



HAL
open science

La transformation de Laguerre discrète

Noël Tanguy

► **To cite this version:**

Noël Tanguy. La transformation de Laguerre discrète. Traitement du signal et de l'image [eess.SP].
Université de Bretagne occidentale - Brest, 1994. Français. NNT: . tel-00438350

HAL Id: tel-00438350

<https://theses.hal.science/tel-00438350>

Submitted on 3 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'Université de Bretagne Occidentale

pour l'obtention du

DOCTORAT EN ELECTRONIQUE

par

Noël TANGUY

<p>LA TRANSFORMATION DE LAGUERRE DISCRETE</p>
--

Soutenue le 16 Décembre 1994

Rapporteurs :

MONSION M., Professeur a l'Université de Bordeaux I
RAGOT J., Professeur a l'INP de Lorraine, Nancy

Examineurs :

CALVEZ L.C., Professeur a l'Université de Brest
DEBRIE R., Professeur a l'INSA de Rouen
LE BIHAN J., Professeur a l'ENI de Brest
VILBE P., Professeur a l'Université de Brest

Recherches effectuées au LEST - URA CNRS N°1329 - UBO – ENSTBr
UBO : 6, Avenue Le Gorgeu - BP 809 - 29285 Brest Cedex
ENSTBr : Z.I. de Kernevent - Plouzané - BP 832 - 29285 Brest Cedex

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electronique et des Systèmes de Télécommunication de l'Université de Bretagne Occidentale. Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur L.C. Calvez qui, par ses conseils avisés, m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions. Qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma très profonde reconnaissance.

Je remercie par ailleurs Messieurs les Professeurs M. Monsion et J. Ragot qui ont bien voulu consacrer leur attention à l'examen de cette thèse, et nous ont fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur R. Debrie d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury, et pour le vif intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je remercie également Messieurs les Professeurs P Vilbé et J. Le Bihan pour leur participation au jury, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, et pour leurs remarques judicieuses.

Je ne saurais oublier les autres membres du laboratoire, enseignants, techniciens, secrétaires et doctorants qui, à divers titres et dans divers circonstances m'ont apporté leur aide et leur soutien, et grâce auxquels l'ambiance a toujours été amicale et agréable.

Table des matières

Introduction	1
 Chapitre 0 : Introduction	
1. Introduction générale	3
2. Résumé des travaux antérieurs	4
3. Contribution de cette thèse	7
 Chapitre 1 : Rappels sur la transformation en z	
1. Introduction et définition	10
2. Propriétés de la transformation en z	11
2.1. Linéarité	11
2.2. Amortissement	12
2.3. Décalage	12
2.4. Sommation	12
2.5. Produit de convolution réelle	12
2.6. Dérivation de la transformée	13
2.7. Intégration de la transformée	13
2.8. Formule de type Rodriguez	13
2.9. Généralisation du théorème de convolution	14
3. Inversion de la transformation en z	15
3.1. Usage des tables	15
3.2. Exploitation des propriétés de la transformée directe	16
3.3. Décomposition en série de puissance de z^{-n}	16
3.4. Formule d'inversion dans le plan complexe	16
3.5. Théorèmes des valeurs initiale et finale	16
3.6. Méthode des dérivées successives	17
3.7. Inversion d'un quotient de deux transformées	17
3.8. Inversion de $A(z)e^{B(z)}$	18
 Chapitre 2 : Propriétés des fonctions de Laguerre discrètes	
1. Introduction et définitions	21
2. Transformées en z	26
2.1. Transformée en z sur l'indice k	26
2.2. Transformée en z sur l'indice n	27
3. Filtres de Laguerre discrets	27
3.1. Sur l'indice k	27
3.2. Sur l'indice n	28
4. Lois d'échange des indices n et k	29
5. Orthogonalité	29
5.1. Sur l'indice k	29
5.2. Sur l'indice n	30
6. Relations de récurrence	30
6.1. Relation de récurrence mixte	31
6.2. Relation de récurrence sur l'indice k	31

6.3. Relation de récurrence sur l'indice n.....	32
7. Décalage positif des indices	33
7.1. Décalage de l'indice k.....	33
7.2. Décalage de l'indice n.....	34
8. Fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation.....	34
8.1. De la variable k.....	35
8.2. De la variable n.....	36
9. Décalage négatif des l'indices.....	37
9.1. Décalage de l'indice k.....	37
9.2. Décalage de l'indice n.....	37
10. Produits de convolution.....	38
10.1. Sur l'indice k.....	38
10.2. Sur l'indice n.....	38
11. Expression sous une forme de type Rodriguez.....	38
11.1. Indice k.....	39
11.2. Indice n.....	39
12. Sommation des $\varphi_n[k]$	40
12.1. Sur l'indice k.....	40
12.2. Sur l'indice n.....	40
13. Dérivées par rapport aux paramètres.....	41
13.1 Dérivée par rapport au paramètre b.....	41
13.2 Dérivée par rapport au paramètre a.....	41
14. Modification des paramètres.....	42
14.1. Modification du paramètre b.....	42
14.2. Changement de signe du paramètre a.....	43
14.3. Relations générales.....	43
14.4. Autres relations.....	45
15. Majoration des fonctions de Laguerre discrètes.....	46
16. Interpolation.....	48

Chapitre 3 : Propriétés de la transformation de Laguerre discrète

1. Introduction et définitions	52
1.1 Transformée de Laguerre discrète.....	52
1.2. Exemples simples de transformées.....	53
1.2.1. Transformée de l'échelon unité.....	53
1.2.2. Transformée de l'impulsion unité.....	53
1.3 Théorème de la valeur initiale.....	54
2. Relations entre la transformée en z et la transformée de Laguerre discrète.....	54
2.1. Relations entre les transformées.....	54
2.2. Méthode des dérivées successives.....	56
2.3. Extraction de la transformée en z à partir de l'expression de la transformée de Laguerre.....	56
3. Propriétés de la transformation de Laguerre discrète.....	57
3.1. Linéarité.....	57
3.2. Amortissement.....	58
3.3. Multiplication par k.....	58
3.4. Multiplication du spectre par n.....	58
3.5. Sommation.....	59
3.6. Décalage temporel.....	60
3.6.1. Décalage temporel négatif.....	60

3.6.2. Décalage temporel positif	62
3.7. Décalage spectral	63
3.7.1 Décalage spectral négatif	63
3.7.2 Décalage spectral positif	64
3.8. Produit de convolution réelle	65
3.9. Fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation	66
3.10. Fonction périodique	67
3.11. Transformée de $g[k] = \frac{f[k]}{k + \lambda}$	68
3.11.1. Cas général	68
3.11.2. Cas particulier : $\lambda=0$	68
4. Transformées de Laguerre de fonctions usuelles	70
4.1. Transformée de l'échelon unité	70
4.2. Transformée de l'impulsion unité	70
4.3. Transformée de λ^k	71
4.4. Transformée de $\frac{\lambda^k}{k!}$	71
4.5. Transformée de $\binom{\lambda}{k}$	72
4.6. Transformée de $\binom{k + \lambda}{\lambda}$	73
4.7. Transformée de $\binom{k}{\lambda}$	74
4.8. Transformée de $\lambda^k \sin(k\theta)$	75
4.9. Transformée de $\lambda^k \cos(k\theta)$	76
4.10. Extension de la table des transformées	76
5. Inversion de la transformée de Laguerre discrète	77
5.1. Théorème d'inversion	77
5.2. Schématisation des transformations	78
5.3. Théorème de la valeur initiale	79
5.4. Méthodes d'inversion de la transformée de Laguerre discrète	79
5.4.a. Utilisation des tables	79
5.4.b. Limite lorsque le paramètre a tend vers zéro	79
5.4.c. Passage par le domaine de la transformée en z	80
6. Propriétés du spectre de Laguerre	81
6.1. Changement de paramètres	81
6.1.1. Changement de paramètres a et b avec conservation du rapport a/b	81
6.1.2. Changement du paramètre a avec conservation du paramètre b	82
6.1.3. Changement de paramètres avec conservation du pôle ab	82
6.2. Dérivée par rapport au paramètre a	83
6.3. Egalité de type Parseval	84
6.4. Calcul de $S = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} f[k]$	85

Chapitre 4 : Etude de l'approximation lorsque la série d'inversion est limitée

1. Introduction	87
2. Détermination des $f_n(a,b)$, et de $\tilde{f}[k]$	87
2.1. Méthode de calcul des $f_n(a,b)$	88
2.2. Méthode de calcul des $\tilde{f}[k]$	89
3. Estimation de l'erreur $E[k] = f[k] - \tilde{f}[k] $	90
4. Erreur quadratique	92
4.1 Définition	92
4.2. Minimalisation de l'erreur quadratique par la méthode de Masnadi-Shirazi	94
4.3. Minimalisation de l'erreur quadratique	96
4.4. Particularisation de la méthode aux fonctions de Laguerre discrètes	100
4.5. Exemples de résultats	102

Chapitre 5 : Applications

1. Compression d'information	105
2. Interpolation	107
3. Rôle du paramètre de pondération b	109
4. Modélisation avec contraintes	111
5. Modélisation en présence de bruit	116
6. Résolution d'équations aux différences	118
7 Déconvolution	120
8 Identification temps réel	124
8.1 Systèmes à simple entrée	124
8.2 Systèmes à entrées multiples	129

Conclusion	136
-------------------------	-----

Références bibliographiques	138
--	-----

Les fonctions de Laguerre à temps discret, introduites il y a quelques décennies, ont connu ces dernières années un regain d'intérêt dans divers domaines du traitement du signal tels que la modélisation de signaux, l'identification de systèmes, le contrôle de processus, ... Ces fonctions réelles à temps discret, tout comme les fonctions de Laguerre à temps continu, dont elles ne sont pas une version échantillonnée, forment une base orthogonale particulièrement intéressante pour la représentation de certains signaux. Elles sont dépendantes de deux paramètres permettant de définir une large gamme de fonctions. Les allures caractéristiques des fonctions de Laguerre discrètes sont semblables à des transitoires oscillants amortis. Ceci confère à la base orthogonale des fonctions de Laguerre discrètes, une bonne adéquation pour la représentation de signaux et systèmes physiques fortement amortis. De plus, la représentation de signaux et de systèmes sur la base des fonctions orthogonales de Laguerre possède un effet bénéfique de filtrage du bruit, qui conduit notamment à une robustesse des systèmes de contrôle basés sur cette représentation. L'intérêt d'une version discrète des fonctions de Laguerre est relevé par le fait que les moyens de transmission et de traitement des données numériques ont aujourd'hui une place très importante. Les bases de représentation dont les fonctions sont à temps discret, sont alors plus adaptées au traitement des informations numériques que leurs homologues à temps continu.

De nombreuses applications des fonctions de Laguerre discrètes ont vu le jour ces dernières années dans divers domaines du traitement du signal. En revanche, peu de recherches ont été menées d'une part sur les propriétés de ces fonctions de Laguerre discrètes et d'autre part sur la transformée associée à ces fonctions. Ce point particulier, qui fait l'objet de cette thèse, est pourtant important pour asseoir les bases théoriques de l'outil qu'est la transformée de Laguerre discrète.

Au cours de cette thèse nous présenterons tout d'abord un état de l'art des applications de ces fonctions, justifiant les besoins d'un développement plus théorique de la transformée de Laguerre discrète. Nous présenterons par la suite d'une part les propriétés de ces fonctions de Laguerre discrètes et d'autre part les propriétés de la transformée de Laguerre discrète. Nous terminerons en présentant quelques applications de ces fonctions montrant leur intérêt dans divers domaines.

Chapitre 0

Introduction

1. Introduction générale

Les fonctions de Laguerre à temps discret, que nous noterons $\varphi_n[k, a, b]$, ont été introduites il y a quelques décennies par M.J. Gottlieb [Got 38]. Au cours de cette thèse, nous désignerons par la lettre k entre crochets la variable temporelle discrète, ceci pour la différencier de la variable temporelle continue généralement notée t entre parenthèses. Dans l'expression des fonctions de Laguerre discrètes, a et b sont des paramètres dont nous discuterons par la suite, et n , entier naturel, est l'ordre de la fonction. Les fonctions de Laguerre discrètes sont des fonctions réelles, définies à partir des polynômes discrets de Laguerre, notés $L_n[k, a]$, par la relation suivante :

$$\varphi_n[k, a, b] \triangleq b^k \sqrt{1-a^2} \frac{a^k}{(-a)^n} L_n[k, a]$$

où

$$L_n[k, a] \triangleq \frac{1}{a^{2k}} \left\{ \Delta^n \binom{k}{n} a^{2k} \right\}$$

l'opérateur Δ étant défini par : $\Delta f[k] \triangleq f[k+1] - f[k]$

Il est à noter que ces fonctions ne sont pas une version échantillonnée des fonctions et polynômes à temps continu de Laguerre. Les versions discrètes et continues de ces fonctions possèdent néanmoins des similarités entre certaines de leurs propriétés, et principalement dans leurs allures. Ce sont des fonctions orthogonales, où le produit scalaire est défini par une somme discrète pour les fonctions de Laguerre discrètes, et une intégrale pour leur version à temps continu. Elles forment ainsi des bases de décomposition des fonctions réelles. Leurs allures ont l'aspect de transitoires oscillants amortis, dont le nombre d'oscillations est fonction de la variable discrète n . Le paramètre a , qui est un pseudo-facteur d'échelle, permet de faire varier la pseudo-période des oscillations. Le paramètre b , souvent prit égal à l'unité dans la littérature scientifique, intervient sur l'amplitude et l'amortissement de ces oscillations. Ces deux paramètres permettent de définir une large gamme de fonctions. De par les allures des fonctions de Laguerre à temps continu et à temps discret, les bases orthogonales qu'elles forment, sont d'une grande efficacité pour la représentation d'une très large classe de signaux et de systèmes, notamment physiques. En outre, en matière

d'approximation de fonctions représentatives de signaux ou de systèmes, la décomposition sur la base des fonctions de Laguerre continues ou discrètes, possède un effet de filtrage du bruit. Les systèmes de contrôle de processus, basés sur ces fonctions de Laguerre continues ou discrètes, possèdent, de par cette particularité, une grande robustesse face au bruit. Ces propriétés en font les intérêts majeurs ayant conduit au développement de l'emploi de ces fonctions.

2. Résumé des travaux antérieurs

Tout comme les fonctions de Laguerre à temps continu, les fonctions de Laguerre discrètes ont connu un regain d'intérêt au cours de ces dernières décennies. En ce qui concerne les fonctions de Laguerre à temps continu, de nombreuses applications pratiques en ont été faites. Divers domaines ont été abordés tels que l'analyse de signaux, l'approximation et l'identification de systèmes linéaires [Hea 56], [Gen 70], [Ker 72], [Rag 74], [Cle 82], [Mak 89], mais aussi de systèmes non-linéaires [Sag 76] ; la réduction de systèmes d'ordre infini [Oli 87], [Mak 90a et b] ; l'intercorrélation de signaux [Den Bri 92], [Den Bri 93a et b] ; le filtrage et le contrôle adaptatifs monovariés où une série d'articles montre des réalisations industrielles [Zer 85], [Dum 85], [Dum 86], [Dum 90], [Zer 88a, b et c], cette technique a aussi été étendue au contrôle adaptatif de systèmes multivariés [Zer 88d et e]. Ces fonctions continues ont aussi connu un grand intérêt pour des applications à caractère plus théorique tel que l'inversion de la transformée de Laplace [Gen 68a], [Cun 93]. Il est à noter que le développement de ces applications a été étayé par des recherches plus théoriques effectuées sur les propriétés de ces fonctions continues et sur la transformée monovariée [Gen 68b], [Boz 71a et b], [Cal 73], [Roe 73], mais aussi la transformée multivariée [Sag 76] qui sont associées à ces fonctions.

De nos jours, la numérisation des informations est omniprésente. Ainsi par exemple, dans le cadre de la communication (téléphonie, ...), du stockage (CD Rom, ...), et du traitement des données (calculateur numérique, ...), de nombreux systèmes sont principalement basés sur une représentation numérique des informations. Ce développement de la numérisation explique le succès d'outils plus ou moins adaptés au traitement de signaux à temps discret ou échantillonnés tels que la TFR (Transformée de Fourier Rapide) et la transformée en z . Bien entendu, la représentation de signaux à temps continu peut être effectuée sur les calculateurs numériques, à l'aide des bases de fonctions orthogonales continues. Mais, pour ce faire, les signaux et les fonctions orthogonales continues doivent alors être échantillonnés. Même pour des périodes d'échantillonnage très petites, des erreurs, outre celles dues directement à l'échantillonnage, sont introduites dans l'approximation des fonctions. En effet, tel que dans le cas des fonctions de Laguerre à temps continu, les fonctions de base perdent leur orthogonalité lors de l'approximation due à l'échantillonnage. Le produit scalaire des fonctions à temps continu, défini par une intégrale, est alors remplacé par une somme discrète. Seules des fonctions orthogonales au sens discret, et particulièrement les fonctions de Laguerre discrètes, pour lesquelles l'orthogonalité est véritablement une sommation discrète, peuvent alors éviter ce problème. Parce qu'elles possèdent cette propriété d'orthogonalité au sens discret, mais aussi parce qu'elles sont adaptées à la représentation de fonctions et à la description de systèmes relativement amortis, et

notamment en présence de bruit, tels que des transitoires, ces fonctions de Laguerre discrètes ont connu, et connaissent encore, un net intérêt en matière de traitement du signal. De nombreuses applications pratiques, mettant en oeuvre une représentation sur la base des fonctions de Laguerre discrètes se sont développées. Un des premiers ayant eu recours aux fonctions de Laguerre discrètes, comme base de représentation de signaux, est C.R. Arnold [Arn 66]. Par la suite, une procédure simple de synthèse des signaux a été mise en évidence [Roe 73], [Kin 77]. Elle est basée sur une batterie de filtres récurrents, appelé filtre de Laguerre digital. Cette batterie de filtres permet d'abord de générer les fonctions de Laguerre discrètes et, de là, une très large gamme de signaux (Figure 0.1).

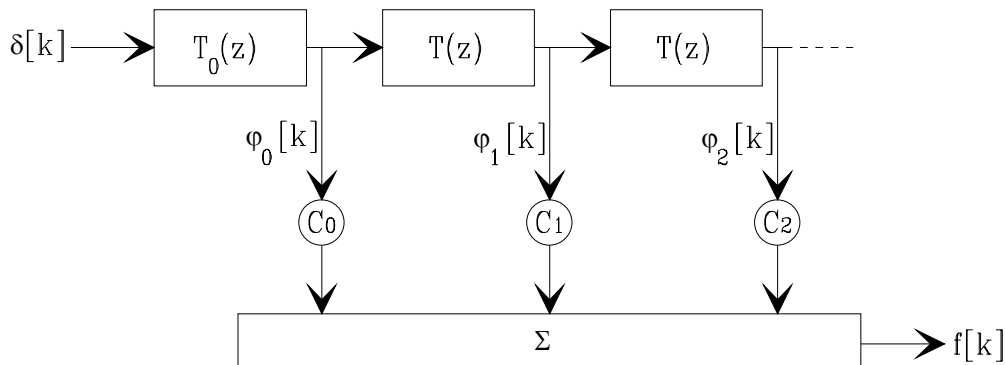


Figure 0.1 : Filtre de Laguerre digital

Cette batterie de filtres de Laguerre a pris une certaine importance en matière d'identification de systèmes linéaires. L'idée développée dans la thèse de M. Roesch [Roe 73] et dans l'article de J. Ragot, M. Roesch, et C. Humbert [Rag 77], est de connecter en parallèle au système à identifier, le filtre de Laguerre digital. Ce filtre est attaqué par le même signal d'entrée que pour le système à identifier. Les sorties des deux systèmes sont comparées et les coefficients C_i du filtre de Laguerre sont modifiés en fonction de l'erreur commise (Figure 0.2).

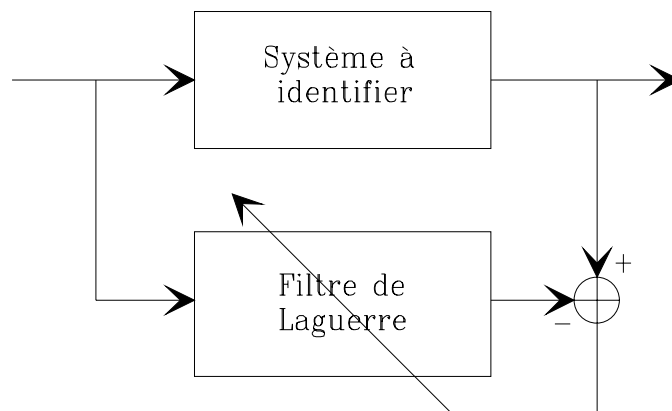


Figure 0.2 : Identification de systèmes

Cette méthode d'identification est très pratique et très efficace. Elle ne nécessite pas l'interruption du fonctionnement du système, l'identification peut être obtenue après un temps relativement court, et le modèle peut être amélioré simplement par ajout de filtres $T(z)$ qui ne modifient pas les coefficients déjà calculés.

D'autres méthodes d'identification de systèmes linéaires ont été développées. Elles sont basées sur une représentation en équations d'état du système. Les signaux d'entrée et de sortie du système sont alors décomposés sur la base des fonctions de Laguerre discrètes. Les coefficients de la décomposition sont alors appelés spectre de Laguerre. Cette représentation, en terme de spectre de Laguerre, possède plusieurs atouts. D'une part, elle permet une compression d'information importante pour des signaux relativement amortis et d'autre part, elle conduit, comme nous l'avons déjà noté, à un effet de filtrage du bruit. De là, deux techniques sont envisagées. Dans la première des équations d'état dans le domaine spectral sont déduites, elles sont alors appelées équation d'état de Laguerre par Y. Nurges [Nur 81a], [Nur 81b], [Nur 87]. Dans la seconde, une résolution des équations d'entrée sortie est effectuée pour déterminer certains paramètres du système à identifier (voir les articles de R.E. King et P.N. Paraskevopoulos [Kin 79], et de B. Wahlberg [Wah 89], [Wah 91]). Par ailleurs, l'identification de systèmes non-linéaires, basée sur une représentation en fonctions de Laguerre discrètes, a aussi été étudiée par M.A.L. Thathachar et S. Ramaswamy [Tha 73].

L'identification de systèmes, linéaires et non-linéaires, est une étape importante pour le développement de méthodes de filtrage adaptatif et de contrôle de processus. Ainsi, G.W. Davidson et D.D. Falconer [Dav 91] ont montré une application possible de l'identification à l'aide du filtre de Laguerre. Le but poursuivi était l'annulation de l'écho d'un canal de transmission. L'identification du canal de transmission, parcouru par le signal d'écho, était effectué à l'aide d'une batterie de filtres de Laguerre. Cela leur permettait de soustraire en temps réel cette estimation du signal d'écho transmis en sortie du canal, et ainsi de l'atténuer jusqu'à 70dB. Cette technique a aussi été employée pour le contrôle d'un échangeur thermique par R. Marmonier [Mar 77]. D'autres méthodes ont aussi été développées comme pour le contrôle adaptatif avec contraintes, exposé par C.K. Finn, B. Wahlberg, et B.E. Ydstie [Fin 93], ainsi que pour le contrôle adaptatif de systèmes non-linéaires [Dum 93a et b]. Elles ont été appliquées au contrôle d'échangeurs thermiques et au contrôle de charge d'un moteur de bateau-raffinerie.

Parallèlement au développement des applications possibles des fonctions de Laguerre discrètes, des recherches ont été menées sur le choix du pseudo-facteur d'échelle a . Dans le cas des fonctions de Laguerre à temps continu, le problème du choix optimal du facteur d'échelle a été discuté il y a quelques dizaines d'années par J.W. Head [Hea 56], G.J. Clowes [Clo 65], T.W. Parks [Par 71], et M. Schetzen [Sch 71]. Dans le cas des fonctions de Laguerre à temps discret, ce paramètre a permet de définir une large gamme d'allures de ces fonctions. Bien que son choix ne soit pas critique, une bonne valeur de celui-ci peut, dans de nombreux cas, améliorer nettement la représentation sur la base des fonctions de Laguerre discrètes. D'une part, M.A. Masnadi-Shirazi a proposé une méthode permettant l'obtention de la valeur optimale de ce paramètre [Mas 90a et b], [Mas 91]. Elle consiste à minimiser l'erreur quadratique de l'approximation, ce qui conduit en fait à résoudre des équations de degré élevé, suivant les connaissances que l'on a, a priori, sur le signal ou le système. C'est une méthode, très lourde en calcul, mais donnant la valeur optimale de ce paramètre a . En pratique, un compromis est souvent souhaitable entre le coût en calcul et la grande précision, pas toujours cruciale, de la valeur de ce paramètre. En ce sens, des méthodes intuitives sur le choix de la valeur de ce paramètre a ont été proposées notamment par R. Marmonier [Mar 77], et par Y. Fu et G.A. Dumont [Fu 93]. Ce dernier article proposait une méthode visant à minimiser un index suggéré par un raisonnement intuitif et confirmé

expérimentalement. La minimisation de cet index par rapport à ce paramètre a , conduisait effectivement à donner une valeur de ce paramètre permettant de réduire, de manière notable, l'erreur d'approximation. Les intérêts de cette technique sont d'une part qu'elle ne nécessite que peu d'information sur le système ou le signal, et d'autre part que le coût en calcul de la valeur de ce paramètre a est nettement réduit.

3. Contribution de cette thèse

Parallèlement aux applications des fonctions de Laguerre discrètes que nous avons exposées, peu de recherches ont été effectuées sur le fond théorique. En effet, certaines propriétés des fonctions de Laguerre discrètes sont connues, mais leur étude n'a été développée qu'aux besoins particuliers des applications. Il en est de même pour la transformée associée à ces fonctions, dont la dénomination de celle-ci est à rapprocher de celle de Mc Cully [Mac Cul 57] pour le cas continu. En son temps, O. Heaviside avait développé le calcul opérationnel pour des besoins pratiques. Mais certaines bases de sa théorie lui manquaient, notamment en ce qui concerne les conditions initiales du système étudié. Cela l'a conduit, dans certains cas, à des résultats pratiques erronés. Par la suite, sa méthode de calcul opérationnel a été approfondie et étayée par un fondement mathématique plus rigoureux pour donner aujourd'hui la célèbre transformée de Laplace. De la même manière, la nécessité d'un développement plus approfondi de l'étude des fonctions de Laguerre discrètes, et principalement des propriétés de la transformée associée à la représentation sur la base de ces fonctions orthogonales, se fait sentir. C'est au cours de cette thèse que nous allons tenter de combler ce déficit.

Tout d'abord, nous rappellerons diverses propriétés de la transformée en z . Cet outil, adapté à l'étude de fonctions discrètes, nous a été d'une grande utilité dans le développement des propriétés, d'une part des fonctions de Laguerre discrètes, et d'autre part de la transformée associée à ces fonctions. Ce rappel, basé sur l'ouvrage de E.I. Jury [Jur 64], et sur la thèse de L.C. Calvez [Cal 73], sera donné au chapitre 1. La lecture de ce chapitre pourra être évitée par les utilisateurs avertis de la transformée z .

Au cours du second chapitre, nous remémorerons d'une part les propriétés déjà connues des fonctions de Laguerre discrètes et d'autre part, nous mettrons en évidence de nouvelles propriétés de ces fonctions. Nous commencerons par rappeler la définition de ces fonctions. Quoique, bien souvent dans la littérature, le paramètre d'amortissement prend une valeur fixée correspondant à $b=1$ dans notre définition, nous avons, pour notre part, désiré le conserver afin d'étendre les possibilités d'applications des fonctions de Laguerre discrètes. Les transformées en z , par rapport à la variable temporelle discrète k mais aussi par rapport à l'indice n seront redonnées. Nous rappellerons aussi les diverses relations de récurrence et la propriété d'orthonormalité caractéristiques de ces fonctions. A l'aide d'une propriété d'échange des variables k et n que possèdent les fonctions de Laguerre discrètes, nous montrerons qu'une propriété d'orthogonalité, liée à la sommation sur l'indice n , existe aussi. Nous développerons par la suite diverses propriétés telles que le décalage des paramètres, l'intercorrélation, la convolution, et diverses autres. Nous terminerons en présentant les relations existant entre les fonctions de Laguerre discrètes de paramètres différents, et nous parlerons de l'interpolation de ces fonctions.

Le chapitre 3 sera consacré à l'étude de la transformée de Laguerre discrète. Sa définition sera rappelée et ses propriétés seront exposées. Nous y ferons apparaître la relation qui existe entre cette transformée et la transformée en z . Cette relation, ainsi que les propriétés propres aux fonctions de Laguerre discrètes, nous permettront de révéler de nombreuses propriétés de la transformée de Laguerre discrète, telles que les décalages temporels et spectraux, la convolution réelle, et diverses autres correspondances de fonctions usuelles. Nous indiquerons aussi des méthodes d'inversion de cette transformée et nous terminerons par exposer quelques propriétés, et relations spécifiques du spectre de Laguerre, telles que les changements de paramètres.

Le chapitre 4 sera orienté vers l'étude de l'approximation lorsque la série d'inversion est tronquée. Nous rappellerons alors la définition de l'erreur quadratique permettant une mesure de l'erreur d'approximation. Nous y montrerons l'influence du pseudo-facteur d'échelle a sur cette erreur d'approximation. Nous ferons mention de la méthode développée par M.A Masnadi-Shirazi [Mas 90a et b], [Mas 91] pour déterminer la valeur optimale de ce paramètre a minimisant l'erreur quadratique normalisée. Cette méthode, comme nous avons pu le rappeler, est très lourde en calcul. Nous développerons alors une nouvelle méthode de choix de ce paramètre a . Cette méthode est basée sur une relation de récurrence, dont le type est commun à diverses classes de fonctions orthogonales à temps discret et à temps continu, telles que les fonctions de Meixner, Charlier, Legendre, Hermite... Ces fonctions orthogonales, qui forment des bases de représentation très connues dans le domaine du traitement du signal, possèdent aussi un paramètre influant sur l'erreur d'approximation. Nous généraliserons alors la méthode que nous proposons à l'ensemble des fonctions possédant une relation de récurrence du type donné. Nous comparerons la nouvelle méthode que nous proposons avec celle développée par M.A. Masnadi-Shirazi, en donnant quelques exemples d'approximations.

Le dernier chapitre, le chapitre 5, sera réservé à la présentation de quelques applications pratiques du développement en séries de fonctions de Laguerre discrètes. Nous donnerons des exemples d'approximation de fonctions et de modélisation de systèmes effectués sur la base des fonctions de Laguerre discrète. Ceux-ci nous permettront de montrer la compression d'information réalisée et l'efficacité du filtrage du bruit. Nous exposerons aussi une méthode permettant l'addition de certaines contraintes lors de la modélisation. Nous étendrons l'approximation de fonctions à l'interpolation de celles-ci. Nous montrerons par ailleurs, des résultats que nous avons obtenus en déconvolution. Par la suite nous exposerons la technique d'identification de systèmes, à l'aide des filtres de Laguerre digitaux. Cette technique, conduisant à des méthodes de filtrage adaptatif, et de contrôle de processus, sera étendue au cas de systèmes à entrées multiples.

Chapitre 1

Rappels sur la transformée en z

1. Introduction et définition

La transformée en z est un outil puissant pour l'étude des suites discrètes. Son emploi est quasiment incontournable pour l'analyse des systèmes discrets. Elle est l'équivalent de la transformée de Laplace dédiée à l'étude des fonctions continues.

La transformée en z nous servira à établir certaines propriétés des fonctions de Laguerre discrètes, d'une part, et de leur transformée associée d'autre part. Nous donnerons d'ailleurs la relation existant entre ces deux transformées au cours du chapitre sur l'étude des propriétés de la transformée de Laguerre discrète.

Afin de ne pas gêner le lecteur par l'emploi de propriétés de la transformée en z , dont certaines sont peu connues, nous allons faire un rappel des principales propriétés de cette transformée qui nous seront utiles par la suite. Ce rappel sera basé sur l'ouvrage de E.I. Jury [Jur 64], et sur la thèse de L.C. Calvez [Cal 73]. Dans un premier temps, il ne sera pas nécessaire, pour les utilisateurs avertis de la transformée en z , de s'attarder à la lecture de ce chapitre. Au cours des chapitres ultérieurs, l'emploi des propriétés de cette transformée sera indiqué par un renvoi aux formules de ce chapitre.

Soit $f[n]$ une fonction de la variable discrète n , supposée nulle pour $n < 0$. La transformée en z de $f[n]$ est ainsi définie avec z complexe :

$$F(z) \triangleq \mathcal{Z}_n \{f[n]\} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} f[n] \quad (1.01)$$

Nous admettrons que la série converge absolument pour $|z| > R_f$, où R_f est le rayon de convergence de la série numérique $f[n]$, et nous adopterons la notation suivante :

$$f[n] \xrightarrow{n} F(z)$$

et :
$$F(z) \xleftarrow{n} f[n] = Z_n^{-1} \{F(z)\}$$

Nous pouvons déjà donner deux exemples classiques de transformées :

Exemple 1 : Echelon unité

La transformée en z de l'échelon unité, noté $U[n]$ et défini ainsi :

$$U[n] \triangleq \begin{cases} 1 & \text{sin} \geq 0 \\ 0 & \text{sin} < 0 \end{cases}$$

se calcule aisément :

$$U[n] \xrightarrow{n} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$$

Exemple 2 : Impulsion unité retardée

L'impulsion unité retardée, définie comme suit :

$$\delta[n - \lambda] \triangleq \begin{cases} 1 & \text{sin} = \lambda \\ 0 & \text{sin} \neq \lambda \end{cases} (\lambda \geq 0)$$

a pour transformée en z si λ entier naturel :

$$\delta[n - \lambda] \xrightarrow{n} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \delta[n - \lambda] = z^{-\lambda}$$

2. Propriétés de la transformée en z

Nous tenons à souligner qu'au cours de ce chapitre ne seront rappelées que les propriétés et les relations essentielles pour nos besoins futurs. Celles-ci donnent néanmoins une description de base des possibilités qu'offre la transformée en z.

2.1. Linéarité

Soient deux fonctions discrètes $f[n]$ et $g[n]$ respectivement de transformées en z $F(z)$ et $G(z)$. D'après la définition (1.01), la transformée en z est linéaire :

$$f[n] + g[n] \xrightarrow{n} F(z) + G(z) \tag{1.02}$$

$$\lambda f[n] \xrightarrow{n} \lambda F(z) \tag{1.03}$$

2.2. Amortissement

La définition (1.01) nous permet de déduire aisément la transformée en z d'une séquence amortie où λ est réel :

$$\lambda^{-n} f[n] \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda z)^{-n} f[n] = F(\lambda z) \quad (1.04)$$

avec, dans le cas particulier $f[n]=U[n]$, l'échelon unité, et $\mu = 1/\lambda$:

$$\mu^n U[n] \rightarrow \frac{z}{z - \mu}$$

2.3. Décalage

Soient les fonctions retardées $f[n-\lambda]$ et avancées $f[n+\lambda]$ avec λ entier positif. Par des changements de variables appropriés dans la définition (1.01), nous obtenons :

$$f[n - \lambda] \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} z^{-(m+\lambda)} f[m] = z^{-\lambda} F(z) \quad (1.05)$$

et :

$$f[n + \lambda] \rightarrow \sum_{m=\lambda}^{\infty} z^{-(m-\lambda)} f[m] = z^{\lambda} F(z) - \sum_{m=0}^{\lambda-1} z^{\lambda-m} f[m] \quad (1.06)$$

2.4. Sommation

La transformée en z de la somme discrète d'une fonction $f[n]$, peut être déterminée en échangeant l'ordre des sommations dans l'emploi de la définition (1.01) :

$$\sum_{j=0}^n f[j] \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} f[j] \sum_{n=j}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} F(z) \quad (1.07)$$

2.5. Produit de convolution réelle

Le produit de convolution réelle pour des fonctions causales est défini par l'expression :

$$f[n] * g[n] \triangleq \sum_{j=0}^n f[j] g[n-j] = \sum_{j=0}^n f[n-j] g[j]$$

Sa transformée en z est obtenue en effectuant un changement de variable $m=n-j$ afin d'aboutir au produit indépendant de deux transformées en z :

$$f[n] * g[n] \rightarrow F(z)G(z) \quad (1.08)$$

2.6. Dérivation de la transformée

En dérivant la relation de définition de la transformée en z, par rapport à z, on obtient aisément la correspondance suivante :

$$nf[n] \xrightarrow{n} -z \frac{dF(z)}{dz} \quad (1.09)$$

Cette relation se généralise sous la forme :

$$n^k f[n] \xrightarrow{n} (-1)^k \left(z \frac{d}{dz} \right)^k F(z) \quad (1.10)$$

2.7. Intégration de la transformée

Réciproquement l'intégration de la relation de définition permet d'établir la correspondance :

$$\frac{f[n]}{n + \lambda} \xrightarrow{n} z^\lambda \int_z^\infty \frac{F(u)}{u^{\lambda+1}} du \quad \lambda \geq 0 \quad (1.11)$$

dans le cas particulier où $\lambda=0$ avec $f[0]=0$, nous avons :

$$\frac{f[n]}{n} \xrightarrow{n} \beta + \int_z^\infty \frac{F(u)}{u} du \quad \text{avec} \quad \beta = \left[\frac{f[n]}{n} \right]_{n=0} \quad (1.12)$$

2.8. Formule de type Rodriguez

Soit la fonction de la variable n ainsi définie :

$$f_n(x) \triangleq \frac{1}{n!} D^n \{ [X(x)]^n f(x) \} \quad \text{avec} \quad D \equiv \frac{d}{dx}$$

On a alors [Cal 73] :

$$\frac{1}{n!} D^n \{ [X(x)]^n f(x) \} \xrightarrow{n} \frac{zf[X^*(z)]}{z - X[X^*(z)]} \quad (1.13)$$

où $X(x) = D\{X(x)\}$ et $X^*(z)$ est la racine de l'équation en X^* :

$$X(X^*) = (X^* - x)z \quad \text{vérifiant} : \lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z) = x$$

Cette formule permet d'établir des transformations en z très intéressantes comme par exemple :

$$\frac{1}{n!} D^n \{ f(x) \} \xrightarrow{n} f(x + z^{-1}) \quad (1.14)$$

et :
$$\frac{1}{n!} D^n \{x^n f(x)\} \xrightarrow{n} \frac{z}{z-1} f\left(x \frac{z}{z-1}\right) \quad (1.15)$$

Dans ces deux dernières formules nous pouvons poser $f(x) = x^\beta$ et puis faire $x=1$. Cela donne d'une part :

$$\left\{ \frac{1}{n!} D^n [x^\beta] \right\}_{x=1} = \frac{\beta!}{(\beta-n)!n!} = \binom{\beta}{n} \xrightarrow{n} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^\beta \quad (1.16)$$

et d'autre part :

$$\left\{ \frac{1}{n!} D^n [x^{n+\beta}] \right\}_{x=1} = \frac{(n+\beta)!}{\beta!n!} = \binom{n+\beta}{n} = \binom{n+\beta}{\beta} \xrightarrow{n} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\beta+1} \quad (1.17)$$

et par ailleurs en exploitant le théorème du retard (1.05) :

$$\binom{n}{\beta} \xrightarrow{n} z^{-\beta} \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\beta+1} = \frac{z}{(z-1)^{\beta+1}} \quad (1.18)$$

2.9. Généralisation du théorème de convolution

Soient les fonctions ainsi définies :

$$f[n] \xrightarrow{n} F(z)$$

$$g[j, n] \xrightarrow{n} \frac{A(z)}{[B(z)]^j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Formons l'expression :

$$S(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{j=0}^n g[j, n-j] f[j]$$

Il a été montré [Cal 73] que, pour les conditions :

$$|g[j, n]| < Ma^j b^n \quad \text{et} \quad |z| > \text{Max}\{b, aRf\}$$

la série converge absolument et peut alors se réécrire :

$$S(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} f[j] z^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} g[j, n] z^{-n}$$

C'est à dire, en interprétant leur transformée en z :

$$S(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} f[j] \frac{A(z)}{[zB(z)]^j} = A(z) F(zB(z))$$

Nous obtenons donc la relation du produit de convolution généralisé :

$$\sum_{j=0}^n g[j, n-j]f[j] \rightarrow A(z)F(zB(z)) \quad (1.19)$$

Cette relation peut être appliquée à des cas particuliers intéressants. Supposons par exemple la fonction et sa transformée donnée par (1.17) :

$$g[j, n] = \binom{n+j+\alpha}{n} \rightarrow \left(\frac{z}{z-1}\right)^{j+\alpha+1}$$

nous avons donc :

$$A(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha+1} \quad \text{et} \quad B(z) = \frac{z-1}{z}$$

ce qui nous conduit à une formule très utile en pratique :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{n-j} f[j] \rightarrow \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\alpha+1} F(z-1) \quad (1.20)$$

qui peut être rendue un peu plus générale à l'aide de la relation (1.04) :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{n-j} u^{n-j} f[j] \rightarrow \left(\frac{z}{z-u}\right)^{\alpha+1} F(z-u) \quad (1.21)$$

3. Inversion de la transformée en z

Il existe diverses méthodes d'inversion d'une transformée en z, soit pouvant être combinées ou soit générant différentes expressions de la fonction originelle. Nous exposerons principalement ici celles ayant un intérêt pour nos développements futurs.

3.1. Usage des tables

On cherche à écrire $F(z)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de transformées figurant dans les tables soit :

$$F(z) = \sum_{j=0}^m \lambda_j F_j(z)$$

les tables fournissent alors les $f_j[n]$ et :

$$f[n] = \sum_{j=0}^m \lambda_j f_j[n]$$

3.2. Exploitation des propriétés de la transformée directe

Les propriétés de la transformée en z directe, que nous avons succinctement exposées au cours de ce premier chapitre peuvent être exploitées pour déterminer les transformées en z inverses des fonctions recherchées.

