



Autour de la dynamique semi-classique de certains systèmes complètement intégrables

Olivier Lablée

► To cite this version:

Olivier Lablée. Autour de la dynamique semi-classique de certains systèmes complètement intégrables. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT : . tel-00439641

HAL Id: tel-00439641

<https://theses.hal.science/tel-00439641>

Submitted on 8 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE 1)**

*préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 CNRS-UJF*

**AUTOUR DE LA DYNAMIQUE
SEMI-CLASSIQUE DE CERTAINS
SYSTÈMES COMPLÈTEMENT
INTÉGRABLES**

Olivier LABLÉE

Soutenue à Grenoble le 4 décembre 2009 devant le jury :

*Gérard BESSON (CNRS, Université de Grenoble 1), Examineur
Gilles COURTOIS (CNRS, École Polytechnique), Examineur
Alain JOYE (Professeur, Université de Grenoble 1), Examineur
Thierry PAUL (CNRS, École Polytechnique), Rapporteur
Didier ROBERT (Professeur, Université de Nantes), Rapporteur
San VŨ NGOC (Professeur, Université de Rennes 1), Directeur*

Au vu des rapports de Thierry PAUL et Didier ROBERT

**THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE 1)**

*préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5582 CNRS-UJF*

**AUTOUR DE LA DYNAMIQUE
SEMI-CLASSIQUE DE CERTAINS
SYSTÈMES COMPLÈTEMENT
INTÉGRABLES**

Olivier LABLÉE

Soutenue à Grenoble le 4 décembre 2009 devant le jury :

*Gérard BESSON (CNRS, Université de Grenoble 1), Examineur
Gilles COURTOIS (CNRS, École Polytechnique), Examineur
Alain JOYE (Professeur, Université de Grenoble 1), Examineur
Thierry PAUL (CNRS, École Polytechnique), Rapporteur
Didier ROBERT (Professeur, Université de Nantes), Rapporteur
San VŨ NGOC (Professeur, Université de Rennes 1), Directeur*

Au vu des rapports de Thierry PAUL et Didier ROBERT

*S'entrassi 'ndru Paradisu santu, santu,
E nun truvassi a tia, mi n'esciria.*

- SERENATA DI ZICAVO.

Remerciements

Je remercie sincèrement San Vũ Ngọc d'avoir accepté de m'encadrer dans cette thèse de doctorat. San m'a fait découvrir le monde de l'analyse semi-classique sous des aspects géométriques ; aujourd'hui j'ai une vue géométrique et plus riche de la théorie spectrale. Sa connaissance et sa pratique des mathématiques sont un modèle : il possède à la fois une vue d'ensemble des problèmes et une grande précision dans leur résolution. Je suis aussi très admiratif de son honnêteté scientifique et de son professionnalisme. J'ai particulièrement apprécié notre relation : San m'a toujours laissé une grande liberté et autonomie dans mes travaux de recherche et dans l'organisation de mes recherches.

Merci aux rapporteurs Didier Robert et Thierry Paul d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce travail de thèse.

Mes remerciements vont également aux membres de l'équipe d'analyse de Rennes 1. Lors de mes missions à Rennes, j'ai toujours eu un accueil chaleureux au sein de l'IRMAR. Merci aussi aux différentes ANR Bretonnes qui m'ont financièrement soutenu, en particulier l'ANR NONAa.

La présence de Gérard Besson dans ce jury est un honneur pour moi. Gérard s'est toujours montré amical et bienveillant vis à vis de moi, de mon travail et de ma carrière... un grand merci amical à toi Gérard. Le séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie est à l'image de Gérard : convivial, accueillant et laissant une grande place aux jeunes chercheurs.

Je remercie chaleureusement Gilles Courtois de sa présence dans ce jury et de m'avoir accueilli au prestigieux séminaire Arthur Besse. Alain Joye a lui aussi accepté immédiatement de faire parti de mon jury, je le remercie.

J'ai rencontré Frédéric Mouton en M2, j'ai tout de suite apprécié sa disponibilité, sa grande diplomatie, son optimisme et son ouverture d'esprit. Je n'oublie pas non plus que grâce à Frédéric j'ai pu faire mes premières heures d'enseignement dès le M2, j'ai aimé cette marque de confiance. Frédéric m'a également beaucoup encouragé et motivé pour faire cette thèse. Durant ces années de thèse il s'est toujours intéressé à l'avancement de mon travail. Je le remercie sincèrement.

Je remercie amicalement Frédéric Faure pour sa disponibilité, sa bonne humeur et ses conseils. Merci aussi à Yves Colin de Verdière pour les discussions autour de ses nombreux travaux.

L'enseignement a joué un rôle très important pour moi, ces années d'enseignement se sont révélées d'une grande richesse humaine et m'ont apportées un équilibre avec ma recherche. J'ai toujours eu la chance de travailler dans des équipes composées

de personnes motivées, compétentes et disponibles ; en particulier Hervé Pajot, Stéphane Baseilhac, Sandrine Péché et Laurent Bonavero. J'ai aussi une pensée pour mes étudiants et j'espère avoir été patient, pédagogue, motivé et disponible avec eux.

Ces années de thèse à l'Institut Fourier m'ont aussi permis de nouer beaucoup de liens amicaux. Je remercie Hervé Pajot pour les nombreuses fois où il m'a amicalement reçu chez lui en famille. La présence de Mikael a rendu les journées plus joyeuses... J'ai aimé la grande générosité, l'écoute et le soutien de Mikael. Mikael possède aussi la grande qualité d'être toujours disponible pour ses amis. Merci aussi pour les nombreuses soirées et les sorties faites ensemble avec Fabrice. Merci à mes deux collègues Antoine et Frédéric, pour leur solidarité dans nos moments difficiles de fin de thèse ... J'ai une pensée émue pour Joanna, j'ai beaucoup aimé sa grande gentillesse, son attention et sa sensibilité. Joanna a su délicatement adoucir mes années de thèse et je la remercie sincèrement de m'avoir accordé sa confiance et son amitié. Brigitte s'est toujours montrée présente, au laboratoire et en dehors, je le remercie vraiment pour son aide, ses conseils, sa présence et son partage. Merci à Martine pour son aide logistique et pour l'intérêt qu'elle porte à mon travail. Je remercie aussi Géraldine pour sa bonne humeur, son accueil, sa disponibilité, sa gentillesse, et sa bienveillance. Un merci chaleureux aussi pour les lectures préliminaires de certaines parties de cette thèse.

Hugues Blanchard et Karim Hellal, mes professeurs de supérieures et de spéciales, dans deux styles très opposés de pédagogie, m'ont enseigné avec un grand soin de solides bases mathématiques et m'ont transmis le goût des mathématiques. Je les remercie très chaleureusement. Gilles Leborgne m'a ensuite enseigné l'analyse moderne par la suite, j'ai apprécié sa large culture, sa disponibilité et ses encouragements... Je le remercie vivement.

Merci aussi à mes amis extérieurs, en particulier à Fabrice, Marine, Thiebaud et Sophie.

Mes derniers mots en français sont pour mes parents, je les remercie sincèrement pour l'amour dont ils m'entourent.

Misgia, ghjé nantu a lu to visu ch' eo trovu lu pudè. Un ti ne fà, dumanu ci stringhjeremu forte per ogni passu a fà.

Avant propos

La figure 3 (et 32) a été réalisée par *Martine Barbelenet* pour la pré-publication des *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie* de (volume 26, 2007-2008). Les figures 6 à 21 sont des simulations numériques faites par *Frédéric Faure*. J'ai réalisé les autres simulations (figures 22 à 24 et 38, 39) avec le logiciel Maple.

Résumé

La dynamique semi-classique d'un opérateur pseudo-différentiel P_h sur une variété M est l'analogue quantique du flot classique de son symbole principal p sur la variété T^*M . Cette dynamique semi-classique est décrite par l'équation de Schrödinger de l'opérateur P_h ; alors que le flot classique hamiltonien est, lui, donné par les équations d'Hamilton associées à la fonction p . Le spectre de l'opérateur pseudo-différentiel P_h permet donc de pouvoir décrire les solutions générales en fonction du temps de l'équation de Schrödinger associée. Le comportement en temps long de la dynamique semi-classique donnée par ces solutions reste cependant sur bien des points mystérieux. La dynamique semi-classique dépend donc directement du spectre de l'opérateur P_h et aussi par conséquent de la géométrie sous-jacente dans T^*M induite par la fonction symbole classique p . Dans cette thèse, on décrit d'abord la dynamique semi-classique en temps long dans le cas de la dimension 1 avec une fonction symbole p n'ayant pas de singularité ou bien avec une singularité non-dégénérée de type elliptique : le feuilletage dans T^*M de p est alors elliptique. Les règles de Bohr-Sommerfeld régulières fournissent alors le spectre d'un tel opérateur. On traite aussi le cas de la dimension 2 qui nous amène à quelques discussions de théorie de nombres. Pour finir, on s'intéresse au cas d'un opérateur pseudo-différentiel P_h avec une singularité non-dégénérée de type hyperbolique : le feuilletage dans T^*M de p est alors un "huit hyperbolique" (modèle difféomorphe au Schrödinger avec un potentiel double puits).

Mots-clés

Systèmes complètement intégrables, singularités non-dégénérées, spectre, opérateur de Schrödinger, double puits, analyse semi-classique, analyse microlocale, dynamique semi-classique, équation de Schrödinger, règles de Bohr-Sommerfeld, asymptotiques des valeurs propres, formes normales.

Abstract

The semi-classical dynamics of a pseudo-differential P_h operator on a manifold M is the quantum analogous of the classical flow of his main symbol p on the manifold T^*M . This semi-classical dynamics is described by the Schrödinger equation of the operator P_h whereas the classical Hamiltonian flow is given by the Hamilton's equations associated with the function p . Thus the spectrum of the pseudo-differential operator P_h enable to describe the general solutions of the associated Schrödinger equation. The long time behavior of these solutions remains in many ways mysterious. The semi-classical dynamics depends directly on the spectrum of the operator P_h and consequently also on the underlying geometry into T^*M induced by the classical symbol p . In this thesis, we first describe the long time semi-classical dynamics of an Hamiltonian in the one-dimensional case with a symbol function p with no singularity or with non-degenerate elliptic singularity type : the associated fibers are closed elliptic orbits. The regular Bohr-Sommerfeld rules supply the spectrum of the operator. We are also interested in the elliptic case of the dimension 2 which leads to some discussion of numbers theory. Finally we consider the case of a one-dimensionnal pseudo-differential operator P_h with a non-degenerate hyperbolic singularity : the singular fiber of p in T^*M is a "hyperbolic eight" (this model is diffeomorphic to the Schrödinger operator with a double wells).

Key-words

Completely integrable systems, non-degenerate singularities, spectrum, Schrödinger operator, double wells, semi-classical analysis, microlocal analysis, semi-classical dynamics, Schrödinger equation, Bohr-Sommerfeld rules, eigenvalues asymptotics, normal forms.

Table des matières

Table des matières	15
1 Une vue panoramique sur l'analyse semi-classique	27
1.1 Introduction	27
1.2 La géométrie symplectique	28
1.2.1 La mécanique de Hamilton	28
1.2.2 Les variétés symplectiques	28
1.2.3 Le théorème de Darboux	29
1.2.4 Flot hamiltonien	30
1.2.5 Crochets de Poisson	30
1.2.6 Pour finir : un peu de topologie symplectique	31
1.3 Mécanique quantique et théorie spectrale	31
1.3.1 La révolution de la physique	31
1.3.2 Rappels de théorie spectrale hilbertienne	32
1.3.3 Dynamique quantique et groupe d'évolution	35
1.4 Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger	36
1.4.1 Le contexte	37
1.4.2 Motivation	37
1.4.3 Le caractère auto-adjoint	38
1.4.4 Le spectre de l'opérateur est-il discret ?	38
1.4.5 Un aperçu sur les problèmes directs	39
1.4.6 Problèmes inverses : la géométrie spectrale	41
1.4.7 Métrique de Agmon et puits multiples	43
1.5 Quantification et limite semi-classique	45
1.5.1 Problématique	45
1.5.2 Impossibilité de la quantification idéale	45
1.5.3 Principe de l'analyse semi-classique	46
1.6 Opérateurs pseudo-différentiels	47
1.6.1 De Fourier à nos jours...	47
1.6.2 Symboles et transformée de Weyl	47
1.6.3 Quelques propriétés	48
1.7 Analyse microlocale	49
1.7.1 Fonctions admissibles	49
1.7.2 Micro-support et microfonctions	50
1.7.3 Analyse microlocale et faisceaux	51
1.7.4 Théorème d'Egorov et opérateurs intégraux de Fourier	51
1.8 Vers la quantification par déformation	52
1.8.1 Cas de T^*X	52

1.8.2	Cas général	52
1.9	Les systèmes complètement intégrables	53
1.9.1	Définitions	53
1.9.2	Théorie locale	54
1.9.3	Théorie semi-globale	56
2	Dynamique dans le cas elliptique en dimension 1	61
2.1	Introduction	61
2.2	Le contexte	62
2.2.1	Règles de Bohr-Sommerfeld régulières	62
2.2.2	Forme normale autour d'une singularité elliptique	64
2.2.3	Fonctions d'auto-corrélation	64
2.3	Préliminaires	65
2.3.1	Choix d'un état initial localisé en énergie	65
2.3.2	Premières propriétés de la suite $(a_n)_n$	66
2.3.3	Découpe de la série	69
2.3.4	Stratégie de l'étude dynamique	69
2.4	Période classique et terme principal de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique	70
2.4.1	Définition d'une échelle de temps spécifique	70
2.4.2	Périodicité du terme principal en limite semi-classique . .	71
2.4.2.1	Comportement sur une période classique	72
2.4.3	Comparaison de la période classique avec l'échelle h^α . .	75
2.5	Terme d'ordre deux de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique	75
2.5.1	Définition d'une nouvelle échelle de temps spécifique . .	76
2.5.2	Théorème de pleine renaissance	77
2.5.3	Théorème de renaissances fractionnaire	79
2.5.3.1	Préliminaires arithmétiques	79
2.5.3.2	Le principal théorème	82
2.5.4	Comparaison des échelles de temps d'approximation, classique et de renaissances	85
2.6	Calcul explicite du module des coefficients de renaissance . . .	85
2.6.1	Quelques remarques préliminaires	85
2.6.2	Cas où on choisit $l = q$	86
2.6.2.1	Cas où q est impair	87
2.6.2.2	Cas où q est pair	88
2.6.3	Cas où $l = \frac{q}{2}$	91
2.7	Quelques raffinements	92
2.7.1	Théorèmes d'écroulement	92
2.7.2	Affinage d'ordre 3	97
2.8	Bilan des résultats obtenus dans ce chapitre	105
2.8.1	Échelles de temps	105
2.8.2	Période classique	106
2.8.3	Pleine renaissance	106
2.8.4	Phénomènes de renaissances fractionnaires	107
2.8.5	Phénomènes d'écroulement des paquets d'ondes Gaus- sien	107
2.8.6	Approximation cubique : fonction $\mathbf{a}_3(t)$	107
2.9	Simulations numériques	107

3	Dynamique dans le cas elliptique en dimension 2	113
3.1	Introduction	113
3.2	Contexte	113
3.2.1	Introduction	113
3.2.2	Oscillateur harmonique quantique en dimension 2 . . .	114
3.2.3	Polynôme d'oscillateur harmonique	115
3.2.4	Dynamique semi classique associée	117
3.3	Préliminaires sur la dynamique	117
3.3.1	Choix d'un état initial localisé en énergie	117
3.3.2	Découpe de la série	123
3.4	Etude à l'ordre 1	123
3.4.1	Périodes semi-classiques et classiques	124
3.4.1.1	Périodes semi-classique	124
3.4.1.2	Périodes classiques	126
3.4.1.3	Remarques sur les échelles de temps	129
3.4.1.4	Interprétation géométrique des périodes	129
3.4.1.5	Comportement sur les périodes classiques	133
3.4.2	Cas où $\frac{T_{cl1}}{T_{cl2}} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$	137
3.4.3	Cas où $\frac{T_{cl1}}{T_{cl2}} = \frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$	138
3.4.3.1	Généralités	138
3.4.3.2	Cas où $\frac{b}{a}$ vérifie une condition diophantienne	140
3.4.3.3	Utilisation des fractions continues	146
3.4.4	Comptage de la suite $(q_n(\theta))_n$	151
3.5	Étude à l'ordre 2	153
3.5.1	Périodes de renaissances	153
3.5.2	Remarque sur les échelle des temps	158
3.5.3	Théorème de renaissance	158
3.5.3.1	Hypothèse de résonance	158
3.5.3.2	Quelques lemmes	159
3.5.3.3	Calcul des coefficients	162
4	Sur le spectre semi-classique d'un hamiltonien de dimension 1 au-	
	tour d'une singularité hyperbolique	165
4.1	Introduction	165
4.2	La formule de Colin de Verdière-Parisse	167
4.2.1	Le cadre	167
4.2.2	Énoncé de la formule	168
4.2.3	Les grandes étapes de la preuve	168
4.2.4	Du singulier au régulier	175
4.3	La forme du spectre autour de la singularité	176
4.3.1	Introduction et résultats	176
4.3.2	Interprétation géométrique	176
4.3.3	Démonstration du théorème 4.3.1	179
4.3.4	Quelques remarques	192
5	Dynamique hyperbolique	195
5.1	Introduction	195
5.2	Expression de la fonction d'auto-corrélation	196

5.3	Choix d'un état initial localisé en énergie	197
5.3.1	Preliminaires	197
5.3.2	Première définition (provisoire)	199
5.3.3	Ajustement des constantes de dilatation α' et γ'	200
5.3.4	Seconde définition (provisoire)	200
5.4	Etude d'une fonction d'auto-corrélation partielle	201
5.4.1	Découpe de la série	203
5.5	Détermination du terme principal de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique	203
5.5.1	But	203
5.5.2	Définition d'une échelle de temps spécifique	205
5.6	Comportement semi-classique du terme principal	207
5.6.1	Périodicité du terme principal en limite semi-classique	207
5.6.2	Interprétation géométrique de la période	207
5.6.3	Echelle de temps spécifique et période classique	207
5.6.4	Comportement sur une période classique	208
5.7	Détermination du terme d'ordre deux de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique	210
5.7.1	But	211
5.7.2	Définition d'une nouvelle échelle de temps spécifique	213
5.8	Théorème de pleine renaissance	215
5.9	Théorème de renaissances fractionnaires	217
5.9.1	Le principal théorème	217
5.9.2	Calcul explicite du module des coefficients de renaissance	221
5.9.2.1	Cas où on choisit $l = q$	221
5.9.2.2	Cas où $l = \frac{q}{2}$	222
5.9.3	Comparaison des échelles de temps d'approximation, classique et de renaissances	222

Bibliographie

233

Prologue

Motivation et contexte

En physique quantique, les questions de stabilité de la dynamique engendrée par une perturbation d'un hamiltonien ont été très étudiées ces dernières années, surtout dans le domaine du chaos quantique [GVJZ]. Même dans le cas de l'opérateur de Schrödinger l'étude de la dynamique peut être très difficile ; aussi on aimerait pouvoir disposer de n'importe quelles approximations physiques raisonnables nous permettant de prévoir quelques propriétés quantiques d'un système. La mécanique classique, qui, sur beaucoup de points est plus simple que la mécanique quantique, décrit parfaitement bon nombre de systèmes physiques élémentaires. Ainsi on peut espérer que la mécanique quantique soit une généralisation de la mécanique classique, dans le sens où on aimerait récupérer les propriétés classiques d'un système en faisant des approximations sur les propriétés quantiques de ce même système. En fait, le principe de correspondance de Bohr affirme que la mécanique classique est dans un sens la limite de la mécanique quantique quand $\hbar$ tend vers zéro. Ainsi, une des voies possibles pour l'étude d'un opérateur perturbé consiste à se placer à l'interface entre théorie classique et quantique. Le régime, appelé semi-classique, dans lequel ces deux théories se recouvrent, correspond à des systèmes dont les actions mises en jeu sont beaucoup plus grandes que la constante de Planck $\hbar$. Mathématiquement l'analyse semi-classique consiste donc à étudier les propriétés spectrales d'un opérateur auto-adjoint sur un hilbert quand $\hbar$ tend vers zéro.

En mécanique quantique non relativiste l'état d'un système est régi par l'équation de Schrödinger sur la variété riemannienne (M, g) :

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = P_\hbar \varphi(t)$$

avec

$$P_\hbar := -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_g + V;$$

$\hbar$ étant le paramètre semi-classique, Δ_g désignant l'opérateur de Laplace-Beltrami avec la convention "analyse" ou bien plus généralement $P_\hbar$ est un opérateur pseudo-différentiel sur $L^2(M)$. En dimension 1 ou dans des situations complètement intégrables on sait généralement bien décrire les états stationnaires, qui correspondent aux valeurs propres de l'opérateur $P_\hbar$. Par linéarité, on a donc, en principe, accès aux solutions générales de l'équation de Schrödinger. Pourtant la dynamique des solutions (comportement lorsque le temps évolue) reste sur bien des aspects mystérieuse. Dans un contexte général on s'attend

à ce qu'un état initial localisé suive en première approximation (dans la limite $h \rightarrow 0$) la trajectoire classique associée, c'est à dire le flot hamiltonien associé à la fonction classique définie sur la variété symplectique T^*M par :

$$p(x, \xi) = \|\xi\|_g^2 / 2 + V(x).$$

Des versions de ces affirmations existent dans la littérature physique pour des échelles de temps très courtes. En dimension 1 ou dans des situations complètement intégrables on s'attend à beaucoup mieux. Dans cette thèse on propose une compréhension pour des échelles de temps beaucoup plus longues (de l'ordre de $1/h^s$ avec $s > 0$ dans un contexte elliptique ; ou bien de l'ordre de $|\ln(h)|^s$ avec encore $s > 0$ dans un contexte hyperbolique). Cette étude a permis de prouver l'existence de "renaissances" du paquet d'onde, récemment mis en évidence par les physiciens ([Av-Pe], [LAS], [Robi1], [Robi2], [BKP], [Bl-Ko]). Une partie du travail que j'ai fait a été de se placer sous différentes hypothèses géométriques : le cas régulier et le cas des singularités elliptiques en dimension 1 [He-Ro] (traité indépendamment par M. Combescure et D. Robert [Co-Ro], [Rob2]), le cas elliptique en dimension 2 et le cas hyperbolique en dimension 1 [Lab2]. Le cas hyperbolique a nécessité le calcul du spectre d'un opérateur de Schrödinger autour d'une singularité hyperbolique ; voir [Lab2].

Dynamique quantique

Généralités

La dynamique constitue un aspect essentiel de la mécanique quantique, elle détermine au cours du temps les états quantiques, et par conséquent l'espace de Hilbert des états ou des opérateurs agissant sur cet espace. En considérant une grandeur physique mesurable par un observateur, les postulats de la mécanique quantique indiquent qu'il peut être associé à cette grandeur physique un opérateur auto-adjoint agissant sur l'espace des états, et que le résultat de la mesure donnera : soit la valeur propre de l'opérateur considéré si l'état quantique est unique (cas pur), soit la valeur propre pondérée par la probabilité d'existence d'un état quantique. La mesure de l'observable peut changer au cours du temps, est-ce l'état quantique qui va évoluer au cours du temps ? Ou est-ce l'opérateur ? Ou encore les deux en même temps ? Ces différents points de vue conduisent à des descriptions différentes de la dynamique quantique. Le point de vue de Schrödinger est que l'espace des états du Hilbert évoluent au cours du temps tandis que les opérateurs sont invariants temporellement. A partir d'un opérateur auto-adjoint P_h sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, on lui associe le groupe unitaire fortement continu (voir aussi les rappels du chapitre 1) :

$$U(t) = \left\{ e^{-i\frac{t}{h}P_h} \right\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Pour tout état initial $\psi_0 \in \mathcal{H}$, l'évolution quantique du vecteur ψ_0 par l'hamiltonien P_h au cours du temps est donnée par

$$\psi(t) = U(t)\psi_0 \in \mathcal{H};$$

notons bien qu'en dérivant la précédente expression on obtient :

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}P_h\psi(t)$$

c'est l'équation de Schrödinger qui régit toute la mécanique quantique !

Fonction de retour et d'auto-corrélation

Un moyen¹ simple pour essayer de comprendre une dynamique quantique est celui consistant à mesurer comment un état "revient ou non sur sa position initiale". On va définir et utiliser un analogue quantique de la fonction de retour de Poincaré de la mécanique classique hamiltonienne.

Définition. On définit la fonction de retour quantique $\mathbf{r}$ de l'hamiltonien P_h et de vecteur initial ψ_0 par :

$$\mathbf{r}(t) := \langle \psi(t), \psi_0 \rangle_{\mathcal{H}} ;$$

et la fonction d'auto-corrélation quantique par :

$$\mathbf{a}(t) := |\mathbf{r}(t)| = |\langle \psi(t), \psi_0 \rangle_{\mathcal{H}}|.$$

Cette quantité mesure en quelque sorte dans la dynamique le retour sur l'état initial. Si le vecteur $\psi(t)$ est complètement délocalisé par rapport au vecteur initial ψ_0 alors la fonction $\mathbf{a}(t)$ est nulle ; si par contre le vecteur $\psi(t)$ est localisé la fonction $\mathbf{a}(t)$ est alors égale à 1.

Cas d'un opérateur diagonalisable en base hilbertienne

Considérons le cas d'un opérateur linéaire auto-adjoint P_h sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ tel que son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres $(\lambda_n(h))_{n \geq 1}$ de multiplicité finie et s'accumulant en $+\infty$:

$$\lambda_1(h) \leq \lambda_2(h) \leq \dots \leq \lambda_n(h) \rightarrow +\infty$$

et tel que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des vecteurs propres associés forment une base hilbertienne de l'espace $\mathcal{H}$.

Exemple. L'opérateur de Schrödinger sur (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$:

$$P_h = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_g + V$$

avec V une fonction de $L_{loc}^\infty(M)$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. La théorie générale (voir chapitre 1) nous informe que le spectre de l'opérateur de Schrödinger P_h est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie s'accumulant en $+\infty$ et que les vecteurs propres forment une base hilbertienne de $L^2(M)$.

¹Il faut noter que ce moyen est pertinent dans le cadre des systèmes intégrables avec des trajectoires fermées.

Dans ce contexte les expressions de la fonction de retour et d'auto-corrélation prennent alors une forme plus familière. En effet, lorsque on connaît le spectre de l'opérateur P_h , les fonctions de retour et d'auto-corrélation s'expriment simplement avec des séries de fonctions. Expliquons ceci : pour tout réel t et quel que soit l'entier n nous avons :

$$\left(e^{-i\frac{t}{\hbar}P_h}\right)e_n = \left(e^{-i\frac{t}{\hbar}\lambda_n(h)}\right)e_n;$$

ainsi pour un vecteur initial $\psi_0 \in D(P_h) \subset \mathcal{H}$ et en notant par $(a_n(h))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $l^2(\mathbb{N})$ donnée par $a_n(h) := \pi(\psi_0)$ où π est l'opérateur unitaire de projection suivant :

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{H} \rightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ \varphi \mapsto \langle \varphi, e_n \rangle_{\mathcal{H}} \end{cases}$$

on obtient alors que pour tout réel t :

$$\begin{aligned} \psi(t) = U(t)\psi_0 &= \left(e^{-i\frac{t}{\hbar}P_h}\right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(h)e_n\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(h)e^{-i\frac{t}{\hbar}\lambda_n(h)}e_n. \end{aligned}$$

Un simple calcul donne l'expression des fonctions de retour et d'auto-corrélation dans la base des vecteurs propres $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$: pour tout réel t nous obtenons les égalités

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-i\frac{t}{\hbar}\lambda_n(h)}.$$

On vient de voir qu'un moyen de comprendre la dynamique quantique d'un système est d'étudier la fonction $\mathbf{a}(t)$ au cours du temps. La principale difficulté est alors purement spectrale, en effet cette méthode nécessite de plus ou moins connaître (au moins localement) les valeurs propres $(\lambda_n(h))_n$ de l'opérateur P_h .

Etude de la fonction d'auto-corrélation

Sous les hypothèses précédentes la fonction d'auto-corrélation quantique s'écrit :

$$\mathbf{a}(t) = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-i\frac{t}{\hbar}\lambda_n(h)} \right|.$$

Ensuite la première idée pour l'étude d'une telle série de fonctions (idée que l'on trouve dans la littérature physique [Av-Pe], [LAS], [BKP], [Bl-Ko], [Robi1], [Robi2]) consiste grosso-modo à faire un développement limité des valeurs propres $(\lambda_n(h))_n$ autour d'un niveau d'énergie E fixé. Plus précisément supposons que les valeurs propres $(\lambda_n(h))_n$ de notre opérateur P_h s'écrivent sous la forme $\lambda_n(h) = f_h(n)$ avec f_h une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On écrit alors une formule de Taylor formelle autour du nombre entier quantique n_0 (qui correspond le plus souvent à l'indice de la valeur propre la plus proche du réel E) :

$$f_h(n) = f_h(n_0) + f'_h(n_0)(n - n_0) + \frac{f''_h(n_0)}{2}(n - n_0)^2 + \frac{f_h^{(3)}(n_0)}{6}(n - n_0)^3 + \dots$$

et donc

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_n(h)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-it \left[\frac{f_h(n_0)}{h} + \frac{f'_h(n_0)}{h} (n-n_0) + \frac{f''_h(n_0)}{2h} (n-n_0)^2 + \frac{f_h^{(3)}(n_0)}{6} (n-n_0)^3 + \dots \right]}; \end{aligned}$$

et par conséquent la fonction d'auto-corrélation quantique s'écrit

$$\mathbf{a}(t) = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-it \left[\frac{f_h(n_0)}{h} (n-n_0) + \frac{f''_h(n_0)}{2h} (n-n_0)^2 + \frac{f_h^{(3)}(n_0)}{6} (n-n_0)^3 + \dots \right]} \right|.$$

La seconde idée de l'étude est de simplifier cette série : en commençant par ne garder que la partie linéaire du développement limité :

$$\mathbf{a}_1(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-it \frac{f'_h(n_0)}{h} (n-n_0)};$$

puis ensuite en gardant à la fois la partie linéaire et la partie quadratique du développement limité :

$$\mathbf{a}_2(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-it \left[\frac{f'_h(n_0)}{h} (n-n_0) + \frac{f''_h(n_0)}{2h} (n-n_0)^2 \right]}.$$

Maintenant la question sous-jacente à tout cela est la suivante : "dans quelle mesure à t'on le droit de faire ceci ? Et comment faire ?". Les étapes à cette problématique sont :

1. d'abord il faut légitimer cette "formule" de Taylor sur les valeurs propres.
2. Ensuite, il faut dire dans quelles conditions, en particulier sur quelles échelles de temps on peut approximer la fonction d'auto-corrélation $\mathbf{a}$ par les fonctions $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$?
3. Enfin vient la question de comment étudier ces fonctions d'approximations $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$.

La réponse à la première question vient du contexte mathématique : de l'hamiltonien de départ et plus précisément de son spectre. Il faut en effet que le spectre de notre opérateur puisse effectivement s'écrire sous une forme du type $\lambda_n(h) = f_h(n)$. Dans cette thèse, on se place dans trois contextes géométriques différents qui nous amène à ce type d'écriture :

"Théorème". *Sous des hypothèses géométriques et autres... le spectre de l'opérateur P_h s'écrit sous la forme $\lambda_n(h) = f_h(n)$; où f_h est une fonction admettant un développement asymptotique en puissance de h avec des coefficients de classe C^∞ .*

Ensuite les conditions d'approximations dépendent de la géométrie sous-jacente au symbole principal p de l'opérateur P_h et de l'état initial ψ_0 . Ces approximations sont bien sur valides sur des échelles de temps qui dépendent du contexte géométrique et encore de l'état initial ψ_0 . Dans les chapitres de

cette thèse on aura a disposition des théorèmes d'approximations analogue au :

“Théorème”. *Sous des hypothèses géométriques et autres... pour $j \in \{1, 2\}$, sur une certaine échelle de temps $[0, T_j]$ nous avons $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_j(t) + r_j(h)$; où pour $h \rightarrow 0$ le reste $r_j(h) \rightarrow 0$ uniformément sur le compact $[0, T_j]$.*

Enfin, on voit immédiatement que la fonction $t \mapsto \mathbf{a}_1(t)$ est T_{cl} -périodique, où $T_{cl} := \frac{2\pi h}{f_h'(n_0)}$. L'étude de la fonction $t \mapsto \mathbf{a}_2(t)$ nous amène une nouvelle période égale à $T_{ren} := \frac{4\pi h}{f_h''(n_0)}$: on a effet des théorème du type :

“Théorème”. (Théorème de pleine renaissance). *La fonction $t \mapsto \mathbf{a}_2(t)$ est (modulo un reste dépendant du contexte géométrique) T_{ren} -périodique.*

Dans ces chapitres on s'intéresse aussi a ce qui se passe en $t = \frac{p}{q}T_{ren}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction rationnelle, et là dans la plupart des cas un phénomène de clonage multiples du vecteur initial ψ_0 apparait. Pour être précis on a des théorèmes du type :

“Théorème”. (Théorème de renaissances fractionnaires). *Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$; il existe une famille de q nombre complexes dépendant du paramètre h ; $(b_k(q))_{k \in \{0 \dots q-1\}}$ telle que sur une certaine échelle de temps et modulo un reste dépendant du contexte géométrique*

$$\mathbf{a}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) = \sum_{k=0}^{q-1} b_k(q) \mathbf{a}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{k}{q} + \frac{p}{q} N_h \right) \right).$$

où $N_h := E \left[\frac{T_{ren}}{T_{cl}} \right]$.

On arrive d'ailleurs à donner une formule pour calculer le module de chacun des coefficients $b_k(q)$ suivant la parité de l'entier q . Dans le cas où q est impair on dispose de :

“Théorème”. *Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et q impair, alors nous avons pour tout $k \in \{0 \dots q-1\}$*

$$|b_k(q)|^2 = \frac{1}{q}.$$

Et puis, dans le cas où q est pair :

“Théorème”. *Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et q pair; nous avons pour tout $k \in \{0 \dots q-1\}$*

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{q}{2} \text{ est pair, alors } |b_k(q)|^2 &= \begin{cases} \frac{2}{q} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \\ \text{si } \frac{q}{2} \text{ est impair, alors } |b_k(q)|^2 &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{q} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Plan de la thèse

Chapitre 1 : une vue panoramique sur l'analyse semi-classique

Ce premier chapitre est destiné aux lecteurs non-spécialistes de l'analyse semi-classique. Ce chapitre est une tentative de panorama, personnel et donc forcément partiel, de l'analyse semi-classique. Sa présence sert aussi à rappeler quelques définitions, outils et théorèmes bien utiles dans la suite de cette thèse. Une partie de ce chapitre a fait l'objet d'une publication [Lab1].

Chapitre 2 : dynamique elliptique en dimension 1

Dans ce chapitre on se place dans la cadre d'un hamiltonien classique p sans singularités (ou avec une singularité du type elliptique). Les règles de Bohr-Sommerfeld régulières donnent alors le spectre de l'hamiltonien quantique P_h associé : le spectre de l'opérateur P_h est alors une suite de valeurs propres régulièrement espacées avec un interstice d'ordre h . L'étude de la dynamique semi-classique associée à un tel hamiltonien n'est pas vraiment nouvelle : dans la littérature physique les articles de Averbukh, Pereleman [Av-Pe]; Leichtle, Averbukh, Schleich [LAS]; Bluhm, Kosteletzky, Porter [BKP], [Bl-Ko] et de Robinnet [Robi1], [Robi2] semblent faire référence pour l'aspect physique. Ces articles de physique théorique donnent les idées mathématiques essentielles mais n'offrent pas des justifications mathématiques très rigoureuses. Indépendamment de mes travaux M. Combescure et D. Robert [Co-Ro] et [Rob2] ont précisément travaillé sur une justification mathématique rigoureuse de cette dynamique en temps long. Très récemment T. Paul [Pau1], [Pau2], [Pau3] a aussi travaillé sur ce sujet. Dans ce chapitre on trouvera une présentation légèrement différente et des détails supplémentaires par rapport aux travaux de M. Combescure et de D. Robert. En particulier en ce qui concerne les renaissances fractionnaires des paquet d'ondes. Dans ce chapitre on montre d'abord que sur des échelles de temps courtes la dynamique est périodique et suit le mouvement géométrique classique associé. Un vecteur initial ψ_0 localisé suit la dynamique classique associée à p , c'est à dire une trajectoire elliptique et périodique avec une période T_{cl} indépendante de h . Ensuite sur des échelles de temps plus grandes une nouvelle période non géométrique apparaît. Cette période T_{ren} (dite période de renaissance) est de l'ordre de $1/h$; le vecteur $\psi(T_{ren})$ reprend sa forme initial ψ_0 . Encore plus surprenant quand on observe ce qui se passe aux temps $\frac{p}{q}T_{ren}$, où $\frac{p}{q}$ est une fraction rationnelle, on constate qu'il y a un phénomène de clonage du vecteur initial : en quelque sorte que le vecteur $\psi\left(\frac{p}{q}T_{ren}\right)$ s'écrit comme une combinaison linéaire complexe finie de translaté du vecteur initial ψ_0 . Dans ce chapitre on arrive à décrire ces coefficients complexes : on arrive, suivant les propriétés arithmétiques de la fraction p/q à donner le nombre de coefficients non nuls et la valeur de leurs modules. Pour finir on se placera dans un cadre gaussien (i.e on choisira une gaussienne pour vecteur initial ψ_0) ce qui permettra de pouvoir faire des calculs exacts et de faire une description analytique plus détaillée de ces phénomènes.

