

# Non-linéarité Kerr dans les Fibres Optiques Microstructurées

**Fabien Drouart**

André Nicolet  
Gilles Renversez

(Institut Fresnel - Équipe C.L.A.R.T.E.)

Soutenance de thèse, lundi 10 Novembre 2008



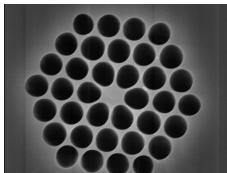
- Introduction
- Motivations
- Démarche
- Équations Non-linéaires
- Méthode numérique
  - 0- Préliminaires
  - 1- Éléments Finis
  - 2- Méthode itérative
- Résultats scalaires ...
  - Analyse technique
  - Étude physique
  - Soliton de Townes
  - ... et vectoriels
  - Étude physique
  - Soliton de Townes
- FOM à défaut creux
  - Principe
  - Mode accepteur
- Conclusions



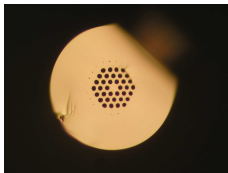
## Quel problème voulons-nous étudier ?

### ☞ **Non-linéarité** dans les Fibres Optiques Microstructurées

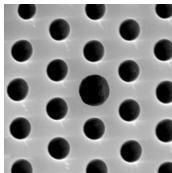
- ✓ à **cœur plein** et à **défaut creux**
  - ✓ en tenant compte de la **dimension transverse**
  - ✓ avec un profil transverse de **taille finie**
- Étude du **soliton spatial** différent du soliton temporel.



FOM à cœur plein en silice  
(diam. cœur  $\approx 2 \mu\text{m}$ )  
photo : LPN - Marcoussis



FOM en verre de chalcogénure  
(diam. cœur  $\approx 5 \mu\text{m}$ )  
photo : Université de Rennes - Perfos



FOM à défaut creux  
(diam. cœur  $\approx 20 \mu\text{m}$ )  
Montage

## Introduction

Motivations  
Démarche

## Équations Non-linéaires

## Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

## Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

## FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

## Conclusions



## Pourquoi cette étude nouvelle ?

- ☞ **Restrictions des fibres classiques à saut d'indice :**
  - dans le nombre de degrés de liberté et dans leur plage de variation
  - dans les transferts de puissance et de données
  
- ☞ **FOM : grand nombre de degrés de liberté dans leurs structures et donc dans leurs propriétés :**
  - **modulation des effets non-linéaires**
  
- ☞ **Autre approche que l'équation de Schrödinger non-linéaire :**
  - équation **de type Helmholtz** provenant **directement des équations de Maxwell**.
  
- ☞ **Pas d'études réalisées sur les non-linéarités dans les FOMs avec un profil transverse fini.**

Introduction

Motivations

Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Comment allons-nous procéder ?

- 1 **Conception et implémentation** de la méthode numérique de résolution du problème non-linéaire dans les fibres optiques dans le cadre de **l'approximation scalaire**.
- 2 **Étude technique** de la méthode numérique dans la **fibre à saut d'indice** puis dans la **FOM à cœur plein**
  - ☞ Validation et optimisation de l'approche.
- 3 **Étude physique** des solutions non-linéaires obtenues et comparaison avec le **milieu homogène**.
- 5 Passage au modèle **vectoriel complet** dans la **fibre à saut d'indice** puis dans la **FOM à cœur plein**.
- 4 **Extension du domaine d'étude** à la FOM à défaut creux.

Introduction

Motivations

Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Le point de départ...

Équations de Maxwell en l'absence de sources :  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ,  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ .

☞ L'équation non-linéaire **vectorielle** (effet Kerr optique) :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k_0^2 \underbrace{\epsilon_r(x,y)}_{n_0^2 + n_{nl}^2 |\mathbf{E}|^2} \mathbf{E}$$

## Approximation scalaire utilisée dans le cadre du guidage faible

✓ Les solutions recherchées (fibre invariante selon l'axe 0z) :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \Re \{ \phi(x, y) e^{-i(\omega t - \beta z)} \} \mathbf{e}_t$$

✓ L'équation non-linéaire scalaire :

$$\Delta_t \phi + k_0^2 \underbrace{\epsilon_r(x,y)}_{n_0^2 + n_{nl}^2 |\phi|^2} \phi = \beta^2 \phi$$

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Comment résoudre numériquement le problème non-linéaire ?

Il faut linéariser l'équation non-linéaire :  $\Delta_t \phi_i + k_0^2 (n_0^2 + n_{nl}^2 |\phi_i|^2) \phi_i = \beta_i^2 \phi_i$

## Une méthode itérative de Picard comme base ...

... qui consiste à injecter dans le terme non-linéaire le **champ obtenu à l'itération précédente**.