3.3. Décomposition en série de puissance de z^{-n}

Lorsque la transformée en z s'exprime sous forme d'un développement en série de puissances de z^{-n} :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

il résulte immédiatement de la définition de la transformée :

$$f[n] = a_n$$

Ainsi, par exemple la fonction $e^{\frac{\lambda}{z}}$ peut se décomposer en une série entière, ce qui nous permet de déduire rapidement sa transformée en z inverse :

$$e^{\frac{\lambda}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} z^{-n} \leftarrow \frac{\lambda^n}{n!} \quad (1.22)$$

3.4. Formule d'inversion dans le plan complexe

La formule suivante découle de la définition de la transformée en z et du théorème des résidus :

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz \quad (1.23)$$

où Γ est un contour fermé tel que $F(z)$ soit analytique sur et à l'extérieur de ce contour.

3.5. Théorèmes des valeurs initiale et finale

Le théorème de la valeur initiale découle de la définition initiale (1.01) :

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (1.24)$$

Ce théorème a été étendu aux autres valeurs de n . En effet, si l'on pose :

$$F_1(z) = zF(z) - zf[0] = \sum_{n=0}^{\infty} f[n+1] z^{-n}$$

on a alors :

$$f[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} F_1(z)$$

et plus généralement :

$$f[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} F_n(z)$$

les $F_n(z)$ se calculant de proche en proche par la relation de récurrence :

$$F_n(z) = zF_{n-1}(z) - zf[n-1] \quad \text{avec} \quad F_0(z) = F(z)$$

Si $(1-z^{-1})F(z)$ n'a pas de pôles sur ou à l'extérieur du cercle $|z|=1$ alors le théorème de la valeur finale s'exprime :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z) \tag{1.25}$$

3.6. Méthode des dérivées successives

A partir de la définition de la transformée en z (1.01), on vérifie aisément la relation suivante:

$$f[n] = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(-z^2 \frac{d}{dz} \right)^n F(z) \right] \tag{1.26}$$

ou encore :

$$f[n] = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z^{n+1} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n-1} F(z)) \right] \tag{1.27}$$

3.7. Inversion d'un quotient de deux transformées

Si nous avons une transformée en z définie de la sorte :

$$f[n] \xrightarrow{n} F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

avec :

$$A(z) \xleftarrow{n} a[n]$$

$$B(z) \xleftarrow{n} b[n]$$

avec : $b[0] = 1$

Il est possible d'écrire :

$$B(z)F(z) = A(z)$$

dont on peut déterminer la transformée inverse en z. Elle s'exprime, d'après le produit de convolution (1.08) :

$$\sum_{j=0}^n b[j]f[n-j] = a[n]$$

ce qui permet d'aboutir à la relation de récurrence :

$$f[n] = a[n] - \sum_{j=1}^n b[j]f[n-j] \quad \text{avec : } f[0] = a[0]$$

3.8. Inversion de $A(z)\exp[B(z)]$

Soit une transformée en z de la forme suivante :

$$F(z) = A(z)\exp[B(z)]$$

avec :

$$A(z) = [A_1(z)]^{\alpha_1} [A_2(z)]^{\alpha_2} \dots [A_m(z)]^{\alpha_m}$$

où $B(z)$ et $A_i(z)$, quelquesoit $i=1, 2, \dots, m$, sont des fractions rationnelles en z dont le degré du dénominateur est supérieur ou égal au degré du numérateur. Eventuellement, une et une seule des fonctions $A(z)$ ou $B(z)$ peut désigner une constante.

En calculant la dérivée de $F(z)$ et en la multipliant par $-z$, nous obtenons :

$$-z \frac{dF(z)}{dz} = E(z)F(z)$$

avec :

$$E(z) \hat{=} -z \left(\frac{1}{A(z)} \frac{dA(z)}{dz} + \frac{dB(z)}{dz} \right)$$

$E(z)$ peut se mettre sous la forme :

$$E(z) = \frac{G(z)}{H(z)} = \frac{g[0] + g[1]z^{-1} + \dots + g[\lambda]z^{-\lambda}}{h[0] + h[1]z^{-1} + \dots + h[\lambda]z^{-\lambda}}$$

où λ est un entier naturel donné. Nous obtenons alors la relation suivante entre les transformées en z :

$$H(z) \left[-z \frac{dF(z)}{dz} \right] = G(z)F(z)$$

qu'il est simple d'inverser à l'aide des correspondances (1.08) et (1.09) pour obtenir la relation la récurrence suivante :

$$f[n] = \frac{1}{nh[0] - g[0]} \sum_{j=1}^{\min(n,\lambda)} (g[j] - (n-j)h[j])f[n-j]$$

La méthode ci-dessus, très puissante, est d'une efficacité remarquable dans de nombreux cas pratiques.

Chapitre 2

Propriétés des fonctions de Laguerre discrètes

1. Introduction et définitions

Les fonctions de Laguerre discrètes sont des fonctions réelles issues des polynômes de Laguerre discrets, qui sont eux-mêmes une version discrète des polynômes de Laguerre continus [Got 38]. Les propriétés des fonctions de Laguerre discrètes n'ont pas été étudiées de manière systématique mais simplement pour les besoins particuliers de leurs utilisateurs. Dans leur définition (par exemple [Kin 77]), ces fonctions sont paramétrées par une variable réelle jouant un rôle voisin mais pas exactement le rôle de facteur d'échelle. En plus de celui-ci, nous introduirons, à l'instar de M. Roesch [Roe 73] et J. Ragot [Rag 77], un coefficient d'amortissement des fonctions. Ce second paramètre prend une valeur fixée correspondant à $b=1$ dans notre définition, et n'apparaît donc généralement pas dans les publications actuelles. Nous l'avons conservé afin d'étendre le champ d'application de ces fonctions et notamment de la transformée de Laguerre discrète que nous étudierons par la suite.

Au cours de ce chapitre nous donnerons la définition des fonctions de Laguerre discrètes. Nous rappellerons les propriétés déjà connues en tenant compte du second paramètre et nous introduirons des propriétés inédites de ces fonctions.

Les polynômes de Laguerre discrets sont un ensemble de polynômes réels de degré n , définis causaux sur l'indice temporel k , et dépendant d'un paramètre réel $\lambda > 0$ [Got 38] :

$$L_n[k, \lambda] \triangleq e^{\lambda k} \left\{ \Delta^n \binom{k}{n} e^{-\lambda k} \right\} = e^{-\lambda n} \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{j} \binom{k}{j} (1 - e^{-\lambda})^j \quad (2.01)$$

l'opérateur Δ étant défini par : $\Delta f[k] \triangleq f[k+1] - f[k]$

et où $n=0, 1, 2, \dots$, $k=0, 1, 2, \dots$, et λ joue le rôle du facteur d'échelle.

Afin de simplifier les écritures, nous allons poser $a^2 \hat{=} e^{-\lambda}$, avec $0 < a^2 < 1$. Cela nous donne la nouvelle expression des polynômes de Laguerre discrets en fonction de ce paramètre :

$$L_n[k, a] = \frac{1}{a^{2k}} \left\{ \Delta^n \binom{k}{n} a^{2k} \right\} = a^{2n} \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{j} \binom{k}{j} \left(\frac{a^2 - 1}{a^2} \right)^j \quad (2.02)$$

Les fonctions de Laguerre discrètes que nous étudierons, sont alors définies à partir des polynômes discrets de Laguerre par la relation suivante :

$$\varphi_n[k, a, b] \hat{=} b^k \sqrt{1 - a^2} \frac{a^k}{(-a)^n} L_n[k, a] \quad (2.03)$$

Où a , réel négatif ou positif tel que $0 < a^2 < 1$, s'apparente à un facteur d'échelle. Et b , réel tel que $b > 0$, est un coefficient d'amortissement. Ces fonctions réelles, définies pour $n=0, 1, 2, \dots$ et $k=0, 1, 2, \dots$, seront considérées identiquement nulles pour $k < 0$ ou $n < 0$. Nous discuterons par ailleurs les conditions à imposer sur le paramètre b afin d'assurer la convergence vers zéro de ces fonctions lorsque k tend vers l'infini. Ces fonctions, ainsi définies, ont été plus particulièrement employées dans le cas $b=1$. Nous avons pour notre part souhaité conserver ce paramètre en tant que tel afin d'élargir le champ d'applications de ces fonctions et notamment de leur transformée associée.

En reprenant l'expression des polynômes discrets de Laguerre (2.02) nous obtenons les expressions analytiques des fonctions discrètes de Laguerre :

$$\varphi_n[k, a, b] = \sqrt{1 - a^2} \left(\frac{b}{a} \right)^k \left(-\frac{1}{a} \right)^n \left\{ \Delta^n \binom{k}{n} a^{2k} \right\} \quad (2.04)$$

ou encore :

$$\varphi_n[k, a, b] = \sqrt{1 - a^2} b^k a^k (-a)^n \sum_{j=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{j} \binom{k}{j} \left(\frac{a^2 - 1}{a^2} \right)^j \quad (2.05)$$

Il est à remarquer dans cette dernière expression que la somme peut être néanmoins étendue au maximum de n et de k ou même à l'infini, les termes supplémentaires étant nuls du fait que [Ang 82]:

$$\binom{M}{j} = 0 \quad \text{pour } j > M.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur les paramètres a et b nous emploierons la notation réduite suivante, afin d'alléger les écritures :

$$\varphi_n[k] \hat{=} \varphi_n[k, a, b]$$

A partir de la définition (2.05), nous pouvons calculer les expressions des premières fonctions. Pour $n=0$ nous obtenons :

$$\varphi_0[k] = \sqrt{1 - a^2} b^k a^k \quad (2.06)$$

d'où nous pouvons tirer une première relation de récurrence sur l'indice k [Kin 77] :

$$\varphi_0[k] = ab\varphi_0[k - 1] \quad (2.07)$$

avec :

$$\varphi_0[0] = \sqrt{1 - a^2} \quad (2.08)$$

Nous avons aussi, pour $k=0$:

$$\varphi_n[0] = \sqrt{1 - a^2} (-a)^n \quad (2.09)$$

ce qui conduit à une relation de récurrence sur l'indice n [Kin 77]:

$$\varphi_n[0] = -a\varphi_{n-1}[0] \quad (2.10)$$

dont le premier terme est donné par l'expression (2.08).

Par ailleurs nous avons pour les premières valeurs suivantes de n :

$$\begin{aligned} \varphi_1[k] &= -a\sqrt{1 - a^2} a^k b^k \left[1 + \left(\frac{a^2 - 1}{a^2} \right) k \right] \\ \varphi_2[k] &= a^2 \sqrt{1 - a^2} a^k b^k \left[1 + \frac{(a^2 - 1)(3a^2 - 1)}{2a^4} k + \left(\frac{a^2 - 1}{a^2} \right)^2 \frac{k^2}{2} \right] \\ \varphi_3[k] &= -a^3 \sqrt{1 - a^2} a^k b^k \left[1 + \frac{(a^2 - 1)(11a^4 + 5a^2 + 2)}{6a^6} k \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a^2 - 1)^2(2a^2 + 1)}{2a^6} k^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{a^2} \right)^3 \frac{k^3}{2} \right] \end{aligned}$$

On remarquera, en observant $\varphi_n[k]$ que le terme entre crochets est un polynôme de degré n en k . Traditionnellement on s'intéresse surtout aux valeurs entières de k , mais en fait, les expressions ci-dessus de $\varphi_1[k]$, $\varphi_2[k]$, et $\varphi_3[k]$ par exemple, montrent que les $\varphi_n[k]$ peuvent être définies, pour $a > 0$, quelquesoit k élément de l'ensemble des réels. Nous reviendrons plus précisément sur cette particularité en fin de ce chapitre.

Les courbes représentatives des premières fonctions discrètes de Laguerre sont données sur les figures 2.1.a, 2.1.b et 2.1.c, pour différentes valeurs des paramètres a et b . Les segments de droites joignant les échantillons servent uniquement à bien différencier les diverses courbes. Elles ont l'allure d'un régime oscillatoire non périodique amorti, dont le nombre d'alternances est donné par l'indice n . Cette allure,

caractéristique des régimes transitoires de certains systèmes, montre l'aptitude de ces fonctions à représenter de tels systèmes physiquement courants. *Comme nous pouvons le remarquer, le paramètre a influe sur la pseudo-période des oscillations, ce qui s'apparente bien, en fait, à une dilatation de l'échelle des temps. L'accroissement de la valeur de ce paramètre permettra une dilatation temporelle de l'allure des courbes. Le paramètre b, par ailleurs, intervient sur l'amplitude des alternances du régime oscillant amorti.* La diminution, ou l'augmentation de la valeur de ce paramètre, par rapport à l'unité, permettra respectivement un amortissement, ou une amplification de l'amplitude des oscillations.

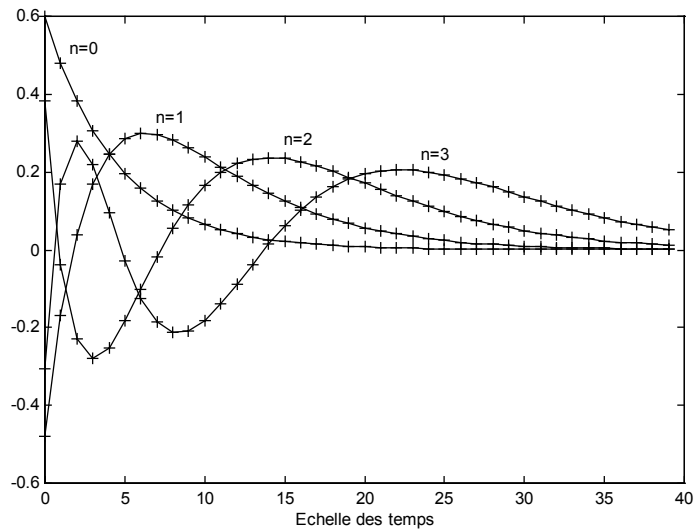


Figure 2.1.a :

$a=0,8$ et $b=1$

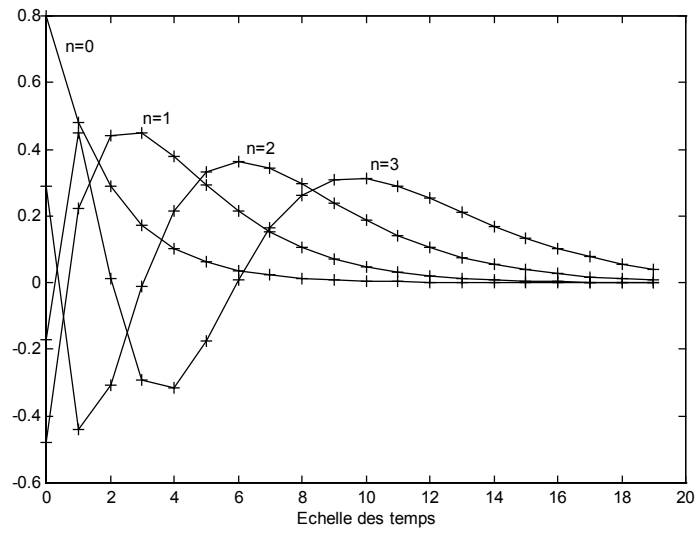


Figure 2.1.b : $a=0,6$ et $b=1$

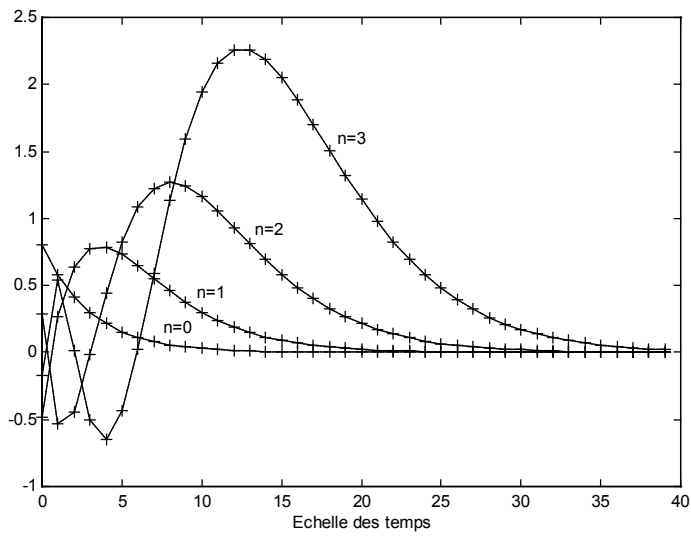


Figure 2.1.c : $a=0,6$ et $b=1,2$

2. Transformées en z

Les fonctions de Laguerre discrètes possèdent deux indices discrets, le premier l'indice temporel k et le second l'indice n . Nous pouvons alors déterminer une transformée en z de ces fonctions sur chacune de ces deux variables discrètes. Les transformées en z que nous allons déterminer nous permettront de déduire certaines propriétés des fonctions.

2.1. Transformée en z sur l'indice k

Nous allons exploiter la relation (1.21) pour déterminer la transformée en z des fonctions de Laguerre discrètes. En partant de l'expression (2.05), ces fonctions peuvent se reformuler ainsi :

$$\varphi_n[k] = \sqrt{1-a^2} (-a)^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} u^{k-j} f[j]$$

en ayant posé :

$$u \triangleq ab \quad \text{et} \quad f[j] \triangleq \left(\frac{a}{b(a^2-1)} \right)^j \binom{n}{j}$$

la transformée en z de la fonction $f[j]$ peut aisément être déterminée à l'aide des relations (1.16) et (1.04) :

$$f[j] = \left(\frac{a}{b(a^2-1)} \right)^j \binom{n}{j} \left(1 + \frac{b(a^2-1)}{az} \right)^n = \left(\frac{az + b(a^2-1)}{az} \right)^n$$

L'emploi de la relation (1.21) nous permet alors de déduire, après simplifications, la transformée en z sur l'indice k des fonctions de Laguerre discrètes :

$$\varphi_n[k] \xrightarrow{k} \sqrt{1-a^2} \left(\frac{z}{z-ab} \right) \left(\frac{b-az}{z-ab} \right)^n \tag{2.11}$$

Cette transformée en z est bien connue dans le cas $b=1$ (par exemple [Kin 77]).

Il est intéressant de noter ici l'existence d'un pôle multiple ab d'ordre $n+1$. La convergence vers zéro, lorsque k tend vers l'infini (1.25), sera assurée lorsque le module de ce pôle sera inférieur à l'unité. Le paramètre b étant défini positif, nous aurons la convergence vers zéro des fonctions de Laguerre discrètes assurée si la contrainte suivante est respectée :

$$0 < b < \frac{1}{|a|} \quad \text{avec} \quad 0 < |a| < 1 \tag{2.12}$$

2.2. Transformée en z sur l'indice n

Une seconde transformée en z sur l'indice n peut être déterminée, en faisant jouer à celui-ci le rôle de la variable temporelle. La démarche utilisée pour calculer cette transformée est similaire à celle qui nous a permis de déterminer la transformée en z sur l'indice temporel k . En effet nous pouvons mettre les fonctions de Laguerre discrètes sous la forme adéquate suivante pour exploiter la propriété (1.21) :

$$\varphi_n[k] = \sqrt{1-a^2} a^k b^k \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} u^{n-j} f[j]$$

en ayant posé :

$$u \hat{=} -a \quad \text{et} \quad f[j] \hat{=} \left(\frac{a}{1-a^2} \right)^{-j} \binom{k}{j}$$

La transformée de la fonction $f[j]$ peut être calculée aisément à l'aide des relations (1.16) et (1.04). L'application de la propriété (1.21) nous mène alors au résultat :

$$\varphi_n[k] \xrightarrow{n} \sqrt{1-a^2} \left(\frac{z}{z+a} \right)^k \left(b \frac{az+1}{z+a} \right)^k \quad (2.13)$$

Cette transformée en z est du même type que la transformée en z sur l'indice k . Le pôle multiple, d'ordre $k+1$, est ici $-a$. La convergence vers zéro des fonctions de Laguerre discrètes, lorsque l'indice n tend vers l'infini, et pour une valeur donnée de la variable temporelle k , est ici assurée du fait de la contrainte imposée sur le module du paramètre a (2.12).

3. Filtrés de Laguerre discrets

Les filtres de Laguerre discrets sont définis par les transformées en z des fonctions de Laguerre discrètes (2.11) et (2.13). Nous allons étudier les deux filtres associés aux deux types de transformées en z.

3.1. Sur l'indice k

La transformée en z sur l'indice k (2.11) possède une relation de récurrence évidente sur l'indice n [Mar 77] :

$$\mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \} = \frac{b-az}{z-ab} \mathcal{Z}_k \{ \varphi_{n-1}[k] \} \quad \text{pour } n > 0 \quad (2.14)$$

avec pour $n=0$:

$$\mathcal{Z}_k \{ \varphi_0[k] \} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z-ab}$$

Cette relation de récurrence s'apparente à la mise en cascade de n filtres passe-tout amortis de pôle ab , précédés d'un filtre passe-bas (figure 2.2). Les fonctions de

Laguerre peuvent alors être calculées simplement en appliquant à l'entrée de ce filtre une impulsion de unité que nous noterons indifféremment $\delta_{0,k}$ et $\delta[k]$ (voir pour le cas $b=1$ [Mar 77]).

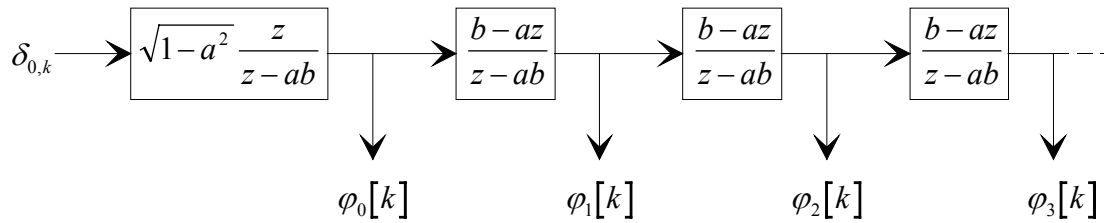


Figure 2.2

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer la limite obtenue lorsque le paramètre a tend vers zéro. La transformée en z sur l'indice k (2.11) devient alors :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k, a, b] \} = b^n z^{-n} \tag{2.15}$$

Le filtre de Laguerre associé est, dans ce cas, le filtre transversal de la figure 2.3 :

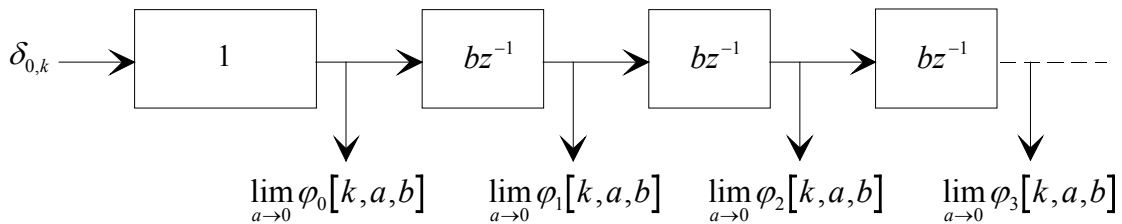


Figure 2.3

L'expression analytique des fonctions de Laguerre discrètes, dans le cas où le paramètre a tend vers zéro, s'exprime alors comme une impulsion :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \varphi_n[k, a, b] = b^k \delta[k - n] \tag{2.16}$$

3.2. Sur l'indice n

Une relation de récurrence sur l'indice k existe aussi pour la transformée en z sur l'indice n des fonctions de Laguerre discrètes :

$$\mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k] \} = b \frac{az+1}{z+a} \mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k-1] \} \quad \text{pour } k > 0 \tag{2.17}$$

avec pour $k=0$:

$$\mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[0] \} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a}$$

Une telle relation de récurrence, si l'on fait jouer à l'indice n le rôle de la variable temporelle, correspond à une batterie de filtres passe-tout, précédé d'un filtre passe-bas. Une impulsion unité en entrée de cette batterie de filtres permet de générer les fonctions de Laguerre discrètes (figure 2.4).

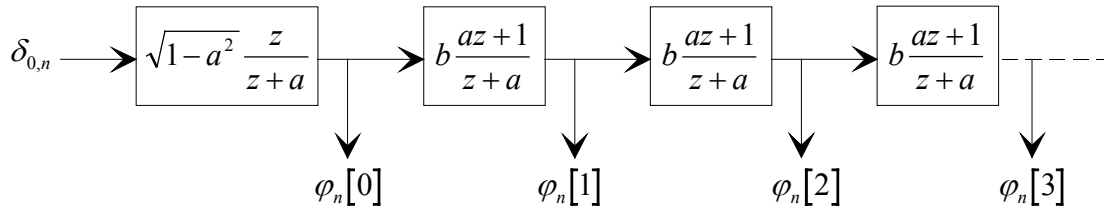


Figure 2.4

Dans le cas où le paramètre a tend vers zéro, la batterie de filtres se ramène à la batterie de filtres de la figure 2.3.

4. Lois d'échange des indices n et k

D'après la forme des fonctions de Laguerre discrètes de la définition (2.05), nous obtenons immédiatement :

$$(-b)^n \varphi_n[k, a, b] = (-b)^k \varphi_k[n, a, b]$$

ou :

$$\varphi_n[k, a, b] = (-b)^{k-n} \varphi_k[n, a, b] \tag{2.18}$$

Cette relation remarquable, connue dans le cas $b=1$ [Kin 77] est d'une très grande utilité pour étendre des propriétés démontrées pour un des indices n ou k au second indice.

5. Orthogonalité

La propriété d'orthogonalité est d'une grande importance pour le développement d'une transformée. Elle permet de définir une base de décomposition de fonctions. Nous allons montrer ici que les fonctions de Laguerre discrètes possèdent deux types d'orthogonalité.

5.1. Sur l'indice k

Nous allons à présent rappeler, par une méthode originale, que les fonctions sont orthogonales et normées, vis-à-vis de l'indice k , c'est à dire que les fonctions répondent à la relation [Kin 77] :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b] \varphi_m[k, a, b] = \delta_{n,m} \tag{2.19}$$

Si nous passons dans le domaine de la transformée en z , cela revient à montrer que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_m[k, a, b] Z_n \{ \varphi_n[k, a, b] \} = z^{-m}$$

Nous avons donc, d'après la transformée en z sur l'indice n (2.13) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_m[k] Z_n \{ \varphi_n[k] \} = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{z}{z+a} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(b \frac{z+a}{az+1} \right)^k \varphi_m[k]$$

le second membre de l'égalité exprime en fait une transformée en z (1.01) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_m[k] Z_n \{ \varphi_n[k] \} = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{z}{z+a} \right) \left\{ Z_k \{ \varphi_m[k] \} \right\}_{z=b \frac{z+a}{az+1}}$$

D'après la relation (2.11), puis en effectuant les simplifications qui s'imposent nous retrouvons bien ce qu'il fallait montrer (2.19) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_m[k] Z_n \{ \varphi_n[k] \} = z^{-m}$$

5.2. Sur l'indice n

Nous allons à présent exploiter la propriété d'échange des indices n et k (2.18), afin de montrer une seconde propriété d'orthogonalité, mais vis-à-vis de l'indice n cette fois. Une démonstration similaire à la méthode précédente aurait pu être employée pour aboutir au résultat désiré, mais la loi d'échange des indices nous permet une plus grande concision dans la démarche.

Si nous reprenons la relation d'orthogonalité vis-à-vis de l'indice k (2.19), et que nous appliquons à chacune des fonctions de Laguerre la propriété d'échange des indices (2.18), nous obtenons :

$$(-b)^{-n-m} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k[n, a, b] \varphi_k[m, a, b] = \delta_{n,m}$$

En renommant les indices en concordance avec la notation jusqu'à présent employée, cela nous donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, b] \varphi_n[j, a, b] = (-b)^{k+j} \delta_{k,j} \tag{2.20}$$

Nous pouvons remarquer ici la grande utilité de cette propriété d'échange des indices qui n'a pas suffisamment été soulignée dans la littérature. Par ailleurs, et à notre connaissance, l'orthogonalité des fonctions de Laguerre discrètes sur l'indice n n'a jamais été montrée. Elle confère pourtant aux fonctions des propriétés intéressantes que nous verrons par la suite.

6. Relations de récurrence

Diverses relations de récurrence peuvent être établies pour les fonctions de Laguerre discrètes. L'une provient directement des relations de récurrence existantes entre leurs transformées en z (2.14) et (2.17). Deux autres relations seront établies à partir des transformées en z et de la propriété d'échange des indices.

6.1. Relation de récurrence mixte

Considérons la relation de récurrence existant entre les transformées en z sur l'indice n par exemple (2.17). Nous pouvons la réécrire sous la forme :

$$(1 + az^{-1}) \mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k] \} = (ab + bz^{-1}) \mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k-1] \}$$

Il est aisé de repasser dans le domaine original en employant les propriétés (1.03) et (1.05) de la transformée en z . Cela nous conduit simplement à la relation de récurrence mixte bien connue (par exemple [Rag 77]) :

$$\varphi_n[k] = -a\varphi_{n-1}[k] + ab\varphi_n[k-1] + b\varphi_{n-1}[k-1] \quad (2.21)$$

valable pour $n > 0$ et $k > 0$.

6.2. Relation de récurrence sur l'indice k

En considérant la transformée en z sur l'indice k donnée précédemment (2.11) et en prenant le logarithme de cette expression nous obtenons :

$$\text{Log}(\mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \}) = \text{Log}(\sqrt{1-a^2}) + \text{Log}\left(\frac{z}{z-ab}\right) + n \text{Log}\left(\frac{b-az}{z-ab}\right)$$

en dérivant cette expression et en la multipliant par $-z$, il découle :

$$\frac{-z \frac{d}{dz} (\mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \})}{\mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \}} = \frac{ab}{z-ab} + n \frac{b(1-a^2)z}{(b-az)(z-ab)}$$

que nous pouvons réécrire :

$$\left[1 - \frac{1+a^2}{a} bz^{-1} + b^2 z^{-2} \right] \left[-z \frac{d(\mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \})}{dz} \right] = \left[\left(a - n \frac{1-a^2}{a} \right) bz^{-1} - b^2 z^{-2} \right] \mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \}$$

En prenant la transformée en z inverse et en employant les propriétés (1.05) et (1.09), on obtient une relation de récurrence sur l'indice k :

$$\varphi_n[k] = \frac{b}{ak} \left[-1 + (1+a^2)k - (1-a^2)n \right] \varphi_n[k-1] - b^2 \frac{k-1}{k} \varphi_n[k-2] \quad (2.22)$$

C'est une des relations utiles pour calculer de proche en proche les valeurs des fonctions. Elle peut par ailleurs se mettre sous une autre forme [Rag 77] :

$$n\varphi_n[k] = \frac{-a(k+1)}{b(1-a^2)} \varphi_n[k+1] + \frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} \varphi_n[k] - \frac{abk}{1-a^2} \varphi_n[k-1] \quad (2.23)$$

Ces relations de récurrence, puisque les fonctions de Laguerre discrètes sont aussi orthogonales vis-à-vis de l'indice n , répondent à la formule de Christoffel-

Darboux. En effet, si nous multiplions la dernière relation (2.23) par $\varphi_n[j, a, b]$ et que nous sommions sur n , nous obtenons, en employant l'orthogonalité sur l'indice n (2.20) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \varphi_n[k] \varphi_n[j] = (-b)^{k+j} \left[\frac{a(k+1)}{1-a^2} \delta_{k+1,j} + \frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} \delta_{k,j} + \frac{ak}{1-a^2} \delta_{k-1,j} \right] \quad (2.24)$$

c'est-à-dire :

$$\text{si } j=k+1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \varphi_n[k] \varphi_n[k+1] = -\frac{a(k+1)}{1-a^2} b^{2k+1} \quad (2.25)$$

$$\text{si } j=k : \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \varphi_n^2[k] = \frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} b^{2k} \quad (2.26)$$

$$\text{si } j=k-1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \varphi_n[k] \varphi_n[k-1] = -\frac{ak}{1-a^2} b^{2k-1} \quad (2.27)$$

$$\text{et si } j \neq k+1, k \text{ et } k-1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \varphi_n[k] \varphi_n[j] = 0 \quad (2.28)$$

Les sommes (2.25), (2.26) et (2.27) redonnent les coefficients de la relation de récurrence (2.23). La formule de Christoffel-Darboux n'a, à notre connaissance, jamais été appliquée à la relation de récurrence, notamment sur l'indice k , des fonctions de Laguerre discrètes.

6.3. Relation de récurrence sur l'indice n

Une démarche similaire à celle employée pour démontrer la relation de récurrence sur l'indice k aurait pu être utilisée à partir de la transformée en z (2.13) pour aboutir à la relation de récurrence sur l'indice n . Mais par simplicité, il est préférable d'appliquer la formule d'échange des indices pour aboutir, après avoir restauré la notation adoptée, à [Rag 77] :

$$\varphi_n[k] = \frac{1}{an} [1 + (1-a^2)k - (1+a^2)n] \varphi_{n-1}[k] - \frac{n-1}{n} \varphi_{n-2}[k] \quad (2.29)$$

que nous pouvons réécrire :

$$k \varphi_n[k] = \frac{a(n+1)}{1-a^2} \varphi_{n+1}[k] + \frac{(1+a^2)n+a^2}{1-a^2} \varphi_n[k] + \frac{na}{1-a^2} \varphi_{n-1}[k] \quad (2.30)$$

Dans ce cas présent, nous pouvons aussi exploiter la formule de Christoffel-Darboux, de la même manière qu'elle a été exploitée pour les polynômes continus de Laguerre [But 92]. En multipliant cette dernière expression par $\varphi_j[k, a, b]$ et en effectuant la somme pondérée sur k , nous obtenons après emploi de la propriété d'orthogonalité sur l'indice k (2.19) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} k \varphi_n[k] \varphi_j[k] = \frac{a(n+1)}{1-a^2} \delta_{n+1,j} + \frac{(1+a^2)n+a^2}{1-a^2} \delta_{n,j} + \frac{an}{1-a^2} \delta_{n-1,j} \quad (2.31)$$

C'est-à-dire :

$$\text{si } j=n+1 : \quad \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} k \varphi_n[k] \varphi_{n+1}[k] = \frac{a(n+1)}{1-a^2} \quad (2.32)$$

$$\text{si } j=n : \quad \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} k \varphi_n^2[k] = \frac{(1+a^2)n+a^2}{1-a^2} \quad (2.33)$$

$$\text{si } j=n-1 : \quad \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} k \varphi_n[k] \varphi_{n-1}[k] = \frac{an}{1-a^2} \quad (2.34)$$

$$\text{et si } j \neq n+1, n, \text{ et } n-1 : \quad \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} k \varphi_n[k] \varphi_j[k] = 0 \quad (2.35)$$

Nous constatons ici que les sommes (2.32), (2.33), et (2.34) redonnent les coefficients de la relation de récurrence (2.30). Ces relations, semble-t-il, n'apparaissent pas dans la littérature actuelle. Or, elles nous permettent de déduire des propriétés intéressantes de la transformée de Laguerre discrète.

7. Décalage positif des indices

Nous allons à présent exprimer le décalage positif dans le domaine temporel et dans le domaine de l'indice n des fonctions de Laguerre discrètes.

7.1. Décalage de l'indice k

D'après la transformée en z sur l'indice n exprimée en (2.13) nous pouvons déduire aisément la relation suivante pour λ entier positif :

$$\mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k + \lambda] \} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} (1 + az^{-1}) \mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[\lambda] \} \mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k] \}$$

la transformée en z inverse peut donc s'écrire sous forme d'un produit de convolution (1.08) :

$$\varphi_n[k + \lambda] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \varphi_n[k] *^n (\varphi_n[\lambda] + a \varphi_{n-1}[\lambda]) \quad (2.36)$$

ou bien, d'après la définition du produit de convolution :

$$\varphi_n[k + \lambda] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[\varphi_n[k] \varphi_0[\lambda] + \sum_{j=1}^n \varphi_{n-j}[k] (\varphi_j[\lambda] + a \varphi_{j-1}[\lambda]) \right]$$

et d'après (2.06) :

$$\varphi_n[k + \lambda] = a^\lambda b^\lambda \varphi_n[k] + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=1}^n \varphi_{n-j}[k] (\varphi_j[\lambda] + a \varphi_{j-1}[\lambda]) \quad (2.37)$$

Nous pouvons, par exemple, exploiter cette propriété dans le cas $\lambda=1$ [Nur 81a], pour déduire une autre relation de récurrence. Nous avons en effet, si $\lambda=1$:

$$\varphi_n[k+1] = ab\varphi_n[k] + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=1}^n \varphi_{n-j}[k] (\varphi_j[1] + a\varphi_{j-1}[1])$$

que nous pouvons réécrire, en appliquant la relation de récurrence mixte (2.21) pour exploiter l'expression des fonctions de Laguerre discrètes pour $k=0$ (2.09), et après simplification :

$$\varphi_n[k+1] = ab\varphi_n[k] - b \frac{1-a^2}{a} \left[\sum_{j=1}^n (-a)^j \varphi_{n-j}[k] \right]$$

7.2. Décalage de l'indice n

Il est possible de suivre une démarche similaire afin d'exprimer le décalage sur l'indice n . En effet, en reprenant cette fois la transformée en z sur l'indice k (2.11), nous pouvons écrire pour λ entier positif :

$$\mathcal{Z}_k \{ \varphi_{n+\lambda}[k] \} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} (1-abz^{-1}) \mathcal{Z}_k \{ \varphi_\lambda[k] \} \mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \}$$

ce qui nous donne la transformée en z inverse :

$$\varphi_{n+\lambda}[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \varphi_n[k] *^k (\varphi_\lambda[k] - ab\varphi_\lambda[k-1]) \quad (2.38)$$

qui peut s'exprimer aussi avec (2.09) :

$$\varphi_{n+\lambda}[k] = (-a)^\lambda \varphi_n[k] + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=1}^k \varphi_n[k-j] (\varphi_\lambda[j] - ab\varphi_\lambda[j-1]) \quad (2.39)$$

Nous pouvons donner le cas $\lambda=1$, qui conduit à une autre relation de récurrence des fonctions de Laguerre discrètes.

$$\varphi_{n+1}[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[\sum_{j=1}^k \varphi_n[k-j] (\varphi_1[j] - ab\varphi_1[j-1]) \right] - a\varphi_n[k]$$

qui se simplifie en exploitant la relation de récurrence mixte (2.21), qui nous permet de donner l'expression analytique des fonctions de Laguerre discrètes dans le cas $n=1$ à partir de leur expression dans le cas $n=0$ (2.06) :

$$\varphi_{n+1}[k] = \frac{1-a^2}{a} \left[\sum_{j=1}^k a^j b^j \varphi_n[k-j] \right] - a\varphi_n[k]$$

8. Fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation

Avant d'exprimer le décalage négatif des indices n et k pour les fonctions de Laguerre discrètes, il nous est nécessaire de déterminer la fonction d'intercorrélation des fonctions de Laguerre discrètes pondérées.

8.1. De la variable k

Définissons la fonction d'intercorrélation par l'expression :

$$\phi_{n,m}[k] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} (b^{-(j+k)} \varphi_n[j+k]) (b^{-j} \varphi_m[j])$$

où ici la variable k peut être positive ou négative. Nous traiterons dans un premier temps le cas où k est positif. Dans ce cas, la propriété de décalage positif de l'indice k (2.36) nous permet de réécrire cette fonction sous la forme :

$$\phi_{n,m}[k] = \frac{b^{-k}}{\sqrt{1-a^2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} \varphi_n[j] \varphi_m[j] \right) * (\varphi_n[k] + a \varphi_{n-1}[k])$$

L'orthogonalité des fonctions de Laguerre discrètes (2.19) permet la simplification de cette relation :

$$\phi_{n,m}[k] = \frac{b^{-k}}{\sqrt{1-a^2}} \delta_{n,m} * (\varphi_n[k] + a \varphi_{n-1}[k])$$

L'expression du produit de convolution nous permet alors d'aboutir à :

$$\phi_{n,m}[k] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} (b^{-(j+k)} \varphi_n[j+k]) (b^{-j} \varphi_m[j]) = \frac{b^{-k}}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_{n-m}[k] + a \varphi_{n-m-1}[k]) \quad \text{où } k \geq 0$$

qui est nulle pour $m > n$.

La propriété bien connue des fonctions d'intercorrélation :

$$\phi_{n,m}[-k] = \phi_{m,n}[k]$$

nous permet d'exprimer la fonction d'intercorrélation des fonctions de Laguerre discrètes pour $k < 0$ et ainsi pour k quelconque :

$$\begin{cases} \phi_{n,m}[k] = \frac{b^{-k}}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_{n-m}[k] + a \varphi_{n-m-1}[k]) & \text{si } k \geq 0 \\ \phi_{n,m}[k] = \frac{b^{-|k|}}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_{m-n}[|k|] + a \varphi_{m-n-1}[|k|]) & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Il est à noter que pour $m=n$, la fonction d'autocorrélation se réduit à (d'après (2.06)) :

$$\phi_{n,n}[k] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} (b^{-(j+k)} \varphi_n[j+k]) (b^{-j} \varphi_n[j]) = a^{|k|} \quad (2.41)$$

Notons par ailleurs le cas $m=0$ qui nous conduit d'après (2.06) à l'expression de la sommation pour $n > 0$:

$$\phi_{n,0}[k] \triangleq \sqrt{1-a^2} b^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^j \varphi_n[j+k] = \frac{b^{-k}}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_n[k] + a\varphi_{n-1}[k]) \quad (2.42)$$

qui est nulle pour $k < 0$.

8.2. De la variable n

Nous pouvons aussi définir une fonction d'intercorrélation de la variable n , avec la variable n pouvant être ici positive ou négative :

$$\hat{\phi}_{k,\lambda}[n] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j+n}[k] \varphi_j[\lambda]$$

Une méthode similaire à celle adoptée au paragraphe précédent peut-être appliquée. A l'aide des propriétés (2.38) et (2.20), nous obtenons aisément la relation suivante pour n positif :

$$\hat{\phi}_{k,\lambda}[n] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j+n}[k] \varphi_j[\lambda] = \frac{b^{2\lambda}}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_n[k-\lambda] - ab\varphi_n[k-\lambda-1]) \quad \text{où } n \geq 0$$

qui est nulle pour $\lambda > k$.

