



# Etude vibroacoustique des matériaux poroélastiques par éléments finis

Nicolas Dauchez

## ► To cite this version:

Nicolas Dauchez. Etude vibroacoustique des matériaux poroélastiques par éléments finis. Mécanique [physics.med-ph]. Université du Maine; Université de Sherbrooke, 1999. Français. NNT: . tel-00438849

**HAL Id: tel-00438849**

**<https://theses.hal.science/tel-00438849>**

Submitted on 4 Dec 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

LE MANS, FRANCE

*Spécialité : ACOUSTIQUE*

ET

DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

SHERBROOKE (QUÉBEC), CANADA

*Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE*

présentée par

NICOLAS DAUCHEZ

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

**ÉTUDE VIBROACOUSTIQUE DES MATÉRIAUX  
POREUX PAR ÉLÉMENTS FINIS**

Soutenue le 12 avril 1999  
devant le jury composé de

|              |                                                                               |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| J.-F. ALLARD | Professeur émérite, Université du Maine                                       |
| N. ATALLA    | Professeur, Université de Sherbrooke, Canada (codirecteur de thèse)           |
| A. BARDOT    | Docteur Ingénieur, PSA Peugeot Citroën                                        |
| M.A. HAMDI   | Professeur, Université de Technologie de Compiègne (rapporteur)               |
| J. NICOLAS   | Professeur, Université de Sherbrooke, Canada (rapporteur)                     |
| S. SAHRAOUI  | Professeur, Université du Maine (codirecteur de thèse)                        |
| D. SMEULDERS | Professeur associé, Université de Technologie de Delft, Pays-Bas (rapporteur) |
| E. THIBIER   | Ingénieur, Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie           |



## **Titre : Etude vibroacoustique des matériaux poreux par éléments finis**

**Résumé :** Le travail présenté est une analyse critique des éléments finis poroélastiques basés sur la théorie de Biot, permettant la simulation du comportement vibroacoustique des matériaux poreux à squelette déformable (mousses polymères, en particulier). Dans un premier temps, une étude de convergence montre que les critères de maillage, habituellement utilisés pour les éléments monophasiques, s'appliquent eu égard aux longueurs d'onde de Biot, mais restent insuffisants pour des applications tridimensionnelles.

Une deuxième partie est consacrée à la validation expérimentale. Une attention particulière est portée sur la caractérisation expérimentale des matériaux. La première validation concerne la mesure d'impédance en conduit d'un échantillon résonnant. Différentes conditions aux limites sont réalisées afin de tester la validité des lois de comportement isotrope ou isotrope transverse pour le squelette. La deuxième validation porte sur la vibration d'une plaque amortie par collage d'une couche poreuse. Bien que les tendances soient bonnes, la difficulté à caractériser le comportement mécanique du squelette est mise en relief.

Dans la dernière partie, on s'intéresse à l'analyse du comportement des matériaux poroélastiques. Un calcul de la répartition des puissances dissipées et réactives est développé à partir de la formulation par éléments finis. Appliqué au cas d'une couche poreuse collée à une plaque, il permet de montrer l'importance de la dissipation due à la viscoélasticité du squelette. Un modèle de plaque équivalente, considérant la couche poreuse comme un milieu viscoélastique, sujet au cisaillement, a été développé. Les bons résultats obtenus permettent un allègement conséquent des calculs en ce qui concerne le comportement vibratoire de cette structure.

**Mots clés :** *acoustique, vibroacoustique, matériaux poreux, modèle de Biot, méthode des éléments finis, convergence, validation expérimentale, anisotropie, dissipation, impédance, plaque multicouche*

## **Title : Vibroacoustic analysis of poroelastic materials using the finite element method**

**Abstract :** Poroelastic finite elements based on Biot displacement theory are examined in the context of vibroacoustic applications. First, convergence of linear finite elements is investigated. It is shown that mesh criteria usually used for monophasic elements can be applied considering Biot wavelengths, but are insufficient for 3-D applications.

Next, experimental validations are then performed with a particular emphasis on the determination of the characteristics of the porous material (polymer foams) as input parameters for simulations. The first experiment concerns the impedance measurement of a vibrating porous sample in a duct. Various boundary conditions are carried out to test the validity of isotropic and transverse isotropic elasticity laws for the skeleton. The second experiment concerns the vibration of a simply supported plate damped by a porous layer. Although good tendencies are found, results emphasize the difficulty to determine accurately the viscoelastic tensor of the skeleton.

The last part deals with the analysis of the behavior of poroelastic materials. A partition of reactive and dissipative powers is derived from the finite element formulation. Applied to the case of a porous layer bonded onto a plate, it shows the importance of viscoelastic dissipation in the skeleton. An equivalent plate model is then derived considering the porous layer as a viscoelastic layer subject to shear. Good results demonstrate the possibility to simplify the calculations concerning the vibration behavior of such structures.

**Keywords :** *acoustics, vibroacoustics, porous material, Biot model, finite element method, convergence, experimental validation, anisotropy, dissipation, impedance, multilayer plate*



## Remerciements

Ce travail de thèse s'est effectué dans le cadre d'une cotutelle de thèse entre le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) sous la direction de Sohbi SAHRAOUI et le Groupe d'Acoustique et vibration de l'Université de Sherbrooke (GAUS) sous la direction de Noureddine ATALLA. Je tiens à les remercier pour la confiance qu'ils ont eu en moi et pour m'avoir permis de vivre une expérience scientifique, touristique (année 1996 au Québec) et humaine très enrichissante.

Je remercie, pour leur accueil, Jean KERGOMARD et Jean NICOLAS, directeurs du LAUM et du GAUS respectivement.

Le financement a été assuré par l'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie (Ademe) et Peugeot Citroën SA (PSA). Je tiens à remercier Emmanuel THIBIER de l'Ademe, Xavier BOHINEUST et Anne BARDOT de PSA d'avoir rendu possible ce projet. En particulier, je remercie Anne BARDOT pour son aide notamment lors de mon séjour chez PSA (mai-juin 1997), ainsi que l'équipe de la DRAS/RPA pour son accueil.

Je tiens à remercier Mohamed Ali HAMDI, Jean NICOLAS et David SMEULDERS pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je tiens à remercier Jean-François ALLARD, Bernard CASTAGNÈDE et Denis LAFARGE pour l'intérêt porté à mon travail.

Je remercie Raymond PANNETON, Bruno BROUARD et Nicolas JOLY pour leur contribution au développement du code PHÉNIX. Je remercie de même Emmanuel MARIEZ pour son aide quant à la caractérisation mécanique des mousses (parfois autour d'une mousse), Christian LANGLOIS et Gabriel LAPERLE pour leur contribution précieuse aux expérimentations sur les plaques.

Merci à Michel BRUNEAU d'avoir accepté ma candidature au D.E.A. d'acoustique appliquée, sur les recommandations dithyrambiques de Michel LERAY (Université de Valenciennes).

Je remercie Blandine MORIN de la société TRAMICO pour la fourniture gracieuse de nombreux échantillons de matériaux.

Merci à Patrick DELAGE et à Christian GARDIÈS pour avoir rendu possible la présence des Québécois à la soutenance par visioconférence.

Merci à tous les membres du GAUS et du LAUM, enseignants, chercheurs, techniciens, secrétaires, doctorants, stagiaires, pour leurs contributions aussi riches que variées (...) . Merci en particulier à Sylvie GOROG et à Ashour AKNINE.

Merci à David BATELLIER, Stéphanie PITOIS, Philippa DUPIRE, Rémi ODDO, Sylvestre MIGET, Jérémie VOIX pour leur accueil lors de mes divers déplacements.

Merci aux associations qui contribuent au développement des logiciels libres tels que LINUX, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, XFIG, EMACS, GNUPLOT, ...

Merci enfin à tous ceux qui m'ont initié au formidable sport qu'est le soccer, autant joueur que supporter ("Je me souviens" de juillet 1996 et 1998).



# Table des matières

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Table des matières . . . . .                                              | i         |
| Notations . . . . .                                                       | iii       |
| <b>Introduction</b>                                                       | <b>1</b>  |
| <b>1 Formulation d'un élément fini poroélastique</b>                      | <b>5</b>  |
| 1.1 Contexte bibliographique . . . . .                                    | 5         |
| 1.1.1 Modélisation des matériaux poreux . . . . .                         | 5         |
| 1.1.2 Méthode des éléments finis . . . . .                                | 6         |
| 1.2 Modèle de Biot généralisé . . . . .                                   | 6         |
| 1.2.1 Description du milieu poroélastique . . . . .                       | 6         |
| 1.2.2 Formalisme lagrangien . . . . .                                     | 12        |
| 1.3 Application de la méthode des éléments finis . . . . .                | 16        |
| 1.3.1 Discrétisation des fonctions d'énergie . . . . .                    | 16        |
| 1.3.2 Equations du mouvement . . . . .                                    | 19        |
| 1.3.3 Gestion des conditions aux limites . . . . .                        | 20        |
| 1.3.4 Séquence de calcul . . . . .                                        | 23        |
| 1.3.5 Développements du code PHÉNIX . . . . .                             | 24        |
| <b>2 Etude de convergence</b>                                             | <b>25</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                | 25        |
| 2.2 Convergence des éléments poroélastiques . . . . .                     | 26        |
| 2.3 Temps de calcul et taille des systèmes . . . . .                      | 37        |
| 2.4 Conclusion du chapitre 2 . . . . .                                    | 37        |
| <b>3 Validation expérimentale</b>                                         | <b>39</b> |
| 3.1 Caractérisation des matériaux poroélastiques . . . . .                | 40        |
| 3.1.1 Propriétés du fluide . . . . .                                      | 41        |
| 3.1.2 Paramètres de couplage . . . . .                                    | 41        |
| 3.1.3 Propriétés mécaniques du squelette . . . . .                        | 45        |
| 3.1.4 Synthèse sur la mesure des paramètres . . . . .                     | 47        |
| 3.1.5 Propagation des incertitudes sur les simulations . . . . .          | 49        |
| 3.2 Mesure d'impédance en conduit . . . . .                               | 51        |
| 3.2.1 Méthodes expérimentales . . . . .                                   | 51        |
| 3.2.2 Conditions de montage du matériau en conduit . . . . .              | 54        |
| 3.2.3 Validation du modèle numérique . . . . .                            | 56        |
| 3.2.4 Discussion . . . . .                                                | 62        |
| 3.3 Amortissement d'une plaque par collage d'une couche poreuse . . . . . | 63        |

|          |                                                                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.1    | Description du montage . . . . .                                                                             | 63        |
| 3.3.2    | Plaque seule . . . . .                                                                                       | 65        |
| 3.3.3    | Plaque + couche poreuse . . . . .                                                                            | 67        |
| 3.4      | Conclusion du chapitre 3 . . . . .                                                                           | 70        |
| <b>4</b> | <b>Analyse du comportement des matériaux poreux</b>                                                          | <b>73</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                                                       | 73        |
| 4.2      | Revue bibliographique . . . . .                                                                              | 73        |
| 4.3      | Comportement d'une couche poreuse collée à une plaque . . . . .                                              | 75        |
| 4.4      | Conclusion du chapitre 4 . . . . .                                                                           | 87        |
|          | <b>Conclusion</b>                                                                                            | <b>89</b> |
|          | <b>Annexes</b>                                                                                               | <b>91</b> |
| A        | Influence des effets visqueux dans la mesure des caractéristiques mécaniques des mousses polymères . . . . . | 91        |
| B        | Comparaison des impédances mesurées et simulées d'un échantillon poreux . . . . .                            | 93        |
| C        | Substitution d'éléments poroélastiques par association de modèles équivalents . . . . .                      | 97        |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                                                         | <b>99</b> |

# Notations

|                       |                                                                                                                                                  |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cdot$               | dérivée par rapport au temps                                                                                                                     |
| $-$                   | indique une grandeur nodale                                                                                                                      |
| $\wedge$              | indique une grandeur adimensionnelle                                                                                                             |
| $\sim$                | indique une grandeur complexe                                                                                                                    |
| $*$                   | quantité conjuguée                                                                                                                               |
| $+ -$                 | indice de référence au sens de propagation d'une onde                                                                                            |
| $\{ \}$               | vecteur colonne                                                                                                                                  |
| $\langle \rangle$     | vecteur ligne                                                                                                                                    |
| $[ ]$                 | matrice                                                                                                                                          |
| $< >$                 | moyenne                                                                                                                                          |
| $  $                  | norme                                                                                                                                            |
| $\cdot$               | produit scalaire                                                                                                                                 |
| $\wedge$              | produit vectoriel                                                                                                                                |
|                       |                                                                                                                                                  |
| $a, b$                | variables muettes                                                                                                                                |
|                       | dimensions de la plaque (chapitre 4)                                                                                                             |
| $a_{ij}, b_i$         | constantes caractérisant la chaîne de mesure T.M.T.C.                                                                                            |
| $A$                   | coefficient de Lamé de dilatation volumique de la phase solide                                                                                   |
| $b(\omega)$           | coefficient d'amortissement visqueux                                                                                                             |
| $[B]_e$               | matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux                                                                                         |
| $c_0$                 | vitesse du son                                                                                                                                   |
| $c_i \quad (i=1,2,3)$ | célérités de chaque onde de Biot                                                                                                                 |
| $C_{aw/b}$            | contribution de l'onde longitudinal $aw$ sur le mouvement de la phase $b$ ( $a$ et $b$ étant $s$ ou $f$ pour la phase solide et la phase fluide) |
| $[C_n]$               | matrice globale de répartition des forces normales à une interface                                                                               |
| $[C_p]$               | matrice globale d'amortissement visqueux du domaine poroélastique                                                                                |
| $[C_{pa}]$            | matrice globale de couplage entre un domaine poroélastique et acoustique                                                                         |
| $C_s$                 | facteur correctif de la rigidité de flexion de la structure "plaque-poreux" dû au cisaillement dans la couche poreuse                            |
| $C_2$                 | rigidité de cisaillement de la couche poreuse                                                                                                    |
| $dD$                  | fonction de dissipation élémentaire                                                                                                              |
| $dT$                  | énergie cinétique élémentaire                                                                                                                    |
| $dV$                  | énergie élémentaire de déformation                                                                                                               |
| $D$                   | fonction de dissipation (chapitre 1)                                                                                                             |
|                       | puissance moyenne dissipée pendant un cycle (chapitre 4)                                                                                         |
| $D_{ke}$              | puissance dissipée par le milieu viscoélastique                                                                                                  |
| $D_{kf}$              | puissance dissipée par effet thermique                                                                                                           |
| $D_{ks}$              | puissance dissipée par la phase solide (amortissement structural)                                                                                |
| $D_{cp}$              | puissance dissipée par effet visqueux                                                                                                            |
| $D_i \quad (i=1..4)$  | rigidités de flexion                                                                                                                             |
| $D_{12}$              | rigidité de flexion de la plaque et de la couche poreuse associées                                                                               |

|                         |                                                                                                             |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e$                     | indice de référence à un élément fini                                                                       |
| $E$                     | module d'Young                                                                                              |
| $E_L, E_T$              | module d'élasticité longitudinal et transversal (description isotrope transverse)                           |
| $f$                     | fréquence                                                                                                   |
| $f_w$                   | relatif à l'onde de Biot longitudinale se propageant principalement dans la phase fluide (fluid-borne wave) |
| $F$                     | force                                                                                                       |
| $F_s, F_f$              | forces s'appliquant sur la phase solide et sur la phase fluide                                              |
| $\{F_g\}, \{F_r\}$      | vecteur force global et réduit                                                                              |
| $\mathcal{F}(t)$        | force instantanée                                                                                           |
| $[G]$                   | matrice des relations linaires entre deux sous-domaines                                                     |
| $G(\omega), G'(\omega)$ | fonctions d'interpolation des effets visqueux et des effets thermiques                                      |
| $G_{LT}$                | module de cisaillement (description isotrope transverse)                                                    |
| $h_1, h_2$              | épaisseurs de la plaque et de la couche poreuse                                                             |
| $H_e$                   | fonction d'étalonnage des deux voies microphoniques (méthode SEYBERT et Ross)                               |
| $H_p$                   | fonction de transfert des pressions $p_2$ et $p_1$                                                          |
| $[H_s], [H_f]$          | matrices de Hooke d'élasticité de la phase solide et de la phase fluide                                     |
| $[H_{sf}]$              | matrice de Hooke de couplage élastique                                                                      |
| $i$                     | indice                                                                                                      |
| $j$                     | imaginaire pur unité                                                                                        |
| $[J]$                   | matrice jacobienne                                                                                          |
| $k_0$                   | perméabilité visqueuse                                                                                      |
| $k'_0$                  | perméabilité thermique                                                                                      |
| $k_e$                   | constante de propagation caractérisant un milieu fluide, équivalent au matériau poreux                      |
| $k_i \quad (i=1,2,3)$   | constantes de propagation de chaque onde de Biot                                                            |
| $K$                     | fonction de transfert de la force sur le déplacement longitudinal                                           |
| $K_a$                   | module d'incompressibilité adiabatique de l'air au repos                                                    |
| $K_e$                   | module d'incompressibilité équivalent du fluide dans les pores                                              |
| $K_s$                   | module d'incompressibilité du squelette                                                                     |
| $[K_e]$                 | matrice globale de raideur du domaine élastique                                                             |
| $[K_p]$                 | matrice globale de raideur du domaine poroélastique                                                         |
| $[K_s], [K_{ss}]$       | matrice globale de raideur de la phase solide                                                               |
| $[K_{ff}]$              | matrice globale de raideur de la phase fluide                                                               |
| $[K_{sf}]$              | matrice globale de couplage entre les deux phases                                                           |
| $[\hat{K}]$             | matrice globale adimensionnelle de rigidité (phase fluide et couplage)                                      |
| $l$                     | longueur                                                                                                    |
| $L$                     | axe longitudinal                                                                                            |
| $[L]$                   | opérateur de dérivation spatiale                                                                            |
| $\{m\}$                 | vecteur $\langle 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle^T$                                                                |
| $m_{12}$                | masse de la structure "plaque-poreux" par unité de surface                                                  |
| $M, M'$                 | facteurs de forme visqueux et thermique                                                                     |
| $[\hat{M}]$             | matrice globale adimensionnelle de masse (phase fluide et solide)                                           |
| $[M_e]$                 | matrice globale de masse du domaine élastique                                                               |
| $[M_p]$                 | matrice globale de masse du domaine poroélastique                                                           |
| $n$                     | indice référénçant la composante normale à une surface                                                      |

|                    |                                                                                                             |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\{n_e\}$          | vecteur normal en un point de la surface d'un élément fini                                                  |
| $n(\omega)$        | indice de réfraction                                                                                        |
| $N$                | module de cisaillement (2 <sup>e</sup> coefficient de Lamé) de la phase solide                              |
| $[N]_e$            | matrice des fonctions d'interpolation sur un élément fini                                                   |
| $p$                | pression                                                                                                    |
| $p_0$              | pression atmosphérique                                                                                      |
| $p_{inc}$          | pression incidente                                                                                          |
| $P$                | module d'incompressibilité de la phase solide (chapitre 2)                                                  |
|                    | puissance complexe (chapitre 4)                                                                             |
| $Pr$               | nombre de Prandtl                                                                                           |
| $\mathcal{P}(t)$   | puissance instantanée                                                                                       |
| $q$                | variable généralisée                                                                                        |
| $Q$                | module de couplage élastique entre les deux phases                                                          |
| $Q_v$              | débit                                                                                                       |
| $r$                | indice                                                                                                      |
| $R$                | module d'incompressibilité de la phase fluide (chapitre 2)                                                  |
|                    | coefficient de réflexion (chapitre 3)                                                                       |
|                    | amplitude de la puissance réactive (chapitre 4)                                                             |
| $R_1, R_2$         | résistances au passage de l'air                                                                             |
| $R_{e0}, R_e$      | résistances électriques entre les électrodes                                                                |
| $R_{ke}$           | puissance réactive potentielle du milieu élastique                                                          |
| $R_{kp}$           | puissance réactive potentielle du milieu poroélastique                                                      |
| $R_{me}$           | puissance réactive inertielle du milieu élastique                                                           |
| $R_{mp}$           | puissance réactive inertielle du milieu poroélastique                                                       |
| $s_1, s_2$         | signaux issus des microphones 1 et 2                                                                        |
| $sw$               | relatif à l'onde de Biot longitudinale se propageant principalement dans la phase solide (solid-borne wave) |
| $S$                | surface                                                                                                     |
| $S_b$              | interface où les degrés de liberté sont bloqués                                                             |
| $S_i$              | surface de contact entre la phase fluide et la phase solide                                                 |
| $S_D$              | surface d'application d'une force (Condition de Dirichlet)                                                  |
| $S_l$              | surface où les degrés de liberté sont libres                                                                |
| $S_N$              | surface d'imposition d'un déplacement non-nul (Condition de Neumann)                                        |
| $S_{pa}$           | interface entre un domaine poroélastique et acoustique                                                      |
| $S_{pe}$           | interface entre un domaine poroélastique et élastique                                                       |
| $t$                | temps                                                                                                       |
| $T$                | énergie cinétique                                                                                           |
| $T$                | exposant indiquant une transposée                                                                           |
| $T_0$              | température de l'air au repos                                                                               |
| $T, T'$            | fonctions de transfert des déplacements transverses sur le déplacement longitudinal                         |
| $u$                | déplacement de la phase solide à l'échelle macroscopique                                                    |
| $u$                | vecteur des déplacement de la phase solide                                                                  |
| $u, v, w$          | composantes du vecteur déplacement d'un point de la couche poreuse (chapitre 4)                             |
| $u_m$              | déplacement de la phase solide à l'échelle microscopique                                                    |
| $u_L, u_T, u_{T'}$ | déplacements longitudinal et transverses du squelette                                                       |

|                                         |                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $U$                                     | déplacement de la phase fluide à l'échelle macroscopique                                                                                                               |
| $\vec{U}$                               | vecteur des déplacement de la phase fluide                                                                                                                             |
| $U_m$                                   | déplacement de la phase fluide à l'échelle microscopique                                                                                                               |
| $U_{e_0}, U_{e_1}$                      | tensions électriques aux bornes des électrodes                                                                                                                         |
| $v$                                     | vitesse d'une particule de fluide                                                                                                                                      |
| $V$                                     | énergie de déformation                                                                                                                                                 |
| $V$                                     | volume                                                                                                                                                                 |
| $V_f, V_t$                              | volume de fluide dans les pores et volume total de matériau                                                                                                            |
| $V_M$                                   | élément de volume macroscopique                                                                                                                                        |
| $w$                                     | déplacement pour un milieu élastique                                                                                                                                   |
| $W$                                     | déplacement macroscopique relatif de la phase fluide et de la phase solide :<br>$W = \phi(U - u)$                                                                      |
| $x, y, z$                               | coordonnées dans un repère cartésien                                                                                                                                   |
| $x_1, x_2$                              | position des microphones 1 et 2                                                                                                                                        |
| $X$                                     | fréquence relative                                                                                                                                                     |
| $Z$                                     | impédance de surface                                                                                                                                                   |
| $Z_0$                                   | impédance caractéristique de l'air                                                                                                                                     |
| $[Z_a]$                                 | matrice globale d'impédance du domaine acoustique                                                                                                                      |
| $[Z_e]$                                 | matrice globale d'impédance du domaine élastique                                                                                                                       |
| $[Z_p]$                                 | matrice globale d'impédance du domaine poroélastique                                                                                                                   |
| $[Z_{pa}]$                              | matrice globale d'impédance de deux domaines poroélastique et acoustique couplés                                                                                       |
| $[Z_r]$                                 | matrice réduite d'impédance                                                                                                                                            |
|                                         |                                                                                                                                                                        |
| $\alpha$                                | coefficient d'absorption                                                                                                                                               |
| $\alpha_\infty$                         | tortuosité                                                                                                                                                             |
| $\delta$                                | épaisseur de la couche limite visqueuse                                                                                                                                |
| $\delta'$                               | épaisseur de la couche limite thermique                                                                                                                                |
| $\Delta$                                | discriminant (chapitre 2)<br>variation (chapitre 3)<br>opérateur laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (chapitre 4) |
| $\{\varepsilon_s\}, \{\varepsilon_f\}$  | tenseur des déformations de la phase solide et de la phase fluide                                                                                                      |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y$          | composantes du tenseur des déformations de la couche poreuse en traction-compression                                                                                   |
| $\{\varepsilon_2\}$                     | tenseur des déformations du squelette de la couche poreuse (chapitre 4)                                                                                                |
| $\gamma$                                | rapport des chaleurs spécifiques de l'air                                                                                                                              |
| $\gamma_i \quad (i=1,2,3)$              | atténuation de chaque onde de Biot                                                                                                                                     |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ | composantes du tenseur des déformations de la couche poreuse en cisaillement                                                                                           |
| $\Gamma$                                | terme grand utilisé par la méthode du terme diagonal dominant                                                                                                          |
| $\eta_g$                                | coefficient d'amortissement structural global                                                                                                                          |
| $\eta_s$                                | coefficient d'amortissement structural de la phase solide                                                                                                              |
| $\phi$                                  | porosité                                                                                                                                                               |
| $\varphi$                               | angle de phase                                                                                                                                                         |
| $\kappa$                                | $= \frac{5}{6}$ , intègre la variation des contraintes et des déformations en cisaillement dans l'épaisseur de la couche poreuse                                       |

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lambda_i$ ( $i=1,2,3$ )         | longueurs d'onde de chaque onde de Biot                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\Lambda$                         | longueur caractéristique visqueuse                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\Lambda'$                        | longueur caractéristique thermique                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\mu$                             | viscosité de l'air                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\mu_i$ ( $i=1,2,3$ )             | rapport entre les déplacements de la phase fluide et de la phase solide pour chaque onde de Biot                                                                                                                                                                            |
| $\mu^{fw}, \mu^{sw}$              | rapport entre les déplacements de la phase fluide et de la phase solide pour les deux ondes longitudinales $sw$ et $fw$ , définies telles que $\mu^{fw} > \mu^{sw}$                                                                                                         |
| $\nu$                             | coefficient de Poisson                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $\nu_{LT}, \nu_{LT}$              | coefficient de dilatation transverse-longitudinal et transverse-transverse (description isotrope transverse)                                                                                                                                                                |
| $\nabla$                          | vecteur opérateur de dérivation tel que $\nabla\varphi = \mathbf{grad} \varphi$ , $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$ , $\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ , avec $\varphi$ une quantité scalaire et $\mathbf{v}$ une quantité vectorielle |
| $\omega$                          | fréquence angulaire                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\omega_{Tv}, \omega_{Tt}$        | fréquences de transition visqueuse et thermique                                                                                                                                                                                                                             |
| $\Omega$                          | domaine poroélastique                                                                                                                                                                                                                                                       |
| $\Omega_e$                        | domaine correspondant à un élément fini                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\psi_x, \psi_y$                  | angles de rotation due au cisaillement dans la couche poreuse                                                                                                                                                                                                               |
| $\rho$                            | masse volumique                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\rho_0$                          | masse volumique de l'air au repos                                                                                                                                                                                                                                           |
| $\rho_1$                          | masse volumique du squelette                                                                                                                                                                                                                                                |
| $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ | masse volumique apparente du squelette, de couplage entre les deux phases, et du fluide dans les pores                                                                                                                                                                      |
| $\rho_{12}$                       | masse volumique équivalente de la structure bicouche (chapitre 4)                                                                                                                                                                                                           |
| $\rho_e$                          | masse volumique équivalente du fluide                                                                                                                                                                                                                                       |
| $\rho_s$                          | masse volumique du matériau constituant le squelette                                                                                                                                                                                                                        |
| $\sigma$                          | résistivité au passage de l'air                                                                                                                                                                                                                                             |
| $\sigma_x, \sigma_y$              | composantes du tenseur des contraintes de la couche poreuse en traction-compression                                                                                                                                                                                         |
| $\{\sigma_s\}, \{\sigma_f\}$      | tenseur des contraintes de la phase solide et de la phase fluide                                                                                                                                                                                                            |
| $\{\sigma_2\}$                    | tenseur des contraintes du squelette de la couche poreuse (chapitre 4)                                                                                                                                                                                                      |
| $\tau$                            | température excédentaire de la phase fluide à l'échelle microscopique                                                                                                                                                                                                       |
| $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ | composantes du tenseur des contraintes de la couche poreuse en cisaillement                                                                                                                                                                                                 |
| $\xi, \eta, \zeta$                | coordonnées dans le repère des éléments finis de référence                                                                                                                                                                                                                  |

# Introduction

Si le développement industriel a apporté une nette amélioration du confort, il a aussi engendré une dégradation de l'environnement et une détérioration des conditions de travail pour certaines catégories sociales. Parmi les nuisances subies en milieu industriel, le bruit arrive au 2<sup>e</sup> rang et concerne un ouvrier sur deux (VALET, 1993). Malgré les actions menées par différents organismes publics tels que l'Ademe <sup>1</sup>, le CIDB <sup>2</sup> et l'AEE <sup>3</sup>, la politique de lutte contre le bruit reste insuffisante face à l'accroissement de cette pollution. Au delà du problème de santé publique, l'attitude des consommateurs oblige les industriels à tenir compte de la qualité acoustique de leurs produits, argument commercial majeur. Pour certaines applications, c'est d'ailleurs le bon fonctionnement voire la durée de vie du produit qui est en jeu (coiffe de lanceur spatial, discrétion des sous-marins). La réduction des nuisances sonores apparaît donc comme l'un des enjeux économiques et sociaux de notre époque.

Changement des comportements, gestion adaptée des trafics et des infrastructures vont de pair avec les solutions techniques de réduction des niveaux sonores. Ces solutions sont de trois ordres :

- on peut agir sur les sources, avant que le son ne se propage (amortissement des vibrations, meilleurs ajustements mécaniques, amélioration des profils aéroacoustiques, etc.).
- On peut annuler le son ou les vibrations une fois propagés, par un système de contrôle actif antibruit : à l'aide d'un dispositif électromécanique, on oppose à l'onde originale une onde telle que la somme des perturbations s'annule. Cette méthode, plutôt adaptée aux basses fréquences, peut être délicate à mettre en place et nécessite une maintenance.
- Enfin, les méthodes passives, couramment utilisées car bon marché et simples à mettre en œuvre, reposent sur l'isolation et l'absorption phoniques au moyen de matériaux isolants (loi de masse) et absorbants (matériaux poreux). Ces derniers ont fait l'objet de nombreuses études visant à améliorer leurs performances, limitées en basses fréquences.

Le travail présenté dans ce document contribue à ces recherches.

Les absorbants phoniques ont la caractéristique d'être poreux : ils sont composés d'une phase solide, ou squelette, et d'une phase fluide continue, ou fluide saturant, pouvant librement circuler au sein du matériau. Ces matériaux sont très diversifiés : matériaux fibreux (tissus, laines de roche, ovine ou métallique), mousses synthétiques réticulées (c'est-à-dire dont les bulles ont éclaté), agglomérats

---

<sup>1</sup>Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie

<sup>2</sup>Centre d'Information et de Documentation sur le Bruit

<sup>3</sup>Agence Européenne de l'Environnement

granulaires (sable, revêtement routier poreux), végétaux (arbustes, gazon, paille). L'absorption acoustique provient des pertes par effets visqueux (frottements de l'air contre le squelette) et thermique (absorption de la chaleur excédentaire du fluide par le squelette). Ces effets peuvent être pris en compte en considérant que la présence du squelette vient modifier les caractéristiques du fluide saturant à une échelle macroscopique. Le matériau poreux peut être ainsi modélisé par un fluide dissipatif équivalent, sous réserve que le squelette reste immobile (DELANY et BAZLEY, 1970 ; JOHNSON et coll. , 1987 ; CHAMPOUX et ALLARD, 1991). Si l'air parvient à mettre le squelette en mouvement, ou si ce dernier est directement en contact avec une structure vibrante, une dissipation d'origine structurale, liée à la viscoélasticité du squelette s'ajoute. La description des matériaux poreux nécessite alors un modèle plus complet, tel celui de BIOT (1956). La mise en mouvement du squelette peut améliorer considérablement la performance des matériaux, notamment en basses fréquences. De même, si le matériau est directement en contact avec une structure vibrante, il procure un amortissement supplémentaire contribuant à réduire ces vibrations et par conséquent l'énergie sonore rayonnée par la structure. En pratique, les deux effets, amortissant du point de vue structural et absorbant du point de vue acoustique, sont intimement liés. C'est le cas par exemple dans les applications automobiles (tablier, plafond, capot), aéronautiques (garnissage de la carlingue), électroménagères, etc.

Afin d'optimiser l'efficacité des matériaux en tirant profit des deux effets, des outils de simulation ont été développés. Ils permettent de réduire le nombre d'essais expérimentaux et d'améliorer la compréhension des phénomènes physiques. En hautes fréquences, là où la densité modale des structures est grande, les dimensions finies des structures ne jouent pas un rôle significatif. Les outils analytiques sont alors utilisables, tel le programme MAINE qui permet de modéliser des multicouches de dimensions latérales infinies incluant des matériaux poreux, par la méthode des matrices de transfert (ALLARD, 1993). En basses fréquences, là où le comportement modal des structures est prépondérant, la prise en compte de la géométrie des structures, parfois complexe, ne permet plus le développement de solutions analytiques. Les méthodes numériques, portées par le développement des moyens de calcul, constituent alors une alternative très puissante.

A partir de 1994-95, des codes éléments finis incluant des éléments poreux à squelette déformable, appelés aussi éléments poroélastiques, ont vu le jour. Basés sur la théorie de BIOT (1956), ils permettent d'étudier des configurations très variées. Au début de ce travail de thèse, les travaux publiés démontraient essentiellement trois points : le succès de l'implantation d'éléments poroélastiques pour l'acoustique, leur validité pour des configurations unidimensionnelles, l'insuffisance des éléments de fluide équivalent pour des applications bi ou tridimensionnelles de dimensions finies.

Par ailleurs, on notait l'absence d'étude de convergence des éléments poroélastiques. De même, aucune véritable validation expérimentale sur des cas réellement tridimensionnels n'a été effectuée. Enfin, si la nécessité d'utiliser ces éléments a été montrée, on a très peu soulevé le problème de leur lourdeur d'utilisation, due au grand nombre de degrés de liberté à manipuler (6 degrés de liberté par nœud pour des éléments tridimensionnels). Même si la formulation équivalente  $(u, p)$  à 4 degrés de liberté par nœud (ATALLA et coll. , 1996) permet de réduire sensiblement la taille des calculs, aucune alternative aux éléments poroélastiques n'a été proposée. Il nous est ainsi apparu que l'étude du comportement des matériaux poreux à partir des éléments poroélastiques pouvait servir à établir des modèles simplifiés, beaucoup plus rapides et adaptés à telle ou telle configuration.

Par conséquent, les objectifs de cette recherche s'énumèrent ainsi :

- étudier la convergence des éléments poroélastiques et proposer un critère de maillage basé sur une analyse physique du modèle,
- valider la capacité de la méthode numérique à modéliser le comportement de matériaux réels, à

partir d'une caractérisation expérimentale complète des matériaux utilisés. Les expérimentations de validation devront susciter un comportement réellement tridimensionnel, favorisant le mouvement du squelette.

- établir des indicateurs permettant l'analyse des phénomènes prépondérants au sein des matériaux poreux et pouvant servir à justifier ou non l'utilisation de modèles simplifiés.

Ce document s'articulera en quatre parties.

Le chapitre 1 présente la théorie de BIOT généralisée et la formulation des éléments finis poroélastiques, suivant le formalisme lagrangien. L'implantation numérique y est détaillée.

Le chapitre 2 traite de la convergence des éléments poroélastiques, en mettant l'accent sur le lien avec la longueur des ondes se propageant dans le milieu poroélastique. Cette partie est présentée sous forme d'un article soumis à *Journal of the Acoustical Society of America* (DAUCHEZ et coll. , 1999a).

Le chapitre 3 est consacré à la validation expérimentale. Premièrement, nous y présentons les moyens expérimentaux de caractérisation des matériaux, en mettant l'accent sur les incertitudes de mesure, la dispersion due à l'anisotropie et à l'hétérogénéité des matériaux. Puis deux cas de validation sont présentés. Le premier porte sur la mesure d'impédance d'un échantillon poreux en conduit. Le choix du matériau, sa taille et les différentes conditions aux limites réalisées permettent d'observer plusieurs types de comportements. Le deuxième cas porte sur la vibration d'une plaque sur laquelle est collée une couche poreuse, configuration dénommée "plaque-poreux". On s'intéresse notamment à l'effet d'amortissement sur la plaque.

Enfin dans le chapitre 4, nous mettons en œuvre une méthode d'analyse des phénomènes prépondérants au sein des matériaux poreux, basée sur une répartition des puissances actives et réactives. Son application au cas "plaque-poreux" permet de proposer un modèle simplifié de plaque équivalente, du point de vue de la structure. Dans le cas du couplage à une cavité, nous discutons de la possibilité de remplacer les éléments poroélastiques par une plaque équivalente et une condition d'impédance ou un fluide équivalent pour la dissipation acoustique. Cette partie est présentée sous forme d'un article soumis à *Journal of Sound and Vibration* (DAUCHEZ et coll. , 1999b).



# Chapitre 1

## Formulation d'un élément fini poroélastique

Le but de ce chapitre est de présenter la formulation des éléments finis poroélastiques, telle qu'utilisée lors de ce travail. Après un bref rappel du contexte bibliographique, nous présentons le modèle de Biot généralisé à l'acoustique aérienne. Le formalisme de Lagrange, basé sur l'écriture des énergies, conduira naturellement à la formulation par éléments finis en déplacement, notée  $(u, U)$ . Son implantation numérique est détaillée.

### 1.1 Contexte bibliographique

#### 1.1.1 Modélisation des matériaux poreux

Parmi les théories décrivant la propagation du son dans les matériaux poreux, le modèle de DELANY et BAZLEY (1970), par sa simplicité, est l'un des plus utilisés. Etabli de façon empirique à partir de nombreuses mesures acoustiques, il nécessite uniquement la connaissance de la résistivité au passage de l'air  $\sigma$ . Il fournit l'impédance caractéristique  $Z_e$  et la constante de propagation  $k_e$  du milieu fluide, équivalent au matériau, pour une fréquence  $f$  donnée

$$Z_e = \rho_0 c_0 \left[ 1 + 0.0571 X^{-0.754} - j0.087 X^{-0.732} \right] \quad (1.1)$$

$$k_e = \frac{2\pi f}{c_0} \left[ 1 + 0.0978 X^{-0.700} - j0.189 X^{-0.595} \right], \quad (1.2)$$

pour  $X = \rho_0 f / \sigma$  compris entre 0.01 et 1.

D'autres modèles de type "fluide équivalent", moins limitatifs car basés sur un modèle physique se sont par ailleurs développés. En 1971, SIDES et coll. reprennent les travaux de ZWIKKER et KOSTEN (1949), basés sur la propagation du son dans un réseau de tubes cylindriques, pour la modélisation des matériaux fibreux. ATTENBOROUGH et coll. (1983) proposent une extension à des géométries plus générales. En 1987, JOHNSON et coll. proposent une caractérisation des phénomènes visqueux à partir d'une longueur caractéristique  $\Lambda$ , paramètre accessible expérimentalement. De façon similaire, CHAMPOUX et ALLARD (1991) définissent une longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$ . Enfin, LAFARGE

et coll. (1996) introduisent la perméabilité thermique  $k'_0$ , par analogie à la perméabilité visqueuse  $k_0$ , améliorant la description des couplages thermiques en basses fréquences.

Cependant ces modèles de “fluide équivalent” ne conviennent pas lorsque le squelette se meut. La théorie de BIOT (1956), initialement établie pour la recherche pétrolière, fournit alors un modèle fondamental pour décrire le comportement des matériaux poroélastiques. C'est un modèle basé sur une description macroscopique du déplacement des deux phases du matériau. Il comprend les couplages élastique, inertiel et visqueux. Son adaptation à l'acoustique aérienne consiste à des simplifications liées aux ordres de grandeur de l'acoustique (rapport des masses et raideurs fluide-solide), à l'introduction des couplages thermiques et à une meilleure prise en compte des couplages visqueux.

Dans ce document, les matériaux poroélastiques sont décrits par la théorie de BIOT incluant les travaux précités de JOHNSON et coll. , CHAMPOUX et ALLARD, LAFARGE et coll. . Nous l'appelons théorie de BIOT généralisée.

### 1.1.2 Méthode des éléments finis

La façon la plus courante d'introduire un matériau poreux dans un code d'éléments finis est d'utiliser son impédance de surface, mesurée ou simulée. Cependant cette procédure est insuffisante lorsque le comportement n'est pas à réaction localisée. CRAGGS (1978) propose ainsi un élément fini basé sur un modèle de fluide équivalent. Bien qu'économique (un degré de liberté par nœud), cette modélisation est limitée aux applications où le squelette peut être considéré de rigidité infinie.

En 1994-95, les éléments finis poroélastiques voient le jour. Dérivés directement du modèle de BIOT en déplacement, ils tiennent compte du mouvement du squelette et possèdent six degrés de liberté en déplacement par nœuds. La formulation  $(u, U)$  est basée sur trois translations pour la phase solide et trois translations pour la phase fluide (PANNETON et ATALLA, 1994 et 1997; KANG et BOLTON, 1995). La formulation  $(u, W)$  utilise aussi trois translations pour la phase solide, mais trois translations relatives pour la phase fluide (COYETTE et coll. , 1994 et 1995; JOHANSEN et coll. , 1995).

Partant des équations de Biot, en régime harmonique, ATALLA et coll. (1996, 1998) ont implanté une formulation mixte  $(u, p)$  équivalente. Cette formulation, permet de réduire le nombre de degrés de liberté à quatre par nœud, ce qui procure une réduction considérable des temps de calcul, de l'ordre d'un facteur 4 à 10. GOROG et coll. (1997) ont montré dans le cadre plus général des mouvements transitoires qu'une formulation mixte  $(u, p)$  exacte des équations de Biot est possible. Elle se réduit à la formulation de ATALLA et coll. en régime harmonique.

La présente étude, qui fait suite aux travaux de PANNETON (1996), est basée sur la formulation en déplacement  $(u, U)$  implantée par PANNETON et ATALLA (1996a-b, 1997) dans le programme PHÉNIX.

## 1.2 Modèle de Biot généralisé

### 1.2.1 Description du milieu poroélastique

L'étude de la propagation acoustique dans les milieux poreux nécessite la prise en compte de plusieurs hypothèses :

- H.1 **Echelle macroscopique** : la complexité et la grande variété des microgéométries des matériaux poreux rendent difficile toute modélisation au niveau microscopique. Cependant, à une échelle dite macroscopique, on peut caractériser cette microgéométrie de façon statistique. L'échelle macroscopique est celle d'un élément de volume  $V_M$ , ensemble de pores suffisamment grand, tel que les caractéristiques statistiques soient sensiblement invariantes en déplaçant ce volume (figure 1.2). Cela suppose par ailleurs que le matériau est localement homogène.

Les variables décrivant le mouvement sont par conséquent des quantités résultant d'une moyenne des quantités définies à l'échelle microscopique sur un élément de volume macroscopique. Par exemple, les déplacements de la phase solide et fluide, respectivement  $u$  et  $U$ , se déduisent des déplacements observés à l'échelle microscopique  $u_m$  et  $U_m$  par

$$u = \langle u_m \rangle = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} u_m dV, \quad U = \langle U_m \rangle = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} U_m dV, \quad (1.3)$$

avec  $V_M$  le volume de l'élément macroscopique.