En pratique, à l'étape  $i$

nous devons résoudre le problème :  $\Delta_t \phi_i + k_0^2 (n_0^2 + n_{nl}^2 |\phi_{i-1}|^2) \phi_i = \beta_i^2 \phi_i$

Il s'agit donc d'un problème **linéaire aux valeurs propres** où :

- la grandeur **connue** est la **longueur d'onde**  $\lambda$  ( $k_0 = 2\pi/\lambda$ )
- les **inconnues** sont : la **valeur propre**  $\beta$  et le **vecteur propre**  $\phi$

**L'AMPLITUDE N'EST PAS FIXÉE !**

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique  
0- Préliminaires  
1- Éléments Finis  
2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...  
Analyse technique  
Étude physique  
Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique  
Soliton de Townes

FOM à défaut creux  
Principe  
Mode accepteur

Conclusions



## Prise en compte du caractère non-linéaire

L'équation non-linéaire scalaire "physique" est

$$\Delta_t \phi + k_0^2 (n_0^2 + |n_{nl} \phi|^2) \phi = \beta^2 \phi \quad \Rightarrow \quad (\beta, \phi)$$

Si nous posons :

$$\boxed{n_{nl} \phi = \phi'} \quad \text{alors} \quad \Delta_t \phi' + k_0^2 (n_0^2 + |\phi'|^2) \phi' = \beta^2 \phi'$$

Puis, si nous posons :

$$\boxed{\phi' = \chi \psi}$$

alors l'équation non-linéaire devient

$$\Delta_t \psi + k_0^2 (n_0^2 + |\chi \psi|^2) \psi = \beta^2 \psi \quad \Rightarrow \quad (\beta, \chi \psi)$$

Une équation linéaire aux valeurs propres

$$\Delta_t \psi_i + k_0^2 (n_0^2 + |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2) \psi_i = \beta_i^2 \psi_i \quad \Rightarrow \quad (\beta_{fin}, \chi_{fin} \psi_{fin})$$

où  $\beta_{fin}$  est la valeur propre et  $\chi_{fin} \psi_{fin}$  le champ propre renormalisé.Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Annulation du résidu pondéré

Si  $\psi_i$  est la solution exacte ...

... le résidu appliqué à l'équation **NON-LINÉAIRE** est

$$\int_K (\Delta_t \psi_i + k_0^2 (n_0^2 + |\chi_i \psi_i|^2) \psi_i - \beta_i^2 \psi_i) \overline{\psi_i} dS = 0 \quad (1)$$

Par construction de  $\psi_i$  avec le processus itératif de Picard ...

... le résidu appliqué à l'équation **LINÉAIRE** est

$$\int_K (\Delta_t \psi_i + k_0^2 (n_0^2 + |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2) \psi_i - \beta_i^2 \psi_i) \overline{\psi_i} dS = 0 \quad (2)$$

Par combinaison des deux équations,

**Facteur de renormalisation  $\equiv$  Amplitude de la solution**

$$\chi_i^2 = \frac{\int_K |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2 |\psi_i|^2 dS}{\int_K |\psi_i|^4 dS}$$

✎ A. Nicolet, F. Drouart, G. Renversez, and C. Geuzaine, *A finite element analysis of spatial solitons in optical fibres*, COMPEL, **26** (2007)

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

**0- Préliminaires**

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions

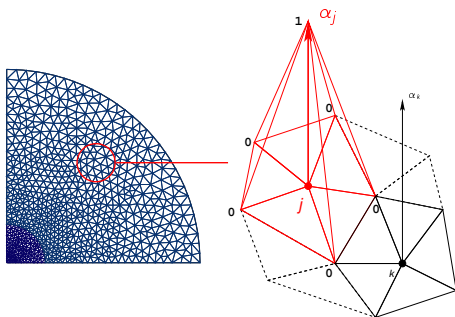




$$\Delta_t \psi(x, y) + k_0^2 \left( n_0^2(x, y) + |\chi \psi(x, y)|^2 \right) \psi(x, y) = \beta^2 \psi(x, y)$$

## ❶ Méthode des Éléments Finis :

$$\psi(x, y) \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{\text{nb él.}} \psi_j \alpha_j(x, y)$$