Chapitre 3 : Dynamique elliptique en dimension 2

Dans ce chapitre on se concentre sur le pendant en dimension 2 de la dynamique du modèle elliptique uni-dimensionnelle traité au chapitre précédent. Ici l'hamiltonien de la dynamique est alors un opérateur auto-adjoint avec domaine inclus dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$; et ayant un spectre discret du type $F(h\mathbb{Z}, h\mathbb{Z})$, F étant un polynôme à deux indéterminées sur le corps des réels. A l'instar de la dimension 1 un vecteur initial ψ_0 localisé suit en première approximation la dynamique classique associée à l'hamiltonien de départ. En dimension 2, sur des échelles de temps courtes cette dynamique est nettement plus complexe. Le flot hamiltonien classique s'enroule autour d'un tore de dimension 2, il y a alors deux périodes classiques (qui sont d'ordre $O(1)$). En première approximation la fonction d'auto-corrélation (qui une fois réécrite est toujours une série de fonctions) de notre système bi-dimensionnel reste en principe aussi simple à étudier qu'en dimension 1, mais la présence des deux périodes classiques compliquent nettement la compréhension de l'évolution de la fonction d'auto-corrélation pour les échelles de temps courtes. Dans ce chapitre on propose une étude au premier ordre de la dynamique semi-classique en fonction de la commensurabilité de ces deux périodes classiques ; ce qui nous amène à quelques discussions de théorie des nombres. Lorsque on regarde la dynamique sur des échelles plus grandes il y a 3 périodes de renaissance (d'ordre $1/h$) qui apparaissent. Sous une hypothèse de commensurabilité entre ces 3 périodes on arrive à écrire un analogue du théorème de renaissance du cas uni-dimensionnel.

Chapitre 4 : Sur le spectre semi-classique d'un système intégrable de dimension 1 autour d'une singularité hyperbolique

Dans une série de trois articles [Co-Pa1], [Co-Pa2] et [Co-Pa3] Y. Colin de Verdière et B. Parisse se sont intéressés au spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger, en dimension 1 avec un potentiel ayant un maximum local non-dégénéré, c'est à dire avec un potentiel type double puits. Dans la classification des singularités de l'application moment d'un système complètement intégrable le double puits représente le cas des singularités non-dégénérées de type hyperbolique. Dans [Co-Pa3] Y. Colin de Verdière et B. Parisse traitent de manière générale l'étude des singularités. Dans [Co-Pa1] et [Co-Pa2] les deux auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour trouver le spectre semi-classique dans un compact de diamètre h centré autour de l'origine de l'opérateur linéaire :

$$P_h := -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V$$

avec un potentiel V type double puits : c'est-à-dire avec une fonction potentielle $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$$

et V possédant exactement un maximum local non dégénéré, que l'on supposera par exemple atteint en 0. Dans la première partie de ce chapitre on

rappelle la formule donnée par Y. Colin de Verdière et B. Parisse. Dans la seconde partie on utilise cette formule pour expliciter, dans une certaine mesure, le spectre de l'opérateur P_h . On montre en particulier le :

Théorème. [Lab2]. *Le spectre semi-classique de l'opérateur P_h dans le compact $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$ s'écrit comme la réunion disjointe*

$$(\alpha_k(h))_{k \in I_h} \sqcup (\beta_l(h))_{l \in J_h}$$

de deux familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ s'écrivant $\alpha_k(h) := \sqrt{h}\mathcal{A}_h(2\pi k)$, $\beta_l(h) := \sqrt{h}\mathcal{B}_h(2\pi l)$; les fonctions $\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{B}_h$ étant de classe C^∞ . De plus les familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ sont strictement décroissantes et en quinconce :

$$\beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

En outre l'interstice spectral est de l'ordre de $O(h/|\ln(h)|)$: il existe C, C' deux constantes réelles strictement positives telles que :

$$\frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}, \quad \frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\beta_{k+1}(h) - \beta_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}.$$

Qui a pour conséquence immédiate le :

Corollaire. *Le nombre de valeurs propres de l'opérateur P_h dans le compact $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$ est de l'ordre de $|\ln(h)| / \sqrt{h}$.*

Ce chapitre a fait l'objet d'une pré-publication aux *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie*, et une publication aux *Annales Scientifiques section Mathématique de Toulouse* [Lab2].

Chapitre 5 : Dynamique hyperbolique

Dans ce chapitre on étudie la dynamique semi-classique en temps long dans le cas d'un hamiltonien quantique P_h de dimension 1 avec une singularité du type hyperbolique ; ce qui est localement, plus ou moins isomorphe au cas d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel type double puits. C'est en fait exactement le cadre mathématique du précédent chapitre. La singularité de l'hamiltonien classique se situe donc au maxima local du potentiel (donc en 0 ici). On va alors utiliser la description locale autour de l'origine du spectre de l'opérateur P_h pour comprendre la dynamique semi-classique engendrée par ce dernier. A l'instar des chapitres 2 et 3 on propose une étude de la dynamique en temps long de ce modèle. Le modèle du double puits étant par nature plus complexe que le modèle elliptique ; l'étude de la dynamique est tout de même beaucoup plus partielle et moins descriptive que dans les cas elliptiques de la dimension 1 et 2.

Chapitre 1

Une vue panoramique sur l'analyse semi-classique

Passer de la mécanique de Newton à celle d'Einstein doit être un peu, pour le mathématicien comme de passer du bon vieux dialecte provençal à l'argot parisien dernier cri. Par contre, passer à la mécanique quantique, j'imagine c'est passer au chinois.

-ALEXANDRE GROTHENDIECK [Grot], Récoltes et Semailles (1986).

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente un rapide et partiel survol de l'analyse semi-classique. Cette théorie mathématique est un carrefour entre la géométrie et la théorie spectrale. Comme ce chapitre ne contient que des résultats standards, on ne trouvera que quelques démonstrations, mais on donnera des références précises. Ce chapitre ne prétend à aucune originalité dans les résultats. Pour plus de détails sur la géométrie symplectique voir par exemple les premiers chapitres des livres de M. Audin [Aud1] et [Aud2], voir aussi les ouvrages de A.T. Fomenko [Fom1], [Fom2]. On peut aussi consulter le très bon livre de D. McDuff et D. Salomon [MD-Sa]. Pour les généralités sur le formalisme mathématique de la mécanique quantique on peut se reporter au livre [Gu-Si] ou bien au polycopié de P. Cartier [Cart]. Pour la partie théorie spectrale, voir par exemple le livre de P. Lévy-Bruhl [Le-Br], le livre de T. Kato [Kat1], ou encore la collection des Reed-Simon [Re-Si]. En ce qui concerne la quantification voir par exemple le livre A. Cattaneo, B. Keller, C. Torrosian et A. Bruguières [CKTB]. Enfin, pour l'analyse semi-classique voir les références classiques : le livre de D. Robert [Rob1], celui de M. Dimassi et J. Sjöstrand [Di-Sj], le livre de A. Martinez [Mar] et le polycopié de Y. Colin de Verdière [Col9]. Pour la partie analyse microlocale, voir [VuN3], [VuN4], [Col9], [Gr-Sj]. En ce qui concerne les systèmes intégrables symplectique on pourra voir [Aud1], [Aud2], [Mir] et [VuN4]. Le récent livre de S. Vu Ngoc [VuN4] propose un grand panorama très complet sur les systèmes intégrables symplectique et semi-classique.

1.2 La géométrie symplectique

A la différence de la géométrie riemannienne, la géométrie symplectique est une géométrie de mesure de surface, dédiée à la base pour la formulation de la mécanique de Hamilton, elle joue aussi un rôle très important à l'intérieur même des mathématiques, notamment en topologie. Pour commencer on définira la notion de variété symplectique, on donnera ensuite des exemples simples, comme par exemple le fait que pour n'importe quelle variété différentiable M , on peut munir son fibré cotangent T^*M d'une structure symplectique. On verra ensuite les principales caractéristiques de la géométrie symplectique.

1.2.1 La mécanique de Hamilton

La mécanique de Hamilton par rapport à la formulation de Lagrange n'apporte rien de nouveau sur le contenu physique, mais elle offre un cadre géométrique puissant, elle apporte une nouvelle façon de voir la physique : une façon moderne et géométrique. Une des principales caractéristique de la physique moderne, c'est la géométrie (relativité générale, cordes...). La géométrie riemannienne est une généralisation de l'ancienne géométrie euclidienne, elle est liée à la théorie de la relativité générale et à la théorie des jauges. Il existe une autre géométrie, encore plus liée à la physique : la géométrie symplectique. Moins connue que sa cousine riemannienne, elle est pourtant très riche, elle formalise parfaitement la mécanique de Hamilton. Dans la théorie d'Hamilton, les particules physiques sont décrites par leurs positions et leurs vitesses ; par exemple dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ un point matériel est caractérisé par un vecteur $(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^6$. Pour un hamiltonien $f \in C^\infty(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$, la dynamique est alors donnée par les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j = -\frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \dot{x}_j = \frac{\partial f}{\partial \xi_j}. \end{cases}$$

1.2.2 Les variétés symplectiques

Définition 1.2.1. Une variété symplectique (M, ω) est une variété différentiable de dimension m muni d'une 2-forme ω fermée et non-dégénérée.

Rappelons que non-dégénérée signifie que pour tout point x de la variété M , la forme bilinéaire $\omega(x)$ est non-dégénérée sur l'espace vectoriel T_x^*M . Ainsi comme pour tout point x de M , la forme bilinéaire ω est à la fois non-dégénérée et alternée, la dimension de l'espace T_x^*M doit être nécessairement paire ; ainsi la dimension de la variété M est elle aussi paire : $m = 2n$. Une variété symplectique (M, ω) est naturellement munie d'une forme volume $\tau = \frac{1}{n!} \omega^n$, où $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$, on a donc à disposition une orientation et une mesure de Lebesgue sur la variété M . Donnons maintenant quelques exemples standards et importants de variétés symplectiques :

Exemple 1.2.2. L'espace $\mathbb{R}^{2n}$: c'est l'exemple type, en notant par $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$, et en notant par $dx_j := (x_j)^*$, $j \in$

$\{1, \dots, 2n\}$ la base duale de $\mathbb{R}^{2n}$; alors la 2-forme $\omega_0 = \sum_{i,j=1}^n dx_i \wedge dx_j$ munie la variété $\mathbb{R}^{2n}$ d'une structure symplectique. Si en particulier $n = 1$, le 2-forme ω_0 est un déterminant, c'est alors une mesure d'aire algébrique sur le plan.

Remarque 1.2.3. Il est bon de noter que la géométrie symplectique ne donne que des notions d'aire, il n'y a pas de notions de longueurs, encore moins de notions d'angles, en effet, tout vecteur est orthogonal à lui même !

Exemple 1.2.4. La sphère S^2 : sur S^2 on définit pour tout $x \in S^2$ la 2-forme $\omega_x(\eta, \xi) := \langle x, \eta \wedge \xi \rangle_{\mathbb{R}^3}$ avec $(\eta, \xi) \in (T_x S^2)^2 \subset \mathbb{R}^3$ ce qui munie la 2-sphère d'une structure de variété symplectique.

Plus généralement on a :

Exemple 1.2.5. Sur une surface : il suffit de prendre $\omega = \sqrt{|g|} dq \wedge dp$, où $|g| = \det(g_{i,j})$ dans la carte de coordonnées locales (p, q) .

Finissons maintenant l'exemple fondamental :

Exemple 1.2.6. Sur le fibré cotangent d'une variété : Le fibré cotangent d'une variété différentiable est naturellement muni d'une structure symplectique. En effet, pour toute variété M de classe C^∞ de dimension n , on peut munir de façon intrinsèque son fibré cotangent T^*M d'une structure de variété symplectique (T^*M, ω) de dimension $2n$ définie par la différentielle extérieure $\omega = d\alpha$ de la 1-forme de Liouville α .

1.2.3 Le théorème de Darboux

Définition 1.2.7. Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectique de même dimension, un symplectomorphisme de M_1 sur M_2 est un difféomorphisme $f : M_1 \rightarrow M_2$ tel que $f^* \omega_2 = \omega_1$.

Sur les variétés symplectique, le premier résultat géométrique majeur est le théorème de Darboux qui donne la "géométrie" locale de ces variétés.

Théorème 1.2.8. (Darboux). Toute variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ est localement symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Ce qui signifie que pour tout point $x_0 \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x_0 et il existe un système $(x_1, \dots, x_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ de coordonnées locales¹ tel que sur l'ouvert U on ait l'expression :

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n d\zeta_i \wedge dx_j.$$

Le théorème de Darboux établit une différence majeure entre les géométries riemannienne et symplectique, en effet : dans le premier cas, il y a un invariant local : la courbure, alors que dans le second cas tout est localement isomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

¹ dites coordonnées canonique, ou encore coordonnées de Darboux.

1.2.4 Flot hamiltonien

Comme la 2-forme ω est non-dégénérée, pour tout point x_0 de M , on peut avec la 2-forme ω , identifier les deux espaces vectoriels $T_{x_0}^*M$ et $T_{x_0}M$. Ainsi pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, par dualité il existe un unique vecteur $\chi_f(x_0) \in T_{x_0}M$ tel que pour tout $v_{x_0} \in T_{x_0}M$ on ait $\omega(x_0)(\chi_f(x_0), v_{x_0}) = -df(x_0).v_{x_0}$. Ensuite, pris fibres par fibres, nous avons l'existence et l'unicité d'un champs de vecteur $\chi_f \in \Gamma(M)$ tel que pour tout champs de vecteur $v \in \Gamma(M)$ on ait $:\omega(\chi_f, v) = -df.v$; c'est-à-dire tel que $i_{\chi_f}(\omega) = -df$. En coordonnées locales de Darboux on a alors l'écriture :

$$\chi_f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

On note par φ_t^f le flot associé au champs de vecteur χ_f : $\varphi_t^f : m = m \mapsto \varphi_t^f(m)$. Ce flot est donné comme étant la trajectoire associé au champs de vecteur χ_f passant par le point m . C'est à dire que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\varphi_t^f(m)) = \chi_f (\varphi_t^f(m)) \\ \varphi_0^f(m) = m; \end{cases}$$

où $\frac{d}{dt} (\varphi_t^f(m)) \in T_{\varphi_t^f(m)}M$. En coordonnées de Darboux on a l'expression familière des équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_j = -\frac{\partial f}{\partial x_j} \\ \dot{x}_j = \frac{\partial f}{\partial \xi_j}. \end{cases}$$

Sur une variété riemannienne (X, g) le flot géodésique est donné par $G_t(x, v) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ où γ est la géodésique de X telle que $\gamma(0) = x \in X$ et $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x X$. Le groupe G_t à un paramètre est un groupe de difféomorphismes de T^*X (que l'on a identifié à TX via la métrique g) qui conserve le fibré unitaire UX . Ce flot est exactement le flot hamiltonien sur T^*X associé à la fonction

$$f(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

Remarque 1.2.9. Revenons maintenant à un fait important, qui justifie que la 2-forme doit être fermée : la forme ω (ainsi que la forme volume associée) est conservée par le flot hamiltonien : pour tout $t \geq 0$ on a $(\varphi_t^f)^* \omega = \omega$. Pour le voir il suffit d'écrire la définition de la dérivée de Lie : $\mathcal{L}_{\chi_f}(\omega) = \frac{d}{dt} (\varphi_t^f)^* \omega$ et d'utiliser la formule de Cartan pour voir que $\mathcal{L}_{\chi_f}(\omega) = 0$.

1.2.5 Crochets de Poisson

A partir du champ χ on peut munir $\mathcal{C}^\infty(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie : avoir une application à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, bilinéaire, alternée et vérifiant l'identité de Jacobi. Pour toutes fonctions $(f, g) \in (\mathcal{C}^\infty(M))^2$ on définit

les crochets de Poisson :

$$\{\cdot, \cdot\} : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (f, g) \mapsto \{f, g\} := \omega(\chi_f, \chi_g). \end{cases}$$

En fait l'application :

$$\chi : \mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\} \rightarrow \Gamma(M), [\cdot, \cdot]$$

est alors un homéomorphisme d'algèbre de Lie. En coordonnées de Darboux, le crochet de Poisson de deux fonctions f et g s'écrit simplement :

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}.$$

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^\infty(M)$, et notons simplement par φ_t le flot hamiltonien associé à f , alors pour tout point $m \in M$ nous avons que

$$\frac{d}{dt} (g \circ \varphi_t(m)) = \{g, f\} \circ \varphi_t(m).$$

Ainsi la fonction g est constante le long des trajectoires du flot hamiltonien associé à f , si et seulement si $\{g, f\} = 0$.

1.2.6 Pour finir : un peu de topologie symplectique

Finissons cette partie sur un résultat étonnant. Comme on vient de voir, la géométrie symplectique est isochore : elle conserve le volume ; de plus par l'absence de courbure, elle est moins rigide que la géométrie riemannienne, et on peut espérer que dans une telle géométrie on puisse "faire passer un chameau par le chat d'une aiguille", plus précisément on peut se demander si on peut plonger de manière symplectique une boule dans un cylindre de rayon plus petit. Cette question est restée ouverte jusqu'en 1985 où M. Gromov a répondu par la négation [Gro]. En notant $B^{2n}(r) := B_{\mathbb{R}^{2n}}(0, r)$ et $Z^{2n}(R) := B_{\mathbb{R}^2}(0, R) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ on a le fameux :

Théorème 1.2.10. (Gromov). *Si il existe un plongement symplectique (un plongement qui conserve la 2-forme ω_0) de $B^{2n}(r)$ dans $Z^{2n}(R)$, alors $r \leq R$.*

1.3 Mécanique quantique et théorie spectrale

1.3.1 La révolution de la physique

La physique jusqu'à la fin du XIX siècle était constituée par deux entités : tout d'abord les corpuscules, c'est-à-dire les points matériels, qui constituent la matière, la seconde entité est les ondes, qui constituent les vibrations et les rayonnements. Le mouvement des corpuscules est décrit par des trajectoires déterministes dans l'espace, on connaît à tout instant la position et la vitesse d'un corpuscule. Les ondes sont quand à elles non localisées, elles amènent des phénomènes d'interférences. Alors que les physiciens pensaient encore pouvoir tout décrire avec ces deux entités, certaines expériences, comme celle

des fentes de Young, de la photo de Wilson (1911) et même l'effet photo-électrique qui datait de 1887 ne pouvait s'expliquer avec les deux entités de base. On peut alors situer la naissance de la mécanique quantique au moment où a débuté l'interrogation des physiciens au sujet de l'interprétation des ces fameuses expériences. Au début de XX siècle, ce furent les idées révolutionnaires de Bohr, Einstein, Heisenberg, et Schrödinger qui fournirent une théorie respectable. Construite pour expliquer des phénomènes de rayonnement, cette théorie débouche sur beaucoup d'autres thèmes de la physique. Un des grands succès de la théorie quantique est que celle-ci s'attaque directement à la structure fondamentale de la matière, en expliquant notamment les structures moléculaires, atomiques et les propriétés des électrons. La mécanique quantique est à la fois un bouleversement intellectuel, culturel et philosophique. En effet, c'est une toute nouvelle façon de penser, opposée à l'intuition immédiate, et qui est nécessaire pour comprendre le monde sous un aspect quantique. Par sa puissance analytique et prédictive, elle a permis d'ouvrir de nouvelles voies dans la recherche scientifique et dans l'évolution de la technologie. La mécanique quantique décrit la réalité physique avec des principes et des postulats. Afin de mieux comprendre l'origine du cadre mathématique de cette théorie, citons quelque postulats (pour plus de détails voir par exemple [Mes]). Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ la description quantique d'un point à l'instant t se fait avec une fonction d'onde, c'est-à-dire un vecteur $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ que l'on interprète de la manière suivante : pour toute partie Ω de $\mathbb{R}^n$ le réel $\int_{\Omega} |\varphi(t)|^2 dx_1 \dots dx_n$ est la probabilité de présence de la particule dans le domaine Ω à l'instant t ; bien sur ceci impose la normalisation $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(t)|^2 dx_1 \dots dx_n = 1$. Un second principe donne la dynamique (l'analogie quantique des équations de Hamilton) : lorsque la particule est soumise à un champs de forces dérivant d'un potentiel V , la fonction d'onde associée vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\varphi(t)}{dt} = H\varphi(t)$$

où $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$. L'équation de Schrödinger tient sa justification physique des ses conséquences. Un autre principe, encore bon à mentionner est celui concernant les observables : à toute grandeur physique a on lui associe un opérateur linéaire (à domaine) auto-adjoint A agissant sur l'espaces des fonctions d'ondes de sorte que le réel $\int_{\Omega} A\varphi(t) \overline{\varphi(t)} dx_1 \dots dx_n$ représente la valeur moyenne des résultats de la mesure de la grandeur a .

1.3.2 Rappels de théorie spectrale hilbertienne

La théorie des opérateurs linéaires à domaine et l'étude de leurs réduction, ce qu'on nomme théorie spectrale constitue les fondements mathématiques de la mécanique quantique. En 1932, J. Von Neumann donne la définition abstraite des espaces de Hilbert et il montre que les points de vue de Heisenberg et de Schrödinger sont équivalents, en même temps il développe la théorie de réduction des opérateurs à domaine. Le théorème spectral est l'un des résultats les plus profonds de l'analyse moderne, et est fondamental en mécanique quantique. Grâce à ce théorème on peut introduire la notion de mesure spectrale associée à un état, cette mesure conduit à une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$, qui

amène à l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique. Le théorème spectral permet aussi des opérations sur les observables, comme la composition, qui est similaire à ce qu'on sait déjà faire en mécanique classique. En mécanique quantique, les observables sont des opérateurs auto-adjoints à domaine, et d'un point de vue technique, la difficulté de définir des fonctions d'opérateurs non bornée est levée en grande partie par le théorème spectral, plus précisément par son corollaire : le calcul fonctionnel. Un autre fait remarquable en mécanique quantique est que les opérateurs ne commutent pas, ceci conduit aux fameuses relations d'incertitude de Heisenberg.

On va rappeler quelques résultats de théorie spectrale avec cette fois des démonstrations : le lemme central au théorème spectral concernant les opérateurs non bornés est le suivant :

Lemme 1.3.1. *Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, que l'on notera plus simplement (X, μ) et F une fonction réelle finie μ presque partout sur X . Alors l'opérateur de multiplication par F définit par :*

$$M_F : D(M_F) = \left\{ \varphi \in L^2(X, \mu), F\varphi \in L^2(X, \mu) \right\} \rightarrow L^2(X, \mu)$$

$$\varphi \mapsto F\varphi$$

est un opérateur à domaine dense et auto-adjoint. En outre si F est bornée, l'opérateur M_F est continue sur $L^2(X, \mu)$ avec $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

Démonstration. Vérifions dans un premier temps que $D(M_F)$ est dense dans $L^2(X, \mu)$: Pour cela soit $\varphi \in L^2(X, \mu)$ et considérons la suite $(\varphi_n)_n$ de $L^2(X, \mu)$ définie par $\varphi_n = \varphi \chi_{(|F| \leq n)}$, χ désignant la fonction indicatrice. Compte tenu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|F\varphi_n| \leq n\varphi$, on a que $(\varphi_n)_n$ est une suite de $D(M_F)$. Ensuite comme F est finie presque partout il est clair que $(\varphi_n)_n$ converge simplement presque partout sur X vers φ . Enfin comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\varphi_n| \leq \varphi \in L^2(X, \mu)$ on a grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue que $(\varphi_n)_n$ converge dans $L^2(X, \mu)$ vers φ . Vérifions que l'opérateur M_F est fermé : considérons donc une suite $(\varphi_n)_n \in (D(M_F))^\mathbb{N}$ telle que φ_n converge dans $L^2(X, \mu)$ vers un certain $\varphi \in L^2(X, \mu)$ et que $M_F(\varphi_n)$ converge dans $L^2(X, \mu)$ vers un certain $\psi \in L^2(X, \mu)$. Avec la réciproque du théorème de convergence dominée de Lebesgue on a d'une part que, quitte à extraire une sous suite, φ_n converge simplement presque partout sur X vers φ , donc en particulier $F\varphi_n$ converge simplement presque partout sur X vers $F\varphi$, ainsi $\psi = F\varphi$ presque partout. Donc $\varphi \in D(M_F)$ et $M_F(\varphi) = \psi$. Ensuite montrons que M_F est auto-adjoint : comme F est à valeurs réelles M_F est trivialement symétrique sur $D(M_F)$, maintenant pour montrer que M_F est auto-adjoint montrons que $\ker(M_F^* \pm iI) = \{0\}$, prenons donc $\varphi \in \ker(M_F^* - iI)$, on a d'une part que $M_F^*(\varphi) = i\varphi$, et d'autre part comme pour tout $\psi \in D(M_F)$ on a $\langle M_F^*(\varphi), \psi \rangle_{L^2} = \langle \varphi, M_F(\psi) \rangle_{L^2}$, ainsi pour tout $\psi \in D(M_F)$ on a $\int_X i\varphi \bar{\psi} d\mu = \int_X \varphi \bar{F\psi} d\mu$ c'est à dire que pour tout $\psi \in D(M_F)$, $\int_X \varphi (i - F) \bar{\psi} d\mu = 0$. Donc comme $D(M_F)$ est dense dans $L^2(X, \mu)$ et F est à valeurs réelles, on a que $\varphi = 0$. De même on a que $\ker(M_F^* + iI) = \{0\}$. Donc M_F est bien auto-adjoint. Ensuite le cas où F bornée est trivial. $\square$

Citons un théorème issu de la théorie spectrale sur les $\mathbb{C}^*$ algèbres [Arv1], [Arv2] :

Théorème 1.3.2. (Théorème spectral des opérateurs normaux bornés). Soit N un opérateur borné normal sur un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable. Il existe un espace mesuré fini (Y, μ) et une fonction bornée F sur Y , tels que N soit unitairement équivalent à la multiplication par F dans $L^2(X, \mu)$ au sens du lemme.

A partir de ce théorème, on va pouvoir en donner une version pour les opérateurs auto-adjoint non bornés. Commençons par des notations :

Notation 1.3.3. On va considérer un opérateur à domaine $(A, D(A))$ auto-adjoint sur un Hilbert $\mathcal{H}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ séparable. Comme $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, on a que $\pm i$ ne sont pas dans le spectre de A ; on notera alors $R_{\pm i} = (\pm iI + A)^{-1}$ les résolvantes en ces points.

Du précédent théorème et avec les notations ci-dessus on a :

Corollaire 1.3.4. Avec les notations précédentes, il existe un espace mesuré fini (Y, μ) , un opérateur unitaire $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(Y, \mu)$ et une fonction bornée F non nulle μ presque partout sur Y , tels que avec les notations du lemme :

$$UR_iU^{-1} = M_F.$$

Démonstration. Vérifions dans un premier temps que les opérateurs $R_{\pm i}$ sont normaux : comme $\text{Im}(\pm iI + A) = \mathcal{H}$, on en déduit donc que : $\forall (u, v) \in \mathcal{H}^2$, $\exists ! (z, w) \in D(A)^2$ tel que $v = (-iI + A)(z)$ et $u = (iI + A)(w)$, donc on a :

$$\begin{aligned} \langle v, R_i u \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle (-iI + A)(z), w \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle z, (-iI + A)^* w \rangle_{\mathcal{H}} = \langle z, (iI + A)w \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle R_{-i}(v), u \rangle_{\mathcal{H}}; \end{aligned}$$

ce qui prouve que $R_{\pm i}^* = R_{\mp i}$. D'autre part d'après l'équation résolvante, les résolvantes R_i et R_{-i} commutent, ainsi R_i et R_{-i} sont des opérateurs bornés normaux. On utilise ensuite le théorème 1.3.2 : le seul point non contenu dans le théorème 1.3.2 est la non nullité de la fonction F : par définition R_i est injectif, donc par conjugaison unitaire M_F doit l'être aussi, c'est à dire que F soit non nulle μ presque partout. $\square$

Du cas particulier de la résolvante on a le théorème spectral sous sa forme multiplicative pour les opérateurs auto-adjoints à domaine :

Corollaire 1.3.5. (Théorème spectral multiplicatif). Toujours avec les notations précédentes, il existe un espace mesuré fini (Y, μ) , un opérateur unitaire $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(Y, \mu)$ et une fonction réelle f finie μ presque partout sur Y , tels que avec les notations du lemme $v \in D(A) \Leftrightarrow U(v) \in D(M_f)$ et puis sur $U(D(A))$ on a

$$UAU^{-1} = M_f.$$

Démonstration. Posons $f = \frac{1}{F} - i$ qui est donc finie μ presque partout sur Y car F est elle même non nulle μ presque partout sur Y . Notons bien que par construction $F(f + i) = 1$ et $UR_i = M_F U$. Montrons que $v \in D(A) \Leftrightarrow U(v) \in D(M_f)$: soit $v \in D(A)$ alors $\exists ! u \in \mathcal{H}$ tel que $v = R_i u$. Donc $Uv = M_F Uu$. En multipliant cette égalité par f on a : $fUv = (1 - iF)Uu$. Comme $Uu \in L^2(Y, \mu)$ et que la fonction F est bornée on en déduit que $fUv \in L^2(Y, \mu)$, ie :

$Uv \in D(M_f)$. Réciproquement si $Uv \in D(M_f)$ alors d'une part $(f+i)Uv \in L^2(Y, \mu)$, d'autre part comme U est unitaire entre $\mathcal{H}$ et $L^2(Y, \mu)$, $\exists! u \in \mathcal{H}$ tel que $(f+i)Uv = Uu$. Enfin en multipliant cette égalité par F on obtient : $Uv = F U u$, donc $v = U^{-1} F U u = R_i u$ donc en particulier $v \in D(A)$. Montrons maintenant $U A U^{-1} = M_f$ sur $U(D(A))$: notons bien que $\forall u \in \mathcal{H}$ $F U u = U R_i u$ et donc $U u = \frac{1}{F} U R_i u$. Prenons $v \in D(A)$ $\exists! u \in \mathcal{H}$ tel que $v = R_i u$; avec l'équation résolvante on obtient que $A v = u - i v$, donc $U A v = (\frac{1}{F} - i) U v$, soit encore $U A v = f U v$ ce qui montre l'égalité. Reste à vérifier que la fonction f est à valeurs réelles : si on suppose que la partie imaginaire $\text{Im}(f)$ de f est strictement positive sur un sous ensemble Ω de Y tels que $\mu(\Omega) > 0$, compte tenu que (Y, μ) est un mesuré finie $\chi_\Omega \in D(M_f)$. Maintenant on sait avec le lemme précédent que M_f est auto-adjoint, donc $\langle \chi_\Omega, f \chi_\Omega \rangle_{L^2} \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde par définition de Ω , donc au final f est à valeurs réelles μ presque partout. $\square$

A partir de ce corollaire on en déduit le calcul fonctionnel borné standard :

Définition 1.3.6. Soit $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, avec les notations du corollaire précédent, on définit l'opérateur borné $h(A)$ sur $\mathcal{H}$ par :

$$h(A) = U^{-1} M_{h \circ f} U.$$

On montre facilement le théorème suivant qui servira fortement dans la suite :

Théorème 1.3.7. (Calcul fonctionnel borné). Soit $A, D(A)$ un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. L'application ϕ définit par :

$$\phi : \begin{cases} L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L_c(\mathcal{H}) \\ h \mapsto h(A) \end{cases}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(i) ϕ est un $\star$ -homomorphisme d'algèbre normées continu, et on a pour toute fonction $h \in L^\infty(\mathbb{R})$

$$|||h(A)||| \leq \|h\|_\infty.$$

(ii) Si $(h_n)_n \in (L^\infty(\mathbb{R}))^\mathbb{N}$ telle que $(x \mapsto h_n(x))_n$ converge simplement vers $x \mapsto x$ et $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ on ait $|h_n(x)| \leq |x|$ alors pour tout $u \in D(T)$

$$h_n(A)u \rightarrow Au \text{ dans } \mathcal{H}.$$

(iii) Si $(\lambda, u) \in \sigma_p(A) \times (\mathcal{H} - \{0\})$ tels que $Au = \lambda u$, alors si $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, $h(\lambda) \in \sigma_p(h(T))$ et

$$h(A)u = h(\lambda)u.$$

1.3.3 Dynamique quantique et groupe d'évolution

Mathématiquement, à partir d'un opérateur auto-adjoint on peut définir la dynamique quantique associée via le calcul fonctionnel borné comme étant un groupe unitaire à un paramètre (ici le temps) fortement continu, en effet (voir par exemple [Kat1] ou [Le-Br]) :

Théorème 1.3.8. Soit $A, D(A)$ un opérateur auto-adjoint sur un hilbert $\mathcal{H}$ alors la famille d'opérateur bornée :

$$U(t) = \left\{ e^{itA} \right\}_{t \in \mathbb{R}}$$

est un groupe unitaire fortement continu, de générateur $(iA, D(A))$.

L'évolution d'un système physique S au cours du temps peut donc être représentée mathématiquement par un groupe unitaire de générateur $(iA, D(A))$ dans un hilbert $\mathcal{H}$ associé à S , plus précisément si l'état initial à l'instant 0 est représenté par le vecteur $\psi_0 \in D(A)$, l'état à l'instant t est représenté par le vecteur $\psi(t) = U(t)\psi_0$ avec $U(t) = e^{itA} \in L_c(\mathcal{H})$. L'opérateur $H = -\hbar A$ est appelé hamiltonien du système S et représente l'observable énergie totale de S ; on a donc que pour tout $\psi_0 \in D(A)$ nous avons $\psi(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0$.

1.4 Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger

On va faire quelques rappels sur la théorie spectrale du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger. Pour plus de détails on pourra consulter l'article [Lab1] qui donne un panorama partiel et historique sur l'étude spectrale du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur des variétés riemanniennes. Dans un système physique constitué d'une particule se déplaçant dans une partie ouverte X de $\mathbb{R}^n$, l'espace de Hilbert associé est $L^2(X)$, et, si la particule n'est soumise à aucune force, l'hamiltonien est

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ est le laplacien de $\mathbb{R}^n$, m la masse de la particule, et $\hbar$ la constante de Planck. Si au contraire la particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel réel V , l'hamiltonien est alors

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V;$$

V désignant l'opérateur de multiplication par la fonction V .

En géométrie riemannienne, l'opérateur de Laplace-Beltrami² est la généralisation du laplacien de $\mathbb{R}^n$. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles définie sur une variété riemannienne (M, g) , et pour $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ une carte locale de la variété M , l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement laplacien de (M, g) , appliqué à la fonction f est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$$

²On utilise ici la convention de signe des analystes pour l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Dans la convention des géomètres $\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$.

où $g = \det(g_{ij})$ et $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$. Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur. L'apparition de l'opérateur de Schrödinger en géométrie riemannienne, en particulier lorsqu'il s'agit d'estimer les variations d'un invariant riemannien provoquées par une modification de la métrique, s'explique par le fait que tout opérateur différentiel linéaire A d'ordre 2 réel auto-adjoint sur une variété riemannienne (M, g) , et dont le symbole principal est égal à la métrique riemannienne duale (définie sur T^*M) est de la forme : $A = -\Delta_g + V$. (Pour les détails voir [Gal]).

1.4.1 Le contexte

Considérons une variété riemannienne (M, g) complète connexe de dimension $n \geq 1$. On lui associe l'espace de Hilbert $L^2(M) = L^2(M, d\mathcal{V}_g)$, $\mathcal{V}_g$ désignant le volume riemannien associé à la métrique g . L'opérateur de Schrödinger H associé à la variété (M, g) de potentiel V , V étant une fonction de M dans $\mathbb{R}$, est défini comme l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compacte $C_c^\infty(M, \mathbb{R})$ par :

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V \quad (1.1)$$

Δ_g étant le laplacien de la variété (M, g) .

1.4.2 Motivation

On s'intéresse au problème spectral : trouver les couples non-triviaux (λ, u) de scalaires complexes et de fonctions tels que :

$$-\Delta_g u + Vu = \lambda u$$

(avec $u \in L^2(M)$ dans le cas non compact).