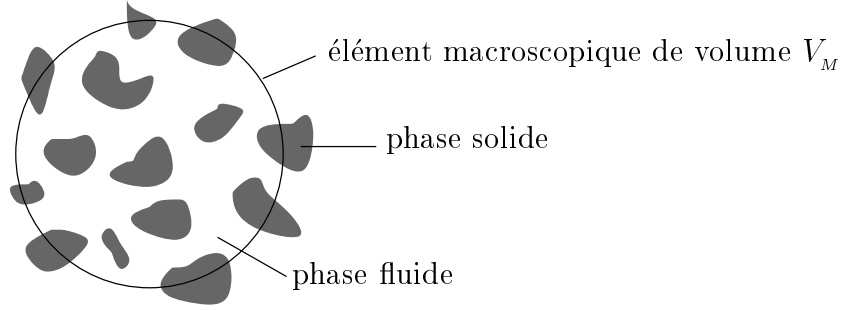


FIG. 1.1: Echelle macroscopique.

**H.2 Grande longueur d'onde :** afin de pouvoir utiliser les outils de la mécanique des milieux continus, la longueur des différentes ondes pouvant se propager dans le matériau, doit être grande devant l'élément de volume  $V_M$  (figure 1.2). Cela assure que chaque phase est décrite par un déplacement unique à l'échelle macroscopique.

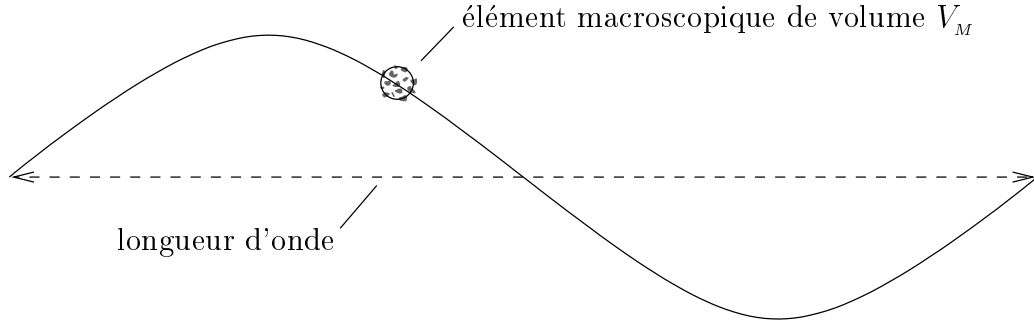


FIG. 1.2: Hypothèse de grande longueur d'onde devant l'élément de volume macroscopique.

**H.3 Elasticité linéaire :** dans l'hypothèse des petits déplacements, les relations contraintes-déformations sont linéaires.

**H.4 Régime harmonique :** les variables décrivant le mouvement possèdent une dépendance temporelle harmonique de la forme  $e^{j\omega t}$ , de sorte que les quantités instantanées  $a(t)$  s'expriment en fonction des amplitudes complexes  $a$  par

$$a(t) = \Re(a e^{j\omega t}). \quad (1.4)$$

La description complète d'un matériau poroélastique regroupe trois ensembles de paramètres concernant :

1. **le fluide saturant**, généralement bien connu, est décrit par la masse volumique au repos  $\rho_0$ , la vitesse du son  $c_0$ , la viscosité  $\mu$ , le nombre de Prandtl  $Pr$ , etc. (cf. chapitre 3, pour une liste complète avec les valeurs prises par défaut),
2. **le comportement mécanique du squelette** est caractérisé par la masse volumique  $\rho_1$ <sup>1</sup>, la loi de comportement caractérisée par la matrice d'élasticité de HOOKE  $[H_s]$  et le coefficient d'amortissement  $\eta_s$ . Ce dernier permet d'écrire une matrice d'élasticité complexe  $[\tilde{H}_s]$  telle que

$$[\tilde{H}_s] = [H_s](1 + j\eta_s). \quad (1.5)$$

Par commodité, le squelette est habituellement supposé isotrope. Dans ce cas, deux grandeurs telles que le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  suffisent pour définir la loi de comportement. L'hypothèse d'isotropie n'étant pas toujours vérifiée, la loi de comportement du squelette pourra être généralisée. Ainsi une meilleure approximation consiste à considérer que le squelette possède un axe de symétrie. Il est alors dit isotrope transverse et cinq valeurs sont requises : deux modules d'élasticité  $E_L$  longitudinal et  $E_T$  transversal, un module de cisaillement  $G_{LT}$ , et deux coefficients de dilatation  $\nu_{LT}$  transverse-longitudinal,  $\nu_{TT}$  transverse-transverse.

Nous reviendrons sur la validité des hypothèses d'isotropie du squelette au chapitre 3.

3. **la prise en compte des interactions entre les deux phases**, d'ordre élastique, inertiel, visqueux et thermique, nécessite la connaissance de cinq paramètres :

**La porosité** ,  $\phi$ <sup>2</sup> , permet la répartition des contraintes et des inerties entre les deux phases.

Elle exprime la part du volume de fluide  $V_f$  dans le volume total de matériau  $V_t$

$$\phi = \frac{V_f}{V_t} . \quad (1.6)$$

Comprise entre 0 (limite solide) et 1 (limite fluide), elle est souvent proche de l'unité ( $0.95 < \phi < 0.99$ ) pour les mousses polymères et les matériaux fibreux.

**La tortuosité** ,  $\alpha_\infty$ <sup>3</sup> , permet de décrire le couplage inertiel, qui se traduit par une augmentation apparente de la masse volumique du fluide au niveau macroscopique. Pour un fluide parfait, elle découle de l'égalité entre les énergies cinétiques calculées à partir des grandeurs microscopiques et macroscopiques

$$\frac{1}{2}\rho_0 \langle \dot{U}_m^2 \rangle = \frac{1}{2}\alpha_\infty \rho_0 \dot{U}^2. \quad (1.7)$$

Comme la moyenne des carrés est supérieure au carré de la moyenne, la tortuosité est supérieure à 1. Elle rend ainsi compte des variations de norme et de direction des vitesses au niveau microscopique pour contourner le squelette.

On peut ainsi définir une masse volumique équivalente du fluide parfait dans les pores par

$$\rho_e = \alpha_\infty \rho_0 . \quad (1.8)$$

<sup>1</sup> $\rho_1 = (1 - \phi)\rho_s$  avec  $\phi$  la porosité et  $\rho_s$  la masse volumique du matériau constituant le squelette.

<sup>2</sup>La porosité est aussi couramment notée  $h$ .

<sup>3</sup>La tortuosité est aussi appelée facteur de forme noté  $k_s$ .

**La résistivité** ,  $\sigma$ , décrit les interactions visqueuses en basses fréquences. En dessous d'une certaine fréquence, l'épaisseur de la couche limite visqueuse,

$$\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0\omega}}, \quad (1.9)$$

est supérieure à la taille des pores de sorte que les forces de frottement visqueux agissent dans tout le domaine fluide. Les forces d'inerties tendent à s'annuler : seuls les frottements visqueux s'opposent au gradient de pression généré par l'onde acoustique. La résistivité  $\sigma$  exprime alors l'amplitude de ces forces. Suivant la loi de DARCY, on a

$$\sigma = \frac{\Delta p S}{Q_v l}, \quad (1.10)$$

avec  $Q_v$  le débit créé par la différence de pression  $\Delta p$  aux bornes d'un échantillon de section  $S$  et d'épaisseur  $l$ . On peut aussi définir une densité équivalente en basses fréquences, donnée par

$$\rho_e(\omega) = \frac{\sigma\phi}{j\omega} \quad \text{pour} \quad \omega \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

Comme  $\sigma$  dépend de la viscosité  $\mu$  du fluide saturant, on peut y préférer la perméabilité statique qui ne dépend que de la microgéométrie du squelette

$$k_0 = \frac{\mu}{\sigma}. \quad (1.12)$$

Les valeurs de  $\sigma$  vont habituellement de quelques  $1000 \text{ Nm}^{-4}\text{s}$  pour les matériaux très "ouverts" à quelques  $100\,000 \text{ Nm}^{-4}\text{s}$  pour les matériaux très "fermés" ou les films très peu perméables.

**La longueur caractéristique visqueuse** ,  $\Lambda$ , décrit la variation des effets visqueux en hautes fréquences. Au-dessus d'une certaine fréquence, les forces d'inertie dominent les forces de cisaillement visqueux dont l'effet est significatif uniquement à proximité des parois du squelette (figure 1.3). La couche limite visqueuse  $\delta$  est alors très inférieure au rayon des pores. L'intégration des forces visqueuses sur tout le domaine fluide  $V_f$  dépend du rapport  $\delta/\Lambda$  avec

$$\Lambda = 2 \frac{\int_{V_f} |\dot{U}_m|^2 dV}{\int_{S_i} |\dot{U}_m|^2 dS}, \quad (1.13)$$

où  $S_i$  est l'interface de contact fluide-squelette. A cause de la pondération par les vitesses,  $\Lambda$  est de l'ordre du rayon des pores les plus petits, là où les vitesses sont les plus grandes à l'échelle microscopique. Pour un pore cylindrique,  $\Lambda$  correspond à son rayon.

La densité équivalente du fluide saturant peut alors s'écrire

$$\rho_e(\omega) = \alpha_\infty \rho_0 \left[ 1 + (1+j) \frac{\delta}{\Lambda} \right] \quad \text{pour} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Pour une fréquence infinie, l'épaisseur de couche limite visqueuse est nulle : on retrouve le résultat de l'équation (1.8) obtenu pour un fluide parfait. Le passage des basses aux hautes fréquences est réalisé par une fonction  $G(\omega)$  vérifiant les limites asymptotiques telle que

$$\rho_e(\omega) = \alpha_\infty \rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{j\hat{\omega}} G(\omega) \right], \quad (1.15)$$

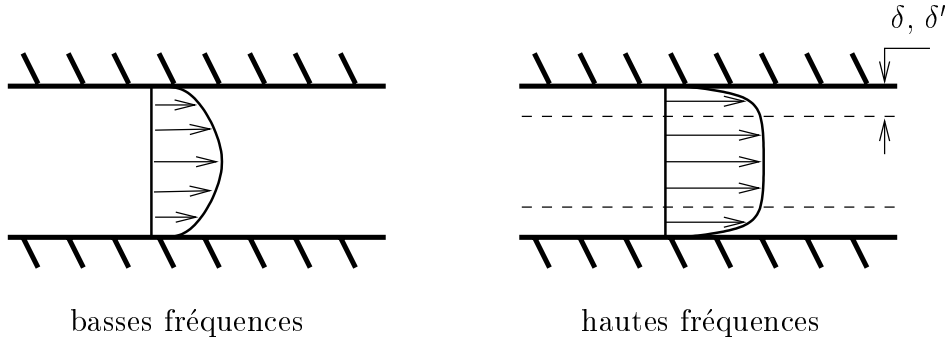


FIG. 1.3: Profils des vitesses ou des températures dans un pore cylindrique.

avec

$$G(\omega) = \sqrt{1 + j \frac{M}{2} \hat{\omega}}, \quad (1.16)$$

où  $\hat{\omega}$  est une fréquence adimensionnée telle que

$$\hat{\omega} = \frac{\omega \alpha_{\infty} \rho_0 k_0}{\phi \mu}, \quad (1.17)$$

et  $M$  est un facteur de forme visqueux donné par

$$M = \frac{8 \alpha_{\infty} k_0}{\phi \Lambda^2}. \quad (1.18)$$

Pour un pore cylindrique,  $M$  vaut 1 et varie entre 0.1 et 10 pour la plupart des matériaux (JOHNSON et coll. , 1987).

A partir de l'équation (1.15), on peut définir une fréquence de transition  $f_{Tv}$  entre les effets visqueux basses et hautes fréquences (PANNETON, 1996), gouvernés respectivement par  $k_0$  et  $\Lambda$ , telle que

$$\frac{M}{2} \hat{\omega} = 1, \quad (1.19)$$

soit

$$f_{Tv} = \frac{\phi^2 \Lambda^2 \sigma^2}{8 \pi \mu \alpha_{\infty}^2 \rho_0}. \quad (1.20)$$

**La longueur caractéristique thermique** ,  $\Lambda'$ , décrit les échanges thermiques entre les deux phases en hautes fréquences. Le squelette dont l'inertie thermique est grande devant celle du fluide, joue le rôle d'un thermostat. Celui-ci vient modifier le module d'incompressibilité du fluide saturant qui varie entre le module isotherme aux basses fréquences et le module adiabatique aux hautes fréquences.

Au-dessus d'une certaine fréquence, les échanges thermiques n'ont plus le temps de s'effectuer que dans une région proche des parois du squelette (figure 1.3). L'intégration de ces effets sur tout le domaine fluide dépend du rapport  $\delta'/\Lambda'$ , tel que

$$\delta' = \frac{\delta}{\sqrt{Pr}}, \quad (1.21)$$

et

$$\Lambda' = 2 \frac{V_f}{S_i} . \quad (1.22)$$

$\Lambda'$  reflète plutôt les pores de plus grande taille, là où les surfaces d'échange thermique sont les plus importantes. Par conséquent, on a toujours

$$\Lambda' \geq \Lambda . \quad (1.23)$$

Pour un pore cylindrique,  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont égaux. Pour des matériaux usuels, leur rapport est de l'ordre de 2 à 3, et leurs valeurs sont habituellement comprises entre  $10^{-5}$  et  $10^{-3}$  m.

Le module d'incompressibilité équivalent s'écrit alors

$$K_e(\omega) = \frac{K_a}{\gamma - (\gamma - 1) \left[ 1 - (1 - j) \frac{\delta'}{\Lambda} \right]} \quad \text{pour} \quad \omega \rightarrow \infty . \quad (1.24)$$

En basses fréquences, de même que pour les effets visqueux, on peut définir une perméabilité thermique  $k'_0$ , proportionnelle à la température excédentaire moyenne  $\langle \tau \rangle$  dans les pores suite à une variation de pression constante au cours du temps. Le module d'incompressibilité équivalent s'écrit alors sous cette forme

$$K_e(\omega) = \frac{K_a}{\gamma - j(\gamma - 1)\hat{\omega}'} \quad \text{pour} \quad \omega \rightarrow 0 , \quad (1.25)$$

avec  $\hat{\omega}'$  une fréquence adimensionnée telle que

$$\hat{\omega}' = \frac{\omega \rho_0 k'_0 P r}{\mu \phi} . \quad (1.26)$$

La transition entre les basses et hautes fréquences est réalisée par une fonction  $G'(\omega)$  vérifiant les limites asymptotiques telle que

$$K_e(\omega) = \frac{K_a}{\gamma - \frac{\gamma - 1}{1 + \frac{1}{j\hat{\omega}' G'(\omega)}}} , \quad (1.27)$$

avec

$$G'(\omega) = \sqrt{1 + j \frac{M'}{2} \hat{\omega}'}, \quad (1.28)$$

où  $M'$  est un facteur de forme thermique donné par

$$M' = \frac{8k'_0}{\phi \Lambda'^2} . \quad (1.29)$$

On peut aussi définir une fréquence de transition  $f_{Tt}$  entre les effets thermiques basses et hautes fréquences, gouvernés respectivement par  $k'_0$  et  $\Lambda'$ , telle que

$$\frac{M'}{2} \hat{\omega}' = 1, \quad (1.30)$$

soit

$$f_{Tt} = \frac{\mu \phi^2 \Lambda'^2}{8\pi k_0'^2 \rho_0 Pr} . \quad (1.31)$$

Le paramètre  $k_0'$  n'est pas utilisé dans notre modèle, car sa détermination repose sur une méthode acoustique qui n'a pas été encore validée par une autre méthode (LAFARGE et coll. , 1997). Il sera pris par défaut tel que  $M'$  vaille 1, valeur correspondant à un pore cylindrique. Les mesures acoustiques faites sur deux matériaux (LAFARGE et coll. , 1997) montrent que cette hypothèse ne convient pas pour une laine de verre très diluée ( $M' = 0.03$ ). Cependant elle reste réaliste pour une mousse polymère ( $M' = 0.3$ ). Le paramètre  $\Lambda'$  gouverne ainsi indirectement le comportement en basses fréquences. Les répercussions de cette approximation resteront peu significatives, si les effets thermiques sont faibles devant les autres sources de dissipation.

Dans ce document, les matériaux poreux étudiés sont des mousses polymères. Ces matériaux sont utilisés dans de nombreuses applications et présentent l'avantage d'être plus maniables que les matériaux fibreux. Le tableau 1.1 donne l'ordre de grandeur des paramètres. Leur détermination expérimentale sera développée au chapitre 3, en mettant l'accent sur l'imprécision due aux incertitudes de mesure, à l'hétérogénéité et à l'anisotropie.

| Caractéristique | $\phi$ | $\sigma$<br>( $Nm^{-4}s$ ) | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$<br>( $\mu m$ ) | $\Lambda'$<br>( $\mu m$ ) | $\rho_1$<br>( $kg\ m^{-3}$ ) | $\eta_s$ | $E$<br>(kPa) | $\nu$ |
|-----------------|--------|----------------------------|-----------------|--------------------------|---------------------------|------------------------------|----------|--------------|-------|
| Valeur mini     | 0.94   | 1 000                      | 1.0             | 20                       | 40                        | 15                           | 0.05     | 50           | 0.25  |
| Valeur maxi     | 0.99   | 300 000                    | 2.5             | 200                      | 500                       | 60                           | 0.20     | 800          | 0.45  |

TAB. 1.1: Ordre de grandeur des caractéristiques des mousses polymères.

### 1.2.2 Formalisme langrangien

Dans cette section, nous donnons l'expression des différents termes composant le lagrangien pour un élément de volume poroélastique. L'intégration sur le domaine poroélastique, en utilisant la méthode des éléments finis, et l'utilisation des équations de Lagrange conduiront à l'équation du mouvement discrétisée.

La description s'effectue dans un repère cartésien.

#### Energie élémentaire de déformation

L'énergie élémentaire de déformation du milieu poroélastique s'écrit

$$dV = \frac{1}{2}(\{\sigma_s\}^T \{\varepsilon_s^*\} + \{\sigma_f\}^T \{\varepsilon_f^*\}), \quad (1.32)$$

où  $\{\varepsilon_s\}$ ,  $\{\varepsilon_f\}$  sont les déformations <sup>4</sup> et  $\{\sigma_s\}$ ,  $\{\sigma_f\}$  les contraintes respectivement de la phase solide et fluide. Les contraintes sont données par

$$\{\sigma_s\} = \langle \sigma_{xx}^s, \sigma_{yy}^s, \sigma_{zz}^s, \sigma_{zx}^s, \sigma_{xy}^s, \sigma_{xy}^s \rangle^T, \quad (1.33)$$

$$\{\sigma_f\} = -\phi p \{m\}, \quad (1.34)$$

<sup>4</sup>L'astérisque \* indique une quantité conjuguée.

avec  $\phi$  la porosité,  $p$  la pression du fluide dans les pores et le vecteur  $\{m\} = \langle 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rangle^T$ .

Les relations contraintes-déformations s'écrivent

$$\{\sigma_s\} = [H_s]\{\varepsilon_s\} + [H_{sf}]\{\varepsilon_f\}, \quad (1.35)$$

$$\{\sigma_f\} = [H_{sf}]\{\varepsilon_s\} + [H_f]\{\varepsilon_f\}, \quad (1.36)$$

où  $[H_s]$  et  $[H_f]$  correspondent aux matrices d'élasticité de la phase solide et de la phase fluide.  $[H_{sf}]$  est la matrice de couplage élastique entre les deux phases.

Si le squelette est isotrope, on a

$$[H_s] = \begin{bmatrix} A + 2N & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A + 2N & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A + 2N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

où  $A$  et  $N$  correspondent aux coefficients de Lamé. Le module de cisaillement  $N$  s'exprime classiquement en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  par

$$N = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.38)$$

En supposant que le module de compression  $K_s$  du matériau constituant le squelette est très supérieur au module de compression  $K_b$  du matériau poreux, l'expression de  $A$  s'écrit

$$A = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{(1 - \phi)^2}{\phi} K_e(\omega). \quad (1.39)$$

Le deuxième terme provient de la variation de la porosité lors de la compression du squelette. Les matériaux poreux usuels ayant une porosité proche de 1, ce terme est négligé, soit

$$A = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (1.40)$$

On obtient alors la loi de comportement du squelette dans le vide. Pour les matériaux utilisés dans ce document, l'erreur sur  $A$  reste inférieure à 0.1%.

En observant les mêmes hypothèses, on peut facilement prendre en compte l'anisotropie du squelette. Si le squelette est isotrope transverse, d'axe  $L$ ,  $[H_s]$  est exprimé directement en fonction des cinq coefficients  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{TT}$ , tel que

$$[H_s] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{12} & 0 & 0 & 0 \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ H_{12} & H_{23} & H_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{LT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{LT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT})} \end{bmatrix}, \quad (1.41)$$

avec

$$H_{11} = E_L \frac{1 - \nu_{TT}}{1 - \nu_{TT} - 2\nu_{LT}^2 E_T / E_L}, \quad (1.42)$$

$$H_{12} = E_T \frac{\nu_{LT}}{1 - \nu_{TT} - 2\nu_{LT}^2 E_T / E_L}, \quad (1.43)$$

$$H_{22} = E_T \frac{1 - \nu_{LT}^2 E_T / E_L}{1 - \nu_{TT}^2 - 2\nu_{LT}^2 (1 + \nu_{TT}) E_T / E_L}, \quad (1.44)$$

$$H_{23} = E_T \frac{\nu_{TT} + \nu_{LT}^2 E_T / E_L}{1 - \nu_{TT}^2 - 2\nu_{LT}^2 (1 + \nu_{TT}) E_T / E_L}. \quad (1.45)$$

Avec l'hypothèse  $K_b \ll K_s$ , les coefficients des matrices d'élasticité du fluide et de couplage s'expriment simplement en fonction de la porosité  $\phi$  et du module d'incompressibilité équivalent  $K_e(\omega)$ ,

$$[H_f] = \phi K_e(\omega) \{m\} \{m\}^T, \quad (1.46)$$

$$[H_{sf}] = (1 - \phi) K_e(\omega) \{m\} \{m\}^T. \quad (1.47)$$

Les déformations du milieu poroélastique s'expriment en fonction des vecteurs déplacements de la phase solide et de la phase fluide, respectivement  $\{u\} = \langle u_x, u_y, u_z \rangle^T$  et  $\{U\} = \langle U_x, U_y, U_z \rangle^T$ , soit

$$\{\varepsilon_s\} = [L] \{u\}, \quad \{\varepsilon_f\} = [L] \{U\}, \quad (1.48)$$

où  $[L]$  est l'opérateur de dérivation spatiale

$$[L]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

En substituant les relations contraintes-déformations (1.35) (1.36) et déformations-déplacements (1.48) dans l'expression de l'énergie élémentaire de déformation (1.50), on obtient

$$\boxed{dV = \frac{1}{2} \left( [L]^T \{u\}^T [H_s] [L] \{u^*\} + 2\Re([L]^T \{u\}^T [H_{sf}] [L] \{U^*\}) + [L]^T \{U\}^T [H_f] [L] \{U^*\} \right).} \quad (1.50)$$

Le couplage élastique entre les deux phases est représenté par le terme central du 2<sup>e</sup> membre.

### Energie cinétique élémentaire

L'énergie cinétique élémentaire d'un milieu poroélastique fait aussi intervenir un terme de couplage. Elle s'exprime ainsi,

$$\boxed{dT = \frac{1}{2} \left( \rho_{11} \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}^*\} + 2\rho_{12} \Re(\{\dot{u}\}^T \{\dot{U}^*\}) + \rho_{22} \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}^*\} \right),} \quad (1.51)$$

avec  $\{\dot{u}\}$  et  $\{\dot{U}\}$  les dérivées par rapport au temps des vecteurs déplacements.  $\rho_{12}$  représente le couplage inertiel entre les deux phases, et intervient dans le calcul des masses volumiques apparentes  $\rho_{11}$  et  $\rho_{22}$  respectivement de la phase solide et fluide

$$\rho_{12} = -\phi\rho_o(\alpha_\infty - 1) \quad (1.52)$$

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12} \quad (1.53)$$

$$\rho_{22} = \phi\rho_o - \rho_{12}, \quad (1.54)$$

avec  $\rho_o$  la masse volumique de l'air,  $\rho_1$  celle de la phase solide,  $\phi$  la porosité et  $\alpha_\infty$  la tortuosité. Comme la tortuosité est toujours supérieure à 1, l'effet de couplage inertiel se traduit par un accroissement de l'inertie de chaque phase.

### Fonction de dissipation élémentaire

Pour tenir compte de la dissipation visqueuse, Biot (BIOT, 1956) a défini une fonction de dissipation  $D$  qui dépend du mouvement relatif des deux phases. Pour un élément de volume, elle est donnée par

$$dD = \frac{1}{2} b(\omega) (\{\dot{u}\} - \{\dot{U}\}) (\{\dot{u}\} - \{\dot{U}\})^*, \quad (1.55)$$

soit

$$dD = \frac{1}{2} b(\omega) \left( \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}^*\} - 2 \Re(\{\dot{u}\}^T \{\dot{U}^*\}) + \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}^*\} \right), \quad (1.56)$$

où  $b(\omega)$  est un coefficient d'amortissement visqueux, dépendant de la fréquence. Conformément à la description des effets visqueux adoptée, ce coefficient est directement proportionnel à la fonction  $G(\omega)$ , définie par l'équation (1.16), tel que

$$b(\omega) = \phi^2 \sigma G(\omega). \quad (1.57)$$

### Forces surfaciques

Soit  $F$  le champ vectoriel de force surfacique s'appliquant sur une surface  $S_N$  du matériau (cf. figure 1.4). Ce champ se répartit en fonction de la porosité  $\phi$  sur les phases solide et fluide pour donner respectivement les champs  $F_s$  et  $F_f$  tels que

$$F_s = F - \phi F_n \quad (1.58)$$

$$F_f = \phi F_n, \quad (1.59)$$

où  $F_n$  est la composante du champ  $F$ , normale à la surface  $S_N$ . Dans le cas d'une excitation par une onde acoustique, on a

$$F = -n_{S_N} p_{inc}, \quad (1.60)$$

avec  $p_{inc}$  le champ de pression incident s'appliquant sur  $S_N$  et  $n_{S_N}$  le champ des normales sortantes à la surface  $S_N$ .

### 1.3 Application de la méthode des éléments finis

Le milieu poroélastique est représenté par un domaine tridimensionnel  $\Omega$  de dimensions finies (figure 1.4). Il peut être en contact avec un milieu fluide (air) le long de l'interface  $S_{pa}$  et un milieu élastique (solide, plaque) le long de l'interface  $S_{pe}$ . Il peut être excité via ces autres milieux ou directement par une excitation acoustique exprimée par une contrainte (condition de Neumann) sur une surface  $S_N$ , ou par une excitation dite mécanique, exprimée par un déplacement imposé (condition de Dirichlet) sur une surface  $S_D$ . Ailleurs, différentes conditions aux limites sont obtenues, comme le glissement ou l'encastrement, selon que certains degrés de liberté sont libres (surface  $S_l$ ) ou bloqués (surface  $S_b$ ).

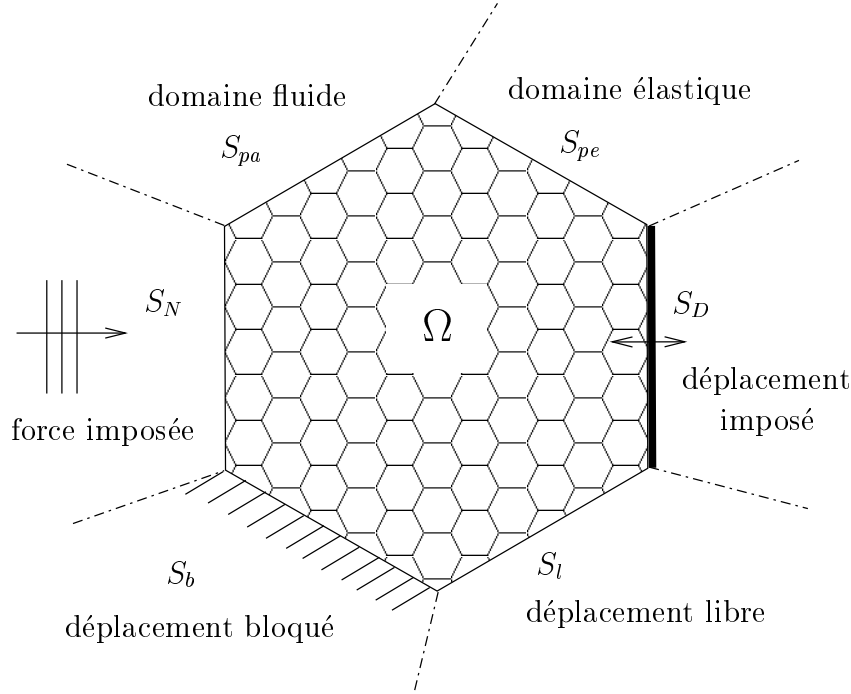


FIG. 1.4: Domaine poroélastique  $\Omega$  discrétisé et ses conditions aux limites.

#### 1.3.1 Discrétisation des fonctions d'énergie

Le volume  $\Omega$  est approximé par un ensemble continu d'éléments, de volume  $\Omega_e$ , à partir desquels on pourra calculer les énergies par sommation,

$$\Omega \approx \bigcup_{e \in \Omega} \Omega_e. \quad (1.61)$$

#### Choix des éléments

Par simplicité, on utilise des éléments isoparamétriques <sup>5</sup> à champ linéaire. Deux topologies ont été choisies, pentaèdre ou hexaèdre, pour lesquelles les éléments de référence sont respectivement un prisme droit ou un cube (figure 1.5).

<sup>5</sup>L'interpolation géométrique et celle des déplacements sont réalisées par les mêmes fonctions.

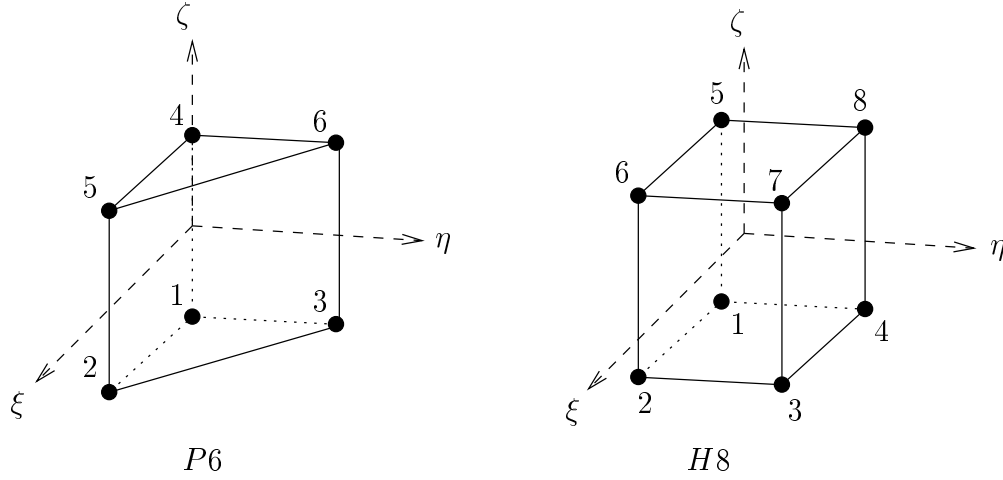


FIG. 1.5: Topologie des éléments poroélastiques :  $P6$ , pentaèdre à six nœuds et  $H8$ , hexaèdre à huit nœuds.

Les fonctions d'interpolation sont les mêmes pour les deux phases. Leurs déplacements en un point de coordonnées  $(x, y, z)$  de l'élément  $e$  se déduisent des déplacements nodaux  $\{\bar{u}_e\}$  et  $\{\bar{U}_e\}$  de la phase solide et fluide respectivement, par

$$\{u\} = [N_e]\{\bar{u}_e\} = \begin{bmatrix} \{N_e(x, y, z)\}^T \\ \{N_e(x, y, z)\}^T \\ \{N_e(x, y, z)\}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_x\}_e \\ \{\bar{u}_y\}_e \\ \{\bar{u}_z\}_e \end{Bmatrix}, \quad (1.62)$$

$$\{U\} = [N_e]\{\bar{U}_e\}, \quad (1.63)$$

avec  $[N_e]$  la matrice contenant les fonctions d'interpolation. Pour l'élément hexaédrique à huit nœuds, le vecteur des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence  $r$  est donné par

$$\{N_r(\xi, \eta, \zeta)\} = \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{Bmatrix}, \quad (1.64)$$

avec  $(\xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées du point dans le repère de l'élément de référence (figure 1.5).

Nous rappelons que l'intégration des énergies sur les éléments réels est réalisée à partir de celle sur les éléments de référence. Par exemple, pour l'énergie de déformation  $V$ , on a

$$V = \sum_{e \in \Omega} \int_{\Omega_e} dV \, dx dy dz = \sum_{e \in \Omega} \int_{\Omega_r} dV \, \det[J] \, d\xi d\eta d\zeta, \quad (1.65)$$

avec  $[J]$  la matrice jacobienne définie par

$$[J] = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial N_r(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial N_r(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \right\}^T \\ \left\{ \frac{\partial N_r(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right\}^T \end{bmatrix} [\{\bar{x}\}_e \{\bar{y}\}_e \{\bar{z}\}_e], \quad (1.66)$$

où  $\{\bar{x}\}_e$ ,  $\{\bar{y}\}_e$  et  $\{\bar{z}\}_e$  sont les coordonnées des nœuds de l'élément réel.

L'intégration sur chaque élément est faite numériquement par la méthode de GAUSS pour chaque topologie. Les points d'intégration sont les sommets pour le pentaèdre. Pour l'héxaèdre, l'intégration est réduite à deux points pour le cisaillement afin de remédier au blocage apparaissant lors d'une déformation en flexion (MACNEAL, 1994).

Par la suite, les déplacements nodaux pour tout le domaine sont notés  $\{\bar{u}\}$  la phase solide et  $\{\bar{U}\}$  pour la phase fluide.

### Energie de déformation

Sur tout le domaine, elle s'écrit

$$V = \sum_{e \in \Omega} \int_{\Omega_e} dV \quad d\Omega. \quad (1.67)$$

En utilisant l'équation (1.50) pour la densité d'énergie de déformation et l'équation (1.62) d'interpolation nodale, on obtient

$$\boxed{V = \frac{1}{2} \left( \{\bar{u}\}^T [K_s] \{\bar{u}^*\} + 2\Re(\{\bar{u}\}^T (1-\phi) K_e(\omega) [\hat{K}] \{\bar{U}^*\}) + \{\bar{U}\}^T \phi K_e(\omega) [\hat{K}] \{\bar{U}^*\} \right)}, \quad (1.68)$$

où l'accent circonflexe sur la matrice  $[\hat{K}]$  indique une grandeur adimensionnée, étant donné que les modules d'incompressibilité ont été sortis de l'intégrale de volume. Les matrices de raideur s'écrivent donc

$$[K_s] = \sum_{e \in \Omega} \int_{\Omega_e} [B_e]^T [H_s] [B_e] d\Omega, \quad (1.69)$$

$$[\hat{K}] = \sum_{e \in \Omega} \int_{\Omega_e} [B_e]^T \{m\} \{m\}^T [B_e] d\Omega, \quad (1.70)$$

et la matrice reliant les déformations aux déplacements

$$[B_e] = [L][N_e]. \quad (1.71)$$

### Energie cinétique

En utilisant l'équation (1.51), l'énergie cinétique sur tout le domaine s'écrit

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \left( \{\dot{\bar{u}}\}^T \rho_{11} [\hat{M}] \{\dot{\bar{u}}^*\} + 2\Re(\{\dot{\bar{u}}\}^T \rho_{12} [\hat{M}] \{\dot{\bar{U}}^*\}) + \{\dot{\bar{U}}\}^T \rho_{22} [\hat{M}] \{\dot{\bar{U}}^*\} \right)}, \quad (1.72)$$

où l'accent sur la matrice  $[\hat{M}]$  indique une expression adimensionnée, étant donné que les masses volumiques ont été sorties de l'intégrale sur le domaine.  $[\hat{M}]$  représente la répartition nodale d'une grandeur volumique

$$[\hat{M}] = \sum_{e \in \Omega} \int_{\Omega_e} [N_e]^T [N_e] d\Omega. \quad (1.73)$$

### Fonction de dissipation

De même, en intégrant l'équation (1.56) sur tout le domaine, la fonction de dissipation s'écrit

$$D = \frac{1}{2} b(\omega) \left( \{\dot{\bar{u}}\}^T [\hat{M}] \{\dot{\bar{u}}^*\} - 2\Re(\{\dot{\bar{u}}\}^T [\hat{M}] \{\dot{\bar{U}}^*\}) + \{\dot{\bar{U}}\}^T [\hat{M}] \{\dot{\bar{U}}^*\} \right). \quad (1.74)$$

En sortant le coefficient d'amortissement de l'intégrale de volume, on peut utiliser la matrice  $[\hat{M}]$ .

### Forces surfaciques

Les champs des forces surfaciques  $F_s$  et  $F_f$  sont concentrés aux nœuds de la surface  $S_N$  pour donner les vecteurs des forces nodales relatifs aux phases solide et fluide, respectivement

$$\{\bar{F}_s\} = \sum_{e \in S_N} \int_{S_N^e} [N_e]^T \{F_s\}_e dS, \quad (1.75)$$

$$\{\bar{F}_f\} = \sum_{e \in S_N} \int_{S_N^e} [N_e]^T \{F_f\}_e dS. \quad (1.76)$$

Dans le cas d'une onde acoustique incidente, ces vecteurs s'écrivent

$$\{\bar{F}_s\} = (1 - \phi) \{\bar{F}\}, \quad (1.77)$$

$$\{\bar{F}_f\} = \phi \{\bar{F}\}. \quad (1.78)$$

### 1.3.2 Equations du mouvement

On applique les équations de Lagrange. Pour un système à  $n$  variables généralisées  $q_i$  indépendantes, on a  $n$  équations de la forme

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.79)$$

avec  $F_i$  les forces extérieures.

Dans notre cas, les variables généralisées sont les déplacements nodaux des deux phases sur tout le domaine

$$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{U}\} \end{Bmatrix}. \quad (1.80)$$

En utilisant les expressions (1.68)(1.72)(1.74)(1.75)(1.76), en régime harmonique pour une pulsation donnée  $\omega$ , les équations de Lagrange s'écrivent

$$[Z_p] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{U}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{F}_s\} \\ \{\bar{F}_f\} \end{Bmatrix} \quad (1.81)$$

avec

$$[Z_p] = \begin{bmatrix} [K_s] & (1-\phi)K_e(\omega)[\hat{K}] \\ (1-\phi)K_e(\omega)[\hat{K}]^T & \phi K_e(\omega)[\hat{K}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \rho_{11}[\hat{M}] & \rho_{12}[\hat{M}] \\ \rho_{12}[\hat{M}]^T & \rho_{22}[\hat{M}] \end{bmatrix} + j\omega b(\omega) \begin{bmatrix} [\hat{M}] & -[\hat{M}] \\ -[\hat{M}]^T & [\hat{M}] \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

La matrice globale ou matrice impédance  $[Z_p]$  se compose d'un terme de raideur, d'un terme de masse et d'un terme d'amortissement. En remarquant que la même matrice  $[\hat{M}]$  apparaît dans les termes de masse et d'amortissement, on peut condenser son écriture :

$$[Z_p] = \begin{bmatrix} [K_s] & (1-\phi)K_e(\omega)[\hat{K}] \\ (1-\phi)K_e(\omega)[\hat{K}]^T & \phi K_e(\omega)[\hat{K}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{11}(\omega)[\hat{M}] & \tilde{\rho}_{12}(\omega)[\hat{M}] \\ \tilde{\rho}_{12}(\omega)[\hat{M}]^T & \tilde{\rho}_{22}(\omega)[\hat{M}] \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

avec

$$\tilde{\rho}_{11}(\omega) = \rho_{11} + j\frac{b(\omega)}{\omega}, \quad \tilde{\rho}_{22}(\omega) = \rho_{22} + j\frac{b(\omega)}{\omega}, \quad \tilde{\rho}_{12}(\omega) = \rho_{12} - j\frac{b(\omega)}{\omega}. \quad (1.84)$$

La matrice  $[Z_p]$  provient de l'assemblage de trois sous-matrices  $[K_s]$ ,  $[\hat{K}]$  et  $[\hat{M}]$ .  $[K_s]$  est la matrice de raideur du squelette dans le vide,  $[\hat{M}]$  la matrice de masse adimensionnée et  $[\hat{K}]$  la matrice de raideur adimensionnée de la phase fluide. Ces matrices sont obtenues à partir d'éléments élastiques à trois degrés de liberté par nœuds, conformément aux équations (1.69)(1.70)(1.73). L'obtention de la matrice globale  $[Z_p]$  consiste alors à les multiplier par les coefficients dépendant de la fréquence et à les assembler. Cette méthode a l'avantage d'éviter de recalculer les trois sous-matrices à chaque fréquence, d'où un gain de temps significatif pour les gros systèmes. Cependant, elle nécessite l'écriture de modules spécifiques pour la gestion des conditions aux limites.

L'écriture de la matrice  $[Z_p]$  sous la forme de l'équation (1.83) permet de voir distinctement l'influence des deux phases et des couplages. Si l'on supprime l'effet du fluide, on obtient alors l'équation d'un solide viscoélastique. A l'opposé, en bloquant le mouvement du squelette, on retrouve l'équation d'un fluide équivalent de module d'incompressibilité  $K_e(\omega)$  et de masse volumique  $\rho_e(\omega)$ .

### 1.3.3 Gestion des conditions aux limites

Les éléments poroélastiques peuvent être couplés à des éléments élastiques (solide, plaque) et fluides (air).

**Couplage poroélastique-élastique :** il concerne par exemple le collage d'un matériau poreux sur un solide ou une plaque. Il est assuré en imposant à l'interface  $S_{pe}$  la continuité des déplacements normaux de la phase fluide  $U_n$  avec ceux du milieu élastique  $w_n$

$$U_n = w_n, \quad (1.85)$$

et la continuité des déplacements du squelette  $u_i$  avec ceux du milieu élastique  $w_i$

$$u_i = w_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.86)$$

La prise en compte de ces relations linéaires s'effectue en éliminant les degrés de liberté dépendants, par l'intermédiaire d'une matrice  $[G]$ , telle que

$$\{\bar{q}\} = [G]\{\bar{q}\}_r \quad (1.87)$$

avec  $\{\bar{q}\}$  le vecteur de l'ensemble des variables nodales et  $\{\bar{q}\}_r$  le vecteur des variables nodales indépendantes.

