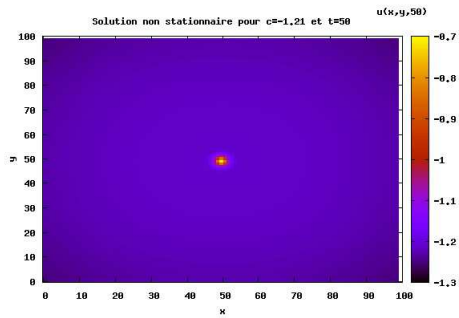
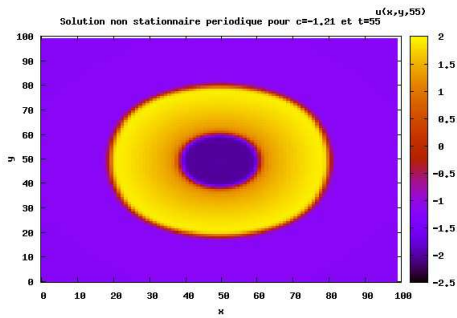


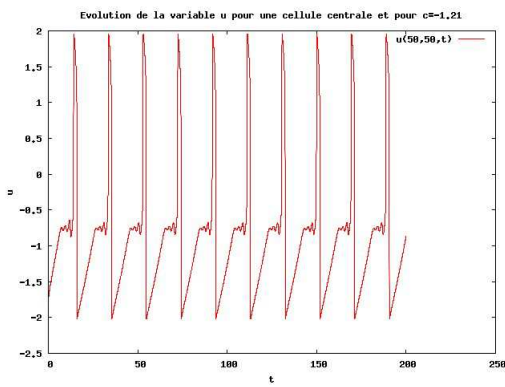
FIG. 38 – Solutions du système (12), pour f cubique et $c = -1.2188$.



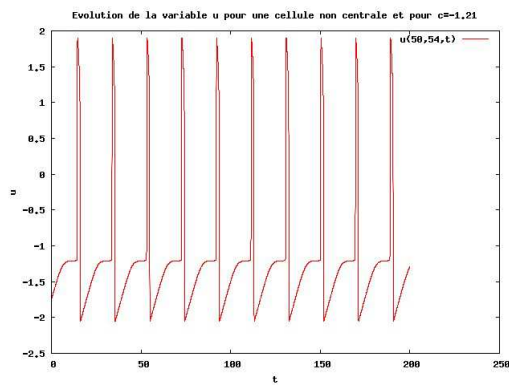
(a)



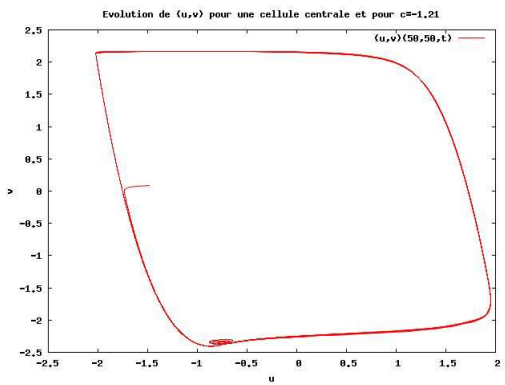
(b)



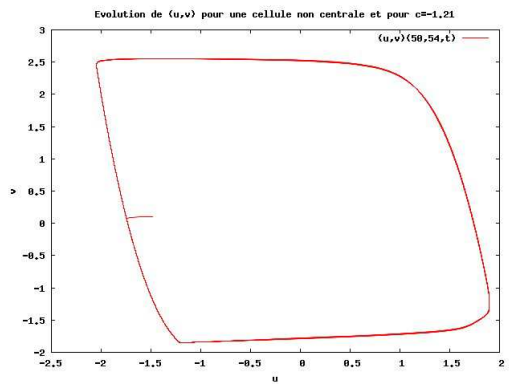
(c)



(d)

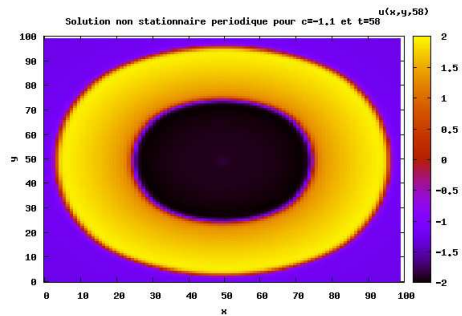


(e)

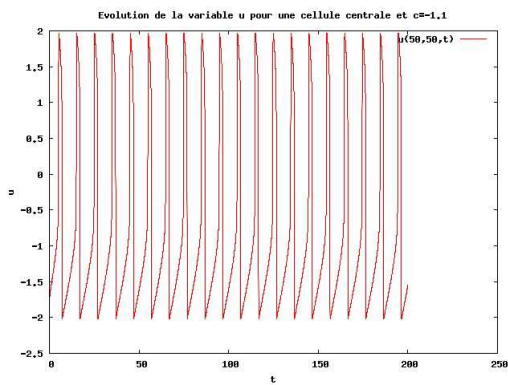


(f)

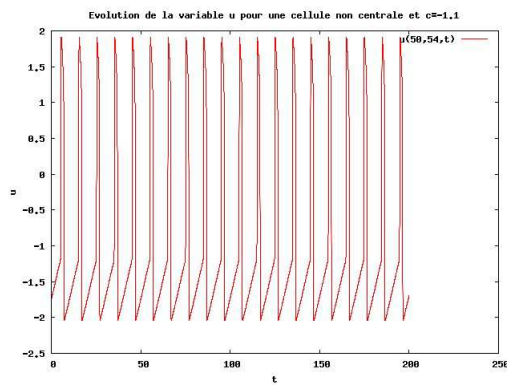
FIG. 39 – Solutions du système (12), pour f cubique et $c = -1.21$.



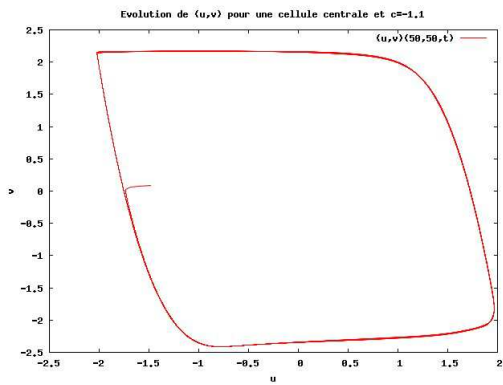
(a)



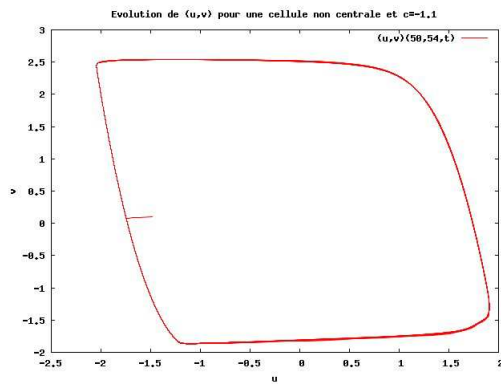
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 40 – Solutions du système (12), pour f cubique et $c = -1.1$.

Enfin, voici les vitesses de la propagation des ondes en unité de longueur par unité de temps :

c	-1.2	-1.1	-1.01
Vitesse	13.9	16.1	18

FIG. 41 – Vitesses de la propagation des ondes du système (12), pour f cubique et quelques valeurs de c .

Résumé des principales propriétés observées

Le fait principal est bien sûr la propagation d'ondes lorsqu'on prend c assez proche de -1 . Et l'évolution vers une solution stationnaire si c est trop petit. L'évolution vers l'un des deux types de solution est liée à la solution du système (19), comme on l'a vu et comme on le verra dans la suite. Cependant, on peut avoir $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} \in]-1, 1[$ bien que la trajectoire évolue vers la solution stationnaire. Un autre point, est l'apparition d'attracteurs particuliers pour les valeurs de transition : par exemple, évolution de type foyer répulsif, excitation et renouvellement du phénomène périodiquement. Le lien avec les propriétés du point d'équilibre du système sans diffusion est ainsi mis en évidence. A noter également, que chaque grande oscillation des cellules centrales entraîne une propagation d'onde. Enfin, on observe que la vitesse de propagation augmente avec c , et que cette vitesse est élevée par rapport au couplage par équation des ondes, comme on le verra plus tard. On précise que les solutions sont plus régulières que dans le cas du couplage par les ondes (voir figure 57).

13.2 Le cas affine par morceaux

En première approximation, le comportement semble le même que dans le cas cubique : pour $c_2 = -1.5$, le système évolue vers une solution stationnaire tandis que pour $c_2 = -1.1$, des propagations d'ondes périodiques sont engendrées par les cellules centrales. Entre les deux, on peut observer certains phénomènes particuliers. Comme pour le cas cubique, on décrit le comportement du système pour quelques valeurs qui semblent caractéristiques.

- **$c = -1.2$** (voir figure 42)

Pour $c = -1.2$ le système évolue vers une solution stationnaire. On peut noter que la variable u de cette solution prend des valeurs entre -1 et 1 , mais cette solution est bien stationnaire.

- **$c = -1.15$** (voir figure 43)

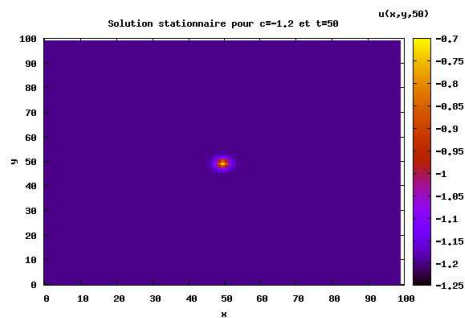
Pour cette valeur, on n'observe pas de propagation d'onde sur tout le domaine. Mais la solution n'est plus stationnaire et évolue vers une solution périodique. Les cellules centrales, ainsi que quelques voisines, évoluent asymptotiquement selon un cycle (plus petit que celui de (1)) dont l'amplitude décroît avec l'éloignement par rapport au centre. Si bien qu'au bout de quelques cellules, il n'y a plus d'oscillations et donc pas de propagation d'ondes. On peut observer de petites et moyennes oscillations. C'est un phénomène intéressant, car pour la valeur $\epsilon = 0.1$, le point d'équilibre du système sans diffusion est un noeud, et le théorème de la bifurcation de Hopf ne s'applique pas. L'opérateur de diffusion semble donc jouer un rôle dans la petite amplitude de ces cycles.

– $c = -1.14$ (voir figure 44)

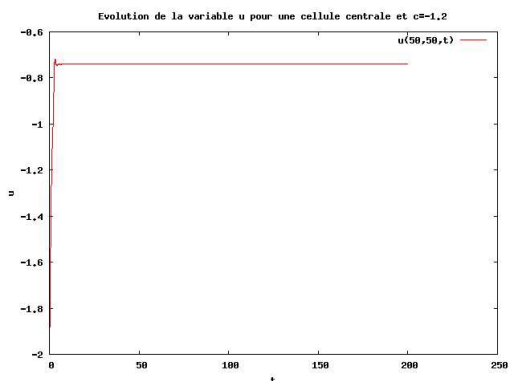
Pour cette valeur de c on voit apparaître des propagations d'ondes sur tout le domaine. Les cellules centrales évoluent asymptotiquement et alternativement autour d'un petit et d'un grand cycle. Le petit cycle décroît progressivement selon l'éloignement des cellules par rapport au centre, et disparaît rapidement. Par contre, le grand cycle se propage le long de toutes les cellules, et on observe une propagation d'onde. Dynamiquement, on observe une grande oscillation pour les cellules centrales qui génère une propagation d'onde sur tout le domaine (le cycle de même amplitude se propage à toutes les cellules), puis une petite oscillation pour les cellules centrales qui s'atténue rapidement, et qui n'engendre pas de propagation d'ondes. Ce phénomène est répété périodiquement. A noter que l'opérateur de diffusion induit une grande régularité pour les trajectoires.

– $c = -1.1$ (voir figure 45)

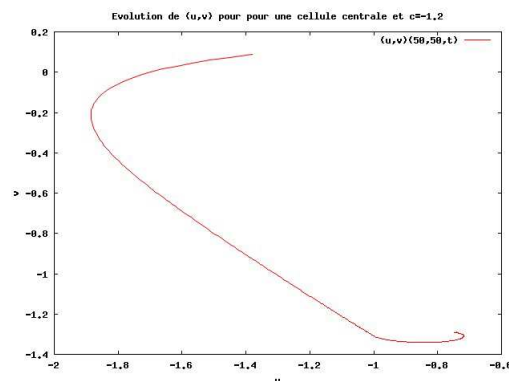
Pour cette valeur de c , les cellules centrales évoluent asymptotiquement vers un unique cycle limite. Cette évolution se propage à toutes les cellules : chaque oscillation des cellules centrales engendre ainsi une propagation d'onde sur tout le domaine. Les propagations sont donc plus fréquentes que dans le cas précédent.



(a)

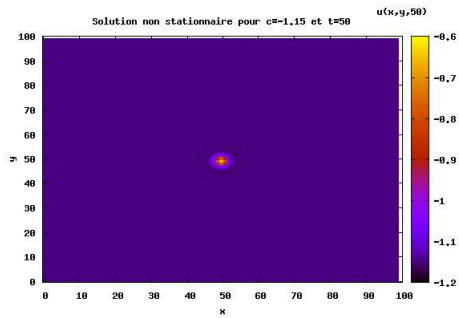


(b)

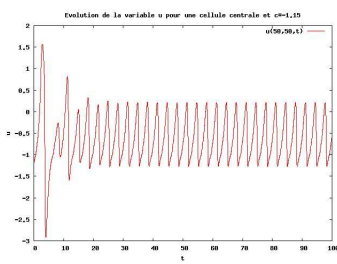


(c)

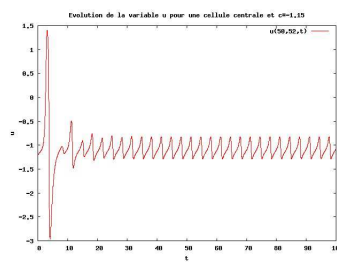
FIG. 42 – Solutions du système (12), pour f affine par morceaux et $c = -1.2$.



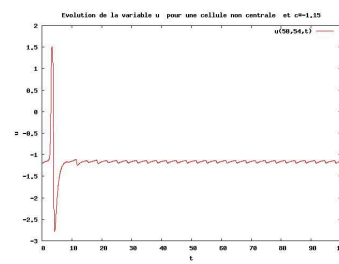
(a)



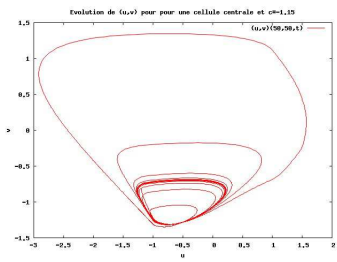
(b)



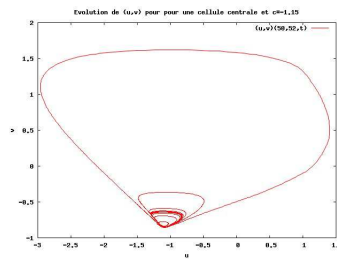
(c)



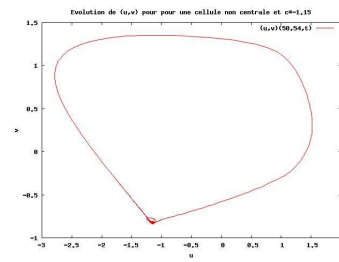
(d)



(e)

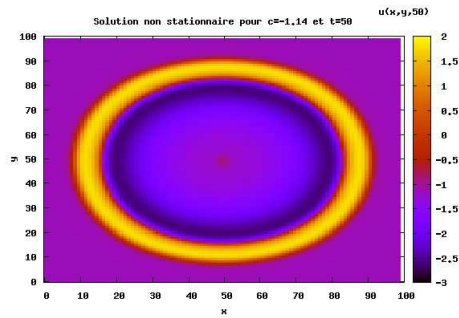


(f)

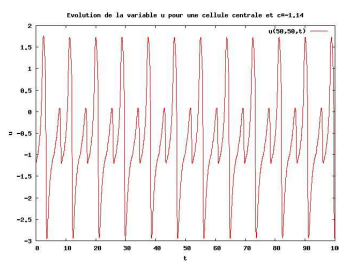


(g)

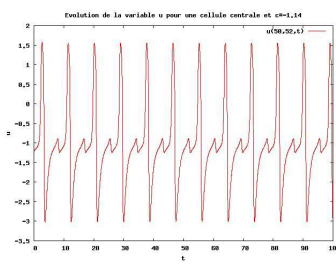
FIG. 43 – Solutions du système (12), pour f affine par morceaux et $c = -1.15$.



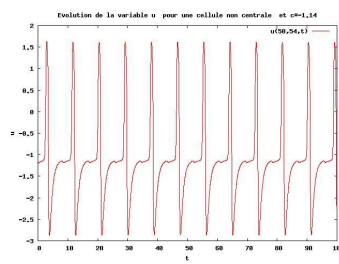
(a)



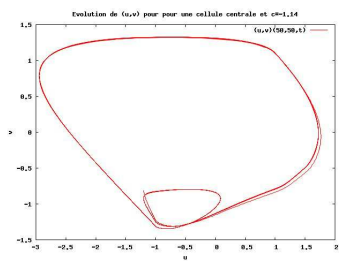
(b)



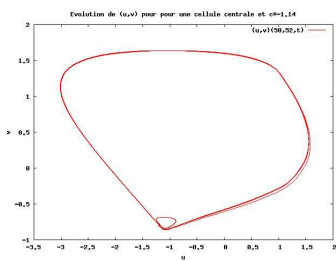
(c)



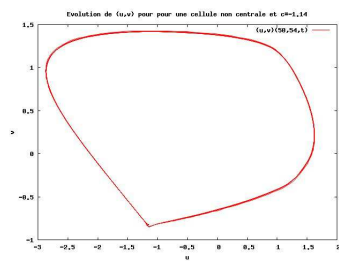
(d)



(e)

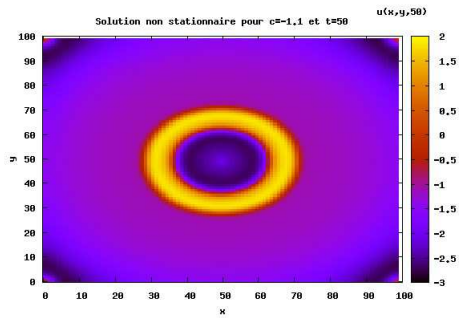


(f)

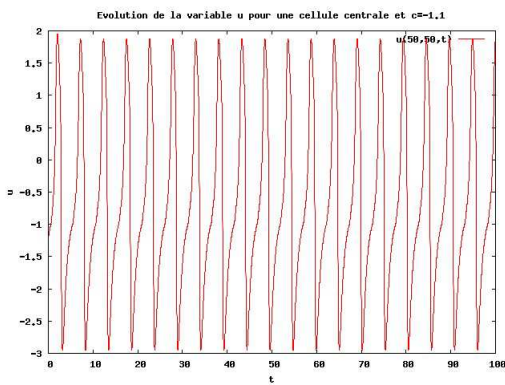


(g)

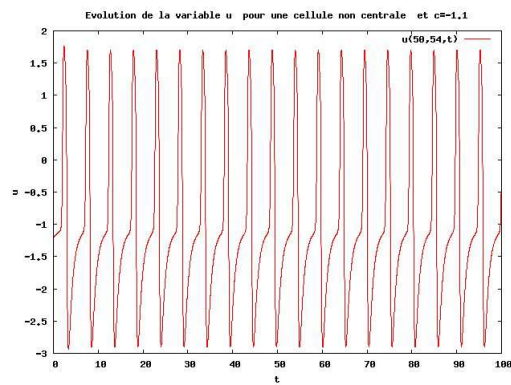
FIG. 44 – Solutions du système (12), pour f affine par morceaux et $c = -1.14$.



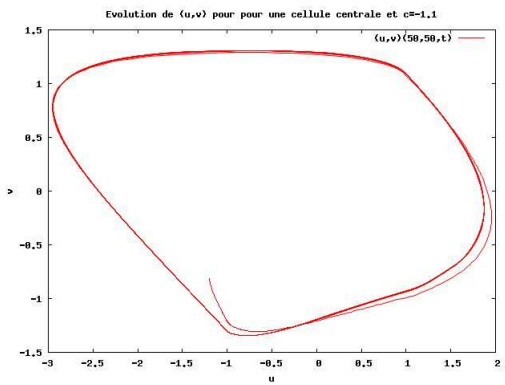
(a)



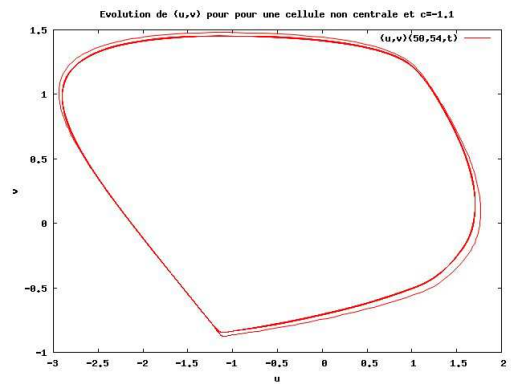
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 45 – Solutions du système (12), pour f affine par morceaux et $c = -1.1$.

Enfin, voici les vitesses de propagation des ondes pour $c = -1.1$ et $c = -1.01$

c	-1.1	-1.01
Vitesse	10.6	10.5

FIG. 46 – Vitesses de la propagation des ondes du système (12), pour f affine par morceaux, $c = -1.1$ et $c = -1.01$.

Résumé des principales propriétés observées

Les remarques sont globalement les mêmes que dans le cas cubique. Toutefois, dans le cas affine par morceaux, le théorème de la bifurcation de Hopf ne s'applique pas pour (1). Et pour $\epsilon = 0.1$, le point d'équilibre de (1) est un noeud. On ne voit donc pas apparaître les mêmes petites oscillations que dans le cas cubique. Par contre, on peut faire apparaître des petites et moyennes oscillations ($c = -1.5$, $c = -1.4$) différentes, qui semblent liées à l'opérateur de diffusion. La régularité des trajectoires est assez marquante, en ce sens que les trajectoires de toutes les cellules se ressemblent. Les déformations ne sont pas brutales comme peuvent l'être celles induites par l'opérateur des ondes. On y voit la marque de l'opérateur de diffusion, qui tend à rapprocher, pour chaque point de l'espace, les trajectoires de la moyenne des trajectoires voisines.

14 Simulations numériques pour un problème approché

On refait le même type de simulations précédentes pour un système approché de (12) obtenu en ajoutant un terme dissipatif $-\delta v$ au second membre de la seconde équation de (12). C'est à dire que l'on considère le système

$$\begin{cases} \epsilon u_t = f(u) - v + \Delta u \\ v_t = u - \delta v - c + \Delta v \end{cases} \quad (21)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0 \\ v(0, x) &= v_0 \\ \frac{\delta u}{\delta n} &= \frac{\delta v}{\delta n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega \end{aligned}$$

où n est la normale extérieure au domaine Ω . Dans le cas de ce système on peut montrer l'existence d'un attracteur global et il est intéressant de voir quelques fonctions de cet attracteur. On choisit ici $\delta = 0.01$ et

$$c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est dans l'une des quatre cellules centrales} \\ c < -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les conditions initiales sont $u(0, x, y) = -1.5$ $v(0, x, y) = 0.1$. Alors on peut observer les mêmes figures que dans le cas où $\delta = 0$, bien que sous l'effet du terme dissipatif, les valeurs de bifurcation changent. Ainsi pour

- $c = -1.3$ (voir figure 47),
le système évolue vers une solution stationnaire.
- $c = -1.195$ (voir figure 48),
le système évolue toujours vers une solution stationnaire, mais on observe des petites oscillations avant la stabilisation. Le comportement est analogue au cas où $c = -1.22$ si $\delta = 0$ et les mêmes remarques sont valables.
- $c = -1.19302$ (voir figures 49 et 50),
pour cette valeur de c , la solution n'est plus asymptotiquement stationnaire. Si l'on se limite à $T = 200$, on peut croire que les cellules centrales évoluent selon un très petit cycle limite. Cependant en augmentant le temps d'observation, on constate que l'amplitude des oscillations augmente très lentement. Pour $t \approx 1950$, la cellule s'excite et engendre une propagation d'onde sur tout le domaine. Le moment où apparaît cette propagation d'ondes dépend cette fois de la condition initiale choisie.
- $c = -1.19$ (voir figure 51),
on voit apparaître périodiquement des propagations d'ondes sur tout le domaine. Les cellules centrales effectuent d'abord des petites oscillations de type foyer répulsif, puis s'excitent et évoluent selon un grand cycle, avant de revenir près de la position d'équilibre et de renouveler l'opération. Les petites oscillations n'ont que peu d'influence sur les cellules voisines, par contre, l'évolution autour du grand cycle, les excite et génère une propagation d'onde. Le phénomène est répété périodiquement.
- $c = -1.15$ (voir figure 52),
il n'y a plus de petites oscillations pour les cellules centrales. Elles évoluent exclusivement autour du grand cycle limite, et engendrent des propagations d'ondes périodiquement.

Des simulations ont également été réalisées dans le cas où $\delta = 0.1$. Dans ce cas quelque soit la valeur de $c < -1$ choisie la solution évolue vers une solution stationnaire, on peut cependant retrouver le comportement de type pacemaker en augmentant le nombre de cellules pour lesquelles $c(x) = 0$ au centre.

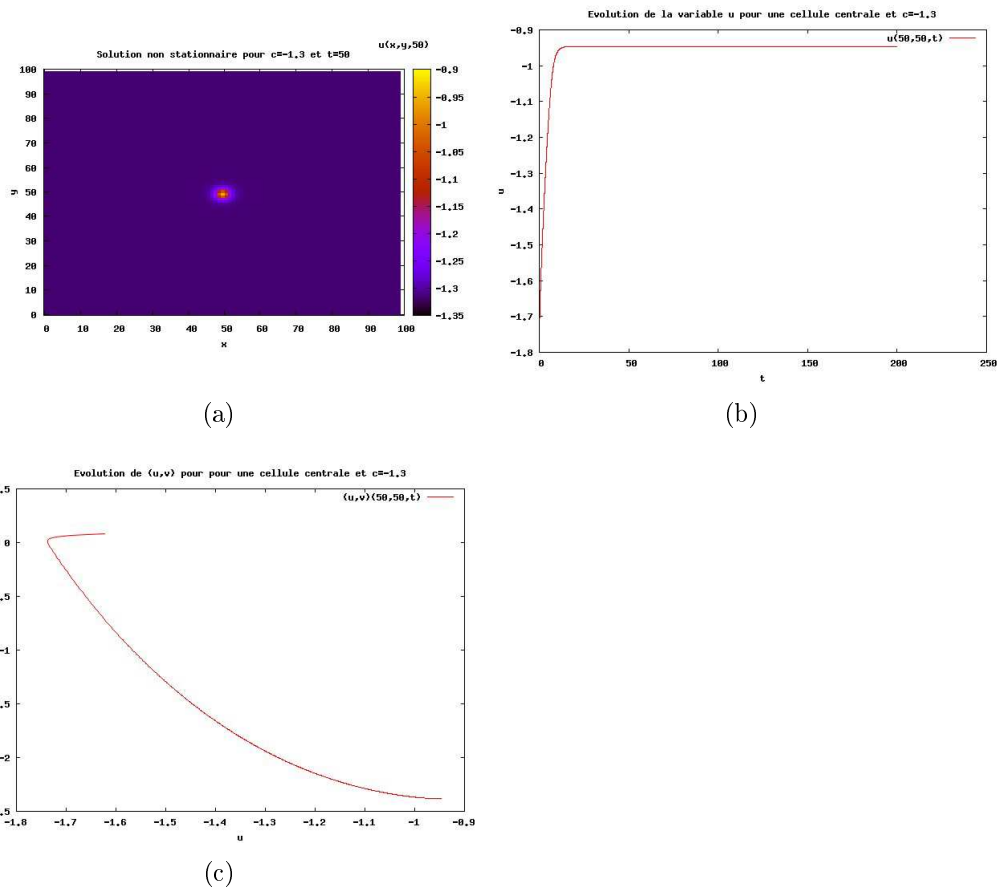
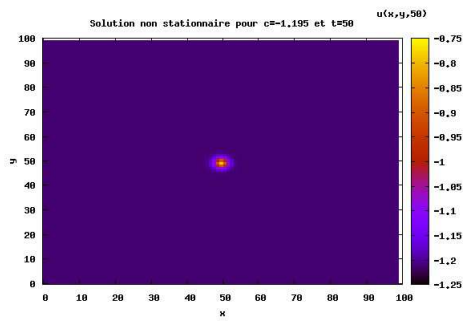
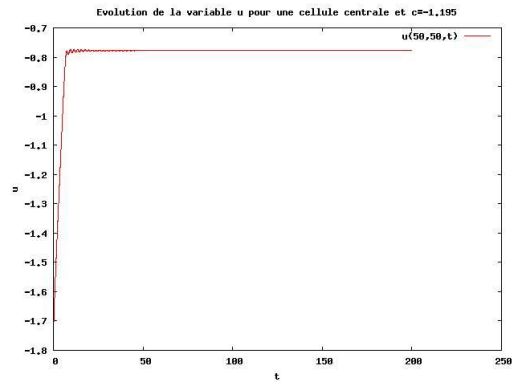


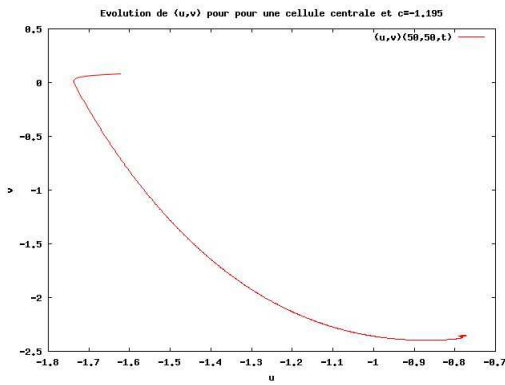
FIG. 47 – Solutions du système (21), pour $\delta = 0.01$, f cubique et $c = -1.3$.