Dans le cas des variétés à bord on a besoin en supplément d'imposer des conditions au bord sur les fonctions u , comme par exemple les conditions de Dirichlet : on impose $u = 0$ sur le bord de M , ou celles de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur le bord de M , n étant la normale extérieure au bord de M . Dans le cas des variétés compactes sans bord, comme par exemple la sphère, on parle de problème fermé. Il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien (ou de l'opérateur de Schrödinger) sur une variété riemannienne complète (M, g) :

1. les problèmes directs : étant donnée une variété riemannienne (M, g) , que dire du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ ou de celui de l'opérateur $-\Delta_g + V$?
2. Les problèmes inverses : étant donné le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$, que dire géométriquement de la variété (M, g) ?

Avant de répondre à ces questions, examinons quelques propriétés générales du spectre.

1.4.3 Le caractère auto-adjoint

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint. Rappelons que un opérateur linéaire H est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture $\overline{H}$ est auto-adjointe. Quel est l'intérêt du caractère auto-adjoint ? Il y a au moins deux bonnes raisons d'en parler :

1. si H est auto-adjoint, on a déjà une première information spectrale importante : le spectre de l'opérateur H est une partie de $\mathbb{R}$.
2. Le caractère auto-adjoint assure en mécanique quantique l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger : en effet, à partir de l'hamiltonien auto-adjoint H , on peut, via le calcul fonctionnel construire de manière unique le groupe unitaire fortement continu $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ où : $U(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}$.

Quels sont les principaux résultats connus sur le caractère auto-adjoint ?

- Dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, T. Carleman [Car] en 1934 a montré que si la fonction V est localement bornée et globalement minorée, alors l'opérateur de Schrödinger H est essentiellement auto-adjoint.
- En 1972, T. Kato [Kat1] a montré que l'on pouvait remplacer dans l'énoncé de Carleman l'hypothèse $V \in L_{loc}^\infty(M)$ par $V \in L_{loc}^2(M)$.
- En 1994, I. Olenik [Ole1], [Ole2], [Ole3] donne un énoncé très général concernant des variétés riemanniennes complètes connexes quelconques avec des hypothèses plus complexes sur la fonction V . Un corollaire sympathique de cet énoncé est le suivant :

Théorème 1.4.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$, et V une fonction de $L_{loc}^\infty(M)$ telle que $\forall x \in M, V(x) \geq C$, où C est une constante réelle, alors l'opérateur $H = -\Delta_g + V$ est essentiellement auto-adjoint.*

1.4.4 Le spectre de l'opérateur est-il discret ?

Hormis le fait que le spectre est réel, que savons nous de plus ? En 1934 K. Friedrichs [Fri] a montré que dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, si la fonction V est confinante, ie $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, alors

le spectre de l'opérateur de Schrödinger H est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Dans le contexte d'une variété riemannienne compacte avec un laplacien pur ($V \equiv 0$) nous savons aussi que le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ est constitué d'une suite de valeurs propres positives, de multiplicités finies, et s'accumulant en $+\infty$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Qu'en est-il des variétés non compactes ? Commençons par donner une définition :

Définition 1.4.2. Soit (M, g) une variété lisse et V une fonction de M dans $\mathbb{R}$, on dira que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists K \subset \subset M, \forall x \in M \setminus K, |f(x)| \geq A.$$

Un des théorèmes concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger est celui de Kondratiev et Shubin [Ko-Sh1], [Ko-Sh2] qui donnent un énoncé assez technique sur les variétés à géométrie bornée ; de cet énoncé, on a le corollaire bien pratique suivant :

Théorème 1.4.3. Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$, et V une fonction de $L_{loc}^\infty(M)$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. Alors le spectre de l'opérateur $H = -\Delta_g + V$ est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Le théorème de Courant de 1953 [Co-Hi], assure en particulier que la première valeur propre λ_1 de l'opérateur H est simple.

1.4.5 Un aperçu sur les problèmes directs

L'objectif est, à géométrie fixée, de pouvoir calculer, ou à défaut de donner des propriétés sur le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ ou de celui de l'opérateur $-\Delta_g + V$. On va d'abord parler de résultats exacts, puis de méthodes qualitatives.

Calcul explicite de spectre

Il n'y a bien sûr pas de méthodes générales pour calculer un spectre d'opérateur linéaire ; même dans le cas de Schrödinger sur une variété raisonnable, le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples où l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même un exemple de calcul exact : l'oscillateur harmonique, ou opérateur d'Hermite comme on le nomme en analyse harmonique. C'est l'un des rares exemples d'opérateur de Schrödinger sur une variété non compacte pour lequel on arrive à calculer explicitement son spectre. L'oscillateur harmonique joue un rôle très important dans l'étude des systèmes intégrables en classification symplectique : il sert en effet de modèle de référence des équilibres stables de type elliptique ; pour plus de détails, on peut consulter le livre de Vu Ngoc [VuN4]. Ici on prend $M = \mathbb{R}$ et $H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}$. Les propriétés spectrales de l'opérateur H sont très remarquables : on arrive à calculer son spectre et les vecteurs propres associés de manière explicite. Ces calculs, d'un point de vue très formel, se trouvent dans n'importe quel bon livre de mécanique quantique. Pour des démonstrations précises, on conseille par exemple le livre de M.E. Taylor [Tay]. Le résultat est alors le suivant, le spectre de l'opérateur H est

$$\sigma(H) = \left\{ n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

avec comme vecteurs propres associés la base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituée des fonctions d'Hermite :

$$e_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \text{ où } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad .$$

Etude qualitative spectrale en bas du spectre

Dans nombre de cas on ne sait pas calculer un spectre, on essaye alors de le décrire de manière qualitative. Il y a disons deux sous thèmes :

- le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur.
- Le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : analyse semi-classique.

Donnons quelques exemples de résultats concernant le bas du spectre. Commençons par des résultats de comparaison des premières valeurs propres.

Théorème 1.4.4. (Théorème de Faber-Krahn, 1953). Soit M une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. En notant par $\lambda_1(M)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet, on a $\lambda_1(M) \geq \lambda_1(B_M)$; B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à $\text{Vol}(M)$. Et on a égalité si et seulement si M est isométrique à B_M .

Dans le même style, on a aussi la version avec conditions de Neumann où l'inégalité est dans l'autre sens :

Théorème 1.4.5. (Théorème de Szegő-Weinberger, 1954). Soit M une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. En notant par $\mu_1(M)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Neumann, on a $\mu_1(M) \leq \mu_1(B_M)$; B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à $\text{Vol}(M)$. Et on a égalité si et seulement si M est isométrique à B_M .

Un autre type de résultat classique concerne les constantes de Cheeger : soit (M, g) une variété riemannienne connexe et compacte de dimension $n \geq 1$. Pour toute partie bornée régulière D de M , on considère la quantité

$$h(D, g) = \frac{\text{Vol}(\partial D, g)}{\text{Vol}(D, g)}$$

où $\text{Vol}(\partial D, g)$ est le volume $n - 1$ dimensionnel. On définit ensuite la constante de Cheeger par

$$h(M, g) = \inf_{D \in X} h(D, g)$$

X étant l'ensemble de tous les domaines de M de volumes majorés par $\frac{\text{Vol}(M, g)}{2}$. Alors un des résultats de Cheeger est que la première valeur propre non nulle du laplacien est minorée par $\frac{h(M, g)^2}{4}$ [BGM].

Pour finir, donnons un autre résultat intéressant qui concerne la multiplicité des valeurs propres en fonction de la topologie. Pour cela plaçons nous un instant dans le cas des surfaces : si (M, g) est une surface complète connexe, et $H = -\Delta_g + V$ avec $V \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. En notant par

$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ le spectre de l'opérateur H et par m_k la multiplicité de la k -ème valeur propre λ_k , nous avons le résultat dû à S. Y. Cheng [Che2] et amélioré par G. Besson [Bes], Y. Colin De Verdière [Col5], N. Nadirashvili [Nad] et B. Sévenec [Sev] :

Théorème 1.4.6. *Sous les hypothèses précédentes nous avons :*

- Si $M = \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $k \geq 3$, $m_k \leq 2k - 3$.
- Si $M = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ou K_2 (la bouteille de Klein), alors pour tout $k \geq 1$, $m_k \leq 2k + 1$.
- Si $M = \mathbb{T}^2$, alors pour tout $k \geq 1$, $m_k \leq 2k + 2$.
- En notant par $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré, si $\chi(M) < 0$, alors pour tout $k \geq 1$, $m_k \leq 2k - 2\chi(M)$.

Etude qualitative spectrale en haut de spectre

L'exemple de base est la formule asymptotique de Weyl de 1911, [BGM]. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire Ω de $\mathbb{R}^2$ avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres $\mathcal{N}(\lambda)$ inférieure à un réel positif λ , vérifie l'équivalence, pour $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{4\pi} \lambda$$

où $\text{Vol}(\Omega)$ est l'aire du rectangle Ω . En 1911, H. Weyl démontra cette conjecture.

Théorème 1.4.7. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension n , si on note par $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_g$ sur M , on a l'équivalent pour $\lambda \rightarrow +\infty$*

$$\text{Card}(\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}) \sim \frac{B_n \text{Vol}(M, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

où $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

On reviendra dans la dernière partie à l'étude du "haut" du spectre en utilisant l'analyse semi-classique.

1.4.6 Problèmes inverses : la géométrie spectrale

Le son détermine-t-il la forme d'un tambour ?

La problématique inverse est la suivante : étant donné le spectre d'un laplacien ou d'un opérateur de Schrödinger, quelles informations géométriques sur la variété (M, g) peut-on avoir ? Dans le cas du laplacien, un des premiers à formaliser mathématiquement cette question est sans doute M. Kac [Kac] en 1966 dans son célèbre article "Can one hear the shape of a drum ?"³ : pour le laplacien riemannien, une suite de valeurs propres (un ensemble d'harmoniques du tambour) caractérise-t-elle, à isométrie près, la variété de départ (la géométrie du tambour) ? Il est connu que si deux variétés sont isométriques, elles sont alors isospectrales (c'est-à-dire ont le même spectre). Mais qu'en est-t-il de la réciproque ? On sait depuis 1964, que la réponse au problème de M. Kac est négative ; en effet, J. Milnor [Mil] donne comme exemple de variétés isospectrales mais non isométriques, une paire de tores plats de dimension 16.

³"Peut-on entendre la forme d'un tambour ?"

Depuis, de nombreux autres exemples ont été trouvés, à commencer par T. Sunada [Sun], qui en 1985 donne une méthode de construction systématique de variétés isospectrales non isomorphes. C. Gordon et E.N. Wilson [Go-Wi] ont aussi donné en 1984 une méthode de construction de déformations continues de variétés qui sont isospectrales sans être isométriques. L'histoire ne s'arrête pas là, d'autres méthodes de construction apparaissent, comme par exemple la méthode de transplantation de P. Bérard [Ber2], [Ber3] etc... En 1992, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert [GWW1] donnent le premier exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre commun pour le laplacien avec conditions de Neumann ou de Dirichlet.



Fig 1. Une photographie de C. Gordon et D. Webb avec leurs fameux domaines plans isospectraux mais non isométriques.

Pour plus de détails sur cet exemple ou pourra consulter les auteurs [GWW1], [GWW2] mais aussi voir les articles très pédagogiques de P. Bérard [Ber5], [Ber6], [Ber7]. Mentionnons aussi le travail de S. Zelditch [Zel] datant de 2000, où il montre que si on se restreint à des parties de $\mathbb{R}^2$ simplement connexes avec un bord analytique et possédant deux axes de symétrie orthogonaux, alors le spectre détermine complètement la géométrie.

Spectre des longueurs et formules de traces

La donnée du spectre du laplacien donne des informations sur d'autres invariants géométriques comme la dimension, le volume et l'intégrale de la courbure scalaire. En fait le laplacien fournit aussi d'autres invariants, comme par exemple le spectre des longueurs d'une variété. Le spectre des longueurs d'une variété riemannienne est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. En 1973 Y. Colin de Verdière [Col1], [Col2] montre que dans le cas compact, modulo une hypothèse de généricité toujours vérifiée à courbure sectionnelle négative, le spectre du laplacien détermine complètement le spectre des longueurs. La technique utilisé par Y. Colin de Verdière repose sur les formules de traces. Ces dernières s'utilisent dans un cadre beaucoup plus général que celui des opérateurs de Schrödinger. Le principe formel des formules de traces est le suivant : considérons d'abord un opérateur linéaire

H non-borné sur un Hilbert ayant un spectre discret : $\sigma(H) = \{\lambda_n, n \geq 1\}$, et puis une fonction f "sympathique". La formule de trace consiste alors à calculer la trace de l'opérateur $f(H)$ de deux façons différentes :

- la première façon, lorsque que cela a un sens, avec les valeurs propres de l'opérateur linéaire $f(H)$:

$$\text{Tr}(f(H)) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k).$$

- La seconde façon, avec le noyau de Schwartz de l'opérateur $f(H)$: si

$$f(H)\varphi(x) = \int_M K_f(x, y) \varphi(y) dy, \text{ alors :}$$

$$\text{Tr}(f(H)) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

Ainsi

$$\sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

La difficulté réside alors dans le choix de la fonction f , d'une part pour légitimer ces formules, et d'autre part pour arriver à en tirer des informations spectro-géométriques. Les choix de fonctions f les plus courants sont : $f(x) = e^{-xt}$ où $t \geq 0$ (fonction de la chaleur) ; $f(x) = \frac{1}{x^s}$, où $s \in \mathbb{C}$, avec $\text{Re}(s) > 1$ (fonction zêta de Riemann) ; $f(x) = e^{-\frac{ix}{h}}$ où $t \geq 0$ (fonction de Schrödinger) ; etc ... Pour fixer les idées, donnons un exemple simple de formule de trace exacte : la formule sommatoire de Poisson pour un réseau Γ de $\mathbb{R}^n$. La formule de Poisson sur le tore $\Gamma \setminus \mathbb{R}^n$ nous donne l'égalité :

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\Delta_g)} e^{-\lambda t} = \frac{\text{Vol}(\Gamma \setminus \mathbb{R}^n)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sum_{l \in \Sigma} e^{-\frac{l^2}{4t}} \quad (1.2)$$

où $\sigma(\Delta_g)$ est le spectre de l'opérateur Δ_g et Σ le spectre des longueurs comptées avec leurs multiplicités, la multiplicité d'une longueur étant le nombre de classes d'homotopies de lacets du tore plat $\Gamma \setminus \mathbb{R}^n$ représentées par une géodésique périodique de cette longueur. Dans l'égalité (4.2) le terme de droite correspond à la partie géométrique (volume, dimension,...) alors que le terme de gauche contient les informations spectrales. Pour une référence récente voir [Col10].

1.4.7 Métrique de Agmon et puits multiples

Définition de la métrique

Dans toute la suite (M, g) est, soit une variété riemannienne compacte, ou bien l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. L'opérateur de Schrödinger P_h associé à la variété (M, g) de potentiel V , V étant une fonction de M dans $\mathbb{R}$, est défini comme l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compact $\mathcal{C}_c^\infty(M, \mathbb{R})$ par :

$$P_h = -\frac{h^2}{2} \Delta_g + V \quad (1.3)$$

avec une fonction V localement bornée, globalement minorée et confinante :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty;$$

ce qui assure un spectre réel discret constitué de valeurs propres. Soit $E > 0$; dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ on suppose en outre que $\lim_{|x| \rightarrow 0} V(x) - E > 0$.

Définition 1.4.8. La métrique de Agmon est donnée par $\max(V(x) - E, 0) dx^2$ où $dx^2 = g(x)$; g étant la métrique de la variété (M, g) .

Ainsi l'application $m_A : x \in M \mapsto \max(V(x) - E, 0) g(x)$ est un produit scalaire sur l'espace produit $T_x M \times T_x M$.

Remarque 1.4.9. C'est une métrique dégénérée sur (M, g) .

Définition 1.4.10. La distance de Agmon sur (M, g) est définie par :

$$d_A(a, b) = \inf_{\gamma: a \rightarrow b} \mathcal{L}(\gamma)$$

où

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{m_A(\gamma(t)) (\dot{\gamma}(t); \dot{\gamma}(t))} dt;$$

$\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$ de M tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Si on se place sur $M = \mathbb{R}^n$ et si on considère deux réels a et b avec $a < b$ nous avons que

$$d_A(a, b) = \int_0^1 \sqrt{m_A(\gamma(t)) (\dot{\gamma}(t); \dot{\gamma}(t))} dt$$

avec $\gamma(t) = at + (1 - t)b$, $t \in [0, 1]$; ainsi $\dot{\gamma}(t) = a - b$; et donc

$$d_A(a, b) = \int_0^1 \sqrt{V(\gamma(t)) - E} |a - b| dt = \int_a^b \sqrt{V(x) - E} dx.$$

Application aux puits multiples

Pour plus de commodité on prendra $E = 0$ et on suppose que la fonction potentiel à N puits :

$$\{x \in M; V(x) \leq 0\} = \bigcup_{j=1}^N U_j$$

où N est un entier et les U_j sont des compacts de M (on parle de puits). Avec la distance d_A on peut définir S_0 : la distance de Agmon entre deux puits

$$S_0 := \min_{j \neq k} d_A(U_j, U_k).$$

Soit $s \in]0, S_0[$ et posons

$$B_A(U_j, s) := \{x \in M, d_A(x, U_j) < s\};$$

alors si $j \neq k$ on a $\overline{B(U_j, s)} \cap U_k = \emptyset$ et on peut trouver des variétés compactes à bords $\mathcal{C}^2$ -lisses $(M_j)_j \subset M$ telles que $\overline{B(U_j, s)} \subset \text{Int}(M_j)$ et si $j \neq k$ alors $M_j \cap U_k = \emptyset$. Sur les Hilberts $L^2(M_j)$ on considère les restrictions (avec conditions de Dirichlet) auto-adjointes de P_h à M_j , notée P_j . Soit $I(h) = [\alpha(h), \beta(h)]$ un intervalle qui tend vers le singleton $\{0\}$ quand $h \rightarrow 0$. On a le :

Théorème 1.4.11. [He-Sj] Il existe $s_1 < s_0$ tel que pour h assez petit, il existe une bijection

$$b : \sigma(P_h) \cap I(h) \rightarrow \prod_{j=1}^N (\sigma(P_j) \cap I(h))$$

telle que pour tout $\tau < s_1$ on ait $b(\lambda) - \lambda = O\left(e^{-\frac{\tau}{h}}\right)$.

Ce théorème explique le phénomène de séparation des valeurs propres dans chaque puits ; avec une distance exponentiellement petite.

1.5 Quantification et limite semi-classique

1.5.1 Problématique

Le principe de correspondance est à la base des postulats de la mécanique quantique, c'est le "dictionnaire" entre le monde classique et le monde quantique. La quantification est la théorie mathématique qui a pour but d'essayer de justifier ce dictionnaire ; plus précisément d'essayer de construire un morphisme entre ces deux mondes. La quantification est le passage du classique au quantique ; l'opération inverse est qualifiée de limite semi-classique. Pour plus de détails sur la quantification voir par exemples les livres [Fed] et [CKTB].

Mécanique classique	Mécanique quantique
(M, ω) variété symplectique	$\mathcal{H} \subset L^2(X)$, où X variété
Points $x \in M$	Vecteurs $\varphi \in \mathcal{H}$
Algèbre $\mathcal{C}^\infty(M)$	Algèbre d'opérateurs sur $\mathcal{H}$
Crochet de Poisson $\{.\}$	Commutateur $[.]$
Équation de Hamilton	Équation de Schrödinger

On voit très nettement les premières grosses difficultés mathématiques du passage d'un monde à l'autre : passage de la dimension finie à infinie, passage du commutatif au non commutatif, linéarité qui apparaît en mécanique quantique, etc...

1.5.2 Impossibilité de la quantification idéale

Commençons par le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique ; la question mathématique précise de ce passage se formule par l'existence de :

Définition 1.5.1. On appelle quantification (idéale) de la variété symplectique (M, ω) toute application linéaire :

$$\mathbf{Q} : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \{\text{Algèbre d'opérateurs sur un Hilbert}\}$$

vérifiant les quatres axiomes suivants :

$$(i) \quad \mathbf{Q}(1) = \mathbb{I}_d;$$

$$(ii) \quad \mathbf{Q}(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(g)];$$

$$(iii) \quad \mathbf{Q}(x_k) = x_k \text{ et } \mathbf{Q}(\xi_k) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k};$$

$$(iv) \quad (\mathbf{Q}(f))^* = \mathbf{Q}(\bar{f}).$$

En fait si on se place sur la variété symplectique la plus simple possible : $\mathbb{R}^{2n}$; il n'existe pas de quantification idéale : en effet on a le fameux (voir par exemple [Fol]) :

Théorème 1.5.2. (Van Hove, 1952). *Il n'existe pas de quantification :*

$$\mathbf{Q} : \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \rightarrow \{\text{Algèbre d'opérateurs sur } L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Il faut alors affaiblir la définition de la quantification idéale, en particulier l'axiome (ii). Cela est possible dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$. On verra ça dans la partie 1.6 à l'aide des opérateurs pseudo-différentiels.

1.5.3 Principe de l'analyse semi-classique

De manière extrêmement simple et naïve l'idée de l'analyse semi-classique est de comprendre le quantique lorsque le paramètre $\hbar \rightarrow 0$. Pour le lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'analyse semi-classique, on conseille la littérature suivante : Y. Colin de Verdière [Col9], Dimassi-Sjöstrand [Di-Sj], L. Evans et M. Zworski [Zwo], A. Martinez [Mar], D. Robert [Rob1], S. Vu Ngoc [VuN4]. Revenons un instant à la limite $\hbar \rightarrow 0$, quel est son sens physique ? En "principe" tout système physique est de par nature quantique. D'après les fameuses inégalités d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas mesurer précisément à la fois vitesse et position d'un électron, sauf si $\hbar = 0$. En fait plus $\hbar$ est petit, plus on peut faire des mesures simultanées précises. Ainsi plus $\hbar \rightarrow 0$, plus on se rapproche du déterminisme de la mécanique classique sur le fibré cotangent T^*M . En pratique quand on fait de l'analyse semi-classique, on travaille à la fois avec des objets classiques (variétés symplectiques, algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, crochet de Poisson, équations de Hamilton,...) et des objets quantiques (espace de Hilbert, algèbre d'opérateurs, commutateur, équation de Schrödinger,...). Une autre philosophie de l'analyse semi-classique est la suivante : dans la limite des grandes valeurs propres, le spectre de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne (M, g)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_g + V$$

ou plus généralement d'un opérateur pseudo-différentiel, est remarquablement liée à une géométrie sous-jacente. Celle-ci vit sur le fibré cotangent T^*M , vu comme une variété symplectique : c'est la géométrie de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le même phénomène qui permet de voir la mécanique classique (structure de variété symplectique) comme limite de la mécanique quantique (structure d'algèbre d'opérateurs). Voyons pourquoi s'intéresser à l'asymptotique du spectre de l'opérateur H , revient dans une certaine mesure à faire tendre le paramètre h vers 0 (limite semi-classique). Par exemple, pour $E > 0$ fixé, l'équation $-\frac{h^2}{2}\Delta_g \varphi = E\varphi$ admet φ_k , le k -ième vecteur propre du laplacien Δ_g , comme solution si $-\frac{h^2}{2}\lambda_k = E$. Ainsi si $h \rightarrow 0^+$, alors $\lambda_k \rightarrow +\infty$. C'est pourquoi la limite semi-classique peut aussi se voir comme l'asymptotique des grandes valeurs propres du laplacien.

1.6 Opérateurs pseudo-différentiels

1.6.1 De Fourier à nos jours...

Historiquement on peut dire que c'est Fourier en utilisant la transformée de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ qui fut le pionnier des opérateurs pseudo-différentiels. Dans le début des années 60, Caldéron et Zygmund introduisent les opérateurs intégraux à noyaux singuliers en vue de résoudre des équations aux dérivées partielles avec des coefficients variables. Entre 60 et 70, Nirenberg et Hörmander ont donné la théorie des opérateurs pseudo-différentiels sans le paramètre semi-classique h . Un peu plus tard Maslov, Helffer, Robert et Sjöstrand se sont intéressés à l'étude avec h . Il y a en réalité moult opérateurs pseudo-différentiels, destinés à tel ou tel application et il est difficile de présenter une théorie très générale. Dans la suite, on va rapidement décrire "une" théorie des opérateurs pseudo-différentiels avec le paramètre semi-classique h . De nos jours la théorie des opérateurs pseudo-différentiels est devenue un outil d'analyse très puissant, en particulier en équations aux dérivées partielles, en analyse sur les variétés et même en géométrie algébrique complexe. On va rappeler brièvement une des définitions des opérateurs pseudo-différentiels : celle de la quantification de Weyl sur $\mathbb{R}^{2n}$ (ou sur T^*X) et donner les principales propriétés de ce type d'opérateurs pseudo-différentiels. Pour plus de détails, voir [Di-Sj].

1.6.2 Symboles et transformée de Weyl

De manière très formelle, la quantification de Weyl consiste à associer à une fonction symbole convenable $a : (x, \xi) \mapsto a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ un opérateur linéaire $\mathbf{O}_p^w(a)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et admettant une représentation intégrale : pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\mathbf{O}_p^w(a)(u)\right)(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n} \int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Une des premières difficultés de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels est de donner un sens à ce type de formule. Bien sûr pour des symboles $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ c'est plutôt facile à définir, mais pour faire de la quantification il faut

au moins autoriser des symboles polynomiaux en x et ξ . On va définir une classe de symboles usuelles pour faire de la quantification : sur la variété $X := \mathbb{R}^n$, et pour $k, m \in \mathbb{Z}^2$, on définit l'ensemble de symboles d'indice k et de poids $\langle z \rangle^m$ sur la variété X où $\langle z \rangle = \langle x, \xi \rangle := (1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}$, par :

$$S^k(X, \langle z \rangle^m)$$

$$:= \left\{ a_h(z) \in \mathcal{C}^\infty(T^*X), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha \geq 0, \forall z \in T^*X, |\partial_z^\alpha a_h(z)| \leq C_\alpha h^k \langle z \rangle^m \right\}.$$

Avec des intégrations par parties habiles (technique des intégrales oscillantes), voir [Di-Sj] ou [Mar] on montre que :

Théorème 1.6.1. *Si $a \in S^k(X, \langle z \rangle^m)$, avec $m \geq 0$, alors $\mathbf{O}_p^w(a)$ est un opérateur linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même.*

Donnons un exemple très important de calcul de transformée de Weyl : la quantification des variables canoniques.

Exemple 1.6.2. *Le quantifié de Weyl de la fonction $(x, \xi) \mapsto 1$ est l'opérateur identité. Le quantifié de Weyl de la fonction $(x, \xi) \mapsto x_j$ est l'opérateur de multiplication par la variable x_j . Le quantifié de Weyl de la fonction $(x, \xi) \mapsto \xi_j$ est l'opérateur de dérivation $-ih \frac{\partial}{\partial x_j}$.*

En analyse semi-classique, on est aussi amené à considérer des symboles ayant des développements asymptotiques en puissance de h : soit $a_h \in S^0(X, \langle z \rangle^m)$, on dira que ce symbole est semi-classique si et seulement s'il existe une suite de symboles $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in S^0(X, \langle z \rangle^m)^{\mathbb{N}}$ indépendant de h tels que pour tout $k' \geq 0$, on ait :

$$\left(a_h(z) - \sum_{j=0}^{k'} a_j(z) h^j \right) \in S^{k'+1}(X, \langle z \rangle^m).$$

On note alors $a_h = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j h^j$, on dira aussi que a_0 est le symbole principal de a_h .

Le théorème de resommation de Borel (voir [Mar]) assure que pour toute suite arbitraire de symboles $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in S(X, \langle z \rangle^m)$, il existe une unique, modulo

$O(h^\infty)$, fonction symbole a_h telle que $a_h = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j h^j$.

1.6.3 Quelques propriétés

Si on fait le produit de deux opérateurs pseudo-différentiels de symboles a et b , alors l'opérateur produit est encore un opérateur pseudo-différentiel :

Théorème 1.6.3. *Quel que soient les symboles $(a, b) \in S(X, \langle \xi \rangle^m) \times S(X, \langle \xi \rangle^{m'})$, il existe un symbole $c \in S(X, \langle \xi \rangle^{m+m'})$ tel que*

$$\mathbf{O}_p^w(a) \circ \mathbf{O}_p^w(b) = \mathbf{O}_p^w(c).$$

De plus un choix possible pour le symbole c est donné par la formule de Moyal :

$$c = a \star b := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h^j}{j!(2i)^j} a \left(\sum_{p=1}^n \overleftarrow{\partial_{\xi_p}} \overrightarrow{\partial_{x_p}} - \overleftarrow{\partial_{x_p}} \overrightarrow{\partial_{\xi_p}} \right)^j b$$

où la flèche indique sur quelle fonctions, a ou b la dérivée doit opérer.

Citons maintenant un théorème de continuité fondamental :

Théorème 1.6.4. (Caldéron-Vaillancourt) Si le symbole $a \in S^k(X, 1)$, $k \geq 1$, alors l'opérateur $\mathbf{O}_p^w(a)$ est un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\exists C, M > 0, |||\mathbf{O}_p^w(a)||| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Une des principales applications de ce théorème de continuité est l'inversion des opérateurs pseudo-différentiels : un symbole $a \in S(X, \langle z \rangle^m)$ est elliptique en $(x_0, \xi_0) \in T^*X$ si et seulement si $|a(x_0, \xi_0)| \neq 0$.

Théorème 1.6.5. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $a \in S(X, \langle \xi \rangle^m)$ elliptique sur T^*X , alors il existe un symbole $b \in S(X, \langle \xi \rangle^{-m})$ tel que :

$$\mathbf{O}_p^w(a) \circ \mathbf{O}_p^w(b) = I_d + R_1, \quad \mathbf{O}_p^w(b) \circ \mathbf{O}_p^w(a) = I_d + R_2$$

où R_1, R_2 sont des opérateurs linéaire continus de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et vérifiant $|||R_1||| + |||R_2||| = O(h^\infty)$.

1.7 Analyse microlocale

Il semble que l'analyse microlocale prenne naissance dans les années 70 pour des applications en équations aux dérivées partielles. Aujourd'hui l'analyse microlocale est présente dans beaucoup de mathématiques, comme la topologie, la géométrie analytique, ... Le principe moral de l'analyse microlocale est d'utiliser des variétés symplectique pour faire de l'analyse : pour des objets vivants naturellement sur une variété quelconque X , on peut aussi les faire vivre sur la variété T^*X . Donnons ici quelques éléments d'analyse microlocale, pour plus de détails voir par exemple [VuN3], [VuN4], [Col9] ou [Gr-Sj].

1.7.1 Fonctions admissibles

Pour $h_0 > 0$ fixé, l'ensemble

$$A := \left\{ \lambda(h) \in \mathbb{C}^{[0, h_0]}, \exists N \in \mathbb{Z}, |\lambda(h)| = O(h^{-N}) \right\}$$

est un anneau commutatif pour les opérations usuelles sur les fonctions. On voit aussi sans peine que l'ensemble

$$I := \{ \lambda(h) \in A, \lambda(h) = O(h^\infty) \}$$

est un idéal bilatère de A , on définit alors l'anneau $\mathbb{C}_h$ des constantes admissibles comme étant l'anneau quotient A/I . On peut alors définir le $\mathbb{C}_h$ -module des fonctions admissibles :

Définition 1.7.1. L'ensemble $\mathcal{A}_h(X)$ des fonctions admissibles sur X est l'ensemble des distributions $u_h \in \mathcal{D}'(X)$ tels que pour tout opérateur pseudo-différentiel P_h dont le symbole dans une carte locale est à support compact

$$\exists N \in \mathbb{Z}, \|P_h u_h\|_{L^2(X)} = O(h^N).$$

L'ensemble $\mathcal{A}_h(X)$ est un C_h -module pour les lois usuelles des fonctions. Un premier fait important est que par le théorème de Calderon-Vaillancourt, on a l'inclusion : $L^2(X) \subset \mathcal{A}_h(X)$.

Exemple 1.7.2. Les fonctions WKB⁴ de la forme : $u_h(x) = \alpha(x)e^{i\frac{S(x)}{h}}$, S étant une fonction réelle C^∞ , sont des fonctions admissibles stables par l'action d'un opérateur pseudo-différentiel.

1.7.2 Micro-support et microfonctions

Lorsque on regarde une équation du type $P_h u_h = 0$, l'étude dans T^*X de la fonction symbole p de l'opérateur pseudo-différentiel P_h permet de localiser les singularités de la solution u_h grâce à la notion de micro-support. Historiquement la notion de micro-support a été introduite par Sato et Hörmander. On va donner une définition proche de celle de Hörmander : à tout élément u_h du C_h -module des fonctions admissibles est associé un sous-ensemble de T^*X , cet ensemble, nommé micro-support⁵ décrit la localisation de la fonction u_h dans l'espace des phases.

Définition 1.7.3. Soit $u_h \in \mathcal{A}_h(X)$, on dira que u_h est négligeable au point $m \in T^*X$, si et seulement s'il existe P_h un opérateur pseudo-différentiel elliptique en m tel que :

$$\|P_h u_h\|_{L^2(X)} = O(h^\infty).$$

On définit alors $MS(u_h)$, le micro-support de u_h comme le complémentaire dans T^*X de l'ensemble des points $m \in T^*X$ où u_h est négligeable.

Moralement le micro-support de u_h est le complémentaire de l'ensemble des directions où, à une variante près, la transformée de Fourier de u_h est à décroissance rapide. Parmi les propriétés liées au micro-support nous avons que si P_h est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal p alors on a l'implication :

$$P_h u_h = O(h^\infty) \Rightarrow MS(u_h) \subset p^{-1}(0).$$

Donc si par exemple P_h est un opérateur de symbole principal p , λ un scalaire, et si u_h est une fonction non nulle telle que : $(P_h - \lambda I_d) u_h = O(h^\infty)$ alors $MS(u_h) \subset p^{-1}(\lambda)$. Ceci est une propriété fondamentale de l'analyse micro-locale : elle donne une localisation des fonctions propres dans l'espace des phases.

Exemple 1.7.4. Pour une fonction WKB on a $MS(u_h) = \{(x, dS(x)), \alpha(x) \neq 0\}$.

Définition 1.7.5. Soient $u_h, v_h \in \mathcal{A}_h(X)$, on dira que $u_h = v_h + O(h^\infty)$ sur un ouvert $U \subset T^*X$ si et seulement si $MS(u_h - v_h) \cap U = \emptyset$.

⁴Pour Wentzel, Kramers et Brillouin.

⁵Où front d'ondes.

Avec les propriétés du micro-support, on peut montrer que pour tout ouvert U de T^*X , l'ensemble $\{u_h \in \mathcal{A}_h(X), MS(u_h) \cap U = \emptyset\}$ est un $\mathbb{C}_h$ -sous-module de $\mathcal{A}_h(X)$, on peut alors définir l'espace des micro-fonctions :

Définition 1.7.6. Soit U un ouvert non vide de T^*X , on définit l'espace des micro-fonctions sur U comme étant le $\mathbb{C}_h$ -module quotient :

$$\mathcal{M}_h(U) := \mathcal{A}_h(X) / \{u_h \in \mathcal{A}_h(X), MS(u_h) \cap U = \emptyset\}.$$

Les opérateurs pseudo-différentiels agissent sur $\mathcal{M}_h(U)$, en effet : pour tout opérateur pseudo-différentiel P_h on a

$$MS(P_h u_h) \subset MS(u_h)$$

et ainsi $P_h(\mathcal{M}_h(U)) \subset \mathcal{M}_h(U)$.

1.7.3 Analyse microlocale et faisceaux

Le langage le plus adapté à l'analyse microlocale est le langage des faisceaux. Sans rentrer dans les détails, en voici le principe : a tout triplet (P_h, λ, U) où P_h est un opérateur pseudo-différentiel, λ un scalaire de l'anneau $\mathbb{C}_h$ et U un ouvert non vide de T^*X , on peut associer l'ensemble $\mathcal{L}(P_h, \lambda, U)$ des microfonctions u_h solutions dans l'ouvert U de $(P_h - \lambda I_d) u_h = O(h^\infty)$. L'ensemble $\mathcal{L}(P_h, \lambda, U)$ est un $\mathbb{C}_h$ -module, et si Ω désigne un ensemble d'indices quelconque, la famille d'ensembles $\{\mathcal{L}(P_h, \lambda, U_x), x \in \Omega\}$ est un (pré)faisceau au dessus de $\bigcup_{x \in \Omega} U_x$. En effet toute solution peut être restreinte sur des ouverts

plus petits d'une unique manière, et deux solutions u_h définie sur un ouvert U_x et v_h définie sur un autre ouvert U_y et telles que $u_h = v_h$ sur l'ouvert $U_x \cap U_y$ peuvent être mises ensemble pour former une solution globale sur l'ouvert $U_x \cup U_y$. Ce faisceau est supporté⁶ sur l'ensemble $p^{-1}(\lambda) \subset T^*X$.

