HAL
open science

Propriétés statistiques des systèmes dynamiques déterministes et aléatoires

Philippe Marie

To cite this version:

Philippe Marie. Propriétés statistiques des systèmes dynamiques déterministes et aléatoires. Physique mathématique [math-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2009. Français. NNT : . tel-00439610

HAL Id: tel-00439610

https://theses.hal.science/tel-00439610v1

Submitted on 8 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université d'Aix-Marseille II
Faculté des Sciences

Thèse

pour obtenir le grade de
docteur de l'Université d'Aix-Marseille

Spécialité: Physique Mathématique

Propriétés Statistiques des Systèmes Dynamiques Déterministes et Aléatoires

Philippe Marie

Présentée publiquement le 2 Décembre 2009

Composition du Jury :

José Ferreira ALVES	Departamento de Mathematica Pura, Porto	(Rapporteur)
Stefano LUZZATTO	International Centre of Theoretical Physics, Trieste	(Rapporteur)
Benoit SAUSSOL	Laboratoire de Mathématiques, Brest	
Serge TROUBETZKOY	Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille	
Sandro VAIENTI	Centre de Physique Théorique, Marseille	(Directeur)

Rien au monde ne vaut
qu'on se détourne
de ce qu'on aime.

Albert Camus

Remerciements

Comme une évidence pour débuter ces remerciements, je voudrais écrire quelques mots à l'attention de Sandro Vaienti, qui a dirigé cette thèse. Il y a six ans, durant mon année de licence, j'ai rencontré Sandro qui m'a alors initié aux premières idées de la théorie des systèmes dynamiques. Depuis, et sans interruption, j'ai appris à ses côtés, bénéficiant de sa passion débordante et de ses, au combien nombreuses, qualités scientifiques et humaines. Pour toutes ces riches heures de collaboration et pour la complète disponibilité et confiance que tu m'as accordées, merci.

Deux stages et une thèse plus tard je suis définitivement convaincu que je n'aurais pu faire de meilleur choix. C'est aussi pour avoir toujours su me guider, avec humilité et honnêteté et pour m'avoir toujours accompagné avec justesse dans mes moments de doutes, que je te remercie.

Toute ma gratitude va aussi à José Alves et Stefano Luzzatto pour avoir accepté spontanément d'être les rapporteurs de cette thèse et à Benoît Saussol et Serge Troubetzkoy de bien avoir voulu faire partie de mon jury.

Je voudrais tout particulièrement remercier Miguel Abadi qui m'a accueilli chaleureusement à São Paulo en Janvier 2008 et m'a fait découvrir une ville merveilleuse.

Je pense aussi très fort à tous les thésards et membres du Centre de Physique Théorique de Marseille et du département de Mathématiques de l'USTV avec qui j'ai partagé ces trois dernières années et dont certains sont devenus des amis.

Merci aussi à tous ceux avec qui j'ai plus ou moins longuement collaboré ou juste discuté mais qui ont tous marqué cette thèse, dans le désordre : Michal Kupsa, Miguel Abadi, Huyi Hu, Nicolaï Haydn, Carlangelo Liverani, Dmitry Dolgopyat, Francesco Zanlungo, Jérôme Rousseau, Benoît Saussol...

Ceux qui me connaissent le mieux pourraient témoigner que mon parcours du collège à l'université n'a pas été des plus calmes. Je tiens donc à remercier de tout cœur mes parents pour en avoir supporté pas mal (souvent trop) toutes ces années, sans jamais douter de moi et pour m'avoir idéalement porté jusqu'ici. Concernant cette période, j'ai aussi une pensée amusée pour tous ceux qui n'ont pas cru en moi et qui ont contribué à certaines complications, c'est en (petite) partie grâce et malgré eux que j'en suis là. N'y voyez aucune prétention, juste une once de satisfaction.

Je serai bien-sûr éternellement reconnaissant envers mes amis (Amélie, Flo, Olive, Mika, François, Daaany, Ami, Lud, Mathieu...) et ma famille (mes grand-mères, Jean-François, Sandrine, Jean-Matthieu, Juliette, Emilie, Xavier...) d'avoir toujours été là pour me *ré-équilibrer* et me faire oublier les moments difficiles inhérents à une thèse.

Un immense merci également à tous ceux qui ont joué des rôles clés dans mon parcours et sans qui je ne serais certainement pas ici : la famille Veyrac, Christophe Mosbahi, Pascal Jehl, Mika, Daaany, Corinne Resplandin et évidemment Sidney, qui ne pourra jamais lire cette thèse...

Je voudrais en outre dire toute l'affection que j'ai pour ceux qui font désormais partie de ma famille : Mémé Vivi, Françoise, Dédé, Andréa et Juju.

Enfin, une immense et tendre pensée pour celle qui partage ma vie et qui a géré à la perfection les derniers moments de cette thèse : Carole, merci.

Toulon, le 7 novembre 2009.

Table des matières

I Théorie Ergodique Déterministe **15**

1 Rappels **17**
1.1 Préliminaires 17
1.2 Théorie ergodique et analyse fonctionnelle 19
1.3 L'opérateur de Perron-Frobenius 23
1.4 Les espaces quasi-Hölder 24
1.5 Analyse spectrale 26
1.6 Récurrence 28

2 Dynamique Intermittente **39**
2.1 Introduction 39
2.2 Distorsion 41
2.3 Décroissance des corrélations 48
2.4 Théorèmes limites 51
2.5 Récurrence 54
2.6 Généralisation aux applications du type Lorenz 57
2.7 Appendice 64

II Systèmes Dynamiques Aléatoires **67**

3 Généralités et Définitions **69**
3.1 Les systèmes dynamiques aléatoires 69
3.2 Les systèmes dynamiques aléatoires : le cas i.i.d 71
3.3 Les systèmes i.i.d comme perturbation 80
3.4 Décomposition spectrale aléatoire 84

4 Attracteurs, Pseudo-orbites et Mesures Stationnaires **89**
4.1 Introduction 89
4.2 Hypothèses et Résultats 90
4.3 Dynamiques dilatantes par morceaux de l'intervalle 98
4.4 Dynamiques dilatantes par morceaux multidimensionnelles 101

5 Récurrence Aléatoire **105**
5.1 Introduction 105
5.2 Définitions des quantités 106
5.3 Récurrence Aléatoire à réalisation fixée 107
5.4 Récurrence Aléatoire Moyennée 109
5.5 Preuves des Théorèmes 111
5.6 Automorphismes aléatoires du tore 115
5.7 Applications aux perturbations aléatoires 116

III Applications des Systèmes Dynamiques Aléatoires **119**

6 Une nouvelle définition pour la Fidélité **121**
6.1 Introduction 121
6.2 Random fidelity 122
6.3 Examples 126
6.4 Perturbation with random maps 128

7 Distribution des erreurs dans une orbite perturbée **131**
7.1 Introduction 131
7.2 Statistiques des erreurs 133
7.2.1 Perturbations et Fidélité aléatoires 133
7.2.2 Distribution de l'erreur 135
7.3 Résultats analytiques sur des dynamiques types 138
7.3.1 Dynamiques chaotiques et rotations du cercle 138
7.3.2 Analogie avec le cas continu 141
7.3.3 Comparaison avec les résultats numériques 142
7.4 Expériences numériques 143
7.4.1 Application de Hénon 147
7.4.2 L'application du boulanger 148
7.4.3 L'application intermittente 152
7.4.4 Application quadratique 154
7.4.5 Application standard 155
7.5 Conclusion 157
7.5.1 Calcul de la fidélité pour qx mod 1 158
7.5.2 Comparaison avec les méthodes de Monte Carlo 160
7.5.3 Formule d'inversion de Lévy 161

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques fournit une description qualitative des phénomènes naturels. L'évolution de ces phénomènes est modélisée par une transformation de l'espace des états possibles du système. La théorie est dite déterministe au sens où lorsque la loi d'évolution est connue, le futur du système est parfaitement déterminé dès lors que l'on connait son état initial. Certains phénomènes présentent cependant un comportement erratique et imprévisible dû à une très forte sensibilité aux conditions initiales, cette propriété est appelée chaos. Typiquement deux états initialement très proches auront dans ce cas des comportements exponentiellement divergents dans le temps. La théorie des systèmes dynamiques trouvent alors ses limites dans l'impossibilité de connaitre parfaitement l'état d'un système physique à un moment donné (mesures de précisions finies) et dans la simplification qu'impose la modélisation mathématique des lois de la nature. Ruelle illustre cette démarche de simplification dans [98] "*si vous demandez à un physicien des équations d'évolution pour tel ou tel phénomène, il vous demandera avec quelle précision vous les voulez. Dans l'exemple de la dynamique du système solaire, suivant la précision requise, on tiendra compte ou non du ralentissement de la rotation de la Terre par effet de marée, ou du déplacement du périhélie de Mercure dû à la relativité générale. Il faudra d'ailleurs bien s'arrêter quelque part : on ne peut pas tenir compte, vous en conviendrez, des déplacements de chaque vache dans sa prairie, ou de chaque puceron sur son rosier. Même si, en principe, les déplacements de la vache et du puceron perturbent quelque peu la rotation de la Terre. En bref, la physique répond aux questions qu'on lui pose avec une précision qui peut être remarquable, mais pas absolument parfaite.*"

Ainsi l'inévitable incertitude sur l'état exact d'un système grandit inexorablement en présence de chaos jusqu'à devenir inacceptable et rendre toute prédiction rapidement impossible ; le chaos introduit le hasard dans les descriptions des systèmes naturels. Poincaré avait déjà souligné ce point dans son ouvrage *Science et Méthode* [93] : "*Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la nature et la situation de ce même Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu. Il peut arriver que des petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons un phénomène fortuit.*"

Cette extrême sensibilité aux infimes variations rend ainsi inutile une étude au cas par cas de l'évolution de chaque état initial dans un but de prédiction. La théorie ergodique propose une solution à ce problème en étudiant statistiquement les comportements, elle remplace la question d'une prévision à court terme d'un état précis par celle d'une descrip-

tion globale à long terme. "*Le niveau fondamental est maintenant celui des probabilités*" (Prigogine [96]).

Nous sommes face à une incompatibilité entre la théorie et la réalité : d'un côté une théorie rigide dont la pertinence en termes de prévision est allergique aux incertitudes et d'un autre côté une nature par essence fluctuante à laquelle nous n'avons que partiellement accès au travers de nos outils théoriques et technologiques. Rajoutons les inévitables erreurs d'approximation survenant dans toute simulation numérique et nous nous voyons dans la nécessité d'inclure une part de *vrai hasard* dans notre théorie déterministe. Ainsi la théorie des probabilités et celle des systèmes dynamiques, qui étaient déjà très proches, fusionnent dans une notion de systèmes dynamiques aléatoires.

Dans cette première approche nous introduisons le hasard dans un but correctif, mais il est cependant à noter que les systèmes dynamiques aléatoires sont également intéressants pour une autre raison : certains phénomènes comme ceux rencontrés sur les marchés boursiers sont intrinsèquement aléatoires. Nous introduirons ainsi d'une part les systèmes dynamiques aléatoires généraux, destinés à décrire ce type de comportements et d'autre part les perturbations stochastiques d'un système donné destinées à corriger notre connaissance partielle d'un phénomène précis.

- La **partie 1** rappelle les notions de base et quelques résultats classiques de la théorie déterministe des systèmes dynamiques avant de donner une étude statistique complète de dynamiques intermittentes à dérivée non-bornée. Nous prouvons une décroissance polynomiale des corrélations, nous établissons les théorèmes limites (théorème central limite, lois stables, larges déviations), nous montrons une distribution asymptotiquement exponentielle pour les premiers temps d'entrée et de retour que nous appliquons à l'étude des valeurs extrêmes.

- Dans la **partie 2**, nous rappelons tout d'abord les bases de la théorie des systèmes dynamiques aléatoires et détaillons leur application à la perturbation d'une dynamique donnée. Nous étudions ensuite le comportement asymptotique d'un système perturbé en redéfinissant en particulier la notion d'attracteur au travers d'un travail de Ruelle et enfin nous posons les bases d'une théorie de la récurrence pour les systèmes dynamiques aléatoires.

- La **partie 3** est consacrée aux applications de cette théorie : nous analysons en détails la fidélité, quantité issue de la mécanique quantique mesurant la stabilité d'un mouvement, dans un cadre classique, en la redéfinissant correctement et en montrant son caractère asymptotiquement instable. Nous appliquons enfin cette étude à la description du comportement d'une orbite bruitée pour différents systèmes dynamiques. Cette dernière étude pouvant être utilisée pour décrire les erreurs dans les simulations numériques.

Première partie

Théorie Ergodique Déterministe

Chapitre 1

Rappels

1.1 Préliminaires

Nous voulons décrire l'évolution de phénomènes naturels. Pour cela nous avons besoin de deux choses :

- un ensemble dont les éléments représentent les états possibles du système considéré : *l'espace des phases*,
- une transformation de l'espace des phases décrivant cette évolution temporelle.

Certains comportements présentent peu d'intérêt et sont facilement descriptibles (attraction vers un unique point fixe par exemple), nous allons définir les outils nécessaires à l'étude des évolutions les plus complexes. Evolution complexe ne signifiant pas loi d'évolution complexe ! En effet dans le cadre de la théorie du chaos nous savons que d'infimes variations sur la condition initiale conduisent rapidement à des divergences très importantes de comportements. Cette sensibilité aux conditions initiales rend inutile une étude orbite par orbite, et nécessite une étude globale du phénomène : une description statistique. La question typique à laquelle nous tentons de répondre dans la théorie ergodique est alors celle de la description de l'évolution asymptotique du système pour un grand nombre de conditions initiales pour dégager les caractéristiques profondes du phénomène.
Mathématiquement, l'espace des phases sera un espace de probabilité $(M, \mathcal{A}, \mu)$ où M sera une variété compacte et la loi d'évolution sera une application mesurable $T : M \to M$. Les deux étant liées par la relation d'invariance :

$$T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A) = \mu(A)$$

pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.1 Le quadruplet $(M, \mathcal{B}, \mu, T)$ est un système dynamique.

Il se pose évidemment la question de l'existence d'une telle mesure de probabilité. Dans le cas le plus simple, la réponse nous est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.1.2 (Krylov-Bogolubov) *Si M est un espace métrique compact et $T : M \to M$ une application continue, alors il existe une mesure de probabilité borélienne invariante.*

Dans les autres cas il faudra assurer l'existence de ces mesures, nous expliciterons certaines techniques plus loin.

L'évolution d'un état initial $x \in M$ sera donnée par la succession des itérations par T. On appellera orbite de x sous l'action de T le sous-ensemble de M défini par :

$$\mathcal{O}(x) = \{T^n x \ ; \ n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\} \ \text{ avec } \ T^n = \underbrace{T \circ T \ldots \circ T}_{n \ fois}$$

Le but est donc de décrire ces orbites, pour le plus grand choix possible de conditions initiales et lorsque le temps n devient très grand. Rappelons deux théorèmes fondamentaux de la théorie des probabilités ; pour $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires $i.i.d$ de carré intégrable, en notant $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i)$ nous avons :

Théorème 1.1.3 – ***La loi des grands nombres :***

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i \to \mathbb{E}(X_i) \quad \textit{presque sûrement et dans } L^2.$$

– ***Le théorème central limite :***

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i - \mathbb{E}(X_i)\right) \to \mathcal{N}(0,\sigma) \quad \textit{en loi.}$$

Considérons l'évolution temporelle d'un processus naturel décrit par une transformation T, les quantités physiques observables correspondent alors à des fonctions φ, définies sur l'espace des phases, à valeurs réelles ou complexes. Les données expérimentales que l'on pourrait alors recueillir sur le système se présenteraient comme une suite de "mesures" (au sens relevés expérimentaux) : $\varphi(T^j(x))$, pour un point x de l'espace des phases, et $j \geq 0$. Naturellement le but est d'essayer d'extraire des propriétés intrinsèques au système, à partir de ces données. Nous pouvons voir la suite de mesures :

$$X_0 = \varphi \qquad X_1 = \varphi \circ T \qquad X_2 = \varphi \circ T^2 \qquad \ldots$$

comme un processus stochastique et alors nous demander s'il est possible de retrouver les deux théorèmes précédents pour celui-ci. Le problème essentiel étant que ces variables ne sont clairement pas indépendantes, il nous faut alors de nouvelles hypothèses, plus faibles que l'indépendance, qui caractériseront le fait que le système est assez désordonné pour obtenir une perte de mémoire suffisante.

Définition 1.1.4 – Soit $(M, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique, μ est dite ergodique par rapport T si tout ensemble invariant (i.e tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $T^{-1}A = A$) est de mesure μ égale à 0 ou 1. C'est à dire qu'il n'existe pas d'ensemble invariant qui ne soit pas de mesure triviale.

– μ est mélangeante par rapport à T si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\mu(T^{-n}A \cap B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B) \quad \text{quand } \ n \to +\infty$$

En termes probabilistes, si $\mu(B) > 0$, la définition du mélange revient à écrire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mu(T^{-n}A \cap B)}{\mu(B)} = \mu(A)$$

et on voit dans le membre de gauche apparaître une probabilité conditionnelle : c'est la probabilité d'aller dans A sachant que l'on est parti de B. A la limite cette probabilité est celle de A, ce qui peut être vu comme une *indépendance asymptotique*.
Avec ces concepts nous retrouvons l'analogue des deux théorèmes ; grossièrement, l'ergodicité pour retrouver la loi des grands nombres et le mélange pour retrouver le théorème central limite :

Théorème 1.1.5 (Théorème Ergodique de Birkhoff) *Soit $(M, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système ergodique et $\varphi \in L^1$, alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i(x) \to \int_M \varphi \, d\mu \qquad p.p.t \; x \in M$$

Remarquons qu'avec $X_i = \varphi \circ T^i$, on a par invariance de μ :

$$\mathbb{E}(X_i) = \int_M \varphi \circ T^i \, d\mu = \int_M \varphi \, d\mu.$$

Pour obtenir un théorème central limite il faut être plus précis sur le mélange, en effet il doit s'effectuer assez rapidement, pour quantifier ceci nous introduisons les fonctions de corrélations pour deux observables φ, ψ :

$$C_{\varphi\psi}(n) = \left| \int_M \varphi \circ T^n \, \psi \, d\mu - \int_M \varphi \, d\mu \int_M \psi \, d\mu \right|.$$

Exemple 1.1.6 Il y a décroissance exponentielle des corrélations i.e $C_{\varphi\psi}(n) \leq K(\varphi, \psi)\tau^n$ avec $0 < \tau < 1$, pour une dynamique uniformément dilatante et des observables au moins Hölder.

Théorème 1.1.7 *([9]) S'il existe un espace de Banach $\mathcal{B}$ pour les observables φ et ψ tel que $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{B}$:*

$$C_{\varphi\psi}(n) \leq \alpha(n) \quad \textit{avec} \quad \sum_n \alpha(n) < \infty$$

alors on a le théorème central limite pour le processus défini précédemment.

1.2 Théorie ergodique et analyse fonctionnelle

Nous allons brièvement rappeler les définitions et propriétés de base qui nous serviront tout au long de cette étude. Soit $(M, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique mesurable. Pour une introduction complète de la théorie ergodique ou des systèmes dynamiques on pourra consulter par exemple [70], [111] ou [25].

Proposition 1.2.1 *μ est invariante par T si et seulement si pour toute fonction réelle $\varphi \in L^1(M, \mu)$, on a :*

$$\int_X \varphi \circ T \, d\mu = \int_M \varphi \, d\mu$$

Exemple 1.2.2 Soit X un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue.
Soit x un point périodique : $\exists N \geq 1$ tel que $f^N(x) = x$, alors :

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{f^{(i)}(x)}$$

est une mesure invariante pour f.

Revenons sur la notion d'ergodicité :

Proposition 1.2.3 *μ est ergodique par rapport T si toute fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \circ T = \varphi$ est constante μ-presque partout.*

Corollaire 1.2.4 (Corollaire du Théorème ergodique) *μ est ergodique par rapport à T si et seulement si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$,*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}A \cap B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B) \qquad \textit{quand} \;\; n \to +\infty$$

Rappelons également les notions de transitivité et de minimalité ; celles-ci étant indépendantes de la mesure choisie pour le système dynamique, ce sont uniquement des propriétés topologiques ;

Définition 1.2.5 Soit $T : M \to M$ un homéomorphisme, on dira que T est transitive s'il existe au moins un point $x \in M$ tel que l'orbite de x par T soit dense dans M. Si l'orbite de tous les points de M est dense, alors on dira que T est minimale.

Soit E un espace de Banach, on désigne par E^* son dual topologique, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E. On peut munir E d'une autre topologie que la topologie de la norme : la topologie faible. C'est la topologie la moins fine (i.e avec le minimum d'ouverts) sur E par rapport à laquelle les formes linéaires continues pour la topologie initiale de E, sont encore continues. Pour cette partie d'analyse fonctionnelle on renvoie à [26].

Définition 1.2.6 Soit $(x_n)_n$ une suite de E, on dira que x_n converge faiblement (ou converge au sens de la topologie faible) vers x si pour tout $f \in E^*$, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$. On note $x_n \rightharpoonup x$.

On sait que E^* muni de sa norme habituelle est aussi un espace de Banach (et cela même si E n'est pas complet), et de la même façon on peut le munir de la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires continues vis à vis de la norme de E^* ; on obtient la topologie $*$-faible.

Remarque 1.2.7 *La topologie $*$-faible définie ainsi est moins fine que la topologie que l'on aurait obtenue en considérant E^* comme un espace de base et le munissant de sa topologie faible en utilisant alors le bidual ; c'est pour cette raison que nous introduisons le nom de topologie $*$-faible, et que nous ne nous contentons pas de parler de la topologie faible de E^*. Il est clair que dans le cas d'un espace réflexif ces deux topologies coïncident.*

Remarque 1.2.8 *Si une topologie moins fine possède moins d'ouverts, elle possède en revanche plus de compacts ; d'où l'intérêt d'affaiblir les topologies.*

Définition 1.2.9 Soit $(f_n)_n$ une suite de E^*, on dira que f_n converge $*$-faiblement (ou converge au sens de la topologie $*$-faible) vers f si pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$. On note $f_n \underset{*}{\rightharpoonup} f$.

Théorème 1.2.10 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *La boule fermée unité de E^* est compacte pour la topologie $*$-faible.*

Considérons un cas particulier : soit M est un espace métrique compact, et $E = \mathcal{C}(M)$ (l'espace des fonctions continues sur M), alors E^* coïncide avec l'espace des mesures finies signées sur M, ceci nous permet de définir une nouvelle topologie sur $\mathcal{M}$, l'espace des mesures boréliennes de probabilité sur M :

Définition 1.2.11 Soit $(\mu_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, on dit que μ_n converge vers μ dans la topologie $*$-faible, et on note $\mu_n \underset{*}{\rightharpoonup} \mu$ si pour toute fonction φ continue, $\int_M \varphi \, d\mu_n \to \int_M \varphi \, d\mu$.

Théorème 1.2.12 *$\mathcal{M}$ est compact dans la topologie $*$-faible.*

Soit $f : M \to M$ et $\mathcal{M}_f$ l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité invariantes par T.

Lemme 1.2.13 *$\mathcal{M}_T$ est un ensemble convexe fermé. C'est un sous-ensemble compact de $\mathcal{M}$ et les points extrémaux de $\mathcal{M}_T$ sont les mesures ergodiques par rapport à T.*

Théorème 1.2.14 (Décomposition ergodique) *Toute mesure de $\mathcal{M}_T$ peut être décomposée en une intégrale de mesures ergodiques appartenant à $\mathcal{M}_T$; c'est à dire qu'il existe une partition (à des ensembles de mesure nulle près) de M en sous-ensembles X_α invariants, avec $\alpha \in A$; A étant un espace de Lebesgue, tel que chaque M_α supporte une mesure μ_α ergodique appartenant à $\mathcal{M}_T$ et pour toute fonction φ :*

$$\int \varphi \, d\mu = \iint \varphi \, d\mu_\alpha d\alpha \ .$$

Ce théorème provient du fait que les points extrémaux de $\mathcal{M}_T$ sont les mesures ergodiques, et du théorème suivant :

Théorème 1.2.15 (Choquet) *Soit C un espace métrisable convexe compact dans un espace vectoriel localement convexe (par exemple un espace vectoriel normé) , et notons $\operatorname{extr} C$ l'ensemble des points extrémaux de C. Alors pour tout $x \in C$, il existe une mesure de probabilité μ supportée par $\operatorname{extr} C$ telle que :*

$$x = \int_{\operatorname{extr} C} z \, d\mu(z)$$

Remarque 1.2.16 *Dans le cas plus simple où $\operatorname{extr} \mathcal{M}_T$ est dénombrable $= \{\mu_i\}_{i=1}^{+\infty}$, la décomposition devient, pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T$: $\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \mu_i$, $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i.*

Revenons sur le mélange ; la notion de chaos peut être interprétée comme le fait que les corrélations entre deux mesures effectuées à des temps éloignés sont très faibles ; c'est ce que traduit la notion de mélange.

Définition 1.2.17 Soit $T : (M, \mathcal{A}, \mu) \to (M, \mathcal{A}, \mu)$,

– on dit que μ est faiblement mélangeante par rapport à T si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \left|\mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)\right| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

– on dit que μ est mélangeante par rapport à T si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\mu(T^{-n}A \cap B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

Remarque 1.2.18 *On voit tout de suite que μ mélangeante $\Rightarrow$ μ faiblement mélangeante $\Rightarrow$ μ ergodique.*

Donnons maintenant des caractérisations fonctionnelles de ces notions ; pour cela on utilise habituellement l'opérateur d'évolution de Koopman.

Définition 1.2.19 Soit $T : (M, \mathcal{A}, \mu) \to (M, \mathcal{A}, \mu)$ une application mesurable ; on appelle opérateur d'évolution (ou de Koopman) l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_T : \ & L^\infty \to L^\infty \\ & \varphi \mapsto \varphi \circ T \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que pour tout $\varphi \in L^\infty$, $\quad \|\mathcal{U}_T\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$

Théorème 1.2.20 *Soit $(M, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique, alors :*

(i) μ est ergodique par rapport à T si pour tous $\varphi \in L^1$ et $\psi \in L^\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_M \varphi(\mathcal{U}_T^k\psi)\, d\mu = \int_M \varphi\, d\mu \int_M \psi\, d\mu$$

(ii) μ est faiblement mélangeante par rapport à T si pour tous $\varphi \in L^1$ et $\psi \in L^\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_M \varphi(\mathcal{U}_T^k\psi)\, d\mu - \int_M \varphi\, d\mu \int_M \psi\, d\mu \right| = 0$$

(iii) μ est mélangeante par rapport à T si pour tous $\varphi \in L^1$ et $\psi \in L^\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_M \varphi(\mathcal{U}_T^n\psi)\, d\mu = \int_M \varphi\, d\mu \int_M \psi\, d\mu$$

1.3 L'opérateur de Perron-Frobenius

Nous allons définir dans cette section un outil essentiel pour construire des mesures invariantes et en étudier les propriétés, c'est l'opérateur de Perron-Frobenius. Présentons cet opérateur dans le cas des applications inversibles par morceaux. On trouvera des exposés complets sur cet opérateur par exemple dans [25] et [24], on pourra aussi voir [105].

Définition 1.3.1 Soit T une application bi-mesurable sur un espace de probabilité $(M, \mathcal{A}, \mu)$, on dira que T est inversible par morceaux s'il existe une partition mesurable $\mathcal{Z}$ de M telle que la restriction de T à chaque $Z \in \mathcal{Z}$ soit injective.

On rappelle qu'une partition mesurable de $(M, \mathcal{A}, \mu)$ est une famille d'ensembles mesurables $\mathcal{Z} = \{Z_\alpha \in \mathcal{A}\ ;\ \alpha \in I\}$ où I est un ensemble au plus dénombrable telle que :

$$\mu(M \setminus \bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(Z_{\alpha_1} \cap Z_{\alpha_2}) = 0 \ \text{ si } \ \alpha_1 \neq \alpha_2$$

Définition 1.3.2 Soit T inversible par morceaux sur M et φ une application de M dans $\mathbb{R}$ que l'on appellera potentiel, alors on dit que le triplet (M, T, φ) est un système pondéré.

Le nom de potentiel est donnée par analogie avec la mécanique statistique, d'ailleurs beaucoup de termes du langages des systèmes dynamiques sont issus de la thermodynamique.

Définition 1.3.3 On dira que la mesure de probabilité m sur M est une mesure conforme pour le système pondéré (M, T, φ) si pour tout sous-ensemble $A \subset M$ où T est injective :

$$m(TA) = \int_A \exp(-\varphi)\, dm$$

On connait donc la dérivée de Radon-Nykodim d'une mesure conforme m par rapport à la mesure image Tm, elle est égale à $\exp(-\varphi)$. Les mesures conformes ont des propriétés intéressantes qui sont bien exprimées avec l'opérateur de Perron-Frobenius.

Définition 1.3.4 L'opérateur de Perron-Frobenius du système pondéré (M, T, φ) est formellement donné par :

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{T(y)=x} \exp(\varphi(y)) f(y)\ .$$

On peut aussi utiliser la partition et écrire :

$$\mathcal{L}f = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \exp(\varphi \circ T_{|Z}^{-1}) f \circ T_{|Z}^{-1}\, \mathbb{1}_{TZ}\ .$$

Proposition 1.3.5 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) m est une mesure conforme

(ii) pour tout ensemble A sur lequel T est injective :

$$m(A) = \int \mathcal{L}(\mathbb{1}_A)\, dm$$

(iii) pour tout $f \in L^1_m(X)$ *:*

$$\int f\, dm = \int \mathcal{L}f\, dm$$

(iv) pour tous $f \in L^1_m(X)$ *et* $g \in L^\infty_m(X)$ *:*

$$\int f(g \circ T)\, dm = \int (\mathcal{L}f) g\, dm$$

Le point *(iv)* est important, c'est ce que l'on appellera la relation de dualité entre l'opérateur de Perron-Frobenius et l'opérateur d'évolution. Dans la suite nous allons utiliser un cas particulier de l'opérateur de Perron-Frobenius, c'est à dire une mesure conforme et un potentiel particuliers.

Proposition 1.3.6 *Si* M *est une région bornée de* $\mathbb{R}^N$*,* N *un entier quelconque, et si* T *est une application différentiable inversible par morceaux, alors le potentiel* $\varphi = -\log|\det DT|$ *est bien défini, et la mesure de Lebesgue normalisée est conforme pour* (M, T, φ)*.*

Proposition 1.3.7 *Voici les principales propriétés de* $\mathcal{L}$ *en tant qu'opérateur sur* L^1 *:*

- $\mathcal{L} : L^1 \to L^1$ *est un opérateur linéaire ;*
- $\mathcal{L}$ *est un opérateur positif, au sens que pour tout* $f \in L^1$ *positif,* $\mathcal{L}f$ *est positif ;*
- $\mathcal{L}$ *préserve l'intégrale, c'est à dire que :* $\int_X \mathcal{L}f\, dm = \int_X f\, dm$;
- $\mathcal{L}$ *est une contraction sur* L^1*, c'est à dire que pour tout* $f \in L^1$ *:* $\|\mathcal{L}f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$*. Donc en particulier* $\mathcal{L}$ *est un opérateur continu sur* L^1 *;*
- $\mathcal{L}$ *vérifie la propriété de composition, c'est à dire que si l'on note* $\mathcal{L}_{T_1}$ *et* $\mathcal{L}_{T_2}$ *deux opérateurs associés à deux applications* T_1 *et* T_2*, alors* $\mathcal{L}_{T_1 \circ T_2} f = \mathcal{L}_{T_1} \circ \mathcal{L}_{T_2} f$*. En particulier* $\mathcal{L}_{T^n} f = \mathcal{L}^n_T f$*.*

1.4 Les espaces quasi-Hölder

Nous allons utiliser ces espaces pour étudier les opérateurs de Perron-Frobenius associés à des applications dilatantes par morceaux multidimensionnelles selon l'idée de Saussol [104]. Dans le cas unidimensionnel l'espace généralement utilisé est celui des fonctions à variations bornées, pour des compléments sur ces espaces on pourra consulter [71]. On reprend ici en grande partie le travail de Saussol pour présenter ces espaces [105, 104].

Tout d'abord définissons l'oscillation d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, sur un borélien S de $\mathbb{R}^N$ par :

$$\operatorname{osc}(f, S) = \sup_S f - \inf_S f$$

où on considére les sup et les inf au sens presque partout (c'est à dire au sens essentiel).

Proposition 1.4.1 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \operatorname{osc}(f, B_\varepsilon(x))$ est semi-continue inférieurement, et donc mesurable.*

Remarque 1.4.2 *Les fonctions de L^1 sont définies presque partout, alors que l'oscillation est une fonction à valeurs réelles positives définie partout sur $\mathbb{R}^N$; et on a :*
$\operatorname{supp} \operatorname{osc}(f, B_\varepsilon(.)) \subset B_\varepsilon(\operatorname{supp} f)$

On peut alors définir pour $\varepsilon_0 > 0$,

$$|f|_\alpha = \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \varepsilon^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{osc}(f, B_\varepsilon(x))\, dm(x) \ .$$

On définit alors l'espace

$$V_\alpha = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \ ; \ |f|_\alpha < \infty \right\}$$

Remarquons que $|f|_\alpha$ peut dépendre de ε_0 mais pas V_α. On voit aussi que les fonctions α-Hölder continue à support compact appartiennent à V_α ; mais cet espace est plus grand puisqu'il tolére les dicontinuités.
On définit la norme suivante :

$$\|.\|_\alpha = |.|_\alpha + \|.\|_{L^1_m}$$

Proposition 1.4.3 *$(V_\alpha, \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach. De plus si M est compact, l'intersection de la boule unité de V_α avec l'ensemble des fonctions supportées par M est compacte dans $L^1_m(\mathbb{R}^N)$.*

On note γ_N est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$.

Proposition 1.4.4 *On a une injection continue de V_α dans L^∞_m ; et plus précisément, pour tout $f \in V_\alpha$:*

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\max(1, \varepsilon_0^\alpha)}{\gamma_N \varepsilon_0^\alpha} \|f\|_\alpha \ .$$

De plus V_α est une algèbre pour la somme et le produit usuels des fonctions essentiellement bornées, et on a pour tous $f, g \in V_\alpha$:

$$\|fg\|_\infty \leq \frac{2\max(1, \varepsilon_0^\alpha)}{\gamma_N \varepsilon_0^\alpha} \|f\|_\alpha \|g\|_\alpha \ .$$

Donnons maintenant les principales propriétés de l'oscillation qui nous serviront dans les calculs :

Proposition 1.4.5 *Soient $f, f_i, g \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, g positive, $a, b, c > 0$ et S un borélien de $\mathbb{R}^N$, alors l'oscillation vérifient les propriétés suivantes :*

(i) $\operatorname{osc}\left(\sum_i f_i, B_a(.)\right) \leq \sum_i \operatorname{osc}\left(f_i, B_a(.)\right)$,

(ii) $\operatorname{osc}(f \mathbb{1}_S, B_a(.)) \leq \operatorname{osc}(f, S \cap B_a(.)) \mathbb{1}_S(.) + 2 \left[\operatorname{Esup}_{B_a(.)\cap S} |f|\right] \mathbb{1}_{B_a(S)\cap B_a(S^c)}(.)$,

(iii) $\operatorname{osc}(fg, S) \leq \operatorname{osc}(f, S) \operatorname{Esup}_S g + \operatorname{osc}(g, S) \operatorname{Einf}_S |f|$,

(iv) Si $a + b \leq c$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on a :

$$\operatorname{Esup}_{B_a(x)} f \leq \frac{1}{m(B_b(x))} \int_{B_b(x)} [f(y) + \operatorname{osc}(f, B_c(y))]\, dy$$

Voir preuves dans [104].

1.5 Analyse spectrale

Comme nous l'avons dit, l'opérateur de Perron-Frobenius va nous servir à construire et étudier les mesures invariantes du système considéré ; il va également nous apporter des renseignements précis sur le comportement du système, et tout cela essentiellement grâce à l'étude de son spectre. Nous disposons pour cette étude de tous les grands résultats sur la théorie des opérateurs linéaires en dimension infinie.

Théorème 1.5.1 *Soit (M, T, φ) un système pondéré, muni d'une mesure conforme m. Une mesure de probabilité μ, absolument continue par rapport à m, de densité h positive, est invariante si et seulement si $\mathcal{L}h = h$.*

Preuve Il suffit d'appliquer la relation de dualité entre l'opérateur de Perron-Frobenius et celui de Koopman avec $f = h$. ∎

Les mesures invariantes absolument continues par rapport à une mesure conforme, sont donc exactement les mesures dont les densités sont les points fixes de l'opérateur de Perron-Frobenius, c'est à dire les fonctions propres de l'opérateur associées à la valeur propre 1.

Corollaire 1.5.2 *Une mesure conforme est invariante si et seulement si $\mathcal{L}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.*

La valeur propre 1 pour l'opérateur de Perron-Frobenius est donc directement liée aux mesures invariantes ; mais le reste du spectre va aussi nous fournir de précieuses informations sur la dynamique. En particulier, un cas très intéressant sera celui où l'on pourra montrer que l'opérateur de Perron-Frobenius est quasi-compact.

Définition 1.5.3 On dira que l'opérateur de Perron-Frobenius $\mathcal{L}$ du système (M, T, φ) est quasi-compact (ou qu'il possède un trou spectral) sur un espace de Banach B lorsqu'il vérifie les propositions suivantes :

(i) $\mathcal{L}$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres sur le cercle unité : $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, de multiplicité finie : $m_1, \ldots, m_k$.

(ii) $\mathcal{L}$ admet la décomposition suivante :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Pi_i + Q$$

où Q est un opérateur linéaire de rayon spectral strictement inférieur à 1 et les Π_i sont les projecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i, vérifiant :

$$\Pi_i \Pi_j = 0 \quad \text{pour tous } i \neq j, \quad \text{et } \Pi_i Q = Q \Pi_i = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

La proposition suivante illustre l'importance de cette propriété de quasi-compacité. Pour être le plus complet possible nous la donnons dans le cas général d'un espace de Banach B continûment injecté dans L^1_m et dense dans celui-ci.

Proposition 1.5.4 *Supposons que (M, T, φ) ait une mesure conforme m et que l'opérateur de Perron-Frobenius $\mathcal{L}$ associé soit quasi-compact sur B ; alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) 1 *appartient au spectre de* $\mathcal{L}$*, et si l'on suppose que* $\lambda_1 = 1$*, alors* $h = \Pi_1 \mathbf{1}$ *est la densité de la plus grande mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à* m *:* μ*.*

(ii) Les Π_i *,* $\mathcal{L}$ *et donc* Q *ont une unique extension sur* L^1 *; de plus pour tout* $j = 1, \ldots, k$*,* $\Pi_j(L^1_m) \subset B$*, et pour tout* $f \in L^1_m$*,* $Q^n f \to 0$ *dans* L^1_m *quand* n *tend vers l'infini.*

(iii) Il y a exactement m_1 *mesures invariantes ergodiques absolument continues par rapport à* m*.*

(iv) Si (λ, f)*, avec* $|\lambda| = 1$*, est un couple propre alors les couples* $((\frac{f}{|f|})^k |f|, \lambda^k)$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *sont aussi des éléments propres de* $\mathcal{L}$*. En particulier, l'ensemble* $G = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ *des valeurs propres de module* 1*, est un sous-groupe du cercle unité ; ce qui implique que toute valeur propre de module* 1 *est une racine de l'unité.*

(v) Il existe une partition de M *(modulo* μ*) :* $\{W_{j,l}\ ;\ j = 1, \ldots, m_1\ ;\ l = 0, \ldots, L_j - 1\}$*, telle que tous les ensembles* $W_{j,l}$ *vérifient* $TW_{j,l} = W_{j,l+1 \bmod L_j}$ *et telle que pour tous* $j = 1, \ldots, m_1$ *et* $l = 0, \ldots, L_j - 1$*, le système* $(W_{j,l}\ ,\ T^{L_j}, \mu_{W_{j,l}})$ *est mélangeant, où* $\mu_{W_{j,l}}$ *est la mesure restreinte à* $W_{j,l}$*, normalisée.*

La quasi-compacité nous apporte donc beaucoup d'informations sur le système, mais vérifier cette propriété directement peut être très délicat, pour cela le théorème suivant sera précieux pour nos analyses spectrales puisqu'il nous assure la quasi-compacité de toute une classe d'opérateurs. Donnons le tout d'abord dans un cadre très général ;

Théorème 1.5.5 (Ionescu-Tulcea et Marinescu) *Considérons deux espaces de Banach* $(X, |.|)$ *et* $(Y, \|.\|)$ *avec* $X \subset Y$ *; soit un opérateur* $P : X \to X$*, on prend la norme :*

$$\|P\|_X = \sup\Big\{\frac{\|Pf\|}{\|f\|}\ ;\ f \in X\ ;\ f \neq 0\Big\}$$

Supposons que :

(i) Si $f_n \in X$ *;* $f \in Y$*,* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$*, et* $|f_n| \leq C$ *pour tout* n*, alors* $f \in X$ *et* $|f| \leq C$ *;*

(ii) $H = \sup_{n\geq 0} \|P^n\|_X < \infty$ *;*

(iii) Il existe $k \geq 1$*,* $0 < r < 1$*, et* $R < \infty$ *tels que pour tout* $f \in X$ *:*

$$\left|P^k f\right| \leq r\,|f| + R\,\|f\|$$

(iv) Si X_1 *est un sous-ensemble borné de* $(X, |.|)$*, alors la fermeture de* $P^k X_1$ *est compacte dans* $(Y, \|.\|)$ *;*

alors si toutes ces hypothèses sont vérifiées, P *est un opérateur quasi-compact sur* X*.*

Les cas qui vont nous intéresser le plus souvent sont les suivants :

Corollaire 1.5.6 *Si l'on prend* $X = V_\alpha$ *ou* $X = BV$ *et* $Y = L^1_m$ *munis de leurs normes usuelles, et que l'on considère l'opérateur de Perron-Frobenius pour* P *alors il suffit de vérifier l'hypothèse* (iii) *pour assurer la quasi-compacité de celui-ci.*

L'hypothèse (iii) est généralement appelée *inégalité du type Lasota-Yorke.*

1.6 Récurrence

Poincaré est le fondateur de la théorie des systèmes dynamiques. Dès la fin du XIXième siècle, il introduit une étude qualitative des solutions d'équations différentielles qu'il ne pouvait résoudre explicitement, en particulier celles des équations régissant le mouvement des planètes. Dans son travail de 1890 "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique" [94] il fait remarquer une propriété des trajectoires de ces corps célestes qui est à la base de la théorie de la récurrence dans les systèmes en évolution : "*Je n'ai pu résoudre rigoureusement et complètement le problème de la stabilité du système solaire, en entendant ce mot dans un sens strictement mathématique. L'emploi des invariants intégraux m'a cependant permis d'atteindre certains résultats partiels, s'appliquant surtout au problème dit restreint où les deux corps principaux circulent dans des orbites sans excentricité, pendant que le corps troublé a une masse négligeable. Dans ce cas, si on laisse de côté certaines trajectoires exceptionnelles, dont la réalisation est infiniment peu probable, on peut démontrer que le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.*" Pour un exposé complet de cette partie sur la récurrence déterministe, on pourra consulter la thèse de Benoît Saussol [105].

Théorème 1.6.1 *(Poincaré) Soit (X, T, μ) un sytème dynamique, alors $\forall A \subset X$ et $\forall N \in \mathbb{N}$:*

$$\mu\left\{x \in A/\ \exists n \geq N\ ;\ T^n(x) \in A\right\} = 1.$$

Il faut bien noter que le théorème ne parle que des points initialement dans l'ensemble considéré ; pour cela ce théorème est parfois appelé le théorème du retour.

Définition 1.6.2 Soit (X, T, μ) un sytème dynamique, $A \subset X$ et soit $x \in A$, on appelle *premier temps de retour* de x dans A, l'entier $\tau_A(x)$ défini par :

$$\tau_A(x) = \inf\left\{k \geq 1\ ;\ T^k(x) \in A\right\}$$

De la même manière pour $x \in X$, on définit son *premier temps d'entrée* dans A ; noté aussi $\tau_A(x)$. D'après le théorème de Poincaré, dès que $\mu(A) > 0$, presque tout point de A revient au moins une fois dans A. Il est clair que plus l'ensemble est petit, plus il faudra attendre avant de revenir dans A. C'est ce que traduit le théorème de Kac dans le cas d'une mesure ergodique.

Lemme 1.6.3 *(Kac) Soit (X, T, μ) un système ergodique. Alors pour tout $A \subset X$ avec $\mu(A) > 0$, l'espérance du premier temps de retour en A vaut :*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \tau_A(x)\, d\mu = \frac{1}{\mu(A)}$$

Dans la suite on verra de plus que l'on peut donner une estimation asymptotique (lorsque $\mu(A) \to 0$) de la distribution des temps de retour.
On a en fait un résultat un peu plus général, dans lequel on n' a pas besoin de l'ergodicité :

Proposition 1.6.4 *Pour tout $A \subset X$:*

$$\int_A \tau_A(x)\, d\mu = \mu(\tau_A < \infty)$$

Le Théorème de Kac découle de cette proposition dans le cas d'une mesure ergodique, en effet : $\{\tau_A < \infty\}$ est d'après Poincaré un ensemble de mesure positive et invariant, donc la mesure étant ergodique, on a $\mu(\{\tau_A < \infty\}) = 1$, d'où le résultat. Rappelons maintenant la construction des tours de Rokhlin et utilisons les pour montrer directement le théorème de Poincaré et le lemme de Kac : Soit $A \subset X$ de mesure positive.
D'après le Théorème de Poincaré presque tous les points de A reviennent dans A, on peut donc partitionner A suivant les valeurs possibles des temps de retour, pour cela on pose :

$$A_k = \{x \in A \ ; \ \tau_A(x) = k\} \ ; \ k = 1, \ldots, +\infty$$

On a donc :

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ ; \quad et \ \forall i \neq j, \ A_i \cap A_j = \emptyset$$

De manière générale, pour tout entier k, les images $TA_k, T^2A_k, \ldots, T^{k-1}A_k$ ne rencontrent pas A et sont deux à deux disjointes.

Définition 1.6.5 Dans un système dynamique (X, T, μ), on appelle tour de Rokhlin une famille finie de parties mesurables de la forme :

$$\Delta = (B, TB, \ldots, T^{h-1}B)$$

où les T^jB sont deux à deux disjoints. L'ensemble B est la *base* de la tour, chaque T^jB est un *étage* et l'entier h est la *hauteur* de la tour.

On représente souvent graphiquement une tour de Rokhlin en mettant les étages les uns au dessus des autres ; l'action de T consiste alors à monter d'un étage.

Par exemple dans la suite on se servira de la tour de hauteur k suivante :

$$(A_k, TA_k, \ldots, T^{k-1}A_k)$$

Lemme 1.6.6 *(Rokhlin) Soit (X, T, μ) un système dynamique apériodique. Alors, $\forall \epsilon > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists B$ mesurable tel que :*
- *Les $T^iB, \ 0 \leq i \leq n$ sont deux à deux disjoints,*
- *$\mu(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^iB) > 1 - \epsilon$*

Exemple 1.6.7 $(B, TB, \ldots, T^{n-1}B)$ est une tour de Rokhlin.

Preuve [Preuves du théorème de Poincaré et du lemme de Kac]
- *Poincaré :*
  On a vu que les $TA_\infty, T^2A_\infty, \ldots, T^{k-1}A_\infty$ sont disjoints deux à deux, et par invariance de la mesure toutes ces partie ont même mesure que A_∞. μ étant une mesure de probabilité, $\mu(X) = 1$ donc ceci n'est possible que si $\mu(A_\infty) = 0$.

- *Kac :*
  μ est ergodique et $\mu(A) > 0$ donc

$$\mu(\bigcup_{n \geq 0} T^nA) = 1$$

Et on a vu que A était réunion disjointe des A_k il vient que $\bigcup_{n\geq 0} T^n A$ est constitué de la réunion des $T^j A_k$ ceci de manière disjointe, d'une part par définition des A_k d'autre part par injectivité de T on sait que les ensembles : $TA_j, T^2A_j, \ldots, T^{j-1}A_j$ ne rencontrent pas les
$TA_k, T^2A_k, \ldots, T^{k-1}A_k$ pour $k \neq j$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \mu(T^j A_k) = 1$$

ce qui par invariance de la mesure donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mu(A_k) = 1$$

et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mu(A_k) = \int_A \tau_A(x)\,d\mu(x)$$

d'où le résultat.

∎

Venons-en à l'étude de la distribution du premier temps de retour. On considère un système ergodique (X, T, μ) ; le lemme de Kac nous dit que pour tout ensemble mesurable U de mesure positive, l'espérance conditionnelle de τ_U sachant U est égale à $1/\mu(U)$. On a des résultats plus précis sur le comportement du premier temps de retour lorsque $\mu(U) \to 0$. On verra en particulier que sous certaines conditions on atteindra une loi exponentielle. Le lemme qui suit est dans cet état d'esprit. Nous allons étudier les fonctions de répartitions des variables aléatoires discrètes suivantes :

$$\mu(U)\tau_U \ : \ X \longrightarrow \mu(U)\,\mathbb{N}$$
$$\mu_U(U)\tau_U \ : \ X \longrightarrow \mu(U)\,\mathbb{N}$$

où on note μ_U la mesure de probabilité conditionnelle à U :

$$\mu_U(A) = \frac{\mu(A \cap U)}{\mu(U)}$$

On pose :

$$\widetilde{f}_U(t) = \frac{1}{\mu(U)}\,\mu\left\{x \in U \ ; \ \mu(U)\,\tau_U(x) \leq t\right\}$$

et :

$$\widetilde{f}(t) = \lim_{\mu(U)\to 0} \widetilde{f}_U(t)$$

Théorème 1.6.8 *(Hirata-Saussol-Vaienti [63] et Haydn-Vaienti [59]) Pour les systèmes α-mélangeant et ϕ-mélangeant avec des taux $\alpha(n)$ et $\phi(n)$ sommables en n; si l'on choisit une suite de cylindres $U_n \in \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est une partition génératrice, autour d'un point $z \in X$; telle que $\lim_{n\to+\infty} \mu(U_n) = 0$. Alors pour presque tout z, $f_{U_n}(t)$ converge vers $1 - e^{-t}$ lorsque $n \to +\infty$.*

Exemple 1.6.9 A noter l'exemple d'une dynamique intermittente introduite par Hirata, Saussol et Vaienti [63]. Il s'agit de l'application de l'intervalle suivante : $0 < \alpha < 1$:

$$T(x) = \begin{cases} x(1 - 2^\alpha x^\alpha) & \forall x \in \quad [0, 1/2[\\ 2x - 1 & \forall x \in \quad [1/2, 1] \end{cases}$$

Cette application n'est pas fortement mélangeante et on peut quand même établir une loi exponentielle pour le premier retour quand on choisit les U_n comme éléments de la partition dynamique construite à partir de la partition en intervalles de monotonie de T. Nous reviendrons sur ce type de dynamiques dans le chapitre suivant.

Définition 1.6.10 On dira qu'une suite de fonctions de répartitions $(F_n)_n$ *converge faiblement* vers F (qui ne sera pas toujours une fonction de répartition elle-même) lorsque F sera croissante et que $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ pour tout t dans l'ensemble de continuité de F. Dans ce cas on notera $F_n \Rightarrow F$.

On notera :

$$f(t) = \lim_{\mu(U)\to 0} f_U(t)$$

$$\widetilde{f}(t) = \lim_{\mu(U)\to 0} \widetilde{f}_U(t)$$

L'ensemble des lois limites possibles pour le premier temps de retour ou d'entrée a été entièrement caractérisé ; en effet :

Théorème 1.6.11 *(Kupsa-Lacroix [78]) Pour l'entrée les lois limites appartiennent appartiennent à la classe $\mathcal{F}$ de fonctions vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$
2. $f = 0$ *sur* $[-\infty; 0]$
3. f *est croissante et continue*
4. f *est concave sur* $[0; \infty]$
5. $f(t) \leq t$ *pour* $t \geq 0$

Et pour le retour à la classe $\widetilde{\mathcal{F}}$ des fonctions vérifiant :

1. $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$
2. $\widetilde{f} = 0$ *sur* $[-\infty; 0]$
3. $\widetilde{f}$ *est croissante*
4. $\int_0^{+\infty} (1 - \widetilde{f}(t))dt \leq 1$

Il est intéressant de remarquer que pour l'entrée les lois limites sont continues, ce qui n'est pas forcément le cas pour le retour. On sait que toutes les lois limites pour le premier retour ou la première entrée appartiennent à un de ces deux ensembles ; mais ce qui est plus étonnant c'est que toutes les fonctions de ces ensembles peuvent être atteintes par passage à la limite sur des fonctions de répartitions des premiers temps, en choisissant une suite d'ensembles mesurables $(U_n)_n$ dont la mesure tend vers 0. C'est ce que traduit le théorème suivant :

Théorème 1.6.12 *(Kupsa-Lacroix) Soit (X, T, μ) un système ergodique apériodique. Alors :*

1. *Pour tout $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{F}}$, il existe une suite $(U_n)_n$ telle que $\mu(U_n) \to 0$ et $\widetilde{f}_{U_n} \Longrightarrow \widetilde{f}$.*
2. *Pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe une suite $(U_n)_n$ telle que $\mu(U_n) \to 0$ et $f_{U_n} \Longrightarrow f$.*

Ensuite on peut établir un lien surprenant entre la distribution du premier temps d'entrée et celle du premier temps de retour :

Théorème 1.6.13 *(Haydn-Lacroix-Vaienti) Soit (X, T, μ) un système ergodique, et $(U_n)_n$ une suite d'ensembles mesurables de mesure positive. Alors la suite de fonctions $\widetilde{f}_{U_n}$ converge faiblement si et seulement si la suite de fonctions f_{U_n} converge faiblement.*
Dans ce cas :

$$f(t) = \int_0^t (1 - \widetilde{f}(s))ds \ , \quad t \geq 0$$

On peut faire le lien avec le théorème qui établissait que la loi limite pour le retour était $1 - e^{-t}$, en remarquant que $1 - e^{-t}$ est le seul *point fixe* de la relation précédente ; en effet :

$$\int_0^t 1 - (1 - e^{-s})ds = \int_0^t e^{-s}ds = 1 - e^{-t}$$

Preuve En fait on ne montrera ici qu'une implication, cette preuve ayant surtout pour but de montrer comment apparaît la formule.
On note :

$$V_k = \{x \in U \ ; \ \tau_U(x) = k\}$$

$$U_k = \{x \in X \ ; \ \tau_U(x) = k\}$$

Alors à un ensemble de mesure nulle près on peut écrire X comme la réunion disjointe des ensembles : $\bigcup_{j=0}^{k-1} T^j V_k$, $k = 1, 2, \ldots$
D'autre part on peut écrire :

$$U_k = \bigcup_{j=0}^{+\infty} T^j V_{k+j},$$

ce qui donne par invariance de la mesure :

$$\mu(U_k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mu(V_j) \qquad (*)$$

Ensuite on a :

$$f_U(t) = \mu(\bigcup_{k=1}^{[t/\mu(U)]} U_k) = \sum_{k=1}^{[t/\mu(U)]} \mu(U_k)$$

On rappelle que f_U est la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète, elle est donc une fonction en escaliers ; plus exactement elle est constante sur les intervalles : $[k\mu(U), (k+1)\mu(U)[$ et sa valeur est définie par la somme ci-dessus, et elle a un saut de discontinuité de hauteur $\mu(U_k)$ au point $k\mu(U)$.
On définit $\bar{f}_U$ la fonction linéaire par morceaux qui prend les mêmes valeurs que f_U en chaque point $k\mu(U)$, et qui est linéaire sur les intervalles $[k\mu(U), (k+1)\mu(U)]$.
Or d'après $(*)$ les sauts de discontinuité de f_U sont décroissants ce qui implique que $\bar{f}_U$

soit concave. D'autre part il est clair qu'elle est continue et croissante. La dérivée à droite pour un point $t \in [k\mu(U), (k+1)\mu(U)[$ est :

$$\bar{f}_U'^{+}(t) = \frac{\mu(U_{k+1})}{\mu(U)}$$

De la même façon pour le retour :

$$\widetilde{f}_U(t) = \frac{1}{\mu(U)} \sum_{k=1}^{[t/\mu(U)]} \mu(V_k)$$

est constante sur $[k\mu(U), (k+1)\mu(U)[$ et fait un saut de $\dfrac{\mu(V_k)}{\mu(U)}$ en $k\mu(U)$. Avec ce qui précède on peut écrire $\forall\, t \geq 0$:

$$\bar{f}_U'^{+}(t) = 1 - \widetilde{f}_U(t) \qquad (**)$$

Par construction de $\bar{f}_U$ il est clair que :

$$\left\| f_U - \bar{f}_U \right\|_\infty \leq \mu(U) \qquad (***)$$

Soit $(U_n)_n$ une suite d'ensembles mesurables telle que $\mu(U_n) \to 0$ et $\widetilde{f}_{U_n} \Rightarrow \widetilde{f}$ (alors $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{F}}$). Alors $\widetilde{f}$ est croissante et $\in [0,1]$ donc $\widetilde{f}_{U_n} \to \widetilde{f}$ presque partout sur $[0, +\infty[$. On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur $[0,t]$ pour $t \geq 0$ et avec $(**)$ on a :

$$\bar{f}_{U_n}(t) = \int_0^t (1 - \widetilde{f}_{U_n}(s))ds \to \int_0^t (1 - \widetilde{f}(s))ds =: f(t)$$

On pose $f(t) = 0$ pour $t > 0$, donc $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ d'où $f \in \mathcal{F}$. D'autre part d'après $(***)$ $f_{U_n}(t) \to f(t), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Donc si $\widetilde{f}_{U_n} \Rightarrow \widetilde{f}$ alors $f_{U_n} \Rightarrow f$ défini par la formule précédente. ∎

Corollaire 1.6.14 *La distribution limite du premier temps de retour est la loi exponentielle si et seulement si celle du premier temps d'entrée est aussi la loi exponentielle.*

Rappelons enfin les résultats importants sur le nombre de visites dans un ensemble U fixé.

Définition 1.6.15 On définit le *nombre de visites* $\xi_U(x,t)$ dans U au temps normalisé t, par :

$$\xi_U(x,t) = \sup \left\{ n > 0 \ ; \ \tau_U^{(n)} \leq \frac{t}{\mu(U)} \right\}$$

$\xi_U(x,t)$ est une variable aléatoire discrète dont la loi est proche d'une loi de Poisson et tend vers celle-ci lorsque $\mu(U) \to 0$ dans le cas où U décroit autour d'un point générique pour un système très mélangeant.
Sur le modèle des sections précédentes nous allons étudier les propriétés de la distribution de ce nombre de visites pour l'entrée et le retour, c'est à dire les quantités suivantes :

$$D_U^{(k)}(t) = \mu \left\{ x \in X \ ; \ \xi_U(x,t) = k \right\}$$

et :

$$\widetilde{D}_U^{(k)}(t) = \mu_U \left\{ x \in U \ ; \ \xi_U(x,t) = k \right\}$$

Théorème 1.6.16 *La distribution du nombre de visites pour le retour diffère au plus de la loi de Poisson de la quantité $g(t,k,U)+g(t,k+1,U)$ c'est à dire :*

$$\left|\widetilde{D}_U^{(k)}(t)-\frac{t^k}{k!}e^{-t}\right|\leq g(t,k,U)+g(t,k+1,U)$$

avec pour tout $k\geq 0$ $g(t,k,U)=(12t^k/k+k^{k-1})\sqrt[k]{f(k,U)}$ où $f(k,U)$ est une fonction dépendant du type et de la vitesse de mélange, par exemple dans le cas d'un α-mélange avec une vitesse α pour la partition $\mathcal{U}=\{U,U^c\}$,
on a :

$$f(k,U)=k(3d(U)+\inf_{m\in\mathbb{N}}\{\alpha(m)+3m\mu(U)\})$$

On peut montrer qu'autour d'un point générique et pour un système très mélangeant la loi de Poisson est atteinte lorsque $\mu(U)\to 0$.