En supposant que la normale est suivant l'axe 3, la relation pour un nœud s'écrit

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_n \\ u_1 \\ u_2 \\ u_n \\ U_1 \\ U_2 \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_n \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (1.88)$$

Dans le cas de notre élément de plaque, les mouvements de membrane sont supposés nuls, donc les degrés de liberté  $w_1$  et  $w_2$  disparaissent. Par contre, l'élément possède deux rotations supplémentaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , car l'interpolation n'est pas linéaire. Si la plaque est mince, les déplacements tangentiels résultants à la surface de la plaque sont petits et peuvent être négligés dans le couplage. Par conséquent, les déplacements tangentiels du squelette à l'interface sont bloqués, ce qui se traduit par deux relations linéaires nulles dans  $[G]$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w_n \\ u_1 \\ u_2 \\ u_n \\ U_1 \\ U_2 \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w_n \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (1.89)$$

Le calcul de la matrice impédance réduite  $[Z_r]$  et du vecteur des excitations réduit  $\{F_r\}$  est donné par

$$[Z_r] = [G]^T [Z_p] [G], \quad (1.90)$$

$$\{F_r\} = [G]^T \{F_g\}. \quad (1.91)$$

**Couplage poroélastique-acoustique :** du point de vue du poreux, on impose la continuité des contraintes normales à l'interface  $S_{pa}$

$$\begin{aligned} \sigma_n^s &= -(1 - \phi)p, \\ \sigma_n^f &= -\phi p. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Cela revient à imposer au poreux une force surfacique qui se répartit sur les variables nodales par une matrice de couplage

$$[C_{pa}] = \begin{bmatrix} (1 - \phi)[C_n] \\ \phi[C_n] \end{bmatrix}, \quad (1.93)$$

avec la matrice de répartition des forces normales

$$[C_n] = \sum_{e \in S_{ap}} \int_{S_{ap}^e} [N_e]^T \{n_e\} \{N_e\}^T dS, \quad (1.94)$$

où  $\{n_e\}$  est le vecteur normal en un point d'un élément de l'interface  $S_{pa}$ .

Du point de vue du fluide, on impose la continuité des déplacements normaux à l'interface

$$\frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} = (1 - \phi)u_n + \phi U_n, \quad (1.95)$$

où  $P$  est la pression du fluide. De même, cela revient à imposer au fluide une force surfacique par le biais de la même matrice de couplage  $[C_{pa}]$ . La matrice impédance  $[Z_{pa}]$  du système complet prend alors l'allure suivante

$$[Z_{pa}] = \begin{bmatrix} [Z_p] & [C_{pa}] \\ [C_{pa}]^T & [Z_a] \end{bmatrix}, \quad (1.96)$$

avec  $[Z_a]$  la matrice impédance correspondant au milieu acoustique.

La réaction d'un milieu extérieur peut être simplement représentée par une condition d'impédance. Actuellement seuls deux cas limites sont implantés.

**Impédance nulle :** elle revient à n'imposer aucune contrainte à la surface  $S_l$  pour les deux phases. La formulation poroélastique étant en déplacement, cette condition est naturelle. Cependant elle n'a pas de réalité physique car cela revient à coupler le matériau au vide. Bien que ce soit réaliste pour la phase solide, si le couplage entre les deux phases n'est pas trop important et si le squelette n'est pas trop souple (généralement vérifié pour les mousses polymères), ce n'est pas réaliste pour la phase fluide, qui au repos reste dans le matériau.

Couramment utilisée dans le cas de la vibration d'un solide immergé dans un fluide léger, cette condition pourra être utilisée pour un matériau poroélastique, si son comportement est principalement gouverné par la phase solide. Nous montrons au chapitre 4 que c'est généralement le cas dans la configuration "plaque-poreux", si on s'intéresse à la vibration de la plaque.

**Impédance infinie :** elle revient à bloquer les déplacements à la surface  $S_b$ . Selon le choix des degrés de liberté bloqués, on réalise plusieurs types de conditions aux limites :

- le glissement n'autorise pas les déplacements normaux à  $S_b$  pour les deux phases,
- l'encastrement n'autorise aucun déplacement pour la phase solide et pas de déplacement normal à  $S_b$  pour la phase fluide. Les déplacements tangentiels du fluide sont toujours permis car on ne tient pas compte de la viscosité du fluide par rapport aux parois.

La méthode utilisée pour annuler ces déplacements est celle de la suppression des équations (DHATT et TOUZOT, 1984) : lorsqu'un degré de liberté est bloqué, on supprime la ligne et la colonne correspondante dans la matrice globale. Cette méthode a l'avantage de réduire la taille du système.

Enfin le milieu poroélastique peut subir différents types de sollicitations à sa frontière.

**Onde plane incidente :** à la surface  $S_N$ , elle se traduit par une force répartie sur les deux phases en fonction de la porosité  $\phi$  suivant les équations (1.75) et (1.76). Ces forces contribuent directement au second membre de l'équation du système global (1.83).

**Déplacement imposé :** à la surface  $S_D$ , il peut être de type

- cisaillement : seuls les déplacements de la phase solide tangents à  $S_D$  sont imposés,

- traction-compression : les déplacements normaux à  $S_D$  sont imposés aux deux phases avec la même amplitude. Si la phase solide ne peut glisser le long de la surface  $S_D$ , ses déplacements tangentiels seront aussi bloqués.

L'imposition des déplacements (non nuls) se fait par la méthode du terme diagonal dominant (DHATT et TOUZOT, 1984). Pour imposer le  $i^{\text{ème}}$  degré de liberté à une valeur imposée, on procède en deux étapes :

1. on ajoute un terme grand  $\Gamma$  au  $i^{\text{ème}}$  terme diagonal de la matrice globale,
2. on multiplie le  $i^{\text{ème}}$  terme du vecteur force par le terme  $\Gamma$ .

La solution de la  $i^{\text{ème}}$  équation sera approximativement la valeur imposée, pour  $M$  suffisamment grand. En pratique, on prend  $\Gamma = 10^{15}$ , si les calculs sont faits en double précision. Cette technique a été retenue car elle nécessite peu d'opérations.

### 1.3.4 Séquence de calcul

L'élément poroélastique est construit à partir d'un élément de type solide élastique à trois translations par nœud. Cet élément sert à calculer les trois sous-matrices assemblées,  $[K_s]$ ,  $[\hat{M}]$  et  $[\hat{K}]$ . Deux topologies élémentaires sont disponibles : un pentaèdre à six nœuds et un hexaèdre à huit nœuds.

La structure est divisée en plusieurs sous-domaines, représentant chacun un milieu homogène. Elle est décrite dans le fichier `d.phx`. Les données relatives à chaque sous-domaine se trouvent dans un fichier d'extension `.gvm`, contenant les propriétés physiques du milieu, les coordonnées des nœuds, la connectivité des éléments, les conditions aux limites et l'excitation répartie sur les nœuds.

La séquence de calcul jusqu'à la résolution est la suivante

1. calcul des matrices élémentaires de masse adimensionnelle, de raideur adimensionnelle pour la phase fluide, et raideur pour la phase solide, à partir du même élément solide,
2. assemblage des matrices élémentaires pour obtenir les trois sous-matrices  $[\hat{M}]$ ,  $[\hat{K}]$  et  $[K_s]$  de l'équation (1.83),
3. conformément à l'équation (1.83), construction des matrices masse et raideur globales, en introduisant les facteurs dépendant de la fréquence,
4. sommation des matrices masse et raideur globales, à la pulsation  $\omega$ , pour obtenir la matrice d'impédance globale,
5. assemblage avec les milieux acoustiques et élastiques, et introduction des matrices de couplage
6. réduction du système en éliminant les degrés de liberté dépendants,
7. réduction du système pour prendre en compte les degrés de liberté bloqués des sous-domaines poroélastiques,
8. prise en compte des déplacements imposés,
9. résolution directe ou itérative,
10. calcul des indicateurs à partir du vecteur solution.

Les deux premiers points sont traités par le code GAUSEF (GAUS, (1998)) et le reste par PHÉNIX (PANNETON, 1996). Lors d'une étude spectrale, la construction des matrices globales, à partir de matrices indépendantes de la fréquence, permet d'accélérer le calcul, car les étapes 1 et 2 ne sont faites qu'une fois. La boucle en fréquence passe donc du point 10 au point 3.

Pour permettre le maniement de systèmes de grande taille, seules les valeurs non-nulles des matrices assemblées sont stockées. De plus, ces matrices étant symétriques, on ne stocke que la moitié.

La résolution directe est fiable mais nécessite le stockage d'une matrice intermédiaire ayant un fort taux de remplissage : on atteint rapidement les limites de capacité de la mémoire vive de la machine. La méthode itérative est beaucoup plus économique mais ne peut être utilisée que si les degrés de liberté du système sont homogènes : pressions ou déplacements. Dans le cas contraire, la boucle d'itération est interrompue avant d'avoir convergée car le critère de convergence ne gère pas la différence d'ordre de grandeur entre les degrés de liberté de différentes natures.

Enfin, une résolution par la méthode de superposition modale (IMBERT J.-F., 1995) est difficile à mettre en œuvre à cause des dépendances fréquentielles non-linéaires de certains facteurs et du fort amortissement des ondes se propageant dans le milieu poroélastique. L'application de cette méthode a fait l'objet des travaux de SGARD et coll. (1998).

### 1.3.5 Développements du code PHÉNIX

Plusieurs développements du code PHÉNIX ont été nécessaires, à savoir :

- gestion des interfaces tridimensionnelles, permettant le couplage entre sous-domaines dont les interfaces appartiennent à des plans orthogonaux aux trois axes (cf. chapitre 3),
- introduction de la loi de comportement isotrope transverse pour le squelette grâce à l'interfaçage avec le code MODULEF (cf. chapitre 3),
- intégration des indicateurs énergétiques pour les milieux élastiques et poroélastiques (cf. chapitre 4).

## Chapitre 2

# Etude de convergence

### 2.1 Introduction

De par leur nature diphasique, la convergence des éléments poroélastiques n'est *a priori* pas directement comparable à celle des éléments monophasiques, solides ou fluides. L'étude de la littérature montre l'absence d'une telle investigation. Seules deux réflexions basées sur l'étude de cas particuliers donnent quelques indications.

Lors de l'étude d'un matériau poreux en conduit, KANG et BOLTON (1995) ont du utiliser plus d'éléments poroélastiques que d'éléments acoustiques sur une même longueur : alors qu'habituellement 3 à 4 éléments quadratiques acoustiques par longueur d'onde suffisent, 10 à 12 éléments poroélastiques sont nécessaires pour la même distance. Ils justifient cette observation (KANG et BOLTON, 1996) par le fait que la plus petite longueur d'onde de BIOT est approximativement 3 fois plus courte que celle du son.

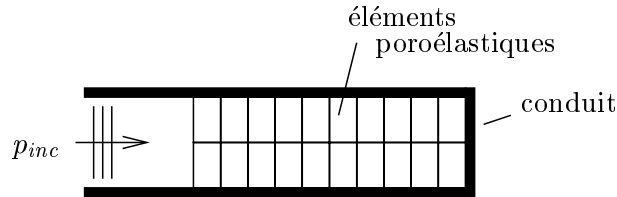


FIG. 2.1: Matériau poroélastique encastré dans un conduit et sollicité par une onde acoustique (KANG et BOLTON, 1995).

Pour un cas de sollicitation longitudinale, PANNETON (1996) remarque qu'il faut utiliser de 12 à 17 éléments linéaires par longueur d'onde pour obtenir une erreur de 5% sur l'énergie de déformation. Cependant il observe que la convergence en fréquence est plus rapide et pense que 6 éléments par longueur d'onde, comme en élasticité, devraient suffire. Dans le cas de la flexion d'une poutre bi-encastrée (10 cm  $\times$  1 cm), l'énergie de déformation du premier mode est atteinte à 5% près avec  $32 \times 3$  éléments. Cette lente convergence est attribuée aux mauvaises performances en flexion des éléments pentaédriques linéaires (PANNETON et ATALLA, 1997) : des éléments quadratiques seraient mieux adaptés à de telles configurations. Cependant pour des indicateurs logarithmiques 8 éléments pourraient suffire.

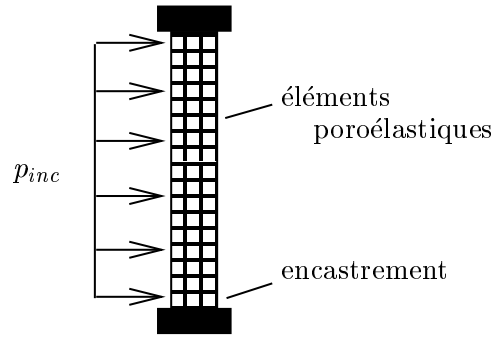


FIG. 2.2: Poutre poroélastique sollicitée en flexion par une onde acoustique (PANNETON, 1996).

Ces résultats ne sont pas directement comparables (définition des longueurs d'onde, type de sollicitation, indicateurs observés) et manquent de véritable justification. Dans ce chapitre, nous proposons une étude de la convergence des éléments poroélastiques linéaires dans le but de pouvoir définir un critère de maillage en rapport avec les ondes de BIOT.

## 2.2 Convergence des éléments poroélastiques

L'article présenté ci-après (DAUCHEZ et coll. , 1999a) comporte deux parties. La première porte sur des applications unidimensionnelles pour lesquelles le rapport entre fréquence de résonance et longueurs d'onde de BIOT peut être établi. Ce rapport permet d'exprimer la vitesse de convergence en fréquence ramenée à une longueur d'onde. La convergence en fréquence assurera une convergence en amplitude des différents indicateurs.

La deuxième partie porte sur des applications tridimensionnelles où la dimension finie de la structure joue un rôle. Dans ce cas, la relation aux longueurs d'onde de BIOT n'est plus directe, et les déformations deviennent plus complexes. Nous basons notre investigation sur un exemple d'application type, à partir de laquelle des tendances sont données pour différents indicateurs.

# Convergence of poroelastic finite elements based on Biot displacement formulation

N. Dauchez and S. Sahraoui

*Laboratoire d'Acoustique UMR CNRS 6613, Univ. du Maine, 72095 Le Mans cedex 9, France*

N. Atalla

*GAUS, Mech. Eng., Univ. de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, J1K 2R1, Canada*

Convergence of linear poroelastic elements based on Biot displacement formulation is investigated. The aim is to determine a mesh criterion providing reliable results under a given frequency limit. The first part deals with 1-D applications for which resonance frequencies can be related to Biot wavelengths. Their relative contributions to the motion are given in order to determine if mesh criteria for monophasic media are suitable for poroelastic media. It is found that respect of 6 linear elements per wavelength for each Biot wave is a primary condition. For 3-D applications convergence rules are derived from a generic configuration, i.e. a clamped porous layer. Because of complex deformation, previous criterion is shown to be insufficient. Influence of the coupling between the two phases is demonstrated.

## INTRODUCTION

Biot theory of fluid saturated porous media provides a description of the waves propagating in geophysics materials (Biot, 1956). Several authors have extended this theory to sound absorbing materials, such as glass wool and polymer foams. A good agreement with measurements has been shown for multilayer systems using analytical methods (Allard, 1993). In order to interpret the modal behavior of finite size structures, 2-D and 3-D finite element formulations based on extended Biot theory have been developed (Coyette and Wynendaale, 1995; Johansen *et al.*, 1995; Kang and Bolton, 1995; Panneton and Atalla, 1997). These formulations have been validated by comparison with measured or simulated surface impedance of layered media. Several authors have also performed parametric studies. However convergence of the different formulations has not been specifically studied.

Because of the biphasic nature of poroelastic elements, mesh criterion used for elements describing monophasic media (solid, fluid) is a priori not valid for poroelastic elements. Such a criterion is essential for designing a suitable mesh that gives reliable results. Moreover, an optimized mesh will result in an important saving of computer time and memory, as poroelastic formulation leads to heavy systems. Determination of convergence criterion for poroelastic elements is an objective of this paper.

The finite element formulation used in this study is based on Biot-Johnson-Allard theory (Allard, 1993) and has been implemented by Panneton and Atalla

(1997). It is referred as the  $(u, U)$  formulation for solid and fluid displacements. Poroelastic elements have 6 degrees of freedom per node (3 translations for each phase). They are based on linear three-dimensional pentaedric or hexaedric elements.

The first part deals with 1-D applications for which resonance frequencies can be related to Biot waves. Their relative contributions to the motion are investigated in order to determine whether criterion used for monophasic media are suitable for poroelastic media.

The second part deals with convergence of 3-D applications where the finite size of the structure is relevant. In that case, the displacement of both phases can be fairly different and the relation between resonances and wavelengths is no more direct. Convergence rules are derived from a generic configuration, i.e. a clamped porous layer.

## I. CONVERGENCE FOR 1-D BEHAVIOR

### A. Theoretical analysis

The motion of the poroelastic media is described by the macroscopic displacement of the solid and fluid phases represented by the vectors  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{U}$ . Assuming a harmonic time dependence  $e^{j\omega t}$ , the equation of motion can be written in the form (Allard, 1993)

$$P\nabla(\nabla.\mathbf{u}) - N\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{u}) + Q\nabla(\nabla.\mathbf{U}) + \omega^2 (\tilde{\rho}_{11}\mathbf{u} + \tilde{\rho}_{12}\mathbf{U}) = 0 \quad (1)$$

$$Q\nabla(\nabla.\mathbf{u}) + R\nabla(\nabla.\mathbf{U}) + \omega^2 (\tilde{\rho}_{12}\mathbf{u} + \tilde{\rho}_{22}\mathbf{U}) = 0 \quad (2)$$

where  $P$  and  $R$  are the bulk modulus of the solid and fluid phases respectively,  $N$  is the shear modulus of the solid phase and  $Q$  quantifies the potential coupling between the two phases. These coefficients are complex :  $P$ ,  $N$  include structural damping of the solid phase and  $R$ ,  $Q$  thermal dissipation. The equivalent density coefficients,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{11} &= \rho_{11} + jb(\omega)/\omega, \\ \tilde{\rho}_{22} &= \rho_{22} + jb(\omega)/\omega, \\ \tilde{\rho}_{12} &= \rho_{12} - jb(\omega)/\omega,\end{aligned}\quad (3)$$

are related to solid and fluid phases and inertial coupling. They include viscous damping by complex function  $b(\omega)$ .

Coupling between the two phases is described by 5 parameters according to Johnson-Allard theory (Allard, 1993) :  $\phi$  porosity,  $\alpha_\infty$  tortuosity,  $\sigma$  air flow resistivity,  $\Lambda$  and  $\Lambda'$  viscous and thermal characteristic lengths respectively.

### 1. Properties of Biot waves

As dilatational and rotational waves are uncoupled, the equation of motion can be solved separately for the two types of wave. Scalar potentials for dilatation and vector potentials for shear has been used by Biot to express displacement of solid and fluid phases. Two compressional waves characterized by their constant of propagation  $k_1$  and  $k_2$  are found

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)}(P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta}), \quad (4)$$

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{2(PR - Q^2)}(P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12} + \sqrt{\Delta}), \quad (5)$$

with

$$\begin{aligned}\Delta &= (P\tilde{\rho}_{22} + R\tilde{\rho}_{11} - 2Q\tilde{\rho}_{12})^2 \\ &\quad - 4(PR - Q^2)(\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2).\end{aligned}$$

Each wave propagates in both phases with different amplitudes. The ratio  $\mu_i$  between displacement of fluid and solid phases, respectively denoted  $U_i$  and  $u_i$  for each wave  $r$ , is given by

$$\mu_i = \frac{U_i}{u_i} = \frac{Pk_i^2 - \omega^2\tilde{\rho}_{11}}{\omega^2\tilde{\rho}_{12} - Qk_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Following the nomenclature used by Allard (1993), the wave that propagates mainly in the fluid is called the

fluid-borne wave, and the one that propagates mainly in the solid is called the solid-borne wave. This nomenclature reflects the physical nature of the two waves for acoustical porous materials at low frequencies. Solid-borne wave propagates in the two phases with similar amplitude. Fluid-borne wave propagates mainly in the fluid phase, and is usually strongly damped. Each kind of wave will be identified by over-script  $sw$  or  $fw$ , respectively for solid-borne and fluid-borne wave. Note that each wave is not always related to the same  $k_i$  over the whole frequency range.

One shear wave propagates in the porous media, characterized by

$$k_3^2 = \frac{\omega^2}{N} \left( \frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \quad \text{and} \quad \mu_3 = -\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}. \quad (7)$$

Celerity  $c_i$ , wave length  $\lambda_i$  and wave damping  $\gamma_i$  are deduced from  $k_i$  for each wave  $r$ , such as

$$k_i = \frac{\omega}{c_i} - j\gamma_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} - j\gamma_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

### 2. Relative contributions of longitudinal Biot waves

Let us take a porous layer of thickness  $l$  along the  $x$  axis (figure 1). The displacement of one fluid or solid particle is the contribution of four waves : two waves ( $sw$  and  $fw$ ) propagating in the  $x$  direction, noted by subscript  $+$ , and two waves propagating in the  $-x$  direction, noted  $-$ . Displacement of solid phase  $u(x)$  and fluid phase  $U(x)$  of coordinate  $x$  is given by

$$\begin{aligned}u(x) &= u_+^{sw}(0) e^{-jk^{sw}x} + u_-^{sw}(0) e^{+jk^{sw}x} \\ &\quad + u_+^{fw}(0) e^{-jk^{fw}x} + u_-^{fw}(0) e^{+jk^{fw}x}, \\ U(x) &= \mu^{fw}(u_+^{fw}(0) e^{-jk^{fw}x} + u_-^{fw}(0) e^{+jk^{fw}x}) \\ &\quad + \mu^{sw}(u_+^{sw}(0) e^{-jk^{sw}x} + u_-^{sw}(0) e^{+jk^{sw}x}),\end{aligned}\quad (9)$$

(10)

where fluid displacement are eliminated by using ratios  $\mu^{sw}$  and  $\mu^{fw}$ .

**Acoustical excitation.** The porous layer is first supposed to be bonded to a rigid impervious wall (figure 1) at  $x=0$ , which gives

$$u_+^{sw}(0) = -u_-^{sw}(0), \quad u_+^{fw}(0) = -u_-^{fw}(0). \quad (11)$$

Excitation is an incident plane wave imposing a pressure  $p$  at  $x = -l$ . Stress equilibrium at the surface of

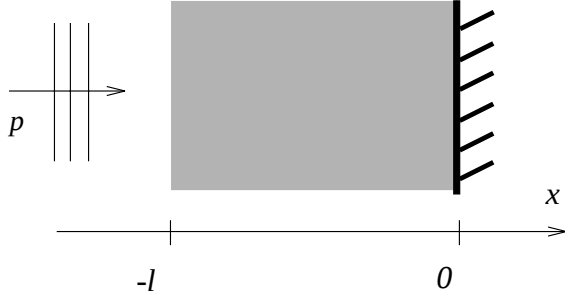


Figure 1: Porous layer of thickness  $l$ , bonded to a rigid impervious wall.

the layer is given by

$$\begin{aligned} -(1-\phi)p(-l) &= \sigma_{xx}^s(-l) \\ &= P \frac{\partial u(-l)}{\partial x} + Q \frac{\partial U(-l)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -\phi p(-l) &= \sigma_{xx}^f(-l) \\ &= Q \frac{\partial u(-l)}{\partial x} + R \frac{\partial U(-l)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (13)$$

with porosity  $\phi$ . From equations (9-13), one can calculate  $u_+^{sw}(0)$  and  $u_+^{fw}(0)$ . Displacements at any position  $x$  are given by

$$\begin{aligned} u(x) &= u_+^{sw}(0) \left[ 2j \sin(-k^{sw}x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_+^{fw}(0)}{u_+^{sw}(0)} 2j \sin(-k^{fw}x) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} U(x) &= u_+^{fw}(0) \left[ 2j \mu^{fw} \sin(-k^{fw}x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_+^{sw}(0)}{u_+^{fw}(0)} \mu^{sw} 2j \sin(-k^{sw}x) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

with

$$\begin{aligned} \frac{u_+^{fw}(0)}{u_+^{sw}(0)} &= - \frac{\phi(P + \mu^{sw}Q) - (1-\phi)(Q + \mu^{sw}R)}{\phi(P + \mu^{fw}Q) - (1-\phi)(Q + \mu^{fw}R)} \\ &\quad \times \frac{k^{sw} \cos k^{sw}l}{k^{fw} \cos k^{fw}l}. \end{aligned} \quad (16)$$

Equations (14,15) can be rewritten in the form

$$u(x) = u_+^{sw}(0) [C_{sw/s}(x) + C_{fw/s}(x)], \quad (17)$$

$$U(x) = u_+^{fw}(0) [C_{fw/f}(x) + C_{sw/f}(x)], \quad (18)$$

where  $C_{aw/b}(x)$  are contributions of a kind  $aw$  of wave on the motion of one phase  $b$  ( $a$  or  $b$  being  $s$  for solid or

$f$  for fluid) at the abscissa  $x$ . Relative contributions are defined by setting that  $|C_{sw/b}(x)| + |C_{fw/b}(x)| = 100\%$ .

Figure 2 gives an example of calculation of relative contributions  $|C_{sw/f}|$  and  $|C_{fw/s}|$  at the incident face,  $x = -l$ , for a 10 cm thick layer of material A (table 1). According to  $|C_{sw/f}|$ , the motion of the fluid phase is governed at 20% by the solid-borne wave up to 100 Hz. Its influence increases strongly at the first  $\frac{\lambda}{4}$  resonance of the solid phase at 300 Hz. For higher frequencies, because of decoupling, its influence tends to zero. According to  $|C_{fw/s}|$ , the motion of the solid phase is governed at 50% by the fluid-borne wave up to 100 Hz. But its influence decreases to 20% at the first resonance of the solid phase. For higher frequencies, it tends to an asymptotic value of 65% approximately. This shows that around the first resonance of the solid phase, the contribution of the fluid-borne wave tends to be negligible. In such a case, only the solid-borne wave has to be well represented by the finite element discretization. Elsewhere both waves must be well represented.

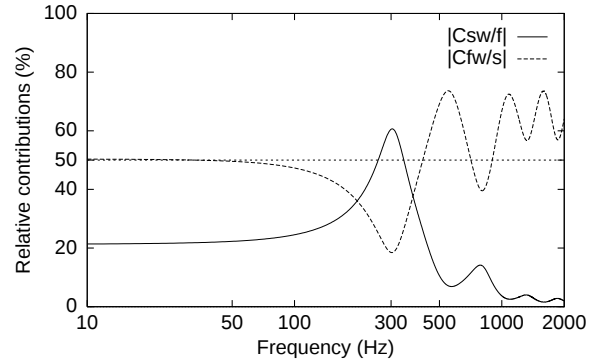


Figure 2: Relative contributions  $|C_{sw/f}|$  and  $|C_{fw/s}|$  at the incident face ( $x = -l$ ), for a 10 cm thick layer of material A (table 1).

One can notice that when the solid phase becomes stiffer,  $\mu_{sw}$  (equation (6)) increases and fluid-borne wave governs the motion of the two phases. Solid phase tends to be motionless and the behavior of the porous material can be described by an equivalent fluid model (Allard, 1993).

**Imposed displacement.** In this case, the same displacement is imposed to the phases at the incident face :  $u(-l) = U(-l)$ . If the layer is bonded to a

rigid wall, equations (14) and (15) apply and coefficients  $C_{fw/s}(-l)$ ,  $C_{sw/f}(-l)$  are determined using

$$\frac{u_+^{fw}(0)}{u_+^{sw}(0)} = -\frac{1 - \mu^{sw}}{1 - \mu^{fw}} \frac{\sin k^{sw}l}{\sin k^{fw}l}. \quad (19)$$

Because  $\mu^{sw}$  is usually very close to 1 and  $\mu^{fw}$  is much greater than  $\mu^{sw}$ , one find  $|C_{fw/s}(-l)|$  close to 0 and  $|C_{sw/f}(-l)|$  very large. This means that solid-borne wave governs the motion of the two phases. The criterion would then be related only to this wave. The same conclusion arises if the back face of the layer is free or if the layer has an infinite thickness.

### 3. Theoretical convergence rate

For purpose of comparison, theoretical convergence rate has been calculated for a monophasic clamped-free rod of length  $l$ , discretized by 1-D linear elements (see appendix for details). Figure 3 give the relative error on the calculation of natural frequencies as a function of number of elements per wavelength. Mesh criterion is then defined as following : with 6 linear elements per wavelength, the overestimation of natural frequencies is less than 5%.

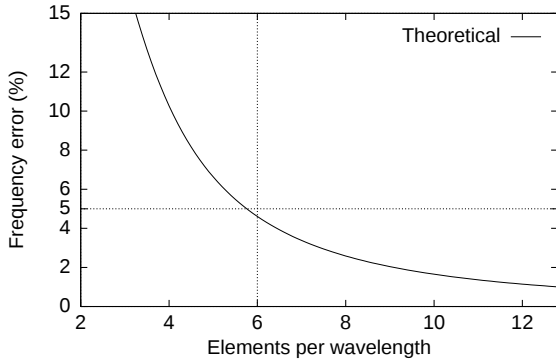


Figure 3: Convergence rate of 1-D linear elastic elements.

### B. Validation of mesh criterion

In this part, relation between Biot wavelengths and convergence rate is verified for various configurations and 3 porous materials. The material properties (table 1) are chosen so that different behaviors according to waves characteristics (wavelengths given in figure 11) are represented :

A standard polymer foam for which wavelength of the two dilatational waves are of the same order ( $\lambda_{sw}=0.61$  m,  $\lambda_{fw}=0.51$  m at 200 Hz),

B over-tortuous material so that the fluid-borne wave is much shorter than that of the solid-borne wave ( $\lambda_{sw}=1.24$  m,  $\lambda_{fw}=0.05$  m, at 200 Hz),

C intermediate material ( $\lambda_{sw}=1.00$  m,  $\lambda_{fw}=0.42$  m at 200 Hz), corresponding to a usual absorbing material.

| Material | $\phi$ | $\sigma$<br>( $Nm^{-4}s$ ) | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$<br>( $\mu m$ ) | $\Lambda'$<br>( $\mu m$ ) |
|----------|--------|----------------------------|-----------------|--------------------------|---------------------------|
| A        | 0.98   | 13 500                     | 1.7             | 80                       | 160                       |
| B        | 0.90   | 25 000                     | 7.8             | 2.5                      | 2.5                       |
| C        | 0.96   | 32 000                     | 1.7             | 90                       | 165                       |

| Material | $\rho_1$<br>( $kg\ m^{-3}$ ) | $E$<br>( $kPa$ ) | $\nu$ |
|----------|------------------------------|------------------|-------|
| A        | 30                           | 270(1+j0.1)      | 0.3   |
| B        | 30                           | 800(1+j0.25)     | 0.4   |
| C        | 30                           | 845(1+j0.1)      | 0.3   |

Table 1: Characteristics of materials A,B,C.

Three kinds of excitation and boundary conditions are applied to a poroelastic column of axis  $x$  (figure 4) in order to excite each type of wave in the most independent way :

- excitation only of the shear wave : the direction of the force is normal to axis  $x$  and only displacements normal to this axis are allowed.
- excitation mainly of the solid-borne wave : the same displacement along axis  $x$  is imposed on both phases, and only displacements along this axis are allowed.
- excitation of the two longitudinal waves : the column is bonded to a rigid impervious wall and only  $x$  displacements are allowed elsewhere. The free face is excited by a longitudinal force  $F$  distributed each phase according to porosity  $\phi$  :  $F_s = (1-\phi)F$  and  $F_f = \phi F$ . This surface force results from a normal incidence acoustical wave.

Only two nodes are used in the lateral directions and excitation is applied uniformly to get a 1-D behavior.

Convergence of resonance frequencies will be reached by increasing the number of elements in the  $x$  direction. For each configuration, we first verify the relation between resonance frequencies and theoretical wavelengths. Then relative errors on resonance frequencies are given versus number of elements per wavelength.

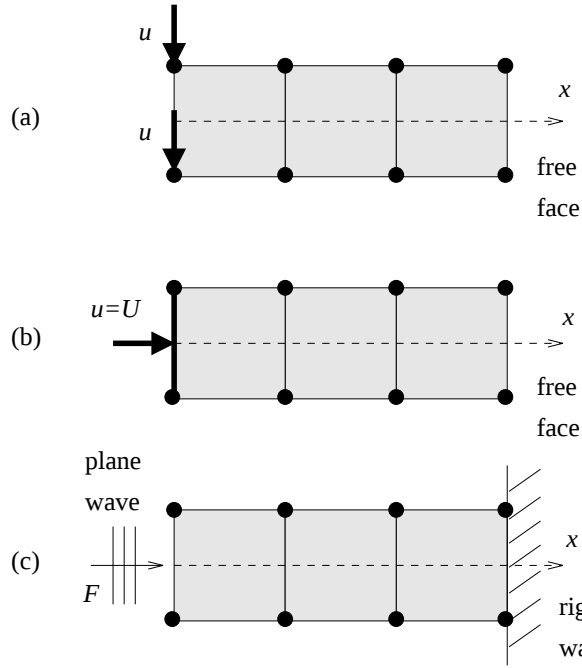


Figure 4: Mesh of a porous layer : a) imposed transverse displacement, b) imposed longitudinal displacement, c) normal incidence acoustical wave.

The frequency range of interest is approximately between 10 Hz and 2000 Hz, in order to observe at least the two first resonances.

### 1. Simple shear displacement

Figure 5.a shows three resonances at 257 Hz, 768 Hz and 1288 Hz, for a 10 cm thick column of material C. Both phases have the same motion excepted for a small decrease of the fluid motion due to progressive decoupling towards high frequencies.

Shear wavelengths are 0.399 m at 257 Hz, 0.134 m at 768 Hz and 0.080 m at 1288 Hz. They are related respectively to a  $\frac{\lambda}{4}$ ,  $\frac{3}{4}\lambda$  and  $\frac{5}{4}\lambda$  resonances.

Figure 5.b shows that convergence follows theoretical rate when number of elements are related to shear wavelength : the criterion is suitable in this case. The same results are found with the other materials.

### 2. Imposed longitudinal displacement

Figure 6.a shows two resonances at 500 Hz and 1512 Hz for a 10 cm thick column of material C. The phases have almost the same motion according to paragraph 1.A.2. The amplitude of the velocity of the fluid phase decreases slowly because of the decoupling

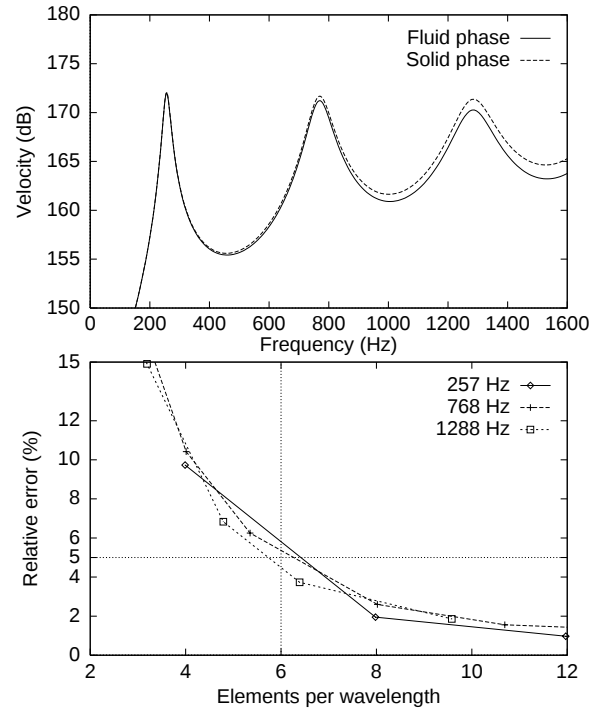


Figure 5: Shear excited porous column (material C) : a) velocity of the free face; b) convergence rate.

at high frequencies and domination of the solid-borne wave. Solid-borne wavelengths are 0.4017 m at 500 Hz and 0.1335 m at 1512 Hz. They are related respectively to a  $\frac{\lambda}{4}$  and a  $\frac{3}{4}\lambda$  resonances.

Figure 6.b presents the convergence rate for the two element shapes and two materials. Convergence follows theoretical rate when the number of elements are related to solid-borne wavelength : the criterion is verified.

### 3. Acoustical excitation

Because of very different longitudinal wavelengths, material B is best suited to distinguish phenomena. The thickness of the column is 7.5 cm.

Figure 9.a shows a resonance at 19 Hz corresponding to a  $\frac{\lambda}{4}$  resonance related to the fluid-borne wave. Its wavelength is 32 cm at 19 Hz. Another resonance around 809 Hz corresponds to a  $\frac{\lambda}{4}$  resonance related to the solid-borne wave. Its wavelength is 30.6 cm at 809 Hz.

Figure 9.b presents the convergence rate where the number of element is related to the appropriate wavelength. Convergence follows once again the theoretical rate. It is less clear for the fluid phase, because only its

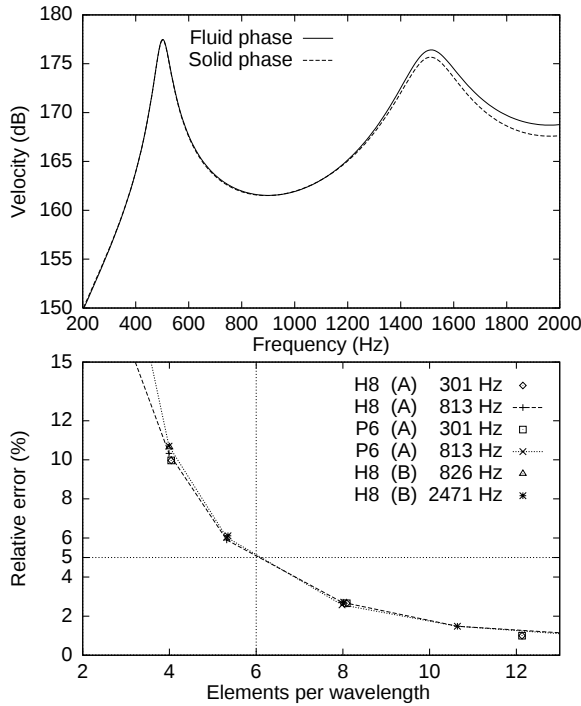


Figure 6: Mechanically excited porous column : a) free face velocity (material C); b) convergence rate for several materials (A and B) and types of element. H8 is related to hexaedric element (brick) and P6 to pentaedric element (straight prism).

first resonance is noticeable and its convergence occurs between 1 and 2 elements for the whole column. Moreover, because the fluid-borne wave is strongly damped, the determination of the supposed resonance frequency is less accurate.

Because both longitudinal waves are excited, the mesh should verify the criterion for both waves.

**Mesh optimization.** According to paragraph 1.A.2, one of the two longitudinal waves can have little influence on the behavior of the porous material. If its wavelength is the longest, less elements are to be used to describe properly the motion.

For example, if criterion is applied to the 7.5 cm thick column of material B up to 1100 Hz, 2 elements are required for the solid-borne wave ( $\lambda_{sw}=22.5$  cm) whereas 30 elements are required for the fluid-borne wave ( $\lambda_{fw}=1.5$  cm). However figure 8.a shows that the contribution of the fluid-borne wave decreases as long as the first resonance related to the solid-borne wave is reached : the contribution of fluid-borne wave  $|C_{fw/s}|$  on the solid phase motion is less than 20%

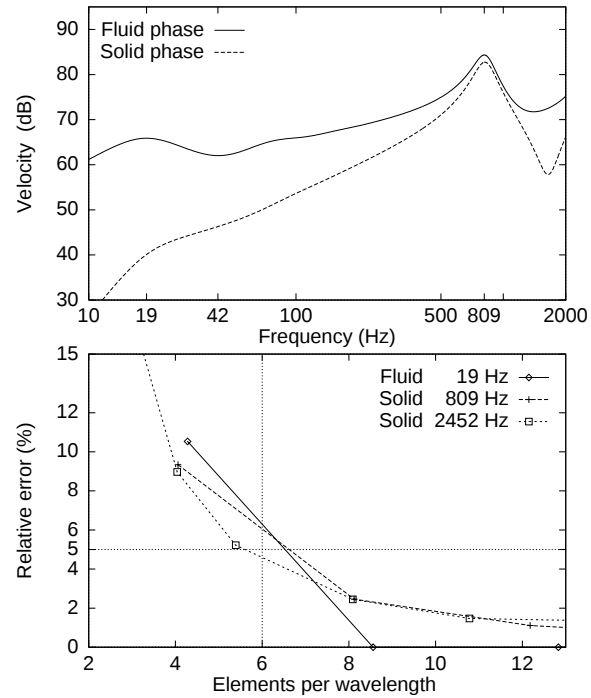


Figure 7: Acoustically excited 7.5 cm thick column (material B) : a) velocity of the excited face; b) convergence rate.

after 50 Hz and the contribution of solid-borne wave  $|C_{sw/f}|$  on the fluid motion increases up to 80% at 809 Hz. Consequently, with only 3 elements, the motion of the fluid phase is approximated with an error less than 3 dB, as shown by figure 8.b . Above 900 Hz, error slightly increases due to the decrease of the influence of the solid-borne wave.

**Irregular mesh.** Fluid-borne wave is usually strongly damped. If it corresponds to the shortest wave, a mesh reduction can be achieved by respecting criterion for this wave only in the area close to the excitation face. Elsewhere, a criterion based on the solid-borne wave will be suitable.

For example, figure 9.a shows a quick variation close to the excited face, corresponding to the fluid phase motion at 809 Hz. This variation is directly related to the fluid-borne wave ( $\lambda_{fw}=1.9$  cm, at 809 Hz) that is strongly attenuated. Using a mesh with 3 elements of size increasing from 0.1 cm to 5 cm (figure 9.b), best results are achieved than with 3 regular sized elements.

The choice of such an irregular mesh can be guided using equations (14) and (15) to calculate solid and

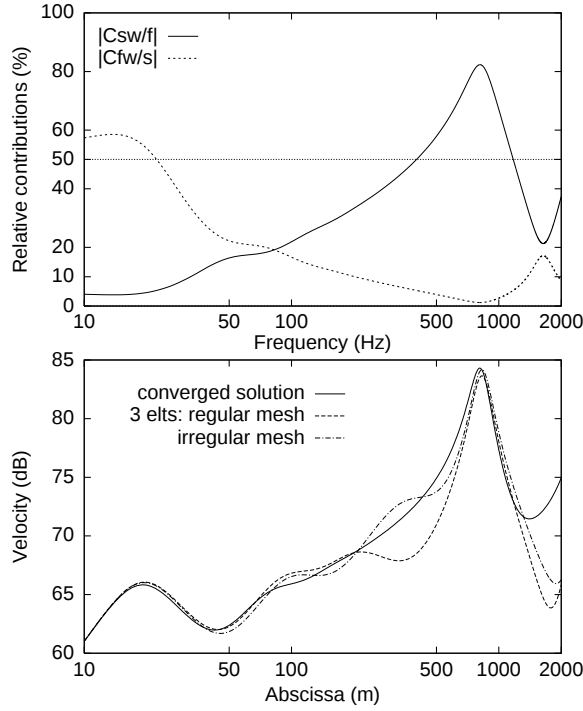


Figure 8: Acoustically excited 7.5 cm thick column (material B) : a)  $|C_{sw}/f|$  and  $|C_{fw}/s|$  ratio at the incident face, for a 7.5 cm thick layer; b) Velocity of the fluid phase at the free face for several meshes, compared to the converged solution.

fluid phase displacements along  $x$  axis.

To sum up, for acoustical excitation, criterion is applied according to both longitudinal waves, but a mesh optimization can be performed if the shortest wave is not predominant or strongly damped. If shear wave is relevant in the motion of the poroelastic media, then the criterion has to be applied according to this wave too. In a general way, the verification of criterion according to each of the three waves is a necessary condition to insure reliable results.

## II. CONVERGENCE FOR 3-D BEHAVIOR

For real 3-D behavior, the contribution of the Biot waves is difficult to predict. Verification of the criterion for each wave appears to be a necessary condition. Nevertheless convergence will not necessarily follow the same rules.

