



**HAL**  
open science

# Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors. Etudes numérique et expérimentale

Mikhail Guskov

► **To cite this version:**

Mikhail Guskov. Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors. Etudes numérique et expérimentale. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2007. Français. NNT : . tel-00438353

**HAL Id: tel-00438353**

**<https://theses.hal.science/tel-00438353v1>**

Submitted on 3 Dec 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

par

**Mikhail GUSKOV**

**DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE DES SYSTEMES MULTI-ROTORS.  
ETUDES NUMERIQUE ET EXPÉRIMENTALE**

Soutenue publiquement le 11 juillet 2007 devant le jury :

M <sup>r</sup>	<b>P. ARGOUL</b> , Chargé de recherche, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées	Rapporteur
M <sup>me</sup>	<b>E. AUBRY</b> , Professeur, Université de Haute Alsace	Rapporteur
M <sup>r</sup>	<b>R. DUFOUR</b> , Professeur, INSA Lyon	Examinateur
M <sup>r</sup>	<b>F. IMBOURG</b> , Ingénieur, Groupe SAFRAN – SNECMA	Examinateur
M <sup>r</sup>	<b>O.S. NARA IKIN</b> , Professeur, Université Technique Bauman de Moscou	Directeur de thèse
M <sup>r</sup>	<b>J.-J. SINO</b> , Maître de conférences, Ecole Centrale de Lyon	Co-encadrant
M <sup>r</sup>	<b>F. THOUVEREZ</b> , Professeur, Ecole Centrale de Lyon	Directeur de thèse



# Résumé

Le développement des machines suit une logique liée aux performances, ce qui entraîne des niveaux de sollicitations toujours plus proches des limites matériaux. Cette tendance a pour effet de favoriser l'apparition de comportements vibratoires non-linéaires.

Cette thèse a donc pour objectif d'étudier la dynamique non-linéaire des structures et tout particulièrement celle correspondant à des moteurs d'avion multi-rotor. Deux axes ont été développés en parallèle, le premier qui correspond aux aspects théoriques et le deuxième de nature expérimentale.

En ce qui concerne les développements théoriques, nous nous sommes intéressés au cas des non-linéarités fortes conjuguées avec une richesse multi-fréquentielle des excitations. Dans ce cadre, nous avons étudié des modèles de roulements adaptés à la simulation en dynamique d'ensemble qui inclut les caractéristiques propres du contact ainsi que la présence des jeux. A l'aide de ces modèles, nous avons pu simuler les réponses vibratoires d'un système bi-rotor non-linéaire, notamment en contra-rotation. Afin de réaliser une étude pertinente de ce système nous avons développé un code qui généralise l'estimation des réponses au cas quasi-périodique et qui permet aussi de statuer sur la stabilité de ces régimes.

Aussi, nous avons mis au point un banc d'essai bi-rotor représentatif du comportement dynamique d'un moteur réel. Après une phase de conception et de mise en œuvre du banc, différents types de tests de caractérisation ont été réalisés. Nous avons tout d'abord analysé les réponses vibratoires en co- et contra-rotation. Puis dans une deuxième phase, une configuration surcritique de l'arbre Basse Pression a été testée. L'ensemble de ces essais a permis de mettre en valeur les spécificités dynamiques des moteurs bi-rotor tant du point de vue des régimes vibratoires (régimes périodiques, quasi-périodique, modes directs et rétrogrades) que des effets non-linéaires (distorsion des pics, présence de surharmoniques d'ordre deux).

## Mots Clés :

machines tournantes – dynamique des structures – dynamique non-linéaire – multi-rotors  
– roulements – études expérimentales



# Avant-propos

Cette thèse en co-tutelle entre l'Ecole Centrale de Lyon et l'Université Technique Bauman de Moscou, Russie a pu voir jour grâce à un concours de circonstances et de personnes auxquelles j'éprouve une profonde reconnaissance.

Je tiens à adresser mes premiers remerciements, à mon directeur de thèse M. le Professeur Fabrice Thouverez de m'avoir proposé ce travail de recherche au sein de l'équipe Dynamique des Structures et des Systèmes de partager son expérience scientifique et pour l'attention et la patience avec laquelle il a constamment dirigé mes recherches. Sans ses disponibilité et vigilance ce travail n'aurait pas été possible. Je tiens à remercier également mon co-encadrant M. Jean-Jacques Sinou qui m'a accompagné tout au long de cette thèse et dont l'aide et conseils m'ont été très précieux.

Je remercie M. le Professeur Régis Dufour d'avoir accepté de présider le jury ainsi que M. Pierre Argoul et Mme Evelyne Aubry pour leur travail en tant que rapporteurs.

Je remercie mon directeur du côté de l'Université Technique Bauman de Moscou, M.le Professeur Oleg Stepanovich Naraikin d'avoir accepté de diriger la partie russe de cette thèse, en contribuant ainsi au développement des relations entre les laboratoires à l'échelle internationale.

Ce travail a fait objet d'une collaboration avec la société *Snecma* (groupe *Safran*) et je tiens à remercier messieurs Serge Blanchard et Frédéric Imbourg, d'avoir effectué un suivi méticuleux et d'avoir partagé leur expérience métier dans un cadre de travail efficace et convivial.

Je dois beaucoup de reconnaissance à tous les participants du projet DDE au sein du laboratoire, à savoir messieurs Michel Massenzio, Patrick Perrard, Bernard Jeanpierre, Lionel Charles, Stéphane Lemaheux et Sébastien Léone, d'avoir contribué à la mise en place et l'entretien du banc d'essai bi-rotor DDE. Je remercie également M. Olivier Dessombs de sa disponibilité pour toutes sortes de problèmes informatiques que j'ai eus durant ces années.

L'ambiance du laboratoire a sensiblement contribué au bon déroulement de cette thèse. Je remercie les doctorants, les ingénieurs, les personnels et les enseignants d'avoir partagé leur bonne humeur et ambiance de travail. Je remercie particulièrement Loic, David, Nadège, Lionel, Claude et Sébastien pour leurs conseils lors de la rédaction.

Je tiens à remercier mes parents et mon frère qui m'ont beaucoup soutenu et appuyé à travers les frontières. Un dernier merci pour ma chère Bérénice, dont le soutien, le rire et la patience m'ont ressourcé tant de fois.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Dynamique des turboréacteurs</b>	<b>5</b>
1.1 Moteurs d'avion. Dynamique d'ensemble . . . . .	5
1.1.1 Principe de fonctionnement des turboréacteurs modernes . . . . .	5
1.1.2 Organes structuraux principaux . . . . .	6
1.1.3 Sources de vibrations et effets non-linéaires . . . . .	9
1.1.4 Particularités dynamiques d'un turboréacteur multi-corps . . . . .	11
1.2 Dynamique des solides déformables en rotation . . . . .	12
1.2.1 Modélisation tridimensionnelle . . . . .	12
1.2.2 Modélisation poutres . . . . .	15
1.3 Dynamique des rotors linéaire . . . . .	18
Conclusion . . . . .	24
<b>2 Modèles de roulements</b>	<b>25</b>
2.1 Modèles de roulements et phénoménologie . . . . .	26
2.2 Modèle d'un roulement à rouleaux à 4 degrés de liberté . . . . .	30
2.3 Etude d'un roulement à rouleaux . . . . .	33
2.4 Utilisation du modèle interpolé . . . . .	37
2.5 Modèle de palier axisymétrique à 2 degrés de liberté . . . . .	38
Conclusion . . . . .	40
<b>3 Solutions périodiques et balance harmonique</b>	<b>41</b>
3.1 Aperçu de méthodes de résolution des équations de la dynamique . . . . .	41

3.1.1	Méthodes dans le domaine temporel . . . . .	42
3.1.2	Méthodes dans le domaine fréquentiel . . . . .	44
3.2	Résolution par balance harmonique . . . . .	44
3.2.1	Représentation harmonique. . . . .	45
3.2.2	Calcul de $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$ et $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ par moindres carrés (collocation trigonométrique)	47
3.2.3	Calcul de $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$ et $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ par FFT . . . . .	48
3.2.4	Continuation . . . . .	49
3.2.5	Modifications de la méthode de Newton . . . . .	51
3.3	Exemples d'applications . . . . .	55
3.3.1	Oscillateur linéaire par morceaux . . . . .	55
3.3.2	Rotor avec non-linéarité de raideur radiale . . . . .	56
3.3.3	Deux oscillateurs linéaires, couplés par une raideur cubique pure . . . . .	57
	Conclusion . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Stabilité des solutions</b>	<b>61</b>
4.1	Etude de la stabilité . . . . .	61
4.2	Théorie de Floquet . . . . .	63
4.3	Section de Poincaré . . . . .	64
4.4	Exposants de Lyapunov . . . . .	65
4.5	Méthode de Hill . . . . .	67
4.6	Exemples d'application . . . . .	68
4.6.1	Oscillateur de Duffing . . . . .	68
4.6.2	Problème de contact rotor–stator . . . . .	70
4.6.3	Oscillateur à raideur linéaire par morceaux . . . . .	71
	Conclusion . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Généralisation à des systèmes multi-fréquentiels</b>	<b>75</b>
5.1	Introduction aux fonctions quasi-périodiques . . . . .	75
5.2	Généralisation de la balance harmonique . . . . .	77
5.3	Section de Poincaré d'ordres supérieurs . . . . .	79

---

5.4	Etude de la stabilité . . . . .	79
5.5	Exemples d'application . . . . .	81
5.5.1	Oscillateur de Duffing sous excitation quasi-périodique. . . . .	82
5.5.2	Deux oscillateurs linéaires couplés par une raideur cubique . . . . .	88
5.6	Application au banc bi-rotors DDE . . . . .	91
5.6.1	Spécificités de la modélisation . . . . .	91
5.6.2	Simulations numériques . . . . .	92
	Conclusion . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Banc Dynamique D'Ensemble bi-rotors</b>	<b>101</b>
6.1	Conception du banc Dynamique D'Ensemble bi-rotors . . . . .	102
6.2	Description et caractérisation dynamique du banc . . . . .	106
6.2.1	Système mécanique . . . . .	106
6.2.2	Comportement dynamique . . . . .	106
6.2.3	Instrumentation de mesure et équipements . . . . .	109
6.3	Techniques expérimentales . . . . .	114
6.4	Résultats expérimentaux . . . . .	115
6.4.1	Configuration initiale. Co-rotation . . . . .	115
6.4.2	Configuration initiale. Contra-rotation . . . . .	125
6.4.3	Configuration modifiée. Contra-rotation . . . . .	132
	Conclusion . . . . .	136
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>139</b>
	<b>Annexes</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>
	<b>Nomenclature</b>	<b>152</b>
	<b>Tables et figures</b>	<b>157</b>



# Introduction

## Contexte industriel

L'ingénierie mécanique est un domaine en progrès constant. Ceci conduit à la mise en œuvre de nouvelles solutions technologiques, ainsi que l'amélioration de produits existants. Cela est vrai pour le secteur des machines tournantes en général et des moteurs d'avion en particulier.

Les moteurs d'avion modernes sont des produits extrêmement complexes, faisant appel à des technologies de pointe. Ce sont des machines conçues dans un contexte hautement concurrentiel et soumises à des contraintes multiples et souvent contradictoires. La conception de tels moteurs intègre à la fois des contraintes de performance, de sécurité, d'environnement, mais aussi de coûts de mise en œuvre et d'exploitation. Un paramètre important lié au coût est donné par la masse. En effet, la réduction du poids permettra des gains financiers mais devra se faire à isoperformance ce qui conduit à des architectures nouvelles.

Les performances, régies par l'aérodynamique, définissent une veine, parcourue par l'air en compression puis par les gaz chauds en détente. Cet aspect lié à la mécanique des fluides détermine une géométrie et une répartition de charges aérodynamiques qui sont nécessairement couplées à la conception mécanique des éléments du moteur par des contraintes de fabrication, de résistance et de durée de vie.

La diminution de la masse est d'autant plus intéressante pour le constructeur, qu'actuellement un allègement du moteur de 1 kg entraîne un allègement de l'ensemble de l'avion de 3 kg. Cependant, l'allègement d'un élément provoque non seulement une augmentation des charges au sein du matériau, mais aussi une plus grande souplesse qui se traduit par une plus forte réponse statique et dynamique, impliquant de plus en plus d'effets non-linéaires.

Les imprécisions, inévitables, de modélisation et de calcul lors de la conception doivent souvent être validées par expérience. En même temps, l'environnement économique ordonne une accélération du développement des nouveaux produits et une réduction budgétaire, en grande partie en éliminant certains stades d'essais. Le défi ultime est de restreindre la partie expérimentale du développement à l'homologation seule. Dans ce contexte-là, une connaissance approfondie de tous les aspects du comportement des moteurs d'avion, est donc nécessaire aux constructeurs. De surcroît, une compréhension détaillée des propriétés du moteur doit être assurée le plus en amont possible de la conception d'un produit.

Les nouveaux projets de moteurs sont développés dans un environnement de retour d'expérience et d'innovation, permettant de projeter les performances des moteurs déjà construits sur un nouveau cahier des charges mais aussi d'introduire de nouvelles solutions qui n'ont pas

été réalisées auparavant.

C'est pour cela qu'actuellement la recherche dans le domaine des moteurs d'avion s'intéresse de plus en plus aux phénomènes non-linéaires, dont de nombreuses sources sont présentes dans ces machines. L'objet d'étude de cette thèse est la dynamique d'ensemble des moteurs multi-rotors à roulements interarbres. Cette caractéristique s'applique aux turboréacteurs double flux, à corps double ou triple. Cette famille de moteurs occupe à présent une position dominante dans la motorisation des avions civils et militaires.

## Démarche de l'étude

La dynamique des moteurs d'avion est très complexe, compte tenu de la diversité des sous-ensembles qui les composent. Les moteurs multi-corps sont constitués de plusieurs rotors disposés coaxialement et tournant à des vitesses différentes. Une des sources principales d'excitation en dynamique d'ensemble est le balourd des rotors. La présence des roulements apportant une non-linéarité majeure dans les vibrations des rotors, l'introduction des roulements interarbre entraîne un couplage de mouvement des rotors, rendant les vibrations multi-fréquentielles.

C'est dans cette optique-là que l'on modélisera la dynamique d'ensemble des machines tournantes bi-rotors : en tant qu'un système gyroscopique non-linéaire, soumis à une excitation bi-périodique. La contribution théorique portera sur la prise en compte de non-linéarités dans les calculs multi-fréquentiels de la réponse dynamique des systèmes mécaniques. Ce développement, basé sur une généralisation de la balance harmonique, s'effectuera en vue de prendre en compte les non-linéarités dues aux roulements dans les calculs de moteurs multi-rotors.

Outre la partie théorique, la thèse comporte un volet expérimental dans lequel on s'intéressera aux innovations de la situation modale en dynamique d'ensemble, en introduisant les arbres contra-rotatifs et un arbre surcritique. L'utilisation de telles caractéristiques permet de réduire la masse de certains composants, mais le comportement dynamique qui leur est associé est peu étudié. Les résultats de ces essais permettront de valider des modèles théoriques développés.

## Composition du document

Le premier chapitre présente le fonctionnement et la dynamique des moteurs d'avions multi-corps. Dans une optique de dynamique d'ensemble, la mise en équation de la dynamique des rotors linéaire est ensuite développée en vue d'application aux modèles éléments finis. Les non-linéarités dues aux roulements et leur modélisation sont exposées dans le second chapitre.

Le troisième chapitre comporte le développement d'une variante de la méthode de balance harmonique, couplée avec la continuation des solutions pour résoudre les problèmes de recherche de solutions périodiques des systèmes non-linéaires en vue de la généraliser ultérieurement. Dans le chapitre quatre sont recensées les méthodes d'étude de stabilité des solutions périodiques. Une attention particulière sera portée à sa mise en œuvre dans le cadre de l'approche par balance harmonique. Les développements des chapitres trois et quatre sont

généralisés au cas quasi-périodique dans le cinquième chapitre.

L'étude pratique de la dynamique des systèmes multi-rotors se fera sur le cas du banc DDE (Dynamique D'Ensemble), développé et construit à l'Ecole Centrale de Lyon en collaboration avec *Snecma Moteurs* (groupe *Safran*). Le sixième chapitre comporte la description et la caractérisation de ce banc depuis le cahier des charges jusqu'à sa réalisation matérielle. Il présente aussi les résultats expérimentaux pour toutes les configurations du banc et les compare aux résultats de calcul par la méthode développée précédemment.



# Chapitre 1

## Dynamique des turboréacteurs

Ce chapitre a pour but de présenter la dynamique d'ensemble des moteurs d'avions et sa modélisation.

Après une description concise du principe de fonctionnement d'un turboréacteur, ce chapitre se concentre sur le moteur en tant qu'objet de la dynamique des rotors, notamment en flexion : particularités de la structure, sources d'excitation, régimes de fonctionnement et phénomènes spécifiques.

Ensuite nous effectuerons une mise en équation claire du problème de la dynamique des systèmes en rotation. En se basant sur une formulation dans le repère tournant, nous écrirons pour un corps élastique les potentiels et les énergies cinétiques caractéristiques. Nous exprimerons alors, pour une structure discrétisée, les matrices spécifiques de ce type de problème.

Enfin, nous donnerons des illustrations de l'aspect théorique de la dynamique des rotors par quelques exemples numériques simples, basés sur un rotor à deux degrés de liberté. Les concepts de précession, de réponse à balourd, de vitesses critiques sont alors introduits et illustrés par des exemples.

La base bibliographique de ce chapitre est constituée d'ouvrages spécialisés sur les moteurs d'avion [Khr81, Khr89, Loz92], ainsi que sur les machines tournantes en général [Big80, LF97, Ehr98] pour la modélisation ou la phénoménologie. En ce qui concerne l'aspect général de la dynamique des structures, on se basera également sur les ouvrages de référence [GR96, Gmü97].

### 1.1 Machines tournantes industrielles : turboréacteurs. Dynamique d'ensemble

#### 1.1.1 Principe de fonctionnement des turboréacteurs modernes

Le turboréacteur est un propulseur à réaction, la figure 1.1 présente la coupe longitudinale du moteur CFM56 série 7. Le moteur comprend, de l'avant vers l'arrière, un diffuseur d'entrée, un turbocompresseur, une ou plusieurs chambres de combustion munies d'injecteurs, une turbine, et une tuyère d'éjection. L'air comprimé arrive dans la chambre de combustion où le carburant est injecté ; la combustion produit des gaz qui sont éjectés à grande vitesse. Une partie de l'énergie cinétique que possède ce flux gazeux est prélevée pour actionner la turbine qui elle-même entraîne le compresseur par un arbre commun ; les gaz sont finalement

éjectés à l'arrière et leur énergie cinétique restante assure la propulsion de l'avion par réaction. Une partie de l'air admis (flux secondaire) peut être déviée autour du flux gazeux normal ; on obtient ainsi un surcroît de poussée important, et le bruit du réacteur est réduit du fait de la dilution des gaz chauds du flux principal (flux primaire), associé à la combustion.

La mise en place de moteurs comptant plusieurs arbres (double corps ou encore triple corps) permet d'augmenter leurs performances, en séparant les parties basse et haute pression (respectivement BP et HP) du compresseur. On a ainsi deux compresseurs, chacun animé par sa turbine, leurs fonctionnements étant liés uniquement par des liaisons aérodynamiques. De ce fait, on obtient deux rotors coaxiaux (BP : les premiers étages du compresseur et les derniers étages de la turbine ; HP : les derniers étages du compresseur et les premiers étages de la turbine), l'arbre BP passant dans le creux de celui HP. Il existe aussi des moteurs à arbre triple (possédant des rotors basse, intermédiaire et haute pression).

Les premières turbomachines à double corps sont apparues dans les années 1930. L'application de ce concept dans le domaine des moteurs d'avion a commencé à la fin des années 1950. L'utilisation de rotors multiples s'explique par deux raisons liées au dimensionnement aérodynamique de la machine :

- La diminution du débit d'air (dans un moteur à taux de compression élevé) ne doit pas être très brutale car cela peut entraîner des phénomènes de pompage. L'ajout d'un corps tournant haute pression permet au compresseur de mieux s'adapter aux évolutions du débit.
- D'étage en étage, la pression et la température augmentent. Une conception où les étages supérieurs peuvent tourner plus vite est donc utile pour mieux comprimer l'air et assurer un plus grand débit. Or, pour un mono-rotor, les aubages des étages supérieurs sont obligés de tourner plus lentement qu'ils ne le pourraient dans l'écoulement d'air à des températures plus élevées (auxquelles la vitesse du son est plus importante), ce qui limite donc le débit d'air.

Les vitesses de rotation des deux rotors sont généralement liées par une relation linéaire [Ehr98]. Le roulement qui assure leur bon centrage constitue une liaison mécanique qui couple leur mouvement vibratoire. L'interaction des deux arbres tournant à deux vitesses différentes couplés par un roulement a été constatée dans de nombreuses sources bibliographiques ([Big80, Loz92, LF97, Ehr98]).

Depuis leur apparition, les moteurs double flux double corps font l'objet d'améliorations continues. A présent, les turboréacteurs à double flux avec corps double ou triple sont les plus répandus en tant que moteurs principaux de nombreux types d'avions de ligne ou militaires.

### 1.1.2 Organes structuraux principaux

De manière globale, le moteur est constitué par le stator et les rotors (figure 1.2). Le stator est fixé sur l'avion et il porte les rotors par l'intermédiaire des paliers (éléments qui seront détaillés dans cette section).

Les **rotors** des turboréacteurs sont des structures complexes. Leur fonction est de porter les étages de compresseur et de turbine en assurant une liaison d'entraînement entre ceux-ci. Les éléments structuraux des rotors sont typiquement les arbres, les aubages, les disques des roues aubagées, reliés par des sections d'arbre ou éventuellement disposés sur des tambours. Des

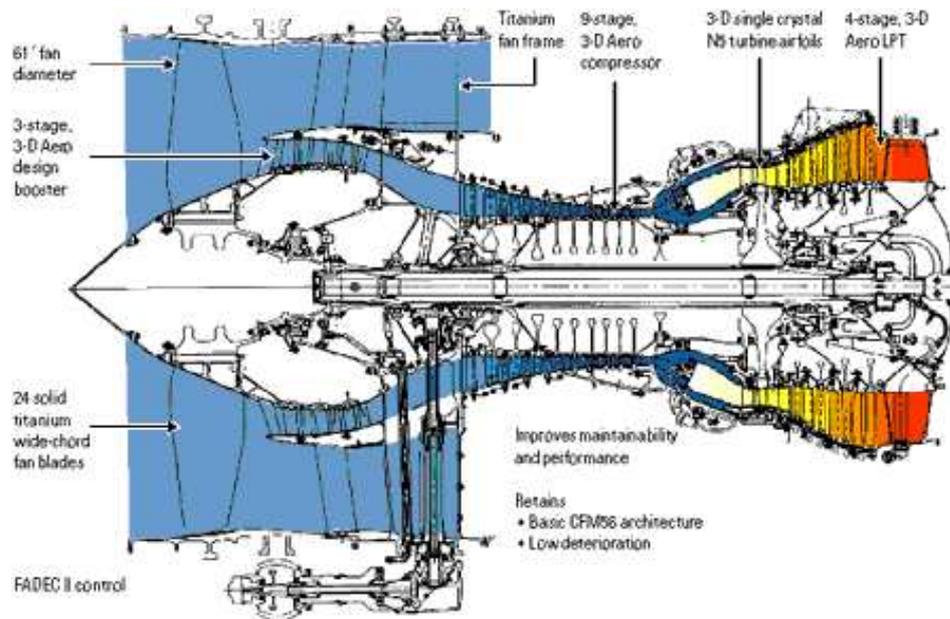


FIG. 1.1 – Moteur CFM-56 série 7

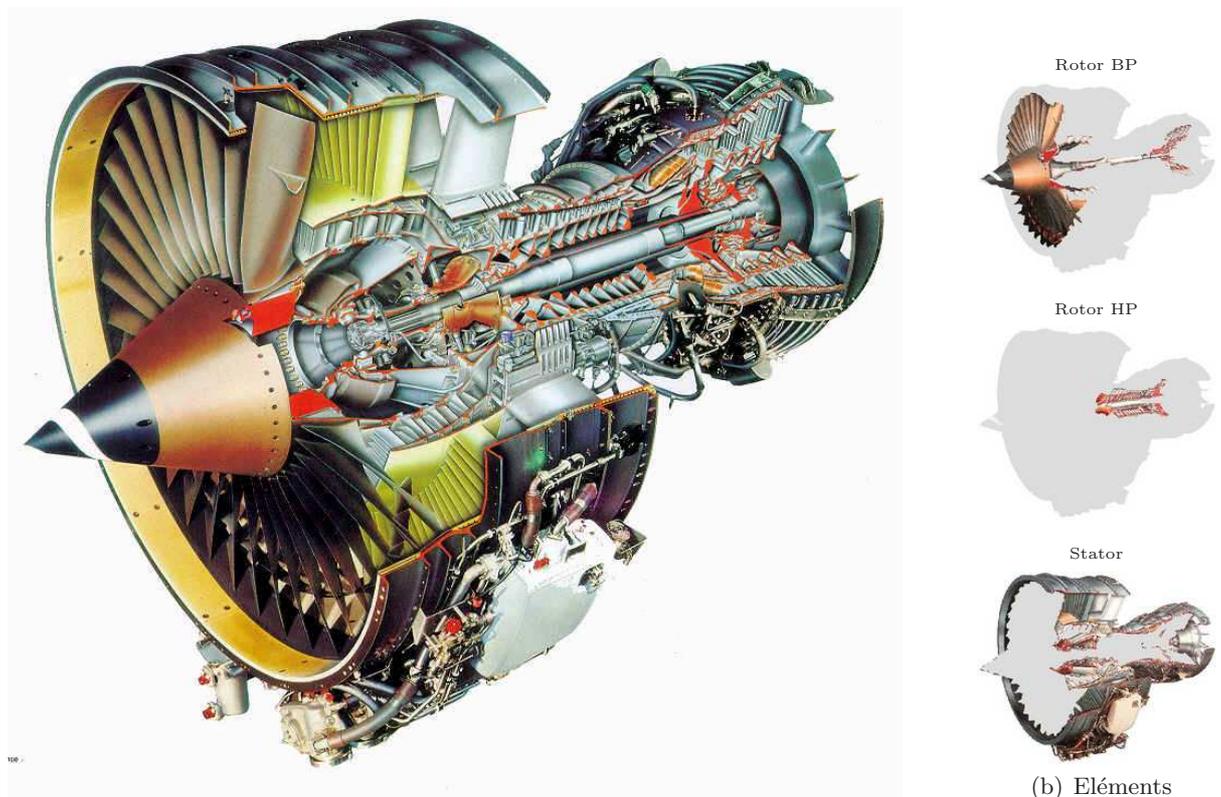
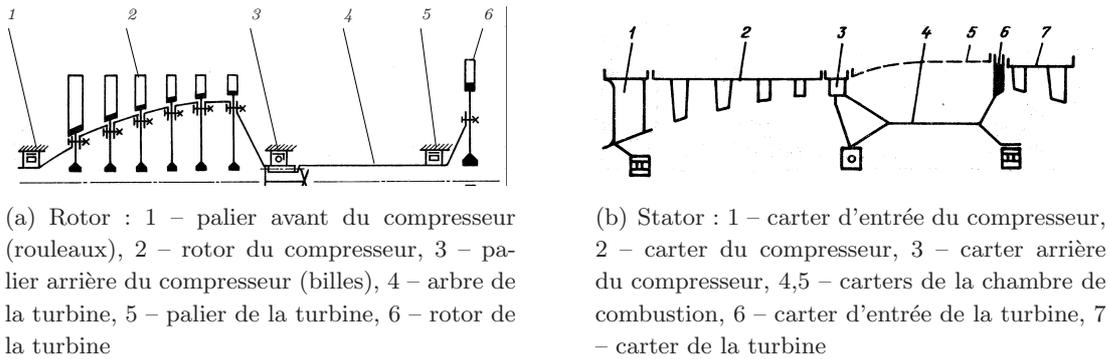


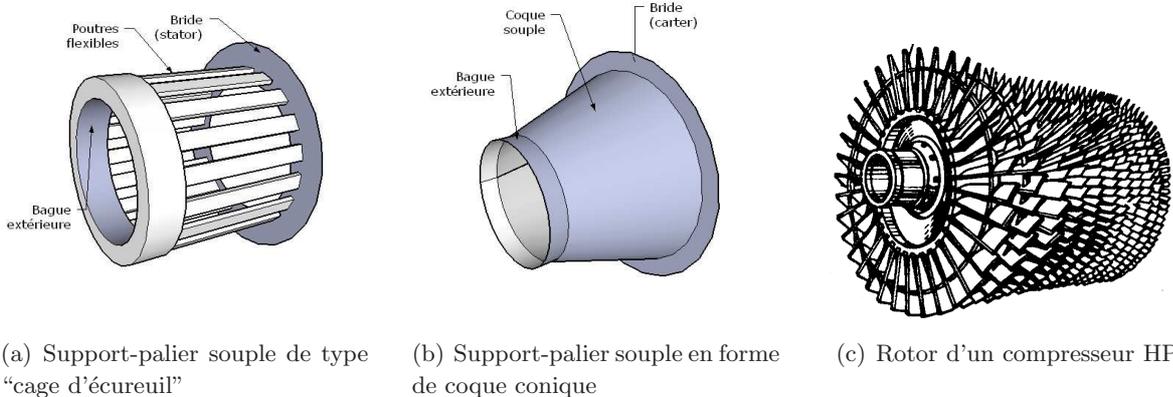
FIG. 1.2 – Eléments d'un moteur birotor



(a) Rotor : 1 – palier avant du compresseur (rouleaux), 2 – rotor du compresseur, 3 – palier arrière du compresseur (billes), 4 – arbre de la turbine, 5 – palier de la turbine, 6 – rotor de la turbine

(b) Stator : 1 – carter d’entrée du compresseur, 2 – carter du compresseur, 3 – carter arrière du compresseur, 4,5 – carters de la chambre de combustion, 6 – carter d’entrée de la turbine, 7 – carter de la turbine

FIG. 1.3 – Exemples de schémas de force de rotors et de stators [Loz92]



(a) Support-palier souple de type “cage d’écureuil”

(b) Support-palier souple en forme de coque conique

(c) Rotor d’un compresseur HP

FIG. 1.4 – Exemples de composants

conceptions combinant les deux solutions sont de plus en plus répandues. Une vue schématique d’un exemple de rotor de turboréacteur est donnée sur la figure 1.3(a). Les aubages du rotor BP sont plus grands, notamment l’étage de la soufflante (fan). Plus les étages du générateur à gaz sont près de la chambre de combustion, plus la pression est élevée et donc plus leur vitesse de rotation est importante, tandis que la section de la veine (et donc la hauteur des pales) est plus réduite.

Les rotors, selon leur longueur et selon la manière dont sont répartis leurs éléments fonctionnels, peuvent être portés par deux à quatre paliers.

Dans le cadre d’une modélisation du type dynamique d’ensemble du moteur, ces organes sont en général modélisés par des éléments poutres, des masses, des inerties et des raideurs concentrées. Cette modélisation permet de rendre compte du comportement global de la machine.

Le **stator** du moteur comporte les carters et les roues fixes (redresseurs du flux) du compresseur et de la turbine et la chambre de combustion (figure 1.3(b)). A partir de la périphérie, les bras traversent la veine et tiennent des supports-paliers souples, dans lesquels sont montés les roulements qui servent de points d’appui aux rotors (figures 1.4(a) et 1.4(b)). La souplesse des supports-paliers est nécessaire pour réduire la sollicitation vibratoire des arbres et des roulements, ainsi que pour compenser des défauts d’alignement. Dans des calculs de dynamique d’ensemble le stator est réduit aux éléments massifs à raideur donnée de type tubulaire.

La liaison entre les rotors et le stator, permettant de maintenir les rotors dans leur position, est assurée par des **paliers à roulements**. Le choix de roulements par rapport aux paliers hydrauliques est dû à leur plus faible encombrement axial, à leur plus faible résistance à la rotation ainsi qu'à une moindre consommation de lubrifiants et une meilleure stabilité de la machine. Les roulements à billes assurent la retenue axiale, tandis que les roulements à rouleaux permettent une liberté axiale pour la dilatation thermique des arbres. Généralement, un rotor est porté par un roulement à billes et un ou plusieurs roulements à rouleaux (figure 1.3(a)). Le plus souvent, le roulement relie le rotor au stator. Cela permet d'introduire un support relativement souple de type "cage d'écureuil" (figure 1.4(a)) ou coque conique (figure 1.4(b)) de manière à compenser les mésalignements et à atténuer les niveaux vibratoires sur les résonances.

Dans le cas bi-rotatif, une conception particulière peut être envisagée en fixant la bague intérieure de ce dernier sur un des deux arbres et la bague extérieure sur l'autre. Le roulement ainsi installé s'appelle **interarbre**. Cela permet de réduire le poids et l'encombrement dus aux carters, ce qui constitue un avantage majeur. En revanche, cela complique considérablement la situation dynamique en permettant une excitation réciproque des rotors. La conception des circuits de lubrification est également plus difficile.

Malheureusement, les faibles pertes d'énergie qui sont un avantage pour l'efficacité thermodynamique des roulements se traduisent par un problème vibratoire, lié au manque d'amortissement. Afin de dissiper l'énergie vibratoire, notamment sur les régimes critiques caractérisés par des amplitudes importantes, des **amortisseurs** de plusieurs types sont utilisés, impliquant la dissipation par frottement sec ou hydrodynamique, notamment les amortisseurs à film d'huile (*squeeze film damper*) confiné entre deux bagues n'effectuant pas de rotation relative.

### 1.1.3 Sources de vibrations et effets non-linéaires

Les moteurs d'avion sont sujets à de nombreuses sources d'excitation à la fois de nature aérodynamique et mécanique. Dans bien des cas ces sources de vibrations vont être liées à des comportements non-linéaires de certains organes donnant lieu à un enrichissement naturel de la dynamique. Sans être exhaustif, on verra dans ce paragraphe quelques unes des sources importantes de ces phénomènes.

- **Balourd**. Le balourd des rotors est la source principale des vibrations des moteurs d'avions en fonctionnement. Les sources de balourds peuvent être multiples. Les erreurs géométriques liées à l'usinage et au montage sont une première cause de présence du balourd résiduel. Ce dernier peut évoluer au cours de l'exploitation du moteur, notamment à cause du vieillissement qui se traduit par des déformations irréversibles dues principalement au fluage et à l'érosion des surfaces, la forme du rotor évolue, ce qui entraîne l'évolution du balourd résiduel. D'autres types de balourds sont observés, en particulier, le *balourd thermique*, dû à un refroidissement asymétrique du rotor, et le *balourd aérodynamique*, émanant de certaines interactions avec le fluide dont l'effet est assimilable à un balourd [Khr89, Loz92].
- **Roulements**. Les rotors des moteurs d'avion sont portés par des roulements. Hormis des excitations dues aux défauts de forme et de surface (ondulation des pistes, défauts de billes ou rouleaux), les roulements comportent un nombre fini de corps roulants, ce

qui engendre une variation périodique de la raideur de la liaison et donc une excitation paramétrique, source d'instabilité. Les vibrations de cette nature sont généralement complexes mais d'amplitudes assez faibles (voir par exemple Tiwari et al. [TGP00b, TGP00a], Harsha et al. [HSP03]). Ces vibrations ne détériorent pas l'ensemble de la machine, mais peuvent entraîner l'endommagement des roulements eux-mêmes (selon le spectre de réponse, on peut localiser et identifier les défauts [VIB81]). Une autre source de perturbation vibratoire réside en leur raideur non-linéaire, due aux contacts et éventuellement aux jeux, ce qui enrichit le spectre de la réponse et modifie la forme des résonances [Ehr98].

- **Hydraulique.** Pour d'autres types de machines tournantes, les liaisons des rotors aux stators sont réalisées par des paliers hydrodynamiques qui sont souvent sources de phénomènes vibratoires caractéristiques : les paliers hydrodynamiques donnent lieu au *tourbillonnement* (*oil whirl*, oscillations à la moitié de la fréquence de rotation) ou au *fouettement* (*oil whip*, oscillations sévères, dues à l'instabilité du couplage circulaire par le coussin d'huile du palier). De surcroît, les caractéristiques de ces dispositifs force-déplacement/vitesse sont non-linéaires et dépendent du régime de rotation.

Des effets dus aux appuis hydrodynamiques peuvent en partie survenir dans les moteurs d'avions par l'intermédiaire des *amortisseurs hydrodynamiques*. Ces dispositifs sont destinés à dissiper l'énergie vibratoire au niveau des roulements. Ils sont constitués d'un film d'huile, le plus souvent écrasé entre deux éléments du stator, qui n'est pas sujet aux instabilités de type tourbillonnement ou fouettement. Leur comportement est néanmoins fortement complexe à cause de la présence du fluide. Les propriétés de raideur et d'amortissement dépendent de la fréquence et de l'amplitude des déplacements radiaux des bagues de l'amortisseur [Van88, AR03].

- **Forces aérodynamiques.** L'interaction avec le flux dans les turbomachines est très complexe. Les perturbations circonférentielles du champ de pression apportent une excitation au niveau de l'aubage, créent un effort axial et un couple de torsion statiques. Les effets aérodynamiques peuvent aussi être une source d'instabilité de vibration latérale d'ensemble de la roue, induite par les forces au niveau des têtes d'aubes. Ces efforts peuvent être décrits par le modèle d'Alford (voir, par exemple [Sto92]), introduisant un terme circulaire dans l'équation de mouvement qui conduit à l'apparition d'instabilité.
- **Anisotropie du rotor.** Nous avons vu précédemment que les roulements pouvaient être source d'excitation paramétrique. Il en va de même pour les rotors anisotropes [Ehr98, Chi93]. Cette problématique peut concerner les moteurs à hélices ou les machines électriques, où la forme fonctionnelle des rotors impose une asymétrie forte. En ce qui concerne les turboréacteurs multi-corps modernes, l'asymétrie des rotors compresseurs et turbines axiaux est assez faible (figure 1.4(c)) pour que le problème ne se pose pas [Loz92].
- **Contact rotor–stator.** C'est un mode de fonctionnement anormal du moteur, survenant quand un contact continu ou intermittent s'établit entre le rotor et le stator, notamment au niveau des aubages et des joints d'étanchéité. La différence par rapport au mouvement dans les jeux de roulements consiste en la présence d'une forte composante tangentielle de la réaction au niveau du contact. Cette interaction engendre des mouvements de précession inverse. Dans certaines parties du moteur, la circonférence de

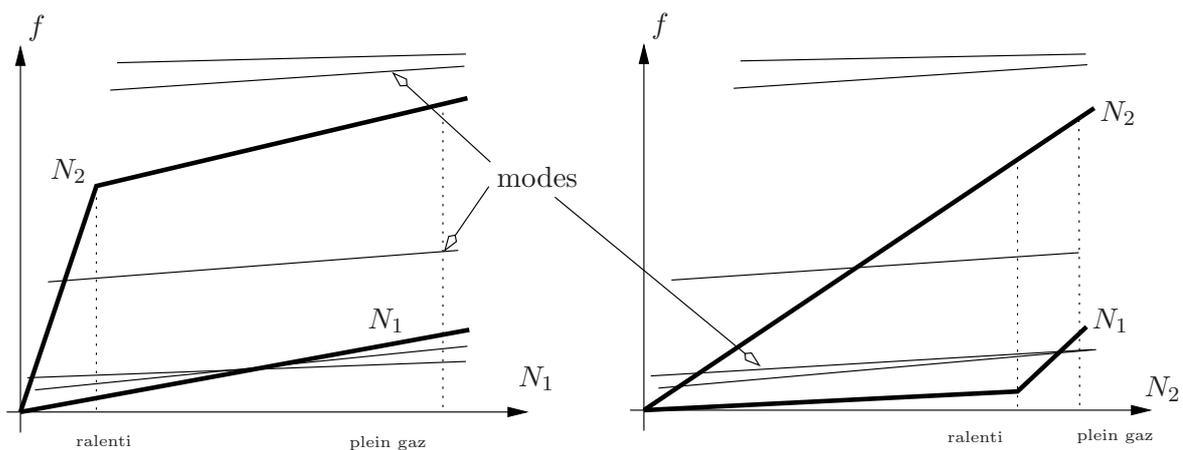


FIG. 1.5 – Exemple de diagramme de Campbell d'un turboréacteur bi-rotors : par rapport aux rotors 1 (gauche) et 2 (droite).

la veine est réalisée en matériaux abrasables de manière à réduire l'impact dynamique de ce type de fonctionnement et favoriser le rodage mutuel des pièces.

#### 1.1.4 Particularités dynamiques d'un turboréacteur multi-corps

Le comportement dynamique d'un moteur d'avion à double corps peut être décrit par le diagramme de Campbell (figure 1.5). Les deux rotors tournent à des vitesses différentes. La plage de fonctionnement principale se situe entre les régimes "ralenti" et "plein gaz" [Khr89, Loz92]. Le régime de croisière étant relativement proche de celui "plein gaz", ces deux zones représentent la majeure partie du temps de fonctionnement du moteur. Les deux graphes correspondent à la même information, mais l'abscisse, correspondant au "régime", est la vitesse de rotation du rotor BP ( $N_1$ ) pour la gauche et celle du HP ( $N_2$ ) pour la droite. Les deux traits gras représentent la fréquence égale à la vitesse de rotation de chacun des deux rotors ( $f = N_1$ ,  $f = N_2$ ). Ils indiquent les fréquences d'excitation par balourd pour chaque régime du moteur.

La structure du moteur d'avion étant complexe, constituée d'éléments allégés et donc souples, celui-ci possède un grand nombre de modes propres (suspension, disques, arbres...) dans la plage de fonctionnement. Dans le cadre de la dynamique d'ensemble, *on ne s'intéressera qu'aux modes propres dont les déformées concernent l'ensemble du moteur en vibrations transversales*. Une manière rigoureuse de caractériser une déformée modale est la répartition de l'énergie de déformation et/ou de l'énergie cinétique entre les sous-ensembles [Khr81, LF97].

Pour éviter la fatigue d'ensemble et ne pas engendrer d'endommagement de la structure, il est important de placer les vitesses critiques correspondant aux modes d'ensemble de façon à les éloigner des points de fonctionnement sur lesquels le moteur reste de manière durable (ralenti, croisière, décollage), et ce par rapport à l'excitation par chacun des deux rotors.

Un autre problème de dynamique d'ensemble consiste à traverser les vitesses critiques, au-delà desquelles la machine est amenée à fonctionner. Il s'agit donc d'assurer la résistance de la structure lors de la réponse sur les pics de résonance, bien que passés en transitoire. Pour limiter les niveaux vibratoires sur les vitesses critiques, des supports-paliers souples et

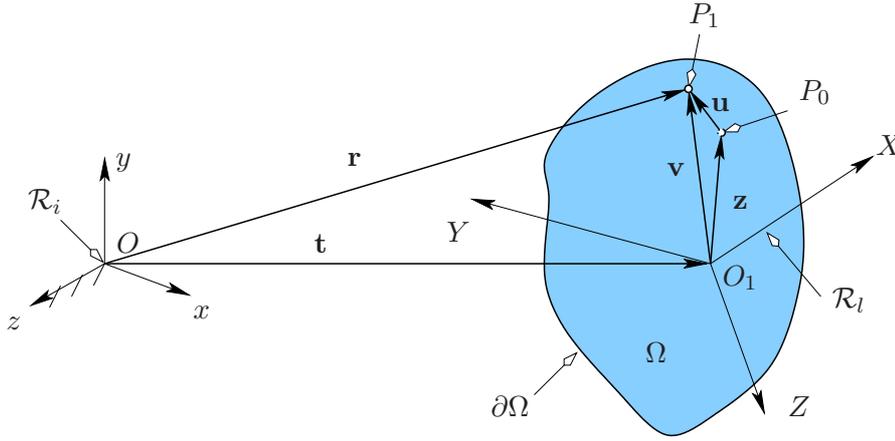


FIG. 1.6 – Solide déformable

des amortisseurs sont utilisés. Cette mesure n'a d'effet que si les supports-paliers participent suffisamment au mouvement du système. On essaye donc d'éviter en général les modes propres sur les déformées pour lesquels une partie considérable d'énergie de déformation est contenue dans les rotors, notamment dans les arbres, les paliers interarbres et les pièces avoisinantes. Pour certains rotors, des limiteurs de déplacement sont introduits de manière à modifier le système lors des vibrations excessives provoquant de grandes déflexions de l'arbre.

## 1.2 Dynamique des solides déformables en rotation

### 1.2.1 Modélisation tridimensionnelle

Il s'agit ici d'introduire de façon rigoureuse la mise en équation d'un solide en rotation soumis à des déformations. Dans ce but, nous écrivons les énergies cinétiques et potentielles mises en jeu pour un tel solide. Puis dans une deuxième étape, nous introduirons une approximation de Ritz afin d'écrire l'ensemble des équations discrétisées du problème.

On considère le système constitué d'un solide déformable occupant le volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (figure 1.6) avec la frontière  $\partial\Omega$  dans un repère inertiel orthonormé  $\mathcal{R}_i$  ( $Oxyz$ ). La description de la cinématique se fera de manière lagrangienne, chaque point du solide étant désigné par ses coordonnées à l'état non-déformé du solide sous forme d'un vecteur  $\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} [X, Y, Z]^T$  dans  $\mathcal{R}_i$ . On définit ensuite l'évolution du solide par son champ de positions  $\mathbf{r}(\mathbf{z}, t)$  dans  $\mathcal{R}_i$  (ou  $\mathbf{v}(\mathbf{z}, t)$  dans le repère lié au solide  $\mathcal{R}_l$  ( $O_1XYZ$ )). Il s'agit donc de déterminer  $\mathbf{r}(\mathbf{z}, t)$  en tant que fonction  $\Omega \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ou, de manière équivalente,  $\mathbf{v}$  ou  $\mathbf{u}$ ). A l'instant initial, le corps est soumis à un champ de déplacements  $\mathbf{u}_0(\mathbf{z})$  :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{z}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{z}) + \mathbf{z}. \quad (1.1)$$

A l'instant  $t > 0$ , la position  $\mathbf{v}$  des points du solide dans  $\mathcal{R}_l$  est généralement différente de celle initiale :

$$\mathbf{v}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{z}. \quad (1.2)$$

Notre problème dynamique consistera à rechercher le mouvement du système pour des chargements volumiques  $\mathbf{f}_{\text{vol}}(\mathbf{z}, t)$ ,  $\mathbf{z} \in \Omega$  et surfaciques  $\mathbf{f}_{\text{surf}}$ ,  $\mathbf{z} \in \partial\Omega$ .

Le changement de repère de  $\mathcal{R}_l$  vers  $\mathcal{R}_i$  se décompose en un vecteur de translation  $\mathbf{t}(t)$  ( $O \rightarrow O_1$ ) et une matrice de rotation  $\Theta(t)$ . La matrice de rotation est orthogonale ( $\Theta^T \Theta = \mathbf{I}$ ). On notera les grandeurs exprimées dans  $\mathcal{R}_i$  avec un tilde ( $\tilde{\cdot}$ ). Le déplacement dans  $\mathcal{R}_i$  s'écrit donc comme suit :

$$\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{z}}, t) = \mathbf{t}(t) + \Theta(t)\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{t}(t) + \Theta(t)(\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, t)). \quad (1.3)$$

Pour une description dynamique, il est également nécessaire de définir les vitesses des points du solide :

$$\dot{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{z}}, t) = \dot{\mathbf{t}}(t) + \dot{\Theta}(\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, t)) + \Theta\dot{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{z}, t), \quad (1.4)$$

où, en introduisant le vecteur rotation  $\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$  du référentiel  $\mathcal{R}_l$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$ , on peut alors écrire :

$$\dot{\Theta} = \Theta\boldsymbol{\Omega}, \quad (1.5)$$

avec

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Dans notre étude, nous nous limiterons au cas  $\boldsymbol{\Omega} = \text{const.}$

Les équations du mouvement seront formulées à partir du principe variationnel de Hamilton exprimant la stationnarité de la fonctionnelle énergétique suivante :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \mathcal{U}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{W} - \mathcal{F}) dt = 0 \quad (1.7)$$

avec l'énergie cinétique  $\mathcal{T}$ , l'énergie potentielle de déformation  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{W}$  le travail des forces généralisées non-conservatives et  $\mathcal{F}$  la fonction de dissipation.

Dans le cas où le mouvement du système étudié est décrit par  $n$  variables, dites coordonnées généralisées, constituant le vecteur  $\mathbf{q}$ , (1.7) équivaut à vérifier les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial (\mathcal{T} - \mathcal{U})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (1.8)$$

L'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega} (\Theta^T \dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{z}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\Theta^T \dot{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{z}) d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{t}}^T \dot{\mathbf{t}} + 2\dot{\mathbf{t}}^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{z}) d\Omega. \end{aligned} \quad (1.9)$$

L'énergie de déformation élastique  $\mathcal{U}$  de notre solide est donnée par :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{E} \nabla \mathbf{u} d\Omega. \quad (1.10)$$

Ici  $\mathbf{E}$  est la matrice élastique, exprimant la loi de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} + \eta_a \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (1.11)$$

qui relie le vecteur  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}, t)$  des composantes du tenseur de contraintes et le vecteur  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{z}, t)$  des composantes du tenseur de déformations, que l'on écrit de la manière suivante

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{z}}, t) = \nabla \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{z}}, t), \quad (1.12)$$

avec l'opérateur différentiel

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial Z \\ 0 & \partial/\partial Z & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Z & 0 & \partial/\partial X \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Le travail des forces extérieures  $\mathcal{W}$  associé à  $\mathbf{f}_{\text{vol}}$  et  $\mathbf{f}_{\text{surf}}$  (désignant respectivement les forces de volume et de surface), ainsi qu'à la fonction de dissipation  $\mathcal{F}$ , est donné par :

$$\delta \mathcal{W} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{vol}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{surf}} d\partial\Omega - \delta \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (1.14)$$

On introduit ici le travail des forces de dissipation par la fonction de dissipation de Rayleigh  $\mathcal{F}$  qui s'écrit de la manière suivante, en adoptant l'hypothèse d'un amortissement visqueux :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_a \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega. \quad (1.15)$$

A cette étape, nous pouvons écrire les équations du mouvement d'un point de vue continu. Dans bien des cas, nous sommes amenés à discrétiser ces équations pour pouvoir les résoudre efficacement.

**Modèle discrétisé.** En s'appuyant sur une démarche de type Rayleigh-Ritz, nous allons exprimer les équations matricielles du mouvement. Cette approche consiste à décomposer le champ de déplacements sur une base tronquée de fonctions cinématiquement admissibles. Dans  $\mathcal{R}_l$ , cette procédure revient à écrire le déplacement sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, t) \approx \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{z}}) \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (1.16)$$

On discrétise ainsi l'espace de fonctions  $\mathbf{u}$  recherchées sur  $n$  composantes du vecteur de coordonnées généralisées  $\tilde{\mathbf{x}}$  avec la matrice  $\mathbf{H}$  dite des fonctions cinématiquement admissibles ( $3 \times n$ ).

Ainsi, par substitution de (1.16) dans (1.8), on obtient l'équation matricielle de la dynamique d'un solide déformable dans le **repère mobile** :

$$\mathbf{M} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{C} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{g}(t) = 0, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{G}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} + \mathbf{N}, \quad (1.19)$$

avec  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  matrices de masse, d'amortissement généralisé et de raideur généralisée,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  vecteurs de déplacements, de forces non-conservatives et de forces d'excitation. Les matrices  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$  se décomposent en deux sous-matrices :  $\mathbf{D}$  symétrique dite matrice d'amortissement,  $\mathbf{G}$  antisymétrique dite matrice gyroscopique,  $\mathbf{K}$  symétrique dite matrice de raideur,  $\mathbf{N}$  symétrique dite matrice de termes centrifuges.

Ces matrices sont déduites de (1.8), compte tenu de (1.9), (1.10) et (1.14) :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{E} \nabla \mathbf{H} d\Omega, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{D} = \int_{\Omega} \eta_a (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{E} \nabla \mathbf{H} d\Omega + \int_{\Omega} \eta_b \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} d\Omega, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} d\Omega. \quad (1.24)$$

Quand plusieurs composants sont considérés (rotors et stators), il peut être préférable de formuler l'équation du mouvement dans le **repère fixe**.

Cela nous amène alors à une équation matricielle analogue à (1.17)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(t) = 0, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{G}, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N}. \quad (1.27)$$

La différence entre les deux formulations réside principalement dans la matrice antisymétrique  $\mathbf{P}$  des termes circulatoires, qui viennent de la retranscription des vitesses et des déplacements (et donc des déformations) dans le rotor dans le repère fixe. La formulation dans le repère fixe sera utilisée dans la suite du mémoire sauf mention contraire.

L'application de cette mise en équation au cas des rotors modélisés par éléments poutres / masses / ressorts dans le repère fixe sera développée dans la section suivante.

### 1.2.2 Modélisation poutres

Dans le cadre d'une modélisation simplifiée de la dynamique des rotors, une approche de type RDM est envisagée. Il s'agit donc de modéliser l'arbre comme une simple poutre élanée en rotation. Les disques quant à eux sont vus comme de simples inerties en rotation. En ce qui concerne les parties fixes, là encore on utilise une modélisation simple (poutre, masse ou ressort) afin de prendre en compte leur influence.

Comme on ne s'intéressera qu'aux vibrations transversales, on exclura dans la suite la coordonnée axiale  $z$  de nos considérations. Dans le cadre de la théorie des poutres, on aura quatre degrés de liberté par nœud (deux translations  $u$  et  $v$  et deux rotations  $\psi$  et  $\phi$  de la fibre moyenne, figure 1.7). L'ensemble de la structure est modélisé par 3 types de composants :

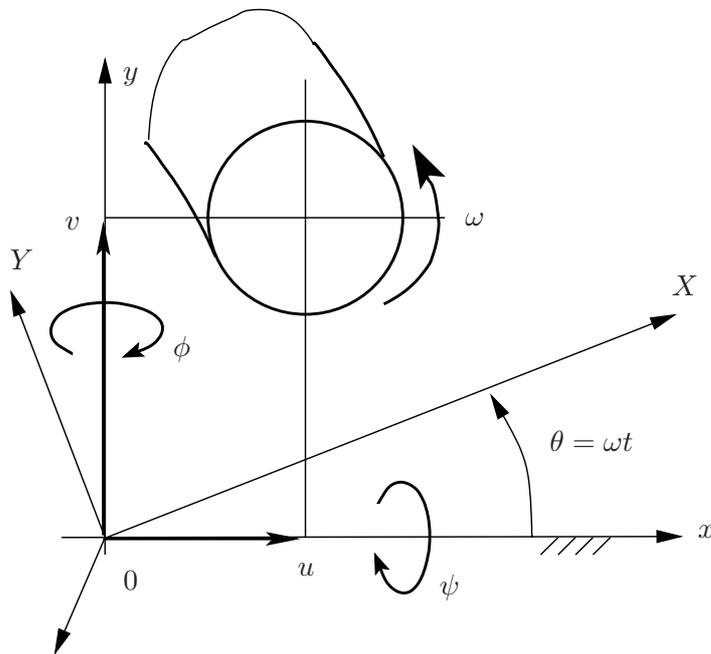
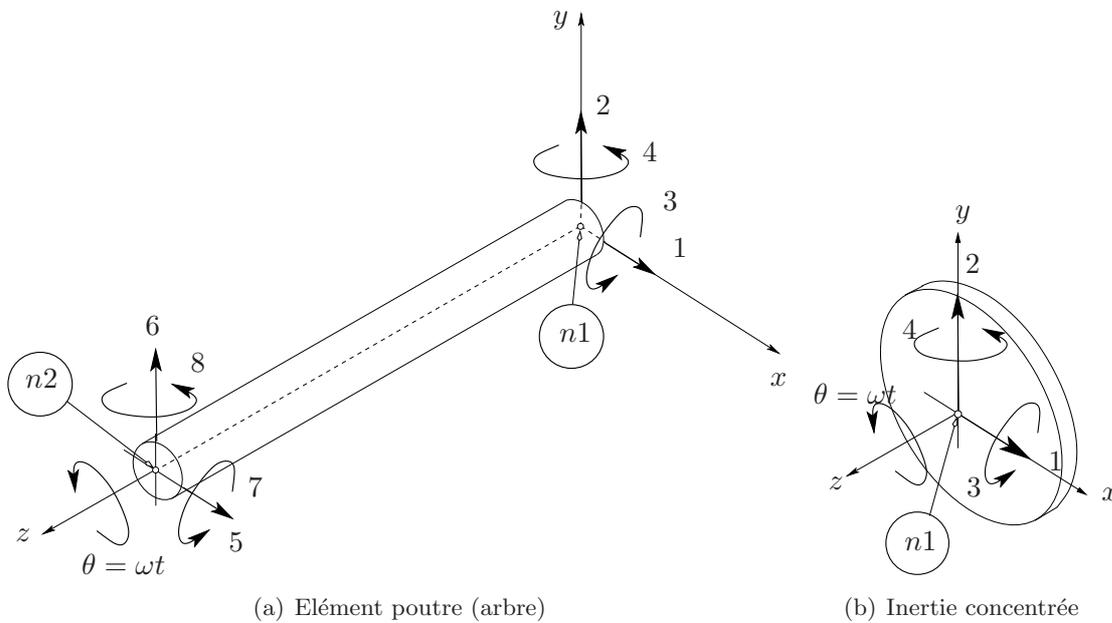


FIG. 1.7 – Repères utilisés et convention de signes



(a) Élément poutre (arbre)

(b) Inertie concentrée

FIG. 1.8 – Eléments finis

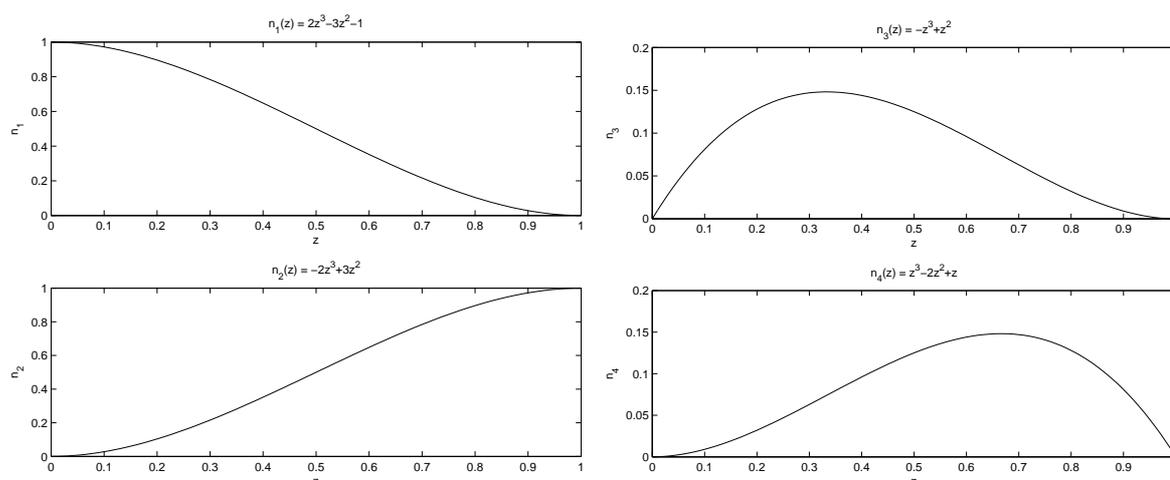


FIG. 1.9 – Fonctions de forme : polynômes d’Hermite

1. **Poutre** (arbre, figure 1.8(a)). Les énergies cinétique  $\mathcal{T}^{(\text{pout})}$  et potentielle  $\mathcal{U}^{(\text{pout})}$  et la fonction de dissipation  $\mathcal{F}^{(\text{pout})}$  sont données par :

$$\mathcal{T}^{(\text{pout})} = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) dz + \frac{\rho I_D}{2} \int_0^L (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) dz + 2\rho I_D \omega \int_0^L \phi \dot{\psi} dz + \rho I_D L \omega^2; \quad (1.28)$$

$$\mathcal{U}^{(\text{pout})} = \frac{EI_D}{2} \int_0^L \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 \right) dz = \frac{EI_D}{2} \int_0^L \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right) dz; \quad (1.29)$$

$$\mathcal{F}^{(\text{pout})} = \frac{EI_D \eta_a}{2} \int_0^L \left( \left( \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} \right)^2 \right) dz + \frac{EI_D \eta_a \omega}{2} \int_0^L \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z} dz. \quad (1.30)$$

avec  $\rho$  la densité,  $E$  le module de Young,  $L$  la longueur,  $S$  la surface,  $I_D$  l’inertie diamétrale de la section droite et  $\eta_a$  le facteur de perte.

Les fonctions de forme pour exprimer les déplacements en fonction de la coordonnée axiale sont données par les polynômes d’Hermite de degré trois  $n_1(z)$ ,  $n_2(z)$ ,  $n_3(z)$ ,  $n_4(z)$  (figure 1.9) :

$$u(z) = u(0)n_1(z) + u(L)n_2(z) + \phi(0)n_3(z) + \phi(L)n_4(z); \quad (1.31)$$

$$v(z) = v(0)n_1(z) + v(L)n_2(z) + \psi(0)n_3(z) + \psi(L)n_4(z); \quad (1.32)$$

$$\phi(z) = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \psi(z) = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (1.33)$$

On peut alors obtenir les matrices suivantes du système :  $\mathbf{M}^{(\text{pout})}$  de masse,  $\mathbf{K}^{(\text{pout})}$  de raideur,  $\mathbf{G}^{(\text{pout})}$  gyroscopique,  $\mathbf{C}^{(\text{pout})}$  d’amortissement et  $\mathbf{P}^{(\text{pout})}$  circulatoire.

2. **Inertie concentrée** (disque, figure 1.8(b)). Il s’agit principalement des disques axi-symétriques dont les caractéristiques sont définies par leurs masses  $m$ , leurs inerties

polaires (autour de l'axe de rotation  $z$ )  $I_P$  et enfin leur inerties diamétrales  $I_D$ . Dans ce cas l'énergie cinétique  $\mathcal{T}^{(\text{mass})}$  est donnée par :

$$\mathcal{T}^{(\text{mass})} = \frac{1}{2}(m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + I_D(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2) + 2I_P\omega\phi\dot{\psi} + I_P\omega^2) \quad (1.34)$$

ce qui permet d'obtenir les matrices gyroscopique  $\mathbf{G}^{(\text{mass})}$  et de masse  $\mathbf{M}^{(\text{mass})}$  de cet élément.

3. **Raideur concentrée.** Cet élément représente généralement les paliers et les supports-paliers, ainsi que les joints d'accouplement. La contribution énergétique des paliers à l'action Hamiltonienne s'exprime en termes d'énergie de déformation  $\mathcal{U}^{(\text{ress})}$  et de dissipation  $\mathcal{F}^{(\text{ress})}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(\text{ress})} = & \frac{1}{2}(k_{xx}(u_2 - u_1)^2 + k_{yy}(v_2 - v_1)^2 + k_{\psi\psi}(\psi_2 - \psi_1)^2 + k_{\phi\phi}(\phi_2 - \phi_1)^2 \\ & + 2k_{xy}(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) + 2k_{x\psi}(u_2 - u_1)(\psi_2 - \psi_1) + 2k_{x\phi}(u_2 - u_1)(\phi_2 - \phi_1) \\ & + 2k_{y\psi}(u_2 - u_1)(\psi_2 - \psi_1) + 2k_{y\phi}(u_2 - u_1)(\phi_2 - \phi_1) + 2k_{\psi\phi}(\psi_2 - \psi_1)(\phi_2 - \phi_1)); \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(\text{ress})} = & \frac{1}{2}(c_{xx}(u_2 - u_1)^2 + c_{yy}(v_2 - v_1)^2 + c_{\psi\psi}(\psi_2 - \psi_1)^2 + c_{\phi\phi}(\phi_2 - \phi_1)^2 \\ & + 2c_{xy}(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) + 2c_{x\psi}(u_2 - u_1)(\psi_2 - \psi_1) + 2c_{x\phi}(u_2 - u_1)(\phi_2 - \phi_1) \\ & + 2c_{y\psi}(u_2 - u_1)(\psi_2 - \psi_1) + 2c_{y\phi}(u_2 - u_1)(\phi_2 - \phi_1) + 2c_{\psi\phi}(\psi_2 - \psi_1)(\phi_2 - \phi_1)). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ces expressions permettent d'avoir directement les matrices de raideur  $\mathbf{K}^{(\text{ress})}$  et d'amortissement  $\mathbf{C}^{(\text{ress})}$ .