1.7.4 Théorème d'Egorov et opérateurs intégraux de Fourier

Pour finir donnons le théorème d'Egorov qui permet de définir rapidement la notion d'opérateur intégral de Fourier, voir par exemple [Ego], [Col9] :

Théorème 1.7.7. (Egorov) : Soient $(T^*X, d\alpha)$ et $(T^*Y, d\beta)$ deux variétés symplectomorphe : il existe χ un symplectomorphisme de T^*X dans T^*Y . On supposera que χ est exact : $\chi^* \beta - \alpha$ est une 1-forme exacte sur X . Alors il existe $\tilde{\chi}$ un morphisme de $\mathbb{C}_h$ -module de $\mathcal{M}_h(X)$ dans $\mathcal{M}_h(Y)$ inversible tel que pour tout $a \in \mathcal{M}_h(Y)$, en notant par $\hat{a} = \mathbf{Op}_p(a)$, l'opérateur $B = \tilde{\chi}^{-1} \circ \hat{a} \circ \tilde{\chi}$ est un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathcal{M}_h(X)$, et dont le symbole principal est donné par $a_0 \circ \chi$, a_0 étant le symbole principal de $\hat{a}$. On dit que $\tilde{\chi}$ est un opérateur intégral de Fourier associé à χ .

En fait il y a toute une théorie sur les opérateurs intégraux de Fourier (voir [Dui] et [Du-Hol]), ces derniers on en effet une représentation intégrale. Leurs noyaux sont cependant plus compliqués et plus délicats à manipuler que les noyaux des opérateurs pseudo-différentiels.

⁶Au sens du micro-support.

1.8 Vers la quantification par déformation

Avec la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, on dispose d'une quantification sur $\mathbb{R}^{2n}$ ou sur T^*X . Cette quantification n'est en fait pas idéale au sens où l'axiome (ii) est vérifié avec un reste en $O(h^2)$. Donc si on accepte de laisser tendre le paramètre h vers 0 on se rapproche alors d'une quantification idéale.

1.8.1 Cas de T^*X

Sur la variété symplectique $\mathbb{R}^{2n}$ ou sur T^*X la théorie des opérateurs pseudo-différentiels fournit une quantification (pas idéale mais presque). De manière concrète pour toute fonction symbole a "convenable" on a l'existence d'un opérateur linéaire $\hat{a}$ défini par la quantification de Weyl $\hat{a} := \mathbf{O}_p^w(a)$. Dans l'exemple 1.6.2 on a vu que les axiomes (i) et (iii) de la quantification sont vérifiés; l'axiome (iv) est lui aussi vrai. Par contre l'axiome (ii) pose problème : généralement pour tout couple de symboles φ, ψ on a que $\mathbf{O}_p^w(\varphi) \circ \mathbf{O}_p^w(\psi) \neq \mathbf{O}_p^w(\varphi\psi)$; mais le théorème 1.6.3 assure l'existence d'un unique symbole π donné par la formule de Moyal (voir théorème 1.6.3) vérifiant la relation $\mathbf{O}_p^w(\varphi) \circ \mathbf{O}_p^w(\psi) = \mathbf{O}_p^w(\pi)$. On définit alors le produit de Moyal des symboles φ et ψ par :

$$(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \star \psi := \pi$$

soit encore :

$$\widehat{\varphi \star \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi}.$$

Et comme d'après la formule de Moyal : $\varphi \star \psi := \varphi\psi + O(h)$, on en déduit alors la formule :

$$\widehat{\varphi \star \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi} + O(h).$$

Par conséquent si on calcul le commutateur de deux symboles quantifiés $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ on obtient :

$$\begin{aligned} [\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}] &= \widehat{\varphi} \widehat{\psi} - \widehat{\psi} \widehat{\varphi} \\ &= \widehat{\varphi \star \psi} - \widehat{\psi \star \varphi} = \widehat{\varphi \star \psi - \psi \star \varphi}; \end{aligned}$$

et comme par la formule de Moyal $\varphi \star \psi - \psi \star \varphi = \frac{h}{i} \{\varphi, \psi\} + O(h^2)$ on arrive la formule :

$$[\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}] = \frac{h}{i} \widehat{\{\varphi, \psi\}} + O(h^2).$$

On vient donc de montrer que l'axiome (ii) est vrai modulo $O(h^2)$. En fait, on peut voir le produit non-commutatif $\star$ comme défini sur un anneau de fonctions en oubliant la représentation par les opérateurs pseudo-différentiels. La quantification apparaît donc comme une déformation du commutatif vers le non-commutatif, la trace de la non-commutativité étant donné par les crochets $\{\cdot, \cdot\}$.

1.8.2 Cas général

Le programme de quantification par déformation est initié par Bayer, Flato,... il consiste à essayer de définir sur chaque variété symplectique un produit $\star$ analogue à celui de Moyal. Localement cela est facile (on se ramène à $\mathbb{R}^{2n}$

par le théorème de Darboux), mais bien évidemment la difficulté de ce programme est le passage du local au global. Concrètement quand on dispose d'un produit $\star$ sur une variété M , on peut quantifier : on associe à chaque fonction $u \in C^\infty(M)$ un opérateur $\hat{u}$ défini par $\hat{u}(v) := u \star v$. Le problème des produits $\star$ sur des variétés est d'abord celui de leurs existences et de leurs classifications. Parmi les résultats majeurs citons d'abord les travaux de De Wilde-Lecompte [DW-Le] qui en 1983 montrent que toute variété symplectique admet un produit $\star$. En 1997, Kontsevitch [Kon] montre que toute variété de Poisson admet un produit $\star$.

1.9 Les systèmes complètement intégrables

Pour finir ce chapitre on va donner les principaux résultats connus sur les systèmes complètement intégrables symplectiques et semi-classique. On reprend et on résume une partie du livre de S. Vu Ngoc [VuN4].

1.9.1 Définitions

En physique hamiltonienne un système intégrable est un système possédant un nombre suffisant de constantes de mouvement indépendantes ; mathématiquement on a la définition suivante :

Définition 1.9.1. Un système intégrable classique est la donnée d'une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ et de n fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ de l'algèbre $C^\infty(M)$ telles que les différentielles $(df_i(x))_{i=1, \dots, n}$ sont libres presque-partout sur M ; et telles que pour tout indices i, j on ait $\{f_i, f_j\} = 0$. On définit alors l'application moment classique associée :

$$\mathbf{f} : \begin{cases} M \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{cases}$$

Exemple 1.9.2. L'oscillateur harmonique classique : sur la variété symplectique $\mathbb{R}^2$ on note par p l'oscillateur harmonique : $\mathbf{p}(x, \xi) = p(x, \xi) = (x^2 + \xi^2)/2$.

En effet $dp = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$ est non nul presque partout, donc libre presque partout.

Définition 1.9.3. Un système complètement intégrable semi-classique sur une variété X est la donnée de n opérateurs pseudo-différentiels $P_1, \dots, P_n$ sur $L^2(X)$ telle que pour tout indices i et j on ait $[P_i, P_j] = 0$ et dont les symboles principaux forment un système complètement intégrable classique sur $M := T^*X$. On notera par $\mathbf{P} := (P_1, \dots, P_n)$ l'application moment quantique et par $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_n)$ l'application moment classique associée aux symboles principaux de $\mathbf{P}$.

En géométrie symplectique et en analyse semi-classique, l'application moment joue un rôle important pour classer les systèmes complètement intégrables.

Définition 1.9.4. Le spectre exact $\sigma(P_1, \dots, P_n)$ d'un système complètement intégrable semi-classique $(X, \mathbf{P})$, ou encore spectre conjoint exact des opérateurs

pseudo-différentiels $P_1, \dots, P_n$ est défini par :

$$\sigma(P_1, \dots, P_n) := \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \exists u \in L^2(\mathbb{R}^n), u \neq 0; P_j u = \lambda_j u \right\}.$$

La définition semi-classique est :

Définition 1.9.5. Le spectre semi-classique $\Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$ d'un système complètement intégrable semi-classique $(X, \mathbf{P})$, ou encore spectre conjoint des opérateurs pseudo-différentiels $P_1, \dots, P_n$ est défini par :

$$\Sigma_h(P_1, \dots, P_n) := \left\{ (\lambda_1(h), \dots, \lambda_n(h)) \in \mathbb{R}^n, \exists u_h \in L^2(\mathbb{R}^n), u_h \neq 0; (P_j - \lambda_j(h)I_d) u_h = O(h^\infty) \right\}$$

I_d étant l'opérateur identité.

On appelle multiplicité microlocale de E_h la dimension du $\mathbb{C}_h$ -module des solutions microlocales de cette équation. Moralement le spectre semi-classique (ou microlocal) correspond aux valeurs propres approchées avec une précision d'ordre $O(h^\infty)$. Le lien précis entre spectre exact et semi-classique est donné par la [VuN4] :

Proposition 1.9.6. Sur un compact K de $\mathbb{R}$, le spectre semi-classique conjoint $\Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$ et le spectre exact $\sigma(P_1, \dots, P_n)$ sont liés par :

$$\Sigma_h(P_1, \dots, P_n) = \sigma(P_1, \dots, P_n) \cap K + O(h^\infty)$$

au sens où si $\lambda_h \in \Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$ alors il existe $\mu_h \in \sigma(P_1, \dots, P_n) \cap K$ tel que $\lambda_h = \mu_h + O(h^\infty)$; et si $\mu_h \in \sigma(P_1, \dots, P_n) \cap K$ alors il existe $\lambda_h \in \Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$ tel que $\mu_h = \lambda_h + O(h^\infty)$. De plus pour toute famille λ_h ayant une limite finie $\lambda \in K$ lorsque $h \rightarrow 0$, si la multiplicité microlocale de λ_h est bien définie et est finie, alors elle est égale pour h assez petit au rang du projecteur spectral conjoint des P_j sur une boule de diamètre $O(h^\infty)$ centrée autour de λ_h .

Exemple 1.9.7. L'oscillateur harmonique quantique : ici on prend $M = \mathbb{R}$ et $\mathbf{P} = P = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}$ alors l'application moment classique est $\mathbf{p}(x, \xi) = p(x, \xi) = (x^2 + \xi^2)/2$. Dans cet exemple, le spectre exact et semi-classique coïncide et $\sigma(P) = \left\{ h \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$.

1.9.2 Théorie locale

Des points réguliers ...

Les points réguliers de l'application moment classique sont les points $m \in M$ tels que les différentielles $(dp_i(m))_{i=1, \dots, n}$ sont libres. Les points réguliers d'un système complètement intégrable ont une description symplectique locale simple donnée par le théorème de Darboux-Carathéodory (voir par exemple [Aud2]) :

Théorème 1.9.8. (Darboux-Carathéodory). Soit $(M, \omega, \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n))$ un système complètement intégrable de dimension $2n$. Pour tout point $m \in M$ régulier, ie : $(dp_i(m))_{i=1, \dots, n}$ est une famille libre ; il existe un système de coordonnées canonique locales $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ tel que sur un voisinage de m :

$$\xi_j = p_j - p_j(m).$$

Ce théorème a un analogue semi-classique du à Y. Colin de Verdière en 1979 [Col3] :

Théorème 1.9.9. Soit $(M, \omega, F = (f_1, \dots, f_n))$ un système complètement intégrable de dimension $2n$. Pour tout point $m \in M$ régulier, il existe U un opérateur intégral de Fourier unitaire défini microlocalement près de m tel que sur un voisinage microlocal de m :

$$U (P_j - p_j(m)I_d) U^{-1} = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Le théorème de Darboux-Carathéodory semi-classique permet de faire une description précise de l'ensemble des micro-solutions des équations $P_j u_h = O(h^\infty)$. Les résultats d'analyse microlocale nous informe déjà que les solutions u_h sont localisées sur $\bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(0)$; mais en fait on a bien mieux :

Théorème 1.9.10. Pour tout point $m \in M$ régulier de $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ tel que $\mathbf{p}(m) = 0$, le faisceau des micro-solutions de l'équation

$$P_j u_h = O(h^\infty)$$

est un faisceau en $\mathbb{C}_h$ module libre de rang 1 engendré par $U^{-1}(\mathbf{1})$, où U est donné par le précédent théorème et $\mathbf{1}$ est une micro-fonction égale à 1 près de l'origine.

... aux points singuliers non-dégénérés

Il y a toute une théorie sur l'étude et la classification des singularités des applications moment. Le cas de certaines singularités générique, dites singularités non-dégénérées est bien connu. Suivant une classification algébrique due à Williamson [Wil] datant de 1936, ces singularités sont de trois types :

1. les singularités elliptiques : $q_i = x_i \xi_i$;
2. les singularités hyperboliques $q_i = (x_i^2 + \xi_i^2)/2$;
3. et les singularités loxodromique (ou focus-focus) $q_i = x_i \xi_{i+1} - x_{i+1} \xi_i$ et $q_{i+1} = x_i \xi_i + x_{i+1} \xi_{i+1}$.

D'après un théorème d'Eliasson de 1984 [Eli1], [Eli2] toutes ces singularités non-dégénérées sont linéarisable : il existe χ un symplectomorphisme local de $\mathbb{R}^{2n}$ dans M tel que : $p_i \circ \chi = g_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$. En réalité Y. Colin de Verdière et J. Vey ont traité le cas de la dimension 1 de ce théorème en 1979 [Co-Ve]. Par quantification de Weyl on obtient l'analogie semi-classique du théorème d'Eliasson (voir le livre de S. Vu Ngoc [VuN4] pour un énoncé précis).

1.9.3 Théorie semi-globale

Des fibres régulières ...

Une fibre $\Lambda_c := \mathbf{p}^{-1}(c)$ est régulière si et seulement si tous les points de Λ_c sont réguliers pour $\mathbf{p}$. Les fibres régulières sont décrites par le théorème actions-angles, nommé aussi théorème d'Arnold-Liouville-Mineur, qui donne la dynamique classique au voisinage d'une fibre régulière connexe et compacte : le flot hamiltonien associé à une intégrale première est quasi-périodique (droite s'enroulant sur un tore) :

Théorème 1.9.11. (Actions-angles). Soit $(M, \omega, \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n))$ un système complètement intégrable de dimension $2n$. Soit Λ_c une composante connexe compacte de $\mathbf{p}^{-1}(c)$ telle que tous les points de la fibre Λ_c sont réguliers ; alors toutes les fibres dans un voisinage de Λ_c sont des tores et il existe φ un symplectomorphisme :

$$\varphi : T^*\mathbb{T}^n \rightarrow M$$

qui envoie la section nulle $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ de $T^*\mathbb{T}^n$ sur Λ_c et tel que :

$$\mathbf{p} \circ \varphi = \chi(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

où χ est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^{2n}$ laissant fixe l'origine.

On dit que les variables $(x_1, \dots, x_n)$ sont les variables actions et $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ les variables angles. San Vu Ngoc a donné la version semi-classique de ce théorème [VuN1],[VuN2] :

Théorème 1.9.12. (Actions-angles semi-classique). Si la fibre Λ_c est régulière il existe U un opérateur intégral de Fourier associé à χ un symplectomorphisme exact :

$$\chi : T^*\mathbb{T}^n \rightarrow M$$

qui envoie la section $\zeta = a$ sur Λ_c et il existe aussi des séries formelle $\lambda_j(h) \in \mathbb{C}[[h]]$, $j = 1, \dots, n$ telles que microlocalement au voisinage de la section $\zeta = a$ on ait

$$U(P_1 - p_1(m)I_d, \dots, P_n - p_n(m)I_d)U^{-1} = N \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1(h)I_d, \dots, \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda_n(h)I_d \right)$$

où m est un point quelconque de la fibre Λ_c et N est une matrice 2×2 inversible à coefficients dans le $\mathbb{C}_h$ -module des opérateurs pseudo-différentiel.

Le théorème actions-angles semi-classique fournit donc une description locale du spectre d'un système intégrable ; en effet autour d'une valeur régulière de l'application moment classique $\mathbf{p}$ le spectre conjoint semi-classique $\Sigma_h(P_1, \dots, P_n)$ est localement difféomorphe au réseau $h\mathbb{Z}^n$ (voir [VuN4]). Précisément du théorème actions-angles semi-classique on arrive aux fameuses règles de quantification de Bohr-Sommerfeld :

Théorème 1.9.13. (Règles de Bohr-Sommerfeld). Il existe n fonctions $S_j(E) = S_j(E, h)$, $j = 1, \dots, n$ admettant des développements asymptotiques en puissance de h avec des coefficients de classe C^∞ par rapport à $E = (E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$, telles que les équations :

$$(P_j - E_j I_d) u_h = O(h^\infty)$$

admettent une solution microlocale u_h avec son microsupport $MS(u_h) = \Lambda_E$ si et seulement si $S_j(E) \in 2\pi h\mathbb{Z}$.

Décrivons un peu la construction de ces fonctions $S_j(E)$. Pour fixer les idées, plaçons nous dans le cas de la dimension symplectique deux ; donc $\mathbf{P} = P$. D'après le théorème 1.9.10 pour une fibre $\Lambda_E := \mathbf{p}^{-1}(E)$ compacte, connexe et régulière, toute microsolution u_h de $(P - EI_d)u_h = O(h^\infty)$ est engendré par $U^{-1}(\mathbf{1})$. La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre que u_h est nécessairement du type WKB. On va maintenant décrire comment on prolonge une microsolution d'un ouvert à un autre le long d'une fibre régulière (pour plus de détails, voir [VuN4]). Pour commencer on se donne un recouvrement fini $(U_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ d'ouverts de la fibre compacte Λ_E . Pour tout couple d'ouverts non vides U_α et U_β du recouvrement tel que $U_\alpha \cap U_\beta$ est non vide et connexe ; si on considère alors deux microfonctions φ_α et φ_β solutions de $(P - \lambda I_d)u_h = O(h^\infty)$ microlocalement sur les ouverts respectifs U_α et U_β ; les microfonctions φ_α et φ_β sont alors respectivement engendrées par $U^{-1}(\mathbf{1}_\alpha)$ et par $U^{-1}(\mathbf{1}_\beta)$, $\mathbf{1}_\alpha$ et $\mathbf{1}_\beta$ étant égale à 1 microlocalement sur U_α et respectivement sur U_β . En se plaçant sur $U_\alpha \cap U_\beta$ et en utilisant l'argument de la dimension 1 on a l'existence d'un scalaire $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}_h$ tel que sur l'ouvert $U_\alpha \cap U_\beta$ on ait $U^{-1}(\mathbf{1}_\alpha) = c_{\alpha,\beta}U^{-1}(\mathbf{1}_\beta)$ et donc, sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a $\mathbf{1}_\alpha = c_{\alpha,\beta}\mathbf{1}_\beta$. La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre (voir [VuN3],[VuN4]) que la constante $c_{\alpha,\beta}$ s'écrit sous la forme $c_{\alpha,\beta} = e^{\frac{iS_{\alpha,\beta}}{h}}$, le scalaire $S_{\alpha,\beta}$ étant dans $\mathbb{C}_h$ est dépendant de la variable E . Plus généralement pour une famille finie $(U_k)_{k=1,\dots,l}$ d'ouverts non vides recouvrant une partie compacte et connexe de la fibre régulière Λ_E telle que pour tout indice $k \in \{1, \dots, l-1\}$, $U_k \cap U_{k+1}$ est non vide et connexe. Sur chaque ouvert U_k on a un générateur $\mathbf{1}_k$ de $\mathcal{L}(P, \lambda, U_k)$ et pour tout indice $k \in \{1, \dots, l-1\}$ il existe $c_{k,k+1} = e^{\frac{iS_{k,k+1}}{h}} \in \mathbb{C}_h$ tel que $\mathbf{1}_k = c_{k,k+1}\mathbf{1}_{k+1}$ ainsi nous avons alors l'égalité $\mathbf{1}_1 = c_{1,2}c_{2,3}\dots c_{l-1,l}\mathbf{1}_l$. On peut donc écrire $\mathbf{1}_1 = e^{\frac{iS_{1,l}}{h}}\mathbf{1}_l$ où on a posé

$$S_{1,l} = \sum_{k=1}^{l-1} S_{k,k+1}.$$

On notera par S sa classe de cohomologie à valeur dans $\mathbb{R}/2\pi h\mathbb{Z}$ associée. La dépendance en la variable E est lisse : les fonctions $E \mapsto S_j(E)$ sont C^∞ (voir [VuN1],[VuN3] et [VuN4]). Ainsi, avoir une solution globale sur la fibre signifie que le réel $S(E)$ est un multiple de $2\pi h$.

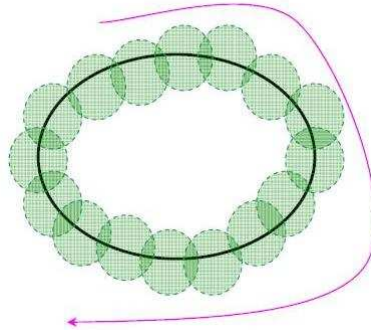


Fig. 2. Un recouvrement par des ouverts d'une fibre régulière.

... aux fibres singulières

On ne va pas décrire ici toute la théorie des fibres singulières ; on rappelle juste que dans le cas elliptique : lorsqu'on a une application moment $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ avec un point fixe m elliptique, il existe χ un symplectomorphisme local de $\mathbb{R}^{2n}$ vers M envoyant 0 sur le point m tel que :

$$\mathbf{p} \circ \chi = \varphi \circ \left(\frac{x_1^2 + \zeta_1^2}{2}, \dots, \frac{x_n^2 + \zeta_n^2}{2} \right).$$

En version semi-classique, si on est dans le cas de la dimension 2, $\mathbf{P} = P_1$ avec $\mathbf{p} = p_1$ ayant une singularité elliptique en m , il existe alors un opérateur intégral de Fourier U et une série formelle $\lambda(h) \in \mathbb{C}[[h]]$ tels que microlocalement près de l'origine on ait :

$$U (\mathbf{P} - \mathbf{p}(m)I_d) U^{-1} = N (Q - h\lambda(h)I_d)$$

où Q est l'oscillateur harmonique de dimension 1 et N un opérateur pseudo-différentiel elliptique en 0. De là on en déduit une condition de quantification sur la série formelle $\lambda(h)$ et aussi que l'ensemble des micro-solutions de l'équation :

$$\mathbf{P}u_h = O(h^\infty)$$

est un $\mathbb{C}_h$ module libre de rang 1. Pour le cas hyperbolique, on va juste parler du "huit" en dimension 2 (voir aussi le chapitre 4). Pour cela, considérons donc un hamiltonien $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que 0 soit valeur critique de $\mathbf{p} = p$ et telle que la fibre $\mathbf{p}^{-1}(0)$ est compacte et ne contient qu'un unique point critique $m \in M$ non-dégénéré de type hyperbolique.

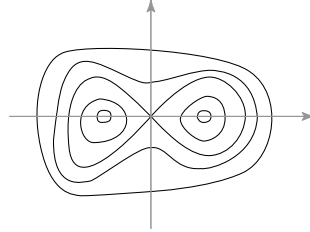


Fig. 3. Un "huit" hyperbolique.

La fibre $\Lambda_0 = \mathbf{p}^{-1}(0)$ est alors un "huit" : le feuilletage dans un voisinage de la fibre singulière Λ_0 est diffeomorphe à celui du double puits en dimension 1 (voir [Lab2]). Dans le cas de la dimension 2, $\mathbf{P} = P$ avec $\mathbf{p} = p$ ayant une singularité hyperbolique, Y. Colin de Verdière et B. Parisse ont montré que l'ensemble des micro-solutions de l'équation :

$$\mathbf{P}u_h = O(h^\infty)$$

est un $\mathbb{C}_h$ module libre de rang 2. (voir aussi [Co-Pa1], [Co-Pa2], [Co-Pa3] et [Lab2]). Dans l'étude des singularités de l'application moment d'un système complètement intégrable, l'opérateur de Schrödinger avec double puits est le modèle type pour les singularités non-dégénérées de type hyperbolique. En

effet, pour un hamiltonien $p : M \rightarrow \mathbb{R}$ tel que 0 soit valeur critique de p , et tel que les fibres dans un voisinage de 0 soient compactes et connexes et ne contiennent qu'un unique point critique non-dégénéré de type hyperbolique : la fibre $\Lambda_0 := p^{-1}(0)$ est alors un "huit" et le feuilletage dans un voisinage de la fibre singulière Λ_0 est difféomorphe à celui du double puits. Dans [Lab2] on montre que le spectre de l'opérateur $\mathbf{P}$ dans le compact $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$ est constitué de deux familles de réels $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ vérifiant :

$$\cdots < \beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h) < \cdots$$

et, il existe C, C' deux constantes réelles strictement positives telles que

$$\frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}, \quad \frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\beta_{k+1}(h) - \beta_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}.$$

Pour le cas loxodromique (qui existe à partir de la dimension symplectique 4) on renvoie aux travaux de S. Vu Ngoc [VuN3], [VuN4].

Chapitre 2

Dynamique dans le cas elliptique en dimension 1

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on se place dans la cadre d'un hamiltonien classique p sans singularités (ou avec une singularité du type elliptique). Les règles de Bohr-Sommerfeld régulières donnent alors le spectre de l'hamiltonien quantique P_h associé : le spectre de l'opérateur P_h est alors une suite de valeurs propres régulièrement espacées avec un interstice d'ordre h . L'étude de la dynamique semi-classique associée à un tel hamiltonien n'est pas vraiment nouvelle : dans la littérature physique les articles de Averbukh, Pereleman [Av-Pe]; Leichtle, Averbukh, Schleich [LAS]; Bluhm, Kosteletzky, Porter [BKP], [Bl-Ko] et de Robinnet [Robi1], [Robi2] semblent faire référence pour l'aspect physique. Ces articles de physique théorique donnent les idées mathématiques essentielles mais n'offrent pas des justifications mathématiques très rigoureuses. Indépendamment de mes travaux M. Combescure et D. Robert [Co-Ro] et [Rob2] ont précisément travaillé sur une justification mathématique rigoureuse de cette dynamique en temps long. Très récemment T. Paul [Pau1], [Pau2], [Pau3] a aussi travaillé sur ce sujet. Dans ce chapitre on trouvera une présentation légèrement différente et des détails supplémentaires par rapport aux travaux de M. Combescure et de D. Robert. En particulier en ce qui concerne les renaissances fractionnaires des paquet d'ondes. Dans ce chapitre on montre d'abord que sur des échelles de temps courtes la dynamique est périodique et suit le mouvement géométrique classique associé. Un vecteur initial ψ_0 localisé suit la dynamique classique associée à p , c'est à dire une trajectoire elliptique et périodique avec une période T_{cl} indépendante de h . Ensuite sur des échelles de temps plus grandes une nouvelle période non géométrique apparaît. Cette période T_{ren} (dite période de renaissance) est de l'ordre de $1/h$; le vecteur $\psi(T_{ren})$ reprend sa forme initial ψ_0 . Encore plus surprenant quand on observe ce qui se passe aux temps $\frac{p}{q}T_{ren}$, où $\frac{p}{q}$ est une fraction rationnelle, on constate qu'il y a un phénomène de clonage du vecteur initial : en quelque sorte que le vecteur $\psi\left(\frac{p}{q}T_{ren}\right)$ s'écrit comme une combinaison linéaire complexe finie de translaté du vecteur initial ψ_0 . Dans ce chapitre on arrive à décrire ces coefficients complexes : on arrive, suivant les propriétés arithmétiques de la fraction p/q à donner le nombre de coefficients non nuls

et la valeur de leurs modules. Pour finir on se placera dans un cadre gaussien (i.e on choisira une gaussienne pour vecteur initial ψ_0) ce qui permettra de pouvoir faire des calculs exacts et de faire une description analytique plus détaillée de ces phénomènes.

2.2 Le contexte

2.2.1 Règles de Bohr-Sommerfeld régulières

On considère un opérateur pseudo-différentiel P_h sur $L^2(\mathbb{R})$. On notera par p son symbole de Weyl de sorte que $P_h = \mathbf{O}_p^w(p)$. Dans les zones régulières (elliptique) les règles de quantification de Bohr-Sommerfeld (voir chapitre 1) sont : pour un réel E tel que tout les points de $p^{-1}(E)$ sont réguliers, l'équation $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$ admet une solution microlocale u_h avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}(E)$ si et seulement si $S(E) \in 2\pi h\mathbb{Z}$; où $S(E) = S(E, h)$ est une fonction admettant un développement asymptotique en puissance de h avec des coefficients de classe C^∞ par rapport à E . Dans les travaux de B. Helffer et de D. Robert ([He-Ro]) on trouve un énoncé légèrement différents des règles de Bohr-Sommerfeld avec un indexage non pas sur $\mathbb{Z}$ mais sur $\mathbb{N}$. Par la suite on va précisément utiliser leur énoncé des règles de Bohr-Sommerfeld.

Les hypothèses fonctionnelles de B. Helffer et D. Robert [He-Ro] et [Rob3] sont les suivantes :

(H1) Le symbole p de P_h est réel et de classe C^∞ ; on suppose que p n'a pas de symbole sous-principal : $p_1 \equiv 0$.

(H2) Le symbole principal p_0 de P_h est borné inférieurement : il existe $c_0 > 0$ et $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $z \in T^*\mathbb{R}$, $c_0 < p_0(z) + \gamma_0$. De plus on suppose que $p(z) + \gamma_0$ est un poids tempéré : il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(z, z') \in (T^*\mathbb{R})^2$ on ait

$$p_0(z) + \gamma_0 \leq C (p_0(z') + \gamma_0) (1 + \|z - z'\|)^M.$$

(H3) Pour tout indice $j \in \mathbb{N}$ et pour tout multiindex α il existe $c > 0$ tel que pour tout $z \in T^*\mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^\alpha H_j}{\partial z^\alpha} \right| \leq c (p_0(z) + \gamma_0).$$

(H4) Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$ et pour tout $\gamma > 0$ il existe $A > 0$ tel que pour tout $z \in T^*\mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \left(p(z) - \sum_{j=0}^N p_j(z) h^j \right) \right| \leq A h^{N+1}.$$

Remarque 2.2.1. Sous ces 4 hypothèses l'opérateur P_h est essentiellement auto-adjoint ([Rob1]).

Les hypothèses géométriques sont les suivantes : pour un compact $I = [E_-, E_+]$, avec E_- et E_+ deux réels et posons aussi $F_{+/-} := A(E_{+/-})$ avec $A(x) := \int_{p(y) \leq x} dy$.

(H5) L'ensemble $p^{-1}(I)$ est un anneau topologique de $T^*\mathbb{R}$ feuilleté par des trajectoires périodiques du flot hamiltonien.

(H6) La fonction p n'a pas de points critiques sur $p^{-1}(I)$.

Remarque 2.2.2. Si $p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x)$ on peut relaxer les hypothèses (H2) et (H3) (voir [He-Ro]).

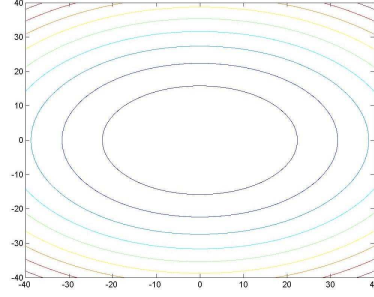


Fig. 4. Courbes $p^{-1}(c)$ elliptiques.

Théorème 2.2.3. ([He-Ro]) Sous les hypothèses précédentes (H1) à (H6); il existe une fonction f_h définie sur $J := [F_-, F_+]$ admettant un développement asymptotique en puissance de h avec des coefficients de classe C^∞ sur J :

$$f_h(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j(x) h^j;$$

de sorte que les valeurs propres $(\lambda_n(h))_n$ de P_h dans le compact I sont données par

$$\lambda_n(h) = f_h\left(h\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) + O(h^\infty)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $h\left(n + \frac{1}{2}\right) \in J$. En outre $f_0(x) = A^{-1}(2\pi x)$ et $f_1 \equiv 0$.

Ainsi localement le spectre de P_h est une suite de valeurs propres avec un interstice constant d'ordre h .

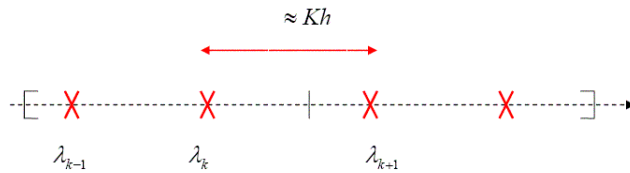


Fig. 5. Le spectre de P_h : les croix oblique rouges représentent les valeurs propres.

Remarque 2.2.4. Dans [Bil] (voir aussi [Rob3]) on trouve une preuve de ce résultat utilisant les états cohérents.

Récemment dans [Col8] Y. Colin de Verdière donne le calcul de tous les coefficients dans le développement asymptotique de la fonction f_h .

Notation 2.2.5. On notera par $e_n = e_n(h) \in L^2(\mathbb{R})$ les vecteurs propres de P_h associés aux valeurs propres $\lambda_n(h) : P_h e_n = \lambda_n(h) e_n$.

2.2.2 Forme normale autour d'une singularité elliptique

Avant de passer à la suite, il bon de remarquer que le cas où la fonction symbole p admet une singularité elliptique en un point $m_0 \in T^*\mathbb{R}$ (par exemple un fond de puit), l'utilisation d'une forme normale semi-classique ([Col9], [VuN4], [Ch-VuN]) montre que le spectre de l'opérateur P_h reste une suite de valeurs propres avec un interstice d'ordre h , ce qui nous ramène grosso modo au cas des zones régulières. En effet pour un paramètre réel $E \in [-\delta, \delta]$, où δ est une constante réelle strictement positive et indépendante de h , nous avons l'égalité microlocale

$$U^{-1}(P_h - EI_d)U = N(\hat{q} - \alpha(E)I_d)$$

où $\hat{q}$ est l'opérateur oscillateur harmonique : $\hat{q} := -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} I_d$; U est un opérateur intégral de Fourier ; N un opérateur pseudo-différentiel elliptique, $\alpha = \alpha_h$ une fonction ayant un développement asymptotique en puissance de h :

$$\alpha_h(E) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(E) h^j$$

où les fonctions α_j sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à E et indépendante de h . Notons bien que dans le cas particulier de l'opérateur de Schrödinger $P_h = -\frac{h^2}{2} \Delta_g + V$, par une symétrie du paramètre h , tous les termes de degrés impairs dans le développement asymptotique de la fonction α_h sont nuls. Ainsi en utilisant le fait que le spectre de l'oscillateur harmonique $\hat{q}$ est

$$\left\{ h \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

on obtient que le spectre semi-classique de l'opérateur P_h près de la singularité elliptique est donné par la suite :

$$\left\{ \alpha_h^{-1} \left(h \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

2.2.3 Fonctions d'auto-corrélation

Pour un vecteur initial $\psi_0 \in D(P_h) \subset L^2(\mathbb{R})$, la suite de $l^2(\mathbb{N})$ donnée par $a_n(h) = \pi(\psi_0)$ où π est la projection sur les vecteur propres $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$; la fonction d'auto-corrélation dans la base des vecteurs propres s'écrit donc :

$$\mathbf{a}(t) = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n(h)|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_n(h)} \right|.$$

2.3 Préliminaires

2.3.1 Choix d'un état initial localisé en énergie

Définissons un état initial $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ de la dynamique dépendant de h et localisé autour d'un nombre réel fixé $E \in J$ indépendant de h .

Définition 2.3.1. On définit le nombre $n_0 = n_0(h)$ par

$$n_0 := \arg \min_{n \in J} |\lambda_n(h) - E|.$$

L'entier n_0 est donc l'indice de la valeur propre de P_h la plus proche du réel E .

Remarque 2.3.2. Dans le cas où le réel E serait exactement au milieu de deux valeurs propres $\lambda_n(h)$ et $\lambda_{n+1}(h)$ on choisira de prendre $n_0 = n$. On supposera ainsi que l'entier n_0 est unique.