We investigate now convergence of a generic case in order to specify some convergence rules : it is a clamped porous layer of material A, excited by a plane

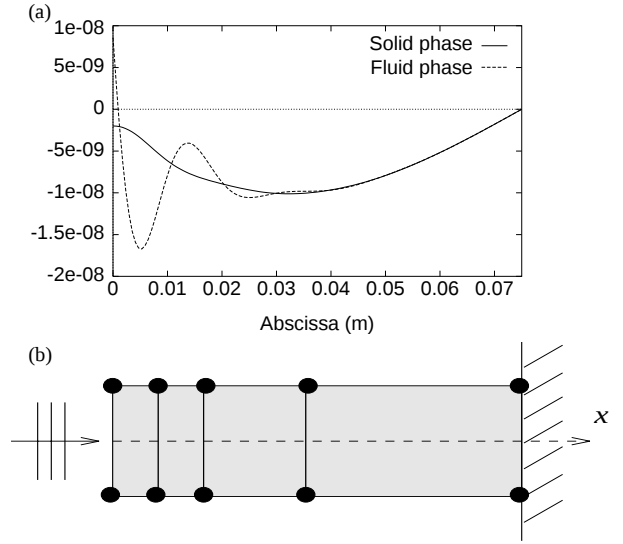


Figure 9: Acoustically excited porous column : a) displacement amplitude along axis  $x$  of the two phases at first resonance of the solid phase (809 Hz). b) example of an irregular mesh.

wave. The dimensions are 28 cm  $\times$  35 cm and the thickness is 3 cm. Hexaedral linear elements are used.

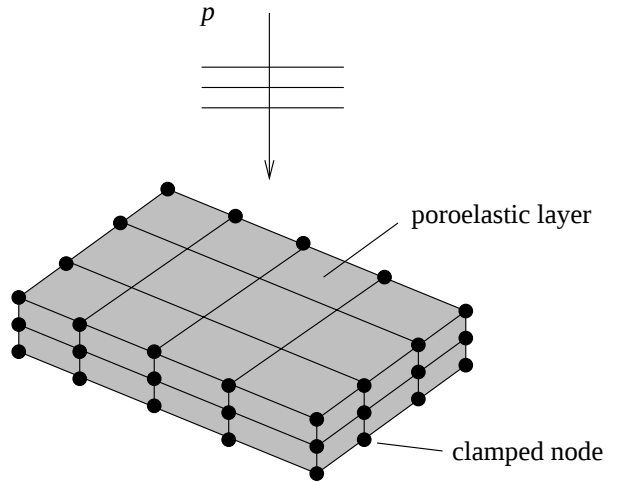


Figure 10: Clamped poroelastic layer excited by a normal incidence acoustical wave.

### A. Convergence of equivalent solid elements

We first consider the behavior without coupling effects. Poroelastic elements are replaced by equivalent

solid elements with the same stiffness of the frame and the density of the air filled porous material. Equivalent element is based on the same hexaedric element used for poroelastic element. The frequency of the first bending mode is given by table 2 for several meshes refined in lateral and thickness directions. The converged frequency is 48 Hz. It is shown that within an error of 5%, convergence is reached with a  $2 \times 12 \times 12$  elements mesh. Related to the deformation shape, this yields almost 24 elements per wavelength : it is 4 times the criterion.

| $\Delta f$ (%) |   | Lateral directions |    |    |    |
|----------------|---|--------------------|----|----|----|
|                |   | 3                  | 6  | 12 | 24 |
| Thickness      | 1 | 46                 | 16 | 10 | 9  |
|                | 2 | 45                 | 11 | 5  | 3  |
|                | 4 | 42                 | 9  | 3  | 1  |
|                | 8 | 40                 | 8  | 2  | 0  |

Table 2: Convergence of first bending mode frequency versus number of elements in lateral and thickness directions, for a clamped elastic layer (28 cm  $\times$  35 cm  $\times$  3 cm) equivalent to material A.

This slow convergence can be explained by locking phenomenon of linear elements subject to bending (MacNeal, 1994). Locking induces excessive stiffness for a particular deformation state and is related primarily to interpolation failure. For bending deformation, two kinds of locking are noticed. Shear locking is related to a bad interpolation of the deflection which should be a second order polynomial. A mesh refinement in the in-plane direction will reduce this locking effect. Dilatation locking is due to a bad interpolation of thickness dilatation, induced by Poisson's effect, which should be a second order polynomial too. The phenomenon is more important when  $\nu$  is close to 0.5. A mesh refinement in the thickness direction will reduce this locking effect.

In order to minimize these effects, selective under-integration (MacNeal, 1994) has been performed for shear strain in our hexaedric element.

### B. Convergence of poroelastic elements with coupling effects

Respect of 1-D criterion for the three waves requires only 2 elements in lateral directions and less than 1 element in the thickness at 50 Hz. According to results obtained with equivalent elements, minimal mesh should be  $2 \times 12 \times 12$  elements.

Nevertheless, table 3.a shows that it overestimates

the resonance frequency by 10% instead of 5% without coupling effects. Table 3.b shows that convergence of dissipated power by viscous effects  $D_{cp}$  is even slower, and very sensitive to a refinement in the thickness. Moreover, when the mesh is too coarse in the thickness, convergence is not always monotonic by refining in lateral directions.

| $\Delta f$ (%) |   | Lateral directions |    |    |
|----------------|---|--------------------|----|----|
|                |   | 6                  | 12 | 24 |
| Thickness      | 1 | 40                 | 15 | 7  |
|                | 2 | 36                 | 10 | 3  |
|                | 4 | 35                 | 8  | 1  |
|                | 8 | 34                 | 7  | 0  |

| $\Delta D_{cp}$ (%) |   | Lateral directions |    |     |
|---------------------|---|--------------------|----|-----|
|                     |   | 6                  | 12 | 24  |
| Thickness           | 1 | 89                 | 97 | 104 |
|                     | 2 | 84                 | 94 | 97  |
|                     | 4 | 64                 | 49 | 38  |
|                     | 8 | 54                 | 17 | 0   |

Table 3: Convergence of the first bending mode of a clamped porous layer (28 cm  $\times$  35 cm  $\times$  3 cm; material A) versus number of elements in lateral and thickness directions : a) frequency; b) dissipated power by viscous effect.

## III. CONCLUSION

It has been shown that linear poroelastic elements verify convergence rate of linear monophasic elements, according to each type of Biot wave. Classical mesh criterion, i.e. 6 linear elements per wavelength, provides a necessary condition to get reliable results.

For real 3-D deformations, like bending, classical criterion gives indications for a minimal mesh but is insufficient because of locking of 3-D linear elements and discrepancies of the displacement field of the two phases. A consequent refinement of the mesh is necessary to get satisfactory results. Indicators related to fluid motion have been found very sensitive. As a consequence, the minimal number of elements required is difficult to predict.

By nature, convergence of poroelastic elements is rather slower than convergence of either equivalent solid or fluid elements, because of the presence of two different scale phenomena. The discrepancy can be lowered when the behavior of the porous material is dominated by the motion of one phase.

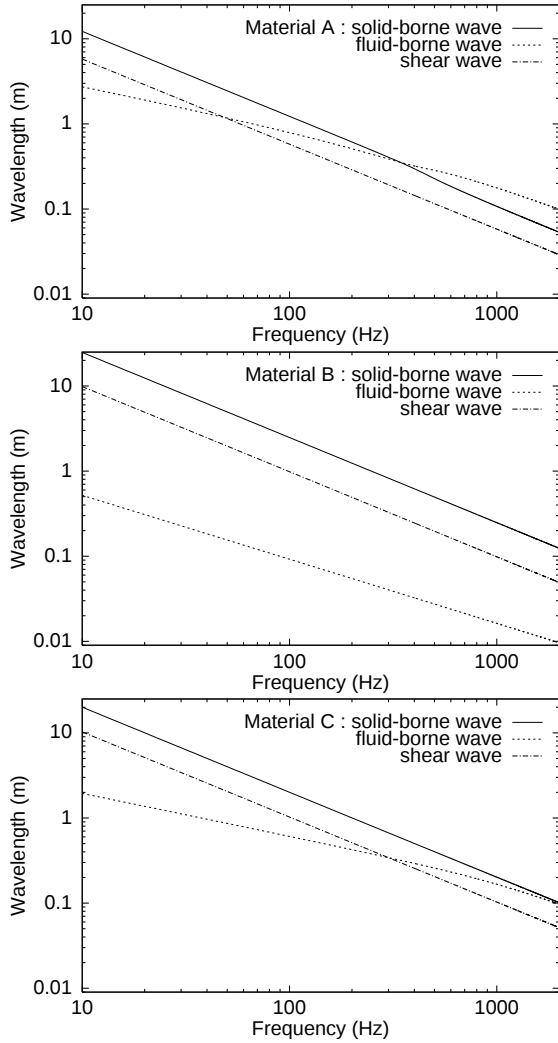


Figure 11: Biot wavelengths for materials A, B and C.

As a consequence, this slow convergence leads to large systems to be solved. Use of higher order elements together with the  $(u, p)$  formulation (Atalla *et al.*, 1996, 1998), that requires only 4 degrees of freedom per node, would be an efficient way to reduce the size of the systems. Another way would be to design specific models dedicated to particular applications.

#### APPENDIX : Theoretical convergence rate for 1-D monophasic linear elements

Consider a clamped-free rod of length  $l$ , Young's modulus  $E$  and mass per unit volume  $\rho$ . Assuming

harmonic motion, the mode shape are given by

$$w_r(x) = w_0 \sin\left(\frac{2r-1}{l} \frac{\pi}{2} x\right), \quad (20)$$

with natural frequencies

$$\omega_r = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} (2r-1). \quad (21)$$

Approximation with  $m$  linear elements of the same size leads to a system of  $m-1$  equations of the form (Gérardin and Rixen, 1996)

$$E \frac{m}{l} (-\bar{w}_{i-1} + 2\bar{w}_i - \bar{w}_{i+1}) - \omega^2 \frac{l}{6m} (\bar{w}_{i-1} + 4\bar{w}_i + \bar{w}_{i+1}) = 0, \quad (22)$$

where  $\bar{w}_i$  is the displacement of the  $i^{\text{th}}$  node for  $0 < i < m$ . With a general solution of the form

$$\bar{w}_{i,r} = w_0 \sin(i\bar{k}_r + \theta), \quad (23)$$

we get wavenumbers and approximated natural frequencies

$$\bar{k}_r = \frac{2r-1}{m} \frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

$$\bar{\omega}_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} m \sqrt{2 \frac{1 - \cos(\frac{2r-1}{m} \frac{\pi}{2})}{2 + \cos(\frac{2r-1}{m} \frac{\pi}{2})}}, \quad (25)$$

with  $1 < i, r < m$ . The frequency overestimation given by  $\bar{\omega}_r/\omega_r$  depends on the ratio  $(2r-1)/m$ , and the wavelength  $\lambda_r$  associated to a mode is given by  $\lambda_r = 4l/(2r-1)$ . The frequency error is a function of number of elements per wavelength.

Allard J.-F. (1993). *Propagation of sound in porous media : modeling sound absorbing materials*, Chapman & Hall

Atalla N., Panneton R. and Debergue P. (1996). "A mixed displacement-pressure formulation for Biot's poroelastic equations," *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**, 2487

Atalla N., Panneton R. and Debergue P. (1998). "A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, **104**, 1444-1452

Bardot A., Brouard B., Allard J.-F. (1996). "Frame decoupling at low frequency in thin porous layers saturated by air," *J. Appl. Phys.*, **79**, 8223-29

- Biot, M.A. (1956). "The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. II. Higher frequency range," *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168-191
- Coyette J.P. and Wynendaele H. (1995). "A finite element model for predicting the acoustic transmission characteristics of layered structures," *Proceedings of Inter-noise 1995*, 1279-1282
- Geradin M. and Rixen D. (1996). *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*, Masson
- Johansen T.F., Allard J.-F. and Brouard B. (1995). "Finite element method for predicting the acoustical properties of porous samples," *acta acoustica*, **3**, 487-491
- Kang Y.J. and Bolton J.S. (1995). "Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite element," *J. Acoust. Soc. Am.*, **98**, 635-643
- MacNeal R.H. (1994). *Finite elements : their design and performance*, Dekker
- Panneton R. (1996). *Modélisation numérique 3D par éléments finis des milieux poroélastiques*, Ph.D. thesis, Université de Sherbrooke, Québec, Canada
- Panneton R. and Atalla N. (1997). "An efficient finite element scheme for solving the three dimensional poroelasticity problem in acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.*, **101**, 3287-3298
- Petyt M. (1990). *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge University Press

## 2.3 Temps de calcul et taille des systèmes

Le tableau 2.1 donne quelques ordres de grandeurs concernant les systèmes construits à la section II.B de l'article précédent (DAUCHEZ et coll. , 1999a). On donne le nombre de degrés de liberté (ddl), le taux de remplissage de la matrice  $[Z_p]$  à inverser et la mémoire (en octets) nécessaire pour la stocker en format creux. La deuxième partie du tableau donne les temps de calcul nécessaire par fréquence, comprenant l'assemblage fréquentiel des matrices globales et la résolution. Ils ont été obtenus sur une station **Silicon Graphics Origin 200** (180 MHz, 64 bits) dotée de 128 Mo de mémoire vive (Ram) et utilisée en simple utilisateur. Ces temps sont donnés pour les deux solveurs. Le premier utilise une méthode de résolution directe : il nécessite le stockage de résultats intermédiaires augmentant le taux de remplissage de la matrice à inverser. La mémoire requise est donnée par "Alloc.". Dans le dernier cas, le calcul n'a pu être effectué car la mémoire à allouer dépassait celle disponible (mémoire vive + swap  $\simeq$  400 Mo). Le solveur itératif n'a pas cette limitation, mais ne convient pas lorsque les degrés de liberté ne sont pas de même nature (déplacement, pression) car le critère de convergence, alors biaisé, provoque un arrêt prématuré des itérations. On remarque enfin que le nombre d'itérations est très variable.

| Maillage | Nb de ddl | Taux de remplis. (%) | Taille de $[Z_p]$ (Mo) | Solveur direct |                     | Solveur itératif |      |
|----------|-----------|----------------------|------------------------|----------------|---------------------|------------------|------|
|          |           |                      |                        | Alloc. (Mo)    | Temps/fréquence (s) | Nb itér.         |      |
| 12×12×2  | 2454      | 3.1                  | 2.3                    | 22             | 11                  | 43               | 1400 |
| 12×12×4  | 4090      | 2.0                  | 4.1                    | 93             | 51                  | 161              | 3100 |
| 24×24×2  | 10 086    | 0.8                  | 10.1                   | 168            | 110                 | 247              | 1700 |
| 24×24×4  | 16 810    | 0.5                  | 18.1                   | —              | —                   | 811              | 3400 |

TAB. 2.1: Taille des matrices à inverser (en mégaoctet) et temps de calcul par fréquence (en secondes) en fonction du nombre de degrés de liberté (Nb de ddl) du système.

On remarque que les temps de calcul croissent très vite au-dessus de 10 000 degrés de liberté atteignant plusieurs minutes par fréquence. Un calcul complet peut nécessiter plusieurs heures. Les temps de calculs obtenus pour le solveur itératif varient beaucoup en fonction du nombre d'itérations, différent à chaque fréquence. Bien qu'apparemment plus lent, ses performances sont généralement du même ordre que celles du solveur direct. Les temps de calculs dépendent aussi des accès au disque dur, plus fréquents pour des systèmes de grande taille, et du profil de la matrice à inverser : ils restent donc difficilement prévisibles.

## 2.4 Conclusion du chapitre 2

L'étude de convergence a montré la validité du critère de maillage utilisé habituellement en élasticité, pour les application unidimensionnelles ou équivalentes. Ainsi l'usage de six éléments linéaires par longueur d'onde garantit une erreur inférieure à 5% sur les fréquences. Ce critère doit être vérifié pour les trois ondes de BIOT. Cependant, on a pu montrer que dans certains cas pour lesquels une onde prédomine le comportement, il suffit que le critère soit vérifié pour cette onde. C'est le cas de l'onde dite "solide" (solid-borne wave) lorsque l'excitation est un déplacement imposé sur les deux phases.

Ce critère fournit en fait une condition minimale : pour des applications réellement bi ou tridimensionnelles de dimensions finies, un affinement supplémentaire du maillage est nécessaire.

Cela tient d'une part aux problèmes de blocage des éléments linéaires tridimensionnels en flexion, plus ou moins important selon le cas étudié (valeur du coefficient de Poisson, dimensions, conditions aux limites, sollicitations). D'autre part, les déplacements des deux phases peuvent être de nature différente : par exemple, flexion pour le squelette et écoulement pour le fluide. La vitesse de convergence pour chaque type de mouvement n'a pas lieu d'être la même. Ainsi pour un cas de flexion, les indicateurs basés sur le mouvement du fluide convergent plus lentement que ceux basés sur le mouvement du squelette. Les convergences de chaque phase étant interdépendantes, on a pu observer un ralentissement de la convergence du squelette dû à la présence du fluide.

Une des conséquences de cette lente convergence est la génération de systèmes de grande taille qui peuvent rapidement surpasser les capacités de mémoire vive des machines. Plusieurs solutions sont envisageables pour réduire la taille des systèmes : utiliser des éléments quadratiques ou d'ordre supérieur assurant une meilleure convergence des déformations complexes ; baser les éléments poroélastiques sur une formulation  $(u, p)$  (ATALLA et coll. , 1996 et 1998), nécessitant seulement quatre degrés de liberté par nœud au lieu de six ; enfin, recourir à des modèles simplifiés, dédiés à des configurations données (cf. chapitre 4).

## Chapitre 3

# Validation expérimentale

L'objectif de ce chapitre est de démontrer la capacité des éléments poroélastiques à modéliser un matériau poreux existant, pouvant être placé dans une configuration telle que le mouvement du squelette contribue réellement à la réponse du matériau.

L'analyse de la littérature montre que les différentes formulations citées au chapitre 1 ont fait l'objet d'une validation par rapport à des structures d'extension latérale infinie (figure 3.1). Ce premier niveau de validation reste insuffisant pour deux raisons. Sollicités en incidence normale, ces systèmes ont un comportement unidimensionnel. D'autre part, la détermination des paramètres mécaniques des matériaux est écartée : soit les paramètres sont ajustés, soit les comparaisons sont faites par rapport à des résultats analytiques pour lesquels les paramètres sont déterminés *a priori*.

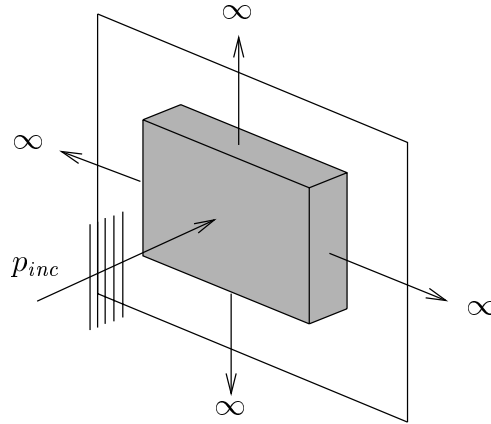


FIG. 3.1: Structure d'extension latérale infinie excitée par une onde plane en incidence normale.

Seuls deux validations 2-D et 3-D présentées par VIGRAN et coll. (1997a-b) ont retenu notre attention. Elle concernent respectivement l'impédance d'un échantillon poreux résonnant en conduit et le comportement vibratoire d'une plaque sandwich à cœur poreux. Le même matériau a été utilisé. Les caractéristiques mécaniques du squelette, supposé isotrope, ont été initialement ajustées à partir de la résonance du matériau en champ libre. Ces paramètres ont ensuite été utilisés sans ajustement

supplémentaire. La qualité des résultats ainsi obtenus montre que cette modélisation, et notamment l'hypothèse d'isotropie, convient pour ce matériau.

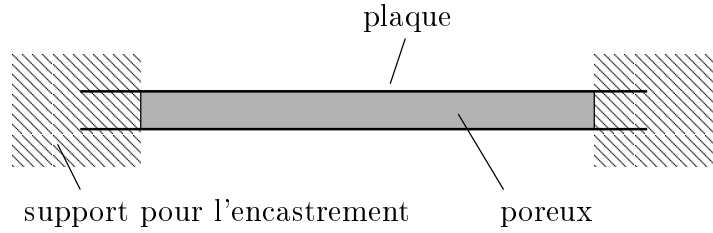


FIG. 3.2: Plaque sandwich encastrée avec cœur poreux (VIGRAN et coll. , 1997b).

Les exemples de validation présentés dans ce chapitre embrassent les mêmes objectifs : ils sollicitent un comportement vibratoire et acoustique réellement tridimensionnel. L'accent est mis sur la détermination des paramètres, notamment les caractéristiques mécaniques du squelette, qui ne seront pas ajustés *a posteriori*.

Ce chapitre s'articule en trois parties. Premièrement, les méthodes expérimentales de caractérisation des matériaux sont décrites. Les différentes sources d'incertitude, telles l'imprécision des mesures, l'anisotropie et l'hétérogénéité, sont estimées ainsi que leur répercussion sur les résultats.

Puis deux cas de validation sont proposés. Le premier concerne la mesure d'impédance en conduit d'un matériau poreux. Le matériau est choisi de façon à ce que l'onde acoustique incidente puisse mettre le squelette en mouvement. Différentes conditions aux limites et tailles d'échantillons sont considérées. Une partie de ces résultats a été publiée dans les actes d'un congrès (DAUCHEZ et coll. , 1998c). Le deuxième concerne l'amortissement d'une plaque simplement appuyée par collage d'une couche poreuse. Cette structure, dénommée "plaque-poreux", est très répandue dans l'industrie : automobile (capot, tablier, plafond), aéronautique (habillage de la carlingue), gros électroménager. L'usage du matériau poreux permet d'absorber une partie du son incident et d'amortir la structure. Deux matériaux, différenciés par leur résistivité et leur rigidité seront utilisés.

### 3.1 Caractérisation des matériaux poroélastiques

Les paramètres qui décrivent les matériaux poreux acoustiques peuvent être divisés en trois groupes caractérisant le fluide saturant, le comportement mécanique du squelette et les couplages (figure 3.3).

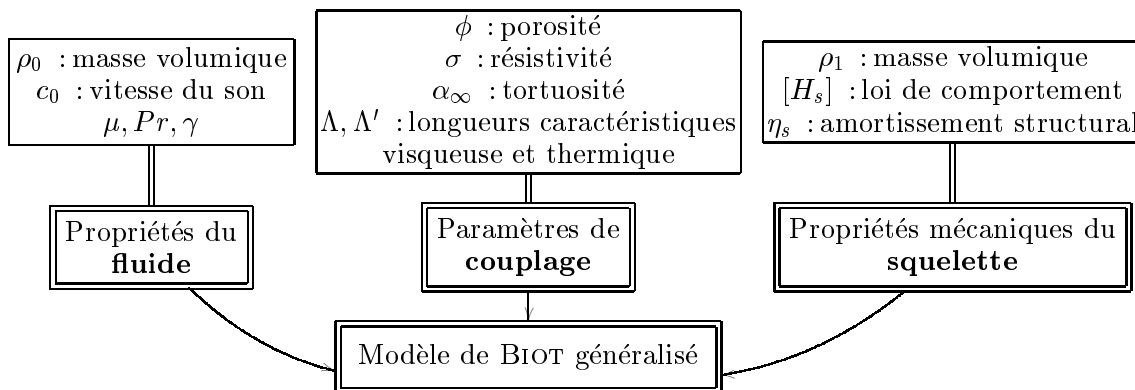


FIG. 3.3: Description d'un matériau poreux.

### 3.1.1 Propriétés du fluide

Le fluide saturant est généralement bien connu, et ne fait pas l'objet d'une caractérisation particulière. Ses propriétés viscothermiques sont bien sûr essentielles. Les valeurs prises par défaut pour l'air sont présentées dans le tableau 3.1.

|                                        |                                                           |
|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| température au repos                   | $T_0=18^\circ \text{ C}$                                  |
| pression au repos                      | $p_0=1.0132 \cdot 10^5 \text{ Pa}$                        |
| masse volumique au repos               | $\rho_0=1.213 \text{ kg m}^{-3}$                          |
| vitesse du son                         | $c_0=342.2 \text{ m s}^{-1}$                              |
| module d'incompressibilité adiabatique | $K_a=1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa}$                          |
| impédance caractéristique              | $Z_0=415.1 \text{ Pa m}^{-1} \text{ s}$                   |
| viscosité                              | $\mu=1.84 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ |
| nombre de Prandtl                      | $Pr=0.71$                                                 |
| rapport des chaleurs spécifiques       | $\gamma=1.4$                                              |

TAB. 3.1: Valeurs numériques des caractéristiques de l'air prises par défaut.

### 3.1.2 Paramètres de couplage

Les cinq paramètres, nécessaires pour décrire les couplages élastiques, inertiels, visqueux et thermiques, ont été présentés au chapitre 1. Les méthodes expérimentales utilisées pour déterminer ces cinq paramètres font l'objet des thèses de HENRY (1997) pour la porosité, la résistivité, la tortuosité, et de MELON (1996) pour la tortuosité et les longueurs caractéristiques. Nous donnons les principes expérimentaux avec les incertitudes de mesure. Quand c'est possible nous précisons la variation due à l'anisotropie et à l'hétérogénéité, obtenue pour deux mousses polymères.

- La méthode de mesure de la porosité  $\phi$ , adaptée par CHAMPOUX et coll. (1990), repose sur la loi de BOYLE-MARIOTTE,  $pV = C^{\text{ste}}$  pour une transformation isotherme. L'échantillon est placé dans un volume qui subit une détente isotherme (figure 3.4) : de la variation de pression  $\Delta p$  ainsi créée, on déduit le Volume d'air initial  $V_f$  compris dans le matériau. Avec  $p_0$  la pression initiale,  $V_{ext}$  le volume résiduel inoccupé par le matériau, on a

$$(V_f + V_{ext})p_0 = (V_f + V_{ext} + \Delta V)(p_0 + \Delta p), \quad (3.1)$$

soit

$$V_f = \frac{p_0 + \Delta p}{\Delta p} \Delta V - V_{ext}. \quad (3.2)$$

Avec  $V_t$  le volume de l'échantillon poreux, la porosité est donnée par

$$\phi = \frac{V_f}{V_t}. \quad (3.3)$$

Pour les matériaux acoustiques usuels, où la porosité est comprise entre 0.9 et 0.99, l'incertitude de mesure est inférieure à 1%.

- La mesure de la résistivité au passage de l'air,  $\sigma$ , reprend le principe du diviseur de tension (STINSON, 1988). Les pressions différentielles  $\Delta p_1$  et  $\Delta p_2$  sont relevées aux bornes de la résistance étalon  $R_1$  et

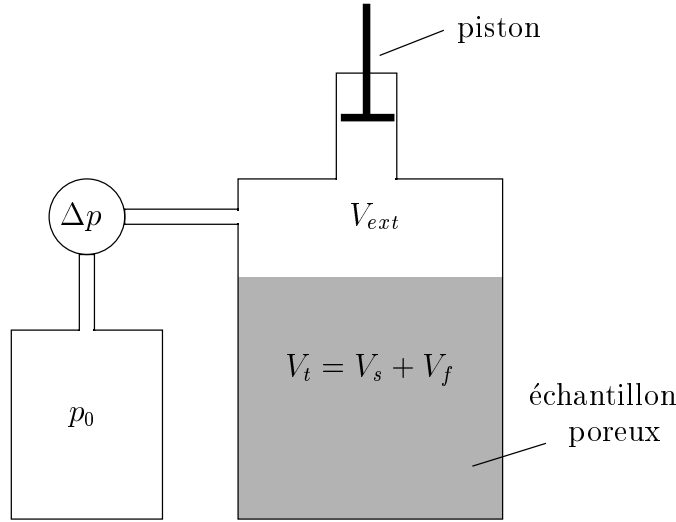


FIG. 3.4: Porosimètre.

de la résistance inconnue  $R_2$  à l'aide de deux capteurs de pression différentielle (figure 3.5). Le débit d'air étant constant, on a

$$\frac{\Delta p_1}{R_1} = \frac{\Delta p_2}{R_2}, \quad (3.4)$$

Pour un échantillon de longueur  $l$  et de section  $S$ , on a

$$\sigma = R_2 \frac{S}{l} = \frac{R_1 \Delta p_2}{\Delta p_1} \frac{S}{l}. \quad (3.5)$$

L'incertitude de mesure, fonction de la précision des capteurs et de la résistance étalon, est estimée à 2% pour les matériaux usuels ( $1000 \text{ Nm}^{-4}\text{s} < \sigma < 1\text{e6 Nm}^{-4}\text{s}$ ). Cependant l'incertitude dépend fortement du soin apporté au placement de l'échantillon dans son support à cause du risque de fuite. Le court-circuit provoqué entraînera une sous-estimation de la résistivité, d'autant plus grande que le matériau est plus résistif.

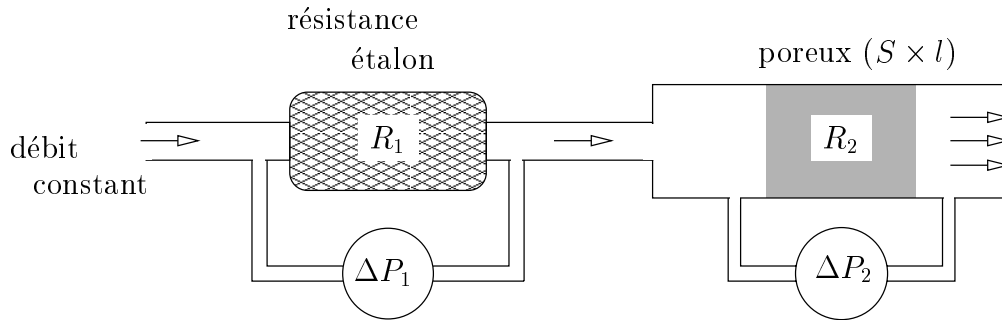


FIG. 3.5: Résistivimètre.

- Deux méthodes de mesure de la tortuosité  $\alpha_\infty$  ont été développées. La première est basée sur la mesure de la résistance électrique d'un échantillon poreux saturé d'un fluide conducteur, suivant

l'équivalence entre le champ des vitesses microscopiques du fluide et celui des courants (BROWN, 1980). Soit  $R_{e0}$  la résistance sans matériau et  $R_e$  celle avec matériau, la tortuosité est donnée par

$$\alpha_\infty = \phi \frac{R_e}{R_{e0}}, \quad (3.6)$$

où  $\phi$  est la porosité. Avec un échantillon de longueur  $l$ , placé dans le dispositif décrit par la figure 3.6 où  $U_{e0}$  et  $U_{e1}$  sont les tensions aux bornes des électrodes, on a

$$\frac{R_e}{R_{e0}} = 1 - \frac{l_1}{l} + \frac{U_{e1}}{U_{e0}} \frac{l_0}{l}. \quad (3.7)$$

Cette méthode, qui nécessite la connaissance de la porosité, a une incertitude de mesure de l'ordre de

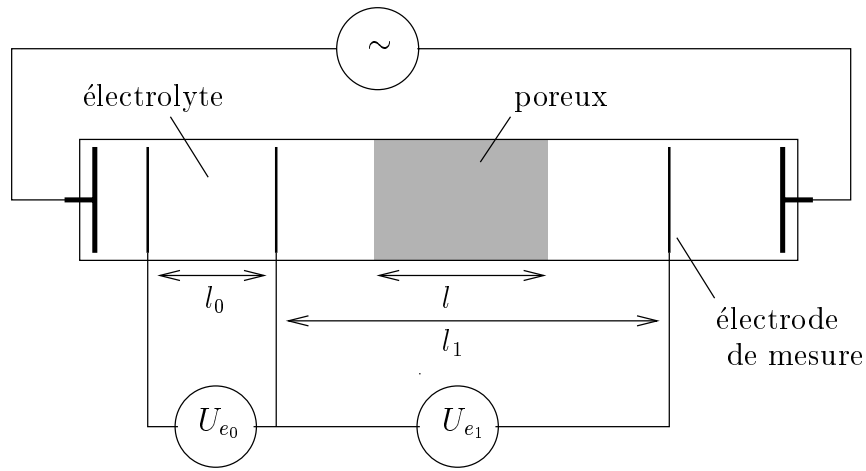


FIG. 3.6: Tortuosimètre (méthode électrique).

2 %. Cependant pour les matériaux à forte résistivité, la tortuosité peut être surestimée jusqu'à 10%, à cause de la difficulté à saturer complètement le matériau. À noter qu'elle ne convient pas pour les matériaux à squelette conducteur et qu'elle peut altérer le matériau testé.

La deuxième méthode est non-destructive et plus rapide : elle est basée sur le retard  $\Delta t(\omega)$  subi par une impulsion ultrasonore traversant le matériau (MELON et coll. , 1995). Ce retard est obtenu en comparant le temps mis par l'impulsion pour aller d'un capteur à l'autre sans et avec l'échantillon d'épaisseur  $l$  (figure 3.7). On en déduit l'indice de réfraction  $n(\omega)$ , rapport des célérités dans le milieu acoustique  $c_0$  et poreux  $c(\omega)$ , par

$$n(\omega) = \frac{c_0}{c(\omega)} = 1 + \frac{c_0}{l} \Delta t(\omega). \quad (3.8)$$

L'usage d'une onde ultrasonore permet de travailler avec des expressions asymptotiques en fonction de la fréquence  $\omega$ . L'indice de réfraction au carré s'exprime ainsi

$$n^2(\omega) = \alpha_\infty \left[ 1 + \delta \left( \frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma - 1}{B\Lambda'} \right) \right], \quad (3.9)$$

avec l'épaisseur de peau visqueuse

$$\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0\omega}}. \quad (3.10)$$

En traçant la fonction  $n^2(\delta)$ , on obtient une droite dont l'ordonnée à l'origine est la tortuosité. Cette méthode possède deux limitations. Lorsque l'onde ultrasonore est trop atténuée par le matériau, la mesure n'est plus possible : c'est le cas de matériaux très résistifs. Si l'hypothèse de grande longueur d'onde devant la taille des pores n'est plus vérifiée, la méthode n'est plus valide : on parle alors de phénomène de diffusion. L'incertitude de mesure dépend fortement des caractéristiques du matériau. En général, on l'estime autour de 10%. Le développement de cette méthode fait l'objet des travaux de thèse de AYRAULT (1999).

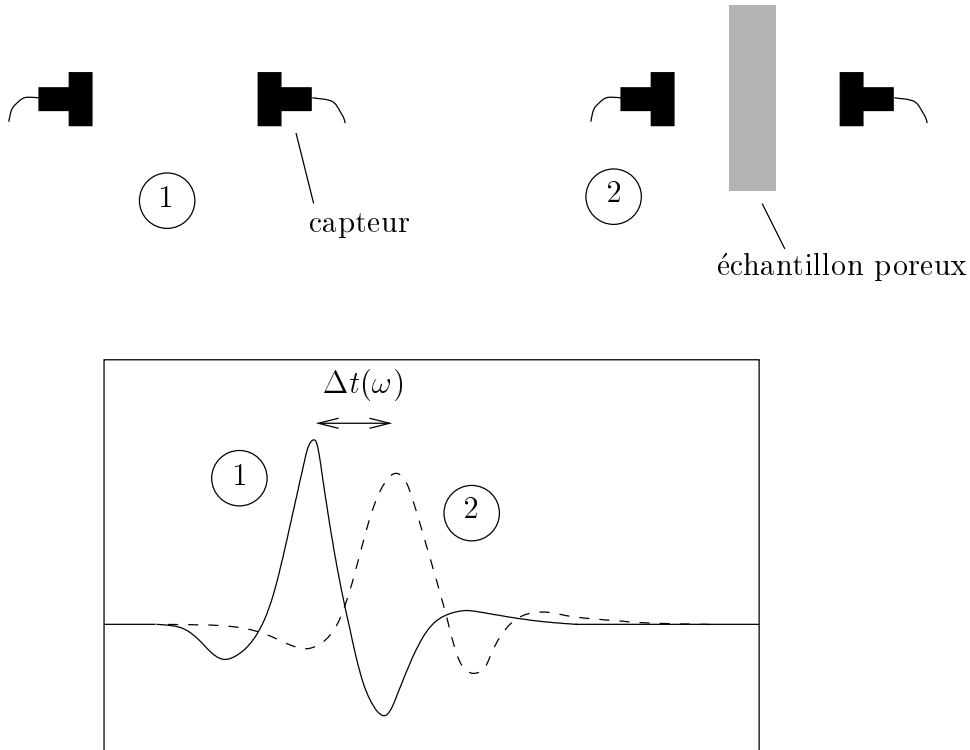


FIG. 3.7: Principe de la méthode ultrasonore pour la tortuosité et allure des signaux temporels recueillis.

- La longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$  caractérise la surface de contact fluide-squelette. Cette interface peut être directement mesurée par une méthode physicochimique, dénommée B.E.T. (LEMARINIER et coll. , 1995). Elle consiste à mesurer le nombre de molécules d'un gaz recouvrant les parois du squelette. L'incertitude de mesure est de 20%. Cette méthode a été délaissée au profit d'une méthode ultrasonore consistant à mesurer l'indice de réfraction dans deux gaz différents (air, hélium par exemple). On peut alors tracer deux fonctions  $n^2(\delta)$  dont la pente est reliée à  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  par l'expression (3.9). L'incertitude de mesure se situe également autour de 20%. Les limitations identiques à celles notées pour la mesure de la tortuosité sont observées.

Pour un matériau anisotrope, les quantités  $k_0$ ,  $\alpha_\infty$  et  $\Lambda$  dépendent de la direction de mesure. Le nombre de paramètres (scalaires) requis augmente en conséquence.

### 3.1.3 Propriétés mécaniques du squelette

La détermination des propriétés mécaniques des mousses polymères est délicate car

- elles ne sont généralement pas isotropes et l'on ne sait pas caractériser cette anisotropie *a priori*,
- la présence du fluide peut induire une rigidité et un amortissement supplémentaires dont il faut faire abstraction.

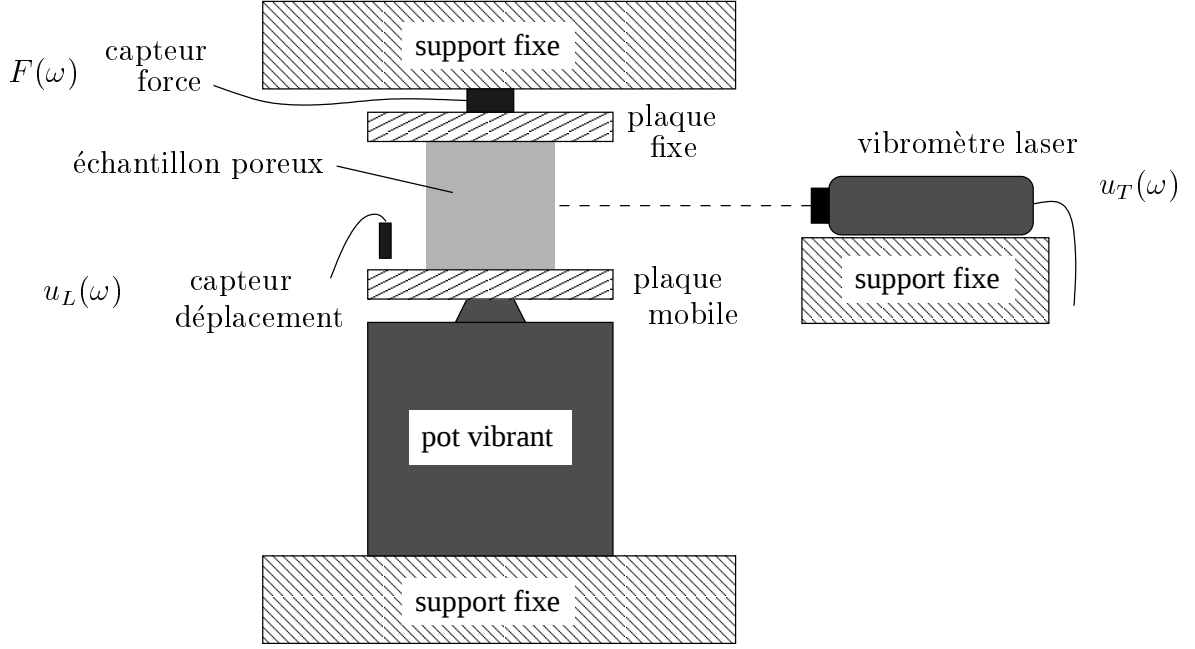


FIG. 3.8: Dispositif de mesure des paramètres mécaniques.

MARIEZ et SAHRAOUI (1996, 1997) ont développé une méthode basée sur la compression quasistatique d'un échantillon cubique entre deux plans parallèles (figure 3.8). L'échantillon n'est pas collé mais légèrement précontraint entre deux feuilles de papier de verre et subit une déformation de l'ordre de 1% afin de rester dans la zone d'élasticité linéaire. L'excitation quasistatique (de 0.1 Hz à 100 Hz typiquement) permet de s'affranchir de l'inertie du squelette et du couplage avec le fluide (cf. annexe A). La force appliquée par le pot vibrant  $F(\omega)$ , ainsi que les déplacements du squelette, longitudinal  $u_L(\omega)$  et latéraux  $u_T(\omega)$ ,  $u_{T'}(\omega)$  (2 directions transverses) sont relevés. On peut ainsi définir une impédance mécanique longitudinale

$$K(\omega) = \frac{F(\omega)}{u_L(\omega)}, \quad (3.11)$$

et deux fonctions de transfert homogènes à un coefficient de Poisson,

$$T(\omega) = \frac{u_T(\omega)}{u_L(\omega)} \quad \text{et} \quad T'(\omega) = \frac{u_{T'}(\omega)}{u_L(\omega)}. \quad (3.12)$$

En positionnant l'échantillon différemment selon ses trois axes, trois triplets de fonctions  $K(\omega)$ ,  $T(\omega)$  et  $T'(\omega)$  sont obtenus. Si les trois triplets sont identiques et que  $T(\omega) = T'(\omega)$ , quelle que soit la direction, le matériau est isotrope. Si seulement deux triplets sont identiques, le matériau est isotrope transverse : son axe de symétrie, noté  $L$ , est l'un des trois axes du cube. S'ils diffèrent tous, le matériau

est orthotrope ; il pourrait aussi être isotrope transverse si l'axe de symétrie ne coïncide pas avec l'un des trois axes du cube.

Deux méthodes d'inversion permettent d'obtenir les valeurs des coefficients d'élasticité. La plus simple, dénommée inversion approchée, suppose que les faces latérales de l'échantillon restent planes lors de la déformation : cette hypothèse est vérifiée seulement si le coefficient de Poisson est nul car il n'y a pas de glissement possible entre l'échantillon et les deux plans. La déformation est donnée par la figure 3.9. L'erreur d'approximation, liée au coefficient de Poisson, reste cependant toujours inférieure à 6% (cf. tableau 3.2). On peut ainsi calculer un module d'Young approché, pour chacune des trois directions, avec la relation

$$E(\omega) = K(\omega)/l, \quad (3.13)$$

où  $l$  est l'arête du cube.