(a)



(b)



(c)

FIG. 48 – Solutions du système (21), pour $\delta = 0.01$, f cubique et $c = -1.195$.

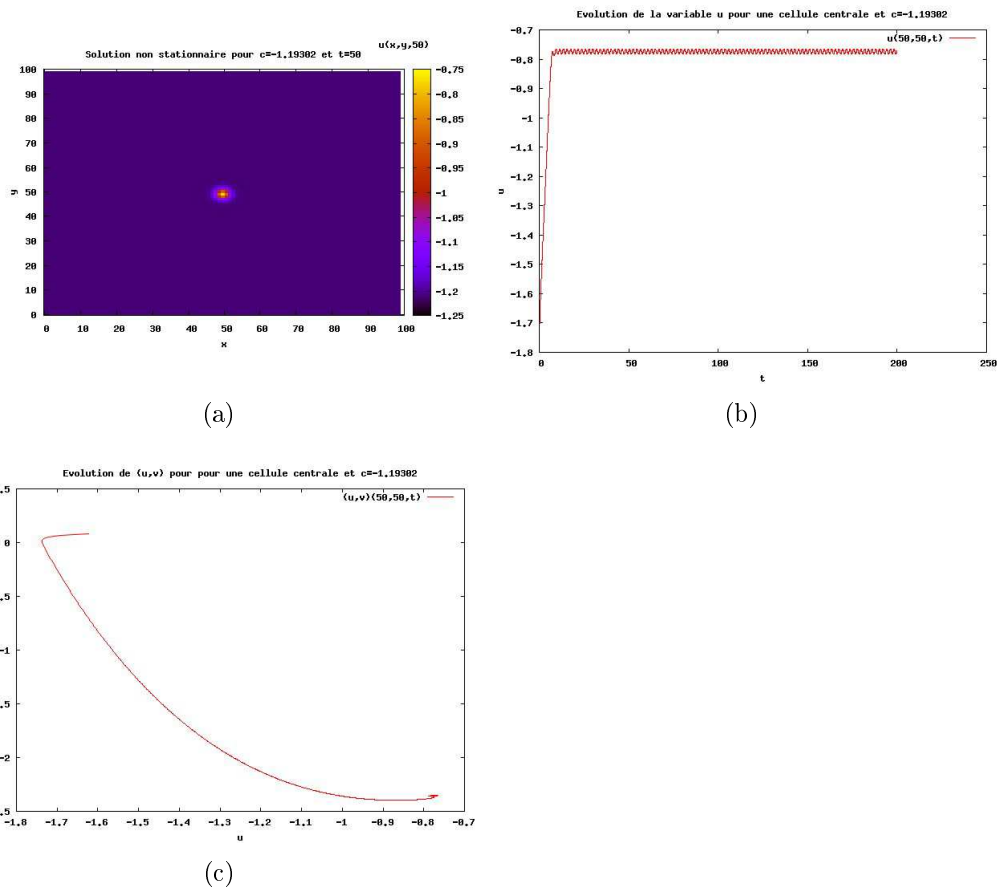
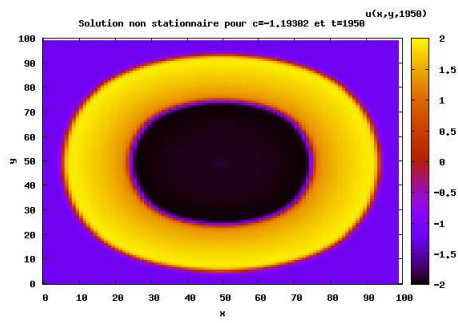
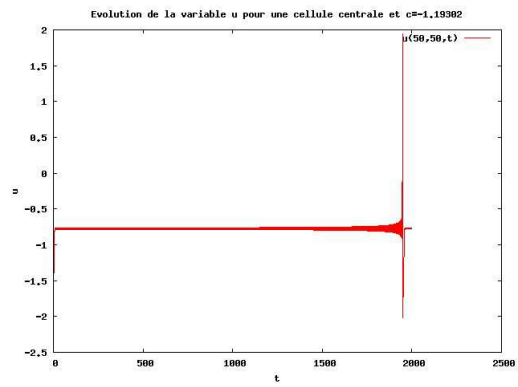


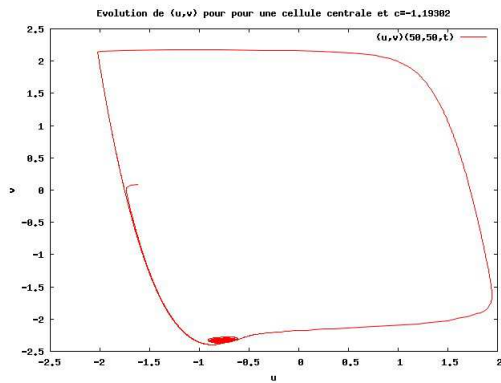
FIG. 49 – Solutions du système (21), pour $\delta = 0.01$, f cubique et $c = -1.19302$ ($T = 200$).



(a)

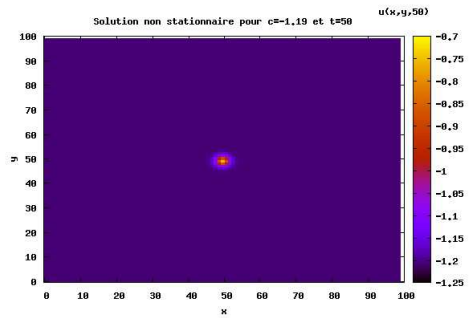


(b)

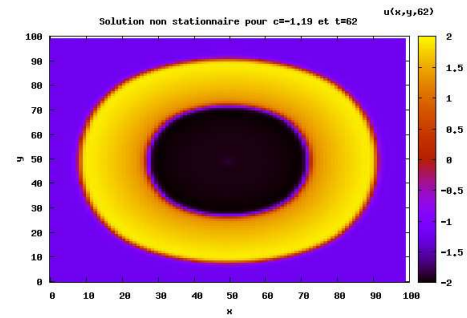


(c)

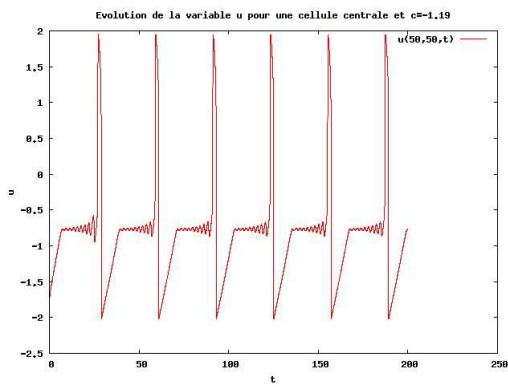
FIG. 50 – Solutions du système (21), pour $\delta = 0.01$, f cubique et $c = -1.19302$ ($T = 2000$).



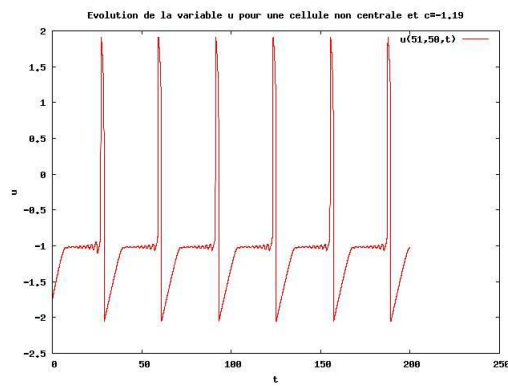
(a)



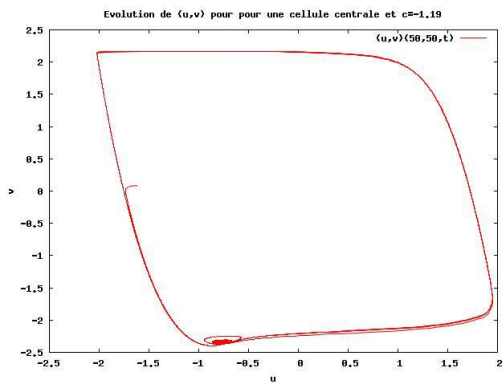
(b)



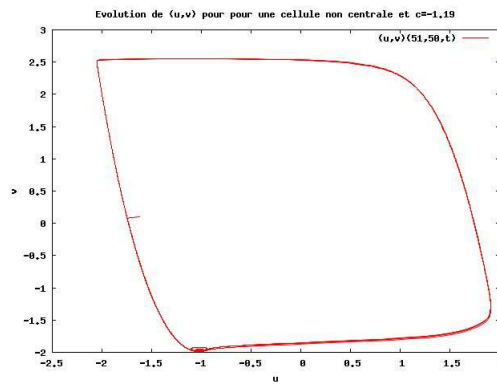
(c)



(d)

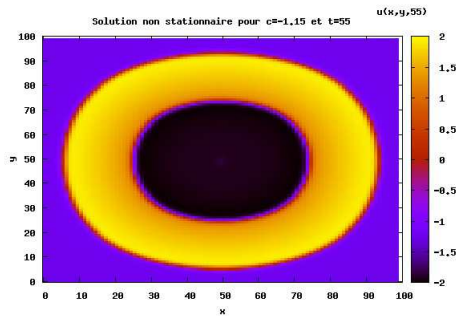


(e)

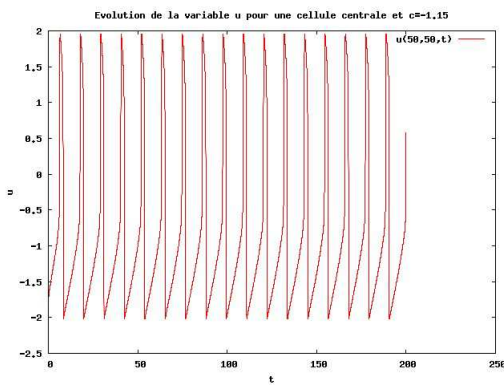


(f)

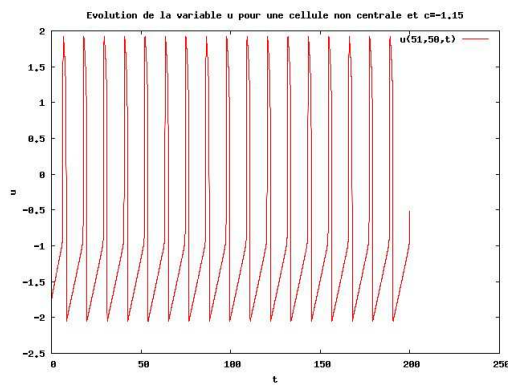
FIG. 51 – Solutions du système (21), $\delta = 0.01$, pour f cubique et $c = -1.19$.



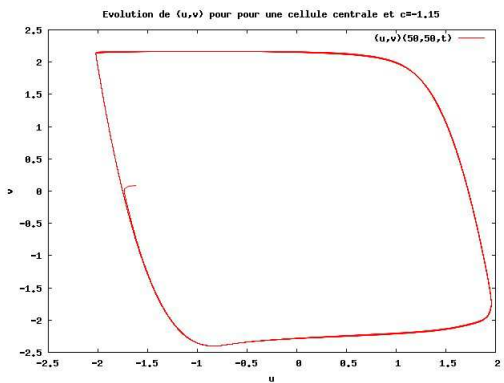
(a)



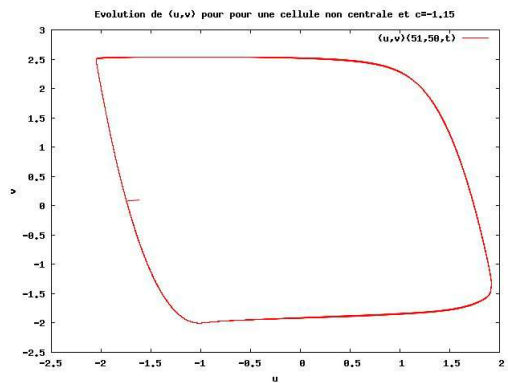
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 52 – Solutions du système (21), pour $\delta = 0.01$, f cubique et $c = -1.15$.

Remarque 4. *L'étude numérique et la compréhension des propagations d'ondes dans les milieux excitables intéressent certains physiologistes et physiciens qui travaillent sur les mécanismes de la fibrillation. Ainsi, dans [14], J. Jalife et ses collaborateurs ont testé l'effet de stimulations électriques périodiques sur des fibres de Purkinje issues du muscle cardiaque de mouton et exhibé des comportements complexes (accrochages de phases, dou-*

blement de périodes...) qui se retrouvent dans les modèles mathématiques. Ils ont également mis en évidence dans [15] des phénomènes du même type dans un modèle décrivant l'effet du nerf vagal sur les cellules du noeud sinusal. Dans [73], les auteurs montrent numériquement des phénomènes de 'death spot' et de variation de SRR pour un système de réaction diffusion assez proche de celui étudié ci-dessus. Ces phénomènes ont également été observés pour le système (21) si l'on rajoute des petits coefficients devant les laplaciens pour affaiblir la diffusion. L'étude n'a pas été poussée plus loin dans ce sens dans le cadre de la réaction diffusion mais on y reviendra dans le cadre de l'équation de type ondes à la partie 5.

15 Semi-groupes et attracteurs

Cette partie regroupe les théorèmes utilisés dans l'analyse des EDP. Elle donne un aperçu du cadre mathématique dans lequel on peut inscrire les simulations numériques. En particulier, les simulations exhibent des solutions qui attirent les conditions initiales pour un temps grand, c'est donc naturellement qu'apparaît la définition mathématique d'attracteur.

Attracteurs

Dans cette partie on suit la présentation de [67].
Soit H un espace métrique.

Définition 2. Un C^0 semi-groupe sur H est une famille d'opérateurs $S(t)_{t \geq 0}$ de H dans H qui vérifie les propriétés suivantes :

- $S(0) = Id$
- $S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(s+t)$
- $S(t)u_0$ est continu en u_0 et en t

On rappelle la notion de ω -limite d'un point u_0 de H et d'un sous ensemble A de H .

Définition 3. $\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0}$
 $\omega(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}$

Lemme 9. $\phi \in \omega(A)$ si et seulement si il existe une suite (t_n, ϕ_n) avec $t_n \rightarrow +\infty, \phi_n \in A$ tels que

$$S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Définition 4. Un sous ensemble X de H est un ensemble invariant pour $S(t)$ si

$$S(t)X = X \quad \forall t \geq 0$$

Les ensembles ω -limite constituent un exemple d'ensemble invariant.

Lemme 10. On suppose que pour $A \in H, A \neq 0$ et pour $t_0 > 0$, l'ensemble $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)$ est relativement compact dans H . Alors $\omega(A)$ est non vide compact et invariant.

On donne maintenant les définitions permettant de présenter un théorème sur l'existence d'attracteurs. Voici d'abord la définition d'un attracteur.

Définition 5. *Un attracteur est un ensemble $A \subset H$ qui vérifie les propriétés suivantes.*

A est invariant

A possède un voisinage ouvert U tel que pour tout u_0 dans U , $S(t)u_0$ converge dans A quand t tend vers $+\infty$, c'est à dire que

$$\inf_{y \in A} d(S(t)u_0, y) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

Définition 6. *On dit que $A \subset H$ est un attracteur global pour le semi-groupe $S(t)_{t \geq 0}$ si A est un attracteur compact qui attire tous les ensembles bornés de H .*

Définition 7. *Soit B un sous ensemble de H et U un ouvert contenant B . On dit que B est absorbant dans U si la trajectoire issue d'un ensemble borné quelconque de U rentre dans B après un certain temps :*

$$\forall B_0 \subset U \text{ } B_0 \text{ borné, } \exists t_0(B_0) \text{ tel que } S(t)B_0 \subset B \text{ } \forall t \geq t_0$$

On dit aussi que B attire les ensembles bornés de U

Le théorème donnant l'existence d'attracteurs nécessite des propriétés de compacité du semi-groupe.

Définition 8. *On dit que les opérateurs $S(t)$ sont uniformément compacts pour t assez grand si pour tout ensemble borné B , il existe t_0 dépendant éventuellement de B tel que*

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B \text{ est relativement compact dans } H \quad (22)$$

Lorsque H est un espace de Banach, la condition de compacité pour le semi-groupe peut être remplacée par les conditions suivantes :

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) \quad (23)$$

$$\text{Les opérateurs } S_1(t) \text{ sont uniformément compacts pour } t \text{ assez grand} \quad (24)$$

Pour tout ensemble borné $C \subset H$,

$$r_C(t) = \sup_{\phi \in C} |S_2(t)\phi|_H \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \quad (25)$$

On peut alors énoncer le théorème suivant, qui donne l'existence d'attracteurs

Théorème 14. *On suppose que H est un espace métrique et que les opérateurs $S(t)$ satisfont (22) ou (23)-(25). On suppose de plus qu'il existe un ouvert U et un ensemble borné B de U tel que B est absorbant dans U .*

Alors l'ensemble ω -limite de B , $A = \omega(B)$ est un attracteur compact qui attire tous les bornés de U . C'est l'attracteur maximal dans U . De plus si H est un espace de Banach et U est convexe et connexe, alors A est également connexe.

Fonctions de Lyapunov

Définition 9. Une fonction $\Phi \in C(H, \mathbb{R})$ est dite fonction de Lyapunov pour $S(t)_{t \geq 0}$ si on a :

$$\Phi(S(t)u) \leq \Phi(u) \forall u \in H$$

Théorème 15 (Principe d'invariance de La Salle). Soit Φ une fonction de Lyapunov pour $S(t)_{t \geq 0}$ et soit $u \in H$ tel que $\cup_{t \geq 0} S(t)u$ soit relativement compact dans H . Alors

- $c = \lim \Phi(S(t)u)$ existe
- $\Phi(y) = c \forall y \in \omega(u)$. En particulier, $\forall y \in \omega(u), \forall t \geq 0 \Phi(S(t)u) = \Phi(y)$

Définition 10. Une fonction de Lyapunov Φ pour $S(t)_{t \geq 0}$ est dite fonction de Lyapunov stricte si quelque soit $u \in H$ qui vérifie $\Phi(S(t)u) = \Phi(u) \forall t \geq 0$, u est un point d'équilibre¹⁹ de $S(t)_{t \geq 0}$.

Théorème 16. Soit Φ une fonction de Lyapunov stricte pour $S(t)_{t \geq 0}$ et soit $u \in H$ tel que $\cup_{t \geq 0} S(t)u$ soit relativement compact dans H . Soit E l'ensemble des points d'équilibre de $S(t)_{t \geq 0}$. Alors

- E est un sous ensemble non vide de H .
- $d(S(t)u, E) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$

Stabilité

Définition 11. Une trajectoire $S(t)_{t \geq 0}u^*$ du semi-groupe $S(t)_{t \geq 0}$ est dite stable si

$$\forall \epsilon, \exists \delta > 0 \text{ tels que } u \in H \text{ et } d(u, u^*) \leq \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 d(S(t)u, S(t)u^*) \leq \epsilon$$

Définition 12. Une trajectoire $S(t)_{t \geq 0}u^*$ du semi-groupe $S(t)_{t \geq 0}$ est dite asymptotiquement stable si $S(t)_{t \geq 0}u^*$ est stable et si

$$\exists \delta_1; \forall u \in H, d(u, u^*) \leq \delta_1 \Rightarrow d(S(t)u, S(t)u^*) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

Voici maintenant un théorème de stabilité (voir [33], théorème 3.1.3 p 34). On suppose que H est un espace de Banach réel, $T(t)$ un semi-groupe sur H et $F : H \rightarrow H$. Une fonction lipchitzienne sur les bornés. On considère pour tout $u_0 \in H$, l'unique solution maximale $u \in C([0, T(u_0)[, H)$ de l'équation

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds \forall t \in [0, T(u_0)[$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 17. On suppose que pour des constantes $\delta \geq 0, M \geq 1$, on a :

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\| \leq Me^{\delta t}$$

Soit $u^* \in H$ une solution stationnaire de l'équation telle que

$$\exists R_0, \exists \mu > 0 \text{ tels que } \|F(u) - F(u^*)\| \leq \mu \|u - u^*\| \text{ pour } \|u_u^*\| \leq R_0$$

avec $\mu < \frac{\delta}{M}$. Alors u^* est asymptotiquement stable.

¹⁹Un point u^* de H est un point d'équilibre de $S(t)_{t \geq 0}$ si il vérifie $S(t)u^* = u^* \forall t \geq 0$.

Régions invariantes

On considère un système de réaction-diffusion sur un domaine borné Ω de \mathbb{R}^N , avec conditions initiales et aux bords données.

$$U_t = F(U, x, t) + D\Delta U \quad (26)$$

où U est à valeurs dans \mathbb{R}^p et D est une matrice semi-définie positive. Cette définition est tirée de [66] p 199.

Définition 13 (Régions invariantes). *Un sous espace fermé Σ de \mathbb{R}^p est appelé une région (positivement) invariante pour (26) si toutes les solutions $U(x, t)$ de (26) définies sur $[0, \tau(U(0, x))$ ayant leur valeur aux bords et initiale dans Σ vérifient $U(x, t) \in \Sigma \forall x \in \Omega$ et $\forall t \in [0, \tau]$.*

Lemme 11. *On suppose que D est une matrice diagonale. Alors toute région de la forme*

$$\Sigma = \cap_{i=1}^p U : a_i \leq U_i \leq b_i$$

est invariante pour (26) dès que F pointe strictement à l'intérieur de Σ sur $\delta\Sigma^{20}$. Si par ailleurs $D = I$, alors toute région convexe Σ pour laquelle F pointe à l'intérieur de Σ sur $\delta\Sigma$ est invariante.

Un théorème d'existence locale de solutions classiques

On suppose que Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^N de classe $C^{2+\alpha}$, où $\alpha \in]0, 1[$. On considère le système (26). On suppose que $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$. Soit $0 \leq r \leq s \leq p$. Pour $s \leq l \leq p$ on note b_l des fonctions de $C^{1+\alpha}(\delta\Omega, \mathbb{R}^+)$. On suppose que les conditions aux bords sont données par :

$$d_l = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq l \leq r \quad (27)$$

$$U_l(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad r < l \leq s \quad (28)$$

$$b_l U_l(x, t) + \frac{\delta U_l}{\delta n}(t, x) = 0 \quad \text{pour} \quad s < l \leq p \quad (29)$$

Pour les conditions initiales, on suppose que :

$$U_l(x, 0) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \quad \text{pour} \quad 1 \leq l \leq r \quad (30)$$

$$U_l(x, 0) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \text{pour} \quad r < l \leq p \quad (31)$$

$$U_l(x, 0) = 0 \quad \text{pour} \quad r < l \leq s \quad (32)$$

$$-d_l \Delta U_l(x, 0) = F_l(0, x, U(0, x)) \quad \text{pour} \quad r < l \leq s \quad (33)$$

$$b_l U_l(x, 0) + \frac{\delta U_l}{\delta n}(0, x) = 0 \quad \text{pour} \quad s < l \leq p \quad (34)$$

²⁰Ce qui veut dire que pour Σ défini par $\Sigma = \cap_{i=1}^p G_i \leq c_i$, on a pour tout point U de \mathbb{R}^p tel que $G_i(U) = c_i$, on a $DG_i F(u) < 0$, ou encore que pour tout $U \in \delta\Sigma$ $F(U).n(U) < 0$ où n est la normale extérieure à Σ au point U .

On suppose aussi que pour tout ensemble borné B de $\bar{\Omega} \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}^p$ il existe une constante $L(B)$ telle que

$$|F(x, t, U)| \leq L(B) \text{ pour tout } (x, t, U) \in B$$

$$|F(x, t, U)_F(y, s, v)| \leq L(B)(|x - y|^\alpha + |t - s|^{\frac{\alpha}{2}} + |u - v|)$$

On a alors le théorème

Théorème 18. *Avec les conditions initiales et aux bords précédemment décrites, il existe un temps maximal $T_{\max} \in]0, +\infty]$, tel que le problème (26) a une unique solution classique sur l'intervalle $[0, T[$. Cette solution vérifie :*

$$U_l \in C^{\alpha, 1 + \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \quad \text{pour } 1 \leq l \leq r, \text{ pour tout } t \in]0, T_{\max}[\quad (35)$$

$$U_l \in C^{2+\alpha, 1 + \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T]) \quad \text{pour } r < l \leq p, \text{ pour tout } t \in]0, T_{\max}[\quad (36)$$

Lemme de Gronwall, lemme de Gronwall uniforme

Lemme 12 (Lemme de Gronwall). *Soit g, h, k, y quatre fonctions intégrables scalaires positives définies sur $[0, T[$ vérifiant*

$$y_t \in L^1(]0, T]) \text{ et } y_t + k \leq gy + h \text{ pour presque tout } t \in]0, T[$$

Alors

$$y(t) + \int_0^t k(s) ds \leq y(0) \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right) + \exp\left(\int_0^t g(s) ds\right) \left(\int_0^t h(s) ds\right) \text{ pour presque tout } t \in [0, T[$$

Lemme 13 (Lemme de Gronwall uniforme). *Soit g, h, y trois fonctions localement intégrables scalaires définies sur $]t_0, +\infty[$ vérifiant pour tout $t \geq t_0$*

$$y_t \in L^1_{loc}(]t_0, +\infty]) \text{ et } y_t \leq gy + h$$

$$\int_t^{t+r} g(s) ds \leq a_1, \int_t^{t+r} h(s) ds \leq a_2, \int_t^{t+r} y(s) ds \leq a_3$$

où r, a_1, a_2 et a_3 sont des constantes positives. Alors

$$\forall t \geq t_0 + r \quad y(t) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) \exp(a_1)$$

Lemme 14 (lemme de Gronwall uniforme, version simplifiée). *Soit y une fonction localement intégrable scalaires définie sur $]t_0, +\infty[$ vérifiant*

$$y_t \in L^1_{loc}(]t_0, +\infty]) \text{ et } \forall t \geq t_0 \quad y_t \leq a_1$$

$$\forall t \geq t_0 \quad \int_t^{t+r} y(s) ds \leq a_2$$

où r, a_1 et a_2 sont des constantes positives. Alors

$$\forall t \geq t_0 + r \quad y(t) \leq \frac{a_2}{r} + a_1 r$$

16 Analyse mathématique de l'EDP

16.1 Existence et unicité des solutions

Solutions faibles, solutions fortes

Dans ce paragraphe, on s'inspire du chapitre 8 du livre [63] et de [47] pour donner des théorèmes d'existence de solutions faibles et fortes pour le système (12). On trouve en effet dans [63] les démonstrations de théorèmes portant sur ce type de solutions pour une équation de Réaction-Diffusion scalaire $u_t = \Delta u + f(u)$, dans laquelle la non linéarité de f est soumise à des conditions vérifiées par la fonction $-u^3 + 3u$ apparaissant dans (12). La démonstration est faite pour les conditions aux bord de Dirichlet mais reste valable pour notre système moyennant les changements dus à la condition au bord de Neumann, et au fait que l'on ait un système et non une équation scalaire. Le même problème est traité dans [67]. Ces deux études suivent l'article [50]. On s'inspire également de l'article [29] dans lequel est démontré l'existence et l'unicité de solutions faibles et fortes pour un système de type $\lambda - \omega$ soumis aux conditions aux bords de Neumann. On réécrit presque toute la démonstration dans le cas où la fonction f de (1) est la cubique. On pose

$$V = (H^1(\Omega))^2, \quad H = (L^2(\Omega))^2$$

Et on identifie de manière usuelle H et H' de sorte que l'on a :

$$V \subset H = H' \subset V'$$

On désigne par \langle, \rangle le crochet de dualité dans H^1 ou dans H^s . Et, par $(,)$ le produit scalaire classique de L^2 . On note $\|\cdot\|$ la norme de L^2 et $\|\cdot\|_E$ ($E = L^p$ ou H^k) les normes usuelles dans les espaces considérés.