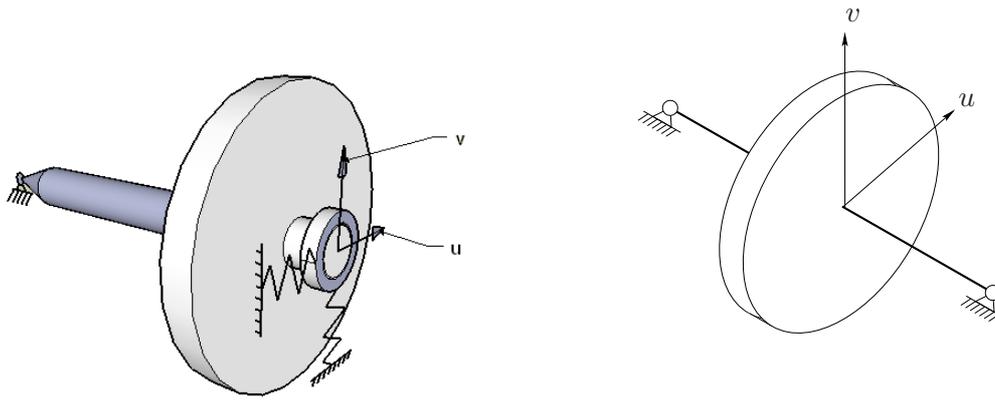
L'assemblage de ces matrices nous donne l'équation (1.25) pour une modélisation poutre du système.

### 1.3 Dynamique des rotors linéaire

La dynamique des machines tournantes s'appuie sur un ensemble de notions particulières, comme le balourd, le couplage gyroscopique, les vitesses critiques. Avant de procéder aux applications concrètes, et plus particulièrement, à la dynamique d'ensemble des moteurs d'avions, nous rappellerons les phénoménologies propres aux machines tournantes.

Les problèmes principaux liés à la dynamique des rotors sont le calcul des vitesses critiques et la réponse à balourd quasi-stationnaire ou transitoire. Nous allons nous intéresser notamment au cas quasi-stationnaire car celui-ci est indépendant de l'accélération angulaire et fournit des résultats intrinsèques au système étudié.

La bibliographie du domaine est vaste. D'un point de vue historique, les premiers travaux théoriques sont dûs à Rankine (1869) puis à Jefcott (1919) qui a montré la possibilité de fonctionnement d'une machine tournante au-delà de sa première vitesse critique grâce à l'auto-recentrement du rotor [Van88]. Le volume des publications sur la dynamique des systèmes tournants a ensuite augmenté considérablement mais on retiendra les ouvrages des principaux spécialistes, notamment Stodola (1927) qui a utilisé des modèles prenant en compte des effets



(a) Rotor avec effets gyroscopiques (rotor rigide avec une suspension souple à une extrémité)

(b) Rotor de Jeffcot (disque rigide en mouvement transversal par rapport à un arbre souple)

FIG. 1.10 – Rotor élémentaire

gyroscopiques, et Dimentberg [Dim59] qui a décrit l'influence de l'anisotropie du stator sur l'apparition des mouvements de précession rétrograde. Les principaux phénomènes d'instabilité en dynamique des rotors ont été caractérisés également au début du XX siècle.

Après une compréhension phénoménologique des principes de fonctionnement des machines tournantes, de nombreux efforts ont été consacrés à l'approfondissement de la prise en compte des non-linéarités d'une part et à la modélisation détaillée des machines tournantes d'autre part.

En ce qui concerne les méthodes de modélisation de machines, elles ont évolué depuis des modèles réduits à un disque (Jeffcot, Laval), jusqu'aux modèles détaillés par matrices de transfert (Miklestadt-Prohl, 1956 [Gen98]) et par éléments finis (Nelson et McVaugh, 1976 [NM76]), en passant par les modèles à masses concentrées.

Cette introduction aux généralités de la dynamique des rotors s'appuie sur les ouvrages de référence en dynamique des rotors tels [Big80, Dim59, Bol61, Van88, Ehr98, Chi93, LF97].

La dynamique des machines tournantes comme nous venons de le rappeler, est associée à une mise en équation particulière. En effet, la présence des termes gyroscopiques et circulatoires conduit à une phénoménologie spécifique. De plus, la présence de la dissymétrie sur les structures (fixes ou en rotation) introduit là encore un comportement spécifique du système. C'est l'ensemble de ces phénomènes qui seront abordés dans la suite au travers d'exemples simples, basés sur un système tournant élémentaire à deux degrés de liberté donné en figure 1.10. L'exemple traité (figure 1.10(a)), présentera un couplage gyroscopique entre les degrés de liberté transversaux, à la différence du rotor de Jeffcot classique (figure 1.10(b)).

**Effets gyroscopiques.** La matrice gyroscopique induit un couplage entre les vibrations dans les deux plans  $Oxz$  et  $Oyz$ . Soit un système conservatif décrit par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{g}(t), \quad (1.37)$$

avec  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{K}$  matrices de masse, de dissipation et de raideur,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{g}$  vecteurs de déplacements généralisés et d'excitation. La matrice des termes gyroscopiques  $\mathbf{G}$  est proportionnelle à la

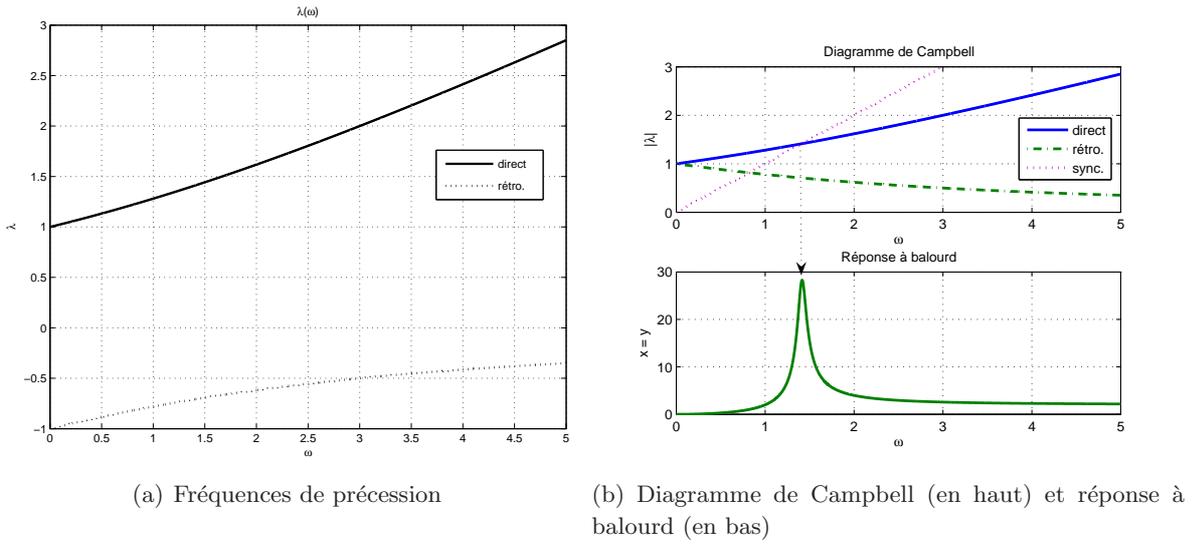


FIG. 1.11 – Vibrations libres et forcées du système (1.40)

vitesse de rotation :

$$\mathbf{G} = \omega \mathbf{G}_0. \quad (1.38)$$

Suite au couplage gyroscopique qui est fonction de la vitesse de rotation (1.38), les valeurs propres du problème généralisé

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{G} + \mathbf{K}) \mathbf{x} = 0 \quad (1.39)$$

dépendent à leur tour de la vitesse de rotation. Un outil de base de représentation de l'évolution de la situation dynamique des systèmes tournants est le tracé de la valeur absolue des pulsations  $\lambda_i$  en fonction du régime  $\omega$ , appelé **diagramme de Campbell**.

Soit, à titre d'exemple, un système gyroscopique caractérisé par les matrices suivantes :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

L'évolution de  $\lambda$  en fonction de  $\omega$  (compte tenu du sens de précession) est donnée sur la figure 1.11(a). Le diagramme de Campbell correspondant est donné sur la figure 1.11(b). On constate différentes évolutions entre les modes direct et rétrograde : les points de croisement avec la vitesse de rotation ont lieu pour des valeurs de  $\lambda$  et  $\omega$  différentes. A l'aide du diagramme de Campbell les vitesses critiques peuvent être lues directement en localisant l'intersection de la droite correspondant à la vitesse de rotation de l'arbre et des courbes d'évolution des pulsations propres du système. Ces vitesses critiques sont nommées *principales* ou *primaires* [Gen98] car elles correspondent au croisement défini par la droite

$$\lambda = k\omega, \quad (1.41)$$

avec  $k = 1$ . On parlera également de vitesses critiques secondaires pour les intersections avec les droites pour  $k = 2$ . Dans le cas de rotors horizontaux, on parle de vitesses critiques

*secondaires* [Gen98], qui sont dues à la pesanteur. Vance [Van88] fournit une interprétation de telles vitesses critiques en tant qu'instabilité de précession d'un rotor, doté d'amortissement interne sous l'action de son poids propre ou d'une autre force latérale constante. Ces vitesses critiques peuvent être calculées de façon analogue aux vitesses principales avec  $k = 2$  dans (1.41).

**Réponse à balourd** Les forces excitatrices peuvent être de nature variée. En présence de vibrations extérieures ou d'un mouvement d'ensemble, les machines peuvent être excitées par leur stator ou chargées de manière quasi-statique par des effets gyroscopiques ou d'accéléérations. La source principale d'excitation vibratoire reste le **balourd** des rotors.

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_{\cos} \cos \omega t + \mathbf{g}_{\sin} \sin \omega t = \omega^2 (\mathbf{g}_{0\cos} \cos \omega t + \mathbf{g}_{0\sin} \sin \omega t), \quad (1.42)$$

avec  $\omega$  vitesse de rotation du rotor déséquilibré, et où les composantes du vecteur  $\mathbf{g}$  sont disposées de manière à avoir un déphasage de  $\pi/2$  entre les directions  $x$  et  $y$ .

Ce type d'excitation sera considéré comme principal par la suite. L'amplitude d'un déplacement de la machine en fonction de la vitesse de rotation est appelée **réponse à balourd**. La réponse à balourd d'une machine tournante linéaire est calculée de la manière suivante [LF97] : on suppose que le mouvement vibratoire est représenté de la même manière que l'excitation (1.42) :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\cos} \cos \omega t + \mathbf{x}_{\sin} \sin \omega t. \quad (1.43)$$

En substituant (1.43) et (1.42) dans (1.37), on obtient un système algébrique linéaire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{M} & -\omega \mathbf{C} \\ \omega \mathbf{C} & \mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\cos} \\ \mathbf{x}_{\sin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\cos} \\ \mathbf{g}_{\sin} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

qui peut être aisément résolu.

La réponse à balourd du système (1.40) avec la matrice d'amortissement

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

et l'excitation unité

$$\mathbf{g}_{0\cos} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{0\sin} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

est juxtaposée au diagramme de Campbell de ce système sur la figure 1.11(b). On peut voir que seul le pic de réponse pour la précession directe apparaît : le balourd tournant de manière synchrone avec le rotor, le système axisymétrique répond seulement par une précession circulaire directe.

De manière plus générale, le mouvement du centre de l'arbre peut être du type elliptique, ceci étant en général le cas lors d'une perte de symétrie sur les parties fixes. On rappelle que le mouvement peut être analysé aussi bien dans le repère fixe  $(x, y)$  que dans le repère tournant  $(X, Y)$ . Le passage d'un repère à l'autre se fait à l'aide de la matrice de rotation  $\Theta$  :

$$\mathbf{x}_1 = \Theta \mathbf{x}, \quad (1.47)$$

avec

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (1.48)$$

D'un point de vue pratique, on utilisera une notation complexe qui facilitera les calculs et l'interprétation, équivalente à la notation précédente (1.48).

$$\xi = x + iy \quad (\text{ou } \Xi = X + iY). \quad (1.49)$$

Le passage entre les repères s'effectue alors par une multiplication

$$\Xi = e^{i\theta} \xi. \quad (1.50)$$

Si le rotor tourne en régime stationnaire, c'est-à-dire à une vitesse de rotation  $\omega$  constante, on peut alors décrire l'évolution temporelle des coordonnées  $x(t) = x_\omega(t)$  et  $y(t) = y_\omega(t)$  d'une section de l'arbre comme suit :

$$x_\omega = x_{c\omega} \cos \omega t + x_{s\omega} \sin \omega t, \quad (1.51)$$

$$y_\omega = y_{c\omega} \cos \omega t + y_{s\omega} \sin \omega t. \quad (1.52)$$

Sous forme complexe (1.49), cette relation donne alors

$$\xi_\omega = \xi_{c\omega} \cos \omega t + i\xi_{s\omega} \sin \omega t = \xi_{+\omega} e^{i\omega t} + \xi_{-\omega} e^{-i\omega t}, \quad (1.53)$$

$$\xi_{+\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi_{c\omega} + i\xi_{s\omega}}{2}; \quad \xi_{-\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi_{c\omega} - i\xi_{s\omega}}{2}. \quad (1.54)$$

Le mouvement elliptique de l'arbre peut être ramené à la superposition de deux mouvements circulaires de sens opposés. Les demi-axes principaux des trajectoires ellipsoïdales sont les suivants :

- $\xi_1 = |\xi_{+\omega}| + |\xi_{-\omega}|$ , orienté de  $(\arg(\xi_{-\omega}) + \arg(\xi_{+\omega}))/2$  par rapport à  $Ox$ ,
- $\xi_2 = ||\xi_{+\omega}| - |\xi_{-\omega}||$ , orienté de  $(\arg(\xi_{-\omega}) + \arg(\xi_{+\omega}))/2 + \pi/2$  par rapport à  $Ox$ .

On peut distinguer des cas particuliers pour les amplitudes de ces mouvements (figure 1.12) :

1.  $|\xi_{-\omega}| = 0, |\xi_{+\omega}| > 0$  : précession directe circulaire ;
2.  $|\xi_{+\omega}| > |\xi_{-\omega}|$  : précession directe elliptique ;
3.  $|\xi_{+\omega}| = |\xi_{-\omega}|$  : mouvement dans un plan, incliné de  $(\arg(\xi_{-\omega}) + \arg(\xi_{+\omega}))/2$  par rapport à  $Ox$  ;
4.  $|\xi_{+\omega}| < |\xi_{-\omega}|$  : précession rétrograde elliptique ;
5.  $|\xi_{+\omega}| = 0, |\xi_{-\omega}| > 0$  : précession rétrograde circulaire.

Dans le cas de la symétrie parfaite, le balourd constitue une charge statique dans le repère tournant. Le mouvement du système consiste donc en une déformée statique dans le repère tournant ou une précession circulaire dans le repère fixe. On remarquera également que le balourd n'excite que les modes directs, c'est-à-dire les branches "raidissantes" (dont la fréquence propre augmente avec le régime) du diagramme de Campbell.

La perte de symétrie du stator peut être responsable de la forme elliptique des orbites, mais va aussi conduire à l'apparition des modes rétrogrades.

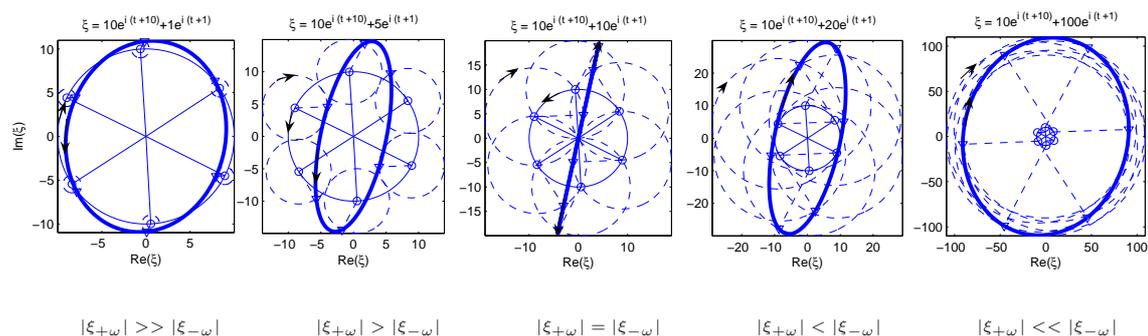
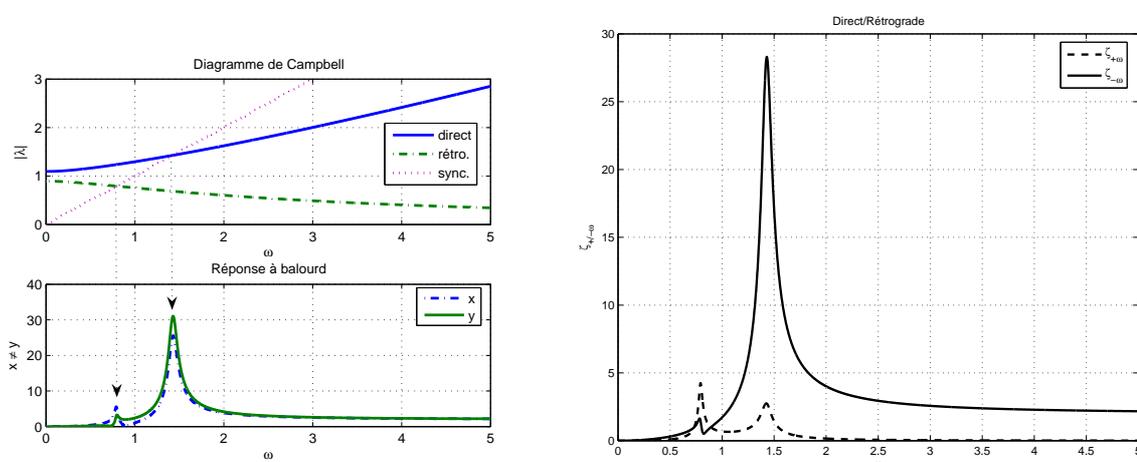


FIG. 1.12 – Mouvement de précession, composé de celui direct (—) et rétrograde (---)



(a) Diagramme de Campbell (en haut) et réponse à balourd (en bas)

(b) Composantes directe et rétrograde

FIG. 1.13 – Vibrations libres et forcées du système à stator anisotrope (1.55)

L'influence de l'anisotropie du stator sur la réponse dynamique du système va être illustrée sur l'exemple suivant. Soit un système similaire à celui de (1.40), doté d'une asymétrie du stator, s'exprimant par la matrice de raideur  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

Soumis à une excitation du type balourd, identique à celui utilisé dans l'exemple précédent (1.46), le système manifeste alors une réponse qualitativement différente. Comme montré sur la figure 1.13, deux pics de réponse sont présents (à  $\omega \approx 0.7$  et à  $\omega \approx 1.4$ ). Ces pics correspondent aux intersections de la droite de l'excitation synchrone avec les branches respectivement rétrograde et directe du diagramme de Campbell. La considération des composantes directe et rétrograde de la précession (figure 1.13(b)) montre que le mouvement rétrograde est prédominant sur le premier pic de réponse à  $\omega \approx 0.7$ .

**Amortissement interne et externe.** Dans le cas des machines tournantes, on distingue l'amortissement s'opérant dans le repère fixe dit *externe* et celui dû au mouvement relatif des éléments du rotor dit *interne*. Suite à la transformation de type (1.48) pour retranscrire la dissipation dans le repère fixe, des termes circulatoires proportionnels à la vitesse de rotation du rotor apparaissent : sur l'exemple à 2 ddls (1.47) pour  $\theta = \omega t$ , un amortissement interne, décrit dans le repère tournant  $OXY$  par la matrice

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad (1.56)$$

se traduit dans le repère fixe par

$$\Theta \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{x}}_1 = \Theta \mathbf{D}_i \Theta^T \dot{\mathbf{x}} + \Theta \mathbf{D}_i \dot{\Theta}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \omega \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad (1.57)$$

le premier terme contenant la matrice symétrique d'amortissement, traduite dans le repère fixe, le second donnant une matrice antisymétrique de termes circulatoires.

Cela entraîne une déstabilisation du système : si le système n'est pas doté d'un amortissement fixe suffisant, alors au-delà de la première vitesse critique une pulsation propre complexe à partie réelle positive apparaît.

## Conclusion

Après une description du principe de fonctionnement et de la constitution des turboréacteurs bi-rotors, nous avons présenté les principales sources d'excitation vibratoire en mettant l'accent sur le balourd et l'aspect multi-harmonique lié notamment à la présence des roulements interarbres.

Nous avons ensuite introduit une modélisation générale de la dynamique des structures, développée de manière à poser le problème de la dynamique pour des systèmes concrets par éléments finis poutres-masses-ressorts.

Nous avons dans une dernière partie présenté les notions de vitesses critiques, de réponse à balourd et de diagramme de Campbell qui sont essentielles à une analyse de type dynamique d'ensemble. Ces notions ont ensuite été illustrées et détaillées par des exemples simples de petits systèmes à stators symétriques et asymétriques de manière à mettre en évidence les phénomènes de précessions directe et rétrograde.

## Chapitre 2

# Modèles de roulements pour la dynamique d'ensemble

Les roulements (figure 2.1) constituent l'élément de liaison entre rotors et stators le plus répandu, notamment dans le milieu aéronautique, où les paliers hydrodynamiques ne peuvent être utilisés car ils nécessitent des débits d'huile prohibitifs pour les circuits de lubrification embarqués et peuvent engendrer des instabilités.

Ce sont des organes complexes dont le fonctionnement tient compte de nombreux aspects, tels que la mécanique du contact, la résistance mécanique, la déformation sous les charges appliquées, la thermique, la lubrification etc.

Pour calculer une réponse vibratoire déterministe, c'est l'aspect rigidité/déformation qui est souvent le plus déterminant. Compte tenu du mouvement des rotors et donc des charges vues par le roulement, les modèles de roulements peuvent être très complexes. On trouve dans la littérature différents modèles dont les niveaux de sophistication sont variables. Ce chapitre présente l'état actuel de la bibliographie sur le sujet, dans l'optique de l'appliquer aux calculs de la dynamique d'ensemble. Un développement théorique est présenté visant un gain numérique dans la prise en compte des caractéristiques associées aux roulements à rouleaux.

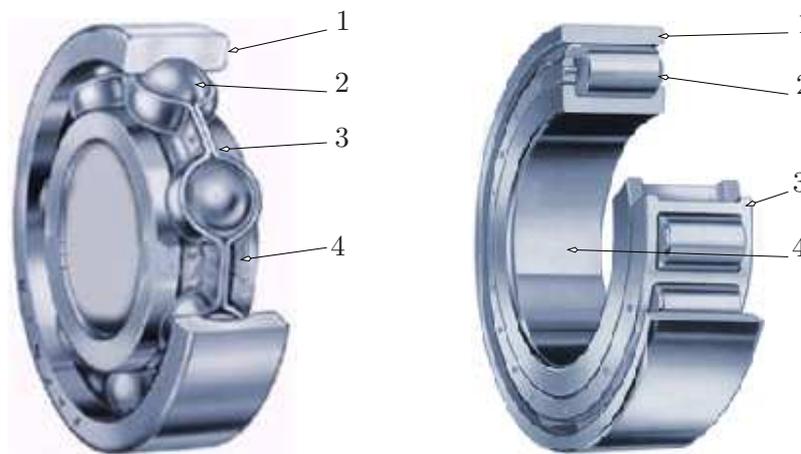


FIG. 2.1 – Roulement : 1 – bague extérieure, 2 – bille/rouleau, 3 – cage, 4 – bague intérieure.

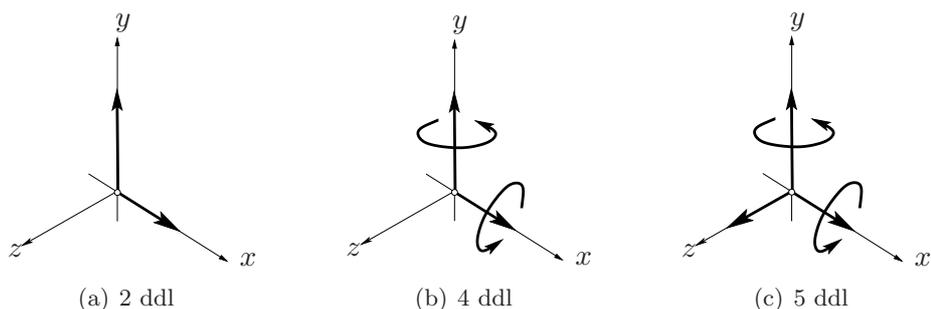


FIG. 2.2 – Modèles de roulement selon le nombre de ddl pris en compte (l’axe de rotation de l’arbre est selon  $z$ )

## 2.1 Modèles de roulements et phénoménologie

Plusieurs approches sont utilisées pour modéliser la réaction des roulements au déplacement relatif des bagues. Elles peuvent être classées selon le nombre de degrés de liberté (2, 4 ou 5, voir figure 2.2) impliqués ou par rapport aux phénomènes pris en compte (présence des jeux, raideur linéaire ou non-linéaire, souplesse variable).

On verra dans ce paragraphe les modèles à deux et cinq degrés de liberté et on analysera les caractéristiques d’un point de vue phénoménologique. On discutera enfin l’utilisation de ces modèles dans les calculs de dynamique d’ensemble des machines tournantes.

Les modèles de roulements à **deux degrés de liberté** ne concernent que le plan transversal à l’arbre porté par le roulement. Ce sont les modèles les plus anciens et les plus simples mais ils sont toujours utilisés dans les cas où les rotations au niveau des roulements (autour de  $x$  et  $y$ ) sont négligeables ou en tant que première estimation pendant la phase de préconception.

Le premier niveau de modèle correspond à la mise en place de liaisons élastiques linéaires transversales qui permettent de façon simple de prendre en compte l’élasticité du roulement. Cette hypothèse reste acceptable dans les cas où les autres éléments de la structure étudiée sont nettement plus souples : puisque les roulements ne se déforment que très faiblement, une faible erreur dans la valeur de la raideur des roulements affecte peu la dynamique d’ensemble.

L’étape suivante de sophistication de ce type de modèle consiste à lui donner une raideur transversale axisymétrique non-linéaire, comme il est décrit par Gargiulo [Gar80] ou dans [VIB81]. Cette caractéristique non-linéaire est associée à une loi de puissance (conformément à la nature de contacts hertziens entre les corps roulants et les bagues du roulement [Har66]), et inclue éventuellement la présence d’un jeu. Les exposants utilisés sont 1.5 pour les roulements à billes et 1.1 ou 10/9 pour les roulements à rouleaux. Dans le cas des roulements à billes, la force de contact, transmise dans le couple bille–piste est disponible analytiquement, ce qui n’est pas le cas pour les roulements à rouleaux.

Comme la valeur de l’exposant pour les rouleaux est plus proche de 1, certains auteurs (Sunnersö [Sun78], Kahraman et Singh [KS91]) les considèrent linéaires ou bilinéaires (linéaires par morceaux compte tenu des jeux). La prise en compte des jeux dans les roulements a, en général, pour effet de faire baisser les vitesses critiques et les pics de réponse à balourd [VIB81]. De plus le comportement dynamique change de façon notable dans les domaines où les niveaux vibratoires sont faibles. En effet, à faible niveau le rotor effectue des oscillations “pendulaires”

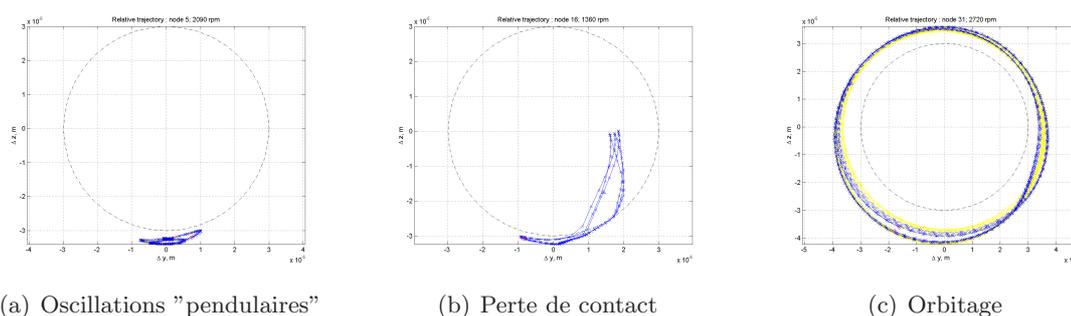


FIG. 2.3 – Modes de fonctionnement de roulement avec jeu [GSTN04] ("—" déplacement relatif des bagues de roulement, "- -" jeu radial).

au fond du jeu sans faire de mouvement de précession à proprement parler (figure 2.3(a)). A l'approche des résonances, quand les efforts dynamiques s'égalisent avec la charge statique (il s'agit souvent de la pesanteur, en particulier dans le cas des rotors horizontaux), la perte de contact a lieu (figure 2.3(b)), puis le jeu est consommé et l'arbre se met à orbiter sur toute la circonférence du roulement (figure 2.3(c)). Ces différents modes de fonctionnement peuvent conduire à l'existence de solutions multiples (avec possibilité de sauts), ainsi que de réponses quasi-périodiques et chaotiques [GSTN04].

Enfin, pour parfaire ces modèles à 2 degrés de liberté, il est possible de prendre en compte l'influence des corps roulants. En effet, la raideur du roulement n'est pas uniforme selon la circonférence, comme le montre Sunnersjö [Sun78] cette considération est reprise pour différents applications par While [Whi79], Tiwari et al. [TGP00a, TGP00b]. Différentes études sur ce type de modèle ont permis de mettre en évidence des vibrations liées à l'effet paramétrique de la variation de la souplesse des roulements due au passage des corps roulants. Une nouvelle composante fréquentielle  $f_{VC}$  correspondant à la fréquence de passage des corps roulants apparaît alors dans la réponse vibratoire :

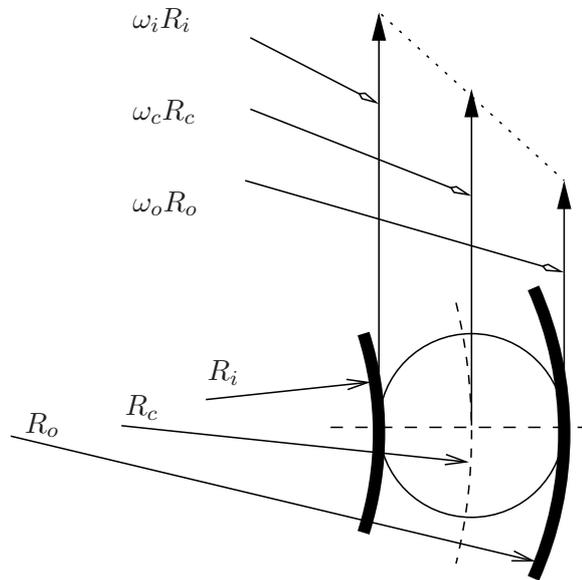
$$f_{VC} = \frac{Z \omega_c}{2\pi}, \quad (2.1)$$

où  $Z$  correspond au nombre de corps roulants et  $\omega_c$  à la vitesse angulaire de la cage du roulement (figure 2.4(a)) :

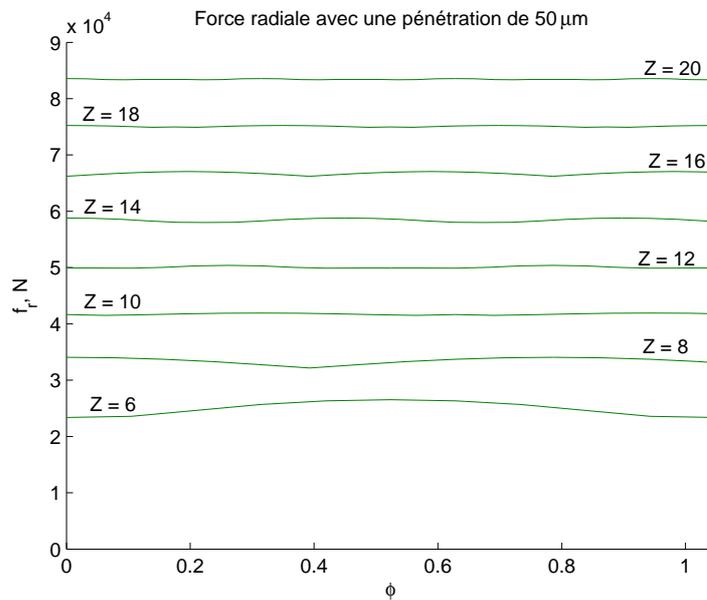
$$\omega_c = \omega_i \frac{R_o - R_c}{R_o - R_i} + \omega_o \frac{R_c - R_i}{R_o - R_i}. \quad (2.2)$$

Une analyse théorique et expérimentale de l'influence de la valeur du jeu radial du roulement à billes et de la force radiale appliquée au rotor (pesanteur) a été étudiée par Tiwari et al. [TGP00b]. Cette analyse montre l'existence de régimes apériodiques et chaotiques correspondant à des bifurcations de Hopf et à des cascades harmoniques.

Les amplitudes observées des mouvements dûs à la souplesse variable de roulements sont typiquement de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ , sachant que les roulements étudiés ont souvent un nombre de corps roulants réduit ( $Z = 8$  [TGP00a]). De manière purement cinématique, en considérant les éléments roulants comme indéformables, l'amplitude de la variation de la position radiale



(a) Répartition radiale de vitesses circonférentielles autour d'un corps roulant



(b) Variation de l'effort radial en fonction de la rotation relative des bagues pour un déplacement radial de  $(30 + 50) \mu\text{m}$  dans un roulement à jeu radial de  $30 \mu\text{m}$  avec divers nombres de rouleaux

FIG. 2.4 – Considérations sur la cinématique des roulements.

vaut [RIB<sup>+</sup>76]

$$\Delta r = \frac{c}{2} \left( \frac{1}{\cos(2\pi/Z)} - 1 \right) \quad (2.3)$$

ou  $c$  est le jeu radial. Comme on peut le voir, cette amplitude est proportionnelle au jeu radial  $c$  et tend vers zéro avec  $Z$  croissant. En ce qui concerne la force, sa variation due au passage de corps roulants faiblit également avec  $Z$  croissant, comme on peut le voir sur l'exemple de la figure 2.4(b). Il semble donc acceptable dans beaucoup de cas d'admettre que la force radiale transmise est constante. Enfin, en 2006, Villa et al. [VST06] ont appliqué un modèle analogue à celui de Tiwari et al. [TGP00b] à l'analyse des réponses à balourd d'un rotor complexe par balance harmonique. Cette étude a mis en évidence l'évolution du chargement des billes lors des montées en régime vibratoire.

Les **modèles à cinq degrés de liberté** représentent les roulements en tant qu'éléments de raideur non-linéaire appliquée non seulement dans le plan transversal du roulement, mais aussi dans la direction axiale et incluent des degrés de liberté de rotation (basculement relatif des bagues). La physique prise en compte avec ce type de modèle est similaire à celle pour les modèles à deux degrés de liberté : jeu, raideur non-linéaire due au contact, dynamique des corps roulants.

En 1960, Jones présente une formulation de modèle de roulement à billes non-linéaire dans le cadre du calcul de la dynamique des rotors souples [Jon60]. Les billes sont représentées en tant que ressorts non-linéaires et les efforts et couples résultants du roulement sont calculés en sommant les effets de chaque bille. Les efforts centrifuges et gyroscopiques appliqués aux billes sont aussi pris en compte. De nombreuses applications de cette modélisation aux roulements à billes de précision sont présentées par Kovalev et Narodetsky [KN75].

En ce qui concerne les roulements à rouleaux, l'expression analytique des efforts non-linéaires n'est pas disponible. Andréason [And73] a présenté un modèle de roulement à rouleaux appliqué au calcul des roulements coniques d'un montage de pignon. Les efforts non-linéaires transmis par chaque rouleau sont obtenus en découpant<sup>1</sup> le rouleau en tranches fines pour chacune desquelles la pression de contact est supposée constante afin de trouver la répartition de pression dans la zone de contact et de décrire ainsi fidèlement les interactions bague-rouleau.

Ces développements ont été réunis par De Mul et al. en 1989 [DMVM89a, DMVM89b] et réécrits en utilisant le calcul matriciel. Les effets centrifuges sont pris en compte et la matrice de raideur tangente est calculée automatiquement. Une application aux roulements à rouleaux cylindriques est donnée avec une vérification expérimentale.

Feng et Hahn [FH00] et Liew et al. [LFH02] donnent une application du modèle de De Mul et al. [DMVM89a] à un banc tournant équipé de roulements à billes. Des comportements aperiodiques et multi-stables sont constatés. Ces auteurs ont remarqué que la différence entre les résultats obtenus par les modèles à 2 ddl et à 5 ddl est due aux termes de la raideur axiale et de celle en rotation. Cette différence se fait sentir notamment à haute vitesse de rotation. L'influence de la prise en compte des termes d'inertie des billes est également étudiée dans [FH00] et [LFH02] : sur le système étudié dans ces travaux ils ont observé un impact sensible sur la réponse à balourd à partir de 12000 tr/min.

<sup>1</sup> dans la littérature anglo-saxonne, le terme employé pour ce découpage est *slicing*

De manière générale, l'utilisation des différents modèles cités ci-dessus dépend de la complexité du système tournant dans lequel ils sont inscrits. Ainsi, les modèles complexes, notamment prenant en compte la contribution de chaque élément roulant, sont inscrits dans des systèmes dynamiques plutôt simples de manière à mettre en évidence surtout le fonctionnement du roulement lui-même ([Whi79, TGP00b, TGP00a, HSP03]). Les applications sur des modèles de rotor à grand nombre de degrés de liberté sont rares. En effet, la complexité du modèle de roulement rend alors difficile la simulation avec le rotor complet. On citera tout de même l'application faite par Jang et Jeong [JJ03] qui utilise un modèle de roulement développé par Jones [Jon60] à un rotor rigide à 5 degrés de liberté.

Il est important de noter que, par rapport à une réponse à balourd, les vibrations engendrées par le passage de corps roulants sont de très faible amplitude. C'est pour cela que les phénomènes associés sont discutés sur des modèles de rotors parfaitement équilibrés. On constate alors que l'amplitude des déplacements ne dépasse pas quelques dizaines de micromètres.

Dans le cadre de notre étude, on s'intéressera principalement aux roulements à rouleaux cylindriques car c'est le type de roulements utilisés dans les paliers interarbres des moteurs d'avions. Une modélisation détaillée sera développée, accompagnée d'une procédure d'interpolation afin d'alléger le calcul. Des possibilités de simplification seront ensuite discutées en se basant sur l'exemple numérique étudié.

## 2.2 Modèle d'un roulement à rouleaux à 4 degrés de liberté

Afin de rendre compte avec précision du comportement dynamique du système bi-rotors que nous avons développé, il est nécessaire de modéliser fidèlement le roulement interarbre. En effet, les corps roulants de ce dernier se déplacent à des vitesses très élevées par rapport aux bagues (tout particulièrement en contra-rotation) tout en subissant également des chargements importants compte tenu de leur localisation (proche des turbines BP et HP). Pour répondre à cette problématique, nous avons choisi de développer un modèle de roulement à rouleaux à quatre degrés de liberté dans le cadre des hypothèses suivantes :

- les rouleaux sont supposés cylindriques,
- les bagues sont indéformables,
- les rouleaux sont supposés être constitués de tranches réagissant à l'écrasement radial par une force normale à sa surface.

Comme il s'agit d'un roulement à rouleaux cylindriques, le roulement ne transmet pas d'effort axial, mais seulement l'effort transversal (deux composantes) et un couple (deux composantes selon deux rotations de basculement). On développe donc un modèle du même type que celui établi par de Mul [DMVM89a, DMVM89b]

Pour formuler les équations d'équilibre, on utilisera deux repères (figure 2.5) :

- $Oxyz$  cartésien, global ("fixe", lié à la bague extérieure) et
- $Or_jt_jz$  cylindrique, associé au  $i$ -ième rouleau.

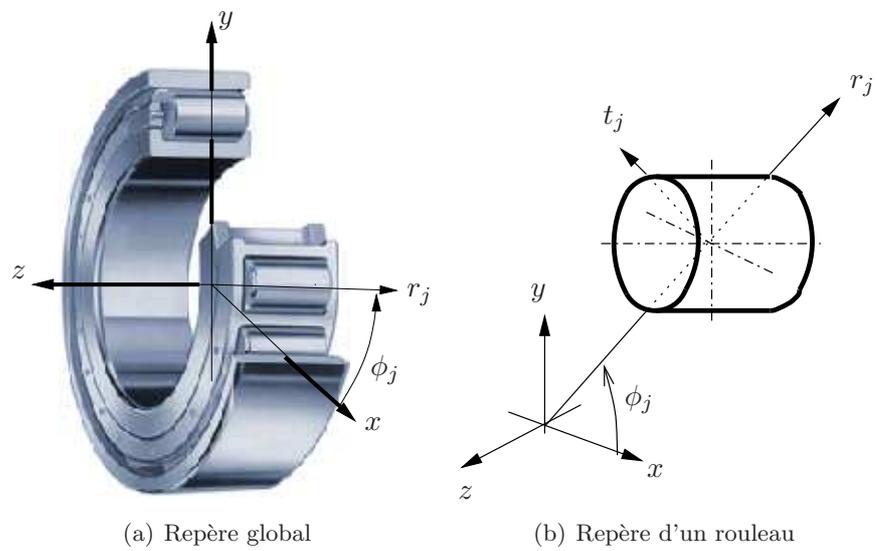
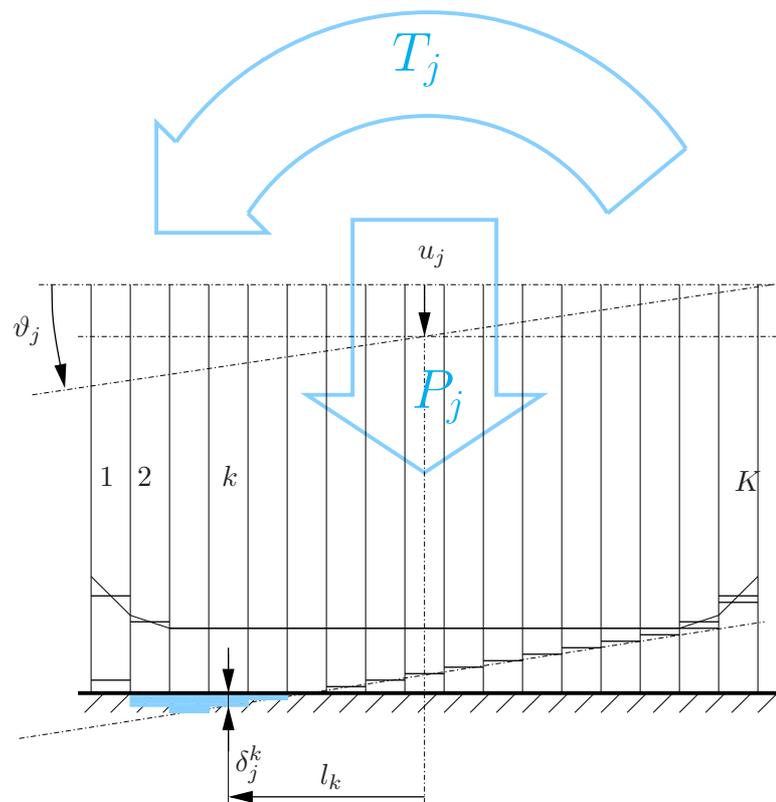


FIG. 2.5 – Repères utilisés dans la modélisation des roulements

FIG. 2.6 – Illustration de la méthode “slicing” dans le plan  $z-r_j$

Les vecteurs de déplacements et d'efforts généralisés dans le repère global sont respectivement notés de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\delta} = [u_{x2} - u_{x1}, u_{y2} - u_{y1}, \vartheta_{x2} - \vartheta_{x1}, \vartheta_{y2} - \vartheta_{y1}]^T, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{f} = [f_{x2} - f_{x1}, f_{y2} - f_{y1}, m_{x2} - m_{x1}, m_{y2} - m_{y1}]^T. \quad (2.5)$$

Le passage entre les repères utilisés s'effectue par la matrice :

$$\boldsymbol{\Theta}_j = \begin{bmatrix} \cos \phi_j & \sin \phi_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \phi_j & \cos \phi_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, Z, \quad (2.6)$$

où  $Z$  est le nombre de rouleaux,  $\phi_j$  la position angulaire du  $j$ -ième rouleau.

Le passage entre le repère global et celui lié à un rouleau particulier se fait de la manière suivante :

$$\mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} P_j \\ T_j \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta}_j \mathbf{f}_j, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ \vartheta_j \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\delta}. \quad (2.8)$$

Ici  $\mathbf{f}_j$  et  $\mathbf{q}_j$  désignent la contribution du  $i$ -ième rouleau respectivement dans le repère global et dans celui lié à ce rouleau. Les composantes de ces vecteurs apparaissent sur la figure 2.6.

L'équilibre d'ensemble s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{f} = - \sum_{j=1}^Z \mathbf{f}_j = - \sum_{j=1}^Z \boldsymbol{\Theta}_j^T \mathbf{q}_j \quad (2.9)$$

La matrice de raideur tangente du  $j$ -ième rouleau étant donnée par :

$$\mathbf{Q}_j = \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial \mathbf{v}_j}, \quad (2.10)$$

on obtient alors par changement de repère l'expression de la matrice de raideur tangente de l'ensemble de roulement, associée au déplacement  $\boldsymbol{\delta}$  :

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^Z \boldsymbol{\Theta}_i^T \mathbf{Q}_i \boldsymbol{\Theta}_i. \quad (2.11)$$

Les composantes de  $\mathbf{q}_j$ , ainsi que ses dérivées, sont calculées à chaque itération par une méthode de découpage, comme illustré sur la figure 2.6. L'écrasement de la  $k$ -ième tranche (sur l'ensemble de  $K$  tranches) du  $j$ -ième rouleau sur la piste s'exprime donc par

$$\delta_j^k = \begin{cases} u_j + \vartheta_j l^k - c^k, & \text{si } u_j + \vartheta_j l^k - c^k \geq 0; \\ 0, & \text{si } u_j + \vartheta_j l^k - c^k < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

avec  $l^k$  la position axiale de la  $k$ -ième tranche par rapport au centre de gravité du rouleau et  $c^k$  la distance initiale entre la piste et la surface de la  $k$ -ième tranche. On peut donc écrire la force de réaction transversale de chaque rouleau en utilisant la relation suivante [And73] :

$$p_j^k = Q(\delta_j^k)^{10/9}, \quad (2.13)$$

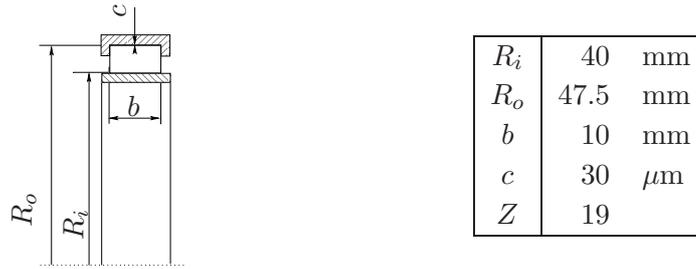


FIG. 2.7 – Exemple de roulement : NU1014ML

avec  $Q$  constante élastique caractérisant le contact. En sommant toutes les contributions  $p_j^k$ , on obtient la force  $P_j$  et le moment  $T_j$ , exercés par la piste sur le rouleau  $j$  :

$$P_j = \sum_{k=1}^K p_j^k; \quad (2.14)$$

$$T_j = \sum_{k=1}^K p_j^k l^k. \quad (2.15)$$

La matrice de raideur tangente  $\mathbf{Q}_j$  pour ce contact s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{Q}_j = \frac{10}{9} Q \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K (\delta_j^k)^{1/9} & \sum_{k=1}^K (\delta_j^k)^{1/9} l^k \\ \sum_{k=1}^K (\delta_j^k)^{1/9} l^k & \sum_{k=1}^K (\delta_j^k)^{1/9} (l^k)^2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ainsi, pour chaque rouleau nous avons les expressions du vecteur  $\mathbf{q}_j$  d'interaction entre le rouleau et la piste de roulement, ainsi que la matrice de raideur tangente associée  $\mathbf{Q}_j$  en fonction des déplacements du rouleaux (donnés par  $\mathbf{v}_j$ ).

En notant  $[i]$  les grandeurs associées au contact sur la piste de la bague intérieure et  $[o]$  sur celle de la bague extérieure, nous pouvons décrire le schéma itératif de type Newton du calcul des déplacements des rouleaux  $\mathbf{q}_j$  associés à un déplacement relatif donné des bagues de roulement  $\boldsymbol{\delta}$ . La fonction à annuler  $\mathbf{r}_j$  est le bilan des forces appliquées au rouleau :

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{q}_j^{[i]} + \mathbf{q}_j^{[o]}. \quad (2.17)$$

Le  $k$ -ième pas d'itération s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{v}_j^{(k+1)} = \mathbf{v}_j^{(k)} + (\mathbf{Q}_j^{(k)[i]} - \mathbf{Q}_j^{(k)[o]})^{-1} (\mathbf{q}_j^{(k)[i]} - \mathbf{q}_j^{(k)[o]}). \quad (2.18)$$

Ainsi,  $Z$  calculs itératifs de type (2.17 – 2.18), permettent d'associer à une valeur de  $\boldsymbol{\delta}$  donnée, une valeur  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\delta})$ .

## 2.3 Etude d'un roulement à rouleaux

Nous allons nous intéresser au roulement à rouleaux NU1014ML (roulement utilisé dans le banc d'essai DDE, voir chapitre 6), dont les dimensions sont données par la figure 2.7. Comme

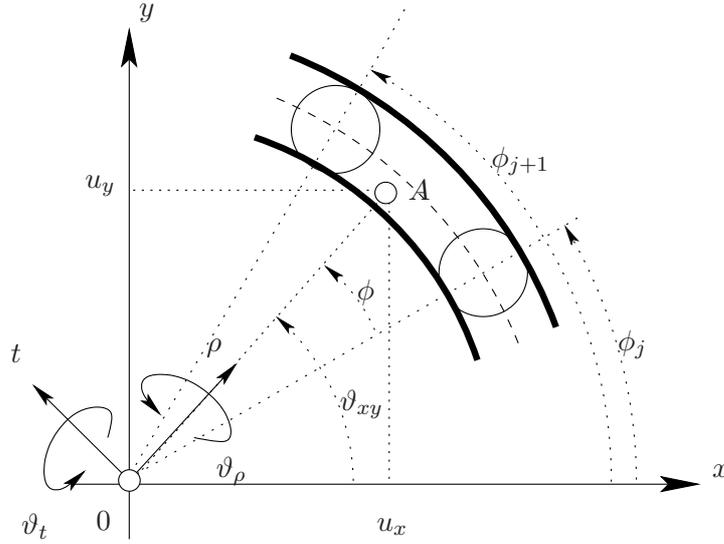


FIG. 2.8 – Notations pour ramener le vecteur déplacement dans un repère polaire

le roulement agit de manière essentiellement radiale, il est naturel de représenter les résultats de calculs dans le repère polaire. On introduit alors le déplacement relatif du roulement ( $\delta$ ), projeté dans le repère relatif polaire défini au centre de la bague, comme étant égal à  $\xi$ . La cinématique du roulement sera donc entièrement définie par le vecteur  $\xi$  composé de la valeur absolue du déplacement radial  $\rho$ , de l'angle associé au déplacement radial  $\phi$  et enfin des angles  $\vartheta_\rho$  et  $\vartheta_t$  définissant le mouvement angulaire de la bague intérieure par rapport à la bague extérieure (figure 2.8). Soit :

$$\delta \rightarrow \xi = [\rho, \phi, \vartheta_\rho, \vartheta_t]^T, \quad (2.19)$$

$$\rho = \sqrt{(u_{x2} - u_{x1})^2 + (u_{y2} - u_{y1})^2} = (u_{x2} - u_{x1}) \cos \vartheta_{xy} + (u_{y2} - u_{y1}) \sin \vartheta_{xy}, \quad (2.20)$$

$$\phi = \text{mod} \left( \vartheta_{xy} - \omega_c t, \frac{2\pi}{Z} \right), \quad (2.21)$$

$$\vartheta_\rho = (\vartheta_{x2} - \vartheta_{x1}) \cos \vartheta_{xy} + (\vartheta_{y2} - \vartheta_{y1}) \sin \vartheta_{xy}, \quad (2.22)$$

$$\vartheta_t = -(\vartheta_{x2} - \vartheta_{x1}) \sin \vartheta_{xy} + (\vartheta_{y2} - \vartheta_{y1}) \cos \vartheta_{xy}. \quad (2.23)$$

En disposant d'une transformation équivalente à celle définie par (2.19) – (2.23), on peut déterminer de façon analogue un vecteur  $\varphi$  d'efforts dans le roulement,

$$\mathbf{f} \rightarrow \varphi = [f_\rho, f_t, m_\rho, m_t]^T, \quad (2.24)$$

$$f_\rho = (f_{x2} - f_{x1}) \cos \vartheta_{xy} + (f_{y2} - f_{y1}) \sin \vartheta_{xy}, \quad (2.25)$$

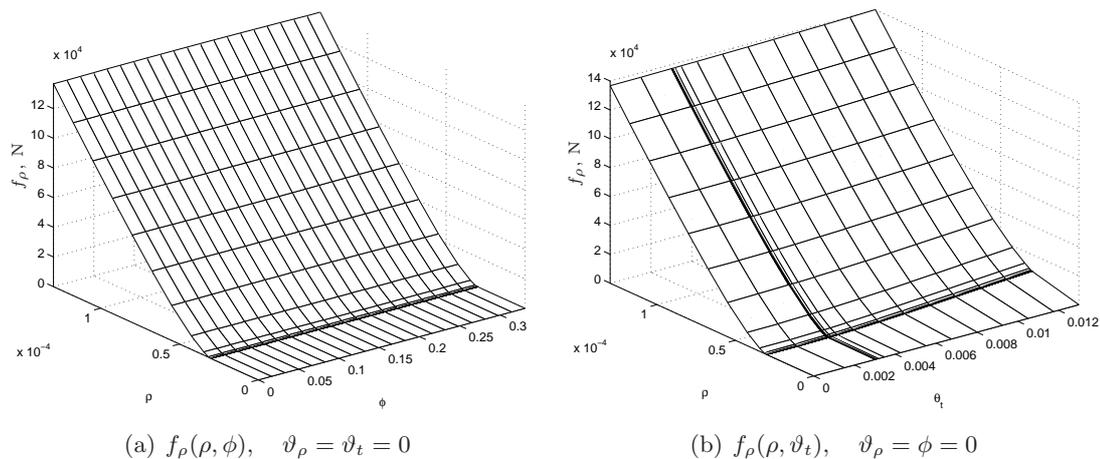
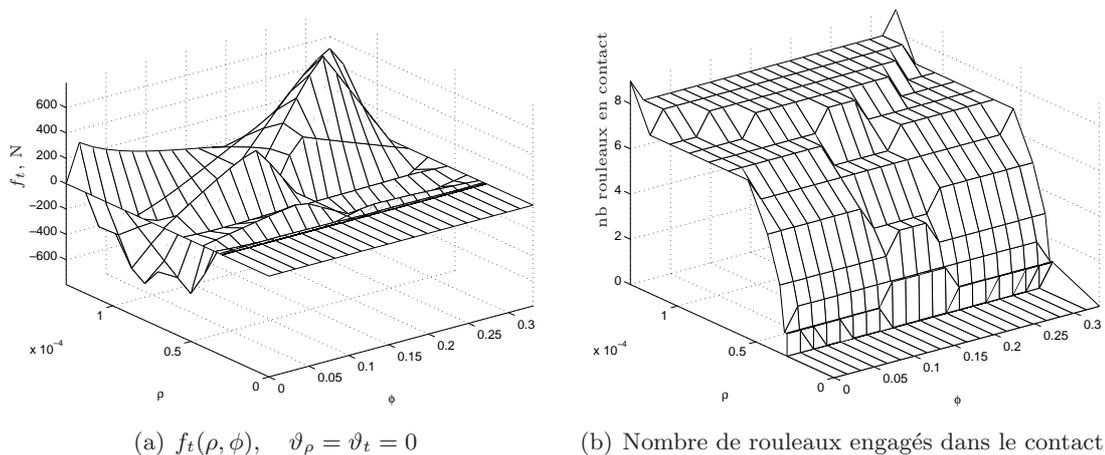
$$f_t = -(f_{x2} - f_{x1}) \sin \vartheta_{xy} + (f_{y2} - f_{y1}) \cos \vartheta_{xy}, \quad (2.26)$$

$$m_\rho = (m_{x2} - m_{x1}) \cos \vartheta_{xy} + (m_{y2} - m_{y1}) \sin \vartheta_{xy}, \quad (2.27)$$

$$m_t = -(m_{x2} - m_{x1}) \sin \vartheta_{xy} + (m_{y2} - m_{y1}) \cos \vartheta_{xy}. \quad (2.28)$$

Afin d'analyser le comportement de ce roulement, nous présentons les résultats composante par composante, obtenus sur un secteur angulaire donné par :

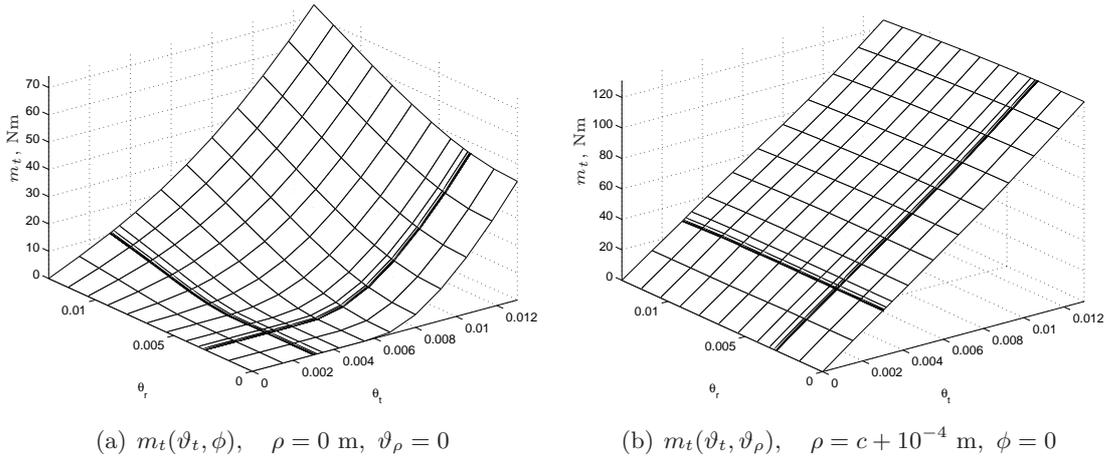
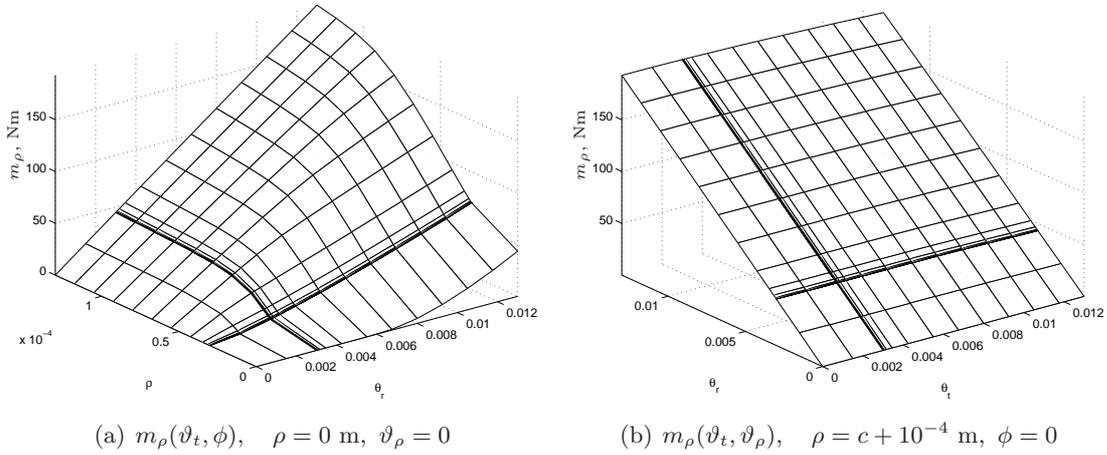
$$0 \leq \phi \leq 2\pi/Z = 0.331 \text{ rad}, \quad (2.29)$$

FIG. 2.9 – Force radiale  $f_\rho$  en fonction de  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\vartheta_t$ .FIG. 2.10 – Force tangentielle  $f_t$  en fonction de  $\rho$  et de  $\phi$ .

c'est-à-dire entre deux rouleaux, sur une période de symétrie du roulement.

L'évolution de la force radiale en fonction du déplacement radial relatif  $\rho$  et de la position angulaire  $\phi$  est donnée sur la figure 2.9(a). On peut remarquer un jeu (zone de force nulle à  $\rho \in [0, c]$ ) puis pour  $\rho > c$  une réaction pratiquement linéaire par rapport à  $\rho$ , quasiment invariante par rapport à  $\phi$ . La raideur radiale ainsi observée est d'environ  $1.3 \cdot 10^9$  N/m. On remarque que cette tendance reste pratiquement inchangée en fonction de  $\vartheta_t$  (figure 2.9(b)) ainsi que de  $\vartheta_\rho$ .

La seconde composante  $f_t$  de  $\varphi$ , est représentée sur la figure 2.10. On remarque son aspect antisymétrique en fonction de  $\phi$  (cf figure 2.10(a)) et qu'elle prend alternativement des valeurs positives et négatives en fonction de  $\rho$  (à  $\phi$  fixe,  $f_t$  peut avoir des valeurs positives ou négatives selon la valeur de  $\rho$ ), due à l'augmentation progressive du nombre de rouleaux dans la zone de contact (cf figure 2.10(b)). On notera l'intensité faible de cette force qui est inférieure à 5% de celle de  $f_\rho$ .

FIG. 2.11 – Moment  $m_t$ .FIG. 2.12 – Moment  $m_\rho$ .

La figure 2.11 présente  $m_t$  en fonction de  $\vartheta_\rho$  et  $\vartheta_t$  sans et avec charge radiale. Dans la zone proche de  $\delta \approx 0$  (figure 2.11(a)), on peut observer un couplage entre ces degrés de liberté. Un jeu angulaire d'environ 0.003 rad se manifeste, ce qui correspond à  $c/b$ . On remarque également que la réaction à  $\vartheta_t$  est essentiellement linéaire, et c'est sur la dépendance de  $\vartheta_\rho$  que l'on voit le mieux l'effet du jeu. Cette situation s'accroît quand une charge radiale est appliquée (figure 2.11(b)). Comme les rouleaux sont en contact dès que  $\vartheta_t$  s'annule, la réaction est ici plus régulière : on observe une proportionnalité entre  $\vartheta_t$  et  $m_t$  accompagnée d'une indépendance de  $\vartheta_\rho$ . La réaction en  $m_\rho$  est globalement similaire à celle décrite précédemment par la figure 2.11, compte tenu de l'inversion de l'influence de  $\vartheta_\rho$  et  $\vartheta_t$ . La raideur angulaire observée est de l'ordre de  $10^4 \text{ Nm/rad}$ .