On a alors le lemme :

Lemme 2.3.3. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h tel que $|\lambda_{n_0}(h) - E| \leq Ch$. Ainsi pour $h \rightarrow 0$ on a l'équivalent $n_0 \sim \frac{N}{h}$ où $N := f_0^{-1}(E)$ est un réel non nul.*

Démonstration. Or comme

$$\lambda_{n+1}(h) - \lambda_n(h) = f_h \left(h \left(n + \frac{3}{2} \right) \right) - f_h \left(h \left(n + \frac{1}{2} \right) \right);$$

par le théorème des accroissements finis : il existe $\xi = \xi_{n,h,E} \in J$ tel que

$$\lambda_{n+1}(h) - \lambda_n(h) = f'_h(\xi) h.$$

on a donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $h \left(n + \frac{1}{2} \right) \in J$ et $h \left(n + \frac{3}{2} \right) \in J$

$$|\lambda_{n+1}(h) - \lambda_n(h)| \leq h \sup_{x \in J} |f'_h(x)|$$

$$\leq h \sup_{x \in J} |f'_0(x)| + O(h^3) = O(h).$$

Ensuite comme

$$|\lambda_{n_0}(h) - E| \leq \max \{ |\lambda_{n_0+1}(h) - \lambda_{n_0}(h)|, |\lambda_{n_0}(h) - \lambda_{n_0-1}(h)| \}$$

il existe bien $C > 0$ indépendant de n et de h tel que $|\lambda_{n_0}(h) - E| \leq Ch$; c'est-à-dire $f_h \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) = E + O(h)$. Nous avons alors $h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) = g_h(E + O(h))$ où $g_h := f_h^{-1}$ et donc $hn_0 = g_0(E + O(h)) + O(h)$. Par conséquent on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} n_0 h = g_0(E) \neq 0$$

d'où le lemme. □

Définition 2.3.4. Considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$a_n := a_n(h) = K_h \chi \left(\frac{\lambda_n(h) - \lambda_{n_0}(h)}{h^{\delta'}} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

où $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction non identiquement nulle, positive et paire ; δ' un nombre réel et K_h est une constante de normalisation de sorte que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = 1 + O(h^\infty)$.

On va détailler ce choix d'état initial :

1. Le terme $\chi \left(\frac{\lambda_n(h) - \lambda_{n_0}(h)}{h^{\delta'}} \right)$ sert à localiser autour, non pas de E directement, mais pour des raisons techniques, autour de la valeur propre la plus proche de E . Un exemple typique de choix de fonction χ est la gaussienne.
2. Les constantes δ' et γ' servent à modifier la dilatation de la fonction χ .

Ensuite comme

$$\lambda_n(h) - \lambda_{n_0}(h) = f_h \left(h \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) - f_h \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right);$$

avec le théorème des accroissements finis : il existe $\xi = \xi_{n,h,E} \in J$ tel que

$$\lambda_n(h) - \lambda_{n_0}(h) = f'_h(\xi) (n - n_0) h.$$

On a donc

$$\lambda_n(h) - \lambda_{n_0}(h) = f'_0(\xi) (n - n_0) h + O(h^2).$$

On est alors amené à la définition (définitive et plus facile à manipuler) suivante :

Définition 2.3.5. Considérons la suite $(a_n(h))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$a_n := K_h \chi \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta'-1}} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

où $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction non identiquement nulle, positive et paire ; $0 \leq \delta' < 1$; et

$$K_h := \left\| \chi \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta'-1}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N})}.$$

2.3.2 Premières propriétés de la suite $(a_n)_n$

Proposition 2.3.6. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Comme $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ils existe $(N_h, M_h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que : pour tout $n \geq N_h$, $|a_n(h)| \leq \frac{M_h}{(1+n^2)} \in l^2(\mathbb{Z})$ et ainsi $(a_n(h))_n \in l^2(\mathbb{Z})$. $\square$

Par la suite on va souvent utiliser le résultat classique suivant :

Lemme 2.3.7. Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout triplet de scalaire $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ on a la relation de dilatation-changement d'échelle suivante ; pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F} \left(f(-\alpha t + \beta) e^{i\gamma t} \right) (\zeta) = \frac{1}{\alpha} e^{i\gamma \frac{\beta}{\alpha}} e^{-2i\pi \zeta \frac{\beta}{\alpha}} \mathfrak{F}(f) \left(-\frac{\zeta}{\alpha} + \frac{\gamma}{2\pi\alpha} \right)$$

où la transformée de Fourier est définie par : $\mathfrak{F}(f)(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi \zeta t} dt$.

On sait calculer la valeur de la constante de normalisation K_h . On va d'abord montrer le :

Lemme 2.3.8. Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]0, 1]$; alors :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}, |l| \geq 1} \left| \varphi \left(\frac{l}{\varepsilon} \right) \right| = O(\varepsilon^\infty).$$

Démonstration. Le premier point est que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ nous avons

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}, |l| \geq 1} \left| \varphi \left(\frac{l}{\varepsilon} \right) \right| = O(1).$$

Ensuite on applique ceci à la fonction $\psi(x) := x^{2N} \varphi(x)$, où $N \in \mathbb{N}$; et on obtient alors pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}, |l| \geq 1} \left| \varphi \left(\frac{l}{\varepsilon} \right) \right| \leq \varepsilon^{2N} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \psi \left(\frac{l}{\varepsilon} \right) \right| = O(\varepsilon^{2N}).$$

D'où le lemme. □

Théorème 2.3.9. Nous avons

$$K_h = \frac{1}{h^{\frac{\delta'-1}{2}} \sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)}} + O(h^\infty);$$

et ainsi $\|a_n\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1 + O(h^\infty)$.

Démonstration. Avec la formule sommatoire de Poisson et les deux précédents lemmes nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta'-1}} \right) &= h^{\delta'-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-lh^{\delta'-1} \right) \\ &= h^{\delta'-1} \left[\mathfrak{F}(\chi^2)(0) + \sum_{l \in \mathbb{Z}, |l| \geq 1} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-lh^{\delta'-1} \right) \right] \\ &= h^{\delta'-1} \mathfrak{F}(\chi^2)(0) + O(h^\infty). \end{aligned}$$

On va maintenant revenir à l'indexage sur $\mathbb{N}$ de la série. Comme $\chi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on dispose de :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists C_k > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left| \chi^2(x) \right| \leq \frac{C_k}{(1 + |x|)^k};$$

ensuite on part de l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta' - 1}} \right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta' - 1}} \right) - \sum_{n = -\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta' - 1}} \right) \\ &= h^{\delta' - 1} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \right) (0) + O(h^\infty) - \sum_{n = -\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta' - 1}} \right). \end{aligned}$$

Par parité de la fonction χ^2 :

$$\begin{aligned} \sum_{n = -\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta' - 1}} \right) &= \sum_{n = 1}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n + n_0}{h^{\delta' - 1}} \right) \\ &\leq \sum_{n = 1}^{+\infty} \frac{C_k}{\left(1 + \frac{|n + n_0|}{h^{\delta' - 1}} \right)^k} \leq C_k h^{k(\delta' - 1)} \sum_{n = 1}^{+\infty} \frac{1}{|n + n_0|^k} \end{aligned}$$

et par les théorèmes généraux de comparaisons entre séries et intégrales, on obtient la majoration :

$$C_k h^{k(\delta' - 1)} \sum_{n = 1}^{+\infty} \frac{1}{|n + n_0|^k} \leq C_k h^{k(\delta' - 1)} \int_0^\infty \frac{du}{(u + n_0)^k} = h^{k(\delta' - 1)} \frac{C_k}{(k - 1)} \frac{1}{n_0^{k - 1}}.$$

Maintenant, quand $h \rightarrow 0$, on sait que $n_0 \sim \frac{N}{h}$ où $N \neq 0$, ainsi, quand $h \rightarrow 0$ on a :

$$h^{k(\delta' - 1)} \frac{C_k}{(k - 1)} \frac{1}{n_0^{k - 1}} \sim \frac{C_k}{N^{k - 1} (k - 1)} h^{k\delta' - 1}$$

et par conséquent pour k arbitrairement grand on obtient $\sum_{n = -\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta' - 1}} \right) = O(h^\infty)$. Au final on a bien :

$$\left\| \chi \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta' - 1}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N})}^2 = h^{\delta' - 1} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \right) (0) + O(h^\infty);$$

d'où $K_h = \frac{1}{h^{\frac{\delta' - 1}{2}} \sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)}} + O(h^\infty)$. Ensuite il suffit de réécrire que

$$\|a_n\|_{l^2(\mathbb{N})}^2 = K_h^2 h^{\delta' - 1} \left[\mathfrak{F} \left(\chi^2 \right) (0) + O(h^\infty) \right] = 1 + O(h^\infty).$$

□

2.3.3 Découpe de la série

Commençons par une définition :

Définition 2.3.10. On définit les ensembles d'entiers $\Delta = \Delta(h, E)$ et $\Gamma = \Gamma(h, E)$ par :

$$\Delta := \left\{ n \in \mathbb{N}, |n - n_0| \leq h^{\delta-1} \right\}; \quad \Gamma := \mathbb{N} - \Delta$$

où le réel $\delta \in]0, 1[$ vérifie $\delta' > \delta$.

Remarque 2.3.11. Pour h assez petit on a donc que $1 \ll h^{\delta'-1} < h^{\delta-1}$, c'est à dire que l'ensemble Δ est "plus grand" que la localisation du vecteur initial $(a_n)_n$; le lemme suivant illustre parfaitement ceci.

Lemme 2.3.12. Nous avons l'égalité :

$$\sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 = O(h^\infty).$$

Démonstration. Partons de :

$$\sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n - n_0| > h^{\delta-1}} |a_n|^2.$$

Ensuite, avec le même argument que dans la preuve du lemme précédent on montre que pour tout entier $N \geq 1$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta'-1}} \right)^{2N} |a_n|^2 = O(1).$$

Sans perdre de généralités on peut supposer que $n_0 = 0$. Ensuite écrivons :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| > h^{\delta-1}} |a_n|^2 &= h^{2N(\delta'-1)} \sum_{n \in \mathbb{Z}, |n| > h^{\delta-1}} |a_n|^2 \left(\frac{n}{h^{\delta'-1}} \right)^{2N} \frac{1}{n^{2N}} \\ &\leq \frac{h^{2N(\delta'-1)}}{h^{2N(\delta-1)}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \left(\frac{n}{h^{\delta'-1}} \right)^{2N} = O\left(h^{2N(\delta'-\delta)}\right). \end{aligned}$$

Ainsi comme $\delta' > \delta$ on a bien $\sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 = O(h^\infty)$. □

2.3.4 Stratégie de l'étude dynamique

On va étudier les fonctions de retour $\mathbf{r}(t)$ et d'auto-corrélation $\mathbf{a}(t)$ en utilisant leurs expressions sous forme de séries de fonctions. Ensuite l'idée est de simplifier ces séries en utilisant un développement de Taylor des valeurs propres $\lambda_n(h) = f_h\left(h\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) + O(h^\infty)$. Précisément on fera des développements limités autour, non pas du réel E , mais autour de la valeur propre $\lambda_{n_0}(h)$ la plus proche de E .

2.4 Période classique et terme principal de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique

2.4.1 Définition d'une échelle de temps spécifique

Dans cette section on fera un développement limité à l'ordre 1 des valeurs propres : on conservera juste la partie affine de $\lambda_n(h)$.

Lemme 2.4.1. *Quelque soit $n \in \Delta$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$ nous avons :*

$$\frac{t\lambda_n(h)}{h} = \frac{t\lambda_{n_0}(h)}{h} + t(n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(th^{2\delta-1}\right).$$

Démonstration. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n(h) = f_h\left(h\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)$; en écrivant une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 de la fonction f_h autour du point $h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)$ on a

$$\frac{\lambda_n(h)}{h} = \frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_h\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{h(n - n_0)^2}{2}f''_h(\zeta)$$

avec $\zeta = \zeta_{n,h,E} \in J$. Ensuite on utilise le développement asymptotique de la fonction f_h pour tout $n \in \Delta$ et on obtient

$$\frac{\lambda_n(h)}{h} = \frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(h^{2\delta-1}\right).$$

D'où le lemme. □

Proposition 2.4.2. *Soit α un réel vérifiant l'inégalité : $\alpha > 1 - 2\delta$. On a alors uniformément pour $t \in [0, h^\alpha]$:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\frac{\lambda_n(h)}{h}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right)\right)} + O\left(h^{\alpha+2\delta-1}\right).$$

Démonstration. Étudions la différence $\varepsilon(t) := \varepsilon(t, h)$ définie par

$$\varepsilon(t) := \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 \left(e^{-it\frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it\left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right)\right)} \right) \right|$$

donc à l'aide des ensembles Γ et Δ et par inégalité triangulaire on a pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &\leq \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \left(e^{-it\frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it\left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right)\right)} \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 \left(e^{-it\frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it\left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right)\right)} \right) \right|. \end{aligned}$$

Regardons d'abord le terme de droite de la précédente majoration de la fonction $\varepsilon(t)$:

$$\left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 \left(e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it \left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n-n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \right)} \right) \right|$$

$$\leq 2 \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 = O(h^\infty)$$

d'après le lemme 2.3.12. Ensuite pour tout $n \in \Delta$ et pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ avec le précédent lemme on obtient que :

$$e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it \left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n-n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \right)}$$

$$= e^{-it \left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n-n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \right)} \left[e^{it \frac{h(n-n_0)^2}{2} f''_0(\zeta)} - 1 \right] = O(h^{\alpha+2\delta-1});$$

et ainsi pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ nous obtenons

$$\left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \left(e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it \left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n-n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \right)} \right) \right|$$

$$\leq O(h^{\alpha+2\delta-1}) \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \leq O(h^{\alpha+2\delta-1}) \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = O(h^{\alpha+2\delta-1})$$

Au final, on a, montré que uniformément en $t \in [0, h^\alpha]$ on a $\varepsilon(t) = O(h^{\alpha+2\delta-1})$. $\square$

En conclusion, on a immédiatement que le terme principal de la fonction d'auto corrélation dans l'échelle $[0, h^\alpha]$ est la série de fonctions :

Définition 2.4.3. Le terme principal de la fonction de retour $\mathbf{r}(t)$ est la série de fonctions

$$\mathbf{r}_1 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n-n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \right)};$$

et son module est le même que celui de la série de fonctions :

$$\mathbf{a}_1 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \left((n-n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \right)}.$$

Étudions maintenant cette série en détails :

2.4.2 Périodicité du terme principal en limite semi-classique

Le module du terme principal de la fonction d'auto-corrélation est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right)}$.

Définition 2.4.4. On définit la période classique $T_{cl} = T_{cl}(h, E)$ par

$$T_{cl} := \frac{2\pi}{f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right)}.$$

La période T_{cl} de l'approximation à l'ordre 1 de la fonction d'auto-corrélation quantique correspond géométriquement à la période du flot classique associé, en effet on a :

Proposition 2.4.5. *Nous avons :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_{cl} = \tau(E).$$

$\tau(E)$ désignant la période du flot hamiltonien associé à la fonction symbole p avec une condition initiale sur la fibre $p^{-1}(E)$.

Démonstration. Partons du fait que pour tout réel x on a

$$f'_0(x) = \frac{2\pi}{A'(A^{-1}(2\pi x))},$$

ensuite comme $A'(y) = \tau(y)$ [Gu-St] on en déduit que $T_{cl} = \tau(A^{-1}(2\pi h n_0))$. Puis comme, pour $h \rightarrow 0$ on a l'équivalent

$$n_0 \sim \frac{f_0^{-1}(E)}{h},$$

on obtient alors immédiatement

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_{cl} = \tau(A^{-1}(2\pi f_0^{-1}(E))) = \tau(E).$$

□

Remarque 2.4.6. Notons que comme la seule contrainte sur la constante α de l'échelle spécifique est que $\alpha > 1 - 2\delta$, avec $\delta \in]0, 1[$ ceci autorise donc d'avoir $\alpha < 0$; et donc d'avoir un choix de α pertinent : pour h assez petit, l'échelle de temps spécifique d'approximation est plus grande que la période classique, en effet pour h assez petit on a :

$$[0, T_{cl}] \subset [0, h^\alpha].$$

2.4.2.1 Comportement sur une période classique

Étudions donc la fonction $\mathbf{a}_1(t)$ sur une période $[0, T_{cl}]$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(n-n_0)f'_0(h(n_0 + \frac{1}{2}))} = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}}.$$

Proposition 2.4.7. *Pour tout $t \geq 0$, on a l'égalité :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right).$$

Démonstration. L'ingrédient essentiel de la démonstration est la formule sommatoire de Poisson. Considérons la fonction Ω_t définie par :

$$\Omega_t : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto |a_x|^2 e^{-it2\pi(x-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$, et a_x est, rappelons le, la fonction définie par :

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} h^{\frac{\delta'-1}{2}}} \chi\left(\frac{x - n_0}{h^{\delta'-1}}\right).$$

Clairement $\Omega_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, calculons donc $\mathfrak{F}(\Omega_t)$ sa transformée de Fourier ; on obtient avec le lemme 2.3.7 que quel que soit $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}(\Omega_t)(\zeta) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} e^{-2i\pi n_0 \zeta} \mathfrak{F}(\chi^2)\left(-h^{\delta'-1}\left(\zeta + \frac{t}{T_{cl}}\right)\right).$$

Maintenant avec l'égalité de Poisson appliquée à la fonction Ω_t on obtient :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)} \frac{1}{T_{cl}} = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2)\left(-h^{\delta'-1}\left(l + \frac{t}{T_{cl}}\right)\right).$$

□

Pour comprendre la fonction $\mathbf{a}_1(t)$ on va donc s'intéresser à la nouvelle série de fonctions :

$$t \mapsto \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2)\left(-h^{\delta'-1}\left(l + \frac{t}{T_{cl}}\right)\right).$$

On voit tout de suite, compte tenu de la décroissance à l'infini de la fonction $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ que les termes prépondérants dans la série correspondent aux indices l tels que $\left(l + \frac{t}{T_{cl}}\right)$ soit le plus proche de zéro. Précisons cela avec une définition et un théorème.

Définition 2.4.8. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit l'entier $l(t) = l(t, h, E)$ comme étant l'entier le plus proche du réel $-\frac{t}{T_{cl}}$; on note alors par $d(t, T_{cl}\mathbb{Z})$ la distance entre le réel t et le réseau $T_{cl}\mathbb{Z}$.

Remarque 2.4.9. Quitte à modifier le paramètre h , donc quitte à modifier la valeur de T_{cl} , on supposera que l'entier $l(t)$ est unique. Par ailleurs pour tout $l \in \mathbb{Z}$ tel que $l \neq l(t)$ on a :

$$\left|l + \frac{t}{T_{cl}}\right| \geq \frac{1}{2}.$$

On aura besoin du :

Lemme 2.4.10. Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]0, 1]$; alors uniformément pour $u \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}, |l+u| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{l+u}{\varepsilon}\right) \right| = O(\varepsilon^\infty).$$

Démonstration. On montre facilement qu'uniformément pour $u \in \mathbb{R}$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}, |l+u| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{l+u}{\varepsilon}\right) \right| = O(1).$$

Ecrivons ensuite que

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}, |l+u| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi \left(\frac{l+u}{\varepsilon} \right) \right| &= \sum_{l \in \mathbb{Z}, |l+u| \geq \frac{1}{2}} \left(\frac{l+u}{\varepsilon} \right)^{2N} \left| \varphi \left(\frac{l+u}{\varepsilon} \right) \right| \frac{\varepsilon^{2N}}{(l+u)^{2N}} \\ &\leq \varepsilon^{2N} 4^N \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\frac{l+u}{\varepsilon} \right)^{2N} \left| \varphi \left(\frac{l+u}{\varepsilon} \right) \right|. \end{aligned}$$

Ensuite on applique ceci à la fonction $\psi(x) := x^{2N} \varphi(x)$ pour conclure. $\square$

Théorème 2.4.11. *On a uniformément pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} d(T_{cl}\mathbb{Z}, t) \right) + O(h^\infty).$$

Démonstration. On va commencer par montrer ce résultat avec la série indexée sur $\mathbb{Z}$: or d'après la précédente proposition on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} d(t, T_{cl}\mathbb{Z}) \right) + \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \neq l(t)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right). \end{aligned}$$

Avec le lemme précédent on a

$$\sum_{l \neq l(t)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right) = O(h^\infty)$$

On va maintenant montrer le résultat avec la série indexée sur $\mathbb{N}$. On part de l'égalité

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} - \sum_{n=-\infty}^{-1} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}}$$

qui avec la proposition 2.4.7 se réécrit aussi

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right) \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{-1} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} - \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} d(T_{cl}\mathbb{Z}, t) \right) \right|$$

est, par inégalité triangulaire, majorée par

$$\leq \sum_{l \neq l(t)} \left| \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right) \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}|^2.$$

Par définition de la suite $(a_n)_n$ on a aussi que (voir preuve du théorème 2.3.9) $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}|^2 = O(h^\infty)$. $\square$

Finissons par un corollaire d'affinage qui explique le comportement de la fonction d'auto-corrélation sur une période classique T_{cl} . Le résultat suivant montre que le graphe de la fonction d'auto-corrélation est très "piquée" sur la valeur 1 autour de la période classique.

Corollaire 2.4.12. *Nous avons que :*

(i) *pour $t \in T_{cl}\mathbb{Z}$; c'est à dire : $d(T_{cl}\mathbb{Z}, t) = 0$; on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} = 1;$$

(ii) *pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - \delta'$ et pour t tel que $d(T_{cl}\mathbb{Z}, t) > h^{1-\delta'-\varepsilon}$, on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}} = O(h^\infty).$$

Démonstration. Le premier point découle directement du précédent théorème.

Pour le second point : si $\left| -h^{\delta'-1} \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right| > h^{-\varepsilon}$ on a donc :

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-h^{\delta'-1} \left(l(t) + \frac{t}{T_{cl}} \right) \right) \right| &\leq \frac{B_k}{\left(1 + \left| -h^{\delta'-1} d(T_{cl}\mathbb{Z}, t) \right| \right)^k} \\ &\leq \frac{B_k}{(1 + h^{-\varepsilon})^k} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai quel que soit l'entier k ; le second point est démontré. $\square$

2.4.3 Comparaison de la période classique avec l'échelle h^α

Rappelons que $\delta \in]0, 1[$, et que α doit vérifier : $\alpha > 1 - 2\delta$, on peut donc choisir α tel que

$$-1 < \alpha < 0$$

ce qui permet, pour h assez petit d'avoir les inclusions :

$$[0, T_{cl}] \subset [0, h^\alpha].$$

2.5 Terme d'ordre deux de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique

On va utiliser la même démarche que dans l'étude précédente : on va trouver une échelle de temps sur laquelle on peut simplifier la fonction d'auto-corrélation dans un régime semi classique. Dans cette section on fera un développement limité à l'ordre 2 : on conservera les parties affine et quadratique de $\lambda_n(h)$.

2.5.1 Définition d'une nouvelle échelle de temps spécifique

Lemme 2.5.1. *Quelque soit $n \in \Delta$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$ nous avons :*

$$\frac{t\lambda_n(h)}{h} = \frac{t\lambda_{n_0}(h)}{h} + t(n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + th\frac{(n - n_0)^2}{2}f''_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + O\left(th^{3\delta-1}\right).$$

Démonstration. On écrit une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 de la fonction f_h autour du point $h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n(h)}{h} &= \frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_h\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{h(n - n_0)^2}{2}f''_h\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad + h^2\frac{(n - n_0)^3}{6}f^{(3)}_h(\zeta) \end{aligned}$$

avec $\zeta = \zeta_{n,h,E} \in J$. Ensuite on utilise à nouveau le développement asymptotique de la fonction f_h : on a alors que pour tout $n \in \Delta$,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n(h)}{h} &= \frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{h(n - n_0)^2}{2}f''_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &\quad + O\left(h^{3\delta-1}\right). \end{aligned}$$

□

Notation 2.5.2. On notera par $Q_2(X) = Q_2(h, E, X)$ le polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par :

$$Q_2(X) := \frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (X - n_0)f'_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{h(X - n_0)^2}{2}f''_0\left(h\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right).$$

De sorte que $\frac{\lambda_n(h)}{h} = Q_2(n) + O\left(h^{3\delta-1}\right)$.

Proposition 2.5.3. *Soit β un réel vérifiant l'inégalité : $\beta > 1 - 3\delta$. On a alors uniformément en $t \in [0, h^\beta]$*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\frac{\lambda_n(h)}{h}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} + O\left(h^{\beta+3\delta-1}\right).$$

Démonstration. Étudions la différence $\varepsilon(t) := \varepsilon(t, h)$ définie par

$$\varepsilon(t) := \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\frac{\lambda_n(h)}{h}} - \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \right|.$$

Ainsi à l'aide des ensembles Γ et Δ et par inégalité triangulaire, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\varepsilon(t) \leq \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-it\frac{\lambda_n(h)}{h}} - \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \right| + 2 \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2.$$

Étudions donc le terme de gauche de la précédente inégalité :

$$\left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} - \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-it Q_2(n)} \right| = \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \left(e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it Q_2(n)} \right) \right|$$

et comme pour tout $n \in \Delta$ et que que soit $t \in [0, h^\beta]$

$$e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it Q_2(n)} = e^{-it Q_2(n)} \left[e^{th^2 \frac{(n-n_0)^3}{6} f_h^{(3)}(\zeta)} - 1 \right]$$

on a alors pour tout $t \in [0, h^\beta]$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \left(e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} - e^{-it Q_2(n)} \right) \right| &\leq O(h^{\beta+3\delta-1}) \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \\ &\leq O(h^{\beta+3\delta-1}) \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = O(h^{\beta+3\delta-1}). \end{aligned}$$

Au final, on a montré que uniformément en $t \in [0, h^\beta]$ on a $\varepsilon(t) = O(h^{\beta+3\delta-1})$. $\square$

En conclusion, on a immédiatement que le terme principal de la fonction d'auto corrélation dans l'échelle $[0, h^\beta]$ est la série de fonctions :

Définition 2.5.4. L'approximation à l'ordre 2 de la fonction de retour semi-classique $\mathbf{r}(t)$ est la série de fonctions :

$$\mathbf{r}_2 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it Q_2(n)}$$

et son module est le même que celui de la série de fonctions :

$$\mathbf{a}_2 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \left(h(n-n_0) f_0' \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{h^2 (n-n_0)^2}{2} f_0'' \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \right)}.$$

2.5.2 Théorème de pleine renaissance

On va mettre en évidence une nouvelle période, bien plus grande que la période classique, où l'on trouve des phénomènes particuliers purements quantiques. Commençons par des notations relatives à la période renaissance :

Définition 2.5.5. On définit la période renaissance $T_{ren} = T_{ren}(h, E)$ par

$$T_{ren} := \frac{4\pi}{h f_0'' \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right)}$$

et on notera par $N_h = N(h, E)$ la partie entière de la division euclidienne de T_{ren} par T_{cl}

$$N_h := E \left[\frac{T_{ren}}{T_{cl}} \right] \in \mathbb{N}.$$

De sorte que par division euclidienne : il existe un unique $\Theta_h \in [0, 1[$ tel que :

$$\frac{T_{ren}}{T_{cl}} = N_h + \Theta_h.$$

Et ainsi

$$\mathbf{a}_2(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi t \left((n-n_0) \frac{1}{T_{cl}} + (n-n_0)^2 \frac{1}{T_{ren}} \right)}.$$

Théorème 2.5.6. Avec les précédentes notations nous avons :

(i) Si $\Theta_h = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) = \mathbf{a}_2(t + T_{ren}) = \mathbf{a}_2(t).$$

(ii) Si $\Theta_h \in]0, 1[$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{a}_2(t + T_{ren}) = \mathbf{a}_2(t) + O(h^{2\delta-1}).$$

Démonstration. Comme $T_{ren} = T_{cl}N_h + T_{cl}\Theta_h$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t + N_h T_{cl}}{T_{cl}} (n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{(t + N_h T_{cl} - T_{cl}\Theta_h)}{T_{ren}} (n-n_0)^2} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} (n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{(t - T_{cl}\Theta_h)}{T_{ren}} (n-n_0)^2}. \end{aligned}$$

Donc si on suppose que $\Theta_h = 0$ on obtient bien sur que :

$$\mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) = \mathbf{a}_2(t).$$

Maintenant si on suppose que $\Theta_h \in]0, 1[$, étudions la différence : $|\mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) - \mathbf{a}_2(t)|$. Or par définition pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} &|\mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) - \mathbf{a}_2(t)| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} (n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} (n-n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{cl}}{T_{ren}} (n-n_0)^2} - 1 \right) \right| \end{aligned}$$

puis en partitionnant $\mathbb{N}$ avec Δ et Γ , et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &\leq \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} (n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} (n-n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{cl}}{T_{ren}} (n-n_0)^2} - 1 \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} (n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} (n-n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{cl}}{T_{ren}} (n-n_0)^2} - 1 \right) \right|. \end{aligned}$$

Majorons le premier terme : or quel que soit $n \in \Delta$ nous avons que

$$\frac{T_{cl}}{T_{ren}} (n - n_0)^2 \leq Mh^{2\delta-1}$$

où $M > 0$, ainsi quand $h \rightarrow 0$, on obtient que quel que soit $n \in \Delta$:

$$e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{cl}}{T_{ren}} (n-n_0)^2} = 1 + O(h^{2\delta-1}).$$

Donc il existe $C > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}}(n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n-n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{cl}}{T_{ren}}(n-n_0)^2} - 1 \right) \right| \\ & \leq Ch^{2\delta-1} \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \leq Ch^{2\delta-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = O(h^{2\delta-1}). \end{aligned}$$

Ensuite pour le second terme :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}}(n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n-n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{cl}}{T_{ren}}(n-n_0)^2} - 1 \right) \right| \\ & \leq \sum_{n \in \Gamma} 2 |a_n|^2 = O(h^\infty) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Remarque 2.5.7. Nous avons quand $h \rightarrow 0$ que :

$$\frac{N_h T_{cl}}{T_{ren}} = \frac{T_{ren} - \Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} = 1 - \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \rightarrow 1$$

ainsi $N_h T_{cl} \sim T_{ren}$ quand $h \rightarrow 0$. On a aussi l'équivalence, quand $h \rightarrow 0$, $N_h \sim \frac{K}{h}$ où $K > 0$.

La proposition précédente montre que $t \mapsto \mathbf{a}_2(t)$, est, modulo $O(h^{2\delta-1})$, périodique, avec une période équivalente, quand $h \rightarrow 0$ à T_{ren} . C'est ce qu'on appellera le phénomène de pleine renaissance (voir annexe).

2.5.3 Théorème de renaissances fractionnaire

On va s'intéresser à ce qui se passe sur des temps proches de $\frac{p}{q} T_{ren}$ où $\frac{p}{q}$ sera un nombre rationnel. Commecons par quelques préliminaires :

2.5.3.1 Préliminaires arithmétiques

Notation 2.5.8. Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(\sigma_h(p, q))$ indexée sur $\mathbb{Z}$:

$$(\sigma_h(p, q))_n := e^{-2i\pi \frac{p}{q}(n-n_0)^2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La périodicité de cette suite est caractérisée par la :

Proposition 2.5.9. *Quel que soit le couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, la suite $(\sigma_h(p, q))_n$ est l -périodique si et seulement si l'entier l est solution de l'équation suivante :*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2pl}{q}m + \frac{pl^2}{q} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Démonstration. C'est évident : en effet, une fois le couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ fixé, pour tout entier relatif n nous avons :

$$(\sigma_h(p, q))_{n+l} = (\sigma_h(p, q))_n$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \frac{p}{q}(n - n_0 + l)^2 \equiv \frac{p}{q}(n - n_0)^2 \pmod{1}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \frac{2pl}{q}(n - n_0) + \frac{pl^2}{q} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Ce qui montre la proposition. $\square$

Maintenant on va résoudre cette équation :

Proposition 2.5.10. *Supposons que les entiers p et q sont premiers entre eux ; alors l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions l de l'équation :*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \frac{2pl}{q}m + \frac{pl^2}{q} \equiv 0 \pmod{1}$$

est caractérisé par :

- (i) si q impair alors $\mathcal{E} = \{q\mathbb{Z}\}$;
- (ii) si q pair et $\frac{q}{2}$ impair alors $\mathcal{E} = \{q\mathbb{Z}\}$;
- (iii) si q pair et $\frac{q}{2}$ pair alors $\mathcal{E} = \{\frac{q}{2}\mathbb{Z}\}$.

Démonstration. Déjà notons bien que dans les trois cas le fait d'être multiple de q est une condition suffisante pour être solution de l'équation ; voyons maintenant les conditions nécessaires. Par définition nous avons :

$$l \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \frac{2pl}{q}m + \frac{pl^2}{q} \equiv 0 \pmod{1}$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, q|(2plm + pl^2);$$

et comme $p \wedge q = 1$, par le lemme de Gauss, nous avons donc

$$l \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, q|(2lm + l^2).$$

Soit maintenant l un entier solution de $\mathcal{E}$; d'une part on a en particulier (en prenant $m = 0$) que $q|l^2$, ainsi il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $l^2 = \alpha q$. D'autre part, comme pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on a $q|(2lm + l^2)$, on en déduit que quel que soit $m \in \mathbb{Z}$, il existe $\beta_m \in \mathbb{Z}$ vérifiant l'égalité $2lm + l^2 = \beta_m q$; ainsi comme $l^2 = \alpha q$, nous avons alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$ l'égalité $2lm + \alpha q = \beta_m q$. En particulier avec $m = 1$ on déduit que :

$$2l = (\beta_1 - \alpha)q.$$

- Si q est impair : alors $\beta_1 - \alpha$ est pair ; et donc $l = \underbrace{\frac{(\beta_1 - \alpha)}{2}}_{\in \mathbb{Z}} q$, ainsi $q|l$,

d'où $\mathcal{E} = \{q\mathbb{Z}\}$.

- Si q est pair : alors $l = (\beta_1 - \alpha)\frac{q}{2}$; donc $\frac{q}{2}|l$. Écrivons que $l = k\frac{q}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \frac{2pl}{q}m + \frac{pl^2}{q} = kpm + \frac{pk^2q}{4}.$$

Ainsi comme

$$\forall m \in \mathbb{Z}, kpm + \frac{pk^2q}{4} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{pk^2q}{4} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow pk^2q \in 4\mathbb{Z}.$$

Et comme p impair, on a finalement, avec $l = k\frac{q}{2}$ que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \frac{2pl}{q}m + \frac{pl^2}{q} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k^2q \in 4\mathbb{Z}.$$

Distinguons alors deux autres sous cas :

- Si $\frac{q}{2}$ est impair : alors $k^2q \in 4\mathbb{Z} \Leftrightarrow k^2$ est pair, donc équivalent à k pair, ainsi $l = k\frac{q}{2}$ est un multiple de q , d'où $\mathcal{E} = \{q\mathbb{Z}\}$.
- Si $\frac{q}{2}$ est pair : alors $q = 4q'$ où $q' \in \mathbb{Z}^*$, donc quel que soit $k \in \mathbb{Z}$; $k^2q = k^24q' \in 4\mathbb{Z}$, d'où $\mathcal{E} = \{\frac{q}{2}\mathbb{Z}\}$. $\square$

Remarque 2.5.11. Dans le cas où les entiers p et q ne sont pas premiers entre eux, la proposition précédente reste vraie et applicable, il suffit de réduire p et q : prendre $\frac{p}{p \wedge q}$ et $\frac{q}{p \wedge q}$ à la place des entiers p et q .

Maintenant pour une période l fixée, munissons l'ensemble des suite l -périodiques à valeurs complexes d'une structure hermitienne de la façon suivante :

Définition 2.5.12. Pour un entier $l \in \mathbb{Z}^*$ fixé; on définit $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites périodiques de période l par :

$$\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z}) := \left\{ u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}; \forall n \in \mathbb{Z}, u_{n+l} = u_n \right\}.$$

On a alors la :

Proposition 2.5.13. L'application :

$$\langle , \rangle_{\mathfrak{S}_l} : \begin{cases} \mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{\mathfrak{S}_l} := \frac{1}{|l|} \sum_{k=0}^{|l|-1} u_k \overline{v_k} \end{cases}$$

munie $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$ d'une structure hermitienne de dimension l .