On a le théorème suivant

Théorème 19. *On suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné. On suppose de plus que Ω est de classe C^s , où s est le plus petit entier tel que $s \geq \frac{m}{4}$. On suppose que $(u_0, v_0) \in H$, alors le système (12) admet une unique solution faible vérifiant,*

$$(u, v) \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad u \in L^4(\Omega_T)$$

La première égalité du système (12) est valable dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)')$ tandis que la deuxième l'est dans $L^2(0, T; (H^1)')$. Enfin, l'application

$$(u_0, v_0) \mapsto (u(t), v(t))$$

est continue dans H .

Dire que l'égalité a lieu dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)') \times L^2(0, T; (H_1)')$ équivaut à dire que l'on a pour tout $\phi_1, \phi_2 \in L^4(0, T; H^s) \times L^2(0, T; H^1)$ ([63] lemme 7.4)

$$\begin{cases} \int_0^T \langle u_t, \phi_1 \rangle = \int_0^T \langle f(u) - v + \Delta u, \phi_1 \rangle \\ \int_0^T \langle v_t, \phi_2 \rangle = \int_0^T \langle u - c(x) + \Delta v, \phi_2 \rangle \end{cases} \quad (37)$$

Démonstration. La preuve, basée sur la méthode de compacité de Faedo-Galerkin, suit le schéma suivant : existence locale des approximations de Galerkin, existence globale de ces approximations, passage à la limite, unicité et continuité par rapport aux conditions initiales. Les détails et bases théoriques non précisés peuvent être trouvés dans les références citées plus haut.

On pose :

$$A = -\Delta \text{ avec conditions de Neumann, } D(A) = \{v \in L^2(\Omega) / \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 (v, w_i)^2 < +\infty\}$$

Où $(w_j)_{1 \leq j < +\infty}$ est la base de $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres de A , et λ_i les valeurs propres associées.

Existence locale

On pose

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n u_{nj}(t)w_j, \quad v_n = \sum_{j=1}^n v_{nj}(t)w_j$$

et on résoud :

$$\begin{cases} \epsilon(u_{nt}, w_i) &= (-u_n^3 + 3u_n - v_n - Au_n, w_i) \\ (v_{nt}, w_i) &= (u - c - Av_n, w_i) \end{cases} \quad (38)$$

$$u_{0ni} = (u(0), w_i)$$

$$v_{0ni} = (v(0), w_i).$$

On obtient un système de $2n$ équations dans lequel le terme non linéaire est localement Lipschitz, la solution est alors donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz sur un intervalle de temps T_n .

Existence globale

Pour avoir l'existence globale, il faut borner les u_n indépendamment de n . Multipliant la première et la deuxième équation de (38) par u_{ni}, v_{ni} en sommant de 1 à N , on obtient :

$$\begin{cases} \epsilon(u_{nt}, u_n) &= (-u_n^3 + 3u_n - v_n - Au_n, u_n) \\ (v_{nt}, v_n) &= (u - c - Av_n, v_n) \end{cases} \quad (39)$$

En sommant les deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \epsilon(u_n)^2 + \int_{\Omega} (v_n)^2 \right) \\ + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 &= \int_{\Omega} f(u_n)u_n - \int_{\Omega} cv_n \\ &= \int_{\Omega} (-u_n^4 + 3u_n^2) - \int_{\Omega} cv_n \\ &\leq - \int_{\Omega} u_n^4 + \frac{3}{\epsilon} \int_{\Omega} u_n^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_n^2 \end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\Omega} u_n^2 + \int_{\Omega} v_n^2 \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} u_n^4 \leq K_1 \left(\int_{\Omega} u_n^2(0) + \int_{\Omega} v_n^2(0) \right) \exp K_2 t \\ & \qquad \qquad \qquad + \exp(K_2 t) \int_0^t \int_{\Omega} c^2 \end{aligned}$$

Or $\|u_n(0)\| \leq \|u_0\|$ et $\|v_n(0)\| \leq \|v_0\|$ ([63], lemme 7.5) On a donc,

$$(u_n, v_n) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; H),$$

$$(u_n, v_n) \text{ est uniformément bornée dans } L^2(0, T; V),$$

et,

$$u_n \text{ est uniformément bornée dans } L^4(\Omega_T)$$

On pose $-u^3 = h(u)$

On a que,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |h(u)|^{\frac{4}{3}} = \int_0^T \int_{\Omega} u^4 < K$$

donc,

$$h(u_n) \text{ est uniformément bornée dans } L^{\frac{4}{3}}(\Omega_T)$$

Passage à la limite

On extrait des sous suites qui convergent faiblement :

$$\begin{aligned} (u_n, v_n) & \rightharpoonup (u, v) \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \\ u_n & \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^4(\Omega_T) \\ h(u_n) & \rightharpoonup \Phi \quad \text{dans } L^{\frac{4}{3}}(\Omega_T) \end{aligned}$$

On borne maintenant u_{nt} et v_{nt} .

Maintenant puisque $s \geq \frac{m}{4}$, on a d'après le théorème des injections de Sobolev (par exemple théorème 5.26 p 137 dans [63]), $H^s \hookrightarrow L^4$ et donc $L^{\frac{4}{3}} \hookrightarrow (H^s)'$. On a aussi $(H^1)' \hookrightarrow (H^s)'$ et $L^2 \hookrightarrow L^{\frac{4}{3}}$. Donc :

$$L^2(0, T; (H^1)') \hookrightarrow L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)'), \quad L^{\frac{4}{3}}(0, T; L^{\frac{4}{3}}) \hookrightarrow L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)')$$

Mais puisque (u_n, v_n) est uniformément bornée dans $L^2(0, T; V)$, Au_n, Av_n est uniformément bornée dans $L^2(0, T; V')$. Donc comme,

$$\epsilon u_{nt} = -Au_n + h(u_n) + 3u_n - v_n, \quad v_{nt} = -Av_n + u_n - c$$

u_{nt} est uniformément bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)')$

v_{nt} est uniformément bornée dans $L^2(0, T; (H^1)')$

On a donc que ²¹

$$\begin{aligned} \epsilon u_{nt} &\rightharpoonup \epsilon u_t & \text{dans} & L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)') \\ v_{nt} &\rightharpoonup v_t & \text{dans} & L^2(0, T; (H^1)') \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} Au_n &\rightharpoonup Au & \text{dans} & L^2(0, T; (H^1)') \\ Av_n &\rightharpoonup Av & \text{dans} & L^2(0, T; (H^1)') \end{aligned}$$

On a maintenant la convergence de tous les termes dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)')$.

On a donc

$$\begin{cases} \epsilon u_t = \Phi + 3u - v - Au & \text{dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)') \\ v_t = u - c(x, t) - Av & \text{dans } L^2(0, T; (H^1)') \end{cases}$$

Il faut maintenant montrer que :

$$\Phi = h(u)$$

Mais puisque u_n et u_{nt} sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; H^1)$ et $L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)')$, on peut extraire une sous suite ([63], Théorème 8.1 p 214) telle que :

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_T)$$

Donc $u_n \rightarrow u$ (après extraction de sous-suite) presque partout. Par la continuité de h , $h(u_n)$ tend vers $h(u)$ presque partout. Mais $h(u_n)$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(\Omega_T)$. Grâce au lemme 8.3 de [63], on peut conclure que $h(u_n) \rightharpoonup h(u)$ dans $L^{\frac{4}{3}}(\Omega_T)$ et donc $\Phi = h(u)$.

Pour la continuité des solutions de $[0, T]$ dans H . On a que $u \in L^2(0, T; H^1) \cap L^4(\Omega_T)$ et $u_t \in L^2(0, T; (H^1)') + L^{\frac{4}{3}}(\Omega_T) = (L^2(0, T; H^1) \cap L^4(\Omega_T))'$. D'autre part, $v \in L^2(0, T; H^1)$ et $v_t \in L^2(0, T; (H^1)')$. On en déduit le résultat par l'exercice 8.2 et le théorème 7.2 de [63] (remplaçant H^{-1} par $(H^1)'$, H^{-s} par $(H^s)'$...).

Pour montrer que $(u_n(0), v_n(0)) \rightarrow (u_0, v_0)$, on renvoie à [63].

Pour l'unicité et la dépendance aux conditions initiales, on considère deux solutions du problème $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$. On a alors

$$\begin{cases} \epsilon(u_1 - u_2)_t = -(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)(u_1 - u_2) + 3(u_1 - u_2) - (v_1 - v_2) + \Delta(u_1 - u_2) \\ (v_1 - v_2)_t = (u_1 - u_2) + \Delta(v_1 - v_2) \end{cases}$$

²¹En fait on a que $u_{nt} \rightharpoonup \mu$ dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H^s)')$. Donc $\int_0^T \langle u_{nt}, \phi \rangle \rightarrow \int_0^T \langle \mu, \phi \rangle$ pour tout $\phi \in L^4(0, T; H^s)$, mais $\forall \phi \in C_c^\infty(0, T; H^s)$, $\int_0^T \langle u_{nt}, \phi \rangle = -\int_0^T \langle u_n, \phi_t \rangle \rightarrow -\int_0^T \langle u, \phi_t \rangle$ donc $\mu = u_t$ par définition de la dérivée faible.

En multipliant les deux équations par $(u_1 - u_2)$ et $(v_1 - v_2)$, et en sommant, on obtient que :

$$\frac{d}{dt}(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2) \leq K(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2) \quad (40)$$

Soit par le lemme de Gronwall :

$$\|u_1 - u_2\|^2(t) + \|v_1 - v_2\|^2(t) \leq (\|u_1 - u_2\|^2(0) + \|v_1 - v_2\|^2(0)) \exp Kt$$

D'où l'unicité et la continuité par rapport aux conditions initiales. \square

Voici maintenant la version forte du théorème 19.

Théorème 20. *On suppose les hypothèses du théorème 19 vérifiées. On suppose de plus que $(u_0, v_0) \in ((H^1 \cap L^4) \times H^1)$. Alors le système (12) admet une unique solution forte*

$$u, v \in L^2(0, T; D(A)) \cap C(0, T; H^1), \quad u \in L^\infty(0, T; L^4)$$

De plus, si $m \leq 3$ l'application

$$(u_0, v_0) \mapsto (u(t), v(t))$$

est continue dans V .

Démonstration. Il faut faire d'autres estimations. On reprend (38), on remplace w_i par $-\Delta u_n$ dans la première équation et par $-\Delta v_n$ dans la seconde²² et on somme. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\epsilon \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2) \\ + \int_{\Omega} |\Delta u_n|^2 + \int_{\Omega} |\Delta v_n|^2 &= \int_{\Omega} (u_n^3 \Delta u_n - 3u_n \Delta u_n + v_n \Delta u_n - u_n \Delta v_n + c \Delta v_n) \\ &= \int_{\Omega} (-3u_n^2 |\nabla u_n|^2 + 3|\nabla u_n|^2 - \nabla c \cdot \nabla v_n) \\ &\leq 3 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla c|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \end{aligned}$$

Donc par le lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2(t) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2(t) \\ + \int_0^t (\int_{\Omega} |\Delta u_n|^2 + \int_{\Omega} |\Delta v_n|^2) \leq (\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2(0) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2(0)) \exp(Kt) + \exp(Kt) \int_0^t \int_{\Omega} c^2 \end{aligned}$$

Donc u_n et v_n sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; D(A))$ et dans $L^\infty(0, T; V)$ compte tenu des estimations précédentes. On a ensuite besoin d'autres estimations sur u_{nt} et v_{nt} .

²²Ce qui est valable car $-\Delta u_n$ et $-\Delta v_n$ sont dans le sous espace engendré par les $(w_i)_{1 \leq i \leq N}$.

On multiplie les deux équations de (38) par u_{nt} et v_{nt} , on intègre et on somme. Alors on a :

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\Omega} u_{nt}^2 + \int_{\Omega} v_{nt}^2 \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \right) &= \int_{\Omega} \left(\frac{-u_n^4}{4} \right)_t + \frac{3}{2} \int_{\Omega} (u_n^2)_t - \int_{\Omega} v_n u_{nt} + \int_{\Omega} u_n v_{nt} - \int_{\Omega} c v_{nt} \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t , on obtient :

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^t \int_{\Omega} u_{nt}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} v_{nt}^2 + \\ \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 \right)(t) + \int_{\Omega} \frac{u_n^4}{4}(t) &= \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2(0) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2(0) \right) + \int_{\Omega} \frac{u_n^4}{4}(0) + \\ & 3 \int_{\Omega} u_n^2(t) - 3 \int_{\Omega} u_n^2(0) - \int_0^t \int_{\Omega} v_n u_{nt} \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u_n v_{nt} - \int_0^t \int_{\Omega} c v_{nt} \end{aligned}$$

Et en utilisant l'inégalité $fg \leq \frac{1}{2a} f^2 + \frac{a}{2} g^2$ valable $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^t \int_{\Omega} u_{nt}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} v_{nt}^2 \\ + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2(t) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2(t) \right) + \int_{\Omega} \frac{u_n^4}{4}(t) &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2(0) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2(0) \right) + \int_{\Omega} \frac{u_n^4}{4}(0) + \\ & 3 \int_{\Omega} u_n^2(t) + \frac{1}{2a} \left(\int_0^t \int_{\Omega} u_{nt}^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} v_{nt}^2 \right) + \\ & \frac{a}{2} \left(\int_0^t \int_{\Omega} u_n^2 + \int_0^t \int_{\Omega} v_n^2 + \int_0^t \int_{\Omega} c^2 \right) \end{aligned}$$

Donc en prenant a assez grand, en repassant les termes en u_{nt} et v_{nt} de l'autre coté, et en utilisant les estimations précédemment obtenues, on a finalement que

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^t \int_{\Omega} u_{nt}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} v_{nt}^2 \\ + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2(t) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2(t) \right) + \int_{\Omega} \frac{u_n^4}{4}(t) &\leq K \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2(0) + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2(0) + 1 \right) \end{aligned}$$

Donc u_{nt} et v_{nt} sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; L^2)$ et u_n est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; L^4)$. Par extraction de sous suite, on a finalement que :

$$u \in L^\infty(0, T; L^4), u \in L^2(0, T; D(A)) \text{ et } u_t \in L^2(0, T; L^2)$$

Par le corollaire 7.3 de [63], on en déduit que $u \in C^0([0, T]; H^1)$.

Pour la continuité par rapport aux conditions initiales, on prend (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux

solutions du problème. On considère alors le système vérifié par $(u_1 - u_2)$ et $(v_1 - v_2)$. En multipliant les deux équations par $-\Delta(u_1 - u_2)$ et $-\Delta(v_1 - v_2)$, en intégrant et en sommant, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{2dt} \int_{\Omega} \epsilon |\nabla(u_1 - u_2)|^2 + |\nabla(v_1 - v_2)|^2 \\
& + \int_{\Omega} (\Delta(u_1 - u_2))^2 + \int_{\Omega} (\Delta(v_1 - v_2))^2 = 3 \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\
& \quad + \int_{\Omega} (u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)(u_1 - u_2) \Delta(u_1 - u_2) \\
& \leq 3 \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2)^2 (u_1 - u_2)^2 + \frac{1}{2} (\Delta(u_1 - u_2))^2
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{2dt} (\epsilon \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 + |\nabla(v_1 - v_2)|^2) \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta(u_1 - u_2))^2 + \int_{\Omega} (\Delta(v_1 - v_2))^2 \leq 3 \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\
& \quad + \frac{9}{8} \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2)^2 (u_1 - u_2)^2 \\
& \leq 3 \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\
& \quad + \frac{9}{8} \left(\int_{\Omega} ((u_1^2 + u_2^2)^2)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^6 \right)^{\frac{1}{3}} \\
& \leq 3 \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\
& \quad + \frac{9}{8} \left(\int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2)^3 \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^6 \right)^{\frac{1}{3}} \\
& \leq 3 \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \\
& \quad + \frac{9}{8} (\|u_1\|_{L^6}^2 + \|u_2\|_{L^6}^2)^2 \|u_1 - u_2\|_{L^6}^2
\end{aligned}$$

Mais d'après le théorème des injections de Sobolev, pour $m \leq 3$

$$H^1 \hookrightarrow L^6 \text{ et } \exists K \text{ tel que } \|u\|_{L^6} \leq K \|u\|_{H^1}$$

Donc, puisque u est bornée dans H^1 et en utilisant par ailleurs l'inégalité 40 qui a servi pour l'unicité des solutions faibles dans L^2 , on a

$$(\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 + \|v_1 - v_2\|_{H^1}^2)_t \leq K (\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 + \|v_1 - v_2\|_{H^1}^2)$$

Et par le lemme de Gronwall,

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2(t) + \|v_1 - v_2\|_{H^1}^2(t) \leq (\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 + \|v_1 - v_2\|_{H^1}^2)(0) \exp(Kt)$$

Ce qui clôt la démonstration. \square

16.2 Attracteurs, stabilité et bassin d'attraction dans le cas où $\epsilon = 1$

On pose $H = L^2 \times L^2$, $V = H^1 \times H^1$.

Dans [63], [67], [50], [51], l'existence d'attracteurs globaux dans H est prouvée pour des équations ou systèmes proches de (12). Cependant, l'absence d'un terme $-\delta v$ dans le second membre de la seconde équation de (12) ne permet pas de suivre la même démarche. Pour δ petit, le nouveau système obtenu par l'ajout de ce terme est un système approché de (12), et on peut utiliser ces techniques pour montrer l'existence d'un attracteur global dans H . Cette étude est l'objet du prochain paragraphe. Dans le cas particulier où $\epsilon = 1$, on peut également montrer l'existence d'un l'attracteur pour (12). En effet, dans ce cas, on a l'existence d'une région invariante, et on peut appliquer le théorème 1.4 p 102 dans [67] (ou théorème 5.1 p 130 de [50]), qui donne l'existence de l'attracteur. Cette étude est détaillée plus bas.

Par ailleurs, en admettant l'existence et l'unicité de la solution du système elliptique (19), (\bar{u}, \bar{v}) , on peut montrer qu'il existe un ensemble de conditions initiales autour (\bar{u}, \bar{v}) , telle que toutes les trajectoires issues de cet ensemble, tendent vers (\bar{u}, \bar{v}) dans $(L^2(\Omega))^2$ dès que $\sup_{\Omega} \bar{u} < -1$. C'est donc un résultat de stabilité qui se démontre en utilisant une fonction de Lyapunov et le principe d'invariance de La Salle.

On commence par montrer l'existence de régions invariantes selon la terminologie de [66] p 199. On rappelle qu'il s'agit de régions qui contiennent toute la trajectoire dès que les solutions initiales y sont incluses. On donne aussi un résultat sur l'existence des solutions classiques. On considère que les conditions initiales sont classiques. Grâce au théorème 1 de [64] p 111, on a l'existence et l'unicité locale de solutions classiques pour (12). L'existence de régions invariantes nous donne l'existence et l'unicité de ces solutions pour tout temps. On résume cela dans le théorème suivant.

Théorème 21. *On suppose que u_0 et $v_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in]0, 1[$. Alors l'unique solution de (12) est dans $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}([0, +\infty[\times \bar{\Omega})$. De plus, il existe une région invariante de R^2 qui contient la solution. En particulier, $\exists K$ (dépendant de u_0 et v_0) tel que l'on a $\sup_{x \in \Omega} (u^2 + v^2) < K$.*

Démonstration. L'existence et l'unicité (l'unicité à déjà été traitée puisqu'une solution classique est aussi une solution faible) des solutions classiques est assurée par le théorème 1 de [64] p 111. Toujours selon ce théorème, pour avoir l'existence pour tout temps de la solution classique, il suffit de trouver une borne L^∞ de la solution. C'est ce que l'on va faire en trouvant des régions invariantes arbitrairement grandes. Pour cela, compte tenu du fait que $\epsilon = 1$, il suffit de trouver une région convexe contenant (u_0, v_0) telle que $F(u, v) = (f(u) - v, u - c)$ pointe à l'intérieur de la région ([66] corollaire 14.8 b) p 202).

On peut trouver des quadrilatères qui vérifient ces conditions. En effet, quelque soient les conditions initiales, $\exists a_i, i = \{1, 2\}, b_j, 1 \leq j \leq 4$ tels que la région définie par :

$$\begin{aligned} v &\geq -a_1 u - b_1 \\ v &\leq -a_2 u + b_2 \\ v &\geq -b_3 \\ v &\leq b_4 \end{aligned}$$

soit invariante et contienne ces conditions initiales.

On partage R^2 en deux sous domaines séparés par la cubique $f(u) > v$ et $f(u) < v$. On choisit a_1 et b_1 de la manière suivante.

On peut trouver une droite, $v = -a_1 u - b_1$ strictement à gauche de la cubique pour $u < c_{max}$, telle que F pointe à l'intérieur du demi espace situé au dessus de cette droite. Il suffit pour cela que

$$\frac{u - c_{max}}{(f(u) - (-a_1 u - b_1))} > -a_1$$

Ce qui équivaut à

$$a_1 u^3 - (3a_1 + a_1^2 + 1)u - a_1^2 - a_1 b_1 + c_{max} < 0$$

Ce qui est possible en prenant a_1 et b_1 assez grands. On choisit $b_3 = a_1 c_{max} + b_1$ de sorte que la droite $v = -b_3$, la droite $u = c_{max}$ et la droite précédemment construite soient concourantes. Les valeurs a_2, b_2 et $b_4 = -a_2 c_{min} + b_2$ sont choisies de manière analogue pour la région $f(u) < v$ en remplaçant c_{max} par c_{min} . Le quadrilatère ainsi défini, donne la région invariante souhaitée. \square

L'existence d'une région invariante D induit l'existence d'un attracteur dans $L^2(\Omega; D)$ (voir les définitions dans [67]) par application du théorème 1.4 p 102 dans [67] (ou initialement théorème 5.1 p 130 de [50]). On a donc :

Théorème 22. *Dans le cas où $\epsilon = 1$, il existe des régions invariantes pour le système (12). Si D est l'une de ces régions invariantes, le semi-groupe $S(t)$ associé au système (12) ($\epsilon = 1$) possède un attracteur A borné dans $(H^1(\Omega))^2$ compact et connexe dans $L^2(\Omega; D)$. Il attire tous les bornés de $L^2(\Omega; D)$.*

On donne maintenant un résultat de stabilité asymptotique utilisant utilisant les régions invariantes, une fonction de Lyapunov et le principe d'invariance de La Salle.

Théorème 23. *On suppose que le système (19) admet une unique solution (\bar{u}, \bar{v}) . On suppose de plus que $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} < -1$, alors il existe un ensemble de conditions initiales autour de (\bar{u}, \bar{v}) tel que les trajectoires issues de cet ensemble tendent vers la solution stationnaire dans $(L^2)^2$:*

$$\|(u - \bar{u}, v - \bar{v})\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ quand } t \text{ tend vers } +\infty$$

Démonstration. On se ramène en $(0, 0)$ en posant $\tilde{u} = u - \bar{u}$ et $\tilde{v} = v - \bar{v}$, que l'on continue à noter (u, v) , alors (12) devient

$$\begin{cases} u_t = g(\bar{u}(x), u) - v + \Delta u \\ v_t = u + \Delta v \end{cases}$$

où $g(\bar{u}, u) = -u^3 - 3\bar{u}u^2 + 3(1 - \bar{u}^2)u$

(et avec conditions initiales données et conditions au bord de Neumann). On va trouver une fonction de Lyapunov pour (20) en utilisant l'intégrale première du système (3).

Lemme 15. Soit \bar{c} tel que $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} < \bar{c} < -1$, et

$$G(u, v) = \exp(6\bar{c}v) \left(-3\bar{c}u^2 - v + \frac{1}{6\bar{c}} \right)$$

on a alors

$$\forall x \in \Omega, G_u(g(\bar{u}, u) - v) + G_v u < 0$$

pour tout $(u, v) \neq (0, 0)$

Démonstration. Dans la première partie, on a vu que $G(u, v)$ est une intégrale première du système (3) :

$$\begin{cases} u_t = -3\bar{c}u^2 - v \\ v_t = u \end{cases}$$

on a en effet,

$$(-3\bar{c}u^2 - v)G_u + G_v u = 0$$

Donc,

Mais,

$$\begin{aligned} G_u(g(\bar{u}, u) - v) + G_v u &= G_u(g(\bar{u}, u) + 3\bar{c}u^2 - 3\bar{c}u^2 - v) + G_v u \\ &= G_u(g(\bar{u}, u) + 3\bar{c}u^2) \\ &= (-u^3 - 3(\bar{u} - \bar{c})u^2 + 3(1 - \bar{u}^2)u)G_u \\ &= -6\bar{c}u^2 \exp(6\bar{c}v) (-u^2 - 3(\bar{u} - \bar{c})u + 3(1 - \bar{u}^2)) \end{aligned}$$

Et le discriminant du trinôme qui apparaît en facteur est négatif :

$$\Delta = 9(\bar{u} - \bar{c})^2 + 12(1 - \bar{u}^2) < 0$$

Puisque compte tenu du fait que

$$\bar{u} < \bar{c} < -1$$

on vérifie que

$$\bar{u}^2 - 1 > (\bar{u} - \bar{c})^2$$

(car $\bar{u}^2 - 1 = (\bar{u} - 1)(\bar{u} + 1) > (\bar{u} + 1)^2 = (\bar{u} - (-1))^2 > (\bar{u} - \bar{c})^2$).

Donc

$$-u^2 - 3(\bar{u} - \bar{c})u + 3(1 - \bar{u}^2) < 0$$

et

$$G_u(g(\bar{u}, u) - v) + G_v u < 0$$

□

Remarque 5. Graphiquement, on a juste trouvé une parabole, qui est inférieure à $g(\bar{u}, u)$ si $u < 0$ et supérieure si $u > 0$ quelque soit x . Cela implique que $F(u, v) = (g(\bar{u}, u) - v, u)$ pointe à l'intérieur des trajectoires solutions de (3), situées sur les isoclines de G .

On peut maintenant trouver une fonction de Lyapunov si l'on se restreint à un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 . On a le lemme suivant qui est adapté d'un lemme de [2], (lemme 4.1, p 212).

Lemme 16. Il existe un voisinage N de \mathbb{R}^2 , tel que $\forall (u, v) \in N$ $H(t) = \int_{\Omega} G(u(x, t), v(x, t)) dx$ est une fonction de Lyapunov stricte pour (20).