Pour utiliser les résultats de cette modélisation dans une simulation dynamique, un grand nombre de calculs répétitifs sont à effectuer. Le calcul d'une valeur de  $\mathbf{f}(\delta)$  prend environ 0.01 s de temps cpu. Cela apparaît déjà prohibitif pour des simulations dans un cadre de dynamique d'ensemble. Nous avons donc envisagé deux voies de réduction du temps de calcul des efforts dans les roulements :

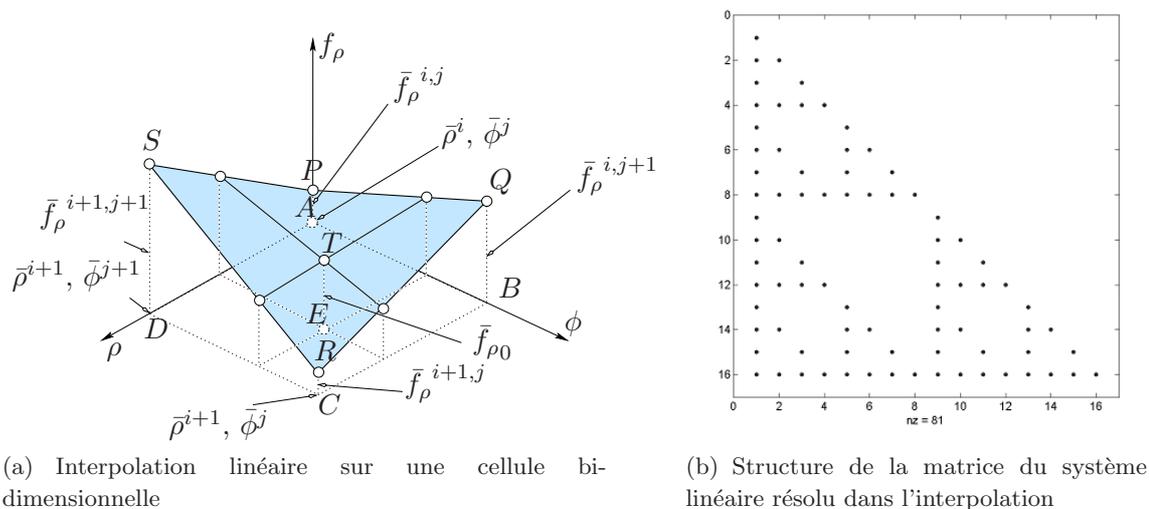


FIG. 2.13 – Interpolation multi-linéaire.

1. utiliser un abaque de réaction de roulement, calculé au préalable selon le modèle détaillé ci-dessus ;
2. utiliser un modèle simplifié, analogue à celui de Gargiulo [Gar80].

Ces deux approches seront détaillées dans les sections suivantes.

## 2.4 Utilisation du modèle interpolé

Une procédure destinée à réduire le temps de calcul des efforts de roulements a été développée. Elle consiste à préparer un abaque multidimensionnel d'efforts en fonction du vecteur des déplacements généralisés relatifs des bagues du roulement. Vue la symétrie cyclique du roulement, il apparaît suffisant de stocker les valeurs de  $\varphi$  seulement sur un secteur de la circonférence (entre deux corps roulants voisins), comme indiqué sur la figure 2.8.

Pour un ensemble fini de points, donné selon chaque variable de  $\bar{\xi}$ , on dispose d'un ensemble de valeurs de  $\bar{\varphi}$  constituant notre abaque à quatre dimensions (les barres signifiant que l'on fait référence à l'ensemble discret prédéfini de  $\xi$  et de  $\varphi$ ).

Pour trouver la valeur  $\bar{\varphi}_0$  qui approxime par interpolation celle de  $\varphi_0$  correspondant à un vecteur de déplacements  $\xi_0$ , on repère la cellule hypercubique numéro  $(i, j, k, l)$  telle que

$$\bar{\rho}^i \leq \rho_0 < \bar{\rho}^{i+1}, \quad (2.30)$$

$$\bar{\phi}^j \leq \phi_0 < \bar{\phi}^{j+1}, \quad (2.31)$$

$$\bar{\vartheta}_\rho^k \leq \vartheta_{\rho_0} < \bar{\vartheta}_\rho^{k+1}, \quad (2.32)$$

$$\bar{\vartheta}_t^l \leq \vartheta_{t_0} < \bar{\vartheta}_t^{l+1}. \quad (2.33)$$

A partir des valeurs de  $\bar{\varphi}$  aux coins de cette cellule, on déduit les composantes interpolées de

$\bar{\varphi}_0$  sous la forme suivante :

$$\bar{f}_{\rho 0} = a_1 \bar{f}_{\rho}^{i,j,k,l} + a_2 \bar{f}_{\rho}^{i+1,j,k,l} + a_3 \bar{f}_{\rho}^{i,j+1,k,l} + \dots + a_{16} \bar{f}_{\rho}^{i+1,j+1,k+1,l+1}, \quad (2.34)$$

$$\bar{f}_{t 0} = b_1 \bar{f}_t^{i,j,k,l} + b_2 \bar{f}_t^{i+1,j,k,l} + b_3 \bar{f}_t^{i,j+1,k,l} + \dots + b_{16} \bar{f}_t^{i+1,j+1,k+1,l+1}, \quad (2.35)$$

$$\bar{m}_{\rho 0} = c_1 \bar{m}_{\rho}^{i,j,k,l} + c_2 \bar{m}_{\rho}^{i+1,j,k,l} + c_3 \bar{f}_{\rho}^{i,j+1,k,l} + \dots + c_{16} \bar{m}_{\rho}^{i+1,j+1,k+1,l+1}, \quad (2.36)$$

$$\bar{m}_{t 0} = d_1 \bar{m}_t^{i,j,k,l} + d_2 \bar{m}_t^{i+1,j,k,l} + d_3 \bar{m}_t^{i,j+1,k,l} + \dots + d_{16} \bar{m}_t^{i+1,j+1,k+1,l+1}, \quad (2.37)$$

Un exemple bi-dimensionnel ( $f_{\rho}(\rho, \phi)$  interpolé sur la cellule  $(i, j)$ ) est donné sur 2.13(a) : les abscisses aux points  $ABCD$  correspondent aux valeurs de l'abaque  $PQRS$ , à partir desquelles est établie la valeur  $T$  de  $f_{\rho}$  au point  $E$ .

On ramène le problème à la recherche des coefficients  $a, b, c, d$ . Cela nous donne quatre systèmes d'équations algébriques linéaires d'ordre 16 chacun (au lieu d'une résolution itérative sur chaque rouleau). De plus, ce système d'équations peut être formulé avec une matrice triangulaire, composée seulement de zéros et de uns (Fig 2.13(b)).

Le gain de temps de calcul obtenu par l'utilisation de cette méthode avoisine un facteur de 100 comparé au calcul direct en chaque point.

## 2.5 Modèle de palier axisymétrique à 2 degrés de liberté

Même si le modèle précédent fournit un comportement très complet du roulement, le modèle non-linéaire axisymétrique à deux degrés de liberté peut être suffisant dans un grand nombre de cas. Nous détaillerons ici le modèle à deux degrés de liberté incluant la raideur non-linéaire de contact et le jeu. Une généralisation directe de cette approche consiste à étendre la formulation non-linéaire axisymétrique sur les degrés de liberté angulaires.

Soit un vecteur de déplacements (figure 2.14(a))

$$\mathbf{x} = [u_x, u_y]^T \quad (2.38)$$

qui engendre un vecteur d'efforts non-linéaires

$$\mathbf{f} = [f_x, f_y]^T. \quad (2.39)$$

Pour déterminer les composantes des efforts, il convient de passer par la relation effort-déplacement radiale (figure 2.14(b)) de type [Gar80] dans le repère relatif à la bague extérieure du roulement :

$$r = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}; \quad f_r = \begin{cases} k(r-c)^\epsilon; & r > c \\ 0; & r \leq c \end{cases} \quad (2.40)$$

avec  $k$  coefficient de raideur non-linéaire,  $c$  jeu radial,  $\epsilon$  exposant valant respectivement  $3/2$  et  $10/9$  pour les roulements à billes et à rouleaux. On peut ramener ces expressions dans le repère cartésien :

$$f_x = \frac{x}{r} f_r = k u_x r^{\epsilon-1} \left(1 - \frac{c}{r}\right)^\epsilon; \quad (2.41)$$

$$f_y = \frac{y}{r} f_r = k u_y r^{\epsilon-1} \left(1 - \frac{c}{r}\right)^\epsilon. \quad (2.42)$$

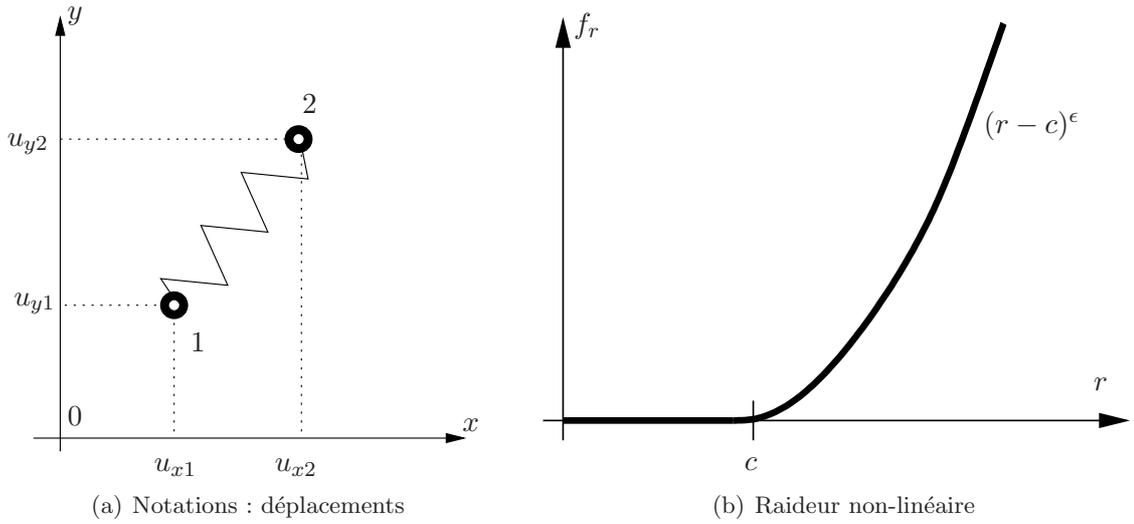


FIG. 2.14 – Élément de raideur radiale non-linéaire axisymétrique

On peut donc exprimer les termes de la matrice de raideur tangente  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial u_x} & \frac{\partial f_x}{\partial u_y} \\ \frac{\partial f_y}{\partial u_x} & \frac{\partial f_y}{\partial u_y} \end{bmatrix}; \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial u_x} = k (\epsilon u_x^2 r + u_y^2 (r - c)) \frac{(r - c)^{\epsilon-1}}{r^3}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial u_y} = k (r (\epsilon - 1) + c) u_x u_y \frac{(r - c)^{\epsilon-1}}{r^3} = \frac{\partial f_y}{\partial u_x}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial u_y} = k (\epsilon u_y^2 r + u_x^2 (r - c)) \frac{(r - c)^{\epsilon-1}}{r^3}. \quad (2.46)$$

Dans le cas où les deux nœuds de l'élément de raideur non-linéaire sont mobiles (bague extérieure mobile), on peut alors étendre la formulation précédente. Les expressions du vecteur d'efforts et de la matrice de raideur tangente sont obtenues à l'aide des relations (2.41–2.46)

$$\mathbf{x}_{12} = [u_{x1}, u_{y1}, u_{x2}, u_{y2}]^T. \quad (2.47)$$

On peut exprimer les efforts non-linéaires qui en découlent

$$\mathbf{f}_{12} = [f_{x1}, f_{y1}, f_{x2}, f_{y2}]^T, \quad (2.48)$$

en utilisant le développement précédent avec les relations suivantes :

$$u_x = u_{x2} - u_{x1}, \quad u_y = u_{y2} - u_{y1}, \quad f_x = f_{x2} = -f_{x1}, \quad f_y = f_{y2} = -f_{y1}. \quad (2.49)$$

En s'appuyant sur les expressions (2.43)–(2.46) et en remarquant que :

$$\frac{\partial u_x}{\partial u_{x1}} = -1; \quad \frac{\partial u_x}{\partial u_{x2}} = 1; \quad \frac{\partial u_y}{\partial u_{y1}} = -1; \quad \frac{\partial u_y}{\partial u_{y2}} = 1. \quad (2.50)$$

on obtient alors la matrice de raideur tangente du problème sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{12}}{\partial \mathbf{x}_{12}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} & -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \\ -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Cette modélisation peut également s'appliquer au cas de raideur en rotation (basculement). Elle représente une réduction de la physique décrite par le modèle à 4 ddl, mais, comme on le verra dans le cadre de la dynamique d'ensemble d'un système bi-rotors complet, cette approximation est en général efficace et suffisamment précise. En effet, elle restitue l'essentiel des phénomènes non-linéaires en permettant un gain en temps de simulation 10 fois supérieur au modèle interpolé.

## Conclusion

Les roulements sont des composants complexes dépendant de plusieurs paramètres, dont le nombre et la géométrie des corps roulants.

La modélisation des roulements peut avoir différents degrés de complexité. Les modèles les plus complexes rendent compte d'un grand nombre de phénomènes, jusqu'à la variation du nombre de rouleaux en contact et de la condition de chargement de chaque rouleau. Cependant, on s'aperçoit que pour des roulements à grand nombre de rouleaux, la variation de la raideur, due au passage des rouleaux, devient très petite et que le comportement du roulement est globalement axisymétrique.

La modélisation complète de roulement nécessite un grand nombre de calculs itératifs et informatiquement coûteux. Deux voies de réduction de temps de calcul sont donc étudiées : interpolation d'abaques précalculés et utilisation de modèles simplifiés analytiques.

Sur un exemple de roulement à rouleaux, nous avons vu que l'interpolation permet de réduire le temps de calcul d'un facteur d'environ 100, tandis que les modèles simplifiés sont encore 10 fois plus rapides. Bien que réducteurs d'un point de vue conceptuel, ces derniers s'avèrent tout de même pertinents en termes de comportement non-linéaire pour la dynamique d'ensemble.

## Chapitre 3

# Solutions périodiques et balance harmonique

Les systèmes dynamiques non-linéaires sont difficiles à étudier, car il n'existe pas de méthode unique et générale pour les analyser. De multiples approches sont disponibles dans la littérature. Elles dépendent, en général, du type de solutions étudiées (périodiques, transitoires, etc.), de la taille des modèles, de la nature des phénomènes envisagés (non-linéarités faibles ou fortes, régulières ou irrégulières). Le cas de la dynamique d'ensemble des multi-rotors met en jeu des éléments fortement non-linéaires, mais aussi des chargements complexes propres à chaque rotor. La méthode d'analyse recherchée devra alors être à même de traiter le cas des régimes quasi-périodiques en présence de non-linéarités fortes irrégulières et ce dans un cadre éléments finis.

La méthode utilisée dans notre étude sera la balance harmonique, notamment sa généralisation au cas quasi-périodique dans le but d'être appliquée à la dynamique d'un système bi-rotors, dont une des propriétés dynamiques essentielles est l'excitation bi-périodique par deux balourds.

Dans ce chapitre, nous exposerons la méthode de balance harmonique, appliquée à la recherche de solutions périodiques de façon à introduire sa généralisation aux mouvements multi-fréquentiels qui se fera dans le chapitre 5. Ces développements seront illustrés par des applications aux oscillateurs et à des rotors non-linéaires élémentaires.

### 3.1 Aperçu de méthodes de résolution des équations de la dynamique

On s'intéresse aux méthodes de recherche des solutions de type "régime établi" du problème dynamique (1.25), notamment des solutions périodiques puis quasi-périodiques.

Dans de nombreux cas, notamment non-linéaires, la résolution analytique de (1.25) est difficile ou impossible à réaliser. Plusieurs méthodes approchées et numériques existent actuellement pour traiter ces systèmes. De manière générale, on peut faire ressortir deux familles, regroupant la majorité de ces méthodes. Ce sont les méthodes *temporelles* et *fréquentielles*.

### 3.1.1 Méthodes dans le domaine temporel

La recherche de solutions périodiques de (1.25) peut être traitée directement par l'intégration temporelle, ou encore par des techniques plus avancées, comme la *méthode de tir* ou les *éléments finis en temps*. Une approche par *perturbations* est aussi envisageable, elle permet de calculer la solution exacte du problème par la résolution successive de sous-problèmes.

#### 3.1.1.1 Intégration temporelle

L'intégration temporelle constitue un outil d'analyse qui permet de traiter les équations différentielles directement.

Les méthodes les plus répandues en dynamique des structures sont celles des *différences finies centrées*, de *Newmark*, de *Wilson*, ainsi que de *Runge-Kutta* [Gmü97]. De nombreuses références sont disponibles sur ce sujet. Parmi celles appliquées à la modélisation en dynamique des rotors non-linéaire, nous citerons les études de Liew et al. [LFH02] et de Lee & Lee [LL99] avec la prise en compte de roulements non-linéaires en utilisant la méthode de Runge-Kutta, ainsi qu'un travail de Subbiah et Rieger [SR88] comportant une comparaison entre plusieurs méthodes.

L'avantage principal de l'approche par l'intégration directe réside dans le fait que peu d'hypothèses sont faites.

#### 3.1.1.2 Méthode des éléments finis en temps

En introduisant des fonctions de forme, prenant en compte la dimension temporelle du système, on peut, par la formulation faible du principe d'Hamilton, poser le problème dynamique (1.25) en tant que problème d'éléments finis spatio-temporel. De manière pratique, cela revient à rajouter une dimension au domaine d'étude, selon la variable temps.

Le système d'équations différentielles ainsi obtenu est ramené à un problème algébrique non-linéaire de taille augmentée qui peut être résolu par une méthode de type Newton. Il se trouve que la matrice jacobienne de résolution de ce système correspond à la matrice de monodromie, ce qui donne un lien direct avec la stabilité de la solution.

Les applications de cette méthode à la dynamique des rotors non-linéaire ont été faites par Wang [Wan95] et Demailly [Dem03].

#### 3.1.1.3 Méthode de tir

La *méthode de tir* est une méthode de recherche de solutions de (1.25) qui satisfait les conditions de périodicité. La technique consiste à introduire les corrections sur les conditions initiales, de manière à observer des conditions finales identiques. L'application de cette approche à la recherche des solutions périodiques correspond à la recherche de *points fixes* de l'application  $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  qui à un point  $A$  dans l'espace de configurations, associe le point  $B$  auquel serait arrivée l'intégration temporelle de notre problème (1.25) sur une période.

Ainsi, la résolution se ramène à un problème algébrique non-linéaire souvent traité par une méthode de type Newton. Cependant, l'évaluation de la matrice jacobienne nécessaire à la résolution correspond à une intégration sur la période temporelle du système ce qui s'avère

très rapidement pénalisant. Parmi les applications à la dynamique des rotors, on citera les travaux de Sundararajan et Noah [SN97] et Demailly [DB01, Dem03].

### 3.1.1.4 Méthodes des perturbations

Cette fois, on recherche des solutions du problème dynamique (1.25) sous la forme d'un développement en série d'un petit paramètre :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \epsilon \mathbf{x}_1(t) + \epsilon^2 \mathbf{x}_2(t) + \epsilon^3 \mathbf{x}_3(t) + \dots \quad (3.1)$$

avec  $0 < \epsilon \ll 1$ . En injectant (3.1) dans (1.25) et en équilibrant les termes correspondant aux puissances égales de  $\epsilon$ , on obtient un système d'équations, résolues de manière récurrente. Ainsi, on dissocie le problème en une suite de problèmes correspondant aux puissances de plus en plus élevées du petit paramètre. On passe alors de la recherche d'une solution approchée du problème exact à la résolution exacte d'un problème approché.

Des variantes de la technique de perturbations ont été développées afin d'éliminer certains inconvénients, notamment l'apparition des termes séculaires. Voici quelques unes de ces méthodes :

- *Méthode de Lindstedt* [Mei70] : on impose une condition de périodicité et on cherche la fréquence (période) de la solution en même temps que le mouvement du système durant cette période.
- *Méthode de Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky* [Mei70] : on cherche les solutions sous forme trigonométrique avec l'amplitude et la phase qui varient lentement.
- *Méthode de la moyenne temporelle* [Mei70] : cette méthode s'appuie sur la représentation du problème initial sous une forme dite *forme standard*, faisant intervenir le petit paramètre  $\epsilon$  :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \epsilon \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.2)$$

dont la partie droite est obtenue en tant que moyenne temporelle selon les variables dites "rapides". On obtient ainsi une première approximation qui peut ensuite être améliorée par la prise en compte des termes qui représentent des oscillations autour de cette solution.

- *Méthode des échelles multiples* [NM79] : dans le cadre de cette méthode, on considère l'argument temporel en tant qu'un ensemble d'échelles  $t_i$  de plus en plus lentes

$$t_i = \epsilon^i t \quad (3.3)$$

ce qui implique un développement en puissances de  $\epsilon$  pour les opérateurs différentiels dont la substitution dans (1.25) mène encore une fois à un système d'équations (équilibrant les termes à puissance de  $\epsilon$  égale) à résoudre de manière récurrente.

Parmi les applications de ces méthodes à la dynamique des rotors, on peut citer les travaux de Ganesan [Gan97] ou de Ji et Zu [JZ98]. On remarque que les non-linéarités traitées sont de type régulier, car le jeu est difficile à développer en série de puissances vis-à-vis d'un petit paramètre.

### 3.1.2 Méthodes dans le domaine fréquentiel

La résolution dans le domaine fréquentiel se ramène à l'étude de la transformée de Fourier de la solution. La *balance harmonique* (on dit également *équilibrage harmonique*) est une méthode analytique qui consiste à représenter la solution sous forme de série de Fourier :

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{a}}_k \cos k\omega t + \tilde{\mathbf{b}}_k \sin k\omega t, \quad (3.4)$$

puis, en l'injectant dans (1.25), à déterminer  $\mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{b}_k$  en équilibrant les coefficients devant les termes en  $\cos k\omega t$  et  $\sin k\omega t$ . Cette démarche revient à appliquer une méthode de Galerkin, en projetant la solution et donc l'ensemble des équations du problème sur la base des fonctions harmoniques.

Le problème algébrique non-linéaire qui se pose en passant dans le domaine fréquentiel est résolu par des méthodes de type *Newton*.

Dans le cadre de la dynamique non-linéaire des rotors, les méthodes les plus adaptées sont les approches par éléments finis en temps, la balance harmonique et la méthode de tir. Dans les trois cas, ces techniques permettent d'atteindre rapidement les solutions périodiques pour des non-linéarités pouvant être fortes. En ce qui concerne l'approche par balance harmonique, cette dernière est plus efficace pour traiter des problèmes de taille assez importante contrairement aux deux autres. Nous développerons donc dans la section qui suit les aspects théoriques de cette méthode.

## 3.2 Résolution par balance harmonique

Depuis les années 50, de nombreuses variantes d'applications numériques sont apparues sous des noms différents : méthode *Fourier Galerkin Newton (FGN)* (Newton pour la méthode de résolution ; ces méthodes font souvent appel aux FFT), méthode de *balance harmonique incrémentale (IHBM)*, *collocation trigonométrique*.

La prise en compte des non-linéarités s'effectue souvent dans le domaine temporel à chaque pas d'itération notamment dans le cadre d'une démarche *AFT (Alternating Frequency/Time)*, introduite par Cameron et Griffin [CG89]. Récemment, une méthode appelée DLFT (Dynamic Lagrangian Frequency/Time) a été développée par Nacivet et al. [NPTJ01] de manière à introduire des corrections à partir du domaine temporel non seulement au vecteur de coefficients des termes non-linéaires, mais aussi au vecteur de déplacements.

Dans ce paragraphe, nous présenterons la mise en œuvre de la méthode de résolution par balance harmonique. Ensuite, une technique de continuation y sera intégrée de manière à parcourir la courbe de réponse en tenant compte de ses possibles retournements. Quelques modifications seront proposées pour la méthode de Newton de manière à rendre la résolution plus fiable.

Enfin, quelques exemples seront traités de manière à s'approprier la méthode et à se rapprocher de la problématique d'origine. Ainsi nous étudierons tout d'abord un oscillateur de Duffing, puis un rotor à raideur non-linéaire, et enfin un oscillateur non-linéaire à deux degrés de liberté.

### 3.2.1 Représentation harmonique.

On s'intéresse aux solutions  $\mathbf{x}(t)$  de l'équation de mouvement (1.25) périodiques de période  $T$  (fréquence  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(t).$$

On cherche  $\mathbf{x}(t)$  sous forme de série trigonométrique tronquée à l'harmonique  $N$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}^{\{0\}}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{a}^{\{j\}} \cos j\omega t + \mathbf{b}^{\{j\}} \sin j\omega t \approx \frac{\mathbf{a}^{\{0\}}}{2} + \sum_{j=1}^N \mathbf{a}^{\{j\}} \cos j\omega t + \mathbf{b}^{\{j\}} \sin j\omega t. \quad (3.5)$$

Ici les indices supérieurs avec des accolades désignent le numéro d'harmonique (0 à  $N$ ). Il convient d'introduire des notations analogues pour  $\mathbf{f}_{\text{NL}}$  :

$$\mathbf{f}_{\text{NL}} = \frac{\mathbf{c}^{\{0\}}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{c}^{\{j\}} \cos j\omega t + \mathbf{d}^{\{j\}} \sin j\omega t \approx \frac{\mathbf{c}^{\{0\}}}{2} + \sum_{j=1}^N \mathbf{c}^{\{j\}} \cos j\omega t + \mathbf{d}^{\{j\}} \sin j\omega t. \quad (3.6)$$

Sous forme matricielle, cette représentation s'écrit comme suit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{f}_{\text{NL}} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{g}}. \quad (3.7)$$

avec tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) désignant des vecteurs d'amplitudes harmoniques,  $\mathbf{T}$  une matrice de transformation de Fourier inverse discrète.

$$\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}_1(\tau) \otimes \mathbf{I}_n, \quad (3.8)$$

où  $\tau = \omega t$  est le temps normalisé,

$$\mathbf{T}_1 = [1/2, \cos(\tau), \sin(\tau), \dots, \cos(N\tau), \sin(N\tau)] \quad (3.9)$$

matrice de fonctions trigonométriques,  $\otimes$  produit de Kronecker,  $\mathbf{I}_n$  matrice identité d'ordre  $n$ . La multiplication de Kronecker par  $\mathbf{I}_n$  assure un agencement des fonctions harmoniques de manière à ce que le vecteur d'inconnues  $\tilde{\mathbf{x}}$  soit constitué de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left[ \tilde{\mathbf{x}}^{\{0\}\text{T}}, \tilde{\mathbf{x}}^{\{1\}\text{T}}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{\{N\}\text{T}} \right]^{\text{T}}, \quad (3.10)$$

où

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\{i\}} = \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{[1]}^{\{i\}\text{T}}, \tilde{\mathbf{x}}_{[2]}^{\{i\}\text{T}}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{[n]}^{\{i\}\text{T}} \right]^{\text{T}}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (3.11)$$

les indices inférieurs entre crochets désignent le numéro du degré de liberté (1 à  $n$ ),

$$\tilde{\mathbf{x}}_{[j]}^{\{0\}} = \mathbf{a}_{[j]}^{\{0\}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{[j]}^{\{i\}} = \left[ \mathbf{a}_{[j]}^{\{i\}}, \mathbf{b}_{[j]}^{\{i\}} \right]^{\text{T}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, n. \quad (3.12)$$

La substitution de (3.7) dans (1.25) donne :

$$\omega^2 \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \tau^2} \tilde{\mathbf{x}} + \omega \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}(\mathbf{T} \tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{T} \tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{r}(\tau) (= 0). \quad (3.13)$$

On projette maintenant l'équation (3.13) sur la base des fonctions trigonométriques :

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \mathbf{r}(\tau) d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{r}} (= 0); \quad (3.14)$$

Cette projection est équivalente à une **procédure de Galerkin**, consistant à reformuler le problème en tant qu'annulation du résidu  $\tilde{\mathbf{r}}$ .

Les termes  $\mathbf{L}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$  et  $\tilde{\mathbf{g}}$  s'expriment de la manière suivante :

$$\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \left( \omega^2 \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \tau^2} + \omega \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \tau} + \mathbf{K} \mathbf{T} \right) d\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{\{0\}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^{\{1\}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{L}^{\{N\}} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{L}^{\{0\}} = \mathbf{K}; \quad \mathbf{L}^{\{j\}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (j\omega)^2 \mathbf{M} & j\omega \mathbf{D} \\ -j\omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (j\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \mathbf{g} d\tau, \quad \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}) d\tau. \quad (3.17)$$

Ainsi,  $\mathbf{L}$  s'exprime en fonction des matrices du système dynamique (1.25). L'expression de  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$  traduit une approche de type AFT : il s'agit de transformer  $\tilde{\mathbf{x}}$  (domaine fréquentiel) en  $\mathbf{x}$  (domaine temporel), de calculer  $\mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$  et enfin d'en déduire  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$ , ce qui peut être illustré de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{x}} \xrightarrow{\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (3.18)$$

On a donc un système d'équations algébriques non-linéaires que l'on résout par rapport à  $\tilde{\mathbf{x}}$  par une **méthode de type Newton**. La procédure itérative de Newton-Raphson se traduit par l'expression :

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i+1)} = \tilde{\mathbf{x}}^{(i)} + \Delta \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad (3.19)$$

où  $\Delta \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}$  représente la correction à l' $i$ -ième itération et s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = - \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix}^{(i)} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{r}}^{(i)}, \quad (3.20)$$

avec

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{L} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{T} d\tau. \quad (3.21)$$

Le processus itératif est initialisé par une valeur  $\tilde{\mathbf{x}}^{(0)}$  venant d'une estimation linéarisée ou de l'extrapolation par rapport aux points calculés précédemment, comme on le verra par la suite.

En général, l'expression analytique de  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$  dans le domaine fréquentiel n'est pas disponible. Pour l'évaluer numériquement, on peut procéder de manière directe, c'est-à-dire en la construisant colonne par colonne, en appliquant un incrément à chaque composante harmonique pour chaque degré de liberté non-linéaire. Dans le cas où l'on a l'expression analytique

des dérivées des termes non-linéaires dans le domaine temporel  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ , on peut accélérer le calcul. Pour cela, plusieurs approches sont présentes dans la littérature, notamment celle de la collocation trigonométrique [NS98] ou encore de passer par une FFT directe puis inverse [CLG98]. Ces approches sont explicitées dans les sous-sections qui suivent.

### 3.2.2 Calcul de $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$ et $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ par moindres carrés (collocation trigonométrique)

Soit  $\bar{t}$  un vecteur qui représente une période  $[0, T]$  échantillonné à une fréquence  $\frac{p}{T}$  :

$$\bar{t} = \{0, t_1, \dots, t_i, \dots, T\}, \quad t_i = i \Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{p}, \quad i = 0, \dots, p \quad (3.22)$$

Par la suite, nous utiliserons barre pour noter la discrétisation temporelle et les indices inférieurs avec parenthèses pour désigner les instants temporels.

En substituant  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{f}_{\text{NL}}$ ,  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{T}$  de (3.7)–(3.10) par leurs analogues discrétisés sur  $\bar{\tau}$  :

$$\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_{(0)}^T, \mathbf{x}_{(1)}^T, \dots, \mathbf{x}_{(p)}^T]^T, \quad (3.23)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{\text{NL}} = [\mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_{(0)})^T, \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_{(1)})^T, \dots, \mathbf{f}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_{(p)})^T]^T, \quad (3.24)$$

$$\bar{\mathbf{g}} = [\mathbf{g}_{(0)}^T, \mathbf{g}_{(1)}^T, \dots, \mathbf{g}_{(p)}^T]^T, \quad (3.25)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(0) \\ \mathbf{T}_1(\omega t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}_1(\omega T) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & \cos \omega \frac{T}{p} & \sin \omega \frac{T}{p} & \dots & \sin \omega N \frac{T}{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & \cos \omega T & \sin \omega T & \dots & \sin N \omega T \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n, \quad (3.26)$$

dans l'équation du mouvement (1.25), on obtient l'expression du résidu  $\bar{\mathbf{r}}$  discrétisé sur  $\bar{\tau}$  :

$$\left( \omega^2 (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{M}) \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{T}}}{\partial \tau^2} + \omega (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{D}) \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial \tau} + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{K} \bar{\mathbf{T}} \right) \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{f}}_{\text{NL}} - \bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{r}}. \quad (3.27)$$

En considérant la représentation harmonique  $\tilde{\mathbf{r}}$  du résidu  $\bar{\mathbf{r}}$ , définie par

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{r}}, \quad (3.28)$$

nous inversons cette relation au sens des moindres carrés :

$$\tilde{\mathbf{r}} = (\bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{T}})^{-1} \bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{r}}. \quad (3.29)$$

Cette équation nous permet d'arriver à une formulation en termes harmoniques de la forme (3.14) :

$$\bar{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}} - \tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{r}} \quad (3.30)$$

avec

$$\bar{\mathbf{L}} = (\bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{T}})^{-1} \bar{\mathbf{T}}^T \left( \omega^2 (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{M}) \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{T}}}{\partial \tau^2} + \omega (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{D}) \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial \tau} + \mathbf{I}_p \otimes \mathbf{K} \bar{\mathbf{T}} \right), \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}} = (\bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{T}})^{-1} \bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{f}}_{\text{NL}}(\bar{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{x}}), \quad (3.32)$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = (\bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{T}})^{-1} \bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{g}}. \quad (3.33)$$

On remarque que la matrice  $\bar{\mathbf{T}}^* = (\bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{T}})^{-1} \bar{\mathbf{T}}^T$  est la matrice pseudo-inverse de  $\bar{\mathbf{T}}$ . Elle correspond à une approximation au sens de moindres carrés de la transformée de Fourier. Pour le cas de la matrice  $\bar{\mathbf{L}}$  qui ne comporte que des termes linéaires, une expression exacte est disponible : on peut remplacer  $\bar{\mathbf{L}}$  de (3.31) par la matrice  $\mathbf{L}$  (3.15)–(3.16).

En dérivant  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$  de (3.32) par rapport à  $\tilde{\mathbf{x}}$  :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = (\bar{\mathbf{T}}^T \bar{\mathbf{T}})^{-1} \bar{\mathbf{T}}^T \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right) \bar{\mathbf{T}}, \quad (3.34)$$

on obtient l'expression de la partie non-linéaire de la matrice jacobienne qui devra être recalculée à chaque pas d'itération.

### 3.2.3 Calcul de $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$ et $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ par FFT

On adoptera les conventions suivantes pour le calcul de la transformée de Fourier :

$$\hat{\mathbf{f}}^{\{k\}} = \sum_{l=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i k l}{p}} \mathbf{f}_{(l)}; \quad (3.35)$$

et pour celle inverse :

$$\bar{\mathbf{f}}_{(l)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k l}{p}} \hat{\mathbf{f}}^{\{k\}} \quad (3.36)$$

avec  $p$  le nombre de points discrétisant la période de temps échantillonnée (égale à la période du signal). On a les relations suivantes entre les coefficients de la représentation trigonométrique  $\tilde{\mathbf{x}}$  et complexe  $\hat{\mathbf{x}}$  :

$$\text{Re}(\hat{\mathbf{x}}^{\{k\}}) = \tilde{\mathbf{a}}^{\{k\}}, \quad \text{Im}(\hat{\mathbf{x}}^{\{k\}}) = -\tilde{\mathbf{b}}^{\{k\}}; \quad (3.37)$$

$$\text{Re}(\hat{\mathbf{f}}_{\text{NL}}^{\{k\}}) = \tilde{\mathbf{c}}^{\{k\}}, \quad \text{Im}(\hat{\mathbf{f}}_{\text{NL}}^{\{k\}}) = -\tilde{\mathbf{d}}^{\{k\}}. \quad (3.38)$$

Le vecteur d'efforts non-linéaires  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$  est donc calculé de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{NL}}^{\{k\}} = \sum_{l=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i k j}{p}} \mathbf{f}_{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}_{(j)}), \quad \bar{\mathbf{x}}_{(j)} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i l j}{p}} \hat{\mathbf{x}}^{\{l\}}. \quad (3.39)$$

Pour calculer  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$  :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}^{\{l\}}} = \sum_{j=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i k j}{p}} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_{(j)}} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_{(j)}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}^{\{l\}}}, \quad (3.40)$$

on considère l'expression des éléments temporels  $\bar{\mathbf{x}}$  et  $\bar{\mathbf{f}}$  en fonction de  $\tilde{\mathbf{a}}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}$  et  $\tilde{\mathbf{d}}$  constituant  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\tilde{\mathbf{f}}$  :

$$\bar{\mathbf{x}}_{(j)} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i l j}{p}} \left( \tilde{\mathbf{a}}^{\{l\}} - i \tilde{\mathbf{b}}^{\{l\}} \right), \quad (3.41)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{(j)} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i l j}{p}} \left( \tilde{\mathbf{c}}^{\{l\}} - i \tilde{\mathbf{d}}^{\{l\}} \right). \quad (3.42)$$

On peut alors exprimer les dérivées de  $\tilde{\mathbf{c}}$  et  $\tilde{\mathbf{d}}$  par rapport à  $\tilde{\mathbf{a}}$  et  $\tilde{\mathbf{b}}$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{[j]}^{\{l\}}} = \frac{1}{p} \sum_{q=0}^{p-1} \cos\left(\frac{2\pi kq}{p}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}[i]}}{\partial \mathbf{x}_{[j]}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_{(q)}} \cos\left(\frac{2\pi ql}{p}\right); \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{[j]}^{\{l\}}} = \frac{1}{p} \sum_{q=0}^{p-1} \cos\left(\frac{2\pi kq}{p}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}[i]}}{\partial \mathbf{x}_{[j]}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_{(q)}} \sin\left(-\frac{2\pi ql}{p}\right); \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{[j]}^{\{l\}}} = \frac{1}{p} \sum_{q=0}^{p-1} \sin\left(\frac{2\pi kq}{p}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}[i]}}{\partial \mathbf{x}_{[j]}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_{(q)}} \cos\left(\frac{2\pi ql}{p}\right); \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{[j]}^{\{l\}}} = \frac{1}{p} \sum_{q=0}^{p-1} \sin\left(\frac{2\pi kq}{p}\right) \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}[i]}}{\partial \mathbf{x}_{[j]}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_{(q)}} \sin\left(-\frac{2\pi ql}{p}\right) \quad (3.46)$$

avec  $i, j = 1, \dots, n$  et  $k, l = 0, \dots, N$ .

En s'appuyant sur l'expression de la matrice suivante :

$$\Delta_{[ij]}^{\{k\}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi ikl}{p}} \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}[i]}}{\partial \mathbf{x}_{[j]}} \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_{(l)}}, \quad (3.47)$$

l'ensemble des expressions ci-dessus (3.43-3.46) peuvent être réécrites de façon compacte :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{[j]}^{\{l\}}} = \text{Re } \Delta_{[ij]}^{\{k+l\}} + \text{Re } \Delta_{[ij]}^{\{k-l\}}; \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{c}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{[j]}^{\{l\}}} = \text{Im } \Delta_{[ij]}^{\{k+l\}} - \text{Im } \Delta_{[ij]}^{\{k-l\}}; \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{[j]}^{\{l\}}} = -\text{Im } \Delta_{[ij]}^{\{k+l\}} - \text{Im } \Delta_{[ij]}^{\{k-l\}}; \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}_{[i]}^{\{k\}}}{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{[j]}^{\{l\}}} = \text{Re } \Delta_{[ij]}^{\{k+l\}} - \text{Re } \Delta_{[ij]}^{\{k-l\}}. \quad (3.51)$$

Cette expression permet de réduire le temps de calcul de la matrice jacobienne car il n'est pas nécessaire de recalculer systématiquement  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}}^{\{l\}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_{[j]}}$  par FFT, une seule estimation de  $\Delta$  est nécessaire.

### 3.2.4 Continuation

La continuation des solutions des problèmes non-linéaires est une approche qui permet de suivre l'évolution du système (1.25) par rapport à un paramètre préalablement choisi que nous noterons  $\nu$ . Cette approche consiste à rechercher les valeurs de  $\nu$  en même temps que la solution de (3.19), en disposant juste d'une valeur initiale de  $\nu$  et non d'un ensemble de valeurs prédéfinies. Plusieurs techniques sont connues actuellement [NB95, Cri70], notamment "arc-length", "pseudo-arc-length", sélection paramétrique.

Dans cette étude, la continuation de type “arc-length” sera utilisée. Pour expliquer la démarche, on se place dans le cas où l’on a calculé  $j$  points de la courbe de réponse et on effectue l’ $i$ -ième itération de recherche du  $(j + 1)$ -ième point. On se donne donc une relation supplémentaire de manière à déterminer la valeur de  $\nu$  du point suivant  $(j + 1)$  de la courbe de réponse, éloigné du point précédent de  $\Delta s$  :

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \nu \end{bmatrix}_{\{j+1\}}^{(i)} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \nu \end{bmatrix}_{\{j\}} \right\|^2 - \Delta s_{\{j\}}^2 = r_{\{j+1\}}^{(i)} (= 0), \quad (3.52)$$

on définit alors une abscisse curviligne  $s$  de parcours de la courbe de réponse par :

$$s_{\{j\}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^j \Delta s_{\{k\}}. \quad (3.53)$$

La méthode de continuation par la longueur d’arc (arc-length) permet un meilleur conditionnement [SK99]. Elle consiste à respecter la distance  $\Delta s$  donnée entre les points recherchés quelle que soit la direction de progression. On reformule alors le problème (3.19) en augmentant la dimension du vecteur d’inconnues de 1 (la valeur du paramètre  $\nu$ ) :

$$\mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i+1)} = \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} + \Delta \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} \quad (3.54)$$

avec

$$\Delta \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} = - \left( \mathbf{J}_{\{j+1\}}^{(i)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}} \\ r \end{bmatrix}_{\{j+1\}}^{(i)} \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \nu \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Dans les études que l’on va mener, le paramètre  $\nu$  désignera le “régime”,  $\nu$  sera proportionnel à  $\omega$ .

Pour résoudre ce problème augmenté, on donne la nouvelle expression de la **matrice jacobienne**  $\mathbf{J}$  qui s’écrit maintenant comme suit :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} & \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial r} & \frac{\partial \nu}{\partial r} \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} & \frac{\partial \nu}{\partial \nu} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

avec les blocs suivants :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{L} + \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right]; \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \nu} \tilde{\mathbf{x}} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \nu}; \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = 2 \left( \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \mathbf{z}_{\{j\}} \right)^{\text{T}}; \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} = 2\nu. \quad (3.60)$$

La résolution par un algorithme de type Newton nécessite une **valeur initiale** suffisamment précise pour assurer la convergence de la méthode. Pour générer cette valeur  $\mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(0)}$  pour le

calcul du  $(j + 1)$ ème point de la courbe de réponse, nous utilisons une extrapolation par les **polynômes de Lagrange** :

$$\mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(0)} = \sum_{i=j-l+1}^j \left( \prod_{k=j-l+1, k \neq i}^j \frac{s_{\{j+1\}} - s_{\{k\}}}{s_{\{i\}} - s_{\{k\}}} \mathbf{z}_{\{i\}} \right) \quad (3.61)$$

Les polynômes utilisés sont généralement de degré faible (ordres 1, 2, 3, ou 4, exploitant les valeurs des 2, 3, 4 ou 5 derniers points convergés).

Lors de l'utilisation d'une méthode de continuation, deux solutions sont toujours disponibles : le point suivant de la courbe de réponse (celui que l'on cherche) et le point précédent. Selon la qualité de la prédiction initiale, le processus itératif peut converger vers l'un ou vers l'autre de ces points. Pour ne pas revenir en arrière, l'on préconise d'introduire une **condition de non-retour**.

Nous formulons la condition de non-retour à partir de l'orientation réciproque des pas sur la courbe de réponse. Soit  $\alpha$  l'angle entre les orientations des deux derniers pas (le pas  $\{j\} \rightarrow \{j + 1\}$  en cours de calcul et le pas précédent  $\{j - 1\} \rightarrow \{j\}$ ) sur la courbe de réponse :

$$\alpha = \angle \left( \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \mathbf{z}_{\{j\}}, \mathbf{z}_{\{j\}} - \mathbf{z}_{\{j-1\}} \right). \quad (3.62)$$

On peut calculer son cosinus par la relation suivante

$$\cos(\alpha) = \frac{\left( \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \mathbf{z}_{\{j\}}, \mathbf{z}_{\{j\}} - \mathbf{z}_{\{j-1\}} \right)}{\|\mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \mathbf{z}_{\{j\}}\| \|\mathbf{z}_{\{j\}} - \mathbf{z}_{\{j-1\}}\|}. \quad (3.63)$$

A partir du  $\cos \alpha$ , on peut formuler un critère de détection de retour de l'itération sur le pas précédent mais aussi de courbure de la solution trop importante par rapport à la longueur du pas curviligne choisi :

$$\cos \alpha < c_0 \quad (3.64)$$

avec  $c_0$  une constante arbitraire.

Enfin, le pas curviligne  $\Delta s$  peut être adapté selon la convergence des derniers points de parcours de la courbe de réponse. On considère les possibilités suivantes pour l'adaptation de  $\Delta s$  :

1. Dans le cas où les  $j_0$  derniers pas ont convergé en une itération, le pas curviligne  $\Delta s$  est augmenté d'un facteur  $q_1$ .
2. Si le dernier pas a pris plus de  $i_0$  itérations pour converger,  $\Delta s$  est, au contraire, diminué d'un facteur de  $q_2$ .
3. Si le dernier point convergé ne satisfait pas la condition de non-retour (3.64), on diminue le pas curviligne d'un facteur  $q_3$ .

Ici  $i_0$ ,  $j_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont des paramètres arbitrairement choisis par l'opérateur.

### 3.2.5 Modifications de la méthode de Newton

En nous plaçant au  $(i + 1)$ -ième pas du calcul du  $\{j + 1\}$ -ième point de la courbe de réponse, nous considérons quelques possibilités d'amélioration de l'algorithme de résolution

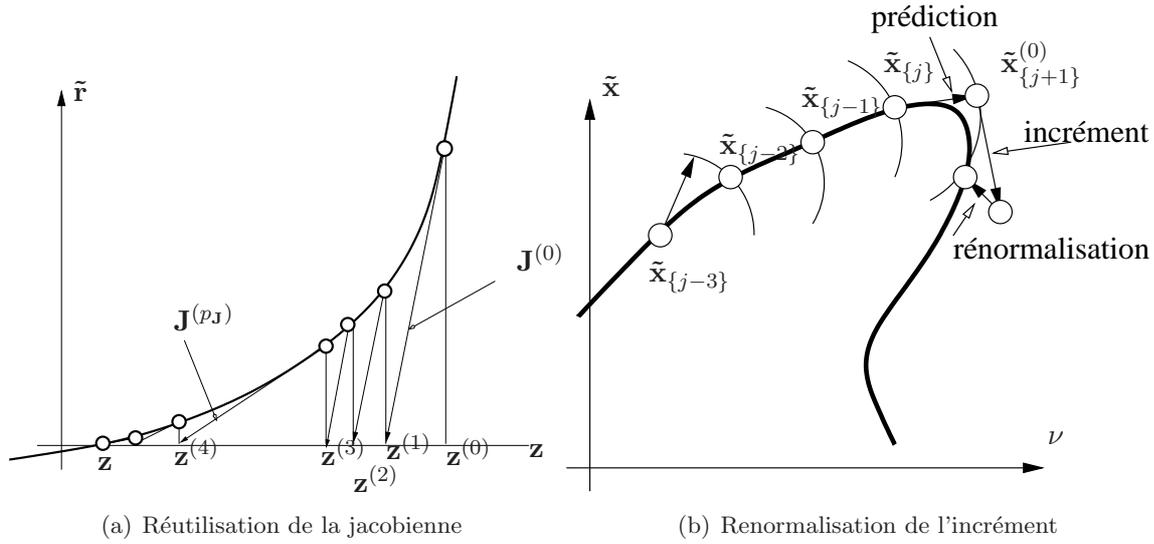


FIG. 3.1 – Détails sur la résolution algébrique

de manière à l'adapter au mieux à la problématique étudiée. Les modifications envisagées concerneront l'évaluation de l'incrément de l'itération (3.55).

Afin d'accélérer le calcul de l'incrément, on peut réutiliser la même valeur de la Jacobienne pendant plusieurs itérations. On peut également apporter des modifications à la méthode de Newton de manière à améliorer sa fiabilité. Quand la correction (3.20) est importante, elle peut amener le processus d'itération en dehors du domaine d'attraction. Pour palier à ce genre de problème, on peut appliquer une renormalisation d'incrément ou apporter de l'amortissement numérique.

**La renormalisation de l'incrément** consiste à remettre le point  $[\tilde{\mathbf{x}}, \nu]_{\{j+1\}}^{(i+1)\text{T}}$  sur la sphère de rayon  $\Delta s_{\{j+1\}}$  centrée sur le point  $\{j+1\}$  à chaque pas d'itération (figure 3.1(b)) :

$$\mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i+1)} = \mathbf{z}_{\{j\}} + \varkappa \left( \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \Delta \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \mathbf{z}_{\{j\}} \right) \quad (3.65)$$

avec

$$\varkappa = \frac{\Delta s_{\{j+1\}}}{\left\| \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \Delta \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} - \mathbf{z}_{\{j\}} \right\|}. \quad (3.66)$$

**Réutilisation de la matrice jacobienne.** La matrice jacobienne peut être calculée tous les  $p_{\mathbf{J}} > 1$  pas d'itération. Les pas restants peuvent être calculés avec la dernière matrice  $\mathbf{J}$  évaluée. Cela permet d'économiser le temps d'évaluation de  $\mathbf{J}$  dans les cas où elle varie peu entre les pas d'itération. On peut donc faire plus d'itérations "moins précises", ce qui représente assez souvent un gain considérable en temps de calcul. Cependant, dans des domaines de forte variation de  $\tilde{\mathbf{r}}$  cela peut mener l'itération hors du domaine d'attraction de la solution recherchée. Cela est notamment le cas des non-linéarités de type jeu, où la matrice jacobienne peut varier de manière discontinue entre les itérations. Les erreurs induites par la réutilisation de la Jacobienne peuvent en partie compensées par l'introduction d'amortissement numérique.

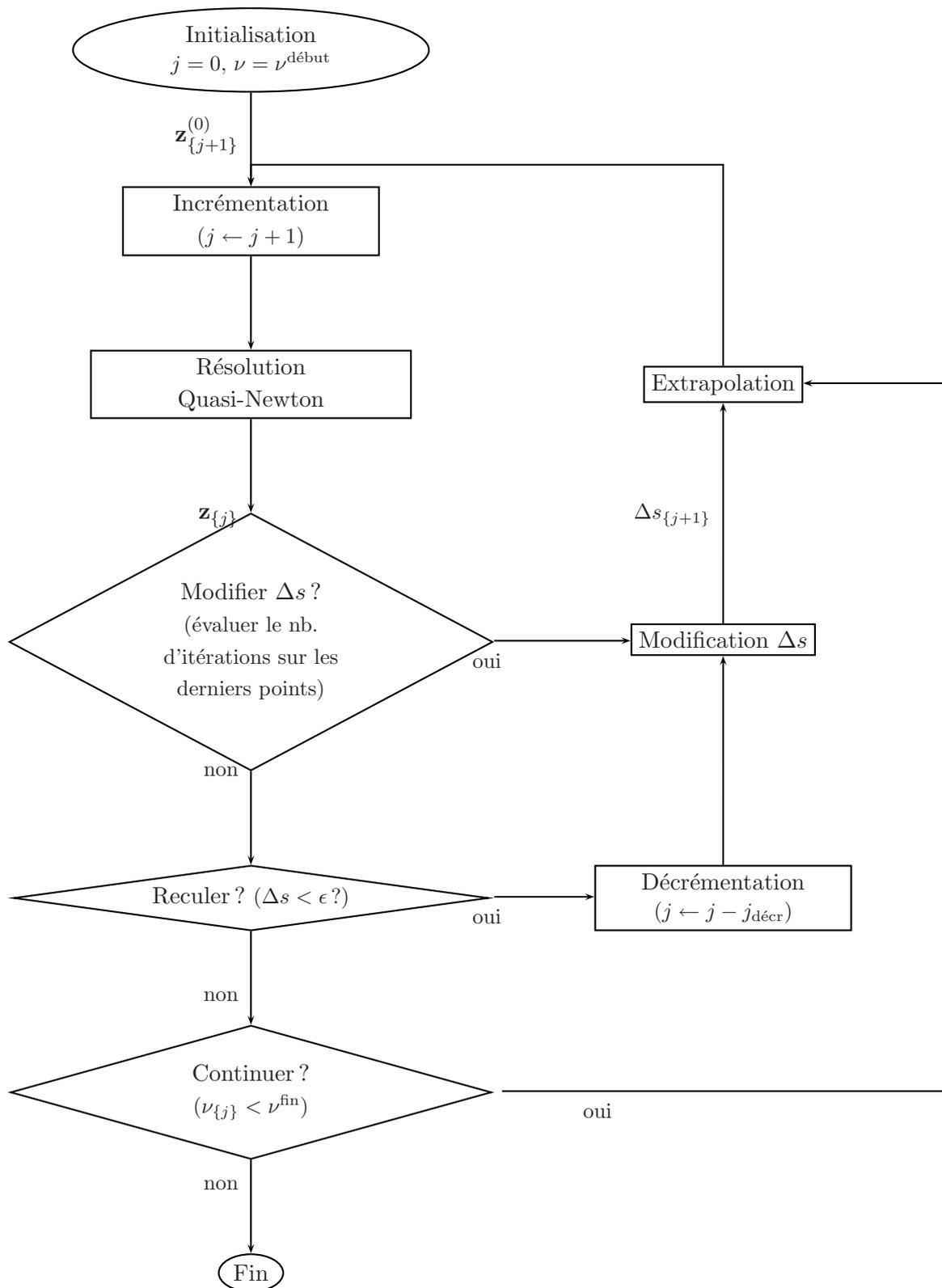


FIG. 3.2 – Boucle de continuation

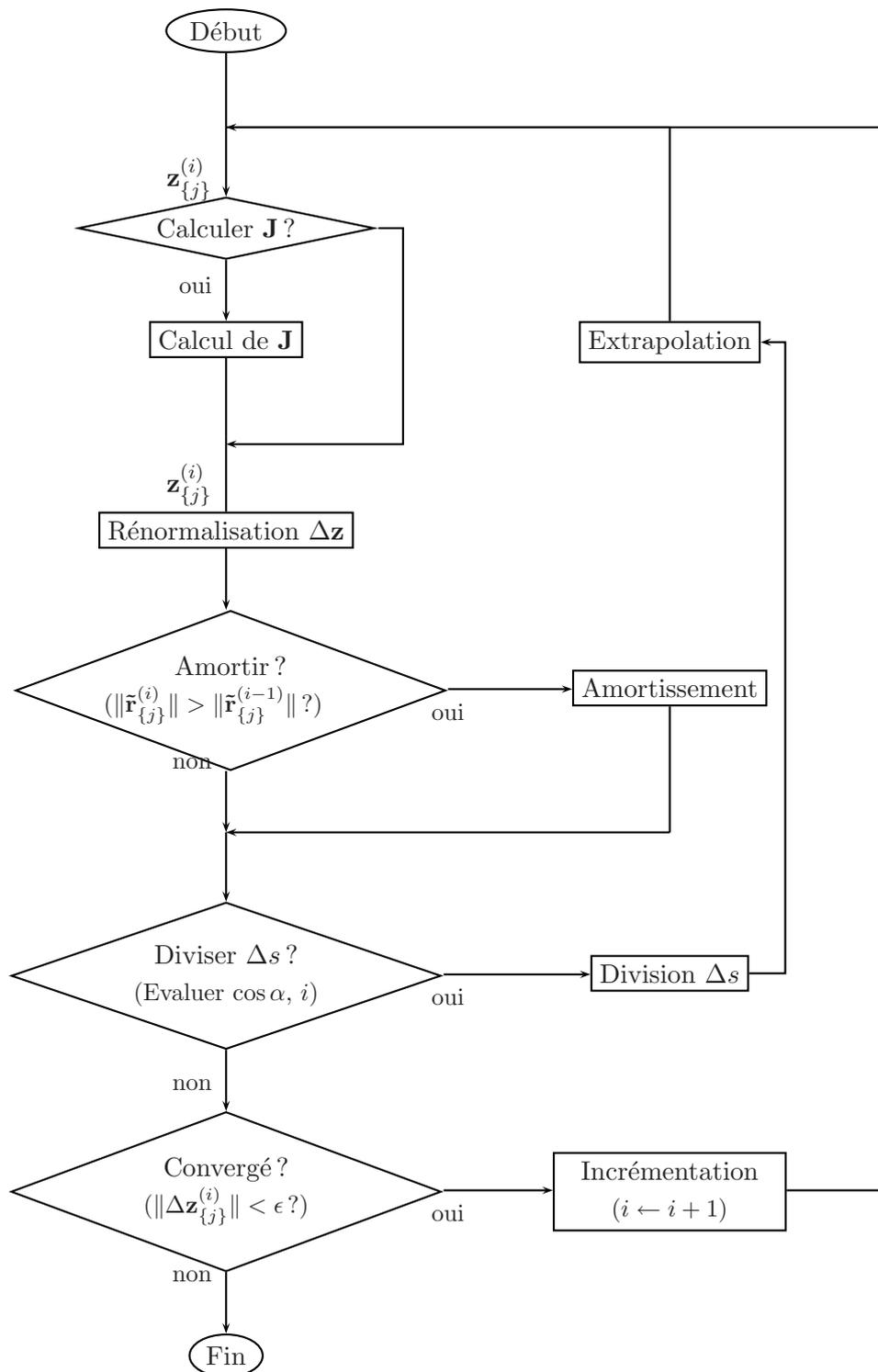


FIG. 3.3 – Boucle d'itération de Newton modifiée

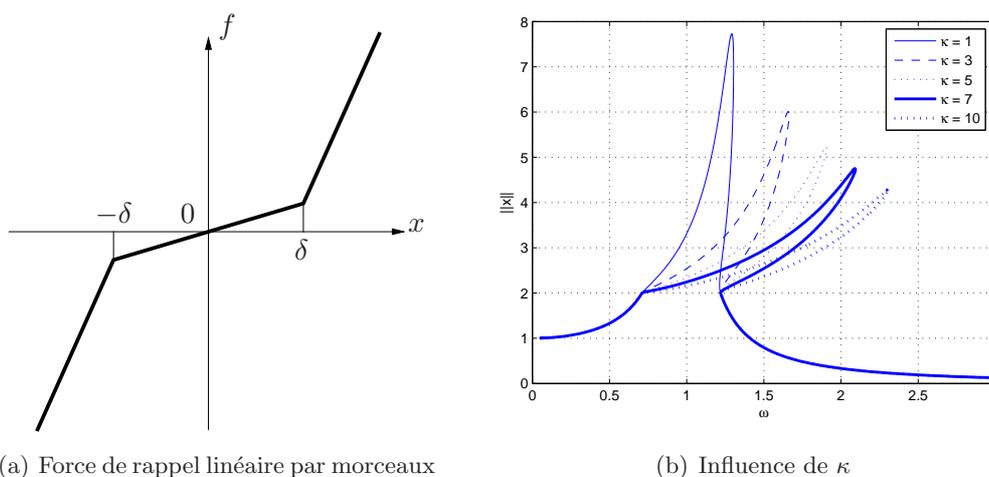


FIG. 3.4 – Réponse d'un oscillateur linéaire par morceaux

**L'amortissement numérique** se réalise [Zal06] en découpant  $\Delta \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)}$  de manière à ralentir l'évolution du point  $\mathbf{z}_{\{j\}}^{(i+1)}$  s'il mène à une augmentation du résidu. On modifie donc (3.55) :

$$\Delta \mathbf{z}_{\{j+1\}}^{(i)} = -\frac{1}{2^q} \left( \mathbf{J}_{\{j+1\}}^{(i)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}} \\ r \end{bmatrix}_{\{j+1\}}^{(i)}, \quad (3.67)$$

en augmentant  $q$  jusqu'à ce que  $\|[\tilde{\mathbf{r}}, r]_{\{j\}}^{(i+1)}\|^T < \|[\tilde{\mathbf{r}}, r]_{\{j\}}^{(i)}\|^T$ .

La mise en oeuvre de l'algorithme de la balance harmonique dont les éléments sont décrits ci-dessus est présentée en figure 3.3. La boucle de continuation (figure 3.2) consiste à assurer l'avancement sur la courbe de réponse, généralement entre deux valeurs du paramètre de contrôle  $\nu$  :  $\nu^{\text{début}}$  et  $\nu^{\text{fin}}$ .

### 3.3 Exemples d'applications

Afin d'illustrer la procédure qui vient d'être décrite, nous l'appliquerons dans un premier temps sur l'exemple simple d'un oscillateur non-linéaire par morceaux. Puis nous étudierons les cas de deux systèmes permettant des rigidifications cubiques.

#### 3.3.1 Oscillateur linéaire par morceaux

La raideur linéaire par morceaux correspond à un système à jeux. On s'intéresse donc au problème suivant :

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x + \kappa x(h(|x| - \delta)) = \cos(\omega t), \quad (3.68)$$

avec  $h(x)$  fonction-échelon de Heaviside. La force de rappel de cet oscillateur est donnée sur la figure 3.4(a). La réponse pour le système (3.68) pour  $\delta = 2$  est donnée par la figure 3.4(b). La réponse non-linéaire révèle des fortes évolutions sur les fréquences et les amplitudes typiques d'une non-linéarité raidissante.

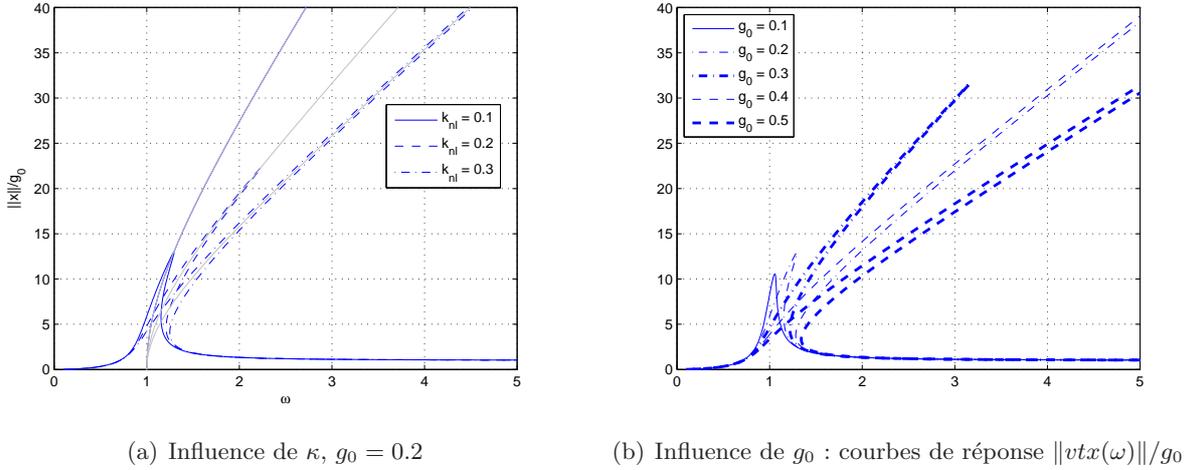


FIG. 3.5 – Réponse du système (3.69).

### 3.3.2 Rotor avec non-linéarité de raideur radiale

Cette méthode de résolution est appliquée au problème de réponse à balourd d'un rotor de Jeffcot à non-linéarité radiale cubique :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} x(x+y)^2 \\ y(x+y)^2 \end{bmatrix} = g_0 \omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Cet exemple est traité dans [Gen98]. Deux points particuliers sont à souligner par rapport au problème dynamique :

- dans le cas axisymétrique, la réponse *exacte* se limite à la première harmonique (réponse statique dans le repère tournant) ;
- comme l'amplitude de l'excitation croît avec la fréquence, pour un niveau de balourd trop important, la courbe de réponse ne croise plus la courbe squelette, et donc on n'observe plus de retournement.