Nous avons les relations suivantes :

$$D_U^{(k)}(t)=f_U^{(k)}(t)-f_U^{(k+1)}(t) \tag{1.1}$$

et :

$$\widetilde{D}_U^{(k)}(t)=\widetilde{f}_U^{(k)}(t)-\widetilde{f}_U^{(k+1)}(t) \tag{1.2}$$

En effet il suffit de remarquer qu'un point visite k fois U en un temps $t/\mu(U)$ si et seulement si son $k$ième temps de retour est inférieur à $t/\mu(U)$ et son $(k+1)$ième est strictement supérieur à $t/\mu(U)$. i.e :

$$\begin{aligned}
D_U^{(k)}(t) &= \mu\left\{x\in X\ ;\ \xi_U(x,t)=k\right\}\\
&= \mu\left(\left\{x\in X\ ;\ \tau_U^{(k)}(x)\leq\frac{t}{\mu(U)}\right\}\cap\left\{x\in X\ ;\ \tau_U^{(k+1)}(x)>\frac{t}{\mu(U)}\right\}\right)\\
&= \mu\left\{x\in X\ ;\ \tau_U^{(k)}(x)\leq\frac{t}{\mu(U)}\right\}-\mu\left\{x\in X\ ;\ \tau_U^{(k+1)}(x)\leq\frac{t}{\mu(U)}\right\}\\
&= f_U^{(k)}(t)-f_U^{(k+1)}(t)
\end{aligned}$$

Evidemment on a la même relation pour les retours. On a vu qu'il existait un lien entre les lois limites d'entrée et de retour pour le premier temps de retour, on établit directement un lien similaire pour le nombre de visites grâce aux relations précédentes

Corollaire 1.6.17 *Si les hypothèses du théorème 2.16 de Chaumoître-Kupsa sont vérifiées aux ordres k et $k+1$, les lois limites pour le nombre de visites vérifient la relation suivante :*
pour tout $t\geq 0$:

$$D^{(k)}(t)=\int_0^t(\widetilde{D}^{(k-1)}(s)-\widetilde{D}^{(k)}(s))ds$$

On rappelle que l'on avait une relation analogue pour les premier temps de retour, dans laquelle la loi exponentielle (qui était la loi limite) était un point fixe ; de la même façon, ici *la loi de Poisson* est un point fixe :
en effet, en posant

$$I_k=\int_0^t s^k e^{-s}\,ds,$$

par une intégration par parties on a la relation de récurrence suivante :

$$I_k = -e^{-t}t^k + kI_{k-1}$$

donc en remplaçant dans la formule :

$$\begin{aligned} D^{(k)}(t) &= \int_0^t \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}e^{-s} - \frac{s^k}{k!}e^{-s}\, ds \\ &= \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} - \frac{I_k}{k!} \\ &= \frac{t^k}{k!}e^{-t} \end{aligned}$$

Le fait que la loi de Poisson apparaîsse dans la distribution du nombre de visites n'est pas un hasard, en effet le processus étudié est semblable à celui du processus de Poisson :

Définition 1.6.18 Supposons que certains évènements se répartissent de manière aléatoire dans le temps. On désigne par $N(t)$ le nombre d'évènements survenus dans l'intervalle de temps $[0;t]$. On dit que le processus $\{N(t);\ t \geq 0\}$ est un *processus de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$, si :
i. $N(0) = 0$;
ii. les nombres d'évènements survenant au cours d'intervalles disjoints sont des variables indépendantes ;
iii. la distribution du nombre d'évènements survenant pendant un intervalle donné ne dépend que de la longueur de cet intervalle, et pas de son origine en particulier ;
iv. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$;
v. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

On peut montrer dans ce cas que $N(t)$ est une variable aléatoire de Poisson d'espérance λt.

Théorème 1.6.19 *Pour tout processus de Poisson de paramètre* λ *:*

$$P\{N(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Dans notre situation quelques unes de ces conditions ne sont pas vérifiées, la plus importante étant celle de l'indépendance. En effet si on avait l'indépendance on pourrait très simplement en déduire une loi de Poisson car :

$$\xi_U(x,t) = \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \chi_U(T^j(x))$$

donc :

$$\xi_U(x,t) = \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} X_j$$

où les X_j seraient des variables de Bernouilli indépendantes, c'est à dire que $\xi_U(x,t)$ serait une variable aléatoire binomiale pour tout U.

Construisons la suite de variables aléatoires $(\xi_{U_n}(x,t))_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la suite des ensembles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = 0$. Alors on pourrait appliquer le Théorème de probabilité suivant :

Théorème 1.6.20 *Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires binomiales, d'ordre n, d'espérance λ. Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire de Poisson de paramètre λ.*

On aurait donc fait apparaître assez facilement une loi de Poisson pour le nombre de visites. En fait le résultat que nous avons annoncé dans la section précédente, dans le cas d'un système mélangeant (autour d'un point générique) découle du fait que nous avons une *indépendance asymptotique* des temps de retour successifs lorsque $\mu(U) \to 0$; en effet on peut se rappeler de l'interprétation probabiliste du mélange. Concluons avec un résultat sur le nombre moyen de visites pour l'entrée dans un ensemble U de mesure positive : Soit $\xi_U(x,t)$ le nombre de visites de x dans U en un temps t normalisé.

Théorème 1.6.21 *Soit U un ensemble mesurable tel que $\mu(U) > 0$; l'espérance du nombre de visites pour l'entrée dans U est égale à $\left[\frac{t}{\mu(U)}\right]\mu(U)$.*

$$E(\xi_U(x,t)) = \left[\frac{t}{\mu(U)}\right]\mu(U)$$

Preuve Soit $\xi_U(x,t)$ le nombre de visites de x dans U en un temps t normalisé. Alors :

$$\xi_U(x,t) = \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \chi_U(T^j(x))$$

Et donc l'espérance :

$$\begin{aligned}
E_U(\xi_U(x,t)) &= \int_X \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \chi_U(T^j(x))d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \int_X \chi_U(T^j(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \int_X \chi_{T^{-j}U}(x)d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \mu(T^{-j}U)
\end{aligned}$$

donc par invariance de la mesure on peut conclure. ∎

On note $\xi(x,t) = \lim_{\mu(U)\to 0} \xi_U(x,t)$

Théorème 1.6.22 *L'espérance limite (lorsque $\mu(U) \to 0$) du nombre de visites pour l'entrée est inférieure ou égale à t :*

$$E(\xi(x,t)) = t$$

Preuve

$$\begin{aligned} E(\xi(x,t)) &= \int_X \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \chi_U(T^j(x))d\mu(x) \\ &= \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \int_X \lim_{n\to+\infty} \chi_U(T^j(x))d\mu(x) \\ &= \sum_{j=1}^{[t/\mu(U)]} \lim_{n\to+\infty} \int_X \chi_U(T^j(x))d\mu(x) \end{aligned}$$

par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue,
car $\chi_U(T^j(x)) \leq 1$, pour tout j et $1 \in L^1(\mu, X)$ puisque μ est une mesure de probabilité.
Donc :

$$E(\xi(x,t)) = \lim_{\mu(U)\to 0} \left[\frac{t}{\mu(U)}\right] \mu(U)$$

or :

$$\left[\frac{t}{\mu(U)}\right] \mu(U) \leq t < \left[\frac{t}{\mu(U)}\right] \mu(U) + \mu(U)$$

d'où :

$$\lim_{\mu(U)\to 0} \left[\frac{t}{\mu(U)}\right] \mu(U) = t.$$

∎

Chapitre 2

Dynamique Intermittente

Ce chapitre constitue un article écrit en collaboration avec Giampaolo Cristadoro, Nicolaï Haydn et Sandro Vaienti [36]. Nous donnons une étude statistique complète d'applications du cercle et de l'intervalle du type Lorenz, ayant des points fixes neutres et une dérivée non bornée. Ces applications ont été étudiées dans la littérature physique. Nous montrons en particulier que les corrélations décroissent de façon polynomiale et que les théorèmes limites (lois stables et théorème central limite) s'appliquent pour des observables Hölder-continues. Nous montrons de plus que le premier temps de retour et le premier temps d'entrée suivent asymptotiquement une distribution exponentielle.

2.1 Introduction

L'application intermittente typique de l'intervalle est la dynamique de Pomeau-Manneville T définie sur $[0,1]$, admettant un point fixe neutre en 0. Son comportement au voisinage de 0 est $T(x) = x + cx^{1+\alpha}$; et elle est uniformément dilatante ailleurs. La constante α appartient à $(0,1)$ et garantit l'existence d'une mesure de probabilité invariante absolument continue. La constante c peut être choisie de façon à donner une structure Markovienne à T. Il est connu que cette application a une décroissance polynomiale des corrélations, qu'elle soit Markovienne ou non [112].

Une autre classe intéressante d'applications de l'intervalle est celle des applications uniformément dilatantes du type Lorenz (voir [56, 111, 47] pour leur introduction), dont les caractéristiques sont la présence de points pour lesquels la dérivée n'est pas bornée et l'absence de structure de Markov. Dans ce cas, il est possible de construire des tours et de trouver différents taux de convergence pour la décroissance des corrélations, dépendants de la queue de la fonction de retour et de la base de la tour (voir par exemple [40] et [41]). Ce dernier article traite en particulier des applications unidimensionnelles admettant des points critiques et éventuellement des points à dérivée non bornée, mais laisse ouvert le cas où des points fixes neutres sont présents.

Dans ce travail nous nous intéressons aux dynamiques qui présentent les deux caractéristiques précédentes. Elles ont été introduites dans la littérature physique par Grossmann et Horner en 1985 dans [52] ; entre autre ils obtiennent numériquement une décroissance polynomiale des corrélations. Une autre contribution est celle de Pikovsky [91], qui montre heuristiquement que ces applications engendrent un processus de diffusion anomale avec des écarts quadratiques croissant plus vite que linéairement. Artuso et Cristadoro dans [6] ont amélioré ce résultat. Récemment, les applications de Lorenz avec un *cusp* ont été utilisées

pour décrire la distribution du maximum de Casimir dans le modèle de Kolmogorov-Lorenz de dynamique des géofluides [90]. Malgré ces intérêts physiques, nous n'avons pas trouvé d'étude mathématique rigoureuses de telles applications.

Ces applications sont définies sur le tore $\mathbb{T} = [-1, 1]/\sim$ et dépendent d'un paramètre γ (voir plus bas). Lorsque $\gamma = 2$, l'application a été prise par Alves et Araujo [2] comme un exemple d'applications pour lesquelles le premier temps hyperbolique n'est pas sommable ; elle est donnée par :

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - 2\sqrt{|x|} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.1}$$

Il est en particulier montré dans [2] un mélange topologique ; cependant aucune autre propriété ergodique n'est étudiée.

Les applications de Grossmann et Horner sont en réalité quelque peu différentes de celles étudiées dans [91] et [6]. La différence principale résidant dans le fait que ces dernières sont définies sur le cercle et non sur l'intervalle. Nous étudierons en détails la version définie sur le cercle dans les sections 2 à 5 et nous montrerons dans la section 6 comment généraliser ces résultats au cas de l'intervalle. Puisque les deux versions présentent une structure de Markov, l'information primordiale, en particulier dans le calcul de la distorsion, vient du comportement local autour des points fixes neutres et des points à dérivée non bornée. Ces comportements ne diffèrent pas, que l'on se place sur le cercle ou sur l'intervalle. Il y a cependant une différence intéressante ; la version du cercle introduite dans la section 1, rend la mesure de Lebesgue automatiquement invariante alors que ce n'est pas le cas de la version de l'intervalle introduite en section 6. La stratégie que nous adoptons (tours de Young) nous donnera néanmoins l'existence d'une mesure invariante absolument continue. Nous compléterons en donnant des informations sur le comportement de la densité de cette mesure. Il est intéressant de remarquer que dans la classe d'applications introduite par Grossmann et Horner sur l'intervalle $[-1, 1]$, l'analogue de (2.1) est donné par :

$$\tilde{S}(x) = 1 - 2\sqrt{|x|}\,. \tag{2.2}$$

Cette application a été étudiée par Hemmer en 1984 [61]. Il a calculé par tâtonnements la densité invariante $\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$ et l'exposant de Lyapunov (simplement égal à 1/2), mais ne parle que d'une décroissance lente des corrélations. Nous montrerons dans la section 6 comment retrouver le comportement qualitatif de cette densité.

Dans ce travail, nous étudions la famille d'applications continues à un paramètre T (Fig 1) qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{T} \setminus \{0\}$, $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{T} \setminus (\{0\} \cup \{1\})$, définies implicitement sur le cercle par les équations :

$$x = \begin{cases} \dfrac{1}{2\gamma}(1 + T(x))^\gamma & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2\gamma} \\ T(x) + \dfrac{1}{2\gamma}(1 - T(x))^\gamma & \text{si} \quad \dfrac{1}{2\gamma} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

et pour les valeurs négatives de x en posant : $T(-x) = -T(x)$. Nous supposons que le paramètre $\gamma > 1$. Notons que pour $\gamma = 1$, l'application est continue, de dérivée constante égale à 2 et est l'application classique de doublement de l'angle. Le point 1 est fixe et la dérivée y vaut 1, alors qu'en 0, la dérivée devient infinie. L'application laisse la mesure de

Lebesgue ν invariante (il est direct de vérifier que 1 est un point fixe de l'opérateur de Perron-Frobenius). Nous prouverons dans les sections suivantes l'ensemble des propriétés statistiques usuelles : la décroissance des corrélations (qui, à cause du point fixe parabolique sera polynomiale avec un taux identique à celui trouvé dans [52]), la convergence vers des lois stables et les larges déviations. Enfin, nous étudierons les statistiques de récurrence. Tous ces résultats découleront de techniques existantes, en particuliers celle des tours, combinées avec une preuve de bornitude de la distorsion (section suivante), qui nous dira que le logarithme de la dérivée de la fonction de retour est (localement) Hölder sur chaque cylindre de la partition dénombrable de Markov.

2.2 Distorsion

Notations : $a_n \approx b_n$ signifie qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que $C^{-1}b_n \leq a_n \leq Cb_n$ pour tout $n \geq 1$; avec $a_n \lesssim b_n$, ou encore $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ avec a_n et b_n non négatif signifie qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que $\forall n \geq 1$, $a_n \leq Cb_n$; et $a_n \sim b_n$ signifie que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. ν dénotera la mesure de Lebesgue. C sera une constante pouvant prendre différentes valeurs au cours des calculs.
Nous commençons par décrire un codage convenable pour chaque point $x \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} = \cup_{i\geq 0} T^{-i}\{0\}$ et nous donnons quelques comportement locaux. Il y a une partition de Markov dénombrable $\{I_m\}_{m\in\mathbb{Z}^*\bigcup\{0\pm\}}$ associée à cette application, construite modulo ν comme suit : $I_m = (a_{m-1}, a_m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$ et $I_0^+ = (0, a_{0+})$ et $I_0^- = (a_{0_-}, 0)$, où :

$$a_{0+} = \frac{1}{2\gamma} \quad , \quad a_{0-} = -\frac{1}{2\gamma} \quad \text{et} \quad a_i = T_+^{-i} a_{0+} \quad , \quad a_{-i} = T_-^{-i} a_{-0}, \ i \geq 1,$$

avec $T_+ = T_{|(0,1)}$, $T_- = T_{|(-1,0)}$. Nous définissons ensuite $\forall i \geq 1$: $b_i = T_-^{-1} a_{i-1}$ et $b_{-i} = T_+^{-1} a_{-(i-1)}$ et nous associons à chaque point $x \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{S}$ le codage :

$$\underline{\omega} = (\omega_0\, \omega_1 \ldots \omega_n \ldots) \ ; \ \omega_l \in \mathbb{Z}^* \cup \{0_-\} \cup \{0_+\}$$

tel que (à partir de maintenant n désignera un entier naturel) :

$\omega_l = n$ ssi $T^l x \in (a_{n-1}, a_n)$; $\omega_l = -n$ ssi $T^l x \in (a_{-n}, a_{-(n-1)})$; $\omega_l = 0_+$ ssi $T^l x \in I_0^+$; $\omega_l = 0_-$ ssi $T^l x \in I_0^-$

La grammaire est la suivante :

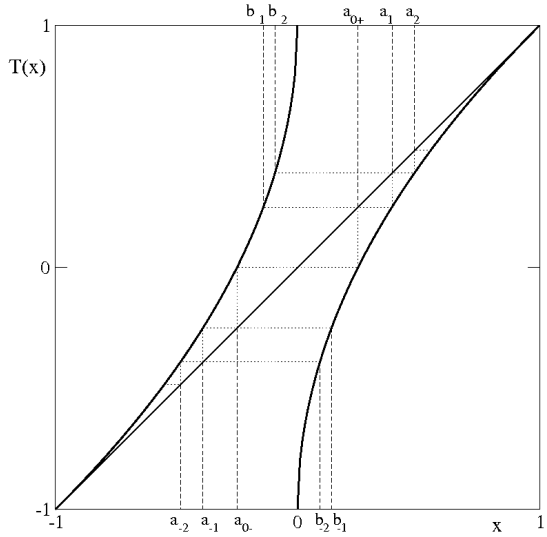
$$\omega_l = n > 0 \Rightarrow \omega_{l+1} = n-1; \qquad \omega_l = -n < 0 \Rightarrow \omega_{l+1} = -(n-1)$$

$$\omega_l = 0_+ \Rightarrow \omega_{l+1} = \begin{cases} 0_- \\ -n \quad \text{(n'importe quel } n) \end{cases}$$

$$\omega_l = 0_- \Rightarrow \omega_{l+1} = \begin{cases} 0_+ \\ n > 0 \quad \text{(n'importe quel } n) \end{cases}$$

Un cylindre $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, avec $\omega_i \in \mathbb{Z}^* \bigcup \{0\pm\}$ compatible avec la grammaire, désignera l'ouvert $\bigcap_{i=1}^n T^{-i} I_{\omega_i}$.

Nous donnons maintenant quelques résultats, sans preuve, qui sont des conséquences directes de la définition de l'application.



Lemma 1 *1. Quand $x \to 1^-$: $T(x) = 1 - (1-x) - \frac{1}{2\gamma}(1-x)^\gamma + o((1-x)^\gamma)$*

2. Quand $x \to 0^+$: $T(x) = -1 + (2\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} x^{\frac{1}{\gamma}} + o(x^{\frac{1}{\gamma}})$

Lemma 2 *Pour tout n, $a_{\pm(n+1)} = a_{\pm n} \pm \frac{1}{2\gamma}(1 \mp a_{\pm n})^\gamma$ et :*

$$\begin{aligned}
1 - a_n &\sim \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\gamma-1}}};\\
a_{-n} + 1 &\sim \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\gamma-1}}};\\
l_n := [a_{n-1}, a_n] &\sim \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad n > 1\ ;\\
|b_{\pm n}| &\sim \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{(n-1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}},\ n > 1
\end{aligned}$$

Nous induisons maintenant sur chaque élément de la partition de Markov et donnons une estimation de la borne de la distorsion pour l'application de premier retour. Pour chaque rectangle I_m, nous posons : $\widehat{T} : I_m \to I_m$ comme l'application de premier retour sur I_m. Nous définissons ainsi une partition de I_m par $\mathcal{Z}_m = \{Z_{m,1}, Z_{m,2}, \ldots, Z_{m,p}, \ldots\}$, où :

$$Z_{m,p} = \{x \in I_m\ ,\ \tau_{I_m}(x) = p\}$$

$\tau_{I_m}(x)$ étant le temps de premier retour de x dans I_m. En utilisant la dynamique symbolique, nous voyons que chaque $Z_{m,p}$ est la réunion disjointe des cylindres $Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$ de la forme :

$$Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n) = \big(\underbrace{k_1\ k_1 - 1 \ldots 1}_{k_1}\ \underbrace{0_+\ 0_- \ldots 0_+}_{k_2}\ \underbrace{-k_3 \ldots -1}_{k_3}\ 0_- 0_+ \ldots 0_-\ \underbrace{m + k_n - 1 \ldots\ m}_{k_n}\big) \tag{2.4}$$

avec $k_1 + \ldots + k_n = p+1$ et $k_1 = m$; de plus $\widehat{T}(Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)) = T^p(Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)) = I_m$ et cette application est surjective. Enfin, cette application est uniformément dila-

tante, dans le sens que pour tous m et p il existe $\beta > 1$ tel que $|D\widehat{T}(x)| > \beta$, $\forall x \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$.[1]

Proposition 3 (Distorsion bornée) *Notons l_m la longueur de l'intervalle (a_{m-1}, a_m). Alors, il existe une constante $K > 0$ dépendant de m, telle que pour tout p et pour tout $x, y \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$, nous avons :*

$$\left|\frac{DT^p(x)}{DT^p(y)}\right| \leq \exp\left[\frac{K|T^p(x) - T^p(y)|}{l_m}\right] \leq e^K$$

Remarque 2.2.1 *1. La preuve de cette proposition est assez longue. Si au lieu d'induire sur le cylindre I_m, l'on induisait sur $(a_{-m}, a_m)/\{0\}$, les rectangles avec un temps de retour et la distorsion donné seraient plus simples : l'application de premier retour serait irréductible mais ne serait pas apériodique et nous ne pourrions pas appliquer la théorie des applications markoviennes mélangeantes sur l'espace induit. Ceci n'arrive pas pour les applications de Lorenz de la section 6 (i.e. l'application de premier retour serait apériodique) et la distorsion serait plus simple à obtenir comme nous le verrons.*

2. Les techniques utilisées dans la preuve vont nous permettre d'obtenir le résultat équivalent ; surtout utilisé dans la section 6 ; considérons le rectangle I_m. Il existe une constante $K' > 0$ dépendant de m, telle que pour tout p et tout $x \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$, nous ayons (condition de Adler) :

$$\frac{|D^2\hat{T}(x)|}{|D\hat{T}(x)|^2} \leq K' \tag{2.5}$$

3. La combinatoire de la preuve et la condition de Adler seraient plus simples en induisant sur I_0^+, et ce serait suffisant pour obtenir les résultats de la section 3. D'un autre côté nous avons besoin de la distorsion sur chaque rectangle I_m pour obtenir la statistique de premier retour et de première entrée autour de presque tout point de l'intervalle. Il y a cependant une autre raison. Pour les applications de la section 6, nous avons besoin d'informations sur la régularité de la densité invariante. Comme nous le verrons, la distorsion sur chaque rectangle impliquera que la densité est localement Lipschitz et bornée.

Preuve Considérons $Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$; si $x \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$ nous avons (en posant $DT^0 = Id$) :

$$\begin{aligned} DT^p(x) &= DT^{(k_1+k_2+k_3+k_4+\cdots+k_n-1)}(x) \\ &= DT^{k_1}(x)DT^{k_2}(T^{k_1}x)DT^{k_3}(T^{k_1+k_2}x)DT^{k_4}(T^{k_1+k_2+k_3}x)\cdots DT^{k_n-1}(T^{k_1+k_2+k_3+k_4+\cdots+k_{n-1}}x) \end{aligned}$$

Prenons deux points $x, y \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$; en utilisant la *chain rule*, nous devons distinguer les cas où les points appartiennent aux régions $R_- = (-1, a_{0_-})$, $R_0 = (a_{0_-}, a_{0_+})$ et $R_+ = (a_{0_+}, 1)$. Nous posons pour simplifier Z l'intervalle fermé d'extrémités x et y ; de plus, lorsque nous disons que le symbole m est zéro, nous voulons dire que m peut être 0_+ ou 0_-.

1. En regardant (2.4) β sera donné par la borne inférieure de $|DT^r(x)|$, quand x est dans le cylindre $(r, r-1, \cdots, 1)$. Ce qui implique que β pourrait être choisi égal à $\lambda_1 \equiv \inf_{x\in(a_0,a_1)} |DT(x)| > 1$.

Lemma 4 *(i) Posons $K_l = \sum_{i=0}^{l-1} k_i$, $k_0 = 0$, $1 \leq l < n$ et supposons que $(T^{K_l}(x), T^{K_l}(y)) \in R\pm$. Alors il existe une constante C_1 indépendante de m et p telle que :*

$$\left|\frac{DT^{k_l}(T^{K_l}(x))}{DT^{k_l}(T^{K_l}(y))}\right| \leq \exp(C_1|T^{K_l+k_l-1}Z|)$$

(ii) Supposons que $m \neq 0$ et $k_n > 1$. Alors il existe une constante C_1' telle que pour : $K_n = \sum_{i=0}^{n-1} k_i$:

$$\left|\frac{DT^{k_n-1}(T^{K_n}(x))}{DT^{k_n-1}(T^{K_n}(y))}\right| \leq \exp(C_1'\frac{|T^pZ|}{l_m})$$

Preuve (i) Nous nous référons au cylindre (2.4) et nous supposons sans restriction que $k_1 = m > 0$. Nous menons alors notre preuve pour $l = 1$, le cas général étant complètement similaire. Commençons par remarquer que par une estimation standard,

$$\left|\frac{DT^{k_1}(x)}{DT^{k_1}(y)}\right| \quad = \exp\left[\sum_{q=0}^{k_1-1}\left|\frac{D^2T(\xi_1)}{DT(\xi_1)}\right||T^qx - T^qy|\right] \tag{2.6}$$

où ξ_1 est un point entre T^qx et T^qy dépendant de q.
Puique $x, y \in (a_{k_1-1}, a_{k_1})$; $Tx, Ty \in (a_{k_1-2}, a_{k_1-1})$; $\ldots$;$T^{k_1-1}x, T^{k_1-1}y \in (a_0, a_1)$ et en minorant simplement la dérivée par 1, nous avons :

$$(2.6) \quad \leq \exp\left[\sum_{q=0}^{k_1-1}\left(\sup_{(a_{k_1-1-q},a_{k_1-q})}|D^2T|\right)|T^qx - T^qy|\right] \tag{2.7}$$

Notons $T^{k_1-1}x = z_x$ et $T^{k_1-1}y = z_y$; puisque les dérivées sont positives et décroissantes sur R_+ nous avons :

$$(2.7) \leq \exp\left[\sum_{q=0}^{k_1-1}\left(\sup_{(a_{k_1-1-q},a_{k_1-q})}|D^2T|\right)\frac{1}{DT^{k_1-1-q}(a_{k_1-q})}|z_x - z_y|\right] \tag{2.8}$$

Considérons maintenant le terme : $DT^{k_1-1-q}(a_{k_1-q}) = DT(a_{k_1-q})DT(Ta_{k_1-q})\ldots DT(T^{k_1-2-q}a_{k_1-q})$.
Puisque pour $q \geq 2$ et $\xi_3 \in (a_{q-1}, a_q)$: $DT(a_{q-1}) \geq DT(\xi_3) = \frac{T(a_q)-T(a_{q-1})}{a_q-a_{q-1}} = \frac{a_{q-1}-a_{q-2}}{a_q-a_{q-1}}$,
il suit que :

$$\begin{aligned} DT^{k_1-1-q}(a_{k_1-q}) &\geq \frac{a_{k_1-1-q} - a_{k_1-2-q}}{a_{k_1-q} - a_{k_1-1-q}} \cdot \frac{a_{k_1-2-q} - a_{k_1-3-q}}{a_{k_1-1-q} - a_{k_1-2-q}} \cdots \frac{a_1 - a_0}{a_2 - a_1} \\ &\geq \frac{a_1 - a_0}{a_{k_1-q} - a_{k_1-1-q}} \end{aligned}$$

et donc : [2]

$$\frac{1}{DT^{k_1-1-q}(a_{k_1-q})} \leq \frac{a_{k_1-q} - a_{k_1-1-q}}{a_1 - a_0}$$

De plus : $|z_x - z_y| \leq |T^{k_1-1}Z|$. Finalement :

$$(2.8) \leq \exp\left[\sum_{q=0}^{k_1-1}\left(\sup_{(a_q,a_{q+1})}|D^2T|\right)\frac{a_{q+1} - a_q}{a_1 - a_0}|T^{k_1-1}Z|\right] \tag{2.9}$$

2. Nous avons simplement prouvé que si ξ est un point du cylindre $(p, p-1, \cdots, 1)$ (supposant $p > 0$, mais le même résultat est vrai pour les valeurs négatives), alors $DT^p(\xi) \geq \frac{a_1-a_{0+}}{a_p-a_{p-1}}$. De la même façon, nous pouvons prouver la borne inférieure : $DT^p(\xi) \leq \frac{a_{0+}}{a_{p-1}-a_{p-2}}$, pour $p \geq 2$.

En utilisant les lemmes 1 et 2, il existe une constante C_0 dépendant seulement de T telle que :

$$\big(\sup_{(a_q,a_{q+1})} |D^2T|\big)\,(a_{q+1}-a_q) \le C_0 \cdot \frac{1}{q^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = C_0 \cdot \frac{1}{q^2}$$

Ainsi la somme sur q est sommable de à $+\infty$ et il existe une nouvelle constante universelle (dans le sens qu'elle ne dépend que de l'application T) C_1 telle que pour $x, y \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$:

$$\left|\frac{DT^{k_1}(x)}{DT^{k_1}(y)}\right| \le \exp\big(C_1|T^{k_1-1}Z|\big) \tag{2.10}$$

(ii) Nous procédons comme dans la preuve de la partie (i), la seule différence venant du dénominateur $a_1 - a_0$ dans (2.9) qui sera remplacé par $a_{m+1} - a_m$. (2.10) devient :

$$\left|\frac{DT^{k_n-1}(T^{K_n}(x))}{DT^{k_n-1}(T^{K_n}(y))}\right| \le \exp[\frac{C_1|T^{p-1}Z|}{l_{m+1}}] \le \exp[\frac{C_1\lambda_3|T^pZ|}{l_m}]$$

où $\lambda_3 = \sup_{x\in[a_0,1]} |DT(x)|$; Nous posons finalement $C_1' = C_1\lambda_3$. ∎

Lemma 5 *(i) Posons $K_l = \sum_{i=0}^{l-1} k_i$, $k_0 = 0$, $1 \le l < n$, $n > 2$, $\Delta b_l = b_{k_{l+1}+1} - b_{k_{l+1}}$ et supposons $T^{K_l}(x) \in R_0$. Alors il existe une constante C_2 indépendante de m et p telle que pour $x, y \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$*

$$\left|\frac{DT^{k_l}(T^{K_l}(x))}{DT^{k_l}(T^{K_l}(y))}\right| \le \exp(\frac{C_2|T^{K_l+k_l-1}Z|}{\Delta b_l})$$

(ii) Supposons $m = 0$, $n > 2$ et $k_n = 2$ (l'autre cas possible est compatible avec $m = 0$ pour $k_n = 1$ et ce cas est traité dans (i)). Il existe alors C_3, indépendante de p telle que pour $x, y \in Z_{m,p}(k_1, \ldots, k_n)$ et avec $K_n = \sum_{i=0}^{n-1} k_i$:

$$\left|\frac{DT^{k_n-1}(T^{K_n}(x))}{DT^{k_n-1}(T^{K_n}(y))}\right| \le \exp[C_3|T^pZ|]$$

(iii) Supposons $m = 0$ et $n = 1$ (alors $p = 2$ et le cylindre I_m contient trois 0 avec des signes alternés) ; alors il existe une constante C_4 telle que pour $(x, y) \in Z_{m,2}$:

$$\left|\frac{DT^2(x)}{DT^2(y)}\right| \le \exp[C_4|T^2Z|]$$

Preuve Nous prouvons (i), les autres items étant directs. Pour le cylindre (2.4) nous allons montrer le lemme pour $l = 2$, le cas général étant une généralisation directe. Le bloc $R_0 = (0_+0_-0_+\cdots 0_-)$ est de longueur k_2 ; appelons α et β les extrémités de l'image du cylindre dans R_0. Pour tout $i \le k_2$, si nous prenons $t, u \in T^{k_1}Z \in R_0$:

$$\left|\frac{DT^i(t)}{DT^i(u)}\right| \le \exp\left[\sum_{j=0}^{i-1} (\frac{\sup_{(T^j\alpha,T^j\beta)'} |D^2T|}{\inf_{(T^j\alpha,T^j\beta)'} |DT|})|T^jt - T^ju|\right] \tag{2.11}$$

où l'indice $(\quad)'$ signifie que l'ordre des extrémités $T^j\alpha$ et $T^j\beta$ peut changer selon la monotonie des branches de T à droite et à gauche de 0. Si $i \le k_2 - 1$; la dérivée seconde sera bornée par une valeur finie D sur les régions symétriques $[a_{-0}, b_1]$, $[b_{-1}, a_0]$, et toujours

dans ces régions, l'infimum de la dérivée première sera minorée par une constante $\lambda_0 > 1$. Alors une estimation classique de la distorsion donne ($i \leq k_2 - 1$) :

$$\exp\left[\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{\sup_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|D^2T|}{\inf_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|DT|}\right)|T^jt - T^ju|\right] \leq \exp\left(\frac{D}{\lambda_0}\frac{1}{1-\lambda_0^{-1}}\right) \tag{2.12}$$

Quand $i = k_2$, nous devons remarquer que $T^{k_2-1}t$ et $T^{k_2-1}u$ seront dans l'intervalle $(b_{-(k_{l+1}+1)}, b_{-k_{l+1}})$ (avec $l = 2$ dans ce cas), puisqu'ils seront envoyés dans s $(a_{-k_{l+1}}, a_{-(k_{l+1}-1)})$ après une itération. Mais en utilisant les lemmes 1 et 2 (et la symétrie de $b_{\pm l}$) nous voyons tout de suite que, $\forall l \geq 1$

$$\left(\frac{\sup_{(b_l,b_{l+1})}|D^2T|}{\inf_{(b_l,b_{l+1})}|DT|}\right)|b_l - b_{l+1}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\frac{l^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}}{l^{\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\right) \tag{2.13}$$

Donc pour tout $i \leq k_2$ il y a une constante universelle D_1 telle que :

$$\frac{1}{D_1} \leq \left|\frac{DT^i(t)}{DT^i(u)}\right| \leq D_1 \tag{2.14}$$

Maintenant, pour $j_1, j_2 \leq k_2 - 1$ il existe $\eta_1 \in (t, u)$ et $\eta_2 \in (\alpha, \beta)$ tels que : $|T^{j_1}t - T^{j_1}u| = DT^{j_1}(\eta_1)|t - u|$ et $|T^{j_2}\alpha - T^{j_2}\beta| = DT^{j_2}(\eta_2)|\alpha - \beta|$. Alors, en utilisant la borne (2.14) nous obtenons :

$$\frac{|T^{j_1}t - T^{j_1}u|}{|T^{j_1}\alpha - T^{j_1}\beta|} \leq D_1^2\frac{|T^{j_2}t - T^{j_2}u|}{|T^{j_2}\alpha - T^{j_2}\beta|}$$

Si maintenant nous choisissons $j_1 = j$ et $j_2 = k_2 - 1$ nous obtenons :

$$\left|\frac{DT^{k_2}(t)}{DT^{k_2}(u)}\right| \leq \exp\left[D_1^2\sum_{j=0}^{k_2-1}\left(\frac{\sup_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|D^2T|}{\inf_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|DT|}\right)\frac{|T^j\alpha - T^j\beta|\cdot|T^{k_2-1}t - T^{k_2-1}u|}{|T^{k_2-1}\alpha - T^{k_2-1}\beta|}\right]$$

Puisque $|T^{k_2-1}\alpha - T^{k_2-1}\beta| = \Delta b_l = b_{k_{2+1}+1} - b_{k_{2+1}}$ et t et u appartiennent à $T^{k_1}Z$ nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\frac{DT^{k_2}(t)}{DT^{k_2}(u)}\right| &\leq \exp\left[D_1^2\sum_{j=0}^{k_2-1}\left(\frac{\sup_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|D^2T|}{\inf_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|DT|}\right)\frac{|T^{k_1+k_2-1}Z|}{\Delta b_l}|T^j\alpha - T^j\beta|\right]\\ &\leq \exp\left[D_1^2\frac{|T^{k_1+k_2-1}Z|}{\Delta b_l}\sum_{j=0}^{k_2-1}\left(\frac{\sup_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|D^2T|}{\inf_{(T^j\alpha,T^j\beta)'}|DT|}\right)|T^j\alpha - T^j\beta|\right] \leq \exp\left[C_2\frac{|T^{k_1+k_2-1}Z|}{\Delta b_l}\right]\end{aligned}$$

où $C_2 = D_1^2 \log D_1$.

∎

Nous continuons maintenant la preuve de la proposition. En utilisant les lemmes 4 et 5 nous voyons que $|DT^p(x)/DT^p(y)|$, $(x, y \in Z)$ est borné :

$$\left|\frac{DT^p(x)}{DT^p(y)}\right| \leq \exp[C_5\sum_{l=1}^{n-1}\Psi_j + C_6\Psi_n] \tag{2.15}$$

où $C_5 = \max(C_1, C_2)$ et Ψ_l est respectivement égal à $|T^{K_l+k_l-1}Z|$ ou $\frac{|T^{K_l+k_l-1}Z|}{\Delta b_l}$ suivant que $T^{K_l}(x), T^{K_l}(y)$ appartiennent respectivement à $R\pm$ ou R_0 chaque fois que $1 \leq l < n$. A la place, $\Psi_n = \frac{|T^pZ|}{l_m}$, où nous posons $l_0 = |a_1 - a_0| < 1$ et $C_6 = \max(C_1', C_3, C_4)$.

Or pour $1 \leq l < n$:

$$|T^{K_l+k_l-1}Z| \leq \frac{|T^pZ|}{\inf_{\xi\in T^{K_l+k_l-1}Z}|DT^{k_{l+1}+\cdots+k_n}(\xi)|}$$

$$\leq \frac{|T^pZ|}{\inf_{\xi\in T^{K_l+k_l-1}Z}|DT^{k_n}(T^{k_{l-1}+\cdots k_{n-1}}\xi)\cdots DT^{k_{l+2}}(T^{k_{l+1}}\xi)DT^{k_{l+1}}(\xi)|}$$

Nous devons maintenant regarder avec prudence les termes $\frac{|T^{K_l+k_l-1}Z|}{\Delta b_l}$.

Lemma 6 *$\Delta b_l|DT^{k_l+1}(\xi)| \approx 1$, où ξ est un point dans $T^{K_l+k_l-1}Z$.*

Preuve

Supposant, sans restriction que $k_l > 0$ et en posant pour simplifier $L = k_{l+1}$, nous avons, $\Delta b_l = \frac{a_L-a_{L-1}}{|DT(\eta)|}$ où $\eta \in (b_{L+1} - b_L)$. De plus pour tout $\xi \in T^{K_l+k_l-1}Z \subset (b_L, b_{L+1})$:

$$\Delta b_l|DT^L(\xi)| = \frac{|a_L - a_{L-1}||DT^{L-1}(T\xi)||DT(\xi)|}{|DT(\eta)|} \geq D_1^{-1}|a_L - a_{L-1}||DT^{L-1}(T\xi)|$$

et une borne supérieure similaire est vraie pour D_1^{-1} remplacé par D_1. Puisque $T^L(a_{L-1}, a_L] = (0, a_0)$, il existe $\xi' \in (a_{L-1}, a_L)$ tel que $|a_L - a_{L-1}| = \frac{a_0}{|DT(T^{L-1}\xi')||DT^{L_1}(\xi')|}$. Alors nous pouvons continuer avec :

$$\Delta b_l|DT^L(\xi)| \approx \frac{|DT(T^{L-1}\xi')||DT^{L_1}(\xi')|}{a_0|DT^{L-1}(T\xi)|}$$

Un argument direct de distorsion sur l'intervalle (a_{L-1}, a_L) (comme celui utilisé dans la preuve de 5), implique l'existence d'une constante universelle D_2 telle que

$$|DT^{L-1}(\xi')/DT^{L-1}(T\xi)| \leq D_2$$

Donc,

$$\Delta b_l|DT^L(\xi)| \approx \frac{|DT(T^{L-1}\xi')|}{a_0}$$

ce qui prouve le lemme puisque DT est uniformément majorée et minorée sur $[a_0, 1]$. ∎

En utilisant les lemmes précédents, nous avons ainsi montré qu'il existait une constante C_7 dépendant seulement de T telle que :

$$\frac{|T^{K_l+k_l-1}Z|}{\Delta b_l} \leq \frac{C_7|T^pZ|}{\inf_{\xi\in T^{K_l+k_l-1}Z}|DT^{k_n}(T^{k_{l-1}+\cdots k_{n-1}}\xi)\cdots DT^{k_{l+2}}(T^{k_{l+1}}\xi)|} \tag{2.16}$$

Notons que la borne précédente (2.16) est une borne supérieure pour chaque terme Ψ_l dans la somme (2.15) lorsque $1 \leq l < n$: pour les termes sans Δb_l, nous nous débarrassons simplement du facteur DT^{k_l+1} au dénominateur. Remarquons également que les dérivées du dénominateur de (2.16) sont de la forme $|DT^r(z)|$, où $r \geq 1$ et z appartiennent aux intervalles :
(i) (a_1, a_0) or (a_{-0}, a_1), or to
(ii) (b_q, b_{q+1}) or (b_{-q-1}, b_{-q}), $q \geq 1$.
Dans le premier cas, $|DT^r(z)| \geq \lambda_1 \equiv \inf_{x\in(a_0,a_1)}|DT(x)|$; dans le dernier cas $r = q$ et

$|DT^q(z)| \geq \lambda_2 \equiv \inf_{x\in(0,a_0)} |DT(x)|$, et $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$. En conclusion, nous avons que pour tout $(x,y) \in Z$:

$$|\frac{DT^p(x)}{DT^p(y)}| \leq \exp[(C_5C_7\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_1^{n-l-1}} + \frac{C_6}{l_m})|T^pZ|] \leq \exp[\frac{K|T^pZ|}{l_m}] \tag{2.17}$$

où $K = C_6 + C_5C_7\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^{-k}$.

∎

2.3 Décroissance des corrélations

Dans cette section et dans la suivante, nous prouvons plusieurs propriétés statistiques de notre application : elles sont des conséquences de l'inégalité de distorsion, combinée avec des techniques existantes.

Proposition 7 *La dynamique T a une décroissance polynomiale des corrélations par rapport à la mesure de Lebesgue ν, pour des fonctions Hölder continues $\mathbb{T}$. Plus précisément, pour toute fonction Hölder $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et toute $\psi \in L^\infty_\nu$, nous avons :*

$$\left|\int(\varphi\circ T^n)\,\psi\,d\nu - \int\varphi\,d\nu\int\psi\,d\nu\right| = \mathcal{O}(\frac{1}{n^{\frac{1}{\gamma-1}}})$$

Preuve Nous allons utiliser la technique des tours de Lai Sang Young [112]. Nous construisons la tour sur l'intervalle I_0^+ et nous définissons la fonction de retour comme le premier temps de retour :

$$\text{Pour tout } x \in I_0^+, \quad \tau_{I_0^+}(x) := \min\{n \in \mathbb{N}^+ \ ; \ T^n x \in I_0^+\}$$

La tour est alors définie par :

$$\Delta = \{(x,l) \in I_0^+ \times \mathbb{N} \ ; \ l \leq \tau_{I_0^+}(x) - 1\}$$

et la partition de la base I_0^+ est donnée par les ensembles $Z_{0_+,p}$. Rappelons que la dynamique sur la tour est donnée par :

$$F(x,l) = \begin{cases} (x, l+1) & \text{si} \quad l < \tau_{I_0^+}(x) - 1 \\ (T^{\tau_{I_0^+}(x)}(x), 0) & \text{si} \quad l = \tau_{I_0^+}(x) - 1 \end{cases}$$

Selon [112], la décroissance des corrélations est donnée par le comportement asymptotique $m\{x \in I_0^+ \ ; \ \tau_{I_0^+}(x) > n\}$, c'est-à-dire :

$$m\{x \in I_0^+ \ ; \ \tau_{I_0^+}(x) > n\} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} m\{x \in I_0^+ \ ; \ \tau_{I_0^+}(x) = p\} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} m(Z_{0_+,p})$$

Avant de calculer explicitement cette quantité, nous devons vérifier un autre pré-requis à cette théorie qui sera aussi utile pour la suite dans l'étude des théorèmes limites. Introduisons le temps de séparation $s(x,y)$ entre deux points x et y dans I_0^+. Soit $\hat{T}$ l'application de premier retour sur I_0^+ ; on définit

$$s(x,y) = \min_{n\geq 0}\{(\hat{T}^n(x), \hat{T}^n(y)) \text{ vivant sur différents } Z_{0_+,p}, p \geq 1\}$$

Nous demandons que $\exists C > 0, \theta \in (0,1)$ tel que $\forall x, y \in Z_{0_+,p}, p \geq 1$, nous ayons :

$$\left|\frac{D\hat{T}(x)}{D\hat{T}(y)}\right| \leq \exp[C\theta^{s(\hat{T}(x),\hat{T}(y))}] \tag{2.18}$$

Prouvons cette inégalité. Si $s(\hat{T}(x),\hat{T}(y)) = n$; alors, puisque les orbites (sous l'action de $\hat{T}$)de deux points seront dans le même cylindre, du type $Z_{0_+,p}, p \geq 1$ jusqu'au temps $n-1$ et que sur ces cylindres, $\hat{T}$ est monotone et uniformément dilatante, $|D\hat{T}| \geq \beta > 1$ (voir footnote 1), nous avons

$$|\hat{T}(x) - \hat{T}(y)| \leq \beta^{-(n-1)}$$

Donc, par distorsion (2.17) on obtient :

$$\left|\frac{D\hat{T}(x)}{D\hat{T}(y)}\right| \leq \exp\left[\frac{K\beta^{-(n-1)}}{l_0}\right] \leq \exp[C\theta^{s(\hat{T}(x),\hat{T}(y))}] \tag{2.19}$$

où $C = \frac{K\beta}{l_0}$ et $\theta = \beta^{-1}$. Cette inégalité est souvent appelée la *condition de Hölder locale* $\log|D\hat{T}|$ d'exposant θ ; nous la rencontrerons dans la suite, et lorsque nous nous référerons à elle, ce sera par rapport à une partition de Markov donnée sur l'espace induit. Estimons maintenant $m(Z_{0_+,p})$. Le cylindre $Z_{0_+,p}$ peut être facilement décrit avec la dynamique symbolique : il sera la réunion disjointe de cylindres de la forme :

$$C_{p,q} = \big(0_+ \underbrace{-q \cdots -1}_{q}\ 0_- \underbrace{p-q-2 \cdots 1}_{p-q-2}\ 0_+\big)$$

Alors, il y a $p-1$ cylindres dont le premier temps de retour dans I_0^+ est p. Notons que $T^p : C_{p,q} \to I_0^+$ est surjective et qu'il existe $\xi \in C_{p,q}$ tel que : $m(C_{p,q}) = \frac{m(I_0^+)}{|DT^p(\xi)|}$. Comme d'habitude :

$$DT^p(\xi) = DT(\xi)DT^q(T\xi)DT(T^{q+1}\xi)DT^{p-q-2}(T^{q+2}\xi)$$

et $\xi \in (b_{-q-1}, b_{-q})$ et $T^{q+1}\xi \in (b_{p-q-2}, b_{p-q-1})$. En utilisant la borne asymptotique de $b_{\pm n}$ donnée dans le lemme 2 et la borne inférieure sur $DT^p(x)$, $x \in (a_{p-1}, a_p)$ de la footnote 2, nous avons immédiatement :

$$\begin{aligned}
m(C_{p,q}) &\leq \frac{a_{+0}}{DT(b_{-q})DT(b_{p-q-2})}\frac{a_q - a_{q-1}}{a_1 - a_{+0}}\frac{a_{p-q-2} - a_{p-q-3}}{a_1 - a_{+0}} \\
&\leq \frac{a_{+0}}{DT(b_{-q})DT(b_{p-q-2})}\frac{(1-a_{q-1})^\gamma}{(1-\frac{1}{2\gamma})^\gamma}\frac{(1-a_{p-q-3})^\gamma}{(1-\frac{1}{2\gamma})^\gamma} \\
&\lesssim \frac{a_{+0}}{q(p-q-2)}\frac{1}{(q(p-q-2))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \\
&\lesssim \frac{1}{\big(q(p-q-2)\big)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}}
\end{aligned}$$

Les cas $q = 0$ (pour lequel $C_{p,0} = (0_+\ 0_-\ (p-2) \quad \ldots \quad 2\ 1\ 0_+)$) et $q = p-2$ (pour lequel $C_{p,p-2} = (0_+\ \ -(p-2) \quad \ldots \quad -2\ \ -1\ \ 0_-\ 0_+)$ peuvent être estimés de la même façon et dans les deux cas nous obtenons une borne de l'ordre de

$$\frac{1}{(p-2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}}$$

Puisqu'il n'y a que $p-1$ possibilités pour placer 0_- dans $C_{p,q}$, nous avons que :

$$\begin{aligned}
m(Z_{0_+,p}) &= m\Big(\bigcup_{q=0}^{p-2} C_{p,q}\Big) \\
&\lesssim \left(\sum_{q=1}^{p-3} \frac{1}{q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}(p-q-2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}}\right) + \frac{2}{(p-2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}} \\
&\lesssim \frac{1}{p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}} \left(\sum_{q=1}^{[\frac{p-3}{2}]} \frac{1}{q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}(1-\frac{q-2}{p})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}}\right) + \frac{2}{(p-2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}} \\
&\lesssim \frac{1}{p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$m\{x \in I_0^+ \ ; \ \tau_{I_0^+}(x) \geq n\} \lesssim \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}} \lesssim \frac{1}{n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Selon [112] les corrélations décroissent suivant :

$$\left|\int (\varphi \circ T^n)\, \psi \, dm - \int \varphi \, dm \int \psi \, dm\right| = \mathcal{O}(\sum_{k>n} m\{x \in I_0^+ \ ; \ \tau_{I_0^+}(x) \geq n\})$$

et le terme de droite se comporte comme $\mathcal{O}\big(\frac{1}{n^{\frac{1}{\gamma-1}}}\big)$. ∎

Bornes optimales

Le résultat précédent peut être plus précis en fournissant une borne inférieure de la vitesse de décroissance des corrélations pour des fonctions intégrables supportées sur les cylindres de la partition de Markov I_m. Nous allons pour cela utiliser la technique de *renouvellement* (*renewal*) introduite par Sarig [101] et améliorée par Gouëzel [50]. Nous avons alors besoin de certaines hypothèses que nous formulons directement dans notre cas :

- Supposons que nous induisions sur le rectangle I_0^+ ; appelons $\mathcal{Z}_0^+$ la partition de Markov des rectangles $Z_{0^+,p}$, de premier retour p. Un cylindre $[d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}]$ avec $d_i \in \mathcal{Z}_0^+$ sera l'ensemble $\cap_{l=0}^{n-1} \hat{T}^{-i} d_l$. Nous avons tout d'abord besoin que le jacobien de l'application de premier retour soit localement Hölder d'exposant θ. C'est une conséquence immédiate de la formule (2.19) avec $\theta = \beta^{-1}$ et $C = K\beta/l_0$. En utilisant le temps de séparation $s(\cdot,\cdot)$, nous définissons $D_{0^+} f = \sup |f(x) - f(y)|/\theta^{s(x,y)}$, où f est intégrable sur I_0^+, le suprémum étant pris sur tous les $x, y \in I_0^+$. Nous posons ensuite
$$||f||_{\mathcal{L}_{\theta,0^+}} \equiv ||f||_\infty + D_{0^+} f$$
$\mathcal{L}_{\theta,0^+}$ est l'espace des fonctions θ-Hölder sur I_0^+ et nous appelons $D_{0^+} f$ la constante de Hölder de f (sur I_0^+).
- Nous avons besoin de la propriété de *grande image*, ce qui signifie que la mesure de Lebesgue des images, sous l'action de $\hat{T}$, de tous les rectangles $Z_{0^+,p} \in \mathcal{Z}_0^+$ est uniformément minorée par une constante strictement positive. C'est en effet le cas puisque toutes images coïncident avec I_0^+.

– Nous avons finalement besoin que :

$$m(x \in I_m | \tau(x) > n) = \mathcal{O}(n^{-\chi})$$

pour un $\chi > 1$ (il s'agit de l'hypothèse de Goüezel, qui améliore celle de Sarig qui demandait que $\chi > 2$). Nous avons déjà prouvé ceci avec $\chi = \frac{\gamma}{\gamma-1}$.

Sous ces hypothèses, Sarig et Goüezel, ont donné une borne inférieure de la vitesse de décroissance des corrélations. Nous la donnons ici directement dans notre cas sur l'intervalle I_0^+ : le même résultat est évidemment vrai pour tous les rectangles I_m :

Proposition 8 *Il existe une constante C telle que pour tout $f \in \mathcal{L}_{\theta,0^+}$ et $g \in L^\infty_\nu$ avec la norme $||\cdot||_\infty$, toutes deux supportées sur I_0^+, nous avons :*

$$\left| Corr(\, f, g \circ T^n) - (\sum_{k=n+1}^{\infty} \nu(x \in I_0^+ | \tau(x) > n)) \int g \, d\nu \int f \, d\nu \right| \leq C F_\gamma(n) ||g||_\infty ||f||_{\mathcal{L}_{\theta,0^+}}$$

où $F_\gamma(n) = \frac{1}{n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$ si $\gamma < 2$, $(\log n)/n^2$ si $\gamma = 2$ et $\frac{1}{n^{\frac{2}{\gamma-1}}}$ si $\gamma > 2$.

De plus, si $\int f \, d\nu = 0$, alors :

$$\int (g \circ T^n) \, f \, d\nu = \mathcal{O}(\frac{1}{n^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}})$$

Finalement, le théorème central limite est vrai pour l'observable f.

Remarque 2.3.1 *Le résultat à propos du théorème central limite est aussi prouvé, en utilisant d'autres techniques dans la Proposition 9, partie 2, (a).*

2.4 Théorèmes limites

Rappelons la notion de lois stables (see [45, 49]) : une loi stable est la limite d'un processus i.i.d renormalisé. Plus précisément, la distribution d'une variable aléatoire X est dite stable s'il existe un processus stochastique i.i.d $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et des constantes $A_n \in \mathbb{R}$ et $B_n > 0$ tels qu'en distribution :

$$\frac{1}{B_n}(\sum_{i=0}^{n-1} X_i - A_n) \longrightarrow X \, .$$

Les lois qui nous intéressent peuvent être caractérisées par leur *index* $p \in (0,1) \cup (1,2]$, défini par :

$$\mathbb{P}(X > t) = (c_1 + o(1))t^{-p} \, , \qquad \mathbb{P}(X < -t) = (c_2 + o(1))t^{-p} \, ,$$

où $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ sont deux constantes telles que $c_1 + c_2 > 0$, et par deux autres paramètres :

$$c = \begin{cases} (c_1 + c_2)\Gamma(1-p)\cos(\frac{p\pi}{2}) & p \in (0,1) \cup (1,2] \\ \frac{1}{2} & p = 2 \end{cases} , \qquad \beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \, .$$

Nous noterons $X(p, c, \beta)$ la loi de fonction caractéristique :

$$E(e^{X(p,c,\beta)}) = e^{-c|t|^p \left(1 - i\beta \mathrm{sgn}(t) \tan(\frac{p\pi}{2})\right)} \, .$$

Proposition 9 *Soit $S_n\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k$, où φ est une observable υ-Hölder, avec $\int \varphi(x)\, dx = 0$.*

1. *Si $\gamma < 2$ alors le théorème central limite est vrai pour $\upsilon > 0$. C'est-à-dire qu'il existe une constante positive σ^2 telle que $\dfrac{S_n\varphi}{\sqrt{n}}$ tende en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. De plus, $\sigma^2 = 0$ ssi il existe une fonction mesurable ψ telle que $\varphi = \psi \circ T - \psi$.*
2. *Si $\gamma > 2$ alors :*
   (a) *Si $\varphi(1) = 0$ et $|\varphi(x)| \leq \tilde{C}|x-1|_{\mathbb{T}}^{\upsilon'}$, où $|\cdot|_{\mathbb{T}}$ est la distance sur le cercle, $\tilde{C}$ est une constante positive et $\frac{1}{2}(\gamma-2) < \upsilon' < \gamma - 1$ alors le théorème central limite est vrai, avec une variance positive σ^2. De plus, $\sigma^2 = 0$ ssi il existe une fonction mesurable ψ telle que $\varphi = \psi \circ T - \psi$.*
   (b) *Si $\varphi(1) \neq 0$ alors $\dfrac{S_n\varphi}{n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$ converge en loi vers la loi stable $X\big(p, c, \beta\big)$ avec :*

$$\begin{aligned} p &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \\ c &= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2\gamma|\varphi(1)|}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Gamma(\frac{1}{(1-\gamma)}) \cos(\frac{\pi\gamma}{2(\gamma-1)}) \\ \beta &= sgn\, \varphi(1) \end{aligned}$$

3. *Si $\gamma = 2$ alors :*
   (a) *Si $\varphi(1) = 0$ alors le théorème central limite s'applique.*
   (b) *Si $\varphi(1) \neq 0$ alors il existe une constante b telle que $\dfrac{S_n\varphi}{\sqrt{n \log n}}$ tende en loi vers $\mathcal{N}(0, b)$.*

Preuve

1. Comme conséquence de la théorie des tours, nous obtenons le théorème central limite dès que le taux de décroissance des corrélations est ([112], Th. 4) ; ceci arrive dans notre cas pour $\gamma < 2$.
2. (a)
   Nous procédons comme dans [49] Th. 1.3 où le résultat est prouvé pour les applications paraboliques de Pomeau-Manneville de l'intervalle. Nous renvoyons à l'article de Gouëzel pour la théorie préliminaire et nous ne prouvons ici que les conditions nécessaires à l'application des résultats. Nous induisons encore sur I_0^+ et nous posons :

$$\varphi_{I_0^+}(x) := \sum_{i=0}^{\tau_{I_0^+}(x)-1} \varphi(T^i x)$$

   Nous devons vérifier que :
   – φ soit Hölder continue sur I_0^+ (d'exposant θ).
   – $m\{x \in I_0^+; \tau_{I_0^+}(x) = n\} = \mathcal{O}(1/n^{\eta+1})$, pour un $\eta > 1$
   – $\varphi_{I_0^+} \in \mathcal{L}^2\big(I_0^+\big)$
   Rappelons que l'application induite $\hat{T}$ sur I_0^+ est uniformément dilatante d'un facteur $\beta > 1$; alors pour tout couple de points $x, y \in \mathbb{T}$ nous avons $|x-y|_{\mathbb{T}} \leq B\beta^{-s(x,y)}$, où

B est une constante bien choisie, $|\cdot|_{\mathbb{T}}$ dénote la distance sur le cercle. En utilisant le fait que φ est Hölder, nous obtenons

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq D|x-y|_{\mathbb{T}}^{\upsilon} \leq E\beta^{-\upsilon s(x,y)}$$

, ce qui prouve que φ est localement Hölder avec $\theta = \beta^{-\upsilon} < 1$.
La quantité apparaissant dans le second item est exactement $m(Z_{0_+,n})$ pour laquelle nous avons obtenu précédemment une borne de l'ordre de $n^{-(\frac{\gamma}{\gamma-1}+1)}$. Donc $\eta = \gamma/(\gamma-1)$.
Pour montrer le troisième item, nous notons $C_\varphi = \int_{I_0^+} |\varphi(x)|^2 dx$. Comme dans la section 3, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{I_0^+} |\varphi_{I_0^+}(x)|^2\, dx &\leq C_\varphi + \sum_{l=2}^{+\infty} \int_{Z_{0_+,l}} \Big| \sum_{i=0}^{\tau_{I_0^+}-1} \varphi(T^i x)\Big|^2 dx \\
&\leq C_\varphi + \sum_{l=2}^{+\infty}\sum_{q=0}^{l-2} \int_{C_{l,q}} \Big|\sum_{i=0}^{l-1} \varphi(T^i x)\Big|^2 dx \\
&\lesssim C_\varphi + \tilde{C} \sum_{l=2}^{+\infty}\sum_{q=0}^{l-2} \int_{C_{l,q}} \Big|\sum_{i=0}^{l-1} |T^i x - 1|_{\mathbb{T}}^{\upsilon'}\Big|^2 dx \\
&\lesssim C_\varphi + \tilde{C} \sum_{l=2}^{+\infty}\sum_{q=0}^{l-2} \int_{C_{l,q}} \Big|\sum_{m=0}^{q} |a_{-m}+1|^{\upsilon'} + \sum_{m=0}^{l-q-2} |a_m - 1|^{\upsilon'}\Big|^2 dx \\
&\lesssim C_\varphi + \tilde{C} \sum_{l=2}^{+\infty}\sum_{q=0}^{l-2} m(C_{l,q}) \big| q^{\frac{-\upsilon'+\gamma-1}{\gamma-1}} + (l-q-2)^{\frac{-\upsilon'+\gamma-1}{\gamma-1}}\big|^2 \\
&\lesssim C_\varphi + \tilde{C} \sum_{l=2}^{+\infty}\sum_{q=0}^{[(l-2)/2]} m(C_{l,q})(l-q-2)^{\frac{2(-\upsilon'+\gamma-1)}{\gamma-1}} \Big|1 + \Big(\frac{q}{(l-q-2)}\Big)^{\frac{-\upsilon'+\gamma-1}{\gamma-1}}\Big|^2 \\
&\lesssim C_\varphi + \tilde{C} \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{l^{\frac{2(-\upsilon'+\gamma-1)}{\gamma-1}}}{l^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}} \left[1 + \sum_{q=1}^{(l-2)/2} \frac{1}{q^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\right] \\
&\lesssim C_\varphi + \tilde{C} \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{l^{\frac{2(-\upsilon'+\gamma-1)}{\gamma-1}}}{l^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+1}}
\end{aligned}$$

Finalement, si $\frac{2(-\upsilon'+\gamma-1)}{\gamma-1} - \frac{\gamma}{\gamma-1} - 1 < -1$ (i.e. $\upsilon' > \frac{1}{2}(\gamma-2)$) alors $\varphi_{I_0^+} \in \mathcal{L}^2\big(I_0^+\big)$.
(b)
La preuve suit le Th. 1.3 de [49] ; dans le but d'utiliser ce que nous avons obtenu dans le point (a) nous introduisons la fonction auxiliaire $\varphi = \varphi(1) + \tilde{\varphi}$ où $\tilde{\varphi}$ est υ-Hölder et vérifie $\tilde{\varphi}(1) = 0$. Les fonctions correspondantes sur l'espace induit vérifient $\varphi_{I_0^+} = \tilde{\varphi_{I_0^+}} + s$, où $s(x) = n\varphi(0)$ quand x appartient aux cylindres $Z_{0_+,n}$ de premier retour n. Il est dit dans [49], et la même chose est vraie dans notre cas, que la constante c de la loi stable doit vérifier :

$$m(s > n\varphi(1)) = m(\tau_{I_0^+} > n) \sim cn^g$$

où g est un exposant donné. Les estimations précédentes suggèrent que $g = -(\frac{\gamma}{\gamma-1})$, mais elles ne sont pas suffisantes pour obtenir l'équivalence asymptotique nécessaire pour avoir la constante t c. Nous l'obtenons grâce au lemme suivant :

Lemma 10 *Soit $R_n = (\tau_{I_0^+} > n)$; alors*

$$m(R_n) \sim 2b_n$$

Nous donnons la preuve de ce lemme en appendice. Grâce à celui-ci nous avons que :

$$c = \frac{1}{\gamma}(\frac{2\gamma}{\gamma - 1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

3. La preuve est la même que celle du Th. 1.3 de [49]

∎

Large deviations

La connaissance de la mesure de la queue des premiers retours dans la tour nous permet d'appliquer les résultats de Melbourne et Nicol [86], Melbourne [87] et Pollicott et Sharp [92] pour obtenir la propriété de larges déviations pour une classe particulière d'observables. Nous appliquons les résultats de Melbourne [87], qui établissent que :

$$\nu(x; \tau_{I_0^+} > n) = \mathcal{O}(n^{-(\zeta+1)})$$

avec $\zeta > 0$ (dans notre cas $\zeta = \frac{1}{\gamma-1}$), alors pour certaines observables $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ (voir la suite pour la question de leur régularité), que nous prenons de moyenne nulle, nous avons :

Proposition 11 *Si $\zeta > 0$ ($\gamma > 1$) alors T vérifie les bornes suivantes :*
(I) Lorsque l'observable ϕ est L^∞_ν, alors pour tout $\epsilon > 0$ il y a une constante $C_{\phi,\epsilon}$ telle que :

$$\nu\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi(T^j(x))\right| > \epsilon\right) \leq C_{\phi,\epsilon} n^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

pour tout $n \geq 1$.
(II) Pour un ensemble ouvert et dense d'observables Hölder ϕ, et pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, nous avons :

$$\nu\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi(T^j(x))\right| > \epsilon\right) \geq n^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

pour une infinité de n.