Démonstration. On a :

$$H_t = - \int_{\Omega} \text{tr}((\nabla(u, v))^T \frac{\delta^2 G}{\delta u \delta v} (\nabla(u, v))) dx + \int_{\Omega} (G_u(g(\bar{u}, u) - v) + G_v u)$$

$G_u(g(\bar{u}, u) - v) + G_v u < 0$ grâce au lemme précédent. Pour conclure, il suffit maintenant de vérifier que $\frac{\delta^2 G}{\delta u \delta v}$ est définie positive pour (u, v) dans un voisinage de $(0, 0)$. On vérifie que

$$\frac{\delta^2 G}{\delta u \delta v} = -a \exp(av) \begin{pmatrix} 1 & au \\ au & \frac{a^2 u^2}{2} + av + 1 \end{pmatrix}$$

où $a = 6\bar{c}$. Donc si $X = (x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} X^t \frac{\delta^2 G}{\delta u \delta v} X &= -a \exp(av) (x^2 + 2auxy + (\frac{a^2 u^2}{2} + av + 1)y^2) \\ &= -a \exp(av) ((x + auy)^2 + (-\frac{a^2 u^2}{2} + av + 1)y^2) \\ &> 0 \text{ dès que } v < \frac{au^2}{2} - \frac{1}{a} \\ &\text{c' est à dire dès que } v < 3\bar{c}u^2 - \frac{1}{6\bar{c}} \end{aligned}$$

□

Maintenant, pour (u, v) assez petits, les isoclines de G définissent des convexes, et F pointe à l'intérieur de ces convexes, ce sont donc des régions invariantes dans lesquelles $H_t < 0$. On sait par ailleurs (voir démonstration du théorème 1.4 p 102 de [67]) que les trajectoires sont bornées dans H^1 donc compactes dans L^2 . Le théorème découle alors d'une application du principe d'invariance de La Salle (voir [13], Th. 9.2.7 p 122). □

16.3 Attracteur pour ϵ quelconque pour un problème approché

Dans [50], [51] M. Marion établit l'existence d'attracteurs globaux pour des systèmes de réaction-diffusion à diffusion anisotrope ou partielle et donne des majorations des dimensions de Hausdorff et fractale des attracteurs. Lorsque ϵ est différent de 1, le système (12) n'est pas inclus dans les systèmes étudiés dans ces articles. En ce qui concerne l'existence de l'attracteur global pour (12) dans le cas où ϵ est quelconque, le problème vient de l'absence d'un terme $-\delta v$ dans le second membre de la seconde équation. Pour un δ petit, le nouveau système (21) (voir ci-dessous) obtenu en ajoutant ce terme est un problème approché de (12). Les techniques des articles s'appliquent alors à ce nouveau problème et on peut montrer l'existence d'un attracteur global (ainsi qu'une borne dans L^∞). Cette remarque suscite une interrogation quant aux différences entre le système (12) et le système approché (21). Des simulations numériques ont été réalisées sur le système (21). Le même type de comportement que ceux décrits dans le paragraphe sur les simulations numériques du système (12) a pu être exhibé : spirales, évolution vers solutions pacemaker, évolution vers solutions stationnaires. Ce terme a tout de même un effet très 'dissipatif' : par exemple pour $\delta = 0.1$, $c(x) = 0$ sur les quatre cellules centrales, et $c(x) = -1$ ailleurs, on n'obtient plus de pacemaker alors que la valeur $c = -1$ correspond à la valeur la plus facilement excitable. Par contre, on peut obtenir le comportement pacemaker en augmentant le nombre de cellules au centre pour lesquelles $c = 0$. Pour $\delta = 0.01$, les simulations numériques montrent un comportement similaire au cas $\delta = 0$. Dans ce paragraphe on énonce et on démontre des théorèmes sur l'attracteur global pour (21) sur la base de [51] et [50]. L'étude ne porte pas sur la dimension des attracteurs, mais ceci constitue une éventuelle perspective. Soit donc le système

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v + \Delta u \\ v_t &= u - \delta v - c + \Delta v \end{cases} \quad (21)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0 \\ v(0, x) &= v_0 \\ \frac{\delta u}{\delta n} &= \frac{\delta v}{\delta n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega \end{aligned}$$

où n est la normale extérieure au domaine Ω . On pose ici $H = (L^2(\Omega))^2$ et $V = (H^1(\Omega))^2$. On pose également pour toute fonction u de H^1 , $|u|^2 = \int_\Omega u^2$ et $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 24. *Le semi-groupe $S(t)$ associé au système (21) possède un attracteur global connexe dans H .*

Démonstration. La démonstration suit celle de [51]. Pour montrer le résultat, on montre l'existence d'un ensemble absorbant dans H . On montre ensuite l'existence d'un ensemble absorbant dans V , qui attire tous les bornés de H . Ceci implique que les opérateurs $S(t)$ sont uniformément compacts (voir définition dans [67] p 23) grâce à l'injection compacte

de H^1 dans L^2 et permet de conclure par application du théorème 1.1 p 23 dans [67].

a) Ensemble absorbant dans H

On multiplie respectivement les deux équations par u , v , on intègre et on somme. On obtient :

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon|u|^2 + |v|^2) + \|u\|^2 + \|v\|^2 = \int_{\Omega} f(u)u - \delta|v|^2 - \int_{\Omega} cv$$

Puisque $f(u) = -u^3 + 3u$ il existe k_1 et k_2 tels que $f(u)u \leq -k_1u^4 + k_2$, donc

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon|u|^2 + |v|^2) + \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq -k_1 \int_{\Omega} u^4 + k_2|\Omega| - \delta|v|^2 - \int_{\Omega} cv$$

Et grâce à l'inégalité de Young, on a pour tout $a > 0$,

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon|u|^2 + |v|^2) + \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq -k_1 \int_{\Omega} u^4 + k_2|\Omega| - \delta|v|^2 + \frac{1}{2a}|c|^2 + \frac{a}{2}|v|^2$$

Par ailleurs, encore par application de l'inégalité de Young,

$$|u|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^4 + \frac{|\Omega|}{2}$$

donc,

$$- \int_{\Omega} u^4 \leq -2|u|^2 + |\Omega|$$

Finalement, on peut trouver des constantes strictement positives que l'on renomme k_1 , k_2 , k_3 (ne dépendant que de Ω , f , ϵ , c et δ) telles que

$$\frac{d}{dt}(\epsilon|u|^2 + |v|^2) + \|u\|^2 + \|v\|^2 + k_1 \int_{\Omega} u^4 \leq k_2 - k_3(\epsilon|u|^2 + |v|^2) \quad (41)$$

Donc d'après le lemme de Gronwall,

$$\epsilon|u|^2 + |v|^2 \leq (\epsilon|u_0|^2 + |v_0|^2) \exp(-k_3 t) + \frac{k_2}{k_3}(1 - \exp(-k_3 t)) \quad (42)$$

Cette inégalité nous donne l'existence d'un ensemble absorbant dans H : il existe $\beta > 0$, tel que pour tout ensemble borné B de H , il existe un temps $T(B)$ tel que $S(t)B \subset B_0$ pour tout $t > T$, où B_0 est la boule de rayon β dans H . Soit $r > 0$, dans la suite k_1 , k_2 , k_3 et K désignent des constantes génériques qui ne dépendent que de Ω , c , f , ϵ , r , δ . Maintenant, en intégrant (41) entre t et $t+r$, on obtient :

$$\int_t^{t+r} (\|u\|^2 + \|v\|^2) + k_1 \int_t^{t+r} \int_{\Omega} u^4 \leq k_2 r + (\epsilon|u|^2 + |v|^2)(t)$$

Et donc,

$$\int_t^{t+r} (\|u\|^2 + \|v\|^2) + k_1 \int_t^{t+r} \int_{\Omega} u^4 \leq k_2 r + K \text{ pour } t > T \quad (43)$$

On veut maintenant montrer que les opérateurs $S(t)$ sont uniformément compacts.

Compacité uniforme des opérateurs $S(t)$

En multipliant les deux équations de (21) respectivement par $-\Delta u$, $-\Delta v$, en intégrant et en sommant, on obtient après utilisation des formules de Green :

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon \|u\|^2 + \|v\|^2) + \int_{\Omega} (\Delta u)^2 + \int_{\Omega} (\Delta v)^2 = - \int_{\Omega} f(u) \Delta u + \delta \int_{\Omega} v \Delta v + \int_{\Omega} c \Delta v$$

Grâce aux inégalités de Young et de Hölder, on obtient après calculs

$$\frac{d}{2dt}(\epsilon \|u\|^2 + \|v\|^2) + k_1 \int_{\Omega} (\Delta u)^2 + k_1 \int_{\Omega} (\Delta v)^2 \leq k_3 \int_{\Omega} u^6 + K \text{ pour } t > T$$

On va voir que l'on a pour tout $t > T + r$ $\int_t^{t+r} \int_{\Omega} u^6 < K$. Ceci implique par application du lemme de Gronwall uniforme (voir [51] p 822) que

$$\epsilon \|u\|^2 + \|v\|^2 \leq K \text{ pour } t > T + 2r$$

Ce qui montre l'existence d'un ensemble absorbant dans V qui attire les bornés de H . Pour clore la démonstration, il reste à vérifier que

$$\int_t^{t+r} \int_{\Omega} u^6 < K \text{ pour } t > T + r$$

En multipliant la première équation de (21) par u^3 , on obtient :

$$\frac{d}{4dt} \epsilon \int_{\Omega} u^4 = \int_{\Omega} f(u) u^3 - \int_{\Omega} v u^3 + \int_{\Omega} \Delta u u^3 \quad (44)$$

$$= \int_{\Omega} f(u) u^3 - \int_{\Omega} v u^3 - 3 \int_{\Omega} u^2 |\nabla u|^2 \quad (45)$$

$$\leq \int_{\Omega} (-k_1 u^4 + k_2) u^2 - \int_{\Omega} v u^3 \quad (46)$$

Puis grâce à l'inégalité de Young

$$\frac{d}{4dt} \epsilon \int_{\Omega} u^4 + k_1 \int_{\Omega} u^6 \leq k_2 |u|^2 + k_3 |v|^2 \quad (47)$$

Par le lemme de Gronwall uniforme on a

$$\int_{\Omega} u^4 \leq K \text{ pour } t > T + r$$

et donc en intégrant (47)

$$\int_t^{t+r} \int_{\Omega} u^6 < K \text{ pour } t > T + r$$

□

On a également une borne dans L^∞ . Plus précisément, on a :

Théorème 25. *Pour tout ensemble borné B de H , il existe $T(B) > 0$ et $K > 0$ tels que $|S(t)B|_{L^\infty} < K$ pour tout $t > T$.*

Démonstration. On commence par un lemme,

Lemme 17. *Pour tout ensemble borné B de H , pour tout q dans $[1, +\infty[$, il existe $T(B, q) > 0$ et $K(q) > 0$ tels que $|S(t)B|_{L^q} < K(q)$ pour tout $t > T$.*

Démonstration. On pose $\alpha(k) = 2k + 2$.

Soit T le temps nécessaire pour que $S(t)B$ rentre dans l'ensemble absorbant de H . Dans la suite K désigne une constante générique. On montre par récurrence que

$$\begin{cases} \exists K \text{ tel que } |S(t)B|_{L^{\alpha(k)}} \leq K \text{ pour } t \geq T + kr \\ \sup_{(u_0, v_0) \in B} \int_t^{t+kr} |u|^{\alpha(k+1)} \leq K \text{ pour } t \geq T + kr \end{cases}$$

On a vu que le résultat est vrai au rang 0 et au rang 1. Supposons le vrai jusqu'au rang $(k - 1)$.

En multipliant la première équation par $u^{\alpha(k)-1}$, on obtient :

$$\epsilon \frac{d}{\alpha(k)dt} \int_{\Omega} u^{\alpha(k)} = \int_{\Omega} f(u)u^{\alpha(k)-1} - \int_{\Omega} vu^{\alpha(k)-1} + \int_{\Omega} \Delta u u^{\alpha(k)-1}$$

Puis,

$$\epsilon \frac{d}{\alpha(k)dt} \int_{\Omega} u^{\alpha(k)} \leq -k_1 \int_{\Omega} u^{\alpha(k)+2} + k_2 \int_{\Omega} u^{\alpha(k)-1} + \int_{\Omega} |v||u|^{\alpha(k)-1}$$

ou encore puisque $\alpha(k) + 2 = \alpha(k + 1)$

$$\epsilon \frac{d}{\alpha(k)dt} \int_{\Omega} u^{\alpha(k)} \leq -k_1 \int_{\Omega} u^{\alpha(k+1)} + k_2 \int_{\Omega} u^{\alpha(k)-1} + \int_{\Omega} |v||u|^{\alpha(k)-1}$$

Mais posant $p = \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)-1}$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a grâce à l'inégalité de Young,

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha(k)-1} \leq K(a) + a \int_{\Omega} u^{\alpha(k+1)}$$

pour a aussi petit que l'on souhaite.

Et

$$\int_{\Omega} |v||u|^{\alpha(k)-1} \leq K(a) \int_{\Omega} |v|^q + a \int_{\Omega} |u|^{\alpha(k+1)}$$

On vérifie alors que $q \leq \alpha(k - 1)$ et donc,

$$\int_{\Omega} |v|^q \leq K + \int_{\Omega} v^{\alpha(k-1)}$$

Finalement,

$$\frac{d}{\alpha(k)dt} \epsilon \int_{\Omega} u^{\alpha(k)} + k_1 \int_{\Omega} u^{\alpha(k+1)} \leq K \text{ pour } t > T + (k - 1)r$$

Et par application du lemme de Gronwall uniforme,

$$\int_{\Omega} u^{\alpha(k)} \leq K, \quad \int_t^{t+r} \int_{\Omega} u^{\alpha(k+1)} \leq K \text{ pour } t > T + kr$$

Pour démontrer le lemme il reste à montrer que

$$\int_{\Omega} v^{\alpha(k+1)} \leq K$$

Ceci se montre en multipliant la deuxième équation par $v^{\alpha(k)-1}$, en utilisant l'inégalité de Young et en intégrant. \square

Pour terminer la démonstration, on écrit que

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)(f(u(s)) + u(s) - v(s))ds$$

où T désigne le semi-groupe généré par l'équation $\epsilon u_t = \Delta u - u$. On sait alors que (voir [51]) :

$$|T(t)\phi|_{L^\infty} \leq cm(t)e^{-\lambda t}|\phi|_{L^N}$$

où λ est la plus petite valeur propre associée à l'opérateur $-\Delta u + u$ avec conditions aux bords de Neumann et $m(t) = \min(1, t)$.

Alors par le lemme précédent,

$$|u|_{L^N} \leq K, |f(u) + u - v|_{L^N} \leq K$$

Ce qui implique que

$$|u(t)|_{L^\infty} \leq K \text{ pour } t > T(N)$$

Et de même

$$|v(t)|_{L^\infty} \leq K \text{ pour } t > T(N)$$

\square

En fait pour $\delta > 0$, le système admet une région invariante D qui est un rectangle. On peut donc aussi appliquer le théorème 1.4 p 102 de [67] (ou théorème 5.1 p 130 de [50]) pour avoir l'existence d'un attracteur dans $L^2(\Omega; D)$. On montre donc ici l'existence d'une région invariante pour le système (21)

Lemme 18. *Il existe un rectangle qui est une région invariante pour (21).*

Démonstration. D'après le résultat que l'on trouve dans [66] (Corollaire 14.8 p 202), il suffit de trouver un rectangle tel que le champ de vecteurs associé au système (21) sans diffusion pointe strictement à l'intérieur du rectangle ²³.

On pose

$$c_m = \inf_{x \in \Omega} c, \quad c_M = \sup_{x \in \Omega} c$$

²³Le rectangle trouvé ici est tel que le champ de vecteur pointe strictement à l'intérieur du rectangle sauf pour trois des coins, mais on peut le déformer un peu pour que cela soit vrai en tout point.

On pose également

$$d_m(u) = \frac{1}{\delta}(u - c_m), \quad d_M(u) = \frac{1}{\delta}(u - c_M)$$

Par abus de notation on note d_m (resp. d_M) la droite d'équation $v = d_m(u)$ (resp. $d_M(u)$).

On va construire un rectangle $AA_2A_3A_4$ qui soit invariant.

On note (u_{A_i}, v_{A_i}) les coordonnées du point A_i , et C_f la courbe représentative de f .

On choisit les A_i de la manière suivante :

- A_1 sur la cubique et tel qu'il soit au dessus des deux droites.
- A_2 à l'intersection de la droite d'équation $u = u_{A_1}$ et d_M (les champs de vecteurs situés sur les segment A_1A_2 pointent vers la droite puisque dans cette zone $u_t > 0$).
- A_3 à l'intersection de la droite d'équation $v = v_{A_2}$ et C_f .
- A_4 à l'intersection de la droite d'équation $u = u_{A_3}$ et d_m

On choisit finalement A comme le projeté orthogonal de A_4 sur la droite A_1A_2 . Alors pour que le rectangle soit une région invariante il suffit qu'il contienne les "deux bosses" de la cubique ce qui est vrai dès qu'il est assez grand et surtout que A soit au dessous de A_1 .

Il suffit donc de montrer que pour u_{A_1} assez petit, on a $v_{A_4} < v_{A_1}$.

On choisit u_{A_1} assez petit pour que $v_{A_1} > 0$ et $v_{A_4} > f(1) = 2$. Alors cela revient à montrer que

$$v_{A_1} > v_{A_4}$$

Mais,

$$v_{A_1} = f(u_{A_1})$$

et

$$v_{A_4} = d_M(u_{A_3}) = d_M(f^{-1}(v_{A_2})) = d_M(f^{-1}(d_m(u_{A_1})))$$

Comme $f(u) = -u^3 + 3u$, on vérifie que

$$f(u_{A_1}) - d_M(f^{-1}(d_m(u_{A_1}))) \rightarrow +\infty \text{ quand } u_{A_1} \rightarrow \text{vers } -\infty$$

et donc,

$$v_{A_1} > v_{A_4} \text{ pour } u_{A_1} \text{ assez petit.}$$

□

Cinquième partie

Propagation d'ondes à partir d'un
pacemaker central dans un milieu
excitable

Cas d'une EDP de type équation des
ondes avec hétérogénéité spatiale

Dans cette partie, on reprend l'idée de la partie précédente : on utilise les propriétés oscillantes et excitables du système (1) pour générer des propagations d'ondes périodiquement à partir d'un pacemaker central. La motivation en est l'analogie avec la conduction électrique dans le coeur et les liens avec la fibrillation ventriculaire. On se place dans un domaine borné Ω de R^2 . On fait dépendre c de x , de telle sorte, qu'au centre du domaine, le système soit oscillant et qu'il soit facilement excitable ($c < -1$ et c proche de -1) ailleurs. On cherche à obtenir des propagation d'ondes périodiques en utilisant un couplage par l'équation des ondes. Comme dans la partie précédente, les simulations numériques montrent que ceci est exact si les cellules sont facilement excitables mais non si elles sont difficilement excitables ($c \ll -1$). On présente d'abord une étude numérique. On fait varier la valeur de $c(x)$ pour des x non au centre afin de voir à partir de quand apparaissent les propagations d'ondes. On observe alors, que pour les valeurs de $c(x)$ éloignées du seuil d'excitabilité -1 , la solution évolue vers la solution stationnaire, et que pour des valeurs proches de -1 , on obtient les ondes générées par un pacemaker central. Les valeurs de transition sont intéressantes et permettent d'observer des trajectoires périodiques assez complexes, telles que l'évolution alternée autour de deux cycles limites. Par ailleurs, chaque oscillation des cellules centrales n'entraîne pas forcément de propagation d'onde sur tout le domaine, et on verra un cas où l'on peut faire varier le rapport entre nombre d'oscillations des cellules centrales et nombre de propagations d'ondes. Les études numériques montrent que le comportement est lié à la valeur de la solution stationnaire. Plus précisément, on a vu dans la première partie, que la valeur du paramètre c détermine le comportement du système sans diffusion (1). Ainsi si $|c| > 1$, le système tend vers l'unique point stationnaire, tandis que si $|c| < 1$ le système tend vers l'unique cycle limite. Les simulations numériques montrent que l'on a le même type de comportement puisqu'on observe une transition entre évolution vers la solution stationnaire et évolution vers une solution périodique. Dans le cas de l'équation des ondes, on a observé sur les simulations numériques effectuées que si pour tout x la solution stationnaire (\bar{u}, \bar{v}) vérifie $\sup_{x \in \Omega} \bar{u}(x) < -1$ le système tend vers la solution stationnaire, tandis que si $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} \in]-1, 1[$ alors le système semble évoluer vers une solution périodique. On inclut ensuite une analyse mathématique. On a l'existence et l'unicité des solutions à valeurs dans $C(0, +\infty; H^1) \times C(0, +\infty; L^2)$. On s'intéresse alors à la stabilité. Dans ce cas, l'existence et l'unicité de la solution stationnaire est donnée par un théorème classique. On a également un principe du maximum. Dans le cas de la dimension 1, on calcule explicitement cette solution en fonction de c . On montre également que si c est paire et décroissante sur $[0, l[$, il en est de même de \bar{u} . On donne alors la stabilité asymptotique de cette solution stationnaire dans le cas $N = 1$. On n'a pas étudié dans ce cas l'existence des attracteurs globaux ni les solutions périodiques.

On considère maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v \\ v_t &= u - c(x) - \Delta u \end{cases} \quad (48)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0 \\ v(0, x) &= v_0 \\ \frac{\delta u}{\delta n} &= \frac{\delta v}{\delta n} = 0. \end{aligned}$$

On pose également $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$.

Ce système est équivalent à l'équation de type ondes suivante :

$$\epsilon u_{tt} = f'(u)u_t - u + c + \Delta u \quad (49)$$

On introduit également l'équation elliptique associée :

$$\begin{cases} v = f(u) \\ 0 = u - c(x) - \Delta u \end{cases} \quad (50)$$

avec les conditions aux bords de Neumann.

Cette équation admet une unique solution notée (\bar{u}, \bar{v}) . Après changement de variable, le système (48) devient :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = g(\bar{u}(x), u) - v \\ v_t = u - \Delta u \end{cases} \quad (51)$$

où $g(\bar{u}, u) = -u^3 - 3\bar{u}u^2 + 3(1 - \bar{u}^2)u$

(et avec conditions initiales données et conditions au bord de Neumann). Par analogie avec le système sans diffusion (1) ou plutôt (2), il apparait que la fonction \bar{u} doit jouer un rôle important dans le comportement asymptotique des trajectoires.

17 Simulations numériques, variations du paramètre c

Comme dans le cas de la Réaction-Diffusion, on décrit le comportement du système pour les valeurs qui semblent caractéristiques.

17.1 Le cas où f est cubique

– $c = -1.8$ (voir figure 53),

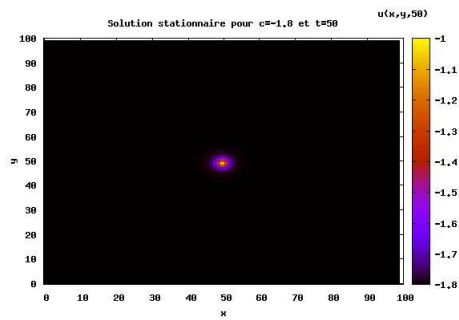
pour cette valeur ce c , le système évolue vers une solution stationnaire. Il convient de noter que $\sup u < -1$. Dans le cas du couplage par l'opérateur des ondes, on n'a pas observé de solutions stationnaires telles que $\sup u \in]-1, 1[$. En fait, on a observé dans les simulations numériques effectuées, que les trajectoires n'évoluent plus vers la solution stationnaire dès que $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} = \bar{u}(0, 0)$ traverse la valeur -1 .

– $c = -1.725$,

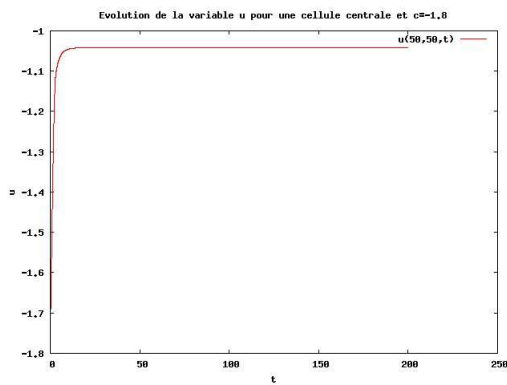
il n'y a pas de propagation d'ondes, mais le système n'évolue plus vers une solution stationnaire. La cellule centrale semble évoluer très lentement, tel un foyer répulsif, vers un petit cycle limite. Ce cycle limite, est trop petit pour exciter les cellules voisines. L'excitation ne se transmet donc pas. Dans ce cas, la solution n'est plus stationnaire et $\limsup(u(0, 0, t) \in]-1, 1[$.

- $c = -1.7$ (voir figure 54),
il n'y a toujours pas de propagation d'ondes. Pour les cellules au centre, on a une solution périodique, qui évolue comme un foyer répulsif puis s'excite. Elle excite alors sa voisine. L'excitation se transmet pour les premières cellules mais pour la troisième cellule (en partant des cellules centrales, en fait $u(50, 52, t)$), alors qu'elle commence à s'exciter, la cellule précédente termine son excitation, et par le couplage, l'empêche de s'exciter en la ramenant dans le sens opposé. Ce changement de direction est induit par la variation rapide de la valeur de Δu . Alors que la valeur négative de $-\Delta u$ initie l'excitation, le retour rapide de la cellule précédente rend brusquement $-\Delta u$ grand, donc v_t grand ce qui la fait remonter dans l'espace des phases et inhibe l'excitation. C'est ce qui provoque la fin de la propagation d'onde. Il semble que la valeur du point d'équilibre, trop petite, induit un intervalle de temps trop important entre l'excitation d'une cellule et la suivante ce qui met fin à la propagation d'onde à partir d'une certaine cellule, selon le mécanisme précédent. On observe ici une différence avec le cas de la réaction-diffusion, où chaque grande oscillation de la cellule centrale entraîne une propagation d'onde sur tout le domaine.
- $c = -1.5$ (voir figure 55),
pour $c_2 = -1.5$, il y a propagation d'ondes sur tout le domaine une fois sur deux. Plus précisément, la cellule du milieu s'excite périodiquement comme un foyer répulsif et elle évolue autour du grand cycle périodiquement. Mais chaque passage autour du grand cycle limite n'entraîne pas une propagation d'onde sur tout le domaine. Une fois l'onde d'excitabilité s'arrête au bout de quelques cellules, une fois elle se propage sur tout le domaine. Le mécanisme provoquant l'arrêt de l'onde est le même que précédemment.
Pour deux grandes oscillations de la cellule centrale, on a une propagation d'onde. Ce rapport peut changer avec la valeur du paramètre c comme le montrent les observations suivantes.
- $c = -1.552$,
il y a propagation d'ondes sur tout le domaine une fois sur quatre. Pour cette valeur de c , chaque grande oscillation de la cellule centrale entraîne sa voisine une fois sur deux. Tandis que l'oscillation de cette même cellule voisine entraîne la 6ème cellule ($u(50, 56, t)$) une fois sur deux. Ensuite à chaque oscillation de cette cellule, il y a propagation d'onde sur tout le domaine à chaque fois. Donc, finalement, une propagation d'onde sur tout le domaine pour quatre grandes oscillations de la cellule centrale.
- $c = -1.46$,
il y a propagation d'ondes sur tout le domaine deux fois sur trois.
- $c = -1.458$,
il y a propagation d'ondes sur tout le domaine trois fois sur cinq.
- $c = -1.4$ (voir figure 55),
il y a propagation d'ondes sur tout le domaine à chaque fois. Les cellules centrales évoluent tout d'abord comme un foyer répulsif puis font un grand tour. Chaque grande oscillation se propage sur tout le domaine, il y a donc propagation d'ondes à chaque fois.
- $c = -1.1$,

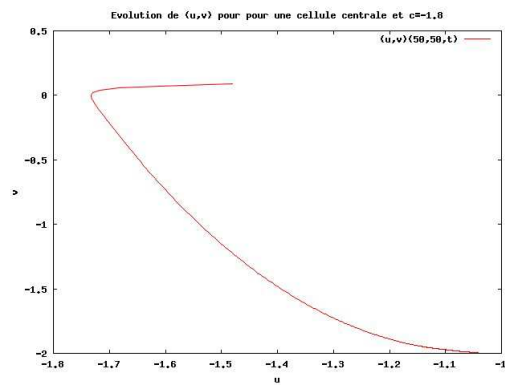
il y a propagation d'ondes sur tout le domaine pour chaque oscillation des cellules centrales. Ici, les cellules centrales ne passent plus par une évolution de type foyer répulsif.



(a)

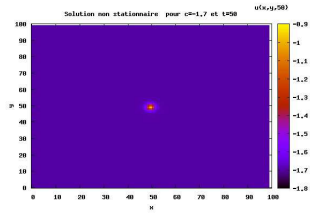


(b)

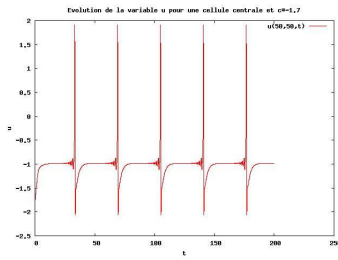


(c)

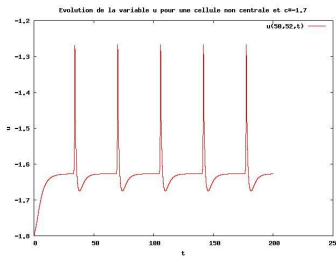
FIG. 53 – Solutions du système (48), pour f cubique et $c = -1.8$.



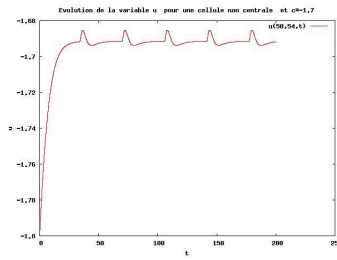
(a)



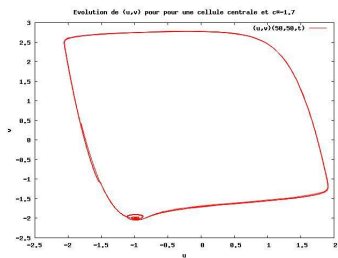
(b)



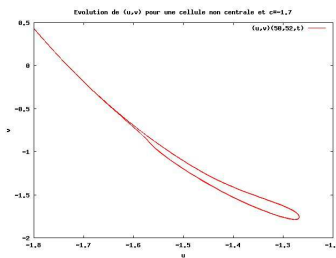
(c)



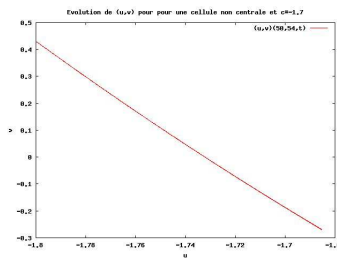
(d)



(e)



(f)



(g)

FIG. 54 – Solutions du système (48), pour f cubique et $c = -1.7$.