Par rapport aux exemples précédents, l'expression de la matrice jacobienne (selon (3.58)) est modifiée et il faut rajouter le terme

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \nu} = \frac{2}{\omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \nu} \quad (3.70)$$

qui reflète une dépendance du terme d'excitation noté  $\tilde{\mathbf{g}}$  par rapport à la vitesse de rotation  $\omega$ .

Les courbes de réponse que l'on obtient (figure 3.5) permettent d'observer les phénomènes caractéristiques de l'oscillateur de Duffing (inclinaison du pic à droite, croissant avec le niveau de non-linéarité ou d'excitation) et du rotor de Jeffcot (la valeur asymptotique inférieure de  $\|\tilde{\mathbf{x}}\|$  est égale à la valeur de l'excentricité), ainsi que les effets non-linéaires soulignés ci-dessus.

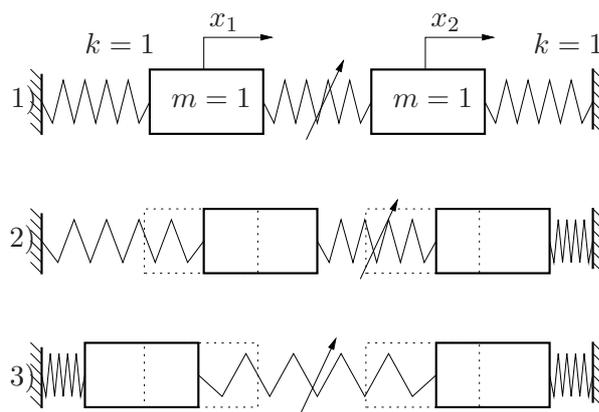


FIG. 3.6 – Deux oscillateurs linéaires couplés (3.71) (1 – système mécanique, 2 – mode “en phase”, 3 – mode en “opposition de phase”)

### 3.3.3 Deux oscillateurs linéaires, couplés par une raideur cubique pure

Cette fois la non-linéarité est placée entre deux oscillateurs (figure 3.6) dont on excite une des masses par une force harmonique. On considère donc le système suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} (x_1 - x_2)^3 \\ -(x_1 - x_2)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

avec  $\kappa = 0.2$ .

Les courbes de réponse (figure 3.7) montrent un comportement non-linéaire avec deux modes principaux : un mode “en phase”, qui donne une réponse linéaire et un mode “en opposition de phase” dont la réponse est celle d’un oscillateur de Duffing.

Cet exemple est particulier puisque le couplage se fait par une non-linéarité pure (pas de partie linéaire) et les deux systèmes linéaires sont équivalents d’un point de vue modal. L’algorithme permet de bien prendre en compte la “séparation” des deux modes et leur évolution respective.

La réponse de ce système sous forme d’enveloppe et de la première harmonique est donnée sur la figure 3.7 pour chacune des deux masses. On peut distinguer 3 pics de résonance : à  $\omega \approx 0.4$  on voit un pic de réponse surharmonique d’ordre 3, ensuite à  $\omega = 1$  la résonance du premier mode puis à  $\omega \approx 2.4$  la résonance du second mode. Comme on peut voir en comparant les figures 3.7(a) et 3.7(b), les deux masses ont un mouvement en phase sur le premier mode puis en opposition sur le second mode.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons choisi une méthode de recherche de solutions périodiques des systèmes dynamiques non-linéaires. Parmi le vaste ensemble d’outils dont dispose la dynamique non-linéaire, la méthode de la balance harmonique a été retenue comme celle qui se prête le mieux à une généralisation à des excitations multi-fréquentielles. De plus, la taille des systèmes d’équations pouvant être résolus par ce type d’approche est adaptée à l’étude des

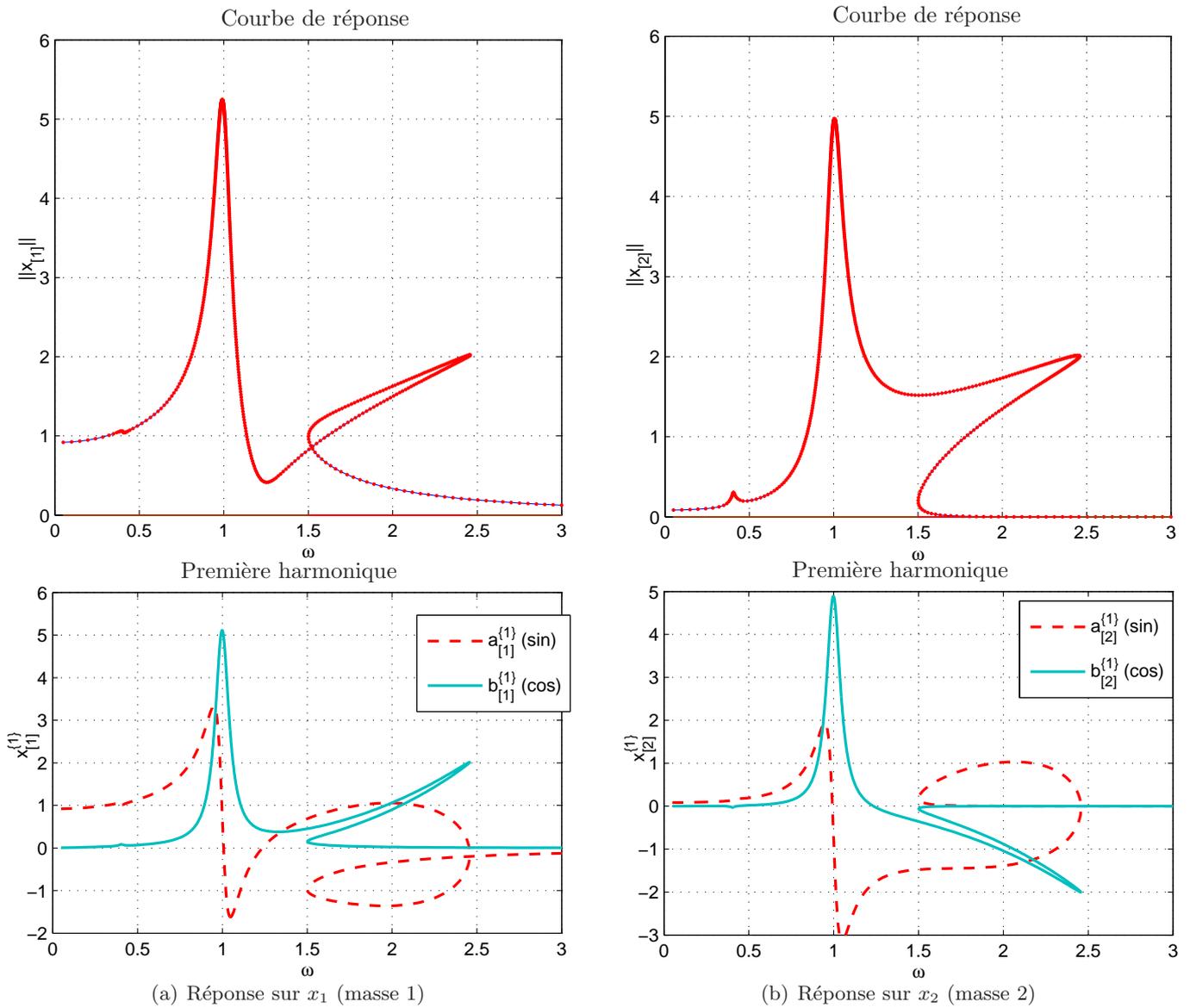


FIG. 3.7 – Réponse du système (3.71).

problématiques industrielles.

L'implémentation algorithmique de cette méthode se conjugue avec une procédure de continuation de type arc-length. Plusieurs modifications de la méthode de résolutions sont également réalisées de manière à accélérer et améliorer la convergence, notamment la variation du pas d'abscisse curviligne, l'amortissement numérique, la réutilisation de la Jacobienne.

Les exemples présentés montrent la capacité de la méthode à traiter des systèmes d'équations dynamiques non-linéaires avec plusieurs degrés de liberté et sous excitation de type balourd.

Nous allons par la suite nous intéresser à la stabilité des solutions ainsi obtenues et à la généralisation des techniques développées au cas d'excitations multi-fréquentielles.



# Chapitre 4

## Stabilité des solutions

De manière générale, on appelle stable un mouvement dont l'évolution liée à des perturbations est bornée. Plusieurs définitions associées à cette notion existent. On peut parler de stabilité au sens de Lyapunov, de stabilité asymptotique ou encore de la stabilité locale.

Dans ce chapitre, nous développerons des stratégies d'études de stabilité qui nous semblent les plus adaptées à notre problématique. Il s'agit en effet de définir des approches à même d'évaluer la stabilité pour les réponses périodiques ou quasi-périodiques (cas du bi-rotors). La robustesse des résultats mais aussi la capacité à traiter les problèmes de grande taille ont guidé le choix des stratégies mises en oeuvre.

Ces démarches seront présentées puis discutées sur plusieurs exemples, notamment de manière à les appliquer aux solutions issues de la balance harmonique présentée dans le chapitre précédent, ainsi qu'à les généraliser aux cas multi-fréquentiels.

### 4.1 Etude de la stabilité

On étudie la stabilité d'une solution de l'équation de la dynamique (1.25) qui peut être réécrite dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{y}} = \phi(t, \mathbf{y}) \quad (4.1)$$

avec  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Cette formulation peut être obtenue de plusieurs façons, nous adopterons la suivante :

$$\mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

L'équation dynamique se reformule donc comme suit :

$$\phi(t, \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h} + \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Soit  $\mathbf{y}^{[0]}(t)$  solution de (4.1) dont on cherche à évaluer la stabilité. Une approche générale pour étudier la stabilité des solutions des équations différentielles consiste à introduire **une**

**perturbation infinitésimale**  $\mathbf{p}(0)$  des conditions initiales dont l'évolution temporelle indiquera la stabilité de la solution étudiée. Pour la solution  $\mathbf{y}^{[0]}$  (ou  $\mathbf{x}^{[0]}$ ) que l'on étudiera, on notera cette perturbation  $\mathbf{p}$  (ou  $\mathbf{q}$ ) :

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^{[0]}(0) + \mathbf{p}(0), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{[0]}(0) + \mathbf{q}(0) \quad (4.6)$$

qui est associé à un mouvement perturbé  $\mathbf{y}$  qui définit l'évolution temporelle de la perturbation

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^{[0]}(t) + \mathbf{p}(t), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{[0]}(t) + \mathbf{q}(t). \quad (4.8)$$

La notion de stabilité peut alors être formalisée par la définition de Lyapunov :

*Une solution  $\mathbf{y}^{[0]}(t)$  est **stable au sens de Lyapunov** si pour toute distance  $\epsilon$  donnée il existe un voisinage de  $\mathbf{y}^{[0]}(0)$ , tel que la solution perturbée  $\mathbf{y}(t)$  reste à une distance inférieure à  $\epsilon$  de  $\mathbf{y}^{[0]}$ , c'est à dire que :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{p}(0)\| < \delta \Rightarrow \forall t > 0 \quad \|\mathbf{p}(t)\| < \epsilon \quad (4.9)$$

Ce n'est cependant pas la seule manière d'exprimer formellement la notion de stabilité. Il est souvent pratique de faire appel à la notion de la stabilité asymptotique :

*Une solution  $\mathbf{y}^{[0]}(t)$  est **asymptotiquement stable** s'il existe un voisinage de  $\mathbf{y}^{[0]}(0)$ , tel que la solution perturbée  $\mathbf{y}(t)$  tend vers  $\mathbf{y}^{[0]}(t)$  pour  $t$  tendant vers l'infini, c'est à dire :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, t_1 > 0 \text{ tel que } \|\mathbf{p}(0)\| < \delta \Rightarrow \forall t > t_1 \quad \|\mathbf{p}(t)\| < \epsilon. \quad (4.10)$$

D'autres définitions de stabilité existent également (stabilité orbitale, stabilité Lagrangienne etc.) [Mer71].

L'étude de stabilité se base sur la linéarisation de  $\phi$  autour de la solution  $\mathbf{y}^{[0]}$  étudiée :

$$\dot{\mathbf{y}} \approx \dot{\mathbf{y}}^{[0]} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{y}} \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^{[0]}} \mathbf{p}. \quad (4.11)$$

En excluant ainsi le mouvement initial  $\mathbf{y}^{[0]}$  de (4.1), on se place dans un cadre dit local : on peut étudier la perturbation seule, l'origine étant désormais placé sur la solution étudiée. On obtient alors les **équations du mouvement en variation**

$$\dot{\mathbf{p}} = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{y}} \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^{[0]}} \mathbf{p} \quad (4.12)$$

dont l'écriture correspond dans notre cas particulier au système mécanique :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \left( \mathbf{R} + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}^{[0]}} \right) \mathbf{q} = 0; \quad (4.13)$$

ou encore dans l'espace d'état

$$\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{B}\mathbf{p} = 0 \quad (4.14)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{R} + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}^{[0]}} \right) & \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Dans le cas où les coefficients contenus dans la matrice  $\mathbf{B}$  sont constants, le théorème de Lyapunov permet de juger de la stabilité [Mer71] :

*Si les parties réelles de toutes les racines de l'équation caractéristique de l'approximation au premier ordre sont négatives, la solution étudiée est asymptotiquement stable, quels que soient les termes d'ordres supérieurs.*

Une généralisation de ce théorème est celui de Hartman-Grobman [GH83], assurant que non seulement la stabilité, mais aussi son évolution au voisinage de l'origine, est assimilable à celui d'un système linéarisé.

Dans notre cas, les équations (4.13) et (4.14) sont des équations linéaires à coefficients variables : dans le cas d'un mouvement périodique, les coefficients varient de manière périodique également.

Dans la suite de ce chapitre nous présentons deux classes d'approches, une première basée sur l'étude de la stabilité des équations à coefficients périodiques et une deuxième, plus générale, basée sur les exposants de Lyapunov. La première catégorie correspond à la mise en place d'une stratégie de type Floquet ainsi que d'une théorie basée sur les déterminants de Hill.

## 4.2 Théorie de Floquet

La théorie de Floquet est un outil largement utilisé en dynamique non-linéaire, y compris pour la dynamique des rotors (par exemple, [Wan97] avec une résolution par éléments finis spatio-temporels, [SN97] avec une méthode de tir, [CLG98] avec une solution par balance harmonique).

De manière concrète, la théorie de Floquet concerne les systèmes linéaires homogènes à coefficients périodiques, ce qui correspond à l'équation (4.14).

Pour présenter cette méthode, on introduira la notion de matrice fondamentale, permettant de calculer la matrice de monodromie, dont le spectre, constitué de multiplicateurs de Floquet, indique si la solution est stable ou instable. L'étude des multiplicateurs permet également d'analyser la nature des bifurcations [NB95].

D'abord, on décompose la perturbation  $\mathbf{p}$  dans la base de solutions fondamentales  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) de (4.14). Pour ce faire, on définit la **matrice fondamentale**  $\Phi(t)$  de (4.14). Cette matrice est composée de vecteurs-colonnes  $\varphi_i$  :

$$\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}]. \quad (4.16)$$

Ensuite, comme le système (4.14) est linéaire, on peut écrire la **matrice de transition** qui relie l'état initial  $\mathbf{p}(0)$  à celui à l'instant  $t$  :

$$\mathbf{p}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\mathbf{p}(0). \quad (4.17)$$

On note  $\mathbf{Q}$  la matrice de monodromie qui correspond à une transition entre l'instant initial et à la période  $T$  :

$$\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(T)\Phi(0)^{-1}. \quad (4.18)$$

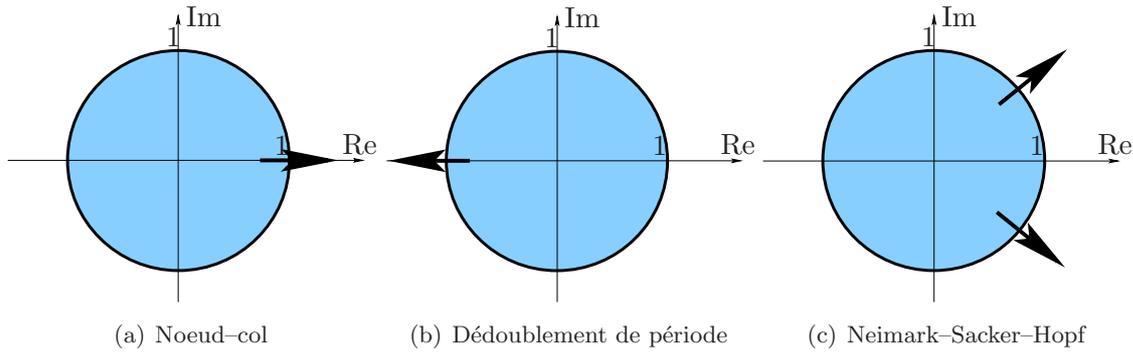


FIG. 4.1 – Multiplicateurs de Floquet : types de bifurcations

Cette matrice définit une application (4.17) pour laquelle la solution  $\mathbf{y}^{[0]}$  constitue un point fixe à l'origine. On peut donc juger de la stabilité de la solution considérée à partir de la stabilité de ce point fixe, ce qui revient à étudier les valeurs propres de la matrice de monodromie.

D'un point de vue pratique, on prend souvent  $\Phi(0) = \mathbf{I}_{2n}$ , puis on trouve  $\Phi(T)$  en résolvant pour  $t = [0, T]$

$$\dot{\varphi}^* = \mathbf{B}^* \varphi^* \quad (4.19)$$

par intégration, où  $\varphi^*$  et  $\mathbf{B}^*$  sont issus de juxtaposition des problèmes de recherche de chaque colonne de  $\Phi$  :

$$\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \varphi_1, \\ \varphi_2, \\ \vdots, \\ \varphi_{2n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Les valeurs propres de la matrice de monodromie  $\mathbf{Q}$ , notées  $\mu_i$  sont appelées **multiplicateurs**.

On peut déterminer la stabilité asymptotique de la solution périodique étudiée à partir de la plus grande valeur absolue de l'ensemble des multiplicateurs :

- si  $\max_i |\mu_i| < 1$ , la solution  $\mathbf{y}^{[0]}$  est asymptotiquement stable ;
- si  $\max_i |\mu_i| > 1$ ,  $\mathbf{y}^{[0]}$  est instable ;
- si  $\max_i |\mu_i| = 1$ , d'autres éléments sont nécessaires pour juger de la stabilité.

On a donc un moyen d'interpréter l'évolution de la stabilité de la solution étudiée (figure 4.1) vis à vis par exemple d'un paramètre de contrôle  $\nu$ . La solution sera dite stable si l'ensemble des valeurs propres  $\mu_i(\nu)$  est à l'intérieur du cercle unité. Par contre, dès que l'une d'elles sort, soit par l'axe des nombres réels (par les points 1, -1) soit dans le plan complexe ( $\text{Re}(\mu_i(\nu)) \neq 0$ ) en tant que deux valeurs complexes conjuguées, alors le système devient instable. Ces trois possibilités traduisent des bifurcations *nœud-col* (figure 4.1(a)), *dédoublément de période* (figure 4.1(b)) ou de type *Neimark-Sacker-Hopf* (figure 4.1(c), apparition d'un mouvement avec une nouvelle période).

### 4.3 Section de Poincaré

Les sections de Poincaré constituent un outil efficace d'étude des systèmes dynamiques [GH83]. Elles permettent de mettre en évidence les applications dont on étudie les points fixes

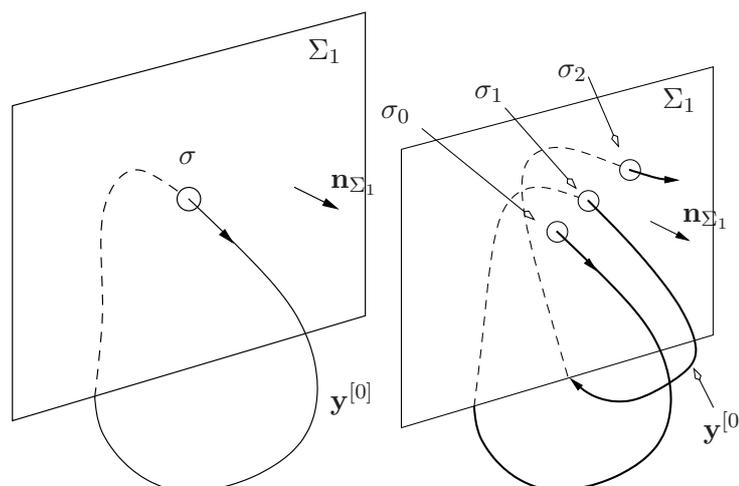


FIG. 4.2 – Section de Poincaré

par la théorie de Floquet. Cette notion permet aussi de conduire une généralisation de la théorie de Floquet aux cas multi-fréquentiels, comme on le verra par la suite.

Soit  $\Sigma_1$  un hyperplan de dimension  $2n - 1$  ( $2n$  étant la dimension de l'espace d'état), transversal aux trajectoires  $\mathbf{y}$  solutions de (4.1), ce qui revient à dire :

$$\forall (\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}, t) \in \mathcal{S} \times \Sigma_1 \times \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\phi(t, \mathbf{y}), \mathbf{n}_{\Sigma_1}(\boldsymbol{\sigma})) > 0 \quad (4.21)$$

avec  $\mathbf{n}_{\Sigma_1}(\boldsymbol{\sigma})$  vecteur de la normale à  $\Sigma_1$  en  $\boldsymbol{\sigma}$ .

L'ensemble des points d'intersection de  $\mathbf{y}$  avec  $\Sigma_1$ , noté  $\mathcal{P}_1(\mathbf{y}, \Sigma_1)$ , forme la section de Poincaré de  $\mathbf{y}$  par  $\Sigma_1$ . Pour  $\mathbf{y}^{[0]}$ , solution périodique de (4.1), on peut prendre  $\Sigma_1$  tel que  $\mathcal{P}_1(\mathbf{y}^{[0]}, \Sigma_1)$  est constituée d'un seul point  $\boldsymbol{\sigma}^{[0]}$ , au voisinage  $\Sigma_P \subset \Sigma_1$  duquel on peut définir une application  $P : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_1$  qui à chaque point  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_P$  associe le point  $P(\boldsymbol{\sigma})$  d'intersection suivante de la trajectoire  $\mathbf{y}$ , partant de  $\boldsymbol{\sigma}$ , avec  $\Sigma_1$ . Cette application s'appelle l'application de Poincaré. Ce concept est illustré par la figure 4.2.

#### Remarques.

1. Dans le cas d'une fonction périodique, quand la fréquence des intersections avec  $\Sigma_1$  est commensurable avec celle de la fonction étudiée, la section de Poincaré est composée d'un ensemble fini de points.
2. La section de Poincaré d'une fonction quasi-périodique est constituée d'un nombre infini de points, parcourant de manière quasi-uniforme une courbe fermée.
3. On peut voir que la matrice  $\mathbf{P}$  de l'application  $P$ , linéarisée et centrée au point  $\boldsymbol{\sigma}^{[0]}$ , est égale à la matrice de monodromie. Ainsi, en observant son spectre, on peut étudier la stabilité de la trajectoire  $\mathbf{y}^{[0]}$

## 4.4 Exposants de Lyapunov

Une autre manière d'évaluer la stabilité d'une trajectoire  $\mathbf{y}^{[0]}(t)$  est de calculer les exposants de Lyapunov [Vir00]. Les exposants de Lyapunov caractérisent la divergence exponentielle des

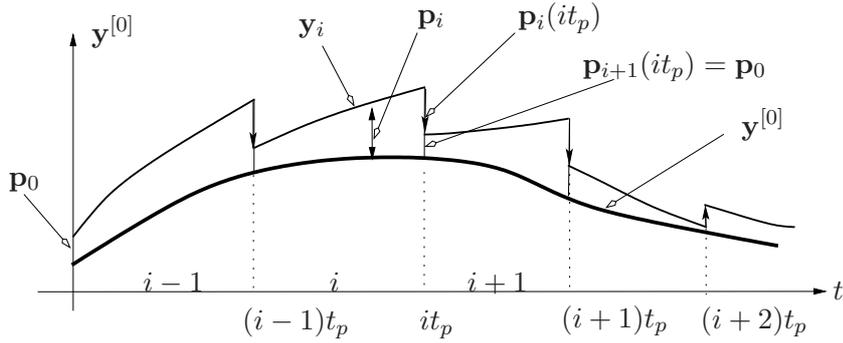


FIG. 4.3 – Calcul des exposants de Lyapunov (avec  $i$  numéro du segment temporel)

trajectoires dont les conditions initiales diffèrent de celle étudiée à partir d'une petite perturbation  $\mathbf{p}(0)$ . Cela revient à évaluer l'évolution exponentielle des perturbations de la solution triviale de (4.14). Le système d'équations différentielles étant d'ordre  $2n$ , il se caractérise alors par  $2n$  exposants de Lyapunov notés :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathbf{p}_i\|}{t}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (4.22)$$

avec  $\mathbf{p}_i$  perturbations linéairement indépendantes. Comme  $\mathbf{p}_i$  forment une base dans l'espace de solutions du système d'équations en variation (4.14), ce sont ses solutions fondamentales.

Le **critère de stabilité** s'exprime à l'aide de l'exposant dominant  $\lambda$  (exposant à partie réelle maximale) de la manière suivante :

- si  $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ ,  $\mathbf{y}^{[0]}$  est localement stable ;
- si  $\text{Re}(\lambda) > 0$ ,  $\mathbf{y}^{[0]}$  est instable.

D'un point de vue pratique, il s'agit donc d'observer l'exposant de Lyapunov dominant. Il peut être calculé à partir de la relation suivante :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathbf{p}\|}{t}. \quad (4.23)$$

La valeur de  $\lambda$  s'obtient en calculant la réponse temporelle  $\mathbf{y}$  par intégration de (4.1) jusqu'à un certain temps maximum correspondant à la convergence de la relation (4.23). Dans le cas où le mouvement perturbé  $\mathbf{y}$  s'éloigne de la solution  $\mathbf{y}^{[0]}$  dont on étudie la stabilité, des problèmes de convergence peuvent survenir, notamment à cause de l'invalidité de l'approximation linéarisée de  $\left[ \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{NL}}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}^{[0]}}$ . On met donc au point une routine [Kuz01] qui ramène notre solution  $\mathbf{y}$  à proximité de la courbe de la solution étudiée  $\mathbf{y}^{[0]}$ . Cette opération est réalisée à chaque instant multiple d'un certain intervalle de temps  $t_p$ . La perturbation est donc ramenée au niveau  $\|\mathbf{p}_0\|$  en début de chaque segment. On passe ainsi à une nouvelle intégration avec de nouvelles conditions initiales

$$\mathbf{p}_{(i+1)}(it_p) = \nu_i \mathbf{p}_{(i)}(it_p), \quad \nu_i = \frac{\|\mathbf{p}_{(i)}(it_p)\|}{\|\mathbf{p}_{(0)}(0)\|}, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.24)$$

Cela permet d'éviter une croissance excessive de  $\mathbf{p}$ . Ainsi, même dans un cas où  $\mathbf{y}^{[0]}$  est instable, nous étudions toujours un domaine très proche de  $\mathbf{y}^{[0]}$  où les hypothèses de linéarisation sont

vérifiées et où l'évaluation de la stabilité est correcte. On cherche alors la limite (4.23) sous la forme

$$\lambda = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_i \ln \nu_i}{i t_p}. \quad (4.25)$$

Ainsi, l'évaluation numérique de l'exposant de Lyapunov dominant nécessite les choix arbitraires suivants : la répartition des points de renormalisation ( $t_p$ ), ainsi que la précision sur l'estimation de  $\lambda$ .

## 4.5 Méthode de Hill

La méthode de Hill relève d'une approche fréquentielle. Elle convient à des études de stabilité de trajectoires dynamiques représentées sous forme de séries de Fourier. C'est une généralisation du développement exploitant le déterminant infini de Hill tronqué (cf. par exemple [NB95]) au cas de systèmes à plusieurs degrés de liberté. Cette généralisation a été adaptée aux solutions issues de la balance harmonique [GE01].

Dans le cadre de cette méthode, on suppose que la perturbation se met sous la forme harmonique, modulée par une exponentielle, dont on recherche les exposants de manière à déterminer la stabilité. Soit une solution  $\mathbf{x}^{[0]}$  perturbée par  $\mathbf{q}$  dont les amplitudes sont supposées varier de manière exponentielle :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{x}}^{[0]} + e^{\eta\tau} \tilde{\mathbf{q}}). \quad (4.26)$$

(on reprend ici les notations de la balance harmonique.  $\mathbf{T}$  signifie donc la matrice de fonctions harmoniques, tandis les tildes ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) dénotent les vecteurs d'amplitudes harmoniques). On obtient alors pour la vitesse et l'accélération les relations suivantes :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}'\tilde{\mathbf{x}}^{[0]} + e^{\eta\tau}(\mathbf{T}' + \eta\mathbf{T}) \tilde{\mathbf{q}}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}''\tilde{\mathbf{x}}^{[0]} + e^{\eta\tau}(\mathbf{T}'' + 2\eta\mathbf{T}' + \eta^2\mathbf{T}) \tilde{\mathbf{q}}. \quad (4.27)$$

Ici ( $'$ ) signifie la dérivation par rapport au temps normalisé  $\tau$ . En substituant (4.26) et (4.27) dans l'équation dynamique (3.13) et en supposant  $\tilde{\mathbf{q}}$  faible, alors

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}^{[0]}) + e^{\eta\tau} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)_{\tilde{\mathbf{x}}^{[0]}} \tilde{\mathbf{q}}, \quad (4.28)$$

on obtient alors l'équation suivante :

$$\left( \mathbf{T}^T \omega^2 \mathbf{M} (\mathbf{T}'' + 2\eta\mathbf{T}' + \eta^2\mathbf{T}) + \mathbf{T}^T \omega \mathbf{D} (\mathbf{T}' + \eta\mathbf{T}) + \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)_{\tilde{\mathbf{x}}^{[0]}} \right) e^{\eta\tau} \tilde{\mathbf{q}} = 0. \quad (4.29)$$

Il s'agit dès lors de déterminer les valeurs de  $\eta$ , ce qui est possible en appliquant une procédure de Galerkin à l'équation (4.29). Ceci nous conduit au problème aux valeurs propres généralisé ci-dessous :

$$(\mathbf{H}_0 + \eta\mathbf{H}_1 + \eta^2\mathbf{H}_2)\tilde{\mathbf{q}} = 0; \quad (4.30)$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{L} + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right)_{\tilde{\mathbf{x}}^{[0]}}, \quad \mathbf{H}_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T (2\omega\mathbf{M}\mathbf{T}' + \mathbf{D}\mathbf{T}) d\tau, \quad \mathbf{H}_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} d\tau. \quad (4.31)$$

Les matrices  $\mathbf{H}_1$  et  $\mathbf{H}_2$  sont donc construites de manière analogue à  $\mathbf{L}$  (3.15) :

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{\{0\}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_1^{\{1\}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}_1^{\{N\}} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{H}_1^{\{0\}} = \mathbf{D}; \quad \mathbf{H}_1^{\{j\}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 2j\omega\mathbf{M} \\ -2j\omega\mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2^{\{0\}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2^{\{1\}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}_2^{\{N\}} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{H}_2^{\{0\}} = \mathbf{M}; \quad \mathbf{H}_2^{\{j\}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.35)$$

C'est un problème aux valeurs propres quadratique de dimension  $N \times n$ . On a donc  $2N \times n$  valeurs propres. Le critère de stabilité se formule de manière suivante :

- si  $\max_i \operatorname{Re}(\eta_i) < 0$ , la solution  $\mathbf{x}^{[0]}$  est asymptotiquement stable ;
- si  $\max_i \operatorname{Re}(\eta_i) > 0$ ,  $\mathbf{x}^{[0]}$  est instable ;
- si  $\max_i \operatorname{Re}(\eta_i) = 0$ , d'autres éléments sont nécessaires pour juger de la stabilité.

Il est intéressant de remarquer que la matrice  $\mathbf{H}_0$  est issue directement de la résolution du problème dynamique initial (3.21).

## 4.6 Exemples d'application

Afin d'illustrer l'efficacité des différentes méthodes proposées, nous les illustrerons sur plusieurs exemples académiques. D'abord, on comparera les méthodes de Floquet, de déterminant de Hill et d'exposant de Lyapunov dominant sur un oscillateur de Duffing. Ensuite, sur des exemples du type contact rotor-stator et système linéaire par morceaux, nous évaluerons la robustesse de ces approches liée au caractère irrégulier de la non-linéarité.

### 4.6.1 Oscillateur de Duffing

On considère l'oscillateur de Duffing suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(t), \quad (4.36)$$

$$\mathbf{f}_{\text{NL}} = 0.2\mathbf{x}^3, \quad \mathbf{M} = 1, \quad \mathbf{K} = 1, \quad \mathbf{D} = 0.1, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{g} = \cos \omega t = \cos \tau. \quad (4.38)$$

Les résultats du calcul par balance harmonique ainsi que l'évaluation de la stabilité, pour différentes méthodes, sont présentés sur la figure 4.4. Une étude analytique permet de constater que les frontières des zones d'instabilité se situent aux points de retournement de la courbe de réponse par rapport à la fréquence d'excitation [NM79].

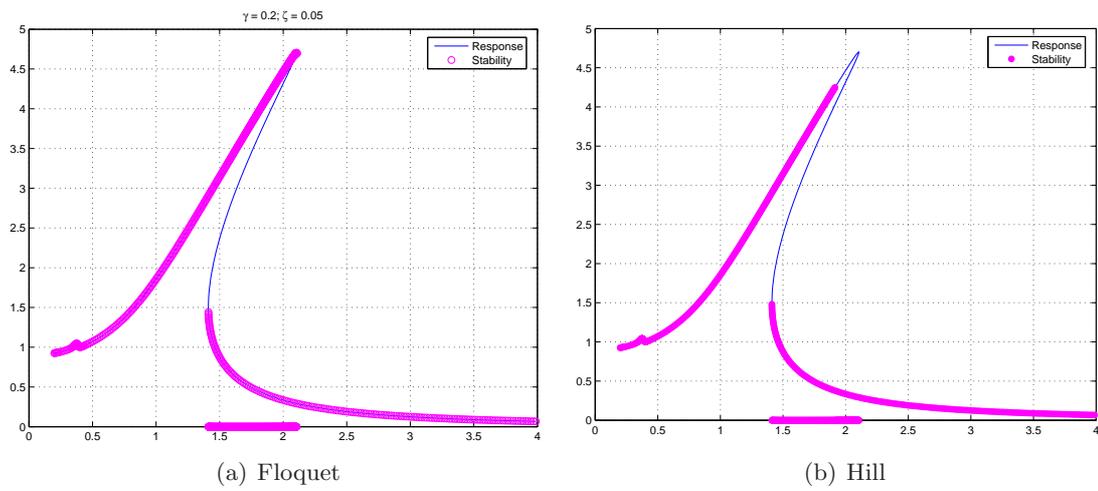


FIG. 4.4 – Evaluation de la stabilité par les méthodes de Floquet et de Hill : courbes de réponse et zones de stabilité

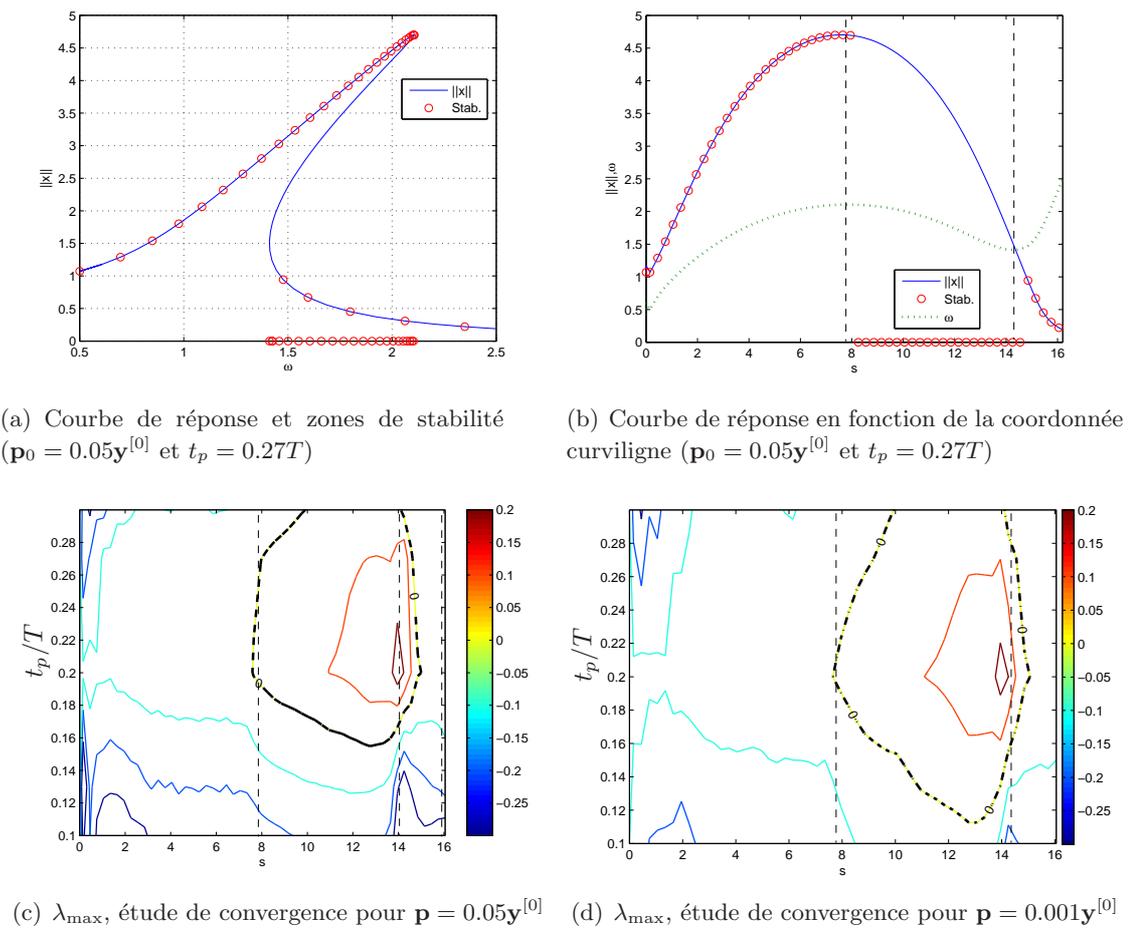


FIG. 4.5 – Evaluation de la stabilité par l'exposant de Lyapunov dominant

On voit que des résultats qualitativement bons ne sont donnés que par la théorie de Floquet (figure 4.4(a)).

La méthode de Hill (figure 4.4(b)) donne une zone d'instabilité plus grande à partir de la prise en compte de la troisième harmonique (l'évaluation de la stabilité est conforme aux prédictions analytiques quand le calcul par la méthode de Hill ne tient compte que de la première harmonique).

Le calcul de l'exposant de Lyapunov dominant a manifesté des difficultés de convergence. Les résultats de l'application de cette méthode à l'oscillateur de Duffing sont présentés en figure 4.5. La courbe de réponse (figure 4.5(a)) inclue l'estimation des zones de stabilité pour  $\mathbf{p}_0 = 0.05\mathbf{y}^{[0]}$  et  $t_p = 0.27T$ , elles correspondent approximativement à celle issue de l'étude par la méthode de Floquet (figure 4.4(a)). Ce choix de paramètres se justifie par l'étude suivante de sensibilité de l'algorithme présenté en section 4.4.

Une plage de valeurs de  $t_p \in [0.01T, T]$  et  $\mathbf{p}_0 \in [0.0001\mathbf{y}^{[0]}, 0.1\mathbf{y}^{[0]}]$  a été balayée. On constate que sur une plage de  $\mathbf{p}_0 \in [0.001\mathbf{y}^{[0]}, 0.05\mathbf{y}^{[0]}]$  et  $t_p \in [0.01T, 0.3T]$ , les zones de stabilité délimitées par les lignes de niveau  $\lambda_{\max}(s, t_p) = 0$  sont approximativement identiques (figures 4.5(c) et 4.5(d)). Par contre, on notera l'importance d'un choix judicieux de la valeur  $t_p/T$  pour obtenir une estimation fiable des zones de stabilité. En effet, si l'on trace l'évolution de  $\omega$  en fonction de  $s$ , (figure 4.5(b)), il est possible alors de localiser les points de retournement et ainsi d'obtenir précisément les domaines de stabilité. L'on constate alors que le choix le plus adapté de  $t_p/T$  est 0.27 qui conduit à une parfaite estimation des domaines de stabilité, particulièrement dans le cas  $\mathbf{p}_0 = 0.05\mathbf{y}^{[0]}$ .

Les erreurs constatées avec la méthode de l'exposant de Lyapunov dominant peuvent être dues au fait que la solution issue de la balance harmonique est obtenue par une formulation faible et est sujette à de petits écarts locaux par rapport à une solution obtenue par intégration directe. Ces écarts peuvent contribuer à la déstabilisation du calcul par (4.25). Elle serait donc peu adaptée à une étude locale, bien qu'il s'agisse d'une convergence sur un temps pratiquement infini.

#### 4.6.2 Problème de contact rotor–stator

L'interaction rotor–stator envisagée ici correspond à un des problèmes traités par von Groll et Ewins dans [GE01], il est associé à un système axisymétrique de type rotor de Jeffcot en contact permanent avec un stator, figure 4.6(a). Le problème dynamique (1.25) correspondant à ce système est décrit par les matrices suivantes (les deux premiers degrés de liberté représentent le rotor, les deux suivants – le stator) :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \omega^2 \cos(\omega t) \\ \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

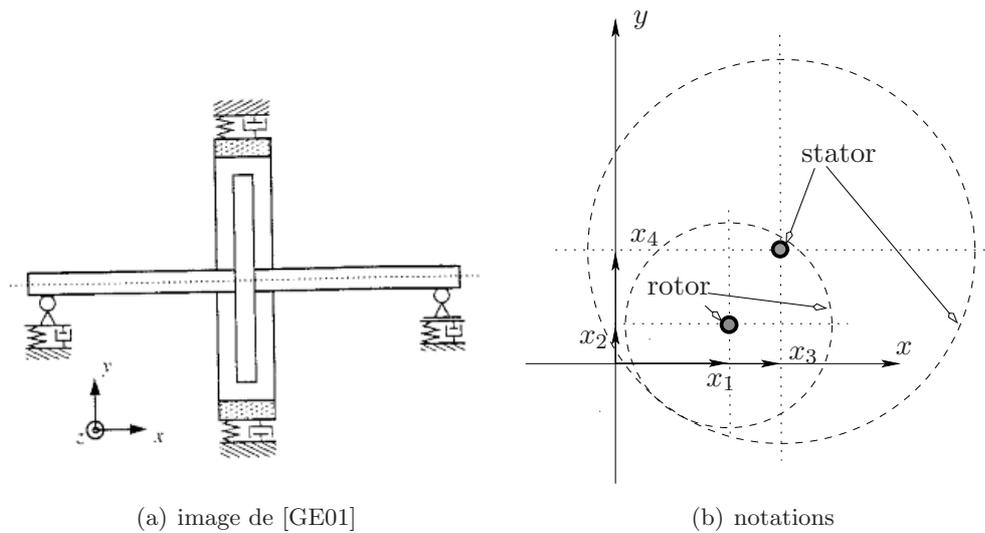


FIG. 4.6 – Problème de contact rotor stator. Système dynamique

avec une force de contact non-linéaire de raideur  $k_c = 100$  et un jeu radial  $\varepsilon = 3$ .

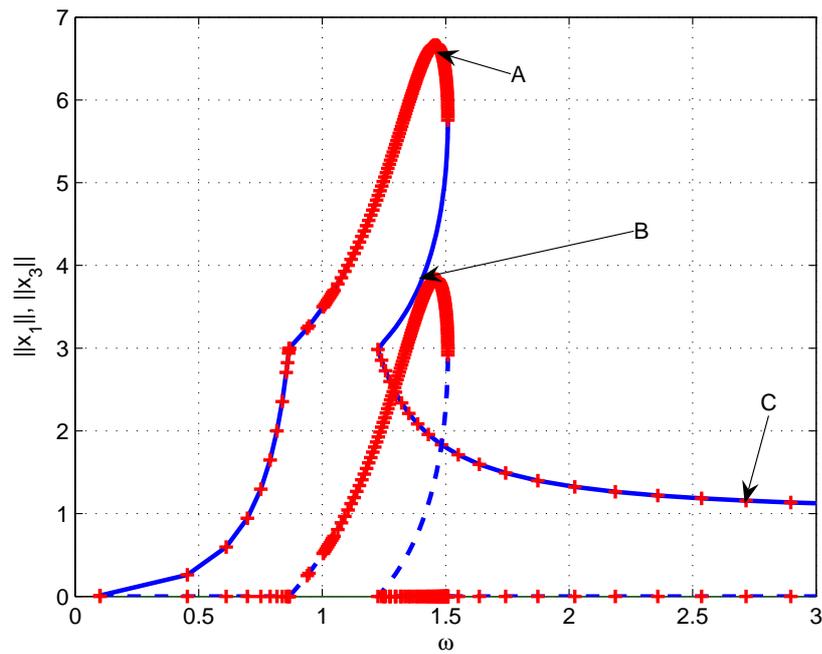
Les résultats de calcul sont présentés en figure 4.7. La courbe de réponse issue d'un calcul par balance harmonique à l'ordre 1 (figure 4.7(a)) est superposée avec l'évaluation de la stabilité par la méthode de Hill. Cette courbe de réponse correspond à l'amplitude de la première harmonique de l'excitation et, comme dans le cas du rotor de Jeffcot à raideur radiale non-linéaire, c'est la réponse exacte compte tenu de la symétrie axiale du problème. On observe une zone d'instabilité sous le retournement de la courbe de réponse. Une vérification temporelle de ces résultats est réalisée aux points A, B et C (figures 4.7(b)–4.7(d)). On constate que la solution par balance harmonique est stable aux points A et C, tandis qu'au point B on observe des écarts entre la simulation directe et la solution harmonique ce qui traduit une instabilité. Ces résultats sont en accord avec ceux présentés par von Groll [GE01].

### 4.6.3 Oscillateur à raideur linéaire par morceaux

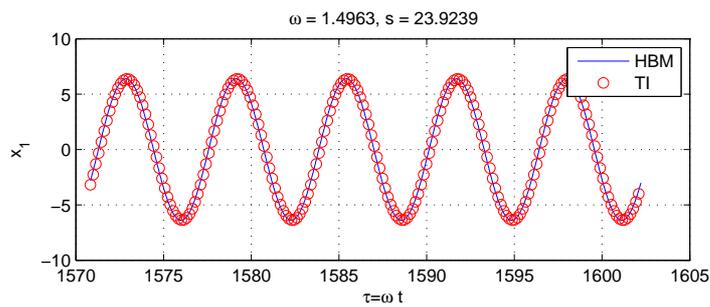
Il s'agit ici de reprendre l'exemple (3.68) dont les caractéristiques dynamiques diffèrent du cas précédent par la richesse du contenu harmonique de la réponse. Comme pour l'exemple précédent, nous analysons les courbes de réponse et de stabilité associées à ce système. Les courbes de réponse avec l'évaluation de stabilité sont données sur la figure 4.8. On constate que pour les amplitudes ne dépassant pas la rupture de la courbe caractéristique ( $|x| < 2$ ), l'estimation de stabilité reste toujours juste. En ce qui concerne la partie supérieure, où la non-linéarité rentre en jeu, les résultats issus des deux méthodes diffèrent.

L'estimation par les multiplicateurs de Floquet (figure 4.8(a)) indique une zone d'instabilité sous le retournement de la courbe de réponse. Cette estimation a été justifiée par des simulations temporelles analogues à celles présentées pour l'exemple précédent.

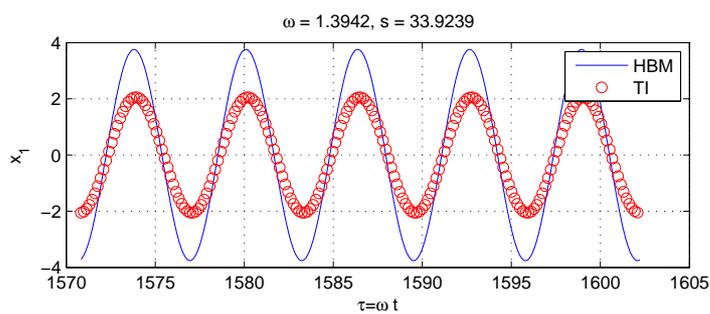
L'application de la méthode de Hill s'avère plus délicate. On observe une prédiction d'instabilité sur la branche de retournement du pic, prédite aussi par le calcul des multiplicateurs de Floquet. Les résultats, issus de la méthode de Hill, donnés par la figure 4.8(b), montrent également une zone d'instabilité sur la montée du pic de résonance, sur laquelle l'évaluation



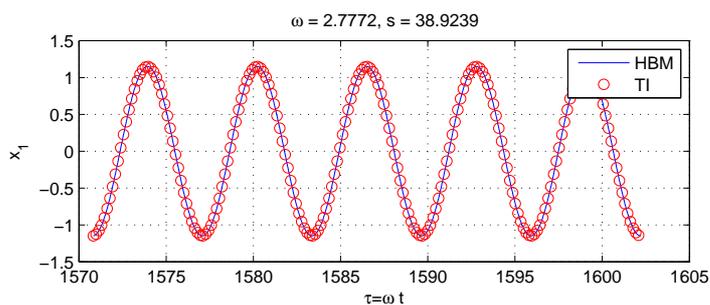
(a) Courbe de réponse et stabilité par la méthode de Hill (“-” rotor, “- -” stator, “+” stabilité)



(b) Réalisation temporelle  $x_1(t)$  au point A



(c) Réalisation temporelle  $x_1(t)$  au point B



(d) Réalisation temporelle  $x_1(t)$  au point C

FIG. 4.7 – Problème de contact rotor stator. Résultats

converge bien à partir de  $N = 3$  (les courbes de la figure 4.8(b) sont issues du calcul avec  $N = 9$ ). Ainsi, on note une difficulté de convergence de l'approche de Hill déjà constatée par Charleux [Cha06] et Villa [Vil05]. Le travail de Von Groll [GE01] montre une application à un problème rotor-stator, où la méthode de Hill donne des résultats qualitativement bons sur un système à jeu de type (3.68) avec  $\kappa = 3$ ,  $\delta = 2$ , où l'on observe une bonne approximation, ce qui n'est pas toujours le cas comme nous venons de le montrer.

## Conclusion

Ce chapitre a permis d'évaluer sur des exemples simples mais de nature différente (non-linéarité régulière, non-linéarité à jeu, systèmes à plusieurs degrés de liberté) les différentes approches permettant d'analyser la stabilité des systèmes.

En effet, les exposants de Lyapunov assurent une démarche très générale, sans limiter la nature des systèmes étudiés. Cependant, la formulation locale du calcul du critère de stabilité ne semble pas assez adaptée aux solutions approchées telles que celles obtenues par balance harmonique.

La méthode de Hill semblerait bien adaptée aux solutions sous forme de séries de Fourier. Par contre, les travaux de Charleux [Cha06] ont montré que dans le cas du frottement il était nécessaire d'avoir un grand nombre d'harmoniques pour obtenir une évaluation de la stabilité. De plus, dans certains cas (voir l'exemple de Duffing), l'évaluation peut se dégrader rapidement et conduire à des résultats faux. L'approche de Hill semble donc peu robuste pour évaluer la stabilité des systèmes.

Suite aux études de ce chapitre, nous retiendrons la méthode de Floquet pour étudier la stabilité dans un cadre multi-fréquentiel.

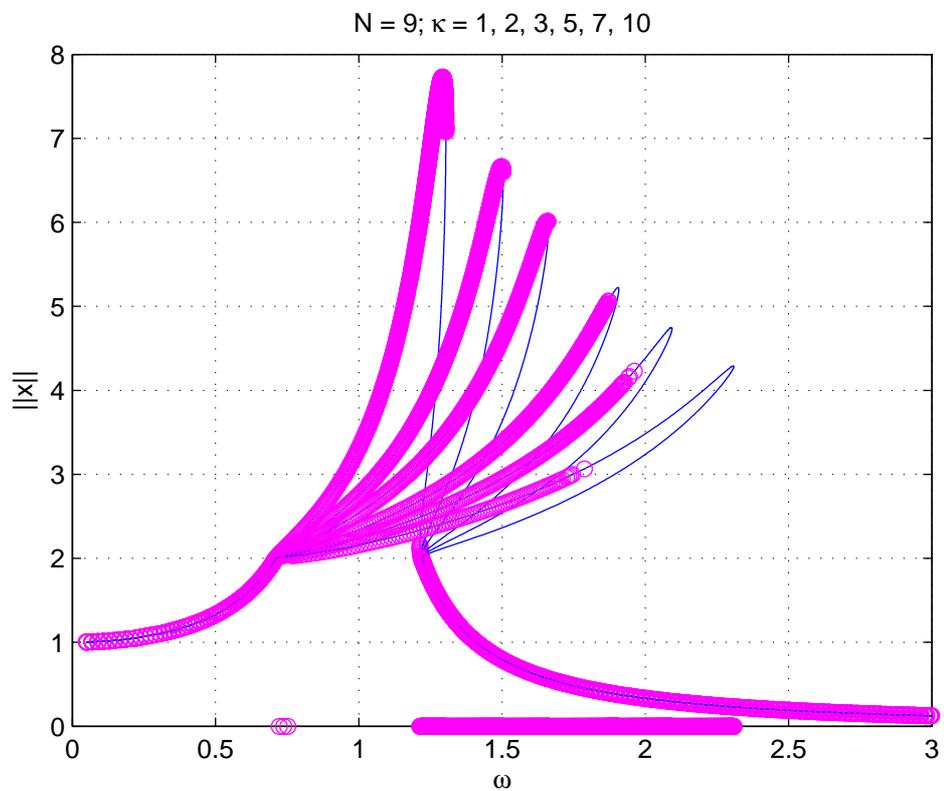
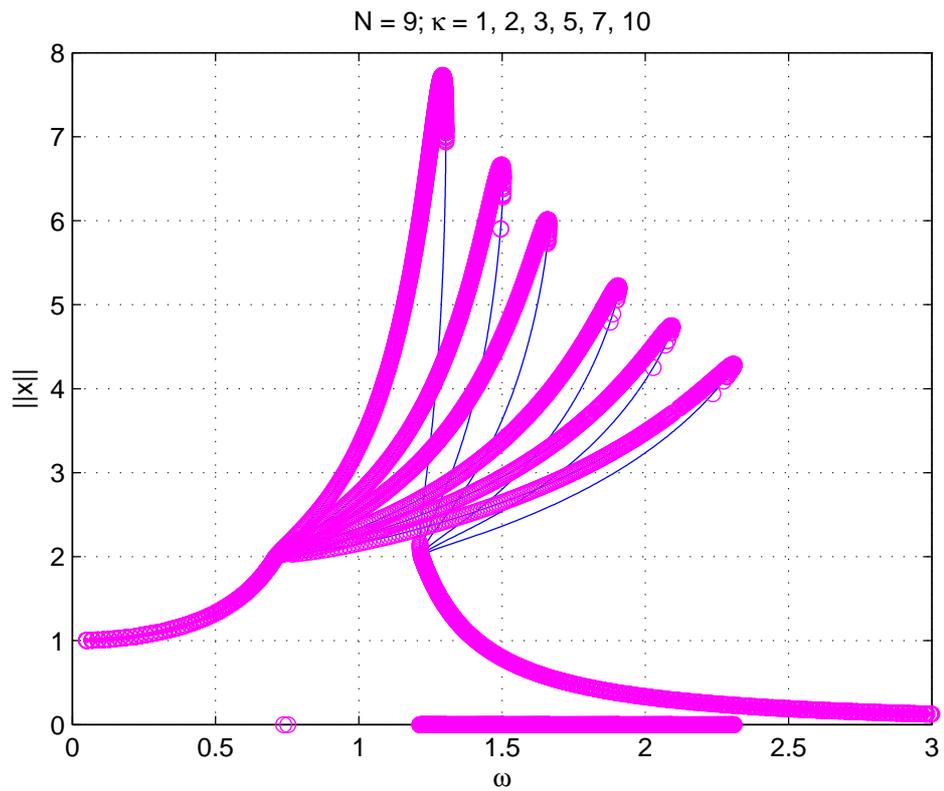


FIG. 4.8 – Evaluation de stabilité de l’oscillateur linéaire par morceaux par les méthodes de Floquet et de Hill (“—” *courbe de réponse*, “o” *stabilité*).

## Chapitre 5

# Généralisation à des systèmes multi-fréquentiels

La dynamique des systèmes multi-rotors implique intrinsèquement la présence de plusieurs excitations harmoniques (vitesse de chacun des arbres), souvent non-commensurables. Il devient nécessaire, tout particulièrement en non-linéaire, de développer des algorithmes de simulation spécifiques. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'extension de la méthode de la balance harmonique au cas multi-fréquentiels. En s'appuyant sur des exemples simples, nous montrerons qu'il est possible d'obtenir des réponses quasi-périodiques du système, mais aussi connaître leur stabilité. Dans une dernière partie, nous appliquerons ces développements au cas d'un bi-rotors réel, modélisé par éléments finis, comportant des roulements à jeux.

### 5.1 Introduction aux fonctions quasi-périodiques

L'évolution temporelle  $\mathbf{f}$  d'un système multi-fréquentiel est décrite par des fonctions  $\check{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau})$  de temps multi-dimensionnel  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$  (parfois également appelé hyper-temps [KC97]). Cette notion se détermine par des fréquences  $\omega_i, i = 1, \dots, m$  incommensurables, formant le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  que l'on va appeler la *base fréquentielle*.  $\boldsymbol{\tau}$  est relié à  $t$  par

$$\boldsymbol{\omega}t = \boldsymbol{\tau}. \quad (5.1)$$

Les fonctions  $\check{\mathbf{f}}$  sont dans ce cas-là supposées  $2\pi$ -périodiques sur chaque composante de  $\boldsymbol{\tau}$ . On notera  $\mathcal{C}$  l'espace formé par ces fonctions.

Dans le domaine temporel multi-dimensionnel, le temps  $t$  paramètre une droite dans  $\mathbb{R}^m$ , définie par (5.1). Les fonctions  $\mathbf{f}(t)$  pour lesquelles il existe une fonction  $\check{\mathbf{f}} \in \mathcal{C}$ , telle que

$$\mathbf{f}(t) = \check{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}t), \quad (5.2)$$

sont appelées *quasi-périodiques*. Les fonctions  $\check{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau})$  sont aussi appelées fonctions-tores [SVSO06], compte tenu de l'aspect multi-périodique et multi-dimensionnel de  $\check{\mathbf{f}}$ . Un exemple de trajectoire bi-périodique s'enroulant sur un tore est donné sur la figure 5.1(a). La périodicité multiple de tels mouvements implique une paramétrisation correspondante, conforme à (5.1). On peut ainsi développer le tore de la figure 5.1(a) sur un plan, comme montré par la figure 5.1(b) (l'axe de

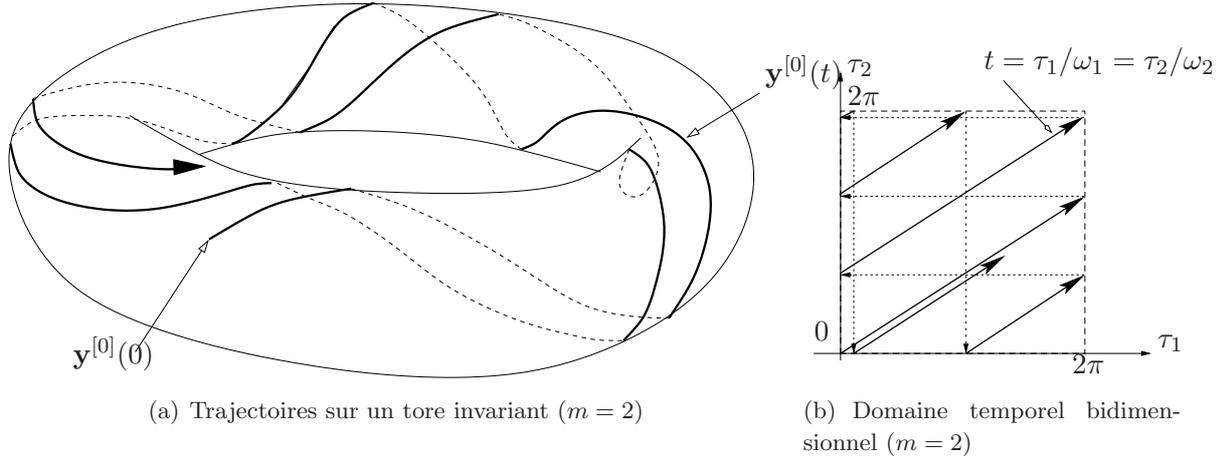


FIG. 5.1 – Illustrations des concepts associés à la représentation multi-dimensionnelle de temps

temps réel balaye ce domaine bi-dimensionnel). Les fonctions  $\check{\mathbf{f}}$  peuvent être représentées sous forme de **séries de Fourier multiples** :

$$\check{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \check{\mathbf{a}}^{\{\mathbf{k}\}} \cos(\mathbf{k}, \boldsymbol{\tau}) + \check{\mathbf{b}}^{\{\mathbf{k}\}} \sin(\mathbf{k}, \boldsymbol{\tau}) \quad (5.3)$$

où  $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\tau})$  représente le produit scalaire euclidien de  $\mathbf{k}$  et  $\boldsymbol{\tau}$ . L'équation (5.3), grâce à la relation (5.2), peut être écrite dans le domaine temporel de départ :

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} \check{\mathbf{a}}^{\{\mathbf{k}\}} \cos(\mathbf{k}, \boldsymbol{\omega})t + \check{\mathbf{b}}^{\{\mathbf{k}\}} \sin(\mathbf{k}, \boldsymbol{\omega})t. \quad (5.4)$$

Dans le cas où le nombre d'harmoniques est limité à  $N$ , la sommation se fait sur  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_N^m$  et l'équation (5.4) peut alors être exprimée sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\check{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\tau}) = \check{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\tau})\check{\mathbf{f}}, \quad (5.5)$$

où  $\check{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\tau})$  est la matrice des fonctions trigonométriques analogue à celle du chapitre 3 (les détails sont discutés dans la section 5.2). Cette matrice comporte les harmoniques jusqu'à  $N$  selon chaque dimension harmonique.

Pour alléger les notations, dans la suite on omettra le symbole  $(\check{\cdot})$ , là où la distinction peut se faire par l'argument de la fonction en question ou par la dimension des indices d'harmoniques.

Comme les fonctions que l'on cherche à représenter ainsi sont réelles, on peut profiter des propriétés de symétrie qui en découlent et ne considérer qu'un développement en termes d'indices  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_N^{m*}$  (ensemble ne comportant que la moitié d'éléments non-triviaux de  $\mathbb{Z}_N^m$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_N^{m*}$ , alors  $-\mathbf{k} \notin \mathbb{Z}_N^{m*}$ ). On peut donc en déduire que dans ce problème le nombre de termes harmoniques à traiter est

$$N_H = \frac{(2N + 1)^m + 1}{2}, \quad (5.6)$$

et que le nombre de coefficients harmoniques inconnus (la taille de la matrice  $\mathbf{T}$ ) est :

$$N_C = n(2N_H - 1) = n(2N + 1)^m. \quad (5.7)$$

Concernant les aspects fondamentaux des systèmes multi-fréquentiels, nous invitons le lecteur à ce reporter aux ouvrages de Samoilenko [Sam87] ou de Yoshizawa [Yos75] dans lesquels sont décrites les caractéristiques spécifiques de ces systèmes. Il s'agit, en particulier, de la représentation dans les domaines temporel et fréquentiel multi-dimensionnels, des fonctions quasi-périodiques, ainsi que de la validité de l'approximation des fonctions quasi-périodiques par des polynômes trigonométriques.