2.5 Récurrence

Premiers retours

Dans les dix dernières années, la statistique des premiers temps d'entrée et de retour a été utilisée pour mieux comprendre le comportement récurrent des systèmes dynamiques. On pourra se référer à pour un résumé récent des résultats connus [63, 59, 1].

Soit $B_r(x)$ la boule de rayon r autour du point $x \in \mathbb{T}$, considérons le premier temps de retour $\tau_{B_r(x)}(y)$ du point $y \in B_r(x)$ dans la boule. Notons ν_r la mesure conditionnelle à $B_r(x)$, nous étudions l'existence de la limite quand $r \to 0$ de la distribution[3] suivante :

$$F_r^e(t) = \nu_r \left(y \in B_r(x); \tau_{B_r(x)}(y)\nu(B_r(x)) > t \right).$$

La distribution $F_r^h(t)$ du premier temps d'entrée dans $B_r(x)$ est définie de la même façon en prenant y et ν sur tout l'espace $\mathbb{T}$.

Un outil puissant pour étudier ces distributions dans les cas non-uniformément dilatant et hyperbolique est donné par la combinaison des résultats suivants, qui réduisent l'étude aux sous-ensembles induits.

– Supposons que (T, X, μ) soit un système ergodique sur une variété Riemannienne X ; soit $\hat{X} \subset X$ un ensemble ouvert équipé de l'application de premier retour $\hat{T}$ et de la mesure (ergodique) induite $\hat{\mu}$. Pour $x \in \hat{X}$ nous considérons la boule $B_r(x)$ ($B_r(x) \subset \hat{X}$) et nous écrivons $\hat{\tau}_{B_r(x)}(y)$ pour le premier temps de retour de $y \in B_r(x)$ sous l'action de $\hat{T}$. Nous considérons maintenant la distribution du premier temps de retour pour les deux variables $\tau_{B_r(x)}$ et $\hat{\tau}_{B_r(x)}$ respectivement dans les espaces de probabilité $(B_r(x), \mu_r)$ et $(B_r(x), \hat{\mu}_r)$ (où encore une fois, l'indice r signifie que nous travaillons conditionnellement à la boule $B_r(x)$) :

$$F_r^e(t) = \mu_r(y \in B_r(x); \tau_{B_r(x)}(y)\mu(B_r(x)) > t)$$

et

$$\hat{F}_r^e(t) = \hat{\mu}_r(y \in B_r(x); \hat{\tau}_{B_r(x)}(y)\hat{\mu}(B_r(x)) > t)$$

Dans [29] il est prouvé le résultat suivant :
supposons que pour μ-presque-tout $x \in \hat{X}$ la distribution $\hat{F}_r^e(t)$ converge ponctuellement vers la fonction $f^e(t)$ quand $r \to 0$ (rappelons que la distribution précédente dépend de x par la localisation de la boule $B_r(x)$) ; alors, nous avons aussi que $F_r^e(t) \to f^e(t)$ et la convergence est uniforme en t[4]. Notons qu'à chaque fois que nous avons la distribution $f^e(t)$ nous pouvons assurer l'existence de la limite faible de la distribution de $F_r^h(t) \to f^h(t)$ où $f^h(t) = 1 - \int_0^t f^e(s)ds,\ t \geq 0$ [58].

Note : A partir de maintenant, nous dirons que nous avons $f^{e,k}(t)$ comme *distribution limite pour les boules* , si nous les avons dans la limite $r \to 0$ et pour μ-presque tout centre x des boules $B_r(x)$.

– Le résultat précédent est utile si nous pouvons contrôler la récurrence sur les ensembles induits, voir [31, 30] pour des applications. L'induction pour des dynamiques unidimensionnelles génère souvent des applications monotones par morceaux avec un nombre dénombrable de branches. Dans [29], Th. 3.2, il est montré que dès que les applications sont du type Rychlik [100] (voir Déf. 3.1 de [29]), alors nous avons un temps de retour exponentiel autour des boules (i.e. $f^e(t) = f^k(t) = e^{-t}$). Nos applications de premier retour sur les I_m sont Bernoulli et dilatantes ; dans le but de vérifier la propriété de Rychlik, il est suffisant de montrer que la variation totale du

3. Nous faisons ici un abus de langage usuel ; dans le vocabulaire probabiliste on devrait considérer 1 moins cette quantité.

4. Le résultat de [29] est en fait plus général puisqu'il ne requiert pas la continuité des distributions asymptotiques pour tout $t \geq 0$. Nous pourrions affaiblir l'hypothèse que $\hat{X}$ est ouvert juste en y retirant un ensemble de mesure nulle, ce qui se passe pour I_m.

potentiel, $1/|DT(x)|$ pour nous, est finie. C'est encore une conséquence directe de la propriété de distorsion bornée[5].

Nous avons donc :

Proposition 12 *Les premiers temps d'entrée et de retour de l'application T suivent des distributions exponentielles par rapport à la mesure ν, pourvu que $\gamma > 1$.*

Nombre de visites

Revenons au cas général introduit dans la partie 1 avec deux espaces de probabilité (X, T, μ) et $(\hat{X}, \hat{T}, \hat{\mu})$. Nous introduisons maintenant deux variables aléatoires ξ_r^e et $\hat{\xi}_r^e$ comptant le nombre de visites de l'orbite d'un point $y \in B_r(x)$ dans cette même boule en un temps renormalisé. Précisément :

$$\xi_r^e(x,t) \equiv \sum_{j=1}^{\left[\frac{t}{\mu(B_r(x))}\right]} \chi_{B_r(x)}\left(T^j(y)\right)$$

où χ est la fonction caractéristique et $x \in X$. Si $x \in \hat{X}$, nous pouvons définir de la même façon la variable $\hat{\xi}_r^e(x,t)$ en remplaçant l'action de T par celle de $\hat{T}$. Nous introduisons maintenant les deux distributions :

$$G_r^e(t,k) = \mu_r(x; \xi_r^e(x,t) = k),\ \hat{G}_r^e(t,k) = \hat{\mu}_r(x; \hat{\xi}_r^e(x,t) = k)$$

où encore une fois l'indice r pour les mesures signifie la conditionnelle à $B_r(x)$. Il est prouvé dans [29] que lorsque la distribution $\hat{G}_r^e(t,k)$ converge faiblement (in t) vers la fonction $g(t,k)$ et pour presque tout $x \in \hat{X}$, la même convergence a lieu, avec la même limite, pour $G_r^e(t,k)$. Pour des systèmes à fortes propriétés de mélange, la distribution limite est généralement de Poisson [63, 59, 60, 1] : $\frac{t^k e^{-t}}{k!}$.

Dans [46] il a été prouvé que c'était le cas pour les applications du type Rychlik pour presque-tout choix du centre de la boule. Nous avons donc :

5. Soit le cylindre I_m et sa partition partition en $Z_{m,p}$ de premier retour $p \leq 1$, alors, comme nous l'avons vu dans la section 1, nous avons pour la variation sur I_m :

$$\mathrm{Var}\frac{1}{|D\hat{T}|} \leq \sum_{Z_{m,p}} \int_{Z_{m,p}} \frac{|D^2\hat{T}(t)|}{|D\hat{T}(t)|^2} d\nu(t) + 2 \sum_{Z_{m,p}} \sup_{Z_{m,p}} \frac{1}{|D\hat{T}|}$$

Par la distorsion, nous avons : $K \geq |\log \frac{D\hat{T}(x)}{D\hat{T}(y)}| \geq |\int_x^y \frac{D^2\hat{T}(t)}{D\hat{T}(t)} d\nu(t)| \geq \int_x^y \frac{|D^2\hat{T}(t)|}{D\hat{T}(t)}\, d\nu(t)$ pour tous $x, y \in Z_{m,p}$, puisque la dérivée première est toujours positive et que la dérivée seconde a le même signe pour tous les éléments d'un même cylindre. Ceci implique que

$$\int_{Z_{m,p}} \frac{|D^2\hat{T}(t)|}{|D\hat{T}(t)|^2}\, d\nu(t) \leq \sup_{Z_{m,p}} \frac{1}{|D\hat{T}|} K$$

Puisque $\hat{T}$ envoie de façon difféomorphique $Z_{m,p}$ dans I_m, il y a un point ξ pour lequel $D\hat{T}(\xi) m(Z_{m,p}) = m(I_m)$. Appliquant encore la borne de distorsion,

$$\sup_{Z_{m,p}} \frac{1}{|D\hat{T}|} \leq e^K \frac{m(Z_{m,p})}{m(I_m)}$$

Et finalement :

$$\mathrm{Var}\frac{1}{|D\hat{T}|} \leq \frac{e^K(2+K)}{m(I_m)} \sum_{Z_{m,p}} m(Z_{m,p}) \leq e^K(2+K) \leq \infty.$$

Proposition 13 *Soit $\gamma > 1$. Alors pour ν-presque-tout x, le nombre de visites dans la boule $B_r(x)$ suit asymptotiquement une loi de Poisson lorsque $r \to 0$.*

Valeurs extrêmes

Le dernier article cité [46] contient une autre application intéressante de la statistique des temps de retour que nous pouvons facilement appliquer à notre dynamique. Rappelons d'abord brièvement quelques éléments de la théorie des valeurs extrêmes. Etant donné le système dynamique (X, T, μ) et l'observable $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, nous considérons le processus $Y_n = \phi \circ T^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Nous définissons ensuite la maximum partiel $M_n \equiv \max\{Y_0, \cdots, Y_{n-1}\}$ et nous cherchons des suites normalisatrices $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telles que :

$$\mu(\{x : a - n(M_n - b - n) \leq y\}) \to H(y)$$

pour une distribution non-dégénérée H : dans ce cas, nous dirons que M_n suit une *loi de valeurs extrêmes*. Si les variables Y_n sont i.i.d., la théorie classique des valeurs extrêmes prédit l'existence de seulement trois types de distributions asymptotiques non-dégénérées pour le maximum M_n à une normalisation linéaire près ; c'est-à-dire :

- Type 1 : $EV_1 = e^{-e^{-y}}$ pour $y \in \mathbb{R}$;appelée *loi de Gumbel* l .
- Type 2 : $EV_2 = e^{-y^{-\alpha}}$ pour $y > 0$, $EV_2 = 0$, sinon, où $\alpha > 0$ est un paramètre ; appelée , *loi de Frechet*.
- Type 3 : $EV_3 = e^{-(-y)^{\alpha}}$ pour $y \leq 0$, $EV_3 = 1$, sinon, où $\alpha > 0$ est un paramètre ; appelée *loi de Weibull*.

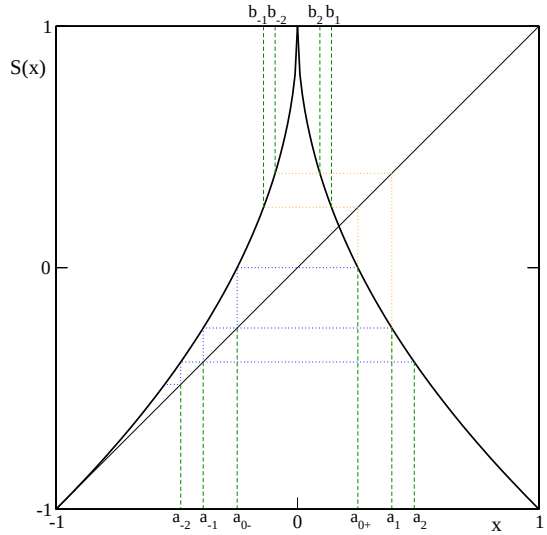
[46] prouve dans des conditions très générales que notre cas satisfait, que si le système, (X, T, μ) a une statistique exponentielle pour le premier temps d'entrée, alors il satisfait la théorie des valeurs extrêmes s'appliquent pour le maximum partiel M_n construit sur le processus $\phi(x) = g(d(x, \xi))$, où d est la distance, ξ est un point choisi dans X et g une bijection non'négative, strictement décroissante dans un voisinage de 0 où elle atteint un maximum global. En particulier, pour certains choix de g (voir [46] pour les détails), on retrouve les lois de Gumbel, Frechet et Weibull. Ces résultats s'appliquent de façon évidente à notre cas.

2.6 Généralisation aux applications du type Lorenz

Comme nous l'avons dit en introduction de cette partie, la travail original de Grossmann et Hörner [52] traite d'applications de Lorenz différentes, S qui envoient $[-1, 1]$ dans lui-même avec deux branches surjectives définies sur les demi-intervalles $[-1, 0)$ et $(0, 1]$. Nous allons supposer que l'application est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]/\{0\}$ et $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]/\{0\} \cup \{\pm 1\}$). Nous allons de plus imposer les comportements locaux suivants :

$$S(x) = 1 - b|x|^{\kappa} + o(|x|^{\kappa}),\ x \sim 0,\ b > 0$$
$$S(x) = -x + a|x - 1|^{\gamma} + o(|x - 1|^{\gamma}),\ x \sim 1_-,\ a > 0$$
$$S(x) = x + a|x + 1|^{\gamma} + o(|x + 1|^{\gamma}),\ x \sim -1_+$$

où $\kappa \in (0, 1)$ et $\gamma > 1$ sont deux paramètres. Nous demandons de plus que
(i) en tout point $x \neq -1, 1$ la dérivée soit strictement plus grande que 1.
(ii) S soit strictement croissante sur $[-1, 0)$, strictement décroissante sur $(0, 1]$ et convexe sur les deux intervalles $(-1, 0), (0, 1)$.



L'application a un *cusp* à l'origine où les dérivées premières à droite et à gauche divergent vers l'infini $\pm\infty$ et le point fixe -1 est parabolique (Fig. 2). L'application est Markovienne pour la partition $\{[-1,0),(0,1]\}$; néanmoins il sera plus pratique de considérer une partition de Markov construite avec les préimages de 0 (voir plus bas).

La symétrie de T dans la section 2 était liée à l'invariance de la mesure de Lebesgue. Nous n'avons pas réellement besoin que S soit symétrique par rapport à l'origine. Nous avons fait ce choix pour n'avoir que deux exposants d'échelle (κ et γ) en 0 et ± 1. Ce qui implique en particulier les mêmes échelles pour les préimages de 0 sur $(-1,0)$ et $(0,1)$. Si les branches de droite et de gauche ne sont plus symétriques, tout en conservant la structure de Markov et la présence d'un point à dérivée non bornée et de points fixes neutres, nous devrions pouvoir nous en sortir avec au plus quatre exposants de ce type donnant le comportement local de S en 0 et ± 1.

On note S_1 (resp. S_2)la restriction de S à $[-1,0)$ (resp. $(0,1]$) et on définit $a_{0+} = S_2^{-1}0$; $a_{0-} = S_1^{-1}0$; $a_{-p} = S_1^{-p}a_{0-}$; $a_p = S_2^{-1}S_1^{-(p-1)}a_{0-}$ pour $p = 1,2,\dots$.Il suit que $Sa_{-p} = Sa_p = a_{-(p-1)}$. Comme nous l'avons fait dans la première section ; nous définissons les suites $b_p, p \geq 1$ par : $Sb_{\pm p} = a_{p-1}$. La partition dénombrable de Markov $\mod \nu$ sera :

$$\big\{(a_{-p}, a_{-(p-1)}) : p \geq 1\big\} \cup \{(a_p, a_{p+1}) : p \geq 1\} \cup \{I_{0\pm}\}; I_{0+} = (0, a_{0+}); I_{0-} = (a_{0-}, 0)$$

Nous associons à chaque point $x \in [-1,1]/\mathcal{S}$ où $\mathcal{S} = \bigcup_{i\geq 0} S^{-i}\{0\}$, l'unique codage :

$$x = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots)$$

où les symboles $\omega_i \in \mathbb{Z}^* \cup \{0\pm\}$ sont déterminés par la condition $S^i x \in (a_{\omega_{i-1}}, a_{\omega_i})$. La grammaire est ($p$ étant un entier positif) :

—si$\omega_i = p > 0$, alors $\omega_{i+1} = -(p-1)$; si$\omega_i = -p < 0$, alors $\omega_{i+1} = -(p-1)$
—si $\omega_i = 0-$, alors $\omega_{i+1} = 0+$, ou $\omega_{i+1} = p > 0$ (pour tout p)
—si $\omega_i = 0+$, alors $\omega_{i+1} = 0+$, ou $\omega_{i+1} = p > 0$ (pour tout p).

Nous obtenons des comportements locaux les relations suivantes : (la symétrie fournit les relations pour a_{-p} et b_{-p}) :

$$\begin{aligned} 1-a_p &\sim \left(\frac{1}{a(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1}{p^{\frac{1}{\gamma-1}}} \\ a_p - a_{p+1} &\sim a\left(\frac{1}{a(\gamma-1)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{1}{p^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_p &\sim \left(\frac{1}{ab^{(\gamma-1)}(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}} \frac{1}{p^{\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}}} \\ b_{p-1} - b_p &\sim \frac{1}{\kappa(\gamma-1)}\left(\frac{1}{ab^{(\gamma-1)}(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}} \frac{1}{p^{\frac{\kappa(\gamma-1)+1}{\kappa(\gamma-1)}}} \end{aligned}$$

Distorsion bornée

Notons que si nous induisons sur le cylindre $I_{-m} = (a_{-m}, a_{-(m-1)})$ alors un sous-cylindre de I_{-m} avec premier retour p sera de longueur $p+1$ et de la forme :

$$(-m, -(m-1), -(m-2), \cdots, -1, 0-, 0+, \cdots, 0+, n, -(n-1), \cdots, -m)$$

si $n > m$. Nous avons encore une alternance des blocs avec ± 0 et des blocs commençant par n ou $-n$ et décroissant vers -1 avant d'entrer dans $0-$. La distorsion est estimée comme dans la Proposition 1.

Mesure invariante et décroissance des corrélation ; changement de codage

Une différence importante avec l'application du cercle est que nous ne sommes pas certains que la mesure de Lebesgue m soit encore invariante et nous devons donc construire une mesure invariante absolument continue μ. Heureusement, la technique des tours nous aide. Nous avons besoin avant de l'utiliser d'effectuer un changement. Nous allons induire sur la réunion disjointe :

$$I_0 \equiv (a_{0-}, 0) \cup (0, a_{0-})$$

Les cylindres Z_p de I_0avec premier retour p auront la forme suivante :

$$\begin{aligned} Z_1 &= (a_{0-}, b_{-1}) \cup (b_1, a_{0+}) \\ Z_p &= (b_{-(p-1)}, b_{-p}) \cup (b_p, b_{p-1}) \quad p > 1\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

L'application de premier retour $\hat{S}$ sur I_0 n'envoie pas I_0 dans lui-même sur chaque cylindre Z_p suivant le premier temps de retour. En fait, $\hat{S}$ envoie les cylindres (b_p, b_{p-1}) et $(b_{-(p-1)}, b_{-p})$ dans $(a_{0-}, 0)$, mais elle envoie les cylindres (a_{0-}, b_{-1}) et (b_1, a_{0+}) dans $(0, a_{0-})$. Néanmoins, $\hat{S}$ est une application de Markov irréductible et apériodique, comme il est facile de le vérifier. Ceci est suffisant pour nos considérations à venir. [6]

6. Si nous voulons une authentique application de retour de Bernoulli, nous devrions induire sur $(a_{0-}, 0)$: les cylindres avec un temps de retour donné sont simplement plus compliqués à manipuler. C'est exactement ce que nous avons fait pour T dans la section 2, voir la remarque 2.2.1.

L'avantage de cette nouvelle induction peut être immédiatement vue dans l'estimation de la queue suivante (La mesure de Lebesgue des points de I_0 avec premier retour plus grand que n), sa forme précise étant nécessaire pour obtenir les lois stables :

$$\nu(x \in I_0; \tau_{I_0}(x) > n) = 2 \sum_{p=n+1}^{\infty} (b_{p-1} - b_p) \sim \frac{2}{\kappa(\gamma-1)} \left(\frac{1}{ab^{(\gamma-1)}(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}}} \tag{2.21}$$

Pour la décroissance des corrélations, nous utilisons le résultat de LS Young (Thm 1. de [112]) et nous avons :

Proposition 14 *Considérons l'application S dépendant des paramètres γ et κ. Alors pour $0 < \kappa < \min(\frac{1}{\gamma-1}, 1)$, nous avons l'existence d'une mesure absolument continue invariante μ qui mélange de façon polynomiale pour les observables Hölder, avec un taux : $\mathcal{O}\big(n^{-\frac{1-\kappa(\gamma-1)}{\kappa(\gamma-1)}}\big)$.*
Les premiers temps de retour et d'entrée suivent une distribution exponentielle et le nombre de visites dans les boules est Poissonnien.

Densité

Avant d'aller plus loin dans l'étude des propriétés statistiques, nous avons besoin de mieux connaitre la densité invariante ρ de la mesure μ. Soulignons que notre application de premier retour $\hat{S}$ sur I_0 est Gibbs-Markov selon la terminologie de Aaronson et Denker dans [7] (c'est à fortiori vrai pour les applications de premier retour du type Bernoulli sur les rectangles $(a_{-p}, a_{-(p-1)}), (a_p, a_{p+1}), (a_{0-}, 0), (0, a_{0+}))$ [7]. Observons maintenant que l'action de $\hat{S}$ sur I_0 implique que la sigma-algèbre engendrée par les images des rectangles (2.20) est la même que celle engendrée par les intervalles $(a_{0-}, 0), (0, a_{0+})$. Alors, par l'inégalité de Doëblin-Fortet prouvée dans la Proposition 1.4 de [7], l'application $\hat{S}$ admet une mesure invariante absolument continue mélangeante $\hat{\mu}$ dont la densité $\hat{\rho}$ est Lebesgue-essentiellement bornée sur I_0 et Lipschitz continue sur chacun des intervalles $(a_{0-}, 0), (0, a_{0+})$ [8]. Il est possible 'obtenir une propriété supplémentaire de la densité $\hat{\rho}$, à savoir qu'elle est strictement positive sur les rectangles de l'induction : ceci est prouvé dans [88] et dans [77].

Lions maintenant les densités $\hat{\rho}$ et ρ, supposant que nous induisions sur I_0 ; des résultats similaires sont obtenus en induisant sur les rectangles $(a_{-p}, a_{-(p-1)}), (a_p, a_{p+1}), (a_{0-}, 0), (0, a_{0+})$.

7. Nous avons déjà vérifié que la partition, mod-ν, de I_0 donnée par les rectangles $\{Z_p\}$ était Markov et que de plus, $\hat{S}$ était uniformément dilatante. Il reste à vérifier la condition de Adler

$$\sup_{x \in Z_p \in I_0} \frac{|D^2 \hat{S}(x)|}{|D\hat{S}(x)|^2} < \infty$$

Or ceci peut être montré en suivant la preuve de la Proposition 3, comme nous l'avons fait remarqué dans 2.2.1.

8. Dans [7], si α est une partition de Markov de $(X, \mathcal{B}, m, T)$ muni de la distance d, il est discuté du fait que $T\alpha \subset \sigma(\alpha)$, où $\sigma(\alpha)$ et donc il existerait une (éventuellement dénombrable) partition β plus grossière que α telle que $\sigma(T\alpha) = \sigma(\beta)$. DE plus, si le système est Gibbs-Markov, alors l'espace $Lip_{\infty,\beta}$ des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$, $f \in L^\infty_m$ qui sont Lipschitz sur chaque $Z \in \beta$ est un espace de Banach avec la norme : $||f||_{Lip_{\infty,\beta}} = ||f||_{L^\infty_m} + D_\beta f$, où $D_\beta f = \sup_{Z \in \beta} \sup_{x,y \in Z} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$. $Lip_{\infty,\beta}$ est injecté de façon compacte dans L^1_m, ce qui fournit les conclusions désirées sur la régularité de la densité, dès lors que l'inégalité de Doëblin-Fortet (ou de Lasota-Yorke) vérifiée.

Les mesures μ et $\hat{\mu}$ satisfont :

$$\mu(B) = C_r \sum_i \sum_{j=0}^{\tau_i - 1} \hat{\mu}(S^{-j}(B) \cap Z_i) \tag{2.22}$$

où B est un Borélien de $[-1, 1]$ et la première somme est faite sur les cylindres Z_i avec le premier temps de retour τ_i, dont la réunion donne I_0. La constante de normalisation $C_r = \mu(I_0)$ satisfait $1 = C_r \sum_i \tau_i \hat{\mu}(Z_i)$ et

$$\rho(x) = C_r \hat{\rho}(x), x \in I_0$$

Cette dernière égalité et le fait que $\hat{\rho}$ soit essentiellement bornée et Lipschitz sur I_0 impliquent que les deux limites :

$$\lim_{x \to 0_-} \rho(x) = \rho_- \ ; \ \lim_{x \to 0_+} \rho(x) = \rho_+ \tag{2.23}$$

existent, même si elles peuvent être différentes. Nous devons maintenant étudier le comportement de $\rho(x)$ quand $x \to 1_-$ (resp. $x \to -1_+$) ; soulignons d'abord que la continuite de Lipschitz étant locale sur les rectangles (a_{-n}, a_{-n+1}) (resp. (a_n, a_{n+1})) approchant -1 (resp. 1) nous ne pouvons pas conclure que $\lim_{x \to 1_-} \rho(x)$ (resp. $\lim_{x \to -1_+} \rho(x)$) existe. Pour obtenir au moins une réponse partielle nous devons mener une analyse plus fine. Puisque $\hat{\mu}$ est uniformément équivalente à ν sur I_0, nous utiliserons cette dernière mesure pour nos calculs. Pour estimer la μ-mesure d'un ensemble B, nous n'avons besoin de considérer que les cylindres Z_p de I_0 dont les itérés ont une intersection non-vide avec B avant qu'ils ne retournent dans I_0 ; nous utiliserons cela pour estimer la mesure de (a_{n-1}, a_n) (pour de grands n) proche de 1. Nous obtenons que $S^{-1}(a_{n-1}, a_n) \cap Z_{n+1} = Z_{n+1}$ est la seule intersection non-vide possible de la pré-image $S^{-j}(a_{n-1}, a_n)$ avec Z_p, pour tout p et pour $0 \leq j \leq p - 1$. Nous avons donc

$$\mu((a_{n-1}, a_n)) \approx C_r \nu(Z_{n+1}) \approx n^{-\frac{1-\kappa+\kappa\gamma}{\kappa(\gamma-1)}}$$

La densité sur (a_{n-1}, a_n) vérifiera

$$\frac{1}{\nu((a_{n-1}, a_n))} \int_{(a_{n-1}, a_n)} \rho d\nu = \frac{\mu((a_{n-1}, a_n))}{\nu((a_{n-1}, a_n))} \approx n^{-\frac{1-\kappa}{\kappa(\gamma-1)}}$$

Nous étudions maintenant la densité dans le voisinage de -1, en considérant le cylindre (a_{-n}, a_{-n+1}), pour de grands $n > 0$. Les cylindres Z_p de I_0 dont les itérés ont une intersection non-vide avec (a_{-n}, a_{-n+1}) avant qu'ils ne retournent dans I_0, ont $p \geq n + 2$. Donc :

$$\mu((a_{-n}, a_{-n+1})) \approx C_r \sum_{p=n+2}^{\infty} \nu(Z_p) \approx n^{-\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}}$$

La densité sur (a_{-n}, a_{-n+1}) vérifiera

$$\frac{1}{\nu((a_{-n}, a_{-n+1}))} \int_{(a_{-n}, a_{-n+1})} \rho d\nu = \frac{\mu((a_{-n}, a_{-n+1}))}{\nu((a_{-n}, a_{-n+1}))} \approx n^{-\frac{1-\kappa\gamma}{\kappa(\gamma-1)}}$$

Supposons maintenant que dans la dernière estimation, l'exposant de n est strictement négatif, c'est-à-dire que $\kappa < 1/\gamma$. Nous voulons prouver que $\liminf_{x \to -1_+} \rho(x) = 0$. Supposons que ce ne soit pas zéro, disons que ce soit $v > 0$; fixons $0 < \epsilon < v$, alors

il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $-1 < x < -1+\delta$, $v - \epsilon < \rho(x)$. Prenons n assez grand pour que $(a_{-n}, a_{-n+1}) \subset (-1, -1+\delta)$. Alors sur de tels rectangles nous avons $\frac{1}{\nu((a_{-n},a_{-n+1}))}\int_{(a_{-n},a_{-n+1})} \rho d\nu > v - \epsilon$, ce qui est faux. Cet argument peut être appliqué aux différents cas présentés ci-dessus pour obtenir le résultat suivant :

Proposition 15 *Soit S avec $\gamma > 1$ et $0 < \kappa < \min(\frac{1}{\gamma-1}, 1)$. La densité ρ de la mesure invariante μ est Lipschitz continue et bornée sur les cylindres ouverts, $p \geq 1$*

$$(a_{-p}, a_{-(p-1)}), (a_p, a_{p+1}), (a_{0-}, 0), (0, a_{0+})$$

. De plus nous avons que :

- $\liminf_{x\to 1_-} \rho(x) = 0$
- *Quand $x \to -1_+$ la densité vérifie :*
  (i) si $\kappa = \frac{1}{\gamma}$ alors $\liminf_{x\to -1_+} \rho(x)$ et $\limsup_{x\to -1_+} \rho(x)$ sont $\mathcal{O}(1)$, éventuellement différentes.
  (ii) si $\frac{1}{\gamma} < \kappa$, alors $\limsup_{x\to -1_+} \rho(x) = \infty$
  (iii) si $\frac{1}{\gamma} > \kappa$, alors $\liminf_{x\to -1_+} \rho(x) = 0$
- *Au voisinage de zéro, les limites (2.23) sont vraies.*

Remarquons que notre proposition colle avec la densité trouvée par Hemmer pour l'application (2.2) ; pour cette application et sa version définie sur le cercle (1) les corrélations décroissent en n^{-1}.

Bornes optimales

Comme nous l'avons fait dans la section précédente on peut fournir une borne inférieure à la vitesse de décorrélation. Nous utilisons encore une fois la technique de renouvellement [101] et [50]. La seule différence étant que maintenant la mesure de Lebesgue n'est pas invariante et nous avons ainsi besoin de montrer que la densité invariante ρ est Lipschitz dans la région d'induction. Nous avons établi la continuité de Lipschitz de la densité sur les rectangles $(a_{-p}, a_{-(p-1)}), (a_p, a_{p+1}), (a_{0-}, 0), (0, a_{0+})$, $p \geq 1$. Nous gardons maintenant par exemple $I_{0-} = (a_{0-}, 0)$; l'espace des fonctions localement Hölder d'exposant θ et de constante D_{0^-} (sur I_{0-}), donne l'espace $\mathcal{L}_{\theta,0^-,\mu}$ en ajoutant à la constante de Hölder sur I_{0-} la norme L^∞_μ de la fonction, comme nous l'avons fait dans la Proposition 8. Nous obtenons ainsi :

Proposition 16 *Il existe une constante C telle que pour tout $f \in \mathcal{L}_{\theta,0^-,\mu}$ et $g \in L^\infty_\mu$ avec la norme $||\cdot||_\infty$, toutes deux supportées sur I_{0-} nous avons (rappelons que $\gamma > 1$) :*

$$\left| Corr(\, f, g \circ S^n) - (\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(x \in I_{0-} | \tau(x) > n)) \int g d\mu \int f\, d\mu \right| \leq C F_{\gamma,\kappa}(n) ||g||_\infty ||f||_{\mathcal{L}_{\theta,0^-,\mu}}$$

où

$$F_{\gamma,\kappa}(n) = \begin{cases} n^{-\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}} & si \;\; 0 < \kappa < \min(\dfrac{1}{2(\gamma-1)}, 1) \\ (\log n)/n^2 & si \;\; \kappa = \dfrac{1}{2(\gamma-1)} \\ n^{-\frac{2}{\kappa(\gamma-1)}+2} & si \;\; \dfrac{1}{2(\gamma-1)} < \kappa < \min(\dfrac{1}{\gamma-1}, 1) \end{cases}$$

De plus, si $\int f d\mu = 0$, alors $\int (g \circ T^n)\, f\, d\mu = \mathcal{O}(\frac{1}{n^{\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}}})$. Finalement, le théorème central limite s'applique pour l'observable f.

Remarque 2.6.1 *Cette dernière conclusion à propos du théorème central limite peut aussi être obtenue dans la Proposition 17, partie 2, (a).*

Théorèmes limites

Pour obtenir les théorèmes limites nous pouvons aussi induire sur I_0 puisque nous n'avons besoin que de montrer que l'application induite est Gibbs-Markov avec une densité éventuellement Lipschitz par morceaux. Ici nous devons faire attention au fait que la densité peut être discontinue en 0. Suivant les arguments de la section 3, nous avons :

Proposition 17 *Soit $S_n\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ S^k$, où φ est une observable ν-Hölder, avec $\int \varphi(x)\, dx = 0$.*

1. *Si $0 < \kappa < \min(\frac{1}{2(\gamma-1)}, 1)$, alors le théorème central limite s'applique pour tout $\nu > 0$, i.e. il existe σ^2 telle que $\dfrac{S_n\varphi}{\sqrt{n}}$ tende en distribution vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. De plus, $\sigma^2 = 0$ ssi il existe une fonction mesurable ψ telle que $\varphi = \psi \circ S - \psi$.*
2. *Si $\frac{1}{2(\gamma-1)} < \kappa < \min(\frac{1}{\gamma-1}, 1)$, alors :*
   (a) *Si $\varphi(-1) = 0$ et $|\phi(x)| \leq \hat{C}|x+1|^{\nu''}$, où $\hat{C}$ est une constante positive et $\nu'' > \frac{1}{2\kappa(\gamma-1)}$ alors le théorème central limite s'applique encore avec une variance positive σ^2. De plus, $\sigma^2 = 0$ ssi il existe une fonction mesurable ψ telle que $\varphi = \psi \circ S - \psi$.*
   (b) *Si $\varphi(-1) \neq 0$ alors $\dfrac{S_n\varphi}{n^{\frac{1}{p}}}$ converge en distribution vers la loi stable $X\big(p, c, \beta\big)$ avec :*

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\kappa(\gamma-1)} \\ c &= (\rho_+ + \rho_-)\left(\frac{|\varphi(-1)|}{ab^{(\gamma-1)}(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\kappa(\gamma-1)}} \frac{1}{\kappa(\gamma-1)}\Gamma(1-p)\cos(\frac{\pi p}{2}) \\ \beta &= sgn\varphi(-1) \end{aligned}$$

3. *Si $\kappa = \frac{1}{2(\gamma-1)}$ alors :*
   (a) *Si $\varphi(-1) = 0$ alors le théorème central limite s'applique.*
   (b) *Si $\varphi(-1) \neq 0$ alors il existe une constante b telle que $\dfrac{S_n\varphi}{\sqrt{n\log n}}$ tende en distribution vers $\mathcal{N}(0, b)$.*

Large déviations.

Les larges déviations peuvent être déduites des arguments des sections précédentes. En particulier, en utilisant le récent résultat de Melbourne [87], on peut poser que pour les observables L^∞_μ la propriété de larges déviations est vraie avec un taux polynomial donné par celui de la décroissance des corrélations. Pour notre application de Lorenz, ce sera de l'ordre de $n^{-\frac{1-\kappa(\gamma-1)}{\kappa(\gamma-1)}}$, pourvu que $0 < \kappa < \min(\frac{1}{\gamma-1}, 1)$.

2.7 Appendice

Nous prouvons ici le lemme (10).

Appelons :

$$\beta_i^+ = (b_i, b_{i-1}); \quad \beta_i^- = (b_{-(i-1)}, b_{-i});$$

ces ensembles sont tels que $T^i(\beta_i^\pm) = I_0^\mp$.

Posons $H(x)$ l'application de première entrée de I_0^+ dans I_0^- : $H(x) = T^i(x) \quad$ si $x \in \beta_i^+$, et définissons :

$$A_{p,q} := \left(T_R^{-1} T_L^{-(p-1)}(\beta_q^-)\right) \cap \beta_p^+,$$

c'est le sous-ensemble de β_p^+ qui sera exactement envoyé dans β_q^- sous l'action de H et qui retournera dans I^+ en $p+q$ itérations. Notons que : $\cup_{q=1}^\infty A_{p,q} = \beta_p^+$.

L'ensemble qui sera renvoyé en n itérations est $C_n = \sum_{p=1}^{n-1} A_{p,n-p}$ et :

$$R_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} C_m = \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{m-1} A_{p,m-p}$$

Décomposons l'ensemble R_n :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} A_{p,q} + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=n}^{\infty} A_{p,q} + \sum_{p+q>n;p,q<n} A_{p,q} \\ &= \sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} A_{p,q} + \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} A_{p,q} - \sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} A_{p,q} + \sum_{p+q>n;p,q<n} A_{p,q} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Remarquons que les mesures des ensembles des deux premières sommes dans (2.24) sont :

$$\sum_{p=n}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} m(A_{p,q}) = \sum_{p=n}^{\infty} m(\beta_p^+) = m(0, b_n) \tag{2.25}$$

et :

$$\begin{aligned} m(b_{-n}, 0) = \sum_{q=n}^{\infty} m(\beta_q^-) &= \sum_{q=n}^{\infty} m(T_R^{-1}\beta_q^-) + m(T_L^{-1}\beta_q^-) \\ &= \sum_{q=n}^{\infty} m(A_{1,q}) + m(T_L^{-1}\beta_q^-) \\ &= \sum_{q=n}^{\infty} m(A_{1,q}) + m(T_R^{-1}T_L^{-1}\beta_q^-) + m(T_L^{-2}\beta_q^-) \\ &= \sum_{q=n}^{\infty} m(A_{1,q}) + m(A_{2,q}) + m(T_L^{-2}\beta_q^-) \\ &\cdots \\ &= \sum_{q=n}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} m(A_{p,q}) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Nous avons déjà montré dans la preuve de la proposition (7) que la mesure de chaque $A_{p,q}$ se comportait comme :

$$m(A_{p,q}) \lesssim (pq)^{-\xi} \qquad \text{with} \quad \xi = \gamma/(\gamma-1) + 1$$

et donc les deux termes restants dans (2.24) décroissent plus rapidement que $n^{-2(\xi-1)}$, *i.e* plus rapidement que $b_n \sim n^{-(\xi-1)}$ et ils peuvent donc être négligés. En utilisant (2.25) et (2.26) nous avons finalement :

$$m(R_n) \sim 2b_n$$

Deuxième partie

Systèmes Dynamiques Aléatoires

Chapitre 3

Généralités et Définitions

3.1 Les systèmes dynamiques aléatoires

Définissons tout d'abord une modélisation de la composante aléatoire que nous allons introduire dans l'évolution de nos systèmes. Comme dans ce qui précède nous nous limitons au cas d'un temps discret ; ainsi $\mathbb{Z}$ jouera le rôle du temps. Nous définissons un système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \vartheta)$ au sens de la théorie ergodique classique (cf chapitre 1) où ϑ est une application inversible. Considérons X un espace métrique compact qui jouera le rôle d'espace des phases que l'on munit de sa σ-algèbre de Borel $\mathcal{B}$.

Définition 3.1.1 On appelle *système dynamique aléatoire* sur l'espace $(X, \mathcal{B})$ de composante aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \vartheta)$ toute application Ψ :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{Z} \times \Omega \times X &\to X \\ (n, \omega, x) &\mapsto \Psi(n, \omega)x \end{aligned}$$

vérifiant la propriété de cocyle :

$$\begin{cases} \Psi(0, \omega) = Id_X \\ \Psi(n+m, \omega) = \Psi(n, \vartheta^m \omega) \circ \Psi(m, \omega) \end{cases}$$

Le système sera dit mesurable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) si l'application $x \mapsto \Psi(1, \omega)x$ est mesurable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$).

Dans ce qui suit tous les systèmes dynamiques aléatoires considérés seront mesurables. Une représentation fort utile de tels systèmes est celle donnée par l'application suivante :

$$\begin{aligned} S : \Omega \times X &\to \Omega \times X \\ (\omega, x) &\mapsto (\vartheta\omega, \Psi(1, \omega)x) \end{aligned}$$

En remarquant que $\Psi(n, \omega)x = \Psi(1, \vartheta^{n-1}\omega) \circ \ldots \circ \Psi(1, \vartheta\omega) \circ \Psi(1, \omega)$ on a immédiatement que : $S^n(\omega, x) = (\vartheta^n \omega, \Psi(n, \omega)x)$.

Définition 3.1.2 On appelle S l'application *skew product* associée au système dynamique aléatoire.

Remarquons que si le système dynamique aléatoire est mesurable alors S l'est aussi. Réciproquement, toute application construite comme un *skew product* définit sur sa seconde coordonnée un système dynamique aléatoire mesurable (voir [5] par exemple). L'avantage principal de cette représentation est qu'elle permet d'étudier les propriétés du système

aléatoire en considérant un système déterministe sur lequel on peut appliquer les résultats classiques de la théorie ergodique.
L'évolution d'un état initial x de l'espace des phases X sera donnée dans le cas aléatoire par la succession d'états : $x, \Psi(1,\omega)x, \ldots, \Psi(n,\omega)x, \ldots$ soit encore par :

$$x, \Psi(1,\omega)x, \ldots, \Psi(1,\vartheta^n\omega) \circ \ldots \circ \Psi(1,\omega)x, \ldots$$

Définition 3.1.3 Le sous-ensemble $\{\Psi(n,\omega)x\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'orbite aléatoire de x.

Il s'agit maintenant de définir un objet permettant de décrire le comportement à long terme d'un système dynamique aléatoire donné, autrement dit une adaptation des mesures invariantes au cas aléatoire. La représentation par le *skew product* amène naturellement à considérer les mesures invariantes de celui-ci. Prenons donc une mesure ν invariante pour le système $(\Omega \times X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, S)$ et la projection canonique sur Ω :

$$\begin{aligned} \pi_\Omega : \Omega \times X &\to \Omega \\ (\omega, x) &\mapsto \omega \end{aligned}$$

Alors puisque $S_*\nu = \nu$ nous devons avoir $\vartheta_*((\pi_\Omega)_*\nu) = (\pi_\Omega)_*\nu$, c'est à dire que la mesure marginale de ν sur $(\Omega, \mathcal{F})$ doit être invariante pour la dynamique ϑ. Dans notre situation l'aléa est donné à priori, il convient donc de se limiter aux mesures invariantes qui vérifient : $(\pi_\Omega)_*\nu = \mathbb{P}$.

Définition 3.1.4 Une mesure de probabilité ν est dite invariante pour le système dynamique aléatoire Ψ d'aléa $(\Omega, \mathcal{F}, \vartheta, \mathbb{P})$ si :

(i) $S_*\nu = \nu$

(ii) $(\pi_\Omega)_*\nu = \mathbb{P}$

Il est important de préciser que dans le cas général, une mesure de probabilité ν invariante pour l'application *skew product* ne s'écrit pas comme un produit. En particulier l'invariance peut être décrite en termes de désintégration par rapport à l'aléa. Commençons par rappeler un résultat de théorie de la mesure :

Proposition 3.1.5 *Toute mesure de probabilité ν sur $(\Omega \times X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$ ayant pour marginale $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ se désintègre de la façon suivante : il existe une famille $\{\nu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ telle que pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$:*

1. *ν_ω est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$,*
2. *$\omega \mapsto \nu_\omega(B)$ est $\mathcal{F}$-mesurable pour tout $B \in \mathcal{B}$,*
3. *on a la décomposition (formelle) : $\nu(d\omega, dx) = \nu_\omega(dx)\,\mathbb{P}(d\omega)$.*

De plus cette décomposition est $\mathbb{P}$-presque-sûrement unique.

En utilisant cette désintégration il est alors possible de caractériser l'invariance d'une mesure dans le cas aléatoire :

Proposition 3.1.6 *Une mesure de probabilité ν admettant la désintégration précédente est invariante pour l'application skew product si et seulement si $\Psi(1,\omega)_*\nu_\omega = \nu_{\vartheta\omega}$ pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$.*

Preuve On rappelle que ϑ est supposée inversible. ν est invariante si et seulement si pour tout A et B tels que $A \times B \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ on a $S_*\nu(A \times B) = \nu(A \times B)$. Or :

$$\begin{aligned}\nu(S^{-1}A \times B) &= \int_{\vartheta^{-1}A} \nu_\omega(\Psi(1,\omega)^{-1}B)d\,\mathbb{P}(\omega)\\ &= \int_{\vartheta^{-1}A} \nu_\omega(\Psi(1,\omega)^{-1}B)d\,\mathbb{P}(\omega)\\ &= \int_{\vartheta^{-1}A} \Psi(1,\omega)_*\nu_\omega(B)d\,\mathbb{P}(\omega)\end{aligned}$$

proposition et :

$$\begin{aligned}\nu(A \times B) &= \int_A \nu_\omega(B)d\,\mathbb{P}(\omega)\\ &= \int_A \nu_\omega(B)d(\vartheta_*\,\mathbb{P})(\omega)\\ &= \int_{\vartheta^{-1}A} \nu_{\vartheta\omega}(B)d\,\mathbb{P}(\omega)\end{aligned}$$

Donc pour tout A et pour tout B on a :

$$\int_{\vartheta^{-1}A} \nu_{\vartheta\omega}(B)d\,\mathbb{P}(\omega) = \int_{\vartheta^{-1}A} \Psi(1,\omega)_*\nu_\omega(B)d\,\mathbb{P}(\omega)$$

∎

3.2 Les systèmes dynamiques aléatoires : le cas i.i.d

Nous conservons l'aléa $(\Omega, \mathcal{F}, \vartheta, \mathbb{P})$. Un cas particulièrement intéressant est celui des systèmes dynamiques aléatoires générés par la composition d'applications aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Plus précisément en notant $\Psi(1,\omega) = T_\omega$, on a une famille de dynamiques $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ indicée sur l'espace des aléas. On considère alors un processus (ω_n) i.i.d sur Ω de loi $\mathbb{P}$ et l'on définit l'orbite aléatoire d'un point $x \in X$ par :

$$x_n^\omega := T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1}x$$

Donnons tout de suite un exemple très simple de système dynamique aléatoire i.i.d engendré par une suite récurrente aléatoire (X_n). Précisément, on considère un réel positif a et une suite $(\omega_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, on définit alors la suite (X_n) par :

$$X_{n+1} = aX_n + \omega_{n+1}$$

X_0 étant donné. Pour $a = 1$ il s'agit d'une marche aléatoire classique unidimensionnelle et nous avons en particulier les résultats de Polya sur leur récurrence. Si $a \neq 1$ il est facile de voir que la suite (X_n) s'obtient en composant aléatoirement les deux applications affines : $T_1x = ax - 1$ et $T_2x = ax + 1$, chacune étant choisie avec la même probabilité $p = 1/2$. Le cas intéressant est celui où $a \in (0, 1)$. Dans le cas où $a > 1$ il est facile de voir que $P\{\lim_{n\to\infty} X_n = \pm\infty\} = 1$ en écrivant $X_n = a^nX_0 + a^{n-1}\omega_1 + \ldots + \omega_n$. Supposons alors $a \in (0, 1)$. On peut écrire pour tout $n \geq 0$:

$$X_n = a^nX_0 + Y_n \quad \text{où} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\omega_k$$

posons $Z_n = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}\omega_k$; le processus (ω_n) étant i.i.d, Y_n et Z_n ont la même loi et puisque $0 < a < 1$, Z_n converge presque sûrement vers une variable Z_∞ supportée sur $[-\dfrac{1}{1-a}, \dfrac{1}{1-a}]$.
Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ; alors par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le compact $[-\frac{1}{1-a} - |X_0|, \frac{1}{1-a} + |X_0|]$ et donc puisque $|(X_n - a^n X_0) - X_n| \to 0$ nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} (f(X_n) - f(X_n - a^n X_0)) = 0$$

En particulier en appliquant le théorème de convergence dominée et le fait que $X_n - a^n X_0$ a la même loi que Z_n on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(Z_n)) = \mathbb{E}(f(Z_\infty))$$

et donc X_n converge en loi vers Z_∞. Notons F_a la fonction de répartition de cette variable Z_∞ et μ_a sa loi. On peut montrer que F_a est continue partout (voir par exemple [39]), en particulier on peut montrer que :

$$F_a(t) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq t) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq t)$$

Proposition 3.2.1 *[14] F_a est l'unique fonction de répartition qui est solution de l'équation fonctionnelle :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \frac{1}{2}\left[G(\frac{t-1}{a}) + G(\frac{t+1}{a})\right]$$

Preuve $Z_\infty^1 = \sum_{k\geq 2} a^{k-2}\omega_k$ est indépendante de ω_1 et suit la même loi que Z_∞ puisque $Z_\infty = aZ_\infty^1 + \omega_1$. Alors :

$$\begin{aligned} P(Z_\infty \leq t) &= P(aZ_\infty^1 + \omega_1 \leq t) \\ &= P(Z_\infty^1 \leq \frac{t+1}{a} | \omega_1 = -1)P(\omega_1 = -1) + P(Z_\infty^1 \leq \frac{t-1}{a} | \omega_1 = 1)P(\omega_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(Z_\infty^1 \leq \frac{t+1}{a}) + \frac{1}{2}P(Z_\infty^1 \leq \frac{t-1}{a}) \end{aligned}$$

La réciproque se fait en utilisant ce même calcul et par récurrence on montre que si X_0 a une fonction de répartition G alors la fonction de répartition de X_n est aussi G, on conclut que $G = F_a$ par unicité de deux probabilités coïncidant sur une classe d'intervalles engendrant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. ∎

En dérivant on obtient que les densités doivent également vérifier cette équation fonctionnelle, on reconnaitra la forme de l'opérateur de Perron-Frobenius aléatoire.

Proposition 3.2.2 *(i) Si $a < 1/2$ alors μ_a est singulière continue et est supportée sur un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle.*

(ii) $\mu_{\frac{1}{2}}$ est la loi uniforme sur $[-2, 2]$.

(iii) Si $a \geq 1/2$ alors μ_a est supportée sur $[-\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a}]$ mais n'est pas toujours absolument continue (voir le résultat d'Erdös [44] qui prouve que μ_a est singulière lorsque a est l'inverse d'un nombre de Pisot[1]).

1. Un nombre de Pisot est un entier algébrique dont les conjugués sont de module strictement inférieur à 1, par exemple le nombre d'or.

Preuve On ne donne que la preuve de (ii) on se reportera à [44] et [68] pour (i) et (iii). Soit $\Phi_t(Z_\infty) = \mathbb{E}(e^{itZ_\infty})$ la fonction caractéristique de Z_∞. Alors :

$$\begin{aligned}
\Phi_t(Z_\infty) &= \Phi_t(\sum_{k=0}^{\infty} a^{k-1}\omega_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi_t(\sum_{k=0}^{n} a^{k-1}\omega_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \Phi_t(a^{k-1}\omega_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \cos(a^k t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{t}{2^k})
\end{aligned}$$

D'un autre côté la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-2, 2]$ est :

$$\begin{aligned}
\Phi_t(\mathcal{U}([-2,2])) &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} e^{itx}dx \\
&= \frac{\sin(2t)}{2t} \\
&= \frac{\cos t \sin t}{t} \\
&= \frac{1}{2(\frac{t}{2})}\sin(2(\frac{t}{2}))\cos t \\
&= \frac{2}{t}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cos t \\
&\quad\vdots \\
&= \frac{2^n}{t}\sin\frac{t}{2^n}\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{t}{2^k} \\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\cos\frac{t}{2^k} \\
&= \Phi_t(Z_\infty)
\end{aligned}$$

puisque $\sin x/x \sim 1$ quand x tend vers 0. ∎

Revenons au cas général des systèmes i.i.d ; les mesures de probabilité invariantes du *skew product* associé sur lesquelles nous nous concentrerons seront des mesures produits au travers de la proposition suivante :

Proposition 3.2.3 *$\nu = \mathbb{P}\otimes\mu$ est une mesure invariante pour le skew product S si et seulement si :*

$$\mathbb{E}((T_\cdot)_*\mu)(B) = \int_X \mathbb{P}\{\omega\in\Omega\ ;\ T_\omega x \in B\}d\mu(x) = \mu(B)$$

Ce cas est d'autant plus intéressant que les orbites aléatoires sont alors des processus de Markov. Rappelons tout d'abord la définition générale d'une probabilité de transition :

Définition 3.2.4 Si $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ sont deux espaces mesurables, on appelle mesure de transition de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$, toute famille $Q = \{Q(x, B) \ ; \ x \in E \ , \ B \in \mathcal{F}\}$ de nombres dans $[0, \infty]$ qui vérifie :

(1) $x \mapsto Q(x, A)$ est $\mathcal{E}$-mesurable pour tout $A \in \mathcal{F}$,

(2) $A \mapsto Q(x, A)$ est une mesure sur $(F, \mathcal{F})$, pour tout $x \in E$.

De plus si $Q(x, F) = 1$, pour tout x, alors on dira que Q est une probabilité de transition.

Proposition 3.2.5 *Le processus $\{X_n\}_{n\geq 0}$ défini par $X_n = T_{\omega_n}(X_{n-1})$ où $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ est un processus i.i.d de loi $\mathbb{P}$ est un processus de Markov homogène de probabilité de transition :*

$$P(x, B) := \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \ ; \ T_\omega x \in B\}$$

Preuve Le processus $\{\omega_n\}_n$ étant i.i.d, le processus $\{X_n\}_n$ est tel que la $n+1$-ième probabilité de transition est :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} \in A | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) &= P(T_{\omega_{n+1}}(X_n) \in A | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\ &= P(T_{\omega_{n+1}}(x_n) \in A) \\ &= P(T_{\omega_0}(x_n) \in A) \\ &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \ ; \ T_\omega x_n \in A\} \end{aligned}$$

Ainsi le processus vérifie la propriété de Markov, est homogène et sa probabilité de transition est donnée par $P(x, A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \ ; \ T_\omega x \in A\}$. ∎

Tout système dynamique aléatoire i.i.d définit donc un processus de Markov homogène. La question inverse, à savoir la construction de tout processus de Markov comme composition d'applications aléatoires i.i.d a été abondamment étudiée. Dans la proposition suivante nous allons voir que dans un cadre très général il est toujours possible de construire un processus de Markov comme la composition d'applications aléatoires mesurables. Toute la difficulté de ce problème surgit lorsque l'on tente de maîtriser la régularité de ces applications.

Proposition 3.2.6 *Pour toute famille de probabilités de transition $\{P(x, .)\}_{x\in X}$ on peut construire des applications boréliennes T_ω de X dans lui-même qui satisfont l'équation : $P(x, A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \ ; \ T_\omega x \in A\}$ où $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité et Ω un espace métrique.*

Preuve Nous reprenons ici les idées de la preuve de Kifer [74].

(i) On traite d'abord le cas $M = [0, 1]$. On définit :

$$\Phi(\omega, x) = \inf\{\gamma \ ; \ P(x, [0, \gamma]) \geq \gamma\}$$

$x \mapsto \Phi(\omega, x)$ est mesurable car :

$$\Phi(\omega, x) > a \Leftrightarrow \inf\{\gamma \ ; \ P(x, [0, \gamma]) \geq \omega\} > a \Leftrightarrow P(x, [0, a]) < \omega$$

et donc :

$$\{x \ ; \ \Phi(\omega, x) > a\} = \{x \ ; \ P(x, [0, a]) < \omega\}$$

Or $x \mapsto P(x, A)$ est mesurable puisque c'est une probabilité de transition et donc :

$$x \mapsto \{x \ ; \ P(x, [0, a]) < \omega\}$$

est mesurable.

On montre ensuite que pour tout borélien A :

$$Leb\{\omega \ ; \ \Phi(\omega, x) \in A\} = P(x, A)$$

En effet, comme plus haut on a $\{\omega \ ; \ \Phi(\omega, x) > a\} = \{\omega \ ; \ P(x, [0, a]) < \omega\}$ donc :

$$\begin{aligned} Leb\{\omega \ ; \ \Phi(\omega, x) > a\} &= Leb\{\omega \ ; \ P(x, [0, a]) < \omega\} \\ &= 1 - P(x, [0, a]) \end{aligned}$$

car de manière générale pour une application f : $Leb\{\omega; \ f(x) < \omega\} = 1 - f(x)$. Finalement : $P(x, [0, a]) = Leb\{\omega \ ; \ \Phi(\omega, x) \leq a\}$. Nous avons ainsi reconstruit le processus de Markov avec des applications aléatoires en choisissant :

$$\Omega = [0, 1] \ \ ; \ \ \mathbb{P} = Leb \ \ ; \ \ T_\omega(x) = \inf\{\gamma \ ; \ P(x, [0, \gamma]) \geq \omega\}$$

(ii) Dans le cas général où M est une variété compacte, il existe un isomorphisme mesurable de M dans $I = [0, 1]$. Posons $\Gamma = \varphi(I)$ et définissons une probabilité $\widetilde{P}(x, .)$ sur Γ par :

$$\widetilde{P}(x, \Delta) = P(x, \varphi^{-1}(\Gamma \cap \Delta))$$

pour tout Δ mesurable sur I, et l'application :

$$\widetilde{\Phi}(\omega, x) = \inf\{\gamma \ ; \ \widetilde{P}(x, [0, \gamma]) \geq \omega\}$$

Alors exactement comme dans le cas précédent on montre que :

$$\widetilde{P}(x, \Delta) = Leb\{\omega \ ; \ \widetilde{\Phi}(\omega, x) \in \Delta\}$$

Nous revenons sur M en utilisant l'application Ψ définie par $\Psi = \Phi^{-1}$ sur Γ et $\Psi = x_0$ sur $I \setminus \Gamma$ pour un $x_0 \in M$. Alors :

$$\begin{aligned} Leb\{\omega \ ; \ \Psi \circ \widetilde{\Phi}(\omega, x) \in A\} &= Leb\{\omega; \ \widetilde{\Phi}(\omega, x) \in \Psi^{-1} A\} \\ &= \widetilde{P}(x, \Psi^{-1} A) \\ &= \widetilde{P}(x, \Gamma \cap \Psi^{-1} A) \\ &= \widetilde{P}(x, \varphi(\Gamma \cap A)) \\ &= P(x, \Gamma \cap A) \end{aligned}$$

Ainsi de manière générale, si l'on veut tirer au sort directement les applications dans l'espace des applications mesurables (et non les indices) avec la probabilité $\mathbb{P}$ on pose $\mathbb{P} = \Phi_* Leb$.

En particulier, en dimension 1, les T_ω sont obtenues comme solutions de l'équation :

$$P(x, [0, T_\omega x]) = \omega$$

∎

Exemple 3.2.7 Nous allons construire explicitement les T_ω dans un cas simple. Plaçons nous dans le cadre des perturbations aléatoires d'une application $T : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$ donnée (on

verra ce cas en détail dans la suite). On définit alors le processus de Markov de probabilités de transition :

$$P_\varepsilon(x, A) = \frac{m(A \cap B_\varepsilon(Tx))}{m(B_\varepsilon(Tx))}$$

pour un $\varepsilon > 0$ fixé et pour tout $x \in \mathcal{S}^1$. C'est-à-dire que chaque état de l'orbite est diffusé dans un ε-voisinage de l'itéré de l'état précédent avec une loi uniforme. Par exemple, l'état initial étant x_0, on applique la dynamique T pour obtenir Tx_0 mais pour continuer, au lieu de repartir de Tx_0, l'on choisit aléatoirement un nouveau point x_1 dans la boule de taille ε autour de Tx_0, tous les choix dans cette boule étant équiprobables ; on parle de diffusion uniforme. Montrons que l'on peut alors trouver une famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in[0,1]}$ telle que le système dynamique aléatoire engendré par les compositions de celles-ci soit équivalent à ce processus de Markov. En reprenant les notations de la preuve précédente, on a dans ce cas : $I = [0, 1]$, $\varphi = \psi = \mathrm{Id}$ et pour tout $\gamma \in [0, 1]$,

$$P_\varepsilon(x, [0, \gamma]) = \frac{1}{2\varepsilon} m([0, \gamma] \cap [Tx - \varepsilon, Tx + \varepsilon])$$

On est alors amené à résoudre l'équation en γ suivante :

$$\int_0^\gamma p_\varepsilon(x, y)dy = \omega$$

Les $T_\omega(x)$ sont alors les solutions de :

$$m([0, \gamma] \cap [Tx - \varepsilon, Tx + \varepsilon]) = 2\varepsilon\omega$$

Notons $f(\gamma) = m([0, \gamma] \cap [Tx - \varepsilon, Tx + \varepsilon])$. Si $\gamma \leq Tx - \varepsilon$ ou $\gamma > Tx - \varepsilon$ alors $f(\gamma) = 0$. Si $Tx - \varepsilon < \gamma \leq Tx + \varepsilon$ alors $f(\gamma) = |\gamma - (Tx - \varepsilon)|$. Finalement pour tout ω :

$$T_\omega x = Tx + \varepsilon(2\omega - 1)$$

Ce qui correspond à un bruit additif.
Inversement il est facile de reconstruire les probabilités de transition partant de ces T_ω :

$$P_\varepsilon(x, [0, \gamma]) = m\{\omega \ ; \ Tx + \varepsilon(2\omega - 1) \in [0, \gamma]\} = m\{\omega \ ; \ \omega \leq \frac{\gamma - (Tx - \varepsilon))}{2\varepsilon}\}$$

Donc on a : $P_\varepsilon(x, [0, \gamma]) = \dfrac{\gamma - Tx}{\varepsilon}$.