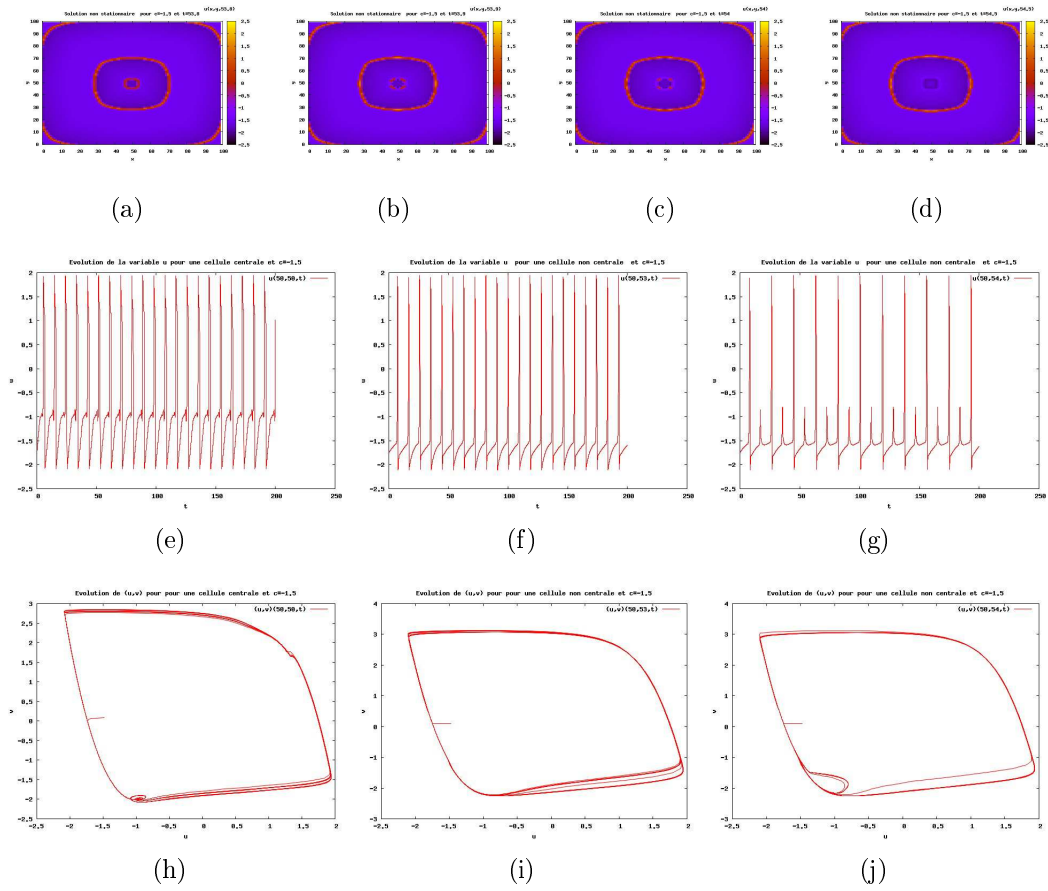
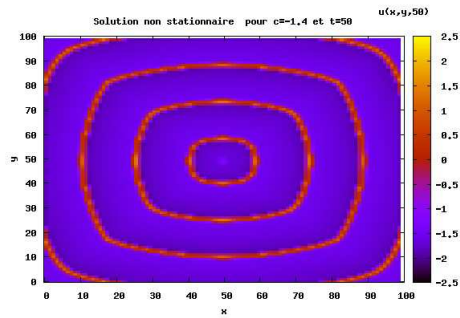
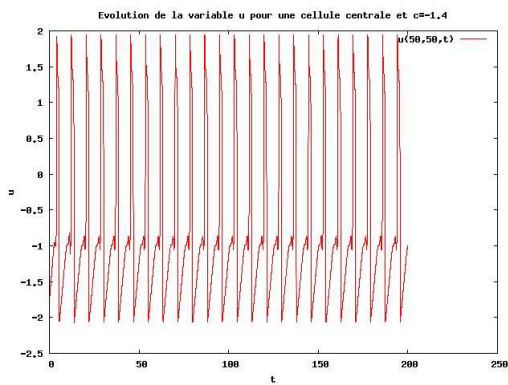


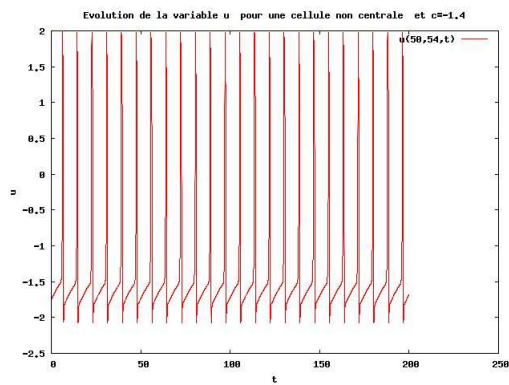
FIG. 55 – Solutions du système (48), pour f cubique et $c = -1.5$.



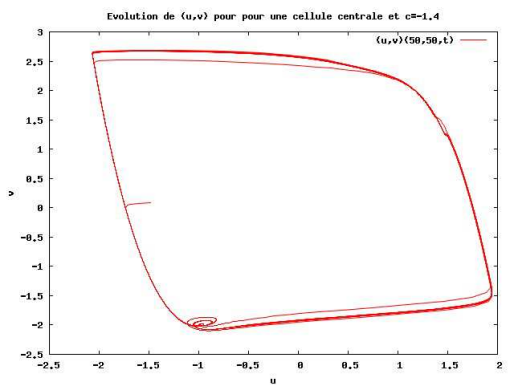
(a)



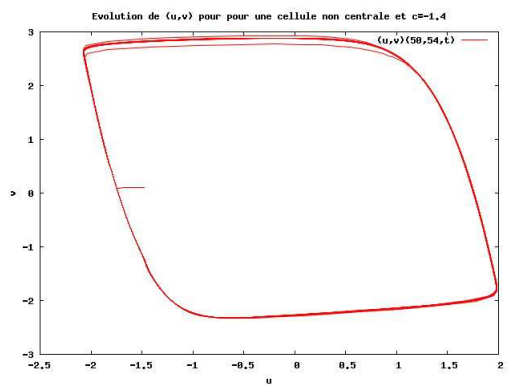
(b)



(c)



(d)



(e)

FIG. 56 – Solutions du système (48), pour f cubique et $c = -1.4$.

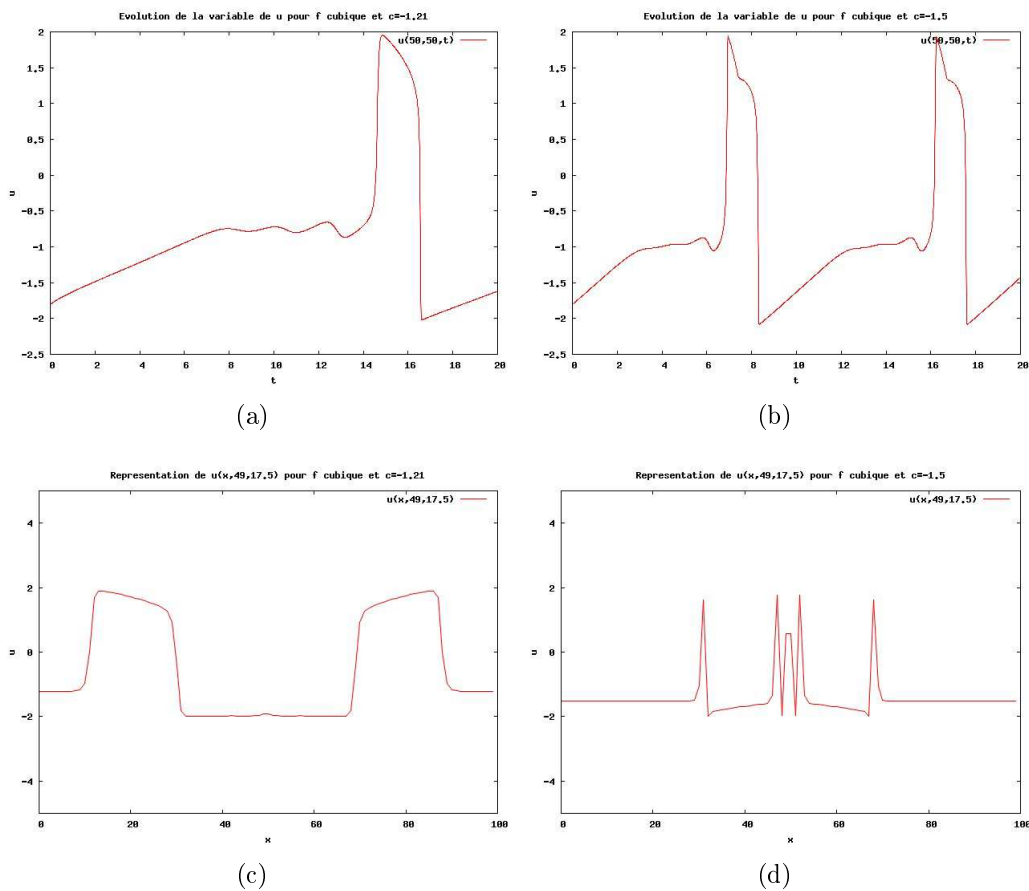


FIG. 57 – Régularité des solutions des systèmes (12) et (48), (a) et (c) Réaction-Diffusion, (b) et (d) Equation des ondes

Pour terminer, voici les vitesses des propagations des ondes pour certaines valeurs de c .

c	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1.01
Vitesse	1.9	2.4	3	3.6	4.3	4.8

FIG. 58 – Vitesses de la propagation des ondes du système (48), pour f cubique.

Résumé des principales propriétés observées

On a, comme dans le cas de la réaction-diffusion, les propagations d'ondes pour c assez proche de -1 , et l'évolution vers la solution stationnaire si c est trop petit. Dans les simulations numériques effectuées la transition "Solution stationnaire-Solution périodique" a lieu dès que $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} = \bar{u}(0,0)$ traverse la valeur -1 . On observe des trajectoires assez

complexes pour les valeurs de transition. Comme on peut s'y attendre, on retrouve les petites oscillations et le comportement type foyer répulsif lié au comportement de (1) dans le cas cubique. Contrairement au cas de la réaction-diffusion, une grande oscillation des cellules centrales n'entraîne pas toujours une propagation d'onde, et on obtient même plusieurs rapports différents entre le nombre de grandes oscillations et les propagations d'ondes engendrées. Les solutions sont moins régulières que dans le cas RD, et on peut observer des différences considérables dans les trajectoires suivant les points de l'espace, induits par des changements rapides de direction. Ces changements expliqués par mécanismes décrits plus haut sont liés à la valeur de Δu . Une cellule proche de son point d'équilibre est excitée par l'excitation de la cellule précédente. En effet, on a alors $-\Delta u$ qui devient petit et négatif, donc v_t aussi, ce qui tend à exciter la cellule, mais alors qu'elle commence à s'exciter, la précédente revient, induisant un changement rapide de $-\Delta u$, rendant alors v_t grand. La trajectoire remonte alors dans l'espace des phases et la cellule est ramenée vers sa position d'équilibre.

La vitesse de propagation augmente avec c mais elle est bien inférieure à celle observée pour le cas RD.

Remarque 6. *Des simulations ont été réalisées avec des conditions initiales différentes. Pour des conditions initiales constantes sur tout le domaine le comportement asymptotique n'est pas modifié. On obtient les mêmes comportements pour des valeurs de c identiques (variation de SRR...) ²⁴. Par contre en prenant des conditions initiales du type de celle de la figure 18 donnant lieu à une spirale dans le cas $c = 0$, les observations sont qualitativement les mêmes pour $c = -1.8$ et $c = 1.1$ mais sont modifiées pour les valeurs de c entre -1.7 et -1.4 . Dans les cas où il y a propagation d'ondes, elles ne sont plus concentriques mais se brisent, et on observe des morceaux d'ondes qui se propagent. A noter que la périodicité des phénomènes semblent rester la même. Ce phénomène est exclusivement observé dans le cas de la cubique, puisque dans le cas où f est affine par morceaux, ces conditions initiales particulières ne modifient pas le comportement asymptotique observé.*

²⁴Les mêmes comportements ont été exhibés pour $u(0, x, y) = 1$, $v(0, x, y) = -1$.

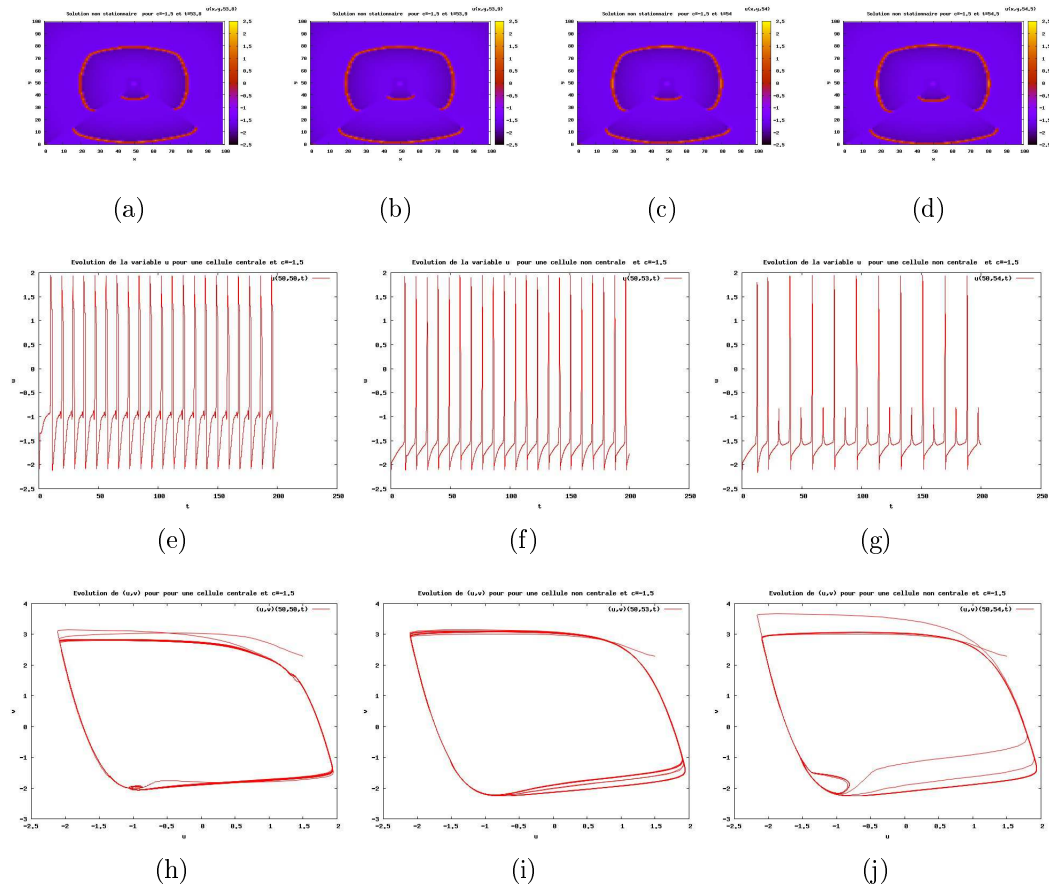


FIG. 59 – Solutions du système (48), pour f cubique $c = -1.5$, CI de la figure 18.

17.2 Le cas où f est affine par morceaux

Dans ce cas, comme dans le cas où f est cubique, on observe des propagations d'ondes dès que c est assez proche de -1 . On décrit le comportement pour quelques valeurs.

- $c = -1.8$ (voir figure 60)

Le système évolue vers la solution stationnaire. Ici encore, il semble que dès que $\sup \bar{u} \in]-1, 1[$ alors le système n'évolue plus vers la solution stationnaire. La valeur de c pour laquelle apparaît la transition "évolution vers solution stationnaire- évolution vers solution non stationnaire", semble être la même que dans le cas cubique. Ceci est à rapprocher du fait que la variable \bar{u} de la solution stationnaire est la même dans les deux cas.

- $c = -1.7$ (voir figure 61)

Il n'y a toujours pas de propagation d'ondes. Mais le système ne tend plus vers la solution stationnaire. Les cellules au centre évoluent selon un cycle limite. Mais ce cycle limite n'est pas petit comme dans le cas de la cubique. Ceci est lié au fait que dans le cas affine par morceaux, la bifurcation de Hopf ne s'applique pas au système

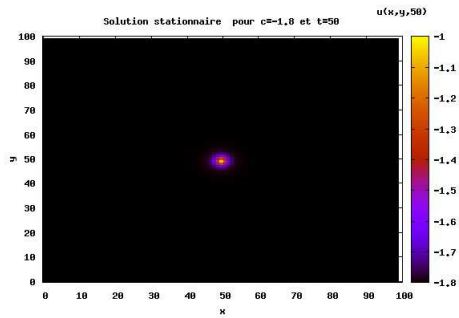
sans diffusion : le cycle limite du système (1) que l'on observe pour des valeurs très proches de $c = -1$ (par exemple $c = -0.999$) n'est pas de petite amplitude, contrairement au cas de la cubique. Malgré tout, l'excitation ne se propage que très peu aux premières cellules voisines. A peine ont elles le temps d'atteindre le seuil d'excitabilité qu'elles sont ramenées dans le sens opposées par les cellules centrales qui ont fini leur excitation.

– **$c = -1.4$** (voir figure 62)

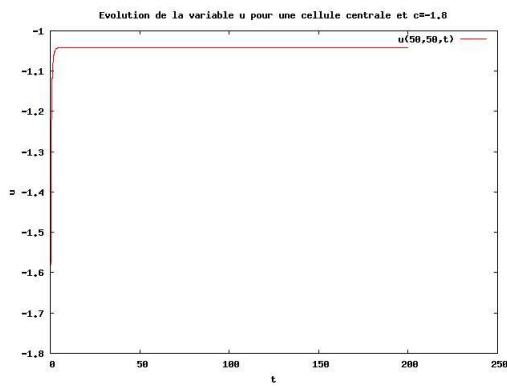
Il y a propagation d'onde sur tout le domaine une fois sur deux. On n'a pas pu, comme dans le cas cubique, changer le rapport entre le nombre de grandes oscillations de la cellule centrale, et le nombre de propagations d'ondes. Les cellules centrales ont ici un comportement asymptotique particulier. Elles évoluent selon deux cycles différents en empruntant une boucle. Un des deux cycles s'atténue pour les cellules voisines jusqu'à disparaître pour les cellules assez éloignées. L'autre cycle se propage à toutes les cellules générant ainsi une propagation d'ondes. La décroissance du premier cycle s'explique par le même phénomène que précédemment. De même que les boucles, qui sont induites par le couplage et les positions relatives des cellules voisines.

– **$c = -1.3$** (voir figure 63)

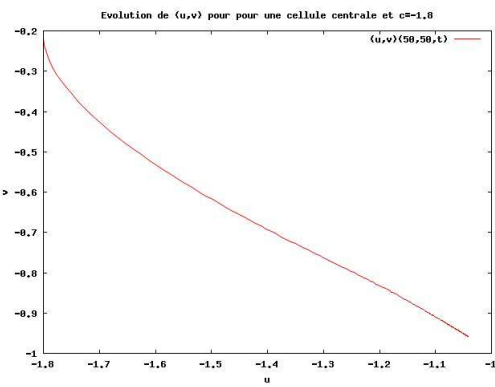
Il y a propagation d'ondes sur tout le domaine à chaque fois. La cellule centrale n'évolue plus asymptotiquement que selon un cycle limite. Il y a toujours une petite boucle dans la trajectoire. L'évolution selon le cycle limite se propage à toutes les cellules générant la propagation d'onde.



(a)

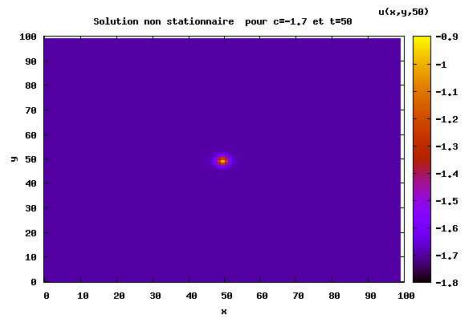


(b)

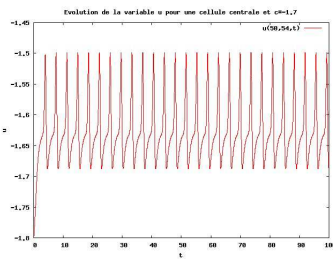


(c)

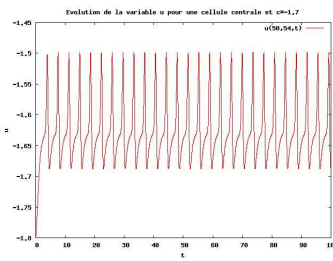
FIG. 60 – Solutions du système (48), pour f affine par morceaux et $c = -1.8$.



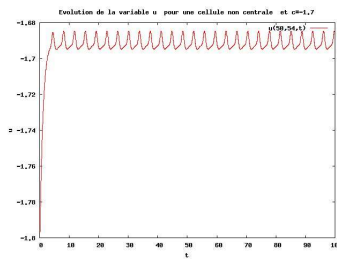
(a)



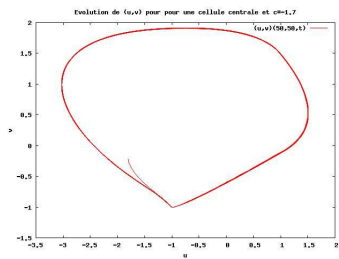
(b)



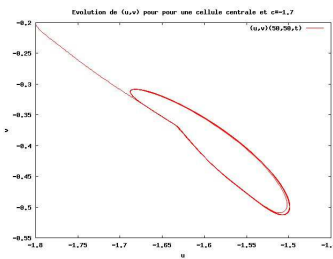
(c)



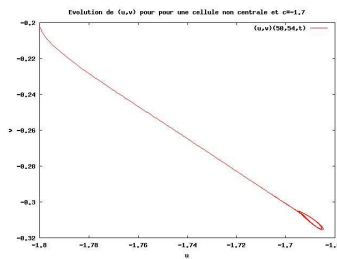
(d)



(e)



(f)



(g)

FIG. 61 – Solutions du système (48), pour f affine par morceaux et $c = -1.7$.

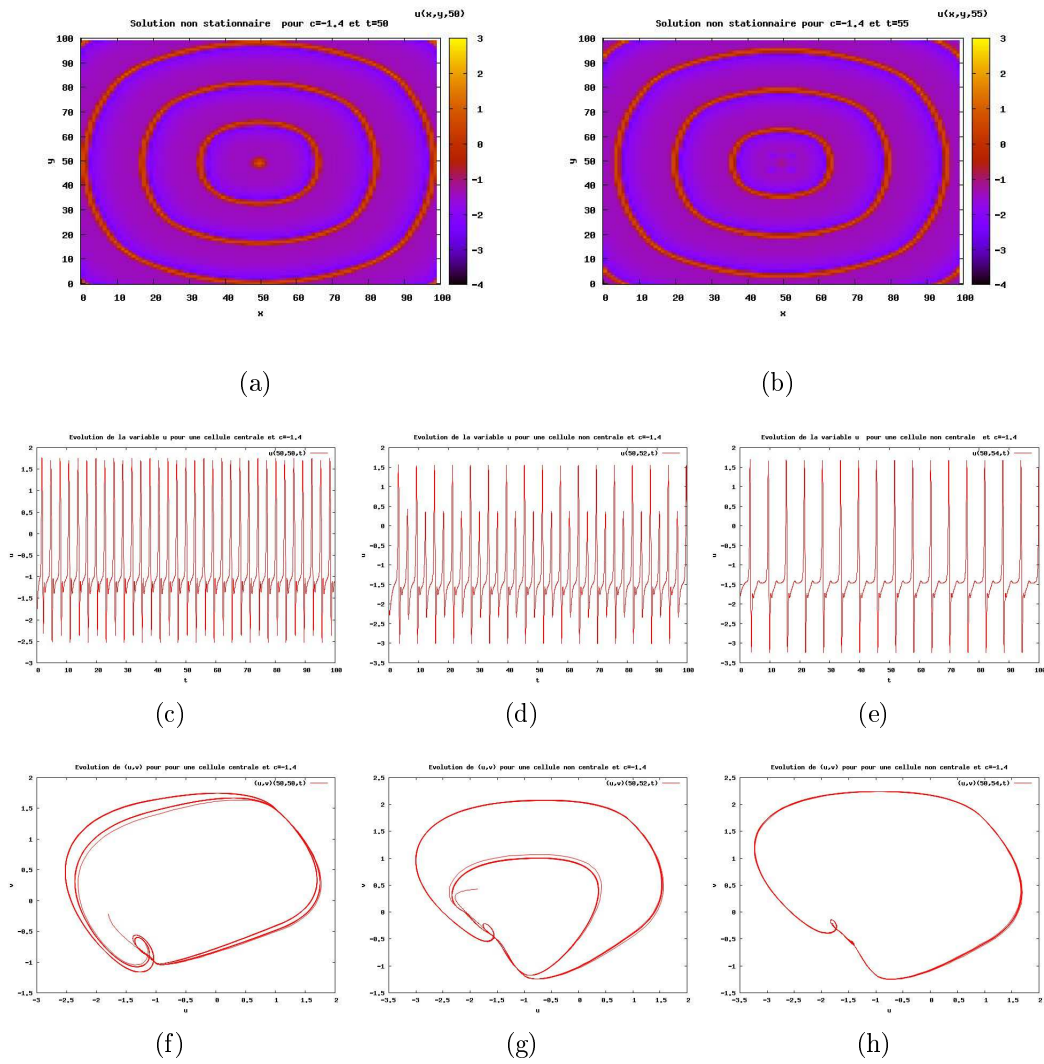


FIG. 62 – Solutions du système (48), pour f affine par morceaux et $c = -1.4$.

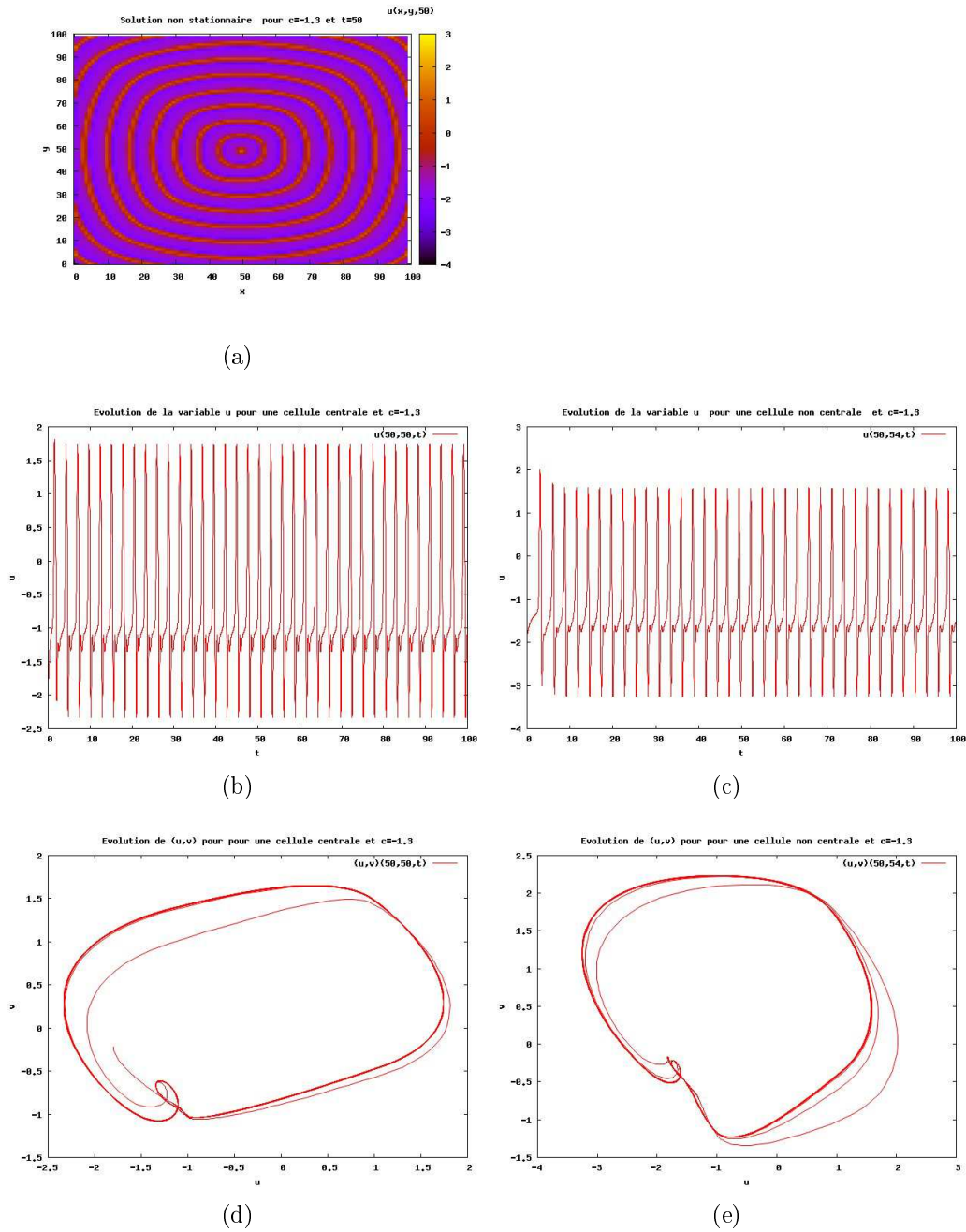


FIG. 63 – Solutions du système (48), pour f affine par morceaux et $c = -1.3$.