Démonstration. Il est évident que $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $|l|$; il suffit juste de vérifier que $\langle , \rangle_{\mathfrak{S}_l}$ est bien un produit scalaire hermitien; ceci est classique et immédiat. $\square$

Proposition 2.5.14. En notant par $\phi_n^k := e^{-\frac{2i\pi kn}{l}}$ où $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$; la famille $\left\{ \left(\phi_n^k \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\}_{k=0 \dots l-1}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Avec $l > 0$, la famille $\left\{ \left(\phi_n^k \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\}_{k=0 \dots l-1}$ est clairement une famille formée de l vecteurs non nuls de $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$, ensuite pour tout couple $(p, q) \in \{0 \dots l-1\}^2$ calculons le produit scalaire de ϕ^p et de ϕ^q :

$$\langle \phi^p, \phi^q \rangle_{\mathfrak{S}_l} = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \phi_k^p \overline{\phi_k^q} = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \left(e^{\frac{2i\pi(q-p)}{l}} \right)^k = \delta_{p,q}.$$

Donc $\left\{ \left(\phi_n^k \right)_{n \in \mathbb{Z}} \right\}_{k=0 \dots l-1}$ est bien une base orthonormée de $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$. $\square$

2.5.3.2 Le principal théorème

Maintenant énonçons le théorème sur les renaissances fractionnaires :

Théorème 2.5.15. *Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1$; il existe une famille de l nombre complexes dépendant du paramètre h ; $(\tilde{b}_k(l))_{k \in \{0 \dots l-1\}}$ où l'entier $l \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation de la proposition 2.5.10 ; tels que pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ on ait l'égalité :*

$$\mathbf{a}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \mathbf{a}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) + O(h^{2\delta-1}).$$

Les coefficients $\tilde{b}_k(l)$ sont nommés coefficients fractionnaires, et sont donnés par : quel que soit $k \in \{0 \dots l-1\}$

$$\tilde{b}_k(l) = e^{-\frac{2i\pi k n_0}{l}} b_k(l)$$

où

$$b_k(l) = b_k(h, l) = \left\langle \sigma_h(p, q), \phi^k \right\rangle_{\mathfrak{S}_l} = \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{l-1} e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}}.$$

En outre en supposant de plus que $\frac{T_{ren}}{T_{hyp}} \in \mathbb{Q}$, on a alors l'égalité stricte :

$$\mathbf{a}_2 \left(t + \frac{p}{q} T_{ren} \right) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \mathbf{a}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right).$$

Démonstration. Pour plus de commodité pour l'écriture, posons $\tilde{n} := n - n_0$. Soit aussi $l \in \mathbb{Z}$ solution de l'équation de l'énoncé. Ainsi d'une part nous avons

$$\mathbf{a}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \frac{N_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2}.$$

Alors comme $T_{ren} = N_h T_{cl} + \Theta_h T_{cl}$ on a :

$$e^{-2i\pi \frac{p}{q} \frac{N_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} = e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2}$$

et que clairement par définition de l'entier l , la suite $e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n}^2} = e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} \in \mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$; ainsi on peut décomposer de manière unique la suite $(e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2})_n$ sur la base orthonormée $(\phi^k)_{k \in \{0 \dots l-1\}}$ de $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$:

$$e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n}^2} = e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} = \sum_{k=0}^{l-1} \left\langle \sigma_h(p, q), \phi^k \right\rangle_{\mathfrak{S}_l} \phi_n^k = \sum_{k=0}^{l-1} b_k(l) e^{-2i\pi \frac{k}{l} n}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} \left(\sum_{k=0}^{l-1} b_k(l) e^{-2i\pi \frac{k}{l} n} \right) e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{l-1} b_k(l) |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-2i\pi \frac{k}{l} n} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2}.$$

D'autre part

$$\mathbf{a}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{k}{l} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \mathbf{a}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} e^{-\frac{2i\pi k n_0}{l}} b_k(l) \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{k}{l} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{k}{l} n} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{a}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) - \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \mathbf{a}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right|; \end{aligned}$$

puis en partitionnant $\mathbb{N}$ avec Δ et Γ au niveau de la première série, et par inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} & \leq \left| \sum_{n \in \Gamma} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{n \in \Delta} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right|. \end{aligned}$$

Majorons la première somme :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \Gamma} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right| \\ & \leq 2 \left(\sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^{l-1} |b_k(l)| \right) = O(h^\infty). \end{aligned}$$

Ensuite pour la seconde somme, examinons le terme :

$$e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} = e^{-2i\pi \left(t + \Theta_h T_{cl} \frac{p}{q} \right) \frac{1}{T_{ren}} \tilde{n}^2}.$$

Or quel que soit $n \in \Delta$ et pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ on a qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\left| \left(t + \Theta_h T_{cl} \frac{p}{q} \right) \frac{(n - n_0)^2}{T_{ren}} \right| \leq C \left(h^{\alpha+2\delta-1} + h^{2\delta-1} \right) \leq 2Ch^{\alpha+2\delta-1}.$$

Ainsi pour tout $t \in [0, h^\alpha]$

$$\left| \sum_{n \in \Delta} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{+2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{cl}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right|$$

$$\leq O(h^{\alpha+2\delta-1}) \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \leq O(h^{\alpha+2\delta-1}) \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = O(h^{\alpha+2\delta-1}).$$

Ensuite dans le cas particulier où $t = 0$ et $\frac{T_{ren}}{T_{cl}} \in \mathbb{Q}$ alors $\Theta_h = 0$ et on obtient alors immédiatement l'égalité stricte proposée en fin d'énoncé, d'où le théorème. $\square$

Corollaire 2.5.16. *Nous avons l'égalité $\sum_{k=0}^{l-1} |b_k|^2 = 1$.*

Démonstration. C'est simple : comme $b_k(l) = \langle \sigma_h(p, q), \phi^k \rangle_{\mathfrak{S}_l}$ et que $(\phi^k)_{k \in \{0 \dots l-1\}}$ est une base orthonormée $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$ avec l'égalité de Parseval nous obtenons que $\frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} |b_k(l)|^2 = \|\sigma_h(p, q)\|_{\mathfrak{S}_l}^2 = 1$. $\square$

Examinons deux cas particulier du théorème : le cas où $\frac{p}{q} = 1$ et le cas où $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$.

Corollaire 2.5.17. *Avec les mêmes notations qu'au précédent théorème ;*
(i) pour tout $t \in [0, h^\alpha]$

$$\mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) = \mathbf{a}_1(t) + O(h^{\alpha+2\delta-1});$$

(ii) pour tout $t \in [0, h^\alpha]$

$$\mathbf{a}_2\left(t + \frac{N_h T_{cl}}{2}\right) = \mathbf{a}_1\left(t + \left(\frac{N_h + 1}{2}\right) T_{cl}\right) + O(h^{\alpha+2\delta-1});$$

en particulier si N_h est impair, alors :

$$\mathbf{a}_2\left(t + \frac{N_h T_{cl}}{2}\right) = \mathbf{a}_1(t) + O(h^{\alpha+2\delta-1})$$

et si N_h est pair, alors :

$$\mathbf{a}_2\left(t + \frac{N_h T_{cl}}{2}\right) = \mathbf{a}_1\left(t + \frac{T_{cl}}{2}\right) + O(h^{\alpha+2\delta-1}).$$

Démonstration. Commençons par le cas (i) : ici $p = 1, q = 1$ donc par le précédent théorème on a l'égalité (valable pour tout $t \in [0, h^\alpha]$) suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2\left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl}\right) &= \tilde{b}_0(1) \mathbf{a}_1(t + T_{cl} N_h) + O(h^{\alpha+2\delta-1}) \\ &= \tilde{b}_0(1) \mathbf{a}_1(t) + O(h^{\alpha+2\delta-1}) \end{aligned}$$

et $b_0(1) = \frac{1}{1}e^{-2i\pi n_0^2} = 1$, donc et $\tilde{b}_0(1) = 1$. Ensuite pour le second cas, on a que $p = 1, q = l = 2$ et par conséquent

$$\mathbf{a}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) = \tilde{b}_0(2) \mathbf{a}_1 \left(t + \frac{T_{cl} N_h}{2} \right) + \tilde{b}_1(2) \mathbf{a}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{1}{2} + \frac{N_h}{2} \right) \right) + O(h^{\alpha+2\delta-1}).$$

Calculons ensuite les coefficients :

$$b_0(2) = \frac{1}{2}e^{-2i\pi \frac{1}{2} n_0^2} + \frac{1}{2}e^{-2i\pi \frac{1}{2} (1-n_0)^2} = 0$$

donc $\tilde{b}_0(2) = 0$. Ensuite :

$$\begin{aligned} b_1(2) &= \frac{1}{2}e^{-2i\pi \frac{1}{2} n_0^2} e^{\frac{2i\pi 0}{2}} + \frac{1}{2}e^{-2i\pi \frac{1}{2} (1-n_0)^2} e^{\frac{2i\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\pi n_0^2} + (-1)e^{-i\pi (n_0-1)^2} \right) = (-1)^{n_0} \end{aligned}$$

et donc $\tilde{b}_1(2) = e^{-i\pi n_0} (-1)^{n_0} = 1$. Enfin la discussion suivant la parité de N_h vient directement de la propriété de T_{cl} -périodicité de la fonction $t \mapsto \mathbf{a}_1(t)$. $\square$

2.5.4 Comparaison des échelles de temps d'approximation, classique et de renaissances

Rappelons que $(\delta', \delta) \in]0, 1]^2$, avec $\delta' > \delta$, et que les échelles de temps d'approximation données par les coefficients α et β doivent vérifier : $\alpha > 1 - 2\delta$ et $\beta > 1 - 3\delta$, on peut donc choisir les coefficients α et β tels que :

$$\beta < -1 < \alpha < 0$$

ce qui permet, pour h assez petit d'avoir les inclusions :

$$[0, T_{cl}] \subset [0, h^\alpha] \subset \left[0, \frac{p T_{ren}}{q} \right] \subset [0, T_{ren}] \subset [0, h^\beta].$$

2.6 Calcul explicite du module des coefficients de renaissance

2.6.1 Quelques remarques préliminaires

Concernant les coefficients $\tilde{b}_k(l)$ du théorème de renaissances, on sait juste $\sum_{k=0}^{l-1} |\tilde{b}_k(l)|^2 = 1$. Mais on peut mieux faire ; en effet on va donner une formule pour calculer le module de chacun des coefficients $\tilde{b}_k(l)$. D'après la proposition 2.5.10, il y a deux cas à traiter : le premier cas où $l = q$ et l'autre cas où $l = \frac{q}{2}$. On se propose donc de calculer :

$$|\tilde{b}_k(l)| = |b_k(l)| = \left| \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{l-1} e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} e^{\frac{2i\pi kn}{l}} \right|$$

pour tout entier $k \in \{0 \dots l-1\}$. On supposera pour la suite que les entiers p et q sont premiers entre eux. Notons bien que pour faire le calcul de $|b_k(l)|$ on peut supposer que l'entier n_0 est nul, en effet :

Proposition 2.6.1. *Pour tout $k \in \{0 \dots l-1\}$*

$$|b_k(l)| = \frac{1}{l} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} m^2} e^{\frac{2i\pi km}{l}} \right|.$$

Démonstration. On part de $|\tilde{b}_k(l)| = |b_k(l)|$; ainsi pour tout $k \in \{0 \dots l-1\}$

$$\begin{aligned} |\tilde{b}_k(l)| &= \frac{1}{l} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} e^{\frac{2i\pi kn}{l}} \right| \\ &= \frac{1}{l} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} m^2} e^{\frac{2i\pi k(m+n_0)}{l}} \right| = \frac{1}{l} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} m^2} e^{\frac{2i\pi km}{l}} \right|. \end{aligned}$$

D'où la formule. □

2.6.2 Cas où on choisit $l = q$

Définition 2.6.2. Pour $q \in \mathbb{N}^*$ fixé, on notera par χ le caractère suivant :

$$\chi : \begin{cases} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^* \\ a \mapsto e^{-2i\pi \frac{a}{q}}. \end{cases}$$

On a alors que

Proposition 2.6.3. *Pour tout entier $k \in \{0 \dots q-1\}$ nous avons :*

$$|b_k(q)|^2 = \frac{1}{q^2} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \chi(p(x-y)(x+y) - k(x-y)).$$

Démonstration. C'est calculatoire, écrivons simplement que

$$\begin{aligned} |b_k(q)|^2 &= \frac{1}{q^2} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} n^2} e^{\frac{2i\pi kn}{q}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{q^2} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} x^2} e^{\frac{2i\pi kx}{q}} \right) \overline{\left(\sum_{y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} y^2} e^{\frac{2i\pi ky}{q}} \right)} \\ &= \frac{1}{q^2} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(px^2 - kx) \right) \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(-py^2 + ky) \right) \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \left(\chi(px^2 - kx) \right) \left(\chi(-py^2 + ky) \right) \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \chi(p(x-y)(x+y) - k(x-y)). \end{aligned}$$

Ce qui donne bien la formule proposée. □

Au vu de cette formule, on a envie d'effectuer le changement d'indice $z = x - y$ et $t = x + y$; précisons cela :

Notation 2.6.4. Soit φ le morphisme de module suivant :

$$\varphi : \begin{cases} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \\ (x, y) \mapsto (x - y, x + y). \end{cases}$$

Nous avons alors que :

Proposition 2.6.5. *L'application φ est un automorphisme de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ si et seulement si q est impair.*

Démonstration. Il suffit par exemple d'écrire la matrice de φ dans la base canonique ; celle ci s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$$

donc φ est inversible si et seulement si $\det(A) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$; c'est à dire si et seulement si $2 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Comme $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times = \{k \in \mathbb{Z}, k \wedge q = 1\}$, on en déduit que φ inversible si et seulement si $2 \wedge q = 1$ ce qui équivaut à dire que q est impair. $\square$

Pour le calcul des coefficients, distinguons alors deux cas, suivant la parité de l'entier q .

2.6.2.1 Cas où q est impair

C'est donc le cas où φ est un automorphisme de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$; on arrive alors au :

Théorème 2.6.6. *Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et q impair, alors nous avons pour tout $k \in \{0 \dots q - 1\}$:*

$$|b_k(q)|^2 = \frac{1}{q}.$$

Démonstration. Dans ce cas là, φ est un automorphisme de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$; on a donc que :

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \chi(p(x-y)(x+y) - k(x-y)) &= \sum_{(z,t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \chi(pzt - kz) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi((pt - k)z) \right). \end{aligned}$$

Or comme

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi((pt - k)z) = \begin{cases} q & \text{si } pt - k \equiv 0 [q] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a donc que

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi((pt - k)z) \right) = q \cdot \text{Card}(\{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, pt - k \equiv 0 [q]\}).$$

Ensuite comme $p \wedge q = 1$, p est alors inversible modulo q , donc $pt - k \equiv 0 [q] \Leftrightarrow t \equiv p^{-1}k [q]$; de là on voit que $\text{Card}(\{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, pt - k \equiv 0 [q]\}) = 1$; ainsi au final quel que soit $k \in \{0 \dots q - 1\}$ on a :

$$|b_k(q)|^2 = \frac{1}{q^2} q = \frac{1}{q}.$$

Ce qui établit une formule pour le cas impair. $\square$

2.6.2.2 Cas où q est pair

Dans ce cas là, φ n'est plus inversible, cependant comme le changement d'indice apparaît explicitement dans la formule de la proposition 2.6.3, en sommant seulement sur l'image du morphisme φ , et en multipliant cette somme par le nombre d'antécédents de chaque élément, c'est à dire par la cardinalité du noyau de φ , on arrive alors à déterminer la valeur du module des coefficients de renaissance, en effet :

Théorème 2.6.7. *Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et q pair ; nous avons pour tout $k \in \{0 \dots q - 1\}$*

$$\text{si } \frac{q}{2} \text{ est pair, alors } |b_k(q)|^2 = \begin{cases} \frac{2}{q} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\text{si } \frac{q}{2} \text{ est impair, alors } |b_k(q)|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. D'une part, comme $p \wedge q = 1$, avec q pair ; p est alors impair, d'autre part nous avons aussi que $p \wedge \frac{q}{2} = 1$. D'après la proposition 2.6.3

$$\begin{aligned} |b_k(q)|^2 &= \frac{1}{q^2} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \chi(p(x-y)(x+y) - k(x-y)) \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \chi(p\pi_1(\varphi(x,y))\pi_2(\varphi(x,y)) - k\pi_1(\varphi(x,y))) \end{aligned}$$

où π_1 et π_2 désignent respectivement les projections sur les deux coordonnées de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$; de là, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} &\sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2} \chi(p\pi_1(\varphi(x,y))\pi_2(\varphi(x,y)) - k\pi_1(\varphi(x,y))) \\ &= \text{Card}(\ker(\varphi)) \sum_{(z,t) \in (\text{Im}(\varphi))^2} \chi(pzt - kz). \end{aligned}$$

Maintenant déterminons l'image du morphisme φ : si $(z, t) \in \text{Im}(\varphi)$, alors il existe $(x, y) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ tel que $z = x - y$ et $t = x + y$, ce qui implique que $z + t = 2x$, ainsi $z + t$ est pair dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Réciproquement, soit un couple $(z, t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ tel que $z + t$ soit pair dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, alors z et t sont de même parité. Si z et t sont pairs, alors z et t peuvent s'écrire $z = 2i$ et $t = 2j$, ainsi en prenant $x = i + j$ et $y = -i + j$ on a $z = x - y$ et $t = x + y$. Si maintenant z et t sont impairs alors z et t s'écrivent $z = 2i + 1$ et $t = 2j + 1$, donc avec $x = i + j + 1$ et $y = -i + j$, on a encore bien que $z = x - y$ et $t = x + y$. Donc le couple (z, t) s'écrit comme élément de l'image du morphisme φ ; ainsi au final :

$$\text{Im}(\varphi) = \left\{ (z, t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2, z + t \text{ pair} \right\}.$$

Notons bien alors que $\text{Card}(\text{Im}(\varphi)) = \frac{q^2}{2}$, ainsi comme $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 / \ker(\varphi) \simeq \text{Im}(\varphi)$, on a $\text{Card}(\ker(\varphi)) = 2$. En écrivant que

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi) &= \left\{ (z, t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2, z + t \text{ pair} \right\} \\ &= \left\{ (z, t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2, (z, t) \text{ pairs} \right\} \coprod \left\{ (z, t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2, (z, t) \text{ impairs} \right\} \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\sum_{(z,t) \in \text{Im}(\varphi)} \chi(pzt - kz) = \sum_{\substack{(z,t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \\ (z,t) \text{ pairs}}} \chi(pzt - kz) + \sum_{\substack{(z,t) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \\ (z,t) \text{ impairs}}} \chi(pzt - kz);$$

posons alors

$$\Sigma_p := \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ t \text{ pair}}} \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ z \text{ pair}}} \chi(pzt - kz);$$

$$\Sigma_i := \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ t \text{ impair}}} \sum_{\substack{z \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ z \text{ impair}}} \chi(pzt - kz).$$

Traitons d'abord le cas particulier où $q = 2$; ainsi p est impair (car on a supposé que $p \wedge q = 1$) :

$$|b_k(2)|^2 = \frac{1}{2} (\Sigma_p + \Sigma_i)$$

avec ici $\Sigma_p = \chi(0) = 1$ et $\Sigma_i = \chi(p - k) = e^{-i\pi(p-k)}$ et comme p est impair $\Sigma_i = -e^{-i\pi k}$; d'où si k est pair on a $\Sigma_i = -1$ et donc $|b_k(2)|^2 = 0$; par contre si k est impair on a $\Sigma_i = 1$ et ainsi $|b_k(2)|^2 = 1$. Revenons maintenant au cas général : commençons par calculer la somme Σ_p ; comme $q > 2$, en écrivant z sous la forme $z = 2z'$, avec $z' \in \mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}$ nous avons

$$\Sigma_p = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ t \text{ pair}}} \sum_{z' \in \mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}} \chi((pt - k)2z')$$

puis comme

$$\sum_{z' \in \mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}} \chi((pt - k)2z') = \begin{cases} \frac{q}{2} & \text{si } pt - k \equiv 0 \left[\frac{q}{2} \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a donc

$$\Sigma_p = \frac{q}{2} \cdot \text{Card} \left(\left\{ t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, t \text{ pair}, pt - k \equiv 0 \left[\frac{q}{2} \right] \right\} \right).$$

Il faut maintenant calculer l'autre somme, en écrivant alors z sous la forme $z = 2z' + 1$, avec $z' \in \mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}$ on obtient :

$$\Sigma_i = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ t \text{ impair}}} \left(\sum_{z' \in \mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}} \chi((pt - k)(2z' + 1)) \right),$$

puis comme χ est un caractère

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ t \text{ impair}}} \left(\sum_{z' \in \mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}} \chi((pt - k)2z') \chi(pt - k) \right) \\ &= \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ t \text{ impair}}} \chi(pt - k) \left(\sum_{z' \in \mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}} \chi((pt - k)2z') \right). \end{aligned}$$

Ici la somme Σ_i est plus difficile à calculer que dans le cas pair. Considérons pour k fixé dans $\{0 \dots q-1\}$ l'ensemble E_k défini par

$$E_k := \left\{ t \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, pt - k \equiv 0 \left[\frac{q}{2} \right] \right\}.$$

Alors pour tout $k \in \{0 \dots q-1\}$ il est clair que $\text{Card}(E_k) = 2$; en effet : l'équation $pt \equiv k \left[\frac{q}{2} \right]$ a deux solutions dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, la première est $t = p^{-1}k$, qui est unique dans $\mathbb{Z}/\frac{q}{2}\mathbb{Z}$ (car $p \wedge \frac{q}{2} = 1$ et donc p est inversible modulo $\frac{q}{2}$) et l'autre solution est $p^{-1}k + \frac{q}{2}$. Maintenant on a deux cas suivant la parité de l'entier $\frac{q}{2}$.

- Si $\frac{q}{2}$ est impair : alors les deux solutions de E_k ont des parités différentes, car la différence des deux est égale à $\frac{q}{2}$, donc une des deux solutions est paire et l'autre impaire ; on est alors déjà assuré que $\Sigma_p = \frac{q}{2}$. Ensuite en notant par t_i la solution impaire de E_k ; il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que $pt_i - k = m\frac{q}{2}$, ainsi

$$\Sigma_i = \chi(pt_i - k) \frac{q}{2} = e^{-2i\pi \frac{m\frac{q}{2}}{q}} \frac{q}{2} = (-1)^m \frac{q}{2}.$$

Il faut donc utiliser la parité de l'entier m ; en fait comme p impair et t_i impair, avec l'égalité :

$$\underbrace{pt_i}_{\text{impair}} - k = m \underbrace{\frac{q}{2}}_{\text{impair}}$$

on en déduit que k et m sont de parité opposée. D'où, si k est pair, alors m est impair, ainsi dans ce cas là $\Sigma_i = -\frac{q}{2}$ et donc $\Sigma_p + \Sigma_i = 0$; puis par conséquent $|b_k(q)|^2 = 0$. Si par contre k est impair, m est alors pair et par suite $\Sigma_i = \frac{q}{2}$ d'où $\Sigma_p + \Sigma_i = q$ et donc $|b_k(q)|^2 = \frac{2}{q}$.

• Si $\frac{q}{2}$ est pair : alors les deux solutions t_1 et t_2 de E_k sont de même parité. De plus, comme pour tout indice $j \in \{1, 2\}$ on a $pt_j - k = m_j \frac{q}{2}$ avec p impair et $\frac{q}{2}$ pair ; alors k et t_j sont de même parité. Il y a donc deux sous cas à voir : si k est pair, alors les deux solutions sont paire, et donc $\Sigma_p = q$ et $\Sigma_i = 0$ d'où $|b_k(q)|^2 = \frac{2}{q}$. Si par contre k est impair, alors les deux solutions sont impaires et on a déjà que $\Sigma_p = 0$. Ensuite par différence des deux solutions nous avons

$$\underbrace{p(t_2 - t_1)}_{=p\frac{q}{2}} = (m_2 - m_1)\frac{q}{2}$$

donc $p = m_2 - m_1$ ainsi comme p est impair, m_1 et m_2 sont de parités différentes ; et donc $\Sigma_i = 0$; d'où $|b_k(q)|^2 = 0$. $\square$

2.6.3 Cas où $l = \frac{q}{2}$

C'est donc le cas où $q \in 4\mathbb{Z}$ et en fait on peut se ramener assez facilement au cas précédent.

Théorème 2.6.8. *Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et $q \in 4\mathbb{Z}^*$; pour tout $k \in \{0 \dots \frac{q}{2} - 1\}$ nous avons que*

$$\left| b_k\left(\frac{q}{2}\right) \right|^2 = \frac{2}{q}.$$

Démonstration. Nous avons vu que :

$$|b_k(l)| = \frac{1}{l} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} n^2} e^{\frac{2i\pi kn}{l}} \right|.$$

En écrivant alors que $q = 2q' = 4q''$ on obtient alors

$$\left| b_k\left(\frac{q}{2}\right) \right| = \frac{1}{q'} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{2q'} n^2} e^{\frac{2i\pi kn}{q'}} \right| = \frac{1}{q'} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{2q'} n^2} e^{\frac{2i\pi(2k)n}{2q'}} \right|.$$

Comme q' est pair, la suite $\left(e^{-2i\pi \frac{p}{2q'} n^2} e^{\frac{2i\pi(2k)n}{q'}} \right)_n$ est q' -périodique et ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{2q'} n^2} e^{\frac{2i\pi(2k)n}{q'}} \right| &= \frac{1}{2q'} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/2q'\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{2q'} n^2} e^{\frac{2i\pi(2k)n}{2q'}} \right| \\ &= \frac{1}{q} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} n^2} e^{\frac{2i\pi(2k)n}{q}} \right| \end{aligned}$$

et donc pour tout $k \in \{0 \dots \frac{q}{2} - 1\}$ nous avons $|b_k(\frac{q}{2})| = |b_{2k}(q)|$ et en utilisant le précédent théorème, comme $\frac{q}{2}$ est pair, on a pour tout $k \in \{0 \dots \frac{q}{2} - 1\}$, $|b_{2k}(q)| = \frac{2}{q}$. $\square$

2.7 Quelques raffinements

2.7.1 Théorèmes d'écroulement

Notation 2.7.1. Pour $\alpha \geq 0$ on note par φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_\alpha(x) := \chi^2(x)e^{-2i\pi x^2\alpha}$.

Lemme 2.7.2. Soit $\gamma' \in \mathbb{R}$ tel que $-\delta' < \gamma' < 1 - 2\delta'$; pour tout entier k on a

$$\sup_{t \in [0, h^{\gamma'}]} \left\| (1+u^2) \frac{\partial^k}{\partial u^k} (\varphi_{th^{2\delta'-1}}(u)) \right\|_{\infty, u \in \mathbb{R}} = O \left(h^{k(\gamma'+2\delta'-1)} \right).$$

Démonstration. Avec la formule de Leibnitz on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \varphi_\alpha}{\partial u^k} &= \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\partial^{k-j}}{\partial u^{k-j}} (\chi^2)(u) \frac{\partial^j}{\partial u^j} (e^{-2i\pi u^2 \alpha}) \\ &= \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\partial^{k-j}}{\partial u^{k-j}} (\chi^2)(u) P_j(\alpha, u) e^{-2i\pi u^2 \alpha} \end{aligned}$$

où $P_j \in \mathbb{C}[X, Y]$ avec $\deg_X P_j \leq j$ et $\deg_Y P_j \leq j$. Donc pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\left| (1+u^2) \frac{\partial^k}{\partial u^k} (\varphi_\alpha(u)) \right| \leq (1+u^2) \sum_{j=0}^k C_k^j \left| \frac{\partial^{k-j}}{\partial u^{k-j}} (\chi^2)(u) \right| |Q_j(\alpha, u)| \in \mathcal{S}_u(\mathbb{R})$$

avec $Q_j \in \mathbb{R}[X, Y]$ avec $\deg_X Q_j = j$ et $\deg_Y Q_j = j$; notons bien que la fonction

$$u \mapsto (1+u^2) \sum_{j=0}^k C_k^j \left| \frac{\partial^{k-j}}{\partial u^{k-j}} (\chi^2)(u) \right| |Q_j(\alpha, u)| \in L_u^\infty(\mathbb{R})$$

et par conséquent

$$\left| (1+u^2) \frac{\partial^k}{\partial u^k} (\varphi_\alpha(u)) \right| \leq \sum_{j=0}^k C_k^j \left\| (1+u^2) \frac{\partial^{k-j}}{\partial u^{k-j}} (\chi^2)(u) Q_j(\alpha, u) \right\|_{\infty, u \in \mathbb{R}}$$

qui pour $\alpha > 1$ est égale à un $O(\alpha^k)$; et pour $\alpha \leq 1$ est égale à un $O(1)$. D'où pour $\alpha = th^{2\delta'-1}$ avec $t \in [0, h^{\gamma'}]$, comme $\gamma' - 1 + 2\delta' < 0$ on a donc

$$\sup_{t \in [0, h^{\gamma'}]} \left\| (1+u^2) \frac{\partial^k}{\partial u^k} (\varphi_{th^{2\delta'-1}}(u)) \right\|_{\infty, u \in \mathbb{R}} = O \left(h^{k(\gamma'+2\delta'-1)} \right).$$

□

Théorème 2.7.3. Pour tout $t \in [0, h^{\gamma'}]$ on a uniformément :

$$\mathbf{a}_2(t) = \frac{1}{h^{\delta'-1} \mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{t_{ren}}} \right) (d(T_{cl}\mathbb{Z}, t)) + O(h^\infty).$$

Démonstration. Ecrivons que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2(t) &= K_h^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi^2 \left(\frac{m}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-2i\pi t \frac{m}{T_{cl}}} e^{-2i\pi t \frac{m^2}{T_{ren}}} - \sum_{n=-\infty}^{-1} |a_n|^2 e^{-2i\pi t \frac{(n-n_0)}{T_{cl}}} e^{-2i\pi t \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren}}} \\ &\quad - \sum_{n=\infty}^{-1} |a_n|^2 e^{-2i\pi t \frac{(n-n_0)}{T_{cl}}} e^{-2i\pi t \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren}}} \end{aligned}$$

avec $K_h^2 = \frac{1}{h^{\delta'-1} \mathfrak{F}(\chi^2)(0)}$. Ensuite avec la formule sommatoire de Poisson

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi^2 \left(\frac{m}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-2i\pi t \frac{m}{T_{cl}}} e^{-2i\pi t \frac{m^2}{T_{ren}}} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \\ &= \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l(t) + \frac{t}{T_{cl}} \right) + \sum_{l \neq l(t)} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right). \end{aligned}$$

Or quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) (\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} e^{-2i\pi \xi x} dx$$

avec le changement de variable $u := \frac{x}{h^{\delta'-1}}$ on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) (\xi) &= h^{\delta'-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2(u) e^{-\frac{2i\pi u^2 h^{2\delta'-2} t}{T_{ren}}} e^{-2i\pi \xi u h^{\delta'-1}} du \\ &= h^{\delta'-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^2(u) e^{-2i\pi t u^2 h^{2\delta'-1} B_h} e^{-2i\pi \xi u h^{\delta'-1}} du \end{aligned}$$

avec $B_h := \frac{f_0''(h(n_0 + \frac{1}{2}))}{4\pi}$ qui, pour $h \rightarrow 0$, tend vers une constante indépendante de h . Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) (\xi) &= h^{\delta'-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}}(u) e^{-2i\pi \xi u h^{\delta'-1}} du \\ &= h^{\delta'-1} \mathfrak{F} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) (\xi h^{\delta'-1}). \end{aligned}$$

Ensuite pour tout ξ non nul et pour tout entier $k \geq 0$ avec la relation

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{F} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) (\xi h^{\delta'-1}) \right| &= \frac{\left| \mathfrak{F} \left(\frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}}(u) \right) \right) (\xi h^{\delta'-1}) \right|}{(2\pi)^k |\xi|^k h^{k(\delta'-1)}} \\ &\leq \frac{\left\| \mathfrak{F} \left(\frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) \right) \right\|_{\infty}}{(2\pi)^k |\xi|^k h^{k(\delta'-1)}} \leq \frac{\left\| \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) \right\|_{L^1}}{(2\pi)^k |\xi|^k h^{k(\delta'-1)}}. \end{aligned}$$

Ensuite comme

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) \right\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) (u) \right| du$$

avec le lemme précédent et comme $B_h = O(1)$ on a :

$$\sup_{t \in [0, h^{\gamma'}]} \left\| (1+u^2) \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}}(u) \right) \right\|_{\infty, u \in \mathbb{R}} \leq M_k h^{k(\gamma'+2\delta'-1)}$$

ainsi

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) \right\|_{L^1} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_k h^{k(\gamma'+2\delta'-1)}}{1+u^2} du \leq M_k \frac{\pi}{2} h^{k(\gamma'+2\delta'-1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \sum_{l=l(t)+1}^{+\infty} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \\ &= h^{\delta'-1} \sum_{l=l(t)+1}^{+\infty} \mathfrak{F} \left(\varphi_{B_h t h^{2\delta'-1}} \right) \left(\left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) h^{\delta'-1} \right) \\ &\leq C_k h^{\delta'-1} \sum_{l=l(t)+1}^{+\infty} h^{k(\gamma'+2\delta'-1)} h^{k(1-\delta')} \frac{1}{\left| l + \frac{t}{T_{cl}} \right|^k} \\ &\leq C_k h^{\delta'-1} h^{k(\delta'+\gamma')} \sum_{l=l(t)+1}^{+\infty} \frac{1}{\left| l + \frac{t}{T_{cl}} \right|^k}; \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned} & \sum_{l=l(t)+1}^{+\infty} \frac{1}{\left| l + \frac{t}{T_{cl}} \right|^k} = \frac{1}{\left| l(t) + 1 + \frac{t}{T_{cl}} \right|^k} + \sum_{l=l(t)+2}^{+\infty} \frac{1}{\left| l + \frac{t}{T_{cl}} \right|^k} \\ &\leq 2^k + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\left(u + \frac{t}{T_{cl}} \right)^k} \leq 2^k + \frac{1}{(k-1) \left(l(t) + 1 + \frac{t}{T_{cl}} \right)^{k-1}} \\ &\leq 2^k + \frac{2^{k-1}}{(k-1)}. \end{aligned}$$

D'où pour tout $k \geq 0$

$$\sum_{l=l(t)+1}^{+\infty} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \leq D_k h^{\delta'-1} h^{k(\delta'+\gamma')},$$

comme $\delta' + \gamma' > 0$ on a alors

$$\sum_{l=l(t)+1}^{+\infty} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) = O(h^\infty);$$

et donc

$$K_h^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \chi^2 \left(\frac{m}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-2i\pi t \frac{m}{T_{cl}}} e^{-2i\pi t \frac{m^2}{T_{ren}}}$$

$$\begin{aligned}
&= K_h^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l + \frac{t}{T_{cl}} \right) \\
&= \frac{1}{h^{\delta'-1} \mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l(t) + \frac{t}{T_{cl}} \right) + O(h^\infty).
\end{aligned}$$

Enfin comme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} |a_n|^2 e^{-2i\pi t \frac{(n-n_0)}{T_{cl}}} e^{-2i\pi t \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren}}} = O(h^\infty)$$

on a finalement que pour tout $t \in [0, h^{\gamma'}]$

$$\mathbf{a}_2(t) = \frac{1}{h^{\delta'-1} \mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x}{h^{\delta'-1}} \right) e^{-\frac{2i\pi x^2 t}{T_{ren}}} \right) \left(l(t) + \frac{t}{T_{cl}} \right) + O(h^\infty).$$

□

Ensuite on examine un cas particulier très étudié par les physiciens : le cas des paquets d'ondes gaussien : le cas où le vecteur ψ_0 est précisément distribué suivant une gaussienne. On va montrer que pour des échelles de temps très grande, mais plus petite que la période de renaissance, la fonction d'auto-corrélation tend vers 0 : c'est un phénomène d'écroulement des paquets d'ondes. On va dès maintenant se placer dans le cas où

$$\chi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Commençons par un calcul de transformée de Fourier d'une Gaussienne complexe :

Lemme 2.7.4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, alors pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathfrak{F} \left(e^{-zx^2} \right) (\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\frac{\pi^2 \zeta^2}{z}}.$$

Démonstration. Commençons par le cas standard où $z = a \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $\psi_a(x) = e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Or clairement quel que soit $x \in \mathbb{R}$ cette fonction vérifie :

$$\psi_a'(x) + 2ax\psi_a(x) = 0$$

donc en appliquant la transformée de Fourier on a pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F} \left(\psi_a' \right) (\zeta) + 2a\mathfrak{F} (x\psi_a) (\zeta) = 0.$$

D'où avec les formules usuelles de dérivation sur la transformée de Fourier on obtient

$$\mathfrak{F} (\psi_a)' (\zeta) = -\frac{2\pi^2 \zeta}{a} \mathfrak{F} (\psi_a) (\zeta);$$

donc en intégrant cette équation différentielle linéaire d'ordre un, on obtient

$\mathfrak{F} (\psi_a) (\zeta) = C e^{-\frac{\pi^2 \zeta^2}{a}}$ où $C \in \mathbb{R}$ est la condition initiale donnée par l'égalité $C = \mathfrak{F} (\psi_a) (0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt$; ainsi en effectuant le changement de variable :

$u = \sqrt{a}t$, donc $t = \frac{u}{\sqrt{a}}$ on obtient $C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{a}} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Au final, on arrive à l'égalité, pour tout $a > 0$

$$\mathfrak{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \zeta^2}{a}}.$$

Établissons ce même type de résultat sur l'ouvert $\mathbb{P}_+ := \{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(p) > 0\}$.