Quand aux méthodes numériques appliquées à la recherche des solutions quasi-périodiques des systèmes non-linéaires de type (1.25), celles-ci s'appuient en général sur l'extension des techniques de balance harmonique ou de la méthode de tir.

Dans la suite du chapitre, nous présentons une généralisation de la balance harmonique avec continuation, présentée dans le chapitre 3, ainsi qu'une méthode d'évaluation de la stabilité, basée sur la théorie de Floquet et les sections de Poincaré d'ordre 2.

## 5.2 Généralisation de la balance harmonique et implémentation numérique

Dans le cas où la base fréquentielle  $\boldsymbol{\omega}$  est connue, la méthode de résolution par la balance harmonique (équations (3.5) – (3.17)) peut être généralisée au cas multi-fréquentiel en utilisant (5.5) et en modifiant les relations de dérivation temporelle. Pour ce faire, on utilisera le fait que  $\mathbf{f}$  peut être représentée comme une fonction composée :

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \check{\mathbf{f}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \frac{\partial \check{\mathbf{f}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\omega}. \quad (5.8)$$

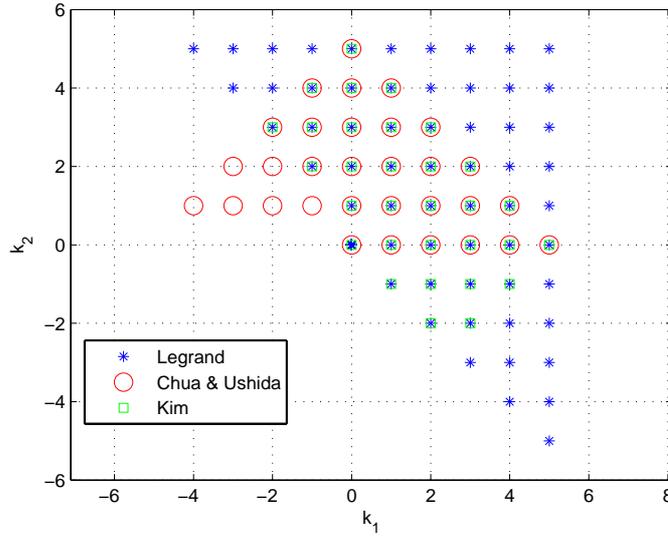
L'intérêt de passer de la variable  $t \in \mathbb{R}$  à  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^m$  consiste à conserver l'orthogonalité entre les termes harmoniques associés aux différents éléments de la base harmonique mais aussi à généraliser la méthode d'étude de stabilité, basée sur la théorie de Floquet. Dans le cas de systèmes bi-rotors, la base fréquentielle est connue. Elle est constituée de deux éléments qui viennent des vitesses de rotation de chacun des arbres. Les raisonnements ultérieurs seront donc appliqués au cas particulier de  $m = 2$ , c'est à dire à des cas bi-périodiques. Les généralisations supérieures ( $m > 2$ ) sont possibles dans le cadre de la même démarche [KP85, KC97].

Comme indiqué dans (5.3), au lieu d'indices des termes harmoniques scalaires nous sommes amenés à utiliser des **vecteurs d'indices**, qui sont définis dans  $\mathbb{Z}_N^{m*}$ . Ce sont des vecteurs à composantes entières. La matrice de transformation  $\mathbf{T}_1$  définie en (3.9) est donc modifiée comme suit

$$\mathbf{T}_1 = [1/2, \cos(\mathbf{k}_1 \boldsymbol{\tau}), \sin(\mathbf{k}_1 \boldsymbol{\tau}), \dots, \cos(\mathbf{k}_{N_H-1} \boldsymbol{\tau}), \sin(\mathbf{k}_{N_H-1} \boldsymbol{\tau})] \quad (5.9)$$

L'arrangement des composantes du vecteur d'inconnues  $\tilde{\mathbf{x}}$  évolue par rapport à (3.10) de manière identique.

Les relations (5.8) et (5.4), conduisent à une réécriture du système (3.15) permettant de

FIG. 5.2 – Termes harmoniques ( $m = 2, N = 5$ )

déterminer  $\tilde{\mathbf{x}}$  dans laquelle les matrices sont désormais données par :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{\{0\}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^{\{\mathbf{k}_1\}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{L}^{\{\mathbf{k}_{N_H-1}\}} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{L}^{\{0\}} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{L}^{\{\mathbf{k}_j\}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j, \omega)^2 \mathbf{M} & (\mathbf{k}_j, \omega) \mathbf{D} \\ -(\mathbf{k}_j, \omega) \mathbf{D} & \mathbf{K} - (\mathbf{k}_j, \omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, N_H - 1, \quad (5.11)$$

Le **contenu fréquentiel** de la représentation (5.3), c'est-à-dire l'ensemble  $\mathbb{Z}_N^{m*}$ , est défini de manière différente selon les sources bibliographiques. Chua et Ushida [CU81], ainsi que Kim et Choi [KC97] définissent la prise en compte de  $N$  harmoniques comme étant la condition

$$\sum_{i=1}^m |k_i| \leq N, \quad (5.12)$$

avec  $\mathbf{k} = [k_1, \dots, k_m]^T \in \mathbb{Z}_N^{2*}$ , tandis que Legrand [Leg05] la définit de la façon suivante :

$$\forall i = 1, \dots, m, |k_i| \leq N, \quad (5.13)$$

L'arrangement des termes qui découle de ces considérations est donné en figure 5.2. Comme on le peut voir, le nombre d'inconnues varie du simple au double. Dans la suite de cette étude on se tiendra à la représentation définie par (5.12) qui correspond à celle de [KC97].

La résolution de la balance multi-harmonique s'opère de façon identique à celle définie dans le chapitre 3, mais cette fois l'argument temporel est multi-dimensionnel. Quand au calcul de la Jacobienne, le calcul numérique direct par différences finies reste valide, ainsi que les deux méthodes présentées (collocation trigonométrique et FFT). Leur généralisation

se réalise comme suit. La **collocation trigonométrique** (section 3.2.2) garde son écriture dans son ensemble sauf le vecteur du temps échantillonné :  $\bar{t} = \{0, \Delta t, \dots, p\Delta t\}$  avec  $\Delta t \ll \min(2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2)$  et  $p\Delta t > \max(2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2)$ . Le calcul par **FFT** reste identique à celui de la section section 3.2.3 à condition de rendre les indices harmoniques et temporels  $j, k$  et  $l$  vectoriels.

En ce qui concerne la continuation, on gardera un seul paramètre de contrôle  $\nu$  indiquant le "régime". Toutes les vitesses de rotation (et donc, fréquences d'excitation) sont proportionnelles à cette variable et varient avec un rapport constant entre elles.

### 5.3 Section de Poincaré d'ordres supérieurs

Comme présenté dans la section 4.3, dans le cas d'une solution périodique  $\mathbf{y}^{[0]}$ , on peut ramener le problème de la stabilité asymptotique de  $\mathbf{y}^{[0]}$  à un problème de stabilité de point fixe de l'application de Poincaré  $P$ , définie à partir de la section de Poincaré  $\mathcal{P}_1(\Sigma_1, \mathbf{y}^{[0]})$ , effectuée sur  $\mathbf{y}^{[0]}$ . Si  $\mathbf{y}^{[0]}$  est une fonction quasi-périodique, la section  $\mathcal{P}_1(\Sigma_1, \mathbf{y}^{[0]})$  n'est plus un point fixe, mais un ensemble de points, disposé sur une courbe fermée (figure (5.3(b))). Ainsi, on définit une section de Poincaré de second ordre  $\mathcal{P}_2$  d'une fonction  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  (trajectoire) par

$$\mathcal{P}_2(\Sigma_1, \Sigma_2, \mathbf{f}) = \mathcal{P}_1(\Sigma_2, \mathcal{P}_1(\Sigma_1, \mathbf{f})) \quad (5.14)$$

avec  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  choisis de manière à avoir un point commun  $\sigma \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$  égal à la valeur de  $\mathbf{f}$  à l'instant  $t = 0$  :

$$\mathcal{P}_2(\Sigma_1, \Sigma_2, \mathbf{f}(t=0)) = \mathcal{P}_1(\Sigma_2, \mathcal{P}_1(\Sigma_1, \mathbf{f}(0))) \quad (5.15)$$

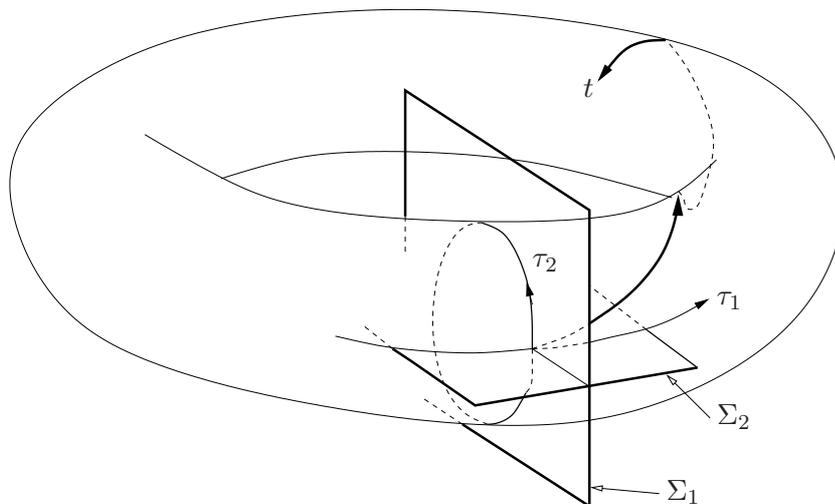
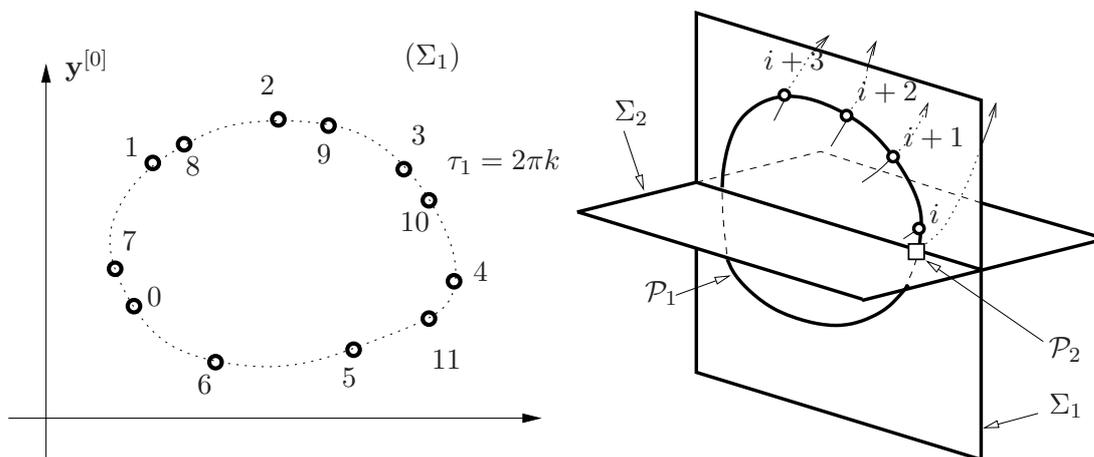
Nous allons nous intéresser aux sections du second ordre définies par  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , correspondant aux plans  $\tau_1 = 0$  et  $\tau_2 = 0$ . On notera que les fonctions considérées étant quasi-périodiques, le plan  $\Sigma_1$  ( $\tau_1 = 0$ ) est confondu dans l'espace des phases avec tous les plans  $\tau_1 = 2\pi i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Il en est de même pour le plan  $\Sigma_2$ . Les points de la section  $\mathcal{P}_1(\Sigma_1, \mathbf{f})$ , sont donc donnés par les expressions

$$\sigma_i = \mathbf{f} \left( \frac{2\pi i}{\omega_1} \right) = \check{\mathbf{f}} \left( 2\pi i, 2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \check{\mathbf{f}} \left( 0, 2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2} \bmod 2\pi \right). \quad i = 1, \dots, N_p. \quad (5.16)$$

Les points  $\sigma_i$  sont disposés de manière quasi-uniforme sur la courbe  $2\pi$ -périodique  $\check{\mathbf{f}}((0, \tau_2)^T)$ . Ainsi, la section  $\mathcal{P}_2(\Sigma_1, \Sigma_2, \mathbf{f})$  revient à définir la section de Poincaré de cette nouvelle fonction périodique, comme illustré par la figure 5.3(c). L'application linéaire  $P$  associée à la composition de ces deux sections a alors  $\sigma$  comme point fixe pour  $\mathbf{f}$ . Comme il s'agit d'une fonction quasi-périodique, ce point ne peut être atteint en un temps fini. Il est donc recherché par interpolation des points (5.16), voir la figure 5.3(d). Cette section de Poincaré du second ordre permet de définir une notion de point fixe qui permettra d'étudier la stabilité de la solution.

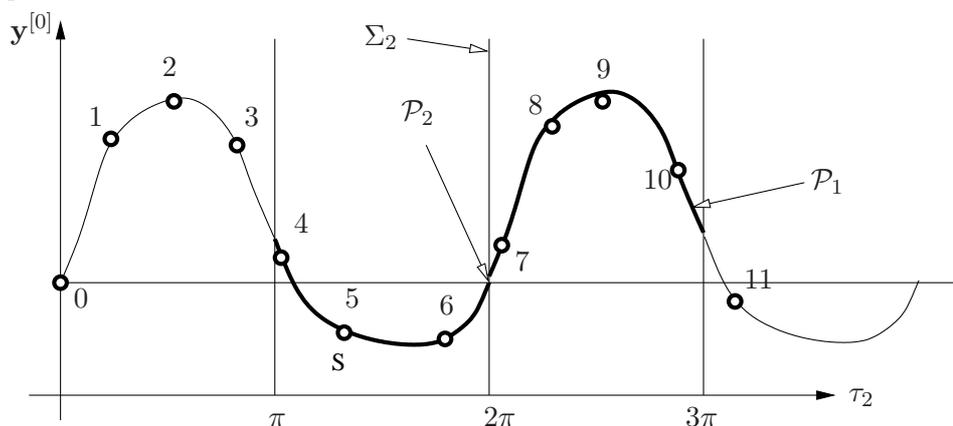
### 5.4 Etude de la stabilité

Dans leurs ouvrages fondamentaux, Yoshizawa [Yos75] et Samoilenko [Sam87] ont présenté des résultats théoriques sur la stabilité des solutions quasi-périodiques par les fonctions de

(a) Sections de la trajectoire sur tore invariant par les plans  $\tau_1 = 0$  et  $\tau_2 = 0$ 

(b) Section de Poincaré d'une trajectoire quasi-périodique

(c) Section de Poincaré d'ordre 2



(d) Interpolation de la section de Poincaré

FIG. 5.3 – Section de Poincaré d'ordre 2

Lyapunov. Cette approche est difficile lorsque l'on veut déterminer des domaines d'instabilité d'un système pour lequel on ne connaît pas a priori la fonction de Lyapunov.

Kaas-Petersen [KP86] a présenté une technique basée sur les sections de Poincaré de second ordre, en utilisant l'interpolation pour obtenir une matrice de monodromie généralisée. Cette méthode a ensuite été optimisée par Kim [Kim96].

L'étude de stabilité de la solution  $\mathbf{y}^{[0]}$  de (4.1) est ainsi ramenée à l'étude de stabilité du point fixe

$$\boldsymbol{\sigma}^{[0]} = \mathbf{y}^{[0]}(0) \quad (5.17)$$

de l'application de Poincaré, induite par la section  $\mathcal{P}_2(\Sigma_1, \Sigma_2, \mathbf{f})$ . Cela revient à statuer sur la stabilité asymptotique de la solution  $\mathbf{y}^{[0]}$ .

La matrice de l'application de Poincaré linéarisée est calculée à l'aide de la matrice de transition  $\Phi$  de  $\boldsymbol{\sigma}^{[0]}$  à  $t = 0$  vers chacun des points  $\boldsymbol{\sigma}_i^{[0]}$  de la section de Poincaré  $\mathcal{P}_1(\Sigma_1, \mathbf{y}^{[0]})$ , correspondant aux instants  $t = t_i = 2\pi i/\omega_1$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . On obtient ainsi une courbe fermée, c'est-à-dire périodique en  $\tau_2$ . Cette courbe représente la section de la fonction considérée par le plan  $\Sigma_1$ . Puisque les fréquences de base  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont incommensurables, la matrice de transition sur une "période" bidimensionnelle est alors calculée par interpolation (figure 5.3(d)). En utilisant les polynômes de Lagrange, nous pouvons exprimer des colonnes de la matrice de l'application linéarisée de Poincaré (notée  $\mathbf{P}$ ) définies par :

$$\check{\varphi}_i(0, 2\pi) = \sum_{j=1}^p \left( \prod_{k=1}^p \frac{1/2 - \text{mod}(k\omega_2/\omega_1 - 1/2, 1)}{\text{mod}(j\omega_2/\omega_1 - 1/2, 1) - \text{mod}(k\omega_2/\omega_1 - 1/2, 1)} \check{\varphi}_i(0, k\omega_2/\omega_1) \right) \quad (5.18)$$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{P}$  ont la même signification que les multiplicateurs de Floquet dans le cas mono-fréquentiel, ce qui nous permet de statuer sur la stabilité de  $\mathbf{y}^{[0]}$ .

La procédure se résume donc de la manière suivante :

1. On calcule les solutions fondamentales  $\varphi_j(t)$ ,  $j = 1 \dots 2n$  en un ensemble d'instant  $t_i = 2\pi i/\omega_1$ ,  $i = 1 \dots N_p$ . Ces instants donnent naissance à un ensemble d'instant ramenés sur la période  $[0, 2\pi]$  selon la seconde dimension temporelle (avec  $\tau_1 = 0$ ) :

$$\tau_{2i} = \pi + (\omega_2 t_i - \pi) \text{ mod } 2\pi \quad (5.19)$$

Le décalage de  $\pi$  dans (5.19) est appliqué afin de centrer le nuage de points  $\boldsymbol{\sigma}_i^{[0]}$  autour du point  $\tau_2 = 2\pi$  pour favoriser l'interpolation.

2. Par une procédure d'interpolation, on calcule  $\check{\varphi}_j(0, 2\pi)$  (à partir de  $\check{\varphi}_j(0, \tau_{2i})$ ), ce qui conduit à l'obtention de la matrice  $\mathbf{P}$ . Cette matrice permet alors de déterminer la matrice de l'application de Poincaré du second ordre linéarisée.
3. En calculant et analysant les valeurs propres de  $\mathbf{P}$ , on peut statuer sur la stabilité de la solution quasi-périodique considérée.

## 5.5 Exemples d'application

Dans le cadre de l'analyse des systèmes quasi-périodiques divers exemples ont été traités. Ils ont pour objectif de démontrer l'efficacité des différentes stratégies mises au point pour

l'évaluation des réponses ainsi que de la stabilité. Tout d'abord nous nous intéresserons à un oscillateur de Duffing soumis à une excitation quasi-périodique.

Ensuite, en s'appuyant sur un exemple à deux degrés de liberté non-linéaire, nous étudierons l'enrichissement dynamique apporté par l'excitation bi-périodique. Enfin, on appliquera l'approche précédemment développée au cas d'un bi-rotors modélisé en éléments finis et représentatif d'un comportement dynamique d'ensemble.

### 5.5.1 Oscillateur de Duffing sous excitation quasi-périodique.

Il s'agit ici d'étudier la réponse dynamique définie par l'oscillateur suivant :

$$\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x + 0.2x^3 = \cos(\omega t) + \sin\left(\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right), \quad (5.20)$$

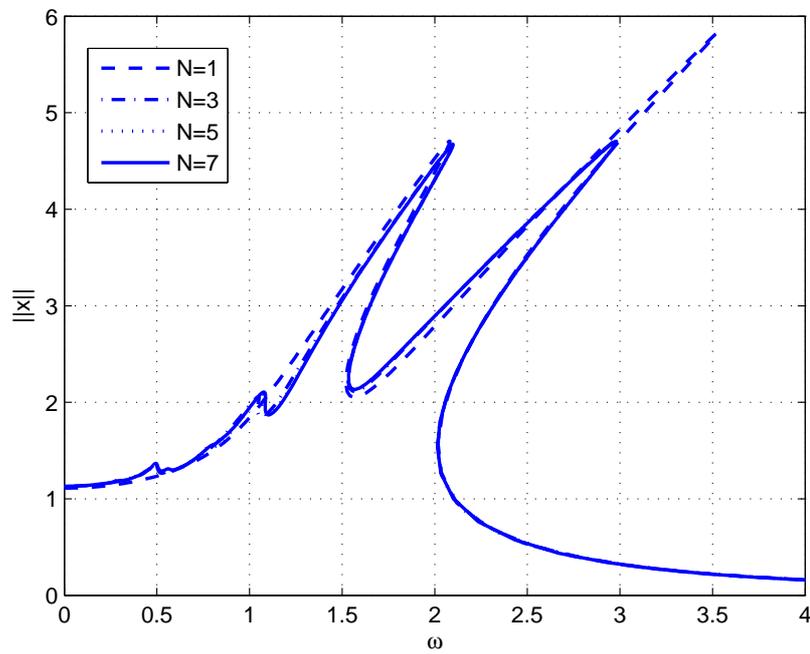
On notera le caractère biharmonique de l'excitation qui conduit à définir  $\omega$  par  $\omega = [\omega_1, \omega_2], = \omega[1, 1/\sqrt{2}]$ .

Les figures 5.4 et 5.5 présentent les résultats de calculs de réponse en fonction de  $\omega$  pour  $N = 1, 3, 5, 7$  par collocation trigonométrique et par FFT. La réponse comporte deux pics principaux (figure 5.4) et plusieurs pics dans le domaine super-harmonique (figure 5.5(a)).

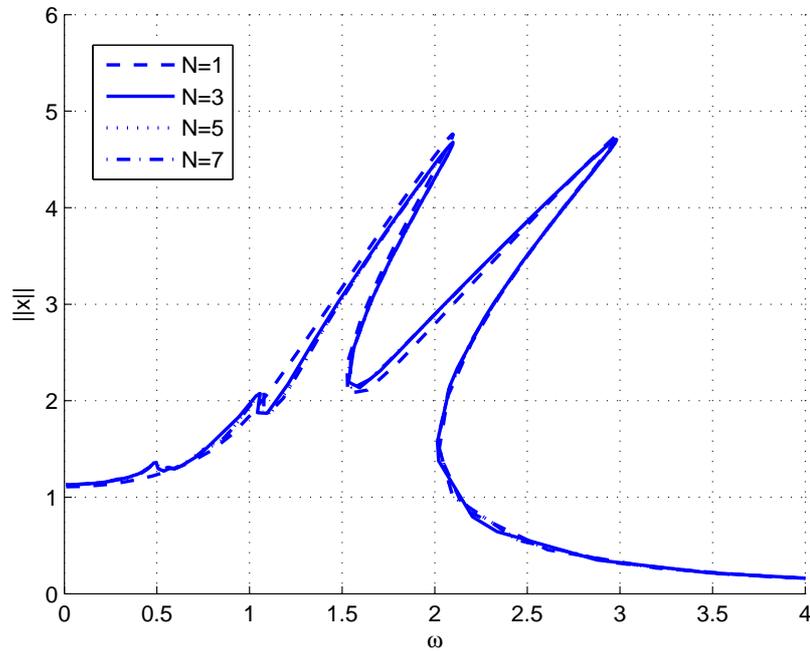
La méthode de collocation trigonométrique fait intervenir un signal temporel uniformément échantillonné ce qui induit des erreurs dues à la non-orthogonalité des composantes fréquentielles incommensurables. Cela se voit notamment sur les résultats à  $N = 1$  (figure 5.4(a), 5.5(b)) où l'on constate une erreur importante sur le niveau du pic principal. Cette erreur est toutefois rectifiée quand le nombre d'harmoniques augmente.

Les résultats de calculs par FFT donnent des niveaux globaux assez proches de ceux à  $N = 7$  dès le premier ordre d'approximation. Cela provient du fait que l'on considère un domaine où les fonctions harmoniques d'ordres différents sont toujours orthogonales, ce qui donne lieu à une meilleure projection de la solution.

Maintenant, il s'agit d'étudier la stabilité des solutions trouvées sous excitation bi-périodique. Pour tester la méthode, présentée dans la section 5.4, et avoir des résultats de référence, on calcule d'abord la stabilité des solutions sous excitation mono-harmonique (chacun des composants de  $\mathbf{g}$  séparément). Les résultats de ces calculs (figure 5.6) montrent une bonne correspondance avec les observations mono-harmoniques (figure 5.6(a)). En appliquant la méthode présentée à la section 5.4, on peut fournir une courbe de réponse en rajoutant sur la figure les résultats de stabilité (figure 5.6(b)). On observe les zones d'instabilité habituelles (sur les parties de retournement de pics principaux), mais aussi des zones d'instabilité sur les montées (côtés gauches) des pics. Des calculs ont été menés pour un nombre de points d'interpolation  $N_p$  de 20, 40, 60, 100 et le nombre d'harmoniques  $N$  de 1, 3, 5, 7. On a pu constater que l'évaluation de stabilité dépend peu de  $N_p$  (une valeur de 20 a été retenue pour la suite), tandis qu'en ce qui concerne la convergence de la solution harmonique, les résultats ne se stabilisent qu'à partir de  $N = 5$ . Un examen plus approfondi de la courbe de réponse (figure 5.7) permet de constater dans les zones d'instabilité prédites par les multiplicateurs, une nette différence entre la réponse obtenue par intégration temporelle et celle issue de la balance harmonique. Cette constatation conforte l'analyse de stabilité qui a été réalisée et met en lumière l'existence d'autres solutions non-prédites par l'approche harmonique.

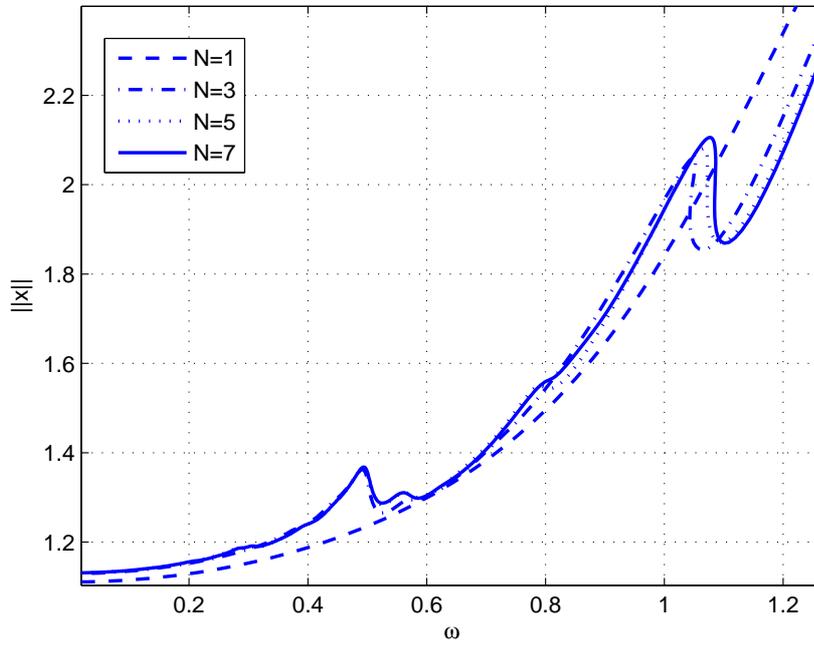


(a) Courbe de réponse avec Jacobienne par collocation trigonométrique

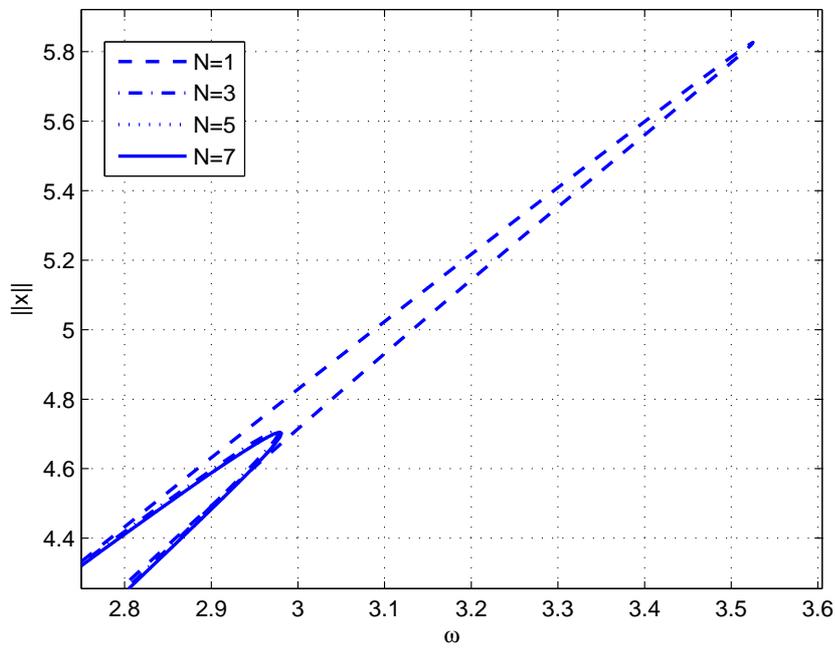


(b) Courbe de réponse avec Jacobienne par FFT

FIG. 5.4 – Réponse de l'oscillateur de Duffing (5.20) à une excitation quasi-périodique : courbes pour l'ensemble de réponse

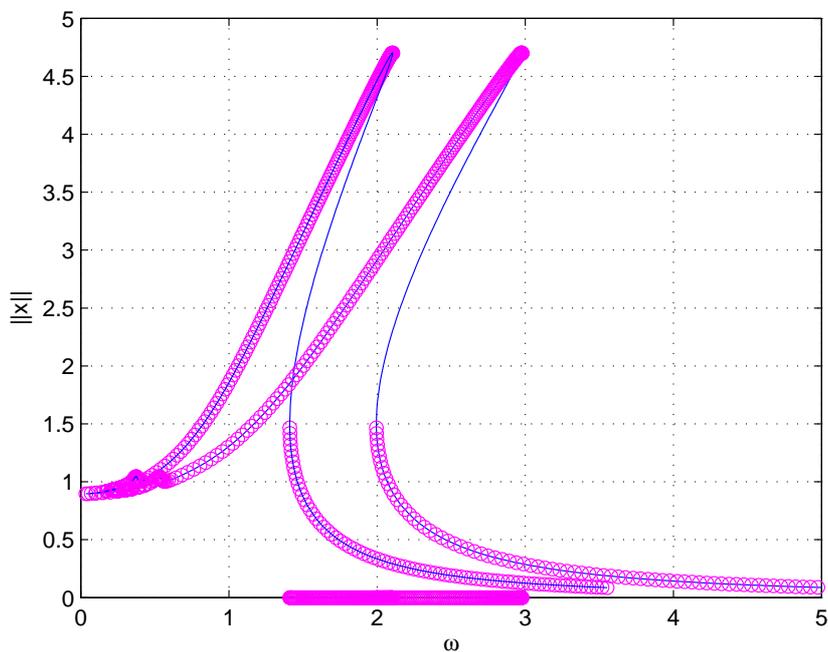


(a) Zoom de 5.4(a) sur le domaine super-harmonique

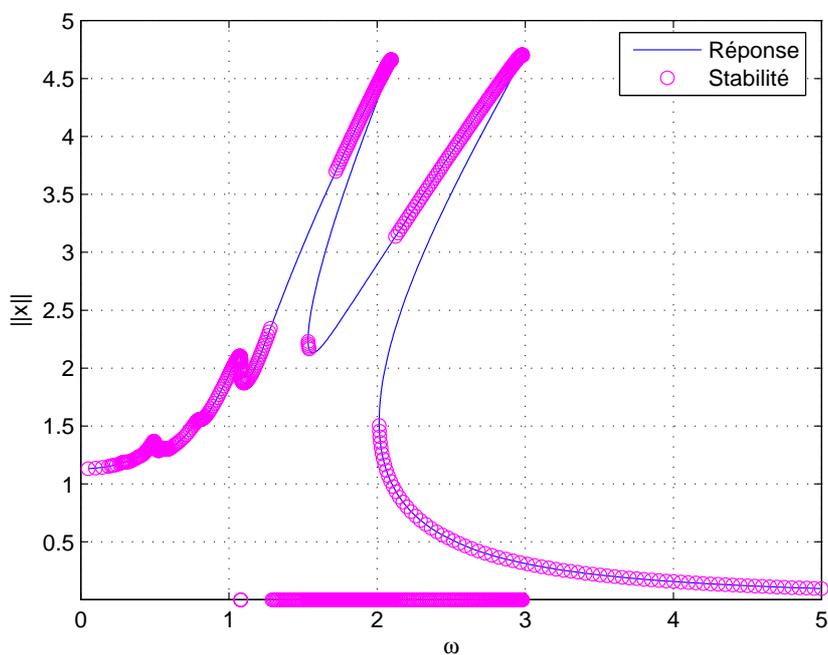


(b) Pics erronés des résultats avec Jacobienne par collocation trigonométrique

FIG. 5.5 – Réponse de l'oscillateur de Duffing (5.20) à une excitation quasi-périodique : détail

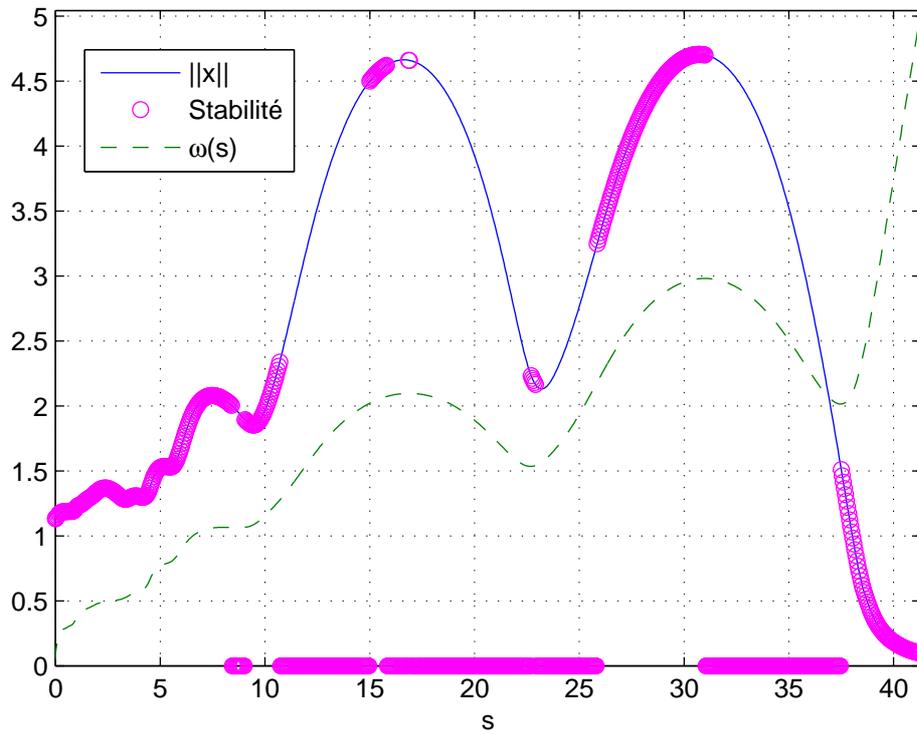


(a) Réponse et stabilité pour chaque terme d'excitation

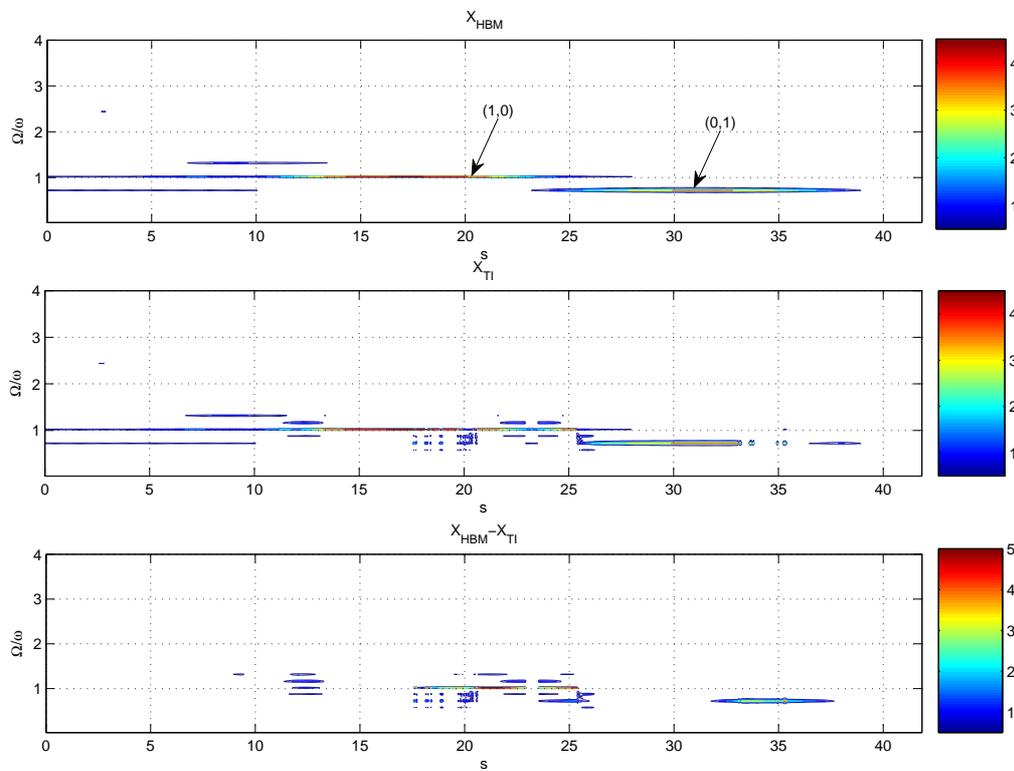


(b) Réponse et stabilité bi-périodique

FIG. 5.6 – Réponse et stabilité d'un oscillateur de Duffing.

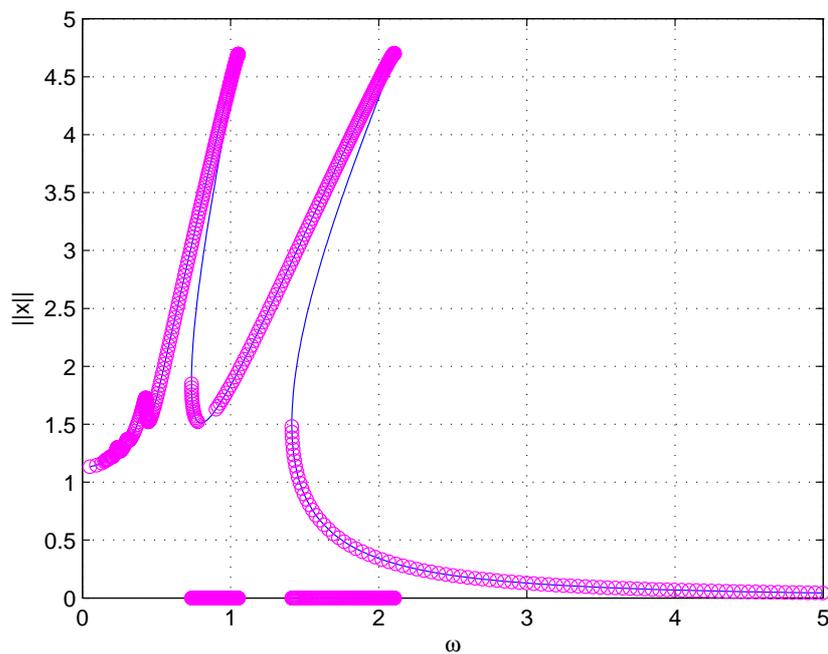
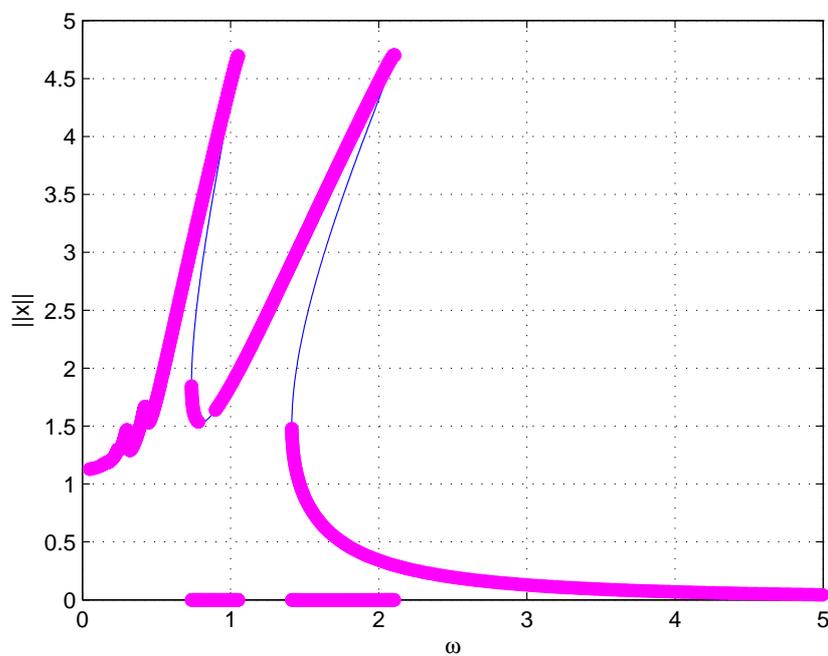


(a) Analyse de stabilité (méthode de Floquet généralisée, interpolation sur  $N_p = 20$  périodes), superposée avec la courbe de réponse en fonction de l'abscisse curviligne ( $s$ ) de parcours



(b) FFT de la solution par HB ( $\mathbf{x}_{harm}$ , en haut), Intégration temporelle ( $\mathbf{x}_{TI}$ , au milieu) et la différence (en bas)

FIG. 5.7 – Vérification temporelle des résultats obtenus par la balance harmonique multi-dimensionnelle

FIG. 5.8 – Réponse et stabilité d'un oscillateur de Duffing ( $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{3.8}$ ).FIG. 5.9 – Réponse et stabilité d'un oscillateur de Duffing ( $\omega_1/\omega_2 = 2$ ).

On s'intéresse toujours au même système de type Duffing, mais cette fois-ci on va considérer l'excitation suivante :

$$\mathbf{g}(t) = \left[ \cos(\omega t) + \sin\left(\frac{\omega t}{\sqrt{3.8}}\right) \right], \quad (5.21)$$

On notera que  $\sqrt{3.8} = 1.9494$  est proche de 2 ce qui permettra de comparer les résultats avec une approche balance harmonique conventionnelle.

Pour une approximation d'ordre 9, nous avons obtenu les solutions de la figure 5.8. Nous pouvons remarquer sur cette courbe des zones d'instabilité "classiques" mais aussi d'autres instabilités sur certaines plages plus inattendues. En effet, une zone d'instabilité inexistante sur un oscillateur mono-harmonique (au fond du creux entre les deux pics), à  $\omega \approx 0.9$  apparaît, qui est caractérisée par le passage en dessous de  $-1$  du multiplicateur (ici réel). Ce phénomène traduit une bifurcation par dédoublement de période (un des multiplicateurs (réels) passe en deçà de  $-1$ ).

A titre de comparaison, nous avons utilisé une excitation définie par :

$$\mathbf{g}(t) = \left[ \cos(\omega t) + \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right], \quad (5.22)$$

par une balance harmonique "classique" (figure 5.9) et estimé les réponses qui sont très semblables aux résultats précédemment obtenus.

On peut donc voir que la stabilité des réponses est similaire dans les deux cas.

### 5.5.2 Deux oscillateurs linéaires couplés par une raideur cubique

On considère maintenant le système, traité dans la section 3.3.3, avec une excitation bi-périodique :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} (x_1 - x_2)^3 \\ -(x_1 - x_2)^3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) + \cos\left(\frac{\omega t}{\sqrt{3.8}}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec  $\kappa = 0.2$ . On obtient (figure 5.10 et 5.11) des courbes de réponse complexes avec de nombreux retournements par rapport à la fréquence d'excitation. Cependant, en observant l'évolution des composants de la réponse  $\tilde{\mathbf{x}}$ , on s'aperçoit que chaque pic est accompagné d'un retournement bien plus régulier pour l'amplitude d'une des composantes.

Pour clarifier les courbes de réponse de cet exemple, nous avons numéroté les pics de résonance et les points de retournement A1 à A8 dans l'ordre d'apparition au cours de la continuation. Comme on peut voir sur l'évolution des harmoniques (figures 5.12 et 5.13), les pics des deux résonances sur les modes de la première composante d'excitation sont sur A1 et A3, tandis que pour la seconde composante ce sont A6 et A7. Les points de retournement suite au second mode sont respectivement A5 et A8. Enfin, les pics A2 et A4 sont dus à l'excitation du premier mode par la composante (0,1) de l'excitation lors du passage sur le deuxième mode de la composante (1,0).

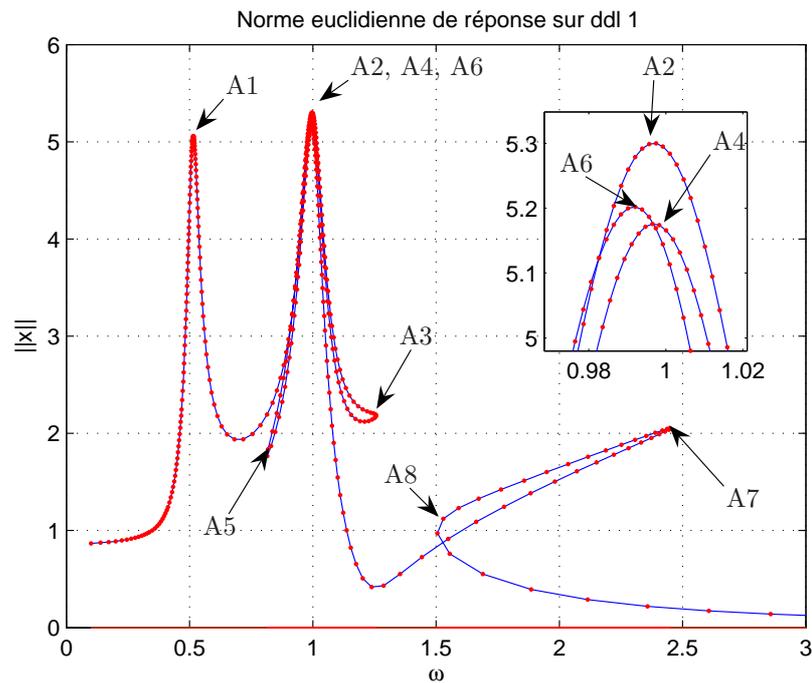


FIG. 5.10 – Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Courbe de réponse sur  $x_1$  (masse 1)

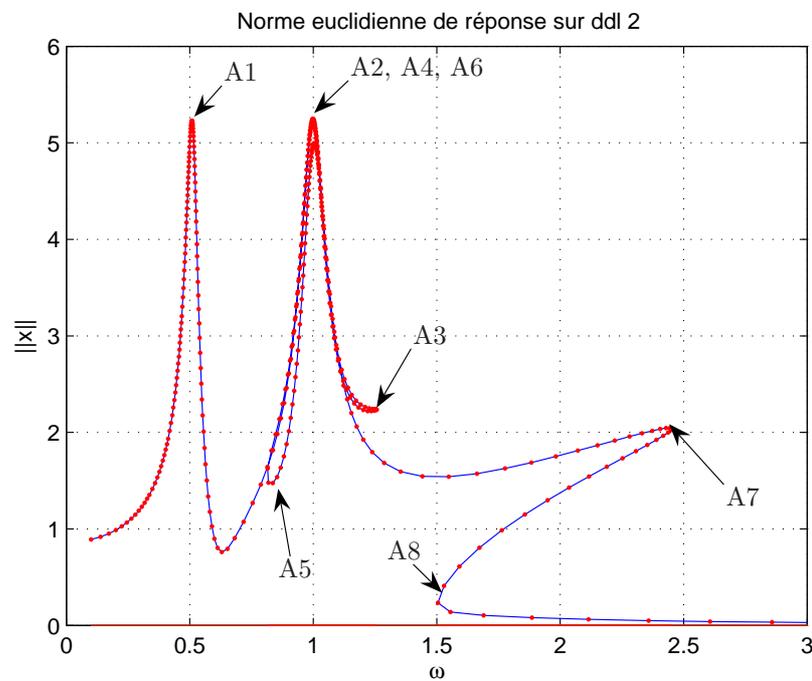


FIG. 5.11 – Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Courbe de réponse sur  $x_2$  (masse 2)

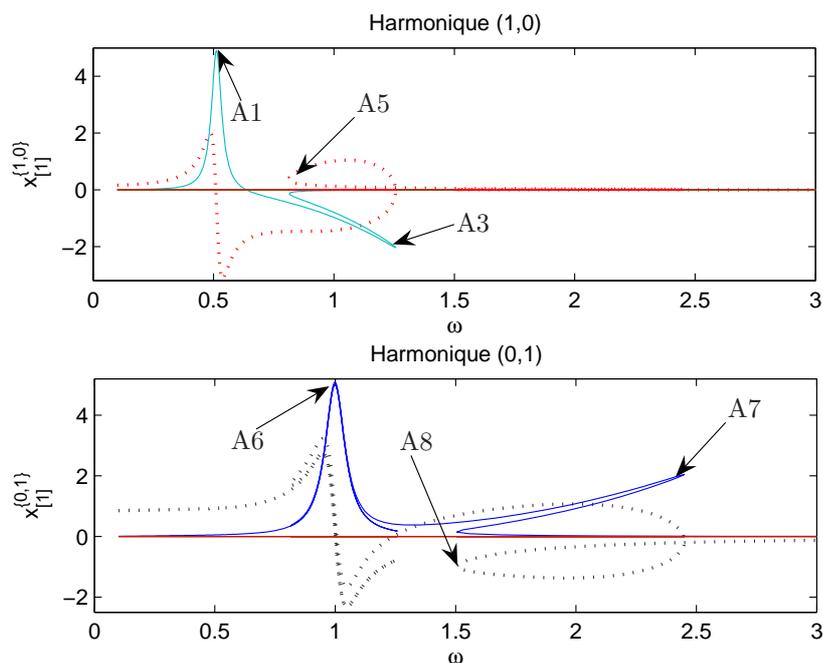


FIG. 5.12 – Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Composantes harmoniques pour la masse 1 (“—”  $\mathbf{a}_{[1]}^{\{1\}}$ , “...”  $\mathbf{b}_{[1]}^{\{1\}}$ )

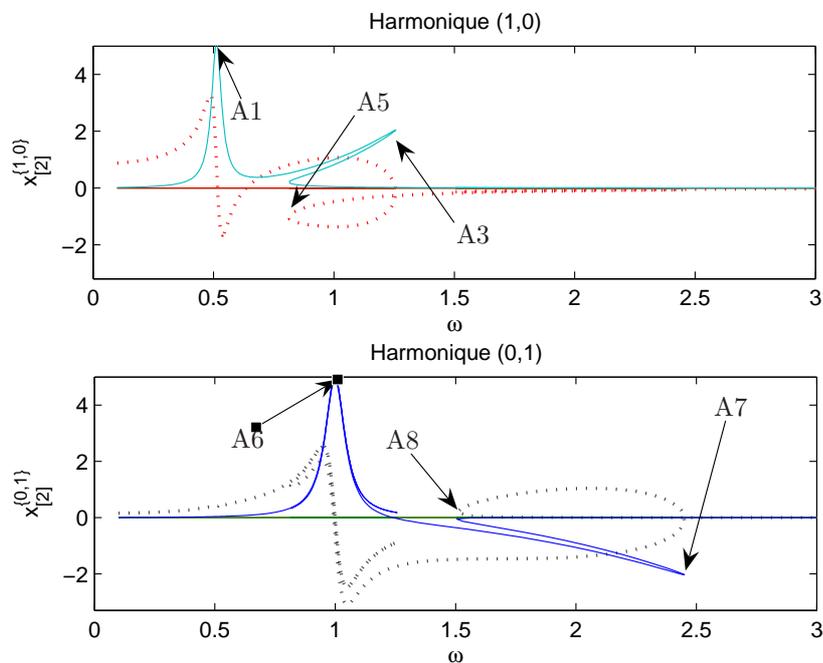


FIG. 5.13 – Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Composantes harmoniques pour la masse 2 (“—”  $\mathbf{a}_{[1]}^{\{2\}}$ , “...”  $\mathbf{b}_{[1]}^{\{2\}}$ )

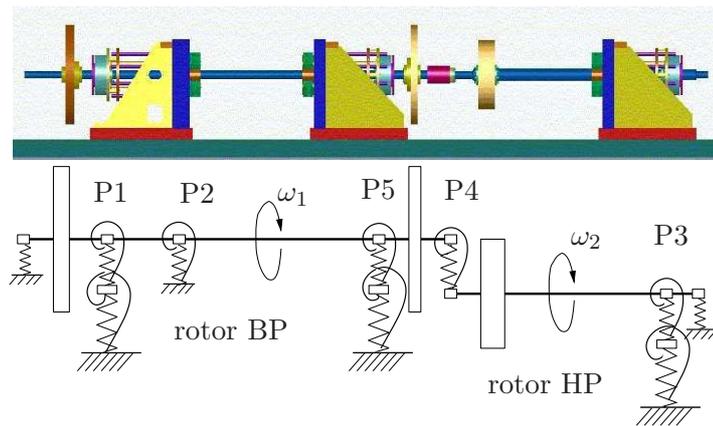


FIG. 5.14 – Modèle du banc d’essai

## 5.6 Application au banc bi-rotors DDE

Nous nous intéressons maintenant au modèle éléments finis du banc d’essai DDE (Dynamique D’Ensemble) bi-rotors contra-rotatif avec le modèle de roulement développé dans le chapitre 2. Cette configuration du banc correspond aux résultats expérimentaux de la section 6.4.3. L’objectif est d’étudier l’influence des jeux radiaux de roulement ainsi que des mésalignements du stator sur la réponse dynamique à balourd du banc d’essai. Dans un premier temps, nous nous pencherons sur les spécificités de la modélisation, puis dans un second temps sur les particularités des simulations numériques de ce modèle.

### 5.6.1 Spécificités de la modélisation

Un **modèle éléments finis** comportant 116 ddls est utilisé (figure 5.14). La description détaillée du banc est donnée dans la section 6.2. Ici nous nous contenterons de rappeler que le banc est constitué de deux rotors (BP et HP pour Basse Pression et Haute Pression, notés également 1 et 2 respectivement), le premier étant porté par 3 paliers (P1, P2 et P5), le second par 2 paliers (P4 et P3). L’ensemble de la structure est modélisé par éléments-finis “poutres-masses-ressorts”, décrits dans le chapitre 1. Ce modèle est similaire à celui utilisé dans les calculs de dimensionnement du banc, à l’exception des modèles de roulements, qui correspondent cette fois-ci à ceux définis dans le chapitre 2.

Le **modèle de roulements** retenu est celui de la figure 2.14 avec les paramètres issus des relations de Gargiulo [Gar80] avec jeux radiaux. Nous prendrons en compte les effets de la gravité ainsi que la raideur angulaire du roulement dont l’importance a été montré par Villa [Vil05] et Lee & Lee [LL99].

Les cas de figure suivants seront étudiés :

- *linéaire* (avec tous les roulements linéaires),
- *sans jeux* (avec tous les roulements non-linéaires sans jeux),
- *avec jeux dans deux roulements* (avec seulement tous les roulements non-linéaires et jeux seulement dans les deux roulements centraux : P4 et P5),
- *avec jeux dans tous les roulements* (avec tous les roulements non-linéaires à jeux).

Le modèle d'**amortissement** utilisé est celui de Rayleigh :

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}.$$

Il a été paramétré de manière à respecter les observations expérimentales, notamment des taux d'amortissement de 2% pour les modes 1 et 3 en co-rotation pour la configuration initiale ( $\alpha = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\beta = 2$ ).

L'excitation est donnée par des **balourds** de 100 g cm ( $10^{-3}$  kg m) placés sur chaque disque de la machine, ainsi qu'à l'extrémité du rotor HP afin d'observer l'influence des jeux sur la réponse dynamique du système. C'est une répartition arbitraire, les ordres de grandeurs étant inspirés par l'expérience issue de l'exploitation de machines de ce gabarit [Vil05].

On observera l'influence de certains paramètres sur la réponse dynamique du système, à savoir les jeux de roulements et les mésalignements statiques.

On calculera d'abord la réponse du système sans jeux de roulements. Ensuite, nous introduirons un **jeu** radial de 30  $\mu\text{m}$  (accompagné d'un jeu angulaire de 0.001 rad) aux roulements centraux (P4 et P5) afin d'isoler leur influence. Enfin, les calculs seront réalisés en présence d'un jeu radial de 30  $\mu\text{m}$  sur tous les roulements.

Enfin, une dernière étude sera conduite afin d'évaluer l'impact d'un mésalignement du stator (support-paliers) sur la dynamique du système. Ce mésalignement sera introduit par une perturbation de la position de la bague extérieure du roulement P5 latéralement de 1 mm.

### 5.6.2 Simulations numériques

Cette application nécessite un commentaire spécial sur les particularités d'implémentation de la méthode numérique développée, adaptée aux systèmes de grande taille, notamment en ce qui concerne l'inversibilité de la matrice jacobienne et à la continuation.

Un des problèmes particuliers lié à la taille du système se pose lors de l'**inversion de la Jacobienne**. En effet, la diagonale de la matrice  $\mathbf{L}$  (3.15) est proportionnelle au carré de la fréquence  $\omega$  qui sert de paramètre de contrôle. Avec un nombre  $n$  de degrés de liberté important, le déterminant de cette matrice a un terme, proportionnel à  $\omega^{2n}$ . Comme  $\mathbf{L}$  constitue une partie de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ , qu'on est amené à inverser pendant la résolution, on est obligé de la pré-multiplier par une matrice, proportionnelle à l'inverse de sa diagonale afin d'améliorer le conditionnement de  $\mathbf{J}$ .

Le vecteur de coordonnées généralisées  $\tilde{\mathbf{x}}$  est composé d'un grand nombre de variables, exprimées en m et en rad, dont les valeurs sont comprises entre 0 et 0.001 m pour les déplacements et entre 0 et 0.01 rad en rotation. Le paramètre de contrôle  $\nu$  s'exprime en rpm, variant entre 0 et 2200 rpm. Pour assurer une bonne convergence de la boucle de résolution par continuation, nous renormalisons la contribution de  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\nu$  dans  $\mathbf{z}$ . Pour cela  $\mathbf{z}$  est défini comme suit

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} k_q \tilde{\mathbf{x}} \\ k_\omega \omega \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

avec les facteurs d'échelle  $k_q = 20000$  et  $k_\omega = 2$ . Ces valeurs assurent un avancement cohérent le long de la courbe de réponse.

Un contrôle de la longueur du pas s'avère cependant toujours d'une grande utilité. Lors du calcul, la valeur de  $\Delta s$  évolue surtout entre 0.1 et 30 (le seuil de tolérance (critère d'arrêt

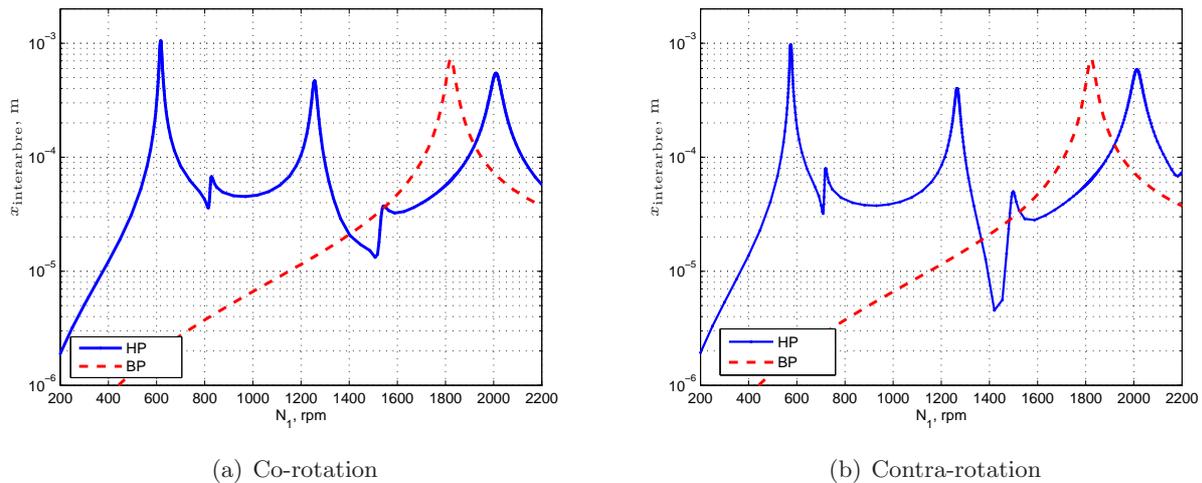


FIG. 5.15 – Application de la méthode de balance harmonique avec continuation au cas linéaire : déplacement horizontal du noeud interarbre

d'itération 3.19) est fixé à  $10^{-8}$ , tandis que la valeur limite de cosinus entre deux pas de continuation (critère de non-retour) était fixé à 0.9).

Les résultats de calcul sont présentés sous forme de courbes de réponse en déplacement du plan du roulement interarbre ou en force dans les roulements. Les déplacements sont donnés sous forme de réponse harmonique correspondant à la fréquence de rotation de chacun des rotors (premier indice donnant l'harmonique par rapport au rotor BP, second par rapport au rotor HP, par exemple l'harmonique (0,1) est la composante synchrone avec le rotor HP). Les forces sont présentées par la norme euclidienne de l'ensemble des harmoniques.

### 5.6.2.1 Application à un système linéaire

On retrouve les résultats linéaires donnés en figure 5.15, en co- et contra-rotation, conformes aux calculs linéaires du dimensionnement du banc, exposés dans le chapitre 6. La plage de régimes étudiée comporte 1 mode excité par le rotor BP (courbe de réponse d'harmonique (1,0)) et 5 modes excités par le rotor HP (harmonique (0,1)). On peut voir que seules les branches directes des modes propres sont excitées et que le mode de l'arbre BP reste pratiquement non-modifié.

Le calcul a été mené avec un pas curviligne constant ce qui conduit à une diminution du pas en fréquence lors du franchissement des pics de résonance.

### 5.6.2.2 Influence des jeux de roulement en contra-rotation

En introduisant les jeux dans les roulements ( $30\mu\text{m}$  radial et  $10\text{ mrad}$  angulaire), on remarque une forte différence entre les réponses des modèles à 2 et à 5 roulements non-linéaires avec jeux (notés  $P_{45}$  et  $P_{12345}$  respectivement, figures 5.16 — 5.18).