Revenons au cas général d'un système i.i.d ; on en déduit que la mesure $\nu = \mathbb{P} \otimes \mu$ est S-invariante si et seulement si μ est une mesure stationnaire du processus de Markov ainsi défini. μ étant la marginale de ν sur l'espace des phases $(X, \mathcal{B})$, ce sera notre outil principal pour l'étude du comportement à long terme des orbites aléatoires.

Définition 3.2.8 Une telle mesure μ sera par extension appelée mesure stationnaire du système dynamique aléatoire.

On peut réécrire la propriété de stationnarité de la façon suivante :

Proposition 3.2.9 *Une mesure de probabilité μ est stationnaire pour le système dynamique aléatoire si et seulement si elle vérifie pour tout borélien $B \in \mathcal{B}$:*

$$\int_\Omega (T_\omega)_* \mu(B) d\,\mathbb{P}(\omega) = \mu(B)$$

Preuve

Définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_x : \Omega &\to X \\ \omega &\mapsto T_\omega x\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_X P(x,B)d\mu(x) &= \int_X (\Phi_x)_* \mathbb{P}_(B)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \int_\Omega \mathbb{1}_B(\omega)\, d(\Phi_x)_* \mathbb{P}(\omega)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \int_\Omega \mathbb{1}_B(\Phi_x(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega)\, d\mu(x) \\ &= \int_\Omega \int_X \mathbb{1}_B(T_\omega(x))\, d\mu(x)\, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega \mu(T_\omega^{-1}B)\, d\mathbb{P}(\omega)\end{aligned}$$

∎

Cette proposition permet de voir que les mesures stationnaires sont donc celles qui sont *invariantes en moyenne* sur la famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

Pour tirer partie du fait que les systèmes dynamiques aléatoires i.i.d engendrent des processus de Markov, nous rappelons les principaux objets utilisés dans ce cadre. Il est usuel de définir un opérateur de transition $\mathcal{T}$ agissant sur les fonctions f réelles bornées par :

$$\mathcal{T}f(x) = \int_X f(y)P(x,dy)$$

et son opérateur adjoint $\mathcal{T}^*$ défini sur l'espace des mesures μ signées finies par :

$$\mathcal{T}^*\mu(B) = \int_X P(x,B)d\mu(x)$$

Un cas particulier fort utile est celui des processus de Markov dont la probabilité de transition est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons $p(x,.)$ sa densité. Il est alors pratique de définir une version $\widehat{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}^*$ agissant directement sur les densités des mesures absolument continues par :

$$\widehat{\mathcal{T}}g(x) = \int_X p(z,x)g(z)dz$$

Proposition 3.2.10 *Si la probabilité de transition du processus de Markov est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors toutes les mesures stationnaires du système dynamique aléatoire associé sont également absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et de plus les densités de celles-ci sont les points fixes de l'opérateur $\widehat{\mathcal{T}}$.*

Preuve Supposons que $P(x,.) \ll m$ pour tout x et soit A un borélien tel que $m(A) = 0$,

alors si μ est une mesure stationnaire, elle vérifie

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int_M P(x,A)d\mu(x)\\ &= \int_M \underbrace{\int_A p(x,y)dy}_{=0}\, d\mu(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Le fait que les densités de mesures stationnaires soient les points fixes de l'opérateur de transfert aléatoire découle directement du fait que la dualité entre celui-ci et l'opérateur d'évolution est conservée (voir la proposition suivante). ∎

Exemple 3.2.11 Reprenons un exemple simple de processus de Markov sur l'intervalle $(0,1)$ introduit dans [39] défini comme suit : si le processus est dans l'état x, on tire au sort l'un des deux intervalles $(0,x)$ ou $(x,1)$, chacun affecté de la même probabilité $1/2$ et ensuite nous choisissons un point y au hasard dans cet intervalle. La densité de la probabilité de transition est alors :

$$k(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{x}\mathbb{1}_{(0,x)}(y) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}\mathbb{1}_{(x,1)}(y)$$

Supposons qu'il existe une mesure stationnaire de densité f (le théorème 1 de [39] montre qu'il existe une unique mesure stationnaire pour ce type de systèmes) alors f doit vérifier :

$$f(y) = \int_0^1 k(x,y)f(x)dx = \frac{1}{2}\int_y^1 \frac{f(x)}{x}dx + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{f(x)}{1-x}dx$$

soit en dérivant :

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{1}{2}(-\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y})$$

Soit

$$f(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}$$

ce qui correspond à une distribution du type arcsinus puisque la fonction de répartition est alors $F(t) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}$. Les auteurs de cet exemple précisent qu'il est possible de reconstruire ce processus comme la composition des applications aléatoires suivantes :

$$T^1_\omega(x) = \omega x \qquad ; \qquad T^2_\omega(x) = x + \omega(1-x)$$

T^1 et T^2 étant chacune choisie avec probabilité $1/2$ et ω est uniforme sur l'intervalle $(0,1)$.

Revenons à la famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Nous avons rappelé dans le premier chapitre les objets fondamentaux utilisés en théorie ergodique classique pour étudier chacune d'entre elles du point de vue de la dynamique qu'elle engendre. Ils nous faut ici définir les analogues de ces objets qui nous permettront d'étudier la famille complète dans le cadre du système dynamique aléatoire. Sur le modèle de la définition des mesures stationnaires (qui jouent le rôle de mesures invariantes dans le cadre aléatoire) nous allons utiliser :

Définition 3.2.12 On note $\mathcal{U}_\omega$ (resp. $\mathcal{L}_\omega$) l'opérateur d'évolution (resp. l'opérateur de Perron-Frobenius) associé à la dynamique T_ω.

– L'opérateur d'évolution aléatoire :

$$\widehat{\mathcal{U}}f(x) = \int_\Omega \mathcal{U}_\omega f(x) d\,\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega f \circ T_\omega(x) d\,\mathbb{P}(\omega)$$

– L'opérateur de Perron-Frobenius aléatoire :

$$\widehat{\mathcal{L}}h(x) = \int_\Omega \mathcal{L}_\omega h(x) d\,\mathbb{P}(\omega)$$

Proposition 3.2.13 *Une relation de dualité analogue à celle rencontrée dans le cas déterministe est toujours vérifiée pour les versions aléatoires des opérateurs, à savoir, pour tous $\varphi \in L^1_m$ et $\psi \in L^\infty_m$:*

$$\int_X (\widehat{\mathcal{L}}\varphi)\psi dm = \int_X \varphi(\widehat{\mathcal{U}}\psi) dm$$

Preuve On utilise le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int (\widehat{\mathcal{L}}\varphi)(y)\psi(y) dm(y) &= \int \left(\int (\mathcal{L}_\omega \varphi)(y) d\,\mathbb{P}(\omega) \right) \psi(y) dm(y) \\
&= \int \left(\int (\mathcal{L}_\omega \varphi)(y)\psi(y) dm(y) \right) d\,\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int \left(\int \varphi(y)(\mathcal{U}_\omega \psi)(y) dm(y) \right) d\,\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int \varphi(y) \left(\int (\mathcal{U}_\omega \psi)(y) d\,\mathbb{P}(\omega) \right) dm(y) \\
&= \int \varphi(y)(\widehat{\mathcal{U}}\varphi)(y) dm(y)
\end{aligned}$$

∎

Nous avons alors d'une part des opérateurs définis à partir du processus de Markov et d'autre part les opérateurs que nous venons de définir en utilisant directement la famille $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Ces différents opérateurs ayant le même but : décrire la dynamique aléatoire à long terme, assurons nous qu'ils sont équivalents :

Proposition 3.2.14 *(i) Pour toute fonction mesurable bornée f, on a $\widehat{\mathcal{U}}f = \mathcal{T}f$,*
(ii) Pour toute fonction $h \in L^1_m$, on a : $\widehat{\mathcal{T}}h = \widehat{\mathcal{L}}h$.

Preuve

(i)

$$\int_\Omega f \circ T_\omega(x)\, d\,\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega f \circ \Phi_x(\omega) d\,\mathbb{P}(\omega) = \int_X f(y)\, d((\Phi_x)_*\,\mathbb{P})(y)$$

et $d((\Phi_x)_*\,\mathbb{P})(y) = ((\Phi_x)_*\,\mathbb{P})(dy) = P(x, dy)$, ce qui donne la relation.

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^*\mu(A) &= \int_\Omega \mu(T_\omega^{-1}(A))d\,\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \int_X \mathcal{U}_\omega \mathbb{1}_A(x)h(x)dx\; d\,\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \int_X \mathbb{1}_A(x)\mathcal{L}_\omega h(x)dx\; d\,\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_X \mathbb{1}_A(x)\left(\int_\Omega \mathcal{L}_\omega h(x)d\,\mathbb{P}(\omega)\right)dx
\end{aligned}$$

Ainsi pour les densités : $\widehat{\mathcal{L}}h(x) = \int_\Omega \mathcal{L}_\omega h(x)d\,\mathbb{P}(\omega)$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^*\mu(A) &= \int_X P(x,A)h(x)dx \\
&= \int_X \int_X p(x,dy)\mathbb{1}_A(y)h(x)dx \\
&= \int_X \mathbb{1}_A(y)\left(\int_X p(x,y)h(x)dx\right)dy
\end{aligned}$$

On obtient donc : $\widehat{\mathcal{L}}h(x) = \int_X p(z,x)h(z)dz$. Et finalement :

$$\widehat{\mathcal{L}}h(x) = \int_X p(z,x)h(z)dz = \int_\Omega \mathcal{L}_\omega h(x)d\,\mathbb{P}(\omega)$$

∎

3.3 Les systèmes i.i.d comme perturbation

Les séries temporelles $\varphi(T^j(x))$ issues de relevés d'une observable φ se comportent souvent de manière complexe et erratique avec le temps j, même pour des lois d'évolution T très simples. De plus, ces quantités peuvent être très sensibles aux petites fluctuations de l'état du système ; d'arbitraires petites modifications peuvent typiquement conduire à des valeurs très différentes des $\varphi(T^j(x))$ pour un j assez grand. Or ce genre de modifications sont malheureusement inévitables lorsque l'on étudie un système naturel, il sera en effet soumis à des bruits extérieurs et aux erreurs d'arrondis survenant durant toute simulation numérique. Ainsi une étude pertinente d'un système en évolution nécessite de prendre en compte ces variations stochastiques. Dans cette optique la théorie des systèmes dynamiques aléatoires s'avère particulièrement efficace. L'idée générale est de considérer que toutes les applications de la famille $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ introduite dans la section précédente sont proches dans un sens $\mathcal{C}^k$ (le plus souvent on utilisera $k = 0$ ou $k = 1$) de la dynamique initiale T. Nous devons utiliser ici une famille de systèmes dynamiques aléatoires, chaque système représentant une perturbation de taille ε donnée. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$ on considère un espace de probabilité $(\Omega_\varepsilon, \mathcal{B}(\Omega_\varepsilon), \theta_\varepsilon)$ où Ω_ε est un espace métrique muni de sa σ-algèbre de Borel ; une famille d'applications indexée sur Ω_ε : $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega_\varepsilon}$ et l'application :

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon : \quad \Omega_\varepsilon \times X &\longrightarrow X \\
(\omega, x) &\longmapsto T_\omega(x)
\end{aligned}$$

telle que $x \in X$, $\Phi_\varepsilon(.,x)$ est mesurable et telle qu'il existe $\omega^* \in \Omega_\varepsilon$ pour lequel : $\Phi_\varepsilon(\omega^*,x) = T(x)$ pour tout $x \in X$.

Les orbites aléatoires seront alors engendrées par un processus $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d de loi θ_ε. C'est à dire que l'orbite aléatoire d'un point initial x_0 associée à une réalisation $\underline{\omega} = (\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_n) \in \Omega_\varepsilon^n$ sera $\{x_n^{\underline{\omega}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$x_n^{\underline{\omega}} = T_{\omega_n} \circ \ldots \circ T_{\omega_1} x_0.$$

A ε fixé, nous avons ainsi un système dynamique aléatoire défini avec $\Omega = \Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ et $\vartheta = \sigma$ le shift à gauche. Posons maintenant les hypothèses sur la perturbation :

Hypothèse 3.3.1 *Notons* $\Phi_x^\varepsilon(.) := \Phi_\varepsilon(.,x)$

(RT1) Pour tout $x \in X$, $(\Phi_x^\varepsilon)_*\theta_\varepsilon$ *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

(RT2) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\operatorname{supp}\Phi_x^\varepsilon \subset B_\varepsilon(Tx)$ *pour tout* $x \in X$

Remarque 3.3.2
- *(RT1) assure que la probabilité de transition du processus de Markov associé au système dynamique aléatoire de taille ε soit absolument continue. En effet la probabilité de transition associée est :*

$$P_\varepsilon(x,A) := (\Phi_x^\varepsilon)_*\theta_\varepsilon(A) = \theta_\varepsilon\left\{\omega \in \Omega_\varepsilon \;;\; T_\omega x \in A\right\}$$

- *(RT2) assure la proximité au sens $\mathcal{C}^0$ des applications T_ω avec l'application non-perturbée T.*

Pour mener l'étude des systèmes aléatoires nous devons redéfinir dans ce cadre les propriétés dynamiques classiques des systèmes en évolution, en particulier l'ergodicité et le mélange.

Définition 3.3.3 On dira que le système dynamique aléatoire défini plus haut est ergodique pour une mesure stationnaire μ^ε si le *skew product* associé est ergodique (au sens usuel).

On retrouve également une caractérisation fonctionnelle analogue à celle que l'on avait de l'ergodicité pour une mesure invariante,

Proposition 3.3.4 *Soit μ^ε une mesure stationnaire ergodique, alors pour tous $\varphi \in L^1$ et $\psi \in L^\infty$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_X \varphi(\mathcal{U}_\varepsilon^k\psi)\,d\mu^\varepsilon = \int_X \varphi\,d\mu^\varepsilon \int_X \psi\,d\mu^\varepsilon$$

Preuve On reprend ici les idées de la preuve de Viana [109]. Considérons une nouvelle fois pour $\varepsilon > 0$ fixé, le système :

$$\begin{aligned} S : \Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}} \times X &\to \Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}} \times X \\ (\underline{\omega}, x) &\mapsto (\sigma\underline{\omega}, T_{\omega_0}x) \end{aligned}$$

Alors puisque μ^ε est stationnaire ergodique, $\nu^\varepsilon = \theta_\varepsilon^{\mathbb{N}} \otimes \mu^\varepsilon$ est S-invariante et ergodique. On sait alors par la caractérisation analytique de l'ergodicité classique que pour tous $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{X\times\Omega_\varepsilon^k} f(x,\underline{\omega})\mathcal{U}_S^k g(x,\underline{\omega})\, d\nu^\varepsilon = \int_{X\times\Omega_\varepsilon^k} f\, d\nu^\varepsilon \int_{X\times\Omega_\varepsilon^k} g\, d\nu^\varepsilon$$

En particulier, en notant π_X la projection canonique de $X \times \Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ sur X, si l'on prend $g = \varphi \circ \pi_X$ et $f = \psi \circ \pi_X$, pour $\varphi \in L^1$ et $\psi \in L^\infty$, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{X\times\Omega_\varepsilon^k} \varphi(x)\mathcal{U}_{\underline{\omega}}^k \psi(x)\, d\theta_\varepsilon(\omega_0)\dots d\theta_\varepsilon(\omega_{k-1}) d\mu^\varepsilon = \int_X \varphi\, d\mu^\varepsilon \int_X \psi\, d\mu^\varepsilon$$

puisque $\mathcal{U}_S^k(\psi \circ \pi_X) = \mathcal{U}_{\underline{\omega}}^k \psi$, et par définition de $\mathcal{U}_\varepsilon$ on obtient finalement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X \varphi(\mathcal{U}_\varepsilon^k \psi)\, d\mu^\varepsilon = \int_X \varphi\, d\mu^\varepsilon \int_X \psi\, d\mu^\varepsilon$$

∎

Définition 3.3.5 Une mesure stationnaire μ^ε est dite mélangeante si pour tout $\varphi \in L_m^1$ et $\psi \in L_m^\infty$:

$$\int \varphi(\mathcal{U}_\varepsilon^n \psi) d\mu^\varepsilon \longrightarrow \int \varphi d\mu^\varepsilon \int \psi d\mu^\varepsilon \quad \text{quand } n \to +\infty\,.$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble $\mathcal{S}$ des mesures stationnaires est un convexe, on a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.6 *Les points extrémaux de $\mathcal{S}$ sont des mesures ergodiques.*

Preuve Soit μ^ε un point extrémal de $\mathcal{S}$; supposons que μ^ε n'est pas ergodique. Alors il existe un borélien B tel que $\mathcal{U}_\varepsilon \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B$ et $0 < \mu^\varepsilon(B) < 1$.
Pour tout borélien A, on peut alors écrire :

$$\mu^\varepsilon(A) = \frac{\mu^\varepsilon(B)\mu^\varepsilon(A\cap B)}{\mu^\varepsilon(B)} + \frac{\mu^\varepsilon(B^c)\mu^\varepsilon(A\cap B^c)}{\mu^\varepsilon(B^c)}$$

Montrons que μ_B^ε définie par :

$$\mu_B^\varepsilon(A) = \frac{\mu^\varepsilon(A\cap B)}{\mu^\varepsilon(B)}$$

est une mesure stationnaire. Tout d'abord remarquons que l'on peut caractériser les mesures stationnaires d'une autre manière, en effet il suffit que la propriété soit vérifiée pour les fonctions caractéristiques, alors : ν est une mesure stationnaire si pour tout borélien A on a :

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{U}_\varepsilon \mathbb{1}_A\, d\nu = \int \mathbb{1}_A\, d\nu = \nu(A) \\ \Longleftrightarrow &\iint \mathbb{1}_{T_\omega^{-1}(A)}(x)\, d\nu(x) d\theta_\varepsilon(\omega) = \nu(A) \\ \Longleftrightarrow &\int \nu(T_\omega^{-1}(A))\, d\theta_\varepsilon(\omega) = \nu(A) \end{aligned}$$

Appliquons ça à μ_B^ε,

$$\int \mu_B^\varepsilon(T_\omega^{-1}(A))\, d\theta_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\mu^\varepsilon(B)} \int \mu^\varepsilon(T_\omega^{-1}(A) \cap B)\, d\theta_\varepsilon(\omega)$$

Or B est invariant donc pour θ_ε-presque tout ω, $T_\omega^{-1}(B) = B$ et on a :

$$\frac{1}{\mu^\varepsilon(B)} \int \mu^\varepsilon(T_\omega^{-1}(A) \cap B)\, d\theta_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\mu^\varepsilon(B)} \int \mu^\varepsilon(T_\omega^{-1}(A \cap B))\, d\theta_\varepsilon(\omega)$$

Et comme μ^ε est stationnaire,

$$\frac{1}{\mu^\varepsilon(B)} \int \mu^\varepsilon(T_\omega^{-1}(A \cap B))\, d\theta_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\mu^\varepsilon(B)} \mu^\varepsilon(A \cap B) = \mu_B^\varepsilon(A)$$

μ_B^ε est donc stationnaire et l'on a écrit μ^ε comme combinaison convexe stricte d'éléments de $\mathcal{S}$ ce qui est une contradiction. ∎

La question de la stabilité du système initial se pose naturellement ; intuitivement, supposons qu'à chaque taille ε de la perturbation il existe une mesure μ^ε stationnaire pour le système aléatoire et qu'il existe une mesure μ invariante pour T. On s'intéressera à la limite des μ^ε lorsque ε tendra vers zéro. Le système sera dit stable si cette limite coïncide avec μ. Voici un premier résultat dans l'optique de répondre à cette question. Nous allons considérer un espace fonctionnel $\mathcal{B}(X) \subset L^1$ qui vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu rappelé dans la partie 1. En particulier il existe sur cet espace une semi-norme $|.|$ telle que la boule unité de $\mathcal{B}(X)$ soit compact dans L^1 pour la norme $|.| + \|.\|_1$.

Exemple 3.3.7
- Dans le cas d'applications dilatantes par morceaux de l'intervalle, on choisira généralement l'espace des fonctions à variations bornées,
- Dans le cas des applications dilatantes par morceaux multidimensionnelles, l'espace des fonctions quasi-Hölder.

Proposition 3.3.8 *Soit $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de densités de mesures stationnaires absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{B}(X)$. Alors toute L^1-limite de cette famille est la densité d'une mesure invariante pour T.*

Preuve Soit $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une famille de mesures stationnaires absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, de densités $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{B}(X)$. Alors $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est une suite bornée de $\mathcal{B}(X)$ et donc par compacité il existe une sous-suite $(\varphi_{\varepsilon_k})_k$ et une fonction $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telles que $\|\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi\|_1 \to 0$ quand $k \to +\infty$.
On a alors la convergence suivante, pour tout $\psi \in L^\infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_{\varepsilon_k} \psi\, dm = \int_X \varphi\, \psi\, dm \tag{3.1}$$

En particulier cette convergence a lieu pour tout $\psi \in \mathcal{C}^0(M)$ puisque X est compact. Nous considérons donc à partir de maintenant ψ continue. Puisque $\|\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi\|_1 \to 0$ il y a une sous-suite $(\varphi_{\varepsilon_{k_m}})_m$ notée $(\varphi_{\varepsilon_m})_m$ telle que $\lim_{m\to\infty} \varphi_{\varepsilon_m}(x) = \varphi(x)$ presque partout et la convergence précédente est encore vraie pour cette sous-suite. De plus l'hypothèse (RT2) sur la perturbation implique que $p_\varepsilon(x, .) \rightharpoonup \delta_{Tx}$ pour tout x dans la topologie faible de L^1

et ainsi pour tout $\psi \in \mathcal{C}^0(X)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{T}_\varepsilon\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_X \psi(y)p_\varepsilon(x,y)dy = \psi(Tx)$. Donc pour tout $x \in X$:

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{T}_{\varepsilon_m}\psi(x)\varphi_{\varepsilon_m}(x) = \psi \circ T(x)\varphi(x) \tag{3.2}$$

D'autre part $\mathcal{T}_{\varepsilon_m}\psi \in L^\infty$ et $\|\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi\|_{L^1} \to 0$ implique l'existence d'une fonction $g \in L^1$ telle que $|\varphi_{\varepsilon_m}(x)| \leq g(x)$ presque partout (voir [26]). Finalement, en utilisant la stationnarité et le théorème de convergence dominée on a :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \int_X \varphi_{\varepsilon_m}(x)\psi(x)\, dm(x) &= \lim_{m\to\infty} \int_X \mathcal{T}_{\varepsilon_m}\psi(x)\varphi_{\varepsilon_m}(x)\, dm(x) \\ &= \int_X \psi \circ T(x)\varphi(x)\, dm(x)\end{aligned}$$

et nous pouvons donc conclure que $\mu = \varphi.m$ est une mesure invariante. ∎

Remarque 3.3.9 *Cette preuve ne nécessite pas la continuité de T.*

3.4 Décomposition spectrale aléatoire

Dans le cadre déterministe nous avons déjà abordé l'analyse spectrale de l'opérateur de Perron-Frobenius, en particulier son éventuelle propriété de quasi-compacité pour un bon choix d'espaces fonctionnels. La décomposition de l'opérateur qui en découle fournit de précieuses informations sur les propriétés ergodiques du système et permet notamment une décomposition des mesures invariantes en combinaisons convexes de mesures ergodiques, dont les supports sont des réunions de supports de mesures mélangeantes pour une puissance de l'opérateur. Il s'agit d'un résultat classique de théorie ergodique (voir le livre de Gora et Boyarsky par exemple [25]) que nous généralisons ici au cas aléatoire.

Nous allons nous placer ici dans le cas d'une application T perturbée par un système dynamique aléatoire i.i.d comme nous l'avons présenté dans la section précédente et nous allons supposer que l'opérateur de Perron-Frobenius perturbé $\mathcal{L}_\varepsilon$ vérifie une inégalité du type Lasota-Yorke pour des fonctions d'un espace $\mathcal{B} \subset L^1$ satisfaisant les conditions du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu. Nous donnerons des exemples de tels systèmes dans la suite.

Théorème 3.4.1 *Soit $\mathcal{B} \subset L^1$ un espace fonctionnel satisfaisant aux conditions du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu tel qu'il existe $\eta < 1$ et $D < \infty$ telles que pour tout $f \in \mathcal{B}$:*

$$|\mathcal{L}_\varepsilon f|_{\mathcal{B}} \leq \eta |f|_{\mathcal{B}} + D\|f\|_{L^1}$$

alors il existe un nombre fini de mesures stationnaires absolument continues ergodiques : $\mu_1^\varepsilon = \psi_{\varepsilon,1}m, \ldots, \mu_k^\varepsilon = \psi_{\varepsilon,k}m$. De plus les densités $\psi_{\varepsilon,1}, \ldots, \psi_{\varepsilon,k}$ sont des éléments de $\mathcal{B}$ et il existe une famille finie d'ensembles $\{C_{\varepsilon,j}^{(i)}\}_{j=1}^{s(i)}$ telle que $\operatorname{supp}\mu_i^\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{s(i)} C_{\varepsilon,j}^{(i)}$ et telle que les $f_{\varepsilon,j}^{(i)} = \psi_{\varepsilon,i}\chi_{C_{\varepsilon,j}^{(i)}}$ vérifient $\mathcal{L}_\varepsilon f_{\varepsilon,j}^{(i)} = f_{\varepsilon,j+1}^{(i)}$, et les mesures $\nu_{i,j}^\varepsilon = f_{\varepsilon,j}^{(i)}m$ soient mélangeantes pour $\mathcal{U}_\varepsilon^{s(i)}$ sur $C_{\varepsilon,j}^{(i)}$.

En particulier les $\mu_1^\varepsilon, \ldots, \mu_k^\varepsilon$ forment une base au sens convexe de l'ensemble des mesures stationnaires, c'est à dire que pour toute mesure stationnaire μ^ε, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ et $\mu^\varepsilon = \sum_{i=1}^k \alpha_i\mu_i^\varepsilon$.

Preuve Ce théorème se montre en plusieurs étapes, nous suivons ici le raisonnement de [25] mené dans le cas déterministe. Tout d'abord nous pouvons appliquer le théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu à l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon$ et obtenir la proposition suivante :

Proposition 3.4.2 *L'intersection du spectre de l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon$ avec le cercle unité est un ensemble G_ε qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments. Soit D_i le sous-espace propre associé à une valeur propre η_i de $\mathcal{L}_\varepsilon$ appartenant à G_ε, alors D_i est de dimension finie pour tout i.*
En notant $\Pi_{\varepsilon,i}$ le projecteur spectral associé à la i-ème valeur propre appartenant à G_ε on a :

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \sum_{i:\eta_i \in G_\varepsilon} \eta_i \Pi_{\varepsilon,i} + Q_\varepsilon \tag{3.3}$$

$$\Pi_{\varepsilon,i}\Pi_{\varepsilon,j} = 0, \quad \text{si} \quad i \neq j \tag{3.4}$$

$$\Pi_{\varepsilon,i}^2 = \Pi_{\varepsilon,i} \tag{3.5}$$

$$\Pi_{\varepsilon,i} Q_\varepsilon = Q_\varepsilon \Pi_{\varepsilon,i} = 0 \tag{3.6}$$

$$\Pi_{\varepsilon,i}(V_\alpha) = D_i \tag{3.7}$$

$$\rho(Q_\varepsilon) < 1 \tag{3.8}$$

où Q_ε est un opérateur linéaire et $\rho(Q_\varepsilon)$ son rayon spectral.

De plus, le théorème de Rota (voir [25]) assure que les éléments de G sont des racines de l'unité :

$$G_\varepsilon = \sigma(\mathcal{L}_\varepsilon) \cap S^1 = \bigcup_{n \in \Delta_\varepsilon} \{e^{\frac{2i\pi k}{n}}\}_{k=0}^{n-1} \quad \text{où} \quad \Delta_\varepsilon = \{m \in \mathbb{N};\ \exists \eta \in G_\varepsilon\ ; \eta^m = 1\}$$

Δ_ε est l'ensemble des ordres des racines de l'unité qui sont dans le spectre, notons M le plus petit commun multiple de ses éléments. Alors 1 est la seule valeur propre de $\mathcal{L}_\varepsilon^M$ et :

$$\mathcal{L}_\varepsilon^M = P_{\varepsilon,1} + Q_\varepsilon^M$$

où $P_{\varepsilon,1}$ est le projecteur sur le sous-espace propre de l'opérateur $\mathcal{L}_\varepsilon^M$ associé à la valeur propre 1. Il n'est pas difficile de voir que $P_{\varepsilon,1}$ projette sur $\mathcal{B}$ et peut-être défini sur L^1.

Considérons l'ensemble des fonctions positives de L^1 invariantes par $\mathcal{L}_\varepsilon^M$, soit :

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \{f \in L^1, f \geq 0, \mathcal{L}_\varepsilon^M f = f\}$$

Et $\mathcal{E}_{\varepsilon,1}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{E}_\varepsilon$ qui vérifient de plus : $\int f dm = 1$.

Proposition 3.4.3 *$\mathcal{E}_\varepsilon$ est de dimension finie et $\mathcal{E}_{\varepsilon,1}$ est un convexe avec un nombre fini de points extrémaux dont les supports forment une partition disjointe de $\mathcal{E}_\varepsilon$.*

Preuve $\mathcal{E}_\varepsilon = P_{\varepsilon,1}(L^1) \cap \left\{f \in L^1\ ;\ f \geq 0\right\}$ et on sait que $P_{\varepsilon,1}(\mathcal{B})$ est de dimension finie (quasi-compacité de l'opérateur) et donc est fermé dans L^1 donc : $\mathcal{E}_\varepsilon \subset P_{\varepsilon,1}(L^1) = P_{\varepsilon,1}(L^1) = P_{\varepsilon,1}(\overline{\mathcal{B}}) = \overline{P_{\varepsilon,1}(\mathcal{B})}$ ce qui implique que $\mathcal{E}_\varepsilon$ soit de dimension finie.

Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{E}_\varepsilon$, $\mathcal{L}_\varepsilon^M$ est un opérateur positif puisque pour tout ω, $\mathcal{L}_\omega$ est positif, donc : $\mathcal{L}_\varepsilon^M(\min(f_1, f_2)) \leq \mathcal{L}_\varepsilon^M f_1 = f_1$, on fait la même chose avec f_2 et on obtient que :

$$\mathcal{L}_\varepsilon^M(\min(f_1, f_2)) \leq \min(f_1, f_2)$$

Rappelons que pour tout ω, $\mathcal{L}_\omega$ préserve l'intégrale, donc $\mathcal{L}_\varepsilon$ aussi, en effet :

$$\begin{aligned}\int \mathcal{L}_\varepsilon f dm &= \iint \mathcal{L}_\omega f d\theta_\varepsilon(\omega) dm \\ &= \iint \mathcal{L}_\omega f dm d\theta_\varepsilon(\omega) \\ &= \iint f dm d\theta_\varepsilon(\omega) \\ &= \int f dm\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_\varepsilon^M$ préserve aussi l'intégrale et : $\int \mathcal{L}_\varepsilon^M(\min(f_1, f_2)) - \min(f_1, f_2) dm = 0$. Puisque $\mathcal{L}_\varepsilon^M(\min(f_1, f_2)) - \min(f_1, f_2) \leq 0$, on obtient que $\mathcal{L}_\varepsilon^M(\min(f_1, f_2)) = \min(f_1, f_2)$ p.p, ce qui nous permet de conclure que si $f_1 \in \mathcal{E}_\varepsilon$ et $f_2 \in \mathcal{E}_\varepsilon$, alors $\min(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_\varepsilon$.

Il est clair que $\mathcal{E}_{\varepsilon,1}$ est convexe, et est inclus dans $\mathcal{E}_\varepsilon$, il n'y a donc qu'un nombre fini de points extrémaux dans $\mathcal{E}_{\varepsilon,1}$; soient f_1 et f_2 deux de ces points. Montrons qu'ils ont des supports disjoints.
Supposons que $\alpha_1 = \int \min(f_1, f_2) dm > 0$.
Soit $g = f_1 - \min(f_1, f_2) \in \mathcal{E}_\varepsilon$ et $\alpha_2 = \int g dm$. On vérifie facilement que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et que l'on a :

$$f_1 = \alpha_1 \frac{1}{\alpha_1} \min(f_1, f_2) + \alpha_2 \frac{1}{\alpha_2} g$$

avec $\frac{1}{\alpha_1} \min(f_1, f_2)$ et $\frac{1}{\alpha_2} g$ dans $\mathcal{E}_{\varepsilon,1}$. C'est à dire qu'on a écrit f_1 comme une combinaison convexe stricte d'éléments de $\mathcal{E}_{\varepsilon,1}$ ce qui est une contradiction ; donc $\alpha_1 = \int \min(f_1, f_2) dm = 0$ ce qui implique que $\min(f_1, f_2) = 0$ et donc que ces deux fonctions ont des supports disjoints. ∎

Notons $f_{\varepsilon,1}, \ldots, f_{\varepsilon,s}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{E}_{\varepsilon,1}$; elles ont des supports disjoints donc sont linéairement indépendantes et $s \leq \dim \mathcal{E}_\varepsilon$; de plus on sait que $\mathrm{vect}(f_{\varepsilon,1}, \ldots, f_{\varepsilon,s}) = \mathcal{E}_{\varepsilon,1}$ donc $(f_{\varepsilon,1}, \ldots, f_{\varepsilon,s})$ est une base de $\mathcal{E}_\varepsilon$(théorème de Minkowski sur les ensembles convexes).

Lemme 3.4.4 *Il existe des ensembles disjoints $C_{\varepsilon,1}, \ldots, C_{\varepsilon,s}$ qui recouvrent M, tels que les fonctions caractéristiques $g_{\varepsilon,i} = \chi_{C_{\varepsilon,i}}$ vérifient :*

(i) $\mathcal{U}_\varepsilon^M g_{\varepsilon,i} = g_{\varepsilon,i}$

(ii) $\int g_{\varepsilon,i} f_{\varepsilon,j} = \delta_{ij}$ *pour tout* $i, j = 1, \ldots, s$

(iii) Pour tout $f \in L^1$ *:*

$$P_{\varepsilon,1} f = \sum_{i=1}^{s} (\int g_{\varepsilon,i} f \, dm) f_{\varepsilon,i}$$

(iv) pour tout $g \in L^\infty$ *:*

$$P_{\varepsilon,1}^* g = \sum_{i=1}^{s} (\int f_{\varepsilon,i} g \, dm) g_{\varepsilon,i}$$

et $\mathcal{U}_\varepsilon^{Mk} g \underset{*}{\rightharpoonup} P_{\varepsilon,1}^* g$ *quand* $k \to \infty$ *dans la topologie* $*$*-faible de* L^∞.

Preuve Soit $\{f^*_{\varepsilon,1}, \dots, f^*_{\varepsilon,s}\}$ la base duale associée à $\{f_{\varepsilon,1}, \dots, f_{\varepsilon,s}\}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{E}_\varepsilon$:

$$f = \sum_{i=1}^{s} \langle f^*_{\varepsilon,i}, f \rangle f_{\varepsilon,i}$$

Donc :

$$P_{\varepsilon,1} f = \sum_{i=1}^{s} \langle f^*_{\varepsilon,i}, P_{\varepsilon,1} f \rangle f_{\varepsilon,i} = \sum_{i=1}^{s} \langle P^*_{\varepsilon,1} f^*_{\varepsilon,i}, f \rangle f_{\varepsilon,i}$$

et $P^*_{\varepsilon,1} f^*_{\varepsilon,i}$ est une forme linéaire positive sur L^1, donc il existe pour tout $i = 1, \dots, s$ une fonction $g_{\varepsilon,i} \in L^\infty$, $g_{\varepsilon,i} \geq 0$ tel que :

$$\langle P^*_{\varepsilon,1} f^*_{\varepsilon,i}, f \rangle = \int g_{\varepsilon,i} f \, dm$$

Ce qui prouve (iii).
(i) Soit $f \in L^1$, $\mathcal{L}^M_\varepsilon P_{\varepsilon,1} f = P_{\varepsilon,1} f$ Remarquons que $P_{\varepsilon,1}$ et $\mathcal{L}^M_\varepsilon$ commutent puisque $P_{\varepsilon,1}(\mathcal{L}^M_\varepsilon f) = P_{\varepsilon,1}(P_{\varepsilon,1} f + Q^M_\varepsilon f)$ et que $P_{\varepsilon,1} Q_\varepsilon = 0$ donc :

$$\mathcal{L}^M_\varepsilon P_{\varepsilon,1} f = P_{\varepsilon,1} f = P_{\varepsilon,1} \mathcal{L}^M_\varepsilon f$$

Or :

$$P_{\varepsilon,1} \mathcal{L}^M_\varepsilon f = \sum_{i=1}^{s} (\int g_{\varepsilon,i} (\mathcal{L}^M_\varepsilon f) \, dm) f_{\varepsilon,i} = \sum_{i=1}^{s} (\int (\mathcal{U}^M_\varepsilon g_{\varepsilon,i}) f \, dm) f_{\varepsilon,i}$$

et puisque :

$$P_{\varepsilon,1} f = \sum_{i=1}^{s} (\int g_{\varepsilon,i} f \, dm) f_{\varepsilon,i}$$

par unicité de la décomposition dans la base $\{f_{\varepsilon,1}, \dots, f_{\varepsilon,s}\}$, et cela étant vrai pour tout $f \in L^1$, on a :

$$\mathcal{U}^M_\varepsilon g_{\varepsilon,i} = g_{\varepsilon,i} \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq s$$

(ii) Pour tout $1 \leq i \leq s$ on sait que :

$$P_{\varepsilon,1} f_{\varepsilon,i} = f_{\varepsilon,i} = \sum_{j=1}^{s} (\int g_{\varepsilon,j} f_{\varepsilon,i} \, dm) f_{\varepsilon,j}$$

donc par unicité des coefficients :

$$\int g_{\varepsilon,j} f_{\varepsilon,i} \, dm = \delta_{ij} \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i, j \leq s$$

(iv) Soient $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$, alors :

$$\begin{aligned}
\int f (P^*_{\varepsilon,1} g) \, dm &= \int (P_{\varepsilon,1} f) g \, dm \\
&= \int \sum_{i=1}^{s} (\int g_{\varepsilon,i} f \, dm) f_{\varepsilon,i} g \, dm \\
&= \sum_{i=1}^{s} (\int g_{\varepsilon,i} f \, dm)(\int f_{\varepsilon,i} g \, dm)
\end{aligned}$$

Soit en identifiant :

$$P^*_{\varepsilon,1}g = \sum_{i=1}^{s}(\int f_{\varepsilon,i}g\ dm)g_{\varepsilon,i}$$

On avait : $\mathcal{L}^M_\varepsilon = P_{\varepsilon,1} + Q^M_\varepsilon$, et le rayon spectral de Q_ε est strictement inférieur à 1, ce qui entraine tout de suite que :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{L}^{Mk}_\varepsilon f = P_{\varepsilon,1}f \quad \text{dans} \quad \mathcal{B}.$$

Donc en notant $\langle .,. \rangle_{L^1,L^\infty}$ le crochet de dualité classique pour les éléments de L^1 et L^∞, i.e pour $\varphi \in L^1$ et $\psi \in L^\infty$, $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^1,L^\infty} = \int \varphi\psi\ dm$ on a :

$$\left\langle f, \mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon g \right\rangle_{L^1,L^\infty} = \left\langle \mathcal{L}^{Mk}_\varepsilon f, g \right\rangle_{L^1,L^\infty} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \langle P_{\varepsilon,1}f, g\rangle_{L^1,L^\infty} = \left\langle f, P^*_{\varepsilon,1}g \right\rangle_{L^1,L^\infty}$$

C'est à dire : $\mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon g \underset{*}{\rightharpoonup} P^*_{\varepsilon,1}g \quad quand \quad k \to +\infty$
En particulier si l'on choisit $g = f_{\varepsilon,i}$ pour un i quelconque,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon f_{\varepsilon,i} = P^*_{\varepsilon,1}f_{\varepsilon,i} = \sum_{i=1}^{s}(\int f_{\varepsilon,i}f_{\varepsilon,j}\ dm)g_{\varepsilon,j} = \int f^2_{\varepsilon,i}\ dm\ g_{\varepsilon,i}$$

car les $f_{\varepsilon,i}$ ont des supports disjoints et donc $f_{\varepsilon,i}f_{\varepsilon,j} = 0$ si $i \neq j$.
Ensuite remarquons que $\mathcal{U}^M_\varepsilon 1 = 1$ où 1 est la fonction constante égale à 1 ; en effet :

$$\mathcal{U}^M_\varepsilon 1(x) = \int \mathcal{U}^M_{\underline{\omega}} 1(x)\ d\theta^M_\varepsilon = \int 1(T_{\omega_M} \circ \cdots \circ T_{\omega_1}(x))\ d\theta^M_\varepsilon = 1$$

D'autre part on a $P^*_{\varepsilon,1}1 = 1 = \sum_{i=1}^s \int f_{\varepsilon,i}1\ dm\ g_{\varepsilon,i}$ et pour tout i, $\int f_{\varepsilon,i}\ dm = 1$, donc $\sum_{i=1}^s g_{\varepsilon,i} = 1$. Or les $g_{\varepsilon,i}$ ont des supports disjoints, en effet :

$$\min(g_{\varepsilon,i}, \mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon f_{\varepsilon,j}) = \min(\mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon g_{\varepsilon,i}, \mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon f_{\varepsilon,j}) = \mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon \min(g_{\varepsilon,i}, f_{\varepsilon,j}) = 0$$

ce qui implique que $\text{supp}(\mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon f_{\varepsilon,j}) \cap \text{supp}(g_{\varepsilon,i}) = \varnothing$ et donc :

$$\begin{aligned} 0 = \int g_{\varepsilon,i}(\mathcal{U}^{Mk}_\varepsilon f_{\varepsilon,j})\ dm \to & \int g_{\varepsilon,i}P^*_{\varepsilon,1}f_{\varepsilon,j}\ dm \\ = & \int f^2_{\varepsilon,j}\ dm \int g_{\varepsilon,i}g_{\varepsilon,j}\ dm \end{aligned}$$

donc pour $i \neq j$, $\min(g_{\varepsilon,i}, g_{\varepsilon,j}) = 0$
Il existe donc des ensembles $C_{\varepsilon,i}$ avec des supports disjoints tels que $g_{\varepsilon,i} = \chi_{C_{\varepsilon,i}}$. De plus $\int f_{\varepsilon,i}g_{\varepsilon,i}\ dm = 1$ donc $\text{supp}\, f_{\varepsilon,i} \subset C_{\varepsilon,i}$. ∎

∎

Chapitre 4

Attracteurs, Pseudo-orbites et Mesures Stationnaires

Nous allons mener maintenant une première étude du comportement à long terme des systèmes dynamiques aléatoires utilisés dans le cadre d'une perturbation stochastique d'un système initial donné, tel qu'on l'a présenté dans la section précédente. Nous allons caractériser et localiser les mesures stationnaires de systèmes perturbés en utilisant la notion de pseudo-orbite et étudier la limite de celles-ci lorsque l'intensité du bruit s'estompe. Reprenant le travail de Ruelle [98], la théorie des systèmes aléatoires va nous permettre de donner une définition rigoureuse des attracteurs. Ce travail a été mené en collaboration avec H. Hu et S. Vaienti [66].

4.1 Introduction

Les attracteurs sont des objets clés dans l'analyse du comportement asymptotique des systèmes dynamiques. Ils apparaissent naturellement dans la description du comportement des systèmes physiques modélisés par des applications ou des flots différentiels et sont relativement accessibles en utilisant des simulations numériques. Il y a eu de nombreuses tentatives pour définir les attracteurs dans un cadre mathématique rigoureux, nous allons suivre ici le point de vue de Ruelle qui suggère que les attracteurs ne sont rien d'autre que les endroits de l'espace des phases où se concentreraient les orbites du système si celui-ci était soumis à de petites perturbations aléatoires. Ruelle précise que les attracteurs obtenus lors de simulations numériques correspondent à cette définition puisque la simulation est intrinsèquement bruitée par les erreurs d'arrondis.

Kifer [73] a aussi étudié cette question, se focalisant sur les hypothèses à formuler sur la perturbation pour être certain que les limites des mesures stationnaires du système perturbé se concentrent sur les attracteurs lorsque le bruit s'estompe. Il précise également l'intérêt physique de telles mesures qui sont par essence plus *résistantes* aux petites perturbations. Ces deux études se limitaient aux cas de dynamiques continues.

Nous allons nous concentrer sur des dynamiques non-inversibles pour lesquelles on peut obtenir une propriété de quasi-compacité pour les opérateurs de transfert non-perturbé ($\mathcal{L}$) et perturbé ($\mathcal{L}_\varepsilon$).

Faisons un bref rappel du travail de Ruelle ; il a défini dans [98] une relation d'équivalence entre les points de l'espace des phases en utilisant des pseudo-orbites. Deux points a et b sont équivalents lorsqu'il existe des pseudo-orbites de taille arbitrairement petite liant les deux points, dans les deux sens (de a vers b et de b vers a). Les classes d'équivalence de

cette relation sont appelées *basic classes*. Ruelle a alors défini des *basic classes* vérifiant de plus la propriété que si l'on peut atteindre un point x à partir d'un point a d'une *basic class* avec une pseudo-orbite arbitrairement petite, alors le chemin inverse est aussi possible, à savoir que l'on peut atteindre de la même façon a en partant de x. Il a ensuite montré que ces classes coïncidaient exactement avec la définition que l'on attendait d'un attracteur et que les limites de mesures stationnaires ne pouvaient être supportées que sur ceux-ci.

De notre côté, nous définissons une relation d'équivalence directement sur les composantes ergodiques de l'application initiale et obtenons des classes d'équivalence appelées *éléments ultimes*. Nous prouvons alors que nos éléments ultimes sont exactement les attracteurs de Ruelle. Nous ré-obtenons le fait que les limites de mesures stationnaires lorsque l'intensité du bruit tend vers zéro ne peuvent vivre que sur ces éléments ultimes pour une classe plus large de systèmes dynamiques (en particulier pour des dynamiques discontinues) et nous montrons de plus que chaque attracteur supporte dans son voisinage une unique mesure stationnaire qui doit être dans la limite supportée sur tout l'attracteur.

Nous localisons ainsi les supports des mesures stationnaires et en donnons la décomposition ergodique. Nous construirons aussi un ensemble de mesure de Lebesgue positive qui est toujours inclus dans le bassin d'attraction de chaque mesure stationnaire. Nous lions ainsi les propriétés mesurables et topologiques du systèmes, notamment en établissant une correspondance bijective entre les supports des mesures stationnaires et les attracteurs. Pour faire ceci nous montrerons en particulier que sous des hypothèses assez générales les pseudo-orbites et les orbites aléatoires sont une seule et même chose.

Enfin nous étudierons les limites lorsque le bruit s'estompe et montrerons que les mesures invariantes obtenues comme limites de mesures stationnaires sont supportées sur tout l'attracteur sur lequel vivaient ces dernières et nous donnerons une caractérisation des mesures de probabilités invariantes qui sont stochastiquement stables.

Dans la dernière partie nous donnerons un exemple très simple unidimensionnel pour illustrer que sont les ensembles ultimes et nous montrerons que nos résultats sont valables en particulier pour des dynamiques multidimensionnelles dilatantes par morceaux. Nous conclurons sur la stabilité stochastiques de ces dynamiques pour une classe de perturbations plus générales que celles considérées jusqu'à présent.

4.2 Hypothèses et Résultats

Soit $M \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact tel que $\overline{\text{int}M} = M$, $\mathcal{A}(M)$ sa σ-algèbre de Borel, d la distance euclidienne et m la mesure de Lebesgue sur M normalisée telle que $m(M) = 1$; considérons l'application mesurable $T : M \to M$. et perturbons la en introduisant une famille de processus de Markov $\{\mathcal{X}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ avec M comme espace d'états et $\{\mathbb{P}_\varepsilon(x,.)\}_{x\in M}$ comme famille de probabilités de transition. Nous supposons que :

(N1) Pour tout $x \in M$, $\mathbb{P}_\varepsilon(x,.)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous notons $p_\varepsilon(x,.)$ sa densité.

(N2) Il existe $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tel que $B_{\varepsilon'}(Tx) \subset \text{supp}\,\mathbb{P}_\varepsilon(x,.) \subset B_\varepsilon(Tx)$ pour tout x.

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente l'évolution perturbée d'un état $x \in M$ sera représentée par une orbite aléatoire $\{x_n^\varepsilon\}_{n>0} \subset M$ où chaque x_{n+1}^ε est une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_\varepsilon(x_n^\varepsilon,.)$

Remarquons que l'application T peut être discontinue et donc il en serait de même pour $\mathbb{P}_\varepsilon(.,A)$, ce qui nous placerait dans le cadre des chaines de Markov quasi-Feller pour

lesquelles l'existence d'une mesure stationnaire n'est pas triviale comme dans le cas des chaines qui ont la propriété de Feller [80, 13].

Comme dans la partie précédente nous introduisons l'espace fonctionnel $\mathcal{B}(M) \subset L^1(m)$ et nous supposerons de plus que la mesure de Lebesgue de l'ensemble des discontinuités de toute fonction de $\mathcal{B}(M)$ est égale à zéro. Comme nous l'avons dit en introduction nous allons nous concentrer sur des dynamiques et des perturbations pour lesquelles les opérateurs de transfert sont quasi-compacts. Ainsi nous supposerons que nos opérateurs vérifient sur $\mathcal{B}(M)$ une inégalité du type Lasota-Yorke, c'est à dire qu'il existe $\eta < 1$ et $D < \infty$ tels que pour tout $g \in \mathcal{B}$ aet pour $\varepsilon > 0$ assez petit :

$$|\mathcal{L}g| \leq \eta\,|g| + D\,\|g\|_1 \qquad (LY)$$
$$|\mathcal{L}_\varepsilon g| \leq \eta\,|g| + D\,\|g\|_1 \qquad (RLY)$$

Introduisons maintenant les objets qui vont nous permettre de décrire les supports des mesures stationnaires :

Définition 4.2.1 Pour $\varepsilon > 0$, une ε-pseudo-orbite est un ensemble fini $\{x_i\}_{i=0}^n \subset M$ tel que $d(Tx_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour $i = 0 \dots n-1$.

La condition (LY) nous permet d'appliquer le théorème de Ionescu-Marinescu-Tulcea. Appelons μ_0 la plus grande mesure T-invariante absolument continue, $\{\mu_i\}_i$ ses composantes ergodiques et $\Lambda_i = \mathrm{supp}(\mu_i)$ les supports de celles-ci. Nous définissons alors une relation de préordre "$\prec$" sur $\{\Lambda_i\}$ en posant $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une ε-pseudo-orbite $\{x_i\}_{i=0}^k$ telle que $x_0 \in \Lambda_i$ et $x_k \in \Lambda_j$.

Une relation d'équivalence "$\sim$" naturelle en découle : $\Lambda_i \sim \Lambda_j$ si $\Lambda_i \prec \Lambda_j$ et $\Lambda_j \prec \Lambda_i$. Par ergodicité, pour tous $x, y \in \Lambda_i$ et $\varepsilon > 0$ il y a une ε-pseudo-orbite partant de x et allant en y. On définit $\widetilde{\Lambda}_i$ la classe d'équivalence qui contient Λ_i et nous écrirons $\widetilde{\Lambda}_i \prec \widetilde{\Lambda}_j$ si $\Lambda_k \prec \Lambda_l$ pour tous $\Lambda_k \in \widetilde{\Lambda}_i$ et $\Lambda_l \in \widetilde{\Lambda}_j$. Introduisons maintenant l'élément clé de notre analyse :

Définition 4.2.2 $\widetilde{\Lambda}_i$ est un élément ultime s'il n'y a pas de $\widetilde{\Lambda}_j$ tel que $\widetilde{\Lambda}_i \prec \widetilde{\Lambda}_j$.

Pour chaque élément ultime $\widetilde{\Lambda}$ nous définissons $\overline{\Lambda} := \bigcup_{\Lambda_j \in \widetilde{\Lambda}} \Lambda_j$ et la quantité suivante :

$$\eta(\varepsilon) := \sup_k \{d(x_k, \overline{\Lambda}) \text{ où } \{x_k\}_k \text{ est une } \varepsilon\text{-pseudo-orbite avec } x_0 \in \overline{\Lambda}\}$$

i.e $\eta(\varepsilon)$ est la plus grande distance dont une ε-pseudo-orbite partant d'un élément ultime $\widetilde{\Lambda}$ peut s'éloigner.

Remarque 4.2.3 *Remarquons qu'en général $\eta(\varepsilon)$ peut être strictement plus grand que ε, nous donnerons des exemples dans la suite. La définition des éléments ultimes impose que $\varepsilon \leq \eta(\varepsilon) < \inf\{d(\widetilde{\Lambda}_i, \Lambda_l)\ ;\ \Lambda_l \notin \widetilde{\Lambda}_i\}$ pour ε assez petit.*

Avant de poser nos résultats, analysons le comportement des pseudo-orbites au voisinage d'un élément ultime $\widetilde{\Lambda}$. Nous avons déjà vu que par ergodicité, pour tout $\varepsilon > 0$, une ε-pseudo-orbite partant de $\widetilde{\Lambda}$ peut atteindre n'importe quel point de celui-ci (on donnera une construction explicite dans la suite d'une telle pseudo-orbite. Il nous faut maintenant regarder ce qui peut se passer lorsqu'une ε-pseudo-orbite sort de l'élément ultime. Pour simplifier, supposons que x_0 est le premier point en dehors de $\widetilde{\Lambda}$. Clairement pour x_0 nous

pouvons choisir n'importe quel point dans $B_\varepsilon(\overline{\Lambda}) \setminus \overline{\Lambda}$, puis pour x_1 dans $B_\varepsilon(T(B_\varepsilon(\overline{\Lambda}) \setminus \overline{\Lambda})$ et l'on continue ainsi. De manière générale, notons Δ_ε^k l'ensemble des points atteignables en k étapes par une ε-pseudo-orbite partant de $\widetilde{\Lambda}$, alors Δ_ε^k est défini par récurrence par :

$$\Delta_\varepsilon^0 = \overline{\Lambda} \qquad \text{et pour tout } k \geq 1, \qquad \Delta_\varepsilon^k = B_\varepsilon(T\Delta_\varepsilon^{k-1})$$

Par définition pour tout $k \geq 0$, $\Delta_\varepsilon^k \subset B_{\eta(\varepsilon)}(\overline{\Lambda})$ et définissons le sous-ensemble de $B_{\eta(\varepsilon)}(\overline{\Lambda})$:

$$\Delta_\varepsilon^* = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \Delta_\varepsilon^k$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, le théorème spectral aléatoire nous assure l'existence d'un nombre fini de mesures stationnaires absolument continues ergodiques : $\mu_1^\varepsilon, \ldots, \mu_K^\varepsilon$. Posons alors la définition de la stabilité stochastique.

Définition 4.2.4 L'application T sera dite stochastiquement stable si toute limite faible des μ_j^ε, $j = 1, \ldots, K$ est une combinaison convexe des mesures invariantes absolument continues ergodiques de T.

Théorème 4.2.5 *Sous les hypothèses (LY), (RLY) sur le système et (N1), (N2) sur la perturbation on a :*

(i) Si $\widetilde{\Lambda}$ est un élément ultime alors il existe une unique mesure stationnaire μ_ε ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue telle que :

$$\Delta_{\varepsilon'}^* \subset \operatorname{supp} \mu_\varepsilon \subset \Delta_\varepsilon^*.$$

En particulier si $\varepsilon' = \varepsilon$ nous avons $\operatorname{supp} \mu_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^*$

(ii) Si $\widetilde{\Lambda}$ n'est pas un élément ultime, alors $\mu_\varepsilon(\overline{\Lambda}) = 0$ pour ε assez petit, pour toute mesure stationnaire μ_ε. Ainsi pour toute limite faible de μ_ε, $\overline{\Lambda}$ est un ensemble de mesure nulle.

Nous posons maintenant un lemme clé qui servira dans toutes nos preuves et qui lie le comportement des pseudo-orbites à celui de l'opérateur perturbé :

Lemme 4.2.6 *Pour tout $f \in \mathcal{B}$, considérons une ε'-pseudo-orbite $\{x_i\}_{i\geq 0} \subset M$ telle que $f(x_0) > 0$ et pour tout j, $x_j \in M \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{L}_\varepsilon^j f}$ alors $\mathcal{L}_\varepsilon^k f(x_k) > 0$.*

Preuve Soit f, $\{x_i\}_{i\geq 0}$ vérifiant les hypothèses du lemme, supposons que pour $0 \leq i \leq k-1$ fixé, $\mathcal{L}_\varepsilon^i f(x_i) > 0$.
Alors :

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{i+1} f(x_{i+1}) = \int_M \mathcal{L}_\varepsilon^i f(y) p_\varepsilon(y, x_{i+1})\, dy$$

alors :

- $Ty \in B_{\varepsilon'}(x_{i+1}) \Rightarrow p_\varepsilon(y, x_{i+1}) > 0$.
- il existe $\delta > 0$ tel que $y \in B_\delta(x_i) \Rightarrow \mathcal{L}_\varepsilon^i f(y) > 0$ puisque $\mathcal{L}_\varepsilon^i f$ est continu dans un voisinage de x_i.

D'autre part,

$$m(T^{-1}B_{\varepsilon'}(x_{i+1}) \cap B_\delta(x_i)) > 0$$

puisque $x_{i+1} \in B_{\varepsilon'}(Tx_i)$ et $(*)$ permet de conclure que : $\mathcal{L}_\varepsilon f(x_{i+1}) > 0$. (Nous ne considérons par soucis de clarté qu'une seule préimage par T que nous notons simplement T^{-1}). ∎

Preuve [Preuve du Théorème 4.2.5] (i) Soit $\widetilde{\Lambda}$ un élément ultime.

Existence :
Nous pouvons voir $\mathcal{L}_\varepsilon$ comme un opérateur de $\mathcal{B}(\Delta_\varepsilon^*)$ dans lui-même puisque :
- si $f \in \mathcal{B}$ alors (RLY) implique que $\mathcal{L}_\varepsilon f \in \mathcal{B}$.
- d'autre part $\mathcal{L}_\varepsilon f(x) = \int_M p_\varepsilon(y,x)f(y)dy$ et pour tout y, $\operatorname{supp} p_\varepsilon(y,.) \subset B_\varepsilon(Ty)$. Soit $y \in \Delta_\varepsilon^*$ alors il existe k_y tel que $y \in \Delta_\varepsilon^{k_y}$. Donc $Ty \in T\Delta_\varepsilon^{k_y}$ et donc nous devons choisir $x \in B_\varepsilon(T\Delta_\varepsilon^{k_y}) = \Delta_\varepsilon^{k_y+1} \subset \Delta_\varepsilon^*$.

Définissons

$$h_n^\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_\varepsilon^k\left(\frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)}\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*}\right)$$

Alors (RLY) implique que la suite $\{h_n^\varepsilon\}_n$ est bornée dans $\mathcal{B}(\Delta_\varepsilon^*)$, et donc par compacité de la boule unité de $\mathcal{B}$ dans L^1 il existe n_k et une fonction $h_\varepsilon \in L^1$ tels que

$$\lim_{k\to\infty} \left\|h_{n_k}^\varepsilon - h_\varepsilon\right\|_1 = 0$$

Ensuite on peut écrire :

$$\left\|\mathcal{L}_\varepsilon h_\varepsilon - h_\varepsilon\right\|_1 \leq \left\|\mathcal{L}_\varepsilon h_\varepsilon - \mathcal{L}_\varepsilon h_{n_k}^\varepsilon\right\|_1 + \left\|\mathcal{L}_\varepsilon h_{n_k}^\varepsilon - h_{n_k}^\varepsilon\right\|_1 + \left\|h_{n_k}^\varepsilon - h_\varepsilon\right\|_1$$

Le premier et le troisième termes tendent clairement vers zéro, étudions le deuxième :

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{L}_\varepsilon h_{n_k}^\varepsilon - h_{n_k}^\varepsilon\right\|_1 &= \left\|\frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\mathcal{L}_\varepsilon^j\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*} - \frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{L}_\varepsilon^j\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*}\right\|_1 \\
&= \frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)n_k}\left\|\mathcal{L}_\varepsilon^{n_k}\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*} - \mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*}\right\|_1 \\
&\leq \frac{2}{m(\Delta_\varepsilon^*)n_k} \to 0
\end{aligned}$$

Donc h_ε est un point fixe de $\mathcal{L}_\varepsilon$ et donc appartient à $\mathcal{B}(\Delta_\varepsilon^*)$. Finalement $h_\varepsilon \in \mathcal{B}(\Delta_\varepsilon^*)$ est tel que la mesure $\mu_\varepsilon = h_\varepsilon m$ est stationnaire et supportée sur Δ_ε^*. En utilisant le lemme on obtient que $h_\varepsilon(x) > 0$ pour tout $x \in \Delta_\varepsilon^*$.