☞ **Modélisation numérique de l'équation non-linéaire !**

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

**1- Éléments Finis**

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

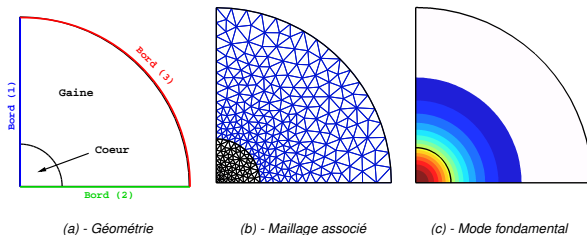
FOM à défaut creux

Principe

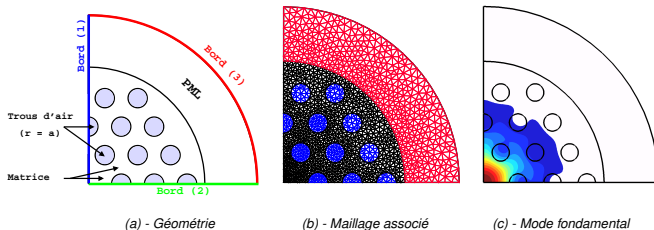
Mode accepteur

Conclusions

## Fibre optique à saut d'indice



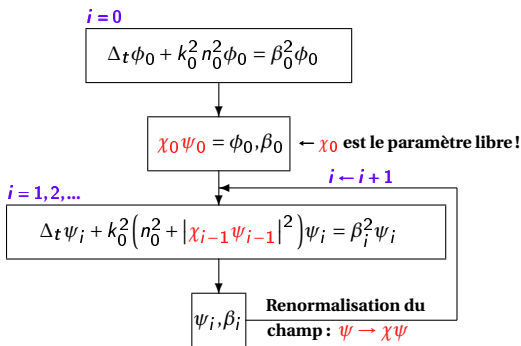
## Fibre optique microstructurée à cœur plein



$$\Delta_t \psi(x, y) + k_0^2 \left( n_0^2(x, y) + |\chi \psi(x, y)|^2 \right) \psi(x, y) = \beta^2 \psi(x, y)$$

## ② Méthode itérative : algorithme auto-cohérent

⇒ **Solution linéaire** comme solution initiale.



☞ Résolution numérique de l'équation non-linéaire !

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

**2- Méthode itérative**

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

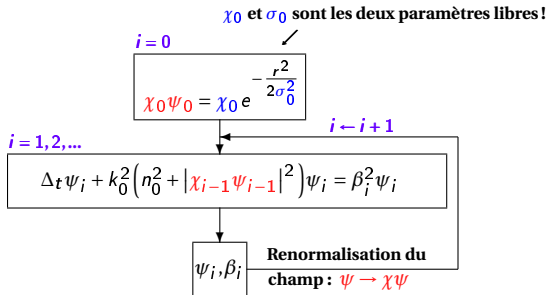
Conclusions



$$\Delta_t \psi(x, y) + k_0^2 \left( n_0^2(x, y) + |\chi \psi(x, y)|^2 \right) \psi(x, y) = \beta^2 \psi(x, y)$$

## ② Méthode itérative : algorithme auto-cohérent modif.

⇒ **Gaussienne** comme solution initiale.



☞ Résolution numérique de l'équation non-linéaire !

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

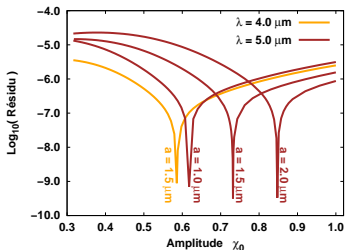
Conclusions



## Quelles sont les “bonnes” solutions non-linéaires ?

Critère de qualité de la solution obtenue à la convergence

$$\int_F \left[ \Delta_t \psi_{fin} + (n_0^2 + |\chi_{fin} \psi_{fin}|^2) \psi_{fin} - \beta_{fin}^2 \psi_{fin} \right] \overline{\psi_{fin}} dS \stackrel{?}{=} 0$$



Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

**Analyse technique**

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

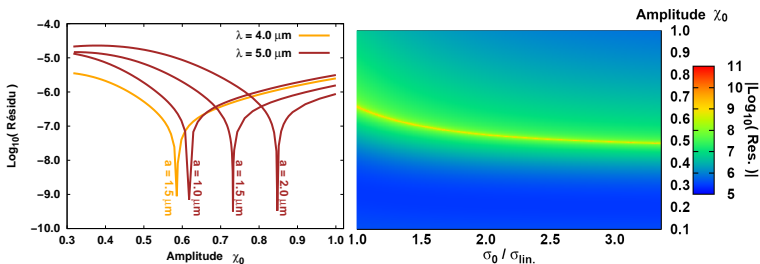
Conclusions



## Quelles sont les “bonnes” solutions non-linéaires ?

Critère de qualité de la solution obtenue à la convergence

$$\int_F \left[ \Delta_t \psi_{fin} + (n_0^2 + |\chi_{fin} \psi_{fin}|^2) \psi_{fin} - \beta_{fin}^2 \psi_{fin} \right] \overline{\psi_{fin}} dS \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

(a) - Solution linéaire ( $\chi_0$  varie)(b) - Gaussienne ( $\chi_0$  et  $\sigma_0$  variant)

Résidu **obtenu à la convergence** en fonction des **solutions initiales** injectées en entrée de l'algorithme.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