Le cas de roulements non-linéaires sans jeux donne une réponse pratiquement identique à celle avec roulements linéaires. Dans les cas de roulements avec jeux, nous pouvons remarquer de manière générale que plus il y a de jeux dans le système, plus les pics de résonance dans ce

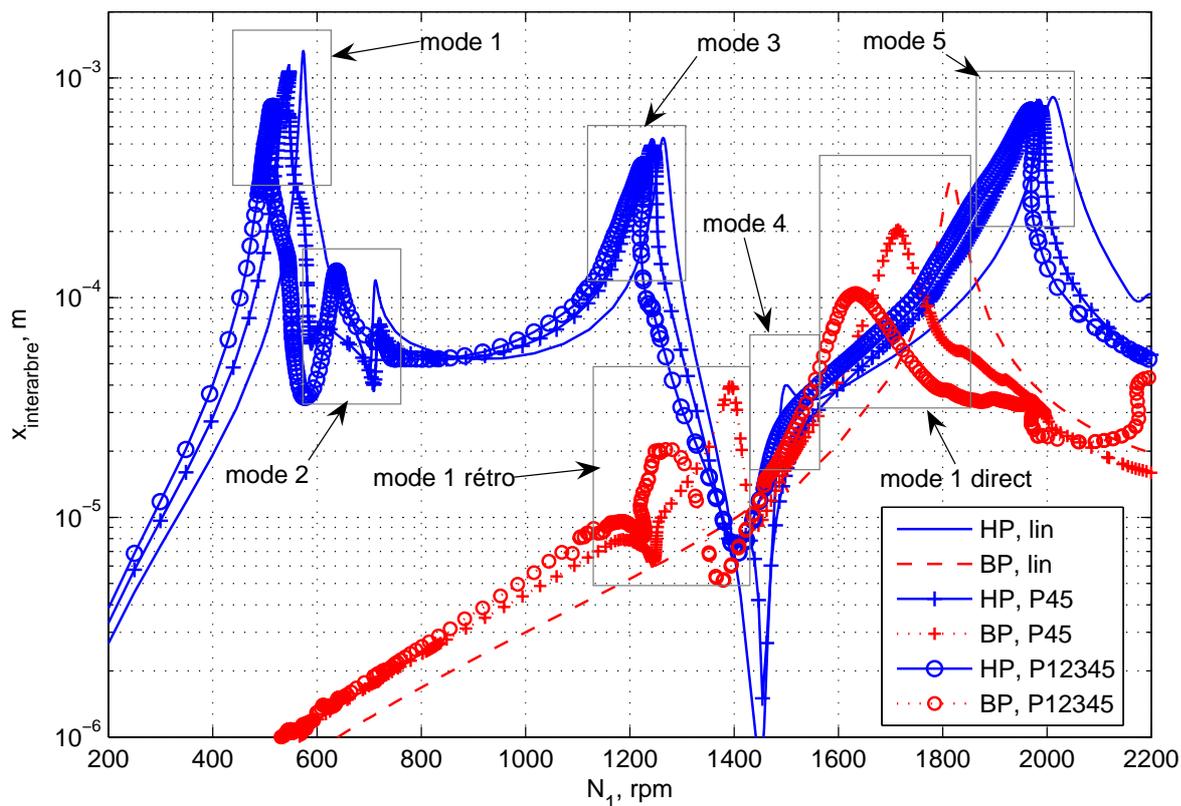


FIG. 5.16 – Influence des jeux de roulement : déplacement horizontal au noeud interarbre. (*lin* – cas sans jeux de roulements, *P45* – cas avec jeux dans deux roulements, *P12345* – cas avec jeux dans tous les roulements)

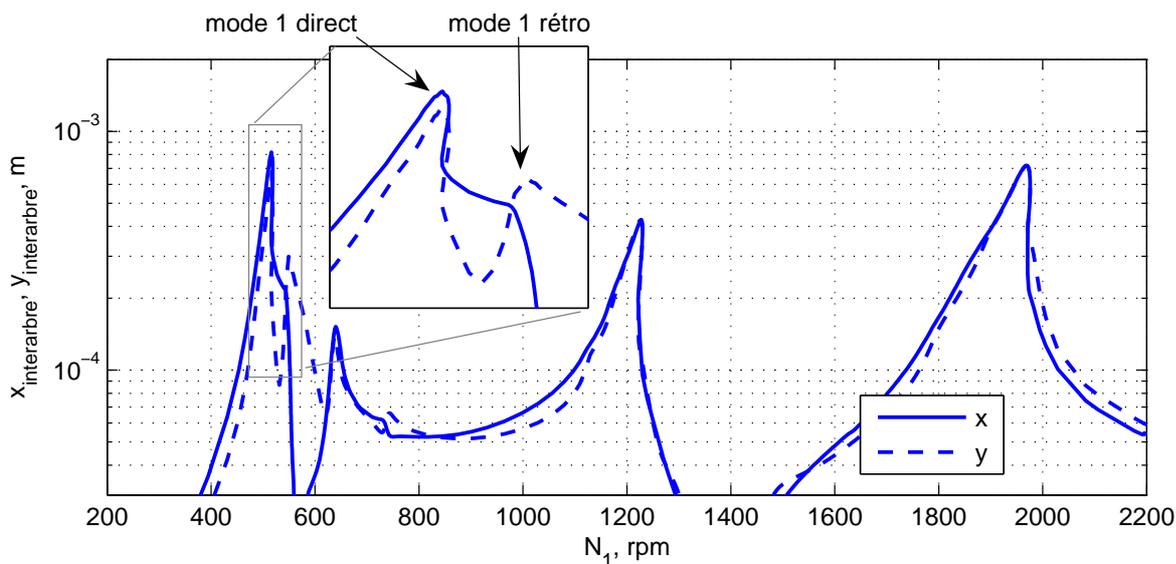
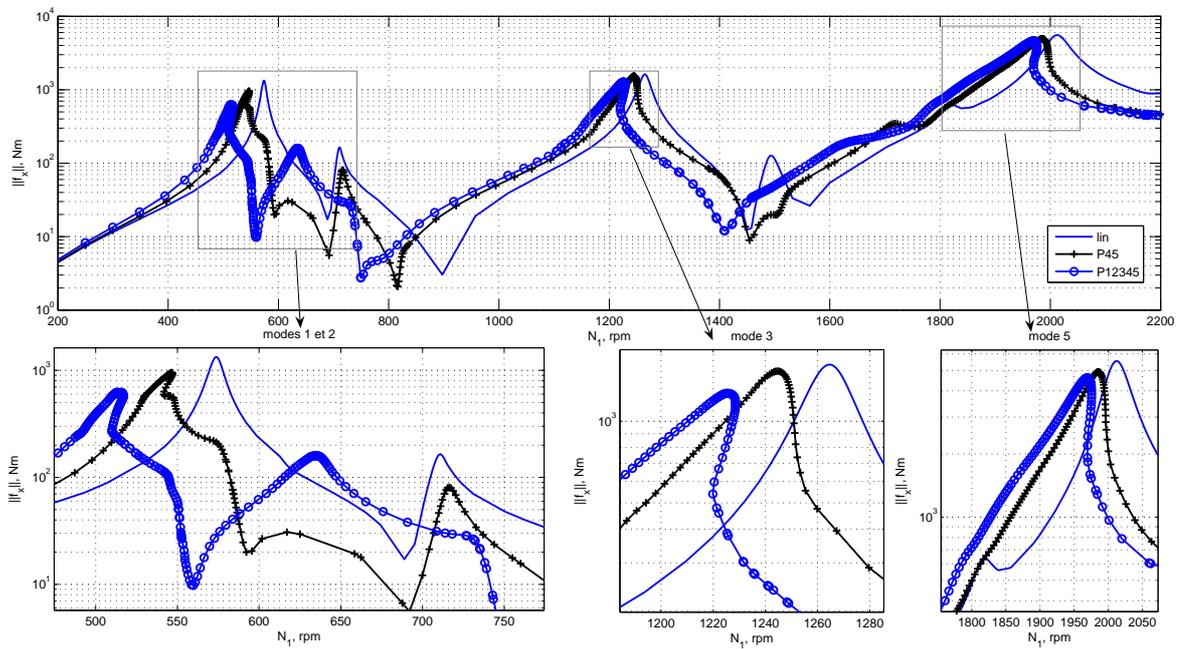
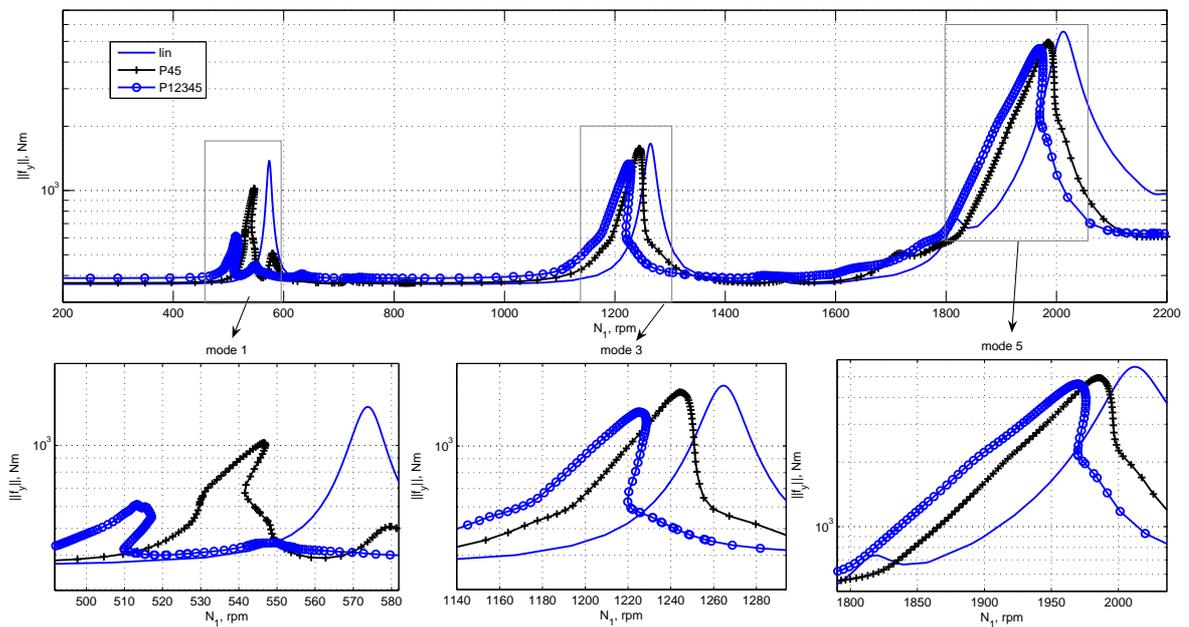


FIG. 5.17 – Réponses en déplacement dans le plan horizontal et vertical au noeud interarbre dans le cas avec jeux dans tous les roulements (P12345).

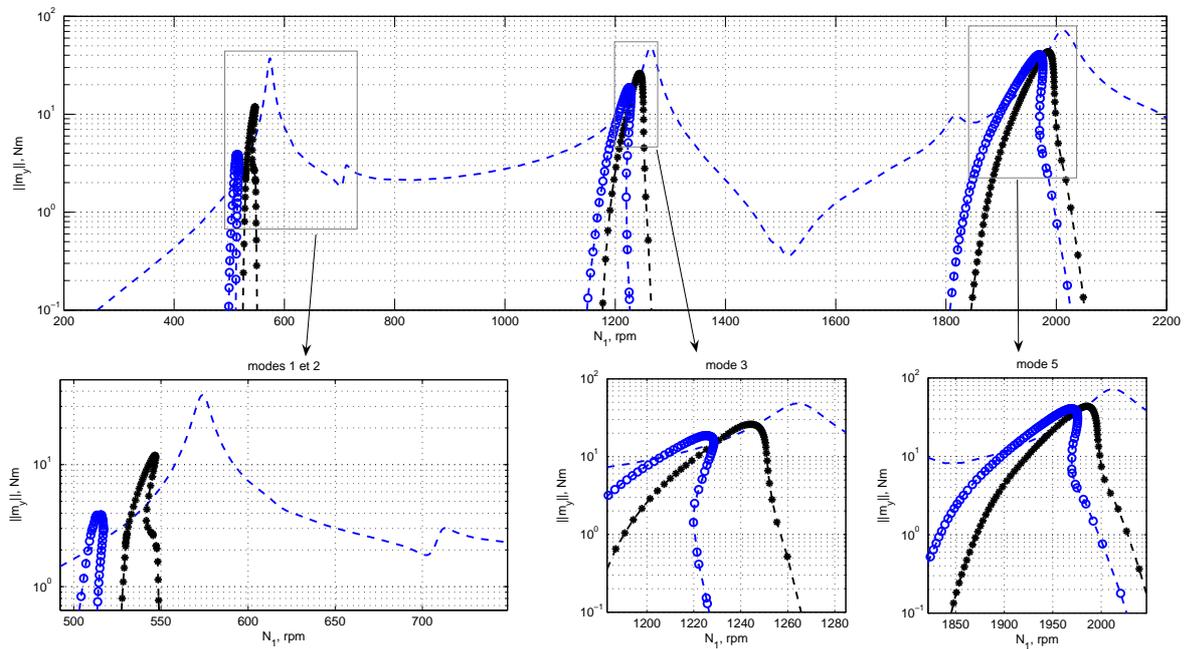


(a) Réactions dans le plan horizontal

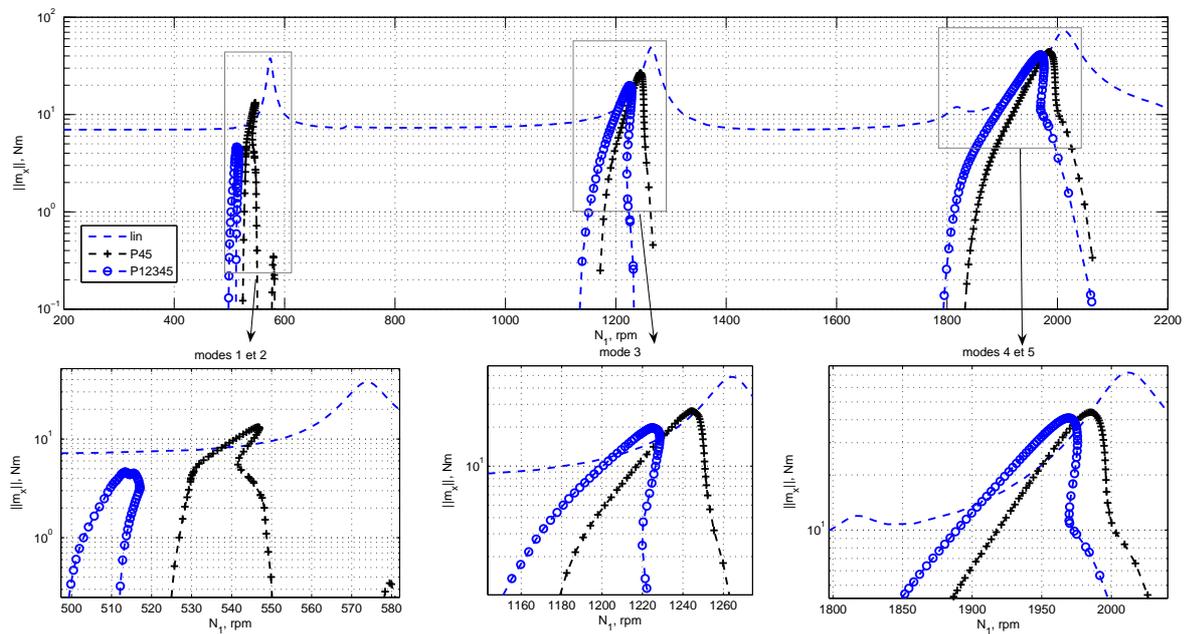


(b) Réactions dans le plan vertical

FIG. 5.18 – Influence des jeux de roulement : réactions dans le roulement interarbre. (*lin* – cas sans jeux de roulements, *P45* – cas avec jeux dans deux roulements, *P12345* – cas avec jeux dans tous les roulements)



(a) Moments dans le plan horizontal



(b) Moments dans le plan vertical

FIG. 5.19 – Influence des jeux de roulement : moments dans le roulement interarbre. (*lin* – cas sans jeux de roulements, *P45* – cas avec jeux dans deux roulements, *P12345* – cas avec jeux dans tous les roulements)

système sont bas et étalés. Les vitesses critiques, correspondant à ces modes sont également d'autant plus basses qu'il y a de jeux de roulements. Cela traduit un changement de comportement de type "mollissant", dû à l'affaiblissement des liaisons à cause des jeux. En même temps, la perturbation apportée à la réponse du système a aussi un caractère "raidissant" qui se traduit par l'inclinaison des pics vers la droite (rattrapage des jeux lorsque les niveaux augmentent sur les résonances). Ce changement peut aller jusqu'à introduire un retournement de la courbe de réponse.

L'introduction des jeux dans les roulements d'un rotor horizontal entraîne une dissymétrisation du système : à cause de la gravité, l'équilibre statique du système est excentré de manière analogue à celle de la figure 2.3. Nous avons ainsi une raideur de roulements anisotrope. Cela cause des réponses à balourd non seulement sur les vitesses critiques directes, mais aussi rétrogrades, comme mentionné dans la section 1.3 (figure 1.13).

La présence des jeux affecte la réponse différents de manière différente selon les modes. Les pics des modes 1 et 3 manifestent tous les deux une évolution entre le modèle sans jeux et celui avec jeux dans deux roulements (P4 et P5). Ces deux modes montrent une évolution aussi importante lorsqu'on passe du modèle avec jeux dans deux roulements à celui avec jeux dans tous les roulements. Cela s'explique par les déformées de ces modes, présentant des fortes amplitudes aussi bien sur les roulements P4 et P5 que sur les autres (par exemple, le mode 3 sollicite fortement le roulement du P3).

On constate que la dynamique du mode fan (mode 2) n'est pas modifiée par la présence des jeux dans les roulements P4 et P5 par rapport au cas linéaire. Par contre la configuration P12345 conduit à un glissement important de ce mode de  $N_1=720$  tr/min à  $N_1=630$  tr/min, ce qui indique le rôle important des jeux des roulements P1 et P2 sur ce mode.

De même, le mode 5 a pratiquement la même réponse sur les deux modèles à jeux. Cependant, cette réponse est différente de celle du modèle sans jeux. Cela vient d'une forte implication des roulements P4 et P5 sur ce mode, tandis que les roulements P1, P2 et P3 ne sont pas chargés de manière très importante.

La réponse du mode 4 s'annule pratiquement au plan interarbre.

On peut observer sur le mode 1 une particularité de fonctionnement en contra-rotation. C'est le seul mode excité par les deux rotors dans la plage de fonctionnement. Sur sa réponse au rotor HP, on remarque que la vitesse critique directe de ce mode ( $\approx 500$  tr/min) est inférieure à celle rétrograde ( $\approx 550$  tr/min), tandis que c'est le contraire pour la réponse au mode BP ( $\approx 1700$  et  $\approx 1300$  tr/min respectivement). C'est un phénomène caractéristique de la contra-rotation : le sens de la précession directe n'est pas identique entre les deux rotors.

Les tendances observées sur la réponse en déplacement peuvent être retrouvées sur les tracés de réponse en force et en moment dans le roulement interarbre P4 (figures 5.18 et 5.19). On remarque notamment une anisotropie de la réponse en force, ainsi que le fait qu'en présence des jeux les moments transmis par le palier interarbre sont non-nuls seulement à proximité des résonances. Dans le plan du roulement interarbre, cette situation est observée pour les modes 1, 3 et 5 excités par le rotor 2 (HP), figure 5.19.

### 5.6.2.3 Influence du mésalignement en contra-rotation

Afin d'étudier l'influence d'un mésalignement de la machine sur son comportement vibratoire en présence de non-linéarité, nous avons introduit un défaut d'alignement de 1 mm verticalement et horizontalement au niveau du palier 5. Son impact sur le modèle avec deux roulements non-linéaires à jeux est donné sur la figure 5.20 (déplacements horizontal au plan du P4). On peut le comparer avec celui du modèle avec tous les roulements non-linéaires (figure 5.21, déplacements).

De manière générale, l'effet du mésalignement peut être caractérisé comme "raidissant" dans les configurations étudiées : les vitesses critiques ainsi que les amplitudes de réponse du système mésaligné sont supérieures à celles du système aligné. Le mode dont la réponse est la plus sensible au mésalignement introduit est le mode SP5 (*a contrario* comme on peut voir sur l'exemple du mode 3 en figure 5.21, le pic de résonance de ce mode reste inchangé par le mésalignement). Cet effet est surtout visible sur le modèle avec jeux dans tous les roulements, figure 5.21. En particulier, le mésalignement introduit ici, induit une modification de 2 à 3% sur la vitesse critique du premier mode (SP5).

On peut donc constater que le modèle est d'autant plus sensible au mésalignement que le nombre de jeux est élevé. Comme on peut remarquer sur le changement de la réponse au premier mode excité par les rotors HP et BP, le mésalignement horizontal engendre une variation plus importante de vitesses critiques que celui vertical.

En ce qui concerne l'apparition des réponses à  $2X$  [Ben02], nous avons pu observer qu'elles restaient, pour notre cas test, en deçà de  $10 \mu\text{m}$ .

## Conclusion

L'analyse multi-fréquentielle représente une généralisation de l'analyse périodique. Une des notions clés de cette généralisation consiste à introduire un domaine temporel multi-dimensionnel. Une généralisation de l'application de Poincaré permet d'introduire une démarche d'étude de stabilité analogue à celle basée sur la théorie de Floquet.

Plusieurs exemples permettent d'illustrer les développements de ce chapitre et de valider la méthode numérique mise en œuvre. Comme dans le cas de l'oscillateur de Duffing sous excitation quasi-périodique, la démarche de calcul de la Jacobienne par FFT est plus intéressante, notamment quand le calcul est restreint aux harmoniques basses. L'étude de stabilité par la méthode proposée est validée par comparaison avec un calcul par balance harmonique conventionnelle, ainsi que par une comparaison avec l'intégration temporelle. L'exemple de deux oscillateurs couplés par une non-linéarité cubique montre la complexité de la réponse dans le cas où l'excitation harmonique est multi-fréquentielle.

Enfin, l'application de la méthode développée au modèle du banc bi-rotors avec des roulements non-linéaires à jeux a montré les phénomènes caractéristiques suivants :

- Le système non-linéaire avec des roulements sans jeux a un comportement très proche de celui linéaire malgré la présence des effets Hertiens.
- Les jeux de roulements en présence de gravité, engendrent des réponses non-axisymétriques, notamment, les modes rétrogrades sont présents et de fait, les mouvements sont non-circulaires.

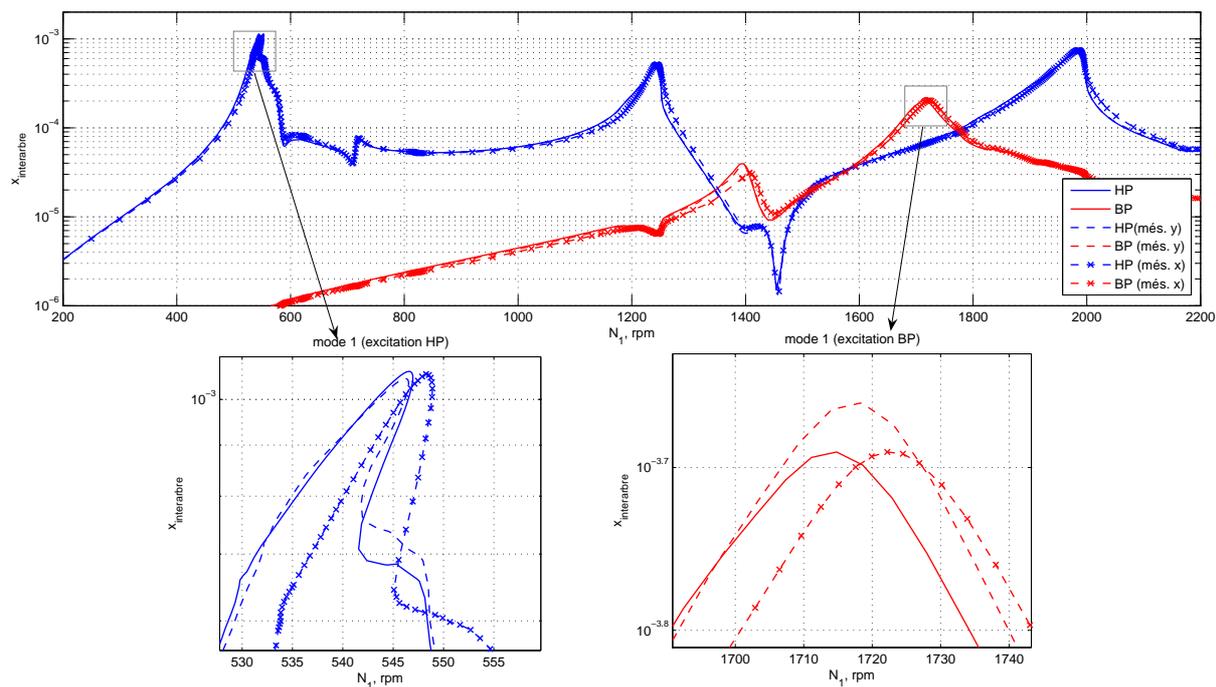


FIG. 5.20 – Influence du mésalignement transversal 1 mm sur P5 (modèle avec P4 et P5 non-linéaires avec jeux) : déplacement horizontal du noeud interarbre

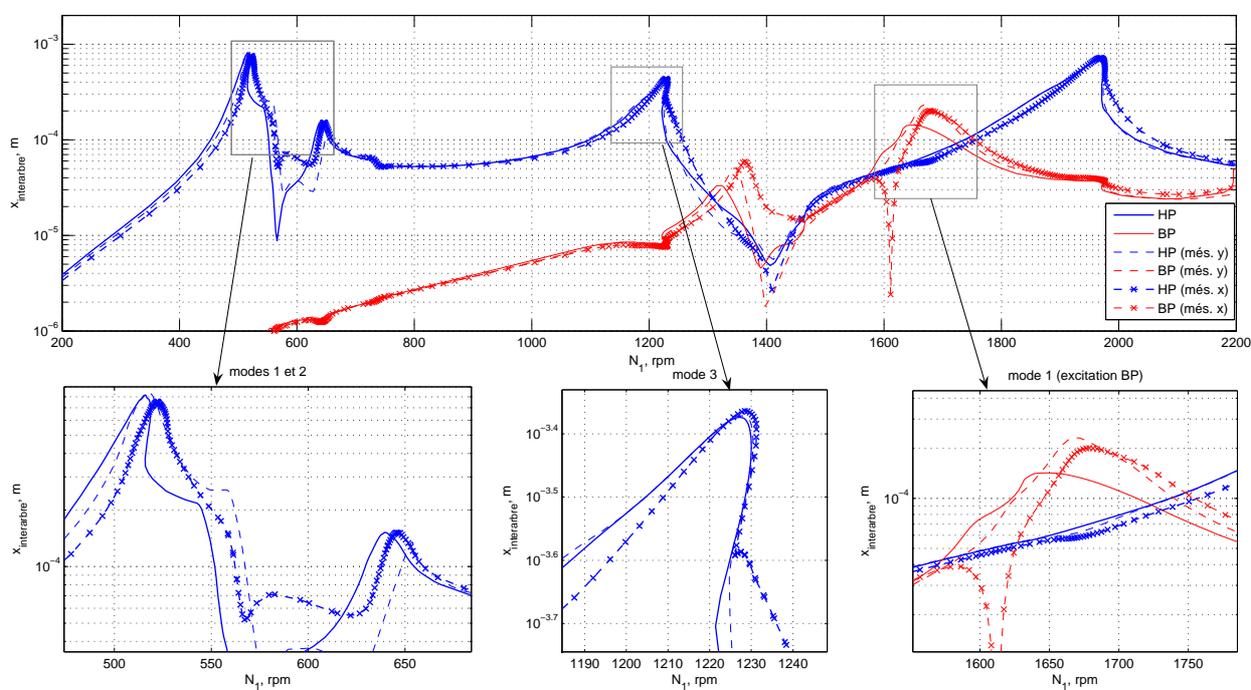


FIG. 5.21 – Influence du mésalignement transversal 1 mm sur P5 (modèle avec tous les roulements non-linéaires avec jeux) : déplacement horizontal du noeud interarbre

- Le mésalignement des support-paliers entraîne des efforts statiques dans les supports, mais aussi peut modifier des vitesses critiques.
- La réponse non-linéaire est principalement limitée à la première harmonique de chacune des excitations.

## Chapitre 6

# Banc Dynamique D'Ensemble bi-rotors. Etudes numériques et expérimentales

Le banc d'essai DDE (Dynamique D'Ensemble) bi-rotors a été développé et construit à l'ECL au sein de l'équipe D2S en collaboration avec l'unité Dynamique d'ensemble de *Snecma Moteurs* (groupe *Safran*). Ce projet prend la suite des thèses de Demailly [Dem03] et de Villa [Vil05].

Actuellement, les rotors des moteurs d'avions sont conçus de manière à ce que leurs modes de flexion soient hors de la plage de fonctionnement, ce qui implique un fonctionnement sous-critique. A présent, l'un des enjeux majeurs est la possibilité d'utiliser les rotors dans des régimes surcritiques, ce qui permettrait de les rendre plus légers. L'objectif de ce banc est donc de préparer et valider de nouvelles solutions technologiques permettant d'obtenir un gain en terme de poids pour des moteurs bi-rotatifs.

Ainsi, deux types de configurations vont être étudiées dans cette thèse. La première propose de se pencher sur la dynamique des bi-rotors contrarotatifs et de valider leur utilisation en service. En effet, la possibilité d'avoir des arbres contra-rotatifs permettrait de supprimer un étage de redresseur, ce qui contribuerait à un allègement du stator. La deuxième configuration s'intéresse plus particulièrement à la présence d'un arbre Basse Pression surcritique ce qui correspond à un allègement de ce dernier.

Pour ce faire, la démarche qui a été adoptée est la suivante : dans un premier temps, la conception d'un banc représentatif de la dynamique d'ensemble d'un moteur bi-rotatif type a été réalisée. Cette dernière a été menée afin de pouvoir procéder, de façon simple, aux modifications nécessaires à la réalisation des différents essais correspondant aux diverses solutions technologiques envisagées (bi-rotors contrarotatifs et bi-rotors contrarotatifs avec abaissement d'un mode d'arbre Basse Pression).

Ainsi, ce chapitre présente dans un premier temps le banc d'essai DDE bi-rotors en tant que système partiellement représentatif de la dynamique d'ensemble d'un moteur d'avion bi-rotors à travers sa conception, son instrumentation et les méthodes expérimentales associées. Dans une deuxième partie, divers essais expérimentaux sont présentés et les solutions technologiques proposées sont discutées et validées.

$N$	$DDE$	$moteur$
1	Disque 1	Fan + compresseur BP
2	Palier 1	Palier 1
3	Palier 2	Palier 2
4	Disque 2	Turbine BP
5	Palier 3	Palier 5
6	Palier 4	Palier 4
7	Palier 5	Palier 3

TAB. 6.1 – Correspondance entre les éléments banc Dynamique D'Ensemble birotor – moteur

## 6.1 Conception du banc Dynamique D'Ensemble bi-rotors

Comme explicité précédemment, la motivation principale du banc d'essai DDE bi-rotors est d'obtenir un démonstrateur partiel de la dynamique d'ensemble d'un turboréacteur bi-rotors (approximativement représentatif en termes de situation modale et de répartition de masse) et d'étudier son évolution vers deux configurations (contra-rotation et abaissement du mode d'arbre) qui permettent d'obtenir un gain en terme de masse globale.

Ainsi, on cherche à représenter un **turboréacteur bi-rotors à 5 paliers** (voir schéma sur la figure 6.1, les paliers étant notés P1 à P5 dans l'ordre des positions axiales). Le rotor Basse Pression compte 3 paliers :

- **P1** (billes)  $\approx$  Soufflante (Fan),
- **P2** (rouleaux)  $\approx$  Compresseur Basse Pression
- **P5** (rouleaux)  $\approx$  Turbine Basse Pression

tandis que le rotor Haute Pression compte 2 paliers dont un correspond à l'interarbre :

- **P3** (billes)  $\approx$  Compresseur Haute Pression,
- **P4** (rouleaux)  $\approx$  Turbine Haute Pression, *interarbre*.

Les paliers fixes sont montés dans des supports-paliers, attachés au carter avant (P1), intermédiaire (P2, P3) et arrière (P5). Le rotor BP est constitué des parties *fan*, *compresseur BP*, *arbre turbine BP*, *turbine BP*. Le rotor HP est constitué principalement de deux parties : le *compresseur HP* et la *turbine HP*, ses deux extrémités étant reliées par un tube intérieur assurant sa rigidité axiale.

A partir des éléments principaux décrits précédemment, le banc d'essai représente sous une forme “dépliée” la composition bi-rotors coaxial avec le roulement interarbre au milieu, comme indiqué en figure 6.3.

A partir de la conception réalisée lors du dimensionnement du banc monorotor Dynamique D'Ensemble (thèses de Demailly [Dem03] et Villa [Vil05]), les supports-paliers sont à raideur variable (voir figure 6.2)

Les rotors sont réduits à des arbres pleins (poutres) et des disques (inerties concentrées), comme indiqué dans le tableau 6.1. Pour la clarté de l'exposé, on sera souvent amené à appeler les éléments du banc comme leurs homologues sur le moteur d'avion.

Dans un premier temps, nous allons donc concevoir le banc DDE bi-rotors afin de reproduire globalement la situation modale d'un moteur d'avion. Le banc d'essai compte donc uniquement les modes des différentes structures conservées lors du passage du moteur au banc d'essai DDE

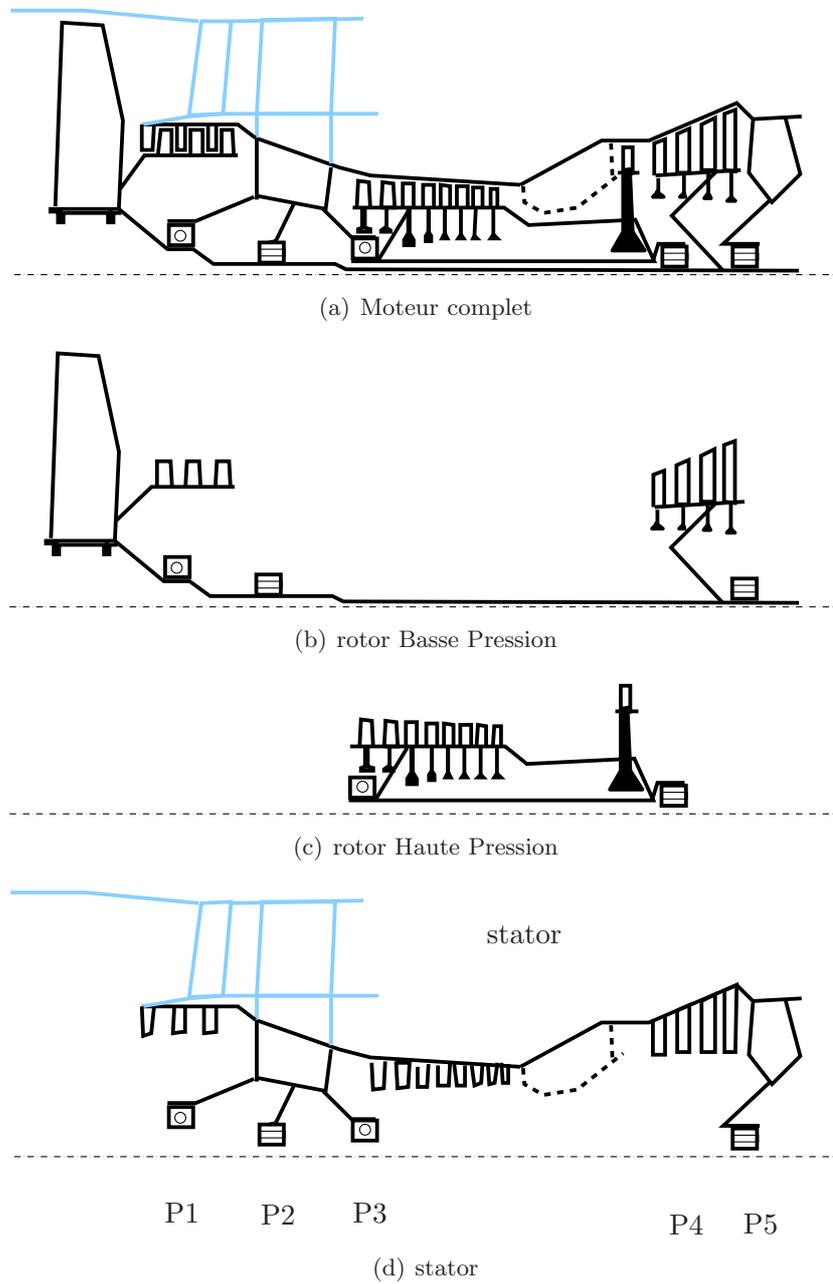
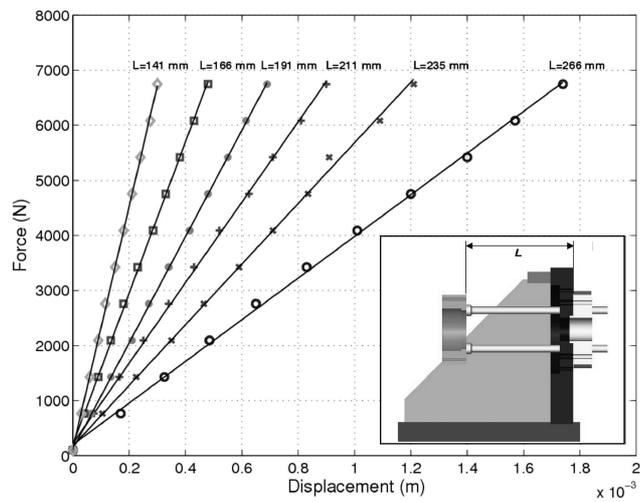


FIG. 6.1 – Moteur complet et définition des sous-ensembles rotor HP, BP et stator

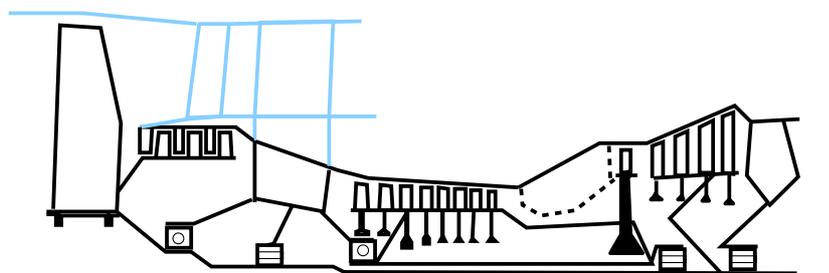


(a) Configuration des essais de raideur

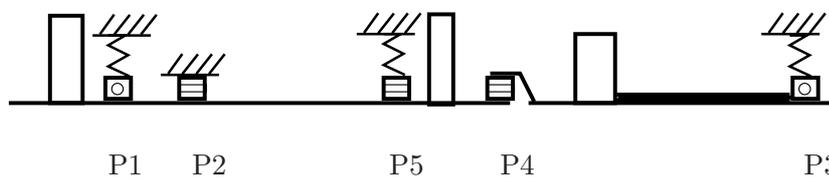


(b) Evolution de la caractéristique force-déplacement en fonction de la longueur des barres

FIG. 6.2 – Support-paliers utilisés dans le banc DDE [Vil05]



(a) Moteur d'avion



P1

P2

P5

P4

P3

rotor BP

rotor HP

(b) Moteur d'avion

FIG. 6.3 – Evolution topologique moteur → banc d'essai bi-rotors

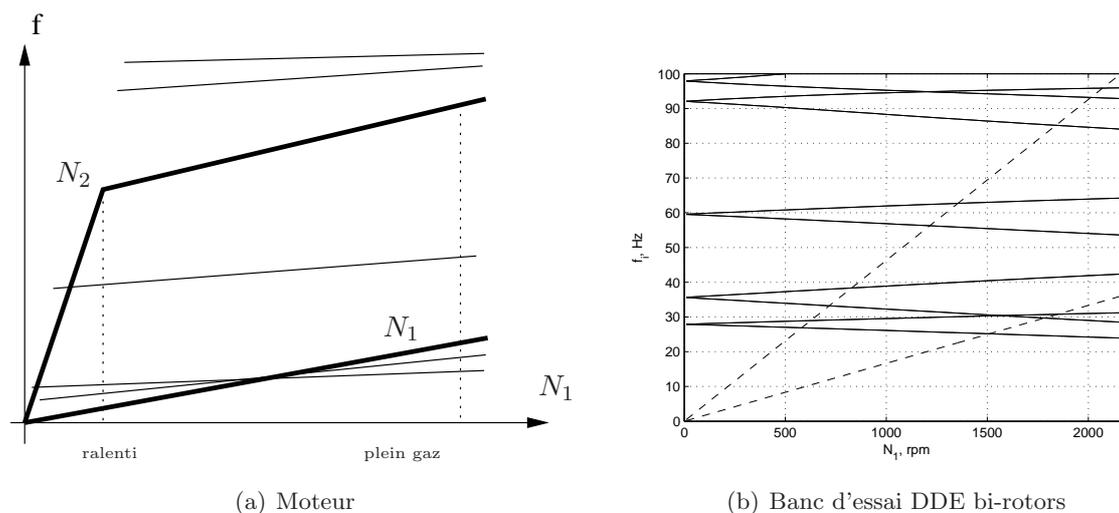


FIG. 6.4 – Evolution de la situation dynamique – comparaison des digrammes de Campbell

bi-rotors. Il s'agit essentiellement de modes caractérisés par des déplacements importants des paliers P1, P5, P3 (et donc de la déformation des supports-paliers) et P4, ce qui correspond à un mode de vibrations couplées (par rapport aux rotors Haute Pression – Basse Pression), ainsi que le mode d'arbre Basse Pression. Leur placement sur le diagramme de Campbell du moteur d'avion de départ est donné en figure 6.4(a).

Un point clé du dimensionnement du banc d'essai DDE bi-rotors consiste dans le choix du rapport de vitesse entre les deux rotors Basse et Haute Pression. Ainsi, il a été choisi que les vitesses de rotation des deux rotors Basse et Haute Pression, restent proportionnelles tout au long de la montée en vitesse, avec un **rapport de 2.778** qui correspond au rapport de vitesse du moteur d'avion à la limite supérieure de sa plage de fonctionnement.

Le dimensionnement global du banc d'essai bi-rotors est alors effectué de manière à assurer la correspondance de son comportement modal avec celui d'un moteur d'avion réel (à l'échelle de la plage de fonctionnement du banc d'essai, comprise entre 0 et 6000 tr/min pour le rotor HP et 0 et 2200 tr/min pour le rotor BP) y compris pour les déformées (répartition de l'énergie de déformation). Ce dimensionnement du banc vis à vis du placement modal est réalisé en agissant sur les disques (masse, données géométriques), les géométries des arbres (longueur et section principalement) et les raideurs des supports-paliers.

A ce niveau de l'étude, il est important de noter que le banc d'essai ne peut permettre une reproduction exacte du comportement modal d'un moteur d'avion mais correspond à une vision simplifiée dépliée reproduisant le plus fidèlement possible la dynamique du moteur initial.

La représentativité du banc DDE bi-rotors en co-rotation étant établie, l'abaissement du mode d'arbre Basse Pression est réalisé par l'ajout d'une masse au milieu de l'arbre BP (positionnement de deux disques sur le rotor Basse Pression, comme illustré sur la figure 6.8(b)).

Le banc d'essai ainsi dimensionné permettra de réaliser les études expérimentales suivantes :

- essais en **co-rotation** sur la **configuration initiale** du banc. Cette étape a pour principal objectif de valider le dimensionnement et la conception réalisés ;
- essais en **contra-rotation** sur la même **configuration initiale**. Cette étape permet de tester la première solution technologique proposée dans cette thèse ;

- essais en **contra-rotation** avec **abaissement du mode d'arbre** Basse Pression. Cette dernière étape validera la deuxième solution technologique proposée afin d'obtenir un gain en terme de masse sur un moteur d'avion.

Par la suite, on parlera de configuration initiale pour les essais en co- et contra-rotation sans masse ajoutée et de configuration modifiée avec masse ajoutée (abaissement du mode d'arbre BP). De plus, on sera amené à appeler les différents modes par les parties structurales concernées par ces derniers : “*mode SP5*”, “*mode Fan*”, “*mode SP3*”, “*mode couplé*”, “*mode d'arbre BP*”.

Afin de réaliser le dimensionnement du banc d'essai, un logiciel éléments finis a été développé sous MATLAB, permettant la recherche de vitesses critiques, des déformées modales et des répartitions énergétiques associées, ainsi que le tracé des diagrammes de Campbell et le calcul de réponses à balourd. Les roulements ont été modélisés en tant que liaisons radiales à raideur linéaire ( $5 \times 10^8$  N/m pour les roulements à billes et  $1 \times 10^9$  N/m pour les roulements à rouleaux).

## 6.2 Description et caractérisation dynamique du banc

Dans cette partie, nous allons décrire dans un premier temps le banc d'essai DDE bi-rotors ainsi que son comportement modal. L'instrumentation du banc sera ensuite brièvement présentée.

Le banc DDE comporte un système mécanique tournant, entraîné par des moteurs électriques, de l'instrumentation de mesure, des moyens de surveillance et de commande, ainsi que des dispositifs de sécurité.

### 6.2.1 Système mécanique

Une vue générale du banc est donnée en figure 6.7. Le système tournant étudié est essentiellement composé de deux sous-ensembles, associés aux deux rotors. Le rotor 1, dit BP, est constitué d'un arbre avec deux disques représentant les inerties de l'ensemble soufflante+compresseur BP et de la turbine BP. Il est supporté par trois paliers (sur la figure 6.7 : BP 1, 2 et 3, correspondant aux paliers 1, 2 et 5 du moteur) et entraîné par un moteur électrique. En configuration modifiée, on ajoute une masse au milieu de l'arbre (figure 6.8(b)).

Le rotor 2, dit HP (figure 6.8(c)), comporte un arbre plus massif (l'inertie du compresseur HP étant répartie axialement) et un disque représentant l'inertie de la turbine HP. Ce rotor est entraîné par un moteur électrique indépendant de celui du rotor BP. Il est supporté par un palier fixe (sur la figure 6.7 : HP 1, correspondant au palier 3 du moteur) et un palier interarbre correspondant au palier 4 du moteur. Le détail de la description du banc est donné dans les tableaux 6.2 et 6.3.

### 6.2.2 Comportement dynamique

Les diagrammes de Campbell caractérisant les trois configurations envisagées sont présentés en figure 6.5. Nous rappelons que ces **trois configurations** correspondent aux configurations initiales en co- et contra-rotation et à la configuration modifiée en contra-rotation.

<i>objet</i>	<i>caractéristique</i>	<i>unité</i>	<i>valeur</i>	<i>z, m</i>
Joint d'accouplement (moteur)	$m$	kg	2,1	-1,685
	$k_{rC}$	N/m	43000	
	$k_{tC}$	N m/rad	85,5	
Arbre	$\phi$	mm	37	
Disque 1	$m$	kg	47,7 + 2	-1.497
	$I_d$	kg m <sup>2</sup>	0,607	
	$I_p$	kg m <sup>2</sup>	1,203	
Arbre	$\phi$	mm	40	
Support +	$k_{rS}$	N/m	1e7	-1.371
Palier 1 (SP1)	$k_{tS}$	N m/rad	4e6	
	roulement	type	6014 2Z	
	$m$	kg	8,622	
Arbre	$\phi$	mm	40	
Palier 2 (P2)	roulement	type	NU 1014 ML	-1.182
	$m$	kg	1,622	
Arbre	$\phi$	mm	40	
Support +	$k_{rS}$	N/m	1.5e7	-0.200
Palier 3 (SP5)	$k_{tS}$	N m/rad	6e4	
	roulement	type	NU 1014 ML	
	$m$	kg	8,622	
Arbre	$\phi$	mm	40	
Disque 1	$m$	kg	32.4 + 2	-0.100
	$I_d$	kg m <sup>2</sup>	0,4037	
	$I_p$	kg m <sup>2</sup>	0.803	
Arbre	$\phi$	mm	37	
Palier 4 (P4)	roulement	type	NU 2206 ECP	
	$m$	kg	0,5	

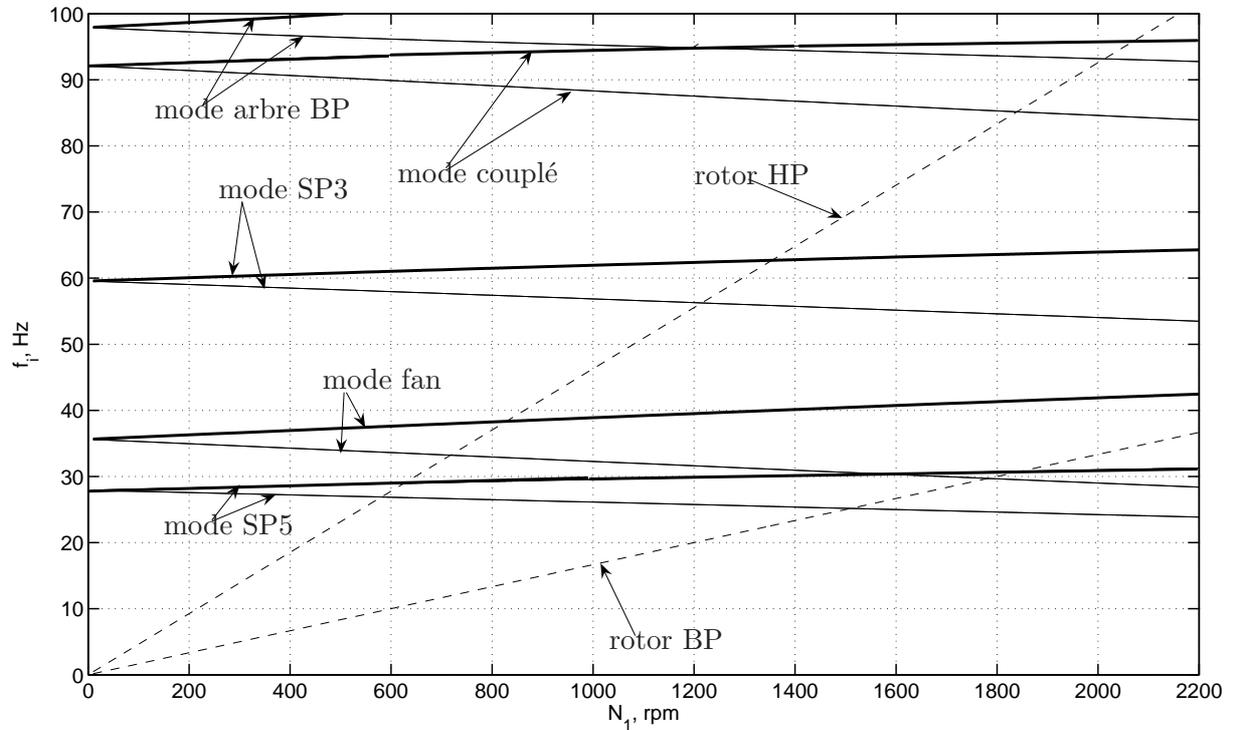
TAB. 6.2 – Paramètres du rotor BP

Afin de permettre une compréhension aisée de l'appellation des différents modes, leur placement vis à vis des vitesses critiques est indiqué sur la figure 6.5(a). Les déformées associées sont données en figure 6.6.

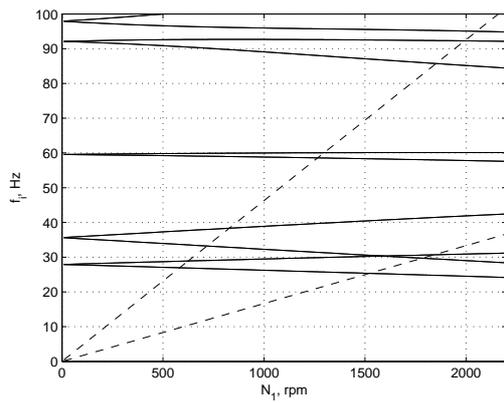
Il est bon de remarquer que la contra-rotation se traduit par une plus faible évolution des fréquences propres avec le régime (notamment en ce qui concerne les modes 3 (SP3) et 4 (arbre BP)) et que le changement entre la configuration initiale et la configuration modifiée (ajout d'une masse au milieu du rotor BP) se traduit par l'apparition d'un quatrième mode dans la plage de fonctionnement, les autres modes restant faiblement modifiés. Ceci correspond donc bien à l'évolution souhaitée de la situation modale du banc DDE bi-rotors.

Concernant les **déformées modales**, ces dernières ne changent pas de manière significative entre les configurations initiale et modifiée du banc, ni avec le sens de rotation (co- ou contra-rotation).

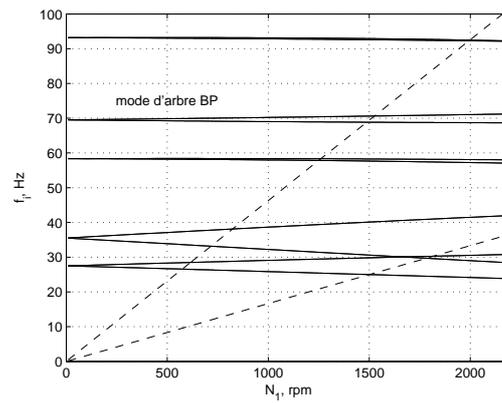
Les différents modes observés peuvent être définis comme suit :



(a) Configuration initiale, co-rotation



(b) Configuration initiale, contra-rotation



(c) Configuration modifiée, contra-rotation

FIG. 6.5 – Diagrammes de Campbell de différentes configurations du banc DDE

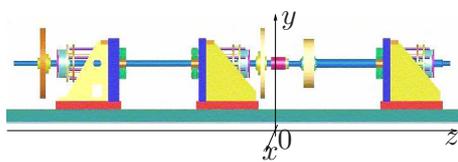
<i>objet</i>	<i>caractéristique</i>	<i>unité</i>	<i>valeur</i>	<i>z, m</i>
Inter arbre (HP)	$m$	kg	4	
Arbre	$\phi$	mm	36	
Disque 3	$m$	kg	38 + 2	0.245
	$I_d$	kg m <sup>2</sup>	0,24	
	$I_p$	kg m <sup>2</sup>	0,465	
Arbre	$\phi$	mm	55	
Support +	$k_{rS}$	N/m	3e6	0.945
Palier 5 (SP3)	$k_{tS}$	N m/rad	1.2e5	
	roulement	type	6014 2Z	
	$m$	kg	8,622	
Arbre	$\phi$	mm	50	
Joint d'accouplement (moteur)	$m$	kg	2,1	1.044
	$k_{rC}$	N/m	43000	
	$k_{tC}$	N m/rad	85,5	

TAB. 6.3 – Paramètres du rotor BP

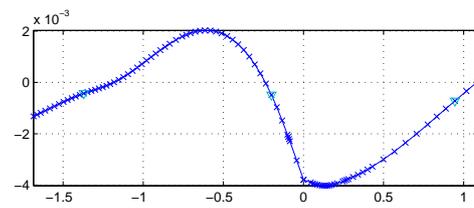
1. Le *mode SP5* (correspondant au mode “suspension turbine BP”, figure 6.6(b), du fait qu’une grande partie de l’énergie de déformation est dans le support-palier 5) apparaît comme le mode 1 dans toutes les configurations. Ce mode est excité par le rotor HP et par le rotor BP sur ses deux branches (directe et rétrograde) ;
2. Le *mode fan* (dit “suspension fan”, figure 6.6(c)), est associé essentiellement à la déformation du support-palier 1. C’est le mode 2 du banc. Il est excité sur ses deux branches par le rotor HP et, sur sa branche rétrograde, seulement par le rotor BP ;
3. Le *mode SP3* (correspondant au mode “suspension compresseur HP”, figure 6.6(d)), fait surtout travailler le support-palier 3. Il est excité par le balourd HP dans toutes les configurations ;
4. Le *mode couplé HP-BP* (figure 6.6(e)) correspondrait au mode de suspension turbine HP, mais, suite à la souplesse de support par le rotor BP, il engendre la déformation de l’ensemble de la machine, notamment l’arrière du moteur. Ce mode correspond au quatrième mode en configuration initiale et au cinquième en configuration modifiée. Il se situe en haut de la plage de fonctionnement du rotor HP. Ce mode désignera la limite supérieure de la plage balayée lors des essais.
5. Le *mode d’arbre BP* (figure 6.6(f)) implique une déformation de l’arbre BP, et notamment de sa zone souple qui relie le compresseur et la turbine BP. Situé au-dessus du mode couplé dans la configuration initiale, ce mode descend dans la plage de fonctionnement et devient le quatrième mode en configuration modifiée. Ses branches directe et rétrograde sont excitées par le balourd HP.

### 6.2.3 Instrumentation de mesure et équipements

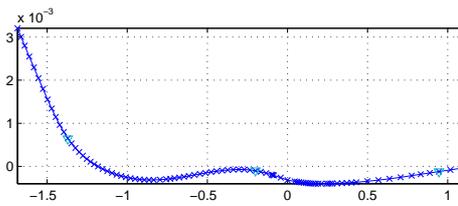
Le banc DDE est instrumenté de manière à relever des mesures de **déplacements** transversaux des sections d’arbres, d’**accélération**s transversales des supports-paliers, de **température**



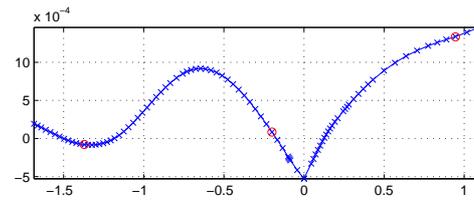
(a) Rappel de la géométrie du banc



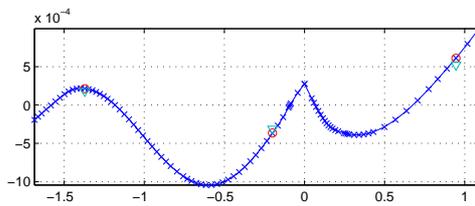
(b) Mode SP5



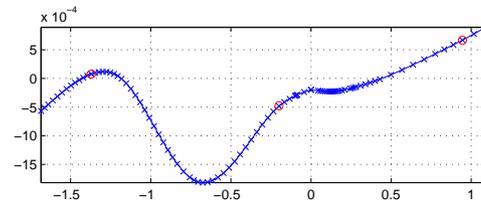
(c) Mode fan



(d) Mode SP3



(e) Mode couplé HP-BP



(f) Mode d'arbre BP

FIG. 6.6 – Modes propres du banc DDE (configuration initiale)

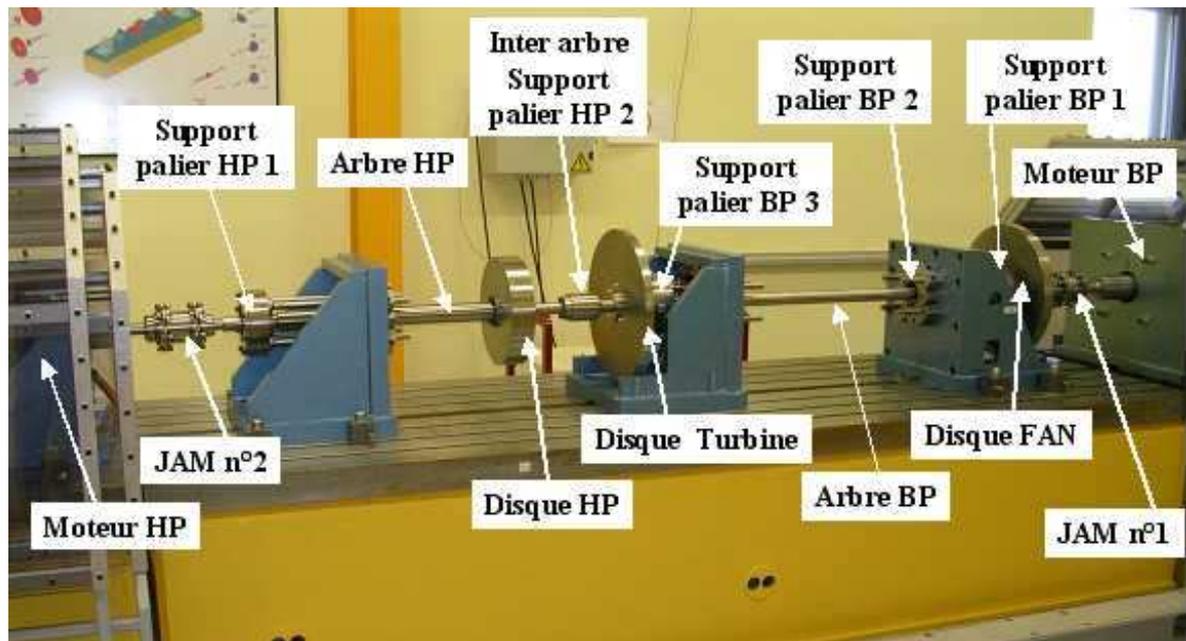


FIG. 6.7 – L'ensemble du banc

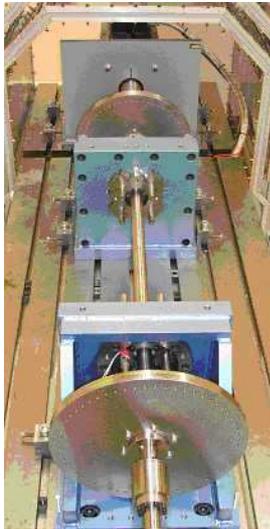
des roulements, ainsi que de **tachimétrie** de la rotation des arbres. Les plans de mesure de déplacements et d'accélération ainsi que les capteurs sont indiqués en figure 6.9.

La **chaîne de mesure** comporte 16 capteurs de déplacement (2 par plan de mesure) : 8 capteurs *KDM-8200-2S1* sur le rotor BP (plans 1, 3, 4, 5), 8 capteurs *KDM-8200-12U* sur le rotor HP (plans 7, 8, 9, 10). Les 6 accéléromètres présents sont placés sur les supports-paliers BP1, BP3 et HP1 (respectivement, plans 2, 6 et 11). La figure 6.10(a) montre les capteurs des plans 5, 6, 7 et 8 vus de dessus. Des mesures de température sont assurées dans le but de surveiller les conditions de fonctionnement des roulements.

Les mesures vibratoires sont centralisées sur un frontal d'acquisition HP VXI puis acheminées sur un PC équipé du logiciel d'acquisition IDEAS-Test. Cet ordinateur, ainsi que le pupitre de commande et les oscilloscopes de surveillance, sont placés dans une salle de commande d'où les essais sont menés (figure 6.11). Le fonctionnement du banc est conduit par la rotation des deux rotors qui peut être commandée à la main à partir du pupitre de commande ou automatiquement à l'aide d'un boîtier de générateur de rampe qui permet d'obtenir une loi linéaire de montée et de descente en vitesse de rotation sur un ou deux rotors simultanément.

Des **dispositifs de sécurité** sont mis en place, tels que le verrouillage de la mise en route, des boutons d'arrêt d'urgence et un capot protecteur. La surveillance des niveaux vibratoires est faite en direct pendant le fonctionnement de la machine à l'aide des oscilloscopes de la salle de commande. Des calculs des niveaux limites de sécurité ont permis de prédire les endroits les plus sensibles et les déplacements au niveau des plans de mesure. La température des roulements est également surveillée.

L'**alignement** est réalisé à l'aide d'un laser (système *Easy Laser*) à toutes les jonctions entre sous-ensembles tournants, c'est-à-dire au niveau des joints d'accouplement et du roulement interarbre.