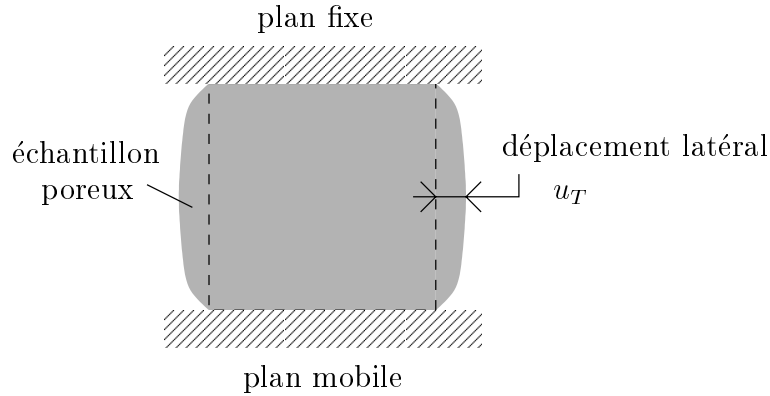


FIG. 3.9: Déformation de l'échantillon poreux en compression.

| $\nu$          | 0.01 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.45 | 0.49 |
|----------------|------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $\Delta E$ (%) | 0    | 0.2 | 1   | 2   | 4   | 5    | 6    |

TAB. 3.2: Surestimation du module d'Young  $E$  par l'inversion approchée en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$ .

La deuxième méthode s'appuie sur un calcul par éléments finis pour tenir compte de la réelle déformation tridimensionnelle du cube. Comme l'excitation est quasistatique, l'inversion numérique est faite en statique. Seules les inversions isotrope et anisotrope transverse ont été implantées. Pour une fréquence de mesure donnée, elles permettent d'obtenir soit deux paramètres (module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ) soit cinq paramètres ( $E_L, E_T, G_{LT}, \nu_{LT}, \nu_{TT}$ ) complexes. Ce dernier type d'anisotropie semble d'ailleurs bien correspondre à des matériaux de type fibreux ou à des mousses polymères dont l'axe de symétrie correspondrait avec la direction de croissance de la mousse lors de sa fabrication (MARIEZ et SAHRAOUI, 1997). Cependant la direction de l'axe de symétrie peut être perturbée à cause des flux gazeux orientés vers les coins supérieurs du pain de mousse (cf. figure 3.10).

L'incertitude sur les paramètres après inversion est de l'ordre de 5%. Elle est supérieure pour le module de cisaillement  $G_{LT}$  car la sollicitation en compression génère peu de contrainte en cisaillement. Cependant plus on s'éloigne du modèle de symétrie utilisé pour l'inversion, plus l'incertitude sera grande. Par exemple, pour une inversion isotrope, si les trois fonctions  $K(\omega)$  diffèrent légèrement, on obtiendra trois modules d'Young différents selon la fonction choisie.

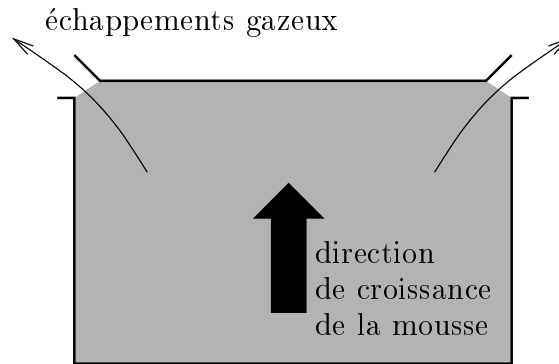


FIG. 3.10: Coupe d'un pain de mousse polymère lors de sa fabrication.

En ce qui concerne la dépendance fréquentielle, les travaux expérimentaux de MARIEZ et SAHRAOUI (1997) confirment les conclusions de SAHRAOUI et MARIEZ (1997) : les coefficients de Poisson sont réels et indépendants de la fréquence, alors que les modules sont complexes et dépendent de la fréquence suivant une même fonction. Une augmentation de 20 à 30% sur les modules entre 1 Hz et 100 Hz a été observée pour une mousse polymère. Cette tendance pourrait raisonnablement être étendue d'une décade. Actuellement, les différents codes de simulation utilisés dans cette étude n'intègrent pas la dépendance fréquentielle des modules. Les valeurs choisies sont celles obtenues pour des fréquences de quelques Hz, pour minimiser l'influence des effets dynamiques. Une détermination expérimentale en plus hautes fréquences nécessiterait une inversion avec le modèle de BIOT, réalisable avec le code PHÉNIX. La mise en œuvre expérimentale deviendrait très délicate à cause de la pollution par les vibrations annexes du système. Une autre méthode pourrait s'appuyer sur la relation de dépendance en température et en fréquence des propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques (SFAOUI, 1995). Une extrapolation aux fréquences supérieures serait alors possible à partir de mesures quasistatiques faites à basses températures.

### 3.1.4 Synthèse sur la mesure des paramètres

#### Qualité des mesures

Les méthodes de mesure de la porosité et de la résistivité ont déjà été éprouvées. Les mesures ultrasonores peuvent poser quelques problèmes pour les matériaux très absorbants. Cependant une précision de l'ordre de 20% est largement suffisante étant donné que ces paramètres interviennent surtout en hautes fréquences et ne sont pas très significatifs pour nos applications. Ainsi la mesure à deux gaz n'a pas été faite chaque fois : le rapport  $\frac{\Lambda'}{\Lambda}$  a été fixé entre 2 et 3, valeurs habituellement rencontrées.

La méthode de mesure des propriétés mécaniques est encore en cours de développement. L'inversion anisotrope transverse a été faite pour un seul matériau, en raison de la complexité de sa mise en œuvre. Pour les autres matériaux, la méthode d'inversion isotrope ou approchée a été utilisée.

#### Anisotropie et hétérogénéité

L'incertitude sur la détermination des paramètres peut être dégradée à cause de :

- l'anisotropie, si les modèles ne l'intègrent pas, ou si les directions ne sont pas correctement repérées,

- l'hétérogénéité, si les matériaux utilisés dans les applications sont de grande taille.

Leur influence a été étudiée pour les paramètres  $\sigma$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$  et les propriétés mécaniques du squelette (MELON et CASTAGNÈDE, 1995a ; MELON et coll. , 1995b ; MELON, 1996 ; MARIEZ et SAHRAOUI, 1997 ; MELON et coll. , 1998). Afin de pouvoir comparer ces deux facteurs aux incertitudes de mesure, leur importance est exprimée par un pourcentage

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{max} + a_{min}} \times 100, \quad (3.14)$$

avec  $a_{max}$  et  $a_{min}$  les valeurs maximale et minimale parmi les différentes valeurs mesurées.  $\Delta a$  est ainsi homogène à une incertitude relative, de telle sorte que l'on peut écrire

$$a = a_{moyen} \pm \Delta a\%. \quad (3.15)$$

L'incertitude globale sera la somme des trois incertitudes liées à la précision de la mesure, à l'anisotropie et à l'hétérogénéité. Les résultats des différentes contributions sont synthétisés dans le tableau 3.3, où l'on présente les maxima observés pour des mousses polymères réticulées.

On remarque que l'anisotropie est notable pour les paramètres mécaniques, pouvant atteindre 41% pour les modules  $K$  et 33% pour les coefficients  $T$ . Pour la résistivité, elle reste limitée à 8% pour les mousses entièrement réticulées, mais peut augmenter jusqu'à 35% pour des mousses semi-réticulées, c'est-à-dire comportant encore des membranes. L'hétérogénéité a été parallèlement étudiée à partir d'échantillons voisins, distants de 5 à 30 cm. Elle est remarquable pour la résistivité : elle atteint 18% avec la mousse A et une distance de 20 cm selon la direction de croissance de la mousse. Ce type d'hétérogénéité est plus marqué pour les mousses les plus résistives. L'hétérogénéité affecte aussi les paramètres mécaniques et notamment les modules  $K$  avec 14%. Il n'y a cependant pas de corrélation avec la résistivité. Rappelons que  $K$  et  $T$  sont les grandeurs mesurées, définies par les équations (3.11, 3.12) :  $K$  est homogène à un module d'Young et  $T$  à un coefficient de Poisson. Après inversion, l'incertitude augmentera d'autant plus que l'écart entre le modèle choisi (isotrope ou axisymétrique) et le comportement réel du matériau sera grand. Enfin pour l'inversion isotrope transverse, étant donné que l'expérience ne génère que très peu de contrainte en cisaillement, l'erreur sur  $G_{LT}$  sera fortement amplifiée par l'inversion. La tortuosité et la longueur caractéristique visqueuse restent relativement peu sensibles à ces deux facteurs.

L'anisotropie et l'hétérogénéité sont en corrélation respectivement avec la direction et l'accroissement des flux gazeux, qui allongent les cellules lors de la fabrication (cf. figure 3.10). En pratique, on pourra limiter l'influence de l'hétérogénéité en choisissant des échantillons le plus proche possible et dans un même plan normal à la direction de croissance de la mousse. Quant à l'anisotropie, il est essentiel de repérer l'orientation des échantillons par rapport à cette direction.

| Paramètre            | $\phi$ | $\sigma$        | $\alpha_\infty$  | $\Lambda$ | $\Lambda'$ | $\rho_1$ | $\eta_s$ | $K$    | $T$ |
|----------------------|--------|-----------------|------------------|-----------|------------|----------|----------|--------|-----|
| <i>Mesure</i>        | 1%     | 2%              | 10%              | 20%       | 20%        | 1%       | 3%       | 3%     | 3%  |
| <i>Anisotropie</i>   | —      | 8% <sup>†</sup> | 5%               | 8%        | —          | —        | —        | 13-41% | 33% |
| <i>Hétérogénéité</i> | nc     | 18%             | 1% <sup>††</sup> | 4%        | nc         | nc       | nc       | 14%    | 8%  |

TAB. 3.3: Variation des résultats suivant les incertitudes de mesure, l'anisotropie et l'hétérogénéité (nc : non connu). <sup>†</sup> L'anisotropie de  $\sigma$  peut s'élever à 35% pour des mousses semi-réticulées. <sup>††</sup> Pour les feutres ou laines de verre, l'hétérogénéité sur  $\alpha_\infty$  peut s'élever à 7%.

### 3.1.5 Propagation des incertitudes sur les simulations

Dans cette section, nous estimons l'influence des incertitudes sur les résultats de simulation. Nous effectuons ainsi plusieurs simulations en faisant varier chaque paramètre indépendamment, d'un intervalle relatif à son indétermination (cf. tableau 3.3). La configuration choisie est une couche de matériau A (cf. tableau 3.4) d'épaisseur  $l = 10$  cm, accolée à un fond rigide, pour laquelle on calcule le coefficient d'absorption. Cette configuration est proche des cas étudiés dans la partie suivante et permet d'observer l'influence des différents paramètres sur la résonance du squelette. Par commodité, on utilise le code analytique MAINE (BROUARD, 1994).

L'incertitude considérée est la somme des trois sources d'incertitude pour chaque paramètre. Cependant pour  $\Lambda'$ , on ajoute une incertitude due à l'hétérogénéité identique à celle de  $\Lambda$ , soit 4%. Pour  $K$  et  $T$ , l'orientation étant prise en compte en pratique, on ne tient pas compte de l'incertitude due à l'anisotropie. Les incertitudes calculées sur  $K$  et  $T$  sont ensuite reportées sur  $E$  et  $\nu$ . Cependant, comme on utilise un modèle isotrope, l'influence de  $\nu$  croît fortement à mesure qu'il s'approche de un demi. Le coefficient de Poisson étant de 0.45 pour la matériau A dans sa direction de croissance, on se limitera à une incertitude de 3%, à titre démonstratif de son influence : ce résultat sera utilisé ultérieurement pour justifier ou non l'usage d'un modèle isotrope. Les résultats sont présentés à la figure 3.11, sauf ceux concernant la porosité, la masse volumique du squelette et le facteur d'amortissement à cause du faible degré d'incertitude sur ces paramètres (de 1% à 3%).

Parmi les paramètres de couplage, seule la résistivité  $\sigma$  a une réelle influence : l'incertitude initiale de 28%, se réduit à 11% sur le coefficient d'absorption, induisant une erreur absolue de  $\pm 0.05$ . La longueur caractéristique visqueuse ne peut jouer un rôle important, car la fréquence de transition visqueuse  $f_{Tv}$  se situe autour de 9.4 MHz (équation (1.20)). Cette valeur élevée est due à la forte résistivité et aux petits pores du matériau A. La même remarque s'applique à la longueur caractéristique thermique avec une fréquence de transition thermique  $f_{Tt}$  de 1680 Hz (équation (1.31)). La faible influence de  $\Lambda'$  en basses fréquences montre aussi que les effets thermiques sont négligeables, étant donné que  $\Lambda'$  gouverne ces effets en basses fréquences par le biais de l'hypothèse  $M' = 1$  (section 1.2.1).

L'incertitude sur le module d'Young est prise à 17%. Sa répercussion sur la fréquence de résonance se réduit à 8%. Ce résultat est cohérent avec la relation donnant une valeur approchée de la première résonance  $f_1$ , en  $\frac{\lambda}{4}$ , de notre système (ALLARD, 1993), à savoir

$$f_1 = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{K_s}{\rho_1}}, \quad (3.16)$$

avec

$$K_s = A + 2N = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (3.17)$$

La multiplication du rapport  $\frac{E}{\rho_1}$  par un facteur  $\alpha$  accroît la fréquence de résonance d'un facteur  $\sqrt{\alpha}$ .

L'influence du coefficient de Poisson augmente à mesure que l'on s'approche de 0.5, limite atteinte pour un matériau incompressible. Ainsi, pour un coefficient de 0.45, l'incertitude de 3% s'amplifie à 11% pour la fréquence de résonance. Cette amplification de l'erreur diminue la pertinence des résultats de simulation et remet en cause la validité d'un tel coefficient pour une mousse polymère (cf. section 3.2.3).

En conclusion, les écarts entre les résultats expérimentaux et simulés peuvent se traduire de deux façons : s'il s'agit d'un écart fréquentiel, il est dû à une mauvaise caractérisation des propriétés mécaniques du squelette, les conditions aux limites étant par ailleurs bien maîtrisées ; s'il s'agit d'un écart purement absolu, il est dû à l'incertitude sur la résistivité au passage de l'air.

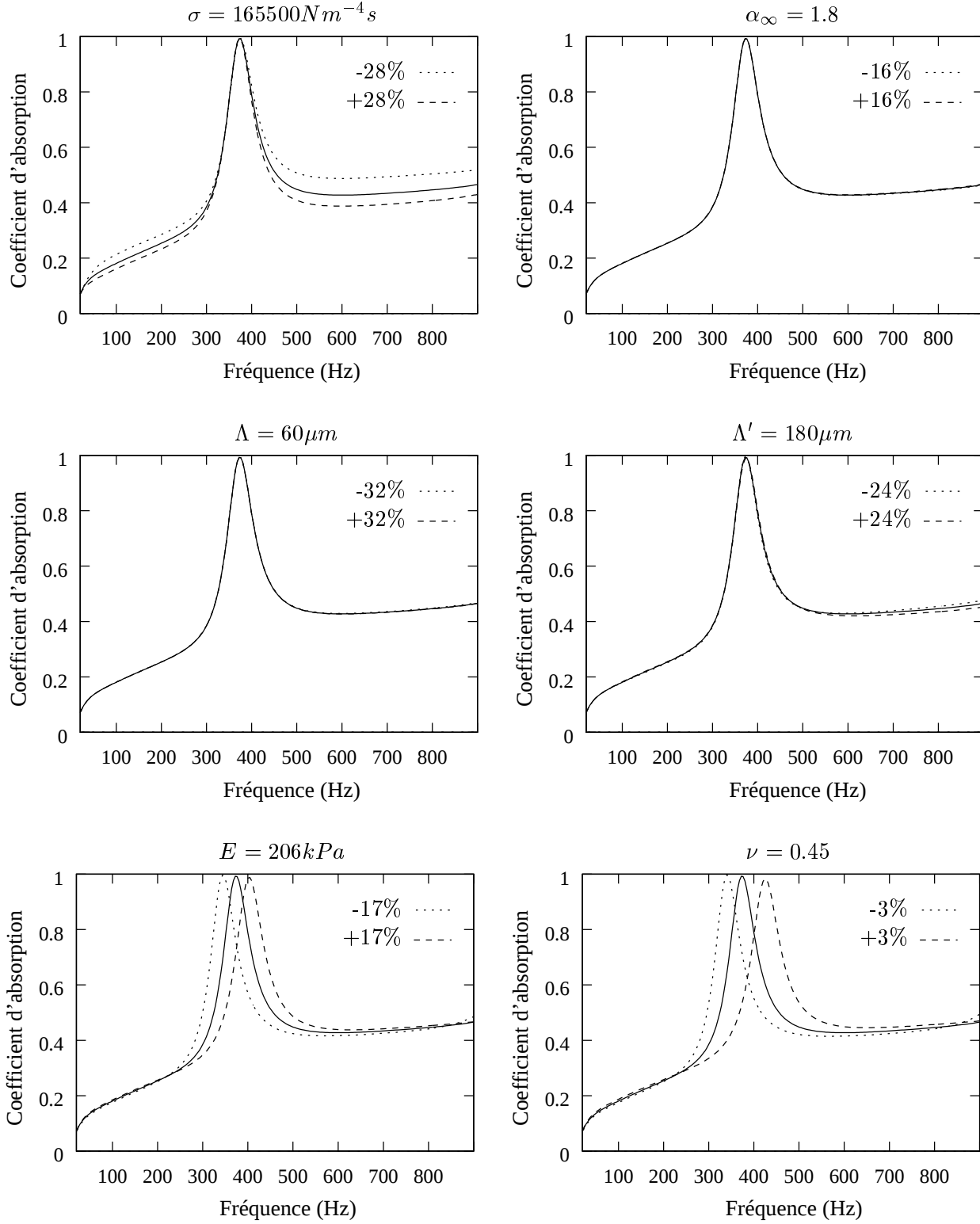


FIG. 3.11: Influence de l'incertitude des paramètres sur le coefficient d'absorption d'une couche de matériau A d'épaisseur 10 cm.

## 3.2 Mesure d'impédance en conduit

Un premier type de validation expérimentale concerne la mesure d'impédance en conduit d'un échantillon poreux. Deux dispositifs de mesure ont été utilisés. L'un disponible au LAUM est un tube de petite section (diamètre de 4.44 cm). L'autre, disponible chez P.S.A. Peugeot Citroën, a une section carrée de 10 cm d'arête. Grâce à cette grande section, il est possible d'observer des résonances du squelette pour plusieurs conditions de montage de l'échantillon. L'usage de ces deux configuration permettra d'appréhender différents types de comportements.

### 3.2.1 Méthodes expérimentales

Les deux dispositifs expérimentaux fonctionnent sur des principes différents.

#### Méthode de Seybert et Ross (1977)

Cette méthode permet de mesurer l'impédance de surface sur une bande de fréquence de façon continue grâce à une excitation par un bruit blanc. Elle semble donc bien adaptée à l'observation de phénomènes locaux telles des résonances.

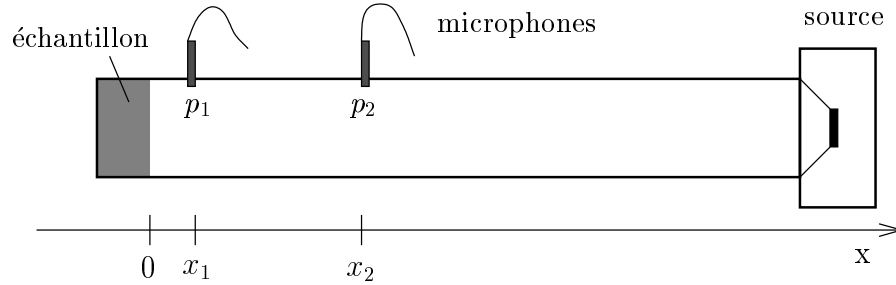


FIG. 3.12: Schéma du tube de mesure d'impédance.

Son principe repose sur une mesure simultanée de la pression en deux points le long de l'axe du conduit par deux microphones fixes fournissant les signaux  $s_1$  et  $s_2$ . Afin de s'affranchir des différences entre les deux chaînes d'acquisition, on utilise une fonction d'étalonnage  $H_e$  entre les deux microphones. Cette fonction est obtenue par une mesure simultanée de la même pression, en plaçant les deux microphones à une même distance du fond du tube, grâce à un support approprié.

La fonction de transfert  $H_p$ , rapport des pressions  $p_2$  et  $p_1$  au niveau des deux microphones, est obtenue en faisant le rapport des signaux  $s_2$  et  $s_1$  sur la fonction d'étalonnage  $H_e$

$$H_p = \frac{s_2/s_1}{H_e}. \quad (3.18)$$

La pression en tout point d'abscisse  $x$  du tube, est la somme d'une onde aller et d'une onde retour ayant subi une réflexion

$$p(x) = a(e^{ikx} + Re^{-ikx}). \quad (3.19)$$

Le coefficient de réflexion  $R$  à l'extrémité du tube s'écrit donc

$$R = \frac{H_p - e^{ik(x_2-x_1)}}{e^{-ik(x_2-x_1)} - H_p} e^{i2kx_1}, \quad (3.20)$$

avec  $x_1$  et  $x_2$  la position des microphones et  $k = \frac{2\pi f}{c(T_0)}$  la constante de propagation du son. Cette dernière dépend de la fréquence  $f$  et de la vitesse du son  $c(T_0) = 331.45(\frac{273.6+T_0}{273.16})^{\frac{1}{2}}$ , fonction de la température  $T_0$  en °C .

Le coefficient d'absorption  $\alpha$  est donné par

$$\alpha = 1 - |R|^2, \quad (3.21)$$

et l'impédance réduite de la surface de l'échantillon par

$$Z(0) = \frac{1 + R}{1 - R}. \quad (3.22)$$

La plage fréquentielle de mesure est déterminée par le positionnement des microphones. Elle est inférieure à la fréquence telle que la distance entre les deux microphones soit une demi-longueur d'onde, soit  $k(x_2 - x_1) = \pi$ . Dans ce cas, on a une indétermination du type  $\frac{0}{0}$  pour  $R$ . En pratique, cette plage est réduite à cause du bruit de fond, du bruit de quantification, de l'imprécision de l'étalonnage, de l'incertitude sur la position des microphones. Leur influence est cependant moindre pour la mesure d'un matériau absorbant : d'une part la variation des pressions dans le conduit étant plus douce, l'erreur d'estimation des positions des microphones a moins d'influence, et d'autre part, la pression ne s'annule pas aux "nœuds" de pression, d'où une plus grande immunité au bruit. BARDOT (1992) montre qu'un écart microphonique  $(x_2 - x_1) = 20$  cm permet d'obtenir de bonnes estimations de l'impédance pour la mesure de différentes mousses dans la gamme 50-500 Hz. Les calculs d'incertitude sur l'impédance relatifs à la mesure de différents matériaux dont la mousse A (cf. tableau 3.4), montrent que l'erreur liée à l'incertitude sur la position des microphones est inférieure à 5%, et celle liée à l'incertitude sur  $H_p$  est généralement inférieure à 10% (BARDOT, 1992). Cette dernière est notamment sensible aux pollutions sonores, dont l'influence sera réduite par l'obtention d'une bonne cohérence.

Cette méthode est implantée sur le conduit à section carrée disponible chez P.S.A. Peugeot Citroën (BARDOT, 1992). Le conduit est en acier, de section carrée de 10 cm d'arête et d'une longueur d'environ 2 m. Il permet de mesurer des impédances entre 50 et 1000 Hz. Le signal d'excitation est un bruit blanc, filtré autour de sa bande utile. Les pressions sont relevées par des microphones B&K 1/4 de pouce. L'acquisition du signal est faite par une carte reliée à un micro-ordinateur, qui gère les différentes étapes.

Les microphones peuvent être positionner par pas de 5 cm le long de l'axe du conduit, grâce à un système de bouchons amovibles. Pour notre application, la bande fréquentielle de mesure souhaitée est comprise entre 50 Hz et 600 Hz. Nous choisissons donc un écart microphonique  $(x_2 - x_1) = 20$  cm. Le premier accident correspondant à  $\frac{x_2 - x_1}{\lambda/2} = 1$  se situe alors à 866 Hz. Le microphone 1 est placé le plus près possible de la surface du matériau, soit  $x_1 = 5$  cm.

La mesure de la position des microphones est faite acoustiquement à partir de la mesure d'un fond rigide, pour tenir compte de la taille de la membrane microphonique et réduire ainsi l'incertitude sur les positions. Les premiers nœuds de pression relevés à chaque microphone se trouvent alors à une fréquence  $f_i$  telle que la distance du fond du tube au microphone fasse un quart de longueur d'onde. Pour chaque microphone, on a  $x_i = \frac{c(T_0)}{4f_i}$ . Cinq mesures effectuées entre 23 et 25 °C ont donné des longueurs, multiples de 50 mm, à 1 % près.

La température du laboratoire pouvait augmenter de 2 à 3 °C pendant la journée, se situant autour de 24 à 26 °C en milieu de journée. Pour le calcul de l'impédance, la température était mise à jour à chaque variation d'un degré. Des essais de répétabilité ont montré qu'une erreur d'un degré était négligeable. La température peut aussi influencer la fonction d'étalonnage. Plusieurs mesures ont

montré que cette fonction était stable : variations inférieures à 1 %. Par conséquent, les calculs ont été faits avec la même fonction d'étalonnage mesurée à 25 °C.

### Méthode T.M.T.C.

Proposée par GIBIAT et LALOË (1990) pour la mesure d'impédance d'entrée d'instruments de musique à vent, elle a été adaptée par HENRY (1997) pour la mesure d'impédance de surface. C'est aussi une méthode à deux microphones, mais l'étalonnage se fait à partir de la mesure de trois impédances calibrées. Elle tire son nom de ce principe : Two Microphones Three Calibrations. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de manipulation des microphones, ce qui lui permet d'atteindre une grande précision.

On peut exprimer les signaux de pression  $s_1$  et  $s_2$  sous la forme d'une combinaison linéaire de la pression  $p$  et de la vitesse  $v$  à la surface du matériau

$$s_1 = a_{11} p + a_{12} v, \quad (3.23)$$

$$s_2 = a_{21} p + a_{22} v, \quad (3.24)$$

où les paramètres  $a_{ij}$  sont fonction de la propagation du son d'un microphone à la surface du matériau, et de la chaîne de mesure. À partir du rapport  $s_2/s_1$ , l'impédance réduite de la surface du matériau  $Z$  définie par

$$Z = \frac{1}{Z_0} \frac{p}{v}, \quad (3.25)$$

avec  $Z_0$  l'impédance caractéristique de l'air, peut s'exprimer en fonction de trois inconnues  $b_1, b_2, b_3$

$$Z = \frac{b_1 s_2/s_1 + b_2}{s_2/s_1 - b_3}, \quad (3.26)$$

telles que  $b_1 = -\frac{a_{12}}{Z_0 a_{11}}$ ,  $b_2 = \frac{a_{22}}{Z_0 a_{11}}$  et  $b_3 = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ . Ces trois inconnues sont déterminées par la mesure des trois impédances calibrées.

Afin de se placer dans les meilleures conditions possibles, le choix a été fait de travailler uniquement à des fréquences discrètes où l'incertitude de mesure est systématiquement la plus faible. En supposant que l'un des microphones est accolé à la surface de l'échantillon à mesurer, ces fréquences sont liées à l'espacement microphonique  $s$  telles que

$$f_n = (2n + 1) \frac{c(T_0)}{4(x_2 - x_1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Cela correspond à un écart microphonique multiple de  $\lambda/4$

$$x_2 - x_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

De même, le choix des impédances calibrées est déterminant : HENRY (1997) montre que l'usage de cavités de longueur optimisée permet de minimiser les erreurs. Pour une longueur d'onde  $\lambda$  correspondant à la première fréquence de mesure, les longueurs optimales  $l_i$  sont définies par

$$l_0 = 0, \quad l_1 = \frac{\lambda}{8}, \quad l_2 = \frac{3\lambda}{8}. \quad (3.29)$$

En pratique, l'espacement  $(x_2 - x_1)$  est fixé et la température est maintenue la plus constante possible, grâce à une climatisation et une isolation thermique du conduit. Ceci évite d'avoir à refaire chaque fois les manipulations de calibration. Dans ces conditions, la calibration est valable plusieurs mois.

Cette méthode est implantée sur le conduit disponible au LAUM. Celui-ci est en laiton, de diamètre 44.36 mm et d'une longueur d'environ 2 m. Il est conçu pour mesurer des impédances entre 50 Hz et 4000 Hz. Etant donné le choix de la distance intermicrophonique  $(x_2 - x_1) = 1.25$  m et la température de fonctionnement stabilisée à  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , la fréquence la plus basse  $f_0$  vaut 68.66 Hz et les fréquences supérieures sont espacées de 137.32 Hz, jusque 4000 Hz. Le signal d'excitation est sinusoïdal. Les pressions sont relevées par des microphones B&K 1/8 de pouce. L'acquisition du signal est faite via un voltmètre vectoriel relié à une carte d'acquisition pilotée par un micro-ordinateur. L'incertitude est estimée pour chaque point de mesure.

### 3.2.2 Conditions de montage du matériau en conduit

Les conditions aux limites du matériau influence fortement son comportement. Nous avons besoin de déterminer quelles conditions aux limites sont réalisables en pratique, afin de pouvoir les reproduire à la simulation. Cette étude est faite à l'aide du tube à section carrée qui permet plus facilement de faire varier les conditions aux limites.

Etant donné qu'on s'intéresse à la première résonance du squelette, on travaille sur des échantillons d'épaisseur importante, soit 100 mm, pour que la résonance ait lieu dans notre gamme de mesure avec une amplitude significative. La section des porte-échantillons fait 100 mm  $\times$  100 mm et leur profondeur 100 mm. Nous disposons d'échantillons de sections 100 mm  $\times$  100 mm, 99 mm  $\times$  99 mm et 90 mm  $\times$  90 mm. Des conditions latérales d'encastrement ou proche du glissement, avec une lame d'air, seront réalisables. Dans tous les cas, l'échantillon est collé au fond du porte-échantillon par un adhésif double-face.

Le matériau utilisé est la mousse A (cf. tableau 3.4)) dont la forte résistivité,  $\sigma = 165\,500\text{ Nm}^{-4}\text{s}$ , facilitera la mise en mouvement du squelette par l'onde acoustique.

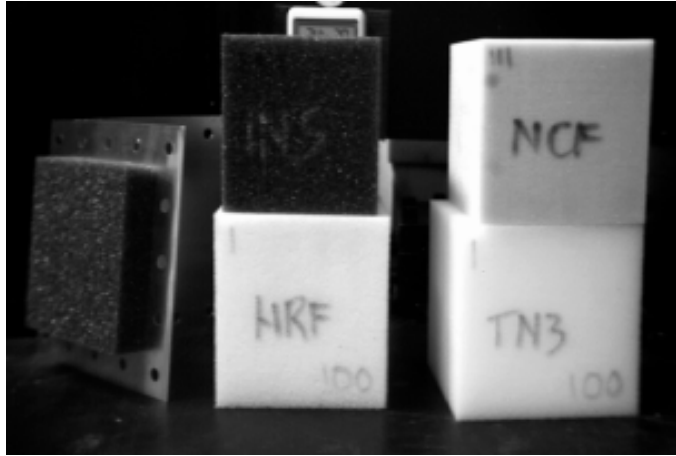


FIG. 3.13: Allure de différents échantillons poreux.

**Pour la condition d'encastrement** , plusieurs méthodes ont été réalisées et comparées

- légère contrainte de l'échantillon dans le support, en glissant une feuille cartonnée ou de papier de verre entre l'échantillon et les parois latérales. Cette méthode permet de glisser facilement l'échantillon au fond du support sans le déformer, tout en garantissant l'absence de lame d'air parasite due à une découpe imprécise.

- collage de l'échantillon dans le support. Cette méthode est délicate car il faut pouvoir glisser l'échantillon au fond du support. Une colle de type néoprène habituellement utilisée pour le collage des mousses, ne convient pas car elle colle dès le premier contact. Par contre une colle liquide, type colle à bois, convient. Cependant, cette colle sèche très lentement dans le support à cause de la forte résistivité au passage de l'air du matériau. De plus elle a tendance à être absorbée sur 1 mm par le matériau.

La figure 3.14 montre le coefficient d'absorption d'un échantillon de mousse A, mesuré avec différentes conditions latérales. Dans tous les cas, on remarque un maximum d'absorption dû à une résonance du squelette. Les deux cas contraints sont équivalents à l'encastrement réalisé par collage. Lorsque l'échantillon est simplement placé dans le support, sans contrainte, la fréquence du maximum est plus basse. Ceci est dû au léger jeu, conséquence de l'imprécision de la découpe.

Il est donc nécessaire de contraindre légèrement l'échantillon. Cette observation rejoint les conditions de mesure des propriétés mécaniques du squelette (MARIEZ et SAHRAOUI, 1997) : l'échantillon poreux subit une légère précontrainte correspondant à une déformation de 1%.

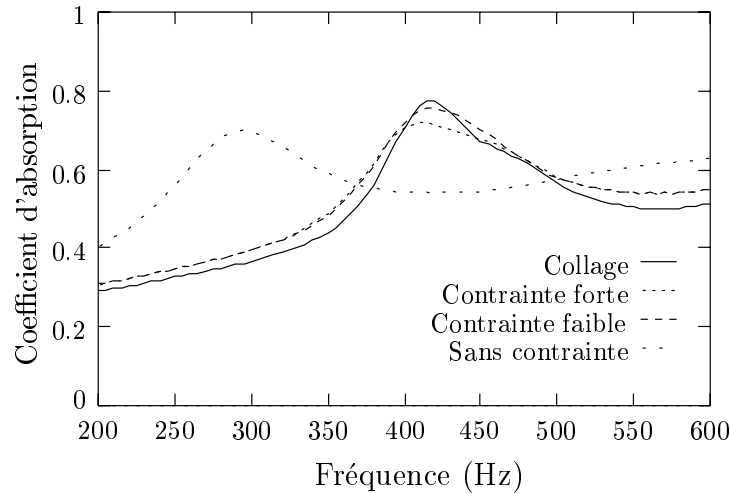


FIG. 3.14: Coefficient d'absorption d'un échantillon de mousse A, mesuré avec différentes conditions latérales.

**La condition de glissement** est difficilement réalisable car elle nécessite une découpe parfaite de l'échantillon et une lubrification de la paroi, qui s'avère peu efficace en pratique. Pour approcher cette condition, on peut laisser une fine lame d'air entre le poreux et la paroi : l'échantillon pourra se déformer longitudinalement sans frottement. Les différences avec une condition de glissement idéale sont la possibilité d'une déformation transversale et la modification de l'impédance par la lame d'air.

Pour estimer l'influence de la lame d'air, on effectue plusieurs mesures avec des lames d'air de différentes épaisseurs : 0.5 mm, 1.8 mm et 5mm. Les résultats sont présentés à la figure 3.15.

Pour les épaisseurs de 0.5 mm et de 1.8 mm, on a la même allure de courbe, avec un maximum vers 300 Hz. Avec une lame d'air de 5 mm, le phénomène semble perturbé par la trop grande proportion d'air par rapport au poreux. D'autre part, la lame d'air semble générer un autre maximum d'absorption, dont la fréquence dépend de son épaisseur, soit 100 Hz pour 0.5 mm, 150 Hz pour 1.8 mm et 200 Hz pour 5 mm. Ces phénomènes pourront être interprétés à l'aide de simulation à l'aide du code PHÉNIX. La dernière courbe correspond au cas "Sans contrainte" du graphique 3.14.

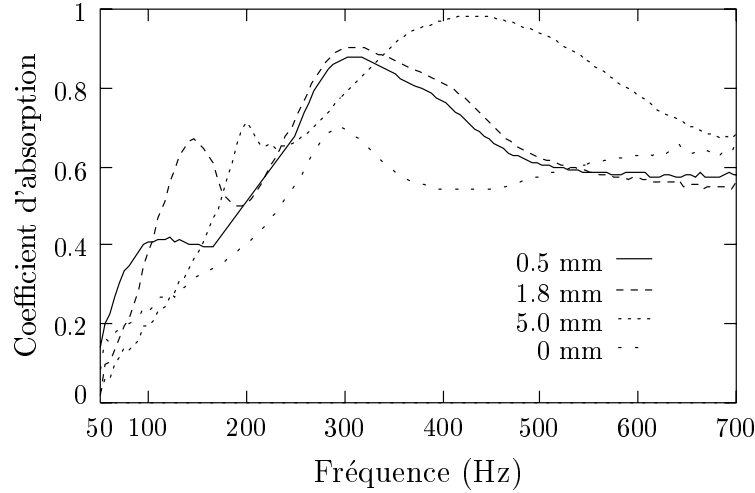


FIG. 3.15: Coefficient d'absorption d'un échantillon de mousse A, mesuré avec des lames d'air latérales de différentes épaisseurs.

**En conclusion** , les mesures d'échantillons de mousse A ont permis d'observer un phénomène de résonance du squelette, qui dépend des conditions latérales de l'échantillon. Deux types de conditions latérales peuvent être réalisées en pratique : une condition proche de l'encastrement en contraignant légèrement l'échantillon, et une condition en laissant une fine lame d'air autour de l'échantillon. Apparemment proche de la condition de glissement, cette dernière condition donne des résultats très sensibles à l'épaisseur de la lame d'air. Par conséquent on ne peut pas réaliser de réelle condition de glissement.

D'autre part, une mesure pour laquelle le squelette est immobile n'est pas réalisable avec le tube de grande section avec ce matériau et cette épaisseur. L'usage du conduit de petite section avec une épaisseur de matériau de 4 cm et en contraignant légèrement l'échantillon permet de réaliser une telle condition.

### 3.2.3 Validation du modèle numérique

La validation est faite en deux étapes. Premièrement, on s'assure de la validité des paramètres de couplage dans la gamme de fréquence d'intérêt par comparaison du modèle à une mesure où le squelette est immobile. Puis on le compare dans plusieurs cas où le squelette vibre. Ces derniers résultats sont obtenus à l'aide du conduit à section carrée : matériau encasté ou avec lames d'air latérales. Le fait d'avoir plusieurs conditions aux limites permet d'estimer la robustesse de la description du matériau.

Un seul matériau, noté A, a été utilisé pour toutes les expériences. Il s'agit de la mousse NCF produite par la société TRAMICO. Les échantillons découpés par le fournisseur sont issus du même matelas.

L'indicateur retenu pour les comparaisons est le coefficient d'absorption. Les comparaisons sur l'impédance sont présentées en annexe B. Les incertitudes de mesures sont reportées sur les différentes figures sous forme de barres d'erreur.

### Cas du squelette immobile

Le conduit de diamètre 4.44 cm est utilisé. L'épaisseur du matériau est de 4 cm. Etant légèrement surdimensionné (diamètre de 4.52 cm), l'échantillon est contraint dans son support. Vu sa faible épaisseur, la mesure du coefficient d'absorption (figure 3.16) ne laisse entrevoir aucune résonance du squelette. Dans ce cas, la simulation peut être effectuée avec un modèle de fluide équivalent, indifféremment à l'aide du code MAINE ou du code PHÉNIX qui possède des éléments de fluide équivalent.

La comparaison est très bonne avec une erreur relative inférieure à 4% et absolue inférieure à 0.03 entre 70 et 900 Hz. Cet écart reste dans l'incertitude liée à la détermination de  $\sigma$ .

| $\phi$ | $\sigma$<br>( $N m^{-4} s$ ) | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$<br>( $\mu m$ ) | $\Lambda'$<br>( $\mu m$ ) | $\rho_1$<br>( $kg m^{-3}$ ) | $\eta_s$ |
|--------|------------------------------|-----------------|--------------------------|---------------------------|-----------------------------|----------|
| 0.97   | 165 500                      | 1.8             | 60                       | 180                       | 39.5                        | 0.11     |

TAB. 3.4: Paramètres de la mousse polymère A, hors tenseur élastique.

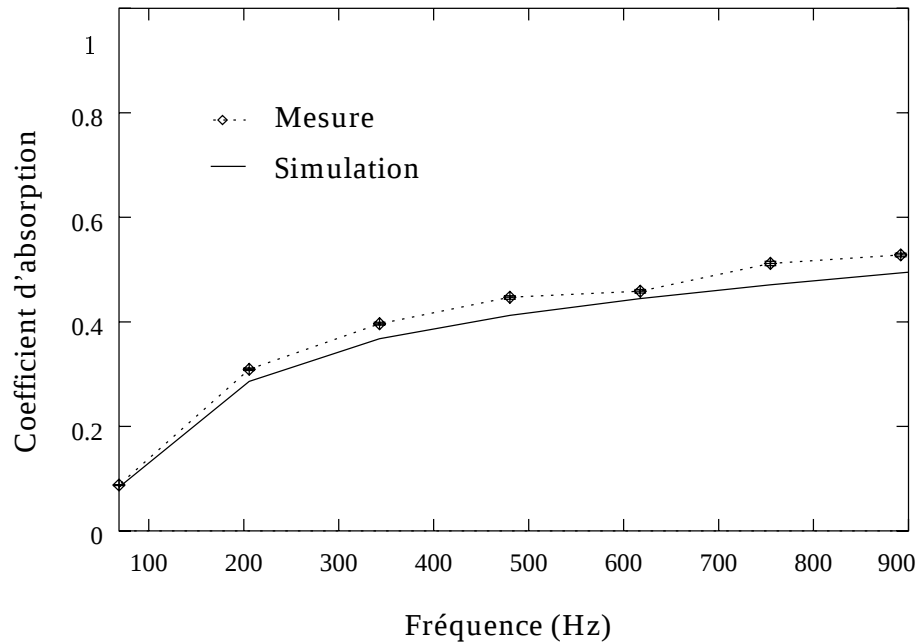


FIG. 3.16: Coefficient d'absorption de la mousse A d'épaisseur 4 cm.

### Résonance du matériau encastré

Le même matériau d'épaisseur 10 cm est maintenant encastré dans le conduit à section carrée d'arête 10 cm. Dans ces conditions, un maximum d'absorption, dû à une résonance du squelette apparaît autour de 420 Hz. Par conséquent, la détermination des propriétés mécaniques du squelette est primordiale.

La mesure des couples  $(K, T)$  selon les trois directions montre que le matériau A n'est pas isotrope. Cependant, pour chacun des trois couples obtenus, on peut procéder à une inversion isotrope : cela revient à supposer que les trois couples  $(K, T)$  sont tour à tour identiques à celui choisi pour faire l'inversion. On obtient par conséquent trois couples  $(E, \nu)$  différents, correspondant à chaque direction

(cf. tableau 3.5.a). Ces valeurs ne caractérisent pas le tenseur élastique du matériau de façon générale, mais peuvent suffire si le matériau subit des contraintes unidirectionnelles.

L'observation de ces trois couples montre que la direction longitudinale, notée  $L$ , se démarque des deux autres par un module d'Young plus grand. Bien que les valeurs des deux autres directions ne soient pas rigoureusement égales, on peut considérer que ce matériau est isotrope transverse d'axe  $L$ . Cela permet d'effectuer une inversion isotrope transverse fournissant une meilleure description du matériau (cf. tableau 3.5.b).

Les simulations, faites avec le code PHÉNIX, permettent de comparer la validité de chaque type d'inversion. On effectuera aussi un calcul en fluide équivalent afin de visualiser la contribution du mouvement du squelette sur le résultat.

|       | $L$  | $T$  | $T'$ |       |       |          |            |            |
|-------|------|------|------|-------|-------|----------|------------|------------|
| $E$   | 206  | 136  | 100  | $E_L$ | $E_T$ | $G_{LT}$ | $\nu_{LT}$ | $\nu_{TT}$ |
| $\nu$ | 0.45 | 0.31 | 0.26 | 200   | 100   | 80       | 0.5        | 0.15       |

TAB. 3.5: Paramètres élastiques de la mousse A : détermination par inversion isotrope (a) et anisotrope transverse (b). Les valeurs des modules sont données en kPa.