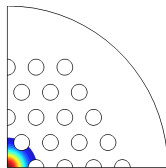
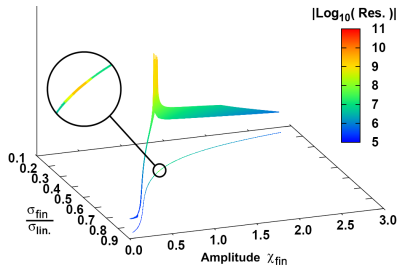
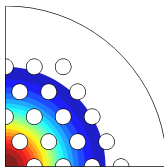
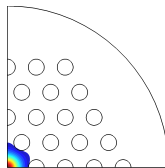
Principe

Mode accepteur

Conclusions



Résidu obtenu à la convergence en fonction des **solutions non-linéaires finales** obtenues à la convergence.

(a) -  $\sigma_0 = 4.0 \mu\text{m}$ (b) -  $\sigma_0 = 10.0 \mu\text{m}$ 

(c) - Solution auto-cohérente

Quelle que soit la fonction gaussienne injectée,

nous obtenons avec l'**algorithme auto-cohérent** une **unique solution non-linéaire auto-cohérente** ou **soliton spatial** ( $\beta_{coh}, \chi_{coh}, \psi_{coh}$ ).

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

**Analyse technique**

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



... l'étude technique est terminée

### L'algorithme auto-cohérent

- ✓ est **initialisé** par le **problème linéaire**
- ✓ est **optimisé** par l'utilisation d'**un maillage adapté**
- ✓ est **optimisé** par la recherche du minimum (**nombre d'or**)
- ✓ **détermine** le **soliton spatial**

... l'étude physique peut commencer.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

**Analyse technique**

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions

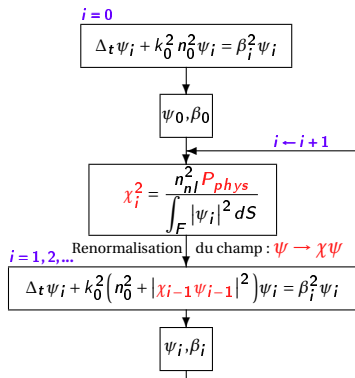




## L'algorithme "à puissance fixée"

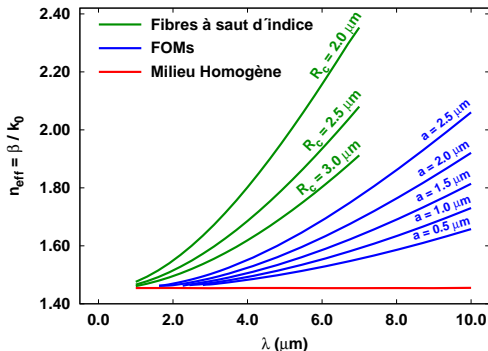
## Simple modification de l'algorithme auto-cohérent

$$\chi_i^2 = \frac{\int_K |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2 |\psi_i|^2 dS}{\int_K |\psi_i|^4 dS} \quad \text{devient} \quad \chi_i^2 = \frac{n_{nl}^2 P_{phys}}{\int_F |\psi_i|^2 dS}$$





## Le soliton spatial dépend de la structure



- ☞ L'indice effectif du **soliton spatial dans le milieu homogène** est **constant** suivant la longueur d'onde :  $n_{\text{eff}} \approx 1.454$ .

La solution auto-cohérente (soliton spatial)

dépend de la **dimension transverse finie des fibres optiques**.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Le soliton de Townes dans le milieu homogène

## L'équation non-linéaire

$$\Delta_{\mathbf{t}}\phi + k_0^2 (n_0^2 + n_n^2 |\phi|^2)\phi = \beta^2 \phi$$

☞ Résolution par l'**algorithme auto-cohérent** : **soliton spatial**

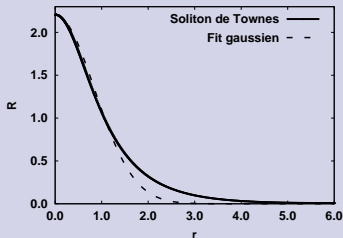
Après différents changements de variables et pour  $\beta$  fixé ( $\beta = k_0$ )

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - R(r) + R^3(r) = 0 \quad \text{avec} \quad R'(0) = 0, \quad R(\infty) = 0$$

☞ Résolution par une **méthode de tir** : **soliton de Townes**

## Le soliton de Townes est caractérisé par :

- ✓ son profil :
- ✓ son ordonnée à l'origine  
 $R(0) \approx 2.206$
- ✓ son coefficient  
 $N_{cr} = \int |R|^2 r dr \approx 1.862.$