La propriété bien connue des fonctions d'intercorrélation :

$$\hat{\phi}_{k,\lambda}[-n] = \hat{\phi}_{\lambda,k}[n]$$

nous permet d'exprimer la fonction d'intercorrélation des fonctions de Laguerre discrètes pour $n < 0$ et ainsi pour n quelconque :

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{k,\lambda}[n] = \frac{b^{2\lambda}}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_n[k-\lambda] - ab\varphi_n[k-\lambda-1]) \text{ si } n \geq 0 \\ \hat{\phi}_{k,\lambda}[n] = \frac{b^{2k}}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_n[\lambda-k] - ab\varphi_n[\lambda-k-1]) \text{ si } n < 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Pour $\lambda = k$ nous déduisons la fonction d'autocorrélation de la variable n , qui s'exprime à l'aide de (2.09) :

$$\hat{\phi}_{k,k}[n] \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{j+n}[k] \varphi_j[k] = b^{2k} (-a)^{|n|} \quad (2.44)$$

Par ailleurs, pour $\lambda = 0$ et $k > 0$ la fonction d'intercorrélation s'exprime à l'aide de (2.09) :

$$\hat{\phi}_{k,0}[n] \triangleq \sqrt{1-a^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \varphi_{j+n}[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} (\varphi_n[k] - ab\varphi_n[k-1]) \quad (2.45)$$

qui est nulle pour $n < 0$.

9. Décalage négatif des indices

Les fonctions d'autocorrélation précédemment définies vont maintenant nous permettre d'exprimer le décalage négatif des indices n et k .

9.1. Décalage de l'indice k

Reprenons l'expression de la fonction d'intercorrélacion de la variable n (2.43) où λ est entier positif et mettons-la sous la forme :

$$\varphi_n[k - \lambda] - ab\varphi_n[k - \lambda - 1] = \sqrt{1 - a^2}b^{-2\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{n+j}[k] \varphi_j[\lambda]$$

La sommation des termes du premier membre de cette relation nous permet d'extraire l'expression de la fonction de Laguerre discrète d'indice k décalé négativement :

$$\varphi_n[k - \lambda] = \sum_{i=0}^{\infty} (ab)^i (\varphi_n[k - \lambda - i] - ab\varphi_n[k - \lambda - i - 1])$$

En effectuant cette même sommation sur le second membre cette fois, et en échangeant l'ordre des sommations, cela nous mène à :

$$\varphi_n[k - \lambda] = \sqrt{1 - a^2}b^{-2\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{n+j}[k] \sum_{i=0}^{\infty} (ab)^i b^{-2i} \varphi_j[\lambda + i]$$

La sommation sur l'indice i de cette expression n'est autre que la somme donnée par la relation (2.42), nous déduisons alors :

$$\varphi_n[k - \lambda] = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} b^{-2\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{n+j}[k] (\varphi_j[\lambda] + a\varphi_{j-1}[\lambda]) \quad (2.46)$$

Nous pouvons par exemple exprimer le cas particulier $\lambda=1$. Le terme de la sommation peut alors se simplifier en utilisant le produit de convolution mixte (2.21) et l'expression analytique des fonctions de Laguerre discrètes pour $k=0$ (2.09), ou plus simplement en réécrivant la relation (2.45) :

$$\varphi_n[k - 1] = \frac{1}{ab} \left(\varphi_n[k] - (1 - a^2) \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \varphi_{n+j}[k] \right) \quad (2.47)$$

9.2. Décalage de l'indice n

La méthode d'échange des indices (2.18), appliquée sur les précédentes expressions, nous permet d'exprimer cette fois le décalage négatif de l'indice n . Après mise à jour de la notation habituelle nous obtenons l'équivalent de la relation (2.46) :

$$\varphi_{n-m}[k] = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} \varphi_n[k + j] (\varphi_m[j] - ab\varphi_m[j - 1]) \quad (2.48)$$

Et par exemple pour $m=1$:

$$\varphi_{n-1}[k] = \frac{1}{a} \left(-\varphi_n[k] + (1-a^2) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^j \varphi_n[k+j] \right) \quad (2.49)$$

10. Produits de convolution

L'exploitation des transformées en z (2.11) et (2.13) va nous permettre ici, d'exprimer les produits de convolution, sur l'indice k puis sur l'indice n , des fonctions de Laguerre discrètes.

10.1. Sur l'indice k

A partir de la transformée en z sur l'indice k (2.11), nous pouvons exprimer, la transformée en z du produit de convolution (1.08) :

$$\varphi_n[k]^k * \varphi_\lambda[k] \hat{=} \sum_{j=0}^k \varphi_n[k-j] \varphi_\lambda[j] \rightarrow \mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k] \} \mathcal{Z}_k \{ \varphi_\lambda[k] \}$$

Après mise en forme, nous pouvons exprimer ce produit de transformées en z comme étant la somme de transformées en z de deux autres fonctions de Laguerre discrètes :

$$\varphi_n[k]^k * \varphi_\lambda[k] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[a \mathcal{Z}_k \{ \varphi_{n+\lambda+1}[k] \} + \mathcal{Z}_k \{ \varphi_{n+\lambda}[k] \} \right]$$

Ce qui nous donne, dans le domaine temporel, la relation originale suivante :

$$\varphi_n[k]^k * \varphi_\lambda[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[a \varphi_{n+\lambda+1}[k] + \varphi_{n+\lambda}[k] \right] \quad (2.50)$$

10.2. Sur l'indice n

Une relation similaire, basée sur l'indice n cette fois peut être obtenue en appliquant la formule d'échange des indices (2.18), sur l'expression précédente (2.50). Elle permet de donner une relation inédite, après avoir convenablement renommé les indices :

$$\varphi_n[k]^n * \varphi_n[\lambda] \hat{=} \sum_{j=0}^n \varphi_{n-j}[k] \varphi_j[\lambda] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left[-\frac{a}{b} \varphi_n[k+\lambda+1] + \varphi_n[k+\lambda] \right] \quad (2.51)$$

11. Expression sous une forme de type Rodriguez

Il est possible de mettre les transformées en z des fonctions sous une forme dont la transformée inverse est une expression de type Rodriguez (1.13). En effet, il est possible d'obtenir d'autres expressions analytiques des fonctions de Laguerre discrètes, si nous assimilons leurs transformées en z à une expression de la forme :

$$\frac{z f[X^*(z)]}{z - X[X^*(z)]} \leftarrow \frac{1}{j!} D^j \left\{ [X(x)]^j f(x) \right\}$$

où nous allons faire prendre à j les valeurs k puis n .

11.1. Indice k

Partons de la transformée en z sur l'indice k (2.11), il nous faut alors poser, d'après la démarche exposée au chapitre 1 paragraphe 2.8 :

$$X[X^*(z)] = ab = X[x]$$

c'est à dire en intégrant sur x :

$$X[x] = abx + c \quad \text{avec } c : \text{constante.}$$

Nous devons par ailleurs résoudre l'équation :

$$X[X^*] = (X^* - x)z$$

qui nous permet de déterminer :

$$X^*(z) = \frac{xz + c}{z - ab}$$

et par analogie avec la transformée en z (2.11) nous pouvons déterminer qu'il nous faut poser :

$$f[x] = x^n, \quad c=b \quad \text{et } x=-a.$$

et nous vérifions bien la contrainte :

$$x = \lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z) = -a$$

Cette démarche nous permet finalement d'aboutir à l'expression originale :

$$\varphi_n[k] = \sqrt{1 - a^2} \frac{b^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left\{ (ax + 1)^k x^n \right\}_{x=-a} \quad (2.52)$$

11.2. Indice n

Nous pouvons réitérer ce développement, mais cette fois en travaillant sur les transformées en z sur l'indice n (2.13) en posant :

$$X[x] = -ax + b \quad \text{et } x = ab$$

cela nous conduit rapidement à l'expression [Rag 77] :

$$\varphi_n[k] = \sqrt{1 - a^2} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (-ax + b)^n x^k \right\}_{x=ab} \quad (2.53)$$

12. Sommation des $\varphi_n[k]$

Nous allons à présent exprimer les sommes pondérées des fonctions de Laguerre discrètes, à partir de leurs transformées en z .

12.1. Sur l'indice k

D'après la transformée en z des fonctions sur l'indice k (2.11), en posant $z=\lambda$ (où λ est une constante réelle) dans la définition de la transformée en z (1.01), nous déduisons l'expression de la somme pondérée des échantillons des fonctions :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \varphi_n[k] = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda-ab} \right) \left(\frac{b-a\lambda}{\lambda-ab} \right)^n \quad (2.54)$$

Dans le cas particulier où $\lambda=1$, nous obtenons la somme discrète des fonctions de Laguerre :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n[k] = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{1}{1-ab} \right) \left(\frac{b-a}{1-ab} \right)^n \quad (2.55)$$

Il est à noter que dans le cas particulier où $b=1$, cette dernière expression est indépendante de l'indice n et est égale à [Nur 81b] :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, 1] = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \quad (2.56)$$

12.2. Sur l'indice n

De la même manière on peut exploiter la transformée en z sur l'indice n (2.13) pour obtenir alors (où λ est une constante réelle) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \varphi_n[k] = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda+a} \right) \left(b \frac{a\lambda+1}{\lambda+a} \right)^k \quad (2.57)$$

Et dans le cas où λ vaut 1, nous avons pour résultat l'intégrale discrète sur l'indice n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n[k] = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} b^k \quad (2.58)$$

Cette relation devient indépendante de k lorsque $b=1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, 1] = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \quad (2.59)$$

13. Dérivées par rapport aux paramètres

Nous allons à présent exposer les dérivées des fonctions par rapport aux paramètres a et b . Elles seront exprimées à l'aide des fonctions de Laguerre discrètes elles-mêmes.

13.1 Dérivée par rapport au paramètre b

La dérivée, par rapport au paramètre b , des fonctions de Laguerre discrètes, peut se déterminer directement et aisément à partir de la relation (2.03). Elle s'exprime à l'aide des fonctions de Laguerre discrètes, sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial b} \varphi_n[k, a, b] = \frac{k}{b} \varphi_n[k, a, b] \quad (2.60)$$

13.2 Dérivée par rapport au paramètre a

Nous allons à présent déterminer la dérivée des fonctions par rapport au paramètre a . Il s'est avéré en fait plus simple de calculer cette dérivée dans le domaine de la transformée en z . En effet nous avons :

$$\mathcal{Z}_k \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (\varphi_n[k, a, b]) \right\} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\mathcal{Z}_k \{ \varphi_n[k, a, b] \} \right)$$

Il est relativement simple de calculer cette dérivée et de montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial a} (\varphi_n[k, a, b]) = \frac{1}{1-a^2} ((n+1)\varphi_{n+1}[k, a, b] - n\varphi_{n-1}[k, a, b]) \quad (2.61)$$

En utilisant la propriété d'échange des indices (2.18) cela nous donne une autre relation :

$$\frac{\partial}{\partial a} (\varphi_n[k, a, b]) = \frac{1}{1-a^2} \left(-\frac{k+1}{b} \varphi_n[k+1, a, b] + kb\varphi_n[k-1, a, b] \right) \quad (2.62)$$

Diverses autres formules de la dérivée peuvent être déduites simplement en exploitant les relations de récurrence des fonctions (2.21), (2.22) et (2.29). Par ailleurs ces deux précédentes formules inédites (2.61) et (2.62) permettent de calculer les dérivées d'ordre supérieur des fonctions.

Nous allons à présent établir une propriété originale qui nous sera très utile pour établir certaines propriétés de la transformée de Laguerre. Nous allons montrer par récurrence la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{n=0}^N \varphi_n[j] \varphi_n[k] \right) = \frac{N+1}{1-a^2} (\varphi_N[j] \varphi_{N+1}[k] + \varphi_N[k] \varphi_{N+1}[j]) \quad (2.63)$$

Démonstration :

à l'ordre zéro la dérivée s'exprime à l'aide de la relation (2.60) précédemment démontrée:

$$\frac{\partial}{\partial a}(\varphi_0[j]\varphi_0[k]) = \varphi_0[j]\frac{\partial}{\partial a}(\varphi_0[k]) + \varphi_0[k]\frac{\partial}{\partial a}(\varphi_0[j]) = \frac{1}{1-a^2}(\varphi_0[j]\varphi_0[k] + \varphi_0[k]\varphi_0[j])$$

à l'ordre $N+1$ cela nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{n=0}^{N+1}\varphi_n[j]\varphi_n[k]\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{n=0}^N\varphi_n[j]\varphi_n[k]\right) + \varphi_{N+1}[j]\frac{\partial}{\partial a}(\varphi_{N+1}[k]) + \varphi_{N+1}[k]\frac{\partial}{\partial a}(\varphi_{N+1}[j])$$

en exploitant la relation (2.63) supposée vraie et l'expression (2.61) de la dérivée par rapport au paramètre a cela nous conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{n=0}^{N+1}\varphi_n[j]\varphi_n[k]\right) &= \frac{N+1}{1-a^2}(\varphi_N[j]\varphi_{N+1}[k] + \varphi_N[k]\varphi_{N+1}[j]) \\ &+ \frac{1}{1-a^2}\varphi_{N+1}[j][(N+2)\varphi_{N+2}[k] - (N+1)\varphi_N[k]] \\ &+ \frac{1}{1-a^2}\varphi_{N+1}[k][(N+2)\varphi_{N+2}[j] - (N+1)\varphi_N[j]] \end{aligned}$$

qui se simplifie aisément pour donner la relation à l'ordre $N+1$:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{n=0}^{N+1}\varphi_n[j]\varphi_n[k]\right) = \frac{N+2}{1-a^2}(\varphi_{N+1}[j]\varphi_{N+2}[k] + \varphi_{N+1}[k]\varphi_{N+2}[j])$$

ce résultat confirme bien la propriété énoncée en (2.63).

Il est par ailleurs intéressant de noter le cas particulier où $j=k$:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{n=0}^N\varphi_n^2[k]\right) = 2\frac{N+1}{1-a^2}\varphi_N[k]\varphi_{N+1}[k] \quad (2.64)$$

14. Modification des paramètres

Les relations que nous allons établir au cours de ce chapitre sont inédites. Elles permettent d'effectuer des changements de paramètres des fonctions de Laguerre discrètes. Leur intérêt apparaîtra lors de l'étude de la transformée de Laguerre discrète.

14.1. Modification du paramètre b

D'après la définition initiale (2.03) nous pouvons déjà déduire les relations simples suivantes :

$$\varphi_n[k, a, \lambda b] = \lambda^k \varphi_n[k, a, b] \quad (2.65)$$

où λ est une constante réelle strictement positive.

Cette relation peut se réécrire :

$$\varphi_n[k, a, b_2] = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^k \varphi_n[k, a, b_1] \quad (2.66)$$

Notons que cette relation modifie le pôle ab de la transformée en z sur l'indice k (2.11), des fonctions de Laguerre discrètes, tandis que le pôle a de la transformée en z sur l'indice n est conservé (2.13).

Il est aussi très simple de se ramener à des fonctions de Laguerre discrètes pour lesquelles le paramètre b vaut 1. Il suffit alors de poser $\lambda = 1/b$, pour obtenir la relation :

$$\varphi_n[k, a, 1] = b^{-k} \varphi_n[k, a, b] \quad (2.67)$$

Cette relation trouve son intérêt d'une part dans le changement du paramètre b et d'autre part pour la simplification dans les calculs. Il est, en effet parfois plus simple d'effectuer une série de calculs dans le cas $b=1$ puis de retrouver, grâce à cette relation (2.67), le cas $b \neq 1$. Nous en verrons des exemples d'applications par la suite.

14.2. Changement de signe du paramètre a

A partir de la relation (2.05), nous pouvons établir une relation permettant le changement de a en $-a$:

$$\varphi_n[k, -a, b] = (-1)^{k+n} \varphi_n[k, a, b] \quad (2.68)$$

14.3. Relations générales

Nous allons à présent établir une relation originale, un peu plus générale entre les fonctions de Laguerre discrètes de paramètres différents. Considérons tout d'abord la propriété (1.21) de la transformée en z :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k+\alpha}{k-j} u^{k-j} f[j] \rightarrow \left(\frac{z}{z-u}\right)^{\alpha+1} F(z-u)$$

et posons :

$$\alpha=0, \quad u = a_1 b_1 - a_0 b_0, \quad \text{et} \quad f[j] = \lambda^n \varphi_n[j, a_0, b_0] \quad \text{avec } \lambda \text{ réel positif.}$$

D'après la transformée en z sur l'indice k (2.11), cela nous conduit à :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (a_1 b_1 - a_0 b_0)^{k-j} \lambda^n \varphi_n[j, a_0, b_0] \rightarrow \sqrt{1-a_0^2} \frac{z}{z-a_1 b_1} \left(\frac{\lambda b_0 + \lambda a_0 (a_1 b_1 - a_0 b_0) - \lambda a_0 z}{z - a_1 b_1} \right)^n$$

Par analogie avec la transformée en z (2.11), posons les équations donnant les nouveaux paramètres :

$$a_1 = \lambda a_0 \quad \text{et} \quad b_1 = \lambda b_0 + \lambda a_0 (a_1 b_1 - a_0 b_0)$$

Il est alors facile d'exprimer les nouveaux paramètres en fonction des anciens et de λ :

$$a_1 = \lambda a_0, \quad b_1 = \lambda b_0 \frac{1 - a_0^2}{1 - \lambda^2 a_0^2}$$

Il est possible de s'affranchir de la variable λ en écrivant :

$$\lambda = \frac{a_1}{a_0} \quad \text{et} \quad b_1 = b_0 \frac{a_1(1 - a_0^2)}{a_0(1 - a_1^2)}$$

La relation entre des fonctions de Laguerre discrètes de paramètres différents devient alors simple à établir :

$$\varphi_n[k, a_1, b_1] = \frac{\sqrt{1 - a_1^2}}{\sqrt{1 - a_0^2}} \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (a_1 b_1 - a_0 b_0)^{k-j} \varphi_n[j, a_0, b_0] \quad (2.69)$$

avec :

$$b_1 = b_0 \frac{a_1(1 - a_0^2)}{a_0(1 - a_1^2)}$$

Il est tout d'abord à noter que cette relation originale implique seulement une somme finie de $k+1$ termes. Par ailleurs, dans cette relation, les nouveaux paramètres sont soumis à deux contraintes. D'une part, la nouvelle valeur du paramètre b n'est pas libre de choix mais est imposée par l'expression précédente. D'autre part la nouvelle valeur du paramètre a doit obligatoirement être du même signe que l'ancienne de manière à ce que b_1 reste positif. Ces deux contraintes peuvent être aisément levées en combinant cette dernière relation (2.69) avec les relations permettant la variation du paramètre b (2.65) et le changement de signe du paramètre a (2.68). Cela nous conduit alors à la relation générale suivante en remplaçant b_1 par son expression :

$$\varphi_n[k, a_2, b_2] = \frac{\sqrt{1 - a_2^2}}{\sqrt{1 - a_0^2}} \left(\frac{a_2}{a_0} \right)^n \left(\frac{b_2(a_2^2 - a_0^2)}{a_2(1 - a_0^2)} \right)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{a_0(1 - a_2^2)}{b_0(a_2^2 - a_0^2)} \right)^j \varphi_n[j, a_0, b_0] \quad (2.70)$$

Exemple : Si nous désirons exprimer les fonctions de Laguerre discrètes de paramètre $a_2=0,6$ en fonctions de celles de paramètres $a_0=0,8$ avec $b_0=b_2=1$, la propriété précédente nous donne immédiatement la relation :

$$\varphi_n[k; 0,6; 1] = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n \left(-\frac{35}{27} \right)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{64}{35} \right)^j \varphi_n[j; 0,8; 1]$$

Il est par ailleurs possible d'établir une relation générale similaire dont la sommation s'effectue sur l'indice n , soit en reprenant une démarche identique à celle qui nous a conduit à cette relation, ou plus directement en appliquant la loi d'échange des indices n et k (2.14) sur cette dernière expression. Cela nous permet alors d'obtenir une relation similaire mais avec la sommation sur l'indice n , après avoir rétabli la notation jusqu'alors employée :

$$\varphi_n[k, a_2, b_2] = \frac{\sqrt{1-a_2^2}}{\sqrt{1-a_0^2}} \left(\frac{a_2 b_2}{a_0 b_0} \right)^k \left(\frac{a_0^2 - a_2^2}{a_2(1-a_0^2)} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{a_0(1-a_2^2)}{a_0^2 - a_2^2} \right)^j \varphi_j[k, a_0, b_0] \quad (2.71)$$

Exemple : Nous pouvons donner une autre relation entre les fonctions de Laguerre discrètes de paramètre $a_2=0,6$ et celles de paramètres $a_0=0,8$ avec $b_0=b_2=1$, en exploitant la propriété précédente qui nous donne immédiatement :

$$\varphi_n[k; 0,6; 1] = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^k \left(\frac{35}{27} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{64}{35} \right)^j \varphi_j[k; 0,8; 1]$$

Remarquons, que si l'on désire conserver le pôle ab de la transformée en z des fonctions de Laguerre discrètes sur l'indice k (2.11), cette relation (2.71) se simplifie quelque peu pour donner :

$$\varphi_n[k, a_2, b_2] = \frac{\sqrt{1-a_2^2}}{\sqrt{1-a_0^2}} \left(\frac{a_0^2 - a_2^2}{a_2(1-a_0^2)} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{a_0(1-a_2^2)}{a_0^2 - a_2^2} \right)^j \varphi_j[k, a_0, b_0] \quad (2.72)$$

avec la conservation de pôle : $a_2 b_2 = a_0 b_0$

14.4. Autres relations

Nous nous proposons maintenant de calculer la somme S suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, 1] \varphi_\lambda[k, a', 1]$$

La transformée en z sur l'indice n de cette somme peut être aisément calculée à l'aide de la relation (2.13) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, 1] \varphi_\lambda[k, a', 1] \rightarrow \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{az+1}{z+a} \right)^k \varphi_\lambda[k, a', 1]$$

La sommation sur l'indice k du second membre s'exprime comme une transformée en z :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, 1] \varphi_\lambda[k, a', 1] \rightarrow \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \mathbf{Z}_k \left\{ \varphi_\lambda[k, a', 1] \right\}_{z=\frac{z+a}{az+1}}$$

cela nous donne, d'après la transformée en z (2.11), une relation que nous pouvons mettre sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, 1] \varphi_\lambda[k, a', 1] \rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{a' - a}{1 - aa'} \right)^2} \frac{z}{z - \frac{a' - a}{1 - aa'}} \left(\frac{1 - \frac{a' - a}{1 - aa'} z}{z - \frac{a' - a}{1 - aa'}} \right)^\lambda$$

Le second membre de cette expression est de la forme d'une transformée en z sur l'indice n (2.13), ce qui implique :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, 1] \varphi_\lambda[k, a', 1] = \varphi_\lambda[n, \frac{a' - a}{1 - aa'}, 1] \quad (2.73)$$

Cette somme S peut être étendue au cas où les paramètres b sont différents de 1 à l'aide de la propriété (2.67) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (bb')^{-k} \varphi_n[k, a, b] \varphi_\lambda[k, a', b'] = \varphi_\lambda[n, \frac{a' - a}{1 - aa'}, 1] \quad (2.74)$$

et dans le cas où nous avons $b=b'$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b] \varphi_\lambda[k, a', b] = \varphi_\lambda[n, \frac{a' - a}{1 - aa'}, 1] \quad (2.75)$$

La propriété d'échange des indices n et k (2.18), nous mène à des relations similaires aux relations (2.74) et (2.75), mais pour lesquelles les sommations s'effectuent sur l'indice n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, b] \varphi_n[\lambda, a', b'] = (-b)^k (-b')^\lambda \varphi_\lambda[k, \frac{a' - a}{1 - aa'}, 1] \quad (2.76)$$

et pour $b=b'$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n[k, a, b] \varphi_n[\lambda, a', b] = (-b)^{k+\lambda} \varphi_\lambda[k, \frac{a' - a}{1 - aa'}, 1] \quad (2.77)$$

Il est à noter que les seconds membres de ces dernières égalités peuvent s'exprimer sous diverses formes en exploitant les propriétés de changement de paramètres (2.67) et (2.68), et la propriété d'échange des indices (2.18).

15. Majoration des fonctions de Laguerre discrètes

Nous allons à présent donner des relations de majorations des sommes partielles des carrés des fonctions. Nous traiterons en premier lieu le cas où $b=1$. Les propriétés, que nous allons établir, seront issues des propriétés des filtres passe-tout auxquels sont associées les fonctions. Les inégalités obtenues nous permettront alors de déterminer une borne supérieure des fonctions de Laguerre discrètes.

Dans le cas $b=1$, nous avons pu voir que les fonctions de Laguerre discrètes peuvent être obtenues à l'aide d'une batterie de filtres passe-tout (Figure 2.2). Une fonction d'ordre n peut être obtenue en appliquant une fonction d'ordre $n-1$ à l'entrée d'un filtre passe-tout de pôle a :

Figure 2.5 : $\varphi_{n-1}[k, a, 1] \rightarrow \boxed{\frac{1 - az}{z - a}} \rightarrow \varphi_n[k, a, 1]$

Or, une propriété de ce type de filtre [Pap 77] donne une relation entre les signaux d'entrée et de sortie du filtre, qui se traduit dans notre cas par l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=0}^K \varphi_{n-1}^2[k, a, 1] \geq \sum_{k=0}^K \varphi_n^2[k, a, 1] , \text{ avec } K \geq 0, \text{ et } n > 0$$

où l'égalité est atteinte lorsque K tend vers l'infini. De plus, cette inégalité est vérifiée quelquesoit la valeur de l'indice n . C'est-à-dire que si nous considérons la batterie de filtres passe-tout, cela nous conduit à la série d'inégalités :

$$\sum_{k=0}^K \varphi_0^2[k, a, 1] \geq \sum_{k=0}^K \varphi_1^2[k, a, 1] \geq \dots \geq \sum_{k=0}^K \varphi_n^2[k, a, 1] \geq \dots \quad \forall K \geq 0, n > 1 \quad (2.78)$$

L'emploi de la propriété de changement du paramètre b (2.67), nous permet d'intégrer celui-ci à cette serie d'inégalités :

$$\sum_{k=0}^K b^{-2k} \varphi_0^2[k, a, b] \geq \sum_{k=0}^K b^{-2k} \varphi_1^2[k, a, b] \geq \dots \geq \sum_{k=0}^K b^{-2k} \varphi_n^2[k, a, b] \geq \dots \quad \forall K \geq 0, n > 1 \quad (2.79)$$

Il est à remarquer que la propriété de variation du paramètre b a été appliquée indépendamment, pour chacune des fonctions d'indice différent. Les valeurs de ces paramètres b pourraient alors être différentes, sans changer quoique ce soit à cette série d'inégalités, en réalité indépendante du paramètre b .

Le premier terme de cette série d'inégalités peut aisément être calculé à partir de l'expression de la fonction de Laguerre discrète pour $n=0$ (2.06). Cela nous permet alors de déduire une borne supérieure aux autres termes de la série :

$$1 - a^{2(K+1)} \geq \sum_{k=0}^K b^{-2k} \varphi_n^2[k] \quad \forall K \geq 0 \text{ et } n \geq 0 \quad (2.80)$$

Le second membre de cette inégalité est une somme de carrés qui peut être mis sous la forme :

$$\sum_{k=0}^K b^{-2k} \varphi_n^2[k] = b^{-2K} \varphi_n^2[K] + \sum_{k=0}^{K-1} b^{-2k} \varphi_n^2[k]$$

Cette décomposition, en termes positifs, nous permet de déduire, à l'aide de l'inégalité (2.80), une borne supérieure du carré des fonctions de Laguerre discrètes :

$$\varphi_n^2[K] \leq b^{2K} (1 - a^{2(K+1)}) \quad (2.81)$$

vraie quelquesoit K et n positifs, et que nous pouvons réécrire :

$$|\varphi_n[K]| \leq b^K \sqrt{1 - a^{2(K+1)}} \leq b^K \sqrt{1 - a^2} \quad (2.82)$$

Une borne plus fine des fonctions de Laguerre discrètes peut être établie. Pour cela, il suffit de reprendre l'expression (2.79) mais en déterminant la borne supérieure à l'aide d'une somme pour laquelle l'indice n est plus élevé.

Une série d'inégalités, basée sur des sommations sur l'indice n peut aussi être obtenue en appliquant la formule d'échange des indices (2.18) sur la relation (2.79) :

$$\sum_{n=0}^N \varphi_n^2[0, a, b] \geq b^{-2} \sum_{n=0}^N \varphi_n^2[1, a, b] \geq \dots \geq b^{-2k} \sum_{n=0}^N \varphi_n^2[k, a, b] \geq \dots \quad \forall N \geq 0, k > 1 \quad (2.83)$$

et, en calculant le premier terme de cette série à l'aide de (2.09) :

$$1 - a^{2(N+1)} \geq b^{-2k} \sum_{n=0}^N \varphi_n^2[k, a, b] \quad \forall N \geq 0, k \geq 0 \quad (2.84)$$

De la même manière que précédemment, nous pouvons alors déduire une seconde borne supérieure des fonctions de Laguerre discrètes :

$$\varphi_N^2[k, a, b] \leq b^{2k} (1 - a^{2(N+1)}) \quad (2.85)$$

et :

$$|\varphi_N[k, a, b]| \leq b^k \sqrt{1 - a^{2(N+1)}} \quad (2.86)$$

Ici aussi, cette borne supérieure pourrait être affinée en considérant dès le départ (2.83) la somme servant de majorant, d'indice k plus élevé. Suivant les valeurs des paramètres et des indices n et k , nous pourrions choisir l'une des deux bornes supérieures (2.82) et (2.86) des fonctions de Laguerre discrètes.

16. Interpolation

Considérons tout d'abord la transformée en z sur l'indice n des fonctions de Laguerre discrètes (2.13) :

$$\varphi_n[k] \xrightarrow{n} \sqrt{1 - a^2} \left(\frac{z}{z + a} \right) \left(b \frac{az + 1}{z + a} \right)^k$$

Dans cette expression, si on la considère comme une définition des fonctions, l'indice k peut alors être vu en tant que paramètre. Sa nature n'intervient pas directement dans l'élaboration du calcul de cette transformée en z . Nous pouvons alors étendre la gamme des valeurs que peut prendre ce "paramètre" à l'ensemble des réels positifs et considérer cette transformée en z comme une définition de nouvelles fonctions. Ces fonctions ainsi définies sont alors égales aux fonctions de Laguerre discrètes, définies en (2.03), lorsque ce paramètre k prend une valeur entière positive.

Les propriétés des fonctions de Laguerre discrètes, vues au cours de ce chapitre, dont les démonstrations sont issues de la transformée en z sur l'indice n , et pour lesquelles la nature de k n'intervient pas, restent alors valables si nous étendons les valeurs de k à l'ensemble des réels positifs. Notamment, le relation de récurrence existant entre les transformées en z sur l'indice n reste vraie :

$$\mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k] \} = b \frac{az + 1}{z + a} \mathcal{Z}_n \{ \varphi_n[k - 1] \} \quad \text{pour } k > 0$$

Elle conduit à la relation de récurrence mixte encore applicable :

$$\varphi_n[k] = -a \varphi_{n-1}[k] + ab \varphi_n[k - 1] + b \varphi_{n-1}[k - 1]$$

Par ailleurs, la relation de récurrence, sur l'indice n (2.29), qui, comme nous l'avons vu peut être démontrée à partir de la transformée en z sur l'indice n (2.13), peut aussi être étendue au cas k réel positif [Roe 73] :

$$\varphi_n[k] = \frac{1}{an} [1 + (1 - a^2)k - (1 + a^2)n] \varphi_{n-1}[k] - \frac{n-1}{n} \varphi_{n-2}[k]$$

L'emploi du théorème de la valeur initiale de la transformée en z (1.24) sur la transformée en z sur l'indice n , qui nous sert de définition pour étendre les valeurs de k , nous permet d'obtenir l'expression de ces fonctions pour $n=0$:

$$\varphi_0[k] = \sqrt{1 - a^2} b^k a^k$$

Nous pouvons alors, à l'aide de la relation de récurrence précédente, calculer de proche en proche la valeur de ces fonctions pour k réel positif. Remarquons que ces deux relations impliquent que l'on retrouve les formes polynomiales du paragraphe 1 de ce chapitre. Il est néanmoins à noter, que pour conserver les fonctions réelles lorsque le paramètre a est négatif, a^k doit être interprété comme $(a^2)^{k/2}$.

Cette possibilité, d'étendre les valeurs de k à l'ensemble des réels positifs, nous permet une bonne interpolation des fonctions de Laguerre discrètes. Nous pouvons observer, sur les courbes qui suivent de tels exemples d'interpolations.

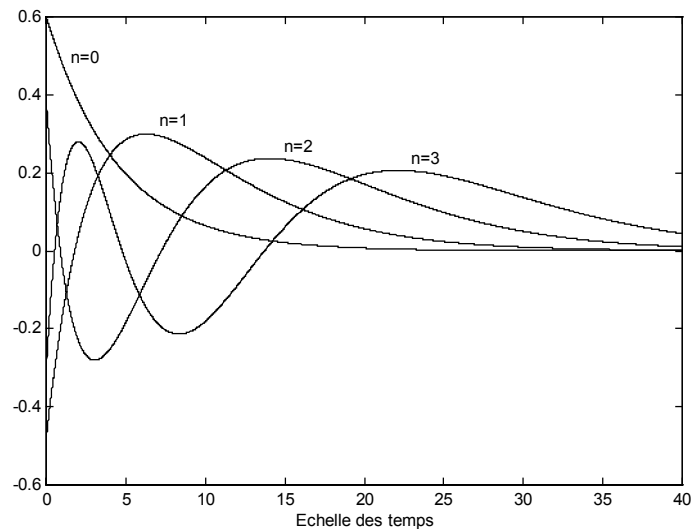


Figure 2.6.a : $a=0.8, b=1, pas=0.01$

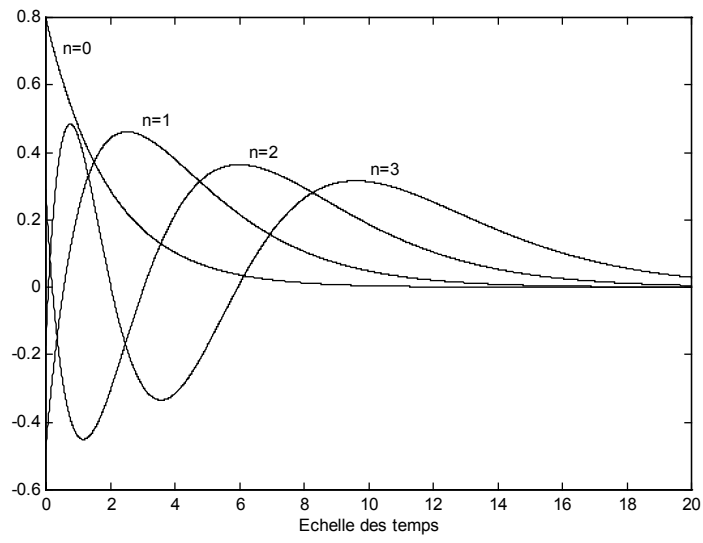


Figure 2.6.b :

$a=0.6, b=1, \text{pas}=0.01$

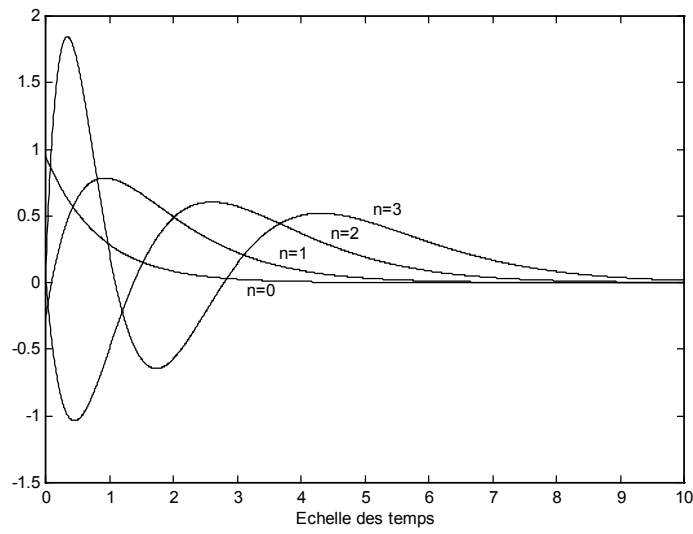


Figure 2.6.c :

$a=0.3, b=1, \text{pas}=0.01$

Chapitre 3

Propriétés de la transformation de Laguerre discrète

1. Introduction et définitions

La décomposition de fonctions sur la base des fonctions de Laguerre discrètes a été introduite par C.R. Arnold en 1966 [Arn 66]. L'emploi de cette représentation s'est alors développé et a conduit à de nombreuses applications pratiques. Les raisons de son succès sont basées sur le fait qu'une telle décomposition est d'une part adéquate pour la représentation de transitoires, cette adéquation étant principalement due à la forme caractéristique des fonctions de Laguerre discrètes. D'autre part, cette décomposition, dont les coefficients se calculent aisément, possède un effet de lissage implicite et approprié aux signaux bruités. La représentation en fonctions de Laguerre discrètes conduit souvent à une série rapidement convergente, dans laquelle généralement quelques termes seulement suffisent pour une bonne représentation de la fonction originale.

Au cours de ce chapitre, nous exposerons de nouvelles propriétés de cette transformée de Laguerre discrète, jusqu'alors très peu étudiée en tant que telle, mais principalement à des fins pratiques précises. Nous profiterons notamment de l'étude des propriétés des fonctions de Laguerre discrètes faite au chapitre précédent pour déterminer de nouvelles propriétés de la transformée. Nous donnerons en particulier la relation entre la transformée en z et celle-ci. Cela nous permettra par ailleurs d'aboutir au développement de la transformée de Laguerre discrète de quelques fonctions classiques.

1.1 Transformée de Laguerre discrète

Nous appellerons transformée de Laguerre discrète monolatérale d'une fonction $f[k]$ de la variable discrète $k \geq 0$, la fonction de la variable discrète $n \geq 0$, notée $f_n(a, b)$ et ainsi définie :

$$f_n(a, b) \hat{=} L_{a,b} \{f[k]\} \hat{=} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b] f[k] \quad (3.01)$$

avec $0 < |a| < 1$ et b strictement positif.

Nous supposerons dans toute la suite que les fonctions $f[k]$ considérées sont telles que

$$b^{-k} f[k] \text{ soit à énergie finie, c'est à dire : } \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f^2[k] < \infty$$

Nous appellerons spectre discret de Laguerre de $f[k]$ l'ensemble $\{f_n(a, b)\}$ et nous écrirons symboliquement :

$$f[k] \text{---} f_n(a, b) \quad \text{et} \quad f_n(a, b) \text{---} f[k]$$

Le spectre de Laguerre d'une fonction dépend directement des paramètres a et b . Deux spectres discrets de Laguerre déterminés pour des valeurs de paramètres différents seront bien entendus différents, mais, correspondront à la même fonction d'origine.

1.2. Exemples simples de transformées

Nous pouvons, dès à présent, donner quelques exemples simples de calculs de transformées de Laguerre discrètes.

1.2.1. Transformée de l'échelon unité

Considérons tout d'abord, l'échelon unité ainsi défini : $U[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$

sa transformée de Laguerre s'exprime :

$$U[k] \text{---} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b]$$

Cette série peut être calculée aisément à l'aide de la propriété (2.54) et se mettre sous la forme :

$$U[k] \text{---} \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-a} \left(\frac{1-ab}{b-a} \right)^k \tag{3.02}$$

1.2.2. Transformée de l'impulsion unité

L'impulsion unité retardée, est définie comme suit :

$$\delta[k - \lambda] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \lambda \\ 0 & \text{si } k \neq \lambda \end{cases} \quad \lambda \geq 0$$

où λ est un entier naturel.

La définition de la transformée de Laguerre discrète conduit directement au résultat :

$$\delta[k - \lambda] \text{---} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b] \delta[k - \lambda] = b^{-2\lambda} \varphi_n[\lambda, a, b] \tag{3.03}$$

1.3 Théorème de la valeur initiale

D'après la définition de la transformée de Laguerre discrète (3.01), nous pouvons exprimer le premier terme du spectre de Laguerre d'une fonction $f[k]$, en substituant à la fonction de Laguerre discrète d'indice $n=0$ son expression analytique donnée par (2.06) :

$$f_0(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_0[k, a, b] f[k] = \sqrt{1-a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k f[k] \quad (3.04)$$

Ce résultat sera fort utile notamment pour déterminer le premier terme d'une transformée de Laguerre discrète donnée par une relation de récurrence.

2. Relations entre la transformée en z et la transformée de Laguerre discrète

Nous allons établir ici les relations existant entre ces deux transformées. Ces relations nous permettront par la suite, d'une part de déterminer les transformées de Laguerre discrètes de quelques fonctions usuelles, et d'autre part d'établir des propriétés de la transformation de Laguerre discrète.

2.1. Relations entre les transformées

Compte tenu de la transformée en z des fonctions $\varphi_n[k, a, b]$:

$$\varphi_n[k, a, b] \xrightarrow{n} \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \left(b \frac{az+1}{z+a}\right)^k$$

et de la relation de définition (3.01) nous pouvons écrire :

$$f_n(a, b) \xrightarrow{n} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \left(\sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \left(b \frac{az+1}{z+a}\right)^k \right) f[k]$$

ou encore :

$$f_n(a, b) \xrightarrow{n} \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(b \frac{z+a}{az+1}\right)^k f[k]$$

En introduisant $F(z)$, la transformée en z de la fonction $f[k]$:

$$f[k] \xrightarrow{k} F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f[k]$$

nous obtenons la relation fondamentale suivante :

$$f_n(a, b) \xrightarrow{n} \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} F\left(b \frac{z+a}{az+1}\right) \quad (3.05)$$

qui peut encore s'écrire :

$$f_n(a, b) = Z_n^{-1} \left\{ \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} F\left(b \frac{z+a}{az+1}\right) \right\}$$

Cette relation fournit une méthode efficace pour le calcul de la transformée de Laguerre discrète d'une fonction $f[k]$ dont on connaît $F(z)$ sa transformée en z , le problème se ramène alors à l'inversion d'une transformée en z .