(a) Rotor 1 (BP), configuration initiale



(b) Rotor 1 (BP), configuration modifiée



(c) Rotor 2 (HP)

FIG. 6.8 – Banc DDE : détails

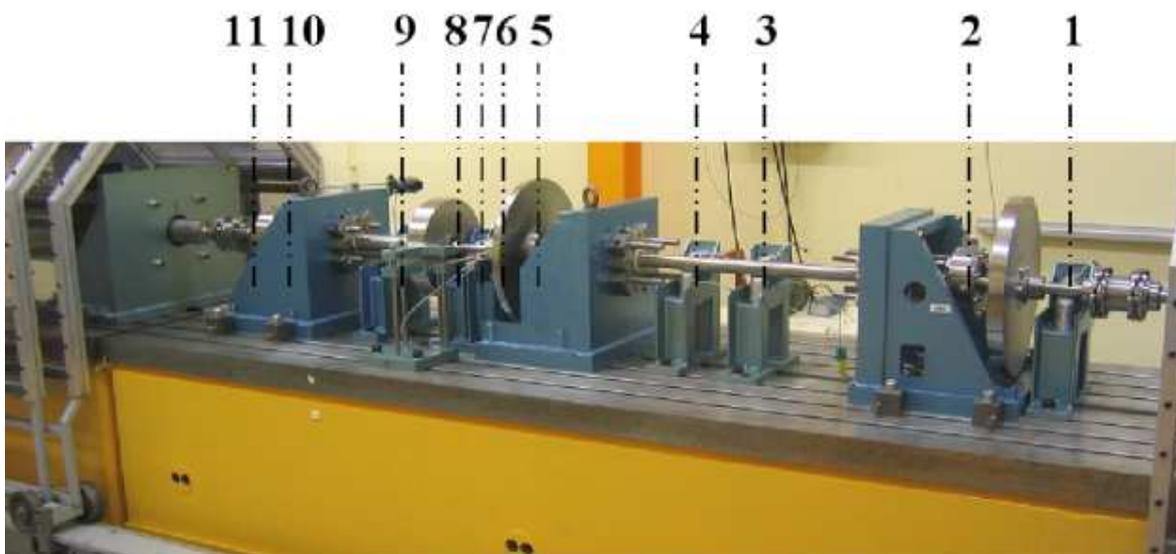
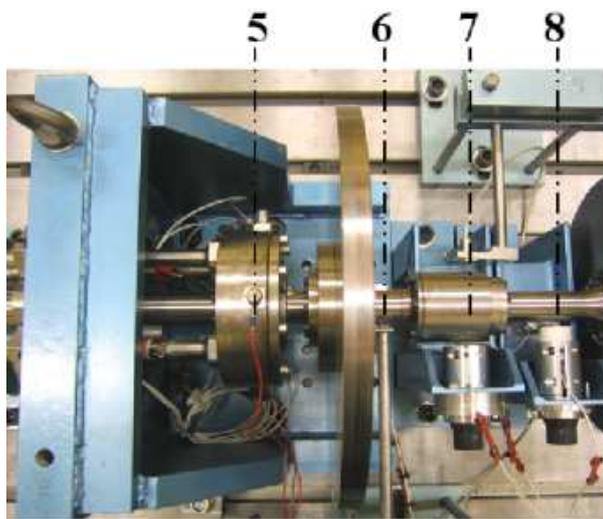


FIG. 6.9 – Instrumentation du banc



(a) Plans 5,6,7 et 8 vus de dessus

<i>No</i>	<i>Type</i>	<i>z, m</i>
1	1	-1.640
2	2	-1.410
3	1	-0.835
4	1	-0.615
5	2	-0.230
6	1	-0.085
7	1	0.020
8	1	0.115
9	1	0.430
10	1	0.775
11	2	0.930

(b) Position des plans de mesure

FIG. 6.10 – Instrumentation du banc : détails



FIG. 6.11 – Salle de contrôle

### 6.3 Techniques expérimentales

Lors des études expérimentales des vibrations des machines tournantes, les caractéristiques dynamiques sont mesurées en plusieurs plans transversaux, généralement dans deux directions orthogonales.

Les données expérimentales sont alors transformées par un traitement numérique. Un des traitements les plus utilisés est le **suivi d'ordres**<sup>1</sup> (ou suivi d'harmoniques [Max85]). Il consiste à projeter le signal mesuré  $f(t)$  sur une harmonique donnée  $k > 0$  du régime  $\omega(t)$  de rotation du rotor de la machine. On parle ainsi du signal filtré au  $k$ ème ordre :

$$g_k(t) = f_k(\omega(t))e^{ik\omega(t)t}, \quad (6.1)$$

On a donc une amplitude complexe (compte tenu du déphasage)  $f_k(\omega)$  fonction de la vitesse de rotation du rotor.

Cette technique peut être implémentée de plusieurs façons [Blo03]. A l'origine, elle se fondait sur les transformées de Fourier rapides, basées sur un échantillonnage temporel à fréquence constante. Cette approche compte cependant deux inconvénients majeurs : tout d'abord, les perturbations du signal transformé par des harmoniques proches de celles observées, et un échantillonnage généralement non-synchrone avec la position angulaire du rotor qui est la véritable référence de la fréquence instantanée à filtrer. Ces problèmes sont contournés par des techniques de rééchantillonnage numérique<sup>2</sup> des données mesurées selon le signal du tachimètre. D'autres approches sont basées sur les filtres numériques, notamment celui de Vold-Kalman [GHV99].

L'intérêt de la technique est contenu dans sa définition : obtenir des composantes harmoniques de manière à mieux comprendre et interpréter le signal. Elle a tout de même certains inconvénients, dus à la variation de la fréquence porteuse et de l'amplitude du signal et des ordres suivis, ce qui entraîne des erreurs dans l'estimation de  $\omega$  et du contenu fréquentiel. Il est notamment inévitable que la hauteur des pics de résonance soit sous-estimée [Blo03].

En ce qui concerne notre étude, on cherchera à étudier des régimes de vibration établis, avec des variations de vitesse de rotation assez lentes, donc les variations d'amplitude et de fréquence ne seront pas prises en compte.

Aussi, une technique appelée **full spectrum plot**, permet de faire le lien entre les suivis d'ordre dans les directions orthogonales pour un plan de mesure. Cette représentation du mouvement mesuré a été introduite par Bently<sup>3</sup> [GM99].

Une trajectoire filtrée à une vitesse donnée  $\omega$  (c'est-à-dire issue d'un suivi d'ordre  $\pi\omega/30N$ ) est une ellipse, déterminée par les deux composantes du mouvement ( $x$  et  $y$ ) dans le plan de mesure :

$$u_{\omega_x} = u_{c\omega x} \cos \omega t + u_{s\omega x} \sin \omega t, \quad (6.2)$$

$$u_{\omega_y} = u_{c\omega y} \cos \omega t + u_{s\omega y} \sin \omega t, \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>terme anglo-saxon *order tracking*

<sup>2</sup>terme anglo-saxon *resampling*

<sup>3</sup>selon [GM99], la première référence à cette méthode date de 1993

La notation en complexe de ce mouvement donne

$$u_\omega = u_{+\omega}e^{i\omega t} + u_{-\omega}e^{-i\omega t} \quad (6.4)$$

$$u_{+\omega} = \frac{1}{2}(u_{c\omega x} - u_{s\omega y} + i(u_{c\omega y} + u_{s\omega x})); \quad (6.5)$$

$$u_{-\omega} = \frac{1}{2}(u_{c\omega x} + u_{\omega y} + i(u_{c\omega y} - u_{s\omega x})). \quad (6.6)$$

En reprenant le raisonnement de la section 1.3, on peut décomposer ce mouvement elliptique en deux précessions circulaires de sens opposés et d'amplitudes  $u_{+\omega}$  et  $u_{-\omega}$ . La comparaison des valeurs absolues de ces amplitudes

$$|u_{+\omega}| = \frac{1}{2}\sqrt{u_{\omega x}^2 + u_{\omega y}^2 + 2(u_{c\omega y}u_{s\omega x} - u_{s\omega y}u_{c\omega x})}, \quad (6.7)$$

$$|u_{-\omega}| = \frac{1}{2}\sqrt{u_{\omega x}^2 + u_{\omega y}^2 - 2(u_{c\omega y}u_{s\omega x} - u_{s\omega y}u_{c\omega x})}. \quad (6.8)$$

nous donne accès au sens de la précession résultante.

Dans les essais expérimentaux qui vont suivre, le suivi d'ordres et le full spectrum plot sont tous deux utilisés afin de pouvoir interpréter le comportement dynamique du banc DDE bi-rotors.

## 6.4 Résultats expérimentaux

Comme explicité dans les paragraphes précédents, les essais expérimentaux sont décomposés en trois étapes principales.

Les essais sur le banc DDE sont tout d'abord effectués en configuration initiale en co-rotation afin de valider la conception, et prendre en main la manipulation du banc bi-rotors. Une campagne de mesures similaires est ensuite effectuée en contra-rotation.

Enfin, une masse est ajoutée au milieu de l'arbre BP sous forme de deux petits disques (configuration modifiée). Le mode d'arbre étant ainsi abaissé, des essais en contra-rotation sont réalisés.

On s'intéressera aux évolutions du comportement dynamique du banc entre les configurations étudiées, ainsi qu'aux écarts entre les prédictions par le modèle linéaire et le comportement réel du banc.

### 6.4.1 Configuration initiale. Co-rotation

#### Conditions des essais et prévisions théoriques

Les essais de réponse à balourd (sous l'effet de **balourd résiduel**) en co-rotation sont effectués sur la configuration initiale du banc.

Le **profil type d'essai** consiste en une montée en régime à environ 5 rpm/s, puis une descente plus rapide (environ 30 rpm/s), comme vu dans la partie supérieure de la figure 6.12. La partie inférieure de cette figure donne un enregistrement brut du déplacement de l'interarbre au cours de l'essai. Les vitesses de rotation des deux rotors varient entre 0 et 2000

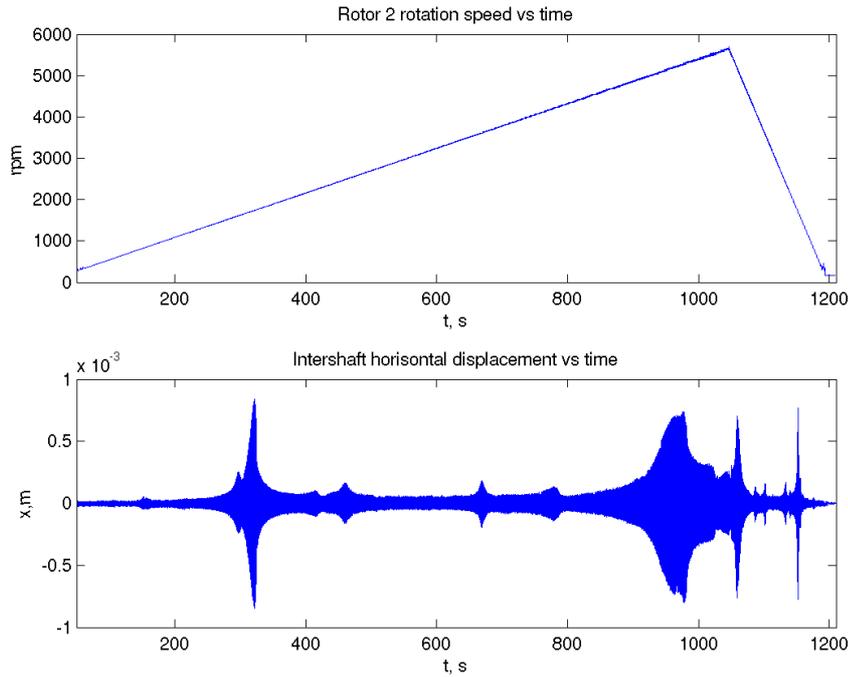


FIG. 6.12 – Profil de l'essai (en haut : vitesse de rotation HP, en bas : déplacement de l'inter-arbre)

rpm pour le rotor BP et entre 0 et 5500 rpm pour le rotor HP avec un rapport constant de vitesse

$$\frac{N_2}{N_1} = 2.78. \quad (6.9)$$

Des enregistrements temporels et de suivi d'ordre sont effectués.

Selon les calculs numériques linéaires des vitesses critiques (figure 6.13), le rotor BP traverse les modes **SP5** (direct et rétrograde) et **fan** (rétrograde) entre 0 et 2000 rpm tandis que pour le rotor HP les modes **fan** (direct et rétrograde), **SP5** (direct et rétrograde), **SP3** (direct et rétrograde) et **couplé** (rétrograde) sont excités entre 0 et 5500 rpm.

### Résultats expérimentaux et comparaison avec les calculs

Lors des essais, trois modes sont excités de manière nette (modes SP5, fan et SP3). Pour chaque mode, les pics directs et rétrogrades sont observés, ainsi que les pics sur-harmoniques d'ordre 2. Les tracés de suivi d'ordre dans le plan de mesure interarbre sont donnés en figure 6.14 (rotor 1) et figure 6.15 (rotor 2). Comme on peut le voir sur la figure 6.16, la réponse aux pics de résonance due aux vitesses critiques varie selon le plan de mesure. En particulier, le second mode (mode fan) se manifeste plus au plan de mesure 1 (figure 6.16(a)), tandis que le mode 3 (mode SP3) est surtout visible à l'opposé de la machine (figure 6.16(b)).

L'interprétation des différents pics ainsi que la comparaison avec les résultats théoriques (pour l'ordre 1) sont données en tableau 6.4. Les trois premiers modes excités par le **balourd du rotor HP** (modes **SP5**, **fan** et **SP3**) se retrouvent bien dans la plage de fonctionnement,

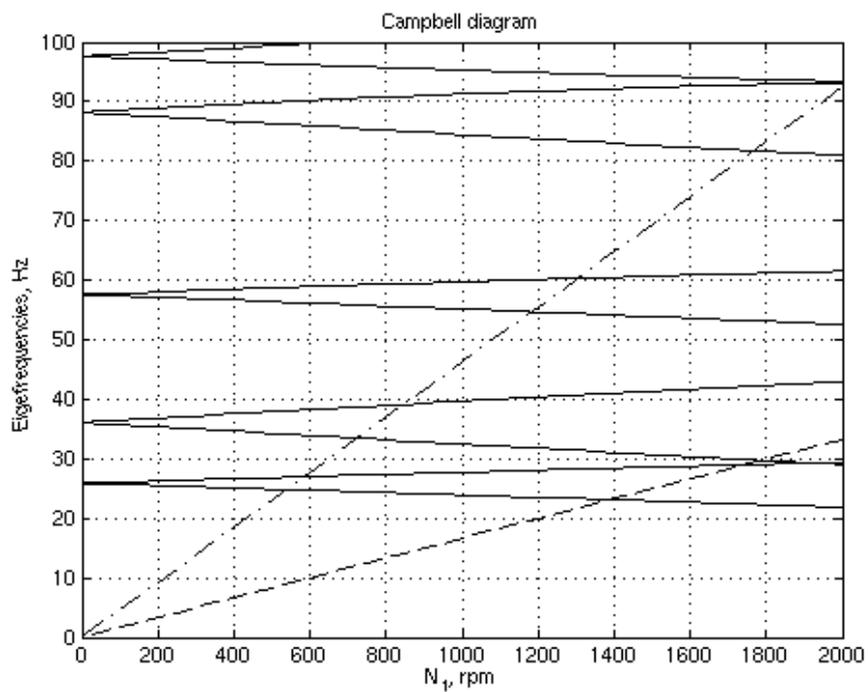


FIG. 6.13 – Rappel du diagramme de Campbell théorique (configuration initiale, co-rotation)

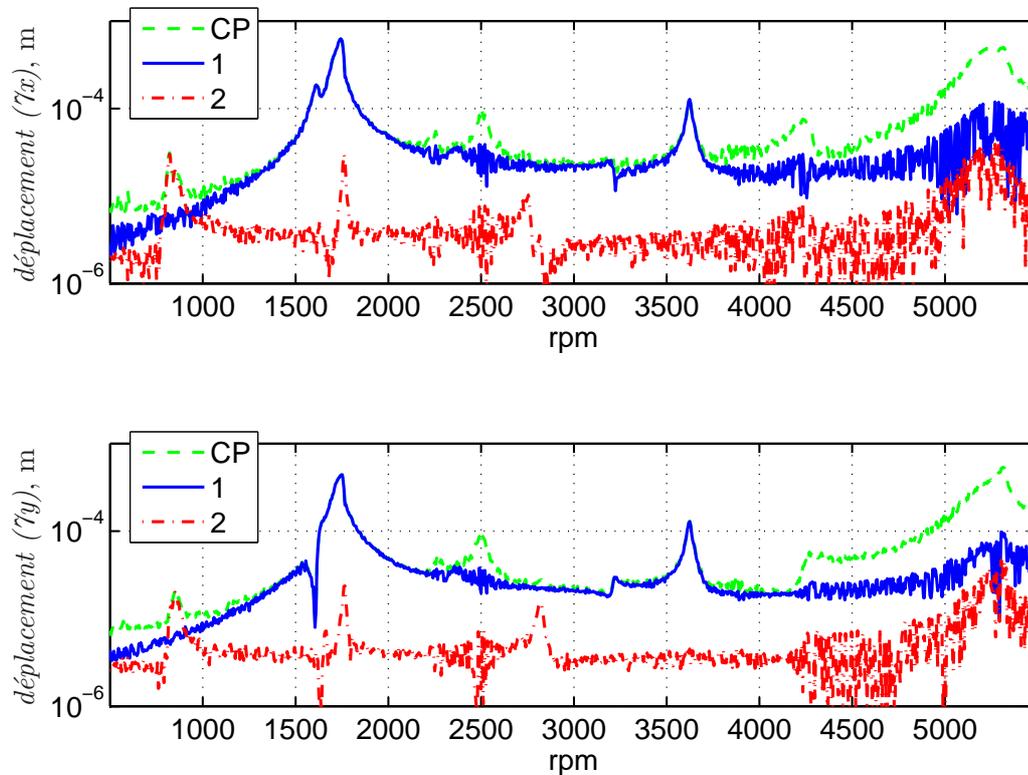


FIG. 6.14 – Suivi d'ordre au plan interarbre par rapport au rotor HP

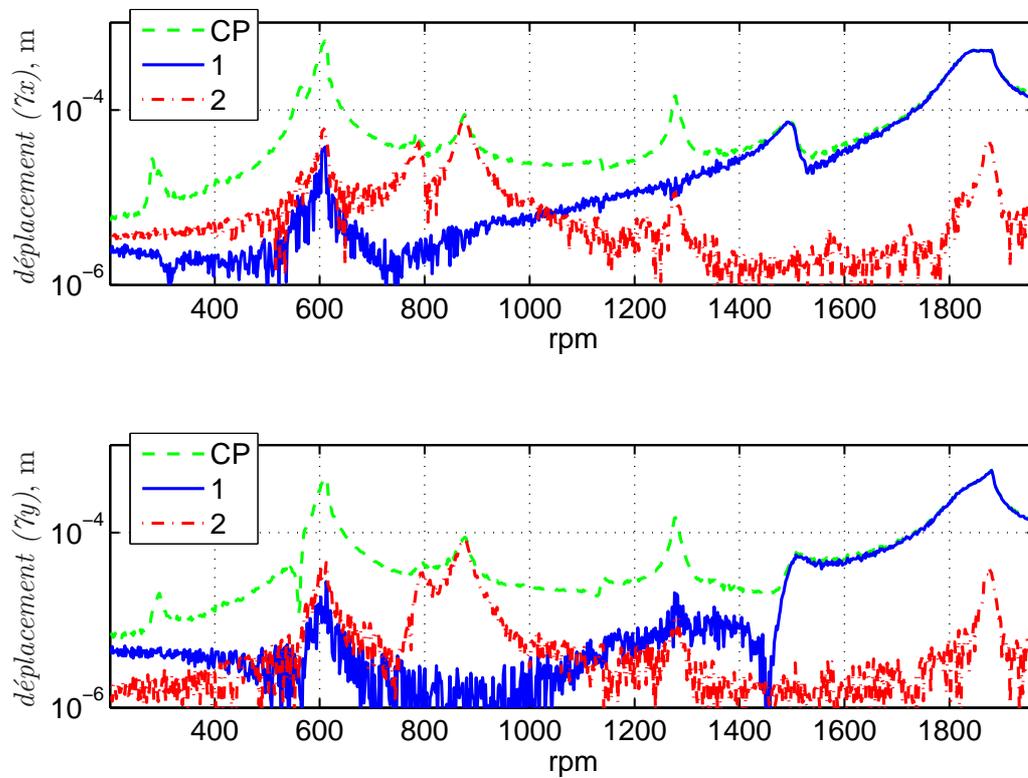
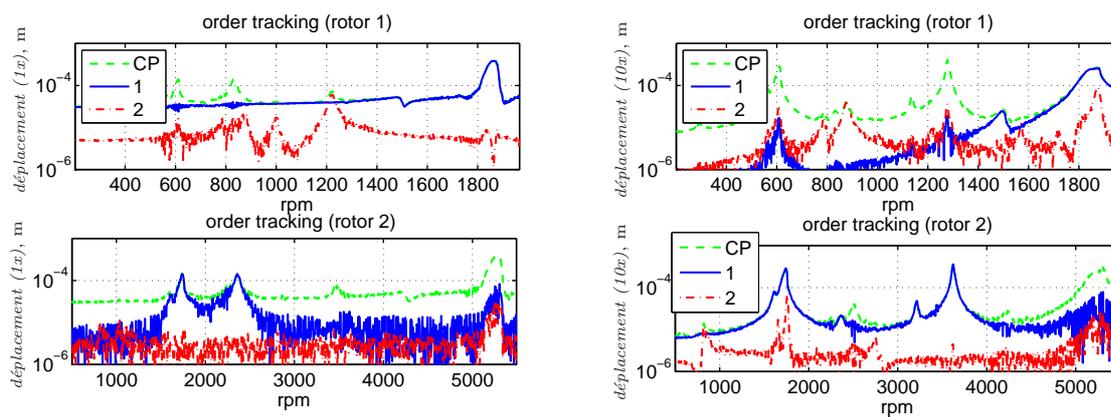


FIG. 6.15 – Suivi d'ordre au plan interarbre par rapport au rotor BP



(a) Suivi d'ordre dans le plan 1

(b) Suivi d'ordre dans le plan 10

FIG. 6.16 – Réponse aux extrémités de la machine

$N_1^{\text{théo}}$	$N_2^{\text{théo}}$	$N_1^{\text{exp}}$	$N_2^{\text{exp}}$	O1	O2	Interprétation	Déviaton
537	1490	280	820		2	mode SP5 rétro	7.7%
		295	850		2	mode SP5 direct	
		564	1615		1	mode SP5 rétro	
583	1619	560	1655		2	mode SP3 rétro	7.1%
		610	1743		1	mode SP5 direct	
		608	1760		2	mode SP3 rétro	
845	2348	785	2255	2		mode SP5 rétro	0.6%
		830	2363		1	mode fan direct	
		875	2505	2		mode SP5 direct	
1181	3282	1138	3215		1	mode SP3 rétro	2.1%
		1206	3450	2		mode fan direct	
		1277	3623		1	mode SP3 direct	
1388	3855	1495	4240	1		mode SP5 rétro	7.2%
1738	4829	1870	5300	1		mode SP5 direct	7.1%
1783	4952	1830	5120	1		mode fan direct	
		1875	5300	2		mode SP3 direct	

TAB. 6.4 – Vitesses critiques

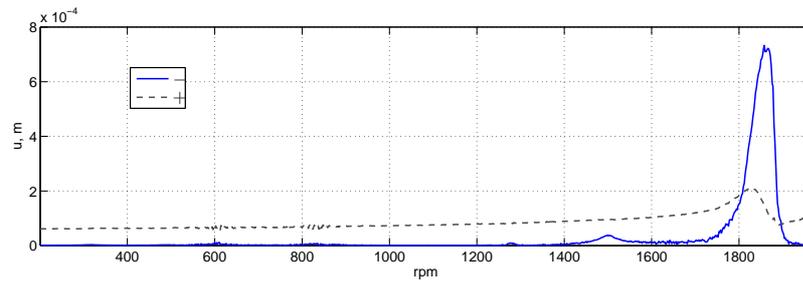
ainsi que le premier mode qui est excité par le rotor BP. En ce qui concerne le **mode couplé** (branche rétrograde), il est peu prononcé et éclipsé par le pic du mode SP5 direct excité par le rotor BP (conformément aux tracés de full spectrum).

En ce qui concerne la réponse au **balourd du rotor BP** (figure 6.15), à l'ordre 1 on voit bien dans la plage de fonctionnement de la machine les pics du **mode SP5** : rétrograde, puis direct. En ce qui concerne le **mode fan** (représenté par sa branche rétrograde), il n'est pas bien visible sur les courbes de réponse du système, dominées par le mode SP5 direct.

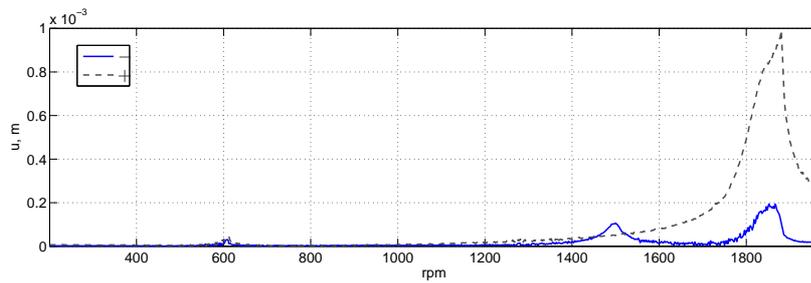
Pour compléter l'étude de la réponse dynamique du banc bi-rotors, on trace maintenant les courbes de **full spectrum** pour les plans 1 et 7 correspondant respectivement aux niveaux importants des modes fan et couplé (figure 6.17). On s'aperçoit (figure 6.17(a)) que, malgré l'intensité de vibration sur le mode direct SP5, la précession est fortement rétrograde, ce qui est dû à la résonance du mode rétrograde. Ainsi, les tracés de full spectrum, fondés sur la décomposition du mouvement elliptique en direct et rétrograde, permettent non seulement d'illustrer et de confirmer les conclusions préliminaires sur la direction de précession des vitesses critiques, mais aussi de statuer sur le contenu modal du mouvement, notamment en cas de proximité des vitesses critiques, comme dans les cas discutés précédemment.

En ce qui concerne les modes rétrogrades, on remarquera également une alternation entre les pics de réponse dans les directions horizontale et verticale à chaque plan de mesure. Cela est dû à la rotation de l'orbite aplatie (cf par exemple le premier pic rétrograde, figure 6.18), ce qui est typique dans le cas de supports anisotropes. Cette anisotropie peut provenir des jeux de roulements. Comme discuté dans le chapitre 2 (figure 2.3), si les amplitudes de vibrations sont assez petites pour engendrer un orbitage réciproque des bagues de roulement, la présence de la pesanteur rend le roulement anisotrope.

Enfin, une interpolation polynomiale entre les mesures aux différents plans permet de



(a) Plan 1 (ordre 1 BP)



(b) Plan 7 (ordre 1 BP)

FIG. 6.17 – Full spectrum à l'ordre 1

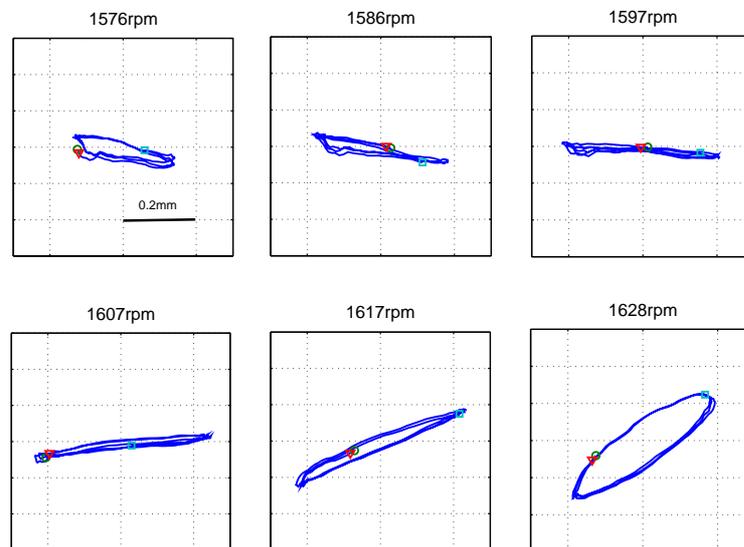


FIG. 6.18 – Rotation de l'orbite aplatie : mesure au plan interarbre au passage du premier mode rétrograde.

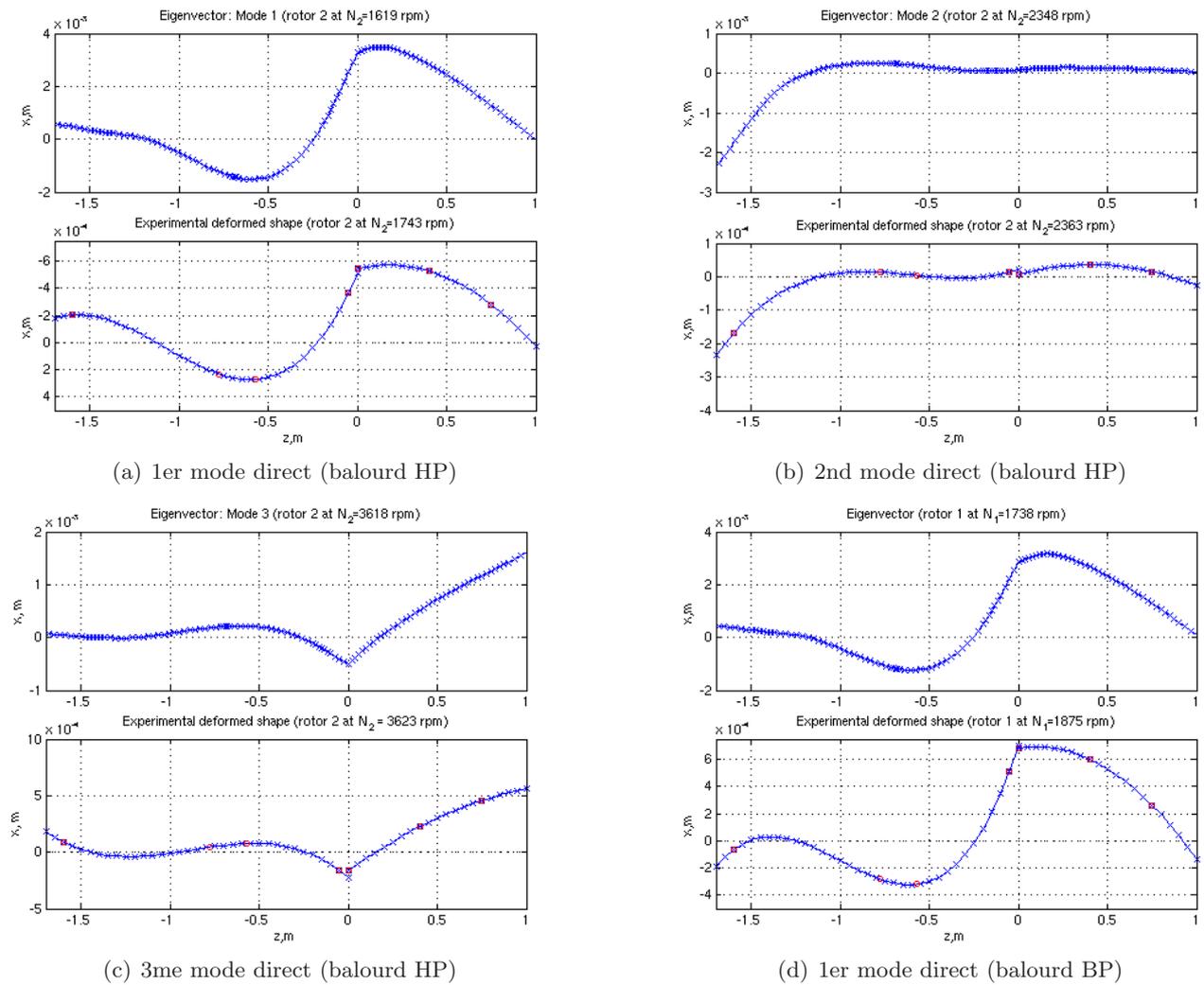
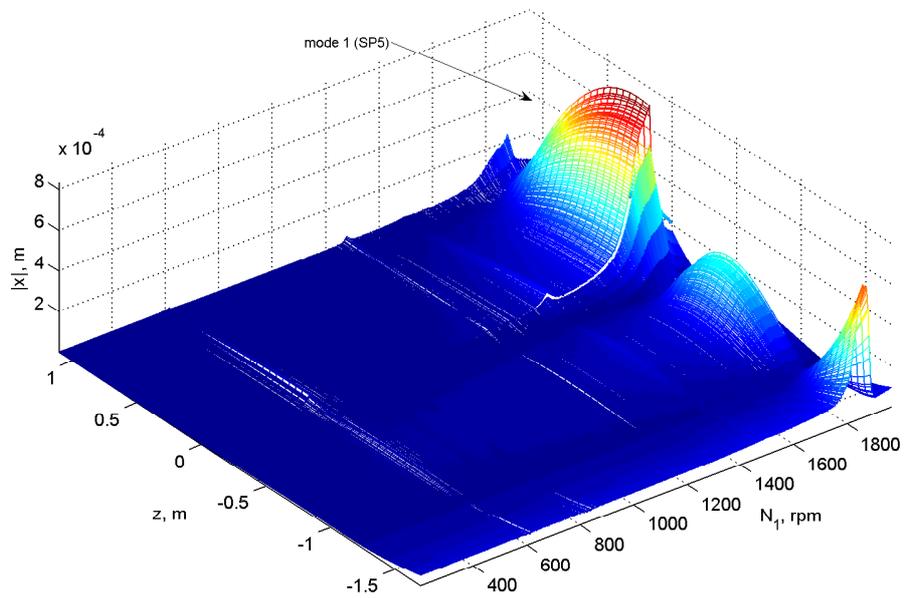


FIG. 6.19 – Déformées modales numériques (en haut) et opérationnelles expérimentales (en bas)

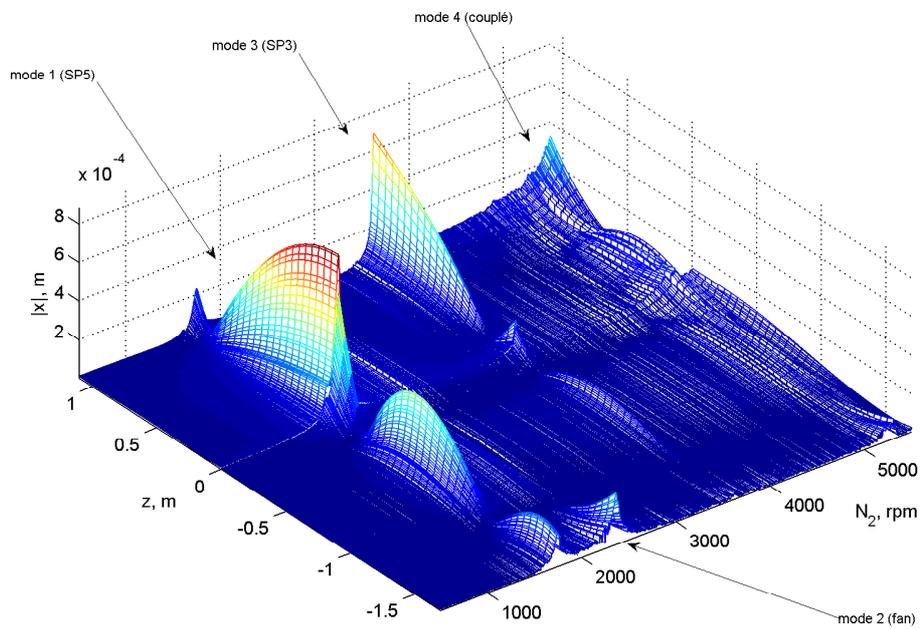
reconstituer les déformées modales. Ainsi, en figure 6.20, on peut suivre l'évolution de la déformation du système en fonction du régime moteur (HP ou BP) pour différents ordres (ici ordre 1). Cette représentation illustre bien le tableau des vitesses critiques (tableau 6.4) : on reconnaît les déformées modales pour les régimes correspondants.

### Corrélation essais–calculs : recalage de vitesses critiques par les raideurs des roulements en rotation

On remarque que les valeurs expérimentales des vitesses critiques sont systématiquement au-dessus des estimations numériques. Vue l'erreur d'estimation des vitesses critiques, on peut penser que l'on sous-estime les raideurs du système. Comme, jusqu'à présent, les calculs se basaient sur une modélisation purement transversale des roulements, cela justifierait les observations réalisées sur le banc mono-rotor (thèse de Villa [Vil05], ainsi que [SVT05, SVT06]) sur la pertinence de la prise en compte de la raideur des roulements en rotation. Une recherche de



(a) Ordre 1 (rotor BP)



(b) Ordre 1 (rotor HP)

FIG. 6.20 – Réponse de l'ensemble du système, ordre 1

ces valeurs est présentée dans la section suivante.

Soit un vecteur de vitesses critiques expérimentales (cf 6.4)

$$v^{\text{exp}} = [v_{BP}^{\text{exp}T} v_{HP}^{\text{exp}T}]^T; \quad (6.10)$$

(avec  $v_{BP}^{\text{exp}}$  et  $v_{HP}^{\text{exp}}$  vecteurs de valeurs de vitesses critiques excitées par le rotor  $BP$  ou  $HP$  respectivement) que l'on veut recalcr avec un vecteur analogue issu d'un calcul numérique  $v^{\text{théo}}$ . Le problème d'optimisation des valeurs de raideur en rotation peut se poser sur deux critères d'estimation d'écart entre le modèle et l'expérience. Le premier,  $R^{\text{abs}}$ , se base sur les valeurs absolues des écarts :

$$r^{\text{abs}} = [r_{BP}^{\text{abs}T} r_{HP}^{\text{abs}T}]^T; \quad (6.11)$$

$$r_{BP_i}^{\text{abs}} = \frac{|v_{BP_i}^{\text{exp}} - v_{BP_i}^{\text{théo}}|}{v_{BP_i}^{\text{exp}}}; \quad (6.12)$$

$$r_{HP_i}^{\text{abs}} = \frac{|v_{HP_i}^{\text{exp}} - v_{HP_i}^{\text{théo}}|}{v_{HP_i}^{\text{exp}}}; \quad (6.13)$$

$$R^{\text{abs}} = \sum_i r_i^{\text{abs}}. \quad (6.14)$$

Le second critère,  $R^{\text{quad}}$ , se base sur la norme euclidienne du vecteur d'écarts normés par les valeurs expérimentales.

$$r^{\text{quad}} = [r_{BP}^{\text{quad}T} r_{HP}^{\text{quad}T}]^T; \quad (6.15)$$

$$r_{BP_i}^{\text{quad}} = \frac{|v_{BP_i}^{\text{exp}} - v_{BP_i}^{\text{théo}}|^2}{v_{BP_i}^{\text{exp}2}}; \quad (6.16)$$

$$r_{HP_i}^{\text{quad}} = \frac{|v_{HP_i}^{\text{exp}} - v_{HP_i}^{\text{théo}}|^2}{v_{HP_i}^{\text{exp}2}}; \quad (6.17)$$

$$R^{\text{quad}} = \sqrt{\sum_i r_i^{\text{quad}}}. \quad (6.18)$$

Un balayage d'une grande plage de valeurs de  $k_r$  et  $k_b$  a donné le résultat suivant (figure 6.21, 6.22, ) : le minimum de la somme des écarts essais-calcul (critère  $R^{\text{abs}}$ ) est d'environ 20% pour

$$k_{\text{rot rouleaux}} = 0.8 \times 10^4 \text{ Nm/rad}; \quad k_{\text{rot billes}} = 5 \times 10^4 \text{ Nm/rad}; \quad (6.19)$$

tandis que le critère quadratique  $R^{\text{quad}}$  est minimisé jusqu'à 9% pour

$$k_{\text{rot rouleaux}} = 0.7 \times 10^4 \text{ Nm/rad}; \quad k_{\text{rot billes}} = 3.7 \times 10^4 \text{ Nm/rad}. \quad (6.20)$$

On remarquera également que le premier critère d'optimisation est moins pratique, car il donne une plage assez étendue de valeurs avec  $R^{\text{abs}}$  proche du minimum, tandis que le résultat de la seconde estimation est plus localisé et reste proche de cette zone.

Cette dernière solution (6.20) sera retenue pour établir un modèle recalé de notre système dans la suite de l'étude. Les calculs aux valeurs propres pour ce modèle livrent les résultats

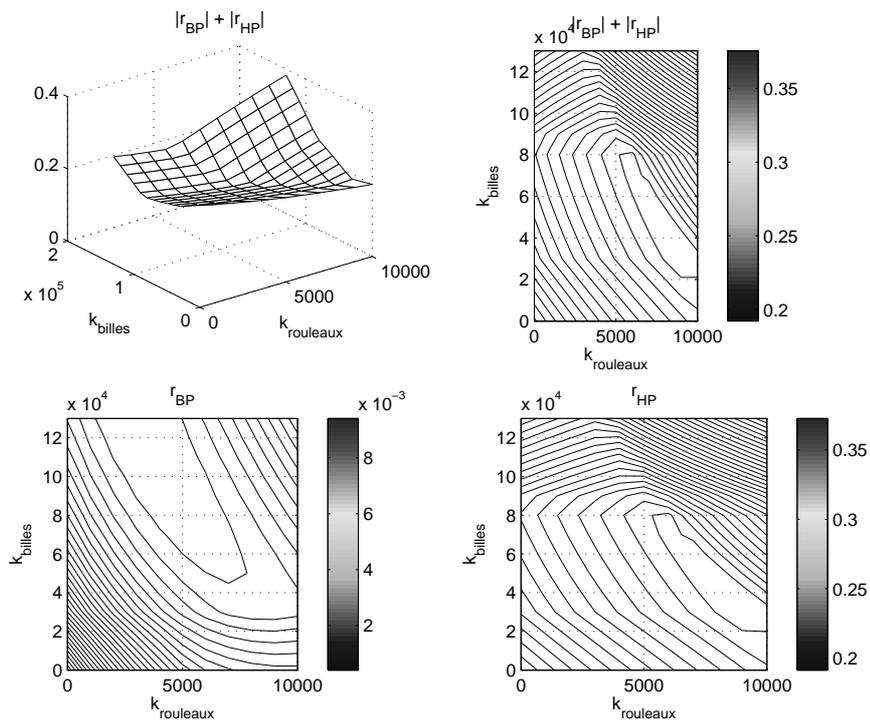


FIG. 6.21 – Recherche des valeurs de raideur en rotation des roulements de manière à minimiser  $R^{abs}$ .

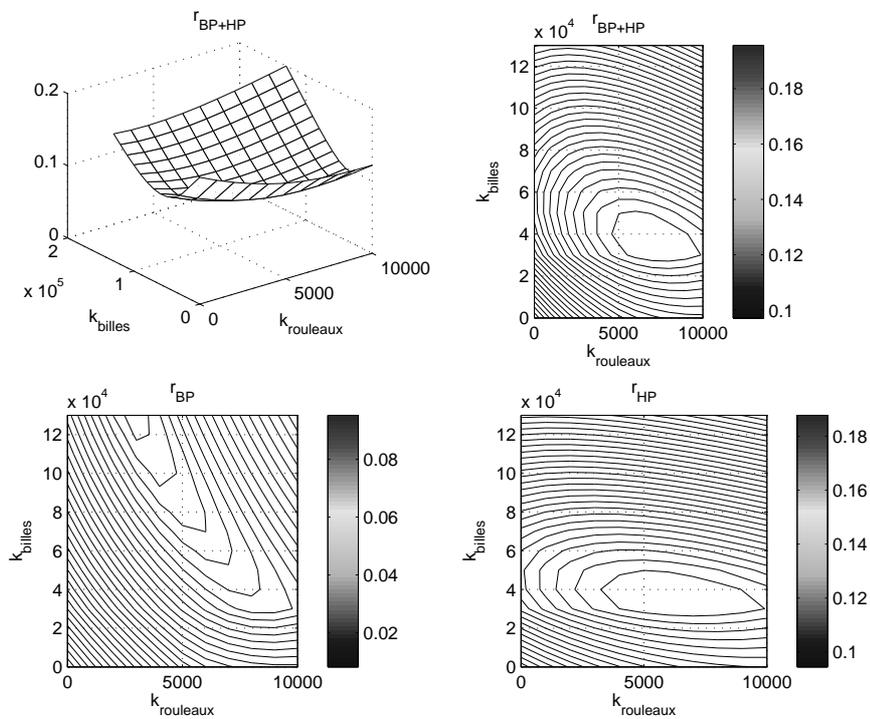


FIG. 6.22 – Recherche des valeurs de raideur en rotation des roulements de manière à minimiser  $R^{quad}$ .

donnés en tableau 6.5, ainsi que sur le diagramme de Campbell (figure 6.23). On remarquera que l'erreur sur le premier mode (SP5) qui se traduisait par un écart sur quatre valeurs de vitesses critiques s'est étendu sur les autres modes, notamment le mode Fan qui ne contribue à  $R^{quad}$  que sur deux valeurs.

$N_1^{\text{après}}$ , rpm	$N_2^{\text{après}}$ , rpm	Erreur, %	Mode
576	<b>1599</b>	1.0	mode SP5 rétrograde
619	<b>1729</b>	1.3	mode SP5 direct
761	<b>2114</b>	5.2	mode fan rétrograde
894	<b>2483</b>	5.1	mode fan direct
1209	<b>3359</b>	4.5	mode SP3 rétrograde
1332	<b>3700</b>	2.1	mode SP3 direct
<b>1498</b>	4153	0.2	mode SP5 rétrograde
<b>1830</b>	5083	2.1	mode SP5 direct
1845	<b>5124</b>		mode couplé rétrograde
<b>1870</b>	5194		mode fan rétrograde

TAB. 6.5 – Vitesses critiques recalées, rotor BP

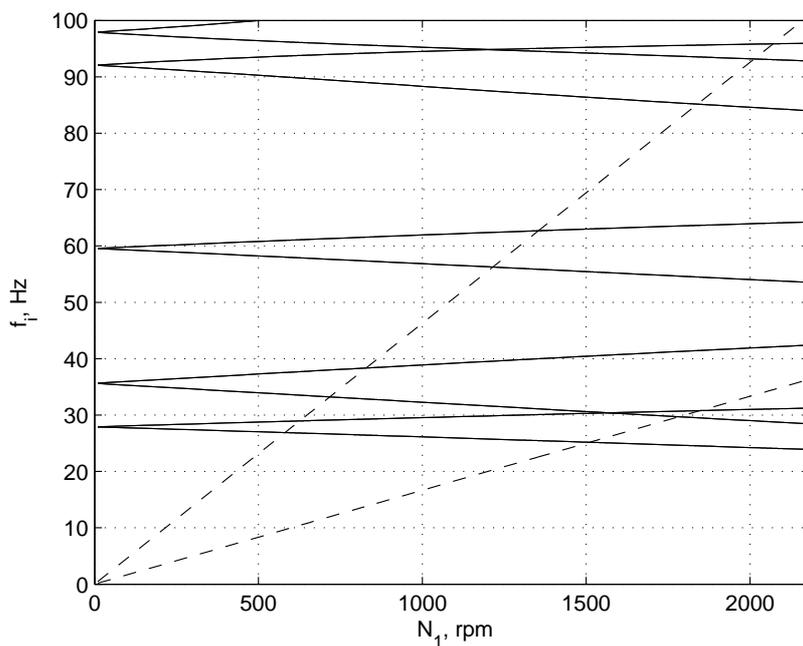


FIG. 6.23 – Diagramme de Campbell du modèle recalé.

#### 6.4.2 Configuration initiale. Contra-rotation

Dans cette partie, nous allons donc tester la première solution technologique qui correspond au système bi-rotors en contra-rotation. Nous rappelons que cette solution technologique permettrait de supprimer un étage de redresseur, engendrant un allègement du stator.

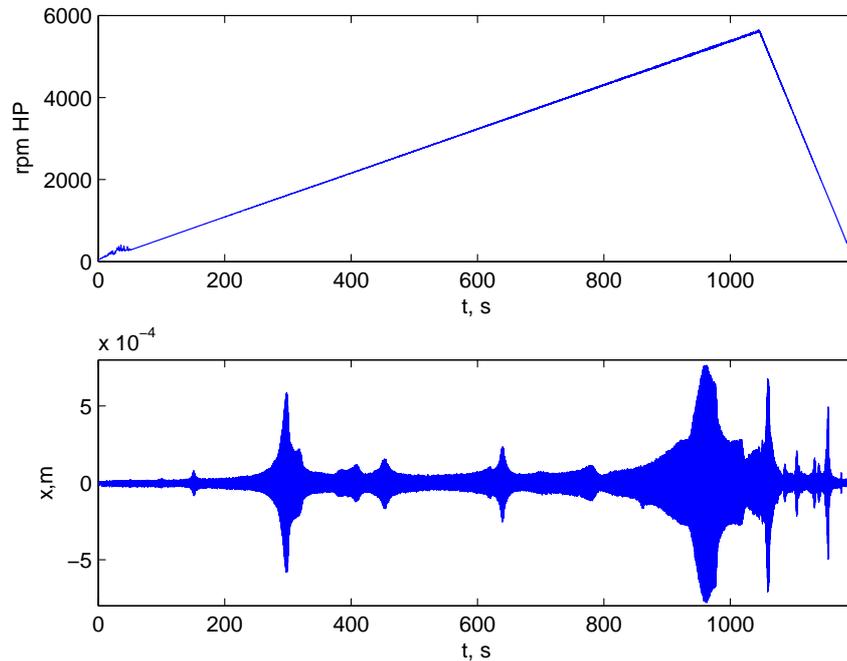


FIG. 6.24 – Essai type en contra-rotation (configuration initiale) : vitesse de rotation du rotor HP en fonction du temps (en haut), enregistrement temporel du déplacement horizontal au plan interarbre (en bas)

### Conditions des essais et prévisions théoriques

Les essais de réponse à balourd (sous l'effet du balourd résiduel) en **contra-rotation** sont effectués sur la configuration initiale du banc. Le profil type d'essai (figure 6.24) consiste en une montée en régime à environ 5 rpm/s (rotor HP) puis une descente plus rapide (environ 30 rpm/s). Les vitesses de rotation des deux rotors varient de 0 à 2000 rpm pour le rotor BP et de 0 à 5500 rpm pour le rotor HP avec un rapport constant de vitesse

$$\frac{N_2}{N_1} = -2.778. \quad (6.21)$$

Selon les calculs numériques linéaires des vitesses critiques, le rotor BP traverse les modes SP5 (direct et rétrograde) et fan (rétrograde) entre 0 et 2000 rpm tandis que pour le rotor HP les modes fan (direct et rétrograde), SP5 (direct et rétrograde), SP3 (direct et rétrograde) et couplé (rétrograde) sont excités entre 0 et 5500 rpm. Le diagramme de Campbell correspondant est donné en figure 6.25. Les traits correspondant au rotor BP sont en pointillés, ceux correspondant au rotor HP en traits continus.

Nous allons maintenant nous intéresser au **suivi d'ordre**. La séparation des réponses selon l'ordre 1 de chaque rotor facilite l'interprétation de la réponse. Cependant, comme on peut le remarquer sur la figure 6.26, l'ensemble des pics de réponse ne se limite pas à ceux venant du premier ordre. La réponse d'ordre 2 est en effet présente pour pratiquement tous les modes. Les vitesses critiques (vitesses correspondant aux pics de réponse) sont récapitulées en tableau

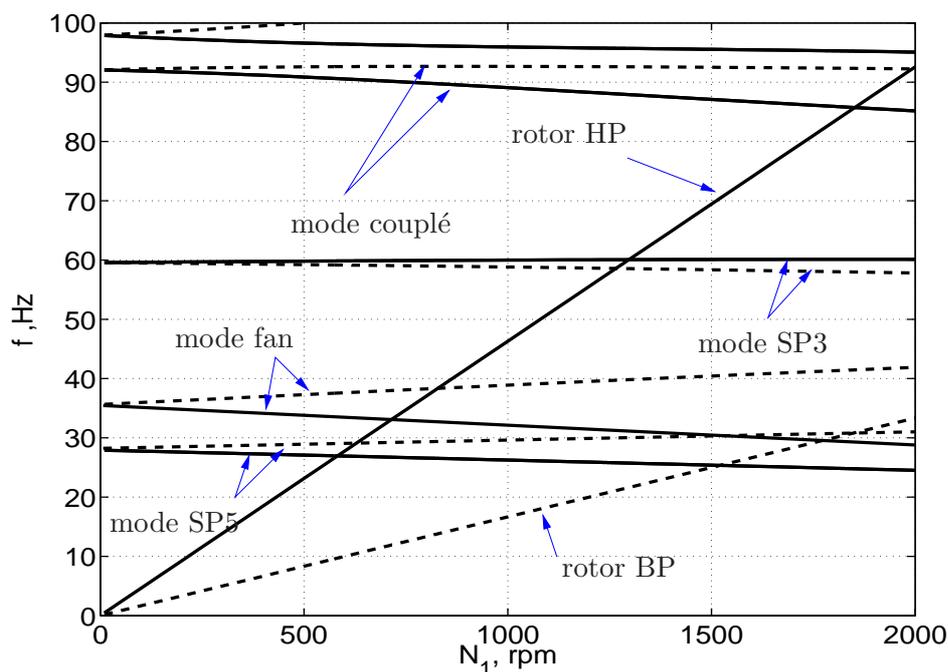
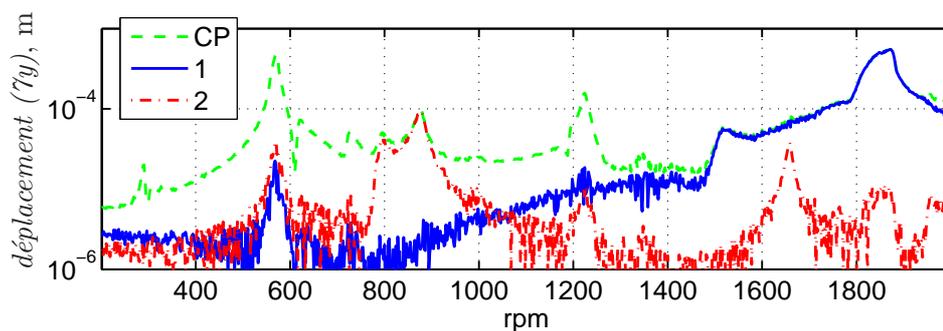
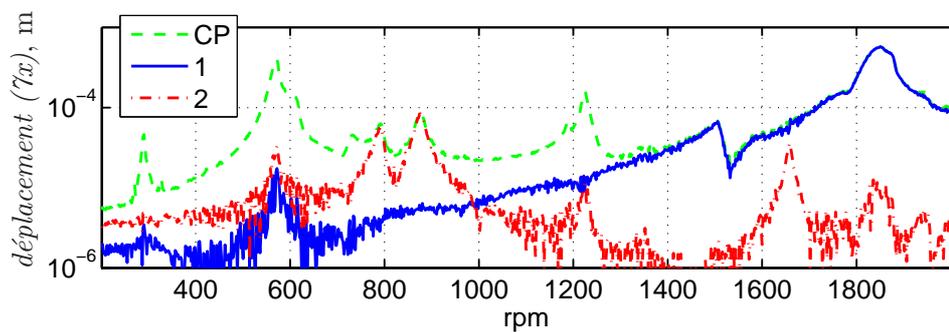


FIG. 6.25 – Diagramme de Campbell théorique (configuration initiale, contra-rotation)

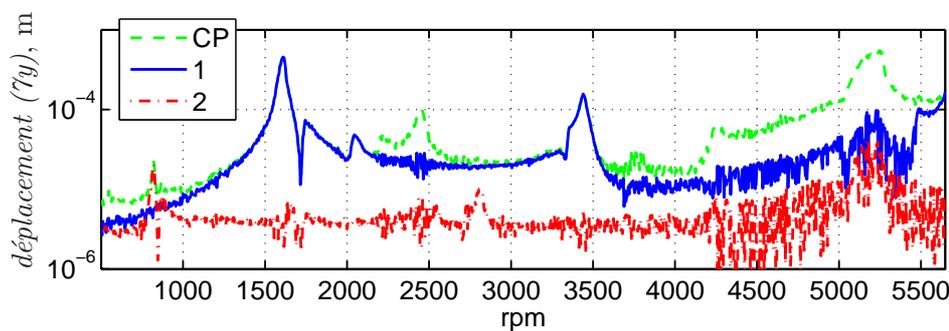
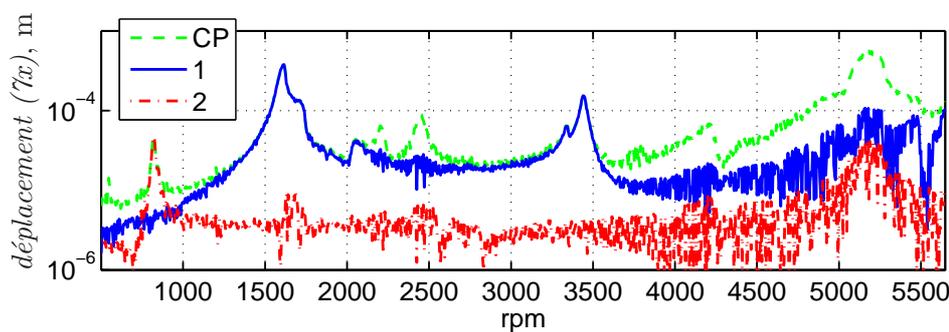
6.6. Il est bon de rappeler que les modes directs selon chacun des rotors (1 – BP, 2 – HP, en contra-rotation) correspondent aux directions de précessions opposées, et de même pour les modes rétrogrades (cf. figure 6.25).

Aussi, les **déformées** des deux arbres lors des régimes critiques sont bien identifiables entre les observations expérimentales (interpolations polynomiales des déplacements aux plans de mesures) et théoriques (Fig 6.27). On remarquera cependant que, pour le mode couplé, l'inflexion au niveau des paliers 1 et 2, observée sur la déformée obtenue numériquement, n'est pas retrouvée sur l'interpolation des données expérimentales correspondantes. Cela est dû à l'absence de capteur dans cette zone qui conduit à une interpolation erronée.

Concernant les **orbites** (figure 6.28), ces dernières montrent bien l'influence des balourds des deux rotors sur la réponse dynamique du système. Les cas où les niveaux sont élevés correspondent à une réponse intense du système sur un mode et donc une précession synchrone avec un des deux balourds (en l'occurrence, celui qui tourne à la vitesse critique). Cela se traduit généralement par des orbites bien ellipsoïdales (comme indiqué en figure 6.28(a), 6.28(e)). Dans le cas du mode couplé (rétrograde, HP – figure 6.28(g), 6.28(h)) et du mode SP5 (direct, BP – figure 6.28(i)), des mouvements plus complexes sont observés. Ces derniers se traduisent par des battements (figure 6.28(k)) compliquant la surveillance des niveaux. Comme dans le cas du mode fan (direct, HP – figure 6.28(c)), du mode SP5 (rétrograde, BP – figure 6.28(c)), ou encore du mode couplé (rétrograde, HP – figure 6.28(j)), on observe des battements, provenant de la combinaison de la vibration à la résonance et de la vibration due à l'excitation par l'autre balourd, qui est loin des vitesses critiques.



(a) rotor BP



(b) rotor HP

FIG. 6.26 – Suivi d'ordre : déplacement horizontal et vertical au roulement interarbre

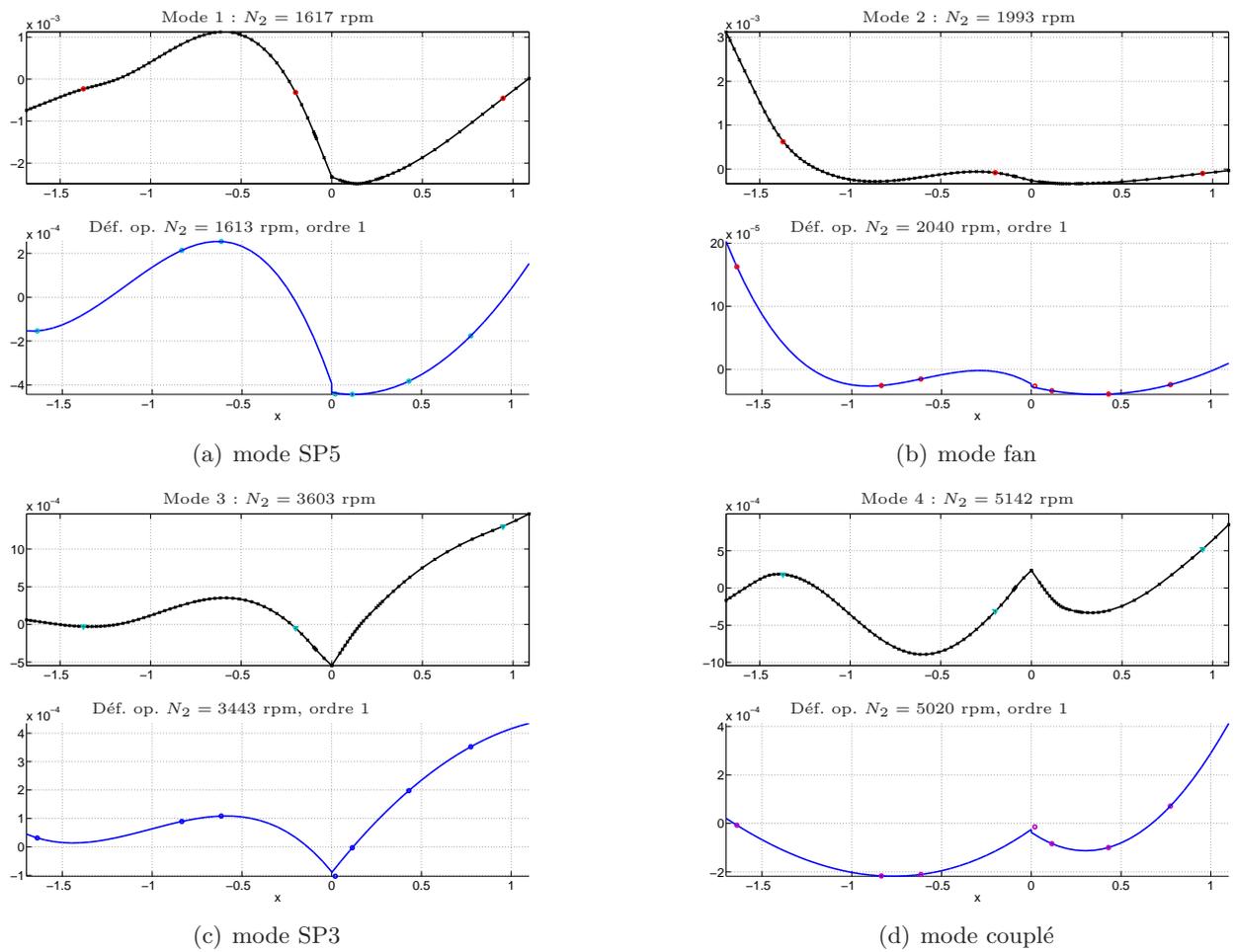


FIG. 6.27 – Modes directs par rapport au rotor HP (vitesses critiques à l'ordre 1) : déformées modales numériques (en haut) et opérationnelles expérimentales (en bas)

$N_1^{\text{théo}}$	$N_2^{\text{théo}}$	$N_1^{\text{exp}}$	$N_2^{\text{exp}}$	rotor	ordre	mode	erreur
		-290	820	2	2	mode SP5 direct	
-582	1617	-571	1613	2	1	mode SP5 direct	
-624	1734	-604	1710	2	1	mode SP5 rétrograde	-1,4%
-718	1993	-732	2040	2	1	mode fan direct	2,3%
-828	2301	-821	2282	2	1	mode fan rétrograde	-0,8%
		-792	2215	1	2	mode SP5 rétrograde	
		-876	2455	1	2	mode SP5 direct	
		-909	2540	2	2	mode couplé direct	
		-1004	2815	2	2	mode couplé rétrograde	
-1265	3514	-1190	3342	2	1	mode SP3 rétrograde	5,1%
-1297	3603	-1224	3443	2	1	mode SP3 direct	-4,6%
		-1230	3420	1	2	mode fan direct	
-1521	4224	-1506	4212	1	1	mode SP5 rétrograde	-0,2%
		-1658	4650	1	2	mode SP3 direct	
-1851	5142	-1788	5020	2	1	mode couplé direct	-2,4%
-1783	4952	-1850	5170	1	1	mode SP5 direct	1,1%
-1841	5115	-1870	5240	1	1	mode fan rétrograde	1,6%

TAB. 6.6 – Vitesses critiques (configuration initiale, contra-rotation)

Concernant enfin le **sens de précession.**, la figure 6.28 montre les orbites avec le sens de précession prédominant, La convention de signe est la suivante : le rotor HP tourne dans le sens positif (opposé à celui des aiguilles d'une montre), le rotor BP tourne dans le sens opposé, négatif. De manière générale, les orbites sur les modes rétrogrades sont sensiblement aplaties (6.28(b), 6.28(d), 6.28(f), 6.28(j)), mais le sens de précession n'est pas forcément inversé.