## Comment comparer le soliton spatial au soliton de Townes ?

### Le coefficient $N_{cr}$ (avec la méthode de tir)

- ✓ il représente la puissance du soliton de Townes
- ✓ il correspond à la puissance critique avant l'autofocalisation instable dans le milieu homogène
- ✓ il est **indépendant de la constante de propagation  $\beta$**

$$N_{cr} = \int |R|^2 r dr \quad \text{ou} \quad N_{cr} = \frac{4\pi n_0 n_2}{\lambda^2} P_{cr}.$$

↯ G. Fibich and A. L. Gaeta, *Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides*, Opt. Lett., **25** (2000)

### Nous définissons un coefficient $N_{coh}$ (avec la méthode auto-cohérente)

- ✓ il représente la puissance du soliton spatial dans le **milieu homogène étudié** et dans les **fibres optiques**
- ✓ il **dépend de la constante de propagation  $\beta$**

$$N_{coh} = \frac{4\pi^2 n_0}{\beta_{coh} \lambda^3} P_{coh}.$$

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

**Soliton de Townes**

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

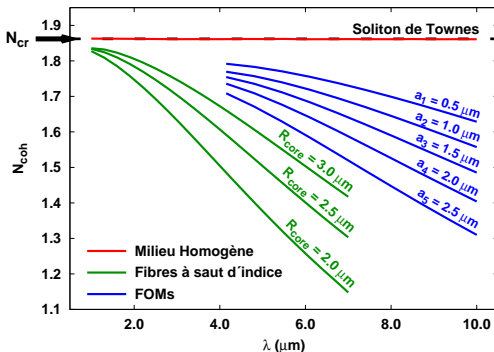
Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Généralisation du soliton de Townes dans les fibres optiques



### Le soliton spatial

- ✓ **est** le soliton de Townes dans le milieu homogène non-linéaire
- ✓ **n'est pas** le soliton de Townes dans les fibres optiques.

✎ F. Drouart, G. Renversez, A. Nicolet, and C. Geuzaine, *Spatial Kerr solitons in optical fibres of finite size cross section : beyond the Townes soliton*, J. Opt. A : Pure Appl. Opt., **10** (2008)

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

- 0- Préliminaires
- 1- Éléments Finis
- 2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

- Analyse technique
- Étude physique

**Soliton de Townes**

... et vectoriels

- Étude physique
- Soliton de Townes

FOM à défaut creux

- Principe
- Mode accepteur

Conclusions



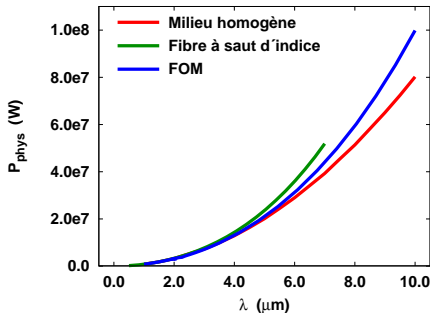
## Des puissances élevées ... comme le Townes !

La résolution numérique nous donne :  $P_{coh} = \int_F |\chi_{coh} \psi_{coh}|^2 dS$

La puissance physique (en watt) :  $P_{phys} = \underbrace{\frac{\epsilon_0 c n_{eff}}{2}}_A \int_F |\phi|^2 dS$

↔  $\chi_{coh} \psi_{coh} = n_{nl} \phi$  (résolution numérique indépendante de  $n_{nl}$ )

$P_{phys} = A \frac{P_{coh}}{n_{nl}^2}$  : Plus  $n_{nl}^2$  est fort, plus  $P_{phys}$  à injecter est faible



Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



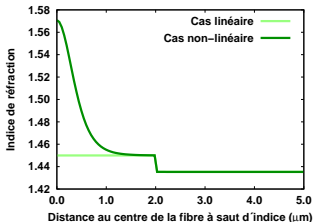
## L'étude vectorielle est-elle nécessaire ?

L'approximation scalaire n'est valable que si

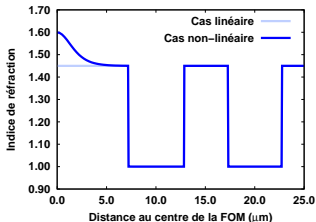
la variation d'indice est **négligeable** sur une longueur d'onde

$$R = \frac{n_{max} - n_{min}}{n_{min}} \ll 1$$

☞ D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Bell Laboratories Series, New Jersey, 1972



(a) - Fibre à saut d'indice :  $R \approx 0.08$



(b) - Fibre optique microstructurée :  $R \approx 0.1$

☞ Approximation scalaire **plus aussi précise** avec un effet Kerr.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions





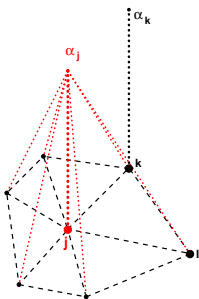
## L'équation non-linéaire vectorielle avec un effet Kerr optique

Directement à partir des équations de Maxwell :