Exemple : Considérons par exemple la fonction

$$f[k] = \lambda^k$$

dont la transformée en z s'écrit :

$$F(z) = \frac{z}{z-\lambda}$$

d'après la relation établie (3.07) :

$$f_n(a, b) \xrightarrow{n} \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \frac{\frac{b(z+a)}{az+1}}{\frac{b(z+a)}{az+1} - \lambda} = \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-\lambda a} \frac{z}{z - \frac{\lambda-ab}{b-\lambda a}}$$

et par conséquent :

$$f_n(a, b) = \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-\lambda a} \left(\frac{\lambda-ab}{b-\lambda a} \right)^n$$

C'est en suivant cette méthode, que nous avons élaboré les transformées de Laguerre discrètes de quelques fonctions usuelles. Cette relation nous permet aussi, pour certaines fonctions envisagées, de déduire une relation de récurrence, généralement avantageuse pour le calcul numérique des transformées de Laguerre discrètes. Enfin cette relation permet, non seulement de simplifier le calcul de nombreuses transformées de Laguerre discrètes, mais elle permet aussi d'établir aisément de nombreuses propriétés, comme nous le verrons au cours des paragraphes qui suivent. Ces propriétés permettent d'étendre rapidement la table des transformées de Laguerre discrètes.

Posons par ailleurs :

$$f_n(a, b) \xrightarrow{n} \tilde{F}(z) = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} F\left(b \frac{z+a}{az+1}\right)$$

En effectuant le changement de variable :

$$w = b \frac{z+a}{az+1}$$

nous obtenons l'expression de la transformée en z de la fonction $f[k]$ en fonction de la transformée z de son spectre de Laguerre :

$$F(w) = \sqrt{1-a^2} \frac{w}{w-ab} \tilde{F}\left(\frac{w-ab}{b-aw}\right) \quad (3.06)$$

Ce changement de variable est appelé transformation en w [Mar 77] ou transformée bilinéaire [Wah 89].

2.2. Méthode des dérivées successives

La méthode des dérivées successives de la transformée en z (1.26) associée à la relation (3.05) nous conduit à une relation, d'un intérêt surtout théorique, entre la transformée de Laguerre discrète et les dérivées successives de la transformée en z :

$$f_n(a,b) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{n!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\left(-z^2 \frac{d}{dz} \right)^n \frac{z}{z+a} F\left(b \frac{z+a}{az+1}\right) \right] \quad (3.07)$$

En particulier, pour $n=0$, nous retrouvons une relation équivalente à (3.04) :

$$f_0(a,b) = \sqrt{1-a^2} F\left(\frac{b}{a}\right) \quad (3.08)$$

et pour $n=1$:

$$f_1(a,b) = -a\sqrt{1-a^2} F\left(\frac{b}{a}\right) - b\sqrt{1-a^2} \frac{1-a^2}{a^2} F'\left(\frac{b}{a}\right)$$

avec :

$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz}$$

Par ailleurs, en nous basant sur la méthode donnant la transformée en z d'une fonction définie par une formule de type Rodriguez (1.13), il nous est possible d'établir simplement, à partir de la relation entre la transformée en z et la transformée de Laguerre discrète (3.05), la relation suivante :

$$f_n(a,b) = \frac{b}{a} \sqrt{1-a^2} \frac{(-a)^n}{n!} D^n \left[(x-ab)^n \frac{F(x)}{x} \right]_{x=\frac{b}{a}} \quad \text{avec : } D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

2.3. Extraction de la transformée en z à partir de l'expression de la transformée de Laguerre

Il est intéressant de reprendre et d'observer l'expression (3.08) et de la réécrire sous la forme :

$$\frac{f_0(a,b)}{\sqrt{1-a^2}} = F\left(\frac{b}{a}\right)$$

En posant $a=z^{-1}$ et $b=1$, dans cette expression nous aboutissons à une nouvelle relation entre les deux transformées :

$$F(z) = \left\{ \frac{f_0(a,1)}{\sqrt{1-a^2}} \right\}_{a=z^{-1}} \quad (3.09)$$

Cette relation nous permet d'extraire simplement l'expression analytique de la transformée en z à partir de l'expression du premier terme de la transformée de Laguerre discrète, lorsque celui-ci est connu en fonction du paramètre a .

Exemple : Considérons la transformée de Laguerre de l'échelon unité établie en (3.03). Le premier terme du spectre s'exprime :

$$f_0(a,b) = \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-a}$$

Nous pouvons alors exploiter la relation précédente (3.09) pour retrouver la transformée en z bien connue de l'échelon unité :

$$U[k] \xrightarrow{k} \frac{z}{z-1}$$

Cette méthode est d'un certain intérêt pour l'inversion de la transformée de Laguerre discrète.

3. Propriétés de la transformation de Laguerre discrète

Nous allons à présent établir diverses propriétés de base de la transformation de Laguerre discrète. Pour ce faire nous emploierons d'une part les propriétés des fonctions de Laguerre discrètes, rappelées ou démontrées au chapitre 2, et d'autre part nous exploiterons les relations existant entre la transformée de Laguerre discrète et la transformée en z . Le passage par le domaine de la transformée en z est un moyen efficace, comme nous pourrons le voir, pour établir de nombreuses propriétés de la transformation de Laguerre discrète.

3.1. Linéarité

Les deux propriétés suivantes découlent directement de la définition de la transformée de Laguerre discrète (3.01) :

$$\begin{aligned} f[k] + g[k] &\rightarrow f_n(a,b) + g_n(a,b) \\ \lambda f[k] &\rightarrow \lambda f_n(a,b) \end{aligned} \quad (3.10)$$

où λ désigne une constante réelle.

3.2. Amortissement

Considérons l'expression, donnée par la définition (3.01), de la transformée de Laguerre discrète d'une fonction amortie $\lambda^{-k} f[k]$:

$$\lambda^{-k} f[k] \text{---} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \lambda^{-k} \varphi_n[k, a, b] f[k]$$

Le second membre de cette expression peut être réécrit en utilisant la propriété de variation du paramètre b (2.55) :

$$\lambda^{-k} f[k] \text{---} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda b)^{-2k} \varphi_n[k, a, \lambda b] f[k]$$

Ainsi réécrit, le second membre de cette expression n'est autre que la transformée de Laguerre de la fonction $f[k]$ vis à vis des paramètres a et λb :

$$\lambda^{-k} f[k] \text{---} f_n(a, \lambda b) \quad (3.11)$$

3.3. Multiplication par k

En faisant usage, dans la relation de définition, de la formule de récurrence bien connue (2.30) :

$$k \varphi_n[k] = \frac{a(n+1)}{1-a^2} \varphi_{n+1}[k] + \frac{(1+a^2)n+a^2}{1-a^2} \varphi_n[k] + \frac{na}{1-a^2} \varphi_{n-1}[k]$$

Nous pouvons établir la correspondance :

$$k f[k] \text{---} \frac{1}{1-a^2} [(n+1) a f_{n+1}(a, b) + ((1+a^2)n+a^2) f_n(a, b) + n a f_{n-1}(a, b)] \quad (3.12)$$

Ce résultat peut s'étendre de proche en proche à $k^\lambda f[k]$ avec $\lambda=2, 3, 4 \dots$; ainsi par exemple :

$$\begin{aligned} k^2 f[k] \text{---} & \frac{1}{(1-a^2)^2} [(n+1)(n+2)a^2 f_{n+2}(a, b) \\ & + (n+1)a[(2n+1)(1+a^2) + 2a^2] f_{n+1}(a, b) \\ & + [(n^2 + (n+1)^2)a^2 + (n(1+a^2) + a^2)^2] f_n(a, b) \\ & + na[2n(1+a^2) + a^2 - 1] f_{n-1}(a, b) + n(n-1)a^2 f_{n-2}(a, b) \end{aligned}$$

3.4. Multiplication du spectre par n

Nous nous sommes basés sur la relation de récurrence (2.30) pour déterminer la transformée de Laguerre discrète d'une fonction multipliée par la variable temporelle k . Or, il existe une relation analogue à celle-ci pour laquelle la récurrence est basée sur

l'indice n (2.23). Cette relation va alors nous permettre de déduire la fonction qui correspond à un spectre multiplié par l'indice n . Posons tout d'abord :

$$g[k] \text{---} g_n(a, b) = n f_n(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} n \varphi_n[k] f[k]$$

D'après la relation de récurrence sur l'indice n (2.23), le dernier terme de cette expression se réécrit :

$$g[k] \text{---} \sum_{k=0}^{\infty} f[k] b^{-2k} \left[\frac{-a(k+1)}{b(1-a^2)} \varphi_n[k+1] + \frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} \varphi_n[k] - \frac{abk}{1-a^2} \varphi_n[k-1] \right]$$

En effectuant différents changements de variables, afin d'exprimer cette relation sous la forme d'une transformée de Laguerre discrète, nous obtenons :

$$g[k] \text{---} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k] \left[\frac{-a(k+1)}{b(1-a^2)} f[k+1] + \frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} f[k] - \frac{abk}{1-a^2} f[k-1] \right]$$

Nous pouvons alors déduire que l'expression de la fonction $g[k]$ est donnée par le terme entre crochet de la sommation. Nous pouvons alors conclure que :

$$\frac{-a(k+1)}{b(1-a^2)} f[k+1] + \frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} f[k] - \frac{abk}{1-a^2} f[k-1] \text{---} n f_n(a, b) \quad (3.13)$$

3.5. Sommation

Nous ferons usage de la propriété bien connue pour la transformée en z (1.07) :

$$g[k] = \sum_{j=0}^k f[j] \rightarrow G(z) = \frac{z}{z-1} F(z)$$

Nous pouvons écrire d'après la relation (3.05) :

$$\mathcal{Z}_n \{g_n(a, b)\} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \left[\frac{b(z+a)}{b(z+a)-az-1} F\left(b \frac{z+a}{az+1}\right) \right]$$

ce qui peut encore se formuler :

$$\mathcal{Z}_n \{g_n(a, b)\} = \frac{b(z+a)}{(b-a)z+ab-1} \mathcal{Z}_n \{f_n(a, b)\}$$

Cette relation nous a permis d'établir deux types de formules. D'une part en employant le produit de convolution réel de la transformée en z (1.08), compte tenu de la correspondance :

$$\frac{b(z+a)}{(b-a)z+ab-1} \leftarrow^n \begin{cases} \frac{b}{b-a} & n=0 \\ \frac{b}{b-a} \frac{1-a^2}{1-ab} \left(\frac{1-ab}{b-a}\right)^n & n \geq 1 \end{cases}$$

nous aboutissons à :

$$\begin{cases} g[k] = \sum_{j=0}^k f[j] \dots g_n(a,b) \\ g_0(a,b) = \frac{b}{b-a} f_0(a,b) \\ g_n(a,b) = \frac{b}{b-a} \left[f_n(a,b) + \frac{1-a^2}{1-ab} \sum_{j=0}^{n-1} f_j(a,b) \left(\frac{1-ab}{b-a}\right)^{n-j} \right] \end{cases} \quad n \geq 1 \quad (3.14)$$

Dans le cas $b=1$, la relation se simplifie :

$$g_n(a,1) = \frac{1}{1-a} \left[f_n(a,1) + (1+a) \sum_{j=0}^{n-1} f_j(a,1) \right]$$

D'autre part nous pouvons écrire, dans le cas général :

$$[(b-a) + (ab-1)z^{-1}] \mathcal{Z}_n \{g_n(a,b)\} = [b + abz^{-1}] \mathcal{Z}_n \{f_n(a,b)\}$$

En employant les relations de décalage de la transformée en z (1.05), cela conduit à une relation de récurrence entre les transformées de Laguerre discrètes des fonctions originales, bien plus pratique pour le calcul numérique :

$$g_n(a,b) = \frac{1}{b-a} [bf_n(a,b) + abf_{n-1}(a,b) - (ab-1)g_{n-1}(a,b)] \quad (3.15)$$

3.6. Décalage temporel

Nous traiterons, au cours de ce paragraphe, le cas de fonctions décalées dans le temps, en premier lieu négativement, ce qui correspond à une fonction retardée, en second lieu positivement, et qui correspond alors à une fonction en avance temporelle. Nous nous servirons d'une part des propriétés de décalage de l'indice k des fonctions de Laguerre discrètes, et d'autre part de la transformée en z .

3.6.1. Décalage temporel négatif

La transformée de Laguerre d'une fonction retardée d'un intervalle de temps λ entier positif s'exprime :

$$f[k-\lambda] \dots \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k] f[k-\lambda]$$

En effectuant le changement de variable $j=k-\lambda$ dans la sommation, nous obtenons :

$$f[k-\lambda]_{-1} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2(j+\lambda)} \varphi_n[j+\lambda] f[j]$$

Nous pouvons alors exploiter la propriété de décalage positif de l'indice k des fonctions de Laguerre discrètes (2.36). Elle nous donne :

$$f[k-\lambda]_{-1} \frac{b^{-2\lambda}}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} f[j] \varphi_n[j] * [\varphi_n[\lambda] + a \varphi_{n-1}[\lambda]]$$

Nous retrouvons dans cette expression la transformée de Laguerre discrète de la fonction $f[k]$. Il en résulte alors :

$$f[k-\lambda]_{-1} \frac{b^{-2\lambda}}{\sqrt{1-a^2}} f_n(a,b) * [\varphi_n[\lambda, a, b] + a \varphi_{n-1}[\lambda, a, b]] \quad (3.16)$$

Nous pouvons par ailleurs exploiter la transformée en z d'une fonction retardée. Elle s'exprime (1.05) :

$$g[k] = f[k-\lambda] U[k-\lambda] \xrightarrow{k} G(z) = z^{-\lambda} F(z) \quad \lambda \geq 0$$

D'après la relation entre la transformée en z et celle de Laguerre discrète (3.05) cela nous donne :

$$\mathcal{Z}_n \{g_n(a,b)\} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \left(b \frac{z+a}{az+1} \right)^{\lambda} F \left(b \frac{z+a}{az+1} \right)$$

que nous pouvons réécrire :

$$\mathcal{Z}_n \{g_n(a,b)\} = b^{-\lambda} \left(\frac{az+1}{z+a} \right)^{\lambda} \mathcal{Z}_n \{f_n(a,b)\}$$

A partir de cette relation, nous pouvons écrire :

$$\sum_{\alpha=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\alpha} a^{\alpha} z^{-\alpha} \mathcal{Z}_n \{g_n(a,b)\} = b^{-\lambda} \sum_{\beta=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\beta} a^{\lambda-\beta} z^{-\beta} \mathcal{Z}_n \{f_n(a,b)\}$$

Cela nous permet d'aboutir à la relation de récurrence :

$$g_n(a,b) = b^{-\lambda} \sum_{\beta=0}^{\min(n,\lambda)} \binom{\lambda}{\beta} a^{\lambda-\beta} f_{n-\beta}(a,b) - \sum_{\alpha=1}^{\min(n,\lambda)} \binom{\lambda}{\alpha} a^{\alpha} g_{n-\alpha}(a,b) \quad (3.17)$$

Dans le cas particulier où $\lambda=1$ les relations se simplifient à l'aide de (3.16) et en remplaçant les fonctions de Laguerre discrètes par leur expression analytiques. Nous avons alors :

$$g[k] = f[k-1]U[k-1]_{\perp} g_n(a,b) = \frac{a}{b} f_n(a,b) - \frac{1-a^2}{ab} \sum_{j=0}^{n-1} (-a)^{n-j} f_j(a,b) \quad (3.18)$$

avec la relation de récurrence donnée par (3.17) :

$$g_n(a,b) = \frac{a}{b} f_n(a,b) + \frac{1}{b} f_{n-1}(a,b) - a g_{n-1}(a,b) \quad (3.19)$$

qui peut aussi s'écrire après sommation des différents termes :

$$g_n(a,b) = \frac{a}{b} f_n(a,b) - (1-a^2) \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-j} g_j(a,b)$$

3.6.2. Décalage temporel positif

D'après la définition, la transformée de Laguerre d'une fonction avancée d'un intervalle de temps λ entier positif s'exprime :

$$f[k+\lambda]_{\perp} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k+\lambda] \varphi_n[k]$$

En effectuant le changement de variable $j=k+\lambda$ nous obtenons :

$$f[k+\lambda]_{\perp} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2(j-\lambda)} f[j] \varphi_n[j-\lambda]$$

où la somme a été étendue à $j=0$, les fonctions de Laguerre discrètes étant causales. Nous pouvons alors exploiter la formule (2.46) donnant l'expression des fonctions de Laguerre discrètes d'indice k décalé négativement pour obtenir, après avoir échangé l'ordre des sommations :

$$f[k+\lambda]_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_i[\lambda] + a \varphi_{i-1}[\lambda]) \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} f[j] \varphi_{n+i}[j]$$

Nous reconnaissons la somme sur j comme étant une transformée de Laguerre discrète. Cela nous permet alors d'aboutir à :

$$f[k+\lambda]_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_i[\lambda] + a \varphi_{i-1}[\lambda]) f_{n+i}(a,b) \quad (3.20)$$

Nous pouvons par ailleurs exploiter la transformée en z de la fonction décalée qui s'exprime comme suit, pour $\lambda \geq 0$:

$$g[k] = f[k+\lambda] \xrightarrow{k} G(z) = z^\lambda F(z) - \sum_{j=0}^{\lambda-1} z^{\lambda-j} f[j]$$

Il est par ailleurs possible d'obtenir aisément une relation de récurrence, en employant une démarche semblable à celle qui nous a donnée la relation (3.17) :

$$g_n(a, b) = b^\lambda \sum_{\beta=0}^{\min(n, \lambda)} \binom{\lambda}{\beta} \left(\frac{1}{a}\right)^{\lambda-\beta} \left[f_{n-\beta}(a, b) - \sum_{j=0}^{\lambda-1} b^{-2j} \varphi_{n-\beta}[j, a, b] f[j] \right] - \sum_{\alpha=1}^{\min(n, \lambda)} \binom{\lambda}{\alpha} \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha g_{n-\alpha}(a, b) \quad (3.21)$$

Remarquons que cette relation s'exprime en fonction des termes $f[0], f[1], \dots, f[\lambda-1]$ contrairement à la relation (3.20) qui nécessite en contrepartie une sommation infinie.

Nous pouvons par exemple traiter le cas particulier où $\lambda=1$ et établir, comme précédemment, différentes relations. D'après cette relation (3.21) nous obtenons, pour $\lambda=1$:

$$f[k+1] _ _ g_n(a, b) = \frac{b}{a} f_n(a, b) + b f_{n-1}(a, b) - \frac{1}{a} g_{n-1}(a, b) \quad n > 0 \quad (3.22)$$

avec :

$$g_0(a, b) = \frac{b}{a} f_0(a, b) - \frac{b}{a} \sqrt{1-a^2} f[0]$$

qui peut se réécrire, après sommation des différents termes :

$$f[k+1] _ _ \frac{b}{a} f_n(a, b) + \frac{b(1-a^2)}{a} \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-j} f_j(a, b) - \frac{b}{a} \sqrt{1-a^2} \left(-\frac{1}{a}\right)^n f[0] \quad (3.23)$$

La relation (3.20) nous donne une expression supplémentaire dans le cas $\lambda=1$. En substituant les fonctions de Laguerre discrètes, nous obtenons :

$$f[k+1] _ _ \frac{b}{a} \left[f_n(a, b) - (1-a^2) \sum_{i=0}^{\infty} (-a)^i f_{n+i}(a, b) \right] \quad (3.24)$$

3.7. Décalage spectral

Nous avons pu voir, dans le chapitre précédent, que les relations de décalage temporel des fonctions de Laguerre discrètes nous ont permis de déduire la transformée de Laguerre de fonctions décalées dans le temps. Des relations similaires de décalage de l'indice n existent aussi. Elles doivent alors nous permettre de déduire l'expression de la fonction conduisant à un décalage spectral. Nous traiterons séparément le décalage spectral négatif et le décalage spectral positif.

3.7.1 Décalage spectral négatif

Soit $g_n(a, b)$ le spectre de Laguerre d'une fonction $g[k]$, défini comme étant le spectre $f_n(a, b)$ de la fonction $f[k]$ décalé négativement d'une certaine valeur λ entière positive. Nous cherchons alors à déterminer l'expression de la fonction $g[k]$ en fonction de $f[k]$. D'après la définition nous avons donc :

$$g[k] \llcorner g_n(a, b) = f_{n-\lambda}(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i] \varphi_{n-\lambda}[i]$$

L'expression (2.48) d'une fonction de Laguerre discrète d'indice n décalée négativement nous donne après inversion de l'ordre des sommation :

$$f_{n-\lambda}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} (\varphi_{\lambda}[j] - ab\varphi_{\lambda}[j-1]) \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i] \varphi_n[i+j]$$

Nous pouvons poser $k=i+j$ afin de mettre la somme sur l'indice i sous la forme d'une transformée de Laguerre discrète :

$$f_{n-\lambda}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} (\varphi_{\lambda}[j] - ab\varphi_{\lambda}[j-1]) \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2(k-j)} f[k-j] \varphi_n[k]$$

La fonction $f[k]$ étant définie causale, nous avons étendu la sommation jusqu'à $k=0$. Nous retrouvons l'expression d'une transformée de Laguerre discrète qui nous permet de déduire l'expression recherchée de $g[k]$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^k f[k-j] (\varphi_{\lambda}[j] - ab\varphi_{\lambda}[j-1]) \llcorner f_{n-\lambda}(a, b) \quad (3.25)$$

3.7.2 Décalage spectral positif

Nous pouvons effectuer un travail similaire, mais pour un décalage positif du spectre. Posons, avec λ entier positif :

$$g[k] \llcorner g_n(a, b) = f_{n+\lambda}(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i] \varphi_{n+\lambda}[i]$$

La relation (2.38) exprimant le décalage positif de l'indice n des fonctions de Laguerre discrètes, nous conduit à :

$$f_{n+\lambda}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_{\lambda}[j] - ab\varphi_{\lambda}[j-1]) \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i] \varphi_n[i-j]$$

En posant $k=i-j$ la sommation sur i se ramène à une transformée de Laguerre discrète :

$$f_{n+\lambda}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_{\lambda}[j] - ab\varphi_{\lambda}[j-1]) \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} b^{-2j} f[k+j] \varphi_n[k]$$

Nous en déduisons alors l'expression de la fonction $g[k]$ qui exprime le décalage spectral positif de la fonction $f[k]$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} f[k+j] (\varphi_{\lambda}[j] - ab\varphi_{\lambda}[j-1]) \llcorner f_{n+\lambda}(a, b) \quad (3.26)$$

3.8. Produit de convolution réelle

La transformée de Laguerre discrète du produit de convolution de deux fonctions réelles, s'exprime d'après sa définition :

$$f[k] * g[k] = \sum_{j=0}^{\infty} f[k-j]g[j] \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k] \sum_{j=0}^{\infty} f[k-j]g[j]$$

L'inversion de l'ordre des sommations nous permet de mettre en évidence l'expression de la transformée de Laguerre de la fonction $f[k]$ retardée :

$$f[k] * g[k] \sum_{j=0}^{\infty} g[j] \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k-j] \varphi_n[k]$$

La transformée de Laguerre d'une fonction retardée est donnée par la correspondance (3.16). Nous obtenons après inversion de l'ordre des sommations :

$$f[k] * g[k] \sum_{j=0}^{\infty} g[j] \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k-j] \varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} f_n(a, b) * \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} g[j] (\varphi_n[j, a, b] + a \varphi_{n-1}[j, a, b])$$

Nous reconnaissons la somme sur j comme étant l'expression d'une transformée de Laguerre. Cela nous donne finalement :

$$f[k] * g[k] \sum_{j=0}^{\infty} g[j] \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k-j] \varphi_n[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} f_n(a, b) * [g_n(a, b) + a g_{n-1}(a, b)] \quad (3.27)$$

Nous obtenons une relation remarquable entre les produits de convolution :

$$f[k] * g[k] \sum_{j=0}^{\infty} g[j] \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k-j] \varphi_n[k] = f_n(a, b) * \hat{g}_n(a, b) \quad (3.28)$$

En ayant posé : $\hat{g}_n(a, b) \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} [g_n(a, b) + a g_{n-1}(a, b)]$

Nous pouvons exprimer le spectre $\hat{g}_n(a, b)$ en fonction de $g_n(a, b)$. Nous pouvons réécrire cette dernière relation sous la forme :

$$g_n(a, b) = \sqrt{1-a^2} \sum_{j=0}^n (-a)^{n-j} \hat{g}_j(a, b)$$

Cette expression s'apparente à la transformée de Laguerre d'une fonction retardée d'un échantillon (3.18), ce qui nous permet de déduire aisément :

$$g[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \{ \hat{g}[k] - ab \hat{g}[k-1] \}$$

et donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} f[k] * \{ \hat{g}[k] - ab \hat{g}[k-1] \} = f_n(a, b) * \hat{g}_n(a, b) \quad (3.29)$$

3.9. Fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation

La fonction d'intercorrélation de deux fonctions causales $f[k]$ et $g[k]$ est définie par la relation suivante :

$$\phi_{fg}[k] \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} f[i+k]g[i]$$

Afin de faciliter le calcul de la transformée de Laguerre discrète de cette fonction, nous allons poser :

$$h[k] \triangleq b^{2k} g[k] \varphi_n(a, b) = g_n(a, \frac{1}{b})$$

dont la transformée de Laguerre discrète a été obtenue à l'aide de la propriété d'amortissement (3.11). Nous avons alors à déterminer la transformée de Laguerre discrète de la fonction ainsi réécrite :

$$\phi_{fg}[k] = \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i+k]h[i] \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i+k]h[i] \varphi_n[k]$$

Nous supposons la variable temporelle discrète k positive dans le calcul de la transformée de la fonction d'intercorrélation. L'inversion de l'ordre des sommations nous révèle l'expression de la transformée de Laguerre de la fonction $f[k]$ décalée d'un temps i positif :

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i+k]h[i] \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} h[i] \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[i+k] \varphi_n[k]$$

L'expression de la transformée de Laguerre d'une fonction avancée est donnée par (3.20). Et nous obtenons, après inversion de l'ordre des sommations :

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i+k]h[i] \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j}(a, b) \sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} h[i] (\varphi_j[i] + a\varphi_{j-1}[i])$$

La somme sur i n'est autre qu'une transformée de Laguerre. Nous obtenons alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i+k]h[i] \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j}(a, b) (h_j(a, b) + ah_{j-1}(a, b))$$

D'une part, il ne nous reste qu'à substituer la fonction $g[k]$ à la fonction $h[k]$ dans cette relation pour aboutir à la correspondance :

$$\phi_{fg}[k] \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} f[i+k]g[i] \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j}(a, b) \left(g_j(a, \frac{1}{b}) + ag_{j-1}(a, \frac{1}{b}) \right) \quad (3.30)$$

D'autre part, nous pouvons constater que la transformée obtenue a aussi la forme d'une fonction d'intercorrélation mais dans le domaine spectral :

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^{-2i} f[i+k]h[i] \hat{\phi}_{\hat{h}}[n, a, b] = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j}(a, b) \hat{h}_j(a, b)$$

En ayant posé : $\hat{h}_n(a, b) \hat{=} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} [h_n(a, b) + ah_{n-1}(a, b)] \hat{=} \hat{h}[k]$

La fonction $h[k]$ peut être exprimée à l'aide de la fonction $\hat{h}[k]$ à partir de l'expression précédente avec la correspondance (3.25) :

$$h[k] = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} (\hat{h}[k] - ab\hat{h}[k-1])$$

Nous obtenons alors une nouvelle correspondance :

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} b^{-2j} f[j+k] (\hat{h}[j] - ab\hat{h}[j-1]) \hat{=} \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j}(a, b) \hat{h}_j(a, b) \quad (3.31)$$

Dans le cas de la fonction d'autocorrélation définie par la relation :

$$\phi_{ff}[k] \hat{=} \sum_{j=0}^{\infty} f[j+k]f[j]$$

nous obtenons directement à l'aide de (3.30) la transformée de Laguerre :

$$\phi_{ff}[k] \hat{=} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j}(a, b) \left(f_j(a, \frac{1}{b}) + af_{j-1}(a, \frac{1}{b}) \right) \quad (3.32)$$

3.10. Fonction périodique

Soit $f[k]$ une fonction périodique de période $K > 1$, posons :

$$f^K[k] = \begin{cases} f[k] & \text{si } k \in [0, K-1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$f^K[k]$ représente la première période de la fonction périodique $f[k]$. Nous avons donc :

$$f^K[k] = f[k] - f[k-K] \hat{=} f_n^K(a, b)$$

D'après les formules de décalage, nous obtenons la relation :

$$f_n^K(a, b) = f_n(a, b) - \frac{b^{-2K}}{\sqrt{1-a^2}} [f_n(a, b) * (\varphi_n[K, a, b] + a\varphi_{n-1}[K, a, b])] \quad (3.33)$$

que nous pouvons réécrire, en isolant $f_n(a, b)$, et d'après l'expression (2.06) :

$$f_n(a, b) = \frac{f_n^K(a, b) + \frac{b^{-2K}}{\sqrt{1-a^2}} \sum_{j=0}^{n-1} f_j(a, b) (\varphi_{n-j}[K, a, b] + a \varphi_{n-j-1}[K, a, b])}{1 - b^{-K} a^K} \quad (3.34)$$

Cette relation de récurrence peut être utile en pratique pour déterminer la transformée de Laguerre discrète d'une fonction périodique $f[k]$ à partir du spectre de Laguerre d'une seule période de cette fonction. Une propriété similaire est connue dans le cas de la transformée de Poisson d'un signal à temps continu [Hin 69].

3.11. Transformée de $g[k] = \frac{f[k]}{k + \lambda}$

3.11.1. Cas général

Nous pouvons réécrire cette expression sous la forme :

$$kg[k] + \lambda g[k] = f[k]$$

Cela nous permet d'employer la relation de multiplication par k (3.12), et d'aboutir à la relation de récurrence :

$$g_{n+1}(a, b) = \frac{(1-a^2)f_n(a, b) - (n(1+a^2) + \lambda(1-a^2) + a^2)g_n(a, b) - nag_{n-1}(a, b)}{(n+1)a} \quad (3.35)$$

Cette relation de récurrence permettra le calcul des $g_n(a, b)$ de proche en proche si les $f_n(a, b)$ sont connus. $g_0(a, b)$ peut être obtenu à l'aide d'une des relations (3.04) ou (3.08).

Il est à remarquer que le résultat peut s'étendre à :

$$g[k] = \frac{Q_1[k]f[k]}{Q_2[k]}$$

où $Q_1[k]$ et $Q_2[k]$ désignent des polynômes en k tels que $g[k]$ reste défini pour $k \geq 0$. En effet, dans ce cas nous pouvons réécrire cette expression sous la forme :

$$Q_2[k]g[k] = Q_1[k]f[k]$$

Il suffit de prendre la transformée de Laguerre discrète de chaque membre, compte tenu de la relation donnant la transformée de $k^\lambda f[k]$ (on la déduit de (3.12)). Nous obtenons alors une relation de récurrence permettant le calcul de proche en proche des $g_n(a, b)$, connaissant les $f_n(a, b)$ et $g_0(a, b)$, $g_1(a, b)$, ... $g_{m-1}(a, b)$, si $Q_2[k]$ est de degré m en k .

3.11.2. Cas particulier : $\lambda=0$

Dans le cas particulier où $\lambda=0$, la relation de récurrence reste valable, mais nous pouvons établir une nouvelle relation, en effet nous avons d'après (1.12) :

$$g[k] = \frac{f[k]}{k} \xrightarrow{k} \beta + \int_z^\infty \frac{F(u)}{u} du \quad \text{avec :} \quad \beta = \left[\frac{f[k]}{k} \right]_{k=0}$$

avec obligatoirement $f[0]=0$. Nous pouvons donc écrire (3.05) :

$$\mathcal{Z}_n \{g_n(a, b)\} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \left(\beta + \int_{\frac{b(z+a)}{az+1}}^\infty \frac{F(u)}{u} du \right)$$

En introduisant $P(z)$ une primitive de $F(z)/z$:

$$\mathcal{Z}_n \{g_n(a, b)\} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \left[\beta + P(\infty) - P\left(b \frac{z+a}{az+1}\right) \right]$$

Posons aussi :

$$h_n(a, b) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} (g_n(a, b) + a g_{n-1}(a, b))$$

qui conduit nous permet d'écrire :

$$\mathcal{Z}_n \{h_n(a, b)\} = \beta + P(\infty) - P\left(b \frac{z+a}{az+1}\right)$$

et en utilisant la dérivation dans le domaine de la transformée en z (1.09) :

$$\mathcal{Z}_n \{n h_n(a, b)\} = z \frac{dP\left(b \frac{z+a}{az+1}\right)}{dz} = \frac{b(1-a^2)z}{(az+1)^2} \frac{dP\left(b \frac{z+a}{az+1}\right)}{d\left(b \frac{z+a}{az+1}\right)}$$

$P(z)$ étant une primitive de $F(z)/z$, nous obtenons :

$$\mathcal{Z}_n \{n h_n(a, b)\} = \frac{(1-a^2)z}{(z+a)(az+1)} F\left(b \frac{z+a}{az+1}\right) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{az+1} \mathcal{Z}_n \{f_n(a, b)\}$$

D'une part, en inversant ces transformées en z , nous obtenons :

$$n h_n(a, b) = -\sqrt{1-a^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-j} f_j(a, b) \quad n > 0$$

Or, nous pouvons établir la relation suivante entre les $g_n(a, b)$ et les $h_n(a, b)$:

$$g_n(a, b) = \sqrt{1-a^2} \sum_{i=0}^n (-a)^{n-i} h_i(a, b) = (-a)^n g_0(a, b) + \sqrt{1-a^2} \sum_{i=1}^n (-a)^{n-i} h_i(a, b)$$

ce qui nous conduit finalement à une première relation de récurrence :

$$g_n(a,b) = (-a)^n \left[g_0(a,b) - (1-a^2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{a^2} \right)^i \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (-a)^j f_j(a,b) \right]$$

avec $g_0(a,b)$ pouvant être obtenu à l'aide d'une des relations (3.04) ou (3.08).

D'autre part nous pouvons écrire :

$$(a + z^{-1}) \mathcal{Z}_n \{nh_n(a,b)\} = z^{-1} \sqrt{1-a^2} \mathcal{Z}_n \{f_n(a,b)\}$$

qui nous donne :

$$anh_n(a,b) + (n-1)h_{n-1}(a,b) = \sqrt{1-a^2} f_{n-1}(a,b)$$

Il est alors possible de déduire une seconde relation de récurrence plus intéressante pour le calcul des $g_n(a,b)$:

$$g_n(a,b) = \frac{1}{an} \left[(1-a^2) f_{n-1}(a,b) - ((1+a^2)n-1) g_{n-1}(a,b) - a(n-1) g_{n-2}(a,b) \right] \quad n>0$$

(3.36)

4. Transformées de Laguerre de fonctions usuelles

Nous allons donner au cours de ce sous-chapitre quelques exemples de transformées de Laguerre de fonctions usuelles. Nous déduirons ces transformées principalement à l'aide de leur transformée en z et de la relation (3.05).

4.1. Transformée de l'échelon unité

La transformée de Laguerre discrète de la fonction échelon unité ainsi définie :

$$U[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

a été déterminée au paragraphe 1.2.1 de ce chapitre (3.02). Elle s'exprime :

$$U[k] = \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-a} \left(\frac{1-ab}{b-a} \right)^k$$

4.2. Transformée de l'impulsion unité

L'impulsion unité retardée, est définie comme suit :

$$\delta[k-\lambda] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \lambda \\ 0 & \text{si } k \neq \lambda \end{cases} \quad \lambda \geq 0$$

où λ est un entier naturel. Sa transformée de Laguerre discrète a été donnée au paragraphe 1.2.2 de ce chapitre (3.03). Elle s'exprime :

$$\delta[k - \lambda]_{-1} b^{-2\lambda} \varphi_n[\lambda, a, b]$$

4.3. Transformée de λ^k

Nous rappellerons ici la transformée de Laguerre discrète de la fonction $f[k] = \lambda^k$ qui a été déterminée au cours du paragraphe 2.1 de ce chapitre :

$$\lambda^k \rightarrow \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-\lambda a} \left(\frac{\lambda-ab}{b-\lambda a} \right)^k \quad (3.37)$$

4.4. Transformée de $\frac{\lambda^k}{k!}$

Soit la fonction et sa transformée en z d'après (1.22) :

$$f[k] = \frac{\lambda^k}{k!} \xrightarrow{z} e^{\frac{\lambda}{z}}$$

cela nous conduit à (3.05) :

$$\mathcal{Z}_n \{f_n(a, b)\} = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} \exp\left[\frac{\lambda(az+1)}{b(z+a)}\right] = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a} e^{\frac{\lambda a}{b}} \exp\left[\frac{\lambda(1-a^2)}{b(z+a)}\right]$$

Cette relation va nous permettre, après différents développements, d'aboutir à diverses relations.