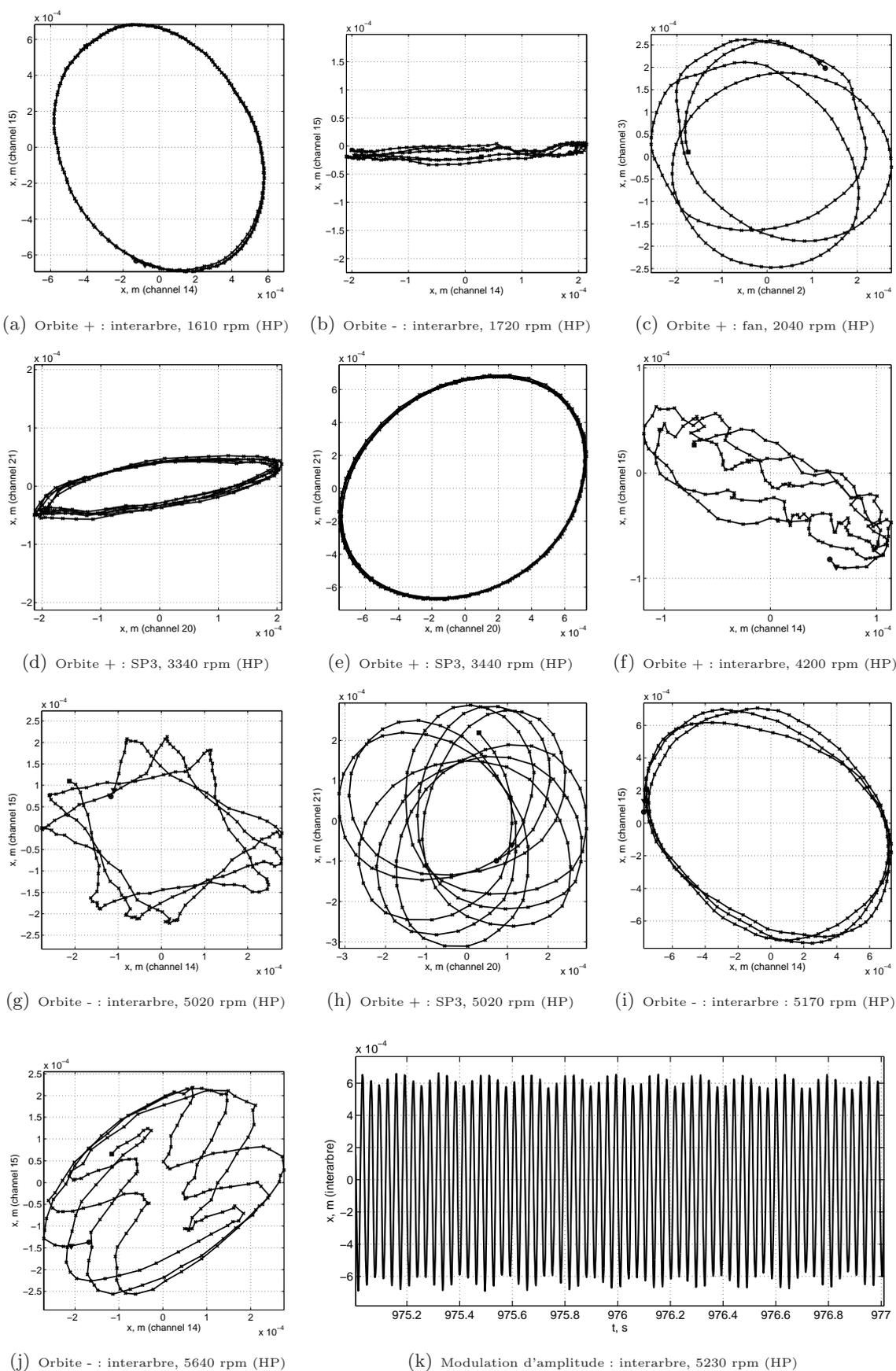


FIG. 6.28 – Réponse temporelle mesurée

### 6.4.3 Configuration modifiée. Contra-rotation

Pour finir, nous allons nous intéresser à la configuration modifiée en contra-rotation qui correspond à la deuxième solution technologique envisagée. Nous rappellerons que cette solution correspond à un allègement de l'arbre BP (engendrant l'abaissement du mode d'arbre BP dans la plage de fonctionnement).

#### Conditions des essais et prévisions théoriques

En ajoutant une masse supplémentaire au centre du rotor BP sous forme d'une paire de disques pesant 5,66 kg chacun, on reprend les essais en contra-rotation. Le rapport entre les vitesses de rotation des rotors est constant :

$$\frac{N_2}{N_1} = -2.78. \quad (6.22)$$

On fait varier  $N_1$  de 0 à 1900 rpm en mesurant la réponse à balourd résiduel (figure 6.29(a)).

Comme on peut voir sur le diagramme de Campbell théorique, la situation modale de cette configuration est globalement très proche de celle de la configuration initiale. Cependant, un nouveau mode apparaît dans la plage de fonctionnement : ce dernier correspond au **mode d'arbre** à la fréquence de 70 Hz (vitesse critique vers 1450 rpm (BP)). Les résultats de ces essais seront surtout présentés en soulignant leurs différences avec la configuration initiale en contra-rotation.

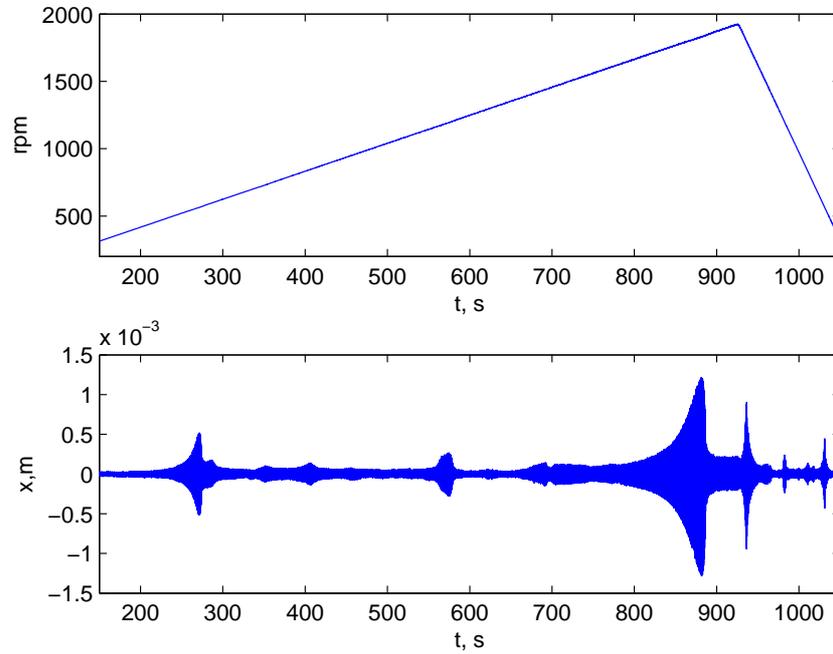
#### Résultats expérimentaux et comparaison avec les calculs

Les tracés de **suivis d'ordres** (figure 6.30, 6.31) montrent une réponse similaire à celle de la configuration initiale (figure 6.26(a), 6.26(b)). On aperçoit au plan interarbre (figure 6.30) une prédominance de l'ordre 1 HP sur une plage plus étendue que dans la configuration initiale, le nouveau pic étant le mieux visible sur les plans 3 et 4 (cf figure 6.31(b)), tandis que le mode 2 (fan, figure 6.31(a)), pour lequel la masse ajoutée se place au noeud de la déformée, est pratiquement inaffecté par la modification de la structure, d'où la réponse au plan 1 quasiment inchangée par rapport à la figure 6.16(a).

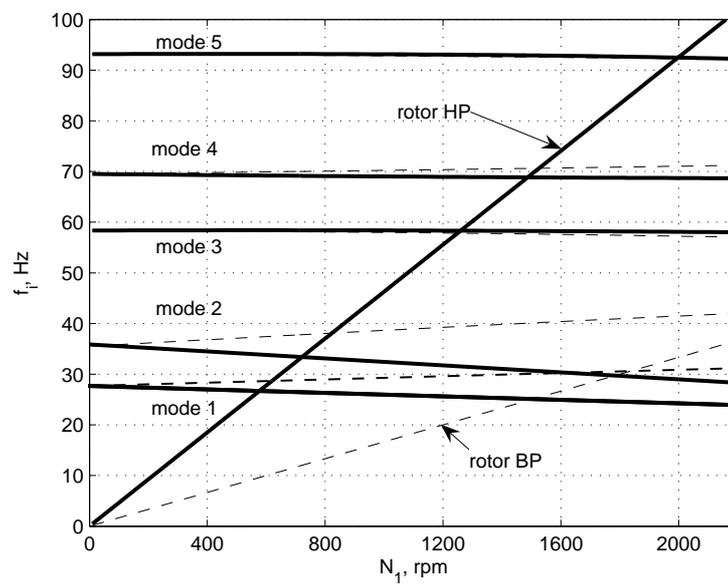
Les **vitesses critiques**, comme on peut le voir dans le tableau 6.7, sont peu modifiées, à l'exception du nouveau mode, noté par "4r" et "4d".

Quant aux **déformées modales**, pour les modes 1 à 3 (figure 6.32(a) à 6.32(c)) elles sont très similaires à celles observées avant (figure 6.27(a) à 6.27(c)). Le mode 4, bien que toujours excité par le balourd HP, n'est pas identique à celui observé en contra-rotation en configuration initiale (figure 6.27(d), mode couplé), mais représente le mode d'arbre BP (figure 6.32(d)). On remarque ici, comme dans le cas de la figure 6.27(d), que la déformée de l'arbre BP n'est pas bien représentée, ce qui est dû au nombre insuffisant de plans de mesure de déplacements.

Les deux vitesses critiques du mode d'arbre sont très serrées, et même en utilisant l'approche "full spectrum", on arrive à peine à les distinguer l'une de l'autre.



(a) Profil de l'essai (en haut : vitesse de rotation HP, en bas : déplacement de l'interarbre)



(b) Diagramme de Campbell théorique

FIG. 6.29 – Condition d'essais et prévisions théoriques

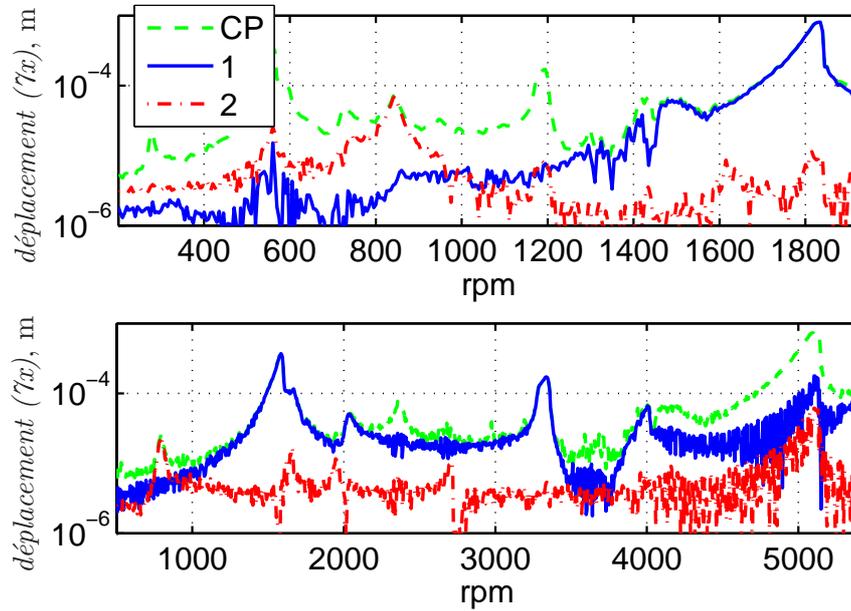
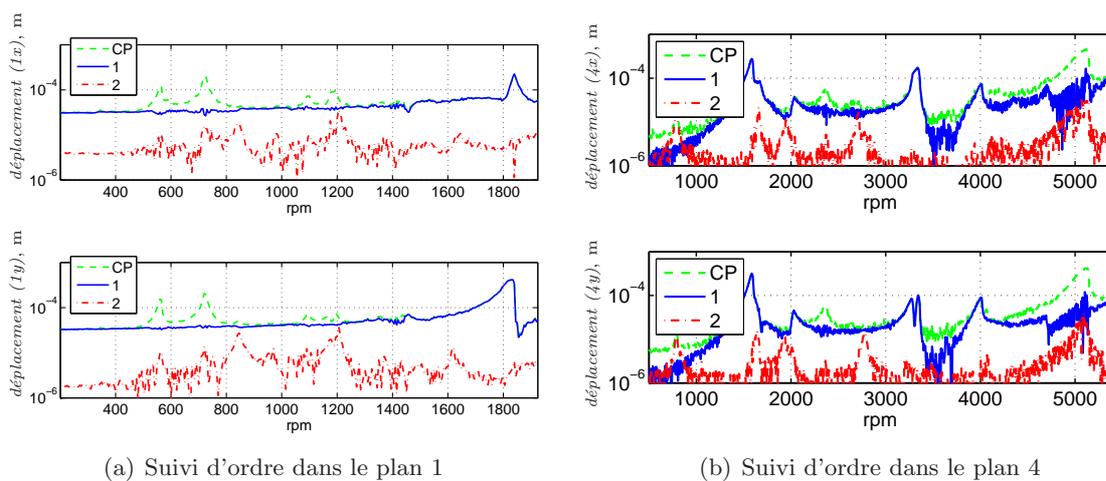


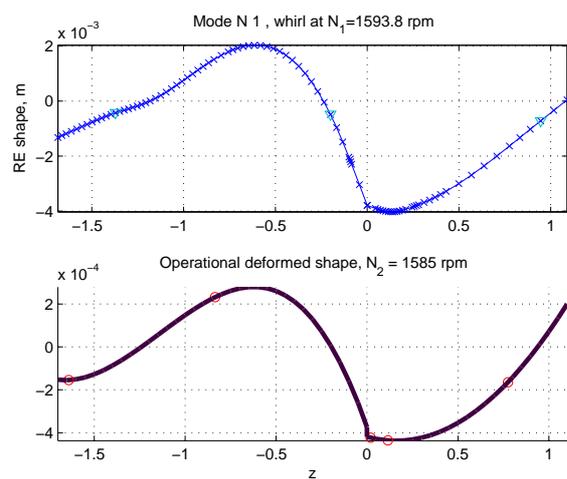
FIG. 6.30 – Suivi d'ordre : déplacement horizontal au plan interarbre par rapport aux rotors BP et HP



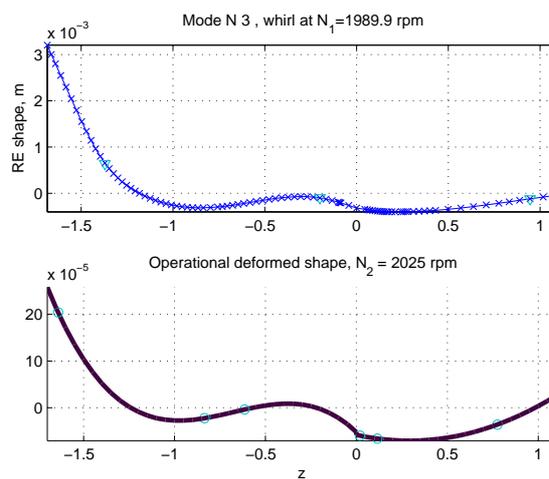
(a) Suivi d'ordre dans le plan 1

(b) Suivi d'ordre dans le plan 4

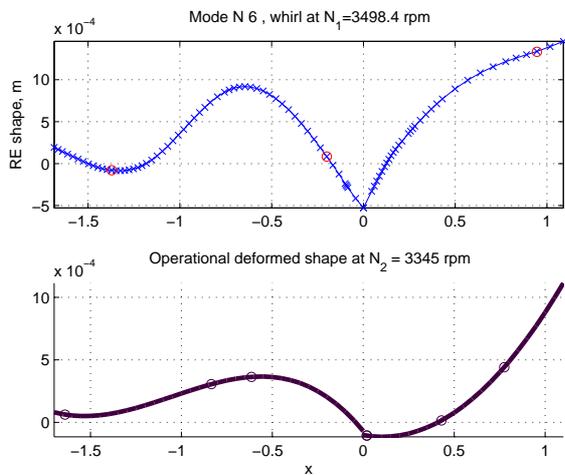
FIG. 6.31 – Réponse à deux plans différents du rotor BP



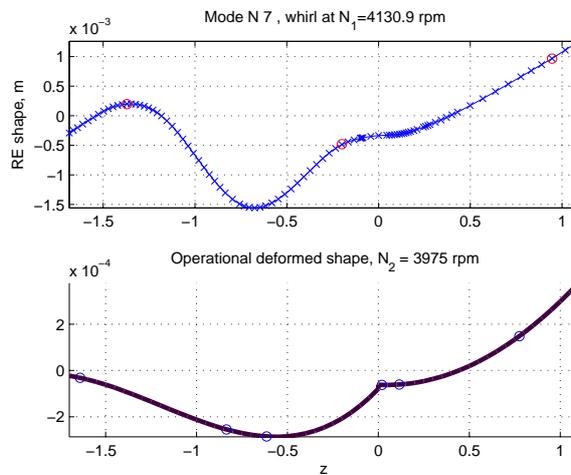
(a) 1er mode direct (balourd HP)



(b) 2nd mode direct (balourd HP)



(c) 3me mode direct (balourd HP)



(d) 4me mode direct (balourd HP)

FIG. 6.32 – Déformées modales numériques (en haut) et opérationnelles expérimentales (en bas)

$N_1^{\text{exp}}$	$N_2^{\text{exp}}$	$N_1^{\text{théo}}$	$N_2^{\text{théo}}$	rotor	ordre	mode	erreur
278	795			HP	2		
561	1585	574	1595	HP	1	1d	-0,6%
590	1665	615	1708	HP	1	1r	-2,6%
691	1935			HP	2		
693	2025	716	1989	HP	1		1,8%
845	2362			BP	2	1r	
825	2310	823	2286	HP	1	2r	1,0%
1173	3285	1249	3470	HP	1	3r	-5,6%
1195	3346			BP	2	2d	
1195	3345	1260	3500	HP	1	3d	-4,6%
1420	3975	1487	4131	HP	1	4d	-3,9%
1432	4010	1526	4239	HP	1	4r	-5,7%
1460	4088	1500	4167	BP	1	1r	-1,9%
1615	4522			BP	2		
1827	5115			HP	2		
1825	5110	1782	4950	BP	1	2r	3,1%
1834	5135	1817	5048	BP	1	1d	1,7%

TAB. 6.7 – Vitesses critiques

## Conclusion

Les études actuellement disponibles sur les moteurs multi-rotors sont essentiellement linéaires et ne représentent qu'en partie la problématique que l'on souhaite étudier (construction d'un système bi-rotors contrarotatif avec arbre basse pression surcritique).

Afin d'étudier la dynamique d'un tel système, un banc représentatif de la dynamique d'ensemble d'un moteur d'avion a été construit : les organes de cette machine sont représentés par des arbres et des disques de caractéristiques inertielles similaires, seuls quelques modes d'ensemble sont retenus. Cependant, une coïncidence parfaite est impossible à cause de certaines modifications topologiques telles que la permutation ou l'encastrement de certains paliers. La situation modale du banc représente ainsi un compromis en termes de pertinence et de pratique de conception et d'exploitation.

L'instrumentation du banc permet d'observer la déformation du système bi-rotors étudié sur une plage de fonctionnement comprenant quatre à cinq vitesses critiques selon configuration. Son dimensionnement prévoit des évolutions qui nous intéressent : introduction de la contra-rotation et abaissement du mode d'arbre BP dans la plage de fonctionnement.

Un modèle linéaire permet un placement modal correct vis-à-vis de la réponse directe au premier ordre. Cependant, quelques différences existent entre les prédictions faites lors du dimensionnement et le comportement observé de la machine.

Les essais en co- et contra-rotation ont justifié les prédictions numériques : les modes directs selon chaque rotor sont prédominants dans la réponse. L'interaction vibratoire des deux balourds a été mise en évidence. Les orbites quasi-périodiques ont souvent une forme complexe.

On a observé également l'apparition des modes rétrogrades suite à l'anisotropie introduite par les roulements, ce qui est en cohérence avec les prédictions du modèle non-linéaire du chapitre précédent.

Le mode prépondérant dans la réponse du banc au balourds résiduels des deux rotors a été le mode SP5 dans toutes les configurations. Le niveau de la réponse en contra-rotation est sensiblement identique à celui en co-rotation. Cependant, le changement du sens de précession prédominante rend la manipulation plus compliquée. L'abaissement du mode d'arbre a eu lieu sans perturber la réponse sur les autres modes. Un équilibrage à basse vitesse des masses ajoutées a cependant été nécessaire. Ce mode apparaît désormais dans la plage de fonctionnement de la machine au-dessus du mode de SP3.

L'utilisation de l'approche full spectrum s'est avérée utile pour identifier la participation de chaque ordre de réponse. Il permet de fournir des éléments à l'analyse, en particulier dans le cas d'intersection de branches directe et rétrograde proches d'une vitesse critique.

Enfin des réponses surharmoniques d'ordre 2 sont observées dans la réponse du banc que les calculs non-linéaires n'ont pas pu reproduire. Il s'agirait donc d'un phénomène jusque là non-modélisé, comme par exemple le mésalignement d'une pièce tournante.



# Conclusion et perspectives

Dans le cadre du présent doctorat nous avons étudié, sous plusieurs aspects, la dynamique d'ensemble des machines multi-rotors. De manière générale, on peut diviser les études menées en deux catégories : en théoriques et expérimentales. La partie théorique correspond à une amélioration de la modélisation et de la prise en compte des non-linéarités dues aux roulements pour l'analyse des réponses à balourd du système. La partie expérimentale a consisté à tester plusieurs configurations de la machine en restant dans une configuration bi-rotors à roulement interarbre. Ces deux volets sont liés par l'application au modèle du banc d'essai des méthodes développées dans la partie théorique.

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet Dynamique D'Ensemble (coopération entre le laboratoire LTDS et la société *Snecma Moteurs* – groupe *Safran*) et ouvre de nombreuses perspectives d'études aussi bien théoriques qu'expérimentales.

## Conclusion générale

La **partie théorique** a tout d'abord consisté à rendre compte de l'état de l'art de la modélisation des roulements pour les calculs dynamiques. Un intérêt particulier a été prêté aux **roulements** à rouleaux cylindriques, car le problème de déformation d'un rouleau entre les bagues n'a pas de solution analytique générale, d'autre part les paliers interarbre qui nous intéressent particulièrement, sont composés d'un roulement à rouleaux cylindriques. Un modèle numérique a été développé, basé sur une technique de découpage de chaque rouleau en tranches fines pour lesquelles on calcule une déformation approchée. Cette modélisation fournit une information assez complète sur la réaction d'un roulement à rouleaux, mais s'avère très coûteuse numériquement pour une utilisation directe dans un calcul de réponse dynamique. Des possibilités de simplification de cette modélisation ont été envisagées : utilisation du modèle complet sous forme d'abaque interpolé ou mise en oeuvre des relations analytiques approchées (négligeant notamment les couplages entre les degrés de liberté du roulement). Le temps de calcul est réduit d'un facteur de 100 dans le cas de l'interpolation et de 1000 par les modèles analytiques.

Pour traiter la dynamique d'ensemble des machines multi-rotors dans un cadre non-linéaire, nous avons développé une généralisation de la méthode de balance harmonique pour des cas d'excitation multi-fréquentielle.

La **balance harmonique** a d'abord été présentée dans l'optique d'une application numérique, développée de façon conjuguée avec la démarche AFT, implémentée avec les transformées

de Fourier rapides, et une procédure de continuation de type arc-length à pas curviligne variable. Une méthode de Newton adaptée aux problèmes de continuation de solutions de la balance harmonique ainsi qu'une démarche semi-analytique pour le calcul de la Jacobienne par FFT ont été implémentées.

Plusieurs critères d'étude de **stabilité** des solutions périodiques ont aussi été mis en œuvre : multiplicateurs de Floquet, déterminants de Hill, exposants de Lyapunov. Parmi ces méthodes, présentant chacune ses avantages et inconvénients, la méthode de Floquet s'est avérée la plus fiable.

Enfin, la généralisation aux cas **multi-fréquentiels** est faite de manière à traiter les cas où plusieurs excitations sont présentes. Pour ce faire, on fait appel à la représentation multi-dimensionnelle des domaines temporel et fréquentiel. Cette généralisation s'inscrit naturellement dans la démarche de la balance harmonique complétée d'une méthode de continuation. Une généralisation de l'étude de stabilité par les multiplicateurs de Floquet aux mouvements quasi-périodiques, basée sur les applications de Poincaré d'ordre supérieur, a été explorée. La méthode de la balance harmonique ainsi développée a d'abord été testée sur des exemples simples, puis appliquée au calcul de réponse à balourd sur un **modèle éléments finis** du banc d'essai bi-rotors avec la prise en compte des jeux de roulements. La taille du modèle se rapproche de celle des modèles industriels utilisés en dynamique d'ensemble. L'influence de la prise en compte des roulements non-linéaires a été mise en évidence et se manifeste par une modification des plages de régimes critiques et une distorsion des pics de résonance

La **partie expérimentale** de la thèse a consisté à observer expérimentalement des nouvelles configurations sur un banc d'essai partiellement représentatif de la dynamique d'ensemble d'un moteur d'avion. Pour cela, un système mécanique constitué de poutres (arbres) et de disques a été développé en observant la conformité du placement modal avec un modèle de moteur d'avion pris pour référence. Ainsi, en gardant la répartition des masses et des inerties, une structure simplifiée est construite à travers un dimensionnement linéaire, assurant la présence des modes d'intérêt dans la plage de fonctionnement de la machine. Ce banc a d'abord été testé en configuration initiale de manière à valider la conception, puis on a introduit la contra-rotation et enfin, on a rajouté une masse au milieu de l'arbre BP de manière à le rendre surcritique. Les essais ont consisté à étudier la réponse du banc lors d'une montée en régime lente avec un rapport constant entre les vitesses de rotation des rotors. Des suivis d'ordre par rapport à chacun des rotors ont aussi été utilisés, directement ou sous forme de full spectrum.

Les résultats des essais en **co-rotation** sont en accord avec les prédictions numériques ce qui valide le placement modal fait lors de la conception et le niveau global de balourd résiduel tolérable. Cependant, l'écart systématique sur les vitesses critiques a indiqué une possibilité d'amélioration du modèle linéaire par la prise en compte de la raideur des roulements en basculement. Deux autres particularités ont également été remarquées : la présence des modes rétrogrades indiquant une dissymétrie axiale ainsi que des réponses surharmoniques d'ordre 2.

Les essais en **contra-rotation** ont permis de mettre en évidence la généralisation de la notion des modes directs et rétrogrades et la compensation réciproque de l'influence des termes gyroscopiques de chaque rotor sur l'évolution des fréquences propres avec le régime. La modification des vitesses critiques ainsi engendrée provoque le rapprochement de certains régimes critiques, suite à quoi des battements ont été observés pour des amplitudes importantes (no-

tamment au voisinage de la vitesse critique directe du premier mode par rapport au rotor BP).

L'ajout d'une masse ajoutée au milieu du rotor BP a entraîné une chute de la fréquence du mode de ce dernier en le rendant **surcritique**. Comme prédit par les calculs puis confirmé par les essais, cette modification de la structure a très peu affecté les autres modes propres de la machine.

Les résultats des essais ont permis d'observer le fonctionnement dynamique des solutions technologiques innovantes. Ils ont aussi servi de base de comparaison aux résultats de calculs non-linéaires par la méthode développée au cours de cette étude. Comme la répartition de balourd est inconnue, ces résultats restent qualitatifs, mais les tendances dues à la présence des roulements à jeux sont observées aussi bien expérimentalement que numériquement.

## Perspectives

L'étude théorique de cette thèse peut être poursuivie aussi bien dans la direction de la prise en compte des roulements que dans les techniques de résolution et d'étude de la stabilité des solutions :

- Dans le cadre de la **modélisation détaillée des roulements**, la déformabilité des bagues ainsi que des effets dynamiques comme les effets centrifuges et gyroscopiques peuvent être pris en compte. Bien que les sources bibliographiques indiquent qu'ils sont négligeables dans la plage de fonctionnement du banc d'essai, les vitesses de rotation des rotors des moteurs d'avion réels sont plus élevées et peuvent engendrer des effets dus à la rotation, notamment l'évolution des jeux de roulements en fonction du régime. Parallèlement, la prise en compte de la lubrification peut être étudiée de manière à relier la dynamique et la thermodynamique du fonctionnement du roulement, et ainsi évaluer ses propriétés dissipatives.
- En ce qui concerne la prise en compte des **roulements dans les calculs de la dynamique** d'ensemble, il serait intéressant de compléter l'exploitation de l'abaque interpolé par le calcul des dérivées approchées directement à partir de l'abaque. Cela permettrait d'accéder à l'évaluation semi-analytique des Jacobiennes dans la résolution par balance harmonique. De plus, on pourrait automatiser la procédure de régression de l'abaque à une loi analytique de type loi de puissance plus jeu. Une autre possibilité serait la prise en compte du jeu qui, par exemple, varie pour le degré de liberté angulaire selon le déplacement transversal. Il serait également intéressant d'introduire des imperfections dans le roulement afin d'étudier leur impact sur la dynamique, par exemple, l'excentrement d'une bague tournante. Les possibilités de réduire la caractérisation dynamique des machines à un modèle linéaire sans dégrader les estimations des niveaux de la dynamique pourraient également être étudiées.
- La méthode de balance harmonique multi-dimensionnelle peut être complétée d'une méthode de **réduction de la taille du système** dynamique, notamment par une approche de type synthèse modale ou simplement par condensation sur les degrés de liberté non-linéaires. Il est néanmoins important de remarquer que cette dernière est peu compatible avec la méthode de continuation de type arc-length car la fréquence est

susceptible de changer à chaque pas d'itération, forçant à renouveler la condensation à chaque fois. Pour cela, il serait plus pertinent d'adopter une continuation de type AFC (Alternating Frequency–Coefficients), bien que celle-ci offre en général un moins bon conditionnement de la Jacobienne par rapport à l'approche arc-length.

- Une généralisation du contenu fréquentiel de la base d'excitation rapprocherait la résolution non-linéaire de la situation réellement présente dans les moteurs où le **rapport entre les vitesses de rotation varie** en fonction de régime. Le problème qui se pose pour la balance harmonique multi-dimensionnelle est que la base fréquentielle risque de dégénérer, notamment pour des rapports entiers entre ses éléments. Dans ce sens-là, l'utilisation des techniques de perturbation, notamment de type *averaging* semble très intéressante. L'utilisation de ces méthodes permettrait d'étudier le problème de balayage de la plage de fonctionnement de manière instationnaire, ce qui se rapprocherait des conditions d'exploitation des moteurs où les accélérations angulaires sont beaucoup plus importantes que celles étudiées.

D'un point de vue des études expérimentales, plusieurs perspectives sont également envisageables, notamment en termes d'identification, d'équilibrage, d'équipements :

- L'**identification** de propriétés dynamiques des roulements doit nécessairement aller de pair avec l'identification du balourd résiduel. Cela aurait permis d'utiliser la réponse synchrone de manière plus complète et pas seulement du point de vue de la position des vitesses critiques.
- En même temps que l'identification du balourd, différentes stratégies d'**équilibrage** peuvent être étudiées sur cette machine. En effet, dans le cas de notre machine, il est nécessaire de "contrôler" quatre vitesses critiques à l'aide de trois plans d'équilibrage. Il s'agit donc d'un problème sous-déterminé.
- Les éléments complexes non-linéaires de la dynamique d'ensemble ne se limitent pas aux roulements. Une place importante est occupée par les amortisseurs, notamment de type *squeeze film*, dont l'étude de l'impact sur la dynamique est envisagée actuellement.

# Annexes



# Bibliographie

- [And73] S. Andréason. Load distribution in a taper roller bearing arrangement considering misalignment. *Tribology*, (June) :84–92, 1973.
- [AR03] F. Assis Rodriguez. *Etude de la dynamique non-linéaire d'amortisseurs du type squeeze film*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [Ben02] D.E. Bently. *Fundamentals of rotordynamics diagnostics*. Bently Pressurized Bearings Press, 2002.
- [Big80] R. Bigret. *Vibrations des machines tournantes et des structures*. Technique et documentation, 1980. en 4 tomes.
- [Blo03] J.R. Blough. A survey of dsp methods for rotating machinery analysis, what is needed, what is available. *Journal of sound and vibration*, 262 :707–720, 2003.
- [Bol61] V.V. Bolotin. *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*. Pergamon, 1961. (en russe, une traduction est éditée par Pergamon en 1963).
- [CG89] T.M. Cameron and J.H. Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of non-linear dynamic systems. *Journal of applied mechanics*, 56(March) :149–154, 1989.
- [Cha06] D. Charleux. *Etude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2006.
- [Chi93] D. Childs. *Turbomachinery rotordynamics. Phénoména, modelling & analysis*. Wiley Interscience, 1993.
- [CLG98] A. Cardona, A. Lerusse, and M. Géradin. Fast fourier nonlinear vibration analysis. *Computational Mechanics*, 22, 1998.
- [Cri70] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. WILEY, 1970. volume 1.
- [CU81] L.O. Chua and A. Ushida. Algorithms for computing almost periodic steady state response of non-linear systems to multiple input frequencies. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 28(10) :953–971, 1981.
- [DB01] D. Demailly and J. Bonini. Nonlinear analysis of rotor systems including a bearing clearance by the multiple shooting method. *DETC2001/VIB-21770*, page 7, 2001.
- [Dem03] D. Demailly. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel. Application à la dynamique rotor*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.

- [Dim59] F.M. Dimentberg. *Vibrations en flexion des arbres en rotation*. Editions AN SSSR, 1959. (en russe, une traduction existe : Flexural vibrations of rotating shafts, Butterworth, 1961).
- [DMVM89a] J.M. De Mul, J.M. Vree, and D.A. Maas. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction - part i : general theory and application to ball bearings. *Journal of tribology*, 111(January) :142–148, 1989.
- [DMVM89b] J.M. De Mul, J.M. Vree, and D.A. Maas. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction - part ii : application to roller bearings and experimental verification. *Journal of tribology*, 111(January) :149–155, 1989.
- [Ehr98] F.F. Ehrich, editor. *Handbook of rotordynamics*. Krieger Publishing Company, 1998.
- [FH00] N.S. Feng and E.J. Hahn. Rolling element bearing non-linearity effects. *Proceedings ASME TURBOEXPO 2000, May 8-11, 2000, Munich, Germany*, (2000-GT-391) :8, 2000.
- [Gan97] R. Ganesan. Nonlinear vibrations and stability of a rotor-bearing system with nonsymmetric clearances. *Journal of engineering for gas turbines & power*, 119(Apr) :418–424, 1997.
- [Gar80] E.P. Jr Gargiulo. A simple way to estimate the bearing stiffness. *Machine Design*, (July 24) :107–110, 1980.
- [GE01] G. von Groll and D.J. Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of sound and vibration*, 241(2) :223–233, 2001.
- [Gen98] G. Genta. *Vibration of structures and machines, III ed*. Springer, New York, 1998.
- [GH83] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [GHV99] S. Gade, H. Herlufsen, and H. Vold. Characteristics of the vold-kalman order tracking filter. *Brüel & Kjaer Technical Review*, 1999.
- [Gmü97] T. Gmür. *Dynamique des structures. Analyse modale numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [GM99] P. Goldman and A. Muszynska. Application of full spectrum to rotating machinery diagnostics. *Orbit (Bentley-Nevada J.)*, (1) :17–21, 1999.
- [GR96] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations*. Masson, Paris, 1996.
- [GSTG06] M. Guskov, J.-J. Sinou, F. Thouverez, and A. Gouskov. Duffing oscillator under multiharmonic excitation. *Proceedings of IMAC-XXIV Conference on Structural Dynamics*, 2006.
- [GSTN04] M. Gouskov, J.-J. Sinou, F. Thouverez, and O.S. Naraïkin. Dynamique non-linéaire d’un système birotor. *XIVme Colloque National Vibrations Choc et Bruit, Juin 2004*, 2004.

- [GSTN06a] M. Guskov, J.-J. Sinou, F. Thouverez, and O. Naraïkin. Experimental and numerical investigations of a counter-rotating coaxial dual shaft test rig. *Proceedings of 7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, 25-28 September 2006*, 2006.
- [GSTN06b] M. Guskov, J.-J. Sinou, F. Thouverez, and O.S. Naraïkin. Numerical and experimental studies of a dynamical response of a dual shaft test rig. *Proceedings of IMAC-XXIV Conference on Structural Dynamics*, 2006.
- [GSTN07] M. Guskov, J.-J. Sinou, F. Thouverez, and O. Naraïkin. Experimental and numerical investigations of a dual-shaft test rig with intershaft bearing. *International Journal of Rotating Machinery*, 2007, 2007.
- [Har66] T. Harris. *Rolling element bearings*. John Wiley & Sons, Inc, 4th edition, 1966.
- [HSP03] S.P Harsha, K. Sandeep, and R. Prakash. The effect of speed of balanced rotor on non-linear vibrations associated with ball bearings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45 :725–740, 2003.
- [JJ03] G.H. Jang and S.W. Jeong. Stability analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness. *Journal of tribology*, 125 :91–101, 2003.
- [Jon60] A.B. Jones. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. *Journal basic engineering*, (June) :309–320, 1960.
- [JZ98] Z. Ji and J.W. Zu. Method of multiple scales for vibration analysis of rotor-shaft systems with non-linear bearing pedestal model. *Journal of sound and vibration*, 218(2) :293–305, 1998.
- [KC97] Y.B. Kim and S.-K. CHOI. A multiple harmonic balance method for the internal resonant vibration of a non-linear jeffcot rotor. *Journal of sound and vibration*, 208(3) :745–761, 1997.
- [Khr81] D. V. Khronin. *Vibrations des moteurs à turbines aéronautiques*. Mashinostroenie, 1981. (en russe).
- [Khr89] D. V. Khronin, editor. *Construction des moteurs à turbines aéronautiques*. Mashinostroenie, 1989. (en russe).
- [Kim96] Y.B. Kim. Quasi-periodic response and stability analysis for non-linear systems : a general approach. *Journal of sound and vibration*, 192(4) :821–833, 1996.
- [KN75] M.P. Kovalyov and M.Z. Narodetskiy. *Calcul des roulements à billes de précision*. Maschinostroenie, 1975.
- [KP85] Chr. Kaas-Petersen. Computation of quasi-periodic solutions of forced dissipative systems. *Journal of computational physics*, 58 :395–408, 1985.
- [KP86] Chr. Kaas-Petersen. Computation of quasi-periodic solutions of forced dissipative systems ii. *Journal of computational physics*, 64 :433–442, 1986.
- [KS91] A. Kahraman and R. Singh. Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. *Journal of sound and vibration*, 144(3) :469–506, 1991.

- [Kuz01] S.P. Kuznetsov. *Dynamical chaos*. Nauka (in russian), 2001.
- [Leg05] M. Legrand. *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. PhD thesis, Université de Nantes, 2005.
- [LF97] M. Lalanne and G. Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*. Number B5-110. 2nd edition, 1997.
- [LFH02] A. Liew, N. Feng, and E.J. Hahn. Transient rotordynamic modelling of rolling element bearing systems. *Journal of engineering for gas turbines & power*, 124(Oct) :984–991, 2002.
- [LL99] Y.-S. Lee and C.-W. Lee. Modelling and vibration analysis of misaligned rotor-ball bearing systems. *Journal of sound and vibration*, 224(1) :17–32, 1999.
- [Loz92] L.P. Lozitskiy, editor. *Construction et résistance des moteurs à turbines aéronautiques*. Vozdushnyy transport, 1992. (en russe).
- [Max85] J. Max. *Traitement de signal*. MASSON, 1985.
- [Mei70] L. Meirovitch. *Methods of analytical dynamics*. Dover, 1970.
- [Mer71] D.R. Merkin. *Introduction à la théorie de stabilité de mouvement*. Nauka, 1971. (en russe, une traduction existe : Introduction to the Theory of Stability (Texts in Applied Mathematics), Springer, 1996).
- [NB95] A.H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied non-linear dynamics. Analytical, computational and experimental methods*. John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [NM76] H.D. Nelson and J.M. McVaugh. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. *JEI*, (May) :593–599, 1976.
- [NM79] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Non-linear oscillations*. John Wiley & Sons, Inc, 1979.
- [NPTJ01] S. Nacivet, C. Pierre, F. Thouverez, and L. Jézéquel. Analysis of periodic frictional contact in finite element problems. *ASME Design Engineering Technical Conference*, (DETC2001/VIB21374 (10 pages)), 2001.
- [NS98] S. Narayanan and P. Sekar. A frequency domain based numeric-analytical method for non-linear dynamical systems. *Journal of sound and vibration*, 211(3) :409–424, 1998.
- [RIB<sup>+</sup>76] K.M. Ragulskis, R.A. Ionushas, A.K. Bakshis, M.S. Rondonas, U.K. Tamoshunas, and R.A. Dashevsky. *Vibrations des systèmes tournants*. Mokslas, 1976. (en russe).
- [Sam87] A.M. Samoilenko. *Elements of mathematical theory of multi-frequency oscillations. Invariant toruses*. Nauka, 1987.
- [SK99] V.I. Shalashilin and E.B. Kuznetsov. *Continuation and the best parametrization (in Applied Mathematics and Mechanics)*. Editorial URSS (in russian), 1999.
- [SN97] P. Sundararajan and S.T. Noah. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc length continuation method – application to rotor systems. *Journal of vibration and acoustics*, 119 :9–20, 1997.

- [SR88] R. Subbiah and N.F. Rieger. On the transient analysis of rotor-bearing systems. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 110(Oct) :515–520, 1988.
- [Sto92] A.F. Storace. A simplified method for predicting the stability of aerodynamically excited turbomachinery. (N92-14364) :285–299, 1992.
- [Sun78] C.S. Sunnersjö. Varying compliance vibrations of rolling bearings. *Journal of sound and vibration*, 58(3) :363–373, 1978.
- [SVSO06] F. Schilder, W. Vogt, S. Schreiber, and H.M. Osinga. Fourier methods for quasi-periodic oscillations. *International journal for numerical methods in engineering*, page 47, 2006. in press.
- [SVT05] J.-J. Sinou, C. Villa, and F. Thouverez. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor system. *International Journal of Rotating Machinery*, 2005 :179–189, 2005.
- [SVT06] J.-J. Sinou, C. Villa, and F. Thouverez. Experimental analysis of the dynamical response of a flexible rotor including the effects of external damping. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 1(4) :483–490, 2006.
- [TGP00a] M. Tiwari, K. Gupta, and O. Prakash. Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. *Journal of sound and vibration*, 238(5) :757–779, 2000.
- [TGP00b] M. Tiwari, K. Gupta, and O. Prakash. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. *Journal of sound and vibration*, 238(5) :723–756, 2000.
- [Van88] J.M. Vance. *Rotordynamics in turbomachinery*. John Wiley & Sons, 1988.
- [VIB81] *Vibrations dans la technique*. Machinostroenie, 1981. tome 3, sous la direction de K. Frolov (en russe).
- [Vil05] C. V. S. Villa. *Dynamique non linéaire des rotors. Applications numériques et expérimentales à un rotor flexible*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2005.
- [Vir00] L. Virgin. *Introduction to experimental non-linear dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [VST06] C. Villa, J.-J. Sinou, and F. Thouverez. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor system. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 2006.
- [Wan95] Y. Wang. Dynamics of unsymmetric piecewise-linear/non-linear systems using finite elements in time. *Journal of sound and vibration*, 185(1) :155–170, 1995.
- [Wan97] Y. Wang. Prediction of periodic response of rotor dynamic systems with nonlinear supports. *Journal of vibration and acoustics*, 119(Jul) :346–353, 1997.
- [Whi79] M.F. White. Rolling element bearing vibration transfer characteristics : effect of stiffness. *Journal of applied mechanics*, 46 :677–684, 1979.
- [Yos75] T Yoshizawa. *Stability theory and the existence of periodic solutions of almost periodic solutions*. Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1975.

- [Zal06] V.E. Zalizniak. *Bases du calcul scientifique*. Editions Dynamique régulière et chaotique, 2006. (en russe).

# Communications personnelles

1. M. Gousskov, J-J. Sinou, F. Thouverez et O.S. Naraïkine, Application d'un modèle numérique de roulement aux calculs d'un système birotor, *Proceedings du 7ème Colloque National en Calcul des Structures, 20-23 Mai 2005, Giens, France*, 6 pages.
2. M. Gousskov, J-J. Sinou, F. Thouverez et O.S. Naraïkine, Dynamique Non-linéaire d'un Système Birotor - Prise en Compte des Non-linéarités dues aux Roulements, *14ème Colloque Vibrations Chocs et bruit, 9-11 juin 2004, Ecully, France*, 12 pages.
3. M. Gousskov, J-J. Sinou, F. Thouverez and O.S. Naraïkine, Numerical and Experimental Studies of a Dynamical Response of a Dual Shaft Test Rig, *IMAC-XXIV Conference on Structural Dynamics, St Louis, Missouri, USA, January 30 - February 2 2006*, 8 pages.
4. M. Gousskov, J-J. Sinou, F. Thouverez and A. Gousskov, Duffing Oscillator Under Multiharmonic Excitation, *IMAC-XXIV Conference on Structural Dynamics, St Louis, Missouri, USA, January 30 - February 2 2006*, 8 pages.
5. M. Gousskov, J-J. Sinou, F. Thouverez and O.S. Naraïkine, Experimental and numerical investigations of a counter-rotating coaxial dual shaft test rig, *7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, 25-28 September 2006*, 9 pages.
6. M. Gousskov, J.-J. Sinou, F. Thouverez, and O.S. Naraïkin, Experimental and Numerical Investigations of a Dual-Shaft Test Rig with Intershaft Bearing, *International Journal of Rotating Machinery*, Volume 2007 (2007), Article ID 75762, 12 pages

# Nomenclature

- A** – matrice de la partie linéaire dans l'équation d'état ;
- B** – matrice de raideur généralisée dans l'équation en variations ;
- C** – matrice d'amortissement ;
- D** – matrice d'amortissement généralisé ;
- E** – matrice de coefficients élastiques ;
- $\mathcal{F}$**  – fonction de dissipation ;
- G** – matrice de termes gyroscopiques ;
- H** – matrice de fonctions d'interpolation (chapitre 1) ;
- $H_{0,1,2}$**  – matrices-coefficients du problème aux valeurs propres de la méthode de Hill (chapitre 4) ;
- I** – matrice unité ;
- J** – matrice jacobienne ;
- K** – matrice de raideur ;
- L** – matrice de l'opérateur linéaire dans l'équation harmonique ;
- M** – matrice de masse ;
- N** – matrice de termes centrifuges ;
- $N$  – nombre d'harmoniques retenues ;
- $N$  – vitesse de rotation, régime, rpm ;
- $N_c$  – nombre de coefficients harmoniques recherchés,
- $N_i$  – vitesse de rotation de  $i$ ème rotor, rpm ;  $i = 1, 2$  ;
- $N_p$  – nombre de points d'interpolation pour le calcul de l'application de Poincaré de second ordre ;
- P** – matrice de termes circulatoires (chapitre 1) ;
- P** – matrice de l'application de Poincaré  $P$  (chapitre 4) ;
- $\mathcal{P}$  – section de Poincaré ;
- $Q_j$**  – matrice de raideur du  $j$ -ème rouleau (chapitre 2) ;
- Q** – matrice de monodromie ;
- R** – matrice de raideur généralisée ;
- $R$  – erreur sommaire ;
- $\mathcal{R}$  – repère ( $\mathcal{R}_i$  repère inertiel,  $\mathcal{R}_l$  repère lié) ;
- T** – matrice de transformation de Fourier inverse tronquée ;
- $\mathcal{T}$  – énergie cinétique ;
- $\mathcal{U}$  – énergie de déformation ;
- $\mathcal{W}$  – travail des forces extérieures ;

- $X, Y, Z$  – coordonnées dans le repère tournant, m ;  
 $Z$  – nombre de rouleaux (chapitre 2) ;  
 $\Theta$  – matrice de changement de repère ;  
 $\Phi$  – matrice fondamentale ;  
 $\Sigma$  – hypersurface dans  $\mathcal{D}$ , définissant une section de Poincaré ;  
 $\Omega$  – volume du solide déformable ( $\partial\Omega$  sa frontière) ;  
 $\mathbf{\Omega}$  – matrice de vitesse de rotation du référentiel tournant ;  
 $\nabla$  – opérateur différentiel (définition des déformations) ;  
 $\tilde{\mathbf{a}}$  – vecteur de coefficients harmoniques (cos) de  $\tilde{\mathbf{x}}$  ;  
 $\tilde{\mathbf{b}}$  – vecteur de coefficients harmoniques (sin) de  $\tilde{\mathbf{x}}$  ;  
 $\tilde{\mathbf{c}}$  – vecteur de coefficients harmoniques (cos) de  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$  ;  
 $\tilde{\mathbf{d}}$  – vecteur de coefficients harmoniques (sin) de  $\tilde{\mathbf{f}}_{\text{NL}}$  ;  
 $\mathbf{f}$  – vecteur-fonction ;  
 $\mathbf{f}$  – vecteur des efforts généralisés dans le roulement (chapitre 2) ;  
 $\mathbf{f}_{\text{NL}}$  – vecteur de forces non-linéaires ;  
 $f$  – effort entre les bagues du roulement ;  
 $\mathbf{g}$  – vecteur de forces extérieures ;  
 $\mathbf{h}$  – vecteur de forces non-linéaires (dans l'espace d'état) ;  
 $i$  – unité imaginaire ( $\sqrt{-1}$ ) ;  
 $\mathbf{k}$  – vecteur-indice de composante harmonique ;  
 $m$  – moment en basculement entre les bagues du roulement ;  
 $m$  – nombre d'échelles temporelles (chapitre 5) ;  
 $\mathbf{n}$  – vecteur de la normale à  $\Sigma_1$  en un point ;  
 $n$  – nombre de degrés de liberté ;  
 $\mathbf{p}$  – perturbation de la solution étudiée ;  
 $\mathbf{q}_i$  – vecteur de réaction de l' $i$ -ième rouleau dans son repère (chapitre 2) ;  
 $\mathbf{q}$  – vecteur de forces d'excitation dans l'espace d'état ;  
 $\mathbf{r}$  – vecteur de position dans  $\mathcal{R}_i$  ;  
 $\mathbf{r}$  – vecteur de résidus (chapitres 3–5) ;  
 $r$  – vecteur d'erreur pour un ensemble de vitesses critiques (chapitre 6) ;  
 $\mathbf{s}$  – vecteur de forces extérieures (dans l'espace d'état) ;  
 $\mathbf{t}$  – vecteur de translation entre repères ;  
 $p$  – nombre de points de discrétisation temporelle,  
 $s$  – abscisse curviligne le long de la courbe de réponse,  
 $t$  – variable temporelle ;  
 $T$  – période de la solution ;  
 $\mathbf{u}$  – vecteur déplacement élastique ;  
 $u$  – déplacement ;  
 $v$  – valeur de vitesse critique, rpm ;  
 $\mathbf{v}_i$  – vecteur de réaction de l' $i$ -ième rouleau dans son repère (chapitre 2) ;  
 $\mathbf{x}$  – vecteur de coordonnées généralisées (degrés de liberté) ;  
 $x, y, z$  – coordonnées dans le repère fixe, m ;  
 $\mathbf{y}$  – vecteur d'état ;  
 $\mathbf{z}$  – vecteur de position (chapitre 1) ;

- $\mathbf{z}$  – vecteur d'inconnues augmenté du paramètre de contrôle (chapitres 3–5);  
 $\boldsymbol{\delta}$  – vecteur de déplacements généralisés relatifs des bagues du roulement;  
 $\boldsymbol{\varepsilon}$  – vecteur de composantes du tenseur de déformations;  
 $\theta$  – position angulaire de rotor, rad;  
 $\kappa$  – coefficient de participation de la vitesse de rotation d'une bague dans l'expression de la vitesse de rotation de la cage (chapitre 2);  
 $\kappa$  – coefficient de raideur non-linéaire (chapitres 3–5);  
 $\lambda$  – exposant de Lyapunov;  
 $\mu$  – multiplicateurs de Floquet;  
 $\nu$  – paramètre de contrôle dont l'influence est étudiée,  
 $\phi$  – fonction-dérivée temporelle dans l'équation différentielle étudiée;  
 $\varphi_i$  –  $i$ -ème solution fondamentale;  
 $\rho$  – déplacement radial relatif entre les bagues du roulement;  
 $\boldsymbol{\sigma}$  – vecteur de composantes du tenseur de contraintes (chapitre c :ph);  
 $\boldsymbol{\sigma}$  – point dans  $\Sigma_1$  (chapitre 4);  
 $\boldsymbol{\tau}$  – vecteur temps dans un domaine temporel multi-dimensionnel;  
 $\tau$  – temps normalisé;  
 $\boldsymbol{\omega}$  – vecteur de vitesse de rotation (chapitre 1);  
 $\boldsymbol{\omega}$  – base fréquentielle, (vecteur de fréquences incommensurables, chapitre 5);  
 $\omega$  – vitesse angulaire, rad/s;  
 $\omega$  – fréquence de base;  
 $(\quad)$  – grandeur correspondante au nœud de discrétisation de l'abaque de roulement (chapitre 2);  
 $(\sim)$  – vecteur ou matrice dont les composantes sont exprimées dans  $\mathcal{R}_l$ ;  
 $\square^{[0]}$  – solution dont on étudie la stabilité;  
 $\square^{[1]}$  – perturbation infinitésimale;  
 $\square^{(i)}$  – correspondant à l' $i$ -ème itération;  
 $\hat{\square}^{\{i\}}$  – correspondant à l' $i$ -ème terme harmonique (représentation complexe);  
 $\hat{\square}^{\{i,\cos\}}$ ,  $\hat{\square}^{\{i,\sin\}}$  – correspondant à l' $i$ -ème terme harmonique (représentation trigonométrique);  
 $\square_{[i]}$  – correspondant à l' $i$ -ème degré de liberté;  
 $\square_{(i)}$  – correspondant à l' $i$ -ème numéro de point temporel;  
 $\square_{\{i\}}$  – correspondant à l' $i$ -ème point de la courbe de réponse.  
 $\tilde{\square}$  – représentation fréquentielle trigonométrique;  
 $\hat{\square}$  – représentation fréquentielle complexe;  
 $\bar{\square}$  – représentation temporelle discrétisée (chapitre 3);  
 $\dot{\square}$  – dérivation temporelle;  
 $\check{\square}$  – représentation dans un domaine temporel multi-dimensionnel;  
 $(\square, \square)$  – produit scalaire;  
 $\angle(\square, \square)$  – angle;  
 $\otimes$  – produit de Kronecker;  
 $BP$  – rapporté au rotor BP;  
 $HP$  – rapporté au rotor HP;  
 $abs$  – basé sur la valeur absolue;  
 $exp$  – expérimental;

*quad* – basé sur un critère quadratique ;

*th* – théorique ;

[ ] – valeur admissible maximale.



# Table des figures

1.1	Moteur CFM-56 série 7 . . . . .	7
1.2	Eléments d'un moteur birotor . . . . .	7
1.3	Exemples de schémas de force de rotors et de stators [Loz92] . . . . .	8
1.4	Exemples de composants . . . . .	8
1.5	Exemple de diagramme de Campbell d'un turboréacteur bi-rotors : par rapport aux rotors 1 (gauche) et 2 (droite). . . . .	11
1.6	Solide déformable . . . . .	12
1.7	Repères utilisés et convention de signes . . . . .	16
1.8	Eléments finis . . . . .	16
1.9	Fonctions de forme : polynômes d'Hermite . . . . .	17
1.10	Rotor élémentaire . . . . .	19
1.11	Vibrations libres et forcées du système (1.40) . . . . .	20
1.12	Mouvement de précession, composé de celui direct (–) et rétrograde (- -) . . . . .	23
1.13	Vibrations libres et forcées du système à stator anisotrope (1.55) . . . . .	23
2.1	Roulement . . . . .	25
2.2	Modèles de roulement selon le nombre de ddl pris en compte . . . . .	26
2.3	Modes de fonctionnement de roulement avec jeux [GSTN04] . . . . .	27
2.4	Considérations sur la cinématique des roulements. . . . .	28
2.5	Repères utilisés dans la modélisation des roulements . . . . .	31
2.6	Illustration de la méthode “slicing” dans le plan $z-r_j$ . . . . .	31
2.7	Exemple de roulement : NU1014ML . . . . .	33
2.8	Notations pour ramener le vecteur déplacement dans un repère polaire . . . . .	34
2.9	Force radiale $f_\rho$ en fonction de $\rho$ , $\phi$ , $\vartheta_t$ . . . . .	35
2.10	Force tangentielle $f_t$ en fonction de $\rho$ et de $\phi$ . . . . .	35
2.11	Moment $m_t$ . . . . .	36
2.12	Moment $m_\rho$ . . . . .	36
2.13	Interpolation multi-linéaire. . . . .	37
2.14	Elément de raideur radiale non-linéaire axisymétrique . . . . .	39
3.1	Détails sur la résolution algébrique . . . . .	52
3.2	Boucle de continuation . . . . .	53
3.3	Boucle d'itération de Newton modifiée . . . . .	54
3.4	Réponse d'un oscillateur linéaire par morceaux . . . . .	55

3.5	Réponse du système (3.69). . . . .	56
3.6	Deux oscillateurs linéaires couplés (3.71) . . . . .	57
3.7	Réponse du système (3.71). . . . .	58
4.1	Multiplicateurs de Floquet : types de bifurcations . . . . .	64
4.2	Section de Poincaré . . . . .	65
4.3	Calcul des exposants de Lyapunov . . . . .	66
4.4	Evaluation de la stabilité de l'oscillateur de Duffing par les méthodes de Floquet et de Hill . . . . .	69
4.5	Evaluation de la stabilité par l'exposant de Lyapunov dominant . . . . .	69
4.6	Problème de contact rotor stator. Système dynamique . . . . .	71
4.7	Problème de contact rotor stator. Résultats . . . . .	72
4.8	Evaluation de stabilité de l'oscillateur linéaire par morceaux par les méthodes de Floquet et de Hill (“—” <i>courbe de réponse</i> , “o” <i>stabilité</i> ). . . . .	74
5.1	Illustrations des concepts associés à la représentation multi-dimensionnelle de temps . . . . .	76
5.2	Termes harmoniques ( $m = 2, N = 5$ ) . . . . .	78
5.3	Section de Poincaré d'ordre 2 . . . . .	80
5.4	Réponse de l'oscillateur de Duffing (5.20) à une excitation quasi-périodique : courbes pour l'ensemble de réponse . . . . .	83
5.5	Réponse de l'oscillateur de Duffing (5.20) à une excitation quasi-périodique : détail . . . . .	84
5.6	Réponse et stabilité d'un oscillateur de Duffing. . . . .	85
5.7	Vérification temporelle des résultats obtenus par la balance harmonique multi-dimensionnelle . . . . .	86
5.8	Réponse et stabilité d'un oscillateur de Duffing ( $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{3.8}$ ). . . . .	87
5.9	Réponse et stabilité d'un oscillateur de Duffing ( $\omega_1/\omega_2 = 2$ ). . . . .	87
5.10	Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Courbe de réponse sur $x_1$ (masse 1) . . . . .	89
5.11	Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Courbe de réponse sur $x_2$ (masse 2) . . . . .	89
5.12	Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Composantes harmoniques pour la masse 1 . . . . .	90
5.13	Réponse quasi-périodique du système de deux oscillateurs couplés par une raideur non-linéaire. Composantes harmoniques pour la masse 2 . . . . .	90
5.14	Modèle du banc d'essai . . . . .	91
5.15	Application de la méthode de balance harmonique avec continuation au cas linéaire : déplacement horizontal du noeud interarbre . . . . .	93
5.16	Influence des jeux de roulement : déplacement horizontal au noeud interarbre. . . . .	94
5.17	Réponses en déplacement dans le plan horizontal et vertical au noeud interarbre dans le cas avec jeux dans tous les roulements (P12345). . . . .	94
5.18	Influence des jeux de roulement : réactions dans le roulement interarbre . . . . .	95
5.19	Influence des jeux de roulement : moments dans le roulement interarbre . . . . .	96

5.20	Influence du mésalignement transversal 1 mm sur P5 (modèle avec P4 et P5 non-linéaires avec jeux) : déplacement horizontal du noeud interarbre . . . . .	99
5.21	Influence du mésalignement transversal 1 mm sur P5 (modèle avec tous les roulements non-linéaires avec jeux) : déplacement horizontal du noeud interarbre . . . . .	99
6.1	Moteur complet et définition des sous-ensembles rotor HP, BP et stator . . . . .	103
6.2	Support-paliers utilisés dans le banc DDE [Vil05] . . . . .	104
6.3	Evolution topologique moteur → banc d'essai bi-rotors . . . . .	104
6.4	Evolution de la situation dynamique – comparaison des digrammes de Campbell . . . . .	105
6.5	Diagrammes de Campbell de différentes configurations du banc DDE . . . . .	108
6.6	Modes propres du banc DDE (configuration initiale) . . . . .	110
6.7	L'ensemble du banc . . . . .	111
6.8	Banc DDE : détails . . . . .	112
6.9	Instrumentation du banc . . . . .	112
6.10	Instrumentation du banc : détails . . . . .	113
6.11	Salle de contrôle . . . . .	113
6.12	Profil de l'essai (en haut : vitesse de rotation HP, en bas : déplacement de l'interarbre) . . . . .	116
6.13	Rappel du diagramme de Campbell théorique (configuration initiale, co-rotation) . . . . .	117
6.14	Suivi d'ordre au plan interarbre par rapport au rotor HP . . . . .	117
6.15	Suivi d'ordre au plan interarbre par rapport au rotor BP . . . . .	118
6.16	Réponse aux extrémités de la machine . . . . .	118
6.17	Full spectrum à l'ordre 1 . . . . .	120
6.18	Rotation de l'orbite aplatie . . . . .	120
6.19	Déformées modales numériques (en haut) et opérationnelles expérimentales (en bas) . . . . .	121
6.20	Réponse de l'ensemble du système, ordre 1 . . . . .	122
6.21	Recherche des valeurs de raideur en rotation des roulements de manière à minimiser $R^{abs}$ . . . . .	124
6.22	Recherche des valeurs de raideur en rotation des roulements de manière à minimiser $R^{quad}$ . . . . .	124
6.23	Diagramme de Campbell du modèle recalé . . . . .	125
6.24	Essai type en contra-rotation (configuration initiale) : vitesse de rotation du rotor HP en fonction du temps (en haut), enregistrement temporel du déplacement horizontal au plan interarbre (en bas) . . . . .	126
6.25	Diagramme de Campbell théorique (configuration initiale, contra-rotation) . . . . .	127
6.26	Suivi d'ordre : déplacement horizontal et vertical au roulement interarbre . . . . .	128
6.27	Modes directs par rapport au rotor HP (vitesses critiques à l'ordre 1) . . . . .	129
6.28	Réponse temporelle mesurée . . . . .	131
6.29	Condition d'essais et prévisions théoriques . . . . .	133
6.30	Suivi d'ordre : déplacement horizontal au plan interarbre par rapport aux rotors BP et HP . . . . .	134
6.31	Réponse à deux plans différents du rotor BP . . . . .	134

6.32 Déformées modales numériques (en haut) et opérationnelles expérimentales (en bas) . . . . .	135
--	-----

# Liste des tableaux

6.1	Correspondance entre les éléments banc Dynamique D'Ensemble birotor – mo- teur . . . . .	102
6.2	Paramètres du rotor BP . . . . .	107
6.3	Paramètres du rotor BP . . . . .	109
6.4	Vitesses critiques . . . . .	119
6.5	Vitesses critiques recalées, rotor BP . . . . .	125
6.6	Vitesses critiques (configuration initiale, contra-rotation) . . . . .	130
6.7	Vitesses critiques . . . . .	136