Pour terminer, on donne les valeurs des vitesses de propagation des ondes pour quelques valeurs de c .

c	-1.4	-1.3	-1.2	-1.1	-1.01
Vitesse	2.6	2.95	3.3	3.8	4.7

FIG. 64 – Vitesses de la propagation des ondes du système (48), pour f affine par morceaux.

Résumé des principales propriétés observées

Par rapport au cas cubique, on n’observe plus de petites oscillations et d’évolution de type foyer répulsif. Il n’a pas été possible d’obtenir beaucoup de différents rapports ‘nombre d’oscillations pour la cellule centrale sur nombre de propagation d’ondes engendrées’ comme pour la cubique. Sinon les remarques faites pour la cubique restent valables.

Remarque 7. *Un comportement proche de celui décrit dans la partie sur la propagation d’ondes dans le cas du système (48) avec la cubique a été mis en évidence dans Kobayashi et al. [73] (voir aussi [72]), dans le cas de la dimension 1. Les auteurs y étudient la propagation d’ondes dans une chaîne de N cellules excitables vérifiant le système de FitzHugh-Nagumo et couplés par un terme de diffusion faible. La cellule en bout de chaîne est couplée unidirectionnellement à un oscillateur de type $\lambda-\omega$. Pour des valeurs critiques d’un paramètre, l’onde s’arrête au bout de quelques cellules. L’arrêt de l’onde, pour une cellule, est nommé ‘death-spot’. Les auteurs expliquent que l’arrêt de l’onde semble lié au fait que la valeur du paramètre est telle que les points stationnaires sont pour chaque cellule de type foyer. Si le stimulus intervient alors que la cellule est dans une phase réfractaire, la propagation peut s’arrêter. Le rapport entre la période des petites oscillations et la période du pacemaker joue alors un rôle important. C’est également le phénomène que l’on a décrit pour l’arrêt de l’onde, bien que pour nos simulations numériques, le caractère foyer ne soit pas nécessaire puisqu’on a ce phénomène dans le cas où f est affine par morceaux. Il suffit que le stimulus d’excitabilité intervienne alors que la cellule est dans la phase réfractaire de l’excitation. Le caractère foyer répulsif est par contre nécessaire, dans notre cas, pour faire varier le rapport entre nombre d’oscillations du pacemaker et nombre d’ondes atteignant le bord du domaine. A noter qu’il est fait mention de ce rapport dans la référence sous le terme de quotient SRR (Stimulus Response Ratio). Ce phénomène est connu en électrophysiologie et est par exemple introduit par J. Jalife dans [14]. Dans cet article, les auteurs posent la question de savoir si le forçage périodique est nécessaire à l’apparition de phénomènes chaotiques et notamment de variation de SRR. Les simulations numériques obtenues dans le travail précédent montrent que non. Enfin, signalons que le caractère foyer sera également une condition nécessaire de l’apparition des patterns complexes de la sixième partie.*

18 Analyse mathématique

18.1 Existence et unicité de la solution

Théorème 26. *On se donne $u_0 \in H^1(\Omega)$ et $v_0 \in L^2(\Omega)$ alors quelque soit $T \in \mathbb{R}$ le système (48) admet une unique solution telle que $u \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; H^1(\Omega))$*

et $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$. La première égalité a lieu presque partout tandis que la deuxième a lieu dans $L^\infty(0, T; (H^1)'(\Omega))$.

Un théorème de ce type figure dans [48], théorème 1.3 lorsqu'il est mis sous la forme équation des ondes $u_{tt} = f'(u)u_t - u + c + \delta u$. Les auteurs transforment l'équation $u_{tt} = ku^{p-1}u_t + c + \delta u$ en l'équation $z_{tt} = \frac{k}{p}(u_t)^{p-1}u_t + h + \delta z$ où z et h sont des primitives de u et c . On s'inspire donc de [48] pour la transformation, et de [63] et [48] pour appliquer la méthode utilisée dans le cas Réaction-Diffusion à (48). On ne donne pas toute la démonstration mais on en indique les grandes lignes.

Démonstration. Au lieu de travailler sur le système (48), on travaille sur l'équation

$$\epsilon w_{tt} = f(w_t) - w + \int_0^t c + \Delta w \quad (52)$$

avec

$$\begin{aligned} w(0) &= w_0 \\ w_t(0) &= u_0 \\ \frac{dw}{dn} = \frac{dw_t}{dn} &= 0 \end{aligned}$$

Où

$$w_0 \text{ solution de } -\Delta w_0 + w_0 = v_0, \quad \frac{d}{dn}w_0 = 0 \text{ sur } \delta\Omega$$

Pour revenir au système (48), on posera

$$u = w_t, \quad v = w - \int_0^t c - \Delta w$$

On procède maintenant comme dans le cas RD.

On se ramène au système de dimension finie :

$$\epsilon w_{ntt} = P_n h(w_{nt}) + 3w_{nt} - w_n + g_n + \Delta w_n \quad (53)$$

où l'on a gardé les notations utilisées dans le cas RD et où $g = \int_0^t c$. Alors en multipliant (53) par w_{nt} et en intégrant, on montre que :

$$\begin{aligned} w_n &\text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; H^1) \\ w_{nt} &\text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; L^2) \cap L^4(\Omega_T) \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps puis en multipliant par w_{ntt} et en intégrant on a que

$$\begin{aligned} w_{nt} &\text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; H^1) \\ w_{ntt} &\text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; L^2) \end{aligned}$$

En multipliant par Δw_{nt} , et en intégrant on trouve que

$$\Delta w_n \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; L^2)$$

On peut donc passer à la limite en utilisant la limite faible ou faible* dans les espaces précédents.

Pour montrer que $h(w_n) \rightharpoonup h(w)$ dans $L^{\frac{4}{3}}(\Omega_T)$, on procède également comme dans le cas RD.

L'unicité s'obtient classiquement en prenant deux solutions w_1, w_2 , en faisant la différence, en multipliant par $w_{1t} - w_{2t}$.

On a également que $w \in L^\infty(0, T; H^2)$, $w, w_t \in C(0, T; H^1)$ ²⁵ et $\Delta w \in C(0, T; L^2)$ (car $\Delta w \in L^2(0, T, L^2)$ et $\Delta w_t \in L^2(0, T, (H^1)')$). En prenant deux solutions et en multipliant par $(w_1 - w_2)_t$, on obtient la continuité relativement aux conditions initiales pour w dans H^1 et w_t dans L^2 . Ce qui est insuffisant pour avoir la continuité de u et v par rapport aux conditions initiales dans ces espaces²⁶.

Si w solution de (52) $u \in L^\infty(0, T; H^1) \cap C(0, T; H^1)$, $v \in L^\infty(0, T; L^2) \cap C(0, T; L^2)$. Et on a, remplaçant w_t par u , $w - g - \Delta w$ par v et en dérivant v ,

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v \\ v_t &= u - c(x) - \Delta u \end{cases}$$

On a l'équivalence des deux problèmes, puisque si (48) est vérifié, alors en posant

$$w(t) = w_0 + \int_0^t u$$

et w_0 tel que

$$-\Delta w_0 + w_0 = v_0$$

On a :

$$v(t) - v(0) = \int_0^t v_t = w(t) - w(0) - g - \Delta w + \Delta w(0) \text{ donc, } v(t) = w(t) - g - \Delta w.$$

Et $u_t = f(u) - v$ implique $w_{tt} = f(w_t) - v$.

Pour vérifier que $u_0 = u(0)$ et que $v(0) = v_0$, on procède comme dans [63]. \square

Remarque 8. Pour définir le semi-groupe dans $H^1 \times L^2$, il manque donc la continuité par rapport aux conditions initiales

18.2 Etude de la stabilité

Contrairement au cas du système de réaction diffusion, la solution stationnaire est ici donnée par un théorème classique. On a :

Proposition 1. *Le système (50) admet une unique solution.*

²⁵On a ici utilisé le lemme 3.3 p 72 de [67]

²⁶Dans le cas de la dimension 1, on peut adopter la présentation de [13]. On part de l'équation (49), et on pose $u_t = z$, $z_t = \frac{1}{\epsilon}(f'(u)z - u + c + \Delta u)$. La partie non linéaire définit une fonction lipchitzienne des bornés de $H^1 \times L^2$ dans $H^1 \times L^2$, on a dans ce cas la continuité par rapport aux conditions initiales et on peut définir un semi-groupe lorsque c ne dépend pas de t .

Dans la suite on note la solution de ce problème (\bar{u}, \bar{v}) .

Démonstration. On applique le théorème sur le problème de Neumann $-\Delta u + u = c$ (Théorème IX.27 p 182 dans [11]) pour déterminer \bar{u} . On a ensuite $\bar{v} = f(\bar{u})$. On y trouvera les hypothèses et les conclusions liées à la régularité. On peut prendre $c \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et le domaine Ω de classe C^∞ et on a $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et v aussi. \square

On a également un principe du maximum (Proposition IX.30 p 192 dans [11])

Proposition 2.

$$\inf_{\Omega} c \leq u \leq \sup_{\Omega} c$$

Le cas particulier de la dimension 1

On donne ici les résultats plus précis lorsqu'on se limite à la dimension 1 et $\Omega =]-l, l[$. On suppose également que c est paire et strictement décroissante sur $[0, l[$. On a alors une expression explicite pour \bar{u} , et on montre que \bar{u} est paire et décroissante sur $[0, l[$. Elle admet donc un maximum en 0. Par ailleurs la valeur $\bar{u}(0)$ est donnée par $\bar{u}(0) = \int_0^l c(y)g(y)$ où g est une densité de probabilité sur $[0, l[$. En d'autres termes la valeur du maximum est donnée par l'espérance de c sur $[0, l[$ selon la loi de g . On résume ces propriétés dans le théorème suivant. Pour le démontrer on donne alors différentes propositions correspondant aux diverses propriétés.

Théorème 27. *On suppose que c est une fonction paire et strictement décroissante sur $[0, l[$. Le système précédent admet une unique solution stationnaire donnée par :*

$$\bar{u}(x) = k(e^{-x} + e^x) + \frac{1}{2} \int_0^x (\exp(-(x-y)) - \exp(x-y))c(y)dy \quad \bar{v} = f(\bar{u})$$

où

$$k = \frac{1}{2(e^l - e^{-l})} \int_0^l (\exp(-(l-y)) + \exp(l-y))c(y)dy$$

La solution stationnaire \bar{u} est strictement décroissante sur $[0, l[$, et paire, elle admet donc un maximum strict en 0 donné par :

$$\bar{u}(0) = 2k = \frac{1}{(e^l - e^{-l})} \int_0^l (\exp(-(l-y)) + \exp(l-y))c(y)dy$$

Enfin, la fonction $g(y) = \frac{\exp(y-l) + \exp(l-y)}{(e^l - e^{-l})}$ définit une densité de probabilité sur $[0, l[$.

Dans tout ce qui suit on considère donc que c est une fonction paire et strictement décroissante sur $[0, l[$.

Proposition 3. *Le système (50) admet une unique solution stationnaire donnée par :*

$$\bar{u}(x) = k(e^{-x} + e^x) + \frac{1}{2} \int_0^x (\exp(-(x-y)) - \exp(x-y))c(y)dy \quad \bar{v} = f(\bar{u})$$

où

$$k = \frac{1}{2(e^l - e^{-l})} \int_0^l (\exp(-(l-y)) + \exp(l-y))c(y)dy$$

Démonstration. (\bar{u}, \bar{v}) est solution stationnaire si et seulement si (\bar{u}, \bar{v}) est solution du système :

$$\begin{cases} 0 = f(u) - v \\ 0 = u - c(x) - u_{xx} \\ u_x(-l) = u_x(l) = 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} v = f(u) \\ -u_{xx} + u = c(x) \\ u_x(-l) = u_x(l) = 0 \end{cases}$$

L'équation :

$$(E) \quad -u_{xx} + u = c(x)$$

est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est donnée par :

$$u(x) = K_1 e^{-x} + K_2 e^x + u_0(x)$$

où u_0 est une solution particulière. Pour trouver u_0 on utilise la méthode de la variation de la constante pour les équations linéaires du second ordre à coefficients constants ([44]) : on cherche $u_0(x)$ telle que $u_0(x) = K_1(x)e^{-x} + K_2(x)e^x$ et qui vérifie de plus $K_1'(x)e^{-x} + K_2'(x)e^x = 0$. On trouve alors que $u_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (\exp(-(x-y)) - \exp(x-y))c(y)dy$ convient. Les conditions aux bords déterminent K_1 et K_2 de manière unique. En fait, utilisant le fait que c est paire, on peut chercher $k = K_1 = K_2$ et on trouve que :

$$\bar{u}(x) = k(e^{-x} + e^x) + \frac{1}{2} \int_0^x (\exp(-(x-y)) - \exp(x-y))c(y)dy$$

où

$$k = \frac{1}{2(e^l - e^{-l})} \int_0^l (\exp(-(l-y)) + \exp(l-y))c(y)dy$$

est l'unique solution de (E) avec les conditions aux bords spécifiées. □

Proposition 4. \bar{u} est strictement décroissante sur $[0, l]$, et paire, elle admet donc un maximum strict en 0 donné par :

$$\bar{u}(0) = 2k = \frac{1}{(e^l - e^{-l})} \int_0^l (\exp(y-l) + \exp(l-y))c(y)dy$$

Démonstration. \bar{u} est paire, en effet :

$$\begin{aligned} \bar{u}(-x) &= k(e^{-x} + e^x) + \frac{1}{2} \int_0^{-x} (\exp(-(-x-y)) - \exp(-x-y))c(y)dy \\ &= k(e^{-x} + e^x) + \frac{1}{2} \int_0^x (\exp(x-u) - \exp(u-x))c(-u)(-du) \\ &= k(e^{-x} + e^x) + \frac{1}{2} \int_0^x (\exp(u-x) - \exp(x-u))c(u)du \quad (\text{car } c \text{ est paire}) . \\ &= \bar{u}(x) \end{aligned}$$

\bar{u} est strictement décroissante sur $[0, l]$, en effet :

Soit $0 \leq y < x \leq l$:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) - \bar{u}(y) &= k(e^{-x} + e^x - e^{-y} - e^y) + \frac{1}{2} \int_0^x (\exp(-x+u) - \exp(x-u))c(u)du \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^y (\exp(u-y) - \exp(y-u))c(u)du \\ &= k(e^{-x} + e^x - e^{-y} - e^y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^y (\exp(u-x) - \exp(x-u) - \exp(u-y) + \exp(y-u))c(u)du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_y^x (\exp(u-x) - \exp(x-u))c(u)du\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) &< \bar{u}(y) \\ \Leftrightarrow (e^{-x} + e^x - e^{-y} - e^y)k &< \frac{1}{2} \int_0^y (\exp(x-u) - \exp(u-x) - \exp(y-u) + \exp(u-y))c(u)du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_y^x (\exp(x-u) - \exp(u-x))c(u)du \\ \Leftrightarrow \int_0^l g(u)c(u)du &< \int_0^l h(u)du\end{aligned}$$

où

$$g(u) = \frac{\exp(l-u) + \exp(-(l-u))}{e^l - e^{-l}}$$

et

$$h(u) = \begin{cases} h_1(u) = \frac{(\exp(x-u) - \exp(u-x) - \exp(y-u) + \exp(u-y))}{e^x + e^{-x} - e^y - e^{-y}} & \text{si } 0 \leq u \leq y \\ h_2(u) = \frac{\exp(x-u) - \exp(u-x)}{e^x + e^{-x} - e^y - e^{-y}} & \text{si } y \leq u \leq x \\ 0 & \text{si } x \leq u \leq l \end{cases}$$

On peut remarquer que g et h sont des fonctions positives d'intégrale 1, et peuvent donc être considérées comme des mesures de probabilité sur $[0, l]$. On est alors amené à montrer que $\mathbb{E}_g(c) < \mathbb{E}_h(c)$.

On va utiliser le lemme suivant qui traduit que la fonction h favorise plus les grandes valeurs de c que la fonction g :

Lemme 19. Soit h et g deux fonctions positives, continues, décroissantes, définies sur $[0, l]$ telles que :

$$h(0) > g(0)$$

$$h(l) < g(l)$$

$\exists x_0 \in [0, l]$ tel que $h - g \geq 0$ sur $[0, x_0]$, et $h - g \leq 0$ sur $[x_0, l]$.

$$\int_0^l g(x)dx = \int_0^l h(x)dx.$$

Alors pour toute fonction c strictement décroissante définie sur $[0, l]$,

$$\int_0^l g(x)c(x)dx < \int_0^l h(x)c(x)dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_0^l h(x)c(x)dx - \int_0^l g(x)c(x)dx &= \int_0^l (h - g)(x)c(x)dx \\ &= \int_0^{x_0} (h - g)(x)c(x)dx + \int_{x_0}^l (h - g)(x)c(x)dx \\ &> c(x_0) \int_0^{x_0} (h - g)(x)dx + c(x_0) \int_{x_0}^l (h - g)(x)dx \\ &= c(x_0) \int_0^l (h - g)(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Il reste à montrer que les fonctions h et g satisfont les conditions du lemme. h et g sont continues, positives et décroissantes (pour h dériver et utiliser le fait que $e^x + e^{-x}$ est croissante).

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{e^x - e^{-x} - e^y + e^{-y}}{e^x + e^{-x} - e^y - e^{-y}} \\ g(0) &= \frac{e^l + e^{-l}}{e^l - e^{-l}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(0) > g(0) &\Leftrightarrow (e^l - e^{-l})(e^x - e^{-x} - e^y + e^{-y}) > (e^l + e^{-l})(e^x + e^{-x} - e^y - e^{-y}) \\ &\Leftrightarrow e^l(e^{-y} - e^{-x}) + e^{-l}(e^y - e^x) > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2l-y} - e^{2l-x} > e^x - e^y \end{aligned}$$

Ce qui est vrai par la convexité de la fonction exponentielle, donc $h(0) > g(0)$.

$h(l) = 0$, $g(l) > 0$, donc $h(l) < g(l)$.

Il faut maintenant montrer qu'il existe x_0 entre 0 et l tel que $h - g \geq 0$ sur $[0, x_0]$, et $h - g \leq 0$ sur $[x_0, l]$.

Puisque $h(0) > g(0)$, $h(l) < g(l)$, et que h et g sont continues, il existe $x_1 \in]0, l[$ tel que $h(x_1) = g(x_1)$. En effet, si on résoud $g(u) = h_1(u)$ sur \mathbb{R} , on trouve qu'il y a au plus une solution. De même, si on résoud $g(u) = h_2(u)$. Donc l'équation $h(u) = g(u)$ admet exactement une ou deux solutions sur $[0, l]$. Cela implique que $(h - g)$ est soit de signe constant, soit change une fois de signe, soit deux fois. Avec les signes

opposés de $(h - g)$ en 0 et l , on conclut que $(h - g)$ ne change qu'une fois de signe. La propriété est donc démontrée et la proposition également. \square

Remarque 9. La fonction g définit une densité de probabilité sur $[0, m]$. On a donc : $\bar{u}(0) = 2k = \mathbb{E}_g(c)$.

La valeur maximale de la solution stationnaire, atteinte en 0, $\bar{u}(0)$ apparait donc comme l'espérance de c selon la loi de g .

Il serait intéressant de montrer dans quelle mesure ces résultats se généralisent à la dimension supérieure.

On étudie maintenant la stabilité lorsque $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} < -1$. On cherche à appliquer le théorème 3.1.3 p.34 dans [33]. Partant de l'équation (49), et posant $u_t = z$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \epsilon u_t = z \\ z_t = \frac{1}{\epsilon}(f'(u)z - u + c + \Delta u) \end{cases}$$

ou encore, utilisant le fait que $-\Delta \bar{u} + \bar{u} = c$ on peut se ramener au système

$$\begin{cases} \epsilon u_t = z \\ z_t = \frac{1}{\epsilon}(3(1 - \bar{u})z - u + \Delta u - 6\bar{u}uz - 6u^2z) \end{cases}$$

Ce système s'écrit

$$U_t = AU + F(U)$$

où

$$A(u, z) = (z, \frac{1}{\epsilon}(3(1 - \bar{u})z - u + \Delta u))$$

$$F(u, z) = (0, -6\bar{u}uz - 6u^2z)$$

On se limite au cas $N = 1$. Grâce à l'injection de H^1 dans $C(\Omega)$ muni de la norme $|\cdot|_\infty$, on vérifie dans ce cas que $F(u, z)$ est lipchitzienne des bornés de (H^1, L^2) dans (H^1, L^2) . On note $T(t)(u_0, z_0)$ la solution de $U_t = AU$, $u(0) = u_0$, $z(0) = z_0$.

On a alors la proposition suivante

Proposition 5. Il existe des constantes K et $\alpha > 0$ tels que

$$\|T(t)\| < K \exp(-\alpha t)$$

Démonstration. La démonstration s'inspire du début de l'article [62]. On considère d'abord le cas de la cubique.

On réécrit le système linéarisé sous la forme

$$\epsilon u_{tt} = 3(1 - \bar{u}^2)u_t - u + \Delta u$$

Et on introduit la fonctionnelle d'énergie

$$E(t) = \int_{\Omega} u^2 + \epsilon \int_{\Omega} u_t^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

Soit $\alpha > 0$ et $h(x) = 3(1 - \bar{u}^2)$.

On pose

$$v = \exp(\alpha t)u$$

Alors,

$$\begin{aligned} u_t &= \exp(-\alpha t)(v_t - \alpha v) \\ u_{tt} &= \exp(-\alpha t)(v_{tt} - 2\alpha v_t + \alpha^2 v) \\ \Delta v &= \exp(\alpha t)(\epsilon u_{tt} - h(x)u_t + u) \\ &= \epsilon v_{tt} - (h + 2\alpha\epsilon)v_t + (\epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1)v \end{aligned}$$

Et,

$$\epsilon v_{tt} - \Delta v + (\epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1)v = (2\alpha\epsilon + h)v_t$$

En multipliant par v_t et en intégrant, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \epsilon (v_t)^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} (\epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1)v^2 \right) = (2\alpha\epsilon + h)v_t^2$$

En posant $G(t) = \int_{\Omega} \epsilon (v_t)^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} (\epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1)v^2$, on a $G_t \leq 0$ dès que $\alpha < \min_{x \in \Omega} \frac{-h(x)}{2\epsilon}$. Maintenant,

$$\begin{aligned} \exp(2\alpha t)E(t) &= \exp(2\alpha t) \left(\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} \epsilon u_t^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right) \\ &= \int_{\Omega} v^2 + \int_{\Omega} \epsilon (v_t - \alpha v)^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \\ &\leq (1 + 2\epsilon\alpha^2) \int_{\Omega} v^2 + 2\epsilon \int_{\Omega} v_t^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \end{aligned}$$

On cherche une constante K telle que

$$\exp(2\alpha t)E(t) \leq KG(t)$$

Or pour α assez petit, on a que pour tout $x \in \Omega$

$$\epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1 > 0$$

En effet, pour x fixé, les racines de ce polynôme en α sont :

$$\frac{-h_{\pm} \pm \sqrt{h^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon}$$

et sont donc toutes les deux strictement positives, donc pour $\alpha < \frac{-h - \sqrt{h^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon}$ on a $\epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1 > 0$. Donc $\exists \beta > 0$ tel que

$$\beta(1 + 2\epsilon\alpha^2) < \epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1$$

Donc pour $0 < \alpha < \min(\min_{x \in \Omega} \frac{-h(x)}{2\epsilon}, \min_{x \in \Omega} (-h(x) - \sqrt{h^2(x) - 4\epsilon}))$,

$$\begin{aligned} \exp(2\alpha t)E(t) &\leq (1 + 2\epsilon\alpha^2) \int_{\Omega} v^2 + 2\epsilon \int_{\Omega} v_t^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{\beta} (\epsilon\alpha^2 + h\alpha + 1)v^2 + 2\epsilon \int_{\Omega} (v_t)^2 + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \\ &\leq \max(\frac{1}{\beta}, 2)G(t) \\ &\leq KG(0) \\ &\leq KE(0) \text{ où } K \text{ est une constante générique.} \end{aligned}$$

On a donc

$$E(t) \leq K \exp(-2\alpha t)E(0)$$

On déduit de cela en repassant en u et v , et en utilisant que $v = h(x)u - u_t$,

$$\|T(t)\| \leq K \exp(-\alpha t)$$

Dans le cas où f est affine par morceaux, on a le même résultat. \square

Avec cette proposition on peut appliquer le le théorème 3.1.3 p.34 dans [33] pour obtenir un résultat de stabilité dans le cas où $N = 1^{27}$.

Théorème 28. *On suppose que $N = 1$. Si $\sup_{x \in \Omega} \bar{u} < -1$ alors la solution (48), (\bar{u}, \bar{z}) est asymptotiquement stable : il existe un voisinage N de (\bar{u}, \bar{z}) tel que, quelque soit $(u, v) \in N$, (u, z) tend vers (\bar{u}, \bar{z}) dans $(H^1(\Omega), L^2(\Omega))$ lorsque t tend vers $+\infty$.*

Démonstration. On pose $h(u) = \frac{1}{\epsilon}(-6\bar{u}uz - 3u^2z)$ Le cas $N = 1$ implique que $H^1 \hookrightarrow C^0$ avec $\|u\|_{H^1} \leq \|u\|_{L^\infty}$. On vérifie alors que

$$\begin{aligned} \|h(u)\|_{L^2}^2 &\leq K(\|u\|_{L^\infty}^4 + \|u\|_{L^\infty}^2)(\|z\|_{L^2}^2) \\ &\leq K(\|u\|_{H^1}^4 + \|u\|_{H^1}^2)(\|(u, z)\|_{H^1}^2) \end{aligned}$$

Donc pour tout $K > 0$ il existe un voisinage V de $(0, 0)$ dans $(H^1 \times L^2)$ tel que

$$F(u, z) \leq K\|(u, z)\|_{(H^1, L^2)}$$

D'où le résultat d'après le théorème 3.1.3 p.34 de [33]. Dans le cas affine par morceaux, on a $h(u, z) = 0$ pour $\|u\|_{H^1}$ assez petit. \square

Remarque 10. *Dans le cas où f est affine par morceaux, on peut calculer les valeurs propres de l'opérateur associé au linéarisé :*

$$\begin{cases} \lambda u &= \frac{1}{\epsilon}(-u - v) \\ \lambda v &= u - \Delta u \end{cases}$$

²⁷Ce théorème nécessite une estimation du terme non linéaire dans la norme de l'espace dans lequel on se place, estimation qu'il n'a été possible d'obtenir que dans la cas $N = 1$ grâce à l'injection de H^1 dans L^∞ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = (\lambda\epsilon + 1)u \\ (\lambda^2\epsilon + \lambda)u = u - \Delta u \end{cases}$$

Comme on connaît les valeurs propres $\mu_1 = 1 < \mu_2 \dots$ de l'opérateur $-\Delta u + u$ (avec conditions aux bords de Neumann), les valeurs propres de l'opérateur associé au linéarisé sont obtenues en résolvant :

$$\lambda^2\epsilon + \lambda - \mu_i = 0$$

C'est à dire

$$\lambda_i = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\epsilon\mu_i}}{2\epsilon - 2\epsilon}$$

L'étude des propriétés spectrales des opérateurs linéarisés lorsque le coefficient apparaissant devant le u dans le linéarisé dépend de x n'est pas triviale. Dans la thèse [36], p 59, 63, 64, on trouve des références sur ce problème dans le cas où la dimension est égale à 1 ou dans le cas où la dimension est 2 si le domaine est un disque. Le problème semble ouvert pour le cas des dimensions supérieures. L'étude de ce spectre, est intéressante car elle pourrait montrer l'existence d'une bifurcation de Hopf et de mieux comprendre la bifurcation entre la solution stationnaire et la solution périodique. Il serait également intéressant de voir si la bifurcation se produit dès que $\sup_{\Omega} \bar{u}$ dépasse la valeur -1 ou pas. Par ailleurs, ces résultats de stabilité ne sont pas optimaux dans le sens où les simulations numériques semblent montrer que toutes les trajectoires tendent vers la solution stationnaire dans le cas où $\sup_{\Omega} u < -1$.