D'une part en exploitant les correspondances (1.21) et (1.22) nous obtenons aisément :

$$\frac{\lambda^k}{k!} \rightarrow \sqrt{1-a^2} e^{\frac{\lambda a}{b}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-a)^{n-j} \frac{\left(\frac{\lambda}{b}(1-a^2)\right)^j}{j!} \quad (3.38)$$

Par ailleurs en employant la méthode d'inversion exposée au chapitre 1, paragraphe 3.8, nous pouvons déduire, après quelques calculs simples :

$$\mathcal{Z}_n \{nf_n(a, b)\} = E(z) \mathcal{Z}_n \{f_n(a, b)\}$$

avec :

$$E(z) = \frac{-a}{z+a} + \frac{\lambda z(1-a^2)}{b(z+a)^2} = \frac{\left((1-a^2)\lambda - ab\right)z^{-1} - a^2bz^{-2}}{b + 2abz^{-1} + a^2bz^{-2}}$$

D'une part, l'inversion directe de cette relation nous permet d'aboutir à une première formule de convolution en employant la transformée inverse en z du produit de deux fonctions (1.08) :

$$f_n(a,b) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-a)^j \left[1 - \frac{\lambda}{ab} (1-a^2)^j \right] f_{n-j}(a,b) \quad (n>0)$$

D'autre part, la méthode d'inversion exposée au chapitre 1, paragraphe 3.8, nous permet de déduire la formule de récurrence plus pratique suivante :

$$f_n(a,b) = \frac{1}{nb} \left[((1-a^2)\lambda - (2n-1)ab) f_{n-1}(a,b) - a^2 b (n-1) f_{n-2}(a,b) \right]$$

pour $n>0$.

avec, d'après (3.08) :

$$f_0(a,b) = \sqrt{1-a^2} e^{\frac{\lambda a}{b}}$$

4.5. Transformée de $\binom{\lambda}{k}$

Soit la fonction et sa transformée en z donnée en (1.16) :

$$f[k] = \binom{\lambda}{k} \rightarrow \left(1 + \frac{1}{z} \right)^\lambda$$

Nous pouvons calculer la transformée en z du spectre de Laguerre de cette fonction à l'aide de la propriété (3.05) et la mettre sous la forme :

$$\mathcal{Z}_n \{ f_n(a,b) \} = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{b+a}{b} \right)^\lambda \frac{z}{z+a} \left(\frac{z + \frac{ab+1}{b+a}}{z+a} \right)^\lambda$$

D'une part, nous pouvons alors exploiter les relations (1.17) et (1.21) pour déterminer la transformée en z inverse de cette expression et aboutir à :

$$\binom{\lambda}{k} \rightarrow \sqrt{1-a^2} \left(\frac{b+a}{b} \right)^\lambda \left(-\frac{ab+1}{b+a} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{j+\lambda}{\lambda} \left(\frac{a^2-1}{ab+1} \right)^j \quad (3.39)$$

D'autre part, nous pouvons appliquer la méthode d'inversion vue au chapitre 1, paragraphe 3.8. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{Z}_n \{ n f_n(a,b) \} = E(z) \mathcal{Z}_n \{ f_n(a,b) \}$$

avec :

$$E(z) = \frac{-a}{z+a} + \frac{1-a^2}{b+a} \frac{\lambda z}{\left(z + \frac{1+ab}{b+a}\right)} = \frac{\left((1-a^2)\lambda - a(b+a)\right)z^{-1} - a(1+ab)z^{-2}}{b+a + (1+2ab+a^2)z^{-1} + a(1+ab)z^{-2}}$$

L'inversion directe de cette relation à l'aide de la correspondance du produit de convolution (1.08) nous donne :

$$f_n(a,b) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[(\lambda+1)(-a)^j - \lambda \left(-\frac{1+ab}{b+a} \right)^j \right] f_{n-j}(a,b) \quad (n>0)$$

D'autre part, la méthode d'inversion exposée au chapitre 1, paragraphe 3.8, nous permet de déduire la formule de récurrence plus intéressante suivante :

$$f_n(a,b) = \frac{1}{(b+a)n} \left[\left((1-a^2)\lambda - n(1+2ab+a^2) + 1+ab \right) f_{n-1}(a,b) - a(1+ab)(n-1)f_{n-2}(a,b) \right] \quad (n>0)$$

4.6. Transformée de $\binom{k+\lambda}{\lambda}$

La transformée en z de cette fonction s'écrit (1.17) :

$$f[k] = \binom{k+\lambda}{\lambda} \rightarrow \left(\frac{z}{z-1} \right)^{\lambda+1}$$

ce qui donne, pour la transformée en z de son spectre de Laguerre en employant la formule (3.05) :

$$\mathcal{Z}_n \{f_n(a,b)\} = \sqrt{1-a^2} \left(\frac{b}{b-a} \right)^{\lambda+1} \frac{z}{z + \frac{ab-1}{b-a}} \left(\frac{z+a}{z + \frac{ab-1}{b-a}} \right)^{\lambda}$$

dont nous pouvons déterminer la transformée en z inverse à l'aide de la relation (1.21) :

$$\binom{k+\lambda}{\lambda} \rightarrow \sqrt{1-a^2} \left(\frac{b}{b-a} \right)^{\lambda+1} (-a)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{j+\lambda}{\lambda} \left(\frac{a^2-1}{a(b-a)} \right)^j \quad (3.40)$$

D'autre part, nous pouvons appliquer la méthode d'inversion vue au chapitre 1, paragraphe 3.8. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{Z}_n \{nf_n(a,b)\} = E(z) \mathcal{Z}_n \{f_n(a,b)\}$$

avec :

$$E(z) = \frac{\frac{1-ab}{b-a}}{z - \frac{1-ab}{b-a}} + \frac{\frac{1-a^2}{b-a} \lambda z}{(z+a) \left(z - \frac{1-ab}{b-a} \right)} = \frac{\left((1-a^2)\lambda + 1-ab \right) z^{-1} + a(1-ab)z^{-2}}{b-a - (1-2ab+a^2)z^{-1} - a(1-ab)z^{-2}}$$

L'inversion directe de cette relation à l'aide de la correspondance du produit de convolution nous donne pour $n > 0$:

$$f_n(a,b) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[(\lambda+1) \left(\frac{1-ab}{b-a} \right)^j - \lambda(-a)^j \right] f_{n-j}(a,b)$$

D'autre part, la méthode d'inversion exposée au chapitre 1, paragraphe 3.8, nous permet de déduire la formule de récurrence suivante plus pratique pour $n > 0$:

$$f_n(a,b) = \frac{1}{(b-a)n} \left[\left((1-a^2)\lambda + n(1-2ab+a^2) + a(b-a) \right) f_{n-1}(a,b) + a(1-ab)(n-1) f_{n-2}(a,b) \right]$$

4.7. Transformée de $\begin{pmatrix} k \\ \lambda \end{pmatrix}$

La transformée en z de cette fonction a été rappelée au cours du chapitre 1 (1.18) :

$$f[k] = \begin{pmatrix} k \\ \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \frac{z^k}{(z-1)^{\lambda+1}}$$

Dès lors la transformée en z de son spectre de Laguerre peut être déterminée (3.05) et se mettre sous la forme :

$$\mathcal{Z}_n \{ f_n(a,b) \} = \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-a} \left(\frac{a}{b-a} \right)^k \frac{z^k}{z + \frac{ab-1}{b-a}} \left(\frac{z + \frac{1}{a}}{z + \frac{ab-1}{b-a}} \right)^\lambda$$

A l'aide de la relation (1.21) nous pouvons calculer la transformée en z inverse de cette fonction et aboutir à :

$$\begin{pmatrix} k \\ \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b-a} \left(\frac{a}{b-a} \right)^k \left(-\frac{1}{a} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{j+\lambda}{\lambda} \left(\frac{b(a^2-1)}{b-a} \right)^j \quad (3.41)$$

D'autre part, nous pouvons appliquer la méthode d'inversion vue au chapitre 1, paragraphe 3.8. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{Z}_n \{ n f_n(a,b) \} = E(z) \mathcal{Z}_n \{ f_n(a,b) \}$$

avec :

$$E(z) = \frac{\frac{1-ab}{b-a}}{z - \frac{1-ab}{b-a}} + \frac{\frac{b(1-a^2)}{a(b-a)} \lambda z}{\left(z + \frac{1}{a}\right) \left(z - \frac{1-ab}{b-a}\right)} = \frac{\left((1-a^2)\lambda b + a(1-ab)\right)z^{-1} + (1-ab)z^{-2}}{a(b-a) - (b-a - a(1-ab))z^{-1} - (1-ab)z^{-2}}$$

L'inversion directe de cette relation à l'aide de la correspondance du produit de convolution (1.08) nous donne pour $n > 0$:

$$f_n(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[(\lambda + 1) \left(\frac{1-ab}{b-a} \right)^j - \lambda \left(-\frac{1}{a} \right)^j \right] f_{n-j}(a, b)$$

D'autre part, la méthode d'inversion exposée au chapitre 1, paragraphe 3.8, nous permet de déduire la formule de récurrence suivante pour $n > 0$:

$$f_n(a, b) = \frac{1}{(b-a)an} \left[\left((1-a^2)\lambda b - n(b-2a+a^2b) + b-a \right) f_{n-1}(a, b) + (1-ab)(n-1) f_{n-2}(a, b) \right]$$

4.8. Transformée de $\lambda^k \sin(k\theta)$

Considérons la fonction suivante dont la transformée en z est connue [Cal 73] :

$$f[k] = \lambda^k \sin(k\theta) \rightarrow \frac{\lambda z \sin \theta}{z^2 - 2\lambda z \cos \theta + \lambda^2}$$

La relation existant entre la transformée en z et la transformée de Laguerre discrète (3.05) nous permet d'obtenir après quelques calculs la relation :

$$\left\{ b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2 + z^{-1} [2ab^2 - 2\lambda b(a^2 + 1) \cos \theta + 2a\lambda^2] + z^{-2} [a^2 b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2] \right\} \mathcal{Z}_n \{ f_n(a, b) \} = \sqrt{1-a^2} \lambda b \sin \theta (a + z^{-1})$$

Elle nous conduit à la relation de récurrence suivante pour $n > 1$:

$$f_n(a, b) = \frac{-2[ab^2 - \lambda b(a^2 + 1) \cos \theta + a\lambda^2] f_{n-1}(a, b) - [a^2 b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2] f_{n-2}(a, b)}{b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2}$$

Les deux premiers termes du spectre de Laguerre discrètes de la fonction considérée ont été calculés à l'aide de la relation (3.07) :

$$f_0(a, b) = \frac{\sqrt{1-a^2} \lambda ab \sin \theta}{b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2}$$

$$f_1(a, b) = \frac{\sqrt{1-a^2}(b^2(1-2a^2) + 2\lambda a^3 b \cos \theta - \lambda^2 a^2) \lambda b \sin \theta}{(b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2)^2}$$

4.9. Transformée de $\lambda^k \cos(k\theta)$

Considérons à présent la fonction suivante dont la transformée en z est :

$$f[k] = \lambda^k \cos(k\theta) \rightarrow \frac{z(z - \lambda \cos \theta)}{z^2 - 2\lambda z \cos \theta + \lambda^2}$$

La relation (3.05) existant entre la transformée en z et la transformée de Laguerre discrète nous permet d'obtenir, après quelques calculs, la relation :

$$\begin{aligned} \{b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2 + z^{-1}[2ab^2 - 2\lambda b(a^2 + 1)\cos \theta + 2a\lambda^2] \\ + z^{-2}[a^2 b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2]\} Z_n \{f_n(a, b)\} = \\ \sqrt{1-a^2} b [(b - \lambda a \cos \theta) + z^{-1}(ab - \lambda \cos \theta)] \end{aligned}$$

Elle nous conduit à la relation de récurrence suivante pour $n > 1$:

$$f_n(a, b) = \frac{-2[ab^2 - \lambda b(a^2 + 1)\cos \theta + a\lambda^2]f_{n-1}(a, b) - [a^2 b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2]f_{n-2}(a, b)}{b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2}$$

dont les deux premiers termes de la série sont :

$$f_0(a, b) = \frac{\sqrt{1-a^2} b (b - \lambda a \cos \theta)}{b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2}$$

$$f_1(a, b) = \frac{\sqrt{1-a^2} b (ab - \lambda \cos \theta) - 2[ab^2 - \lambda b(a^2 + 1)\cos \theta + a\lambda^2]f_0(a, b)}{b^2 - 2\lambda ab \cos \theta + \lambda^2 a^2}$$

4.10. Extension de la table des transformées

Il est possible d'étendre simplement la table des transformées de Laguerre discrètes à l'aide des propriétés que nous avons exposées au cours de ce chapitre. Nous pouvons donner ici un exemple d'application d'une de ces propriétés pour déterminer la transformée de la fonction $g[k] = k\lambda^k$. La transformée de cette fonction peut être calculée à partir de la transformée connue de la fonction $f[k] = \lambda^k$ à laquelle on applique la propriété de multiplication par la variable temporelle discrète k (3.12). La fonction $f[k] = \lambda^k$ a pour transformée de Laguerre discrète :

$$f[k] = \lambda^k \rightarrow f_n(a, b) = \sqrt{1-a^2} \frac{b}{b - \lambda a} \left(\frac{\lambda - ab}{b - \lambda a} \right)^n$$

Et la propriété de multiplication par k s'exprime :

$$g[k] = kf[k] \rightarrow g_n(a, b) = \frac{1}{1-a^2} [(n+1)af_{n+1}(a, b) + ((1+a^2)n + a^2)f_n(a, b) + naf_{n-1}(a, b)]$$

L'application de cette propriété à la fonction précédente $f[k]=\lambda^k$ nous conduit, après quelques calculs, à la nouvelle correspondance :

$$k\lambda^k \rightarrow \frac{\sqrt{1-a^2}\lambda b[nb(1-a^2) + a(\lambda-ab)]}{(\lambda-ab)(b-\lambda a)^2} \left(\frac{\lambda-ab}{b-\lambda a}\right)^n \quad (3.42)$$

D'autres propriétés complémentaires, et notamment les propriétés de changements de paramètres, seront exposées au cours du paragraphe 6 de ce chapitre, lorsque la transformation inverse de Laguerre discrète aura été vue.

5. Inversion de la transformée de Laguerre discrète

5.1. Théorème d'inversion

L'ensemble des fonctions de Laguerre discrètes de paramètres identiques, forme une base complète de fonctions réelles orthonormales. Toute fonction convenable $f[k]$ réelle discrète et causale peut alors s'exprimer sous la forme d'une somme pondérée des fonctions de Laguerre discrètes :

$$f[k] = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(a, b) \varphi_m[k, a, b]$$

Si l'on substitue cette expression dans l'expression de la transformée de Laguerre, nous obtenons :

$$f_n(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_n[k, a, b] \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_m(a, b) \varphi_m[k, a, b] \right\}$$

ce qui se simplifie aisément à l'aide de la propriété d'orthogonalité des fonctions de Laguerre discrètes (2.19) et conduit à :

$$f_n(a, b) = C_n(a, b)$$

Les coefficients de la décomposition d'une fonction en une somme de fonctions de Laguerre discrètes seront alors donnés par la définition (3.01), et la recomposition de la fonction originale que nous appellerons transformée inverse de Laguerre sera alors définie par la relation :

$$f[k] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a, b) \varphi_n[k, a, b] \quad (3.43)$$

5.2. Schématisation des transformations

Nous avons rappelé au cours du chapitre 2, paragraphe 3.1 figure 2.2 que les fonctions de Laguerre discrètes pouvaient être obtenues à l'aide d'une batterie de filtres. En effectuant une sommation pondérée, par les coefficients $f_n(a,b)$, des sorties de ces filtres, nous obtenons une synthèse de la fonction $f[k]$, correspondant aussi à l'inversion d'une transformée. Une illustration en est donné figure 3.1 :

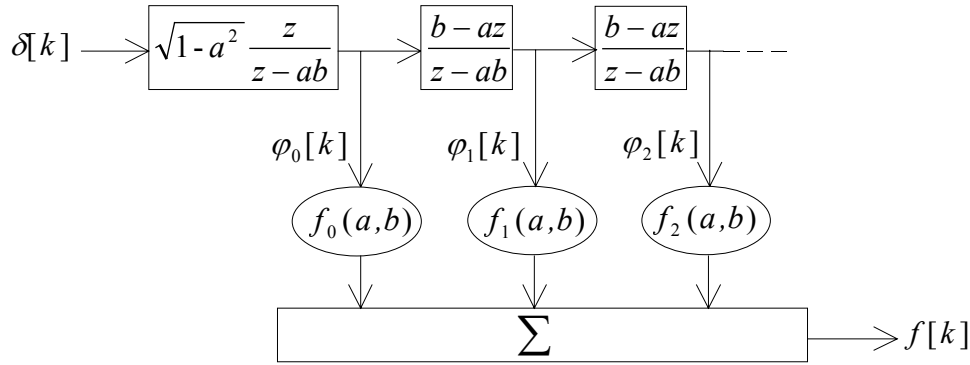


Figure 3.1

Similairement il est possible de décrire le processus de la transformée de Laguerre par le schéma suivant (figure 3.2 a et b) où l'indice n joue le rôle de variable temporelle :

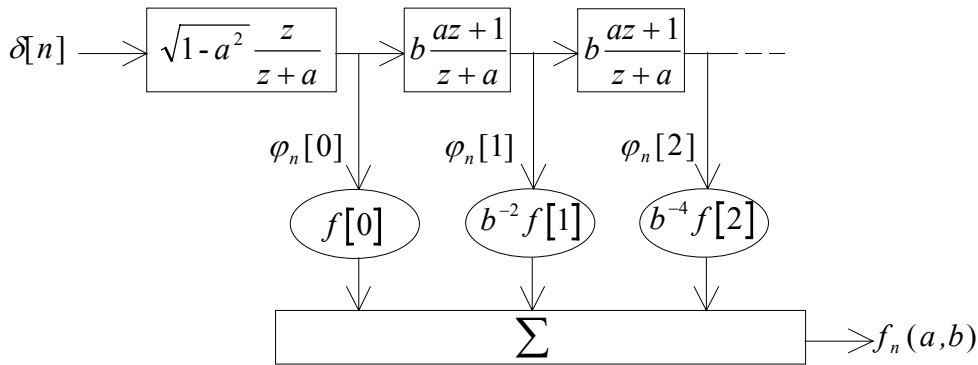


Figure 3.2.a

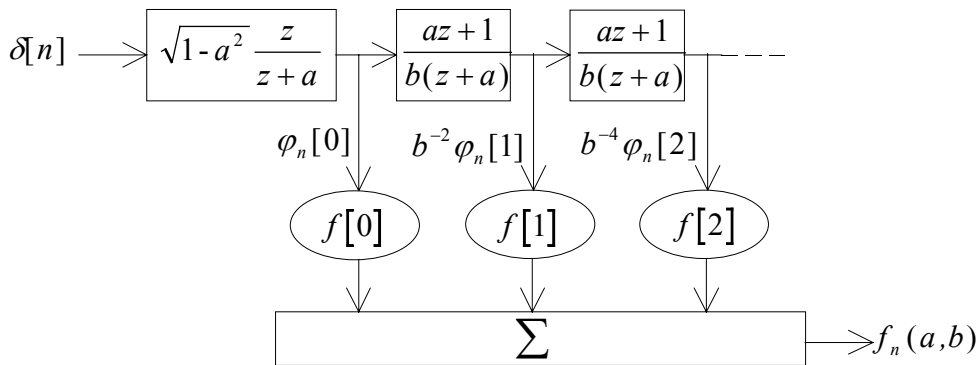


Figure 3.2.b

Sur la figure 3.2.a, les fonctions de Laguerre discrètes sont obtenues à l'aide de la batterie de filtres décrite chapitre 2, paragraphe 3.2, figure 2.4. Les sorties sont alors multipliées par les échantillons préalablement amortis. Sur la figure 3.2.a, nous avons intégré cet amortissement à la batterie de filtres.

5.3. Théorème de la valeur initiale

Le premier échantillon d'une fonction $f[k]$, de transformée de Laguerre $f_n(a,b)$ peut être exprimé en remplaçant dans la définition de la transformée inverse (3.43), la fonction de Laguerre discrète d'indice $k=0$ par son expression analytique (2.09). Nous obtenons alors :

$$f[0] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a,b) \varphi_n[0, a, b] = \sqrt{1-a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n f_n(a,b) \quad (3.44)$$

5.4. Méthodes d'inversion de la transformée de Laguerre discrète

En général, outre le calcul numérique des échantillons à l'aide de la série d'inversion (3.43), lorsque les paramètres a et b sont donnés, le calcul de $f[k]$ à partir de sa transformée de Laguerre discrète $f_n(a,b)$ peut-être effectué par l'une des méthodes suivantes.

5.4.a. Utilisation des tables

On cherche à écrire $f_n(a,b)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de transformées figurant dans les tables. Soit par exemple :

$$f_n(a,b) = \lambda g_n(a,b) + \mu h_n(a,b)$$

les tables fournissent alors les fonctions $g[k]$ et $h[k]$, et :

$$f[k] = \lambda g[k] + \mu h[k]$$

5.4.b. Limite lorsque le paramètre a tend vers zéro.

Nous avons vu au chapitre précédent que dans le cas où le paramètre a tend vers zéro, les fonctions de Laguerre se ramènent à (2.16) : $\lim_{a \rightarrow 0} \varphi_n[k, a, b] = b^k \delta_{n,k}$

En substituant cette expression dans la série d'inversion (3.43), nous aboutissons à une propriété très intéressante de la transformée de Laguerre discrète lorsque le paramètre a tend vers zéro et en égalant b à 1 :

$$f[k] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,k} \lim_{a \rightarrow 0} f_n(a,1) = \lim_{a \rightarrow 0} f_{n=k}(a,1) \quad (3.45)$$

Cette propriété nous permet d'extraire l'expression analytique de la fonction originale $f[k]$, obligatoirement indépendante des paramètres a et b , à partir de

l'expression analytique de sa transformée de Laguerre discrète, lorsqu'elle est connue en fonction des paramètres a et b , simplement en déterminant la limite quand a tend vers zéro et en posant $b=1$ et $n=k$.

Exemple :

Considérons le spectre de Laguerre suivant (3.38):

$$f_n(a,b) = \sqrt{1-a^2} e^{\frac{\lambda a}{b}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-a)^{n-j} \frac{\left(\frac{\lambda}{b}(1-a^2)\right)^j}{j!}$$

Faisant tendre le paramètre a vers zéro après avoir posé $b=1$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_n(a,1) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\lambda^j}{j!} \delta_{n,j} = \frac{\lambda^n}{n!}$$

En effectuant le changement d'indice $n=k$, nous retrouvons immédiatement l'expression de la transformée inverse de Laguerre $f[k]$ du spectre défini par $f_n(a,b)$:

$$f[k] = \frac{\lambda^k}{k!}$$

5.4.c. Passage par le domaine de la transformée en z

Nous avons pu constater au paragraphe 2.3 de ce chapitre, et d'après la relation (3.09) qu'il était possible d'extraire la transformée en z d'une fonction indépendante des paramètres a et b , uniquement à partir du premier terme du spectre de Laguerre, pourvu que celui-ci soit connu en fonction de a .

$$F(z) = \left\{ \frac{f_0(a,1)}{\sqrt{1-a^2}} \right\}_{a=z^{-1}}$$

L'inversion de la transformée de Laguerre se résume alors à une simple inversion d'une transformée en z.

Exemple :

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent. Le spectre de Laguerre est donné par l'expression suivante (3.38) :

$$f_n(a,b) = \sqrt{1-a^2} e^{\frac{\lambda a}{b}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-a)^{n-j} \frac{\left(\frac{\lambda}{b}(1-a^2)\right)^j}{j!}$$

Le premier terme de ce spectre est :

$$f_0(a, b) = \sqrt{1-a^2} e^{\frac{\lambda a}{b}}$$

Nous déduisons alors aisément la transformée $F(z)$ de la fonction $f[k]$:

$$F(z) = e^{\frac{\lambda}{z}}$$

L'inversion de cette transformée en z usuelle nous permet d'obtenir l'expression de la fonction recherchée :

$$f[k] = \frac{\lambda^k}{k!}$$

6. Propriétés du spectre de Laguerre

6.1. Changement de paramètres

Au cours de ce paragraphe, nous allons établir plusieurs relations permettant de déterminer le spectre de Laguerre d'une fonction $f[k]$ pour de nouveaux paramètres a' et b' , à partir de son spectre donné pour les paramètres a et b . L'avantage de ces relations est qu'elles évitent l'inversion préalable de la transformée de Laguerre discrète, autrement nécessaire pour effectuer un changement de paramètre.

6.1.1. Changement de paramètres a et b avec conservation du rapport a/b

Reprenons la définition initiale (3.01) :

$$f_n(a', b') = \sum_{k=0}^{\infty} b'^{-2k} \varphi_n[k, a', b'] f[k]$$

La relation (2.61) nous permet d'exprimer les fonctions génératrices avec de nouveaux paramètres, et conduit à l'expression :

$$f_n(a', b') = \sqrt{\frac{1-a'^2}{1-a^2}} \left(\frac{a^2-a'^2}{a'(1-a^2)} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{a(1-a'^2)}{a^2-a'^2} \right)^j \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a'}{abb'} \right)^k \varphi_j[k, a, b] f[k]$$

En imposant la contrainte $b'=a'b/a$, il est possible, d'exprimer le terme de sommation sur l'indice k comme la transformée de Laguerre discrète de la fonction $f[k]$ pour les paramètres a et b :

$$f_n(a', b') = \sqrt{\frac{1-a'^2}{1-a^2}} \left(\frac{a^2-a'^2}{a'(1-a^2)} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{a(1-a'^2)}{a^2-a'^2} \right)^j \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_j[k, a, b] f[k]$$

ce qui nous permet d'aboutir à la relation de changement de paramètres :

$$f_n(a', b') = \sqrt{\frac{1-a'^2}{1-a^2}} \left(\frac{a^2-a'^2}{a'(1-a^2)} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{a(1-a'^2)}{a^2-a'^2} \right)^j f_n(a, b) \quad (3.46)$$

avec la contrainte que nous pouvons réécrire : $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$

Cette relation est relativement restrictive puisqu'elle ne permet de choisir qu'un seul des nouveaux paramètres. Néanmoins elle a l'avantage de n'impliquer qu'une somme finie de termes, contrairement aux relations que nous démontrerons par la suite.

6.1.2. Changement du paramètre a avec conservation du paramètre b

Nous allons à présent mettre en évidence une relation permettant la modification du paramètre a d'une transformée de Laguerre discrète. Considérons tout d'abord une fonction $f[k]$ s'exprimant à l'aide de sa transformée de Laguerre :

$$f[k] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \varphi_{\lambda}[k, a, b]$$

Si nous déterminons la transformée de Laguerre de cette fonction pour un nouveau paramètre a' en conservant le paramètre $b'=b$ nous obtenons :

$$L_{a',b} \{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \varphi_{\lambda}[k, a, b] \varphi_n[k, a', b]$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$f_n(a', b) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_{\lambda}[k, a, b] \varphi_n[k, a', b]$$

Nous pouvons alors exploiter la relation (2.75) afin de réécrire le terme de sommation sur l'indice k . Nous obtenons alors la formule :

$$f_n(a', b) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \varphi_n[\lambda, \frac{a'-a}{1-aa'}, 1] \quad (3.47)$$

Remarquons tout d'abord que la relation (2.75), que nous avons exploitée pour aboutir à ce résultat, n'est autre que l'expression de la transformée de Laguerre discrète, vis à vis des paramètres a' et b , d'une fonction de Laguerre discrète de paramètres a et b :

$$L_{a',b} \{\varphi_{\lambda}[k, a, b]\} = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \varphi_{\lambda}[k, a, b] \varphi_n[k, a', b] = \varphi_n[\lambda, \frac{a'-a}{1-aa'}, 1]$$

La relation (3.47) à laquelle nous avons abouti est d'une grande simplicité d'application malgré une sommation infinie. Elle donne la correspondance entre les spectres de Laguerre de paramètres a différents, le paramètre b demeurant inchangé.

6.1.3. Changement de paramètres avec conservation du pôle ab

Il est aussi possible de déterminer, à partir de l'expression (2.72), une relation entre deux spectres de Laguerre de paramètres a et b différents, mais conservant le produit ab . Reprenons tout d'abord l'expression de la transformée inverse de Laguerre :

$$f[k] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \varphi_{\lambda}[k, a, b]$$

La transformée de Laguerre de paramètres a' et b' de cette fonction peut alors s'écrire ainsi :

$$L_{a,b'}\{f[k]\} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \sum_{k=0}^{\infty} b'^{-2k} \varphi_{\lambda}[k, a, b] \varphi_{\lambda}[k, a', b']$$

Nous allons nous aider de la relation (2.72) pour exprimer la fonction de Laguerre discrète de paramètres a et b de cette expression à l'aide des fonctions de Laguerre de paramètres a' et b' en imposant la condition $a'b'=ab$. Nous obtenons aisément après inversion de l'ordre des sommations et emploi de la propriété d'orthogonalité :

$$f_n(a', b') = \sqrt{\frac{1-a^2}{1-a'^2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \left[\frac{a'^2 - a^2}{a(1-a'^2)} \right]^{\lambda} \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \left[\frac{a(1-a^2)}{a'^2 - a^2} \right]^j \delta_{n,j}$$

$$\text{avec } a'b'=ab$$

que nous réécrivons :

$$f_n(a', b') = \sqrt{\frac{1-a^2}{1-a'^2}} \left[\frac{a(1-a^2)}{a'^2 - a^2} \right]^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(a, b) \binom{\lambda}{n} \left[\frac{a'^2 - a^2}{a(1-a'^2)} \right]^{\lambda} \quad (3.48)$$

$$\text{avec } a'b'=ab$$

La combinaison de ces trois formules (3.46), (3.47) et (3.48) doit nous permettre de déterminer la transformée de Laguerre pour n'importe quels paramètres, à partir d'un spectre donné de la fonction considérée.

6.2. Dérivée par rapport au paramètre a

Nous allons montrer que la dérivée par rapport au paramètre a des coefficients du spectre de Laguerre s'exprime en fonction d'autres coefficients de ce même spectre. En effet, d'après la définition de la transformée de Laguerre discrète, la dérivée peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial a} f_n(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k] \frac{\partial}{\partial a} (\varphi_n[k, a, b])$$

Or, l'expression de la dérivée des fonctions de Laguerre discrètes (2.61) nous conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial a} f_n(a, b) = \frac{1}{1-a^2} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k] \left((n+1) \varphi_{n+1}[k, a, b] - n \varphi_{n-1}[k, a, b] \right)$$

que nous pouvons réécrire, d'après la définition de la transformée de Laguerre discrète :

$$\frac{\partial}{\partial a} f_n(a, b) = \frac{1}{1-a^2} [(n+1)f_{n+1}(a, b) - nf_{n-1}(a, b)] \quad (3.49)$$

Nous pouvons par ailleurs exploiter la seconde expression de la dérivée des fonctions de Laguerre discrètes (2.62) pour écrire :

$$\frac{\partial}{\partial a} f_n(a, b) = \frac{1}{1-a^2} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k] \left(bk\varphi_n[k-1, a, b] - \frac{k+1}{b} \varphi_n[k+1, a, b] \right)$$

en effectuant les changements de variable adéquats, nous pouvons l'exprimer :

$$\frac{\partial}{\partial a} f_n(a, b) = \frac{1}{1-a^2} \left[\frac{1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} (k+1) f[k+1] \varphi_n[k, a, b] - b \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} k f[k-1] \varphi_n[k, a, b] \right]$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial}{\partial a} f_n(a, b) = \frac{1}{1-a^2} \left[\frac{k+1}{b} f[k+1] - bk f[k-1] \right] \quad (3.50)$$

Nous allons à présent exprimer la dérivée par rapport au paramètre a de la somme des carrés des n premiers coefficients du spectre de Laguerre en fonction des coefficients n et $n+1$. Cette dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \sum_{j=0}^n f_j^2(a, b) \right\} = 2 \sum_{j=0}^n f_j(a, b) \frac{\partial}{\partial a} \{ f_j(a, b) \}$$

D'après l'expression de la dérivée des coefficients du spectre (3.49), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \sum_{j=0}^n f_j^2(a, b) \right\} = \frac{2}{1-a^2} \sum_{j=0}^n f_j(a, b) [(j+1)f_{j+1}(a, b) - jf_{j-1}(a, b)]$$

En fait les éléments de cette somme se simplifient singulièrement, pour ne laisser que :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \sum_{j=0}^n f_j^2(a, b) \right\} = \frac{2(n+1)}{1-a^2} f_n(a, b) f_{n+1}(a, b) \quad (3.51)$$

6.3. Egalité de type Parseval

D'après la propriété d'orthogonalité des fonctions de Laguerre discrètes (2.19), la somme suivante peut se calculer en fonction du spectre de Laguerre des fonctions considérées :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f[k]g[k] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a, b)g_n(a, b) \quad (3.52)$$

Dans le cas particulier où $g[k]=f[k]$ nous obtenons une égalité de type Parseval :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f^2[k] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(a, b) \quad (3.53)$$

6.4. Calcul de $S = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} f[k]$

Soit la somme S définie par la relation :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} f[k]$$

La décomposition de la fonction $f[k]$ sur la base des fonctions de Laguerre discrète permet de réécrire cette somme S sous la forme :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a, b) \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} \varphi_n[k]$$

La propriété des fonctions de Laguerre discrètes démontrée en (2.54) nous donne :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} \varphi_n[k] = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

Ce qui nous conduit à une relation intéressante entre la somme pondérée des échantillons d'une fonction et la somme des éléments de son spectre de Laguerre :

$$\sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} f[k] = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a, b) \quad (3.54)$$

Chapitre 4

Etude de l'approximation lorsque la série d'inversion est limitée

1. Introduction

En règle générale, lorsque l'on envisage le calcul numérique de $f[k]$ à partir des valeurs numériques de $f_n(a,b)$ on doit, pour des raisons pratiques évidentes, limiter la série d'inversion (3.43) à un nombre fini de N termes. Nous désignerons par $\tilde{f}[k]$ l'approximation ainsi définie pour $f[k]$, à savoir :

$$\tilde{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(a,b) \varphi_n[k,a,b] \quad (4.01)$$

On montre, en s'appuyant sur les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Laguerre discrètes que $\tilde{f}[k]$ ainsi définie est la combinaison linéaire des N premières fonctions de Laguerre discrètes qui minimise la somme :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \{f[k] - \tilde{f}[k]\}^2$$

Il est intéressant de noter que les coefficients $f_n(a,b)$ qui interviennent dans la relation (4.01) ne dépendent pas de N . Par conséquent, si l'on désire améliorer l'approximation, en conservant un plus grand nombre N' de termes, il suffit de calculer $f_N(a,b), f_{N+1}(a,b), \dots, f_{N'}(a,b)$ soit $(N'-N)$ nouveaux coefficients puisque les N premiers coefficients restent ceux déjà calculés.

2. Détermination des $f_n(a,b)$, et de $\tilde{f}[k]$

Nous allons, au cours de ce sous-chapitre, présenter des méthodes permettant un calcul plus rapide des coefficients $f_n(a,b)$ et des échantillons $\tilde{f}[k]$, que par l'usage directe des définitions des transformées de Laguerre directe et inverse.

2.1. Méthode de calcul des $f_n(a,b)$

Nous allons ici rappeler la méthode de Kekre employée pour la détermination des coefficients $f_n(a,b)$ du spectre de Laguerre d'une fonction $f[k]$ représentée à l'aide de K échantillons. Nous retrouvons cette méthode dans [Roe 73], [Mar 77], et [Mas 90a].

Considérons tout d'abord la sommation suivante :

$$\gamma_n[k] \triangleq \sum_{j=0}^k b^{-2j} \varphi_n[j] x[k-j] = x[k] * (b^{-2k} \varphi_n[k])$$

avec :

$$b^{-2k} \varphi_n[k] \rightarrow \sqrt{1-a^2} \left(\frac{bz}{bz-a} \right) \left(\frac{1-abz}{bz-a} \right)^n$$

Les $\gamma_n[k]$ peuvent alors être obtenus à l'aide d'une batterie de filtres de Laguerre, similaire à celle décrite au chapitre 2, paragraphe 3.1 (figure 2.2), où l'entrée est attaquée par le signal $x[k]$, et dont les fonctions de transfert sont :

filtre de tête :

$$T_0(z) = \sqrt{1-a^2} \frac{bz}{bz-a}$$

filtres suivants :

$$T(z) = \frac{1-abz}{bz-a}$$

Supposons $f[k]$ représentée par ses K premiers échantillons et supposée négligeable pour $k \geq K$. Posons :

$$x[k] \triangleq f[K-1-k]$$

Cela signifie que le signal $x[k]$ est obtenu par retournement du vecteur des K échantillons du signal $f[k]$. Si nous substituons cette expression dans la définition des $\gamma_n[k]$, nous obtenons :

$$\gamma_n[k] = \sum_{j=0}^k b^{-2j} \varphi_n[j] f[K-1-k+j]$$

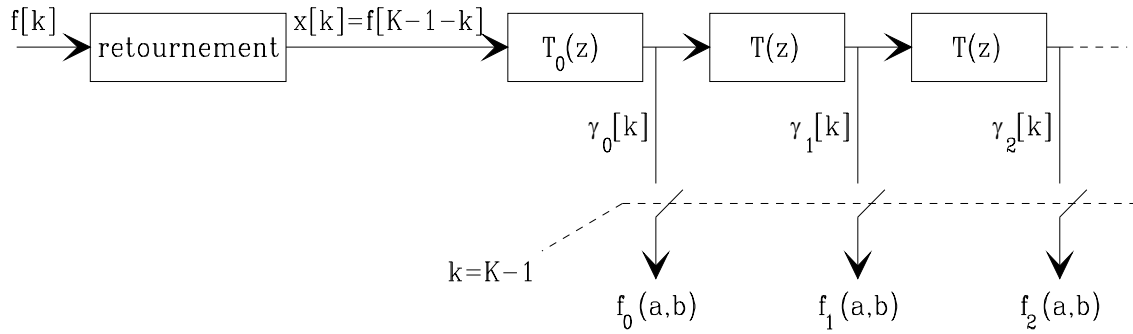
L'observation des $\gamma_n[k]$, à l'instant $k=K-1$, nous donne :

$$\gamma_n[K-1] = \sum_{j=0}^{K-1} b^{-2j} \varphi_n[j] f[j]$$

qui sont les éléments $f_n(a,b)$ du spectre de Laguerre de la fonction $f[k]$ définies par K échantillons :

$$f_n(a,b) = \gamma_n[K-1]$$

Les coefficients $f_n(a,b)$ du spectre de Laguerre d'une fonction définie par K échantillons pourront donc être calculés à l'aide d'une batterie de filtres de Laguerre, attaquée par la fonction $f[k]$ retournée. Au temps $k=K-1$, ces coefficients apparaîtront simultanément à la sortie de cette batterie de filtres, comme nous l'avons schématisé figure 4.1.



où : $T_0(z) = \sqrt{1-a^2} \frac{bz}{bz-a}$ et $T(z) = \frac{1-abz}{bz-a}$

Figure 4.1

Cette batterie de filtres nous permet de déduire la relation de récurrence intéressante suivante pour le calcul du spectre de Laguerre d'une fonction $f[k]$ donnée :

$$\begin{cases} \gamma_0[k] = \sqrt{1-a^2} f[K-1-k] + \frac{a}{b} \gamma_0[k-1] \\ \gamma_n[k] = \frac{1}{b} \gamma_{n-1}[k-1] - a \gamma_{n-1}[k] + \frac{a}{b} \gamma_n[k-1] & n > 0 \\ f_0(a,b) = \gamma_0[K-1] \\ f_n(a,b) = \gamma_n[K-1] \end{cases}$$

2.2. Méthode de calcul des $\tilde{f}[k]$

Une méthode similaire peut être développée afin de calculer les échantillons de la fonction approchée $\tilde{f}[k]$ à partir des N premiers termes de la représentation spectrale de Laguerre de la fonction $f[k]$. Cette méthode, pratique pour une inversion plus rapide de la transformée de Laguerre discrète, n'a semble-t-il pas été exposée dans la littérature.

Posons tout d'abord :

$$\gamma'_k[n] \hat{=} \sum_{j=0}^n \varphi_j[k] x'[n-j] = x'[n] * \varphi_n[k]$$

où l'indice n jouera ici un rôle de variable temporelle pour les besoins du calcul. Les $\gamma'_k[n]$ peuvent cette fois être obtenus à l'aide de la batterie de filtres de Laguerre, décrite au chapitre 2, paragraphe 3.2 (figure 2.4), et où l'entrée serait attaquée par la fonction $x'[k]$. Posons à présent :

$$x'[n] \hat{=} f_{N-1-n}(a,b)$$

Cela signifie que le vecteur des $x'[n]$ est obtenu par retournement du vecteur des N premiers éléments du spectre de Laguerre $f_n(a,b)$. Cela nous conduit à :

$$\gamma'_k[n] = \sum_{j=0}^n \varphi_j[k] f_{N-1-n+j}(a, b)$$

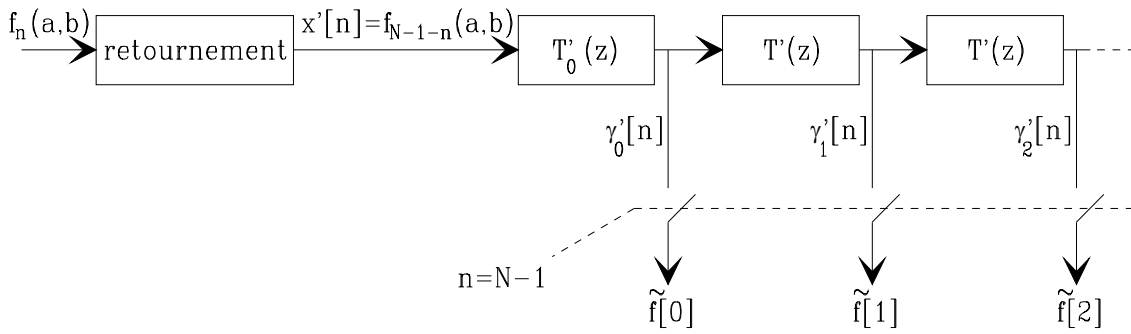
Et, l'observation des $\gamma'_k[n]$, à l'instant $n=N-1$, nous donne :

$$\gamma'_k[N-1] = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j[k] f_j(a, b)$$

qui sont les échantillons $\tilde{f}[k]$ de l'approximation de la fonction $f[k]$ à l'aide des N premiers éléments $f_n(a, b)$ de son spectre de Laguerre :

$$\tilde{f}[k] = \gamma'_k[N-1]$$

Ces échantillons pourront alors être obtenus à l'aide de la batterie de filtres de Laguerre décrite chapitre 2, paragraphe 3.2 (figure 2.4), attaquée par le spectre $f_n(a, b)$ retourné. Si nous considérons n comme une variable temporelle, les échantillons $\tilde{f}[k]$ sont simultanément disponibles en sortie des filtres à l'instant $N-1$ (figure 4.2).



où : $T'_0(z) = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z+a}$ et $T'(z) = b \frac{az+1}{z+a}$

Figure 4.2

Nous pouvons alors déduire une méthode de calcul récurrent des $\tilde{f}[k]$:

$$\begin{cases} \gamma'_0[n] = \sqrt{1-a^2} f_{N-1-n}(a, b) - a\gamma'_0[n-1] \\ \gamma'_k[n] = ab\gamma'_{k-1}[n] + b\gamma'_{k-1}[n-1] - a\gamma'_k[n-1] & k > 0 \\ \tilde{f}[0] = \gamma'_0[N-1] \\ \tilde{f}[k] = \gamma'_k[N-1] \end{cases}$$

3. Estimation de l'erreur $E[k] = |f[k] - \tilde{f}[k]|$

Proposition :

- Soit $f_{N_0}(a, b)$ le dernier terme non nul du spectre de Laguerre discret $\{f_0(a, b), f_1(a, b), \dots, f_{N-1}(a, b)\}$ de $\tilde{f}[k]$;

Chapitre 4 Etude de l'approximation lorsque la série d'inversion est limitée

- Soient $f_{N_1}(a,b), f_{N_2}(a,b), f_{N_3}(a,b), \dots$ ($N_1 < N_2 < N_3 < \dots$) les termes non nuls du spectre $\{f_N(a,b), f_{N+1}(a,b), f_{N+2}(a,b), \dots\}$ de $(f[k] - \tilde{f}[k])$;

Alors, si $\forall m \geq 0$

$$\frac{|f_{N_{m+1}}(a,b)|}{|f_{N_m}(a,b)|} \leq \frac{1}{q} \text{ avec } q > 1$$

une borne supérieure de l'erreur $E[k]$ est donnée par :

$$E[k] \leq \sqrt{1-a^2} \frac{|f_{N_0}(a,b)|}{q-1} b^k \quad (4.02)$$

En d'autres termes, l'erreur $E[k]$ sera inférieure à Δf ($\Delta f > 0$) si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$k \ln b \leq \ln \left[\frac{(q-1)\Delta f}{\sqrt{1-a^2}|f_{N_0}(a,b)|} \right] \quad (4.03)$$

Démonstration :

On a manifestement

$$E[k] = \left| \sum_{j=1}^{\infty} f_{N_j}(a,b) \varphi_{N_j}[k, a, b] \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f_{N_j}(a,b)| |\varphi_{N_j}[k, a, b]|$$

Et d'après la majoration (2.82) que nous avons donnée pour les fonctions de Laguerre discrète, nous obtenons :

$$E[k] \leq \sqrt{1-a^2} b^k \sum_{j=1}^{\infty} |f_{N_j}(a,b)|$$

or par hypothèse

$$|f_{N_j}(a,b)| \leq \left(\frac{1}{q}\right)^j |f_{N_0}(a,b)|$$

d'où

$$E[k] \leq \sqrt{1-a^2} b^k |f_{N_0}(a,b)| \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^j$$

Comme $q < 1$ par hypothèse, la série géométrique est convergente, ce qui permet d'établir la relation (4.02). L'erreur $E[k]$ sera inférieure à Δf si :

$$b^k \leq \frac{(q-1)\Delta f}{\sqrt{1-a^2} |f_{N_0}(a,b)|}$$

relation équivalente à (4.03).