Unicité :
Prouvons que h_ε est le seul point fixe de $\mathcal{L}_\varepsilon$ supportée sur Δ_ε^* tel que $\int h_\varepsilon dm = 1$. Supposons qu'il y a une autre fonction $h'_\varepsilon \in \mathcal{B}$ avec les mêmes propriétés, et définissons la fonction $h = \min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)$. Alors : $\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon) \leq h_\varepsilon$ et $\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon) \leq h'_\varepsilon$ et donc $\mathcal{L}_\varepsilon(\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)) \leq \mathcal{L}_\varepsilon h_\varepsilon$ et $\mathcal{L}_\varepsilon(\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)) \leq \mathcal{L}_\varepsilon h'_\varepsilon$ ce qui implique que $\mathcal{L}_\varepsilon(\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)) \leq \min(\mathcal{L}_\varepsilon h_\varepsilon, \mathcal{L}_\varepsilon h'_\varepsilon)$. Mais $\min(\mathcal{L}_\varepsilon h_\varepsilon, \mathcal{L}_\varepsilon h'_\varepsilon) = \min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon) = h$, donc $\mathcal{L}_\varepsilon h \leq h$ et $\mathcal{L}_\varepsilon h = h$.

Considérons $h_\varepsilon - h$. C'est une fonction non-négative qui vérifie $\mathcal{L}_\varepsilon(h_\varepsilon - h) = h_\varepsilon - h$. Il y a donc un $x_0 \in \Delta_\varepsilon^*$ tel que $(h_\varepsilon - h)(x_0) > 0$ et l'on peut appliquer le lemme avec $f = h_\varepsilon - h$.Soit une ε'-pseudo-orbite $\{x_i\}_i \subset M \setminus \mathcal{D}_{h_\varepsilon - h}$ partant de x_0. Alors, $\mathcal{L}_\varepsilon^k(h_\varepsilon -$

$h)(x_k) = (h_\varepsilon - h)(x_k) > 0$. Or par définition il y a une ε'-pseudo-orbite liant n'importe quels points de $\Delta^*_{\varepsilon'}$ nous avons donc que $(h_\varepsilon - h)(x) > 0$ pour presque tout $x \in \Delta^*_{\varepsilon'}$. Ce qui est équivalent à $h_\varepsilon > h'_\varepsilon$presque partout, contredisant le fait que $\int h_\varepsilon dm = \int h'_\varepsilon dm = 1$. Donc $h_\varepsilon = h'_\varepsilon$ sur $\Delta^*_{\varepsilon'}$. En particulier on a que $\operatorname{supp} h_\varepsilon = \operatorname{supp} h'_\varepsilon$ puisque ce sont des densités de probabilités. Finalement puisqu'une ε'-pseudo-orbite est aussi une ε-pseudo-orbite, on a que $h_\varepsilon = h'_\varepsilon$ également sur $\operatorname{supp} \mu_\varepsilon$.

(ii) Supposons que $\widetilde{\Lambda}_0$ n'est pas un élément ultime, alors $\widetilde{\Lambda}_0 \prec \widetilde{\Lambda}$. Soit h'_ε une densité de mesure stationnaire absolument continue, i.e $\mathcal{L}_\varepsilon h'_\varepsilon = h'_\varepsilon$. Montrons que $h'_\varepsilon = 0$ sur $\overline{\Lambda}_0$.
Si ce n'est pas le cas, puisque $\widetilde{\Lambda}_0 \prec \widetilde{\Lambda}$,il y a une ε'-pseudo-orbite qui part de $\widetilde{\Lambda}_0$ et qui atteint $\widetilde{\Lambda}$. Utilisons alors le lemme pour obtenir que $h'_\varepsilon > 0$ sur $\Delta^*_{\varepsilon'}$. En utilisant la preuve de (i) nous savons qu'il y a une fonction h_ε supportée sur Δ^*_ε qui est un point fixe de $\mathcal{L}_\varepsilon$. Donc $\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)$ en est également un.
D'autre part, puisque $\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon) = 0$ en dehors de Δ^*_ε (puisque $h_\varepsilon = 0$ en dehors de Δ^*_ε), nous savons par unicité que $\min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)$ est proportionnelle à h_ε. Il existe donc une constante $c > 0$ telle que $h'_\varepsilon = \min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon) = ch'_\varepsilon$ sur Δ^*_ε. Donc $h'_\varepsilon - ch_\varepsilon$ est un point fixe de $\mathcal{L}_\varepsilon$.
De plus, $h'_\varepsilon > 0$ sur $\overline{\Lambda}_0$ implique que $h'_\varepsilon = \min(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)$ sur Δ^*_ε et donc : $\mathcal{L}_\varepsilon h'_\varepsilon = h'_\varepsilon$ sur Δ^*_ε. Finalement $h'_\varepsilon - ch_\varepsilon$ est positive sur $\overline{\Lambda}_0$ et s'annule sur $\overline{\Lambda}$, ce qui est une contradiction puisque le lemme et le fait que $\widetilde{\Lambda}_0 \prec \widetilde{\Lambda}$ implique que si $h'_\varepsilon - ch_\varepsilon$ est positive sur $\overline{\Lambda}_0$ alors $h'_\varepsilon - ch_\varepsilon$ est aussi positive presque partout sur $\overline{\Lambda}$. ∎

Théorème 4.2.7 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, supposons de plus que la perturbation est telle qu'il existe une constante C_φ dépendant éventuellement de la fonction $\varphi \in \mathcal{B}(\Delta^*_\varepsilon)$ telle que $\|\mathcal{L}_\varepsilon \varphi - \mathcal{L}\varphi\|_1 \leq C_\varphi \varepsilon^\beta$ pour un $\beta > 0$, alors si $\widetilde{\Lambda} = \{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_i\}$ est un élément ultime, il existe des constantes $0 < \lambda_1, \cdots, \lambda_i < 1$ uniques, telles que toute limite faible μ^* de μ_ε avec $\mu_\varepsilon(\Delta^*_\varepsilon) = 1$,*

$$\mu^* = \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_i \mu_i,$$

où μ_k est la mesure invariante normalisée sur Λ_k.

Preuve

Nous avons prouvé qu'il existait une unique mesure stationnaire μ_ε absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue qui est supportée sur Δ^*_ε. En remarquant que la fonction définie par [1] :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_\varepsilon^k \left(\frac{1}{m(\Delta^*_\varepsilon)} \mathbb{1}_{\Delta^*_\varepsilon}\right)$$

est un point fixe de $\mathcal{L}_\varepsilon$ on peut déduire du théorème précédent qu'elle est la densité d'une mesure stationnaire absolument continue ν_ε qui est supportée sur Δ^*_ε. Par unicité on en déduit que $\mu_\varepsilon = \nu_\varepsilon$.

Nous montrons maintenant que h_ε converge vers h donné par :

$$h = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(\overline{\Lambda})n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^k(\mathbb{1}_{\overline{\Lambda}})$$

1. celle-ci est bien définie car il s'agit de la projection spectrale dont l'existence est assurée par le théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu

en effet :

$$\begin{aligned}\|h_\varepsilon - h\|_1 &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|\frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)}\mathcal{L}_\varepsilon^k \mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*} - \frac{1}{m(\overline{\Lambda})}\mathcal{L}^k\mathbb{1}_{\overline{\Lambda}}\right\|_1 \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\left\|\frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)}\mathcal{L}_\varepsilon^k\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*} - \frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)}\mathcal{L}^k\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*}\right\|_1}_{(1)} + \underbrace{\left\|\frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)}\mathcal{L}^k\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*} - \frac{1}{m(\overline{\Lambda})}\mathcal{L}^k\mathbb{1}_{\overline{\Lambda}}\right\|_1}_{(2)}\end{aligned}$$

Tout d'abord :

$$(1) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}\left\|\mathcal{L}_\varepsilon^{k-j-1}(\mathcal{L}_\varepsilon - \mathcal{L})\mathcal{L}^j\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*}\right\|_1$$

puis :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left\|\mathcal{L}_\varepsilon^{k-j-1}(\mathcal{L}_\varepsilon - \mathcal{L})\mathcal{L}^j\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*}\right\|_1 &\leq \frac{1}{m(\Delta_\varepsilon^*)n}\sum_{k=0}^{n-1}k\varepsilon^\beta \\ &\leq \frac{n+1}{2m(\Delta_\varepsilon^*)}\varepsilon^\beta\end{aligned}$$

En choisissant $n = \varepsilon^{-\beta/2}$ nous avons $\|h_\varepsilon - h\|_1 \sim \varepsilon^{\frac{\beta}{2}}$ quand ε tend vers zéro.

Ensuite, en remarquant que $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{1}_{\Delta_\varepsilon^*} = \mathbb{1}_{\overline{\Lambda}}$ on conclut que (2) tend aussi vers zéro.

Finalement, le théorème spectral appliqué au système dynamique initial nous dit que h est la densité de la plus grande mesure invariante absolument continue de T supportée sur Δ_ε^* et donc h doit être une combinaison de toutes les composantes ergodiques qui appartiennent à $\widetilde{\Lambda}$; en d'autres termes on doit avoir $\lambda_k > 0$ pour tout k. ∎

La preuve de ce théorème implique directement la proposition suivante :

Proposition 4.2.8 *Sous les hypothèses du théorème précédent, le système est stochastiquement stable au sens fort.*

Etablissons maintenant un lien entre les orbites aléatoires et les pseudo-orbites ; pour cela il est plus pratique de considérer la perturbation sous la forme de compositions d'applications aléatoires plutôt que sous la forme des processus des Markov. Rappelons les notations de la section précédente :
Pour $\varepsilon > 0$ on considère un espace de probabilité $(\Omega_\varepsilon, \mathcal{B}(\Omega_\varepsilon), \theta_\varepsilon)$ et la famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega_\varepsilon}$. On définit :

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon : \quad \Omega_\varepsilon \times M &\longrightarrow M \\ (\omega, x) &\longmapsto T_\omega(x)\end{aligned}$$

tel que pour tout $x \in M$, $\Phi_\varepsilon(., x)$ est mesurable et tel qu'il existe un $\omega^* \in \Omega_\varepsilon$ pour lequel $\Phi_\varepsilon(\omega^*, x) = T(x)$ quelque soit $x \in M$.

Les orbites aléatoires sont générées par des processus i.i.d $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de loi θ_ε. En notant $\Phi_x^\varepsilon(.) := \Phi_\varepsilon(., x)$ nous avons $\mathbb{P}_\varepsilon(x, A) = (\Phi_x^\varepsilon)_*\theta_\varepsilon(A)$ pour tout borélien A. Nous devons alors transcrire nos hypothèses sur les probabilités de transition $\mathbb{P}_\varepsilon$ des processus de Markov sur les probabilités $(\Phi_x^\varepsilon)_*\theta_\varepsilon$. On supposera alors :

(RT1) Pour tout $x \in M$, $(\Phi_x^\varepsilon)_*\theta_\varepsilon$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,

(RT2) Il existe $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tels que $B_{\varepsilon'}(Tx) \subset \operatorname{supp} \Phi_x^\varepsilon \subset B_\varepsilon(Tx)$ pour tout $x \in M$.

Proposition 4.2.9 *Si Φ_x^ε est continue et $\varepsilon = \varepsilon'$ dans (RT2) alors $\{x_i\}_{i=0}^n$ est une ε-pseudo-orbite si et seulement si $\{x_i\}_{i=0}^n$ est une ε-orbite aléatoire.*

Preuve Il est clair que tout ε-orbite aléatoire est aussi une ε-pseudo-orbite puisque pour tout $\underline{\omega} \in \Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ et $x_0 \in M$,

$$d(x_{n+1}^{\underline{\omega}}, Tx_n^{\underline{\omega}}) = d(T_{\omega_{n+1}} x_n^{\underline{\omega}}, Tx_n^{\underline{\omega}}) < \varepsilon$$

car les T_ω sont ε-proches de T.

Réciproquement supposons que $\{x_i\}_{i=0}^n$ est une ε-pseudo-orbite. Il est toujours possible de démarrer une ε-orbite aléatoire de x_0. Ensuite $x_1 \in B_\varepsilon(Tx_0)$ et il existe un et un seul $z \in \partial B_\varepsilon(Tx_0)$ tel que $x_1 \in [Tx_0, z]$.

Soit ψ_z une paramétrisation de ce segment :

$$\begin{aligned} \psi_z : [0,1] &\longrightarrow [Tx_0, z] \subset B_\varepsilon(Tx_0) \\ t &\longmapsto Tx_0 + t(z - Tx_0) \end{aligned}$$

Considérons l'application $\psi_z^{-1} \circ \Phi_{x_0}^\varepsilon$ de Ω_ε dans $[0,1]$. Elle est continue et $\psi_z^{-1} \circ \Phi_{x_0}^\varepsilon(\omega_*) = 0$ donc par (RT2) il existe ω_0 tel que $\psi_z^{-1} \circ \Phi_{x_0}^\varepsilon(\omega_0) = 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $\omega \in \Omega_\varepsilon$ tel que $\Phi_{x_0}^\varepsilon(\omega) = x_1$. En refaisant le même raisonnement à chaque étape, on peut ainsi construire $\{x_i\}_{i=0}^n$ comme une ε-orbite aléatoire. ∎

Exemple 4.2.10 Ce résultat s'applique aux bruits additifs.

Comme nous l'avons dit en introduction de cette partie, la référence fondamentale sur ce sujet est le travail de Ruelle [99] ; rappelons les objets principaux qu'il a introduits. Tout d'abord une relation de préordre entre les éléments de l'espace des phases (nous définissons à la place une relation directement entre les composantes ergodiques), par : $a \to b$ pour $a, b \in M$ lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit une ε-pseudo-orbite allant de a vers b. Ceci engendre une relation d'équivalence $a \sim b$ quand $a \to b$ et $b \to a$. Les classes d'équivalence sont notées $[a]$. a est dit *récurrent* si $a \to a$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ε-pseudo-orbite partant de a et revenant en a, dont la longueur est plus grande ou égale à 1. Pour tout point récurrent a Ruelle définit alors ce qu'il appelle la classe basique de cet élément, notée $[a]$ par :

$$[a] = \{b \in X \ ; \ a \to b \to a\}$$

Rappelons maintenant la définition d'un attracteur donnée par Eckmann et Ruelle [43, 99] :

Définition 4.2.11 Un *attracteur* est une classe basique $[a]$ telle que pour tout $x \in M$: $a \to x$ implique $x \to a$.

Ruelle [98] a établi que cette définition vérifiait toutes les propriétés usuelles que l'on demande à un attracteur : attractivité, compacité, invariance et irréductibilité.

Proposition 4.2.12 *Si Φ_x^ε est continue et si $\varepsilon = \varepsilon'$ dans (RT2) alors les attracteurs et les éléments ultimes sont un seul et même objet.*

Preuve Tout d'abord, remarquons que si $[a]$ est un attracteur alors a doit appartenir à un élément ultime ; en effet supposons que ce ne soit pas le cas, alors :

- soit a appartient à une composante ergodique (qui n'est pas un élément ultime) et il existe alors une ε-pseudo-orbite partant de cette composante et allant dans un élément ultime $\widetilde{\Lambda}$ (sinon cette composante serait elle même un ultime)

- soit a n'appartient à aucune composante ergodique. Or Lebesgue-presque-tout point satisfaisant cela doit entrer dans un élément ultime sous l'action de la dynamique perturbée, en effet, si ce n'est pas le cas, alors pour tout $\underline{\omega} \in \Omega_\varepsilon^\infty$, $T_{\underline{\omega}}^n a$ n'appartient à aucun élément ultime. Considérons alors la mesure :

$$\mu_n(a) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\Phi_{a,\varepsilon}^j)_*\theta_\varepsilon^\infty$$

Il est prouvé dans [1] [2] que cette suite a des points d'accumulation faibles qui sont des mesures stationnaires absolument continues. En écrivant les termes de cette suite pour des ensembles mesurables A comme suit :

$$\mu_n(a)(A) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\theta_\varepsilon^\infty(\underline{\omega} \in \Omega_\varepsilon^\infty \ ; \ T_{\underline{\omega}}^j a \in A)$$

il est alors facile de voir que les points d'accumulation ne peuvent être supportés sur un élément ultime, ce qui est une contradiction avec notre premier théorème.

Remarquant alors que $\lim_{\varepsilon\to 0} d(x_n, Tx_{n-1}) = 0$ pour tout $0 \leq n \leq N$ et toute ε-pseudo-orbite $\{x_k\}_{k=0}^N$, nous avons que $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta(\varepsilon) = 0$. Dans les deux cas on peut alors construire une ε-pseudo-orbite partant de a et visitant un élément ultime (en utilisant l'équivalence entre les pseudo-orbites et les orbites aléatoires prouvée précédemment). Or $[a]$ est un attracteur et donc si $a \to x$ nous devons avoir $x \to a$, mais il est impossible de construire une ε-pseudo-orbite pour tout $\varepsilon > 0$ qui part d'un élément ultime et qui s'en éloigne d'une distance toujours strictement positive pour des ε très petits puisque $\eta(\varepsilon) \to 0$.

Maintenant considérons $[a]$ un attracteur et $\widetilde{\Lambda}$ l'élément ultime tel que $a \in \widetilde{\Lambda}$. Alors par définition presque tout $a \in \overline{\Lambda}$ est récurrent et l'on peut définir sa classe basique : $[a]$.

Prouvons maintenant que $[a] = \overline{\Lambda}$:

- Tout d'abord $\overline{\Lambda} \subset [a]$ puisque tout point $b \in \Lambda$ peut être atteint en partant de a avec une ε-pseudo-orbite pour tout $\varepsilon > 0$. En effet sur toute composante ergodique $\Lambda_i \in \widetilde{\Lambda}$, l'ergodicité nous assure que nous pouvons toujours trouver une ε-pseudo-orbite reliant deux points x et y, puisqu'il existe toujours un $n > 0$ tel que $Leb(T^{-n}B_\varepsilon(b) \cap B_\varepsilon(Ta)) > 0$ [3] On pourra regarder [110], Theorem 1.5 . En utilisant le fait que les composantes ergodiques de l'élément ultime sont dans la même classe d'équivalence, on peut conclure. En particulier un élément ultime est contenu dans la classe basique de l'un de ses éléments.
- Ensuite, $\overline{\Lambda} \supset [a]$, en effet, si ce n'est pas le cas, il existe un point $b \in [a]$ tel que $b \notin \Lambda$; i.e un point b tel que $d(b, \Lambda) \geq \delta$ avec $\delta > 0$. Comme $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta(\varepsilon) = 0$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\eta(\varepsilon) < \delta$ pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ce qui contredit le fait que $b \in [a]$.

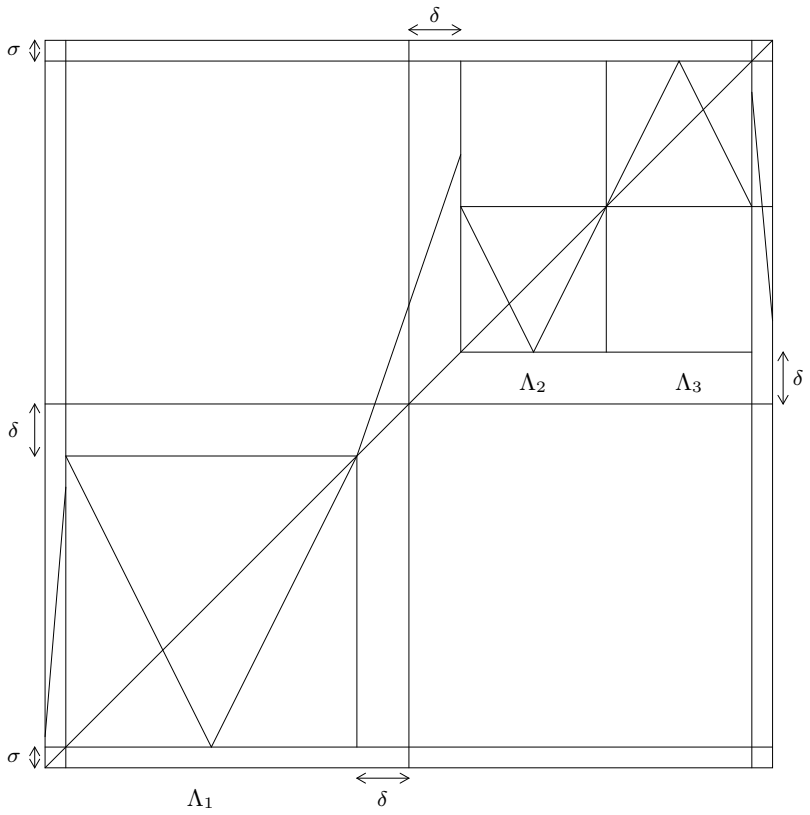
2. Remarquons cependant que dans ce travail les auteurs n'utilisent pas un point de vue spectral et doivent ainsi reconstruire les composantes ergodiques et n'obtiennent que des résultats au sens faible et non pas sur les densités.

3. Nous utilisons la mesure de Lebesgue car les mesures ergodiques sont absolument continues et que nous nous plaçons sur leur support.

En utilisant une dernière fois le même argument on peut déduire que $a \to x$ implique que $x \in \Lambda$ et donc que $x \to a$, c'est à dire qu'un élément ultime est une classe basique qui a la propriété que $a \to x$ implique $x \to a$. ∎

4.3 Dynamiques dilatantes par morceaux de l'intervalle

Nous présentons ici un exemple très simple de dynamique dilatante de l'intervalle dont le graphe est ci-dessous pour illustrer ce que nous appelons un élément ultime. Soit $\{I_j\}_j$ la partition définissant $T : [0,1] \to [0,1]$.



Nous choisissons le paramètre δ (voir le graphe pour la définition) tel que $\gamma := \inf_j \inf_{x \in I_j} |T'(x)| > 2$. Il y a trois composantes ergodiques : Λ_1, Λ_2 et Λ_3 et un élément ultime $\widetilde{\Lambda} = \{\Lambda_2, \Lambda_3\}$.

Perturbons cette application en utilisant une diffusion uniforme comme introduite dans la section précédente, c'est à dire avec la probabilité de transition :

$$\mathbb{P}_\varepsilon(x, A) = \frac{m(A \cap B_\varepsilon(Tx))}{m(B_\varepsilon(Tx))}$$

Comme nous l'avons vu, ce type de perturbation revient à ajouter un bruit à chaque itéré (bruit additif). Rappelons que ce type de bruit est très utile dans les applications (séries temporelles, erreurs d'arrondis dans les simulations, etc...). Une orbite aléatoire est donc comme précédemment un processus de Markov $(X_n)_n$ défini par : $X_{n+1} = T(X_n) + \varepsilon_{n+1}$

où $(\varepsilon_n)_n$ est un processus i.i.d dont la distribution est de densité g_ε. Les probabilités de transition sont alors telles que : $p_\varepsilon(x,y) = g_\varepsilon(y - Tx)$ (simple changement de variables). Certains auteurs (en particulier Baladi et Young) appellent ce type de perturbations, des "perturbations par convolution" car il est facile de voir que nous avons dans ce cas :

$$\mathcal{L}_\varepsilon f = (\mathcal{L} f) * g_\varepsilon$$

Pour s'assurer que la perturbation ne modifie pas l'espace des phases nous allons imposer l'existence d'un petit $\sigma > 0$ tel que $T([0,1]) \subset [\sigma, 1-\sigma]$ (on pourra se référer au livre de Baladi [23] pour des détails sur ce type d'hypothèses).

On utilise l'espace fonctionnel des fonctions à variations bornées pour étudier cette dynamique comme c'est généralement le cas. Il est bien connu que dans ce cas il est facile d'obtenir l'inégalité (LY), on pourra par exemple regarder la thèse d'Anne Broise pour un calcul détaillé [27] ; on a précisément :

$$|\mathcal{L} f|_{BV} \leq \gamma^{-1} |f|_{BV}$$

Prouvons maintenant que notre seconde inégalité (RLY) est également vérifiée. Tout d'abord nous savons que le noyau stochastique $p_\varepsilon(x,.)$ est centré autour de Tx, il est alors classique de définir $q_\varepsilon(Tx,y) := p_\varepsilon(x,y)$. Nous avons alors la relation suivante (en utilisant la dualité entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L}$) :

$$\mathcal{L}_\varepsilon f(x) = \int q_\varepsilon(Ty,x) f(y) dy = \int \mathcal{U} q_\varepsilon(y,x) f(y) dy = \int q_\varepsilon(y,x) \mathcal{L} f(y) dy$$

On note $\mathcal{C}^1_c((0,1))$l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $(0,1)$ à support compact. Alors :

$$|\mathcal{L}_\varepsilon f|_{BV} = \sup \left\{ \int_0^1 \varphi'(x) \left(\int_0^1 q_\varepsilon(y,x) \mathcal{L} f(y) dy \right) dx \ ; \ \varphi \in \mathcal{C}^1_c((0,1)) \ , \ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi'(x) \mathcal{L}_\varepsilon f(x) dx &= \int_0^1 \varphi'(x) \left(\int_0^1 q_\varepsilon(y,x) \mathcal{L} f(y) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi'(x) q_\varepsilon(y,x) dx \right) \mathcal{L} f(y) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi'(x) g_\varepsilon(y-x) dx \right) \mathcal{L} f(y) dy \\
&= \int_0^1 g_\varepsilon * \varphi'(y) \mathcal{L} f(y) dy \\
&= \int_0^1 (g_\varepsilon * \varphi)'(y) \mathcal{L} f(y) dy
\end{aligned}$$

Les propriétés de la convolution implique que $g_\varepsilon * \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ et puisque les supports de φ et g_ε sont compacts (φ par définition et g_ε puisque l'on peut écrire $g_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\varepsilon} \mathbb{1}_{B_\varepsilon(0)}(z)$), le support de $g_\varepsilon * \varphi$ est aussi compact. Donc $g_\varepsilon * \varphi \in \mathcal{C}^1_c((0,1))$ et

$$\|g_\varepsilon * \varphi\|_\infty \leq \|g_\varepsilon\|_1 \|\varphi\|_\infty \leq 1$$

$$\int_0^1 \varphi'(x) \mathcal{L}_\varepsilon f(x) dx \leq \sup \left\{ \int_0^1 \psi' \, \mathcal{L} f \ ; \ \psi \in \mathcal{C}^1_c((0,1)) \ , \ \|\psi\|_\infty \leq 1 \right\} \leq |\mathcal{L} f|_{BV}$$

En particulier :

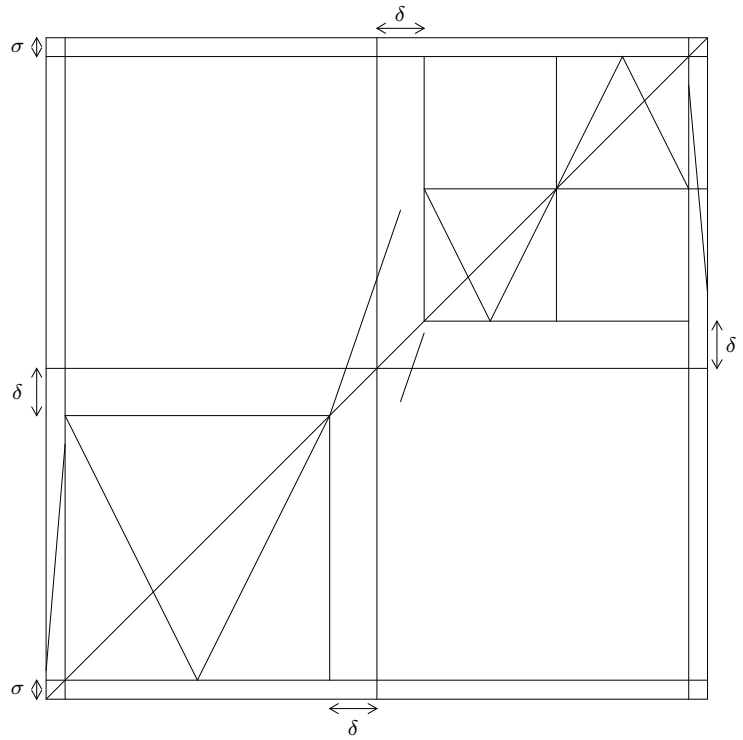
$$|\mathcal{L}_\varepsilon f|_{BV} \leq |\mathcal{L} f|_{BV} \leq \frac{1}{\gamma}|f|_{BV}$$

On se référera à l'article de Viviane Baladi et Lai Sang Young [11] pour vérifier que pour toute fonction φ à variations bornées on a :

$$\|\mathcal{L}\varphi - \mathcal{L}_\varepsilon\varphi\|_1 = O(\varepsilon)$$

Ainsi tous nos résultats sont valables et dans ce cas on a simplement : $\Delta_\varepsilon^* = B_\varepsilon(\widetilde{\Lambda})$.

Nous avons introduit la quantité $\eta(\varepsilon)$ qui donne la distance maximale de laquelle une ε-pseudo-orbite peut s'écarter de l'élément ultime dont elle est partie et nous avions fait remarquer que généralement cette quantité était supérieure à ε. Modifions légèrement notre exemple pour illustrer cela :



Dans ce cas, les pseudo-orbites partant de l'élément ultime peuvent rester plus qu'une fois en dehors de l'élément ultime (alors que dans la première configuration les pseudo-orbites ne pouvaient être en dehors de l'élément ultime qu'une seule fois et y étaient renvoyées immédiatement).

Finalement nous aimerions faire remarquer qu'il semble probable que sous certaines hypothèses nous devrions être capable de prouver que généralement nous avons : $\Delta_\varepsilon^* = B_{\eta_\varepsilon}(\widetilde{\Lambda})$

4.4 Dynamiques dilatantes par morceaux multidimensionnelles

Nous traitons maintenant le cas plus intéressant de la perturbation d'une application dilatante par morceaux en dimensions supérieures. Nous allons utiliser des perturbations très générales, en particulier en autorisant la perturbation de la partition qui définit la dynamique et nous obtiendrons alors la stabilité stochastique de ces systèmes pour des perturbations plus générales que celles considérés jusqu'à présent, on pourra notamment voir le travail de Cowieson [35].

Nous nous replaçons dans le cadre du travail de Saussol [104], en modifiant une hypothèse :

Soit $T : M \to M$ telle qu'il existe des ouverts disjoints $U_1, \dots, U_K$ avec $M = \bigcup_{i=1}^K \overline{U_i}$ et tels que pour tout i :

1. $T_i := T_{|U_i} : U_i \to M$ est $C^{1+\alpha}$;
2. T_i peut être étendue en une application $C^{1+\alpha}$: $\widetilde{T}_i : B_{3\rho}(U_i) \to M$ pour tout $\rho > 0$ assez petit [4] ;
3. Le déterminant est uniformément Hölder, i.e pour tout i, $\delta \leq 3\Lambda\rho$, $z \in \widetilde{T}B_{3\rho}(U_i)$, où $\Lambda = \max_i \max_{x\in U_i} \|DT_i(x)\|$ et $x, y \in B_\delta(z) \cap \widetilde{T}_i\overline{B_{3\rho}(U_i)}$:
$$\left|\frac{1}{\det DT_i(T_i^{-1}x)} - \frac{1}{\det DT_i(T_i^{-1}y)}\right| \leq \frac{c\delta^\alpha}{\left|\det DT_i(T_i^{-1}z)\right|}$$
4. Il existe $s(T) < 1$ tel que
$$\sup_i \sup_{x\in T_i\widetilde{U}_i} \left\|DT_i^{-1}(x)\right\| < s(T)$$

Remarquons que 2 implique qu'il existe $0 < \varepsilon_1 < 3\Lambda\rho$ tel que : $\widetilde{T}_i B_{3\rho}(U_i) \supset B_{\varepsilon_1}(T_iU_i)$ ce qui est l'hypothèse faite dans [104].

Dans le but d'éviter certains problèmes techniques autour des frontières de M lors de la perturbation nous allons supposer qu'il existe $\sigma > 0$ tel que $TM \subset M \setminus B_\sigma(\partial M)$.

Comme dans la première partie de cette thèse nous allons utiliser les fonctions quasi-Hölder ; nous devons commencer par vérifier que l'ensemble des discontinuités est bien de mesure de Lebesgue nulle pour toute fonction de V_α. Pour tout $\delta_0 > 0$la semi-norme est définie par :
$$|f|_\alpha = \sup_{0<\delta\leq\delta_0} \delta^{-\alpha} \int_M \operatorname{osc}(f, B_\delta(x))\, dm(x)\ .$$
et
$$V_\alpha = \left\{f \in L^1\ ;\ |f|_\alpha < \infty\right\}$$
Soit $f \in V_\alpha$ avec $m(\mathcal{D}_f) > 0$. Pour tout $x \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$,
$$\operatorname{osc}(f, B_\delta(x)) \geq (f(x^+) - f(x^-)) =: J(x) > 0$$
Donc :
$$\frac{1}{\delta^\alpha}\int_{\mathcal{D}_f} \operatorname{osc}(f, B_\delta(x))dm(x) > \frac{1}{\delta^\alpha}\int_{\mathcal{D}_f} J(x)dm(x)$$

4. C'est une hypothèse technique qui nous permettra par la suite de perturber correctement la partition

Ce dernier terme est alors la moyenne de quantités positives et donc $|f|_\alpha = +\infty$ ce qui est une contradiction.

Supposons que les frontières des U_i soient C^1 et définissons les quantités :

$$\eta_0(T) := s(T)^\alpha + \frac{4s(T)}{1-s(T)} Y(T) \frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_N}$$

où

$$Y(T) = \sup_x \sum_i \#\{\text{smooth pieces intersecting } \partial V_i \text{ containing } x\}$$

et $\gamma_N = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!}$, le N-volume de la boule unité N-dimensionnelle de $\mathbb{R}^N$.
Saussol [104] a montré que si $\eta_0(T) < 1$ alors une inégalité du type Lasoka-Yorke est vérifiée pour l'espace des fonctions quasi-Hölder. Précisément :

$$|\mathcal{L}h|_\alpha \leq \eta\, |h|_\alpha + D \int_{\mathbb{R}^N} |h|$$

avec : $\eta \leq (1 + cs^\alpha \delta_0^\alpha)\eta_0(T) < 1$ et $D = cs^\alpha + (1 + cs^\alpha \delta_0^\alpha)\eta_0(T) < +\infty$, pour δ_0 petit. Alors le théorème spectral nous assure l'existence d'une mesure invariante μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et nous savons que c'est la plus grande (au sens où s'il en existe une autre, elle sera elle même absolument continue par rapport à μ)

Définissons maintenant les perturbations de la partition $\{U_1, \ldots, U_K\}$. Nous supposons qu'il existe un nombre fini d'ouverts disjoints $U_{1,\omega}, \ldots, U_{K,\omega}$ avec

$$M = \bigcup_{i=1}^K \overline{U}_{i,\omega}$$

tels que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, en particulier pour tout $\varepsilon < \rho$:

(P1) Il existe $\sigma > \varepsilon$ tel que pour tout i, $TU_i \subset M \setminus B_\sigma(\partial M)$;

(P2) il existe un difféomorphisme $\psi_\omega : M \to M$ tel que $\psi_\omega(\Delta) = \Delta_\omega$, où $\Delta_\omega = \bigcup_{i=1}^K \partial U_{i,\omega}$ et tel que $\psi_\omega|_{\partial M} = \mathrm{Id}$ (càd que nous maintenons la frontière de l'espace des phases fixe).

Enfin nous allons également supposer (comme c'est généralement le cas) que les applications perturbées héritent de la régularité de T en imposant la proximité des dérivées ; introduisons $\Psi_x^\varepsilon(\omega) = \det DT_\omega(x)$. On suppose que :

$$\operatorname{supp} \Psi_x^\varepsilon \subset B_\varepsilon(|\det DT(x)|)$$

Nous appelons cette hypothèse (RT3).

Remarque 4.4.1 *Ainsi (RT2) et (RT3) assure une proximité du type $\mathcal{C}^1$ puisque : pour tout $x \in M$ et tout ω,*

$$d(Tx, T_\omega x) \leq \varepsilon$$

et

$$\det DT(x) - \varepsilon \leq \det DT_\omega(x) \leq \det DT(x) + \varepsilon$$

Proposition 4.4.2 *Nos théorèmes s'appliquent aux dynamiques dilatantes par morceaux multidimensionnelles.*

Preuve Nous devons vérifier que (RLY) est vérifiée.

D'abord puisque ψ_ω est un difféomorphisme dans (P2) nous avons $Y(T_\omega) = Y(T)$ pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon$ sinon deux points auraient la même image par ψ_ω. Ensuite pour tout x :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\det DT(T^{-1}x)} - \frac{1}{\det DT_\omega(T_\omega^{-1}x)}\right| = \left|\frac{\det DT_\omega(T_\omega^{-1}x) - \det DT(T^{-1}x)}{\det DT(T^{-1}x)\det DT_\omega(T_\omega^{-1}x)}\right| \\
&\leq \sup_x \frac{1}{|\det DT(T^{-1}x)|}\left|\frac{\det DT_\omega(T_\omega^{-1}x) - \det DT(T^{-1}x)}{\det DT_\omega(T_\omega^{-1}x)}\right| \\
&\leq s(T)\left|\det DT_\omega(T_\omega^{-1}x) - \det DT(T_\omega^{-1}x)\right| + \left|\det DT(T_\omega^{-1}x) - \det DT(T^{-1}x)\right| \\
&\leq s(T)(\varepsilon + C\varepsilon^\alpha) \\
&\leq C's(T)\varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $s(T_\omega) \leq s(T)(1 + C'\varepsilon)$ pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon$.

Considérons maintenant

$$\eta_0(T_\omega) := s(T_\omega)^\alpha + \frac{4s(T_\omega)}{1 - s(T_\omega)} Y(T)\frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_N}$$

En remarquant que $s(T_\omega) \mapsto \eta_0(s(T_\omega))$ est une application croissante nous obtenons que pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon$:

$$\eta_0(T_\omega) \leq (s(T)(1 + C'\varepsilon))^\alpha + 4Y(T)\frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_N}\frac{s(T)(1 + C'\varepsilon)}{1 - s(T)(1 + C'\varepsilon)}$$

(Le second terme doit être inférieur strictement à 1 pour espérer avoir $\eta_0(T_\omega) < 1$. Donc en particulier :

$$\frac{s(T)(1 + C'\varepsilon)}{1 - s(T)(1 + C'\varepsilon)} < 1$$

c'est-à-dire : $s(T)(1 + C'\varepsilon) < \frac{1}{2}$ ce qui est vrai chaque fois que $\varepsilon < \dfrac{1}{2C's} - \frac{1}{C'}$) ;
Alors pour ε assez petit, nous avons pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon$:

$$\eta_0(T_\omega) \leq s(T)^\alpha(1 + \alpha\varepsilon) + 4Y(T)\frac{\gamma_{N-1}}{\gamma_N} < 1$$

Cette borne dépend uniquement de ε et non pas de ω. Donc pour δ_0 et ε assez petit nous obtenons que pour tout $\omega \in \Omega_\varepsilon$:

$$|\mathcal{L}_\omega h|_\alpha \leq \eta_\varepsilon |h|_\alpha + D_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |h|$$

avec $\eta_\varepsilon < 1$ et $D_\varepsilon < +\infty$. Donc :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_\varepsilon h|_\alpha &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathcal{L}_\omega h|_\alpha \, d\theta_\varepsilon(\omega) \\
&\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\eta_\varepsilon |h|_\alpha + D_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |h|\right) d\theta_\varepsilon(\omega) \\
&\leq \eta_\varepsilon |h|_\alpha + D_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |h|
\end{aligned}$$

Pour être certain que le second théorème s'applique nous devons vérifier que pour tout $\varphi \in V_\alpha$ nous avons :

$$\|\mathcal{L}\varphi - \mathcal{L}_\varepsilon\varphi\|_1 \leq C\varepsilon^\beta$$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}\varphi - \mathcal{L}_\varepsilon\varphi\|_1 &\leq \int_M \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathcal{L}_\omega\varphi(x) - \mathcal{L}\varphi(x)| d\theta_\varepsilon(\omega) dx \\
&\leq \int_M \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^K |\frac{\varphi(T_{i,\omega}^{-1}x)}{\det DT_\omega(T_{i,\omega}^{-1}x)} \mathbb{1}_{T_\omega U_{i,\omega}}(x) - \frac{\varphi(T_i^{-1}x)}{\det DT(T_i^{-1}x)} \mathbb{1}_{TU_i}(x)| d\theta_\varepsilon(\omega) dx \\
&\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{i=1}^K \int_M |\frac{\varphi(T_{i,\omega}^{-1}x)}{\det DT_\omega(T_{i,\omega}^{-1}x)} \mathbb{1}_{T_\omega U_{i,\omega}}(x) - \frac{\varphi(T_i^{-1}x)}{\det DT(T_i^{-1}x)} \mathbb{1}_{TU_i}(x)| dx\, d\theta_\varepsilon(\omega)
\end{aligned}$$

Notons $T_{i,\omega}^{-1}x = x_{i,\omega}$ et $T_i^{-1}x = x_i$, étudions la première intégrale :

$$\begin{aligned}
&\int_M |\frac{\varphi(x_{i,\omega})}{\det DT_\omega(x_{i,\omega})} \mathbb{1}_{T_\omega U_{i,\omega}}(x) - \frac{\varphi(x_i)}{\det DT(x_i)} \mathbb{1}_{TU_i}(x)| dx \\
&= \int_{T_\omega U_{i,\omega} \cap TU_i} |\frac{\varphi(x_{i,\omega})}{\det DT_\omega(x_{i,\omega})} - \frac{\varphi(x_i)}{\det DT(x_i)}| dx \\
&+ \int_{(T_\omega U_{i,\omega} \cup TU_i) \setminus (T_\omega U_{i,\omega} \cap TU_i)} |\frac{\varphi(x_{i,\omega})}{\det DT_\omega(x_{i,\omega})} \mathbb{1}_{T_\omega U_{i,\omega}}(x) - \frac{\varphi(x_i)}{\det DT(x_i)} \mathbb{1}_{TU_i}(x)| dx
\end{aligned}$$

Premièrement en réutilisant ce que nous avons fait pour avoir (RLY) :

$$\int_{T_\omega U_{i,\omega} \cap TU_i} |\frac{\varphi(x_{i,\omega})}{\det DT_\omega(x_{i,\omega})} - \frac{\varphi(x_i)}{\det DT(x_i)}| dx \leq C' s(T) \varepsilon \sup |\varphi|$$

Et secondement, supposons que $U_i \subset U_{i,\omega}$ (si ce n'est pas le cas, la preuve reste la même mais en remplaçant T par T_ω). Alors $T_\omega U_{i,\omega} \subset T_\omega U_i \cup T_\omega(U_{i,\omega} \setminus U_i)$ et :

$$m(T_\omega U_{i,\omega} \cup TU_i) \leq m(T_\omega U_i \cup T_\omega(U_{i,\omega} \setminus U_i) \cup TU_i) \leq m(T_\omega U_{i,\omega} \cup TU_i)) + m(T_\omega(U_{i,\omega} \setminus U_i))$$

Puisque $U_{i,\omega} \subset B_\varepsilon(U_i)$ nous avons :

$$T_\omega(U_{i,\omega} \setminus U_i) \subset T_\omega(B_\varepsilon(U_i) \setminus U_i)$$

et donc :

$$m(T_\omega(U_{i,\omega} \setminus U_i)) \leq \frac{\varepsilon}{s(T_\omega)} \tag{4.1}$$

S'un autre côté $T_\omega U_i \subset B_\varepsilon(TU_i)$ et $T_\omega U_i \cup TU_i \subset B_\varepsilon(TU_i)$ et donc

$$m(T_\omega U_i \cup TU_i) \leq m(B_\varepsilon(TU_i)) \tag{4.2}$$

Nous avons également que $(T_\omega U_{i,\omega} \cap TU_i) \supset (T_\omega U_i \cap TU_i)$ puisque nous avons supposé que $U_i \subset U_{i,\omega}$ et nous avons $(T_\omega U_i \cap TU_i) \supset (TU_i \setminus B_\varepsilon(\partial TU_i))$. Finalement en utilisant les deux dernières inégalités :

$$\begin{aligned}
m((T_\omega U_{i,\omega} \cup TU_i) \setminus (T_\omega U_{i,\omega} \cap TU_i)) &\leq m(B_\varepsilon(TU_i)) - m(TU_i \setminus B_\varepsilon(\partial TU_i)) + \frac{\varepsilon}{s(T_\omega)} \\
&\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{s(T_\omega)}
\end{aligned}$$

∎

Chapitre 5

Récurrence Aléatoire

Dans cette partie nous abordons le problème de la récurrence dans les systèmes dynamiques aléatoires. L'étude qui suit résulte d'un travail en collaboration avec Jérôme Rousseau [84]. Nous allons définir des notions de temps de retour pour les systèmes aléatoires et prouver que sous une hypothèse de mélange le taux aléatoire de récurrence du système est égal à la dimension locale de la mesure stationnaire.

5.1 Introduction

Ces dernières années ont été menées en parallèle l'étude de la récurrence dans les systèmes dynamiques déterministes et l'étude des systèmes dynamiques aléatoires. Nous avons abordé dans ce qui précède ces deux notions et nous allons maintenant les lier, ce qui, malgré le succès de ces deux théories n'a pas encore été fait. Nous posons en particulier les définitions et les premiers résultats nécessaires pour décrire le comportement récurrent dans le cas aléatoire. Nous allons considérer des systèmes dynamiques aléatoires engendrés par une famille d'applications $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ d'un espace X dans lui même, comme nous l'avons défini dans la section 2.1.1, pour lesquels il existe une mesure stationnaire μ. Nous allons introduire de nouvelles quantités qui sont les analogues aléatoires de celles généralement utilisées dans la théorie ergodique déterministe, en particulier des notions de temps de retour et de taux de récurrence.

Comme nous l'avons déjà expliqué, la mesure μ joue le rôle de la mesure invariante, il est alors naturel d'aborder l'étude quantitative de la récurrence aléatoire vis à vis de cette mesure et de voir si les résultats déterministes sont toujours vrais. Il y a deux façons d'étudier le comportement d'un système dynamique aléatoire, le premier consiste à fixer une réalisation du *bruit* et à décrire le comportement de l'orbite ainsi définie, le second consiste à étudier le système dans son ensemble, en incluant le bruit au même titre que l'état initial x. La première étude est une étude statistique concentrée sur l'espace des phases X, alors que la seconde est une étude statistique globale, à la fois sur l'espace de la composante aléatoire Ω et sur l'espace des états du système X. Dans la littérature, le premier point de vue est appelé *quenched*, le second, *annealed*. Dans l'esprit de la théorie ergodique, le cas *annealed* permet une meilleure compréhension globale du système. Le premier temps de retour *annealed*, que l'on appellera aussi moyenné est défini par :

$$\mathbf{T}_B(x) := \int_\Omega \inf\{n > 0 : T_{\vartheta^{n-1}\omega} \circ \ldots \circ T_\omega x \in B\} d\mathbb{P}(\omega)$$

Cette quantité nous apparaît ainsi comme la meilleure à étudier pour obtenir des résultats quantitatifs pertinents sur le comportement récurrent des systèmes dynamiques aléatoires.

Nous justifierons le choix de ces définitions en appliquant les résultats déterministes tels que le théorème de Poincaré ou le lemme de Kac, à la représentation du système aléatoire par le *skew product*. Ceci nous permettra entre autre de se rendre compte que le premier temps de retour moyenné apparaît de façon naturelle dans cette étude, et n'est ainsi en aucun cas un artifice mathématique.

Ensuite, en utilisant un résultat récent de Jérôme Rousseau et Benoît Saussol [97] nous établirons un lien entre les temps de retour aléatoires et la dimension locale de la mesure stationnaire du système, ce qui constitue une première étape dans l'étude la récurrence des dynamiques non-déterministes.

Finalement nous donnerons des exemples. Tout d'abord deux exemples de systèmes aléatoires définis par des automorphismes du tore : le premier sera un système non i.i.d où les applications sont choisies aléatoirement suivant un processus de Markov, le second utilisera des automorphismes hyperboliques, choisis de façon indépendantes. Nous considérerons ensuite le cas où le système dynamique aléatoire définit une petite perturbation stochastique d'une dynamique initiale dans deux cas traités par Baladi et Young [11] : les applications dilatantes du cercle et les applications dilatantes par morceaux de l'intervalle.

5.2 Définitions des quantités

Nous allons nous concentrer sur les systèmes aléatoires pour lesquels le *skew product* associé possède une mesure invariante ν de marginale $\mathbb{P}$ sur Ω qui s'écrit sur la forme d'un produit : $\nu = \mathbb{P} \otimes \mu$, ce qui inclut les systèmes i.i.d (voir [80, 75]).

Introduisons le concept de temps de retour aléatoire. On considère X une variété riemannienne compacte. Puisque $(\Omega \times X, S, \mathbb{P} \otimes \mu)$ est un système dynamique déterministe, nous pouvons définir le premier temps de retour dans un borélien $A \times B \subset \Omega \times X$ pour $(\omega, x) \in A \times B$ par :

$$\tau^S_{A\times B}(\omega, x) = \inf\{k > 0 \ : \ S^k(\omega, x) \in A \times B\}.$$

En choisissant $A = \Omega$ nous remarquons que $S^n(\omega, x) \in \Omega \times B$ si et seulement si $T^n_\omega x \in B$. Ce qui conduit naturellement à la définition :

Définition 5.2.1 Pour $\omega \in \Omega$ fixé le premier temps de retour aléatoire (*quenched*) dans un sous-ensemble mesurable $B \subset X$ de l'orbite aléatoire partant de $x \in B$ associé à la réalisation ω est :

$$\begin{aligned} \tau^\omega_B(x) &= \tau^S_{\Omega\times B}(\omega, x) \\ &= \inf\{k > 0 \ : \ T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ \cdots \circ T_\omega x \in B\}. \end{aligned}$$

Remarquons que le théorème de récurrence de Poincaré appliqué au *skew product* assure que cette quantité est finie presque partout.

Supposons que X est muni d'une métrique d. Pour $\omega \in \Omega$, nous nous intéressons au comportement quand $r \to 0$ du temps de retour d'un point $x \in X$ dans la boule ouverte $B(x, r)$ associé à une réalisation ω défini par :

$$\tau^\omega_r(x) := \inf\{k > 0 : T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ ... \circ T_\omega x \in B(x, r)\} = \inf\{k > 0 : d(T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ ... \circ T_\omega x, x) < r\}.$$

Définition 5.2.2 Le système aléatoire $\mathcal{T}$ sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \vartheta)$ muni d'une mesure stationnaire μ est dit aléatoirement-apériodique si :

$$\mathbb{P} \otimes \mu\{(\omega, x) \in \Omega \times X : \exists n \in \mathbb{N},\, T_{\vartheta^{n-1}\omega} \circ \ldots \circ T_\omega x = x\} = 0.$$

Pour éviter certains problèmes avec le premier temps de retour pour les systèmes qui ne sont pas aléatoirement-apériodiques (tels que ceux présentés dans la section 2.3 du travail de Rousseau-Saussol [97]) nous avons besoin d'introduire les temps de retour non-instantanés :

Définition 5.2.3 Soit $r > 0$.

- Pour $x \in X, \omega \in \Omega$ et $p \in \mathbb{N}$ nous définissons le p-ième temps de retour non-instantané associé à la réalisation ω par :

$$\tau^\omega_{r,p}(x) := \inf\{k > p \ : \ d(T_{\vartheta^k\omega} \circ \ldots \circ T_\omega x, x) < r\}.$$

- les taux de récurrence inférieur et supérieur associés :

$$\underline{R}^\omega(x) := \lim_{p\to\infty} \liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_{r,p}(x)}{-\log r} \qquad \text{et} \qquad \overline{R}^\omega(x) := \lim_{p\to\infty} \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_{r,p}(x)}{-\log r}.$$

- les dimensions locales ponctuelles inférieure et supérieure d'une mesure de probabilité borélienne μ sur X en un point $x \in X$:

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu\left(B\left(x, r\right)\right)}{\log r} \qquad \text{et} \qquad \overline{d}_\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu\left(B\left(x, r\right)\right)}{\log r}.$$

Exemple 5.2.4 Donnons un exemple pour illustrer la nécessité d'un temps de retour non-instantané. Considérons $T_0 = \mathcal{R}_\alpha$ la rotation irrationnelle du cercle d'angle α et T_1 l'application identité définie sur le cercle et construisons le système dynamique aléatoire consistant à choisir à chaque étape T_0 ou T_1 de façon équiprobable, *i.e.* $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ et de façon indépendante. Alors ce système n'est pas aléatoirement apériodique et $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \ : \ \tau^\omega_r(x) = 1\} = P(1) = \frac{1}{2}$ pour tout $r > 0$. Ainsi, à chaque itéré, la moitié des points ne bougent pas ; soit $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ points au bout de n étapes. Cependant, presque tous les points finiront par être soumis à la rotation et leur dynamique deviendra intéressante pourvu que l'on attende suffisamment longtemps.

Enfin rappelons que les dimensions locales de mesures de probabilité sont liées à celle de Hausdorff (voir par exemple [45]) :

Remarque 5.2.5 *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$, alors si μ est une mesure Borélienne finie sur X, on a :*

$$\dim_H \mu = \textit{ess-sup}\ \underline{d}_\mu.$$

5.3 Récurrence Aléatoire à réalisation fixée

Théorème 5.3.1 *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \vartheta)$ muni d'une mesure stationnaire μ. Pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque-tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$*

$$\underline{R}^\omega(x) \leq \underline{d}_\mu(x) \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^\omega(x) \leq \overline{d}_\mu(x).$$

Preuve Nous montrons ce théorème en utilisant le Théorème 2 de [97], appliqué au système $(\Omega \times X, \mathcal{B}(\Omega \times X), \mathbb{P} \otimes \mu, S)$ et à l'observation f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f\ : \Omega \times X & \longrightarrow & X \\ (\omega, x) & \longmapsto & x. \end{array}$$

Alors, pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$ nous avons les correspondances suivantes avec le papier [97]. Pour le temps de retour :

$$\tau^f_{r,p}(\omega, x) = \tau^\omega_{r,p}(x)$$

pour la mesure image :

$$f_*(\mathbb{P} \otimes \mu) = \mu$$

et pour les dimensions ponctuelles de l'observation :

$$\underline{d}^f_{\mathbb{P}\otimes\mu}(x) = \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{d}^f_{\mathbb{P}\otimes\mu}(x) = \overline{d}_\mu(x)$$

∎

Ce théorème reste vrai pour le premier temps de retour :

Corollaire 5.3.2 *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \vartheta)$ muni d'une mesure stationnaire : μ. Pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r} \leq \underline{d}_\mu(x) \qquad \textit{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r}(x) \leq \overline{d}_\mu(x).$$

Preuve Puisque pour tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$, tout $r > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$ nous avons $\tau^\omega_r(x) \leq \tau^\omega_{r,p}(x)$ alors,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r} \leq \underline{R}^\omega(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \tau^\omega_r(x)}{-\log r}(x) \leq \overline{R}^\omega(x)$$

il suffit d'appliquer le Théorème 5.3.1. ∎ Même si ces inégalités peuvent être strictes, nous nous intéressons aux cas où les égalités sont satisfaites. Pour cela nous allons avoir besoin d'une hypothèse supplémentaire.

Définition 5.3.3 Le système aléatoire muni d'une mesure stationnaire μ a une décroissance super-polynomiale des corrélations si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et ψ , φ des observables Lipschitz de X dans $\mathbb{R}$:

$$|\int_X \int_\Omega \psi(T_{\vartheta^n\omega} \circ \ldots \circ T_\omega x)\varphi(x) d\mathbb{P}(\omega) d\mu(x) - \int_X \psi d\mu \int_X \varphi d\mu| \leq \|\psi\| \|\varphi\| \theta_n$$

avec $\lim_{n\to\infty} \theta_n n^p = 0$ pour tout $p > 0$ et où $\|.\|$ est la norme de Lipschitz.

Théorème 5.3.4 *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \vartheta)$ muni d'une mesure stationnaire μ dont la décroissance des corrélations est super-polynomiale (pour des observables Lipschitz) alors :*

$$\underline{R}^\omega(x) = \underline{d}_\mu(x) \qquad \textit{et} \qquad \overline{R}^\omega(x) = \overline{d}_\mu(x)$$

pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque-tout$(\omega, x) \in \Omega \times X$ tel que $\underline{d}_\mu(x) > 0$.

Preuve Comme précédemment la preuve est directe en utilisant le Théorème 5 de Rousseau-Saussol [97] appliqué à $(\Omega \times X, \mathcal{B}(\Omega \times X), \mathbb{P} \otimes \mu, S)$ avec l'observation f défini par :

$$\begin{aligned} f \ : \Omega \times X &\longrightarrow X \\ (\omega, x) &\longrightarrow x. \end{aligned}$$

Soulignons que dans le théorème 5 de [97] il est direct de vérifier que la condition de décroissance des corrélations du système peut être remplacée par celle, plus faible, de décroissance des corrélations du système aléatoire telle qu'on l'a introduite au dessus. En effet cette hypothèse est suffisante pour prouver le lemme 15 de cet article avec l'observation f. La preuve du lemme est analogue car nous utilisons une décroissance des corrélations *annealed*, et donc ne dépendant pas de ω. ∎

La proposition suivante établit que dans le cas d'un système aléatoirement apériodique, il n'est pas nécessaire de considérer les temps de retour non-instantanés.

Proposition 5.3.5 *Si le système est aléatoirement-apériodique alors pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout (ω, x) et pour tout p, $\tau^{\omega}_{r,p}(x) = \tau^{\omega}_{r}(x)$ pour r assez petit.*

Preuve Soit x fixé. Puisque le système est aléatoirement apériodique, pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$, pour tout $k > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(T_{\vartheta^{k-1}\omega} \circ \ldots \circ T_{\omega} x, x) \geq \delta$. Donc, pour tout $p > 0$, il y a un $r(p, x, \omega)$ tel que quelque soit $r \leq r(p, x, \omega)$, nous avons $\tau^{\omega}_{r}(x) > p$. Ainsi,

$$\forall r \leq r(p, x, \omega), \quad \inf\{k > 0 \ : \ d(T^{k}_{\omega} x, x) < r\} = \inf\{k > p \ : \ d(T^{k}_{\omega} x, x) < r\}$$

∎

En conséquence, nos théorèmes s'appliquent pour le premier temps de retour :

Corollaire 5.3.6 *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \vartheta)$ muni d'une mesure stationnaire μ, aléatoirement-apériodique et dont la décroissance des corrélations est super-polynomiale, alors :*

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log \tau^{\omega}_{r}(x)}{-\log r} = \underline{d}_{\mu}(x) \qquad \textit{et} \qquad \limsup_{r \to 0} \frac{\log \tau^{\omega}_{r}(x)}{-\log r} = \overline{d}_{\mu}(x)$$

pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in \Omega \times X$ tel que $\underline{d}_{\mu}(x) > 0$.

5.4 Récurrence Aléatoire Moyennée

Supposons que le système aléatoire est ergodique, alors nous pouvons appliquer le lemme de Kac au *skew product* et obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times B} \tau^{S}_{\Omega \times B}(\omega, x) \, d\mathbb{P} \otimes \mu(\omega, x) &= \int_{\Omega \times B} \tau^{\omega}_{B}(x) \, d\mathbb{P} \otimes \mu(\omega, x) \\ &= \int_{B} \int_{\Omega} \tau^{\omega}_{B}(x) \, d\mathbb{P}(\omega) d\mu(x) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

ce qui est une raison pour étudier la quantité :

$$\int_{\Omega} \tau^{\omega}_{B}(x) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

Celle-ci apparaît donc naturellement et inclut la composante aléatoire du système dans sa totalité, alors que, comme nous l'avons précisé en introduction, le temps de retour *quenched* traite des orbites réalisation par réalisation vis à vis du bruit. Cette quantité est d'autant plus naturelle que les quantités moyennées apparaissent à de nombreuses reprises dans l'étude des systèmes i.i.d, comme nous l'avons vu pour les opérateurs de transfert ou d'évolution et pour les mesures stationnaires.