Sixième partie

Propagation d'ondes à partir d'un oscillateur en salves central dans un milieu excitable

Cas d'un système d'EDP de réaction-diffusion avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique

Cas d'une EDP de type équation des ondes avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique

Nous avons vu dans la première partie comment, en faisant dépendre le paramètre c du temps, on peut engendrer des oscillations en salves. Dans cette partie on combine cette idée avec les idées de la partie 4 pour produire des patterns à partir d'un oscillateur central. On s'intéresse donc maintenant aux systèmes (12) (couplage par Réaction-Diffusion) ou (48) (couplage par l'opérateur des ondes), dans lesquels on fait dépendre la fonction c de x et t . Plus précisément, pour les cellules centrales on prend $c(x, t) = -1 + \sin(\gamma t)$, tandis que pour les cellules non centrales, on prend $c(x, t) = -1 - \beta$. C'est à dire qu'au centre les cellules évoluent tantôt vers un point d'équilibre tantôt vers un cycle limite. Le paramètre $\gamma \ll 1$ dans la fonction sinus est présent pour que les cellules aient le temps d'évoluer vers l'état induit par la valeur de c . Les cellules non centrales ont une valeur de c qui les rend excitable dès que les cellules voisines bougent assez, c'est à dire que β ne doit pas être trop grand. Dans la première section, on montre par analogie avec la partie pacemaker, comment produire des oscillations en salves qui se propagent à tout le domaine. Ce type de propagation a été observé dans les cellules β du pancréas (cf [4]). Dans la seconde section, on montre quelques patterns que l'on obtient pour des valeurs de β proches de 0 ou pour des conditions initiales particulières dans le cas de l'équation de type ondes. On retrouve ainsi de multiples spirales, des multiples pacemaker, patterns qui sont familiers en biologie et en physiologie. L'analyse mathématique des parties quatre et cinq reste en partie valable. Les théorèmes d'existence et d'unicité le sont. Puisque maintenant c dépend du temps, la propriété de semi-groupe n'est plus valable. On peut remplacer cette notion par celle de processus. On a donc inclut dans la partie réaction-diffusion la définition des processus. Leur étude est une éventuelle perspective.

19 Propagation d'oscillations en salves

On commence par le cas où le couplage est effectué par Réaction-Diffusion.

19.1 Cas d'un système d'EDP de réaction-diffusion avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique

La version non autonome de (12)

On considère donc la version non autonome de (12)

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v + \Delta u \\ v_t &= u - c(x, t) + \Delta v \end{cases} \quad (54)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0 \\ v(0, x) &= v_0 \\ \frac{\delta u}{\delta n} &= \frac{\delta v}{\delta n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega \end{aligned}$$

où n est la normale extérieure au domaine Ω et

$$c(x, t) = \begin{cases} -1 + \sin(\gamma t) & \text{si } x \text{ est dans une boule au centre du domaine,} \\ -1 - \beta & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant des conditions initiales constantes sur tout le domaine, on obtient pour $\beta > 0$ assez petit des propagations d'oscillations en salves comme le montre la figure 65. Dans le a), on a représenté $u(x, y, 27)$, dans le b), on a représenté $u(50, 50, t)$, $u(51, 50, t)$, et $u(99, 50, t)$, et dans le c) $u(x, 49, t)$. Il convient de noter que le nombre d'oscillations augmente lorsque β se rapproche de 0 et que γ diminue.

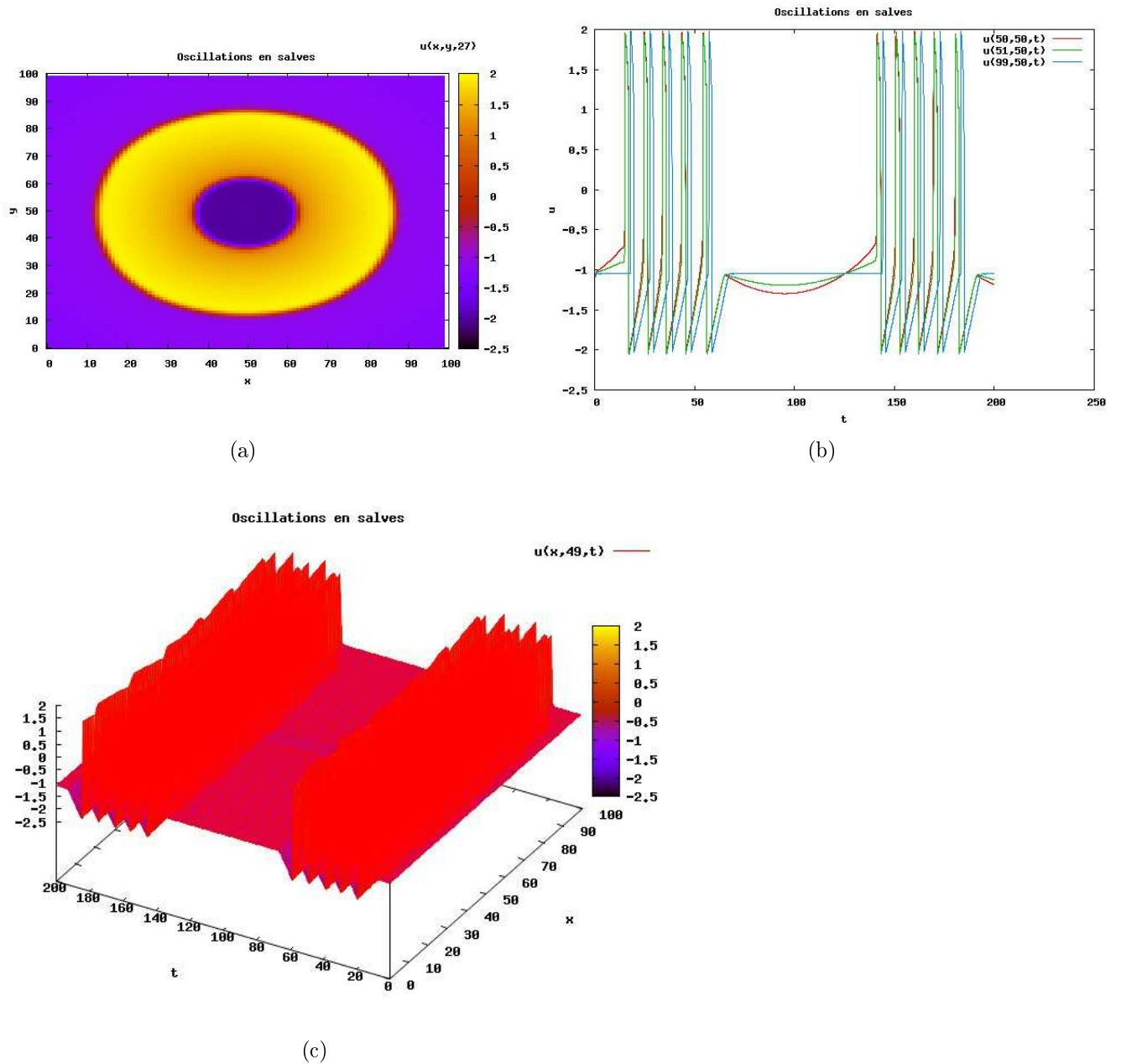


FIG. 65 – Solution du système (54), pour f cubique et $\gamma = \beta = 0.05$.

La version non autonome de (21)

Les propagations d'oscillations en salves s'obtiennent également pour la version non autonome de (21) si δ est assez petit. On considère donc le système :

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v + \Delta u \\ v_t &= u - c(x, t) - \delta v + \Delta v \end{cases} \quad (55)$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0 \\ v(0, x) &= v_0 \\ \frac{\delta u}{\delta n} &= \frac{\delta v}{\delta n} = 0 \text{ sur } \delta\Omega \end{aligned}$$

où n est la normale extérieure au domaine Ω et $c(x, t)$ est la même fonction que précédemment. En prenant des conditions initiales $u_0 = -1, v_0 = 0.1, \delta = 0.01$, on obtient des propagations d'oscillations en salves comme le montre la figure 66. Dans le a), on a représenté $u(x, y, 28)$, dans le b), on a représenté $u(50, 50, t), u(51, 50, t)$, et $u(99, 50, t)$, et dans le c) $u(x, 49, t)$.

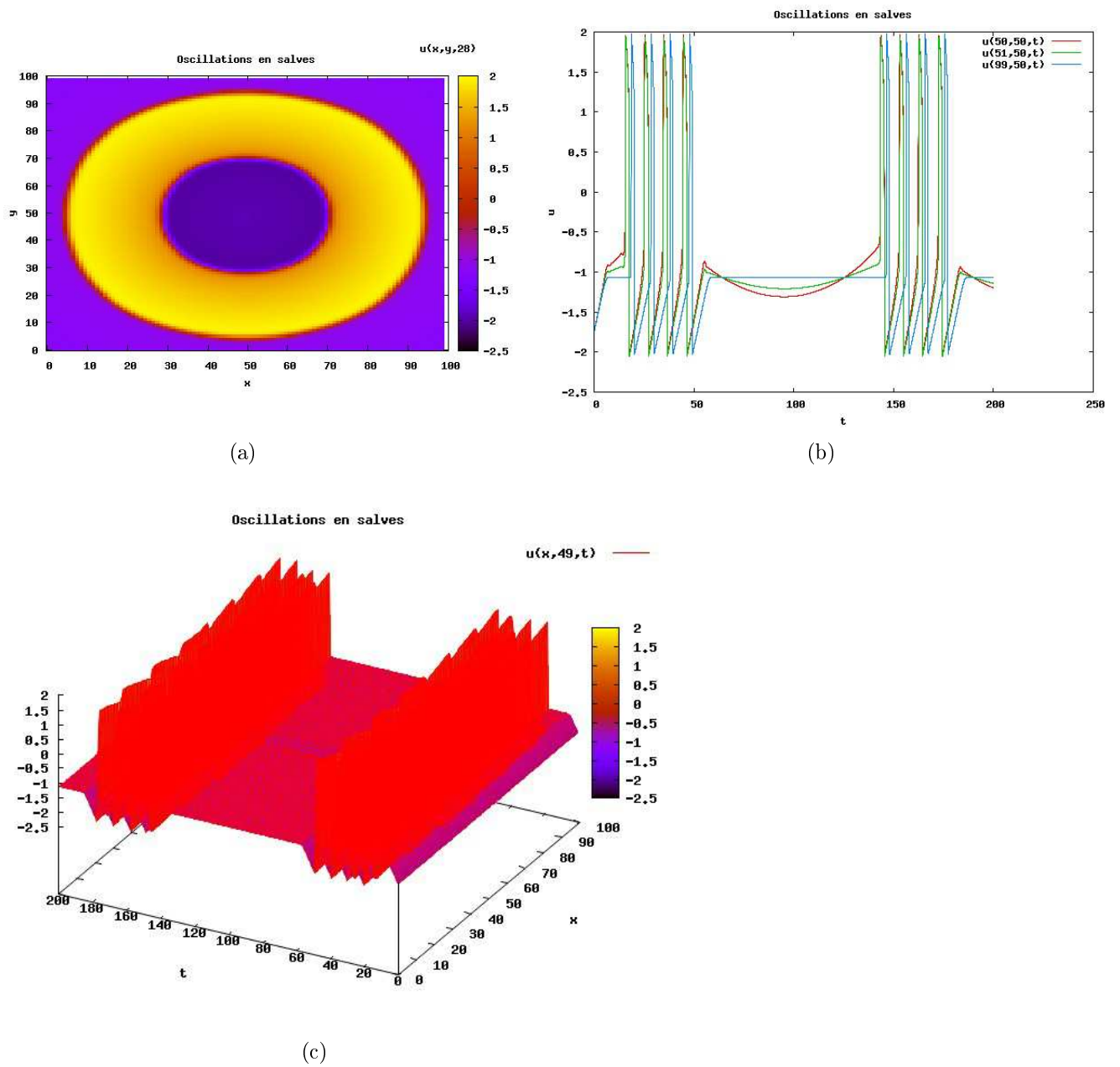


FIG. 66 – Solution du système (55), pour f cubique et $\gamma = \beta = 0.05$.

Processus et attracteur de (55) et (54)

Définition 14. Soit H un espace métrique. Une famille d'opérateurs $S(s, t) : H \rightarrow H$ définis pour $s \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ telle que

- (i) $S(s, t) \in C(H, H), \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$.
- (ii) $\forall s \in J, S(s, 0) = Id$.

(iii) $U(s, t + \tau) = S(s + t, \tau)S(s, t), \forall s \in \mathbb{R}, \forall t, \tau \geq 0.$

(iv) $\forall x \in H, \forall s \in \mathbb{R}, S(s, t)x \in C([0, +\infty[, H).$

est appelée un processus

Les solutions de (12) et (21) définissent des processus.

Dans la partie 4, on a montré l'existence d'un attracteur global pour le système (21). La théorie utilisée est celle de [67], [50], qui utilise la notion de semi-groupe. Grâce au fait que c est périodique par rapport au temps, on peut étendre le résultat dans le cas non autonome. Comme dans la partie 4 on note $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. d représente la distance associée à la norme de H . On note $S(s, t)U_0$ la solution du système (55) au temps $(s + t)$ telle que $U(s) = U_0$. On définit pour tout ensemble borné Y de H l'ensemble ω -limite

$$\omega(s, Y) = \bigcap_{h \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(s, t)Y}$$

Alors les calculs faits dans la partie 4 pour le système autonome (12) restent valables et on a un ensemble absorbant B . Compte tenu du fait que c est périodique par rapport au temps, on peut définir l'ensemble $\omega(B)$ indépendamment de s et c'est un attracteur global dans H . Dans la suite on démontre ce résultat.

Lemme 20. Soit B un borné absorbant pour (55) alors

$$\forall (s, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \omega(s, B) = \omega(\sigma, B) = \omega(B)$$

Démonstration. On suppose que $\sigma > s$.

On montre d'abord que

$$\omega(s, B) \subset \omega(\sigma, B)$$

Soit ϕ un élément de H . Alors

$$\begin{aligned} & \phi \in \omega(s, B) \\ \Leftrightarrow & \phi \in \bigcap_{h \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(s, t)B} \\ \Rightarrow & \phi \in \bigcap_{h \geq \sigma - s} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(\sigma, t - (\sigma - s))S(s, \sigma - s)B} \\ \Rightarrow & \phi \in \bigcap_{h \geq \sigma - s} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(\sigma, t - (\sigma - s))B} \text{ (car } B \text{ est absorbant).} \\ \Rightarrow & \phi \in \omega(\sigma, B) \end{aligned}$$

Puis que

$$\omega(\sigma, B) \subset \omega(s, B)$$

Pour cela compte tenu de la périodicité en temps de c on utilise notamment que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ S(s, t) = S(s + T, t) \quad (56)$$

où T est la période de c .

$$\begin{aligned} & \phi \in \omega(\sigma, B) \\ \Leftrightarrow & \phi \in \bigcap_{h \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(\sigma, t)B} \\ \Rightarrow & \phi \in \bigcap_{h \geq s + kT - \sigma} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(s + kT, t - (s + kT - \sigma))T(\sigma, s + kT - \sigma)B} \\ & \text{où } k \text{ est un entier tel que } s + kT > \sigma \\ \Rightarrow & \phi \in \bigcap_{h \geq s + kT - \sigma} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(s + kT, t - (s + kT - \sigma))B} \\ & \text{(car } B \text{ est absorbant).} \\ \Rightarrow & \phi \in \bigcap_{h \geq s + kT - \sigma} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(s, t - (s + kT - \sigma))B} \\ & \text{(car } B \text{ est absorbant).} \\ \Rightarrow & \phi \in \omega(s, B) \end{aligned}$$

□

Dans la suite, on utilisera le lemme suivant

Lemme 21. *Soit $\phi \in H$.*

$\phi \in \omega(B) \Rightarrow$ Pour toute suite réelle $s_n \exists t_n \rightarrow +\infty$ et $\phi_n \in B$ telle que $S(s_n, t_n)\phi_n \rightarrow \phi$

$\phi \in \omega(B) \Rightarrow \forall s \in \mathbb{R} \exists t_n \rightarrow +\infty$ et $\phi_n \in B$ telle que $S(s - t_n, t_n)\phi_n \rightarrow \phi$

$S(s_n, t_n)\phi_n \rightarrow \phi$ pour une suite réelle s_n , avec $t_n \rightarrow +\infty$, et $\phi_n \in B \Rightarrow \phi \in \omega(B)$

Démonstration. La première et la troisième assertion découlent de la définition et du fait que $\omega(B)$ ne dépend pas de s .

On détaille la deuxième.

Soit $\phi \in \omega(B)$. Soit $\epsilon > 0$ et $s \in \mathbb{R}$

$$\forall \alpha > 0 \exists t_\alpha \text{ arbitrairement grand et } \phi \text{ tels que } d_H(\phi, S(s - \alpha, t_\alpha)) < \epsilon$$

Compte tenu de la périodicité de c et de l'égalité (56), pour ϵ fixé, on peut inclure tous les t_α dans un compact de \mathbb{R} . Par le théorème de point fixe, $\exists \alpha$ tel que $\alpha = t_\alpha$.

Remplaçant ϵ par une suite ϵ_n qui tend vers 0 α par t_n , et faisant en sorte que t_n tende vers $+\infty$, on a le résultat. □

On a ,

Lemme 22. *Soi B un ensemble absorbant non vide de H*

- $\omega(B)$ est non vide compact

- $\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \omega(B)$ est invariant sous l'action de $T(s, t)$, c'est à dire que $T(s, t)\omega(B) = \omega(B)$.

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\omega(B) = \bigcap_{h \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq h} S(s, t)B}$$

Puisque les trajectoires sont relativement compactes, $\omega(B)$ est l'intersection d'une famille décroissante de compacts non vides, $\omega(B)$ est donc non vide et compact.

On montre maintenant que $\omega(B)$ est invariant par $S(s, t)$.

On montre d'abord que

$$S(s, t)\omega(B) \subset \omega(B)$$

$$\phi \in S(s, t)\omega(B)$$

$$\Rightarrow \exists (t_n \rightarrow +\infty \text{ et } \Psi_n \in B \text{ tels que } S(s, t)S(s - t_n, t_n)\Psi_n \rightarrow \phi \text{ (grâce au lemme précédent)})$$

$$\Rightarrow S(s - t_n, t_n + t)\Psi_n \rightarrow \phi$$

$$\Rightarrow \phi \in \omega(B)$$

On montre ensuite que

$$\omega(B) \subset S(s, t)\omega(B)$$

$$\phi \in \omega(B)$$

$$\Rightarrow \exists (t_n \rightarrow +\infty \text{ et } \phi_n \in B \text{ tels que } S(s - (t_n - t), t_n)\phi_n \rightarrow \phi \text{ (grâce au lemme précédent)})$$

$$\Rightarrow S(s, t)S(s - (t_n - t), t_n - t)\phi_n \rightarrow \phi$$

Comme les trajectoires sont relativement compactes, on peut extraire de $S(s - (t_n - t), t_n - t)\phi_n$ une sous suite qui converge. On note Ψ cette limite.

On a alors

$$\Psi \in \omega(B) \text{ et } \phi = S(s, t)\Psi$$

Donc

$$\phi \in S(s, t)\omega(B)$$

Et $\omega(B)$ est invariant. □

Si on définit la notion d'attracteur pour le processus $T(s, t)$ par

Définition 15. *Un attracteur pour le processus $T(s, t)$ est un ensemble invariant qui attire tous les bornés situés dans un voisinage qui le contient, et ce quelque soit $s \in \mathbb{R}$. Il est maximal s'il n'existe pas d'attracteur qui le contient strictement. Il est global s'il attire tous les bornés de H et s'il est compact*

On a alors le théorème suivant

Théorème 29. *Le système (55) possède un attracteur maximal global A . A est connexe. On a de plus $A = \omega(B)$ où B est un borné absorbant de H .*

Démonstration. On montre d'abord que $\omega(B)$ attire tout les bornés de H .

Soit Y un borné de H , on veut montrer que

$$d(\omega(B), S(s, t)Y) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty. \quad (57)$$

Comme B est absorbant, et grâce à l'égalité (56) on sait que

$$\exists T(Y) \text{ tel que } S(s, T(Y))Y \subset B \forall s \in \mathbb{R}$$

Supposons que (57) soit fausse, alors il existe (t_n, ϕ_n) avec $t_n \rightarrow +\infty$ et $\phi_n \in Y$ tels que

$$d(\omega(B), S(s, t_n)\phi_n) \geq \alpha > 0 \quad (58)$$

Comme les trajectoires sont relativement compactes on peut extraire de $S(s, t_n)\phi_n$, notée de la même manière, une sous suite qui converge. Soit ϕ sa limite. On a

$$S(s, t_n)\phi_n = S(s + T(Y), t_n - T(Y))S(s, T(Y))\phi_n$$

Si on note $\Psi_n = S(s, T(Y))\phi_n$, on a $\Psi_n \in \omega(B)$ et donc $\phi \in \omega(B)$. Ce qui contredit (58). Pour montrer que $\omega(B)$ est maximal et connexe on renvoie à [67]. □

De la même manière, on peut étendre les résultats sur les attracteurs de la partie 4 pour la version non autonome de (12). On a donc le résultat suivant :

Théorème 30. *Dans le cas où $\epsilon = 1$, il existe des régions invariantes pour le système (54). Si D est l'une de ces régions invariantes, le processus $S(s, t)$ associé au système (54) ($\epsilon = 1$) possède un attracteur A borné dans $(H^1(\Omega))^2$ compact et connexe dans $L^2(\Omega; D)$. Il attire tous les bornés de $L^2(\Omega; D)$.*

19.2 Cas d'une EDP de type équation des ondes avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique

On refait la même chose mais avec la version non autonome de (48)

$$\begin{cases} \epsilon u_t &= f(u) - v \\ v_t &= u - c(x, t) - \Delta u \end{cases} \quad (59)$$

où c , les conditions initiales et les conditions aux bords sont les mêmes que précédemment. Les résultats sont représentés sur la figure 67. On obtient comme précédemment des propagations d'oscillations en salves. Il y a plus de salves que dans le cas RD. Les ondes se propagent moins rapidement à tout le domaine (voir les b) des figures 65 et 67) et sont moins amples.

On ne représente pas le cas où f est affine par morceaux car il est similaire.

20 Ondes spirales, patterns pour l'EDP de type équation des ondes avec hétérogénéité spatiale et forçage périodique

Si l'on prend β très petit ou nul, on peut obtenir de nombreux patterns complexes. En fait lorsque $\beta = 0$, les cellules excitables, une fois l'excitation passée reviennent à leur état d'équilibre par petites oscillations (dans ce cas, s'il n'y avait pas de couplage, le point d'équilibre serait un foyer attractif). A un moment, certaines de ces cellules sont capables d'engendrer elles mêmes une excitation, initiant des patterns particuliers. Dans la figure 68, on a représenté la variable u solution du système (59) lorsque $\gamma = 0.17$, que $\beta = 0$ et que les conditions initiales sont constantes sur tout le domaine. Par rapport à la solution oscillations en salves de la figure 67, seules les valeurs de γ et β ont donc changé. Le couplage par diffusion n'engendre pas de telles figures. Pour les mêmes valeurs de paramètres, on continue à avoir les oscillations en salves.

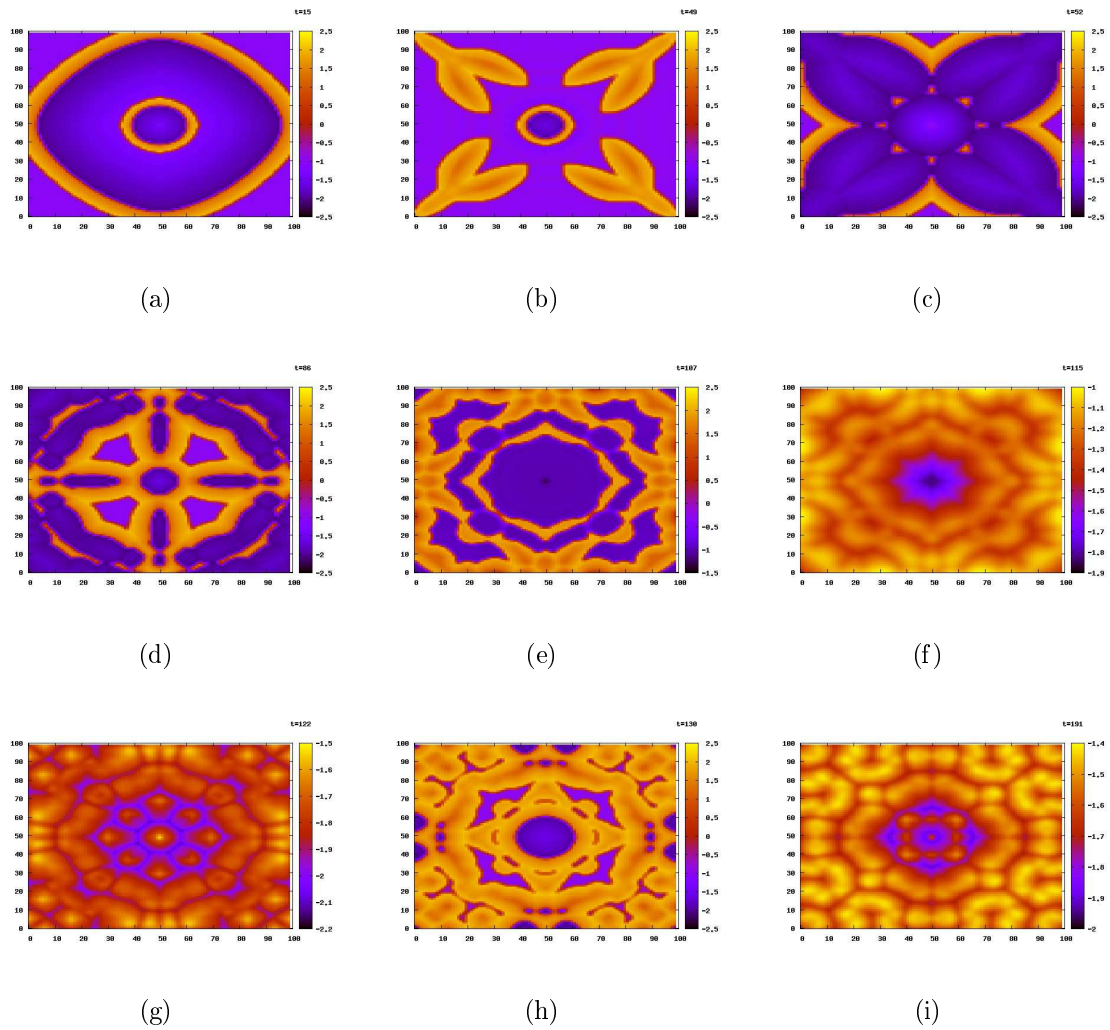


FIG. 68 – Solution du système (59), pour f cubique, $\gamma = 0.17$ et $\beta = 0$.

Si maintenant, on prend pour ϵ la valeur 1 (au lieu de 0.1), et qu'on laisse inchangés les autres paramètres, on obtient les spirales de la figure 69a).