D'une part pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$ la fonction $z \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\frac{\pi^2 \zeta^2}{z}}$ est holomorphe sur $\mathbb{P}_+$. D'autre part pour tout $(\zeta, t) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $z \mapsto e^{-zt^2} e^{-2i\pi\zeta t}$ est holomorphe sur $\mathbb{P}_+$. Et pour toute partie $\mathcal{K}$ compacte de $\mathbb{P}_+$, il existe $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z \in \mathcal{K}$, $\operatorname{Re}(z) \geq \varepsilon$. Ainsi pour tout $(\zeta, t, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{K}$

$$\left| e^{-zt^2} e^{-2i\pi\zeta t} \right| \leq e^{-\operatorname{Re}(z)t^2} \leq e^{-\varepsilon t^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Donc d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, on a que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$ la fonction

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt^2} e^{-2i\pi\zeta t} dt$$

est holomorphe sur $\mathbb{P}_+$. Au final, comme les fonctions $z \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\frac{\pi^2 \zeta^2}{z}}$ et $z \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt^2} e^{-2i\pi\zeta t} dt$ sont holomorphes sur $\mathbb{P}_+$ et coïncident sur la sous partie $\mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{P}_+$, avec le théorème du prolongement analytique on a que pour tout $(\zeta, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{P}_+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt^2} e^{-2i\pi\zeta t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{z}} e^{-\frac{\pi^2 \zeta^2}{z}}.$$

Ce qui montre le lemme. $\square$

Théorème 2.7.5. Soit $\gamma' \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma' > -\delta'$. On a que pour tout $t \in [0, h^{\gamma'}]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}}(n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n-n_0)^2} = \frac{h^{1-\delta'}}{\sqrt{\pi Z_h(t)}} e^{-\pi^2 d(T_{cl}\mathbb{Z}, t)^2 \frac{1}{Z_h(t)}} + O(h^\infty);$$

où $Z_h(t) := h^{2-2\delta'} + \frac{2i\pi t}{T_{ren}} \in \mathbb{P}_+$.

Démonstration. Le précédent lemme appliquée à $z = 1$ fournit $\mathfrak{F}(\chi^2)(0) = \sqrt{\pi}$. Or comme

$$x \mapsto e^{-x^2 \left(\frac{1}{h^{2\delta'} - 2} + 2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \right)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

avec les formules de translations de transformées de Fourier on obtient que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F} \left(e^{-x^2 \left(\frac{1}{h^{2\delta'} - 2} + 2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \right)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} x} \right) (\zeta) = \mathfrak{F} \left(e^{-x^2 \left(\frac{1}{h^{2\delta'} - 2} + 2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \right)} \right) \left(\zeta + \frac{t}{T_{cl}} \right).$$

Et comme $\frac{1}{h^{2\delta'} - 2} + 2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \in \mathbb{P}_+$ avec le lemme on arrive à :

$$\mathfrak{F} \left(e^{-x^2 \left(\frac{1}{h^{2\delta'} - 2} + 2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \right)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} x} \right) (\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{Z_h(t)}} e^{-\pi^2 \left(\zeta + \frac{t}{T_{cl}} \right)^2 \frac{1}{Z_h(t)}}$$

où $Z_h(t) := h^{2-2\delta'} + \frac{2i\pi t}{T_{ren}}$. Ensuite il ne reste plus qu'à appliquer le précédent théorème pour conclure. $\square$

Corollaire 2.7.6. Soient $(\gamma, \gamma') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\gamma' > -\delta'$ et $\gamma' < \gamma < 0$. Alors si $\gamma < 1 - 2\delta'$ on a pour tout $t \in [h^\gamma, h^{\gamma'}]$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}}(n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n-n_0)^2} = O\left(h^{\frac{1-2\delta'-\gamma}{2}}\right).$$

Démonstration. On part de

$$\begin{aligned} \left| \frac{h^{1-\delta'}}{\sqrt{Z_h(t)}} e^{-\pi^2 d(T_{cl}Z, t)^2 \frac{1}{Z_h(t)}} \right| &= \frac{h^{1-\delta'}}{\sqrt{|Z_h(t)|}} e^{-\pi^2 d(T_{cl}Z, t)^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z_h(t)}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2 h^{4\delta'} - 2f_0''(h(n_0 + \frac{1}{2}))^2}{4}\right)^{\frac{1}{4}}} e^{-\pi^2 d(T_{cl}Z, t)^2 \left(h^{2-2\delta'} + \frac{t^2 h^{2\delta'}}{\sigma_h^2}\right)} \end{aligned}$$

qui pour tout $t \in [h^\gamma, h^{\gamma'}]$ est majoré par

$$\leq \frac{1}{\left(1 + \frac{h^{4\delta'} - 2 + 2\gamma f_0''(h(n_0 + \frac{1}{2}))^2}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Comme par hypothèse $2\gamma + 4\delta' - 2 < 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 + \frac{h^{4\delta'} - 2 + 2\gamma f_0''(h(n_0 + \frac{1}{2}))^2}{4}\right)^{\frac{1}{4}}} &= \frac{\sqrt{2} h^{-\delta' + 1/2 - \gamma/2}}{\sqrt{f_0''(h(n_0 + \frac{1}{2}))} (h^{-4\delta' + 2 - 2\gamma} + 1)^{\frac{1}{4}}} \\ &= O(h^{-\delta' + 1/2 - \gamma/2}). \end{aligned}$$

$\square$

2.7.2 Affinage d'ordre 3

Toujours dans le cas d'un état initial type gaussien, on va affiner l'étude des renaissances en approximant la fonction d'auto-corrélation à l'ordre 3. Cette approximation cubique fait apparaître la fonction d'Airy (voir l'annexe pour sa définition). L'intérêt majeur de ceci concerne l'étude locale de la fonction d'auto-corrélation : plus précisément de la disymétrie des pics des renaissances et de la présence de petites oscillations autour des ces mêmes pics. La fonction d'Airy explique ce phénomène. Dans [LAS] on trouve une étude de cette disymétrie des pics de renaissances ; D. Robert [Rob2] donne aussi une analyse mathématique bien détaillée de la disymétrie et des oscillations. Dans cette sous-section on va montrer comment la fonction d'Airy apparaît dans l'approximation de l'auto-corrélation à l'ordre 3.

Lemme 2.7.7. Si $\delta \in \left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$ alors quelque soit $n \in \Delta$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{t\lambda_n(h)}{h} &= \frac{t\lambda_{n_0}(h)}{h} + t(n - n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &+ th \frac{(n - n_0)^2}{2} f''_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + th^2 \frac{(n - n_0)^3}{6} f^{(3)}_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + O(th^{4\delta-1}). \end{aligned}$$

Si $\delta \in \left] \frac{2}{3}, 1 \right[$ alors quelque soit $n \in \Delta$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{t\lambda_n(h)}{h} &= \frac{t\lambda_{n_0}(h)}{h} + t(n - n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &+ th \frac{(n - n_0)^2}{2} f''_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + th^2 \frac{(n - n_0)^3}{6} f^{(3)}_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + O(th^{\delta+1}). \end{aligned}$$

Démonstration. On écrit une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 de la fonction f_h autour du point $h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right)$: avec

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n(h)}{h} &= \frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0) f'_h \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{h(n - n_0)^2}{2} f''_h \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &+ h^2 \frac{(n - n_0)^3}{6} f^{(3)}_h \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + h^3 \frac{(n - n_0)^4}{24} f^{(4)}_h(\zeta) \end{aligned}$$

avec $\zeta = \zeta_{n,h,E} \in J$. Puis on utilise encore le développement asymptotique de la fonction f_h : pour tout $n \in \Delta$ nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n(h)}{h} &= \frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + (n - n_0) f'_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + (n - n_0) h^2 f'_2 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &+ (n - n_0) h^2 f'_2 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{h(n - n_0)^2}{2} f''_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) \\ &+ h^2 \frac{(n - n_0)^3}{6} f^{(3)}_0 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) + h^3 \frac{(n - n_0)^4}{24} f^{(4)}_0(\zeta) + O(th^{2\delta+1}). \end{aligned}$$

Or quel que soit $n \in \Delta$

$$(n - n_0) h^2 f'_2 \left(h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right) = O(h^{\delta+1})$$

et

$$h^3 \frac{(n - n_0)^4}{24} f^{(4)}_0(\zeta) = O(h^{4\delta-1}).$$

C'est donc pourquoi on distingue les cas $\delta \in \left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$ et $\delta \in \left] \frac{2}{3}, 1 \right[$. □

Notation 2.7.8. Soit $T_{sr} := \frac{12\pi}{h^2 f^{(3)}_0(h(n_0 + \frac{1}{2}))}$.

Proposition 2.7.9. Si le paramètre $\delta \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$ alors pour un réel μ vérifiant l'inégalité : $\mu > 1 - 4\delta$ on a, uniformément en $t \in [0, h^\mu]$,

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + \frac{2\pi(n-n_0)}{T_{cl}} + \frac{2\pi(n-n_0)^2}{T_{ren}} + \frac{2\pi(n-n_0)^3}{T_{sr}} \right)} + O\left(h^{\mu+4\delta-1}\right). \end{aligned}$$

Si par contre le paramètre $\delta \in]\frac{2}{3}, 1[$ alors pour un réel v vérifiant l'inégalité : $v > -1 - \delta$ on a, uniformément en $t \in [0, h^v]$,

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \frac{\lambda_n(h)}{h}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \left(\frac{\lambda_{n_0}(h)}{h} + \frac{2\pi(n-n_0)}{T_{cl}} + \frac{2\pi(n-n_0)^2}{T_{ren}} + \frac{2\pi(n-n_0)^3}{T_{sr}} \right)} + O\left(h^{v+1+\delta}\right). \end{aligned}$$

Dans le cas où $\delta \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$ on a donc que $1 - 4\delta \in]-\frac{5}{3}, -1[$; ainsi on peut choisir un réel μ tel que $-2 < \mu < -1$, de sorte que pour h assez petit nous ayons

$$\frac{1}{h} < h^\mu < \frac{1}{h^2}.$$

Dans l'autre cas : $\delta \in]\frac{2}{3}, 1[$ on a $-1 - 4\delta \in]-2, -\frac{5}{3}[$; ainsi on peut choisir un réel v tel que $-2 < v < -\frac{5}{3}$, de sorte que pour h assez petit nous ayons

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{h^{\frac{5}{3}}} < h^v < \frac{1}{h^2}.$$

Remarque 2.7.10. Ces deux échelles d'approximation ne sont pas bonnes pour voir apparaître une éventuelle nouvelle période : la période T_{sr} qui est d'ordre $1/h^2$. Ces deux échelles d'approximation servent à avoir plus de précision dans la compréhension des phénomènes de renaissances, en particulier pour étudier la disymétrie et les petites oscillations des pics de renaissance (pour plus de détails sur ces phénomènes voir [Rob2]).

Définition 2.7.11. Le terme d'ordre 3 de la fonction d'auto-corrélation partielle $\mathbf{a}(t)$ est la série de fonctions :

$$\mathbf{a}_3 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \left(\frac{2\pi(n-n_0)}{T_{cl}} + \frac{2\pi(n-n_0)^2}{T_{ren}} + \frac{2\pi(n-n_0)^3}{T_{sr}} \right)}.$$

Dans notre cadre gaussien on a donc :

$$\mathbf{a}_3(t) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)h^{\delta'-1}} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{h^{2\delta'-2}}} e^{-it \left(\frac{2\pi(n-n_0)}{T_{cl}} + \frac{2\pi(n-n_0)^2}{T_{ren}} + \frac{2\pi(n-n_0)^3}{T_{sr}} \right)}.$$

Pour une commodité technique on va rajouter des termes dans l'indice de la série, en effet :

Proposition 2.7.12. Pour tout t on a :

$$\mathbf{a}_3(t) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)h^{\delta'-1}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2}{h^{2\delta'-2}}} e^{-it\left(\frac{2\pi m}{T_{cl}} + \frac{2\pi m^2}{T_{ren}} + \frac{2\pi m^3}{T_{sr}}\right)} + O(h^\infty).$$

Démonstration. Cela tient encore juste du fait que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}|^2 = O(h^\infty)$. $\square$

Ensuite un simple calcul nous donne la :

Proposition 2.7.13. Pour tout t on a :

$$\mathbf{a}_3(t) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)h^{\delta'-1}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\alpha_t)^3 i \omega_t} e^{-2\pi i \beta_t m} e^{\theta_t i} + O(h^\infty);$$

où

$$\omega_t := \frac{2\pi t}{T_{sr}} > 0, \quad \alpha_t := \frac{T_{sr}}{3} \left(\frac{1}{T_{ren}} - \frac{i}{2\pi t h^{2\delta'-2}} \right) \in \mathbb{C},$$

$$\beta_t := t \left[\frac{1}{T_{cl}} - \frac{T_{sr}}{3} \left(\frac{1}{T_{ren}} - \frac{i}{2\pi t h^{2\delta'-2}} \right)^2 \right] \in \mathbb{C}, \quad \theta_t := \alpha_t^3 \omega_t \in \mathbb{C}.$$

L'idée est alors de calculer la transformée de Fourier d'une fonction du type : $e^{-(x+\alpha)^3 i \omega}$ avec α un nombre complexe et $\omega > 0$. Commençons par rappeler le :

Lemme 2.7.14. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(\alpha) < 0$; la fonction $f_\alpha(x) := e^{-i(x+\alpha)^3} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Et d'autre part, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^3} dx$ est convergente et vérifie l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x+\alpha)^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^3} dx.$$

Démonstration. Pour le premier point comme

$$\left| e^{-i(x+\alpha)^3} \right| = e^{3\text{Im}(\alpha)x^2} e^{6x\text{Re}(\alpha)\text{Im}(\alpha)x} e^{3\text{Re}(\alpha)^2\text{Im}(\alpha) - \text{Im}(\alpha)^3},$$

et que $\text{Im}(\alpha) < 0$; on a bien que la fonction $e^{-i(x+\alpha)^3} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ensuite, la fonction $g(x) := e^{-ix^3}$ vérifie l'équation $-g'(x) + g(x) = (3ix^2 + 1)g(x)$, ainsi pour $A, B \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\int_A^B g(x) dx = \int_A^B \frac{g(x)}{1+3ix^2} dx - \int_A^B \frac{g'(x)}{1+3ix^2} dx.$$

Comme la fonction $x \mapsto g(x)$ est majorée par 1, il est clair que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{1+3ix^2} dx$ converge. Une intégration par parties donne ensuite que

$$\int_A^B \frac{g'(x)}{1+3ix^2} dx = \left[\frac{g(x)}{1+3ix^2} \right]_A^B + 6i \int_A^B \frac{xg(x)}{(1+3ix^2)^2} dx;$$

alors, comme $\left| \frac{xg(x)}{(1+3ix^2)^2} \right| \leq \frac{|x|}{1+9x^4}$, en faisant tendre $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$,

on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g'(x)}{1+3ix^2} dx$ converge. Pour finir on va montrer

l'égalité proposée en utilisant une déformation de contour ; comme la fonction $x \mapsto e^{-i(x+\alpha)^3}$ est entière

$$\int_{-A}^A e^{-i(x+\alpha)^3} dx = \int_{\gamma(A)} e^{-i(z+\alpha)^3} dz$$

où $\gamma(A)$ est le chemin orienté : $[-A, -A-\alpha] \cup [-A-\alpha, A-\alpha] \cup [A-\alpha, A]$
où $A > 0$. On a donc

$$\int_{\gamma(A)} e^{-i(z+\alpha)^3} dz = \int_{[-A, -A-\alpha]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz + \int_{[-A-\alpha, A-\alpha]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz + \int_{[A-\alpha, A]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz.$$

Pour commencer calculons la seconde intégrale : en faisant le changement de variable $z = u - \alpha$ on a

$$\int_{[-A-\alpha, A-\alpha]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz = \int_{-A}^A e^{-iu^3} du \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-iu^3} du \text{ pour } A \rightarrow +\infty.$$

Ensuite, pour la troisième intégrale en faisant le changement de variable $z = A - \alpha + t\alpha$

$$\int_{[A-\alpha, A]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz = \alpha \int_0^1 e^{-i(A+t\alpha)^3} dt.$$

Comme

$$\left| e^{-i(A+t\alpha)^3} \right| = e^{3A^2 t \operatorname{Im}(\alpha) + 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) A t^2 + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) t^3 - t^3 \operatorname{Im}(\alpha)^3};$$

pour tout $t \in [0, 1]$ presque partout nous avons alors

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{3A^2 t \operatorname{Im}(\alpha) + 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) A t^2 + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) t^3 - t^3 \operatorname{Im}(\alpha)^3} = 0$$

et puis $\left| e^{-i(A+t\alpha)^3} \right| \leq e^{-t^3 \operatorname{Im}(\alpha)^3} \in L^1([0, 1])$; d'où par le théorème de convergence dominé :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{[A-\alpha, A]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz = 0.$$

Pour finir en faisant le changement de variable $z = -A - \alpha(1-u)$ dans la première intégrale on obtient :

$$\int_{[-A, -A-\alpha]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz = -\alpha \int_0^1 e^{-i(-A+\alpha u)^3} du.$$

Et comme

$$\left| e^{-i(-A+\alpha u)^3} \right| \leq e^{3A^2 u \operatorname{Im}(\alpha) - 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) A u^2 + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) u^3 - u^3 \operatorname{Im}(\alpha)^3};$$

et donc pour tout $u \in [0, 1]$ presque partout on a

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{3A^2 u \operatorname{Im}(\alpha) - 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) A u^2 + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) u^3 - u^3 \operatorname{Im}(\alpha)^3} = 0$$

donc $A \mapsto e^{3A^2 u \operatorname{Im}(\alpha) - 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) A u^2 + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) u^3 - u^3 \operatorname{Im}(\alpha)^3}$ est bornée pour tout $u \in [0, 1]$ presque partout : $\exists M > 0$ tel que $\forall A \geq 0$ et $\forall u \in [0, 1]$ presque partout

$$e^{3A^2 u \operatorname{Im}(\alpha) - 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) A u^2 + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) u^3 - u^3 \operatorname{Im}(\alpha)^3} \leq M \in L^1([0, 1])$$

d'où par le théorème de convergence dominé :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{[-A, -A-\alpha]} e^{-i(z+\alpha)^3} dz = 0.$$

□

Lemme 2.7.15. La fonction $\zeta \mapsto \mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ admet un prolongement holomorphe à $U := \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| \leq 1\}$ et pour tout $z \in U$ on a :

$$\mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega})(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi z x} dx.$$

Démonstration. Déjà pour tout $x \in \mathbb{R}$ presque partout et pour tout $z \in U$ la fonction $z \mapsto f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi z x}$ est entière. Ensuite comme

$$\begin{aligned} \left| f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi z x} \right| &\leq e^{3x^2 \operatorname{Im}(\alpha) \omega + 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) x \omega + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) \omega - \operatorname{Im}(\alpha)^3 \omega} e^{2\pi \operatorname{Im}(z) x}, \\ &\leq e^{3x^2 \operatorname{Im}(\alpha) \omega + 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) x \omega + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) \omega - \operatorname{Im}(\alpha)^3 \omega} e^{2\pi x} \in L_x^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

donc avec le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, la fonction

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi z x} dx$$

est holomorphe sur U .

□

Lemme 2.7.16. Pour tout $\beta \in U$ on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}\left(f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi \beta x}\right)(\xi) = \mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega})(\xi + \beta).$$

Démonstration. Le cas où β est réel est usuel. Ensuite, d'une part pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ presque partout la fonction $\beta \mapsto \mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega})(\xi + \beta)$ est entière, en effet cette fonction s'exprime comme une combinaison linéaire des fonctions d'airy, qui sont entières (voir la preuve du théorème suivant). D'autre part pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ presque partout $\beta \mapsto f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi \xi x} e^{-2i\pi \beta x}$ est entière ; et comme

$$\begin{aligned} \left| f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi \xi x} e^{-2i\pi \beta x} \right| &\leq e^{3x^2 u \operatorname{Im}(\alpha) \omega + 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) x \omega + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) \omega - b^3 \omega} e^{2\pi \operatorname{Im}(\beta) x} \\ &\leq e^{3x^2 u \operatorname{Im}(\alpha) \omega + 6\operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) x \omega + 3\operatorname{Re}^2(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha) \omega - b^3 \omega} e^{2\pi x} \in L_x^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

avec le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, la fonction

$$\beta \mapsto \mathfrak{F}\left(f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi \beta x}\right)(\xi)$$

est holomorphe sur U pour tout $x \in \mathbb{R}$ presque partout. Comme les deux fonctions $\beta \mapsto \mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega}(x) e^{-2i\pi \beta x})(\xi)$ et $\beta \mapsto \mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega})(\xi + \beta)$ sont holomorphes sur U et coïncident sur $\mathbb{R} \subset U$, elle coïncident alors sur U . □

Théorème 2.7.17. Pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\mathfrak{F}(f_{\alpha,\omega})(\zeta) = Ce^{2i\pi\zeta\alpha} A_i\left(k^{\frac{2}{3}}\zeta\right);$$

où A_i est la première fonction d'Airy. Les réels $k = k(\omega)$ et $C = C(\omega)$ sont donnés par :

$$k := \frac{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}\omega}, \quad C = 3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{1}{\omega^{\frac{1}{3}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^3} dx.$$

Démonstration. Notons bien que

$$\left| e^{-(x+\alpha)^3 i\omega} \right| = e^{3\omega \operatorname{Im}(\alpha)x^2} e^{2\omega \operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha)x} e^{\omega \operatorname{Im}(\alpha)^3},$$

ainsi comme on a supposé que $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$ et $\omega > 0$ on a bien que $e^{-i\omega(x+\alpha)^3} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ensuite quel que soit $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f'_{\alpha,\omega}(x) + 3i\omega(x+\alpha)^2 f_{\alpha,\omega}(x) = 0$$

donc en appliquant la transformée de Fourier on a pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}(f'_{\alpha,\omega})(\zeta) + 3i\omega \mathfrak{F}\left((x+\alpha)^2 f_{\alpha,\omega}\right)(\zeta) = 0.$$

D'où avec les formules usuelles de dérivation sur la transformée de Fourier on obtient que

$$\mathfrak{F}(f_{\alpha,\omega})''(\zeta) - 4\alpha\pi i \mathfrak{F}(f_{\alpha,\omega})'(\zeta) - \left(4\pi^2\alpha^2 + \frac{8\pi^3}{3\omega}\zeta\right) \mathfrak{F}(f_{\alpha,\omega})(\zeta) = 0$$

c'est à dire que la fonction $f_{\alpha,\omega}$ est solution de :

$$y'' - 4\alpha\pi i y - \left(4\pi^2\alpha^2 + \frac{8\pi^3}{3\omega}x\right) y = 0.$$

Alors on vérifie sans peine que la nouvelle fonction $g_{\alpha,\omega}(x) := e^{-2i\pi x\alpha} \mathfrak{F}(f_{\alpha,\omega})(x)$ est solution de :

$$y'' - \frac{8\pi^3}{3\omega}xy = 0.$$

Posons $k := \frac{2\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}\omega} > 0$ de sorte que pour tout x réel on ait :

$$g_{\alpha,\omega}''(x) - kxg_{\alpha,\omega}(x) = 0;$$

ainsi par définition des fonctions d'Airy A_i et B_i (voir annexe) il existe deux scalaires $C = C(\alpha, \omega)$ et $D = D(\alpha, \omega)$ tels que pour tout x réel

$$g_{\alpha,\omega}(x) = CA_i\left(k^{\frac{2}{3}}x\right) + DB_i\left(k^{\frac{2}{3}}x\right);$$

i.e.

$$e^{-2i\pi x\alpha} \mathfrak{F}(f_{\alpha,\omega})(x) = CA_i\left(k^{\frac{2}{3}}x\right) + DB_i\left(k^{\frac{2}{3}}x\right).$$

Or on sait que (voir annexe) pour $x \rightarrow +\infty$ on a

$$A_i \left(k^{\frac{2}{3}} x \right) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{4}}} \text{ et } B_i \left(k^{\frac{2}{3}} x \right) \sim \frac{e^{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi} x^{\frac{1}{4}}}$$

donc comme $|e^{-2i\pi x \alpha}| = e^{2\pi x \text{Im}(\alpha)}$ avec $\text{Im}(\alpha) < 0$ et que $\mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2i\pi x \alpha} \mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega})(x) = 0$$

par conséquent $D = 0$. La constante C dépend de α et de ω ; en effet

$$\begin{aligned} C &= 3^{\frac{2}{3}} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \mathfrak{F}(f_{\alpha, \omega})(0) = 3^{\frac{2}{3}} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x+\alpha)^3 \omega} dx \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^3 \omega} dx = 3^{\frac{2}{3}} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \frac{1}{\omega^{\frac{1}{3}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^3} du. \end{aligned}$$

□

Enfin pour conclure on a le :

Théorème 2.7.18. *Pour tout $t > 0$ nous avons :*

$$|\mathbf{a}_3(t)| = \frac{|C(t)|}{h^{\delta'-1}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi \alpha_t(l+\beta_t)} A_i \left(k_t^{\frac{2}{3}} (l+\beta_t) \right) \right| + O(h^\infty).$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_t &:= \frac{T_{sr}}{3} \left(\frac{1}{T_{ren}} - \frac{i}{2\pi t h^{2\delta'-2}} \right) \in \mathbb{C}, \\ \beta_t &:= t \left[\frac{1}{T_{cl}} - \frac{T_{sr}}{3} \left(\frac{1}{T_{ren}} - \frac{i}{2\pi t h^{2\delta'-2}} \right)^2 \right] \in \mathbb{C}, \\ k_t &:= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{T_{sr}}{t} > 0, \quad C(t) = 3^{\frac{2}{3}} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \frac{1}{\omega_t^{\frac{1}{3}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^3} du \end{aligned}$$

où $\omega_t := \frac{2\pi t}{T_{sr}} > 0$.

Démonstration. On a vu que pour tout $t > 0$

$$|\mathbf{a}_3(t)| = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0) h^{\delta'-1}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\alpha_t)^3 i \omega_t} e^{-2\pi \beta_t m} e^{-\theta_t i} \right| + O(h^\infty),$$

en posant $\varphi_t(x) := e^{-(x+\alpha_t)^3 i \omega_t}$ on a alors que

$$|\mathbf{a}_3(t)| = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0) h^{\delta'-1}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_t(m) e^{-2\pi \beta_t m} \right| + O(h^\infty)$$

puis d'après la formule sommatoire de Poisson

$$= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0) h^{\delta'-1}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F} \left(\varphi_t(x) e^{-2\pi \beta_t x} \right) (l) \right| + O(h^\infty)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)h^{\delta'-1}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\varphi_t)(l + \beta_t) \right| + O(h^\infty) \\
&= \frac{|C(t)|}{h^{\delta'-1}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi\alpha_t(l+\beta_t)} A_i \left(k_t^{\frac{2}{3}}(l + \beta_t) \right) \right| + O(h^\infty)
\end{aligned}$$

d'après le précédent lemme. $\square$

2.8 Bilan des résultats obtenus dans ce chapitre

2.8.1 Échelles de temps

Dans ce chapitre beaucoup de différentes échelles de temps sont apparues, on va les rappeler brièvement et les comparer :

- l'échelle de temps d'approximation à l'ordre 1 de la fonction d'auto-corrélation : $[0, h^\alpha]$;
- la période classique : T_{cl} ;
- l'échelle de temps d'approximation à l'ordre 2 de la fonction d'auto-corrélation : $[0, h^\beta]$;
- la période de renaissance : T_{ren} ;
- l'échelle de temps d'écroulement (cas gaussien) de $t \mapsto \mathbf{a}_2(t) : [h^\gamma, h^{\gamma'}]$.

Hormis la période classique, toutes ces échelles de temps sont des puissances négatives de h . Et mise à part les périodes T_{ren} et T_{cl} , ces échelles sont soumises à des conditions dépendants des paramètres $\delta \in]0, 1[$ et $\delta' \in]0, 1[$. La première condition est que (voir remarque 2.3.11 et lemme 2.3.12) :

$$\delta' > \delta.$$

La seconde, exprimée à la proposition 2.4.2 est :

$$1 - 2\delta < \alpha < 0.$$

Celle de la proposition 2.5.3 est

$$1 - 3\delta < \beta < -1.$$

Puis celle du théorème 2.7.5 :

$$\gamma' > -\delta'.$$

Et enfin celles du corollaire 2.7.6 :

$$\begin{cases} \gamma' < \gamma < 0 \\ \gamma < 1 - 2\delta'. \end{cases}$$

Remarquons bien que, en prenant seulement l'hypothèse :

$$\frac{2}{3} < \delta < \delta' < 1$$

on a immédiatement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 < 1 - 2\delta' < 1 - 2\delta < 0 \\ -1 < -\delta' < 1 - 2\delta' \\ 1 - 3\delta < -1 \end{array} \right.$$

d'où :

$$1 - 3\delta < -1 < -\delta' < 1 - 2\delta' < 1 - 2\delta < 0$$

donc $\exists(\alpha, \beta, \gamma, \gamma') \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$1 - 3\delta < \beta < -1 < -\delta' < \gamma' < \gamma < 1 - 2\delta' < 1 - 2\delta < \alpha < 0$$

d'où pour h assez petit :

$$T_{cl} < h^\alpha < h^\gamma < h^{\gamma'} < \frac{pT_{ren}}{q} < T_{ren} < h^\beta.$$

Il est donc possible de faire le choix des coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, \gamma')$ de manière cohérente. Ainsi l'interprétation physique des différentes propriétés mathématiques énoncées devient pertinente.

2.8.2 Période classique

Dans l'échelle de temps $[0, h^\alpha]$ où $\alpha > 1 - 2\delta$, le terme principal de la fonction de retour semi-classique de la dynamique quantique associé à P_h est la fonction

$$\mathbf{r}_2(t) = e^{-it\frac{\lambda_{n_0}}{h}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{cl}}}$$

Mis à part le terme oscillant $e^{-it\frac{\lambda_{n_0}}{h}}$ de module constant égale à 1, le terme principal de la fonction d'auto-corrélation est une fonction T_{cl} -périodique. Ensuite au voisinage des $t \in T_{cl}\mathbb{Z}$ le module de la fonction d'auto-corrélation est, modulo h^∞ , égale à 1, alors qu'entre deux périodes consécutives, ce module est nul (modulo h^∞).

2.8.3 Pleine renaissance

On a grâce à la proposition 2.5.3 que $t \mapsto \mathbf{a}_2(t)$ est une approximation à l'ordre 2 de la fonction d'auto-corrélation $\langle \psi(t), \psi_0 \rangle_{L^2}$ valable sur $[0, h^\beta]$ avec $\beta > 1 - 3\delta$. Et ci dessus on a remarqué que quitte à prendre $\delta > \frac{2}{3}$ on a pour h assez petit :

$$[0, T_{cl}] \subset [0, h^\alpha] \subset \left[0, \frac{pT_{ren}}{q}\right] \subset [0, T_{ren}] \subset [0, h^\beta].$$

Le théorème 2.5.6 montre que $t \mapsto \mathbf{a}_2(t)$ c'est à dire le module de l'approximation, est périodique de période $N_h T_{cl}$ modulo $h^{2\delta-1}$:

$$\mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) = \mathbf{a}_1(t) + O\left(h^{\alpha+2\delta-1}\right);$$

cette période $N_h T_{cl}$ est équivalente à T_{ren} quand $h \rightarrow 0$. C'est le phénomène de renaissances.

2.8.4 Phénomènes de renaissances fractionnaires

Le théorème 2.5.15 montre que la fonction d'auto-corrélation à l'ordre 2 près de $\frac{p}{q}N_h T_{cl}$ s'écrit comme une combinaison linéaire complexe finie de translatée de la fonction d'auto-corrélation à l'ordre 1 :

$$\mathbf{a}_2\left(t + \frac{p}{q}N_h T_{cl}\right) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \mathbf{a}_1\left(t + T_{cl}\left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q}N_h\right)\right) + O(h^{2\delta-1}),$$

l étant un entier dépendant du rationnel p/q . Physiquement cela s'interprète comme un phénomène de "clonage" du paquet d'onde ψ_0 , le nombre de clones (le nombre de coefficients $\tilde{b}_k(l)$ non nuls) et leurs hauteurs (le module des coefficients $\tilde{b}_k(l)$) dépendent des propriétés arithmétiques de p/q . Sur les figures suivantes on observe bien ces renaissances partielles : par exemple sur la figure 19 on distingue 3 "clones" ; sur la figure 21 on a 2 clones.

2.8.5 Phénomènes d'écroulement des paquets d'ondes Gaussien

Si on se place dans le cas particulier où on prend un état initial localisé en énergie suivant une distribution Gaussienne, le théorème 2.7.5 montre que dans une certaine échelle de temps $[0, h^{\gamma'}] \subset [0, T_{ren}]$ la fonction $t \mapsto \mathbf{a}_2(t)$ est décrite, modulo h^∞ par la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{l} [0, h^{\gamma'}] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{h^{1-\delta'}}{\sqrt{\pi Z_h(t)}} e^{-\pi^2 d(t, T_{cl}\mathbb{Z})^2 \frac{1}{Z_h(t)}}. \end{array} \right.$$

Et en examinant (corollaire 2.7.6) cette fonction on a en particulier que $t \mapsto \mathbf{a}_2(t)$ converge uniformément vers 0 sur $[h^\gamma, h^{\gamma'}]$ quand $h \rightarrow 0$. Ce qui, physiquement, signifie que pour des échelles de temps très grande, mais plus petite que la période de renaissance, la fonction d'auto-corrélation est très petite et la période classique a disparu, ceci s'interprète comme une forte délocalisation du vecteur initial, c'est un phénomène d'écroulement des paquets d'ondes. Par exemple sur les figures 16 et 17 (voir aussi la figure 23) on observe bien cette écroulement du paquet initial.

2.8.6 Approximation cubique : fonction $\mathbf{a}_3(t)$

L'apparition de la fonction d'Airy dans l'approximation d'ordre trois de la d'auto-corrélation (voir théorème 2.7.18) explique en partie le phénomène de disymétrie des pics des renaissances et de la présence de petites oscillations autour des ces pics. Pour des détails complet de ces phénomènes on conseille au lecteur l'article de D. Robert [Rob2].

2.9 Simulations numériques

On présente ici quelques illustrations numériques de simulation de la dynamique. Ces différentes simulations sont réalisées avec différents logiciels et langage (Maple, Python).

Dynamique du paquet d'ondes

Ces 16 premières figures illustrent l'évolution au cours du temps de l'état initial ψ_0 (ici une gaussienne) en 3 dimensions. Le plan du bas représente le plan de phase. Cette simulation part de $t = 0$ jusqu'à environ $t = T_{ren}/4$. Au début : en $t = 0$ le paquet d'ondes initial est une gaussienne localisée dans le plan de phase. Ensuite le paquet suit la dynamique en tournant le long des trajectoires classiques (ici des ellipses). Comme le paquet est supporté sur plusieurs trajectoires classiques, où les vitesses sont différentes, le paquet d'onde commence à se disperser le long des trajectoires classiques (figures 10 à 15) jusqu'à s'écrouler complètement (figures 16 et 17). Ensuite, quand $t = \frac{p}{q}T_{ren}$, le paquet initial se clone en q "mini" paquets décalés l'un de l'autre (voir par exemple les figures 18 à 21 avec différentes valeurs de l'entier q).

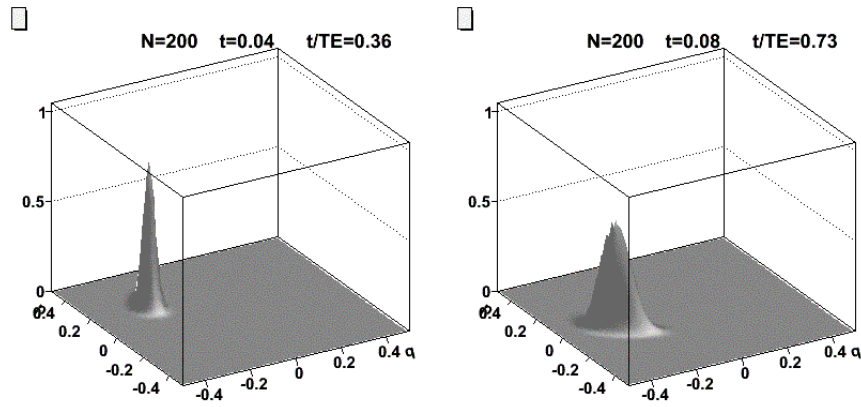


Fig. 6 & 7.

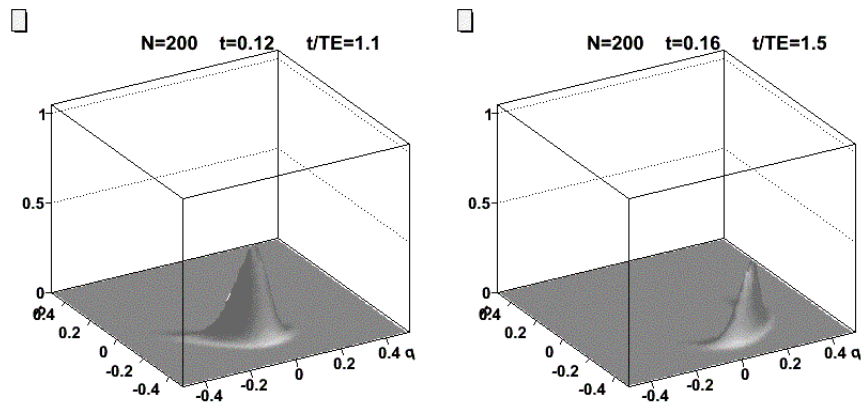


Fig. 8 & 9.