Définition 5.4.1 Soit B un borélien de X. Le premier temps de retour aléatoire (moyenné ou *annealed*) pour un point $x \in B$ dans le borélien B est :

$$\mathbf{T}_B(x) = \int_\Omega \tau_B^\omega(x)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Avec cette définition et (5.1), nous obtenons :

Lemme 5.4.2 *(Lemme de Kac aléatoire) Si le système aléatoire est ergodique pour la mesure stationnaire μ, alors :*

$$\int_B \mathbf{T}_B(x) d\mu(x) = 1.$$

Comme précédemment nous nous intéressons au comportement du temps de retour de x dans $B(x,r)$ lorsque $r \to 0$, ce qui nous amène à poser :

Définition 5.4.3 Soient $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Le p-ième temps de retour non-instantané aléatoire est :

$$\mathbf{T}_{r,p}(x) := \int_\Omega \tau_{r,p}^\omega(x) d\mathbb{P}(\omega).$$

Lorsque $p = 0$, nous notons ce temps de retour $\mathbf{T}_r(x)$. Les taux de récurrence non-instantanés aléatoires sont alors :

$$\underline{\mathbf{R}}(x) := \lim_{p\to\infty} \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_{r,p}(x)}{-\log r} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) := \lim_{p\to\infty} \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_{r,p}(x)}{-\log r}.$$

Nous posons maintenant nos principaux résultats :

Théorème 5.4.4 *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \vartheta)$ muni d'une mesure stationnaire μ. Pour μ-presque-tout $x \in X$:*

$$\underline{\mathbf{R}}(x) \le \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) \le \overline{d}_\mu(x).$$

Ces inégalités restent vraies pour le premier temps de retour en remarquant comme plus haut que pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{T}_r(x) \le \mathbf{T}_{r,p}(x)$. En utilisant le Théorème 5.4.4, on a :

Corollaire 5.4.5

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \le \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \le \overline{d}_\mu(x).$$

Théorème 5.4.6 *Soit $\mathcal{T}$ un système dynamique aléatoire sur X d'aléa $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, \vartheta)$ muni d'une mesure stationnaire μ. Si de plus le système aléatoire a une décroissance super-polynomiale des corrélations alors :*

$$\underline{\mathbf{R}}(x) = \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) = \overline{d}_\mu(x)$$

pour μ-presque-tout x tel que $\underline{d}_\mu(x) > 0$.

Comme pour le cas *quenched*, le cas non-périodique permet d'obtenir l'égalité pour le premier temps de retour :

Proposition 5.4.7 *Si le système a une décroissance super-polynomiale des corrélations et est aléatoirement apériodique, alors :*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} = \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} = \overline{d}_\mu(x)$$

pour μ-presque tout x tels que $\underline{d}_\mu(x) > 0$.

On donnera la preuve de cette proposition dans la suite.

5.5 Preuves des Théorèmes

Définition 5.5.1 Une mesure μ est faiblement-diamétriquement-régulière (fdr) sur l'ensemble $Z \subset X$ si pour tout $\eta > 1$, pour μ-presque-tout $x \in Z$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $r < \delta$ alors $\mu\left(B\left(x, \eta r\right)\right) \leq \mu\left(B\left(x, r\right)\right) r^{-\varepsilon}$.

Preuve [Preuve du théorème 5.4.4] D'après [12] nous savons que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, toute mesure de probabilité est fdr sur $\mathbb{R}^d$ et donc la mesure μ est fdr sur X. Dans la définition de fdr, soulignons que la fonction $\delta(\cdot, \varepsilon, \eta)$ peut être rendue mesurable pour tous ε et η. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\eta = 4$. On choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $\mu(X_\delta) > \mu(X) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$ où :

$$X_\delta := \{x \in X : \delta(x, \varepsilon, \eta) > \delta\}.$$

Dans le but d'utiliser le lemme de Borel-Cantelli, nous prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme 5.5.2 *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_\varepsilon(e^{-n})) < \infty$ où pour $r > 0$:*

$$A_\varepsilon(r) := \left\{y \in X_\delta : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon}\right\}.$$

Preuve [Lemme 5.5.2]

Définition 5.5.3 Soit $r > 0$ fixé, un ensemble dénombrable $E \subset F$ est un ensemble r-séparé maximal pour F si :

1. $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$ pour tous points distincts $x, y \in E$.
2. $\mu(F \setminus \bigcup_{x\in E} B(x, r)) = 0$.

Soient $p \in \mathbb{N}$, $r > 0$ et $C \subset X_\delta$ un ensemble $2r$-séparé maximal pour X_δ.

$$\begin{aligned} \mu(A_\varepsilon(r)) &= \mu\left(\left\{y \in X_\delta : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon}\right\}\right) \\ &\leq \sum_{x\in C} \mu\left(\left\{y \in B\left(x, 2r\right) : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y, 2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon}\right\}\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pour $y \in B(x, 4r)$, nous définissons :

$$\tau^\omega_{4r,p}(y, x) := \inf\left\{k > p : d(T_{\vartheta^k\omega} \circ \cdots \circ T_\omega y, x) < 4r\right\}$$

et :

$$\mathbf{T}_{4r,p}(y,x) := \int_\Omega \tau^\omega_{4r,p}(y,x) d\mathbb{P}(\omega).$$

Si $d(x,y) < 2r$, pour tout $\omega \in \Omega$ nous avons :

$$\tau^\omega_{4r,p}(y,x) \geq \tau^\omega_{6r,p}(y)$$

et alors :

$$\mathbf{T}_{4r,p}(y,x)\mu\left(B\left(x,4r\right)\right) \geq \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y,2r\right)\right). \tag{5.3}$$

Donc pour tout $x \in C$

$$\mu\left(\left\{y \in B\left(x,2r\right) : \mathbf{T}_{6r,p}(y)\mu\left(B\left(y,2r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon}\right\}\right) \leq \mu(D_{r,x}) \tag{5.4}$$

où

$$D_{r,x} := \left\{y \in B\left(x,4r\right) : \mathbf{T}_{4r,p}(y,x)\mu\left(B\left(x,4r\right)\right) \geq r^{-2\varepsilon}\right\}.$$

L'inégalité de Markov donne :

$$\begin{aligned} \mu(D_{r,x}) &\leq r^{2\varepsilon}\mu\left(B\left(x,4r\right)\right)\int_{B(x,4r)} \mathbf{T}_{4r,p}(y,x)\, d\mu(y) && (5.5)\\ &= r^{2\varepsilon}\mu\left(B\left(x,4r\right)\right)\int_{B(x,4r)\times\Omega} \tau^\omega_{4r,p}(y,x)\, d\mu(y) d\mathbb{P}(\omega). && (5.6) \end{aligned}$$

Puisque $\tau^\omega_{4r,p}(y,x)$ est borné par le p-ième temps de retour de (y,ω) dans $B(x,4r)\times\Omega$, nous concluons par le lemme de Kac que :

$$\int_{B(x,4r)\times\Omega} \tau^\omega_{4r,p}(y,x)\, d\mu(y) d\mathbb{P}(\omega) \leq p. \tag{5.7}$$

En utilisant (5.5) et (5.7), nous avons :

$$\mu(D_{r,x}) \leq p r^{2\varepsilon}\mu\left(B\left(x,4r\right)\right). \tag{5.8}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mu(A_\varepsilon(r)) &\leq \sum_{x\in C}\mu(D_{r,x}) && \text{par (5.2) et (5.4)}\\ &\leq p\, r^{2\varepsilon}\sum_{x\in C}\mu\left(B(x,4r)\right) && \text{par (5.8)}\\ &\leq p\, r^{\varepsilon}\sum_{x\in C}\mu\left(B(x,r)\right) && \text{puisque } \mu \text{ est fdr,}\\ &\leq p\, r^{\varepsilon} && \text{par définition de } C. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{n,e^{-n}<\delta}\mu(A_\varepsilon(e^{-n})) = \sum_{n>-\log\delta}\mu(A_\varepsilon(e^{-n})) \leq p\sum_n e^{-\varepsilon n} < \infty.$$

∎

Alors grâce au lemme de Borel-Cantelli, pourμ-presque-tout $x \in X_\delta$

$$\mathbf{T}_{6e^{-n},p}(x)\mu\left(B(x,2e^{-n})\right) \leq e^{2\varepsilon n}$$

pour tout n assez grand. Alors :

$$\frac{\log \mathbf{T}_{6e^{-n},p}(x)}{n} \leq 2\varepsilon + \frac{\log \mu(B(x,2e^{-n}))}{-n}. \tag{5.9}$$

On peut facilement prouver que pour $a > 0$ nous avons :

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mu\left(B\left(x, ae^{-n}\right)\right)}{-n} \quad \text{et} \quad \overline{d}_\mu(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \mu\left(B\left(x, ae^{-n}\right)\right)}{-n}$$

$$\underline{\mathbf{R}}(x) = \lim_{p\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mathbf{T}_{ae^{-n},p}(x)}{n} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{R}}(x) = \lim_{p\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \mathbf{T}_{ae^{-n},p}(x)}{n}$$

en prenant les limites inférieure et supérieure puis la limite sur p dans (5.9) nous avons ce que nous voulons puisque ε peut être choisi arbitrairement petit. ∎

Preuve [Preuve du théorème 5.4.6] Soit $x \in X$ tel que $\underline{R}^\omega(x) \geq \underline{d}_\mu(x) > 0$ pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$, l'existence d'un tel x est assuré par le théorème 2.3. Soit $0 < \varepsilon < 1$, d'après la preuve du théorème 5 de [97], nous savons que pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > N$, $\underline{\lim}_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) = +\infty$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\Big\{\omega \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) = +\infty\Big\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1. \tag{5.10}$$

Notons :

$$\tilde{\Omega}(N) := \Big\{\omega \in \Omega \,:\, \forall p > N, \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) = +\infty\Big\}.$$

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}(N_1)) > 0$, sinon $\mathbb{P}(\cup_{N\in\mathbb{N}}\tilde{\Omega}(N)) \leq \sum_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\tilde{\Omega}(N)) = 0$ ce qui contredirait le fait que :

$$1 = \mathbb{P}(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \tilde{\Omega}(N)) = \mathbb{P}(\Big\{\omega \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) = +\infty\Big\}).$$

Soit $p > N_1$, nous avons alors :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) = +\infty. \tag{5.11}$$

De plus le lemme de Fatou nous donne :

$$\begin{aligned} +\infty = \int_{\tilde{\Omega}} \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) &\leq \int_{\Omega} \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \liminf_{r\to 0} \int_{\Omega} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\omega_{r,p}(x) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_{r,p}(x). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_{r,p}(x) = \limsup_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_{r,p}(x) = +\infty.$$

Finalement pour $p > N_1$ et $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour $r < R$, $\mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau^\Omega_{r,p}(x) \geq M$ et donc :

$$(1-\varepsilon)\frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq \frac{M}{\log r} - \frac{\log \tau^\Omega_{r,p}(x)}{\log r}$$

ce qui conduit à :

$$\underline{\mathbf{R}}(x) \geq (1-\varepsilon)\underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) \geq (1-\varepsilon)\overline{d}_\mu(x).$$

et puisque ces inégalités sont vraies pour tout $0 < \varepsilon < 1$:

$$\underline{\mathbf{R}}(x) \geq \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbf{R}}(x) \geq \overline{d}_\mu(x). \tag{5.12}$$

Par le théorème 5.3.4, l'équation (5.12) est satisfaite pour μ-presque-tout x tel que : $\underline{d}_\mu(x) > 0$ on conclut grâce au théorème 5.4.4. ∎

Preuve [Preuve de la Proposition 5.4.7] Soit $x \in X$ tel que

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \tau_r^\omega(x)}{-\log r} \geq \underline{d}_\mu(x) > 0$$

pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$; l'existence d'un tel x est assurée par le Corollaire 5.3.6. Soit $0 < \varepsilon < 1$, pour $\mathbb{P}$-presque-tout $\omega \in \Omega$ nous avons :

$$\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau_r^\omega(x) = +\infty$$

et donc :

$$\int_\Omega \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau_r^\omega(x)d\mathbb{P}(\omega) = +\infty. \tag{5.13}$$

Le lemme de Fatou nous donne :

$$\begin{aligned} +\infty = \int_\Omega \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau_r^\omega(x)d\mathbb{P}(\omega) &\leq \liminf_{r\to 0} \int_\Omega \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\tau_r^\omega(x)d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x). \end{aligned}$$

Et nous obtenons :

$$\liminf_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x) = \limsup_{r\to 0} \mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x) = +\infty.$$

Donc, il existe $R > 0$ tel que pour tout $r < R$ nous avons $\mu(B(x,r))^{1-\varepsilon}\mathbf{T}_r(x) \geq M$ il suit donc que : :

$$(1-\varepsilon)\frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \leq \frac{M}{\log r} - \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r}$$

et :

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq (1-\varepsilon)\underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq (1-\varepsilon)\overline{d}_\mu(x).$$

Ces inégalités étant satisfaites pour ε arbitrairement petit, nous avons :

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq \underline{d}_\mu(x) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathbf{T}_r(x)}{\log r} \geq \overline{d}_\mu(x). \tag{5.14}$$

Donc (5.14) est satisfaite pour μ-presque-tout x tel que $\underline{d}_\mu(x) > 0$ d'après le Corollaire 5.3.6, Le Corollaire 5.4.5 donne le résultat. ∎

Nous donnons maintenant plusieurs exemples.

5.6 Automorphismes aléatoires du tore

1. **Applications linéaires aléatoires non-i.i.d :**
Soit $X = \mathbb{T}^1$ le tore unidimensionnel. On considère deux applications linéaires qui préserve la mesure de Lebesgue *Leb* sur X.

$$\begin{array}{rcl} T_1 : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} T_2 : X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & 3x. \end{array}$$

L'orbite aléatoire est construite en choisissant l'une de ces deux applications suivant un processus de Markov de matrice de transition :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

En fait, ce système dynamique aléatoire peut être représenté par le *skew product* suivant :

$$\begin{array}{rcl} S : \Omega \times X & \longrightarrow & \Omega \times X \\ (\omega, x) & \longmapsto & (\vartheta(\omega), T_\omega x) \end{array}$$

avec $\Omega = [0,1]$, $T_\omega = T_1$ si $\omega \in [0, 2/5)$, $T_\omega = T_2$ si $\omega \in [2/5, 1]$ où ϑ est l'application linéaire par morceaux suivante :

$$\vartheta(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{si} \quad \omega \in [0, 1/5) \\ 3\omega - 1/5 & \text{si} \quad \omega \in [1/5, 2/5) \\ 2\omega - 4/5 & \text{si} \quad \omega \in [2/5, 3/5) \\ 3\omega/2 - 1/2 & \text{si} \quad \omega \in [3/5, 1]. \end{cases}$$

Puisque ϑ préserve la mesure de Lebesgue $\mathbb{P} = Leb$, le *skew product* S est $Leb \otimes Leb$-invariant et donc la mesure de Lebesgue *Leb* est stationnaire pour ce système aléatoire. On peut voir que S a une décroissance exponentielle des corrélations (conjugué à un shift) [9], et donc les théorèmes 5.3.4 et 5.4.6 s'appliquent. Il est facile de voir que ce système est aléatoirement-apériodique et donc pour $Leb \otimes Leb$-presque-tout $(\omega, x) \in [0,1] \times \mathbb{T}^1$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^\omega(x)}{-\log r} = 1$$

et pour *Leb*-presque-tout $x \in \mathbb{T}^1$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log [\mathbf{T}_r(x)]}{-\log r} = 1.$$

2. **Automorphismes hyperboliques aléatoires du Tore :**
Soit $X = \mathbb{T}^2$, rappelons qu'un automorphisme hyperbolique du tore est une application $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ agissant par le matrice A, $x \mapsto Ax \pmod 1$, où les entrées de la matrice A sont des entiers. Les valeurs propres de A sont de module différent de 1 et $\det A = \pm 1$. Nous nous restreignons au cas où les entrées sont positives même s'il est toujours possible de considérer des cas plus généraux sous une hypothèse d'invariance d'un cône [8]. Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\vartheta = \sigma$ le shift à gauche sur Ω.
On considère A_0, A_1 deux automorphismes hyperboliques aux entrées positives. A_0 sera choisi avec une probabilité q et A_1 avec une probabilité $1-q$, i.e. $\mathbb{P} = P^{\mathbb{N}}$ avec $P(0) = q$ et $P(1) = 1-q$. Alors il est prouvé dans [8] que la mesure de Lebesgue est stationnaire que la décroissance des corrélations se fait exponentiellement vite pour des observables Lipschitz (voir [8]) f et g telles que : $\int_{\mathbb{T}^2} f(x)dx = \int_{\mathbb{T}^2} g(x)dx = 0$.

Proposition 5.6.1 *Le système est aléatoirement-apériodique.*

Preuve Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice M correspondant à $A_\omega^n = A_{\omega_n} \dots A_{\omega_2} A_{\omega_1}$ (i.e, $A_\omega^n x = Mx \mod 1$) a des entrées positives.Le théorème de Perron-Frobenius assure que M a une valeur propre simple $\lambda > 0$ qui est la plus grande et puisque $|\det M| = 1$, $\lambda > 1$. Donc, A_ω^n est aussi un automorphisme hyperbolique du tore. Par [95], nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Card}\{x \in \mathbb{T}^2 \,:\, A_\omega^n x = x\} < +\infty$$

et donc :

$$Leb(\{x \in \mathbb{T}^2 \,:\, \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, A_\omega^n x = x\}) = 0.$$

Alors, ce système vérifie :

$$\mathbb{P} \otimes Leb(\{(\omega, x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^2 \,:\, \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, A_\omega^n x = x\}) = 0.$$

∎

Donc la Proposition 5.6.1 et le Corollaire 5.3.6 donnent pour $\mathbb{P} \otimes Leb$-presque-tout $(\omega, x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^2$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^\omega(x)}{-\log r} = 2$$

et la Proposition 5.4.7 donne pour Leb-presque-tout $x \in \mathbb{T}^2$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log [\mathbf{T}_r(x)]}{-\log r} = 2.$$

5.7 Applications aux perturbations aléatoires

Revenons au cas des petites perturbations aléatoires d'une application initiale mesurable $T : X \to X$ dans le cadre de la composition d'applications aléatoires. Nous noterons pour tout $\varepsilon > 0$, $(\Lambda_\varepsilon, \mathcal{B}(\Lambda_\varepsilon), P_\varepsilon)$ l'espace de probabilité servant de base à l'aléa et la famille d'applications $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\varepsilon}$. Dans ce cadre : $\Omega = \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P} = P_\varepsilon^{\mathbb{N}}$, $\vartheta = \sigma$ le shift à gauche sur Ω et $T_\omega = T_{\lambda_1}$ pour tout $\omega = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \Omega$. On utilisera à nouveau l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : \quad \Lambda_\varepsilon \times X &\longrightarrow X \\ (\lambda, x) &\longmapsto T_\lambda(x) \end{aligned}$$

tel que pour tout $x \in X$, $\Phi_\varepsilon(., x)$ est mesurable et il existe $\lambda^* \in \Lambda_\varepsilon$ tel que $\Phi_\varepsilon(\lambda^*, x) = T(x)$ pour tout $x \in X$. Encore une fois on suppose que : $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon$ vérifie les hypothèses suivantes :

(RT1) Pour tout $x \in X$, $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout ε assez petit.

(RT2) Pour tout $x \in X$, $\mathrm{supp}(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon \subset B_\varepsilon(Tx)$ pour tout ε assez petit.

Ces hypothèses nous dispense d'utiliser la notion de temps de retour non-instantané :

Proposition 5.7.1 *Sous l'hypothèse (RT1), le système est aléatoirement-apériodique.*

Preuve Prouvons que pour tout $x \in X$

$$P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\{\omega = (\lambda_1, \lambda_2, ...) \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} \,:\, \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, T_\omega^n x = x\}) = 0$$

où $T_\omega^n = T_{\lambda_n} \circ \cdots \circ T_{\lambda_2} \circ T_{\lambda_1}$.

Soient $x \in X$ et $A \subset X$ avec $Leb(A) = 0$. Puisque $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon$ est absolument continue, nous avons $(\Phi_x^\varepsilon)_* P_\varepsilon(A) = P_\varepsilon(\{\lambda_1 \in \Lambda_\varepsilon \,:\, T_{\lambda_1} x \in A\}) = 0$. De plus :

$$(\Phi_x^\varepsilon)^2{}_* P_\varepsilon^2(A) := P_\varepsilon^2(\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_\varepsilon^2 \,:\, T_{\lambda_2} T_{\lambda_1} x \in A\}) = 0.$$

Car :

$$(\Phi_x^\varepsilon)^2{}_* P_\varepsilon^2(A) = \int_{\Lambda_\varepsilon} (\Phi_{T_{\lambda_1} x}^\varepsilon)_* P_\varepsilon(A) dP_\varepsilon(\lambda_1)$$

et $T_{\lambda_1} x \in X$ pour tout $\lambda_1 \in \Lambda_\varepsilon$, (RT1) donne $(\Phi_{T_{\lambda_1} x}^\varepsilon)_* P_\varepsilon(A) = 0$ pour tout $\lambda_1 \in \Lambda_\varepsilon$. En utilisant cette idée et une simple récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\Phi_x^\varepsilon)^n{}_* P_\varepsilon^n(A) := P_\varepsilon^n(\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_\varepsilon^n \,:\, T_{\lambda_n} \ldots T_{\lambda_1} x \in A\}) = 0. \tag{5.15}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\{\omega \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} : \exists n \in \mathbb{N}^*\,,\, T_\omega^n x = x\}) &= P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\omega \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} \,:\, T_\omega^n x = x\}) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\{\omega \in \Lambda_\varepsilon^{\mathbb{N}} \,:\, T_\omega^n x = x\}) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P_\varepsilon^n(\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_\varepsilon^n \,:\, T_{\lambda_n} \ldots T_{\lambda_1} x = x\}) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{P_\varepsilon^n(\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_\varepsilon^n : T_{\lambda_n} \ldots T_{\lambda_1} x \in \{x\}\})}_{=0 \text{ par } (5.15)} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

∎

1. **Petites perturbations aléatoires d'une application du cercle :**
   Soient $X = \mathcal{S}^1$ et T une transformation $\mathcal{C}^r$ $(2 \leq r < \infty)$ dilatante de $\mathcal{S}^1$. Nous perturbons cette application par un bruit additif, c'est-à-dire : $T_\lambda x = Tx + \lambda$ où λ est une variable aléatoire distribuée suivant une densité supportée sur $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Alors il est bien connu (on pourra voir l'article de Baladi-Young par exemple [11]) que le système dynamique aléatoire ainsi défini admet une mesure stationnaire absolument continue μ dont la densité est $\mathcal{C}^{r-1}$ et dont les corrélations décroissent exponentiellement vite pour les observables $\mathcal{C}^{r-1}$. Remarquons qu'il est possible de passer des observables $\mathcal{C}^{r-1}$ aux observables Lipschitz par de simples arguments d'approximation. Alors par le théorème 5.3.4 et la proposition 5.7.1, pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque tout $(\omega, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\mathbb{N}} \times \mathcal{S}^1$ nous avons :

   $$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^\omega(x)}{-\log r} = 1$$

   et par le théorème 5.4.6, pour μ-presque tout $x \in \mathcal{S}^1$:

   $$\lim_{r \to 0} \frac{\log [\mathbf{T}_r(x)]}{-\log r} = 1.$$

2. **Petites perturbations aléatoires des applications dilatantes par morceaux de l'intervalle :**

   Soient $X = [0,1]$ et T une application $\mathcal{C}^2$ dilatante par morceaux sans *periodic turning point* (voir [11]) [1], alors pour la même perturbation par un bruit additif que dans l'exemple précédent Baladi et Young [11] ont prouvé l'existence (et la stabilité) d'une mesure stationnaire absolument continue μ et la décroissance exponentielle des corrélations pour des observables à variations bornées, et donc pour les Lipschitz. On obtient alors que pour $\mathbb{P} \otimes \mu$-presque-tout $(\omega, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\mathbb{N}} \times [0,1]$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \tau_r^{\omega}(x)}{-\log r} = 1$$

   et que pour μ-presque tout $x \in [0,1]$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log [\mathbf{T}_r(x)]}{-\log r} = 1.$$

1. Remarquons que ces résultats sont aussi valables pour des dynamiques dont la dérivées est uniformément plus grande que 2, ce qui permet d'éviter cette hypothèse sur les turning points [75].

Troisième partie

Applications des Systèmes Dynamiques Aléatoires

Chapitre 6

Une nouvelle définition pour la Fidélité

Ce chapitre est un article écrit en collaboration avec Carlangelo Liverani et Sandro Vaienti, publié dans Journal of Statistical Physics en 2007 [82] :

Abstract

We introduce a random perturbed version of the classical fidelity and we show that it converges with the same rate of decay of correlations, but not uniformly in the noise. This makes the classical fidelity unstable in the zero-noise limit.

6.1 Introduction

A recent series of papers [17, 18, 32], addresses the question of computing the classical fidelity for chaotic systems. They presented qualitative arguments and numerical evidences in favor of the fact that, for some dynamical systems, classical fidelity decays exponentially with the same rate as for correlations functions. The purpose of this note is to provide a rigorous mathematical proof of such a conjecture for a random perturbed version of the classical fidelity.

We first remind that classical fidelity is the classical counterpart of quantum fidelity which is, roughly speaking, a measure of the stability of quantum motion. Let us suppose that $|\psi\rangle$ is an initial quantum state which evolves forward up to time t under the Hamiltonian H_0 and then backward for the same time t under the perturbed Hamiltonian $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ where V is a potential. The overlap of the initial state with its image $e^{iH_\varepsilon t}e^{-iH_0 t}|\psi\rangle$ is quantified by the quantum fidelity defined as :

$$f_q(t) = \left|\left\langle \psi \left| e^{iH_\varepsilon t}e^{-iH_0 t}\right| \psi \right\rangle\right|^2 \tag{6.1}$$

The accuracy to which the initial quantum state is recovered is also called the Loschmidt echo [18, 42, 91].

A huge physical literature has been devoted to compute the quantum fidelity ; in particular it has been shown that, under some restrictions, $f_q(t)$ decays exponentially with a

rate given by the classical Lyapunov exponent ([18] and refs. therein). The classical analogue of (1) is simply defined by replacing the Hamiltonian with the evolution (Koopmann) operator of maps which preserve some invariant measures (see next section). It would be interesting to understand if the asymptotic decay of the classical fidelity takes place with the same exponent or, alternatively, at what time scale the quantum decay shares the same behavior of the classical one. These are among the major motivations to study the classical fidelity.

As we said above, there are numerical evidences that the decay of classical fidelity is ruled by the usual decay of correlations for smooth observables and that this decay takes place after a time t which is of order $\log(\varepsilon^{-1})$, where ε is the strength of the perturbation. Notice that after this transient time, the rate of decay turns out to be independent of ε. The numerical computations have been performed on invertible maps, possibly with singularities, preserving Lebesgue measure. In order to prove rigorously the preceding results for a wide class of dynamical systems, it will be useful to consider, instead of a single perturbed map, a random perturbation of the original system. In fact, in the case of a single perturbed map, the classical fidelity will not generally converge when time goes to infinity, as we will show on a very simple example in the Appendix. [1] The evolution operator will be therefore replaced by a random evolution operator. The advantage of this definition is twofold. First we can prove that the random fidelity has a limit when $t \to +\infty$ and the limit value is correctly identified. Second, the rate of decay towards this limit value is the same as for correlations but it is modulated by a factor of type $\varepsilon^{-\alpha}$ (so far it was simply ε^{-1}), where α depends on the class of observable under consideration. Under the additional assumption that the random dynamical system is stochastically stable, we will show an additional result, namely that the limit value of the fidelity performed by first taking $t \to +\infty$ followed by $\varepsilon \to 0$ is not the same if we interchange the order of the limits. We call this effect *stochastic instability of classical fidelity*, since it shows that the irreversibility which is present for $\varepsilon > 0$ (echo effect), still persist in the zero-noise limit. We finally point out that the computation of classical fidelity in presence of noise has been studied (notably in [18]) and it shares the same properties as for a single perturbed map. We will present in this paper two different ways to perturb a dynamical system : the first consists in perturbing the evolution operator by replacing the dynamics with a suitable Markov chain, while in the other method the orbit of a point is replaced by the random composition of maps close to the unperturbed one. We will show in the last section how to establish the equivalence of the two approaches in a few settings.

6.2 Random fidelity

In order to mimic the physical situations where the classical fidelity has been studied, even in connection with its quantum counterpart, we will restrict ourselves to dynamical systems defined on compact Riemannian manifolds X equipped with the Riemannian volume (Lebesgue measure) m. We consider then a measurable (with respect to the Borel σ-algebra β) map $T : X \to X$. For the moment we do not quote in detail the regularity properties of T ; instead we list the requirements the system should verify for our results to hold. Later on we will provide several explicit examples satisfying our assumptions.

1. Our counterexample concerns the algebraic automorphism of the torus, perturbed with an additive noise. Still for the same map, but perturbed in a different manner, the limit defining the classical fidelity seems to exist, at least numerically [18] ; see also our examples 4 in Sect. 3

The classical version of (1) is stated in [18, 69], as :

$$f_c(n) = \int_X U_0^n \rho(x)\, U_\varepsilon^n \rho(x)\, dm(x) \tag{6.2}$$

where U_0 and U_ε denote respectively the evolution (Koopmann) operator associated to T and to T_ε, where T_ε is close to T (in some topology) :

$$U_0\rho(x) = \rho(Tx) \;\; ; \;\; U_\varepsilon\rho(x) = \rho(T_\varepsilon x). \tag{6.3}$$

Indeed, suppose at first that the map T is invertible. Then the classical analogue of (1) would be : $\int_X \rho(x)(U_0^{-n}U_\varepsilon^n)\rho(x)\, dm(x)$, that is one first evolves ρ for a time n by the dynamics T_ε and then backward by the dynamics T. If m is T invariant, the preceding integral reduces immediately to (2). In general the Lebesgue measure is not invariant, but it converges to some invariant measure in the limit $n \to \infty$, see assumption (H1), thus the two definition coincide asymptotically. Of course, U_0^{-1} does not have much sense in the non invertible case, yet formula (2) makes perfect sense so it is natural to use it a definition of classical fidelity.

We will choose the density ρ as a $\mathcal{C}^1$ function on X ; moreover we will take m normalized on $X : m(X) = 1$. As mentioned in the introduction, instead of a single perturbed map T_ε, we will consider a random perturbation of T, that is a family $(\mathcal{X}_n^\varepsilon)_{n\geq 0}$ of Markov chains whose transition probabilities $\{P^\varepsilon(\cdot|x), x \in X\}$ converge uniformly to $\delta_{T(x)}$ as $\varepsilon \to 0$. We now state carefully our assumptions :

(**H1**) The map T admits an invariant measure μ which is the weak*-limit of the Lebesgue measure m, which means,

$$\int_X \varphi\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi(T^n x) dm \quad \text{ for all } \; \varphi \in \mathcal{C}^0(X)$$

We assume that the measure μ is ergodic and exponentially mixing on the space of $\mathcal{C}^1$ function on X and with respect to two norms which for the moment we simply denote with $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$

$$\left| \int_X \psi_1(T^n x)\psi_2(x)\, dm(x) - \int_X \psi_1\, d\mu \int_X \psi_2\, dm \right| \leq C\lambda^{-n} \|\psi_1\|_1 \|\psi_2\|_2 \tag{6.4}$$

where $C > 0$ and $\lambda > 1$ are determined only by the map T. We stress the fact that the 1-norm $\|\cdot\|_1$ refers to the function ψ_1 which is composed with T, while the 2-norm is computed on ψ_2. One could choose stronger *equal* norms, of course, but this would yield weaker estimates, with respect to the noise parameter ε, of the 2-norm of the function (of z) $q_\varepsilon(Ty, z)$ and of the 2-norm of the function (of x) $q_\varepsilon(Tx, y)$, $q_\varepsilon(x, y)$ being defined in the next assumption. We will see in the proof of Theorem 1 that the upper bounds of the 2-norms of q_ε will give the dependence over ε which modulates the exponential decay of the fidelity. This will lead us to use norms as optimal as possible in the examples that we will present later on.

Let us consider on the measure space (X, β) a family of Markov chains $(\mathcal{X}_n^\varepsilon)_{n\geq 0}$ with transition probabilities :

$$P(\mathcal{X}_{n+1}^\varepsilon \in A | \mathcal{X}_n^\varepsilon = z) = \int_A q_\varepsilon(Tz, y)\, dm(y) \tag{6.5}$$

where $A \in \beta$, $\mathcal{X}_0^\varepsilon$ can have any probability distribution and the measurable function $q_\varepsilon : X \times X \to \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in (0,1]$ is chosen in such a way that :

$$q_\varepsilon(x,y) = 0 \quad \text{if} \;\; d(x,y) > \varepsilon \tag{6.6}$$

$$\int_X q_\varepsilon(x,y)\, dm(y) = 1 \quad \text{for all} \;\; x \in X \tag{6.7}$$

A typical example of such a kernel [22], which we will adopt in the following, is

$$q_\varepsilon(x,y) = \varepsilon^{-d}\bar{q}(\varepsilon^{-1}(y-x)) \tag{6.8}$$

where $\bar{q}$ is nonnegative and continuously differentiable, $\mathrm{supp}(\bar{q}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \;:\; |\xi| \leq 1\}$, $\int \bar{q}(\xi)\, d\xi = 1$, $\inf\{\bar{q}(\xi) : |\xi| \leq \frac{1}{2}\} > 0$ and finally d is the dimension of the manifold X.

(**H2**) There exists a norm (identified with $\|\cdot\|_2$), a constant c (depending eventually on the function $\overline{q}$) and a real positive exponent α (depending only on the map T) such that :

$$\sup_{y\in X} \|q_\varepsilon(Ty,\cdot)\|_2 \leq c\varepsilon^{-\alpha} \;;\; \sup_{z\in X} \|q_\varepsilon(T(\cdot),z)\|_2 \leq c\varepsilon^{-\alpha}. \tag{6.9}$$

Let us now choose T continuous ; then by the compactness of X and the choice (6) of the transition probabilities, our Markov chain admits an absolutely continuous *stationary* measure μ_ε namely a probability measure over (X,β) which verifies for all $g \in \mathcal{C}^0(X)$;[2]

$$\int_X g(x) d\mu_\varepsilon(x) = \int_X \int_X q_\varepsilon(Tx,y) g(y)\, d\mu_\varepsilon(x) dm(y) \tag{6.10}$$

Notice that (11) can be equivalently written as :

$$\mu_\varepsilon(A) = \int_X (T_\varepsilon \mathbb{1}_A)(x) d\mu_\varepsilon(x) \tag{6.11}$$

where $A \in \beta$, $\mathbb{1}_A$ is the indicator function of the set A and T_ε is the operator defined on $\mathcal{L}^\infty(X)$ by :

$$(T_\varepsilon g)(x) = \int_X q_\varepsilon(Tx,y) g(y) dm(y) \tag{6.12}$$

This operator will play an important role in the following : it is the random version of the Koopmann operator $(Ug)(x) = g(Tx)$. It simply replaces the deterministic value $g(Tx)$ with the averaged value of g on a small ball of radius ε around Tx. We are now ready to state our third assumption :

(**H3**) The map T admits a kernel family q_ε for which μ_ε is the only absolutely continuous stationary measure (eventually for ε small) and we have the following rate of decay of correlations for the Markov process $(\mathcal{X}_n^\varepsilon, \mu_\varepsilon)$:

$$\left| \int_X T_\varepsilon^n \psi_1(x)\psi_2(x)\, dm(x) - \int_X \psi_1\, d\mu_\varepsilon \int_X \psi_2\, dm \right| \leq C\lambda^{-n} \|\psi_1\|_1 \|\psi_2\|_2 \tag{6.13}$$

where C, λ and the norms 1 and 2 are the same as in (5).
We also consider another stronger property of the process $(\mathcal{X}_n^\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ namely its weak convergence towards (T,μ).

2. We would like to point out that in the examples 3 and 4 of Section 3, the map T is not anymore continuous ; nevertheless the existence of an absolutely continuous stationary measure can be proved with other arguments [11, 37]

(**H4**) We suppose that the system (T, μ) is stochastically stable, in the sense that μ_ε tends to μ weakly as $\varepsilon \to 0$.

We finally introduce our definition of the classical fidelity which replaces (2) and is given in terms of the prescriptions (**H1**) to (**H3**).

Definition 1 (Random classical fidelity) *Let us suppose T is a Borel measurable map from the compact Riemannian manifold X into itself, and let m be the probability Riemannian measure on X. Let T_ε be the random evolution operator defined in (13) and $\rho \in \mathcal{C}^1(X)$. We define the classical fidelity as :*

$$F_c^\varepsilon(n) = \int_X \rho(T^n x)(T_\varepsilon^n \rho)(x)\, dm(x) \tag{6.14}$$

We will say that a system enjoy classical fidelity *if $F_n^\varepsilon(n) - \int \rho d\mu \int \rho d\mu_\varepsilon$ tend to zero as n tends to infinity.*

We now state our main result :

Theorem 1 *Let us suppose that the map T introduced in the preceding definition verifies the assumptions (**H1**) to (**H3**). Then there exists $C > 0$:*

$$\left| F_c^\varepsilon(n) - \int_X \rho\, d\mu \int_X \rho\, d\mu_\varepsilon \right| \leq C\varepsilon^{-\alpha}\lambda^{-n} \|\rho\|_1 \|\rho\|_{\mathcal{C}^0} . \tag{6.15}$$

Remark 1

1. *The theorem shows that the limit value of the classical fidelity involves the stationary measure μ_ε. Moreover the error term is not uniform in ε and this error begins to be negligible after a time n of order $\log \varepsilon^{-\alpha}/\log\lambda$. This effect has been effectively observed in [18], see also the appendix.* [3]
2. *The presence of ε in the limit value of $F_c^\varepsilon(n)$ when $n \to \infty$, or equivalently, the non-uniformity in ε of the error term, have an interesting consequence if we assume (**H4**), namely the stochastic stability of (T, μ). We first observe that in the absence of noise the correlation integral $F_c^0(n)$ converges towards $\int_X \rho^2\, d\mu$:*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} F_c^\varepsilon(n) = \int_X \rho^2\, d\mu \tag{6.16}$$

Instead :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} F_c^\varepsilon(n) = \left(\int_X \rho\, d\mu \right)^2 \tag{6.17}$$

and the two limits (16) and (17) in general will differ. We could interpret this fact by saying that the classical fidelity is not stochastically stable. The zero-noise situation : $\lim_{n\to\infty} F_c^0(n)$ is not recovered if we first play the dynamics for $n \to \infty$ and then we send the perturbation to zero. The memory is not destroyed when the noise is turned off after the evolution of the system and this is a sort of irreversibility of our random version of the classical fidelity.

3. Of course that above estimate is relevant only for times longer than $\log \varepsilon^{-\alpha}/\log\lambda$, since for shorter time it gives a rather large bound while the quantity under consideration is trivially bounded by $2\|\rho\|_\infty^2$.

Preuve [Proof of the theorem]

Let us define $g_{\varepsilon,y}(x) = q_\varepsilon(Tx, y)$ and $\phi_{\varepsilon,y}(z) = q_\varepsilon(Ty, z)$ and notice that (we will equivalently denote the Lebesgue measure with $dm(x)$ and dx) :

$$\begin{aligned}\int_X (\rho \circ T^n(x)) T_\varepsilon^n \rho(x)\, dx &= \int_X \rho \circ T^n(x)(T_\varepsilon \circ T_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{n-2})\rho(x)\, dm(x) \\ &= \int_{X^3} \rho \circ T^n(x) q_\varepsilon(Tx, y) q_\varepsilon(Ty, z) T_\varepsilon^{n-2}\rho(z)\, dxdydz \\ &= \int_X dy \left[\int_X \rho \circ T^n(x) g_{\varepsilon,y}(x)\, dx\right] \left[\int_X \phi_{\varepsilon,y}(z) T_\varepsilon^{n-2}\rho(z)\, dz\right]\end{aligned}$$

Let's then define for $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \left\| \int_X \rho \circ T^n(x) g_{\varepsilon,y}(x)\, dx - \int_X g_{\varepsilon,y}(x)\, dx \int_X \rho\, d\mu \right\|_{\mathcal{C}^0} \\ \Delta_{\varepsilon,n} &= \left\| \int_X \phi_{\varepsilon,y}(z) T_\varepsilon^{n-2}\rho(z)\, dz - \int_X \phi_{\varepsilon,y}(x)\, dx \int_X \rho\, d\mu_\varepsilon \right\|_{\mathcal{C}^0}\end{aligned}$$

The mixing properties of μ with respect to T and of μ_ε with respect to T_ε as we stated in assumptions (**H1**) and (**H3**), imply the following decay of correlations functions :

$$\begin{aligned}\Delta_n &\leq C\lambda^{-n} \|\rho\|_1 \|g_{\varepsilon,y}\|_2 \leq C\lambda^{-n} \|\rho\|_1\ \varepsilon^{-\alpha} \\ \Delta_{\varepsilon,n} &\leq C\lambda^{-n} \|\rho\|_1 \|\phi_{\varepsilon,y}\|_2 \leq C\lambda^{-n} \|\rho\|_1\ \varepsilon^{-\alpha}\end{aligned}$$

where we use the same symbol C to denote possibly different constants depending solely on the map T. Moreover (using $\int_M \phi_{\varepsilon,y}(z)dz = 1$), we can compute :

$$\begin{aligned}&\left| \int_X \rho \circ T^n(x)\, T_\varepsilon^n \rho(x)\, dx - \int_X \rho\, d\mu \int_X \rho\, d\mu_\varepsilon \right| \\ &\leq \int_X dy \Delta_n \left| \int_X \phi_{\varepsilon,y}(z) T_\varepsilon^{n-2}\rho(z)\, dz \right| + \int_X dy \Delta_{\varepsilon,n-2} \left| \int_X \rho\, d\mu \int_X g_{\varepsilon,y}(z)\, dz \right| \\ &\leq C\lambda^{-n+2}\varepsilon^{-\alpha} \|\rho\|_1 \|\rho\|_{\mathcal{C}^0} + C\lambda^{-n+2}\varepsilon^{-\alpha} \|\rho\|_1 \|\rho\|_{\mathcal{C}^0}\end{aligned}$$

since $\int_X g_{\varepsilon,y}(z)\, dz \leq C$, $\int_X \phi_{\varepsilon,y}(z)\, dz \leq C$ and $\|T_\varepsilon^n \rho\|_{\mathcal{C}^0} \leq C \|\rho\|_{\mathcal{C}^0}$ for all n. ∎

6.3 Examples

In this section we quote some dynamical systems of physical interest which fit our assumptions and to which we can apply our theorem on the decay of classical fidelity. We remark that the measure μ which we consider as the weak*-limit of the Lebesgue measure, is usually called the SRB or physical measure. For diffeomorphisms, eventually with singularities, it has also two additional properties : first, it has absolutely continuous conditional measures along the unstable foliations ; second it can be reconstructed by Birkhoff sums starting from initial points chosen in a basin of positive Lebesgue measure.

For locally (eventually non-uniformly) expanding maps, μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure.

1. **Anosov diffeomorphisms**
   The exponential decay of correlations for the SRB measure is a classical result ; see for

instance [24]. Yet, the optimal choice of the norms is a subtle matter. For simplicity we adopt the choice made in [22] where one can also find the decay of correlations for the stationary measure μ_ε constructed with the kernel family q_ε. With such a choice, a direct computation from formula (2.1.7) of [22] yields

$$\|h\|_2 \leq \|h\|_{L^1} + \|D^u h\|_{L^1}$$
$$\|h\|_1 \leq \|h\|_{\mathcal{C}^1},$$

where D^u is the differential restricted to the unstable directions. Accordingly, $\|g_\varepsilon\|_2 + \|\phi_\varepsilon\|_2 \leq C\varepsilon^{-1}$. Hence, in this case, $\alpha = 1$.

2. **Uniformly hyperbolic attractors**
   In this case we can refer to the work of Viana [109] although the norms are probably not the optimal ones. Better estimates could probably be obtained by using the recent work of [30] in conjunction with the perturbation theory of [51]. Here we content ourselves with the bound $\|h\|_1 + \|h\|_2 \leq C\|h\|_{\mathcal{C}^1}$ which follows from formula (4.29) of [109]. Accordingly we have the (unsatisfactory and almost certainly non optimal) bound $\alpha \leq d + 1$.

3. **Piecewise expanding maps of the interval**
   For continuous piecewise $\mathcal{C}^2$ expanding maps of the interval without periodic turning points, Baladi and Young [11] have proved the exponential decay of correlations and the stochastic stability of absolutely continuous stationary measures constructed with the convolution kernel :

$$q_\varepsilon(x, y) = \theta_\varepsilon(y - Tx) \qquad \theta_\varepsilon \geq 0 \ ; \ \operatorname{supp} \theta_\varepsilon \subset [-\varepsilon; +\varepsilon] \quad \text{and} \quad \int \theta_\varepsilon dm = 1$$

   In this case $\|h\|_2 = \|h\|_{BV}$, $\|h\|_1 = \|h\|_{L^1}$, thus $\alpha = 1$.
   Similar results can be obtained for piecewise expanding $\mathcal{C}^2$ maps with derivative uniformly larger than 2, see [75].

4. **Uniformly hyperbolic maps with singularities (in two dimensions)** This is an interesting situation since it covers the numerical simulation produced by Casati and al. [18]. In fact the latter authors perturbed the linear automorphism of the torus by keeping the Lebesgue measure invariant. In this way the perturbations become singular in the sense that the perturbed maps are discontinuous.
   This case has been rigorously investigated by [37]. Unfortunately, the norms are a bit unusual, here we will just state the minimum and refer to [37] for more details.
   The basic object is a collection Σ of smooth curves close to the stable direction. Given such curves we have (see [37] equations (2.3), (2.4)) :

$$\|h\|_2 \leq \sup_{W \in \Sigma} \int_W |Dh| + \int_W |h|.$$

Thus we have [4]

$$\|g_\varepsilon\|_2 + \|\phi_\varepsilon\|_2 \leq C\varepsilon^{-2}.$$

That is $\alpha \leq 2$. Note that the numerically predicted bound is $\alpha = 1$. In view of the smooth multidimensional case and of the one dimensional piecewise smooth case above we conjecture that $\alpha = 1$ is indeed the correct value and the present one ($\alpha = 2$) is a byproduct of our method of proof.

6.4 Perturbation with random maps

The random process that we used in Sect. 2 could be realized, in contrast to (6), as the composition of random maps (see [1, 74, 81] for more details). In this section we will briefly comment on the relation between this two different ways to realize a random perturbation. We start the discussion by a precise description of the random maps alternative.

Let $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence of i.i.d. random variables with values in the interval $\Omega_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ and with distribution θ_ε. We then associate continuously to each $\omega \in \Omega_\varepsilon$ a map T_ω with $T_0 = T$ and we define the transition probabilities (6) $P(\cdot|z)$ on the σ-algebra β in such a way that :

$$P(A|z) = \theta_\varepsilon(\omega; T_\omega z \in A) \tag{6.18}$$

for $A \in \beta$. The closeness of the T_ω to T will be made explicit in the concrete examples that we are giving below. In this setting the random evolution operator is replaced by the following one :

$$(U_\varepsilon g)(x) = \int_{\Omega_\varepsilon} g(T_\omega x) d\theta_\varepsilon(\omega) \tag{6.19}$$

for any $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$, and the stationary measure μ_ε should verify for each $h \in \mathcal{C}^0(X)$

$$\int h d\mu_\varepsilon = \int_X \int_{\Omega_\varepsilon} (h \circ T_\omega)(x) d\theta_\varepsilon(\omega) d\mu_\varepsilon(x) = \int_X (U_\varepsilon h)(x) d\mu_\varepsilon(x) \tag{6.20}$$

The iterations of the unperturbed map, $T^n(x), x \in X$, are thus replaced by the composition of random maps $T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1}$, $\omega_i \in \Omega_\varepsilon; x \in X$. One is therefore tempted to define a random version of the fidelity by setting (compare with (2)) :

$$\int \rho(T^n x) \rho(T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1})(x) dm(x)$$

for a given realization $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}$. Instead of doing that, we will take the average over all realizations, which produces the *annealed* version of the preceding correlation integral and we set the new version of the classical fidelity as :

$$\tilde{F}_c^\varepsilon(n) = \int_X \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(T^n x) \rho(T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1})(x) d\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\overline{\omega}) dm(x)$$

4. Let us compute, for example, $\|g_\varepsilon\|_2$. For $W \in \Sigma$

$$\int_W |g_\varepsilon| = \int_W q_\varepsilon(Tx, y) dx = \int_{T^{-1}W} |q_\varepsilon(x, y)| J_x T dx \leq C\varepsilon^{-1}$$

where JT is the Jacobian of the change of coordinates and the last inequality follows from the fact hat we integrate along a curve instead than on all the space. Analogously,

$$\int_W |Dg_\varepsilon| = \varepsilon^{-1} \int_W |DT \nabla q_\varepsilon(Tx, y)| dx = \varepsilon^{-1} \int_{T^{-1}W} |DT \nabla q_\varepsilon(x, y)| J_x T dx \leq C\varepsilon^{-2}.$$

From which the estimate in example 4 follows.

In terms of the random evolution operator U_ε the above integral can be simply written as

$$\tilde{F}_c^\varepsilon(n) = \int_X \rho(T^n x)(U_\varepsilon^n \rho)(x) dm(x)$$

which is formally similar to the random classical fidelity defined in (13). The advantage of this formula is that it is physically simpler to perturb the map T by randomly composing sequence of maps close to T. A very established theory exists for this kind of random perturbations and all the examples of Sect. 3 fit as well with it. We now show that in many cases the random evolution operator T_ε can be obtained from U_ε by a suitable choice of the probability measure θ_ε and of the random maps T_ω. To make the argument as simple as possible, let us suppose that $X = \mathbb{T}^m$, the m-dimensional torus, and define the additive noise : $T_\omega = T(x) - \omega \bmod \mathbb{T}^m$, where $\omega \in \mathbb{T}^m$ and then take θ_ε absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure $d\omega$ over $\mathbb{T}^m$ and with a continuously differentiable density h_ε with support contained in the square $[-\varepsilon, \varepsilon]^m$: $\int d\theta_\varepsilon = \int h_\varepsilon(\omega) d\omega = 1$. A simple change of variables on the m-dimensional torus immediately gives, for any $g \in \mathcal{L}^\infty(d\omega)$:

$$(U_\varepsilon g)(x) = \int g(T_\omega x) h_\varepsilon(\omega) d\omega = \int g(Tx - \omega) h_\varepsilon(\omega) d\omega = \int g(y) h_\varepsilon(Tx - y) dy$$

from which it follows that $q_\varepsilon(Tx, y) = h_\varepsilon(Tx - y)$.

Appendix

A counterexample to classical fidelity

Here is a simple example of a systems not having classical fidelity (see Definition 1). We consider the algebraic automorphisms T_L of the torus $X = \mathbb{T}^2$ defined by

$$T_L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \bmod 1$$

where $x = (x_1, x_2)$ is a point on the torus, and its perturbed map $T_\omega(x) = T(x) + \omega \bmod 1$ and we compute for all $\rho \in \mathcal{C}^1(X)$:

$$\rho_\omega(n) = \int_X \rho(T^n x) \rho(T_\omega^n x) dm(x)$$

where m denotes the normalized Lebesgue (Haar) measure over X. By using the Fourier' transform technique, denoting with k an element of $\mathbb{Z}^2$ and finally by posing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the euclidean scalar product, we have : $\rho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{2i\pi \langle k, x \rangle}$ where c_k are the Fourier coefficients of ρ. It easily follows that :

$$\rho(T^n x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{2i\pi \langle k, L^n x \rangle} \qquad \text{and} \qquad \rho(T_\omega^n x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{2i\pi \langle k, L^n x + \sum_{j=0}^{n-1} L^j \omega \rangle}$$

where $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Then :

$$\rho_\omega(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k|^2 e^{2i\pi \langle k, \sum_{j=0}^{n-1} L^j \omega \rangle} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |c_k|^2 e^{2i\pi \langle k, (\mathrm{Id} - L^n)(\mathrm{Id} - L)^{-1} \omega \rangle}$$

We notice that $\rho_\omega(n)$ is the value at the point $(\mathrm{Id} - T_L^n)(\mathrm{Id} - T_L)^{-1}\omega$ mod1 of the function with Fourier expansion :

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |c_k|^2 e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

But the operator $(\mathrm{Id} - T_L)^{-1}$ has the matrix representation

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

and therefore it applies X onto itself. Moreover, by the ergodicity of T_L, for Lebesgue almost all $\omega \in \mathbb{Z}^2$, the orbit $(\mathrm{Id} - T_L^n)\omega$, $n \geq 0$, is dense in X. It follows that $\rho_\omega(n)$ cannot have any limit unless ρ is constant everywhere.

Sharpness of the bounds

We conclude by showing that the bound $\alpha = 1$ is sharp : in general one cannot expect any decay of the fidelity before the time predicted by the $\alpha = 1$ bound. We consider again a toral automorphism and assume $q_\varepsilon(x,y) = \varepsilon^{-2}\bar{q}(\varepsilon^{-1}(x-y))$,[5] then $\mu_0 = \mu_\varepsilon = m$ and we can compute

$$\begin{aligned}
\int q_\varepsilon(x,y)f(y)dy &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k \int_{\mathbb{T}^2} q_\varepsilon(x,y)e^{2\pi i\langle k,y\rangle}dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k \int_{\mathbb{R}^2} q_\varepsilon(x,y)e^{2\pi i\langle k,y\rangle}dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon^{-2}q(\varepsilon^{-1}\xi)e^{2\pi i\langle k,x-\xi\rangle}d\xi \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k e^{2\pi i\langle k,x\rangle} \int_{\mathbb{R}^2} q(\xi)e^{-2\pi i\langle \varepsilon k,\xi\rangle}d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k e^{2\pi i\langle k,x\rangle}\hat{q}(\varepsilon k),
\end{aligned}$$

where $\hat{q}$ is the Fourier transform of $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$. That is $(T_\varepsilon f)_k = f_{L^{-1}k}\hat{q}(\varepsilon L^{-1}k)$.

Using these facts we can compute $F_c^\varepsilon(n)$ to be

$$F_c^\varepsilon(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \prod_{i=0}^{n-1} |\hat{q}(\varepsilon L^i k)| \cdot |c_k|^2.$$

Now we can chose $\rho(x) = e^{2\pi\langle(1,1),x\rangle}$, hence $c_k = \delta_{k,(1,1)}$. This means the following lower bound on the Fidelity

$$|F_c^\varepsilon(n) - |c_0|^2| \geq e^{-\varepsilon^{-1}\lambda^{-n}}.$$

Since we have chosen an analytic function the decay if super exponential, nevertheless it takes place only after a time n such that $\lambda^n \geq \varepsilon$. This corresponds exactly to the behavior in which $\alpha = 1$. It is then clear that one cannot hope for a better α.

5. Where by $x - y$ we means that x and y are lifted on the universal cover of $\mathbb{T}^2$, that is $\mathbb{R}^2$, then one rescale the variables and then takes the mod 1 to bring it back to the torus.

Chapitre 7

Distribution des erreurs dans une orbite perturbée

La pertinence des simulations numériques pour les systèmes dynamiques discrets est une question qui a été longuement étudiée dans la littérature. La représentation des nombres réels par des chaines finies et les arrondis faits dans les opérations arithmétiques ont depuis longtemps remis celle-ci en cause. Ces approximations dépendent de plus du logiciel utilisé. L'analyse de la propagation de ces erreurs est encore largement incomplète [76]. Ce chapitre est un article écrit en collaboration avec G. Turchetti, S. Vaienti et F. Zanlungo [85] et sera prochainement publié dans *Chaos*. Nous proposons une analyse de ce problème en utilisant les systèmes dynamiques aléatoires comme modélisation de ces approximations. Les résultats sur la fidélité du chapitre précédent nous permettront de mener à bien cette étude. Etant donnée une observable f définie sur l'espace des phases d'un système dynamique engendré par une application T, nous considérons l'erreur entre la valeur de $f(T^n x_0)$ calculée au temps n de l'évolution de l'orbite d'un point initial x_0 et la valeur $f(T^n_{\boldsymbol{\omega}} x_0)$ de la même observable calculée en remplaçant l'évolution déterministe T^n par l'évolution aléatoire i.i.d $T_{\omega_1} \circ \cdots \circ T_{\omega_n}$ où chaque T_ω est choisi dans un ε-voisinage de T. Nous allons alors étudier la variable aléatoire $\Delta_n^\varepsilon \equiv f(T^n x_0) - f(T^n_{\boldsymbol{\omega}} x_0)$ dépendant de la condition initiale x_0 et du choix de la réalisation $\boldsymbol{\omega}$. Nous montrerons qu'en considérant un bruit additif, cette variable converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers ce que nous appelons *l'erreur asymptotique* dont nous donnerons les propriétés.

7.1 Introduction

Nous étudions les effets d'une perturbation aléatoire sur l'orbite d'un système dynamique. Nous analysons statistiquement les erreurs globales Δ_n^ε. Nous obtiendrons des résultats exacts aussi bien pour des applications chaotiques et régulières. Notre étude suggère l'existence d'une échelle de temps dépendant de l'amplitude de la perturbation ε dans la convergence de ces erreurs. Typiquement, ce temps de référence sera $\log(1/\varepsilon)$ pour les applications chaotiques et ε^{-2} pour les applications régulières. Il sera de plus lié à la vitesse de divergence de deux orbites proches dans le système initial (linéaire ou exponentielle). Considérons une dynamique T dont nous souhaitons étudier numériquement les orbites. Un état x est représenté par un flottant x^* dans le logiciel utilisé, introduisant une erreur relative η telle que : $x^* = x(1+\eta)$. Lors de l'itération du système, cette erreur se propage le long de l'orbite numérique $x_n^* = T_* x_{n-1}^*$, où T_* est la représentation numérique de T. En général, la distance entre une *vraie* orbite et sa représentation numérique n'est pas connue ; néanmoins si celle-ci reste petite à chaque itération, c'est-à-dire si $d(x_{n+1}^*, Tx_n^*) := d(T_* x_n^*, Tx_n^*) < \varepsilon$,

alors l'orbite numérique est une ε-pseudo-orbite. Même si les processus arithmétiques qu'effectue le logiciel en y introduisant des arrondis sont déterministes, la suite des erreurs est en général considérée comme aléatoire. En posant $Tx_n^* - T_*x_n^* = \varepsilon\xi_n$, la pseudo-orbite $(x_n^*)_n$ est engendrée par l'application $T_*x = Tx + \varepsilon\xi$. Prouver que pour tout état initial x_*, la suite (ξ_n) est réellement équivalente à la réalisation d'un processus stochastique est une question théorique ardue. Toutefois il est possible d'étudier numériquement la statistique des suites pseudo-aléatoires (ξ_n) en évaluant T avec une précision suffisamment grande par rapport à T_* de façon à ce que nous puissions négliger l'erreur avec le résultat exact, au moins pour des temps assez petits. Pour mener à bien cette étude, il est nécessaire d'être guidé par des résultats théoriques. En particulier, nous avons besoin de comprendre comment les erreurs globales $\Delta_n = T_*^n x_* - T^n x$ évoluent de la distribution initiale $\delta(x)$ à la distribution asymptotique $\rho_\infty(x)$. Ce travail est radicalement différent de la recherche d'une vraie orbite qui soit proche de la pseudo-orbite, dont l'existence est assuré par le lemme du *shadowing* [70, 53, 54, 55]. Ici, nous comparons la vraie orbite $T^n x_0$ avec une ε-pseudo-orbite $\{x'_n\}_{n\geq 0}$ partant du même état initial x_0. Nous analysons la distribution de probabilité de l'erreur algébrique $f(T^n x_0) - f(x'_n)$ pour une observable régulière f définie sur l'espace des phases X. En particulier, nous considérons le cas où la pseudo-orbite est obtenue comme perturbation aléatoire de la vraie orbite [1].

Comme nous l'avons dit plus haut, nous allons nous intéresser aux propriétés statistiques de la variable aléatoire Δ_n^ε donnant l'erreur induite par la perturbation aléatoire. La fonction caractéristique φ_n^ε de cette variable est liée de façon triviale à la *fidélité classique aléatoire* (random classical fidélity) définie dans le chapitre précédent et introduite dans [82] et celle-ci nous permet d'obtenir la convergence ponctuelle suivante :

$$\varphi_n^\varepsilon(u) \longrightarrow \mathbb{E}_\mu(e^{i\rho f u})\ \overline{\mathbb{E}_{\mu_\varepsilon}(e^{i\rho f u})} \tag{7.1}$$

les espérances étant prises respectivement par rapport à la mesure invariante μ de T et à la mesure stationnaire μ_ε du système aléatoire. Nous verrons que cette convergence est exponentielle avec un taux dépendant de la décroissance des corrélations. La limite donnée précédemment est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire que nous interprétons comme l'erreur asymptotique et que nous notons $\Delta_\infty^\varepsilon$. Nous montrerons que cette erreur asymptotique est calculable aussi bien pour des dynamiques chaotiques que pour des dynamiques régulières comme les rotations.
Pour des applications sur le tore du type Bernoulli : qx mod1 et pour les rotations nous allons donner une étude analytique complète. Puisque l'erreur asymptotique est la même (la mesure invariante et la mesure stationnaires sont les mêmes) pour ces types de dynamiques : régulières et chaotiques, la différence doit être cherchée dans l'état transient qui reflète le taux de divergence de deux orbites déterministes arbitrairement proches au départ. En particulier, l'erreur asymptotique est atteinte avec une vitesse super-exponentielle pour les dynamiques Bernoulli alors qu'elle est simplement atteinte avec une vitesse exponentielle pour les rotations ; dans le premier cas la transition se fait de manière très marquée alors qu'elle est très *lisse* dans le second cas. Typiquement les temps de convergence vers l'erreur asymptotique sont de l'ordre de $n \sim \log(1/\varepsilon)$ pour les applications Bernoulli et $n \sim \varepsilon^{-2}$ pour les rotations.
Pour des applications aux propriétés ergodiques *intermédiaires* comme les dynamiques

1. Dans le travail sur les attracteurs, nous avons montré l'équivalence entre les pseudo-orbites et les orbites aléatoires obtenues par ce type de perturbations

intermittentes, l'application logistique, l'attracteur de Hénon et l'application standard nous donnerons une étude essentiellement numérique. r'

Mise en garde : nous utiliserons la notation C pour différentes constantes dans différents contextes.