**Le maillage** est réduit à un quart par raison de symétrie dans les directions transversales : une condition de glissement est alors appliquée le long des plans de coupe (lignes tiret-point de la figure 3.17). Les dimensions du sous-domaine poreux sont donc de 50 mm  $\times$  50 mm  $\times$  100 mm. Il est maillé par 6  $\times$  6  $\times$  10 éléments hexaédriques. Ce maillage respecte les critères énoncés au chapitre 2. La convergence de la déformation tridimensionnelle a été vérifiée par rapport à un maillage raffiné deux fois dans chaque direction.

Un conduit de 100 mm de longueur est maillé afin d'observer l'hypothèse d'ondes planes au niveau du piston. Ce dernier est modélisé par une plaque rigide, excitée par un déplacement sinusoïdal imposé.

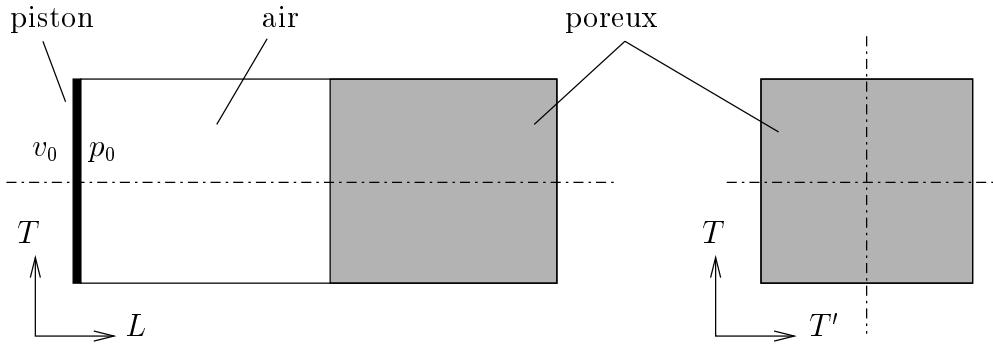


FIG. 3.17: Maillage du conduit avec échantillon poreux encastré.

**L'impédance** est calculée à partir du rapport de la pression moyennée à la surface de la plaque  $p(-l)$  sur la vitesse de la plaque  $v(-l)$  à l'abscisse  $x = -l$

$$Z(-l) = \frac{p(-l)}{v(-l)}. \quad (3.30)$$

Elle peut être ensuite ramenée à la surface du matériau d'abscisse  $x = 0$  (ALLARD, 1993)

$$Z(0) = Z_0 \frac{Z_0 - jZ(-l)\cot gkl}{Z(-l) - jZ_0\cot gkl}, \quad (3.31)$$

avec  $Z_0$  l'impédance caractéristique de l'air et  $k$  le nombre d'onde de l'onde acoustique se propageant dans le conduit. Cette méthode a été comparée à la méthode basée sur un relevé de la pression en deux endroits sur l'axe du conduit et donne les mêmes résultats.

Le coefficient de réflexion  $R$  est donné par

$$R = \frac{Z(0) - 1}{Z(0) + 1}, \quad (3.32)$$

et le coefficient d'absorption  $\alpha$  par

$$\alpha = 1 - |R|^2. \quad (3.33)$$

**Comparaison mesures-simulations** Les résultats sont présentés à la figure 3.18.

Le premier résultat est obtenu avec un modèle de fluide équivalent. On remarque que le modèle de fluide équivalent ne permet pas de simuler le pic d'absorption : cela prouve qu'il est dû à une résonance du squelette. Hors résonance, les différents résultats coïncident ce qui réaffirme la bonne détermination des paramètres de couplage.

Le modèle de BIOT isotrope donne un résultat satisfaisant. Le couple  $(E, \nu)$  choisi est celui correspondant à la direction  $L$ , identique à celle de l'axe du conduit. Cependant il est obtenu avec un coefficient de Poisson proche de 0.5 (matériau incompressible) ce qui n'est pas réaliste pour une mousse polymère. La conséquence est que la moindre incertitude sur ce coefficient entraîne de fortes variations sur la position de la résonance (cf. figure 3.11). La description isotrope de ce matériau s'avère donc insatisfaisante.

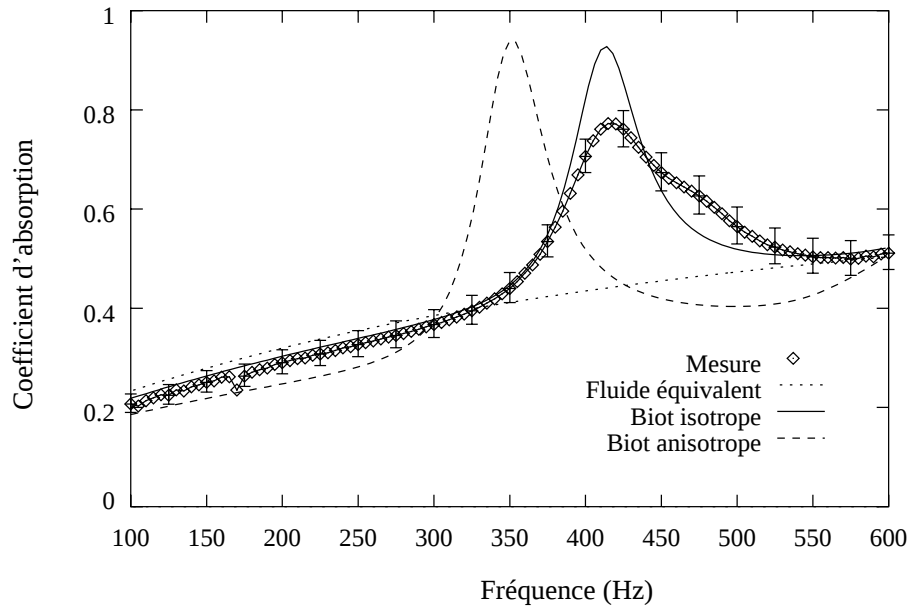


FIG. 3.18: Coefficient d'absorption mesuré et simulé d'un échantillon poreux de mousse A encastré.

Avec la loi de comportement isotrope transverse, la description du matériau est plus réaliste. L'allure de la courbe se dégrade légèrement, avec notamment une fréquence de résonance 20% inférieure à la valeur expérimentale. Quoique non négligeable, cette erreur reste acceptable.

### Résonance du matériau avec lame d'air

Dans le cas avec lame d'air, l'influence du coefficient de Poisson est moins important car le matériau n'est pas contraint latéralement. Le paramètre déterminant est alors le module d'Young : on choisit la valeur correspondant à la direction  $L$  identique à celle de l'axe du conduit.

Deux cas de figure ont été modélisés : lame d'air de 1.8 mm et 5 mm. La configuration de base est celle avec une lame d'air de 5 mm, réalisée avec un échantillon poreux de 90 mm  $\times$  90 mm de surface incidente et toujours 100 mm d'épaisseur. Pour obtenir une lame de 1.8 mm, on a collé des joues en caoutchouc sur la paroi du porte-échantillon, qui réduisent l'espace entre l'échantillon et la paroi. Le même échantillon poreux sert aux deux mesures, ce qui garantit les conclusions quant à l'influence de l'épaisseur de la lame d'air.

**Le maillage** est toujours réduit à un quart par raison de symétrie (figure 3.19). Les dimensions du sous-domaine poreux sont de 45 mm  $\times$  45 mm  $\times$  100 mm, maillées par  $5 \times 5 \times 10$  éléments. Les lames d'air sont représentées par un élément suivant leur épaisseur. Le conduit est maillé sur une longueur de 100 mm. La partie proche du matériau est plus raffinée afin de bien représenter les variations importantes au voisinage du matériau. L'hypothèse d'ondes planes est vérifiée au niveau du piston.

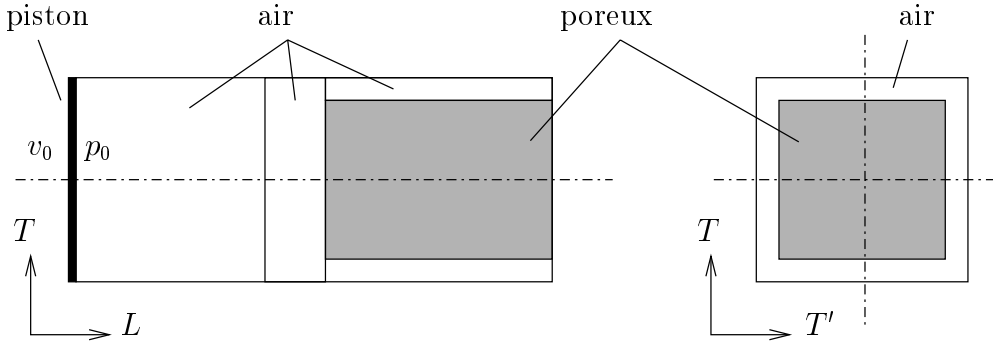


FIG. 3.19: Maillage du conduit avec échantillon poreux et lame d'air latérale.

### Comparaison mesures-simulations

Les résultats concernant la lame d'air de 5 mm sont présentés à la figure 3.20.a. Le modèle fluide équivalent simule bien l'allure globale du coefficient d'absorption. Par comparaison à la mesure, il met en relief une résonance du squelette autour de 200 Hz. On peut aussi observer que le maximum d'absorption est estimé légèrement plus bas en fréquence par le modèle fluide équivalent (400 Hz au lieu de 430 Hz).

L'accord avec le modèle de BIOT est très bon sur tout le domaine fréquentiel. Cependant la fréquence de résonance du squelette est sous-estimée de 10% (180 Hz au lieu de 200 Hz). Cet écart reste acceptable. D'autre part, dans cette configuration, l'influence du coefficient de Poisson est négligeable, ce qui ne pose pas de problème de "stabilité" du résultat. Par conséquent et contrairement au cas encastré, l'usage du modèle de BIOT isotrope est satisfaisant. Un recalage de la fréquence nécessiterait

d'augmenter le module d'Young de 20%. Cette augmentation est cohérente avec l'accroissement du module d'Young en fonction de la fréquence, qui n'est pas pris en compte ici.

Malgré de bons résultats pour les deux maxima, le modèle de BIOT anisotrope donne des résultats décevants en ordonnée par rapport au modèle isotrope.

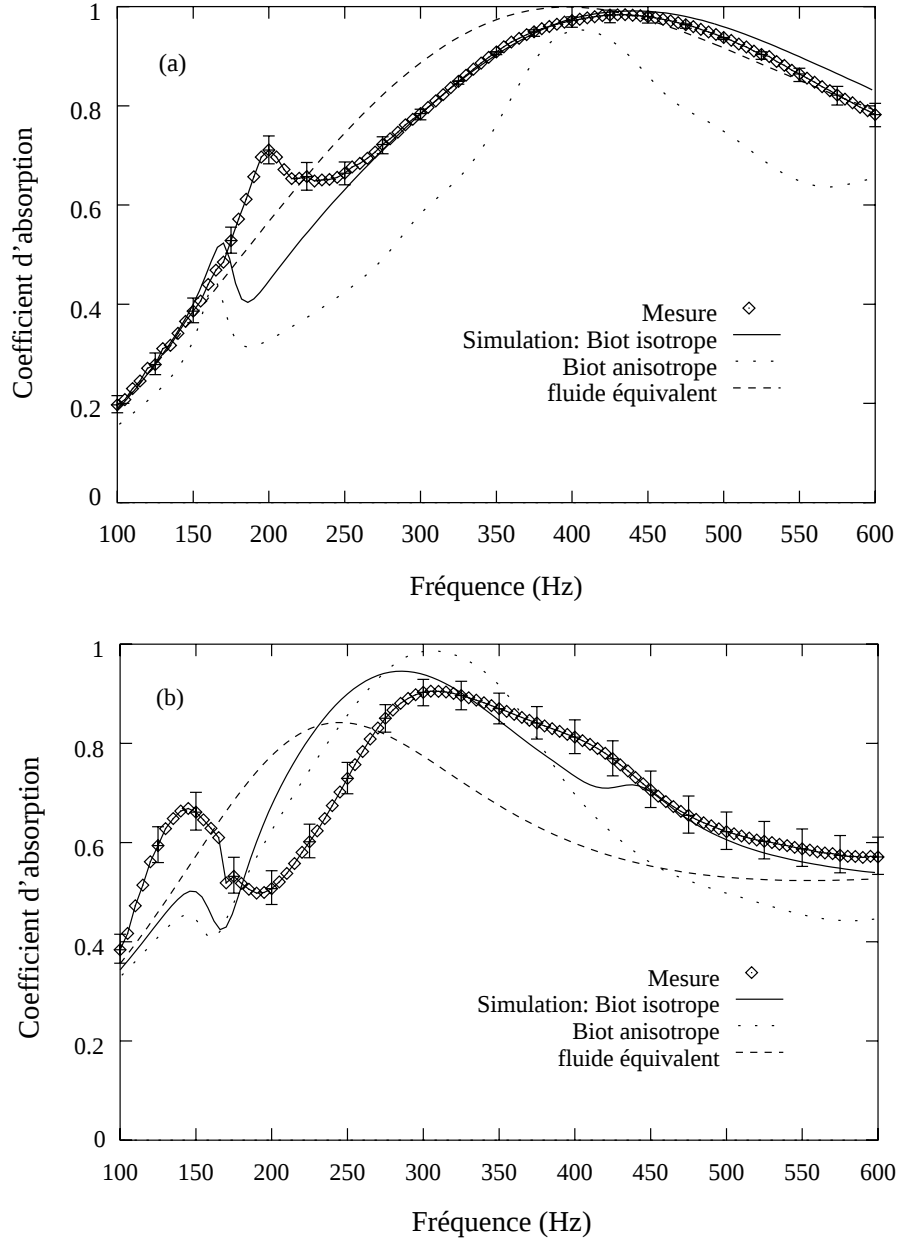


FIG. 3.20: Coefficient d'absorption mesuré et simulé d'un échantillon poreux avec lame d'air latérale d'épaisseur 5 mm (a) et 1.8 mm (b).

Les résultats concernant la lame d'air de 1.8 mm sont présentés à la figure 3.20.b. L'allure globale de la courbe est encore bien simulée par le modèle fluide équivalent, mais l'écart en fréquence du maximum d'absorption avec la courbe expérimentale est plus grand (230 Hz au lieu de 290 Hz). Dans cette configuration, la contribution du mouvement du squelette est plus importante.

Le modèle de BIOT isotrope permet de mieux approcher la courbe expérimentale. Les tendances expérimentales liées à la réduction de l'épaisseur de la lame d'air sont retrouvées : la fréquence du premier accident dû à la résonance du squelette (autour de 150 Hz) et celle du maximum d'absorption (autour de 300 Hz) ont diminué avec l'épaisseur de la lame d'air. La largeur du premier pic peut être expliquée par l'incertitude sur l'épaisseur de la lame d'air qui peut varier de  $\pm 0.3$  mm.

Le modèle de BIOT anisotrope donne des résultats similaires avec une dégradation en ordonnée après 400 Hz.

### 3.2.4 Discussion

Quatre configurations expérimentales, basées sur la mesure d'impédance de surface d'échantillons poreux avec diverses conditions aux limites, ont été présentées.

Hors résonance, le modèle de fluide équivalent donne de très bons résultats, ce qui prouve que la détermination des paramètres de couplage est satisfaisante. Ce modèle ne permet pas de simuler le mouvement du squelette, dont l'influence est observée pour les trois derniers cas. Celle-ci est surtout remarquable pour le cas encastré où la résonance du squelette permet un accroissement local significatif de l'absorption. Cependant à mesure que la lame d'air s'élargit, l'influence du mouvement du squelette diminue, masquée par une augmentation globale de l'absorption. Le modèle de fluide équivalent est alors suffisant pour la configuration avec une lame d'air de 5mm d'épaisseur.

Le modèle de BIOT isotrope permet d'obtenir des résultats très satisfaisants dans tous les cas. Cependant les paramètres n'ont de sens que pour une déformation proche de celle observée lors de la manipulation de caractérisation. C'est *grosso modo* le cas pour les configurations avec lame d'air pour lesquelles les contraintes latérales sont faibles. Cependant pour la configuration encastrée, l'influence du coefficient de Poisson se trouve amplifiée, étant donné qu'il est proche de 0.5 . Dans ce cas précis, la description isotrope du matériau n'est donc pas satisfaisante.

L'usage d'une loi de comportement anisotrope transverse permet d'éviter ce problème. De plus, on a réellement une description du comportement du matériau, valable quelles que soient les contraintes qu'il subit. Les résultats montrent que les variations locales liées aux résonances sont obtenues de façon satisfaisante. Cependant pour les cas avec lame d'air, les résultats hors résonance sont moins bons que dans le cas isotrope. La différence entre les deux lois de comportement réside notamment dans la faible rigidité transverse du modèle anisotrope :  $E_T = \frac{1}{2}E_L$ . Celle-ci réduit le mouvement relatif fluide-solide hors résonance, entraînant une diminution du coefficient d'absorption.

La description isotrope transverse semble donc mise en défaut. En effet, elle ne peut garantir une meilleure description si le matériau n'est pas réellement axisymétrique. Or pour le matériau A,  $E_T$  est sensiblement différent de  $E_{T'}$  ( $E_T = 136$  kPa et  $E_{T'} = 100$  kPa). D'autre part, on ne sait pas si l'axe de symétrie coïncide réellement avec l'un des trois axes normaux aux plans de découpe.

La question du choix d'une loi de comportement appropriée et la détermination des paramètres nécessaires reste une question ouverte pour la modélisation des mousses polymères. L'usage du modèle de BIOT isotrope reste justifié à condition d'utiliser les paramètres correspondant au type de déformation subie par le matériau.

Enfin la prise en compte de l'accroissement du module d'Young en fonction de la fréquence – augmentation de l'ordre de 20% sur deux décades – permettrait une meilleure localisation des phénomènes liées aux résonances.

### 3.3 Amortissement d'une plaque par collage d'une couche poreuse

Le deuxième cas de validation porte sur la structure "plaque-poreux" : elle est constituée d'une plaque sur laquelle est collée une couche de matériau poreux. Cette structure est très répandue dans l'industrie : automobile (tablier, plafond, capot), aéronautique (garnissage de la carlingue), électroménagère. L'usage du matériau poreux permet à la fois de réduire les vibrations de la plaque et d'absorber une partie du son incident. Il peut aussi jouer le rôle d'isolant thermique.

Directement en contact avec la structure vibrante, le squelette du matériau poreux subit des contraintes dont la prise en compte nécessite l'usage d'éléments poroélastiques. L'étude numérique de cette structure, présentée au chapitre 4, montre ainsi l'importance de la dissipation structurale, proportionnelle au module d'Young et au coefficient d'amortissement du squelette. Pour un matériau souple et peu amorti, l'effet de la dissipation visqueuse peut-être observé : son importance dépend de la résistivité au passage de l'air et de la vitesse relative fluide-squelette. On montre cependant que pour une mousse polymère, elle reste assez limitée.

Par conséquent, pour l'expérimentation nous avons sélectionné deux matériaux poreux, mousses polymères, aux caractéristiques sensiblement différentes (tableau 3.7) :

B , très peu résistive et rigide (REC17, fabriquée par Recticel),

C , plus résistive et plus souple (NCF, fabriquée par Tramico).

Les échantillons poreux ont les mêmes dimensions latérales que la plaque sur laquelle ils sont collés. Les autres faces sont libres. Les épaisseurs sont toutes de 5 cm, afin d'obtenir un effet significatif sur la plaque, tant d'origine structurale que visqueuse. Par ces expérimentations, nous souhaitons :

1. valider la partie structurale de l'élément poroélastique,
2. valider la détermination des paramètres mécaniques du squelette,
3. vérifier la faible contribution de l'amortissement par effet visqueux.

#### 3.3.1 Description du montage

Le montage, illustré par la figure 3.22, repose sur une plaque d'aluminium rectangulaire (22 cm  $\times$  28 cm  $\times$  1.205 mm) en appui simple. Pour réaliser cette condition, le pourtour de la plaque est collé à de fines languettes, elles-mêmes encastrées dans un support rigide en acier. Ainsi on contraint les déplacements normaux de la plaque mais les rotations restent possibles grâce à la souplesse en flexion des languettes. A cause de l'extrême minutie requise et du temps nécessaire pour réaliser ce montage, une seule plaque ainsi montée a été utilisée pour toutes les expériences. Les différentes mousses sont successivement collées et décollées de cette plaque. Le collage est assuré par une colle néoprène en aérosol (Colle 74, 3M) prévue pour les mousses polymères. Elle permet d'étendre une fine couche uniforme de points de colle juxtaposés : ainsi on limite l'apport de masse et de raideur. La qualité néoprène de la colle permet un décollage aisé en utilisant de l'acétone et un nettoyeur approprié (Citrus Base Cleaner, 3M).

L'excitation de la plaque est faite en un point excentré à l'aide d'un pot vibrant, et relevée par un capteur de force. La vitesse normale de la plaque est relevée sur un maillage de 7 $\times$ 7 points, avec un vibromètre laser. Ce relevé est effectué du côté excité de la plaque en raison de la présence de la mousse de l'autre côté. La présence du pot impose de viser certains points sous un angle différent de 90°. L'écart est cependant suffisamment petit pour ne pas affecter la précision des mesures.

Le signal d'excitation est un bruit blanc pseudo-aléatoire généré par un analyseur B&K 3220, qui réalise la fonction de transfert entre la vitesse d'un point et la force injectée au point d'excitation. L'ensemble des 25 fonctions de transfert (FRF=Fonction de Réponse en Fréquence) est transféré à un

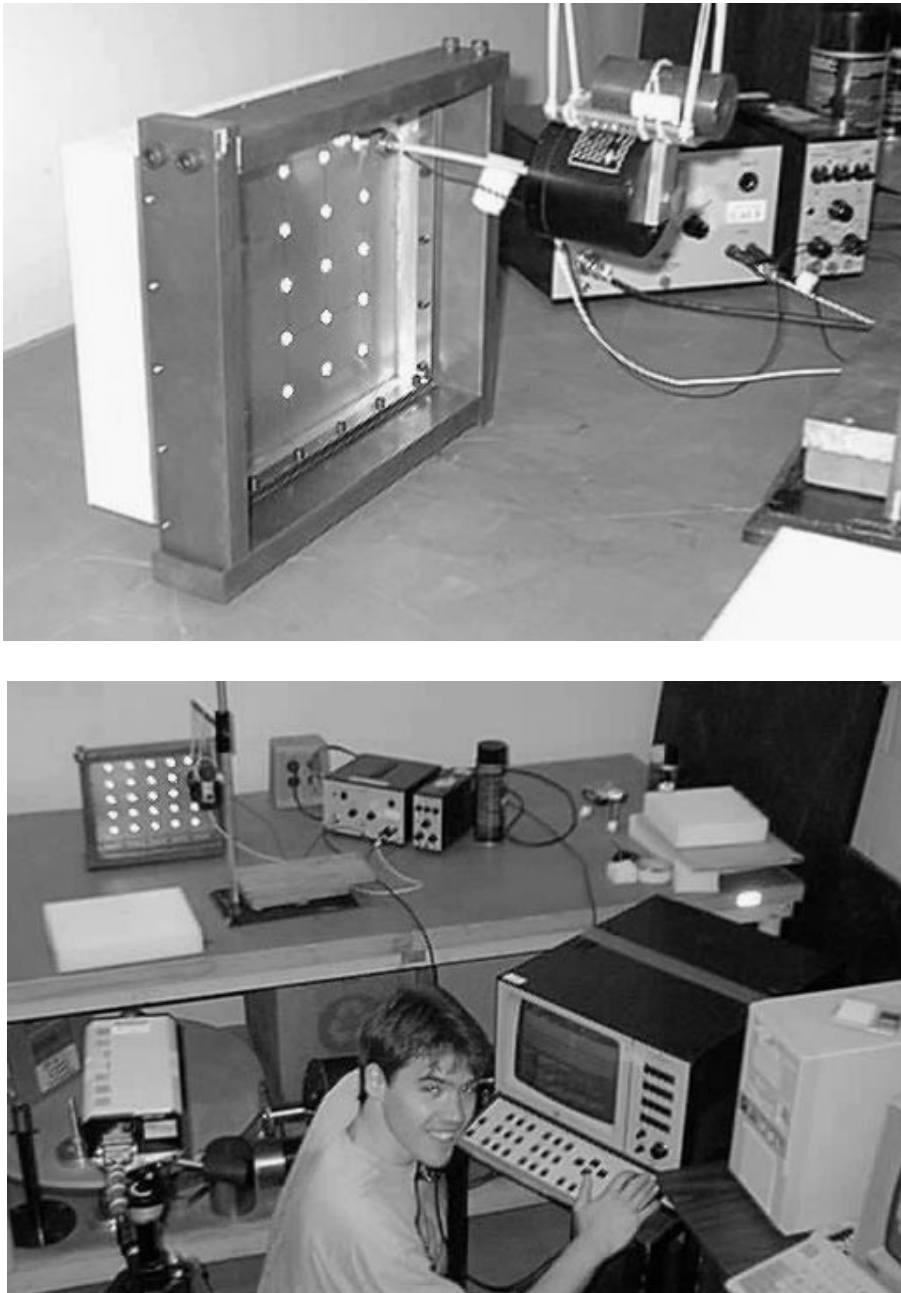


FIG. 3.21: Montage expérimental “Plaque-poreux”.

ordinateur individuel supportant un logiciel d’analyse modale *STARStruct*. L’analyse modale permet d’identifier chaque mode et de visualiser les déformées correspondantes. On peut ainsi vérifier la qualité des acquisitions ponctuelles par rapport à l’ensemble de la déformée.

Dans cette étude, on ne s’intéresse qu’aux trois premiers modes, pour permettre une analyse détaillée (figure 3.23). Pour les modes supérieurs, la convergence de certains indicateurs ne peut plus être assurée à cause de la trop grande taille des systèmes à résoudre (cf. chapitre 2).

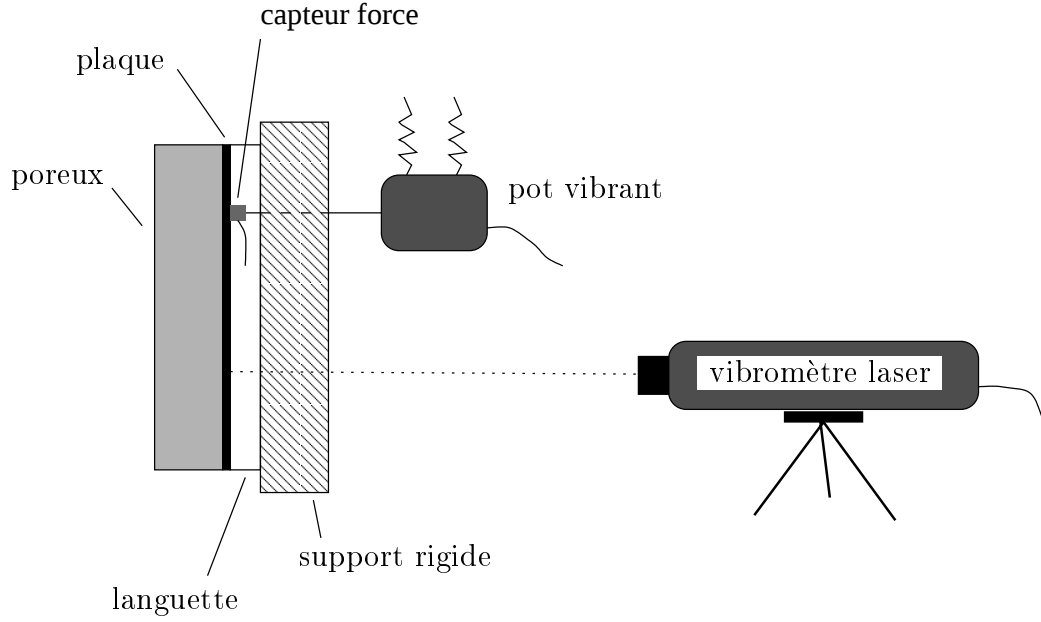


FIG. 3.22: Schéma du montage “Plaque-poreux”.

Les indicateurs utilisés doivent permettre d’analyser l’effet amortissant de la couche poreuse. Du côté expérimental, on se base sur la vitesse quadratique moyenne de la plaque  $\langle v \rangle^2$ , définie par

$$\langle v \rangle^2 = \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{2} |v|^2 dS, \quad (3.34)$$

avec  $S$  la surface de la plaque et  $v$  l’amplitude de la vitesse d’un point de la plaque. Elle est calculée par le logiciel *STARStruct* à partir des 25 points de mesures réparties sur toute la plaque. Ces 25 points sont suffisants pour analyser les 3 premiers modes. Pour la simulation, elle est approximée par

$$\langle \bar{v} \rangle^2 \simeq \frac{\omega^2}{2m} \{\bar{w}_n\}^T \{\bar{w}_n\}, \quad (3.35)$$

avec  $\{\bar{w}_n\}$  le vecteur des  $m$  déplacements nodaux de la plaque.

A partir de la vitesse quadratique moyenne, le logiciel calcule les amortissements modaux  $\zeta_g$ . On en déduit les coefficients d’amortissement de la structure  $\eta_g = 2\zeta_g$ . Pour la simulation, les coefficients d’amortissement  $\eta_g$  sont calculés directement à partir des puissances dissipées et réactives (détails au chapitre 4). On utilise aussi l’indicateur  $D_{cp}$  qui exprime le pourcentage de puissance dissipée par effet visqueux relativement à la puissance dissipée totale dans le matériau poreux (cf. chapitre 4). Les pertes par effet thermique étant faibles, cet indicateur permet de comparer l’importance relative des dissipations d’origine visqueuse et structurale.

### 3.3.2 Plaque seule

Dans un premier temps, on a vérifié que les fréquences des modes de la plaque concordaient avec les valeurs théoriques, obtenues avec les caractéristiques standard de l’aluminium, soit  $E_{alu} = 6.8 \times 10^{10}$  Pa,  $\nu_{alu} = 0.33$ , et une masse volumique mesurée,  $\rho_{alu} = 2770$  kg m<sup>-3</sup>. Une légère dispersion des fréquences inférieures à 4% est observée en prenant des caractéristiques identiques pour les trois modes (tableau 3.6). Ceci montre que la condition d’appui simple est bien approximée.

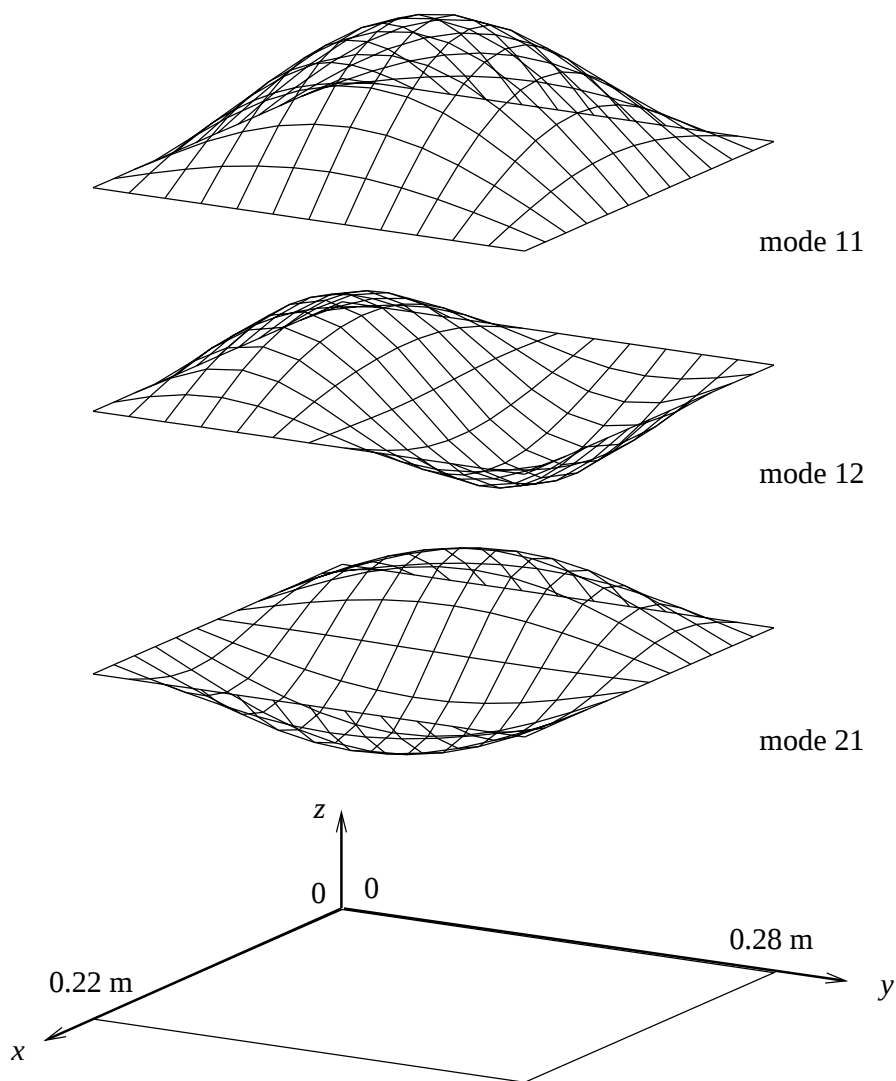


FIG. 3.23: Allure des trois premiers modes de la plaque simplement appuyée.

Cependant pour s'assurer que nos conclusions futures ne soient pas biaisées par cette légère dispersion, trois modules d'Young et coefficients d'amortissement recalés seront utilisés dans les simulations (tableau 3.6).

| Mode                         | 11     | 12     | 21     |
|------------------------------|--------|--------|--------|
| Fréquence théorique (Hz)     | 94     | 201    | 267    |
| Fréquence expérimentale (Hz) | 97     | 202    | 275    |
| Modules d'Young ajustés (Pa) | 7.0e10 | 6.6e10 | 6.9e10 |
| Coefficients d'amortissement | 0.007  | 0.016  | 0.004  |

TAB. 3.6: Comparaisons des fréquences théoriques et expérimentales des trois premiers modes de la plaque nue; modules d'Young et coefficients d'amortissement recalés.

### 3.3.3 Plaque + couche poreuse

Avant d'effectuer un nouveau collage, on pouvait vérifier que les fréquences naturelles de la plaque nue étaient inchangées.

#### Caractéristiques des mousses

Les différents paramètres des matériaux ont été mesurés comme décrit à la section 3.1 et sont présentés dans le tableau 3.7. Les modules d'Young ont été déterminés par une inversion approchée ; les matériaux étant anisotropes, on a trois modules d'Young différents correspondant à chaque direction.

| Matériau | $\phi$ | $\sigma$<br>( $Nm^{-4}s$ ) | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$<br>( $\mu m$ ) | $\Lambda'$<br>( $\mu m$ ) | $\rho_1$<br>( $kg\ m^{-3}$ ) | $\eta_s$ | $\nu$ | $E_x$<br>(kPa) | $E_y$<br>(kPa) | $E_z$<br>(kPa) |
|----------|--------|----------------------------|-----------------|--------------------------|---------------------------|------------------------------|----------|-------|----------------|----------------|----------------|
| B        | 0.98   | 3 000                      | 1.2             | 220                      | 490                       | 30                           | 0.12     | 0.3   | 250            | 180            | 430            |
| C        | 0.97   | 13 000                     | 1.5             | 60                       | 180                       | 42                           | 0.11     | 0.3   | 105            | 125            | 135            |

TAB. 3.7: Caractéristiques des matériaux.

Etant donnée la nature des contraintes subies par la couche poreuse, il est possible de déterminer un module d'Young pour chaque mode (cf. tableau 3.8). En effet, pour le mode 12 (2 demi-longueurs d'onde selon l'axe  $y$  et une selon l'axe  $x$ ), les contraintes ont lieu principalement selon l'axe  $y$ . Ainsi le module d'Young  $E_y$  est choisi. De même,  $E_x$  est choisi pour le mode 21 et un module entre  $E_x$  et  $E_y$  pour le mode 11.

| $E$ (kPa) | 11  | 12  | 21  |
|-----------|-----|-----|-----|
| B         | 215 | 180 | 250 |
| C         | 115 | 125 | 105 |

TAB. 3.8: Modules d'Young des matériaux B et C, choisis pour chaque mode.

Dans l'hypothèse des contraintes nulles selon la directions  $z$ , le module d'Young  $E_z$  n'intervient pas. De même, le coefficient de Poisson ne joue pas un rôle significatif : pour la mousse la plus rigide (matériau B), une variation du coefficient de Poisson de 0.3 à 0.45 entraîne une augmentation des fréquences de résonance pour la structure, inférieure à 1%. Il est donc pris à 0.3 par défaut.

#### Résultats numériques

**Le maillage** a fait l'objet d'une attention particulière étant donnée la convergence assez lente des indicateurs liés à la dissipation (chapitre 2). Un maillage de  $12 \times 12 \times 6$  éléments hexaédriques linéaires pour la couche poreuse représente un bon compromis entre précision et temps de calcul pour les trois premiers modes. L'écart avec un maillage de  $24 \times 24 \times 8$  éléments est de moins d'1 Hz pour les fréquences de résonance, de l'ordre de 5 à 20% sur le coefficient d'amortissement, de l'ordre de 10% sur la puissance dissipée. Le temps de calcul est de 4.5 minutes par fréquence, soit près de 5 heures pour une soixantaine de points, avec le solveur itératif.

La plaque, maillée par  $12 \times 12$  éléments quadrangulaires, est excitée par une force ponctuelle harmonique d'amplitude 1 N (figure 3.24).

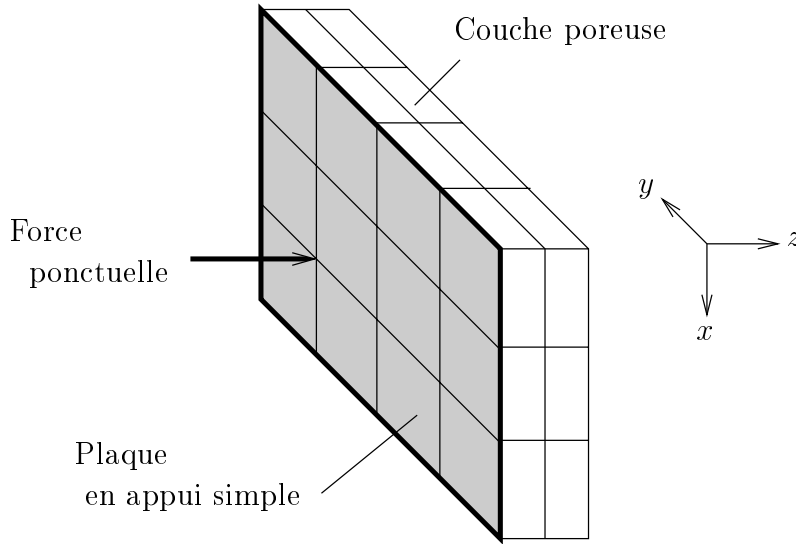


FIG. 3.24: Allure du maillage de la configuration “plaque-poreux”.

Les conditions de couplage entre les deux sous-domaines sont décrites à la section 1.3.3 : elles assurent la continuité des déplacements de la plaque et du squelette, et des déplacements normaux de la plaque et du fluide. La condition aux limites extérieures des deux sous-domaines est une condition d’impédance nulle : cela revient à négliger le couplage avec le fluide environnant. Du point de vue vibratoire, cette approximation est couramment rencontrée pour une structure immergée dans un fluide léger. Du point de vue du poreux, cette condition diffère beaucoup de l’impédance de rayonnement. Cependant, comme elle impose moins de contrainte sur le fluide présent dans les pores, on peut penser qu’il pourra circuler plus librement, ce qui doit légèrement favoriser la dissipation par effet visqueux. Cette hypothèse resterait à confirmer par comparaison à un calcul incluant le rayonnement du poreux, non implanté à ce jour dans PHÉNIX.

**Comparaison mesures-simulations** La figure 3.25 présente les vitesses quadratiques mesurées et simulées, respectivement pour les mousses B et C. Les résultats correspondants sont présentés également dans le tableau 3.9 . En plus du calcul avec éléments poroélastiques, nous présentons un calcul fait à partir d’éléments monophasiques équivalents : leurs caractéristiques mécaniques  $E_s$  et  $\nu_s$  sont celles du squelette,

$$E_s = E, \quad \nu_s = \nu, \quad (3.36)$$

et leur densité  $\rho_s$  est celle du matériau poreux comprenant l’air,

$$\rho_s = \rho_1 + \phi \rho_0. \quad (3.37)$$

En comparant les deux calculs, on peut voir directement l’influence des couplages dans le matériau poreux sur la vitesse quadratique moyenne.

Les résultats sont globalement satisfaisants. On peut cependant noter que les fréquences de résonance obtenues par simulation sont inférieures de 4 à 10% à celles mesurées. Par ailleurs, la différence entre les fréquences obtenues avec les éléments de solide équivalent et ceux de BIOT est inférieure à 1 Hz : l’influence de la phase fluide est négligeable en terme de raideur ajoutée. On remarque

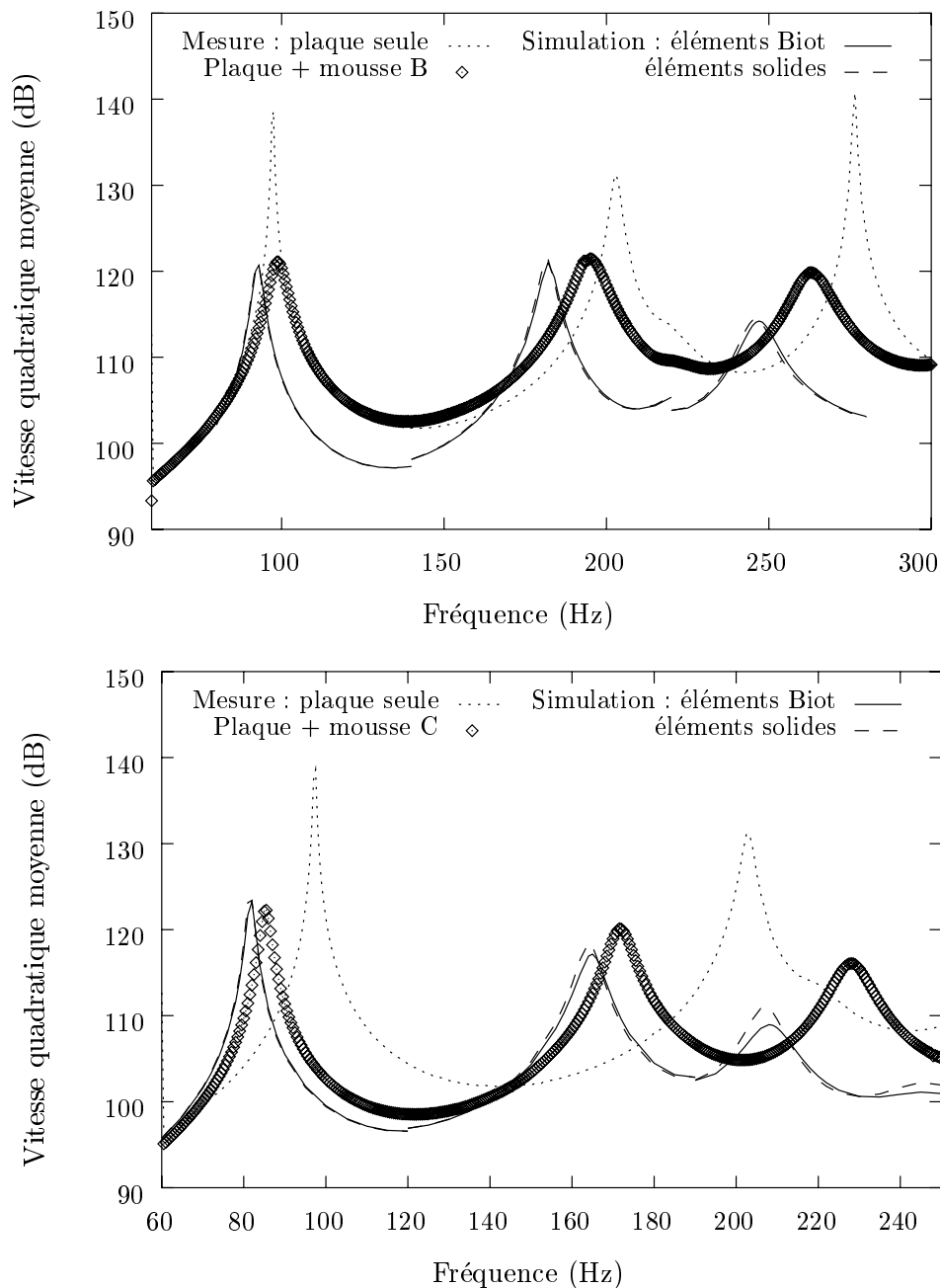


FIG. 3.25: Comparaison mesures-simulations pour la plaque amortie par la mousse B et C. *Les discontinuités des courbes obtenues par simulation sont dues à l'utilisation de modules d'Young différents pour chaque mode (cf. tableaux 3.6 et 3.8).*

d'autre part qu'avec le matériau B, l'amortissement est légèrement sous-estimé. Ces sous-estimations en fréquence et en amortissement peuvent s'expliquer par le fait que l'accroissement du module d'Young en fonction de la fréquence n'est pas pris en compte. Une augmentation du module d'Young permettrait en effet d'obtenir des fréquences de résonance plus élevées et de favoriser l'influence de l'amortissement structural du squelette sur la plaque.