Notons dans le cas particulier $b=1$:

$$E[k] \leq \sqrt{1-a^2} \frac{|f_{N_0}(a,b)|}{q-1} \forall k \geq 0$$

Exemple :

Soit la fonction suivante et sa transformée de Laguerre discrète déterminée pour les valeurs de paramètres $a=3/5$ et $b=1$ à l'aide des correspondances (3.11) et (3.02) :

$$f[k] = \left(\frac{3}{2}\right)^k \quad \text{---} f_n\left(\frac{3}{5}; 1\right) = \frac{12}{9^{n+1}}$$

Nous avons donc $q=9$, et la relation (4.03) sera vérifiée $\forall k$ si :

$$\left| f_{N-1}\left(\frac{3}{5}, 1\right) \right| \leq 10\Delta f$$

c'est-à-dire si :

$$\frac{1}{9^N} \leq \frac{5}{6} \Delta f$$

On en déduit que pour représenter la fonction $f[k] = (3/2)^k$ avec $E[k] < \Delta f = 10^{-3}$, il suffit de conserver les $N=4$ premiers termes de la relation (3.43) ; si l'on désire $E[k] < 10^{-6}$ il suffit de conserver $N=7$ termes.

4. Erreur quadratique

4.1 Définition

Nous allons introduire ici l'erreur quadratique relative Q_N qui rendra compte de manière objective de la qualité de l'approximation réalisée par la relation (4.01) précédente :

$$Q_N = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \{f[k] - \tilde{f}[k]\}^2}{\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f^2[k]} \quad (4.04)$$

Chapitre 4 Etude de l'approximation lorsque la série d'inversion est limitée

Compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Laguerre discrètes cette définition peut aussi s'écrire :

$$Q_N = \frac{\sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(a,b)}{\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(a,b)} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(a,b)}{\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(a,b)} \quad (4.05)$$

ou encore :

$$Q_N = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(a,b)}{\sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f^2[k]}$$

avec, par conséquent la double inégalité vérifiée dans tous les cas :

$$0 \leq Q_N \leq 1$$

Cette erreur quadratique est dépendante du paramètre a . Nous donnons sur les deux graphes qui suivent, en échelles semi-logarithmiques, des exemples de variations de l'erreur quadratique Q_N , en fonction de ce paramètre a (le paramètre b a été choisi égal à 1), pour N variant de 1 à 10. Les deux fonctions, servant d'exemples, sont tirées de la thèse de Masnadi-Shirazi [Mas 90a].

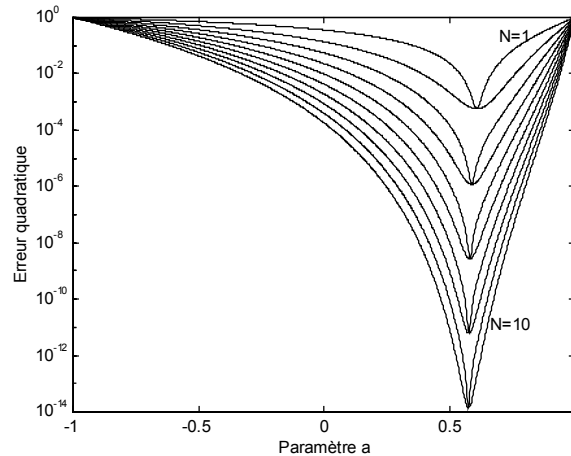


Figure 4.3 : $f[k]=0,6^k+0,3(0,5)^k+0,5(0,4)^k+0,7^k$ [Mas 90a p49]

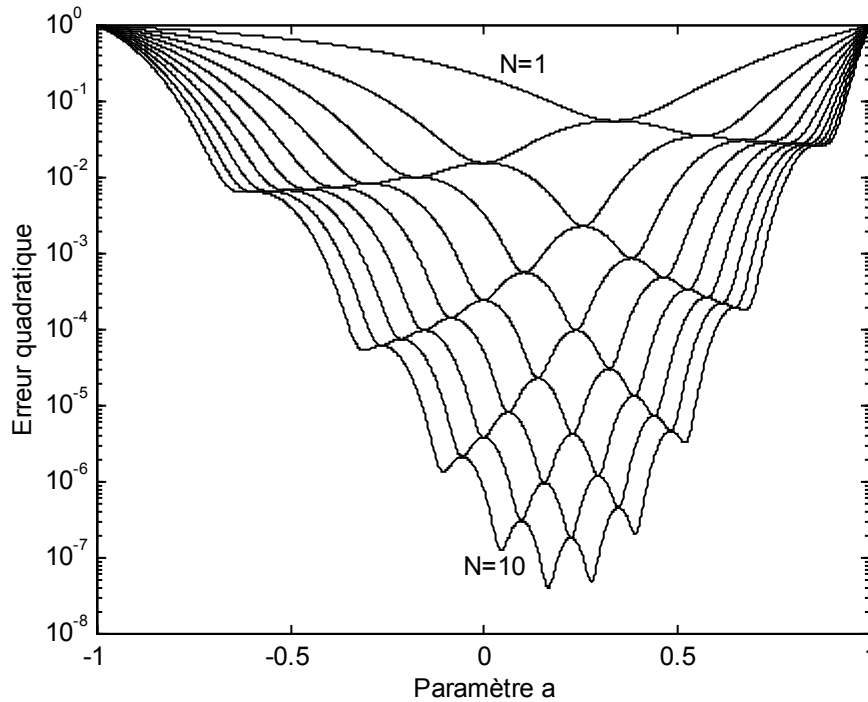


Figure 4.4 : $f[k]=(0,5-j0,2887)(0,25+j0,4330)^k+(0,5+j0,2887)(0,25-j0,4330)^k$ [Mas 90a p59]

Nous pouvons remarquer, sur ces deux exemples assez caractéristiques de l'allure des variations de l'erreur quadratique en fonction du paramètre a , qu'un extremum local de $Q_N(a)$, pour N donné, correspond aussi à un extremum local de $Q_{N-1}(a)$ ou de $Q_{N+1}(a)$. Nous justifierons par la suite cette particularité de l'erreur quadratique.

Nous allons maintenant présenter deux méthodes de choix du paramètre a permettant de réduire l'erreur quadratique. La première, optimale, mais lourde en calcul, a été exposée par Masnadi-Shirazi [Mas 90a], [Mas 90b], [Mas 91] et consiste à rechercher la valeur du paramètre a minimisant l'erreur quadratique. La seconde, que nous proposons, est basée sur la minimisation d'une borne supérieure à cette erreur quadratique.

4.2. Minimalisation de l'erreur quadratique par la méthode de Masnadi-Shirazi

Nous allons à présent exposer la méthode permettant de déterminer la valeur optimale du paramètre a qui minimise l'erreur quadratique d'approximation Q_N . Cette méthode a été exposée dans divers ouvrages et publications [Mas 90a], [Mas 90b], [Mas 91]. Minimaliser l'erreur quadratique définie en (4.04) revient en fait à minimaliser l'expression suivante :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} \{f[k] - \tilde{f}[k]\}^2$$

qui peut se réécrire :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} b^{-2k} f^2[k] - \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(a, b)$$

En annulant la dérivée par rapport à a de cette fonction, nous obtenons l'équation à résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{n=0}^{N-1} f_n^2(a, b) = 0$$

La propriété (3.51) établie au chapitre précédent nous permet d'aboutir, d'une manière plus directe que celle exposée par Masnadi-Shirazi, à la relation équivalente suivante :

$$\frac{2N}{1-a^2} f_{N-1}(a, b) f_N(a, b) = 0$$

Les extremums de l'erreur quadratique $Q_N(a)$ appartiennent donc à l'ensemble des solutions de :

$$f_{N-1}(a, b) = 0 \quad f_N(a, b) = 0 \quad (4.06)$$

Ces résultats justifient bien les remarques que nous avons faites précédemment sur les extremums locaux des courbes d'erreurs quadratiques. En effet, lorsque nous avons $f_{N-1}(a, b) = 0$, cela indique un extremum local de $Q_N(a)$ mais aussi de $Q_{N-1}(a)$ et lorsque $f_N(a, b) = 0$, cela implique un extremum local de $Q_N(a)$ et aussi de $Q_{N+1}(a)$

La résolution de ces équations (4.06) nécessite tout d'abord la connaissance de l'expression analytique du spectre de Laguerre de la fonction $f[k]$ considérée. Dans sa thèse de doctorat [Mas 90a] traite quatre types de fonctions originales $f[k]$:

* Type I : $f[k] = \sum_{j=1}^p \alpha_j p_j^k$

où les α_j et les p_j sont réels tels que $\alpha_j > 0$ et $0 < p_j < 1$

* Type II : $f[k] = \sum_{j=1}^p \alpha_j p_j^k$

où les α_j et les p_j sont réels tels que $|p_j| < 1$

* Type III : $f[k] = \sum_{j=1}^{\frac{p}{2}} (\alpha_j p_j^k + \alpha_j^* p_j^{*k})$

où les α_j et les p_j sont complexes tels que $|p_j| < 1$ et où α_j^* et p_j^* sont les complexes conjugués.

* Type IV : $f[k] = \sum_{j=0}^K \alpha_j \delta[k-j]$

où les α_j sont réels et $\delta[k]$ est la fonction impulsion unité.

Pour ces quatre types de fonctions les coefficients du spectre de Laguerre peuvent se mettre sous la forme de polynômes de la variable a . Le nombre de racines pour chacune des deux équations à résoudre est donné par les expressions :

* Pour les types I, II, et III :

$$R=p(n+1)-1$$

où p est le nombre de pôles et n prend les valeurs N et $N+1$.

* Pour le type IV :

$$R=n+K$$

où n prend les valeurs N et $N+1$, et K est le nombre d'échantillons de la fonction $f[k]$.

Ainsi par exemple la recherche du paramètre a optimal, pour une fonction définie du type IV, donnée pour 20 échantillons, et que l'on désire représenter à l'aide des 5 premiers coefficients du spectre de Laguerre, nécessite la résolution de deux équations algébriques de degrés 25 et 26. Nous constatons donc que le nombre de racines des équations peut être très grand, suivant l'ordre N de l'approximation, et le nombre de pôles ou d'échantillons de la fonction à approximer. Parmi les racines de ces équations, sont à exclure, d'une part les valeurs ne répondant pas aux contraintes du paramètre a et d'autre part les racines correspondant à des minimums ou à des maximums locaux de l'erreur quadratique. Un algorithme doit alors être mis en oeuvre pour déterminer laquelle parmi ces valeurs donne le minimum global de l'erreur quadratique. Cette méthode optimale est lourde en calcul et souvent difficile à employer en pratique.

4.3. Minimalisation de l'erreur quadratique

La nouvelle méthode que proposons consiste à déterminer la valeur à donner au paramètre a afin de minimaliser une borne supérieure de l'erreur quadratique définie à partir de connaissances restreintes sur la fonction à approximer. Une publication récente [Fu 93] proposait l'idée de minimaliser un index de performance J défini comme une somme linéairement pondérée des carrés des coefficients du spectre de Laguerre. Intuitivement cela correspondait à renforcer le taux de convergence du spectre. Nous mettrons ici en évidence qu'en fait cet index J , déduit empiriquement, correspond en fait à une borne supérieure de l'erreur quadratique d'approximation. Ainsi nous montrerons que la valeur du paramètre a minimisant cet index J est non seulement une bonne valeur pour minimiser l'erreur quadratique, mais qu'elle est aussi la meilleure valeur que l'on

peut obtenir à partir des seules connaissances que l'on possède sur le signal. Cette borne supérieure de l'erreur est obtenue à l'aide d'une des propriétés de récurrence des fonctions de Laguerre discrètes. Une telle forme de relation de récurrence est commune à de nombreuses bases de fonctions orthogonales discrètes ou continues, possédant un paramètre qui y joue un rôle similaire (fonctions de Legendre, Meixner, Charlier, Hermite, ...). En ce sens, nous développerons cette méthode dans le cas général. Nous avons présenté cette méthode dans un article soumis à publication dans la revue IEEE Transactions on Automatic Control.

Afin de présenter un traitement unifié de notre méthode valable pour les signaux continus et discrets, nous emploierons la notation du produit scalaire. Soit $\varpi(t)$ une fonction poids non négative de la variable réelle t définie sur un intervalle fini ou infini $[t_0, t_I]$. Etant données deux fonctions réelles convenables de la variable réelle t définies sur $[t_0, t_I]$, leur produit scalaire est défini suivant la nature du problème, par l'intégrale suivante :

$$\langle f, g \rangle \hat{=} \int_{t_0}^{t_I} \varpi(t) f(t) g(t) dt \quad (4.07)$$

ou par la somme discrète suivante :

$$\langle f, g \rangle \hat{=} \sum_{i=0}^I \varpi(t_i) f(t_i) g(t_i) \quad (4.08)$$

où t_i ($i=0, 1, \dots, I$) dénote les points discrets de $[t_0, t_I]$.

Comme tout système de fonctions orthogonales peut être aisément normalisé en divisant chaque fonction par sa norme, nous considérerons des fonctions orthonormées $\varphi_n(t, \alpha)$ satisfaisant :

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{n,m} \quad (4.09)$$

où α représente un paramètre à choisir de manière optimale. Ce paramètre peut être un facteur d'échelle comme dans le cas des fonctions continues d'Hermite $\mathcal{H}_n(\alpha t)$, ou bien un nombre réel comme dans le cas des fonctions discrètes de Charlier $\mathcal{C}_n(t, \alpha)$.

Nous supposons que $f(t)$ est une fonction réelle convenable qui peut être représentée par un développement infini (équivalent à (3.43) pour la base des fonctions de Laguerre discrètes) :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) \varphi_n(t, \alpha) \quad (4.10)$$

où, d'après la théorie classique du développement en fonctions orthonormales :

$$c_n(\alpha) = \langle f, \varphi_n \rangle \quad (4.11)$$

Chapitre 4 Etude de l'approximation lorsque la série d'inversion est limitée

Considérons la série pratique tronquée (donnée par (4.01) pour les fonctions de Laguerre discrètes) :

$$\tilde{f}(t) \hat{=} \sum_{n=0}^{N-1} c_n(\alpha) \varphi_n(t, \alpha) \quad (4.12)$$

qui, pour une valeur donnée de α , est la meilleure approximation à N termes de $f(t)$ au sens de la minimisation de l'erreur quadratique pondérée $Q_N(\alpha) \hat{=} \|\tilde{f} - f\|^2 / \|f\|^2$ (équivalente à (4.04) pour les fonctions de Laguerre discrètes). Compte tenu de $\|f\|^2 \hat{=} \langle f, f \rangle$ et en employant la propriété d'orthonormalité (4.09), il est d'établir :

$$Q_N(\alpha) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(\alpha) / \|f\|^2 \quad (4.13)$$

Comme nous allons le montrer par la suite, cette erreur quadratique peut être réduite par un choix judicieux du paramètre α .

Diverses fonctions à temps continu ou discret, liées aux polynômes orthogonaux classiques, sont largement employées pour la modélisation de signaux. Le point clé du développement de notre méthode résulte de l'observation qu'un grand nombre de ces fonctions orthonormales à temps continu ou discret (fonctions de Legendre, Meixner, Charlier, Hermite, ...) satisfont une équation de la forme :

$$\mathfrak{L}_\alpha \varphi_n(t, \alpha) = \lambda(n) \varphi_n(t, \alpha) \quad (4.14)$$

où \mathfrak{L}_α représente un opérateur linéaire défini par :

$$\mathfrak{L}_\alpha f(t) \hat{=} A(t, \alpha) \mathbf{D}^2 f(t) + B(t, \alpha) \mathbf{D}^1 f(t) + C(t, \alpha) \mathbf{D}^0 f(t) \quad (4.15)$$

et où les coefficients A , B , et C , qui sont caractéristiques de l'ensemble $\{\varphi_n(t, \alpha)\}$, dépendent du temps et du paramètre α mais sont indépendants de n . Dans le contexte des signaux à temps continu, $\mathbf{D}^i f(t)$ représente la $i^{\text{ème}}$ dérivée $d^i f/dt^i$, alors que dans le contexte des signaux à temps discret, $\mathbf{D}^i f(t) \hat{=} f(t+i-1)$. Par ailleurs, les termes $\lambda(n)$ sont indépendants du temps t et forment une séquence de nombres croissants telle que :

$$\lambda(0) = 0 < \lambda(1) < \lambda(2) < \lambda(3) < \dots$$

Avec cette équation en tête, appliquons l'opérateur linéaire \mathfrak{L}_α à l'équation (4.10). Nous obtenons alors :

$$\mathfrak{L}_\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) c_n(\alpha) \varphi_n(t, \alpha)$$

maintenant, en utilisant la propriété de linéarité du produit scalaire dont nous supposons l'existence, en tenant compte de (4.11), nous obtenons :

$$\langle f, \mathfrak{F}_\alpha f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) c_n^2(\alpha) \geq \lambda(N) \sum_{n=N}^{\infty} c_n^2(\alpha) \quad (4.16)$$

ce qui conduit à une borne supérieure de l'erreur quadratique $Q_N(\alpha)$ pour (4.13) :

$$Q_N(\alpha) \leq F(\alpha)/\lambda(N), \quad \text{pour } \lambda(N) \geq F(\alpha) \quad (4.17)$$

avec :

$$F(\alpha) \hat{=} \langle f, \mathfrak{F}_\alpha f \rangle / \|f\|^2 \quad (4.18)$$

Notons que la condition sur $\lambda(N)$ a été rajoutée à l'inéquation (4.17) car nous savons que l'erreur quadratique normalisée $Q_N(\alpha)$ ne peut être supérieure à l'unité.

Si nous appelons \mathbf{C}_F la classe des signaux correspondant à un $F(\alpha)$ donné, il est très simple de montrer qu'il existe au moins un signal $f \in \mathbf{C}_F$ pour lequel la borne supérieure de (4.17) est atteinte. Avec l'hypothèse $0 < F(\alpha) < \lambda(N)$, soit par exemple :

$$f(t) = M \left[\sqrt{1 - F(\alpha)/\lambda(N)} \varphi_0(t, \alpha) + \sqrt{F(\alpha)/\lambda(N)} \varphi_N(t, \alpha) \right]$$

où M est indépendant du temps. En utilisant (4.16) nous obtenons :

$$\langle f, \mathfrak{F}_\alpha f \rangle / \|f\|^2 = F(\alpha)$$

ce qui indique que f appartient à la classe \mathbf{C}_F . En utilisant l'équation (4.13), nous obtenons :

$$Q_N(\alpha) = F(\alpha)/\lambda(N)$$

cela démontre ainsi que la borne dans (4.17) est la meilleure qui puisse être atteinte lorsque les spécifications du signal f sont limitées à la connaissance de $F(\alpha)$. Ainsi, le meilleur choix du paramètre α est la valeur α_0 qui minimise $F(\alpha)$ et l'erreur maximale sur la classe des signaux de \mathbf{C}_F est alors $F(\alpha_0)/\lambda(N)$. Il est par ailleurs important de noter que le paramètre optimal α_0 est indépendant du nombre N de fonctions de base employées.

Remarque 1 : Bien souvent, nous avons $\lambda(n)=n$; ceci est le cas, par exemple, pour les fonctions de Laguerre, Hermite, Charlier et Meixner.

Remarque 2 : Du fait que $\lambda(n)=n$, l'index de performance J , proposé par Fu et Dumont [Fu 93], dans le cas particulier du développement sur la base des fonctions de Laguerre discrètes, est, de par les équations (4.16) et (4.18), relié à $F(\alpha)$ par la relation $J = \|f\|^2 F(\alpha)$. Ainsi, minimiser l'index J est équivalent à minimiser l'erreur maximale déterminée pour une classe de signaux avec un $F(\alpha)$ donné.

Remarque 3 : En considérant le cas particulier des fonctions de Laguerre à temps continu $\varphi_n(t, \alpha) = \sqrt{\alpha} L_n(\alpha t)$ et l'opérateur approprié \mathfrak{L}_α nous obtenons la méthode développée par Parks [Par 71]. Notons que cette méthode peut être quelque peu étendue en considérant les fonctions de Laguerre pondérées exponentiellement.

4.4. Particularisation de la méthode aux fonctions de Laguerre discrètes

Nous allons à présent développer la méthode précédente dans le cas particulier des fonctions de Laguerre discrètes. Elle s'apparente dans ce cas à la technique d'optimisation du paramètre a exposée par Y. Fu et G.A. Dumont dans [Fu 93]. Notre développement a montré que l'index J introduit par Y. Fu et G.A. Dumont était dans les faits une borne supérieure de l'erreur quadratique, et que ainsi minimiser cet index était équivalent à réduire l'erreur quadratique.

Soit le signal $f[k]$ dont les moments suivants sont connus :

$$\begin{cases} m_1 \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k [b^{-k} f[k]]^2 / \|f\|^2 \\ m_2 \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k [b^{-(k-1)} f[k-1]] [b^{-k} f[k]] / \|f\|^2 \end{cases} \quad (4.19)$$

où
$$\|f\|^2 \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} [b^{-k} f[k]]^2$$

La relation (2.23) rappelée au chapitre 2 peut s'écrire :

$$\mathfrak{L}_a \varphi_n[k, a, b] = n \varphi_n[k, a, b]$$

avec
$$\mathfrak{L}_a f[k] = -\frac{(k+1)a}{(1-a^2)b} f[k+1] + \frac{k(1+a^2)+a^2}{1-a^2} f[k] - \frac{kab}{1-a^2} f[k-1]$$

qui est bien de la forme de l'équation (4.15) avec $t=k$ (temps discret). En employant cette expression pour $\mathfrak{L}_a f$ et la définition (4.18) nous obtenons :

$$F(a) = \frac{(1+m_1)a^2 - 2m_2a + m_1}{1-a^2} \quad (4.20)$$

Une borne supérieure de l'erreur quadratique $Q_N(a)$ sera par conséquent donnée par :

$$\begin{cases} Q_N(a) \leq \frac{(1+m_1)a^2 - 2m_2a + m_1}{(1-a^2)N} \text{ si } N \geq \frac{(1+m_1)a^2 - 2m_2a + m_1}{(1-a^2)} \\ Q_N(a) \leq 1 \text{ si } N < \frac{(1+m_1)a^2 - 2m_2a + m_1}{(1-a^2)} \end{cases} \quad (4.21)$$

Chapitre 4 Etude de l'approximation lorsque la série d'inversion est limitée

Nous avons distingué deux cas suivant la valeur de N , puisque l'erreur quadratique normalisée est au plus égale à l'unité. Celle-ci pourra être aussi faible qu'on le désire en prenant N suffisamment grand.

Remarque :

La borne supérieure de l'erreur peut être atteinte. On vérifie par exemple que la fonction :

$$f[k] = C_0 \varphi_0[k, a, b] + C_N \varphi_N[k, a, b]$$

satisfait l'égalité :

$$Q_N(a) = \frac{(1 + m_1)a^2 - 2m_2a + m_1}{(1 - a^2)^N}$$

Minimiser $F(a)$ nous mène alors à résoudre une simple équation du second degré dont les racines a_1 et a_2 sont :

$$a_1 = \rho - \sqrt{\rho^2 - 1} \quad \text{et} \quad a_2 = \rho + \sqrt{\rho^2 - 1}$$

en ayant posé :

$$\rho \hat{=} (2m_1 + 1)/(2m_2)$$

En premier lieu, il nous faut montrer que les racines a_1 et a_2 sont toujours réelles, c'est à dire que $|\rho| \geq 1$. Pour ce faire, considérons l'inéquation suivante toujours vraie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k [b^{-k} f[k] + \xi b^{-(k-1)} f[k-1]]^2 \geq 0 \quad \xi = \pm 1$$

elle peut être développée et mise sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k [b^{-k} f[k]]^2 + \xi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) [b^{-(k-1)} f[k-1]]^2 \geq -2\xi \sum_{k=1}^{\infty} k [b^{-k} f[k]] [b^{-(k-1)} f[k-1]]$$

En divisant par $\|f\|^2$ toujours positif, cela nous permet de retrouver les différentes grandeurs définies précédemment m_1 et m_2 :

$$2m_1 + 1 \geq -2\xi m_2$$

Il est à remarquer que la grandeur m_1 , de par sa définition est toujours positive, et puisque ξ peut prendre une des deux valeurs +1 et -1 nous pouvons écrire :

$$2m_1 + 1 \geq 2|m_2|$$

c'est à dire :

$$\left| \frac{2m_1 + 1}{2m_2} \right| = |\rho| \geq 1$$

Ce qui nous prouve le caractère réel des racines a_1 et a_2 . De plus, une simple étude des variations de ces racines a_1 et a_2 par rapport à ρ nous montre que la valeur a_0 optimale du paramètre a devant répondre à la contrainte $|a| < 1$ sera donné par :

$$\begin{cases} a_0 = \rho - \sqrt{\rho^2 - 1} \operatorname{sign} m_2 > 0 \\ a_0 = \rho + \sqrt{\rho^2 - 1} \operatorname{sign} m_2 < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

sachant que le signe de ρ est du même signe que m_2 . Nous obtiendrons une valeur négative pour a_0 lorsque m_2 est négatif, c'est-à-dire pour des fonctions fortement oscillantes autour de zéro.

Le minimum de $F(a)$ peut alors être écrit :

$$F(a_0) = \frac{[(1 + m_1)\rho - m_2]a_0 - 0.5}{1 - \rho a_0}$$

En assurant $N \geq F(a_0)$, pour tout signal dont m_1 et m_2 sont donnés, l'erreur quadratique relative pondérée est $Q_N(a_0) \leq F(a_0)/N$. Cette borne supérieure à l'erreur est la plus basse qu'il est possible d'obtenir à l'aide des seules connaissances m_1 et m_2 sur le signal. Le choix du paramètre $a = a_0$, permet de minimiser la borne supérieure de l'erreur quadratique.

4.5. Exemples de résultats

Nous allons à présent illustrer la méthode précédemment exposée à l'aide des deux exemples donnés figures 4.3 et 4.4 (un troisième exemple est exposé dans [Tan 94]).

Exemple 1 : $f[k] = 0,6^k + 0,3(0,5)^k + 0,5(0,4)^k + 0,7^k$ [Mas 90a p49]

Pour cet exemple de fonction dont les variations de l'erreur quadratique sont représentées figure 4.3, Masnadi-Shirazi donne pour $N=2$ et $b=1$ la valeur optimale $a_0 = 0,6096$ pour laquelle l'erreur quadratique est $Q_N = 5,74036 \cdot 10^{-4}$. Cette valeur optimale du paramètre a a été obtenue par résolution de deux équations respectivement de degré 7 et 11 puis par recherche parmi les solutions de ces équations algébriques de la valeur minimisant l'erreur quadratique.

Pour notre part, après le calcul des moments m_1 et m_2 , nous obtenons la valeur $a_0 = 0,6095$ très proche de la valeur optimale. Cette valeur permet d'aboutir à une erreur quadratique $Q_N = 5,74037 \cdot 10^{-4}$.

Exemple 2 : $f[k]=(0,5-j0,2887)(0,25+j0,4330)^k+(0,5+j0,2887)(0,25-j0,4330)^k$ [Mas 90a p59]

Pour cet exemple de fonction dont les variations de l'erreur quadratique sont représentées figure 4.4, Masnadi-Shirazi obtient pour $N=4$ et $b=1$ la valeur optimale $a_0=0,1061$ pour laquelle l'erreur quadratique $Q_N=5,36086 \cdot 10^{-4}$. Cette valeur optimale du paramètre a a été obtenue par résolution de deux équations respectivement de degré 7 et 9 puis par recherche, parmi les solutions de ces équations algébriques, de la valeur minimisant l'erreur quadratique normalisée.

Pour notre part, après le calcul des moments m_1 et m_2 , nous obtenons la valeur $a_0=0,3066$. Cette valeur permet d'aboutir à une erreur quadratique $Q_N=1,87160 \cdot 10^{-3}$.

Nous pouvons constater que dans le cas où le paramètre a joue un rôle relativement critique dans la minimisation de l'erreur quadratique (exemple 1, voir figure 4.3) la valeur obtenue à l'aide de notre méthode est très proche de la valeur optimale. Dans le cas de l'exemple 2, la valeur obtenue par notre méthode est comparativement plus éloignée de la valeur optimale du paramètre a . Ceci est dû au fait que le minimum global de l'erreur quadratique est nettement moins marqué que dans l'exemple précédent (voir figure 4.4). Cela signifie simplement que le paramètre a joue ici un rôle nettement moins critique que dans l'exemple 1. Pour nous en convaincre, nous pouvons comparer les valeurs de l'erreur quadratique obtenues par ces deux méthodes ; celles-ci sont dans un rapport d'environ 2.

La méthode optimale de Masnadi-Shirazi est lourde en calcul, suivant les connaissances que l'on a, a priori, sur la fonction. En effet, pour les deux exemples que nous avons traités, la connaissance du nombre de pôles des fonctions lui permet de réduire notablement le degré des équations à résoudre. La seule connaissance des échantillons, comme c'est très souvent le cas en pratique, aurait impliqué la résolution d'équations algébriques de degré 22 et 23 pour l'exemple 1, et de degré 24 et 25 pour l'exemple 2, si cette connaissance avait été limitée aux 20 premiers échantillons des fonctions alors considérées de type IV. Ceci est à comparer avec notre méthode qui nous donne une valeur unique du paramètre a pour laquelle l'erreur quadratique normalisée obtenue est comparativement très satisfaisante. De plus, le degré, relativement élevé, des équations à résoudre par la méthode de Masnadi-Shirazi implique une dépense supplémentaire en calcul pour déterminer, parmi les solutions de ces équations, la valeur optimale du paramètre a . En outre cette recherche de la valeur optimale du paramètre a n'est valable que pour un nombre N donné de termes. La méthode est alors à remettre en oeuvre lorsque le nombre N de termes change (pour, par exemple, réduire encore l'erreur quadratique). La méthode proposée par Masnadi-Shirazi donne la valeur optimale du paramètre a minimisant l'erreur quadratique pour une valeur donnée du nombre N de termes de la représentation. Néanmoins, suivant les connaissances sur le signal à approcher, elle ne peut être mise en pratique que lorsque la dépense en calcul n'est pas un critère fondamental. Au contraire, notre méthode ne nécessite que des connaissances réduites sur le signal. Elle permet alors d'obtenir simplement et rapidement, une valeur du paramètre a qui conduit à une erreur quadratique réduite, indépendamment du nombre N de termes de l'approximation. Ces deux méthodes peuvent être employées de manière complémentaire suivant les problèmes à traiter.

Chapitre 5

Applications

De nombreuses applications des fonctions de Laguerre discrètes ont en effet été développées dans la littérature. Au cours de ce chapitre, nous ne ferons pas une présentation exhaustive des applications des fonctions de Laguerre discrètes mais présenterons une sélection d'entre elles.

1. Compression d'information

Pour diverses raisons, notamment en matière de stockage et de transmission de données, il est souvent nécessaire de disposer d'un moyen de compression des informations. Pour que cet outil soit efficace, il doit permettre d'une part de régénérer les informations initiales avec la plus grande précision, et d'autre part la compression et la décompression d'information doivent s'effectuer à travers des programmes de calculs simples et rapides. La transformation de Laguerre discrète possède de tels atouts. En effet les algorithmes de calculs des transformées et des transformées inverses sont d'une relativement grande simplicité (voir chapitre 4 paragraphe 2) et leurs résultats sont obtenus rapidement. Par ailleurs, l'approximation réalisée lors de la compression est fonction du nombre N de termes conservés du spectre de la fonction considérée. Pour des fonctions relativement amorties, un faible nombre N de termes peut néanmoins conduire à une très bonne approximation.

Exemple 1 : Exemple de Lucas.

Considérons la fonction de transfert définie par la transformée de Laplace suivante [Luc 85] :

$$G(s) = \frac{s^5 + 1014s^4 + 14069s^3 + 69140s^2 + 140100s + 100000}{s^6 + 222s^5 + 14541s^4 + 248420s^3 + 1454100s^2 + 2220000s + 1000000}$$

elle est caractérisée par trois pôles doubles bien séparés, à savoir -1, -10, et -100. L'inversion numérique d'une telle transformée, pour accéder par exemple à la réponse impulsionnelle du filtre défini par $G(s)$, exige un coût en calcul relativement élevé. Il peut être préférable de stocker les échantillons de cette réponse impulsionnelle sous

forme compressée, dans le domaine spectral de Laguerre discret. En effet, cette réponse impulsionnelle, échantillonnée à la période de $4 \cdot 10^{-3}$ s sur un intervalle de 0 à 0,2s, peut être représentée à l'aide seulement des 6 premiers termes de son spectre de Laguerre avec une erreur quadratique normalisée d'approximation $Q=4,552 \cdot 10^{-4}$. Ces 6 coefficients ont été calculés pour les valeurs de paramètres $b=1$, et la valeur de $a=0,7647$ étant obtenue par la méthode d'optimisation exposée au chapitre 4 paragraphe 4.4. Nous pouvons comparer sur le graphe suivant les échantillons de la réponse impulsionnelle de $G(s)$ et ceux de l'approximation réalisée après compression (Figure 5.1).

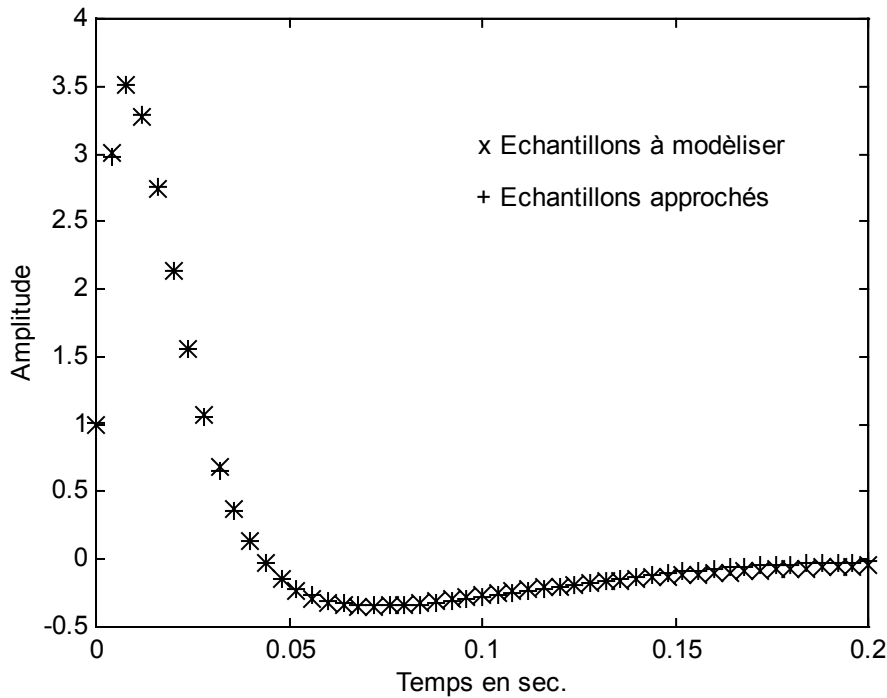


Figure 5.1 : Exemple de Lucas approché à l'aide de 6 fonctions

Exemple 2 : Fonction d'erreur complémentaire.

Considérons à présent la fonction d'erreur complémentaire définie pour t réel :

$$erfc(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-t^2} dt$$

La difficulté de calculer aisément la valeur de cette fonction pour des valeurs de t données, peut conduire à représenter celle-ci sur la base des fonctions de Laguerre discrètes. Nous avons échantillonné cette fonction sur l'intervalle de temps 0 à 3s, avec une période d'échantillonnage de 0,1s. Il a été alors possible de représenter cette fonction uniquement à l'aide des 4 premiers termes de son spectre de Laguerre, pour les valeurs de paramètres $b=1$, et la valeur de $a=0,8331$ étant obtenue par notre méthode d'optimisation (Chapitre 4, paragraphe 4.4). L'erreur quadratique normalisée de l'approximation obtenue est $Q=7,385 \cdot 10^{-5}$. Nous pouvons comparer les échantillons donnés par l'approximation due à la compression d'information avec ceux de la fonction initiale sur le graphe suivant (Figure 5.2).

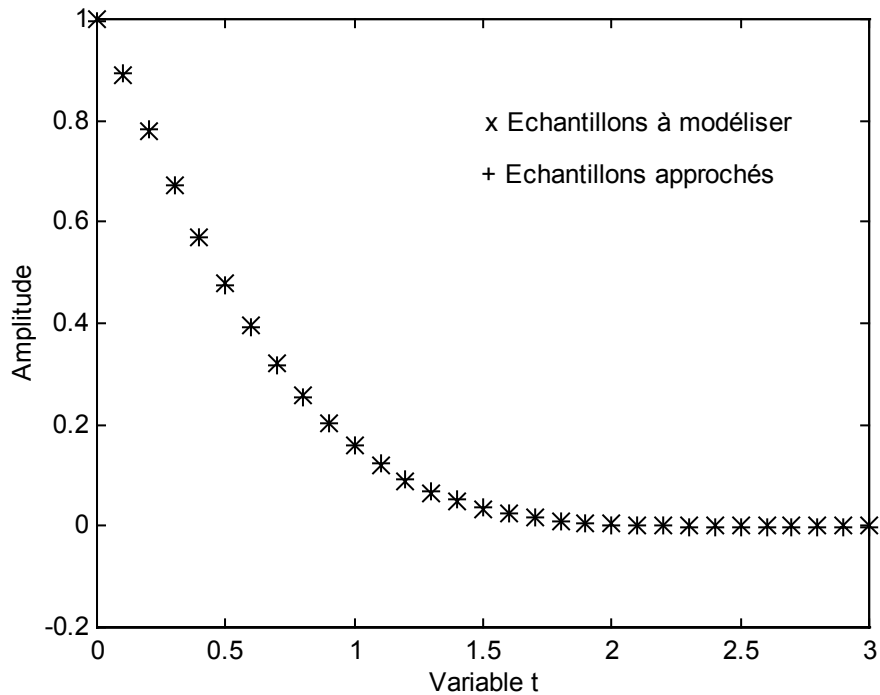


Figure 5.2 : Fonction d'erreur complémentaire approchée à l'aide de 4 fonctions de Laguerre discrètes

2. Interpolation

Nous avons vu au chapitre 3, paragraphe 16, qu'il est possible d'interpoler les fonctions de Laguerre discrètes et d'obtenir alors les valeurs de ces fonctions pour des valeurs de k non entières. Cette particularité nous permet alors aussi d'interpoler les fonctions qui sont représentées sur la base des fonctions de Laguerre discrètes.

Exemple 1 : Exemple de Lucas.

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe précédent. Nous avons effectué l'interpolation du modèle approché que nous avons obtenu. Cette interpolation a été réalisée avec un pas sur l'indice k de 0,01 correspondant à une période de $4 \cdot 10^{-5}$ s. Nous pouvons comparer sur le graphe suivant la réponse impulsionnelle du système de Lucas et son modèle approché après interpolation (Figure 5.3).

Exemple 2 : Fonction d'erreur complémentaire.

Nous avons effectué ici l'interpolation du modèle approché de la fonction d'erreur complémentaire obtenue à l'exemple 2 du paragraphe précédent. Cette interpolation a été effectuée pour un pas de 0,1 correspondant à une période de 0,01s. Cette interpolation représentée sur le graphe de la figure 5.4 permet d'obtenir alors des

valeurs approchées de la fonction d'erreur complémentaire pour des valeurs de t intermédiaires de celles ayant servies à la compression d'information.

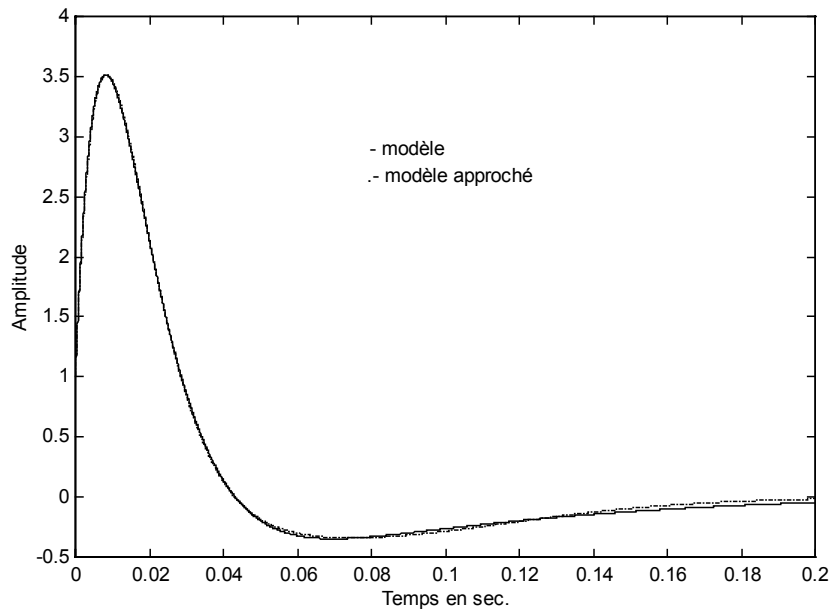


Figure 5.3 : Interpolation de la réponse impulsionnelle approchée du système de Lucas

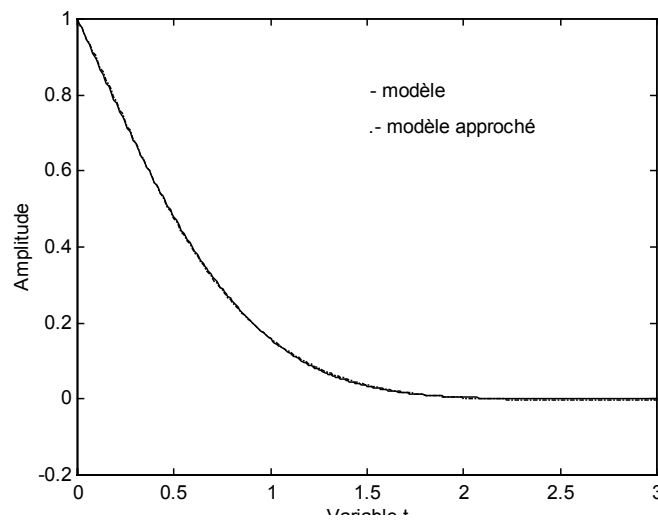


Figure 5.4 : Interpolation de l'approximation de la fonction d'erreur complémentaire.