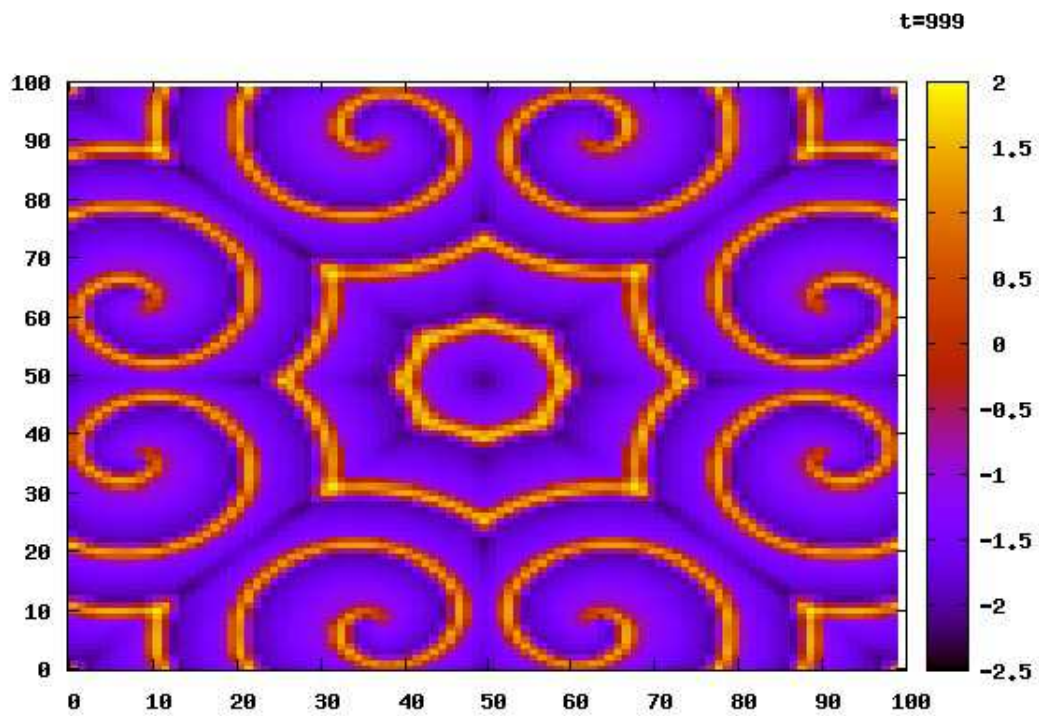


FIG. 69 – Solution du système (59), pour f cubique, $\epsilon = 1$, $\gamma = 0.17$ et $\beta = 0$.

Avec $\epsilon = \frac{1}{3}$ et $\beta = 0.01$ le point d'équilibre de (1) avec f affine par morceaux devient un foyer attractif. Et pour cette valeur de ϵ on obtient également des patterns particuliers pour la solution de (59) pour f affine par morceaux, comme le montre la figure 70.

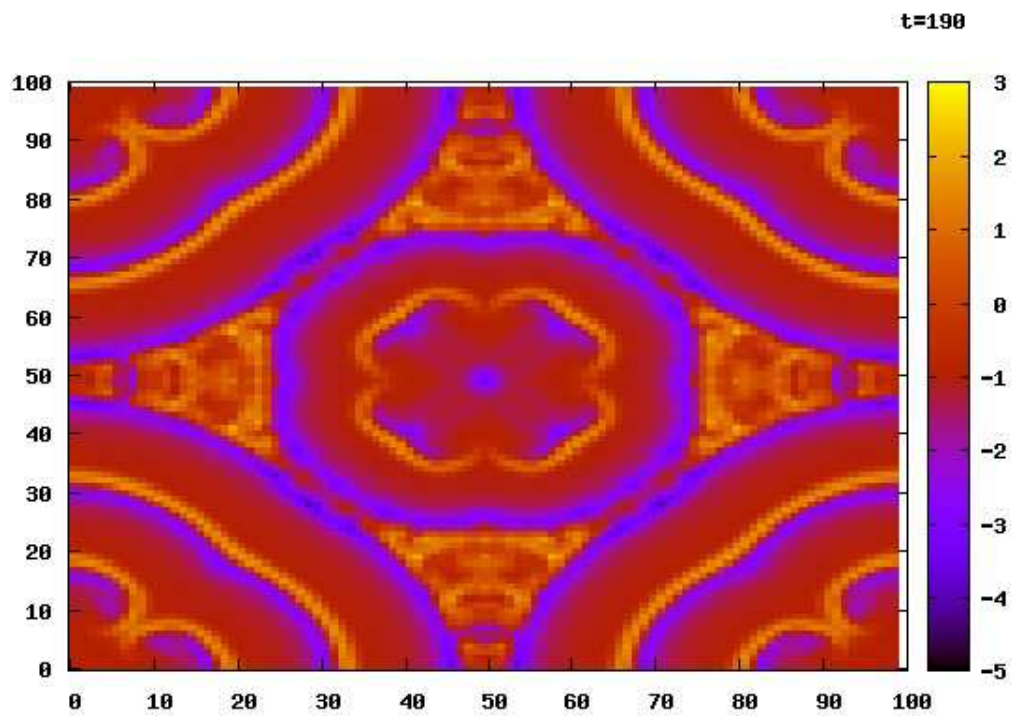


FIG. 70 – Solution du système (59), pour f affine par morceaux, $\gamma = 0.17$, $\epsilon = \frac{1}{3}$ et $\beta = 0.01$.

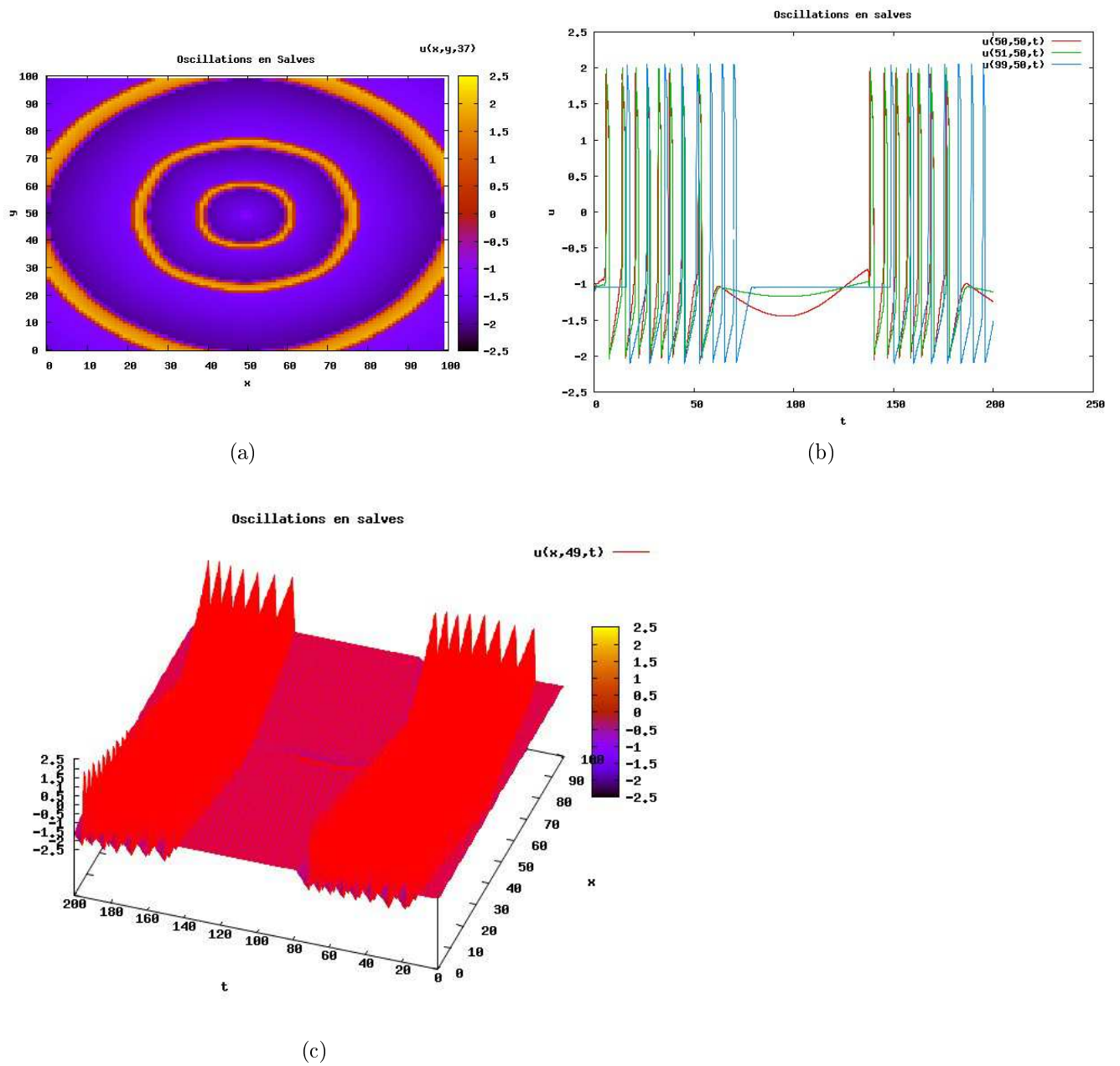


FIG. 67 – Solution du système (59), pour f cubique et $\gamma = \beta = 0.05$.

Annexe A

Commentaires sur l'algorithme utilisé pour les simulations numériques

A.1 Description de la méthode utilisée

Toutes les simulations numériques présentées dans le manuscrit ont été réalisées à l'aide d'une discrétisation par la méthode des différences finies à cinq points en espace et par un schéma d'Euler explicite en temps. Le domaine sur lequel on discrétise est un carré, et le maillage est constitué de 100×100 carrés de même taille. Pour rappel, la solution $(u(t_k), v(t_k))$ à l'instant t_k est donc représentée par deux vecteurs de \mathbb{R}^{10000} , $(u_{ij}^{t_k}, v_{ij}^{t_k})_{0 \leq i, j \leq 99}$ correspondant aux valeurs sur les éléments du maillage. On note ces vecteurs u_{kh} et v_{kh} . Connaissant la solution à l'instant t_k la solution à l'instant t_{k+1} est calculée par la formule suivante dans le cas du système (12) :

$$u_{ij}^{t_{k+1}} = u_{ij}^{t_k} + \frac{dt}{\epsilon} (F_1(u_{ij}^{t_k}, v_{ij}^{t_k}) + \frac{1}{h^2} \delta_{ij}(u_{kh})) \quad (\text{A.1})$$

$$v_{ij}^{t_{k+1}} = v_{ij}^{t_k} + dt ((F_2(u_{ij}^{t_k}, v_{ij}^{t_k}, i, j) + \frac{1}{h^2} \delta_{ij}(v_{kh})) \quad (\text{A.2})$$

où

$$\delta_{ij}(u_{kh}) = u_{(i+1)j}^{t_k} + u_{(i-1)j}^{t_k} + u_{i(j+1)}^{t_k} + u_{i(j-1)}^{t_k} - 4u_{ij}^{t_k}$$

pour les mailles non aux bords du carré.

Pour les mailles aux bords, l'opérateur δ_{ij} dépend des conditions aux bords. Dans les simulations présentées dans le manuscrit, on a utilisé des conditions aux bords de Neumann. On a alors un flux nul aux bords, ce qui donne par exemple pour δ_{10} et δ_{00} .

$$\delta_{10}(u_{kh}) = u_{20}^{t_k} + u_{00}^{t_k} + u_{11}^{t_k} - 3u_{10}^{t_k}$$

$$\delta_{00}(u_{kh}) = u_{10}^{t_k} + u_{01}^{t_k} - 2u_{00}^{t_k}$$

δ_{ij} est défini de manière analogue pour les autres mailles du bord, et pour v_{kh} .

F_1 et F_2 sont les deux composantes correspondant au termes non diffusifs du second membre de (12), à savoir $F_1(u, v) = f(u) - v$, $F_2(u, v, i, j) = u - c_{ij}$ (c_{ij} est le vecteur représentant la fonction $c(x, y)$ sur le maillage).

Dans le cas du système de type équation des ondes (48) la formule utilisée pour passer du temps t_k au temps t_{k+1} est :

$$u_{ij}^{t_{k+1}} = u_{ij}^{t_k} + \frac{dt}{\epsilon}(F_1(u_{ij}^{t_k}, v_{ij}^{t_k})) \quad (\text{A.3})$$

$$v_{ij}^{t_{k+1}} = v_{ij}^{t_k} + dt((F_2(u_{ij}^{t_k}, v_{ij}^{t_k}, i, j) - \frac{1}{h^2}\delta_{ij}(u_{kh})) \quad (\text{A.4})$$

Classiquement, dt représente le pas de discrétisation en temps et h le pas de discrétisation en espace. Les simulations numériques présentées ont été réalisées avec $h = 1$, et $dt = 0.01$. On s'intéresse maintenant à l'effet de quelques variations de ces paramètres sur les solutions numériques obtenues pour (12) et (48) lorsque $c_{ij} = 0$ dans les quatre mailles centrales et $c_{ij} = -1.1$ ailleurs. Les conditions initiales sont les fonctions nulles partout. Ces valeurs donnaient des propagations d'ondes pour $h = 1$ et $dt = 0.01$. Voici les résultats de stabilité obtenus pour différentes valeurs de ces paramètres.

dt	h	Système (12)	Système (48)
0.01	1	Propagations d'ondes	Propagation d'ondes
0.01	0.9	Propagations d'ondes	Propagation d'ondes
0.01	0.7	Très peu de propagation d'ondes	Solution stationnaire
0.01	0.5	Très peu de propagation d'ondes	Explosion
0.0025	1	Propagations d'ondes	Propagations d'ondes
0.005	1	Propagations d'ondes	Propagations d'ondes
0.025	1	Propagations d'ondes	Explosion
0.05	1	Explosion	Explosion
0.0025	0.5	Solution non stationnaire mais pas de propagation d'ondes (oscillations pour les mailles centrales)	Solution stationnaire
0.0004	0.2	Solution stationnaire	Solution stationnaire

Ces résultats laissent supposer que la valeur $\frac{dt}{h^2} = 0.01$ puisse assurer la stabilité du schéma. Il convient de noter que la valeur de ϵ influence aussi la stabilité. Ainsi pour $\epsilon = 0.01$, $h = 1$, $dt = 0.01$ les simulations explosent. La diminution de h semble rendre plus difficile la propagation d'ondes et favoriser l'évolution vers les solutions stationnaires. Mais en augmentant le nombre de mailles au centre sur lesquelles c_{ij} vaut 0, les propagations d'ondes sont obtenues. Ainsi, pour $c_{ij} = 0$ dans le carré de 400 mailles au centre, et $c_{ij} = -1.1$ ailleurs, avec $h = 0.2$ et $dt = 0.0004$, on observe les propagations d'ondes. Pour ces mêmes valeurs de h et dt , si on reproduit, outre ces deux valeurs, la même simulation de la figure 17, on obtient la solution de la figure A.1. C'est une solution rotative comme la spirale, mais les branches sont moins courbes.

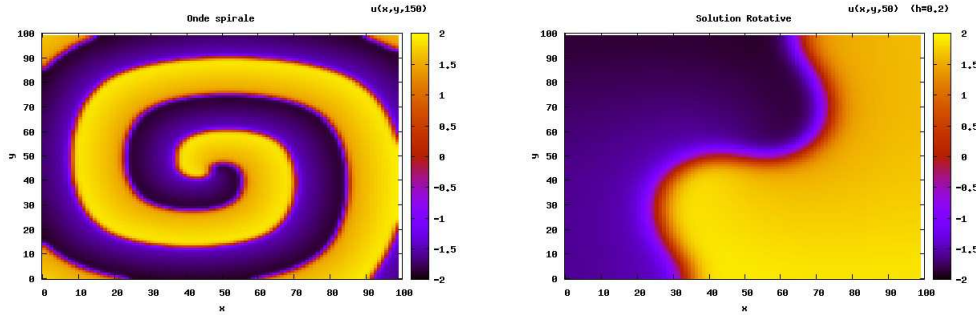


FIG. A.1 – Solution onde spirale du système (12), a) $h=1$ $dt=0.01$ b) $h=0.2$ $dt=0.0004$.

A.2 Commentaires sur le choix de cette méthode

Dans le cadre de la thèse, les simulations numériques devaient servir de support pour guider l'intuition dans la compréhension des phénomènes apparaissant dans les EDP à partir des phénomènes apparaissant dans l'EDO sous jacente. Après avoir envisagé d'utiliser la méthode des éléments finis et la méthode d'Euler implicite, c'est la méthode d'Euler explicite qui a été en premier implémentée du fait que pour cette méthode le terme non linéaire n'entraîne pas de difficultés supplémentaires dans l'algorithme. Avec les valeurs de paramètre utilisées, les simulations sont rapides, ce qui a permis de multiplier les simulations, et les allers-retours entre simulations et interprétations. Elle a donné des résultats cohérents avec les propriétés oscillatoire et excitable du système sans diffusion (1). Cette méthode fait également le lien avec la théorie des oscillateurs couplés. Elle permet également de saisir un des mécanismes d'action de la diffusion : le laplacien en un point dirige la valeur de la solution dans la direction donnée par la différence entre la moyenne de la valeur des voisins et la valeur en ce point. Cela renvoie à l'effet moyennisant de la diffusion observé dans le système de réaction diffusion (12). Elle permet également une interprétation des phénomènes d'excitabilité comme cela a été fait dans la partie 4 concernant le système (48).

Bien sur l'inconvénient de cette méthode simple, est qu'elle nécessite des pas de temps très petits si l'on veut diminuer la valeur des paramètres h ou ϵ . Chercher à retrouver les figures complexes par d'autres méthodes et des valeurs de paramètre h et ϵ plus petits est une éventuelle perspective de ce travail. On présente ici quelques résultats obtenus avec une discrétisation en espace à 9 points.

A.3 Schéma à neuf points pour le laplacien

On a refait quelques simulations avec une discrétisation du laplacien à 9 points. On a reproduit des spirales dans le cas où $c_{ij} = 0$ partout pour (12) (conditions initiales analogues à celles de la troisième partie, et des propagations d'ondes pour $c_{ij} = 0$ dans les quatre mailles centrales et $c_{ij} = -1.03$ ailleurs, pour les systèmes (12) et (48). A noter

que pour $c_{ij} = 0$ dans les quatre mailles centrales et $c_{ij} = -1.1$ ailleurs, la solution tend vers une solution stationnaire dans le cas de (12) contrairement au cas où le laplacien est discrétisé avec cinq points. Si les propriétés qualitatives des solutions sont les mêmes, la forme des solutions diffère puisque l'impact des cellules voisines est plus fort. Ainsi, la forme des spirales est différente dans le cas de la discrétisation du laplacien à 9 points et 5 points. A noter que les patterns de la figure ont pu être obtenus pour le laplacien à 9 points ((48), c_{ij} alternativement oscillant, excitable dans les quatre mailles centrales, $c_{ij} = -1$ ailleurs). Dans le cas du laplacien à 9 points la 'qualité' de l'image semble meilleure.

Bibliographie

- [1] B. Aehlert. *L'ECG rendu facile*. Maloine, 2003.
- [2] N.D. Alikakos. An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations. *Journal of Differential Equations*, 33 :201–225, 1979.
- [3] D.G. Aronson, G.B. Ermentrout, and N. Kopell. Amplitude response of coupled oscillators. *Physica D*, 41 :403–449, 1990.
- [4] O.V. Aslanidi, O. Mornev, P. Arkhammar, O. Thastrup, M. Sorensen, P. Christiansen, K. Conradsen, and A.C. Scott. Excitation wave propagation as a possible mechanism for signal transmission in pancreatic islet of langerhans. *Biophysical Journal*, 80 :1195–1209, 2001.
- [5] C.E. Auguet, A. Penaranda, Ramiréz-Piscina ; L., A.M. Lacasta, and I.R. Cantalapiedra. Modelling of spatiotemporal patterns in bacterial colonies. *Physical Review E*, 59(6) :7036–7041, 1999.
- [6] A.L. Bardou, P. Auger, and J.L. Chassé. Modelling of cardiac electro-physiological mechanisms : from action potential genesis to its propagation in myocardium. *Critical reviews in Biomedical Engineering*, 24 :141–221, 1996.
- [7] D. Barkley. Spiral wave spectra. www.maths.warwick.ac.uk/~barkley/Research/spiral_spectra/spiral_spectra.html.
- [8] D. Barkley. Linear stability of rotating spiral waves in excitable media. *Physical Review Letters*, 68(1) :2090–2093, March 1992.
- [9] D. Barkley. Euclidian symmetry and the dynamics of rotating spiral waves. *Physical Review Letters*, 72(1) :164–168, 1994.
- [10] M. Boulakia, M. Fernandez, J.F. Gerbeau, and N. Zemzemi. Towards the numerical simulation of electrocardiograms. In *FIMH 2007*, Lecture Notes in Computer Science, pages 240–249, 2007.
- [11] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1999.
- [12] M.L. Cartwright and J.E. Littlewood. On nonlinear differential equations of the second order. *J. London Math. Soc.*, 20 :180–189, 1945.
- [13] T. Cazenave and A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Ellipses, 1990.
- [14] D.R. Chialvo and J. Jalife. Non linear dynamics of cardiac excitation and impulse propagation. *Nature*, 330 :749–752, 1987.

- [15] D.R. Chialvo and J. Jalife. Non linear dynamics of cardiac excitation and impulse propagation. *Nature*, 330 :749–752, 1987.
- [16] F. Clement and J.P. Francoise. Mathematical modeling of the GnRh pulse and surge generator. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst*, 6(2) :441–456, 2007.
- [17] D.S. Cohen, J.C. Neu, and R. Rosales. Rotating spiral waves solutions of reaction-diffusion equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 35(3) :536–546, Nov. 1978.
- [18] J.M. Davidenko, A.V. Pertsov, W. Salomonsz, R. Baxter, and J. Jalife. Stationary and drifting spiral waves of excitation in isolated cardiac muscle. *Nature*, 355 :349–351, Jan. 1992.
- [19] L. De Roye, C. Brohet, and J.C. Daubert. *ECG pathologique : de la théorie à la pratique : 140 tracés*. Masson, 2005.
- [20] J. Demongeot and J.P. Francoise. Approximation for limite cycles and their isochrons. *C.R. Biologies*, 355 :967–970, 2006.
- [21] C. Doss-Bachelet, J.P. Francoise, and C. Piquet. Bursting oscillations in two coupled FitzHugh-Nagumo systems. *ComplexUs*, 2 :101–111, 2003.
- [22] M.R. Duffy, N.F. Britton, and J.D. Murray. Spiral wave solutions of practical reaction diffusion systems. *SIAM J. Appl. Math.*, 39(1) :8–12, Aug. 1980.
- [23] G.B. Ermentrout. The behaviour of rings of coupled oscillators. *Journal of Mathematical Biology*, 23 :55–74, 1985.
- [24] G.B. Ermentrout. Stable periodic solutions to discrete and continuum array of weakly coupled oscillators. *Nature*, 355 :349–351, Jan. 1992.
- [25] G.B. Ermentrout. *Tutorials in mathematical Biosciences I*. Springer, 2005.
- [26] N. Ermentrout, G.B. Kopell. Frequency plateaux in a chain of weakly coupled oscillators. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(2) :215–237, March 1984.
- [27] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical J.*, 117(1) :445–466, 1961.
- [28] J.P. Francoise. *Oscillations en biologie*. Springer, 2005.
- [29] M. Garvie and J. F. Blowey. A reaction-diffusion system of $\lambda-\omega$ type. I. mathematical analysis. *European J. on App. Math.*, 16(1) :1–19, 2005.
- [30] M. Golubitsky, D.G. Schaeffer, and I. Stewart. *Singularities and groups in bifurcation theory. Volume I*. Springer, 1985.
- [31] M. Golubitsky, D.G. Schaeffer, and I. Stewart. *Singularities and groups in bifurcation theory. Volume II*. Springer, 1985.
- [32] J. Guckenheimer. Isochrons and phaseless sets. *J. Math. Biol.*, 1 :259–273, 1975.
- [33] A. Haraux. *Systèmes dynamiques et applications*. Masson, 1991.
- [34] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic press, 1974.
- [35] A.L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117 :500–544, 1952.

- [36] R. Joly. *Dynamique des équations des ondes avec amortissement variable*. PhD thesis, 2005.
- [37] J. Keener, J. Sneyd. *Mathematical Physiology*. Springer, 1998.
- [38] I.Z. Kiss, Q. Lv, L. Organ, and J.L. Hudson. Electrochemical bursting oscillations on a high-dimensional slow subsystem. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 8 :2707–2715, 2006.
- [39] N. Kopell and L.N. Howard. Plane wave solutions to reaction-diffusion equations. *Studies in Appl. Mat.*, 52 :291–328, 1973.
- [40] N. Kopell and L.N. Howard. Target pattern and spiral solutions to reaction-diffusion equations with more than one space dimension. *Adv. in Appl. Math.*, 2(4) :417–449, 1981.
- [41] J. Lauzeral, J. Halloy, and A. Goldbeter. Desynchronization of cells on the developmental path triggers the formation of spiral waves of cAMP during dictyostelium aggregation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 94 :9153–9158, Aug. 1997.
- [42] S. Lefschetz, editor. *Contributions to the theory of non linear oscillations*, volume 1 of *Annals of mathematical studies*. Princeton University Press, 1950.
- [43] S. Lefschetz. *Differential equations : Geometric Theory*. Interscience Publishers, New York, 1957.
- [44] J. Lelong-Ferrand and J.M. Arnaudiès. *Analyse, Tome 4*. Dunod Université, 1992.
- [45] N. Levinson. A second-order differential equation with sigular solutions. *Ann. Math.*, 50 :127–153, 1949.
- [46] A. Lins, W. De Melo, and C. Pugh. On Lienard’s equation. *Lecture Notes in Mathematics*, 597 :335–357, 1977.
- [47] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [48] J.L. Lions and W.A. Strauss. Some non-linear evolution equations. *Bull. Soc. math. France*, 93 :43–96, 1965.
- [49] Vander Sherman Luciano. *Physiologie Humaine*. Chenelière, McGraw-Hill, 2004.
- [50] M. Marion. Attractors for reaction-diffusion equations; existence and estimate of their dimension. *App. Anal.*, 25 :101–147, 1987.
- [51] M. Marion. Finite-dimensional attractors associated with partly dissipative reaction-diffusion systems. *SIAM J. Appl. Math.*, 20(4) :816–844, July 1989.
- [52] G. Matsumoto, K. Aihara, Y. Hanyu, N. Takahashi, S. Yoshizawa, and JIn-ichi Nagumo. Chaos and phase locking in normal squid axons.
- [53] M. Mimura. Pattern formation in consumer-finite resource reaction-diffusion systems. *Publ. RIMS Kyoto Univ*, 40 :1413–1431, 2004.
- [54] M. Mimura, H. Sakagushi, and M. Matsushita. Reaction-diffusion modelling of bacterial colony patterns. *Physica A*, 282 :283–303, 2000.
- [55] J.D. Murray. *Mathematical Biology*. Springer, 2003.
- [56] J.C. Neu. Coupled chemical oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 37(2) :307–315, Oct. 1979.

- [57] D. Noble. From the hodgkin-huxley axon to the virtual heart. *J. Physiol.*, 580 :15–22, 2007.
- [58] J.E. Paultet and G.B. Ermentrout. Stable rotating waves in two dimensional discrete active media. *SIAM J. Appl. Math.*, 54(6) :1720–1744, December 1994.
- [59] J.E. Paultet and G.B. Ermentrout. Spiral waves in spatially discrete $\lambda - \omega$ systems. *Internat. J. Bifurc. and Chaos*, 8(1) :33–40, 1998.
- [60] J.E. Paultet, G.B. Ermentrout, and W. Troy. The existence of spiral waves in an oscillatory reaction-diffusion system. *SIAM J. Appl. Math.*, 54(5) :1386–1401, October 1994.
- [61] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1991.
- [62] J. Rauch. Qualitative behavior of dissipative wave equations on bounded domains. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 62 :77–85, 1976.
- [63] J. Robinson. *Infinite-Dimensional Systems*. Cambridge University Press, 2001.
- [64] F. Rothe. *Global Solutions of Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1984.
- [65] M. Sermessant. *Modèle électromécanique du coeur pour l'analyse d'image et la simulation*. PhD thesis, 2003.
- [66] J. Smoller. *Shock waves and Reaction-Diffusion equations*. Springer-Verlag, 1994.
- [67] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer, 1988.
- [68] B. van der Pol and J. van der Mark. Frequency demultiplication. *Nature*, 120 :363–364, 1927.
- [69] B. van der Pol and J. van der Mark. The heart beat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Phil. Mag.*, 6 :763–775, 1928.
- [70] A.T. Winfree. *The geometry of biological time*. Springer, 1990.
- [71] A.T. Winfree. Varieties of spiral wave behavior : an experimentalist's approach to the theory of excitable media. *Chaos*, 1(3) :303–334, 1991.
- [72] T. Yanagita, Y. Nishiura, and R. Kobayashi. Signal propagation and failure in one-dimensional FitzHugh-Nagumo equations with periodic stimuli. *Physical Review E*, 71 :36226, 2005.
- [73] T. Yanagita, Y. Nishiura, and R. Kobayashi. Resonance and the formation of death-spot in one-dimensional FitzHugh-Nagumo equations. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 161 :393–396, 2006.