Ces observations sont aussi valables pour le matériau C. Cependant pour les modes 12 et 21, l'amortissement est surévalué. Ce matériau étant plus résistif, la dissipation visqueuse prend une part plus importante, atteignant 26%. On peut alors supposer que cette surestimation est liée à la condition d'impédance nulle aux limites du poreux, laquelle a tendance à faciliter le mouvement relatif fluide-squelette.

| Mode                | 11       | 12        | 21         |
|---------------------|----------|-----------|------------|
| <i>Matériau B</i>   |          |           |            |
| $f_r$ Exp. (Hz)     | 99       | 195       | 263        |
| $f_r$ Biot (Hz)     | 93 (-6%) | 182 (-7%) | 247 (-6%)  |
| $f_r$ Sol. éq. (Hz) | 93       | 182       | 246        |
| $\eta_g$ Exp.       | 0.055    | 0.050     | 0.046      |
| $\eta_g$ Biot       | 0.037    | 0.038     | 0.040      |
| $D_{cp}$ (%)        | 2%       | 7%        | 10%        |
| <i>Matériau C</i>   |          |           |            |
| $f_r$ Exp. (Hz)     | 85       | 172       | 228        |
| $f_r$ Biot (Hz)     | 82 (-4%) | 165 (-4%) | 208 (-10%) |
| $f_r$ Sol. éq. (Hz) | 82       | 164       | 208        |
| $\eta_g$ Exp.       | 0.031    | 0.037     | 0.042      |
| $\eta_g$ Biot       | 0.027    | 0.047     | 0.055      |
| $D_{cp}$ (%)        | 11%      | 18%       | 26%        |

TAB. 3.9: Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour la configuration “plaque-poreux”.

### 3.4 Conclusion du chapitre 3

Les différentes configurations expérimentales étudiées ont permis de valider :

- la détermination des paramètres de couplage et leur prise en compte dans le modèle de BIOT généralisé,
- l'élément poroélastique isotrope, parallèlement à la détermination des paramètres mécaniques du squelette, supposé isotrope.

La description isotrope du squelette reste limitée car elle permet pas une description complète du tenseur élastique, le matériau n'étant pas réellement isotrope. L'usage de ce modèle pseudo-isotrope, en fait, nécessite une attention particulière quant à la nature des contraintes exercées sur le matériau. La description isotrope transverse est censée fournir une meilleure description. Cependant le même problème se pose si le matériau n'est pas réellement axisymétrique : les améliorations escomptées n'ont pu être obtenues. La description isotrope transverse est donc encore trop limitative : il faudrait procéder à une inversion basée sur une loi de comportement plus complète, telle qu'orthotrope qui est réalisable à partir de la manipulation actuelle.

D'autre part, on observe une légère sous-estimation des fréquences de résonance dans tous les cas, et de l'amortissement ajouté dans la cas “plaque-poreux”. La prise en compte de l'accroissement du module d'Young en fonction de la fréquence permettrait d'obtenir de meilleurs résultats. Cela

nécessiterait d'étendre les mesures des propriétés mécaniques au delà de 100 Hz, limite actuellement observée pour rester en régime quasistatique.

Enfin, l'hypothèse d'impédance nulle à la périphérie du milieu poreux semble trop approximative lorsque les effets visqueux ne sont plus négligeables. Une meilleure prise en compte du milieu environnant est envisageable par le biais d'une impédance (impédance caractéristique de l'air, impédance de rayonnement) ou d'éléments de frontière.



## Chapitre 4

# Analyse du comportement des matériaux poreux

### 4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'intérêt des éléments poroélastiques pour l'analyse de structures comportant des matériaux poreux.

Premièrement, nous passons en revue les structures typiquement étudiées dans la littérature, en soulignant le type d'information tirée de l'usage des éléments poroélastiques. Ce préambule montrera l'absence d'outil d'analyse des sources de dissipation dans les matériaux poreux.

Par la suite, nous présentons l'implantation d'un tel outil, basé sur la répartition des puissances dissipées et réactives dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques. Son intérêt est démontré dans le cadre d'une étude de la configuration "plaque-poreux". Ainsi, la détermination des phénomènes dissipatifs prépondérants permettra d'élaborer un modèle simplifié de plaque équivalente. Cette deuxième partie du chapitre est présentée sous forme d'un article soumis à *Journal of Sound and Vibration* (DAUCHEZ et coll. , 1999b). Certains résultats ont été préalablement publiés dans les actes de deux congrès (DAUCHEZ et coll. , 1998a-b).

### 4.2 Revue bibliographique

Dans un premier temps, les auteurs démontrent que le recours à des éléments poroélastiques est nécessaire dans les applications où la dimension finie joue un rôle significatif (figure 4.1).

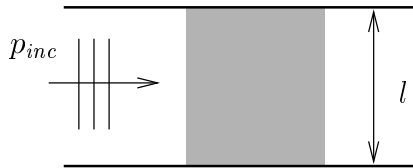


FIG. 4.1: Couche poreuse de dimension latérale  $l$ .

KANG et BOLTON (1995), JOHANSEN et coll. (1995), PANNETON et ATALLA (1997) et VIGRAN et coll. (1997a) montrent l'influence des conditions aux limites sur la mesure de l'impédance d'un échantillon poreux en conduit, lorsque le mouvement du squelette est significatif. COYETTE et coll. (1995) montrent la réduction de la perte par transmission d'un tri-couche encastré à sa fréquence

de résonance. Ces phénomènes liés aux dimensions latérales finies des structures ne peuvent pas être simulés par un modèle d'extension latérale infinie.

Dans un deuxième temps, des études basées sur les modèles numériques voient le jour. Un premier type d'application concerne la transmission à travers une double paroi garnie de matériau poreux (figure 4.2).

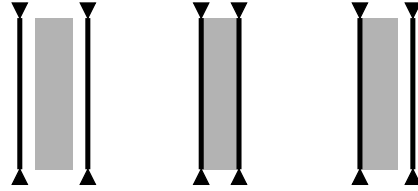


FIG. 4.2: Double paroi garnie de matériau poreux, collé ou non à chacune des parois.

KANG et BOLTON (1996) comparent les cas où le poreux est collé ou décollé des deux parois. Dans le cas collé, la transmission est plus grande hors résonance à cause de la transmission directe via le squelette du poreux. Dans tous les cas, la transmission aux résonances est réduite par la présence du poreux. PANNETON et ATALLA (1996a) étudient les mêmes configurations pour deux types de matériaux : une mousse polymère au squelette rigide et amorti, une laine de verre souple et peu amortie. Ils montrent que le cas collé-décollé avec la mousse est globalement le plus performant : en basses fréquences, on profite de l'effet de raideur ajoutée sans pâtir de la transmission directe à travers le squelette en hautes fréquences. GÖRANSON (1998) étudie aussi ces différentes configurations, à titre démonstratif de la méthode exposée : aucune attention n'a été portée au maillage de la structure. Cependant les mêmes tendances sont observées.

Une autre application concerne l'étude de l'effet d'un traitement poroélastique sur une plaque couplée à une cavité (figure 4.3) (PANNETON et ATALLA ,1996b).

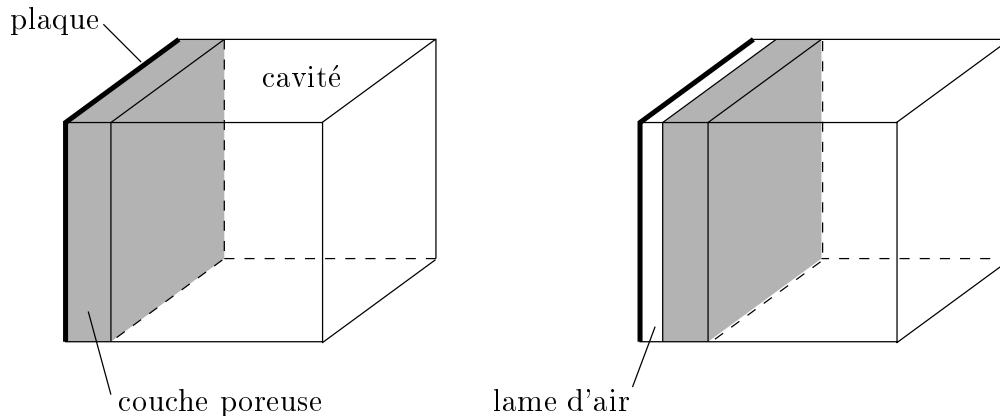


FIG. 4.3: Plaque couplée à une cavité avec matériau poreux (PANNETON et ATALLA ,1996b).

Deux types de matériaux, laine de verre souple et mousse polymère, sont testés. La couche poreuse est soit collée à la plaque ou séparée par une lame d'air. L'indicateur choisi est la perte par insertion globale sur la bande 0-500 Hz. Le cas le plus efficace est celui obtenu avec la mousse collée à la plaque,

grâce au fort coefficient d'amortissement du squelette ( $\eta_s=0.3$ ). Lorsque le matériau est décollé de la plaque, les bons résultats sont dus à l'absorption acoustique favorisée par la présence de la lame d'air. Dans tous les cas, la première résonance de cavité s'est trouvée fortement atténuée par la présence du poreux.

Enfin une étude de conduit rigide garni de matériau poreux (figure 4.4)) montre que l'atténuation de l'onde se propageant dans le conduit décroît à mesure que la raideur du squelette diminue (EASWARAN et coll. , 1996). Les auteurs montrent aussi qu'en basses fréquences un modèle à réaction localisée suffit.

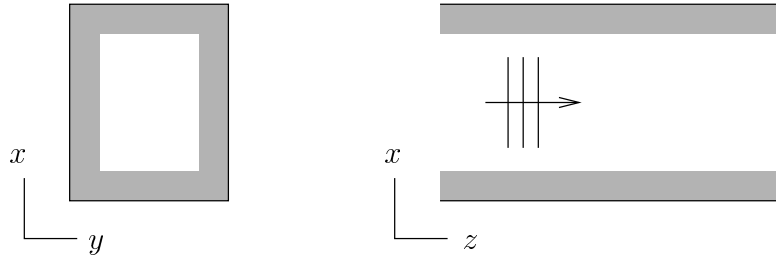


FIG. 4.4: Conduit avec parois garnies de matériau poreux (EASWARAN et coll. , 1996).

Bien que les études présentées ci-dessus fournissent des informations pertinentes, elles se limitent à l'interprétation de résultats globaux issus de cas particuliers. Elles ne permettent pas de dégager des tendances générales, car l'analyse des phénomènes physiques mis en jeu n'est pas systématique. Il apparaît donc que le développement d'outils permettant une telle analyse est nécessaire.

### 4.3 Comportement d'une couche poreuse collée à une plaque

L'article présenté ci-après comporte trois parties. Premièrement, nous exposons le calcul des différents termes de puissances dissipée et réactive au sein d'une structure couplant un milieu élastique et un milieu poroélastique. Cette répartition permet notamment de quantifier l'influence des différents mécanismes de dissipation – visqueux, thermique, viscoélastique – et d'exprimer le coefficient d'amortissement global de la structure.

Cette répartition est utilisée pour étudier la configuration “plaque-poreux”, pour laquelle on s'intéresse à l'amortissement des vibrations de la plaque. Deux questions sont posées : quelle source de dissipation contribue le plus à amortir les vibrations de la plaque, et comment optimiser cet amortissement ?

Cette analyse permet de dégager des hypothèses simplificatrices quant au comportement du poreux, pour élaborer un modèle fournissant les caractéristiques d'une plaque équivalente. Ce modèle intègre l'influence de la couche poreuse sur la vibration de la plaque. Il permet de se passer des éléments poroélastiques, coûteux en temps de calcul.

# DISSIPATION MECHANISMS IN A POROUS LAYER BONDED ONTO A PLATE

N. DAUCHEZ\*, S. SAHRAOUI\* and N. ATALLA†

\* *Laboratoire d'Acoustique UMR CNRS 6613 - Université du Maine - 72000 Le Mans - FRANCE*

† *Groupe d'Acoustique et Vibrations - Université de Sherbrooke J1K 2R1 (QC) - CANADA*

Behavior of a poroelastic material bonded onto a vibrating plate is investigated. The goal is to understand dissipation mechanisms within the porous layer in order to optimize damping. This analysis is based on a 3-D finite element formulation including poroelastic elements. First, dissipated powers related to thermal, viscous and viscoelastic dissipation are explicated. Then a generic configuration (simply supported aluminium plate with a bonded porous layer and mechanical excitation) is studied. Thermal dissipation is found negligible. Viscous dissipation can be optimized as a function of air flow resistivity. It can be the major phenomenon within soft materials, but for most foams viscoelastic dissipation is dominant. Consequently an equivalent plate model is proposed. It includes shear in the porous layer and only viscoelasticity of the skeleton. Good agreement is found with the full numerical model.

## 1. INTRODUCTION

Porous materials like polymer foam and glass wool are widely used for noise control in several engineering activities such as aeronautics and automotive industries. Their properties are twofold : sound absorption and damping of the nearby structure. In the literature, the efficiency of porous material is shown in applications dealing with transmission loss of panels<sup>1,2</sup> or noise in enclosure coupled with elastic panels<sup>3,4</sup>. Some are based on finite element calculations including poroelastic elements<sup>1,3</sup> : damping effect is shown for various boundary conditions and materials, but no general tendencies is drawn about the nature of dissipation. Other reports give analytical predictions<sup>5,6</sup> of the importance of viscous dissipation induced by the vibration of the skeleton, but they are approximative and limited to 1-D or 2-D applications.

The present analysis is based on a partition of dissipated and reactive powers in poroelastic media, as similarly proposed by Rasolofosaon<sup>7</sup>. In order to treat any 3-D structure, the calculation relies on a 3-D finite element formulation<sup>8</sup> with poroelastic elements including the generalized Biot theory<sup>9</sup>. Well suited for low frequency range analysis, this formulation has been validated for various applications<sup>8,10</sup>. A comparison of the different terms of dissipated power gives the relative importance of dissipation mechanisms : viscous, thermal or viscoelastic. The analysis is performed on a structures comprising a simply supported plate associated with a porous layer (figure 1). The influence of its thickness, stiffness and air flow resistivity is studied. Excitation is achieved by a point force on the plate. Finally this analysis leads to the derivation of a simplified model giving characteristics of an equivalent plate to the two layers structure. This model provides an efficient alternative to the Biot model accounting for

mass, stiffness and damping added on the plate. Moreover it gives a significant reduction of memory requirement and computation time.

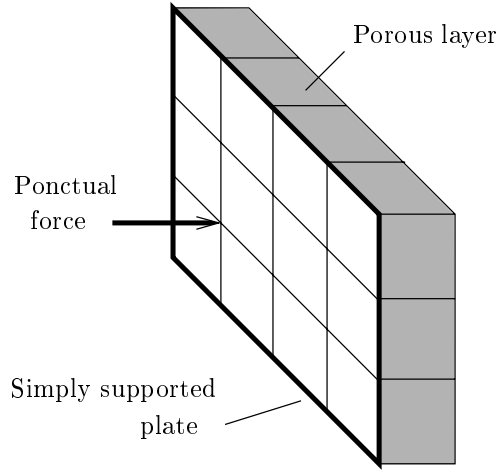


Figure 1: Simply supported plate with a bonded porous layer and mechanical excitation.

## 2. POWER PARTITION

The discretized motion equation of the two layer system is given by Panneton<sup>8</sup>

$$\begin{bmatrix} [Z_e] & 0 \\ 0 & [Z_p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{u\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = \{F\}, \quad (1)$$

where  $[Z_e]$  and  $[Z_p]$  are respectively the impedance matrix related to the elastic and poroelastic media.  $\{F\}$  is the vector of nodal forces, applied to the elastic and poroelastic media.  $\{w\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{U\}$  are the complex amplitude of the nodal displacements, respectively, of the plate, the skeleton and the air comprised in the pores. In the case where the porous material is bonded onto the plate, there is a continuity of the displacements at the interface

$$u = w, \quad U_n = u_n, \quad (2)$$

where subscript  $n$  denotes normal displacement. These linear relations are applied by multiplication with a contraction matrix.

Harmonic time dependence of the form  $e^{j\omega t}$  is assumed so that instantaneous quantities are expressed as

$$a(t) = \Re(a e^{j\omega t}), \quad (3)$$

where  $a$  is complex amplitude. Instantaneous input power  $\mathcal{P}(t)$  of the discretized system is the product of the instantaneous velocities by the instantaneous input forces,

$$\mathcal{P}(t) = \left\langle \langle \dot{w}(t) \rangle, \langle \dot{u}(t) \rangle, \langle \dot{U}(t) \rangle \right\rangle \{ \mathcal{F}(t) \}, \quad (4)$$

where symbols  $\langle \rangle$ ,  $\{ \}$  and  $\dot{\phantom{x}}$  denote respectively line and column vector, and time derivation. This instantaneous power can be decomposed in two components related to power absorbed by the structure and energy exchanged between the excitation and the structure, such as

$$\mathcal{P}(t) = D (1 + \cos 2(\omega t + \varphi)) + R \sin 2(\omega t + \varphi). \quad (5)$$

The mean power dissipated during one cycle  $D$  and the amplitude of the reactive power  $R$  derive from the complex power  $P$ , given by

$$P = \frac{1}{2} j \omega \langle \langle w^* \rangle, \langle u^* \rangle, \langle U^* \rangle \rangle \{ F \} \quad (6)$$

$$= D + j R, \quad (7)$$

where  $*$  denotes a complex conjugate quantity. Using equation (1), complex power can be rewritten of the form

$$P = \frac{1}{2} j \omega \langle \langle w^* \rangle, \langle u^* \rangle, \langle U^* \rangle \rangle \begin{bmatrix} [Z_e] & 0 \\ 0 & [Z_p] \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} w \\ u \\ U \end{Bmatrix} \right\}, \quad (8)$$

depending only on the uncoupled impedance matrix, and on the solution of the global system accounting for interface continuity. For the plate, impedance matrix

$$[Z_e] = [K_e] - \omega^2 [M_e], \quad (9)$$

comprises a real mass matrix  $[M_e]$  and a complex stiffness matrix  $[K_e]$  accounting for various loss phenomena, such as structural dissipation, acoustic radiation, loss through boundary conditions. Impedance matrix of the poroelastic media is given by Panneton<sup>8</sup>

$$[Z_p] = [K_p] + j \omega [C_p] - \omega^2 [M_p]. \quad (10)$$

This matrix comprises a real mass matrix  $[M_p]$ , a complex viscous loss matrix  $[C_p]$  and a complex stiffness matrix

$$[K_p] = \begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sf}]^T \\ [K_{sf}] & [K_{ff}] \end{bmatrix}, \quad (11)$$

where  $[K_{ss}]$  is the complex stiffness matrix of the solid phase, accounting for structural dissipation.  $[K_{sf}]$  and  $[K_{ff}]$  are complex matrix related respectively to elastic coupling and bulk modulus of the fluid phase. They account for thermal losses from fluid to skeleton.

Using equations (8-11), complex power can be split in several terms, such as

$$P = D_{ke} + D_{ks} + D_{kf} + D_{cp} + j(R_{ke} + R_{kp} + R_{me} + R_{mp}), \quad (12)$$

where  $R_{ke}$  and  $R_{kp}$  are elastic reactive powers of the plate and porous media.  $R_{me}$  and  $R_{mp}$  are inertial reactive powers of the plate and porous media.  $D_{ke}$ ,  $D_{ks}$ ,  $D_{kf}$  and  $D_{cp}$  are dissipated powers related to initial damping of the plate, structural, thermal and viscous dissipations within the porous

material. Their expressions are

$$R_{ke} = \frac{1}{2} \Im(j\omega \langle w^* \rangle [K_e] \{w\}), \quad (13)$$

$$R_{kp} = \frac{1}{2} \Im(j\omega \langle \langle u^* \rangle, \langle U^* \rangle \rangle [K_p] \left\{ \begin{matrix} u \\ U \end{matrix} \right\}), \quad (14)$$

$$R_{me} = \frac{1}{2} \Im(-j\omega^3 \langle w^* \rangle [M_e] \{w\}), \quad (15)$$

$$R_{mp} = \frac{1}{2} \Im(-j\omega^3 \langle \langle u^* \rangle, \langle U^* \rangle \rangle [M_p] \left\{ \begin{matrix} u \\ U \end{matrix} \right\} - j\omega^2 \langle \langle u^* \rangle, \langle U^* \rangle \rangle [C_p] \left\{ \begin{matrix} u \\ U \end{matrix} \right\}), \quad (16)$$

$$D_{ke} = \frac{1}{2} \Re(j\omega \langle w^* \rangle [K_e] \{w\}), \quad (17)$$

$$D_{ks} = \frac{1}{2} \Re(j\omega \langle u^* \rangle [K_{ss}] \{u\}), \quad (18)$$

$$D_{kf} = \frac{1}{2} \Re(j\omega \langle \langle u^* \rangle, \langle U^* \rangle \rangle \begin{bmatrix} 0 & [K_{sf}]^T \\ [K_{sf}] & [K_{ff}] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u \\ U \end{matrix} \right\}), \quad (19)$$

$$D_{cp} = \frac{1}{2} \Re(-j\omega^2 \langle \langle u^* \rangle, \langle U^* \rangle \rangle [C_p] \left\{ \begin{matrix} u \\ U \end{matrix} \right\}). \quad (20)$$

A global loss factor  $\eta_g$  can be calculated for the whole structure. It is expressed as the ratio of total dissipated power over the elastic reactive power of the structure

$$\eta_g = \frac{D_{ke} + (D_{ks} + D_{kf} + D_{cp})}{R_{ke} + R_{kp}}. \quad (21)$$

When evaluated for a given mode shape, this expression is consistent with modal loss factor. Modal loss factors are obtained when the structure is excited at eigenfrequencies.

### 3. DISSIPATION MECHANISMS

Among the three dissipation mechanisms occurring within the porous layer, thermal dissipation has been found negligible for various porous materials and thicknesses. Then, only structural and viscous dissipations are relevant. The relative importance of these two mechanisms is analyzed by varying the related parameters.

Structural dissipation induced by the porous layer on the plate is function of the structural loss factor  $\eta_2$  and the Young's modulus  $E_2$  of the skeleton. It is studied for two couples  $(E_2, \eta_2)$ , corresponding to a soft material ( $E_2=60$  kPa,  $\eta_2=0.07$ ) and one of the most stiff and dissipative polymer foam ( $E_2=400$  kPa,  $\eta_2=0.15$ ). The loss factor of the plate is set to 0.01 to account for various dissipation phenomena such as structural damping, acoustic radiation, losses through boundary.

In the low frequency range, viscous dissipation is mainly related to flow resistivity  $\sigma$  of the material. In order to determine its influence, it is varied from  $10^3$  to  $10^8$  Nsm $^{-4}$ . Viscous characteristic length  $\Lambda$  varies as well so that the form factor  $M$  is kept constant. The ratio between thermal and viscous characteristic lengths is fixed to 2.5. In such conditions, the intrinsic geometry of the skeleton is kept realistic. The other parameters are fixed and correspond to usual foam or glass wool characteristics : porosity  $\phi=0.98$ , tortuosity  $\alpha_\infty=1.3$  and skeleton density  $\rho_2=40$  kg/m $^3$ . The influence of thickness  $h_2$  of the porous layer is also investigated, being set to 2 cm or 5 cm.

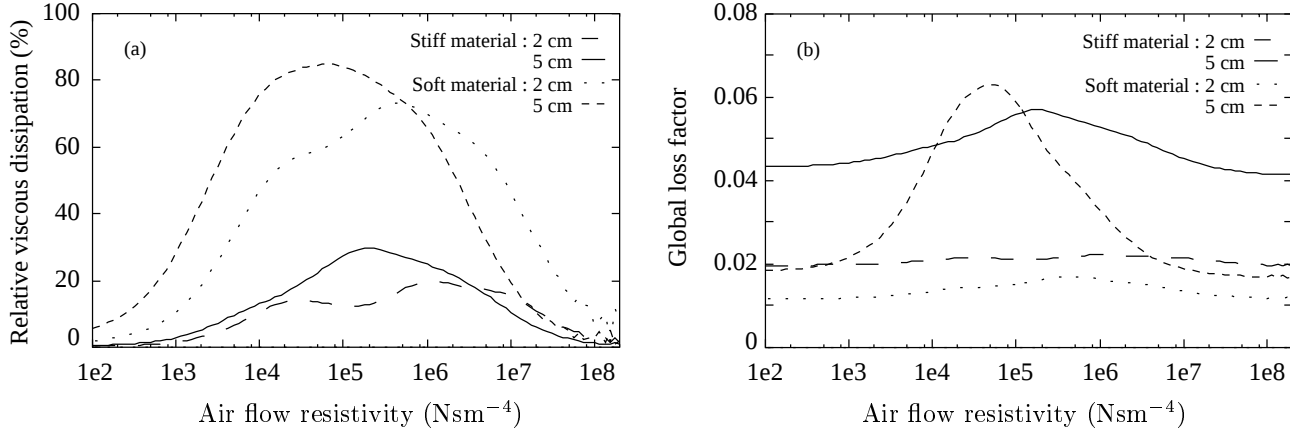


Figure 2: Percentage of viscous dissipation in the porous layer (a), loss factor of the multilayer (b), as a function of flow resistivity and thickness.

Figure 2.a presents viscous dissipation relative to total dissipation, as a function of flow resistivity, for the two thicknesses and materials. It is given for the first bending mode ( $65 \text{ Hz} < f_{11} < 68 \text{ Hz}$ ) of the structure. An optimal value of flow resistivity appears for each case. Its location tends to smaller flow resistivity as long as thickness increases. This is consistent with the calculation of Okuno<sup>6</sup>, given for a poroelastic beam undergoing bending deformation

$$\sigma \simeq \frac{\phi K_0}{2.5 h_2^2 f_i}, \quad (22)$$

where  $K_0$  is the bulk modulus of the air and  $f_i$  the eigenfrequency of the  $i^{\text{th}}$  mode. However this expression lowers the location of the maximum by a factor 2 to 8. Relative viscous damping increases with the thickness. It reaches a maximum of 84% for the soft material, being the major dissipating mechanism. However it is limited to 27% for the stiff material : structural damping is the major dissipating mechanism.

Figure 2.b presents global loss factor of the multilayer. For very low air flow resistivity, this factor depends only on the structural damping and of the thickness of the porous layer. For a thickness of 2 cm, only rigid polymer foam adds a significant amount of damping. For limp material, damping becomes significant for a thicker layer and only where the viscous dissipation is important : a maximum loss factor of 6% is then reached with 5 cm. However, according to Okuno<sup>6</sup>, the optimized value of air flow resistivity depends on the frequency : it is not suitable for a large frequency range.

The most efficient way to optimize damping is then to use a material with the most dissipative and stiff skeleton. In that case, the amount of added damping is no more dependent on frequency and air flow resistivity, because relative viscous dissipation tends to zero.

#### 4. EQUIVALENT PLATE MODEL

For an efficient treatment, only the skeleton behavior is relevant. The porous layer can be considered as a monophasic viscoelastic media and characteristics of an equivalent plate to the two layer

structure can be determined. Development of such an equivalent plate is interesting for design purposes and to reduce numerical calculation time and memory requirement.

The two layers are characterized by Young's modulus  $E_1$  and  $E_2$ , Poisson's ratios  $\nu_1$  and  $\nu_2$ , densities  $\rho_1$  and  $\rho_2$  and thicknesses  $h_1$  and  $h_2$ . Subscript 1 refers to the plate and 2 to the porous layer.

For pure bending deformation of the structure, the equivalent plate parameters can be calculated from Ross-Kerwin-Ungar (RKU) theory<sup>11</sup> of multilayer plate. Total bending rigidity  $D_{12}$  is simply the sum of bending rigidities  $D_1$  and  $D_2$  of the two layers related to the neutral fiber of the plate,

$$D_{12} = D_1 + D_2, \quad (23)$$

where  $D_1$  and  $D_2$  are given in appendix by equations (44) and (45). The equivalent density is given by

$$\rho_{12} = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2}. \quad (24)$$

However RKU theory overestimates the equivalent loss factor in comparison with numerical calculation, for a relatively thick layer (figure 4.b). This shows that porous layer, past a certain thickness, do not exhibit a pure bending deformation.

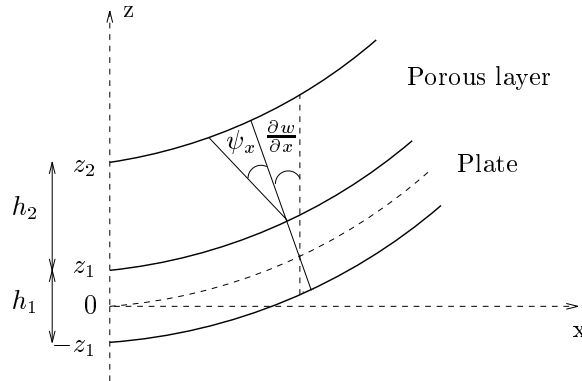


Figure 3: Geometry of the two layer plate with shear.

A more accurate model is achieved by taking into account shear strain in the porous layer. The geometry of the problem is described in figure 3. Hamilton's principle is used to get the equation of motion of the two layer plate.

Classical thin plate theory is used for the plate. Only calculation related to the porous layer are exposed. For the porous layer, displacement vector  $\{u\}^T = \langle u, v, w \rangle$  of a particle is assumed to be

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} - (z - z_1) \psi_x, \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y} - (z - z_1) \psi_y, \\ w(x, y, t) = w, \end{cases} \quad (25)$$

where  $w$  is the deflection of the plate,  $\psi_x$  and  $\psi_y$  deviation angles due to shear strain. The components

of the strain tensor  $\{\epsilon_2\}^T = \langle \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rangle$  are

$$\begin{cases} \epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (z - z_1) \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (z - z_1) \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - (z - z_1) \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\ \gamma_{xz} = -\psi_x, \\ \gamma_{yz} = -\psi_y. \end{cases} \quad (26)$$

Stress-strain relations are given by

$$\{\sigma_2\} = [H_2] \{\epsilon_2\} \quad (27)$$

where  $\{\sigma_2\} = \langle \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \rangle$  is the stress tensor and  $[H_2]$  is the viscoelastic tensor for a bidimensional isotropic material

$$[H_2] = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & & & \\ \nu_2 & 1 & & & \\ & & \frac{1-\nu_2}{2} & & \\ & & & \frac{1-\nu_2}{2} & \\ & & & & \frac{1-\nu_2}{2} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Strain energy  $V$  of the multilayer is the sum of bending strain energy of the plate, bending and shear strain energies of the porous layer

$$V = V_{bending_1} + V_{bending_2} + V_{shear_2} \quad (29)$$

where,

$$V_{b1} = \frac{1}{2} \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \int_S \int_{-z_1}^{z_1} \langle \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & \\ \nu_1 & 1 & \\ & & \frac{1-\nu_1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dx dy dz, \quad (30)$$

$$V_{b2} = \frac{1}{2} \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \int_S \int_{z_1}^{z_2} \langle \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \rangle \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & \\ \nu_2 & 1 & \\ & & \frac{1-\nu_2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dx dy dz, \quad (31)$$

$$V_{s2} = \frac{1}{2} \int_S \int_{z_1}^{z_2} \langle \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rangle \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dx dy dz. \quad (32)$$

$$(33)$$

The kinetic energy of the system is given by

$$T = \frac{1}{2} \int_S m_{12} \dot{w}^2 dS, \quad (34)$$

with the equivalent density

$$m_{12} = \rho_1 h_1 + ((1 - \phi) \rho_s + \phi \rho_0) h_2, \quad (35)$$

where  $\phi$  is the porosity,  $\rho_s$  is the density of the solid comprising the skeleton and  $\rho_0$  is the density of the air.

Applying Lagrange's equations respectively to each variable,  $w$ ,  $\psi_x$  and  $\psi_y$ , and summing the equations related to  $\psi_x$  and  $\psi_y$  gives the two equations of motion

$$D_1 \Delta \Delta w + D_2 \Delta \Delta w + D_4 \Delta \theta + m_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (36)$$

$$D_3 \Delta \theta + D_4 \Delta \Delta w - C_2 \theta = 0, \quad (37)$$

where  $\theta = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$  and  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . For a steady state motion,  $w$  and  $\theta$  are assumed to be of the form

$$w(x, y, t) = w_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t), \quad (38)$$

$$\theta(x, y, t) = \theta_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t), \quad (39)$$

where  $k_x$  and  $k_y$  are wavenumbers associated to the directions  $x$  and  $y$ . They are related to the wavenumber  $k$  by

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (40)$$

If the plate is simply supported and  $a \times b$  sized, its modes  $(r_a, r_b)$  correspond to

$$k_x = \pi \frac{r_a}{a} \quad \text{and} \quad k_y = \pi \frac{r_b}{b}. \quad (41)$$

The dispersion equation of the system (36 - 37) can then be written in the form

$$\omega^2 = k^4 \frac{D_{12}}{m_{12}} C_s(k^2), \quad (42)$$

where  $C_s(k^2)$  is the correction factor of the bending rigidity  $D_{12}$ , accounting for shear, given by

$$C_s(k^2) = 1 - \frac{D_4^2 k^2}{D_{12}(D_3 k^2 + C_2)}. \quad (43)$$

As  $C_s$  is less than 1, shear will lower the resonance frequencies of the system.  $C_s$  depends on the wavenumber, thus on frequency. For a simply supported plate,  $C_s$  can be calculated for discrete values of frequency, corresponding to natural frequencies of the plate, given by equations (41) and (42). However  $C_s$  can be expressed continuously as a function of frequency by solving equation (42) that is a polynomial equation of the third degree on  $k^2$ .

The developed equivalent model and the full numerical model using poroelastic elements are compared in figure 4, in the case of a 5 cm thick layer of the stiff material used before. Characteristics of the equivalent plate are first calculated for the given configuration and frequency range. Then they are introduced as properties of a single plate. It is seen that mean quadratic velocity of the plate and global factor loss are well estimated by the proposed equivalent model. The RKU model is found insufficient for the plate-foam configuration : damping and eigenfrequencies are overestimated.

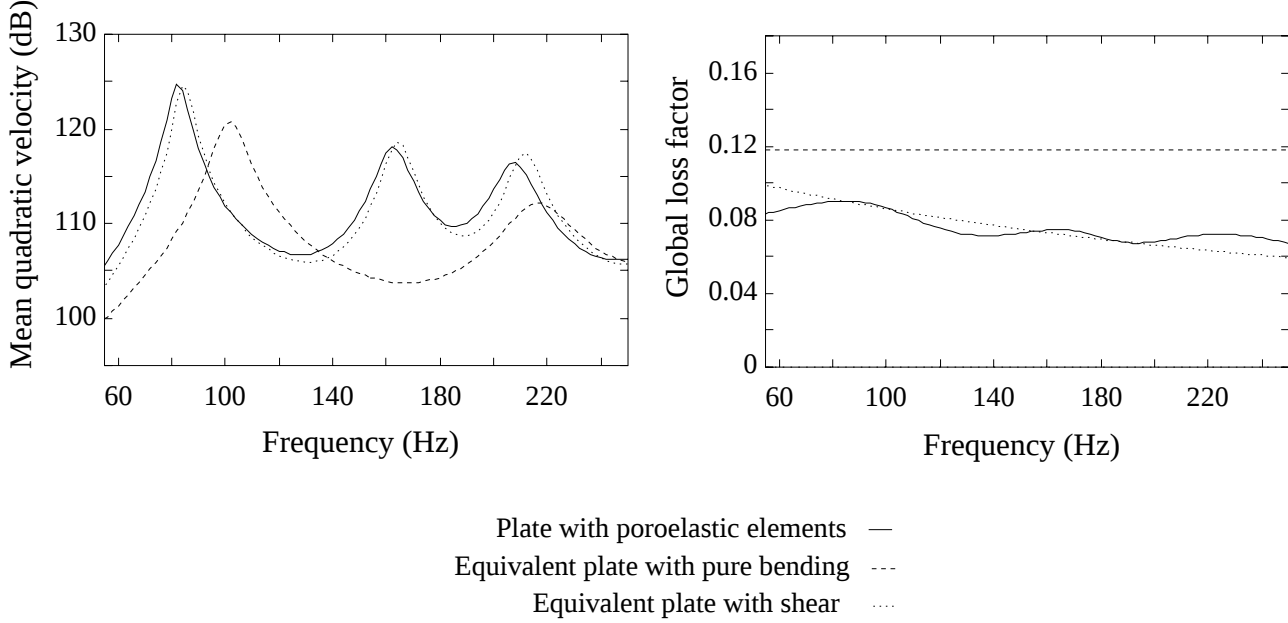


Figure 4: Comparison of equivalent model results with full discretized structure for a 5 cm thick low resistive ( $\sigma = 5000 \text{ Nsm}^{-4}$ ) and stiff ( $E_2=400 \text{ kPa}$ ,  $\eta_2=0.15$ ) foam layer : (a) Mean quadratic velocity of the plate , (b) Global loss factor of the multilayer.

## CONCLUSION

Partition of dissipated and reactive powers is presented according to the 3-D formulation coupling elastic and poroelastic elements. Application to the two layers structure comprising a plate and a porous layer shows that viscous and viscoelastic dissipation dominate. Viscous dissipation can be optimized by choosing a proper flow resistivity : it becomes the major dissipation mechanism within limp materials. However for rigid polymer foams, viscoelastic dissipation in the skeleton is widely dominating. Because viscous dissipation requires tuning of flow resistivity as a function of thickness and frequency, optimizing damping is most efficiently achieved by using the most viscoelastic and stiff porous material. Determination of an optimized flow resistivity is rather connected to sound absorption properties.

Consequently, the effect of the porous layer on the plate can be simply accounted by an equivalent plate model : it includes shear in the porous layer and only viscoelasticity of the skeleton. Good results have been obtained in comparison with the model using poroelastic elements, even for a thick porous layer.

The analysis performed on the two layers structure demonstrated the validity of the method based on power partition. Relying on a 3-D finite element formulation, this approach can be applied to any structure associating acoustic, elastic and poroelastic media. With a best understanding of the behavior of such structures, suitable simplified models can be derived avoiding the use of poroelastic elements, well-known for leading to heavy systems.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to PSA Peugeot Citroën and Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie (Ademe) who have supported this study.

## APPENDIX

$$\begin{aligned}
V_{b1} &= \frac{D_1}{2} \int_S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu_1) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dS, \\
V_{b2} &= \frac{1}{2} \int_S D_2 \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu_2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \\
&\quad + D_3 \left[ \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1 - \nu_2}{2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \right] \\
&\quad + 2D_4 \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \nu_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + (1 - \nu_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] dS,
\end{aligned}$$

with the bending rigidities

$$D_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \int_{-d_1}^{d_1} z^2 dz = \frac{E_1 h_1^3}{12(1 - \nu_1^2)}, \quad (44)$$

$$D_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \int_{d_1}^{d_2} z^2 dz = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \frac{z_2^3 - z_1^3}{3}, \quad (45)$$

$$D_3 = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \int_{d_1}^{d_2} (z - z_1)^2 dz, \quad (46)$$

$$D_4 = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \int_{d_1}^{d_2} z(z - z_1) dz. \quad (47)$$

$$V_{s2} = \frac{1}{2} C_2 \int_S \psi_x^2 + \psi_y^2 dS, \quad (48)$$

with the shear rigidity

$$C_2 = \kappa h_2 \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)}, \quad (49)$$

and  $\kappa$ , accounting for the variation of the shear stresses and strains through the thickness, taken to  $\frac{5}{6}$ .

## REFERENCES

1. R. Panneton and N. Atalla 1996 *Journal of the Acoustical Society of America* **100**, 346-354. Numerical prediction of sound transmission through finite multilayer systems with poroelastic materials.
2. J.S. Bolton, N.M. Shiau and Y.J. Kang 1995 *Journal of Sound and Vibration* **91**, 317-347. Sound transmission through multi-panel structures lined with elastic porous materials
3. N. Atalla and R. Panneton 1996 *Noise Control Engineering Journal* **44**, 235-243. The effects of multilayer sound-absorbing treatments on the noise field inside a plate backed cavity
4. J.S. Mixson and J.F. Wilby 1995 *Aeroacoustics of flight vehicles : theory and practice*. Harvey H. Hubbard (Acoustical Society of America)
5. M.A. Biot 1964 *Transactions of the ASME* **31**, 194-198. Theory of buckling of a porous slab and its thermoelastic analogy
6. A. Okuno and H.B. Kingsbury 1989 *Journal of Applied Mechanics*, **56**, 535-540. Dynamic modulus of poroelastic materials
7. P. N. J. Rasolofosaon 1991 *Journal of the Acoustical Society of America* **89**, 1532-1550. Plane acoustic waves in linear viscoelastic porous media : Energy, particle displacement, and physical interpretation
8. R. Panneton and N. Atalla 1997 *Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 3287-3298. An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics
9. J.F Allard 1993 *Propagation of sound in porous media : modeling sound absorbing materials*. Chapman & Hall, London
10. R. Panneton, 1996 *Doctoral Thesis. Université de Sherbrooke, Canada*. Modélisation numérique tridimensionnelle par éléments finis des milieux poroélastiques
11. D. Ross, E.E. Ungar and Jr E.M. Kerwin 1959 *Structural Damping*, ASME, New-York, 49-88. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate

## 4.4 Conclusion du chapitre 4

Le calcul de répartition des puissances dissipées et réactives au sein d'une structure couplant un milieu élastique et un milieu poroélastique a permis d'analyser le comportement d'une couche poreuse collée à une plaque en flexion. On a montré notamment l'importance de la dissipation viscoélastique liée au squelette pour l'élaboration d'un traitement amortissant efficace. Un modèle de plaque équivalente intégrant uniquement ce type de dissipation et le cisaillement dans la couche poreuse a permis d'obtenir de bon résultats. L'effet du matériau poreux sur la vibration de la plaque est ainsi correctement pris en compte. Cette étude montre de même la validité de la méthode d'analyse basée sur la répartition de la puissance.