3. Rôle du paramètre de pondération b

Le paramètre b intervenant dans la définition de la transformation de Laguerre discrète et dans celle de l'erreur quadratique, joue un rôle de pondération de celle-ci. Lorsqu'on lui affecte la valeur 1, la pondération des échantillons dans la définition de la transformation de Laguerre et de l'erreur quadratique est uniforme. Lorsque ce paramètre est affecté d'une valeur légèrement supérieure ou légèrement inférieure à l'unité, l'influence des premiers échantillons est respectivement plus grande ou plus faible dans le calcul de la transformée de Laguerre et dans l'erreur quadratique. Ce paramètre b permet alors de favoriser une meilleure approximation du début ou de la fin du signal considéré. Il est à noter qu'en contrepartie, à cette amélioration, le reste de l'approximation est généralement dégradé.

Exemple : Réponse indicielle d'une sonde physiologique

Nous allons ici approcher la réponse indicielle décalée de la valeur finale d'un système constitué d'une sonde et d'un dispositif d'enregistrement en continu. Ce système est utilisé au Laboratoire de Physiologie Animale de l'Université de Bretagne Occidentale. La réponse du système est représentée par 31 échantillons sur l'intervalle 0 à 0,6. Si nous ne conservons que les 5 premiers termes du spectre de Laguerre du signal considéré, déterminés pour les valeurs de paramètres $a=0,5$ et $b=1$, nous obtenons l'approximation représentée figure 5.5.

Il est possible d'améliorer l'approximation des premiers échantillons de la réponse indicielle, tout en conservant le même nombre de termes du spectre de Laguerre. En effet, en choisissant une valeur du paramètre b légèrement supérieure à l'unité, soit dans notre exemple $b=1,25$, nous allons favoriser une meilleure approximation des premiers échantillons. Nous pouvons observer cette nouvelle approximation sur le graphe de la figure 5.6.

Notons ici que les coefficients du spectre pour les nouvelles valeurs de paramètres, auraient pu être déterminés à partir des coefficients connus du spectre pour les paramètres $a=0,5$ et $b=1$, et ceci à l'aide des formules de changement des paramètres vues au chapitre 4, paragraphe 6.1.

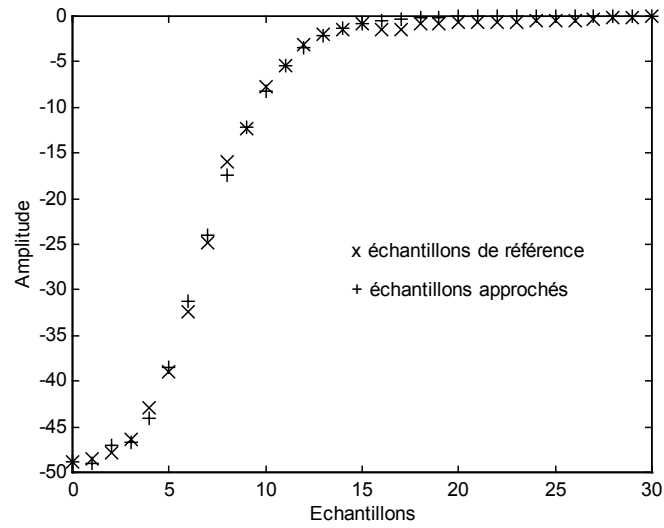


Figure 5.5 : Réponse indicielle approchée d'une sonde physiologique pour les valeurs de paramètres $a=0,5$ et $b=1$

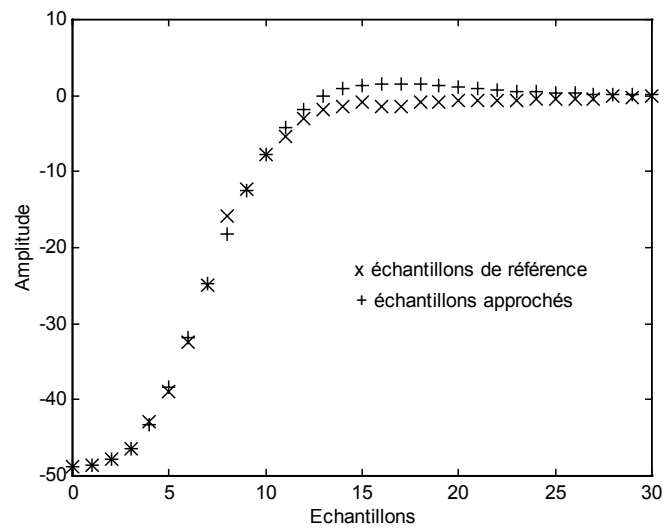


Figure 5.6 : Réponse indicielle approchée d'une sonde physiologique pour les valeurs de paramètres $a=0,5$ et $b=1,25$

4. Modélisation avec contraintes

Dans certains cas, il est parfois intéressant d'imposer des contraintes sur l'approximation d'un signal donné. Nous allons ici proposer une méthode similaire à celle développée au laboratoire [Cal 85], [Bou 89]. Cette méthode permet d'imposer, sur l'approximation à réaliser, des contraintes de type linéaire, c'est-à-dire passage par des points donnés, et différence d'amplitude entre deux échantillons donnés. Pour une meilleure compréhension de la technique, nous nous cantonnerons, dans un premier temps à expliquer celle-ci dans le cas où l'on désire imposer une erreur nulle en un point de l'approximation.

Nous voulons imposer à la fonction approchée de passer par des points donnés, soit :

$$\tilde{f}[k_i] = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n[k_i] = y_i \quad (5.01)$$

que nous pouvons réécrire sous forme matricielle :

$$L\vec{c} = \vec{y} \quad (5.02)$$

où L est une matrice d'ordre $l \times N$ dont les éléments $l_{i,n+1} = \varphi_n[k_i]$

et \vec{y} est un vecteur de dimension l

où l représente le nombre de contraintes et N le nombre de fonctions de base.

Le but est bien entendu de déterminer les nouveaux coefficients c_n de l'approximation à partir du vecteur \vec{f} des coefficients $f_n(a,b)$ obtenus sans imposer de contraintes. La méthode développée par J.C. Boulbry conduit à la relation suivante donnant les c_n :

$$\vec{c} = \vec{f} - L^+(L\vec{f} - \vec{y}) \quad (5.03)$$

où L^+ représente la pseudo-inverse de L ainsi définie $L^+ = L^T(LL^T)^{-1}$.

Cette relation (5.03) montre comment les coefficients sans contraintes doivent être corrigés pour satisfaire les équations de contraintes. Il convient de noter que la matrice LL^T est une matrice $l \times l$ et comme dans la plupart des cas pratiques, le nombre l des contraintes est petit, la seule inversion de matrice requise ne pose généralement pas de problème.

Nous pouvons étendre cette technique au cas où l'on désire imposer des contraintes sur la différence d'amplitude entre deux échantillons donnés. Dans ce cas, la relation de contraintes (5.01) devient :

$$\tilde{f}[k_i] - \tilde{f}[k_j] = \sum_{n=0}^{N-1} c_n (\varphi_n[k_i] - \varphi_n[k_j]) = y_i$$

L'expression des éléments de la matrice L devient alors

$$l_{i,n+1} = \varphi_n[k_i] - \varphi_n[k_j]$$

Et les équations matricielles (5.02) et (5.03) restent alors inchangées.

Exemple : fonctions d'Anderson

Nous allons ici chercher à modéliser les fonctions d'Anderson à l'aide d'un nombre réduit de fonctions de Laguerre discrètes, en imposant certaines contraintes sur les approximations. Ces fonctions d'Anderson forment une base de fonctions employée en analyse de signaux magnétiques très basses fréquences. Tous les signaux magnétiques créés par un dipôle sont des combinaisons linéaires des fonctions d'Anderson [Qui 89]. Elles s'expriment :

$$f_0(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{5/2}} f_1(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{5/2}} f_2(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^{5/2}}$$

Nous considérerons ces fonctions échantillonnées à la période $T=0,1$ sur l'intervalle 0 à 6. Nous conserverons uniquement les 5 premiers termes de leur spectre de Laguerre déterminés pour les valeurs de paramètres $a=0,8$ et $b=1$. Nous avons ici déterminé les coefficients du spectre des fonctions d'ordres 1 et 2, à partir du spectre de la fonction d'Anderson d'ordre 0, à l'aide de la propriété de multiplication par k (3.12), puisque nous avons les relations suivantes entre ces fonctions échantillonnées :

$$f_2[k] = kTf_1[k] \text{ et } f_1[k] = kTf_0[k]$$

En dehors de toutes contraintes sur les approximations, nous obtenons les modélisations représentées sur les figures 5.7, 5.8 et 5.9.

Nous allons à présent imposer les contraintes suivantes sur les valeurs à l'origine et sur les maximums des différentes approximations :

Pour $\tilde{f}_0[k]$:

$$\text{à } k=0 \quad \tilde{f}_0[0] = f_0[0] = 1$$

Pour $\tilde{f}_1[k]$:

$$\text{à } k=0 \quad \tilde{f}_1[0] = f_1[0] = 0$$

$$\text{à } k=5 \quad \tilde{f}_1[5] = f_1[5] = 0,5/(1,25)^{5/2}$$

Pour $\tilde{f}_2[k]$:

$$\text{à } k=0 \quad \tilde{f}_2[0] = f_2[0] = 0$$

$$\text{à } k=1 \quad \tilde{f}_2[1] = f_2[1] = 0,01/(1,01)^{5/2}$$

$$\text{à } k=8 \quad \tilde{f}_2[8] = f_2[8] = 0,64/(1,64)^{5/2}$$

Les résultats des approximations soumises aux contraintes peuvent être constatés sur les figures 5.10, 5.11 et 5.12.

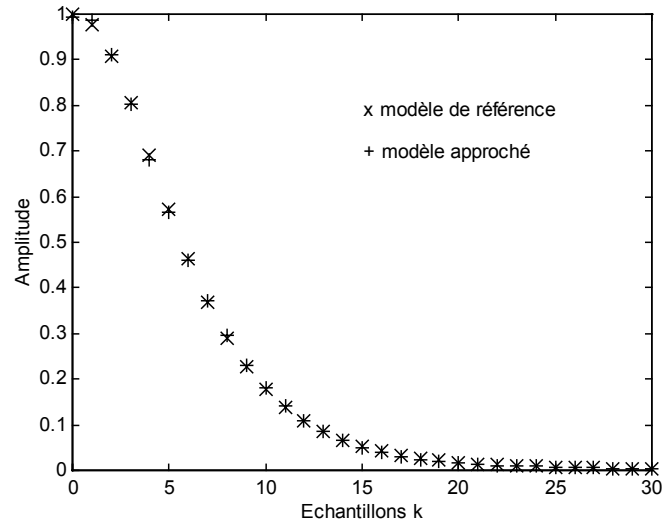


Figure 5.7 : Fonction d'Anderson d'ordre 0 sans contraintes pour $N=5$ termes
 $Q=9,451.10^{-5}$

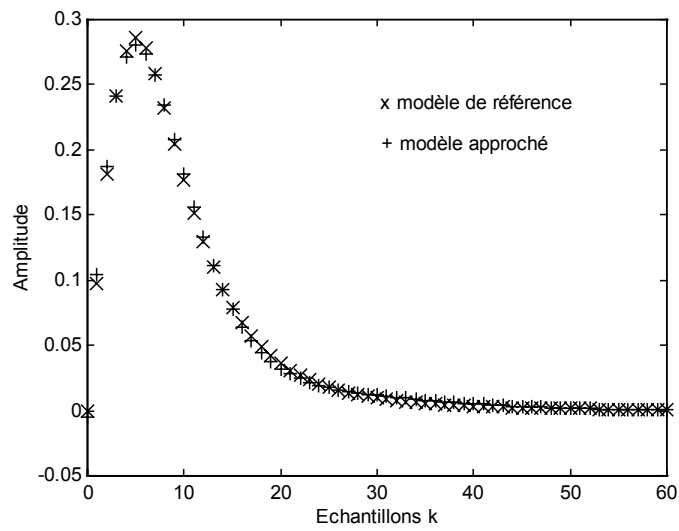


Figure 5.8 : Fonction d'Anderson d'ordre 1 sans contraintes pour $N=5$ termes
 $Q=6,876.10^{-4}$

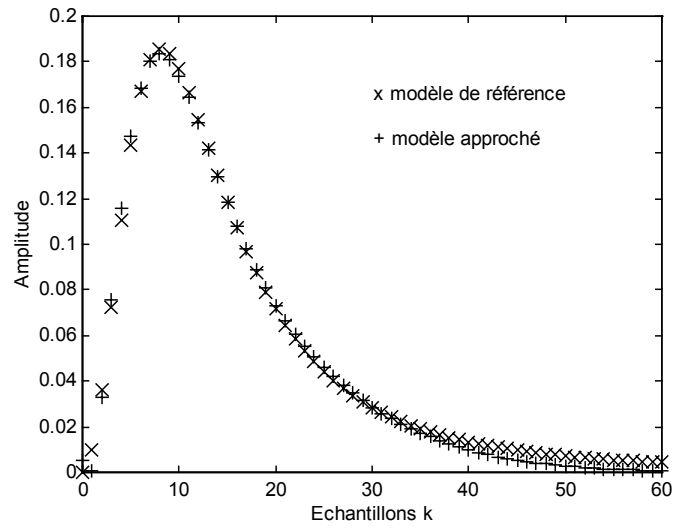


Figure 5.9 : Fonction d'Anderson d'ordre 2 sans contraintes pour $N=5$ termes
 $Q=1,796.10^{-3}$

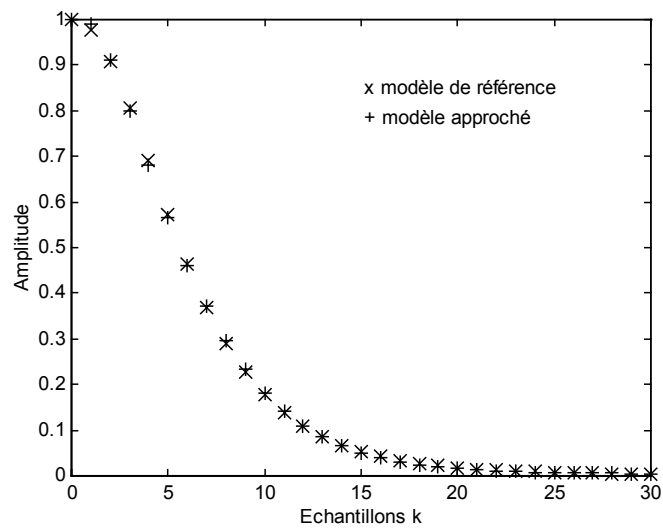


Figure 5.10 : Fonction d'Anderson d'ordre 0 avec contraintes pour $N=5$ termes
 $Q=1,032.10^{-4}$

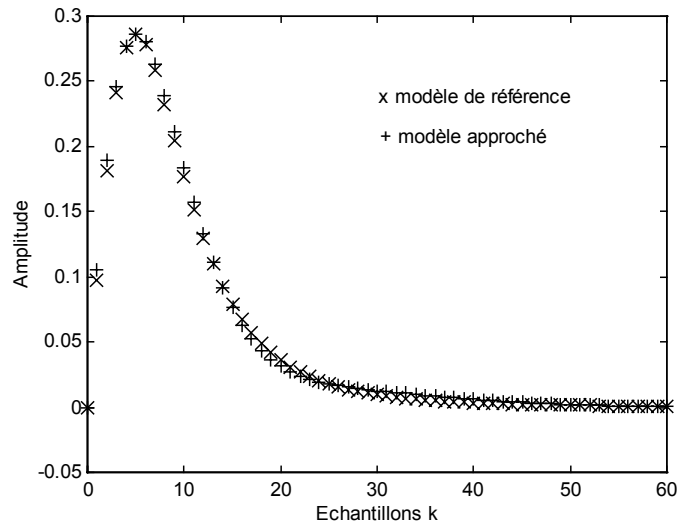


Figure 5.11 : Fonction d'Anderson d'ordre 1 avec contraintes pour $N=5$ termes
 $Q=1,097.10^{-3}$

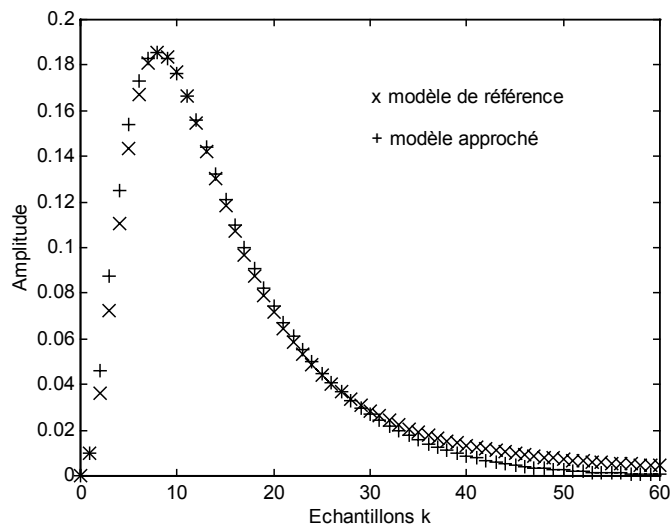


Figure 5.12 : Fonction d'Anderson d'ordre 2 avec contraintes pour $N=5$ termes
 $Q=3,697.10^{-3}$

5. Modélisation en présence de bruit

Nous allons à présent mettre en évidence l'intérêt de la représentation de signaux sur la base des fonctions de Laguerre discrètes, lorsque ces signaux sont bruités. La transformation de Laguerre discrète qui permet l'obtention des coefficients du spectre de Laguerre effectuée pour ainsi dire une moyenne pondérée des échantillons du signal à modéliser, qui conduit naturellement à réduire la composante de bruit du signal. Cet intérêt de la transformation se retrouve dans divers domaines du traitement du signal dont nous verrons certains par la suite. Nous allons ici exposer des résultats de modélisations d'un signal bruité.

Exemple : Somme de deux exponentielles complexes

Considérons le signal $f(t) = e^{-t} \sin t$ représenté par 36 échantillons sur l'intervalle $[0, 7]$. La modélisation de ce signal a été effectuée, à l'aide de 5 fonctions de Laguerre discrètes, de valeurs de paramètres $a=0,8$ et $b=1$. Nous obtenons ci-après les résultats de la modélisation lorsque les échantillons du signal considéré sont sans bruit (Figure 5.13) et sont bruités par un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma = 0,02$ (Figure 5.14) et $\sigma=0,05$ (Figure 5.15).

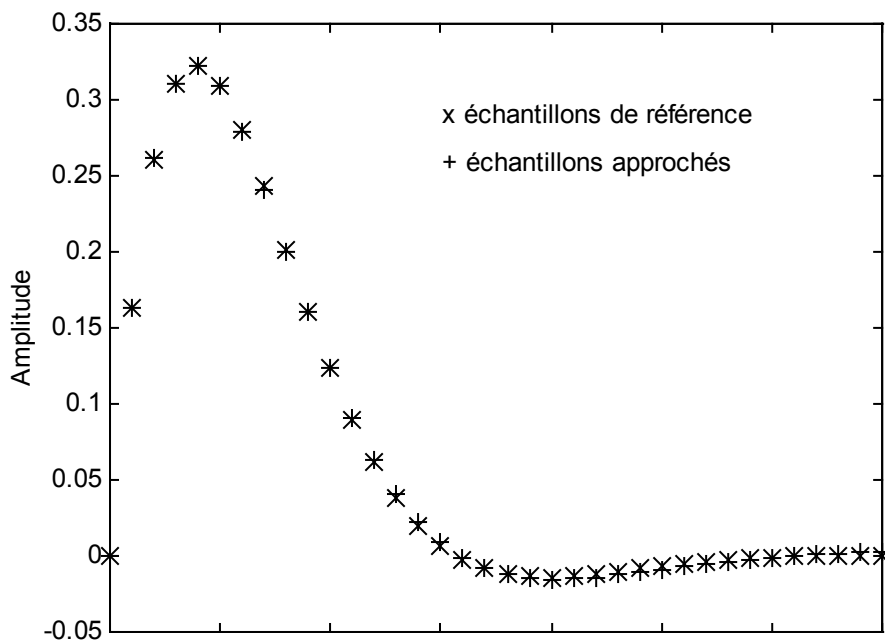


Figure 5.13 : $f(t) = e^{-t} \sin t$ sans bruit $Q=1,123 \cdot 10^{-4}$

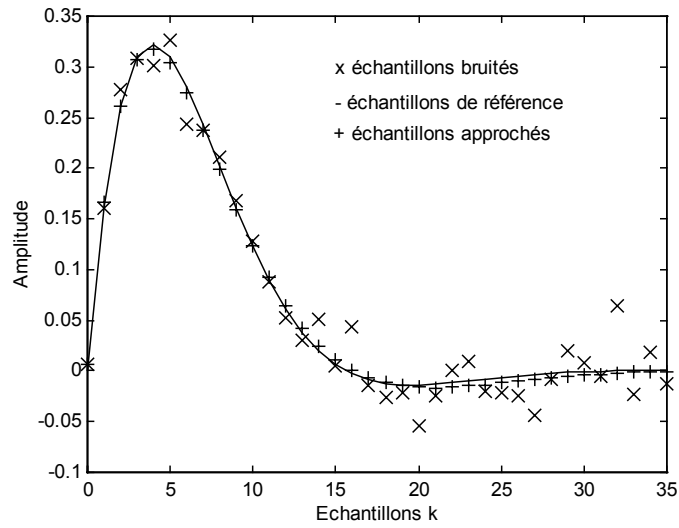


Figure 5.14 : $f(t) = e^{-t} \sin t$ $\sigma=0,02$ $Q=8,412 \cdot 10^{-4}$

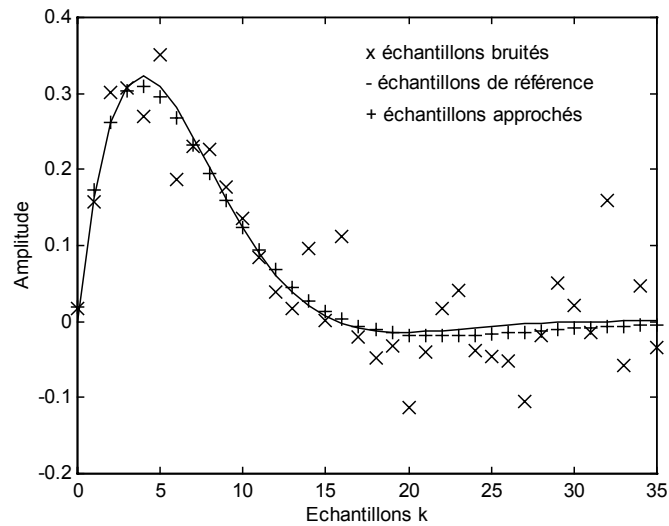


Figure 5.15 : $f(t) = e^{-t} \sin t$ $\sigma=0,05$ $Q=3,958 \cdot 10^{-3}$

Notons que si nous possédons des connaissances a priori sur le signal à modéliser, il est alors possible d'imposer des contraintes sur l'approximation pour améliorer celle-ci.

6. Résolution d'équations aux différences

Les correspondances de la transformation de Laguerre discrète, établies au chapitre 3, peuvent permettre de résoudre certaines équations aux différences. Le principe est d'exprimer et de résoudre l'équation aux différences considérée dans le domaine spectral de Laguerre. Les solutions dans le domaine spectral de Laguerre peuvent alors être obtenues soit sous forme d'une expression analytique, soit sous forme d'une relation de récurrence. Quelle que soit la forme de la solution obtenue dans le domaine spectral, elle peut permettre le calcul des coefficients du spectre de Laguerre, et par suite, il est possible d'exprimer la ou les solutions dans le domaine temporel comme des combinaisons de fonctions de Laguerre discrètes.

Considérons par exemple la correspondance (3.13) :

$$\frac{-a(k+1)}{b(1-a^2)} f[k+1] + \frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} f[k] - \frac{abk}{1-a^2} f[k-1] = n f_n(a, b)$$

Elle permet de résoudre des équations aux différences du type :

$$\frac{-a(k+1)}{b(1-a^2)} f[k+1] + \left(\frac{(1+a^2)k+a^2}{1-a^2} + \lambda \right) f[k] - \frac{abk}{1-a^2} f[k-1] = g[k] \quad (5.04)$$

où la fonction $g[k]$ est une fonction connue.

L'emploi de la correspondance (3.13) nous permet de réécrire cette équation aux différences dans le domaine spectral de Laguerre. Nous obtenons alors :

$$(n + \lambda) f_n(a, b) = g_n(a, b)$$

Nous pouvons déduire les coefficients $f_n(a, b)$ du spectre de Laguerre par la relation suivante :

$$f_n(a, b) = \frac{g_n(a, b)}{n + \lambda} \quad \text{si } n + \lambda \neq 0 \quad (5.05)$$

Exemple :

Considérons l'équation aux différences suivante :

$$\frac{1}{9} (-20(k+1)f[k+1] + (41k+16)f[k] - 20kf[k-1]) = g[k]$$

où $g[k]$ est représentée sur la figure 5.16 :

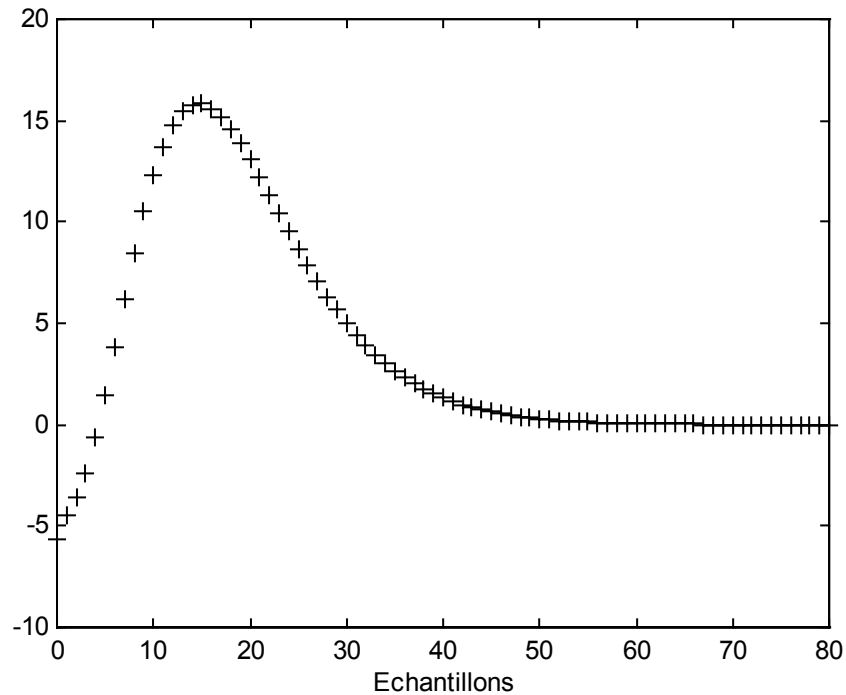


Figure 5.16 : Graphe de la fonction $g[k]$

L'expression analytique approchée de $g[k]$ est donnée par :

$$g[k] \approx \frac{1}{6} 0,8^k (k^3 - 3k^2 + 2k - 5,62)$$

L'équation considérée est équivalente à l'équation aux différences (5.04) pour $\lambda=0$, $a=0,8$ et $b=1$. La fonction $g[k]$ étant un polynôme amorti de degré 3, seules les 4 premières fonctions de Laguerre discrètes de paramètres $a=0,8$ et $b=1$ suffisent à représenter la fonction $g[k]$. Pour ces valeurs de paramètres, les coefficients du spectre de Laguerre de la fonction $g[k]$ sont :

$$g_0(a,b)=0 ; g_1(a,b)=35,12 ; g_2(a,b)=43,90 ; g_3(a,b)=18,29$$

La relation (5.05) nous permet alors de déterminer les coefficients du spectre de Laguerre de la fonction $f[k]$:

$$f_0(a,b)=C ; f_1(a,b)=35,12 ; f_2(a,b)=21,95 ; f_3(a,b)=6,10$$

où C est une constante réelle quelconque.

Les solutions de l'équation aux différences sont alors exprimées à l'aide des fonctions de Laguerre discrètes :

$$f[k] = C \varphi_0[k;0,8;1] + 35,12 \varphi_1[k;0,8;1] + 21,95 \varphi_2[k;0,8;1] + 6,10 \varphi_3[k;0,8;1]$$

Le graphe de la fonction $f[k]$ pour $C=0$ est donnée sur la figure 5.17 :

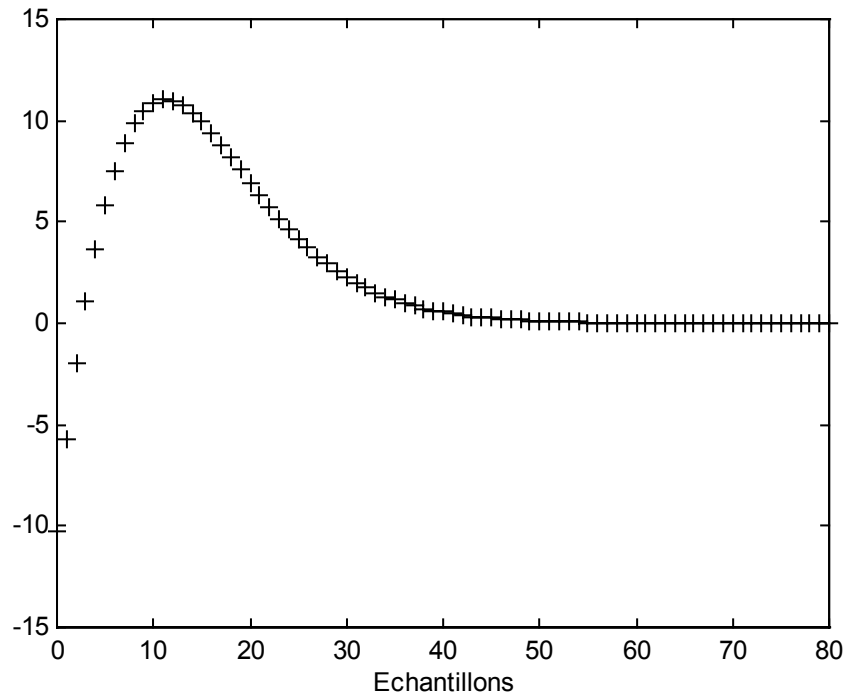


Figure 5.17 : Graphe de la fonction $f[k]$ pour $C=0$

7 Déconvolution

Le but de la déconvolution est d'identifier un signal à partir du produit de convolution de ce signal avec un second signal connu. Un intérêt pratique est d'identifier un système de réponse impulsionnelle $g[k]$ inconnue, à partir de la réponse temporelle $y[k]$ du système soumis à un signal d'entrée donné $x[k]$ (Figure 5.18). En fait il est aussi possible, par cette même méthode, d'identifier le signal d'entrée à partir de la réponse impulsionnelle du filtre et de la réponse en sortie du filtre. Bien souvent les signaux, mesurés dans des conditions normales de fonctionnement du système, sont bruités. La déconvolution de signaux s'effectue généralement à l'aide d'une représentation des signaux sur la base de fonctions orthogonales. Ainsi par exemple la déconvolution de signaux basée sur la TFR (Transformée de Fourier Rapide) donne de bons résultats lorsque les signaux ne sont pas bruités. En revanche, lorsque les signaux présentent une composante de bruit, les résultats sont bien souvent désastreux. Seules des représentations, telles que sur la base des fonctions de Laguerre, pour lesquelles il y a un effet bénéfique face au bruit, peuvent permettre une meilleure déconvolution.

Considérons un système, défini par sa réponse impulsionnelle $g[k]$ inconnue, et attaqué en entrée par un signal $x[k]$. A la sortie du système nous obtenons alors le signal $y[k] = x[k] * g[k]$ (Figure 5.18).

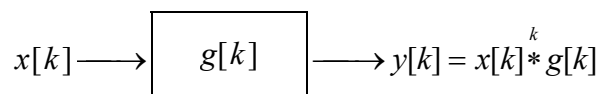


Figure 5.18 : Convolution dans le domaine temporel

Dans le domaine spectral de Laguerre discret, cette relation devient d'après (3.28) :

$$y_n(a,b) = \widehat{x}_n(a,b) * g_n(a,b)$$

avec :

$$\widehat{x}_n(a,b) \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} [x_n(a,b) + ax_{n-1}(a,b)]$$

Cette relation est illustrée par la figure 5.19

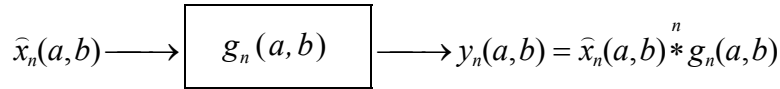


Figure 5.19 : Convolution dans le domaine spectral

Dans le domaine spectral de Laguerre, les coefficients du spectre de la fonction $g[k]$ sont alors donnés par la relation de récurrence suivante :

$$g_n(a,b) = \frac{y_n(a,b) - \sum_{j=0}^{n-1} g_j(a,b)\widehat{x}_{n-j}(a,b)}{\widehat{x}_0(a,b)}$$

Exemple :

Nous allons ici reprendre l'exemple exposé dans l'article de L.T. Quick et L.P. Bolgiano [Qui 76] où ils se proposaient d'effectuer une déconvolution sur la base de la transformée de Poisson. Le but que nous allons poursuivre ici aussi, est de retrouver, par déconvolution, le signal d'entrée $x(t) = 20t\exp(-2t)U(t) + 20(t-1,5)\exp[-2(t-1,5)]U(t-1,5)$ dont le graphe est donné figure 5.20.

La déconvolution s'effectue à partir de la réponse impulsionnelle connue du filtre $g(t) = \exp(-t)U(t)$ et du signal de sortie $y(t)$ représenté figure 5.21. Ces signaux ont été échantillonnés entre 0 et 10s avec une période d'échantillonnage de 0,1s.

Dans le domaine spectral de Laguerre discret, pour les valeurs de paramètres $a=0,7$ et $b=1$, seuls les 20 premiers coefficients du spectre des signaux échantillonnés $g(t)$ et $y(t)$, ont été conservés. La déconvolution, dans le domaine spectral de Laguerre discret, nous permet alors d'obtenir les 20 premiers termes du spectre du signal approché. Nous pouvons alors comparer le signal identifié et le signal de référence $x(t)$ (Figure 5.22).

Nous avons effectué les mêmes calculs mais cette fois avec le signal de sortie $y(t)$ bruité. Lorsque le bruit est un bruit uniforme dont les valeurs sont comprises entre -0,25 et 0,25 nous obtenons le résultat de l'identification illustré figure 5.23, et lorsque le bruit est un bruit uniforme dont les valeurs sont comprises entre -1 et 1 nous obtenons le résultat de l'identification illustré figure 5.24.

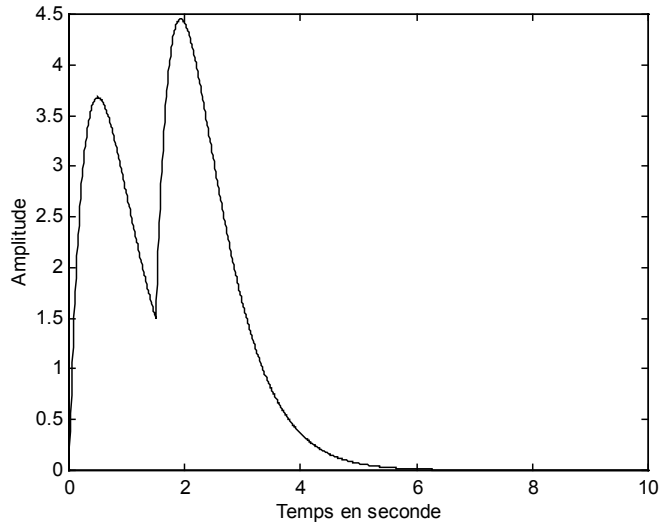


Figure 5.20 : Signal à identifier

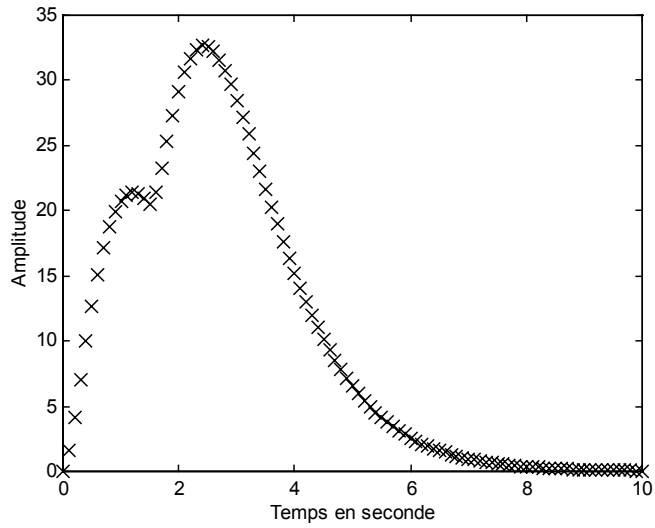


Figure 5.21 : Signal de sortie

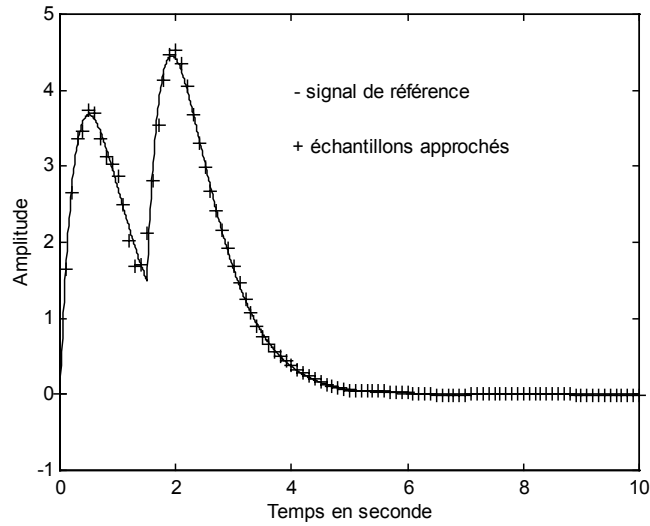


Figure 5.22 : Déconvolution. Sans bruit

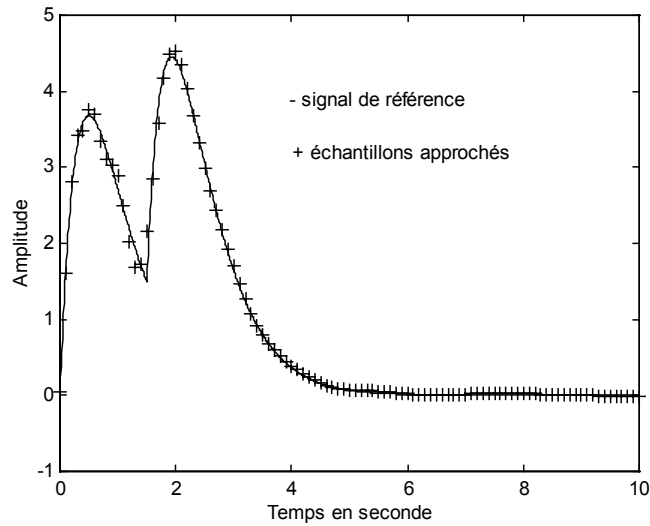


Figure 5.23 : Déconvolution. Bruit entre -0,25 et 0,25

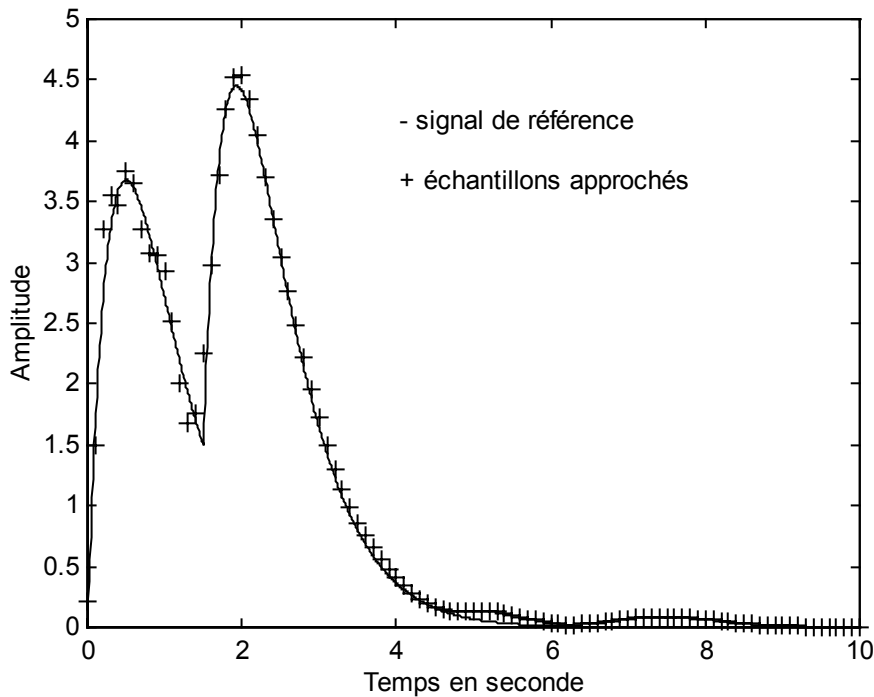


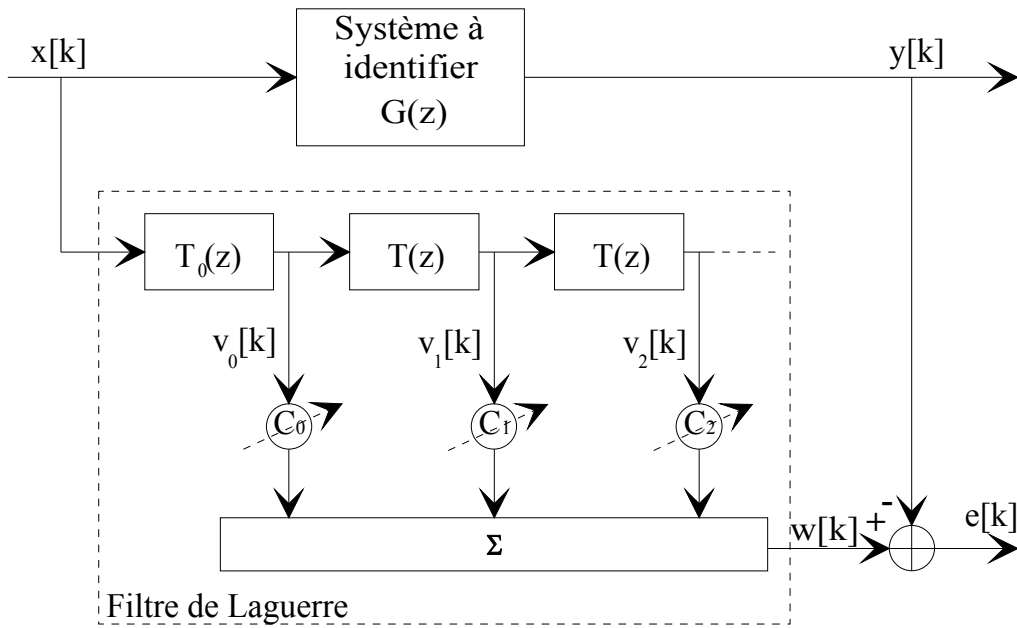
Figure 5.24 : Déconvolution. Bruit entre -1 et 1

Ces résultats montrent bien, qu'en présence de bruit il est néanmoins possible d'obtenir des résultats de déconvolution satisfaisants, lorsque la représentation des signaux s'effectue sur la base des fonctions de Laguerre discrètes.