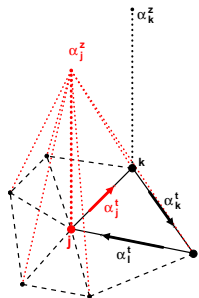
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k_0^2 \underbrace{\epsilon_r(x, y)}_{n_0^2 + n_j^2 |E|^2} \mathbf{E}$$

Les solutions recherchées sont de la forme :  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{e}_z) e^{i\beta z - i\omega t}$

## La Méthode des Éléments Finis vectorielle



Fonction de forme scalaire



Fonction de forme vectorielle

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



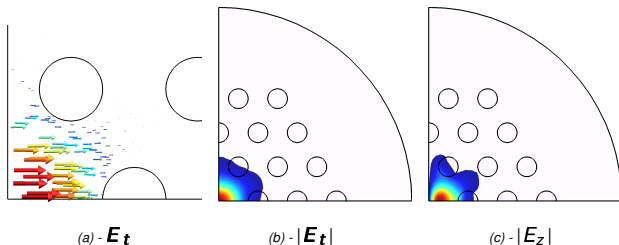
## Le même principe que le cas scalaire ... ... mais pas la même difficulté !

L'expression du résidu...

$$\int_F \left( (\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{E}_{\mathbf{t}}) \cdot (\nabla_{\mathbf{t}} \times \overline{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}}) + \nabla_{\mathbf{t}} E_z \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{E}_z + i\beta \nabla_{\mathbf{t}} E_z \cdot \overline{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}} - i\beta \mathbf{E}_{\mathbf{t}} \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{E}_z + \beta^2 \mathbf{E}_{\mathbf{t}} \cdot \overline{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}} \right) dS$$

$$= k_0^2 \int_F \left( n_0^2 + |\chi|^2 (|\mathbf{E}_{\mathbf{t}}|^2 + |E_z|^2) \right) (\mathbf{E}_{\mathbf{t}} \cdot \overline{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}} + E_z \overline{E}_z) dS$$

## Au final ... le soliton spatial vectoriel



Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

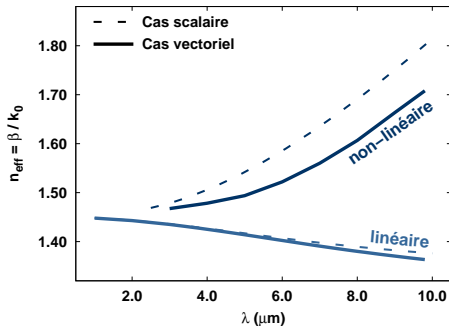
Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Évolution du soliton spatial suivant la longueur d'onde



- ☞ **Nécessité** d'étudier le modèle vectoriel
- ☞ L'effet non-linéaire est **moins important** que pour le modèle scalaire.

### Compétition des effets dispersif et non-linéaire

Plus le mode fondamental linéaire s'étend dans la fibre optique, plus l'effet non-linéaire est important.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

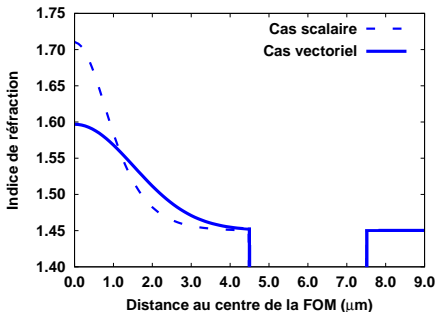
Conclusions



## Indice de réfraction du soliton spatial

☞ Soliton spatial **scalaire** :  $n = \sqrt{n_0^2 + |\chi\psi|^2}$

☞ Soliton spatial **vectoriel** :  $n = \sqrt{n_0^2 + |\chi|^2 (|E_t|^2 + |E_z|^2)}$



L'effet de la composante longitudinale est non négligeable !

Le rapport des valeurs maximales des amplitudes est :  $\frac{\text{Max}(|E_t|)}{\text{Max}(|E_z|)} \approx 8.$

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

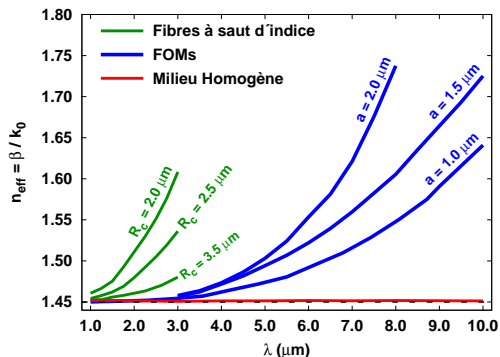
Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Influence de la structure transverse finie



### Le soliton spatial vectoriel

- ☞ **des fibres optiques** dépend de leur dimension transverse finie.
- ☞ **du milieu homogène** a le même indice effectif que pour le modèle scalaire :  $n_{\text{eff}} \approx 1.4515 \approx n_{\text{eff}}^{\text{Townes}}$