Dans le cas d'une application réelle, la structure "plaque-poreux" est couplée au milieu extérieur ou à une cavité. Dans ce cas, l'influence de la couche poreuse sur le champ acoustique doit aussi être prise en compte. Un moyen simple est de coupler la plaque équivalente au milieu fluide par l'intermédiaire de l'impédance mesurée ou simulée de la couche poreuse sur fond rigide (BARDOT, 1992). Nous présentons en annexe C un exemple de substitution des éléments poroélastiques par une plaque équivalente associée à une couche de fluide équivalent.



# Conclusion générale

Ce travail de thèse a fait l'objet d'une critique des éléments poroélastiques tridimensionnels, tels qu'implantés par PANNETON et ATALLA (1997). Les interrogations se formulaient ainsi : comment ces éléments se comportent en terme de convergence, permettent-ils de modéliser des structures réelles, quelles sont leurs limites ? Le travail présenté a permis de répondre à ces questions en dégagant un cadre d'utilisation des ces éléments, leurs points forts et leurs points faibles.

Du point de vue de la convergence en dynamique, ces éléments se comportent comme des éléments monophasiques classiques (solide élastique) eu égard aux longueurs d'onde de BIOT. Cependant pour des déformations complexes, telle que la flexion, la convergence est plus lente qu'avec des éléments monophasiques. Hormis le problème de blocage qui touche les éléments tridimensionnels en flexion, on a observé que la convergence de la phase solide est ralentie par la présence de la phase fluide : on a un couplage entre deux mouvements de nature et de vitesse de convergence très différentes. Il apparaît alors que l'énoncé d'un critère de maillage universel soit une tâche difficile. On se contentera de vérifier les critères relatifs aux longueurs d'onde de BIOT et d'affiner le maillage plus encore si nécessaire.

Cette convergence relativement lente, ajoutée au grand nombre de degrés de liberté par nœud, a pour conséquence la génération de systèmes de grande taille. Les limites de la machine sont ainsi atteintes dès le quatrième mode de la structure "plaque-poreux". Plusieurs solutions sont alors envisageables : utiliser des éléments basés sur la formulation  $(u,p)$  (ATALLA et coll. , 1998) ne nécessitant que quatre degrés de liberté par nœud au lieu de six, utiliser des éléments quadratiques plus performants en flexion, développer des solutions alternatives moins coûteuses, tel que le modèle de plaque équivalente. Enfin pour l'étude de cas test, la taille des systèmes peut rester viable. Des éléments bidimensionnels pourraient d'ailleurs suffire dans certains cas.

Soit à placer un matériau poreux existant – non plus virtuel – dans une structure élastique, siège de vibrations de toute nature. Quel degré de simulation peut-on espérer atteindre ? Premièrement, on a montré que les méthodes de caractérisation des paramètres de couplage sont suffisamment précises. Cependant, la méthode des éléments finis étant par nature dédiée aux basses fréquences, l'usage des paramètres  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  n'est pas réellement justifié. A l'opposé, l'introduction de la perméabilité thermique  $k_0$  est indiquée pour une meilleure prise en compte des effets thermiques en basses fréquences. Le paramètre essentiel reste cependant la résistivité au passage de l'air, dont la détermination souffre de l'hétérogénéité du matériau. Deuxième point important, l'hétérogénéité affecte aussi les propriétés mécaniques du squelette. Ses conséquences étant perceptibles sur les résultats finaux, elle est à contrôler systématiquement. Troisièmement, la question de la caractérisation des propriétés mécaniques du squelette reste entière. Les mousses polymères n'étant pas isotropes et si peu isotropes transverse, on ne peut pas caractériser le tenseur viscoélastique du squelette de façon suffisamment complète, pour pouvoir simuler son comportement face à n'importe quelle sollicitation. Actuellement, les meilleurs résultats ont été obtenus en utilisant une loi de comportement isotrope, caractérisée suivant la

direction des contraintes d'une application donnée. Cette méthode, utilisée pour la configuration "plaque-poreux", a nécessité l'usage de plusieurs modules d'Young selon le mode considéré : elle reste donc d'usage très limité. Cette description pseudo-isotrope des propriétés mécaniques du squelette a cependant permis la validation des éléments poroélastiques : les tendances obtenues sont toujours très bonnes.

Enfin, deux perspectives d'amélioration des résultats sont envisageables. D'une part, en prenant en compte la dépendance fréquentielle des propriétés mécaniques du squelette – accroissement des modules de l'ordre de 20% sur deux décades –, on améliorerait la détermination des fréquences de résonance et de l'amortissement. D'autre part, l'hypothèse d'impédance nulle à la périphérie du milieu poreux ne permet pas de décrire le couplage avec le milieu fluide environnant lorsque les effets visqueux ne sont plus négligeables. Une meilleure prise en compte est possible en utilisant une impédance plus réaliste (impédance caractéristique de l'air, impédance de rayonnement) ou un couplage avec des éléments de frontière. Une étude dans ce sens reste à faire.

Plutôt qu'à entrer dans un calcul de structure de grande envergure, les éléments poroélastiques semblent dédiés à l'analyse structures test, parties ou reflets de structures réelles. C'est dans ce but qu'on a développé des indicateurs basés sur une répartition des puissances dissipée et réactive liées aux milieux visco et poroélastiques. Ces indicateurs permettent notamment de quantifier directement l'influence des différentes sources de dissipation, quelle que soit la configuration étudiée.

Cette méthode d'analyse a été appliquée à l'étude du comportement d'une couche poreuse collée à une plaque. On a pu montrer l'importance de la dissipation provenant de la viscoélasticité du squelette, pour les mousses polymères. La dissipation visqueuse est, pour sa part, masquée à mesure que l'on augmente la rigidité et l'amortissement structural du squelette. Il est alors possible de modéliser l'effet de la couche poreuse sur la vibration de la plaque, en ne considérant que l'aspect viscoélastique du squelette. Un modèle de plaque équivalente intégrant le cisaillement dans la couche poreuse et l'amortissement structural du squelette a été ainsi proposé. Les bons résultats obtenus tendent à monter la validité des indicateurs issus de la répartition des puissances dissipée et réactive.

Moyennant une amélioration de leur formulation et une meilleure caractérisation de la loi de comportement du squelette, les éléments finis poroélastiques constituent un complément indispensable aux outils d'analyse vibroacoustique des structures.

# Annexe A

## Influence des effets dynamiques sur la mesure des caractéristiques mécaniques des mousses polymères

Afin d'observer l'influence des effets dynamiques sur la mesure des caractéristiques mécaniques du squelette, nous avons simulé l'expérimentation décrite au chapitre 3 (cf. figure 3.8). Les caractéristiques initiales du matériau sont données ci-après.

| $\phi$ | $\sigma$<br>( $Nm^{-4}s$ ) | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$<br>( $\mu m$ ) | $\Lambda'$<br>( $\mu m$ ) | $\rho_1$<br>( $kg\ m^{-3}$ ) | $E$<br>( $kPa$ ) | $\eta_s$ | $\nu$ |
|--------|----------------------------|-----------------|--------------------------|---------------------------|------------------------------|------------------|----------|-------|
| 0.98   | 100 000                    | 1.3             | 220                      | 490                       | 30                           | 100              | 0.1      | 0.3   |

TAB. A.1 : Caractéristiques initiales du matériau.

Les fonctions  $K(\omega)$  et  $T(\omega)$  sont présentées à la figure A.1, pour différentes valeurs de résistivité à  $M$  constant. Deux effets sont observables. Premièrement, l'inertie du squelette vient modifier fortement les deux fonctions au-dessus de 100 Hz, indépendamment de la la résistivité. Deuxièmement, le dissipation visqueuse vient augmenter les parties réelles mais surtout imaginaires des deux fonctions. Cet effet commence à être observable pour des résistivité de l'ordre de 100 000  $Nm^{-4}s$  dès 50 Hz.

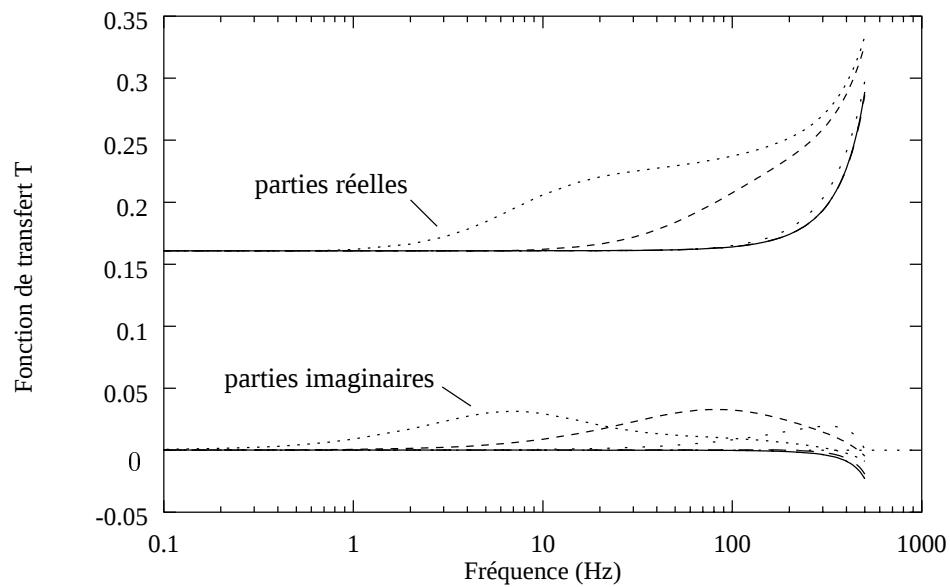
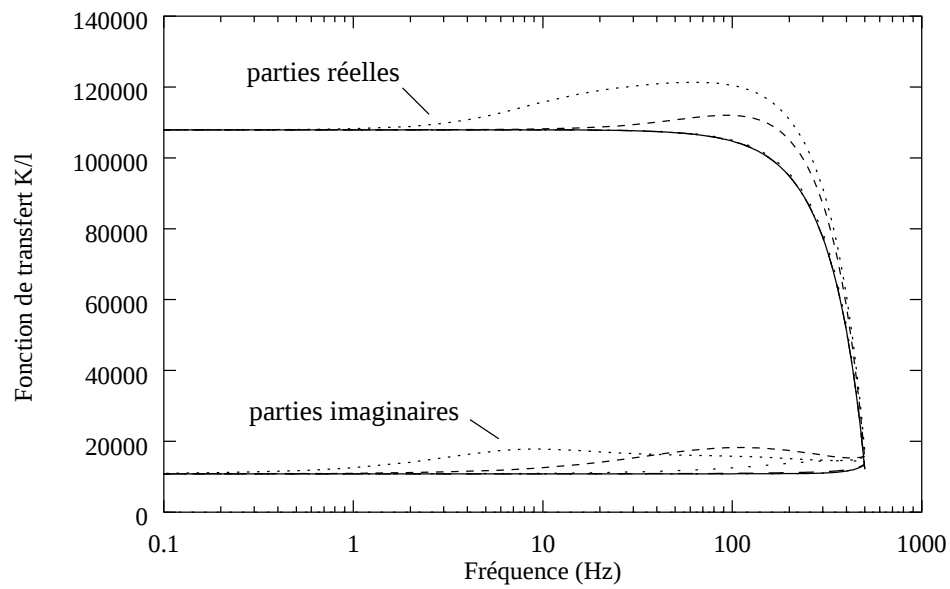


FIG. A.1 : Simulation des fonctions de transfert  $K$  et  $T$  pour différentes valeurs de la résistivité au passage de l'air.

## Annexe B

# Comparaison des impédances mesurées et simulées d'un échantillon poreux

Nous présentons les courbes d'impédance d'un échantillon poreux provenant de la simulation et de la mesure en tube de Kundt de section carrée de 10 cm d'arête, pour trois conditions aux limites différentes (cf. section 3.2.3).

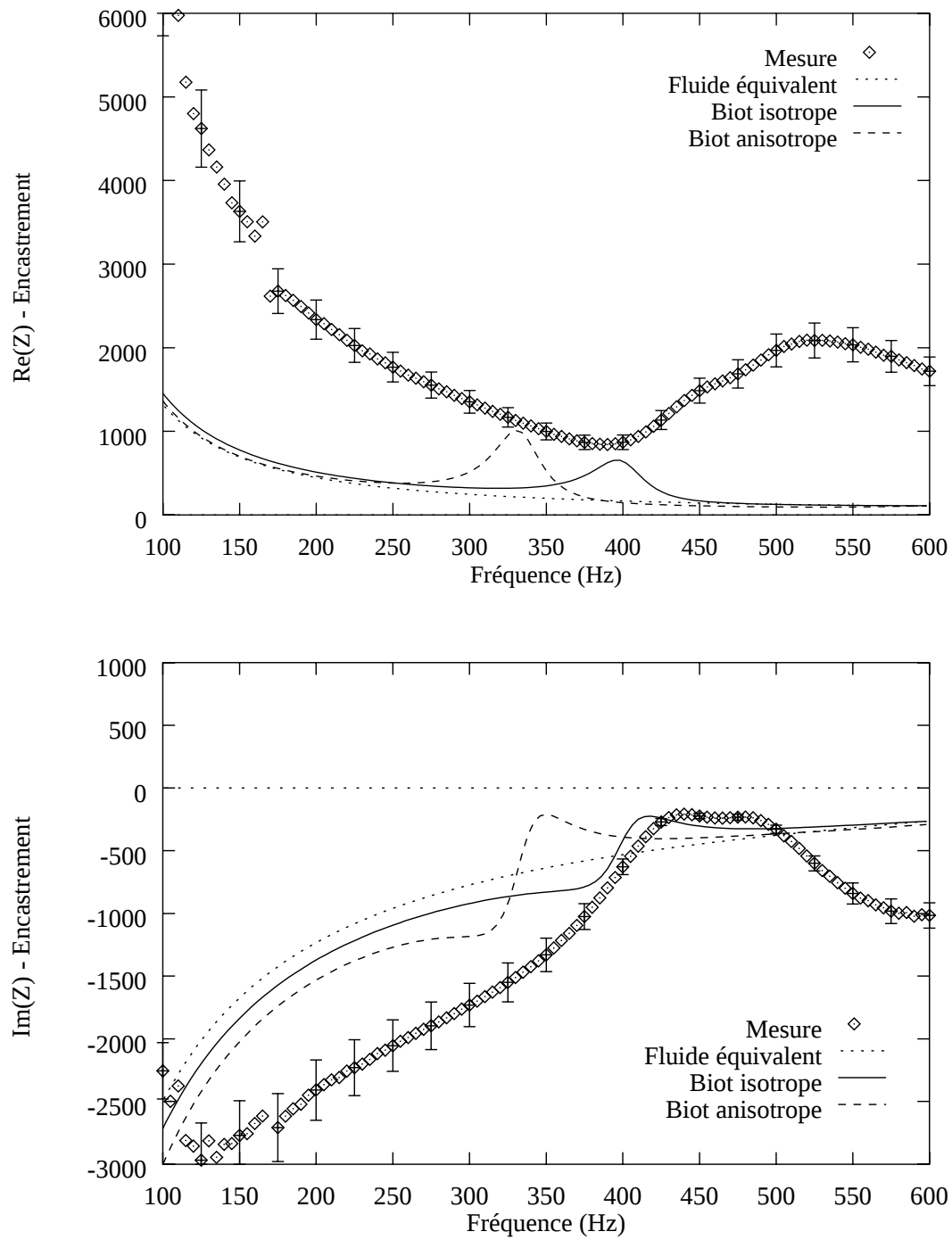


FIG. B.1 : Parties réelle et imaginaire de l'impédance du matériau encastré.

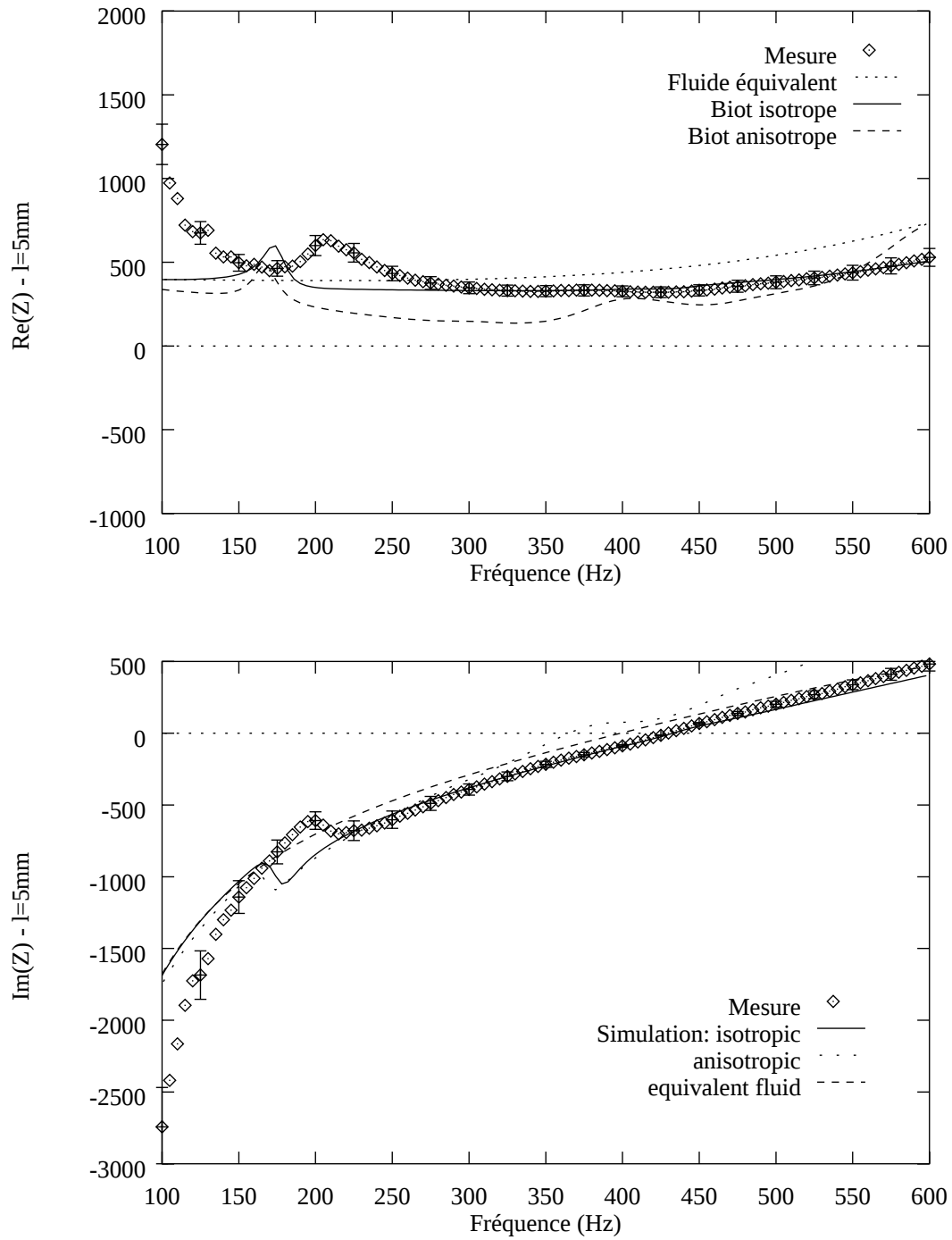


FIG. B.2 : Parties réelle et imaginaire de l'impédance du matériau avec lame d'air latérale de 5 mm d'épaisseur.

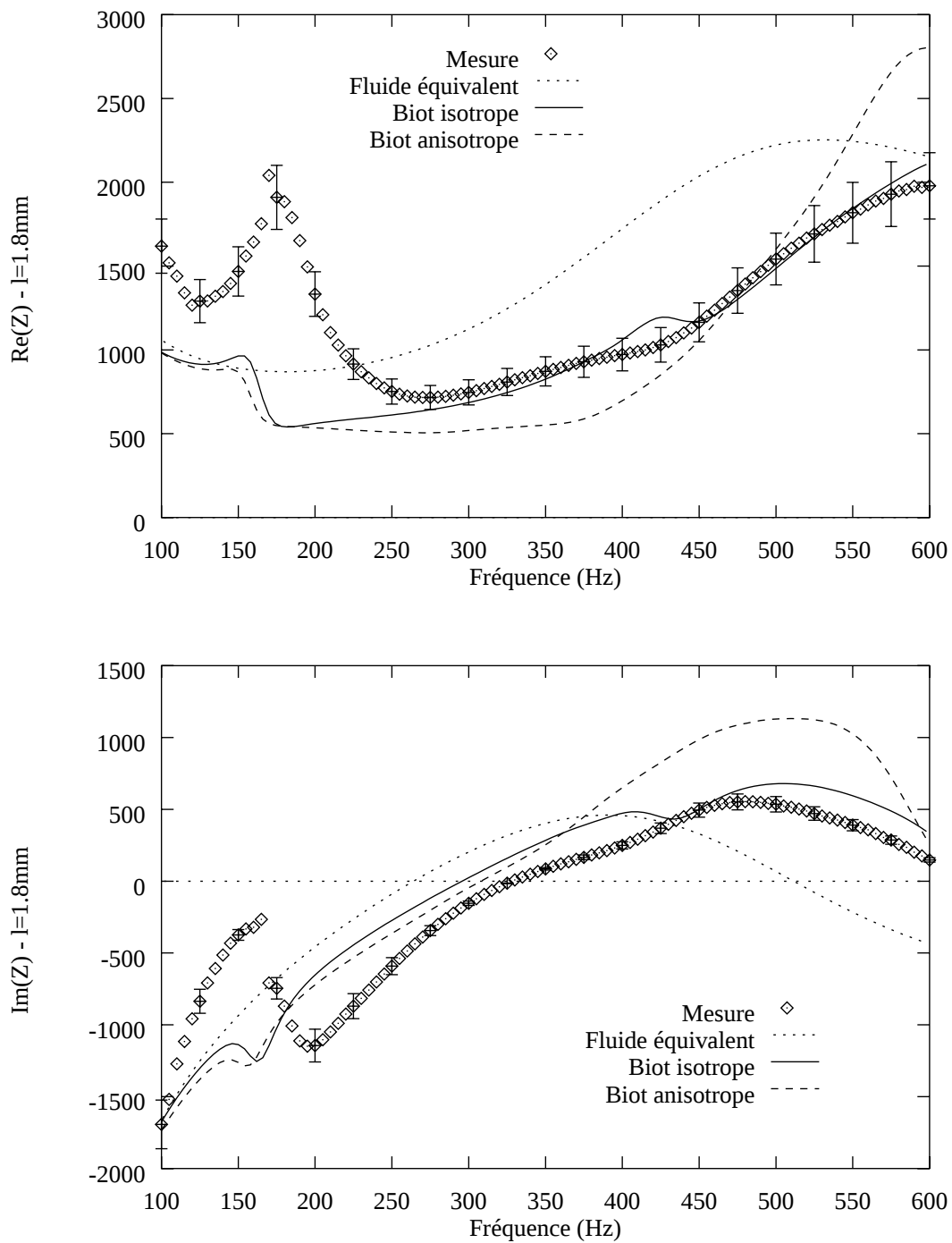


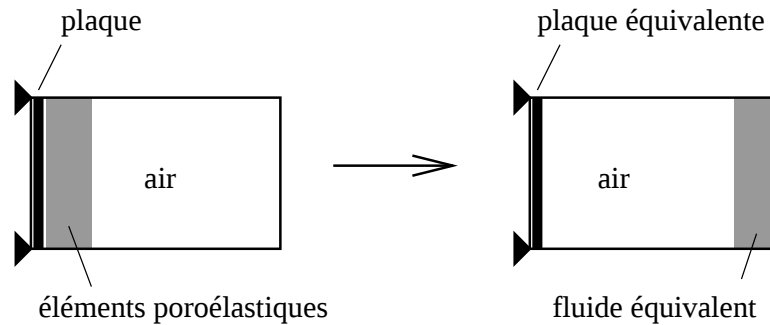
FIG. B.3 : Parties réelle et imaginaire de l'impédance du matériau avec lame d'air latérale de 1.8 mm d'épaisseur.

## Annexe C

# Substitution d'éléments poroélastiques par association de modèles équivalents

Nous présentons un exemple de substitution des éléments poroélastiques par association des modèles équivalents de fluide et de plaque. La configuration est constituée d'une plaque d'aluminium de  $28 \text{ cm} \times 22 \text{ cm} \times 1 \text{ mm}$ , simplement appuyée, sur laquelle est collée une couche poreuse de 2 cm d'épaisseur. L'ensemble est couplé à une cavité de 68 cm de profondeur.

L'effet de la couche poreuse sur la plaque est pris en compte par la plaque équivalente (cf. chapitre 4). L'effet de la couche poreuse sur le cavité est pris en compte par un fluide équivalent placé à l'autre extrémité de la cavité pour éviter le blocage de la plaque, à cause de l'hypothèse de squelette immobile.



| Matériau  | $\phi$ | $\sigma$<br>( $N m^{-4} s$ ) | $\alpha_\infty$ | $\Lambda$<br>( $\mu m$ ) | $\Lambda'$<br>( $\mu m$ ) | $\rho$<br>( $kg m^{-3}$ ) | $E$<br>( $Pa$ ) | $\eta_s$ | $\nu$ |
|-----------|--------|------------------------------|-----------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------|----------|-------|
| Aluminium | —      | —                            | —               | —                        | —                         | 2778                      | 6.9e10          | 0.004    | 0.33  |
| Poreux    | 0.97   | 40 000                       | 1.8             | 60                       | 180                       | 42                        | 2.5e5           | 0.11     | 0.1   |

Le figure C.1 présente la pression quadratique moyenne dans la cavité. Les résultats sont très proches, y compris pour le premier mode de cavité qui apparaît à 250 Hz.

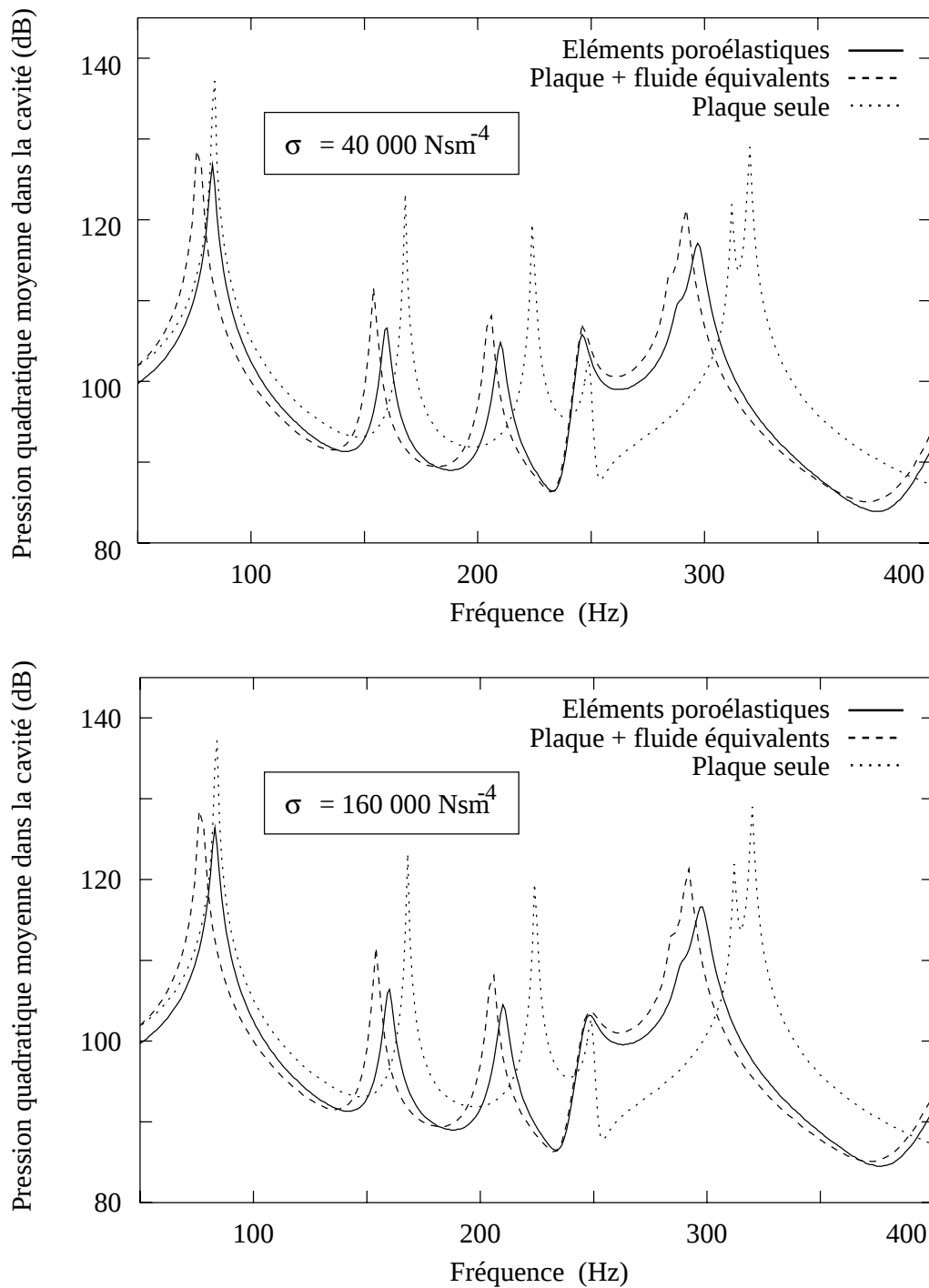


FIG. C.1 : Comparaison des résultats obtenus par l'association d'une plaque équivalente et d'un fluide équivalent par rapport à ceux obtenus avec les éléments poroélastiques, dans le cas d'une plaque collée à une couche poreuse et couplée à une cavité.

# Bibliographie

- ALLARD J.-F. (1993). *Propagation of sound in porous media : modeling sound absorbing materials*, Chapman & Hall, Londres
- ATALLA N., PANNETON R., DEBERGUE P. (1996a). "A mixed displacement-pressure formulation for Biot's poroelastic equations," *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**, 2487
- ATALLA N., PANNETON R. (1996b). "The effects of multilayer sound-absorbing treatments on the noise field inside a plate backed cavity," *Noise Control Eng. J.*, **44**, 235-243
- ATALLA N., PANNETON R., DEBERGUE P. (1998). "A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, **104**, 1444-1452
- ATTENBOROUGH K. (1983). "Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbents and granular materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, **73**, 785-799
- AYRAULT C., MOUSSATOV A., CASTAGNÈDE B. (1999). "Caractérisation de matériaux poreux en régime faiblement diffusif par variation de pression statique," 5<sup>èmes</sup> Journées d'Acoustique Physique Sous-marine et Ultrasonore (JAPSUS), Blois, France
- BARDOT A. (1992). *Modélisation acoustique basses fréquences de cavités en présence d'absorbants sur parois rigides ou élastiques*, Thèse de l'Université de Technologie de Compiègne, France
- BARDOT A., BROUARD B., ALLARD J.-F. (1996). "Frame decoupling at low frequency in thin porous layers saturated by air," *J. Appl. Phys.*, **79**, 8223-8229
- BATOZ J.-L., DHATT G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, Paris
- BERANEK L. (1988). *Noise and vibration control*, Institute of Noise Control Engineering, Washington, Etats-Unis
- BERANEK L. (1988). *Noise and vibration control*, Institute of Noise Control Engineering, Washington, Etats-Unis
- BIOT M.A. (1956). "The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. II. Higher frequency range," *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, 168-191
- BIOT M.A. (1964). "Theory of buckling of a porous slab and its thermoelastic analogy," *Transactions of the ASME*, **31**, 194-198
- BODEN H., ABOM M. (1986). "Influence of errors on the two microphones method for measuring acoustic properties in ducts," *J. Acoust. Soc. Am.*, **79**, 541

- BOLTON J.S., SHIAU N.-M., KANG Y.J. (1996). "Sound transmission through multi-panel structures lined with elastic porous materials," *J. Sound Vib.*, **191**, 317-347
- BROUARD B. (1994). *Validation par holographie acoustique de nouveaux modèles pour la propagation des ondes dans les matériaux poreux stratifiés*, Thèse de l'Université du Maine, France
- BROWN R.J.S (1980). "Connection between formation factor for electrical resistivity and fluid-solid coupling factor in Biot's equations for acoustic waves in fluid-filled media," *Geophys.*, **45**, 1269-1275
- CHAMPOUX Y., STINSON M.R., DAIGLE G.A. (1990). "Air-based system for the measurement of porosity," *J. Acoust. Soc. Am.*, **89**, 910-916
- CHAMPOUX Y., ALLARD J.-F. (1991). "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media," *J. Appl. Phys.*, **70**, 1975-1979
- COUSSY O. (1991). *Mécanique des milieux poreux*, Technip., Paris
- COYETTE J.-P., BLOEMHOF H. (1994). "A generalized procedure for modeling multi-layer insulation systems," 19th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgique, 1189-1199
- COYETTE J.-P., WYNENDAELE H. (1995). "A finite element model for predicting the acoustic transmission characteristics of layered structures," Internoise 95, Newport Beach, Californie, Etats-Unis
- Craggs A. (1978). "A finite element model of rigid porous absorbing material," *J. Sound Vib.*, **61**, 101-111
- CUMMINGS A. (1991). "Impedance tube measurements on porous media : the effects of air-gaps around the sample," *J. Sound Vib.*, **151**, 63-75
- DHATT G., TOUZOT G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris
- DAUCHEZ N. (1996). *Etude des matériaux poreux par éléments finis*, Rapport interne, GAUS - Université de Sherbrooke, Canada
- DAUCHEZ N., SAHRAOUI S., ATALLA N. (1998a). "Vibroacoustic behavior of a porous layer bonded onto a plate," 4<sup>th</sup> AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse, France
- DAUCHEZ N., SAHRAOUI S., ATALLA N. (1998b). "Numerical analysis of damping added by a foam layer on a vibrating plate," 16<sup>th</sup> ICA and 135<sup>th</sup> meeting of the ASA, Seattle, Washington, Etats-Unis
- DAUCHEZ N., MARIEZ E., SAHRAOUI S., BARDOT A. (1998c). "Determination of acoustic foam parameters for isotropic Biot model", Biot Conference on Poromechanics, Louvain-la-Neuve, Belgique
- DAUCHEZ N., SAHRAOUI S., ATALLA N. (1999a). "Convergence of poroelastic finite elements based on Biot displacement formulation," soumis à *J. Acoust. Soc. Am.*
- DAUCHEZ N., SAHRAOUI S., ATALLA N. (1999b). "Dissipation mechanisms in a porous layer bonded onto a plate", soumis à *J. Sound Vib.*
- DEBERGUE P. (1998). *Développement d'une formulation mixte en déplacement-pressure pour les matériaux poroélastiques*, Maîtrise de l'Université de Sherbrooke, Canada
- DELANY M.E., BAZLEY E.N. (1970). "Acoustical properties of fibrous materials," *Applied Acoustics*, **3**, 105-116
- DEPOLIER C., ALLARD J.-F., LAURIKS W. (1988). "Biot theory and stress-strain equations in porous sound absorbing materials," *J. Acoust. Soc. Am.*, **84**, 2277-79
- DHATT G., TOUZOT G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris
- EASWARAN V., LAURIKS W., COYETTE J.-P. (1996). "Displacement-based finite element method for guided wave propagation problems : Application to poroelastic media," *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**, 2989-3002

- GAUS (1998). *Gausvem user manual*, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada
- GÉRADIN M., RIXEN D. (1996). *Théorie des vibrations - Application à la dynamique des structures*, Masson, Paris
- GIBIAT V., LALOË F. (1990). "Acoustical impedance measurements by the Two-Microphone-Three-Calibration (T.M.T.C.) method," *J. Acoust. Soc. Am.*, **88**, 2533-2545
- GEORGESCU E. (1997). *Linux, XFree86*, Eyrolles, Paris
- GÖRANSSON P. (1995). "Acoustic finite element formulation of a flexible porous material - A correlation for inertial effects," *J. Sound Vib.*, **185**, 559-580
- GÖRANSSON P. (1998). "A 3-D, symmetric, finite element formulation of the Biot equations with applications to acoustic wave propagation through an elastic porous medium," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **41**, 167-192
- GOROG S., PANNETON R., ATALLA N. (1997). "Mixed displacement-pressure formulation for acoustic anisotropic open porous media," *J. Appl. Phys.*, **82**, 4192-4196
- GOOSSENS M., MITTELBACH F., SAMARIN A. (1994). *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X companion*, Addison-Wesley, Massachusetts, Etats-Unis
- HENRY M. (1997). *Mesures des paramètres caractérisant un milieu poreux. Etude expérimentale du comportement acoustique des mousses aux basses fréquences*, Thèse de l'Université du Maine
- JOHANSEN T.F., ALLARD J.-F., BROUARD B. (1995). "Finite element method for predicting the acoustical properties of porous samples," *Acta Acoustica*, **3**, 487-491
- JOHNSON D.L., KOPLIK J., DASHEN R. (1987). "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media," *J. Fluid Mechanics*, **176**, 379-402
- KANG Y.J., BOLTON J.S. (1995). "Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite element," *J. Acoust. Soc. Am.*, **98**, 635-643
- KANG Y.J., BOLTON J.S. (1996). "A finite element model for sound transmission through foam-lined double-panel structures," *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**, 2755-2765
- LAFARGE D., LEMARINIER P., ALLARD J.-F., TARNOW V. (1997). "Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies," *J. Acoust. Soc. Am.*, **102**, 1995-2006
- LEMARINIER P., HENRY M., ALLARD J.-F. (1995). "Connection between the dynamic bulk modulus of air in a porous medium and the specific surface," *J. Acoust. Soc. Am.*, **97**, 3478-3482
- LEMARINIER P. (1997). *Propagation du son à basses fréquences audibles (30-5000Hz) dans des mousses et une laine de verre saturées d'air*, Thèse de l'Université du Maine
- LESUEUR C. (1988). *Rayonnement acoustique des structures - Vibroacoustique, Interactions fluide-structure*, Eyrolles, Paris
- MACNEAL R.H. (1994). *Finite elements : their design and performance*, Dekker, New York
- MARIEZ E., SAHRAOUI S. (1996). "Elastic constants of polyurethane foam's skeleton for Biot model," *Internoise 96*, Liverpool, Royaume Uni
- MARIEZ E., SAHRAOUI S. (1997). "Measurement of mechanical anisotropic properties of acoustic foams for the Biot model," *Internoise 97*, Budapest, Hongrie
- MELON M., CASTAGNÈDE B. (1995a). "Correlation between tortuosity and transmission coefficient of porous media at high frequency," *J. Acoust. Soc. Am.*, **98**, 1228-1230
- MELON M., LAFARGE D., CASTAGNÈDE B., BROWN N. (1995b). "Measurement of dynamic tortuosity of anisotropic acoustic materials," *J. Appl. Phys.*, **78**, 4929-4933

- MELON M. (1996). *Caractérisation de matériaux poreux par ultrasons basse-frequence (20-500 kHz)*, Thèse de l'Université du Maine
- MELON M., MARIEZ E., AYRAULT C., SAHRAOUI S. (1998). "Acoustical and mechanical characterization of anisotropic open-cell foams," *J. Acoust. Soc. Am.*, **104**
- MIXSON J.S. AND WILBY J.F. (1995). *Aeroacoustics of flight vehicules : theory and practice*, Harvey H. Hubbard (Acoustical Society of America)
- OKUNO A. AND KINGSBURY H.B. (1989). "Dynamic modulus of poroelastic materials," *Journal of Applied Mechanics*, **56**, 535-540 (1989)
- PANNETON R., ATALLA N. (1994). "A 3-D finite element model for sound transmission through a double-plate system with isotropic elastic material," 128th Meeting of Acoust. Soc. Am., *J. Acoust. Soc. Am.*, **96**, 3339(A)
- PANNETON R. (1996). *Modélisation numérique tridimensionnelle par éléments finis des milieux poroélastiques*, Thèse de l'Université de Sherbrooke, Canada
- PANNETON R., ATALLA N. (1996a). "Numerical prediction of sound transmission through finite multilayer systems with poroelastic materials" *J. Acoust. Soc. Am.*, **100**, 346-354
- PANNETON R., ATALLA N. (1996b). "The effects of multilayer sound-absorbing treatments on the noise field inside a plate backed cavity," *Noise Control Eng. J.*, **44**, 235-243
- PANNETON R., ATALLA N. (1997). "An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.*, **101**, 3287-3298
- PETYT M. (1990). *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge University Press, Royaume-Uni
- RASOLOFOSAON P.N.J. (1991). "Plane acoustic waves in linear viscoelastic porous media : energy, particle displacement, and physical interpretation," *J. Acoust. Soc. Am.*, **89**, 1532-1550
- ROSS D., UNGAR E.E., KERWIN JR E.M. (1959). "Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate", *Strutural Damping*, ASME, New-York, 49-88.
- SAHRAOUI S., MARIEZ E. (1997). "Anisotropic elasticity model for acoustic foams," *Internoise 97*, Budapest, Hongrie
- SEYBERT A.F., ROSS D.F. (1977). "Experimental determination of acoustic properties using a two microphones random excitation technique," *J. Acoust. Soc. Am.*, **61**, 1362-1370
- SGARD F., ATALLA N., PANNETON R. (1998). "A modal reduction technique for the finite element formulation of Biot's poroelasticity equations in acoustics applied to multilayered structures," 16<sup>th</sup> International Congress on Acoustics and 135<sup>th</sup> Meeting of the Acoustical Society of America, Seattle, Washington, Etats-Unis
- SIDES D.J., ATTENBOROUGH K., MULHOLLAND K.A. (1971). "Application of a generalized acoustic propagation theory absorbents," *J. Sound Vib.*, **19**, 49-64
- SIMON B.R., WU J.S.-S., ZIENKIWICZ O.C. (1986). "Evaluation of  $u - w$  and  $u - \pi$  finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one-dimensional models," *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **10**, 461-482
- STINSON M.R., DAIGLE G.A (1988). "Electronic system for the measurement of flow resistance," *J. Acoust. Soc. Am.*, **83**, 2422-2428
- SUZINI P. (1997). "Critères objectifs de qualité acoustique dans l'automobile," *Journée de veille technologique*, Innovation 128, Paris

- VALET M. (1993). "Pourquoi un congrès sur le bruit comme problème de santé publique?," *Echo bruit*, **59**, 9-11
- VIGRAN T.E., KELDERS L., LAURIKS W., LECLAIRE P., JOHANSEN T.F. (1997a). "Prediction and measurements of the influence of boundary conditions in a standing wave tube," *Acoustica*, **83**, 419-423
- VIGRAN T.E., KELDERS L., LAURIKS W., DHAINAUT M., JOHANSEN T.F. (1997b). "Forced response of a sandwich plate with a flexible core described by a Biot-model," *Acoustica*, **83**, 1024-1031
- YU Y.-Y. (1996). *Vibrations of Elastic Plates*, Springer, New York
- ZIENKIEWICZ O.C. (1982). "Basic formulation of static and dynamic behaviour of solid and other porous media," *Numerical Methods in Geomechanics*, Reidel, Dordrecht, Pays-Bas, 39-55
- ZWIKKER C., KOSTEN C.W. (1949). *Sound-Absorbing Materials*, Elsevier, New York