8 Identification temps réel

8.1 Systèmes à simple entrée

La méthode que nous allons exposer ici est très connue (par exemple [Roe 73], [Rag 77]) Elle permet une identification de système et par la suite un contrôle très efficace de celui-ci. Cette méthode consiste ici à modéliser le système à identifier par un filtre de Laguerre digital. Ce filtre est branché en parallèle sur le système que l'on désire identifier. L'intérêt pratique est qu'un tel branchement peut être effectué en laissant le dispositif dans son fonctionnement normal (Figure 5.25). Lorsque que les N coefficients C_n du filtre de Laguerre tendent vers la valeur des coefficients du spectre de Laguerre de la réponse impulsionnelle du système à identifier, nous obtenons alors une approximation de celui-ci, et l'erreur $e[k]$ en sortie est réduite. Afin d'améliorer l'approximation, il est possible d'accroître le nombre de cellules du filtre de Laguerre sans que cela exige de recalculer des N premiers coefficients C_n .



Avec : $T_0(z) = \sqrt{1-a^2} \frac{z}{z-ab}$ et $T(z) = \frac{b-az}{z-ab}$

Figure 5.25 : Système d'identification

En sortie du filtre de Laguerre nous avons :

$$w[k] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n v_n[k]$$

et donc :

$$e[k] = w[k] - y[k] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} C_n v_n[k] \right) - y[k] \tag{5.06}$$

Nous allons à présent exprimer la variation des coefficients C_n afin que la variation dq du carré de l'erreur de sortie $e[k]$ soit négative. Posons :

$$q = e^2[k]$$

La variation de q par rapport aux coefficients C_n s'exprime :

$$dq = \frac{\partial q}{\partial C_0} dC_0 + \frac{\partial q}{\partial C_1} dC_1 + \dots = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial q}{\partial C_n} dC_n \tag{5.07}$$

or nous avons :

$$\frac{\partial q}{\partial C_n} = \frac{\partial e^2[k]}{\partial C_n} = 2e[k] \frac{\partial e[k]}{\partial C_n}$$

en dérivant (5.06) par rapport au coefficient C_n nous obtenons :

$$\frac{\partial q}{\partial C_n} = 2e[k]v_n[k]$$

En substituant cette expression dans (5.07) nous obtenons :

$$dq = \sum_{n=0}^{N-1} 2e[k]v_n[k]dC_n$$

En imposant le choix de la variation des coefficients :

$$dC_n = -\mu e[k]v_n[k] \quad (5.08)$$

où μ est un réel positif petit, nous imposons aussi :

$$dq = -2\mu \sum_{n=0}^{N-1} e^2[k]v_n^2[k] \leq 0$$

qui est négatif. En imposant la loi de variation des coefficients C_n :

$$C_n[k+1] = C_n[k] - \mu e[k]v_n[k]$$

nous imposons aussi une dérivée négative du carré de l'erreur de sortie qui va alors tendre vers une valeur minimale. Il a été montré que la convergence des coefficients C_n sera assurée pour [Per 88], [Per 91] :

$$0 < \mu[k] \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} v_n^2[k]}$$

Exemple :

Nous avons considéré le système à identifier de fonction de transfert suivante [War 84] :

$$G(z) = \frac{0,3124z^3 - 0,5743z^2 + 0,3879z - 0,0889}{z^4 - 3,2330z^3 + 3,9869z^2 - 2,2209z + 0,4723}$$

attaqué en entrée par un bruit blanc gaussien d'écart type égal à un. Le filtre de Laguerre discret est composé de 10 cellules de paramètres $a=0,7$ et $b=1$. Initialement les coefficients C_n sont nuls et la loi de variation de μ est donnée par :

$$\mu[k] = \frac{0,5}{\sum_{n=0}^{N-1} v_n^2[k]}$$

La courbe de la variation du signal de sortie $e[k]$ est donnée figure 5.26. Comme nous pouvons le constater, après une centaine d'itérations, le signal de sortie $e[k]$ est fortement réduit.

Après 200 itérations, nous pouvons comparer la réponse impulsionnelle du filtre de Laguerre discret avec la réponse impulsionnelle du système de référence (figure 5.27). L'erreur quadratique normalisée d'approximation est alors de $Q=1,6020.10^{-4}$.

Nous avons réitéré le même processus, dans les mêmes conditions, mais cette fois en ajoutant un bruit blanc gaussien d'écart type 0,25 sur le signal de sortie $y[k]$ du filtre à identifier. Après une centaine d'itérations nous pouvons constater une stabilisation du signal de sortie $e[k]$ (Figure 5.28). Nous pouvons aussi comparer les réponses impulsionnelles du système de références et de son approximation (Figure 5.29) ; l'erreur quadratique normalisée vaut alors $Q=5,7136.10^{-3}$.

Notons par ailleurs qu'un tel système d'identification dynamique permet de suivre les possibles variations du système à identifier, lorsque celles-ci sont relativement lentes. Ce système d'identification a notamment été employé pour la réduction d'écho d'un canal de transmission [Dav 91]. Il est par ailleurs une étape importante pour le contrôle de processus industriels [Mar 77], [Fin 93], [Dum 93a et b].

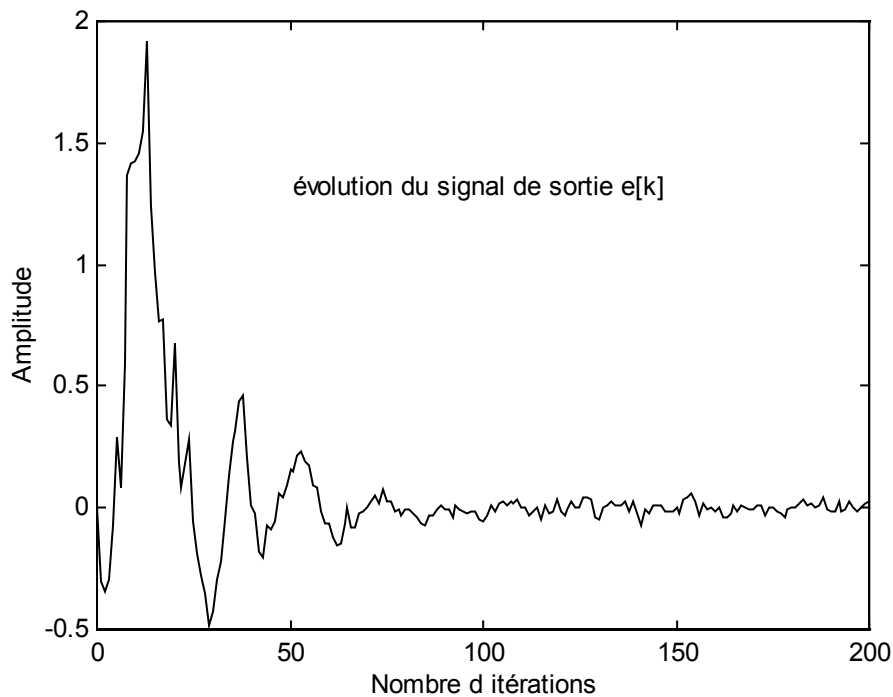


Figure 5.26 : Signal de sortie $e[k]$

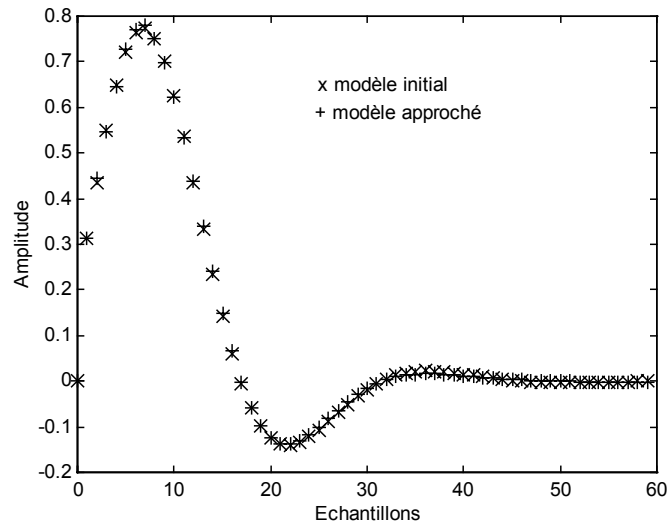


Figure 5.27 : Comparaison des réponses impulsionnelles

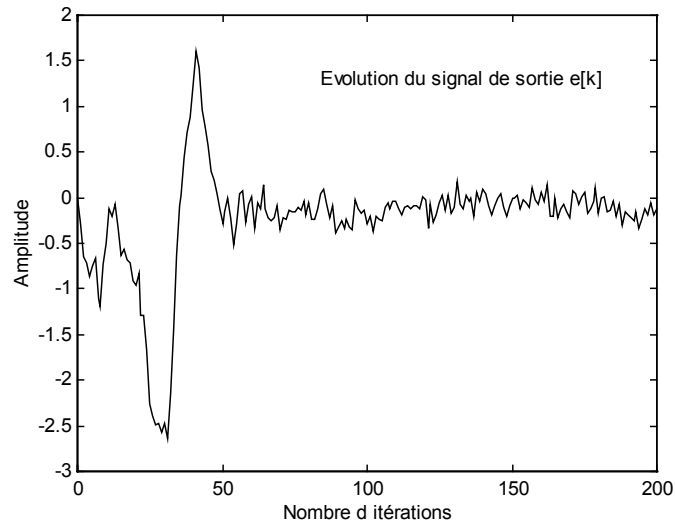


Figure 5.28 : Signal de sortie $e[k]$

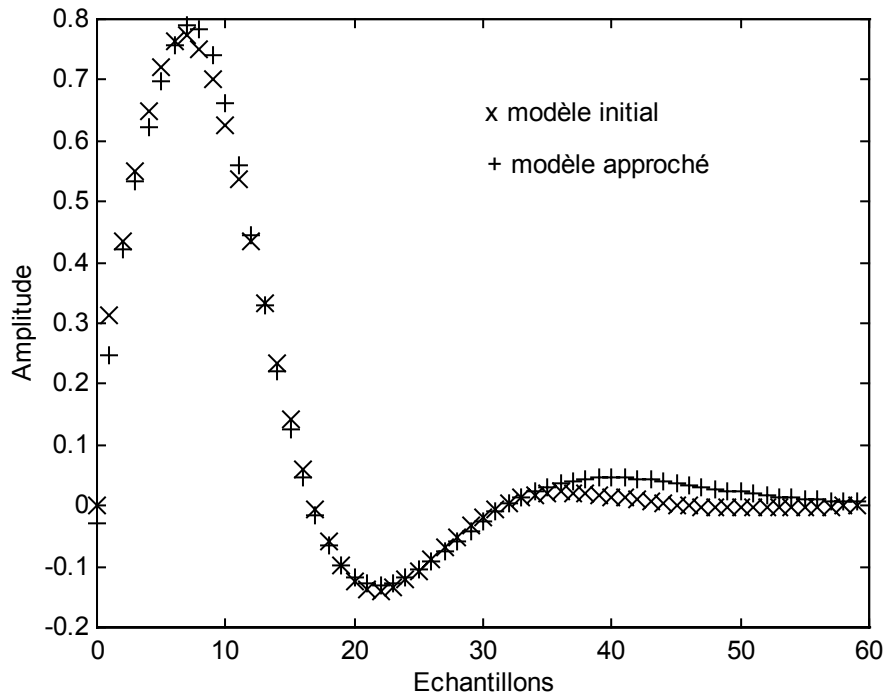


Figure 5.29 : Comparaison des réponses impulsionnelles

8.2 Systèmes à entrées multiples

La méthode d'identification précédente peut être aisément étendue aux systèmes à entrées multiples. Dans ce cas le système à identifier doit alors être une combinaison linéaire de deux systèmes indépendants $G_1(z)$ et $G_2(z)$ respectivement attaqués par les signaux d'entrées non corrélés $x_1[k]$ et $x_2[k]$ (Figure 5.30). Les lois de variation des coefficients des filtres de Laguerre deviennent alors :

$$C_n[k+1] = C_n[k] - \mu e[k]v_n[k]$$

et
$$C'_n[k+1] = C'_n[k] - \mu' e[k]v'_n[k]$$

avec :

$$0 < \mu[k] \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} v_n^2[k]} \quad \text{et} \quad 0 < \mu'[k] \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{N'-1} v'_n{}^2[k]}$$

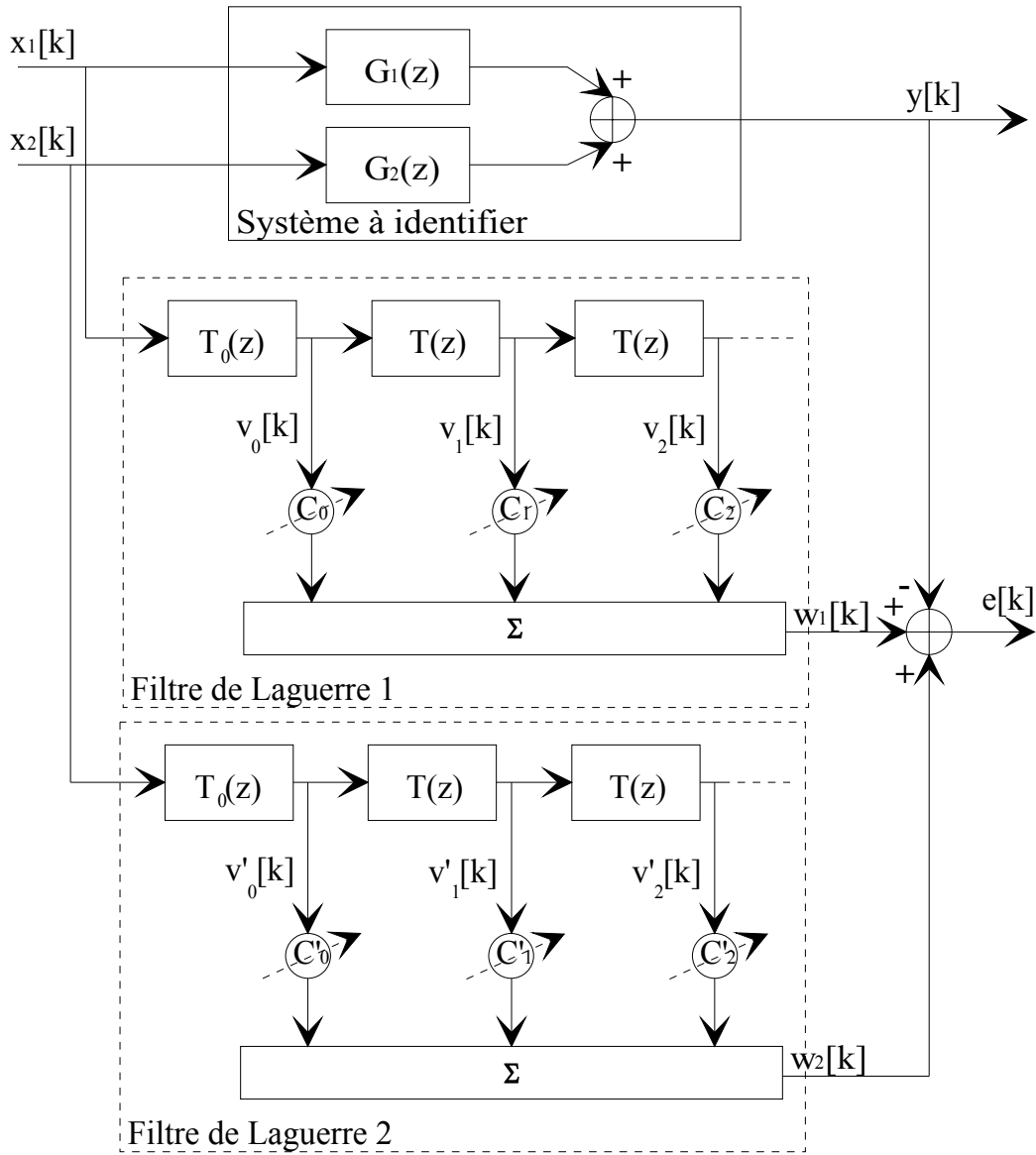


Figure 5.30 : Système d'identification d'un système à 2 entrées

Exemple :

Nous allons considérer ici les filtres à identifier dont les fonctions de transfert sont les suivantes :

$$G_1(z) = \frac{z}{(z - 0,4)^2} \qquad G_2(z) = \frac{z}{(z - 0,4)(z - 0,8)^2}$$

Il sont tous deux attaqués en entrée par un bruit blanc gaussien d'écart type égal à un. Les deux filtres de Laguerre discrets sont composés chacun de 15 cellules de paramètres $a=0,5$ et $b=1$. Initialement les coefficients C_n et C'_n sont nuls et les lois de variation de μ et μ' sont données par :

$$\mu[k] = \frac{0,5}{\sum_{n=0}^{N-1} v_n^2[k]} \quad \mu'[k] = \frac{0,5}{\sum_{n=0}^{N-1} v_n'^2[k]}$$

Dans un premier temps, lorsque la sortie $y[k]$ n'est pas bruitée, nous obtenons la courbe des variations du signal de sortie $e[k]$ donnée figure 5.31 et les courbes de comparaison des réponses impulsionnelles des systèmes données figures 5.32 et 5.33.

En présence d'un bruit blanc gaussien d'écart type $\sigma=0,1$, en sortie $y[k]$, nous obtenons la courbe de variation du signal de sortie $e[k]$ donnée figure 5.34 et les courbes de comparaison des réponses impulsionnelles des systèmes données figures 5.35 et 5.36.

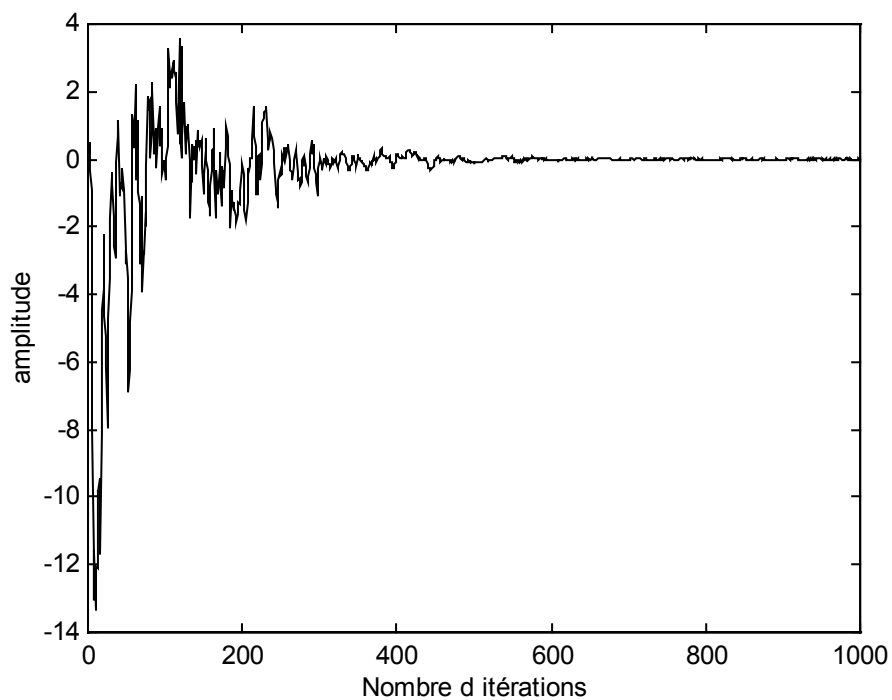


Figure 5.31 : Signal de sortie $e[k]$, pour $y[k]$ non bruité

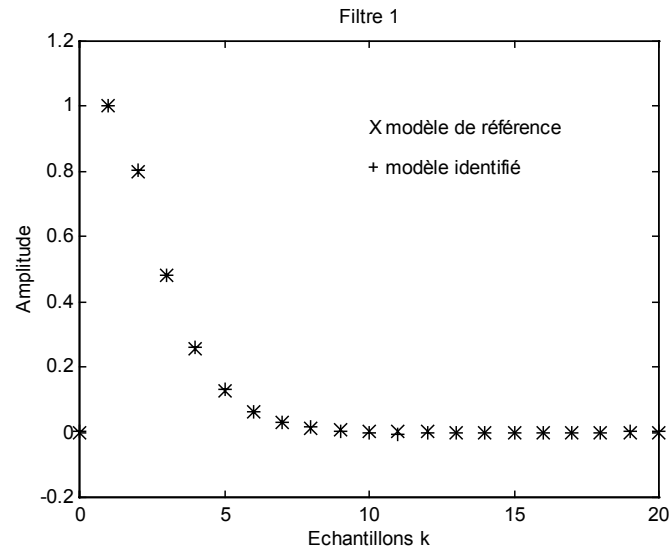


Figure 5.32 : Réponse impulsionnelle du filtre $G_1(z)$, pour $y[k]$ non bruité $Q_1=1,080.10^{-4}$

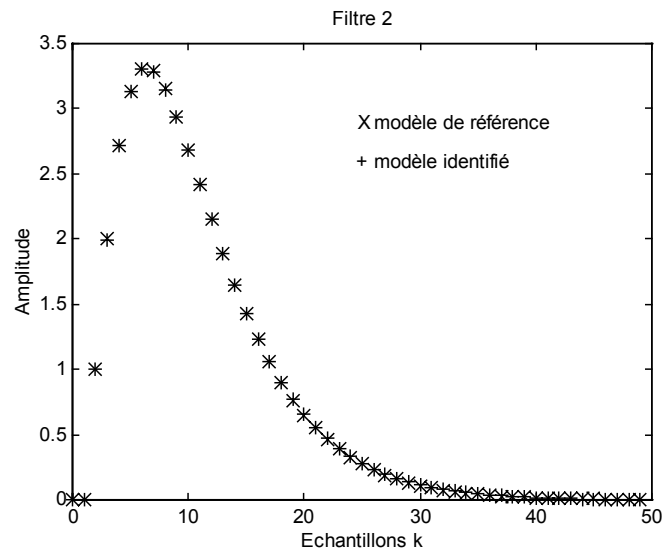


Figure 5.33 : Réponse impulsionnelle du filtre $G_2(z)$, pour $y[k]$ non bruité $Q_2=4,560.10^{-6}$

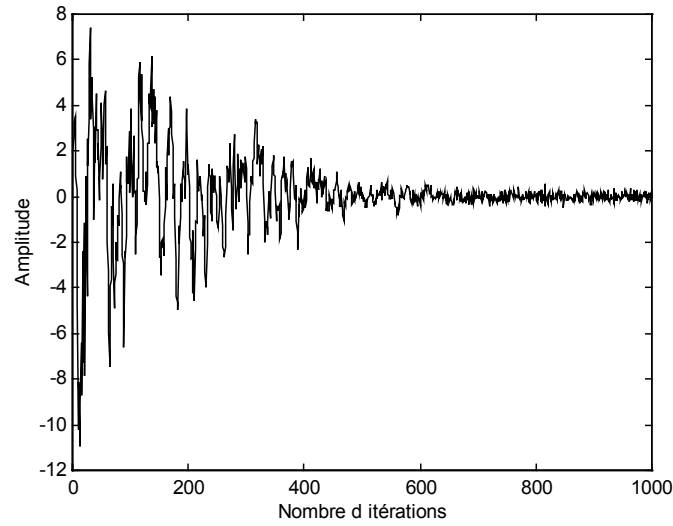


Figure 5.34 : Signal de sortie $e[k]$, pour $y[k]$ bruité $\sigma=0,1$

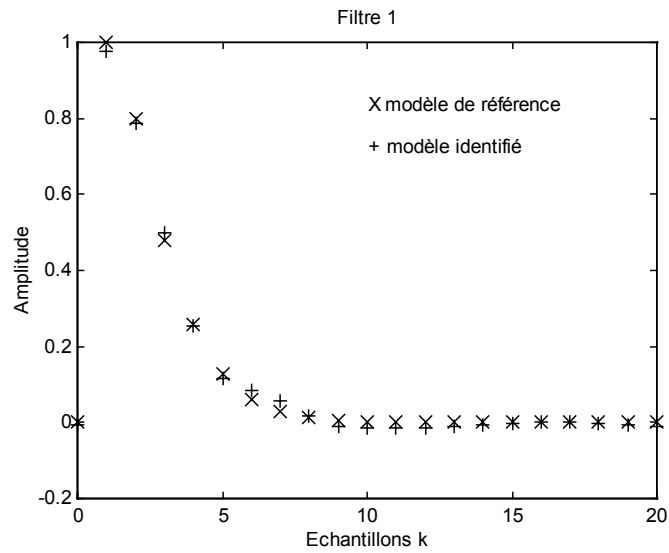


Figure 5.35 : Réponse impulsionnelle du filtre $G_1(z)$, pour $y[k]$ bruité $\sigma=0,1$
 $Q_1=2,507.10^{-3}$

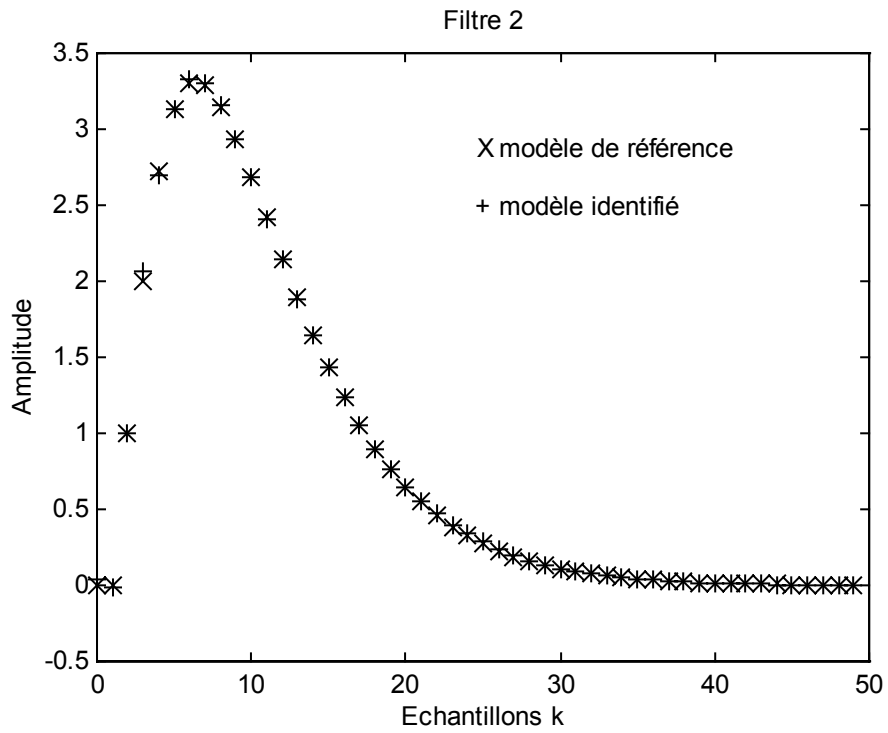


Figure 5.36 : Réponse impulsionnelle du filtre $G_2(z)$, pour $y[k]$ bruité $\sigma=0,1$
 $Q_2=8,464.10^{-5}$

Conclusion

Conclusion

Au cours de ce mémoire de thèse, d'une part nous avons rappelé les propriétés connues et d'autre part nous avons démontré de nouvelles propriétés des fonctions de Laguerre discrètes. Puis, nous avons proposé la définition de la transformation de Laguerre discrète et développé ses propriétés afin d'établir aisément les correspondances de fonctions usuelles. Par la suite nous nous sommes intéressés à l'étude de l'approximation de signaux, pour laquelle nous avons développé une méthode de choix du pseudo-facteur d'échelle permettant de réduire l'erreur quadratique d'approximation. Nous avons montré que cette méthode pouvait être appliquée au choix du paramètre de nombreuses fonctions constituant des bases orthogonales de représentation des signaux. L'intérêt des fonctions de Laguerre discrètes et de la transformation associée à ces fonctions a été par la suite rappelé et quelque peu étendu.

De nombreux travaux restent néanmoins à effectuer. En premier lieu, dans le cadre de la transformation de Laguerre discrète, il est possible d'étendre largement la table des correspondances, à l'aide des propriétés que nous avons pu démontrer, ceci afin de faciliter l'obtention des coefficients du spectre de Laguerre de fonctions plus complexes que celles que nous avons envisagées. Par ailleurs, au point de vue du choix du paramètre a , il doit être possible d'affiner la borne supérieure de l'erreur quadratique, à partir d'informations supplémentaires sur le signal considéré, afin d'obtenir un meilleur choix de ce paramètre pour réduire encore l'erreur d'approximation. Dans la même optique, une recherche plus approfondie peut aussi être menée pour permettre le choix de ce paramètre a et du nombre de termes servant à l'approximation, dans le cas de signaux bruités. En outre, à l'instar de M. Gautier, M. Monsion et J.P. Sagaspe [Sag 76], [Gau 78] qui ont développé une transformation de Laguerre multivariable pour les fonctions de Laguerre à temps continu, il serait possible de développer une transformation de Laguerre discrète bidimensionnelle. Celle-ci trouverait son intérêt dans des domaines tels que le traitement et la compression d'images. Ce n'est qu'avec de telles bases théoriques que le développement d'applications pratiques et industrielles, pourra simplement et efficacement s'accroître encore.

Références bibliographiques

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Ang 82] Angot A. "Compléments de mathématiques". Sixième édition, Masson, 1982.
- [Arn 66] Arnold C.R. "Laguerre functions and the Laguerre network. Their properties and digital simulation". Massachusetts Institute of Technology Lincoln Laboratory, Technical Note 1966-28, May 1966.
- [Boz 71a] Bozzo C. "Notion de transformée de Laguerre d'un signal continu : application à la discrétisation de l'équation d'évolution de systèmes continus linéaires et stationnaires". C.R. Acad. Sc. Paris, série A, Vol. 272. 1971, pp 1681-1684.
- [Boz 71b] Bozzo C. "Notion de transformée de Laguerre d'un signal continu : application à l'étude des systèmes différentiels linéaires stochastiques". C.R. Acad. Sc. Paris, série A, Vol. 272. 1971, pp 1753-1755.
- [But 92] Butcher J.C. "The role of orthogonal polynomials in numerical ordinary differential equations. Orthogonal polynomials and numerical methods". Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 43, n° 1-2, 1992, pp 231-242.
- [Cal 73] Calvez L.C. "Contribution à l'étude des propriétés de la transformation Z et de la transformation de Laguerre. Applications à l'analyse des signaux de circuits". Thèse, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1973.
- [Cle 82] Clement P.R. "Laguerre functions in signal analysis and parameter identification". Journal of the Franklin Institute, Vol. 313, n° 2, 1982, pp 85-95.
- [Clo 65] Clowes G.J. "Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal Laguerre functions". IEEE Transactions on automatic control, Vol 10, Oct. 1965, pp 487-489.
- [Cun 93] Cunha C. ; Viloche F. "The Laguerre functions in the inversion of the Laplace transform". Inverse Problems, Vol. 9, n° 1, 1993, pp 57-68.
- [Dav 91] Davidson G.W. ; Falconer D.D. "Reduced complexity echo cancellation using orthonormal functions". IEEE Transactions on circuits and systems, Vol. 38, n° 1, 1991, pp 20-28.
- [Den Bri 92] Den Briker A.C. ; Roufs J.A.J. "Evidence for a generalized Laguerre transform of temporal events by the visual system". Biological Cybernetics, Vol. 67, n° 5, 1992, pp395-402.
- [Den Bri 93a] Den Briker A.C. "Calculation of the local cross correlation function on the basis of the Laguerre transform". IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, n°5, 1993, pp 1980-1982.
- [Den Bri 93b] Den Briker A.C. "Adaptative modified Laguerre filters". Signal Processing, Vol. 31, n° 1, 1993, pp 69-79.
- [Dum 85] Dumont G.A. ; Zervos C. ; Belanger P.R. "Automatic tuning of industrial PID controllers". American Control Conference, 1985, Boston MA, pp 1573-1578.

- [Dum 86] Dumont G.A. ; Zervos C.C. "Adaptative control using Laguerre functions". IFAC Adaptative Systems in Control and Signal Processing, Lund, Sweden, 1986, pp 105-113.
- [Dum 90] Dumont G.A. ; Zervos C.C. ; Pagean G. "Laguerre-based adaptative control of pH in an industrial bleach plant extraction stage". Automatica, Vol.26, n° 4, 1990, pp 781-787.
- [Dum 93a] Dumont G.A. ; Elnaggar A. ; Elshafei A. "Adaptative predictive control of systems with time-varying time delay". International Journal of Adaptative Control and Signal Processing, Vol. 7, n°2, 1993, pp 91-101.
- [Dum 93b] Dumont G.A. ; Fu Y.E. "Non-linear adaptative control via Laguerre expansion of Volterra kernels". International Journal of Adaptative Control and Signal Processing. Vol. 7, n° 5, 1993, pp 367-382.
- [Fah 93] Fahmy M.F. ; Haweel T.I. ; Elraheem G.M. ; Gharieb R.R. "System identification using discrete orthogonal functions". International Journal of Circuit Theory and Applications, Vol. 21, n° 4, 1993, pp 317-329.
- [Fin 93] Finn C.K. ; Wahlberg B. ; Ydstie B.E. "Constrained predictive control using orthogonal expansion". AICHE Journal. Vol. 39, n° 11, 1993, pp 1810-1826.
- [Fu 93] Fu Y. ; Dumont G.A. "An optimum time scale for discrete Laguerre network". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, n° 6, 1993, pp 934-938.
- [Gen 68a] Génin R. ; Calvez L.C. "Inversion numérique de la transformation de Laplace à l'aide des polynômes de Laguerre". Electron. Lett. Vol 4, 1968, pp 461-462.
- [Gen 68b] Génin R. ; Calvez L.C. "Sur quelques propriétés de la transformation de Laguerre". C.R. Acad. Sci. Paris, 267 A, 1968, pp 108-110.
- [Gen 70] Génin R. ; Calvez L.C. "Laguerre-transform signal analysis". Electron. Lett. Vol. 6, 1970, pp 587-588.
- [Got 38] Gottlieb M.J. "Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points". American journal on mathematics. Vol. 60, 1938, pp 453-458.
- [Hea 56] Head J.W. "Approximation to transients by means of Laguerre series". Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 52, Oct.1956, pp 640-651.
- [Hee 93] Heeng K.I.B ; Mathews V.J. "Adaptative lattice bilinear filters". IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41, n° 6, 1993, pp 2033-2046.
- [Hin 69] Hindin H.J. "The Poisson transform of a periodic function". IEEE Trans. Educ. Vol. E-12, June 1969, p 143.
- [Jur 64] Jury E.I. "Theory and application of the Z-transform method". John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1964.
- [Ker 72] Kerneuzet A. ; Génin R. "Principe et applications d'un générateur de fonctions de Laguerre". Automatisme, Vol. 17, 1972, pp 375-379.
- [Kin 77] King R.E. ; Paraskevopoulos P.N. "Digital Laguerre filters". Circuit theory and applications, Vol. 5, 1977, pp 81-91.
- [Kin 79] King R.E. ; Paraskevopoulos P.N. "Parametric identification of discrete-time SISO systems". Int. J. Control, Vol. 30, n°6, 1979, pp 1023-1029.

- [Mac Cul 57] Mac Cully J.C. "The operational calculus of the Laguerre transform". Thèse, Université de Michigan, 1957.
- [Mak 89] Mäkilä P.M. "On Hankel-optimal Laguerre methods in system approximation". Report 89-100-A, Department of Chemical Engineering, Abo Akademi, Finland, 1989.
- [Mak 90a] Mäkilä P.M. "Approximation of stable systems by Laguerre filters". *Automatica*, Vol. 26, n° 2, 1990, pp 333-345.
- [Mak 90b] Mäkilä P.M. "Laguerre series approximation of infinite dimensional systems". *Automatica*, Vol. 26, n°6, 1990, pp 985-995.
- [Mar 77] Marmonier R. "Applications des fonctions de Laguerre discrètes à l'identification et à la commande des processus linéaires". Thèse, Université de Nancy I, Nancy, 1977.
- [Mas 90a] Masnadi-Shirazi M.A. "Optimum synthesis of linear discrete-time systems using orthogonal Laguerre sequences" Ph. D. University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, 1990.
- [Mas 90b] Masnadi-Shirazi M.A. ; Ahmed N. "Laguerre approximation of nonrecursive discrete-time systems". *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Processing*, Avr. 1990, pp 1309-1312.
- [Mas 91] Masnadi-Shirazi M.A. ; Ahmed N. "Optimum Laguerre networks for a class of discrete-time systems". *IEEE transactions on signal processing*, Vol. 39, n° 9, 1991, pp 2104-2108.
- [Nur 81a] Nurges Y. ; Yaaksoo Y. "Laguerre state equations for a multivariable discrete systems". *Automation Remote Control*, Vol. 42, 1981, pp 1601-1603.
- [Nur 81b] Nurges Y. ; Yaaksoo Y. "Laguerre state equations of a multivariable discrete time systems". *Proceedings of the 8th IFAC World Congress*, Kyoto Japan, 1981, pp 56-61.
- [Nur 87] Nurges Y. "Laguerre models in problems of approximation and identification of discrete systems". *Automat. Remote Contr.* Vol. 1-3, 1987, pp 346-352.
- [Oli 87] Olivier P.D. "Reduced-order models using optimal Laguerre approximations". *Electronics letters*, Vol. 23, n° 6, 1987, pp 257-260.
- [Pap 77] Papoulis A. "Signal analysis". Mc. Graw Hill, New York, 1977.
- [Par 71] Parks T.W. "Choice of time scale in Laguerre approximations using signal measurements". *IEEE transactions on automatic control*, Oct. 1971, pp 511-513.
- [Qui 76] Quick L.T. ; Bolgiano L.P. "Deconvolution by Poisson transformation" *IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing*. Philadelphia 1976, pp 350-353.
- [Rag 74] Ragot J. ; Roesch M. ; Humbert C. "Optimisation quadratique par décomposition en fonctions de Laguerre" *C.R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 278, Mai 1974, série B.
- [Rag 77] Ragot J. ; Roesch M. ; Humbert C. "Algorithm for identifying the dynamic characteristics of objects by means of orthogonal functions". *Journal A*, Vol. 18, n° 3, 1977, pp. 156-158.
- [Roe 73] Roesch M. "Identification des systèmes linéaires par intégration et récurrence". Thèse, Université de Nancy I, Nancy, 1973.

- [Sag 76] Sagaspe J.P. "Contributions à l'identification non-linéaire par la représentation fonctionnelle et la transformée de Laguerre". Thèse, Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1976.
- [Sch 71] Schetzen M. "Asymptotic optimum Laguerre series". IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-18, n° 5, 1971, pp 493-500.
- [Tan 94] Tanguy N. ; Vilbé P. ; Calvez L.C. "Optimum choice of a free parameter in orthonormal approximations" Soumis à publication à IEEE Transactions on Automatic Control en Juillet 1994.
- [Tha 73] Thathachar M.A.L. ; Ramaswamy S. "Identification of a class non-linear systems". International Journal on Control, Vol. 18, n° 14, 1973, pp741-752.
- [Wah 89] Wahlberg B. "System identification using high-order models, revisited" Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, December 1989, pp 634-639.
- [Wah 91] Wahlberg B. "System identification using Laguerre models". IEEE Transactions on automatic control, Vol. 36, n° 5, 1991, pp 551-562.
- [Zer 85] Zervos C.C. ; Belanger P.R. ; Dumont G.A. "On PID controller tuning using orthogonal series identification" IFAC Adaptative Control of Chemical Processes, Frankfurt-am-Main, 1985.
- [Zer 88a] Zervos C.C. ; Dumont G.A. "Laguerre functions in stochastic self-tuning control". IFAC Workshop Robust Adaptative Control, Newcastle, Australia, 1988, pp 111-116.
- [Zer 88b] Zervos C.C. ; Dumont G.A. "Deterministic adaptative control based on Laguerre series representation". International Journal on Control, Vol. 48, n° 6, 1988, pp 2333-2359.
- [Zer 88c] Zervos C.C. ; Belanger P.R. ; Dumont G.A. "Controller tuning using orthonormal series identification". Automatica, Vol. 24, n°2, 1988, pp 165-175.
- [Zer 88d] Zervos C.C. ; Dumont G.A. "Multivariable self-tuning control based on Laguerre series representation". Proceedings International Workshop on Adaptative Strategies for Industrial Use, Banff, Canada, 1988, pp 44-57.
- [Zer 88e] Zervos C.C. "Adaptative control based on orthonormal series representation" Ph. D. University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1988.