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

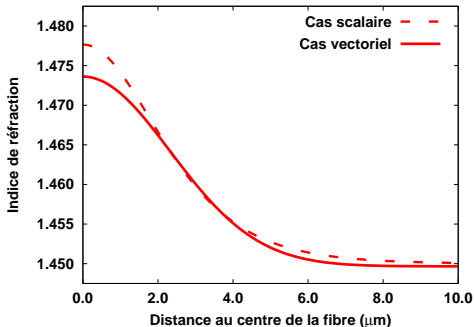
Mode accepteur

Conclusions



## Le soliton spatial dans le milieu homogène

L'effet de la composante longitudinale devient **faible** :  $\frac{\text{Max}(|\mathbf{E}_t|)}{\text{Max}(|E_z|)} > 20$ .



Dans les 2 modèles,

l'indice effectif et le profil d'indice sont identiques.

**Il existe donc un soliton de Townes vectoriel !**

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

**Soliton de Townes**

FOM à défaut creux

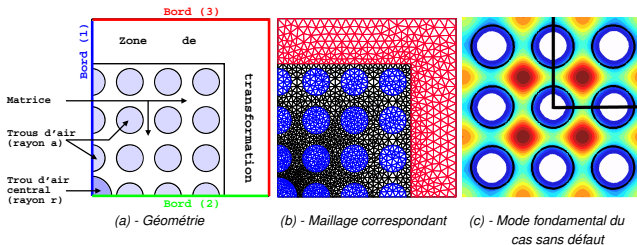
Principe

Mode accepteur

Conclusions



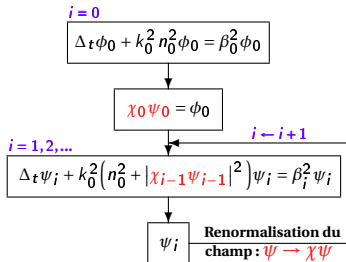
## FOM à défaut creux



## La même méthode numérique

☞ **Algorithme auto-cohérent sans** recherche du minimum de résidu.

☞ Pour chaque processus, la valeur de  $\chi_0$  est augmentée progressivement.



Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

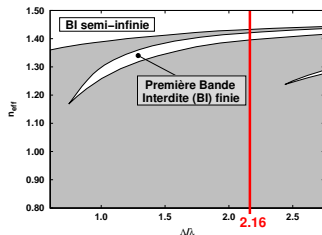
Principe

Mode accepteur

Conclusions

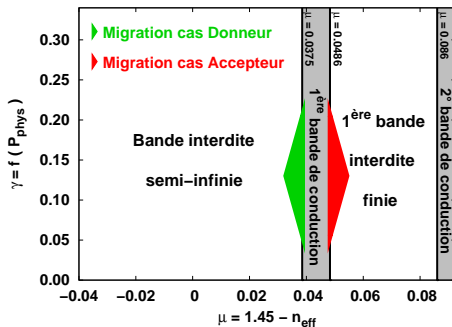


## Cas périodique linéaire



## Modes donneur et accepteur linéaires

- ☞ **Cas donneur** : Inclusion centrale **plus petite** que les trous environnants
- ☞ **Cas accepteur** : Inclusion centrale **plus grande** que les trous environnants.



Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

- 0- Préliminaires
- 1- Éléments Finis
- 2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

- Analyse technique
- Étude physique
- Soliton de Townes

... et vectoriels

- Étude physique
- Soliton de Townes

FOM à défaut creux

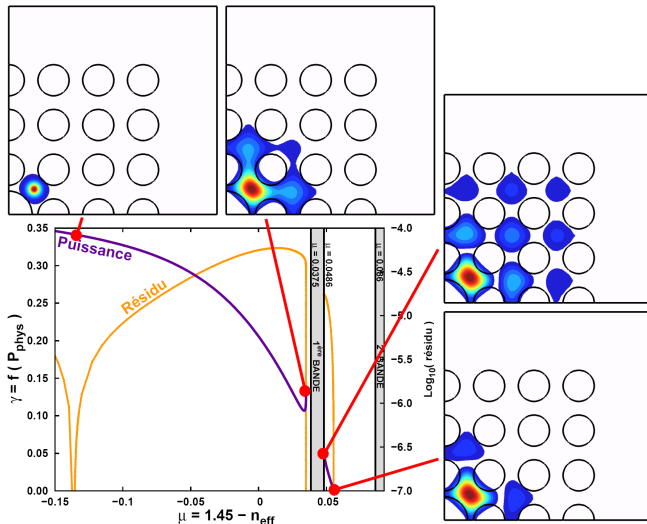
Principe

Mode accepteur

Conclusions



## Cas Accepteur : inclusion centrale plus grande que les trous environnants



Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

**Mode accepteur**

Conclusions



Introduction

Motivations

Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

**Mode accepteur**

Conclusions



## Conclusion

### Vers une unique solution non-linéaire scalaire ...

Nous avons

- conçu
- implémenté
- optimisé

une **nouvelle méthode** de résolution d'un problème non-linéaire dans les fibres optiques.