7.2 Statistiques des erreurs

7.2.1 Perturbations et Fidélité aléatoires

Dans le but de permettre une lecture indépendante des chapitres, nous rappelons ici les résultats présentés dans le chapitre précédent sur la fidélité.

Commençons par préciser les propriétés des systèmes dynamiques auxquels nous allons nous intéresser. Soient X une variété riemannienne compacte équipée du volume riemannien (la mesure de Lebesgue) m et $T : X \to X$ une application borélienne admettant une mesure SRB invariante μ, définie par la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int \psi \circ T^n dm = \int \psi d\mu \tag{7.2}$$

où ψ est une fonction continue sur X. Nous allons supposer que :

H1. La mesure μ est ergodique et exponentiellement mélangeante sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur X et par rapport à deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$

$$\left| \int_X \psi_1(T^n x)\psi_2(x)dm(x) - \int_X \psi_1 d\mu \int_X \psi_2 dm \right| \leq C\lambda^{-n} \|\psi_1\|_1 \|\psi_2\|_2 \tag{7.3}$$

où $C > 0$ et $\lambda > 1$ sont uniquement déterminés par T. Le choix des normes dépend de l'application et de l'espace des observables ; nous renvoyons au chapitre précédent ou à [82] pour une construction de ces normes dans des exemples spécifiques.
Nous introduisons maintenant la perturbation aléatoire du système précédent :
Soit $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans un espace vectoriel topologique Ω_ε de distribution θ_ε. Nous associons alors à chaque $\omega \in \Omega_\varepsilon$ une application T_ω avec $T_0 = T$ de telle façon que les itérations de l'application perturbée sont définies par la composition des applications $T_{\omega_n} \circ \cdots \circ T_{\omega_1} \equiv T^n_{\boldsymbol{\omega}}$, $\omega_i \in \Omega_\varepsilon; x \in X$. Le bruit et sa régularité seront choisis suivant la description suivante :

H2. Pour tout $z \in X$ les probabilités $\mathbb{P}(\cdot|z)$ définies sur chaque ensemble mesurable A par

$$\mathbb{P}(A|z) = \theta_\varepsilon(\omega; T_\omega z \in A)$$

sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous notons $q_\varepsilon(Tx, .)$ sa densité et nous imposons que $q_\varepsilon(x, z)$ s'annule lorsque $d(x, z) > \varepsilon$ et vérifie

$$\sup_{y\in X} \|q_\varepsilon(Ty, \cdot)\|_2 \leq c\varepsilon^{-\kappa} \quad \text{et} \quad \sup_{z\in X} \|q_\varepsilon(T(\cdot), z)\|_2 \leq c\varepsilon^{-\kappa}$$

où c est une constante, κ un exposant réel positif dépendant seulement de T et $\|\cdot\|_2$, l'une des deux normes introduites plus haut.

Enfin nous allons imposer que :

H3. La mesure stationnaire est la limite faible de la mesure de Lebesgue dans le sens que pour tout fonction continue ψ nous ayons :

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \mathcal{U}_\varepsilon^n\psi(x)dm = \int_X \psi d\mu_\varepsilon \tag{7.4}$$

Dans la section 3 nous utilisons la formule précédente pour calculer numériquement les intégrales par rapport à la mesure stationnaire pour des systèmes pour lesquelles nous ne la connaissons pas explicitement. L'hypothèse **H2** implique que μ_ε est absolument continue par rapport à m [3]

H4. Nous allons de plus imposer le taux de décroissance suivant pour les fonctions C^1 :

$$\left|\int_X \mathcal{U}_\varepsilon^n\psi_1(x)\psi_2(x)dm(x) - \int_X \psi_1 d\mu_\varepsilon \int_X \psi_2 dm\right| \leq C\lambda^{-n}\left\|\psi_1\right\|_1\left\|\psi_2\right\|_2 \tag{7.5}$$

où C, λ et les normes 1 et 2 sont les mêmes que dans (7.3).

Définition 7.2.1 Nous appelons $\mathcal{M}$ la classe des applications vérifiant les hypothèses **H1,2,3,4**.

Nous rappelons maintenant la définition de la fidélité classique (inspirée de l'article [18]) :

$$F_n^\varepsilon = \int_X\int_{\Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}} \psi_1(T^n x)\psi_2(T_{\boldsymbol{\omega}}^n x)d\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\boldsymbol{\omega})dm(x) = \int_X \psi_1(T^n x)(\mathcal{U}_\varepsilon^n\psi_2)(x)dm(x) \tag{7.6}$$

où ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions C^1. Dans [82] (chapitre précédent) nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 7.2.2 ([82]) *Soit T une application de la classe $\mathcal{M}$; alors il existe $C > 0$ tel que :*

$$\left|F_n^\varepsilon - \int_X \psi_1 d\mu \int_X \psi_2 d\mu_\varepsilon\right| \leq C\varepsilon^{-\kappa}\lambda^{-n}\left(\left\|\psi_1\right\|_1\left\|\psi_2\right\|_{C^0} + \left\|\psi_2\right\|_1\left\|\psi_1\right\|_{C^0}\right) \tag{7.7}$$

où $||\cdot||_{C^0}$ est la norme sup des fonctions continues.

Dans ce travail nous nous limitons à un bruit particulier vérifiant **H2** : le bruit additif. Cette perturbation est bien définie dès que l'espace X est un tore d-dimensionnel : $\mathbb{T}^d$; dans ce cas nous définissons les applications aléatoires par : $T_\omega = Tx - \omega \bmod \mathbb{T}^d$, où $\omega \in \mathbb{T}^d$, en prenant θ_ε absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue notée ici $d\omega$ sur $\mathbb{T}^d$ avec une densité h_ε continument différentiable dont le support est contenue dans le carré $[-\varepsilon,\varepsilon]^d$, avec $\int d\theta_\varepsilon = \int h_\varepsilon(\omega)d\omega = 1$. Soit $H(\xi)$ une fonction non-négative continument différentiable supportée sur $[-1,1]^d \subset \mathbb{R}^d$ telle que $\int H(\xi)d\xi = 1$; la fonction $h_\varepsilon(x)$ est définie par :

$$h_\varepsilon(\omega) = \varepsilon^{-d}H(\omega/\varepsilon) \tag{7.8}$$

Le changement de variable $\omega = \varepsilon\xi$ montre que la densité $h_\varepsilon(\omega)$ de la mesure $\theta_\varepsilon(\omega)$ vérifie les propriétés requises. Pour les applications du tore $\mathbb{T}$, discutées dans la section suivante nous considérerons une suite de variables aléatoires i.i.d $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ et une fonction $H(\xi)$ égale à $1/2$ pour $|\xi| \leq 1$ et à 0 si $|\xi| > 1$, limite d'une suite de fonctions

renormalisées supportées sur $[-1,1]$. Comme conséquence du changement de variable $\omega = \varepsilon\xi$ nous obtenons :

$$F_n^\varepsilon = 2^{-d}\int_0^1 dx \int_{-1}^1 d\boldsymbol{\xi}\, \psi_1(T^n x)\psi_2(T_{\varepsilon\xi_n}\circ\cdots\circ T_{\varepsilon\xi_1}x) \tag{7.9}$$

Si par contre nous travaillons avec des applications T définies sur des sous-ensembles $D \in \mathbb{R}^n$, nous devons imposer que l'image de D est strictement incluse dans D et qu'il en soit de même lorsque nous ajoutons à Tx, $x \in D$, un vecteur de composantes $\xi_i < \varepsilon$.
Citons maintenant une autre propriété intéressante du bruit additif. Comme nous l'avons montré dans le chapitre "Attracteurs, Pseudo-orbites et Mesures Stationnaires", il est facile de voir que les orbites aléatoires générées par un bruit additif de taille ε sont également des ε-pseudo-orbites. Cette équivalence rend particulièrement pertinente l'utilisation du bruit additif pour reproduire le comportement des erreurs dans les simulations numériques.

Remarque 7.2.3 *[82] (ou le chapitre précédent) donne plusieurs exemples de systèmes dynamiques satisfaisant le théorème précédent : difféomorphismes d'Anosov, attracteurs uniformément hyperboliques, applications dilatantes par morceaux de l'intervalle ou encore les applications uniformément hyperboliques avec singularités.*
Le théorème pourrait être généralisé de la façon suivante : supposons que $\mathcal{U}_\varepsilon$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon$ soient deux opérateurs d'évolution aléatoires associés à la dynamique $T \in \mathcal{M}$, et que de plus les deux distributions associées q_ε et $\widetilde{q}_\varepsilon$vérifient les bornes (voir plus haut) : avec le même exposant κ, avec des facteurs différents c. Finalement, appelons μ_ε et $\widetilde{\mu}_\varepsilon$ les deux mesures stationnaires absolument continues associées. Alors il existe une constante C pour laquelle :

$$\left|\int_X (\mathcal{U}_\varepsilon^n\psi_1)(\widetilde{\mathcal{U}}_\varepsilon^n\psi_2)dm - \int_X \psi_1 d\mu_\varepsilon \int_X \psi_2 d\widetilde{\mu}_\varepsilon\right| \leq C\varepsilon^{-\alpha}\lambda^{-n}(\|\psi_1\|_1\,\|\psi_2\|_{\mathcal{C}^0} + \|\psi_2\|_1\,\|\psi_1\|_{\mathcal{C}^0})$$

7.2.2 Distribution de l'erreur

Nous considérons ici un système dynamique (X,T,μ), où μ est une mesure SRB, et la famille d'applications aléatoires T_{ω_k} où $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs dans Ω_ε de loi θ_ε (comme plus haut).
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une observable $\mathcal{C}^1$; nous considérons la mesure de probabilité $m \otimes \theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ sur l'espace produit $X \times \Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ et les processus stochastiques X_n et X_n^ε définis sur cet espace respectivement par :

$$X_n(x,\boldsymbol{\omega}) = f(T^n x)$$

et

$$X_n^\varepsilon(x,\boldsymbol{\omega}) = f(T_{\boldsymbol{\omega}}^n x)$$

où m est toujours la mesure de Lebesgue, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_n) \in \Omega_\varepsilon^n$ et $T_{\boldsymbol{\omega}}^n = T_{\omega_n}\circ\ldots\circ T_{\omega_1}$.
La quantité que nous étudions en détail dans ce travail est *l'erreur algébrique* :

$$\Delta_n^\varepsilon = X_n - X_n^\varepsilon$$

Posons maintenant notre résultat principal :

Théorème 7.2.4 *Soit $T \in \mathcal{M}$; alors lorsque n tend vers $+\infty$, le processus aléatoire Δ_n^ε, dont la fonction caractéristique est $\varphi_n^\varepsilon(u)$, converge en loi vers une variable aléatoire $\Delta_\infty^\varepsilon$ dont la fonction caractéristique est donnée par :*

$$\varphi_\infty^\varepsilon(u) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n^\varepsilon(u) = \int_X e^{iuf}d\mu \int_X e^{-iuf}d\mu_\varepsilon$$

Preuve En effet en écrivant la fonction caractéristique de Δ_n^ε : $\varphi_n^\varepsilon(u)$ et en utilisant le théorème de Fubini, nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi_n^\varepsilon(u) &= \int_{X\times\Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}} e^{iu\Delta_n^\varepsilon(x,\boldsymbol{\omega})} dm(x) d\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_X \int_{\Omega_\varepsilon^{\mathbb{N}}} e^{iu(f(T^n x)-f(T_{\boldsymbol{\omega}}^n x))} d\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}(\boldsymbol{\omega}) dm(x) \\ &= \int_X e^{iuf(T^n x)} (\mathcal{U}_\varepsilon^n e^{-iuf})(x) dm(x)\end{aligned}$$

En utilisant le théorème 7.2.2 il suffit de choisir $\psi_1(x) = e^{iuf(x)}$, $\psi_2(x) = e^{-iuf(x)}$. Appelons Φ_n^ε la fonction de répartition de Δ_n^ε. Si $\varphi_\infty^\varepsilon$ est continue en 0 alors par le théorème 3 p266 de [34], on peut conclure que $\varphi_\infty^\varepsilon$ est la fonction caractéristique associée à une fonction de répartition Φ_∞^ε et que Φ_n^ε converge vers Φ_∞^ε. Dans ce cas, nous dirons que la variable Δ_n^ε converge en distribution, ou en loi, vers une variable aléatoire que nous noterons $\Delta_\infty^\varepsilon$, dont la fonction de répartition est Φ_∞^ε.
Puisque $|e^{\pm iuf}| \leq 1$ et que μ et μ_ε sont des mesures de probabilité, le théorème de convergence dominée nous assure que $\lim_{u\to 0} \varphi_\infty^\varepsilon(u) = 1 = \varphi_\infty^\varepsilon(0)$ et donc que $\varphi_\infty^\varepsilon$ est continue en 0. ∎

Remarque 7.2.5 *Nous ne sommes pas réellement intéressés par la variable aléatoire fictive $\Delta_\infty^\varepsilon$ elle-même mais plutôt par sa distribution.*

Lorsque,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_\infty^\varepsilon(u)| du < \infty$$

la formule d'inversion de Levy nous donne que la distribution est absolument continue, de densité continue bornée ρ_∞^ε donnée par :

$$\rho_\infty^\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} \varphi_\infty^\varepsilon(u) du \tag{7.10}$$

Notons également que la convergence vers la fonction caractéristique asymptotique est exponentielle mais non-uniforme dans le bruit.

$$|\varphi_n^\varepsilon(u) - \varphi_\infty^\varepsilon(u)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\kappa}\lambda^{-n}) \tag{7.11}$$

Ce point sera développé dans la suite.

Remarque 7.2.6 *Puisque notre variable $\Delta_n^\varepsilon = X_n - X_n^\varepsilon$ est bornée sur X, tous ses moments sont uniformément intégrables. Les moments de $\Delta_\infty^\varepsilon$ sont alors donnés par la limite, quand $n \to \infty$, des moments du même ordre de Δ_n^ε. En dérivant la fonction caractéristique de $\Delta_\infty^\varepsilon$ nous obtenons :*

$$\mathbb{E}_{m\otimes\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}}[(\Delta_\infty^\varepsilon)^n] = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^{n-j} \int_X (f)^j(x)\, d\mu(x) \int_X (f)^{n-j}(x)\, d\mu_\varepsilon(x)$$

où $\mathbb{E}_\nu$ (resp. $\mathbb{V}_\nu$) est l'espérance (resp. la variance) par rapport à la probabilité ν.

Cette remarque implique que

(i)

$$\mathbb{E}_{m\otimes\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}}(\Delta_\infty^\varepsilon) = \mathbb{E}_\mu(f) - \mathbb{E}_{\mu_\varepsilon}(f)$$

(ii)

$$\mathbb{V}_{m\otimes\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}}(\Delta_\infty^\varepsilon) = \mathbb{V}_\mu(f) + \mathbb{V}_{\mu_\varepsilon}(f) = \int f^2 d\mu - (\int f d\mu)^2 + \int f^2 d\mu_\varepsilon - (\int f d\mu_\varepsilon)^2$$

Si nous supposons maintenant que le système est stochastiquement stable, nous pouvons alors voir que l'erreur moyenne tend vers zéro alors que les fluctuations restent finies.
Ainsi même si le bruit s'estompe après l'évolution du système, nous ne pouvons pas faire abstraction de son effet : il y a un phénomène de mémoire. C'est une conséquence de l'instabilité stochastique de la fidélité classique que nous avons mis en exergue dans [82].

Comparons maintenant nos résultats avec le travail de T. Sauer dans [102]. Il a considéré une observable régulière g sur l'espace des phases X et la différence algébrique (l'opposé de la notre) :

$$\Delta(g) \equiv \langle g\rangle_{calcul} - \langle g\rangle_{vraie}$$

où $\langle g\rangle_{vraie}$ est la moyenne ergodique calculée le long de la vraie trajectoire par T et $\langle g\rangle_{calcul}$ la moyenne ergodique calculée le long de l'orbite perturbée par un bruit d'amplitude ε. Sauer a proposé heuristiquement l'échelle suivante :

$$\Delta(g) = K\varepsilon^h$$

où K est une constante et h "is an exponent expressing the severity of the fluctuations of the Lyapunov exponent" [102].
Pour une application appartenant à la classe $\mathcal{M}$, nous avons simplement

$$\langle g\rangle_{vraie} = \int_X g d\mu$$

La moyenne ergodique perturbée sera :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} g(T_{\omega_l}T_{\omega_{l-1}}\cdots T_{\omega_0}x)$$

Pour les applications de $\mathcal{M}$, la mesure stationnaire est ergodique et donc la somme de Birkhoff précédente converge vers $\int_X g d\mu_\varepsilon$, pour x choisi m-presque-partout et pour presque-toute réalisation $\boldsymbol{\omega}$ choisie par rapport à la mesure $\theta_\varepsilon^{\mathbb{N}}$, on pourra voir [3] par exemple. Il est alors raisonnable de poser :

$$\langle g\rangle_{calcul} = \int_X g d\mu_\varepsilon$$

de telle façon que l'on ait :

$$\Delta(g) = \int_X g d\mu_\varepsilon - \int_X g d\mu$$

Supposons maintenant que l'application $T \in \mathcal{M}$ ait une mesure invariante μ qui soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m, de densité d ; supposons de plus que la mesure stationnaire μ_ε soit absolument continue de densité d_ε. Les systèmes appartenant à $\mathcal{M}$ jouissent généralement d'une propriété de forte stabilité stochastique, ce qui signifie la convergence d_ε vers d dans la norme $\mathcal{L}_m^1$. L'article [79] donne de nombreux

exemples pour lesquels cette convergence dans $\mathcal{L}^1_m$ est explicitement calculée pour le bruit additif, avec des arguments rigoureux ou des études numériques (même pour des systèmes n'appartenant pas à la classe $\mathcal{M}$), comme une fonction de l'amplitude du bruit ε ; les échelles trouvées sont du type :

$$||d - d_\varepsilon||_{\mathcal{L}^1_m} \leq \text{const. } \varepsilon^\gamma \tag{7.12}$$

où γ est un exposant dépendant de l'application T. Cet exposant semble plus relié à la régularité de l'application plutôt qu'à l'exposant de Lyapunov. Par exemple, pour des applications continue uniformément dilatante du cercle, $\gamma = 2$, alors que $\gamma = 1$ si l'application a des discontinuités. Pour Misiurewicz, les applications quadratiques (voir aussi Sect. 4.4), $\gamma = 0.5$ et les valeurs vont de 0.3 à 0.7 pour les dynamiques intermittentes (voir Sect. 4.3). Nous verrons dans la section suivante qu'il y a des exemples pour lesquels les mesures stationnaire et invariante sont les mêmes $d = d_\varepsilon$, mais la densité de probabilité de l'erreur asymptotique pour l'observable de position $f(x) = x$ est une fonction régulière dont le support a un diamètre deux fois plus grand que le support de la mesure invariante.
Puisque, par l'inégalité de Hölder :

$$|\Delta(g)| \leq ||g||_{C^0} ||d - d_\varepsilon||_{\mathcal{L}^1_m} \leq ||g||_{C^0} \text{const. } \varepsilon^\gamma$$

la comparaison avec la borne précédente de Sauer n'est pas évidente. Une explication possible, qui mériterait d'être approfondie, est que les fluctuations de l'exposant de Lyapunov jouent un rôle lorsque nous remplaçons $\langle g \rangle_{calcul}$ avec la somme de Birkhoff :

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} g(T_{\omega_l} T_{\omega_{l-1}} \cdots T_{\omega_0}(x))$$

pour un n fini et en prenant en compte la limite pour ε petit et n grand.
Une autre explication possible serait que le résultat de Sauer s'applique aux difféomorphismes admettant une mesure SRB singulière par rapport à la mesure de Lebesgue avec un nombre d'exposants de Lyapunov plus grand que un. Dans ce cas, nous perdons la comparaison des densités donnée par (7.12) et nous devrions évaluer directement la différence $\int_X g d\mu_\varepsilon - \int_X g d\mu$: ceci est fait par exemple pour les attracteurs uniformément hyperboliques dans [109] et pour l'attracteur de Hénon dans [31], mais il n'y a pas d'échelle explicite en ε.

7.3 Résultats analytiques sur des dynamiques types

7.3.1 Dynamiques chaotiques et rotations du cercle

Comme illustration simple du théorème que nous avons donné dans la section précédente, nous considérons une application T définie sur le tore unidimensionnel $\mathbb{T}^1$ définie par $Tx = qx \bmod 1$, où $q \geq 2$ est un entier positif. Nous la perturbons avec un bruit additif produisant les applications aléatoires :

$$T_{\varepsilon\xi}(x) = qx + \varepsilon\xi \quad \bmod 1$$

où $\varepsilon > 0$ est l'intensité du bruit et ξ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[-1, 1]$. En examinant la formule, il est facile de vérifier qu'il existe pour ce bruit une mesure stationnaire qui coïncide avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$. L'application T

appartient clairement à la classe $\mathcal{M}$, nous pourrions donc appliquer le théorème (7.2.4) pour des observables régulières.

A la place, nous allons considérer l'observable *identité* $f(x) = x$ qui est discontinue sur le cercle. Pour cette observable nous allons donner une preuve directe de la convergence de la fidélité en utilisant les séries de Fourier. La densité de probabilité aura de plus une forme explicite très simple, c'est une raison supplémentaire qui a ainsi motivé le choix de cette observable. Le calcul que nous allons développer dans ce qui suit montre que la fonction caractéristique de l'erreur asymptotique est donnée par : $\varphi^{\varepsilon}_{\infty}(u) = 2u^{-2}(1 - \cos u)$; en conséquence, la densité $\rho^{\varepsilon}_{\infty}$ de la loi de la variable aléatoire limite $\Delta^{\varepsilon}_{\infty}$ est indépendante de ε ; elle est donnée par sa transformée de Fourier qui est la fonction triangulaire sur $[-1, 1]$, c'est à dire :

$$\rho^{\varepsilon}_{\infty}(t) = (1 - |t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}$$

Jusqu'à présent nous nous sommes focalisés sur les applications de la classe $\mathcal{M}$, avec de fortes propriétés de mélange, en particulier avec une décroissance exponentielle des corrélations. Considérons maintenant des transformations moins chaotiques, et même régulières comme les rotations et calculons directement la fonction caractéristique $\varphi^{\varepsilon}_{n}(u)$. Passons ensuite à la limite pour $n \to \infty$. Nous considérons les translations T d'angle χ sur le tore $\mathbb{T}^1$: $Tx = x + \chi$ mod1, correspondant des rotations d'angle $2\pi\chi$ sur le cercle $\mathcal{S}^1$, et nous les perturbons avec un bruit additif. Nous obtenons alors les applications aléatoires :

$$T^{n}_{\boldsymbol{\varepsilon\xi}} \equiv x + n\chi + \varepsilon(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) \quad \text{mod1}$$

, où les $(\xi_l)_{l\geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Il est une nouvelle fois direct de vérifier que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^1$ est l'unique mesure stationnaire du processus. Considérons la fidélité (eq. 7.9) F^{ε}_{n} pour la fonction $\psi = \psi_1 = \psi_2^*$ de coefficients de Fourier $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. La fonction ψ est prise $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité.

Proposition 7.3.1 *De simples calculs (voir l'appendice) donnent :*

$$F^{\varepsilon}_{n} = |\psi_0|^2 + \sum_{k\neq 0} |\psi_k|^2 \; S^n(k\varepsilon) \qquad S(x) = \frac{\sin(2\pi\ x)}{2\pi x} \tag{7.13}$$

La fonction S peut être bornée par :

$$|S(x)| \leq \begin{cases} e^{-\log(2\pi)x^2} & si\ |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2\pi|x|} & si\ |x| \geq 1 \end{cases} \tag{7.14}$$

En utilisant la borne de (7.13) et puisque les coefficients de Fourier sont au moins bornés par $\psi_k \leq C|k|^{-1}$, où C est une constante dépendant de l'observable ψ, nous obtenons après quelques manipulations (voir l'appendice) :

$$|F^{\varepsilon}_{n} - |\psi_0|^2| \leq C\left((2-\varepsilon)e^{-\varepsilon^2 n(\ln(2\pi))} + \varepsilon(2\pi)^{-n}\right) \tag{7.15}$$

Ce résultat s'applique aussi à la fonction $\varphi^{\varepsilon}_{n}(u)$, qui est la fidélité calculée en utilisant $\psi = e^{iuf(x)}$

Puisque (7.15) converge vers zéro, si nous prenons $f(x) = x$, nous trouvons également une distribution triangulaire pour les rotations pour $\Delta^{\varepsilon}_{\infty}$, comme dans le cas qx mod 1 avec

$q \geq 2$. Ainsi, une application chaotique et une application très régulière (qui est l'identité pour $\chi = 0$) partage la même distribution de l'erreur entre la véritable orbite et celle perturbée pour la même condition initiale. Ce n'est pas surprenant si nous analysons ce que nous faisons pour pour l'observable de position $f(x) = x$. Nous calculons simplement la distribution de la différence de deux points choisis au hasard avec chacun une distribution uniforme sur le cercle et de façon indépendante. La loi de cette différence est alors la loi triangulaire. Les hypothèses statistiques précédentes sont assurées dans nos cas, par la propriété de Bernoulli pour les applications qx mod 1 et par l'indépendance et l'uniforme distribution des sauts ξ_l pour les rotations.
Du point de vue ergodique, la nature très différente des deux systèmes transparait dans la vitesse de convergence vers la distribution limite. Nous le voyons immédiatement en comparant l'erreur (7.15) pour les rotations avec l'erreur pour les applications de la classe $\mathcal{M}$donnée par (7.11) : pour qx mod 1 l'exposant $\kappa = 1$ [82]. Ce dernier peut être considérablement amélioré en utilisant les séries de Fourier qui permettent de plus de couvrir des observables régulières par morceaux comme l'identité. Observons d'abord que :

$$F_n^\varepsilon = |\psi_0|^2 + \sum_{k\neq 0} |\psi_k|^2 \; S_{n,q}(k\varepsilon) \tag{7.16}$$

où nous avons défini :

$$S_{n,q}(x) = \prod_{k=0}^{k=n-1} S(q^k x) \tag{7.17}$$

(la preuve de cette équation est donnée en appendice). Une borne (7.16) peut être trouvée :

$$|F_n^\varepsilon - |\psi_0|^2| \leq \begin{cases} A\; e^{-\alpha\; q^{2(n-n_*)}} & \text{si} \quad n < n_* \\ \\ Ae^{-\alpha} q^{-(n-n_*)^2/2} & \text{si} \quad n \geq n_* \end{cases} \tag{7.18}$$

avec :

$$\varepsilon q^{n_*} = 1 \quad \text{ou} \quad n_* = -\log_q \varepsilon \tag{7.19}$$

Cette formule montre une transition précise dans la décroissance lorsque $n \sim \ln \varepsilon^{-1}/\ln q = n_*$ et cette décroissance devient alors super-exponentielle. Dans le même temps, une telle transition n'existe pas pour les rotations et la décroissance se fait *en douceur*, voir les graphes 7.1, 7.2. La différence entre ces deux régimes devient claire lorsque nous calculons ρ_n^ε, la fonction de distribution de Δ_n^ε, pour l'observable identité, qui est donnée par la transformée de Fourier inverse des fonctions caractéristiques suivantes, obtenues après avoir évalué les coefficients de Fourier :

$$\psi_k = e^{i(u/2-\pi\, k)} \; \frac{\sin(u/2 - \pi\, k)}{u/2 - \pi\, k}$$

de la fonction :

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{iu(x-[x])} & \text{si } x > 0 \\ e^{iu(1+x-[x])} & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ (ce choix est équivalent à considérer e^{iux} sur le tore). Le résultat explicite est alors :
- pour les rotations :

$$\varphi_n^\varepsilon(u) = \frac{2}{u^2}(1 - \cos u) + \sum_{k=1}^{\infty} S^n(k) \left[\frac{\sin^2(u/2 - \pi k)}{(u/2 - \pi k)^2} + \frac{\sin^2(u/2 + \pi k)}{(u/2 + \pi k)^2} \right] \tag{7.21}$$

- pour qx mod 1

$$\varphi_n^\varepsilon(u) = \frac{2}{u^2}(1-\cos u) + \sum_{k=1}^{\infty} S_{n,q}(k)\left[\frac{\sin^2(u/2-\pi k)}{(u/2-\pi k)^2} + \frac{\sin^2(u/2+\pi k)}{(u/2+\pi k)^2}\right] \tag{7.22}$$

Voir l'appendice pour plus de détails. La transformée de Fourier inverse de $2u^{-2}\,(1-\cos u)$ est la distribution triangulaire :

$$\rho_\infty^\varepsilon(t) = (1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}$$

7.3.2 Analogie avec le cas continu

Soit une application du tore $\mathbb{T}$ aléatoirement perturbée :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\phi(x_n) + \varepsilon\sqrt{\delta t}\;\xi_n$$

où les ξ_n sont des variables aléatoires centrées réduites. A la limite $\Delta t \to 0$, nous obtenons l'équation de Langevin :

$$\dot{x} = \phi(x) + \varepsilon\xi(t)$$

avec $\xi(t)dt = dW(t)$ où $W(t)$ et un processus de Wiener et $\xi(t)$ est un bruit blanc. La densité de probabilité $\rho(x,t)$ satisfait l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \phi(x)\rho = \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$$

avec la condition $\rho(0,t) = \rho(1,t)$ et la condition initiale $\rho(x,0) = \rho_0(x)$. La solution fondamentale $G(x,t;x_0,0)$ satisfait la même équation avec la condition initiale $G(x,0;x_0,0) = \delta(x-x_0)$. En conséquence, nous avons :

$$\rho(x,t) = \int_0^1 dx_0\; G(x,t;x_0,0)\;\rho_0(x_0)$$

Soit $G_\mathbb{R}$ la solution fondamentale sur $\mathbb{R}$, la solution correspondante sur le tore $\mathbb{T}$ est donnée par :

$$G_\epsilon(x,t;x_0,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_\mathbb{R}(x+n,t;x_0,0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(t)\,e^{2\pi\,i\,k\,x}$$

De simples calculs montrent que pour $\phi(x) = \Omega$ et $\phi(x) = Ax$, les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$C_k(t) = e^{-2\pi\,i\,k\,(x_0+\Omega t)}\;e^{-2\pi^2\,k^2\,\epsilon^2\,t} \quad \text{si} \quad \phi = \omega$$
$$C_k(t) = e^{-2\pi\,i\,k\;\;x_0\,e^{At}}\;e^{-2\pi^2\,k^2\,\epsilon^2\frac{e^{2At}-1}{2}} \quad \text{si} \quad \phi = Ax$$

Remarquons que pour $\epsilon = 0$, la solution fondamentale est $G_0(x,t;x_0,t) = \delta(x - S_t(x_0))$ où $S_t(x_0) = x_0 + \Omega t$ si $\phi = \Omega$ et $S_t(x_0) = x_0 e^{At}$ si $\phi = A\,x$.
Considérons deux observables régulières $f(x)$, $g(x)$, les corrélations et la fidélité sont définies par :

$$C(t) = \int_0^1 dx_0\,f(x_0)\int_0^1 dx\;G(x,t;x_0,0)\,g(x)$$
$$F(t) = \int_0^1 dx_0\,f(S_t(x_0))\int_0^1 dx\;G(x,t;x_0,0)\,g(x)$$

en développant f et g en séries de Fourier, et en notant

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{-k}\, e^{-2\pi^2\, k^2\, \sigma^2(t)} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} g_{k'} \int_0^1 dx_0\; e^{-2\pi\, i\, S_t(x_0)\,(k-k')}$$

La déviation quadratique moyenne du processus satisfaisant $\dot{\eta} = \Omega + \epsilon\xi$ est $\sigma^2(t) = \epsilon^2\, t$, alors que pour $\dot{\eta} = Ax + \epsilon\xi$, elle est donnée par

$$\sigma^2(t) = \epsilon^2\, \frac{e^{2At} - 1}{2A}$$

La dernière intégrale est $\delta_{k',k}$ si $S_t(x_0) = x_0 + \Omega t$ et $e^{i\theta}\, \theta^{-1} \sin\theta$ avec $\theta = \pi\, e^{At}\, (k' - k)$, qui approxime $\delta_{k',k}$ quand $t > 0$ grandit. Nous pouvons ainsi comparer ces résultats avec les translations du tore et l'application $qx \bmod 1$ en posant $\omega = \Omega\, \Delta t$, $\alpha = 1 + A\Delta t$ et $\epsilon_{map} = \epsilon\, \sqrt{\Delta t}$. Il y a une correspondance avec la fidélité des applications si nous posons $\Delta t \to 0$ and $n \to \infty$ tel que $n\Delta t = t$ soit fini.

7.3.3 Comparaison avec les résultats numériques

Nous allons comparer nos résultats analytiques avec ceux obtenus par des simulations numériques. Celles-ci sont essentiellement basées sur l'équation (7.9). En particulier, nous allons calculer la décroissance de la fidélité (voir aussi l'équation (7.7)), définie sur $X = [0, 1]$ par :

$$\delta F_n^\varepsilon = F_n^\varepsilon - 2^{-d} \left(\int_0^1 dx \psi_1(T^n(x)) \right) \left(\int_0^1 dx \int_{-1}^1 d\boldsymbol{\xi} \psi_2(T_{\varepsilon\xi_n} \circ \cdots \circ T_{\varepsilon\xi_1} x) \right) \tag{7.23}$$

où F_n^ε a été définie dans (7.9). Les intégrales sont calculées en choisissant au hasard N vecteurs $(x, \boldsymbol{\xi})$ dans $\mathbb{R}^{d(n+1)}$, i.e. en utilisant une méthode de Monte Carlo dont la précision est de l'ordre de $N^{-1/2}$. Nous comparons les résultats numériques et analytiques de la décroissance des corrélations pour les rotations (figure 7.1) et pour l'application $3x$ mod 1 (figure 7.2). Les graphes 7.3, 7.4, 7.5, et 7.6 comparent les résultats analytiques pour ρ_n^ε (Transformée de Fourier inverse des formules (7.21), (7.22)) avec les simulations numériques correspondantes (i.e. avec une étude statistique de Monte Carlo de l'erreur Δ_n^ε pour plusieurs réalisations aléatoires de la dynamique perturbée $T_{\boldsymbol{\omega}}^n$; une étude dans laquelle la densité de probabilité ρ_n^ε est approchée par la probabilité de l'erreur Δ_n^ε sur un intervalle discrétisé de longueur Δx), dans les deux cas, l'erreur est de l'ordre de $N^{-1/2}$.
Ces graphes montrent clairement que la transition entre la condition initiale $\rho_0^\varepsilon(x) = \delta(x)$ et la distribution (triangulaire) asymptotique est un processus graduel pour les rotations dont l'échelle de temps est de l'ordre de ε^{-2}, alors que pour l'application chaotique $3x$ mod 1 nous voyons une transition très précise débutant aux alentours de $n_* = -\log_q \varepsilon$ (voir eq. 7.18). Dans la région de transition, la pente est indépendante de ε mais est liée à la vitesse de divergence de deux orbites proches, c'est à dire au taux de décorrélation λ, ou à l'exposant de Lyapunov maximal Λ (pour beaucoup de systèmes $\lambda = e^\Lambda$). En accord avec l'équation (7.19), n_* est doublé, passant de $\varepsilon = 10^{-4}$ à $\varepsilon = 10^{-8}$.
Pour $n \ll n_*$, la distribution de l'erreur peut être approximer par une fonction δ, c'est à dire que le système perturbé peut être confondu avec le système initial. Remarquons que $\rho_n^\varepsilon(x)$ est la transformée de Fourier de $\varphi_n^\varepsilon(u)$, i.e la fidélité calculée avec $\psi_1 = \psi_2^* = e^{iux}$. La comparaison des résultats dans les graphes 7.1, 7.2 et celle dans 7.3-7.6 suggère (comme nous l'avons vérifié en étudiant différentes fonctions tests) que la décroissance de la fidélité

ne dépend que très faiblement des fonctions ψ_1 et ψ_2. Ainsi, l'analyse d'une seule fonction test (la plus facilement calculable) fournit des informations générales sur l'évolution de $\rho_n^\varepsilon(x)$.

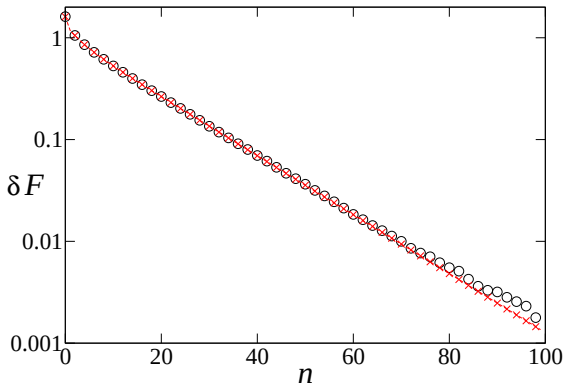


FIGURE 7.1 – Comparaison entre l'eq. (7.13) et les intégrales de Monte Carlo pour la décroissance de la fidélité (7.23) dans les rotations, $\varepsilon = 0.1$ (résultats analytiques : pointillés rouges et croix ; Monte Carlo : cercles). $N = 10^7$ points dans la méthode de Monte Carlo. $\psi_1 = \psi_2^*$ définies par les coeff. de Fourier $\psi_k = k^{-1}$, tronquées à $k = 30$.

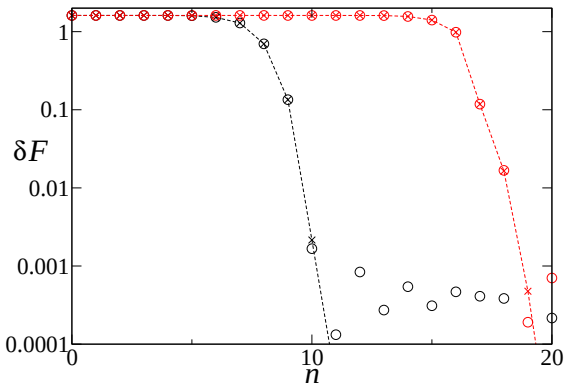


FIGURE 7.2 – Comparaison entre les résultats analytiques eq. (7.16) et les intégrales de Monte Carlo pour la décroissance de la fidélité (eq. 7.23) dans $3x$ mod 1. $\varepsilon = 10^{-4}$ en noir et $\varepsilon = 10^{-8}$ en rouge (analytiques : pointillés et croix ; Monte Carlo : cercles). $N = 10^7$. $\psi_1 = \psi_2^*$ définies par $\psi_k = k^{-1}$, tronquées à $k = 30$.

7.4 EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

Dans cette section nous allons appliquer la théorie développée plus haut à différents systèmes dynamiques ; pour la plupart d'entre eux, nous ne savons pas si toutes les conditions requises à l'appartenance à la classe $\mathcal{M}$ sont vérifiées. Nous procédons donc au calcul numérique de la distribution de l'erreur ρ_n^ε en utilisant un bruit additif et les observables de projections, c'est-à-dire : $f(x) = x$ pour les applications unidimensionnelles et $f(\mathbf{x}) = x$, $f(\mathbf{x}) = y$ pour les bidimensionnelles. Remarquons que lorsque x est la coordonnée paramétrant un sous-espace vectoriel S de $\mathbb{R}$, alors la différence $f(x_1) - f(x_2)$, $x_1, x_2 \in S$, est

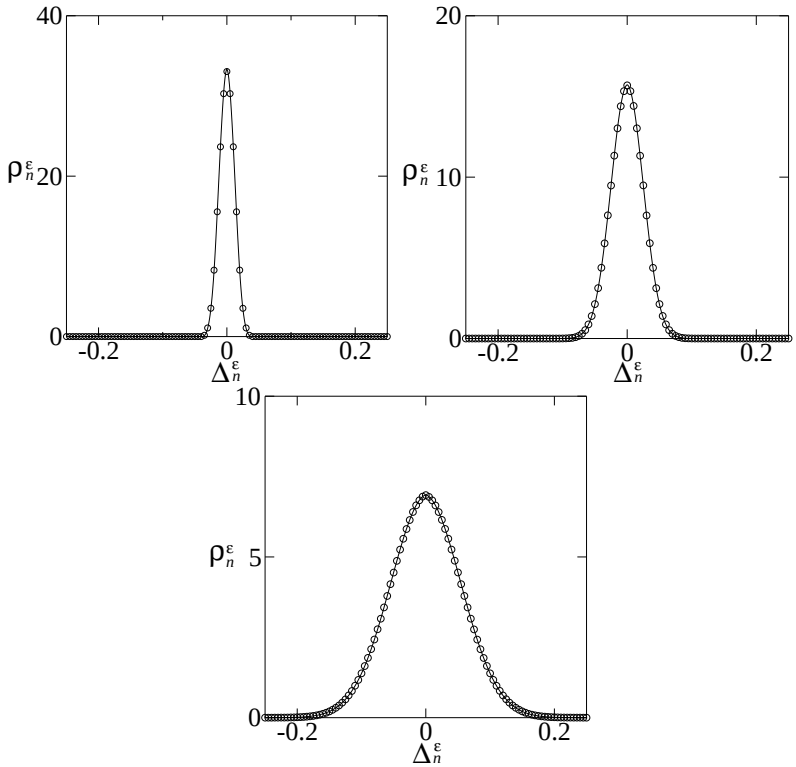


FIGURE 7.3 – Comparaison pour ρ_n^ε dans les rotations, Transformée de Fourier de eq. (7.21), (ligne continue) et méthode de Monte Carlo (cercles), $\varepsilon = 10^{-2}$. Gauche : $n = 4$; centre : $n = 19$; droite : $n = 99$.

la distance (à un signe près) entre x_1 et x_2. Ainsi dans ce cas l'erreur asymptotique donne la distribution de la distance (relative) entre deux points appartenant respectivement à la vraie orbite et à l'orbite perturbée.
Les intégrales par rapport à la mesure SRB et à la mesure stationnaire sont calculées en utilisant les limites faibles de la mesure de Lebesgue. Contrairement à ce qui précède, ces mesures limites ne coïncident pas avec la mesure de Lebesgue. Il y a alors deux cas intéressants à considérer :

- ces mesures sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est le cas pour les applications avec des points fixes neutres et pour l'application logistique, définies sur l'intervalle.

- ces mesures sont singulières par rapport à la mesure de Lebesgue, (rappelons que sous l'hypothèse **H2**, la mesure stationnaire est toujours absolument continue). C'est le cas de l'application de Hénon ou de l'application du boulanger. L'attracteur de la dynamique a une structure fractale, qui peut être localement décrite comme le produit d'une variété lisse avec un ensemble de Cantor ; ceci arrive par exemple pour l'attracteur de Hénon ou pour l'ensemble invariant de la transformation du boulanger.

Lorsque nous travaillons avec des dynamiques non-hyperboliques qui admettent une mesure invariante absolument continue dont la densité est sommable mais pas nécessairement bornée (c'est le cas de l'application intermittente ou des applications quadratiques), ou bien lorsque nous travaillons avec des mesures singulières comme pour l'application de

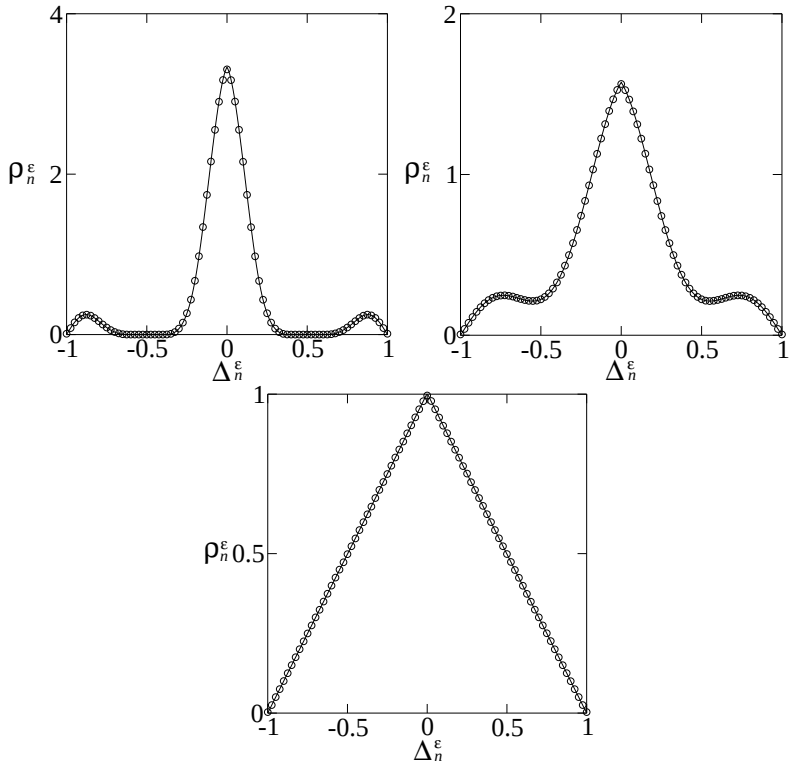


FIGURE 7.4 – Comparaison pour ρ_n^ε dans les rotations, Transformée de Fourier de eq. (7.21), (ligne continue) et méthode de Monte Carlo (cercles), $\varepsilon = 0.1$. Gauche : $n = 4$; centre : $n = 19$; droite : $n = 99$. Comparer les temps de transition avec 7.1.

Hénon ou du boulanger, nous ne sommes plus certains que la fonction caractéristique $\varphi_\infty^\varepsilon$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Rappelons que c'est une condition suffisante pour appliquer la formule d'inversion de Lévy (7.10 et voir en appendice pour des détails).

Les analyses numériques se déroulent en quatre étapes :

1. **Décroissance de la fidélité pour une fonction test.** Sur la base des résultats obtenus pour les translations du tore et pour l'application qx mod 1, nous étudions la décroissance de la fidélité (eq. 7.23) pour la fonction test *identité*, en utilisant une méthode de Monte Carlo pour calculer les intégrales. Cette analyse doit nous indiquer pour quelles valeurs de n la transition de $\rho_0^\varepsilon = \delta(x)$ au régime asymptotique ρ_∞^ε se passe.
2. **Calcul de ρ_n^ε pour des valeurs significatives de n.** Sur la base de l'analyse précédente, nous menons, une fois encore avec une méthode de Monte Carlo, une analyse statistique de l'erreur Δ_n^ε, dans le but d'estimer sa distribution ρ_n^ε et de vérifier la validité des prévisions faites au point précédent.
3. **Limite $n \to \infty$.** Les deux points précédents nous permettent d'identifier une valeur $\overline{n}(\varepsilon)$ à partir de laquelle ρ_n^ε a atteint sa valeur asymptotique. Nous calculons alors avec une grande précision ρ_∞^ε comme la moyenne $\overline{\rho_{n'}^\varepsilon}$ pour plusieurs valeurs $n' > \overline{n}$
4. **Vérifier la validité de l'équation (7.1).** Nous calculons finalement $\varphi_\infty^\varepsilon$ grâce à (7.1) et vérifions que sa transformée de Fourier coïncide avec ρ_∞^ε comme prédit dans le théorème 7.2.4

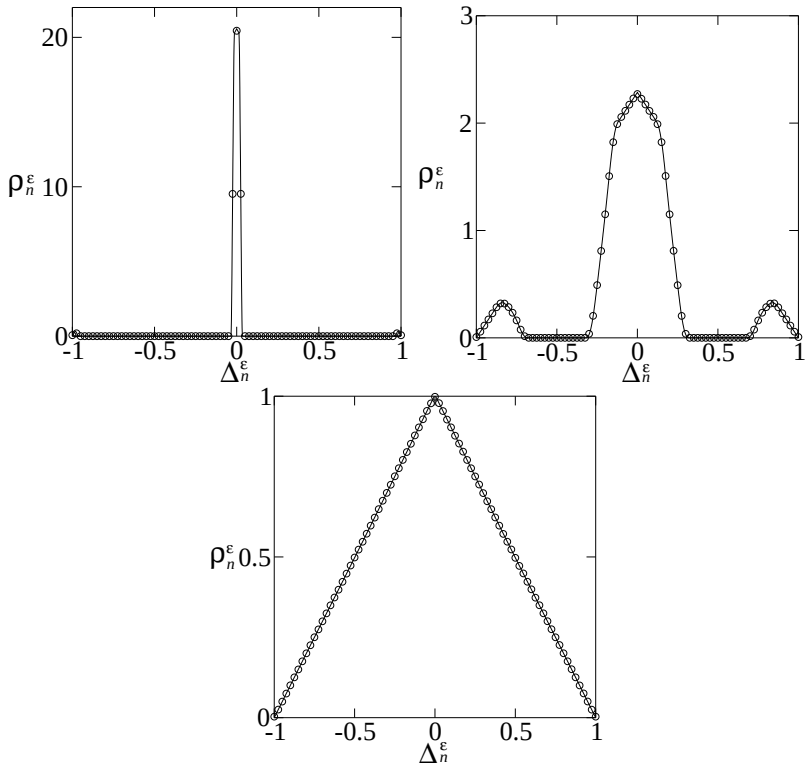


FIGURE 7.5 – Comparaison pour ρ_n^ε dans $3x$ mod 1, Transformée de Fourier de eq. (7.22), (ligne continue) et Monte Carlo (cercles), $\varepsilon = 10^{-4}$. Gauche : $n = 6$; centre : $n = 8$; droite : $n = 10$. Comparer les temps de transition avec 7.2.

REMARQUE 7.4.1 *Lorsque nous travaillons avec des simulations numériques, nous n'avons pas accès à l'erreur $\Delta_n^\varepsilon = f(T^n x) - f(T_{\boldsymbol{\omega}}^n x)$. En fait T et chaque T_ω sont affectées par les erreurs d'arrondis de l'ordinateur qui introduit à chaque étape une erreur ε_{num}. L'orbite T^n doit ainsi être remplacée par l'orbite aléatoire $T_{\boldsymbol{\omega}'}^n$, où les $\omega_l^{'}$ sont maintenant des variables aléatoires sur un espace $\Omega_{\varepsilon_{num}}(0)$ autour de la composante non-perturbée 0. De la même façon, l'orbite perturbée $T_{\boldsymbol{\omega}}^n$ doit être remplacée par une nouvelle orbite aléatoire $T_{\boldsymbol{\omega}''}^n$, où les composantes $\omega_l^{''}$ sont des variables aléatoires sur l'espace $\Omega_{\varepsilon_{num}}(\omega_l)$ autour de ω_l. Posons :*

$$\Delta_n^{\varepsilon,\tilde{\varepsilon}} = f(T_{\boldsymbol{\omega}'}^n x) - f(T_{\boldsymbol{\omega}''}^n x)$$

En comparant (lorsque c'est possible) $\Delta_n^{\varepsilon,\tilde{\varepsilon}}$ avec les estimations analytiques de Δ_n^ε, ou bien en laissant ε_{num} tendre vers 0, nous pouvons vérifier que si $\varepsilon \gg \varepsilon_{num}$, il y a une échelle de temps, pertinente pour l'étude de Δ_n^ε, avant laquelle l'erreur additionnelle $\Delta_n^\varepsilon - \Delta_n^{\varepsilon,\varepsilon_{num}}$ est négligeable devant Δ_n^ε. Notons que la convergence en loi du processus $\Delta_n^{\varepsilon,\varepsilon_{num}}$ est assurée par la généralisation du théorème 7.2.2 donnée dans la remarque 7.2.3. Soulignons enfin que nous sommes en accord avec Sauer [102] lorsqu'il tente de développer une théorie des vraies orbites et des orbites perturbées et qu'il vérifie les prévisions numériquement puisqu'il écrit "We computed the trajectory average in high precision (used to represent the 'true' value) for a long trajectory, and compared it to the trajectory computed with one-step random error of size ε".

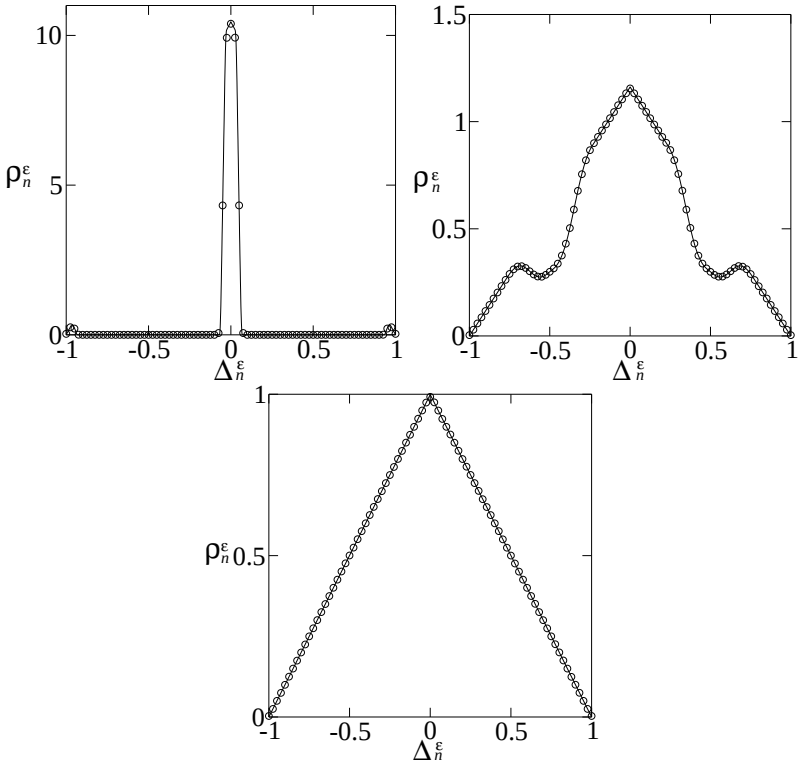


FIGURE 7.6 – Comparaison pour ρ_n^ε dans $3x$ mod 1, Transformée de Fourier de eq. (7.22), (ligne continue) et Monte Carlo (cercles), $\varepsilon = 10^{-8}$. Gauche $n = 15$; Centre : $n = 17$; Droite : $n = 19$. Comparer les temps de transition avec 7.2.

7.4.1 Application de Hénon

La dynamique de Hénon est définie par l'application bidimensionnelle suivante :

$$T\mathbf{x} = \begin{cases} x' & = y + 1 - ax^2 \\ y' & = bx \end{cases} \tag{7.24}$$

Nous considérons les valeurs canoniques $a = 1.4$ et $b = 0.3$, pour lesquelles il est connu que l'application est chaotique, au moins numériquement. Rappelons que Benedicks et Carleson [15] ont prouvé qu'il existe un ensemble S de mesure de Lebesgue positive dans l'espace des paramètres tel que l'application de Hénon possède un attracteur étrange pour tout $(a, b) \in S$. La valeur de b est très petite et l'attracteur vit dans un petit voisinage de l'axe des x. Pour ces valeurs de a et b on peut montrer qu'il existe une mesure SRB et une mesure stationnaire pour un bruit additif, qui est supportée dans le bassin d'attraction et qui converge vers la mesure SRB lorsque l'amplitude du bruit tend vers zéro [31]. Il n'a toujours pas été prouvé que ces résultats peuvent être étendus aux valeurs *historiques* que nous considérons ici. Revenons à ce cas. Un point initial (x_0, y_0) donné s'approchera de l'attracteur étrange ou bien divergera vers l'infini. Nous étudions un sous-ensemble connexe D inclus dans le bassin de l'attracteur et nous définissons sur celui-ci l'application perturbée :

$$T_{\varepsilon\boldsymbol{\xi}}\mathbf{x} = \begin{cases} x' & = y + 1 - ax^2 + \varepsilon\xi_x \\ y' & = bx + \varepsilon\xi_y \end{cases} \tag{7.25}$$

Nous avons vérifié que $D = \{(x, y)\ ;\ -1 < x < 1 \ \text{ et } \ -1/2 < y < 1/4\}$ était stable pour de petites perturbations (c'est-à-dire que le point (x_0, y_0) ne diverge pas vers l'infini sous l'action de T_ε pour des valeurs ε assez petites).
Nous avons étudié la décroissance de la fidélité (eq. 7.23) pour les observables x et y. Après un état transient qui dépend de la définition de D, la fidélité atteint un plateau (figure 7.7) puis suit une phase de décroissance dont la vitesse ne dépend pas de ε. La dépendance en ε apparait au début de la phase de décroissance (à la fin du plateau). Appelons la valeur de n à laquelle cette décroissance débute : n_*. Puisque la dépendance en ε est qualitativement compatible avec l'équation (7.19). La taille du plateau, n_* et la loi de décroissance sont indépendants du choix de D, comme les propriétés ergodiques de l'application pouvaient le laisser espérer. Le comportement de l'observable y est presque le même que celui de x. Nous avons vérifié avec une bonne précision (figure 7.8) que la transition de $\rho_0^\varepsilon = \delta(x)$

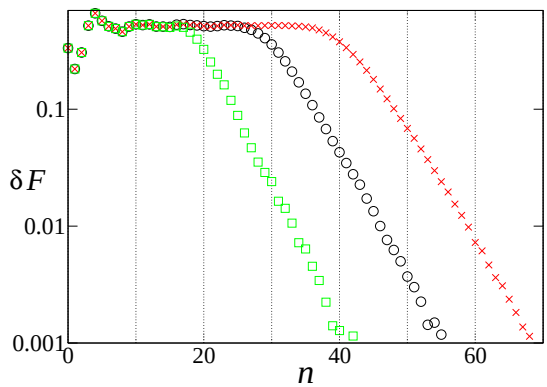


FIGURE 7.7 – Décroissance de la fidélité pour l'application de Hénon. Monte Carlo avec $N = 10^7$. Vert, carrés : $\varepsilon = 10^{-4}$. Noir, cercles : $\varepsilon = 10^{-6}$. Rouge, croix : $\varepsilon = 10^{-8}$.

vers l'asymptotique ρ_∞^ε commence au début de la phase de décroissance de la fidélité (par exemple autour de $n_* \approx 35$ dans le graphe 7.7 pour $\varepsilon = 10^{-8}$). C'est l'échelle de temps en dessous de laquelle on peut supposer que le système perturbé est équivalent au système initial. Nous moyennons finalement ρ_n^ε sur un grand nombre de $n > n_*$ pour obtenir ρ_∞^ε (figure 7.10) et nous vérifions avec de bons résultats la validité de l'équation (7.1).

7.4.2 L'application du boulanger

L'application du boulanger est définie par $T\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, où :

$$\begin{aligned} x' &= \begin{cases} \gamma_a x \bmod 1 & \text{si } y < \alpha \\ \dfrac{1}{2} + \gamma_b x \bmod 1 & \text{si } y \geq \alpha \end{cases} \\ y' &= \begin{cases} \dfrac{y}{\alpha} \bmod 1 & \text{si } y < \alpha \\ \dfrac{y-\alpha}{1-\alpha} \bmod 1 & \text{si } y > \alpha \end{cases} \end{aligned} \tag{7.26}$$

et sa version perturbée par :

$$T_\varepsilon \mathbf{x} = (x' + \varepsilon\xi_x \bmod 1, y' + \varepsilon\xi_y \bmod 1)$$

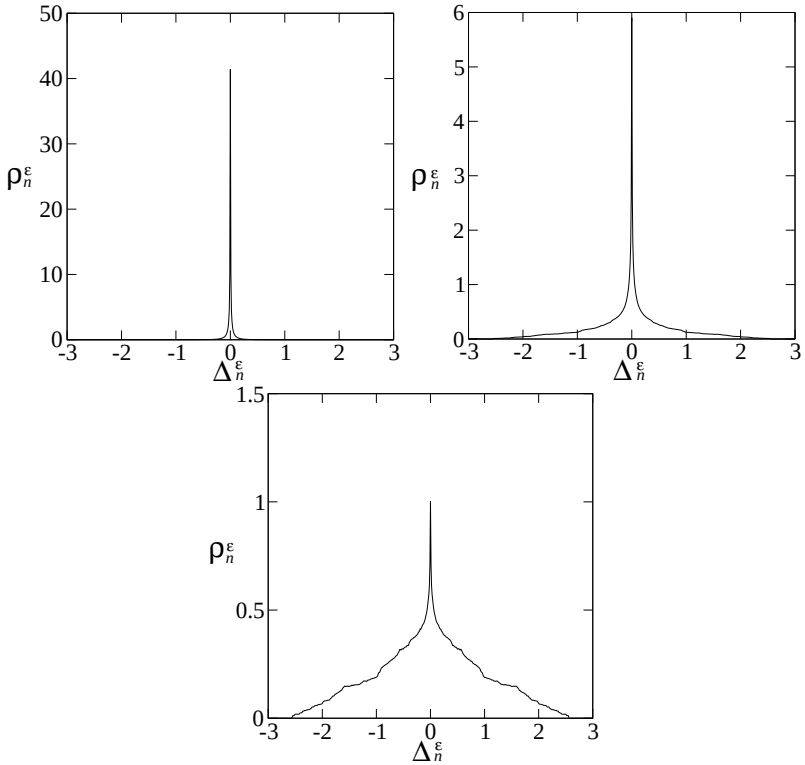


FIGURE 7.8 – ρ_n^ε pour l'application de Hénon, $\varepsilon = 10^{-8}$, $f(\mathbf{x}) = x$. Gauche : $n = 34$; centre : $n = 44$; droite : $n = 54$. Monte Carlo avec $N = 10^8$points initiaux et une discrétisation de l'espace avec $\Delta x = 0.01$

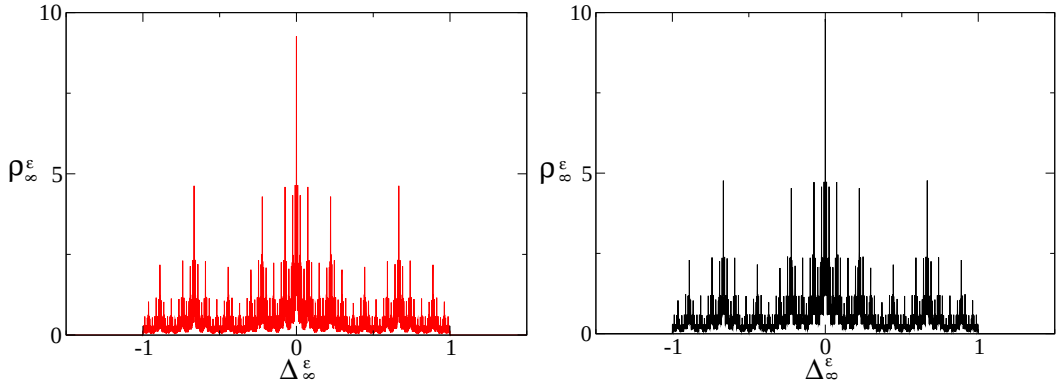


FIGURE 7.9 – ρ_∞^ε pour l'application de Hénon avec $\varepsilon = 10^{-8}$, $f(\mathbf{x}) = x$, donné par la moyenne de 10^6 valeurs de ρ_n^ε, chacune obtenue avec une méthode de Monte Carlo à 10^3 points initiaux ($N = 10^9$)

En prenant :

$$\gamma_a = \frac{1}{5} \quad ; \quad \gamma_b = \frac{1}{4} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

nous avons étudié la décroissance de la fidélité pour les observables de position le long des axes : x et y (figure 7.11). Alors que pour la décroissance de la fidélité pour $\psi = y$

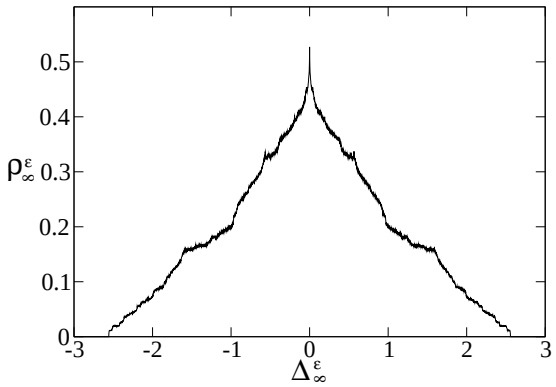


FIGURE 7.10 – $\rho^{\varepsilon}_{\infty}$ pour Hénon avec $\varepsilon = 10^{-8}$, $f(\mathbf{x}) = x$, calculée en moyennant 10^6 valeurs de ρ^{ε}_{n}, chacune obtenue avec une méthode de Monte Carlo à 10^3 points ($N = 10^9$) et $\Delta x = 10^{-3}$.