- ☛ Mise en évidence d'une **unique solution non-linéaire auto-cohérente ou soliton spatial** par la **minimisation d'un résidu**.

### ... généralisant le soliton de Townes ...

L'étude de la signification physique du soliton spatial nous montre

- qu'il représente la solution de **plus haute puissance avant l'autofocalisation instable**
- qu'il dépend de la **structure transverse finie** de la fibre optique
- qu'il correspond au **soliton de Townes** dans le milieu homogène
- qu'il est **différent du soliton de Townes dans les fibres optiques**.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions



## ... et validée dans le cas vectoriel complet

Nous avons conçu, implémenté et optimisé notre méthode auto-cohérente pour le **modèle vectoriel complet**.

- ☞ **Validation et comparaison** avec le modèle scalaire

Nous avons montré

- la nécessité de passer au modèle vectoriel (**différences** d'indices effectifs et de modulation d'indice de réfraction)
- l'influence de la **structure transverse finie**
- qu'**il existe un soliton de Townes vectoriel**.

## Extension à l'étude des FOMs à défaut creux

- ☛ **Le cas accepteur** : observation de **nouveaux phénomènes** :
  - ☞ Si la puissance augmente, le mode se **délocalise** puis se reconfine.
  - ☞ Présence de **2 solitons spatiaux** à 2 puissances différentes.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

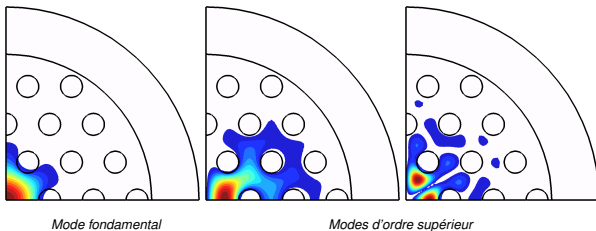
Mode accepteur

Conclusions



➤ Étude de la **stabilité** du soliton spatial suivant la **dimension longitudinale** de la fibre.

➤ Étude des modes d'**ordres supérieurs** :



➤ Étude d'un **effet Kerr tensoriel** :

$$n_0^2 + n_{nl}^2 |\mathbf{E}|^2 \rightarrow n_0^2 + \frac{2}{3} n_{nl}^2 \begin{pmatrix} |\mathbf{E}|^2 + (1/2) |E_x|^2 & (1/2) E_y E_x^* & (1/2) E_z E_x^* \\ (1/2) E_x E_y^* & |\mathbf{E}|^2 + (1/2) |E_y|^2 & (1/2) E_z E_y^* \\ (1/2) E_x E_z^* & (1/2) E_y E_z^* & |\mathbf{E}|^2 + (1/2) |E_z|^2 \end{pmatrix}$$

➤ B. Crosignani, P. Di Porto, and A. Yariv, *Nonparaxial equation for linear and nonlinear optical propagation*, Opt. Lett. **22**, 778-780 (1997)

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions





Christophe Geuzaine  
*Logiciels Gmsh/GetDP* - [www.geuz.org](http://www.geuz.org)



F. Drouart, G. Renversez, A. Nicolet, and C. Geuzaine  
*Spatial Kerr solitons in optical fibres of finite size cross section : beyond the Townes soliton*  
J. Opt. A : Pure Appl. Opt., **10** (2008).



A. Ferrando, M. Zcares, P. Fernandez de Cordoba, D. Binosi, and J. Monsoriu  
*Spatial soliton formation in photonic crystal fibers*  
Opt. Express, **11** (2003).



R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes  
*Self-Trapping of Optical Beams*  
Phys. Rev. Lett., **13** (1964).



G. Fibich and A. L. Gaeta  
*Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides*  
Opt. Lett., **25** (2000).



G. P. Agrawal  
*Nonlinear Fiber Optics*  
Academic Press, San Diego, 2001.



F. Zolla, G. Renversez, A. Nicolet, B. Kuhlmeiy, S. Guenneau, and D. Felbacq  
*Foundations of Photonic Crystal Fibres*  
Imperial College Press, London, 2005.

Introduction  
Motivations  
Démarche

Équations Non-linéaires

Méthode numérique

0- Préliminaires

1- Éléments Finis

2- Méthode itérative

Résultats scalaires ...

Analyse technique

Étude physique

Soliton de Townes

... et vectoriels

Étude physique

Soliton de Townes

FOM à défaut creux

Principe

Mode accepteur

Conclusions