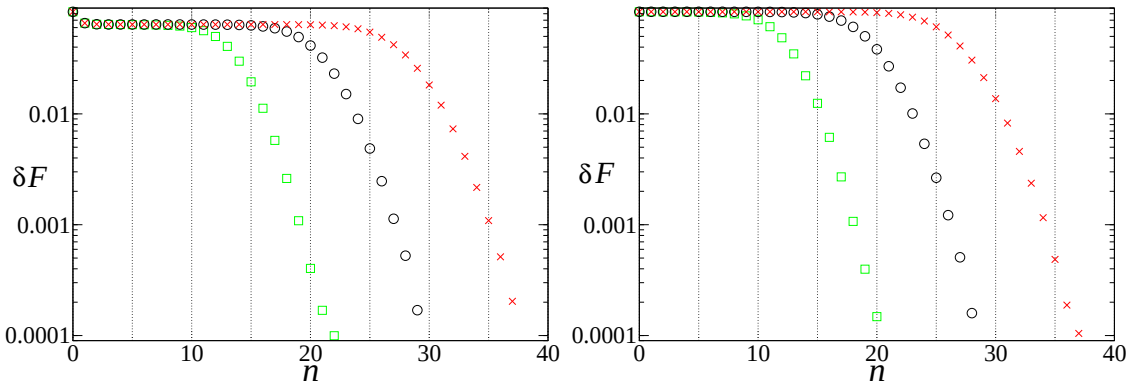


FIGURE 7.11 – Décroissance de la fidélité pour l'application du boulanger. Monte Carlo avec $N = 10^7$, observable x. Vert, carrés : $\varepsilon = 10^{-4}$. Noir, cercles : $\varepsilon = 10^{-6}$. Rouge, croix : $\varepsilon = 10^{-8}$. Gauche : observable x. Droite : observable y.

on voit apparaitre un plateau puis une phase de décroissance ; pour $\psi = x$ le plateau est précédé par une phase de décroissance de la valeur de la fidélité due à la convergence vers la mesure invariante. La différence entre les premières étapes pour y et x provient des natures différentes des mesures invariantes : uniforme pour y et supportée sur un ensemble de Cantor pour x. Néanmoins, la décroissance de la fidélité débute (fin du plateau) à peu près au même moment n_* pour les deux observables ($n_* \approx 20$ pour $\varepsilon = 10^{-8}$). Encore une fois, la dépendance en ε de n_* est en accord avec l'équation (7.19), elle est une nouvelle fois suivie d'une phase de décroissance indépendante de ε. Alors que pour $f(\mathbf{x}) = y$, $\rho^{\varepsilon}_{\infty}$ est simplement une loi triangulaire, comme nous l'avons vu pour l'identité et les applications de Bernoulli, pour l'observable x nous avons une structure de Cantor que l'on peut mieux apprécier en augmentant la précision du calcul (figure 7.12). Nous avons également vérifié que l'équation (7.1) s'appliquait pour ce système. Dans le but de comprendre la forme irrégulière de la densité de probabilité pour l'observable x, nous modifions l'application du boulanger de manière à obtenir la structure du Cantor ternaire sur l'axe des x. Pour cela,

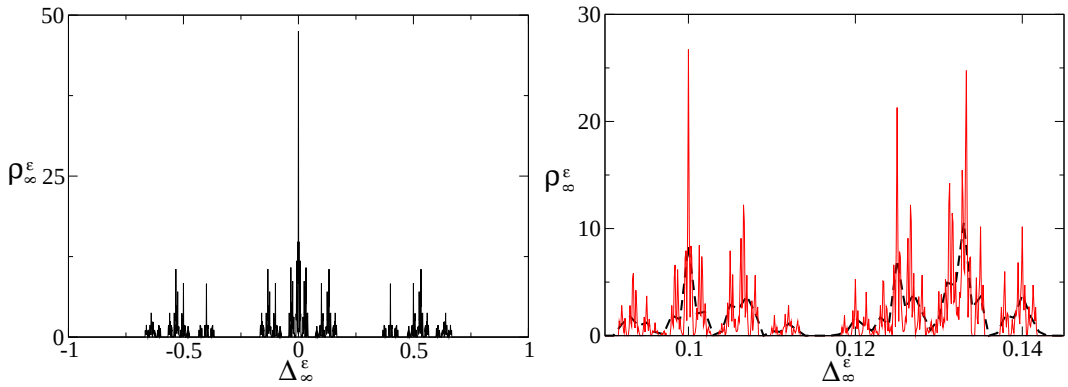


FIGURE 7.12 – Gauche : $\rho^{\varepsilon}_{\infty}$ pour l'application du boulanger, $\varepsilon = 10^{-8}$, observable x. Monte Carlo avec $N = 10^9$ et $\Delta x = 0.001$. Droite : détail de $\rho^{\varepsilon}_{\infty}$ pour l'application du boulanger, $\varepsilon = 10^{-8}$, x. Noir, pointillés : Monte Carlo avec $N = 10^9$ et $\Delta x = 0.001$. Rouge, continue : Monte Carlo avec $N = 10^{10}$ et $\Delta x = 10^{-4}$.

nous écrivons l'application comme :

$$x' = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } y < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3} & \text{si } y \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2y & \text{si } y < \dfrac{1}{2} \\ 2y - 1 & \text{si } y \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{7.27}$$

La mesure SRB sera le produit direct d'une mesure absolument continue le long de l'axe des y et d'une mesure singulière de Cantor le long de celui des x [19]. La dernière est construite comme la limite faible d'une suite de mesures donnant le même poids ($=(1/2)^n$) aux 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} que contient l'ensemble de Cantor, pour tout n. La transformée de Fourier de cette mesure, appelons la μ_x, est connue [113]. Si nous considérons l'observable x, la fonction caractéristique de l'erreur asymptotique sera :

$$\int e^{ixu} d\mu_x \overline{\int e^{ixu} d\mu_\varepsilon}$$

Supposons que la mesure stationnaire soit proche de la mesure SRB, ce qui est le cas pour l'application du boulanger puisqu'elle est uniformément hyperbolique, qu'elle appartient à la classe $\mathcal{M}$ et qu'elle est stochastiquement stable. Alors pour tout ε assez petit, nous pouvons supposer que la seconde intégrale du produit précédent est prise par rapport à μ_x. Notre fonction caractéristique est alors :

$$\varphi_\infty(u) = |\int e^{iux} d\mu_x|^2$$

Cette dernière peut être calculée : Zygmund [113] donne (voir aussi [20]) :

$$\varphi_\infty(u) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2[u3^{-k}] \tag{7.28}$$

Zygmund a également prouvé que $\varphi_\infty(u)$ n'était pas sommable. Malgré cela, nous calculons numériquement l'intégrale impropre (7.10) et nous obtenons une excellente correspondance

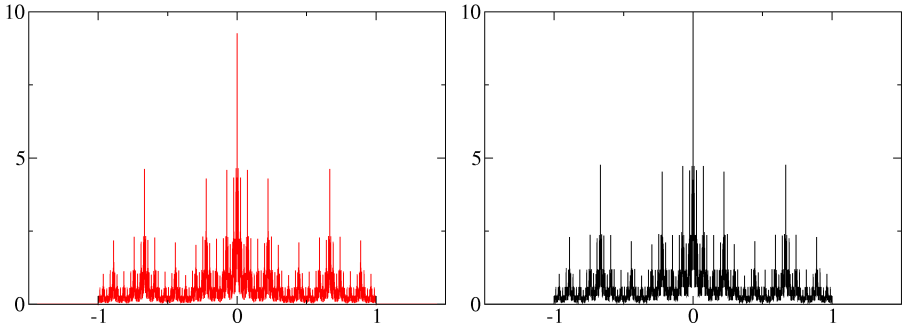


FIGURE 7.13 – ρ_∞^ε pour l'application du boulanger modifiée telle qu'obtenue dans (7.28) (gauche) et par la méthode de Monte Carlo (droite).

avec les résultats numériques (figure 7.13). Précisons que même si pour toute discrétisation spatiale Δx nous pouvons calculer numériquement, en obtenant le même résultat, la distribution ρ_ε^n avec trois méthodes différentes (statistique de Monte Carlo statistics des erreurs tombant dans l'intervalle $[x, x+\Delta x]$, transformée de Fourier inverse de l'équation 7.1, transformée de Fourier inverse de l'équation (7.28)), nous ne pouvons pas être certains que ce processus converge dans la limite $\Delta x \to 0$, puisque les transformées de Fourier inverses peuvent être mal définies (voir la discussion au début de cette section, eq. (7.35), et dans la section 7.4.3). Figure 7.12 montre clairement que pour des valeurs numériquement accessibles de Δx, le processus n'a toujours pas convergé.

7.4.3 L'application intermittente

L'application intermittente sur le tore est définie par :

$$T_\alpha x = \begin{cases} x + 2^\alpha x^{\alpha+1} \text{mod } 1 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ x - 2^\alpha (1-x)^{\alpha+1} \text{mod } 1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} \tag{7.29}$$

avec $0 < \alpha < 1$. Plusieurs auteurs ont montré que la décroissance des corrélations suit une loi puissance de la forme $n^{1-\frac{1}{\alpha}}$ [83, 112, 65]. Ce taux est optimal dans le sens où il est aussi une borne inférieure pour une grande classe d'observables s'annulant dans un voisinage du point fixe neutre [101, 48]. La densité d de la mesure invariante absolument continue a une singularité au voisinage de zéro du type $x^{-\alpha}$. La densité de la mesure stationnaire d_ε vérifie l'estimation L^1_m [79] :

$$\|d - d_\varepsilon\|_{L^1_m} \sim \varepsilon^{1-\alpha}$$

Il est intéressant de remarquer que la question de la stabilité stochastique pour cette application n'est pas encore complètement comprise. Les articles [4, 21] montrent une convergence faible de la mesure stationnaire (absolument continue) pour un bruit additif vers une combinaison convexe de la mesure invariante et d'une masse de Dirac supportée par le point fixe neutre. La présence de cette mesure atomique à la limite est surprenante, elle empêche toute convergence forte (au sens de la convergence dans L^1).
Nos simulations de Monte Carlo sur la décroissance de la fidélité sont compatibles avec la prévision analytique d'une loi puissance, même si un calcul exact de l'exposant de cette loi n'est pas possible numériquement puisque la convergence vers la loi prédite est très lente en n. La décroissance de la fidélité pour cette application présente une phase de croissance (qui dépend de α et due à la convergence vers la mesure asymptotique), un début de

décroissance indépendant de α $n_*(\varepsilon)$ (fin du plateau) dont la dépendance en ε est qualitativement en accord avec l'équation (7.19), suivi d'une décroissance indépendante de α et ε (figure 7.14). Nos résultats montrent que dans la limite $\varepsilon \to 0$ la décroissance est compatible avec une loi puissance (l'exposant semble plus grand que celui de la décroissance des corrélations), alors que pour les grandes valeurs de ε la loi de décroissance semble être au moins exponentielle. Nous pensons que la loi de décroissance est de la forme $n^{-b} f(\varepsilon, n)$, où $f(\varepsilon, n)$ doit être bornée par la loi de décroissance pour la translation et l'identité, $e^{-\alpha\varepsilon^2 n}$. Nous avons vérifié que n_* coïncide avec le début de la transition de la fonction delta vers

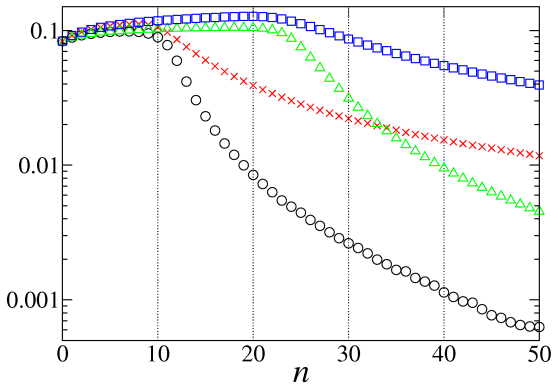


FIGURE 7.14 – Décroissance de la fidélité pour l'application intermittente, Monte Carlo avec $N = 10^7$. Noir, cercles : $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.5$. Rouge, croix : $\varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 0.99$. Vert, triangles : $\varepsilon = 10^{-8}$, $\alpha = 0.5$. Bleu, carrés : $\varepsilon = 10^{-8}$, $\alpha = 0.99$.

la distribution de l'erreur asymptotique (non prouvé) et que l'équation (7.1) était vraie pour ρ_∞^ε (montré par le graphe 7.15). Nous pensons que la décroissance précédente est aussi vérifiée pour les corrélations aléatoires moyennées (*annealed*) données par le terme de gauche de (7.5) : c'est un problème théorique à résoudre.
L'équation (7.35) prédit une divergence pour la distribution asymptotique ρ_∞^ε en 0 lorsque $\alpha > 1/2$. Nous avons en effet vérifié que la taille de $\rho_\infty^\varepsilon(0)$, calculée numériquement en utilisant une discrétisation spatiale Δx, augmente, pour des valeurs numériquement accessibles de Δx, au moins comme $\log(\Delta x)$

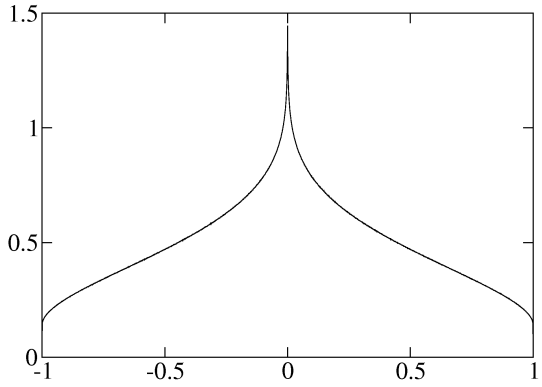


FIGURE 7.15 – ρ_∞^ε pour l'application intermittente, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-8}$. Monte Carlo avec $N = 10^9$ et $\Delta x = 0.001$

7.4.4 Application quadratique

Dans cette section nous considérons l'application quadratique :

$$T_a x = a - x^2 \quad ; \quad a > 0$$

L'image par T_a de $[-\sqrt{2a}, \sqrt{2a}]$ est $[-a, a]$ et donc pour $a < 2$ nous pouvons définir l'application perturbée

$$T_{a,\varepsilon\xi} x = a - x^2 + \varepsilon\xi$$

de $[-\sqrt{2a}, \sqrt{2a}]$ dans lui-même pourvu que $\varepsilon < \sqrt{2a} - a$. Cette classe d'applications a été étudiée dans [10] du point de vue de la stabilité stochastique. Tout d'abord, les auteurs ont restreint le choix du paramètre a à un ensemble de mesure de Lebesgue positive pour lequel il existe une mesure invariante absolument continue de densité d (théorème de Jakobson [67]). Pour ces valeurs, l'application vérifie aussi les conditions de [15] qui sont importantes pour établir les résultats perturbatifs pour un bruit additif, à savoir :

[(i)]l'existence d'une mesure stationnaire absolument continue de densité d_ε qui converge dans L^1 vers d (stabilité), la décroissance exponentielle des corrélations pour l'application initiale et pour le système perturbé avec un taux de décroissance uniformément borné par rapport au bruit (pourvu que ε soit assez petit), comme dans les formules (7.3) et (7.5).

La dernière propriété nous permet d'appliquer notre premier théorème sur la fidélité et d'obtenir en particulier une erreur comme dans (7.11) pour la vitesse de convergence vers la fonction caractéristique de l'erreur asymptotique. Grâce à une analyse des bifurcations nous avons vérifié que l'application était chaotique dans un voisinage de $a = 1.6$ et ainsi nous avons choisi cette valeur pour notre étude.

Après une phase transiente (due à la différence entre la distribution uniforme que nous utilisons comme condition initiale pour notre méthode de Monte Carlo et la mesure invariante de cette application), il y a un plateau se terminant au temps n_*, dont la dépendance en ε est qualitativement en accord avec (7.19), figure 7.16. A n_* correspond le début de la transition de la distribution de l'erreur (non prouvé). La distribution de l'erreur asymptotique est illustrée sur le graphe 7.17 (nous avons vérifié que les mêmes résultats pouvaient être obtenus avec l'équation (7.1)).

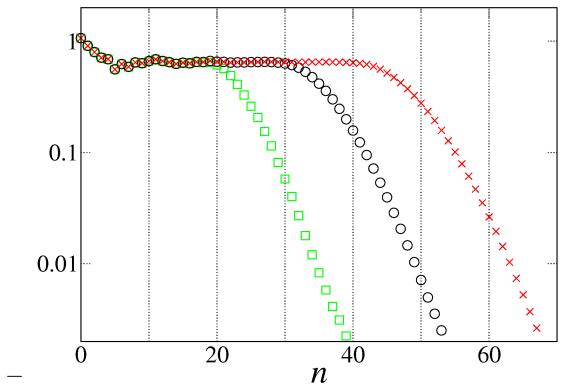


FIGURE 7.16 – Décroissance de la fidélité pour l'application quadratique, $a = 1.6$, Monte Carlo avec $N = 10^8$. Vert, carrés : $\varepsilon = 10^{-4}$. Noir, cercles : $\varepsilon = 10^{-6}$. Rouge, croix : $\varepsilon = 10^{-8}$.

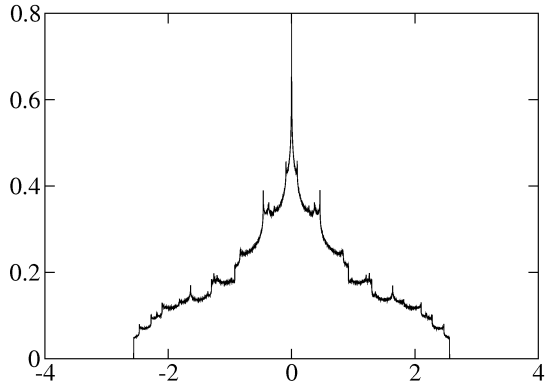


FIGURE 7.17 – ρ_∞^ε pour l'application quadratique, $a = 1.6$, $\varepsilon = 10^{-8}$. Monte Carlo avec $N = 10^9$ et $\Delta x = 0.001$.

7.4.5 Application standard

Nous étudions l'application standard définie par :

$$T\mathbf{x} = \begin{cases} y' & = y + K\sin(x) \\ x' & = x + y' \end{cases} \tag{7.30}$$

Nous analysons son comportement pour trois valeurs de K :
- $K = 10$: comportement chaotique,
- $K = 10^{-2}$: comportement régulier,
- $K = 2$: comportement intermédiaire.

$K = 10$

Le cas chaotique peut facilement être compris en utilisant la théorie développée pour les autres applications. Pour la décroissance de la fidélité nous avons un plateau, suivi par le début de la décroissance au temps n_* qualitativement en accord avec l'équation (7.19). n_* correspond au début de l'état transient de la fonction d'erreur. L'erreur asymptotique suit une loi triangulaire et l'équation (7.1) s'applique (résultats non prouvés).

$K = 10^{-2}$

Pour le régime régulier il n'y a pas de début précis pour la décroissance mais simplement une décroissance dépendant de ε. L'erreur asymptotique est atteinte lorsque la fidélité atteint une valeur plus faible que sa valeur initiale ; elle est triangulaire et l'équation (7.1) s'applique. La décroissance pour y suit la même loi que les rotations du cercle alors que la décroissance en x est plus rapide.

$K = 2$

Dans ce cas, la dynamique présente à la fois des caractéristiques chaotiques et régulières. La décroissance de la fidélité présente un plateau se terminant au temps n_*, en accord avec l'équation (7.19). Cette phase est suivie par une rapide phase de décroissance, presque indépendante de ε, puis par une phase plus lente dépendant de ε T (figure 7.18). Après la rapide phase de décroissance nous atteignons l'erreur asymptotique uniquement pour

la composante chaotique alors que si ε est assez petit nous avons toujours une fonction delta sur la composante régulière (figure 7.19). Pour les petites valeurs de ε nous pouvons considérer ceci comme un état *métastable* de l'erreur puisqu'elle ne change pas pendant une durée bien plus longue que la décroissance de la composante chaotique. L'étude la phase de

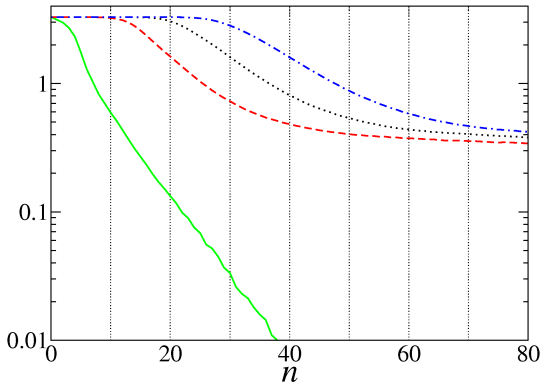


FIGURE 7.18 – Décroissance de la fidélité pour l'application standard, observable x, $K = 2$, Monte Carlo avec $N = 10^7$. Vert : $\varepsilon = 10^{-1}$. Rouge, pointillés : $\varepsilon = 10^{-4}$. Noir, points : $\varepsilon = 10^{-6}$. Bleu, points-pointillés : $\varepsilon = 10^{-8}$.

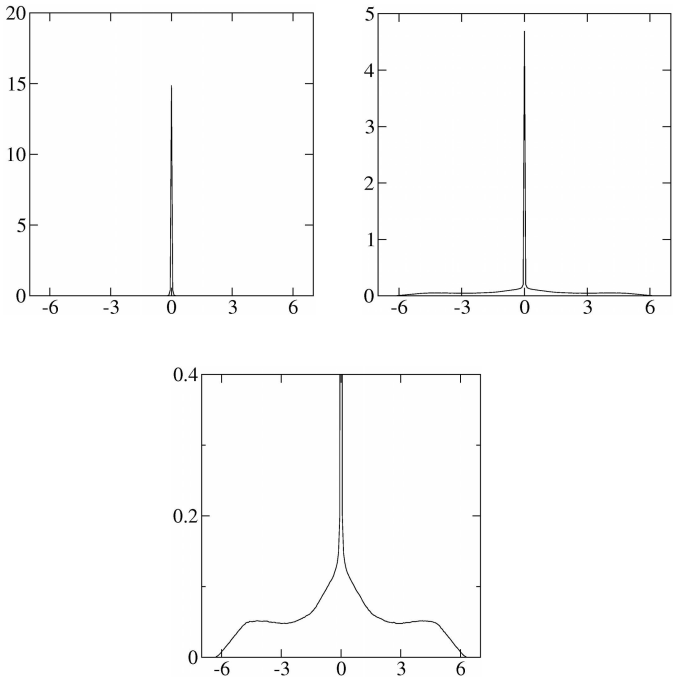


FIGURE 7.19 – ρ_n^ε pour l'application standard, $K = 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$, observable x. Haut gauche : $n = 10$; droite : $n = 50$; bas : détail de la distribution "métastable" (ρ_{50}). Monte Carlo avec $N = 10^7$ et $\Delta x = \pi/50$

décroissance dépendant de ε sur la composante régulière d'une dynamique aux propriétés intermédiaires est bien plus difficile que pour une application régulière, probablement à cause de l'interaction entre les composantes chaotiques et régulières. En effet, pour les

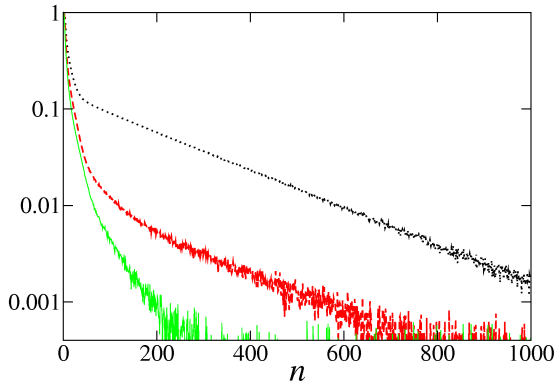


FIGURE 7.20 – Décroissance de la fidélité pour l'application standard, $K = 2$, Monte Carlo avec $N = 10^7$. Noir, points : $\psi_1 = \psi_2^* = e^{ix}$. Rouge, pointillés : $\psi_1 = \psi_2^* = e^{i2x}$. Vert : $\psi_1 = \psi_2^* = e^{i3x}$.

applications purement chaotiques et régulières, nous avons trouvé que la décroissance de la fidélité était presque indépendante de la fonction ψ, et ainsi nous nous sommes limités à l'étude calculatoirement la plus économique : $\psi = x$. Mais pour l'application standard avec $K = 2$, même lorsque la fidélité pour $\psi = x$ a atteint une valeur plus faible que sa valeur initiale, l'erreur n'a pas atteint sa valeur asymptotique (distribution triangulaire). Puisque la distribution de l'erreur ρ_ε^n est donnée par la transformée de Fourier de $\varphi_\varepsilon^n(u)$, c'est-à-dire par la fidélité calculée avec $\psi_1 = \psi_2^* = e^{iux}$, les échelles de temps des phases transientes de ρ_ε^n sont déterminées par la décroissance de la fidélité de e^{iux} ; alors que pour tous les systèmes précédents la décroissance de la fidélité pour e^{iux} est indépendante de u, et donc le système a une seule échelle de temps pour la décroissance. Pour l'application standard avec $K = 2$, la décroissance de e^{iux} se trouve être fortement dépendante de u (figure 7.20) et donc la composante régulière d'une application avec un comportement intermédiaire n'a pas une seule échelle de temps dans sa décroissance. Nous avons vérifié que lorsque la fidélité, calculée avec e^{ix}, choix pour lequel le temps de décroissance est vraisemblablement le plus long, atteint une valeur $\approx 10^{-3}$ nous avons la convergence vers erreur asymptotique triangulaire ρ_∞^ε.

7.5 CONCLUSION

Nous avons étudié les propriétés statistiques de l'erreur introduite par un bruit additif. La vitesse de convergence de la densité de probabilité de cette erreur permet de différencier les mouvements chaotiques des mouvements réguliers. Pour les rotations et les applications de Bernoulli, nous avons obtenu des résultats exacts et une estimation optimale du taux de convergence. La vitesse exponentielle pour les applications régulières et la vitesse super-exponentielle pour les applications chaotiques semblent générales, comme nous l'avons vu au travers des différents exemples. La distribution initiale des erreurs est un Dirac supporté en 0 alors que la distribution asymptotique dépend des mesures invariante et stationnaire du système. Lorsque ces deux mesures sont simplement la mesure de Lebesgue, la distribution asymptotique est triangulaire (comme la différence entre deux points choisis aléatoirement sur un intervalle). Lorsque celles-ci sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, la distribution asymptotique est lisse alors qu'elle est *ciselée* lorsque

ces mesures sont singulières. Comme nous l'avons expliqué, les propriétés ergodiques de l'application initiale sont reflétées dans la façon d'atteindre la distribution asymptotique. Celle-ci est atteinte *en douceur* (lisse) pour les applications régulières alors que la transition est clairement marquée pour les applications chaotiques. Dans ce dernier cas, la localisation de cette transition ne dépend que de l'amplitude du bruit. Lorsque l'application présente à la fois des régions invariantes chaotiques et régulières, il y a d'abord une transition marquée, suivie d'une phase lisse de décroissance.

Appendice

7.5.1 Calcul de la fidélité pour qx mod 1

L'itéré de l'application perturbée est définie par :

$$T_\varepsilon^n = q^n x + \varepsilon\Big(q^{n-1}\xi_1 + q^{n-2}\xi_2 + \ldots + q\xi_{n-1} + \xi_n\Big) \bmod 1$$

La fidélité pour des fonctions ϕ, ψ qui sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec un nombre fini de discontinuités est donnée par :

$$F_n^\varepsilon = \sum_{k,k'} \phi_k \psi_{k'} \int_0^1 e^{2\pi i q^n (k-k')x} dx \int_{-1}^1 \frac{d\boldsymbol{\xi}}{2^n} e^{2\pi i k' \varepsilon (q^{n-1}\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = \phi_0\psi_0 + \sum_{|k|\geq 1} \phi_k \psi_{-k} S_{n,q}(k\varepsilon) \tag{7.31}$$

Il est trivial de vérifier que la décroissance de la fidélité pour toute translation du tore est équivalente à celle de l'identité $Tx = x$, et donc puisque $S_{n,q}(x) \equiv S^n(x)$ eq. (7.31) implique eqs. (7.13) et (7.16).
Pour estimer $S_{n,q}(x)$ nous pouvons utiliser la borne (7.14) pour $S(x)$, mais nous devons faire la distinction entre trois régions (supposons $x > 0$, sinon on remplace x par $|x|$) : région 1, où $q^{n-1}x < 1$, dans laquelle nous pouvons utiliser :

$$|S_{n,q}(x)| \leq e^{-\alpha x^2 (1+q^2+\ldots q^{2(n-1)})} \leq e^{-\alpha x^2 q^{2(n-1)}}$$

région 3 où :

$$x\, qx \cdots q^{n-1}x = x^n q^{1+2+\ldots+n-1} = \Big(xq^{(n-1)/2}\Big)^n > 1$$

ou de façon équivalente : $xq^{(n-1)/2} > 1$ et alors nous pouvons utiliser :

$$|S_{n,q}(x)| \leq \Big(2\pi\, xq^{(n-1)/2}\Big)^{-n}$$

et une région intermédiaire, la région 2 où $x\, q^{-(n-1)/2} < 1 < x\, q^n$. Pour analyser le comportement de la fonction dans cette dernière région, supposons que : $xq^{m-1} < 1 < xq^m$ avec les entiers : $(n-1)/2 < m < n$. Nous pouvons estimer d'une façon différente les termes avec xq^l plus grand ou plus petit que 1.

$$|S_{n,q}(x)| \leq \frac{(2\pi)^{-(n-m)}}{xq^m\, xq^{m-1} \cdots xq^{n-1}}\, e^{-\alpha\, x^2 (1+q^2+\ldots q^{2(m-1)})}$$
$$\leq \Big(2\pi\, x\, q^{(n+m-1)/2}\Big)^{-(n-m)}\, e^{-\alpha x^2 q^{2(m-1)}} \leq \Big(2\pi\, q^{(n-m-1)/2}\Big)^{-(n-m)}\, e^{-\alpha x^2 q^{2(m-1)}}$$

Nous pouvons alors utiliser la borne suivante pour $S_{n,q}(x)$

$$|S_{n,q}(x)| \leq \begin{cases} \exp\left(-\alpha\, x^2\, q^{2(n-1)}\right) & \text{si } xq^{n-1} < 1 \\ \left(2\pi\, q^{(n-m-1)/2}\right)^{-(n-m)}\; e^{-\alpha x^2 q^{2(m-1)}} & \text{if } xq^{m-1} < 1 < xq^m \text{ avec } (n-1)/2 < m < n, \\ \left(2\pi\, xq^{(n-1)/2}\right)^{-n} & \text{si } xq^{(n-1)/2} > 1 \end{cases}$$

où nous avons une fois encore $\alpha = \log(2\pi)$. (Quand $q = 1$ il n'y pas de région 2, et dans la région 1 la borne plus précise $S^n(x) \leq e^{-\alpha x^2 n}$ peut être utilisée).
En utilisant les estimations sur $S_{n,q}(x)$ nous donnons des bornes pour la fidélité dans les trois régions. Il est pratique d'introduire un entier n_* défini par $n_* = \{-\log_q \varepsilon\}$, où $\{x\}$ désigne l'entier le plus proche du réel x, tel que :

$$\varepsilon \simeq q^{-n_*}$$

– *Région 1 :* $\varepsilon q^{n-1} < 1$

En utilisant le développement de Fourier pour la fidélité (7.31) nous écrivons :

$$|F_n - \phi_0\psi_0| \leq \sum_{k\neq 0} |\phi_k\psi_{-k}|\; |S_{n,q}(k\varepsilon)| = R_1 + R_2 + R_3$$

où R_1 correspond à la contribution de tous les coefficients de Fourier avec $|k|\varepsilon q^{n-1} < 1$, R_2 avec $|k|\varepsilon q^{(n-1)/2} < 1 < |k|\varepsilon q^{n-1}$, et R_3 avec $|k|\varepsilon q^{(n-1)/2} > 1$.
La borne suivante s'applique à R_1 :

$$R_1 \leq \sum_{|k|=1}^{(\varepsilon q^{n-1})^{-1}} |\phi_k\psi_{-k}| e^{-\alpha\varepsilon^2 k^2\, q^{2(n-1)}} \leq e^{-\alpha\varepsilon^2 q^{2(n-1)}} 2 \sum_{k=1}^{(\varepsilon q^{n-1})^{-1}} \frac{1}{k^2} \leq 2(2-\varepsilon q^{n-1}) e^{-\alpha\varepsilon^2 q^{2(n-1)}}$$

où nous avons supposé une fois encore que les coefficients de Fourier décroissaient comme $|k|^{-1}$ et où nous avons utilisé les estimations suivantes :

$$\sum_{k=A}^{B} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{A^2} + \int_A^B \frac{dk}{k^2} = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \leq \frac{2}{A} - \frac{1}{B}$$

pour $B > A \geq 1$.
Le deuxième terme R_2 a la borne suivante :

$$\begin{aligned} R_2 &\leq \sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n-1} (2\pi q^{(n-m-1)/2})^{-(n-m)} \sum_{|k|=(\varepsilon q^m)^{-1}}^{|k|=(\varepsilon q^{m-1})^{-1}} \frac{e^{-\alpha k^2\varepsilon^2 q^{2(m-1)}}}{k^2} \\ &\leq \sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n-1} (2\pi q^{(n-m-1)/2})^{-(n-m)} e^{-\alpha/q^2} 2\varepsilon q^m (2 - q^{-1}) \\ &\leq \frac{e^{-\alpha/q^2}}{2\pi} 2\varepsilon \left(2 - \frac{1}{q}\right) \sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{n-1} q^m \leq 4\varepsilon q^n \frac{e^{-\alpha/q^2}}{2\pi(q-1)} \leq 2\varepsilon q^{n-1} \end{aligned}$$

Pour R_3 :

$$\begin{aligned} R_3 &\leq \sum_{|k|\geq(\varepsilon q^{(n-1)/2})^{-1}}^{\infty} \frac{1}{k^2}\frac{1}{(2\pi\,\varepsilon|k|\,q^{(n-1)/2})^n} \\ &\leq \frac{2}{(2\pi\varepsilon q^{(n-1)/2})^n}\left((\varepsilon q^{(n-1)/2})^{n+2} + \int_{(\varepsilon q^{(n-1)/2})^{-1}}^{\infty}\frac{dk}{k^{n+2}}\right) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^n}\varepsilon q^{(n-1)/2}\left(\frac{1}{n+1}+\varepsilon q^{(n-1)/2}\right) \leq \frac{4}{(2\pi)^n}\varepsilon q^{(n-1)/2} \end{aligned}$$

Finalement pour cette région :

$$|F_n - \phi_0\psi_0| \leq 2\,(2-\varepsilon q^{n-1})\;e^{-\alpha\varepsilon^2\,q^{2(n-1)}} + 2\varepsilon q^{n-1} + \frac{4}{(2\pi)^n}\;\varepsilon q^{(n-1)/2} \tag{7.32}$$

où $q=1$ donne l'équation (7.15).

– *Région 2 :* $\varepsilon q^{(n-1)/2} < 1 < \varepsilon q^{n-1}$

Pour cette région, l'estimation n'est pas très précise. Tout d'abord R_1 s'annule puisque le terme d'ordre le plus grand dans la somme, c'est-à-dire $(\varepsilon q^{n-1})^{-1}$ est plus petit que le terme d'ordre le plus petit. R_2 qui est estimé plus haut pour $\varepsilon q^{n-1} \simeq 1$ est d'ordre 1, alors que le dernier terme R_3 est petit devant 1.

– *Région 3 :* $\varepsilon q^{(n-1)/2} > 1$

Dans cette région les contributions de R_1 et R_2 s'annulent et il ne reste que R_3 :

$$\begin{aligned} R_3 &\leq \sum_{|k|=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(2\pi\,\varepsilon|k|q^{(n-1)/2})^n} \\ &\leq 2\left(1+\int_1^{\infty}\frac{dk}{k^{n+2}}\right)\frac{1}{(2\pi\varepsilon q^{(n-1)/2})^n} \\ &\leq \frac{n+2}{n+1}\frac{2}{(2\pi\varepsilon q^{(n-1)/2})^n} \end{aligned}$$

7.5.2 Comparaison avec les méthodes de Monte Carlo

La validité des estimations précédentes a été vérifié numériquement. Nous écrivons d'abord l'estimation de R_3 en utilisant $\varepsilon = q^{-n_*}$ tel que :

$$R_3 \leq 3\left(\frac{q^{1/2}}{2\pi}\right)^n\;q^{n\,n_*}\;q^{-n^2/2} = 3\,q^{n_*^2/2}\left(\frac{q^{1/2}}{2\pi}\right)^n\;q^{-(n-n_*)^2/2}$$

valide pour $\varepsilon\,q^{(n-1)/2} > 1$. (7.32) et cette estimation nous donne :

$$|F_n - \phi_0\psi_0| \leq \begin{cases} 2(2-\varepsilon q^{n-1})e^{-\alpha\varepsilon^2 q^{2(n-1)}} + C\varepsilon q^{n-1} & \text{si } n < n_*+1 \\ 3\,q^{n_*^2/2}\left(\frac{q^{1/2}}{2\pi}\right)^n\;q^{-(n-n_*)^2/2} & \text{si } n \geq 2n_*+1 \end{cases} \tag{7.33}$$

Nous pouvons *coller* à la fidélité avec une formule dérivée des précédentes estimations en étendant celle de la région 3 à la région 2 :

$$|F_n - \phi_0\psi_0| \simeq \begin{cases} A\;e^{-\alpha'\,q^{2(n-n_*)}} & \text{si} \quad n \leq n_* \\ Ae^{-\alpha'}\;q^{-(n-n_*)^2/2} & \text{si} \quad n > n_* \end{cases} \tag{7.34}$$

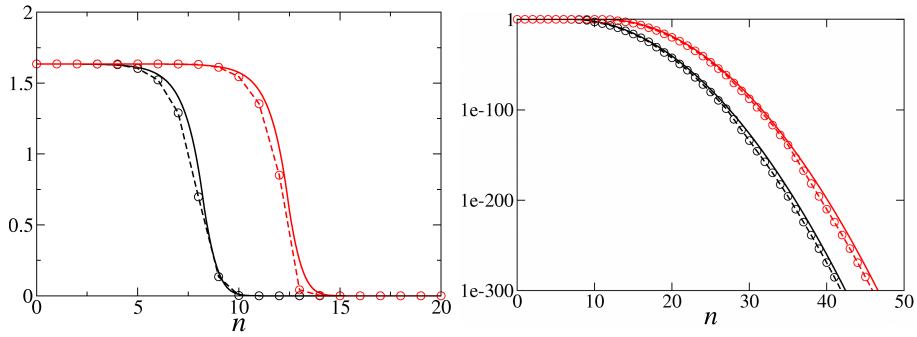


FIGURE 7.21 – Comparaison entre les résultats analytiques (7.31) (pointillés et cercles) et l'estimation (7.34) (lignes continues), en utilisant $\phi_k = \psi_k = k^{-1}$ tronqué à $k = 100$. Noir : $\varepsilon = 10^{-4}$. Rouge : $\varepsilon = 10^{-6}$. (droite : graphe logarithmique

où A est une constante de l'ordre de 1. Nous pouvons évaluer la taille de la transition Δn en imposant que pour $n = n_* - \Delta n$ la décroissance de la fidélité $\delta F_n = |F_n - \phi_0\psi_0|$ prenne une valeur de l'ordre de quelques pour cent de A (en $n = n_*$ sa valeur est $Ae^{-\alpha} = A\,(2\pi)^{-1} = 0.16\,A$). En choisissant par exemple $\delta F_{n_*-\Delta n} = Ae^{\alpha e^{-4}} \simeq 0.97A$ nous trouvons :

$$\Delta n = \frac{2}{\log q}$$

La validité du résultat analytique (7.31) a été vérifié avec une simulation de Monte Carlo (figure 7.1). Nous avons trouvé (figure 7.21) que le résultat analytique (7.31) pouvait très bien coller avec l'équation (7.34).
Soulignons qu'à cause de l'extrême vitesse de décroissance de

$$e^{-\alpha\varepsilon^2 q^{2(n-1)}}$$

autour de n_*, le *fit* (7.34) peut être shématisé par un plateau de longueur $n_*(\varepsilon)$ suivi d'une loi de décroissance indépendante de ε.

7.5.3 Formule d'inversion de Lévy

Considérons une application unidimensionnelle de l'intervalle $[0, 1]$ et l'observable identité $f(x) = x$. Supposons μ et μ_ε absolument continues, de densité h et h_ε respectivement, appartenant à L^1_m. Ces densités sont supposées proches de façons à ce que $\varphi^\varepsilon_\infty$ soit approchable par $\varphi^\varepsilon_\infty(u) = |\int_{[0,1]} e^{iux}h(x)dx|^2$. Les résultats classiques sur les séries de Fourier impliquent immédiatement que $\varphi^\varepsilon_\infty$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, bornée et s'annule à l'infini (Riemann-Lebesgue).

Considérons maintenant les cas des applications intermittentes et des applications quadratiques pour lesquelles la densité invariante se comporte comme : $h(x) \sim x^{-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$ pour l'intermittente et $\alpha = 0.5$ pour la quadratique définie par $a = 2$, et lorsque x est proche de 0 (pour la quadratique, un changement de variables ramène la singularité de ± 1 en 0). Nous devons donc étudier le comportement asymptotique pour de grandes valeurs de $|u|$ de l'intégrale :

$$\varphi^\varepsilon_\infty(u) = \left| \int_{[0,1]} \frac{e^{iux}r(x)}{x^\alpha} dx \right|^2 ,\ 0 < \alpha < 1$$

où r est une fonction régulière, bornée de l'intervalle $[0,1]$. Nous avons ([64], p. 519) :

$$\left| \int_{[0,1]} \frac{e^{iux} r(x)}{x^\alpha} dx \right| = \mathcal{O}(|u|^{\alpha-1}), \ |u| \text{ grand} \tag{7.35}$$

Nous pouvons donc conclure que pour $\alpha < 1/2$ la fonction caractéristique $\varphi_\infty^\varepsilon$ est sommable et nous pouvons appliquer la formule d'inversion de Lévy pour obtenir la densité de l'erreur asymptotique. Lorsque $1/2 \leq \alpha < 1$ nous devons utiliser une généralisation de (7.10) ; si nous appelons Φ_∞^ε la distribution de $\Delta_\infty^\varepsilon$ et si $-\infty < a < b < \infty$ sont des points de continuité de Φ_∞^ε, alors ([34], p. 264) :

$$\Phi_\infty^\varepsilon(b) - \Phi_\infty^\varepsilon(a) = \lim_{C\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-C}^{C} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_\infty^\varepsilon(t) dt$$

L'intégrale du terme de droite est clairement convergente pour $0 < \alpha < 1$ lorsque $|C|$ tend vers l'infini. Nous avons néanmoins procédé au calcul numérique de l'intégrale impropre

$$\rho_\infty^\varepsilon(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} \varphi_\infty^\varepsilon(u) du \sim (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}/(u^{2-2\alpha}) du$$

, où $2-2\alpha \leq 1$ pour $1/2 \leq \alpha$. Pour simplifier, choisissons $2-2\alpha < 1$, l'intégrand $u^{2\alpha-2}$ est une approximation asymptotique pour de grands $|u|$, de la fonction caractéristique $\varphi_\infty^\varepsilon(u)$ qui est surement intégrable dans un voisinage de zéro. Pour $2-2\alpha < 1$, il est bien connu que la transformée de Fourier de $u^{2\alpha-2}$ est de l'ordre de $t^{1-2\alpha}$, au sens des *distributions* [107]. Ainsi, la densité $\rho_\infty^\varepsilon(t)$ calculée numériquement explose vers l'infini lorsque t est proche de 0. Nous avons observé ceci pour les applications intermittente et quadratique, décrites plus haut. Nous soupçonnons que la même chose arrive pour la mesure singulière de l'application du boulanger.

Bibliographie

[1] M. Abadi, Sharp error terms and necessary conditions for exponential hitting times in mixing processes, *Ann. Prob.*, **32**, 243-264, (2004)

[2] J.F. Alves, V. Araujo, Hyperbolic times : frequency versus integrability, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **24**, 329-346, (2004)

[3] J. Alves, V. Araujo, Random perturbations of nonuniformly expanding maps, *Astérisque* 286, 25-62 (2003).

[4] V. Araujo, A. Tahzibi, *Nonlinearity*, **18**, 1, (2005)

[5] L. Arnold, Random Dynamical Systems, *Springer Monographs in Math.*, (2003).

[6] R. Artuso, G. Cristadoro, Periodic orbit theory of strongly anomalous transport, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **37**, 85-103, (2004)

[7] J. Aaronson, M. Denker, Local limit theorems for partial sums of stationary sequences generated by Gibbs-Markov maps, *Stoch. Dyn.*, **1**, 193-237, (2001)

[8] A. Ayyer, M.Stenlund, *Exponential decay of correlations for randomly chosen hyperbolic toral automorphisms*, Chaos, **17**, 043116, 2007.

[9] V. Baladi, *Positive transfer operators and decay of correlations*, Advances Series in Nonlinear Dynamics, Vol. 16, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, 2000

[10] V. Baladi, M. Viana, *Annales Sci. E.N.S.*, **29**, 483, (1996)

[11] V. Baladi, L-S. Young, *On the spectra of randomly perturbed expanding maps*, Comm. Math. Phys., **156**, 355-385, 1993.

[12] L. Barreira, B. Saussol, *Hausdorff dimension of measures via Poincaré recurrence*, Comm. Math. Phys, **219**, 443-463, 2001

[13] R. Bhattacharya, M. Majumdar, Random Dynamical Systems, Cambridge University Press, (2007).

[14] M. Benaïm, N. El Karoui, Promenade aléatoire, Editions de l'école Polytechnique, (2008).

[15] M. Benedicks, L. Carleson, *Ann. of Math.*, **133**, 73, (1991)

[16] M. Benedicks, M. Viana, *Annales Inst. Henri Poincaré*, **23**, 713, (2006).

[17] G. Benenti, G. Casati, Quantum-classical correspondence in perturbed chaotic dynamical systems, *Phys. Rev. E*, **65**, 066205-1, (2002).

[18] G. Benenti, G. Casati, G. Velbe, *Phys. Rev. E*, **670**, 055202-1, (2003)

[19] D. Bessis, G. Paladin, G. Turchetti, S. Vaienti, *Journal of Statistical Physics*, **51**, 109, (1988).

[20] D. Bessis, J.D. Fournier, G. Servizi, G. Turchetti, *Physical Review A*,**36**, 920-928, (1987).

[21] M. Blank, *Discrete an Continuous Dyn. Syst.*, **21**, 749, (2008).

[22] M. Blank, G. Keller, C. Liverani, Ruelle-Perron-Frobenius Spectrum for Anosov Maps, *Nonlinearity*, **15**, n.6, 1905-1973, (2002).

[23] M. Boshernitzan, *Quantitative recurrence results*, Inventiones Mathematicae, **113**, 617-631, (1993).

[24] R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, *Springer, Lecture Notes in Mathematics*,**470**, (1975).

[25] A. Boyarsky, P. Gora, Laws of Chaos, Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension, *Birkhäuser, Probability and its Applications*, (1997).

[26] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, *Dunod, Mathématiques appliquées pour la maîtrise*, (1999).

[27] A. Broise, Aspects stochastiques de certains systèmes dynamiques, transformations dilatantes de l'intervalle, fractions continues multidimensionnelles, Thèse de l'université de Rennes, (1994).

[28] H. Bruin, M. Todd, Return time statistics for invariant measures for interval maps with positive Lyapunov exponent, arXiv :0708.0379

[29] H. Bruin, B. Saussol, S. Troubetzkoy, S. Vaienti, Return time statistics via inducing, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**, 991-1013, (2003)

[30] H. Bruin, M. Todd, Return time statistics for invariant measures for interval maps with positive Lyapunov exponent, arXiv :0708.0379

[31] H. Bruin, S. Vaienti, Return time statistics for unimodal maps, *Fund. Math.*, **176**, 77-94, (2003) **286**, 25, (2003)

[32] G.Casati, T.Prosen, J.Lan, and B.Li *Universal Decay of the Classical Loschmidt Echo of Neutrally Stable Mixing Dynamics* Physical Review Letters, **94**, 114101 (2005).

[33] S.N. Chow, K. Palmer, *Dyn. Diff. Eqns.*, **3**, 361, (1991).

[34] Y.S. Chow, H. Teicher, Probability Theory, Springer-Verlag, (1978).

[35] W. Cowieson, Stochastic stability for piecewise expanding maps in Rd *Nonlinearity*, **13**, no. 5, 1745-1760, (2000).

[36] G. Cristadoro, N. Haydn, Ph. Marie, S. Vaienti, Statistical properties of intermittent maps with unbounded derivative, in preparation.

[37] M.Demers, C.Liverani, Stability of statistical properties in two-dimensional piecewise hyperbolic maps, to appear in *Trans. Am. Math. Soc.*

[38] K. Diaz-Ordaz, Decay of correlations for non-Hölder observables for one-dimensional expanding Lorent-like maps, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **15**, 159-176, (2006)

[39] P. Diaconis, D. Freedman, *Iterated random functions*, SIAM Review, Volume 41 , 1999.

[40] K. Diaz-Ordaz, Decay of correlations for non-Hölder observables for one-dimensional expanding Lorent-like maps, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **15**, 159-176, (2006)

[41] K. Diaz-Ordaz, M.P. Holland, S. Luzzatto, Statistical properties of one-dimensional maps with critical points and singularities, *Stochastics and Dynamics*, **6**, 423-458 (2006)

[42] B. Eckhardt , Echoes in Classical Dynamical Systems, *J. Phys. A : Math. and general*, **36**, 371-380 (2003).

[43] J.P. Eckmann, D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617 - 656 (1985).

[44] P. Erdös, *On family of symmetric Bernouilli convolutions*, American Journal of Mathematics, **61**, 974-76, 1939.

[45] K. Falconer,*Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.

[46] A.C.M. Freitas, J.M. Freitas, M. Todd, Hitting time statistics and extreme value theory, preprint University of Porto, (2008)

[47] P. Glendinning, C. Sparrow, Prime and renormalisable kneading invariants and the dynamics of expanding Lorenz maps, Homoclinic chaos (Brussels, 1991), *Phys. D*, **62**, 22-50,(1993)

[48] S. Gouëzel, *Isr. J. Math.*, **139**, 29, (2004).

[49] S. Gouëzel, Central limit theorem and stable laws for intermittent maps, *Probability Theory and Related Fields*, **128**, 82-122, (2004).

[50] S. Gouëzel, Sharp polynomial estimates for the decay of correlations, *Israel Journal of Mathematics*, **139**, 29-65, (2004).

[51] S.Gouëzel and C.Liverani, Banach spaces adapted to Anosov systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 26, 1, 189–217, (2006).

[52] S. Grossmann, H. Horner, Long time correlations in discrete chaotic dynamics, *Z. Phys. B- Condensed Matter*, **60**, 79-85, (1985).

[53] C. Grebogi, S. Hammel, J. Yorke, *J. Complexity*, **3**, 136, (1987).

[54] C. Grebogi, S. Hammel, J. Yorke, *Bull. Am. Math. Soc.*, **19**, 465, (1988).

[55] C. Grebogi, S. Hammel, J. Yorke, T. Sauer, *Phys. Rev. Lett*, **65**, 1527, (1990).

[56] J. Guckenheimer, R. Williams, Structural stability of Lorenz attractors, *Publ. math. I.H.E.S*, **50** 59-72,(1976)

[57] N. Haydn, S. Vaienti, The limiting distribution and error terms for return time of dynamical systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 10, 584-616, (2004).

[58] N. Haydn, Y. Lacroix, S. Vaienti, Hitting and return times in ergodic dynamical systems, *Ann. Probab.*, **33**, 2043-2050, (2005)

[59] N. Haydn, S. Vaienti, The limiting distribution and error terms for return time of dynamical systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **10**, 584-616, (2004)

[60] N. Haydn, S. Vaienti, The compound Poisson distribution and return times in dynamical systems, to appear in *Probab. Theory Related Fields*

[61] P.C. Hemmer, The exact invariant density for a cusp-shaped return map, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **17**, L247-L249, (1984)

[62] M. Hirata, B. Saussol, S. Vaienti, Statistics of return times : a genneral framework and new applications, *Comm. Math. Phys.*, **206**, 33-55, (1999)

[63] M. Hirata, B. Saussol and S. Vaienti, Statistics of return times : a general framework and new applications, *Comm. Math. Phys.* 206, 33-55 (1999).

[64] E.W. Hobson, The theory of functions of a real variable, Vol. 2, Dover Publ., (1927)

[65] H. Hu,*Ergodic Theory and Dyn. Syst.*, **24**, 495, (2004).

[66] H. Hu, Ph. Marie, S. Vaienti, Attractors, Pseudo-Orbits and Stationary Measures, preprint

[67] M. Jakobson, *Comm. Math. Phys.*, **81**, 39, (1981)

[68] B. Jessen, A. Wintner, Distribution functions and the Riemann zeta function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38**, 48-88, (1935).

[69] Z.P. Karkuszewski, C. Jarzynski, W.H. Zurek, Quantum chaotic environments, the butterfly effect and decoherence, *Phys. Rev. Letters*, **89**, 17, 2002.

[70] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, (1995)

[71] G. Keller, Generalized Bounded Variation and Applications to Piecewise Monotonic Transformations, *Z. Wahr. verw. Geb.*, **69**, 461-478, 1985.

[72] G.Keller, C.Liverani, *Stability of the spectrum for transfer operators*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze (4) Vol. **XXVIII**, 141-152, (1999).

[73] Y. Kifer, Attractors via random transformations, *Communications in mathematical physics*, vol. 121, no3, pp. 445-455, (1989).

[74] Y. Kifer, *Ergodic theory of random transformations*, Progress in Probability and Statistics, Vol. 10, Birkhäuser Boston Inc., (1986).

[75] Y. Kifer, P.-D. Liu, Random Dynamics, Handbook of dynamical systems, Vol. 1B, 379-499, Elsevier B. V., Amsterdam, (2006).

[76] D. Knuth, The art of computer programming, Vol 2, Addison-Wesley, (1969).

[77] Z.S. Kowalski, Invariant measures for piecewise monotonic transformation has a lower bound on its support, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.*, **27**, 53-57, (1979b).

[78] M. Kupsa Y. Lacroix, Asymptotics for hitting times, *Annals of Probability* 33 (3), 610-619. (2005).

[79] K.K. Lin, *Nonlinearity*, **18**, 629, (2005).

[80] P.-D. Liu, *Dynamics of random transformations : smooth ergodic theory*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21, no. 5, 1279-1319, (2001).

[81] P-D. Liu, M. Qian, Smooth Ergodic Theory of Random Dynamical Systems,*Springer, Lecture Notes in Mathematics*,**1606**, (1995).

[82] C. Liverani, Ph. Marie, S. Vaienti, Random Classical Fidelity, *Journal of Statistical Physics*, **128**,4, 1079, (2007).

[83] C. Liverani, B. Saussol, S. Vaienti, *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, **19**, 671, (1999).

[84] Ph. Marie, J. Rousseau, Recurrence for random dynamical systems, preprint.

[85] Ph. Marie, G. Turchetti, S. Vaienti, F. Zanlungo, Error distribution in randomly perturbed orbits, to appear in *Chaos*.

[86] I. Melbourne, M. Nicol, Large deviations for nonuniformly hyperbolic systems, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

[87] I.Melbourne, Large and Moderate Deviations for Slowly Mixing Dynamical Systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** 1735-1741, (2009) .

[88] J. Moser, E. Philipps, S. Varadhan, *Ergodic Theory*, Seminar, Courant Inst. Math. Sci., New-York., p. 111-120, (1975)

[89] T. Ohno, *Asymptotic behaviors of dynamical systems with random parameters*, Publ. Res. Inst. Math. Sci, **19**, no. 1, 83–98, 1983.

[90] V. Pelino, F. Maimone, Energetics, skeletal dynamics, and long term predictions on Kolmogorov-Lorentz systems, *Physical Review E*, **76**, 046214, 11pp., (2007)

[91] A. Pikovsky, Statistical properties of dynamically generated anomalous diffusion, *Physical Review A*, **43**, 3146-3148, (1991)

[92] M. Pollicott, R. Sharp, Large deviations for intermittent maps, preprint, (2008)

[93] H. Poincaré, Science et méthode, Flammarion,1908.

[94] H.Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Mathematica, 1890.

[95] M. Pollicott, M. Yuri, *Dynamical systems and ergodic theory*, London Mathematical Society Student Texts, 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[96] I.Prigogine, Les lois du chaos, Flammarion, 1993.

[97] J. Rousseau, B. Saussol, *Poincaré recurrence for observations*, To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[98] D. Ruelle, Chaos, imprédictibilité et hasard dans "Qu'est-ce que l'Univers ?" (éd. Y. Michaud), Odile Jacob, 647-656, 2000.

[99] D. Ruelle, Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors, *Commun. Math. Phys.*, **82**, 137-151(1981).

[100] M. Rychlik, Bounded variation and invariant measures, *Studia Math.*, **76**, 69-80, (1983)

[101] O. Sarig, Subexponential decay of correlations, *Invent. math*, **150**, 629-653, (2002)

[102] T. Sauer, *Physical Review E*, **65**, (2002), 036220

[103] T. Sauer, C. Grebogi, J. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 59, (1997)

[104] B. Saussol, Absolutely continuous invariant measures for multidimensional expanding maps, *Israël Journal of Mathematics*, **116**, 223-248, 2000.

[105] B. Saussol, Etude statistique de systèmes dynamiques dilatants, Thèse de Doctorat, Université de Toulon et du Var, 1998

[106] B. Saussol, *Recurrence rate in rapidly mixing dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **15**, 259-267, 2006.

[107] R. Strichartz, *A guide to Distribution Theory and Fourier Transform*, CRC Press, (1994)

[108] E.S. Van Vleck, *SIAM J. Sci. Comput.(USA)*, **16**, 1177, (1995).

[109] M. Viana, Stochastic dynamics of deterministic systems, *Brazilian Math. Colloquium*, IMPA, (1997).

[110] P. Walters, An introduction to Ergodic theory, *Springer*, (1981).

[111] R. Williams, Lorenz attractors, *Publ. Math. I.H.E.S*, **50**, 59-72, (1976)

[112] L.-S. Young, Recurrence times and rates of mixing, *Israel J. Math.*, **110**, 153-188, (1999).

[113] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, 2nd ed., Cambridge University Press, (1968)