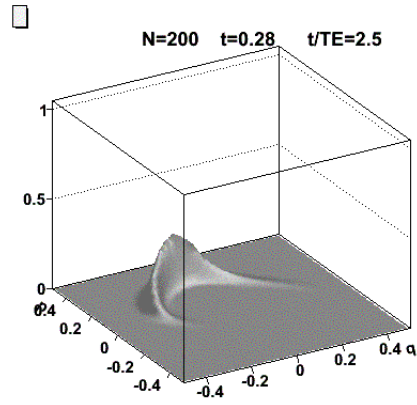
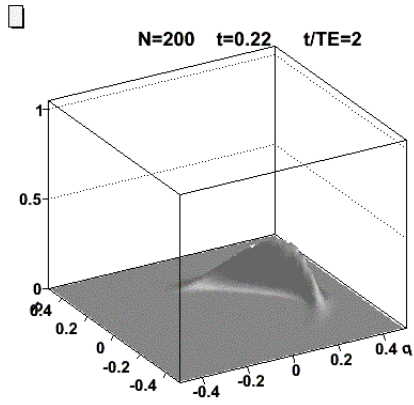


Fig. 10 & 11.

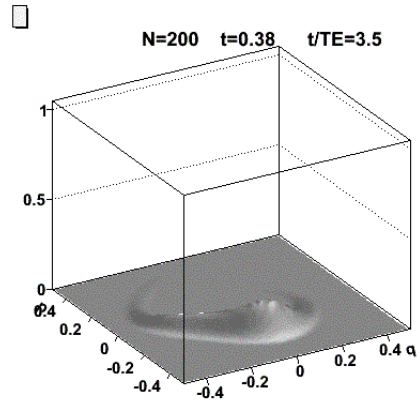
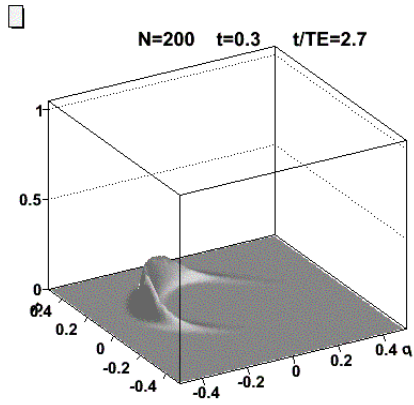


Fig. 12 & 13.

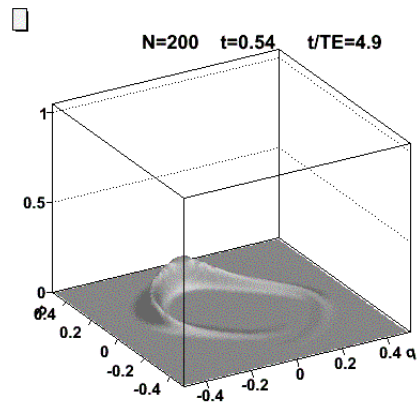
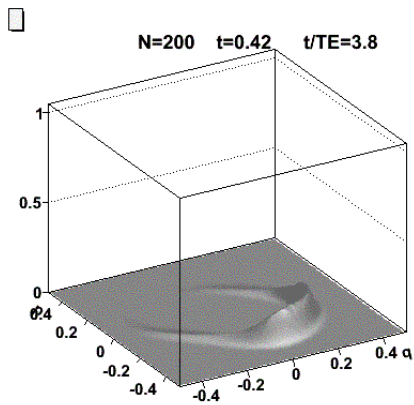


Fig. 14 & 15.

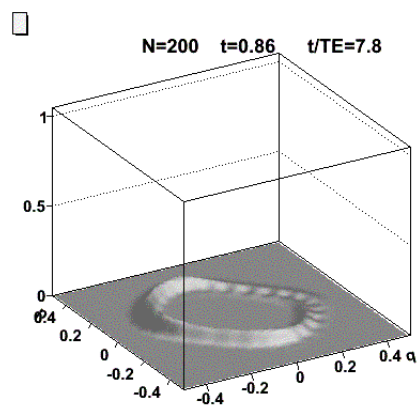
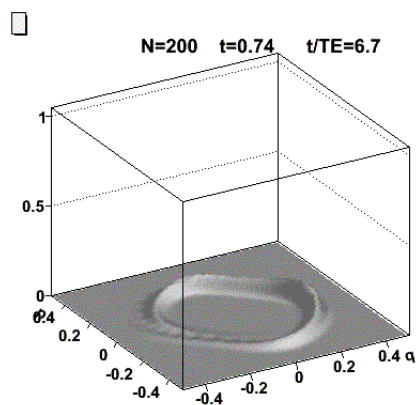


Fig. 16 & 17.

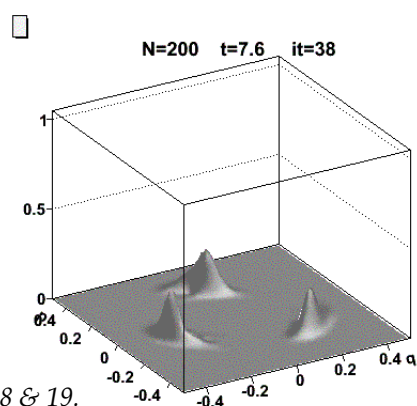
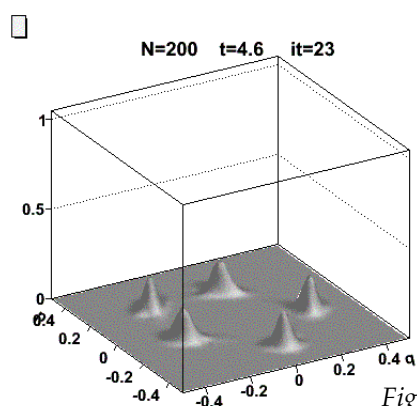


Fig. 18 & 19.

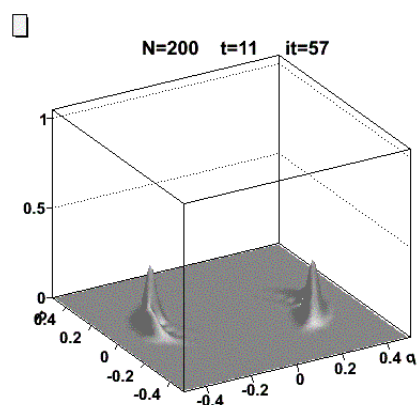
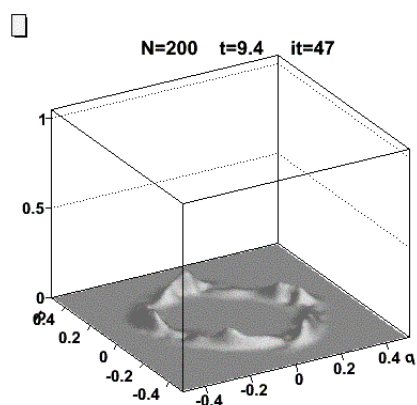


Fig. 20 & 21.

Fonction d'auto-corrélation

Les trois figures suivantes sont les graphes de la fonction d'auto-corrélation (sur l'axe des ordonnées : la valeur de la fonction, sur l'axe des abscisses le temps).

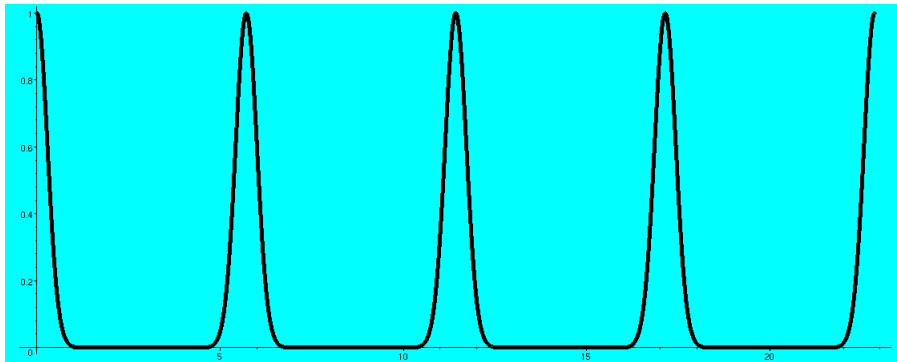


Fig. 22. Période classique de la fonction d'auto-corrélation.

Sur la figure 22, on trouve le tracé de $t = 0$ jusqu'à $t = 4T_{cl}$. On voit parfaitement la T_{cl} -périodicité de la fonction d'auto-corrélation sur des échelles de temps courtes.

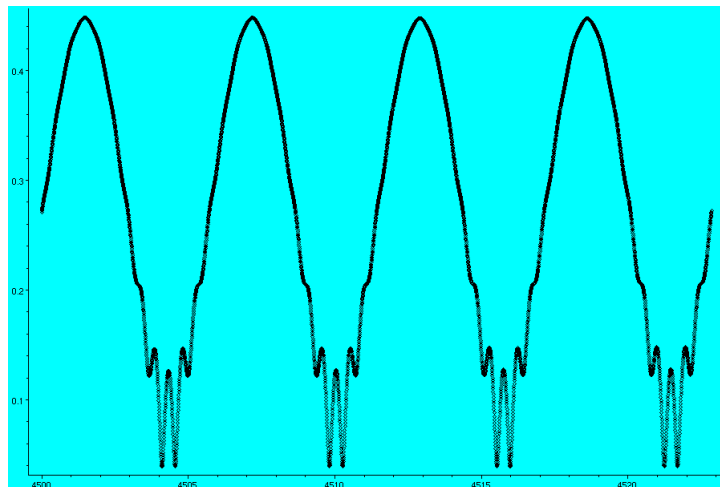


Fig. 23. Écroulement de la fonction d'auto-corrélation.

Ensuite, la figure 23 est le tracé de fonction d'auto-corrélation sur un intervalle du type $[AT_{cl}/2, BT_{cl}/2]$ avec A, B assez grand. On voit ici encore "un peu" la T_{cl} -périodicité de la fonction et on voit aussi que la fonction s'écroule (elle n'atteint plus 1).

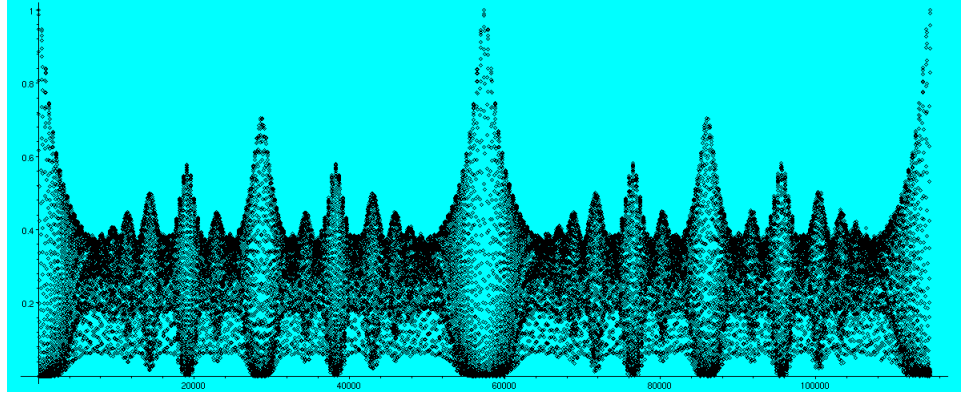


Fig. 24. Périodes de renaissances pleine et fractionnaires de la fonction d'auto-corrélation.

Pour finir on trouve sur la figure 24 le tracé de la fonction d'auto-corrélation sur $[0, T_{ren}]$. On y aperçoit très nettement la pleine renaissance en $t = T_{ren}$, et les renaissances fractionnaires (en particulier en $t = T_{ren}/2$).

Chapitre 3

Dynamique dans le cas elliptique en dimension 2

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on se concentre sur le pendant en dimension 2 de la dynamique du modèle elliptique uni-dimensionnelle traité au chapitre précédent. Ici l'hamiltonien de la dynamique est alors un opérateur auto-adjoint avec domaine inclus dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$; et ayant un spectre discret du type $F(h\mathbb{Z}, h\mathbb{Z})$, F étant un polynôme à deux indéterminées sur le corps des réels. A l'instar de la dimension 1 un vecteur initial ψ_0 localisé suit en première approximation la dynamique classique associée à l'hamiltonien de départ. En dimension 2, sur des échelles de temps courtes cette dynamique est nettement plus complexe. Le flot hamiltonien classique s'enroule autour d'un tore de dimension 2, il y a alors deux périodes classiques (qui sont d'ordre $O(1)$). En première approximation la fonction d'auto-corrélation (qui une fois réécrite est toujours une série de fonctions) de notre système bi-dimensionnel reste en principe aussi simple à étudier qu'en dimension 1, mais la présence des deux périodes classiques compliquent nettement la compréhension de l'évolution de la fonction d'auto-corrélation pour les échelles de temps courtes. Dans ce chapitre on propose une étude au premier ordre de la dynamique semi-classique en fonction de la commensurabilité de ces deux périodes classiques; ce qui nous amène à quelques discussions de théorie des nombres. Lorsque on regarde la dynamique sur des échelles plus grandes il y a 3 périodes de renaissance (d'ordre $1/h$) qui apparaissent. Sous une hypothèse de commensurabilité entre ces 3 périodes on arrive à écrire un analogue du théorème de renaissance du cas uni-dimensionnel.

3.2 Contexte

3.2.1 Introduction

Dans ce chapitre on se place en dimension classique égale à 4. On prend comme hamiltonien quantique, l'opérateur $P_h := F(P_1, P_2)$ où F est un polynôme de $\mathbb{R}[X, Y]$ indépendant de h ; P_1 et P_2 sont les quantifiés de Weyl des oscillateurs harmonique classiques $p_j(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = \omega_j \frac{x_j^2 + \xi_j^2}{2}$ avec $\omega_1, \omega_2 > 0$.

L'étude de l'oscillateur harmonique permet par exemple d'étudier tous les hamiltoniens sur $\mathbb{R}^4$ définis à partir d'une forme quadratique définie positive ; en effet (voir par exemple le livre de S. Vu Ngoc [VuN4]) :

Proposition 3.2.1. *Toute forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^4$ est un oscillateur harmonique : il existe $\omega_1, \omega_2 > 0$ et un changement de coordonnées symplectiques telles que $q(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = \omega_1 \frac{x_1^2 + \xi_1^2}{2} + \omega_2 \frac{x_2^2 + \xi_2^2}{2}$.*

Ce modèle d'opérateur $P_h := F(P_1, P_2)$ est moins particulier qu'il ne le paraît, puisque, à un difféomorphisme près, il donne le spectre de tout système complètement intégrable en dimension deux autour d'une singularité de type elliptique. L'étude de l'hamiltonien $P_h = F(P_1, P_2)$ permet donc de faire une étude assez générale non triviale en dimension 2. Notons bien aussi que notre contexte induit un système complètement intégrable, ici l'application moment est donnée par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ m := (x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) \mapsto (p_1(m), p_2(m)). \end{cases}$$

3.2.2 Oscillateur harmonique quantique en dimension 2

Définition 3.2.2. L'oscillateur harmonique quantique de l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ est défini par l'opérateur linéaire à domaine

$$D(H_{osc}) := \left\{ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^2) ; \|(x, y)\|^2 \varphi(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\}$$

et pour toute fonction $\varphi \in D(H_{osc})$

$$H_{osc}\varphi := \frac{\omega_1}{2} \left(-h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \right) \varphi + \frac{\omega_2}{2} \left(-h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2 \right) \varphi.$$

La théorie générale (voir chapitre 1) nous apprend que l'opérateur H_{osc} est auto-adjoint sur son domaine et que son spectre est donné par :

$$\Lambda_h = \left\{ \lambda_{n,m} := \omega_1 h \left(n + \frac{1}{2} \right) + \omega_2 h \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\}_{n,m \in \mathbb{N}^2}$$

avec comme vecteur propres associés les fonctions d'Hermite $e_{n,m}(x, y) = (e_n \otimes e_m)(x, y)$ où

$$e_n(x) = \frac{1}{h^{\frac{1}{4}}} \psi_n \left(\frac{x}{\sqrt{h}} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

avec

$$\psi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \text{ et } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Bien sur on a $H_{osc} = P_1 + P_2$ et pour tout n entier naturel et quel que soit l'indice $j \in \{1, 2\}$ nous avons

$$P_j(e_n) = \omega_j h \left(n + \frac{1}{2} \right) e_n;$$

par conséquent pour tout couple (n, m) d'entiers naturels et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$H_{osc}(e_n \otimes e_m)(x, y) = \left(\omega_1 h \left(n + \frac{1}{2} \right) + \omega_2 h \left(m + \frac{1}{2} \right) \right) (e_n \otimes e_m)(x, y).$$

Ainsi, en posant

$$\tau_n := \omega_1 h \left(n + \frac{1}{2} \right), \mu_m := \omega_2 h \left(m + \frac{1}{2} \right);$$

on a par conséquent l'égalité $\lambda_{n,m} = \tau_n + \mu_m$ et pour tous n, m entiers naturels $H_{osc}(e_n \otimes e_m) = \lambda_{n,m}(h)(e_n \otimes e_m)$. De plus comme $(e_n \otimes e_m)_{n,m \in \mathbb{N}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$; et que $\overline{L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R}^2)$; la famille $(e_n \otimes e_m)_{n,m \in \mathbb{N}^2}$ est alors une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$ formées de vecteurs propres de H_{osc} .

3.2.3 Polynôme d'oscillateur harmonique

A partir des deux opérateurs auto-adjoints P_1, P_2 en involution¹ et du polynôme $F \in \mathbb{R}[X, Y]$; on va construire un nouvel opérateur $F(P_1, P_2)$. On note par π l'opérateur unitaire suivant :

$$\pi : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^2(\mathbb{N}^2) \\ \varphi \mapsto \langle \varphi, e_n \otimes e_m \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{cases}.$$

Considérons aussi l'opérateur de multiplication par la suite $F(\lambda_n, \mu_m)$ sur $l^2(\mathbb{N}^2)$: son domaine est donné par

$$D(M_{F(\lambda_n, \mu_m)}) := \left\{ (u_{n,m})_{n,m} \in l^2(\mathbb{N}^2); F(\tau_n, \mu_m) u_{n,m} \in l^2(\mathbb{N}^2) \right\}$$

et l'opérateur est alors définit par

$$M_{F(\tau_n, \mu_m)} u_{n,m} = F(\tau_n, \mu_m) u_{n,m}.$$

Cet opérateur est auto-adjoint (c'est un cas particulier du lemme 1.3.1 du chapitre 1). A partir de cette opérateur on va définir le nouvel opérateur à domaine $F(P_1, P_2)$ de la manière suivante :

Définition 3.2.4. Pour $F \in \mathbb{R}[X, Y]$; le domaine de l'opérateur $F(P_1, P_2)$ est donné par :

$$D(F(P_1, P_2)) = \pi^{-1} \left\{ D(M_{F(\tau_n, \mu_m)}) \right\};$$

et l'opérateur $F(P_1, P_2)$ est égale à :

$$F(P_1, P_2) = \pi^{-1} \circ M_{F(\tau_n, \mu_m)} \circ \pi.$$

1

Remarque 3.2.3. Les deux opérateurs commutent : $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$

Ensuite, par construction on a immédiatement que :

Proposition 3.2.5. *Nous avons :*

(i) *L'opérateur $F(P_1, P_2)$ est auto-adjoint sur son domaine.*

(ii) *Pour tout couple (n, m) d'entiers naturels*

$$F(P_1, P_2)(e_n \otimes e_m) = F(\tau_n, \mu_m)(e_n \otimes e_m).$$

(iii) *Si $F(X, Y) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} X^i Y^j$; alors sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$*

$$F(P_1, P_2) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_1^i \circ P_2^j = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_2^j \circ P_1^i.$$

Remarque 3.2.6. Le dernier point montre que la définition de $F(P_1, P_2)$ coïncide sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ avec l'idée intuitive que l'on a pour définir un polynôme d'opérateurs $F(P_1, P_2)$.

Démonstration. Démontrons points par points.

(i) Le premier point est clair par le lemme 1.3.1.

(ii) Fixons nous d'abord un couple $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2$ puis calculons $F(P_1, P_2)(e_{n_0} \otimes e_{m_0})$; par définition on a :

$$\begin{aligned} F(P_1, P_2)(e_{n_0} \otimes e_{m_0}) &= \pi^{-1}(F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \pi(e_{n_0} \otimes e_{m_0})) \\ &= \pi^{-1}\left(F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})(\delta_{n,n_0} \delta_{m,m_0})_{n,m}\right) = F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \pi^{-1}\left((\delta_{n,n_0} \delta_{m,m_0})_{n,m}\right) \\ &= F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})(e_{n_0} \otimes e_{m_0}); \end{aligned}$$

et donc pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ on a bien $F(P_1, P_2)(e_n \otimes e_m) = F(\tau_n, \mu_m)(e_n \otimes e_m)$.

(iii) Pour le dernier point, d'une part pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ nous avons :

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_1^i \circ P_2^j (e_n \otimes e_m) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_1^i \left(e_n \otimes P_2^j e_m \right),$$

puis avec les propriétés spectrales des opérateurs P_1 et P_2 on obtient

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_1^i \left(e_n \otimes \mu_m^j e_m \right) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mu_m^j P_1^i (e_n) \otimes e_m \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \tau_n^i \mu_m^j e_n \otimes e_m = F(\tau_n, \mu_m)(e_n \otimes e_m). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_2^j \circ P_1^i (e_n \otimes e_m) &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_2^j \left(P_1^i e_n \otimes e_m \right) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} P_2^j \left(\tau_n^i e_n \otimes e_m \right) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \tau_n^i \left(e_n \otimes P_2^j e_m \right) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \tau_n^i \mu_m^j e_n \otimes e_m = F(\tau_n, \mu_m)(e_n \otimes e_m). \end{aligned}$$

Ainsi les deux formules coïncident sur la base hilbertienne $(e_n \otimes e_m)_{n,m \in \mathbb{N}^2}$, elle coïncident donc partout sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

3.2.4 Dynamique semi classique associée

Dans ce chapitre l'hamiltonien est l'opérateur auto-adjoint $F(P_1, P_2)$ et pour tout triplet $(t, n, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^2$ nous avons

$$\left(e^{-i\frac{t}{h}F(P_1, P_2)}\right) e_n \otimes e_m = \left(e^{-i\frac{t}{h}\lambda_{n,m}}\right) e_n \otimes e_m.$$

Soit un vecteur initial $\psi_0 \in D(F(P_1, P_2)) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ et notons par $(a_{n,m})_{n,m} = (a_{n,m}(h))_{n,m}$ la suite de $l^2(\mathbb{N}^2)$ donnée par $a = \pi(\psi_0)$, avec $a = (a_{n,m})_{n,m}$. On obtient alors que pour tout t réel

$$\begin{aligned} \psi(t) = U(t)\psi_0 &= \left(e^{-i\frac{t}{h}F(P_1, P_2)}\right) \left(\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} a_{n,m}(e_n \otimes e_m)\right) \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} a_{n,m} e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)} e_n \otimes e_m; \end{aligned}$$

et par conséquent pour tout t réel

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|^2 e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)}; \quad \mathbf{a}(t) = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|^2 e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)} \right|.$$

Avant d'étudier ces quantités en détails on va d'abord définir un état initial pour la dynamique.

3.3 Préliminaires sur la dynamique

3.3.1 Choix d'un état initial localisé en énergie

Définissons un état initial ψ_0 de la dynamique dépendant de h et localisé autour des nombres réel E_1, E_2 . Soit deux réels $E_1 \in [-1, 1]$ et $E_2 \in [-1, 1]$ indépendant de h .

Définition 3.3.1. On définit les entiers naturels $n_0 = n_0(h)$ et $m_0 = m_0(h)$ par :

$$n_0 := \arg \min_n |\tau_n - E_1|; \quad m_0 := \arg \min_m |\mu_m - E_2|.$$

L'entier n_0 (resp. m_0) est donc l'indice de la valeur propre de l'opérateur P_1 (resp. de P_2) la plus proche du réel E_1 (resp. E_2).

On a alors la :

Proposition 3.3.2. Nous avons :

- (i) $|E_1 - \tau_{n_0}| \leq \omega_1 h$ et $|E_2 - \mu_{m_0}| \leq \omega_2 h$.
- (ii) Pour $h \rightarrow 0$ on a les équivalences

$$n_0 \sim \frac{E_1}{\omega_1 h}; \quad m_0 \sim \frac{E_2}{\omega_2 h}.$$

Proof. Démontrons points par points.

(i) Comme les valeurs propres de P_1 (resp. celles de P_2) sont distantes l'une de l'autre de $\omega_1 h$ (resp. de $\omega_2 h$) le point (i) est alors immédiat.

(ii) En partant de $\left| E_1 - \omega_1 h \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) \right| \leq \omega_1 h$ on en déduit

$$\left| \frac{E_1}{\omega_1 h} - n_0 - \frac{1}{2} \right| \leq 1$$

et donc

$$\frac{E_1}{\omega_1 h} - \frac{3}{2} \leq n_0 \leq \frac{1}{2} + \frac{E_1}{\omega_1 h}$$

on en déduit alors facilement que pour $h \rightarrow 0$ on a $n_0 \sim \frac{E_1}{\omega_1 h}$. De la même façon pour $h \rightarrow 0$ on a aussi $m_0 \sim \frac{E_2}{\omega_2 h}$. $\square$

Définition 3.3.3. Considérons la suite $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{Z}^2} = (a_{n,m}(h))_{n,m \in \mathbb{Z}^2}$ définie par :

$$a_{n,m} := K_h \chi \left(\frac{\tau_n - \tau_{n_0}}{h^{\delta'_1}}, \frac{\mu_m - \mu_{m_0}}{h^{\delta'_2}} \right) = K_h \chi \left(\omega_1 \frac{n - n_0}{h^{\delta'_1 - 1}}, \omega_2 \frac{m - m_0}{h^{\delta'_2 - 1}} \right);$$

où $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est une fonction non identiquement nulle, positive et paire. Les paramètres $(\delta'_1, \delta'_2) \in]0, 1[^2$. Et avec

$$K_h := \left\| \chi \left(\frac{\tau_n - \tau_{n_0}}{h^{\delta'_1}}, \frac{\mu_m - \mu_{m_0}}{h^{\delta'_2}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N}^2)}.$$

On va détailler ce choix d'état initial :

1. Le terme $\chi \left(\frac{\tau_n - \tau_{n_0}}{h^{\delta'_1}}, \frac{\mu_m - \mu_{m_0}}{h^{\delta'_2}} \right)$ sert à localiser autour, non pas autour de (E_1, E_2) directement, mais pour des raisons techniques, autour des valeurs propres les plus proches du couple (E_1, E_2) .
2. Les constantes δ'_1 et δ'_2 servent à modifier la dilatation de la fonction χ .

La raison du choix $0 < \delta'_j < 1$ est la suivante : c'est l'unique choix possible pour avoir à la fois une localisation pertinente (qui ne tend pas vers $\{0\}$) et une localisation plus grande que l'interstice spectral $h^{\delta'_j} \gg h$.

Enonçons maintenant les premières propriétés de la suite $(a_{n,m})_{n,m}$.

Proposition 3.3.4. La suite $(a_{n,m})_{n,m} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$; et le vecteur $\psi_0 := \pi^{-1}(a_{n,m}(h)) \in D(\tilde{F}(P_1, P_2))$.

Démonstration. D'une part comme $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, il existe $M_h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$|a_{n,m}| \leq \frac{M}{(1+n^2)(1+m^2)} \in l^2(\mathbb{Z}^2);$$

et par conséquent $(a_{n,m})_{n,m} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$. D'autre part comme la fonction

$$(x, y) \mapsto (1+x^2)(1+y^2) F \left(h \left(x + \frac{1}{2} \right), h \left(y + \frac{1}{2} \right) \right) K_h \chi \left(\omega_1 \frac{x - n_0}{h^{\delta'_1 - 1}}, \omega_2 \frac{y - m_0}{h^{\delta'_2 - 1}} \right)$$

est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$; il existe donc $M_h > 0$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$ on ait :

$$\left| (1+n^2)(1+m^2) F\left(h\left(n+\frac{1}{2}\right), h\left(m+\frac{1}{2}\right)\right) K_h \chi\left(\omega_1 \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \omega_2 \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}}\right) \right| \leq M_h$$

ie :

$$\left| F\left(h\left(n+\frac{1}{2}\right), h\left(m+\frac{1}{2}\right)\right) a_{n,m} \right| \leq \frac{M_h}{(1+n^2)(1+m^2)} \in l^2(\mathbb{N}^2).$$

□

De manière analogue au cas de la dimension 1 (voir chapitre 2, lemme 2.3.8) on dispose du

Lemme. Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in]0, 1]^2$; alors :

$$\sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l|+|s| \geq 1} \left| \varphi\left(\frac{l}{\varepsilon_1}, \frac{s}{\varepsilon_2}\right) \right| = O(\varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty).$$

Théorème 3.3.5. Nous avons

$$K_h = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} h^{\frac{\delta'_1 + \delta'_2 - 2}{2}}} + O(h^\infty) ;$$

et ainsi $\|a_{n,m}\|_{l^2(\mathbb{N}^2)} = 1 + O(h^\infty)$.

Démonstration. Avec la formule sommatoire de Poisson et le lemme précédent nous avons les égalités

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \chi^2\left(\omega_1 \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \omega_2 \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}}\right) \\ &= h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2)\left(-l \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1}, -s \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2}\right) \\ &= h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2} \left[\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) + \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l|+|s| \geq 1} \mathfrak{F}(\chi^2)\left(-l \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1}, -s \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2}\right) \right] \\ &= h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2} \mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) + O(h^\infty). \end{aligned}$$

On va maintenant revenir à l'indexage de la série sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$; sans perdre de généralités on va supposer maintenant que $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Comme $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $\chi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ on a l'inégalité suivante à disposition :

$$\forall k, d \in \mathbb{N}^{*2}, \exists C_{k,d} > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, \left| \chi^2(x_1, x_2) \right| \leq \frac{C_{k,d}}{(1+|x_1|)^k (1+|x_2|)^d}.$$

Partons de l'égalité :

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} \chi^2\left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}}\right) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \chi^2\left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \\
& \quad = h^{\delta'_1+\delta'_2-2} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \right) (0,0) + O(h^\infty) \\
& - \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right).
\end{aligned}$$

D'une part, par parité de la fonction χ^2 par rapport aux deux variables nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n+n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m+m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \\
& \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n+n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n+n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \\
& \quad \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m+m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m-m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} \\
& \quad \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m+m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m \neq m_0} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m-m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k}.
\end{aligned}$$

Ensuite comme

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m+m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} \\
& \leq C_{k,d} h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n+n_0|^k} \right) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{|m+m_0|^d} \right)
\end{aligned}$$

et par les théorèmes généraux de comparaisons entre séries et intégrales, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned}
& \leq C_{k,d} h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)} \int_0^\infty \frac{du}{(u+n_0)^k} \int_0^\infty \frac{dv}{(v+m_0)^d} \\
& = C_{k,d} h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)} \frac{1}{(k-1)n_0^{k-1}} \frac{1}{(d-1)m_0^{d-1}}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on sait que quand $h \rightarrow 0$ on a $n_0 \sim \frac{N}{h}$, $m_0 \sim \frac{M}{h}$ où $N, M \neq 0$; ainsi, quand $h \rightarrow 0$ on a l'équivalent

$$\frac{h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)}}{n_0^{k-1}m_0^{d-1}} \sim \frac{h^{k\delta'_1+d\delta'_2-2}}{N^{k-1}M^{d-1}};$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m+m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} = O(h^\infty).$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m \neq m_0} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m-m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|p|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} \\ &\leq 2C_{k,d}h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n+n_0|^k}\right) \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^d}\right) \\ &\leq C_{k,d}h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)} \int_0^\infty \frac{du}{(u+n_0)^k} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^d}\right) \\ &= C_{k,d}h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)} \frac{1}{(k-1)n_0^{k-1}} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^d}\right). \end{aligned}$$

Et quand $h \rightarrow 0$ on a

$$\frac{h^{k(\delta'_1-1)+d(\delta'_2-1)}}{n_0^{k-1}} \sim \frac{h^{k\delta'_1+d(\delta'_2-1)-1}}{N^{k-1}}$$

et par conséquent pour k assez grand par rapport à d :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m \neq m_0} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m-m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} = O(h^\infty).$$

Enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k} \leq C_{k,d}h^{k(\delta'_1-1)} \int_0^\infty \frac{du}{(u+n_0)^k} = C_{k,d}h^{k(\delta'_1-1)} \frac{1}{(k-1)n_0^{k-1}};$$

et quand $h \rightarrow 0$ on a $\frac{h^{k(\delta'_1-1)}}{n_0^{k-1}} \sim \frac{h^{k\delta'_1-1}}{N^{k-1}}$ d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|n+n_0|}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k} = O(h^\infty).$$

On vient donc de montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) = O(h^\infty).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \\ &= \sum_{n \neq n_0} \sum_{m=1}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m+m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) + \sum_{m=1}^{+\infty} \chi^2 \left(0, \frac{m+m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \\ &\leq \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2C_{k,d}}{\left(1 + \frac{p}{h^{\delta'_1-1}}\right)^k \left(1 + \frac{|m+m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|m+m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} \\ &\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_{k,d}}{\left(1 + \frac{|m+m_0|}{h^{\delta'_2-1}}\right)^d} \left(2h^{k(\delta'_1-1)} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} + 1 \right) \\ &\leq C_{k,d} h^{d(\delta'_2-1)} \int_0^\infty \frac{dv}{(v+m_0)^d} \left(2h^{k(\delta'_1-1)} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} + 1 \right) \\ &= C_{k,d} h^{d(\delta'_2-1)} \frac{1}{(d-1)m_0^{d-1}} \left(1 + 2h^{k(\delta'_1-1)} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \right); \end{aligned}$$

et pour $h \rightarrow 0$ on a $\frac{h^{d(\delta'_2-1)}}{m_0^{d-1}} \sim \frac{h^{d\delta'_2-1}}{M^{d-1}}$ et par conséquent pour d assez grand par rapport à k nous obtenons alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) = O(h^\infty).$$

Au final on a bien :

$$\left\| \chi \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N}^2)}^2 = \mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) h^{\delta'_1+\delta'_2-2} + O(h^\infty);$$

d'où

$$K_h = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} h^{\frac{\delta'_1+\delta'_2-2}{2}}} + O(h^\infty).$$

Ensuite il suffit de réécrire que

$$\begin{aligned} \|a_{n,m}\|_{l^2(\mathbb{N}^2)}^2 &= K_h^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \chi \left(\omega_1 \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \omega_2 \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \right|^2 \\ &= K_h^2 h^{\delta'_1+\delta'_2-2} \left[\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) + O(h^\infty) \right] = 1 + O(h^\infty). \end{aligned}$$

□

3.3.2 Découpe de la série

Commençons par une définition :

Définition 3.3.6. On définit les ensemble d'entiers $\Delta = \Delta(h, E_1, E_2)$ et $\Gamma = \Gamma(h, E_1, E_2)$ par :

$$\begin{aligned}\Delta &:= \left\{ (n, m) \in \mathbb{N}^2; |\tau_n - \tau_{n_0}| \leq \frac{h^{\delta_1}}{2\omega_1} \text{ et } |\mu_m - \mu_{m_0}| \leq \frac{h^{\delta_2}}{2\omega_2} \right\} \\ &= \left\{ (n, m) \in \mathbb{N}^2; |n - n_0| \leq \frac{h^{\delta_1-1}}{2\omega_1} \text{ et } |m - m_0| \leq \frac{h^{\delta_2-1}}{2\omega_2} \right\}\end{aligned}$$

où $0 < \delta_i < \delta'_i < 1$; et on considère aussi Γ le complémentaire de Δ dans $\mathbb{N}^2$:

$$\Gamma := \mathbb{N}^2 - \Delta.$$

Lemme 3.3.7. Si on suppose que pour tout indice $i \in \{1, 2\}$, $\delta'_i > \delta_i$ on a alors

$$\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty).$$

Démonstration. La preuve est l'analogie en dimension deux du lemme 2.3.12. Ecrivons :

$$\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |n-n_0| > h^{\delta_1-1}} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |m-m_0| > h^{\delta_2-1}} |a_{n,m}|^2.$$

Comme χ^2 est à décroissance rapide, pour tout entier $N \geq 1$ on a

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{n - n_0}{h^{\delta'_1-1}} \right)^{2N} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{m - m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right)^{2N} |a_{n,m}|^2 = O(1).$$

Sans perdre de généralités on peut supposer que $n_0 = m_0 = 0$. Ensuite nous avons comme pour la dimension 1

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |n| > h^{\delta_1-1}} |a_{n,m}|^2 = O\left(h^{2N(\delta'_1-\delta_1)}\right),$$

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |m| > h^{\delta_2-1}} |a_{n,m}|^2 = O\left(h^{2N(\delta'_2-\delta_2)}\right)$$

et ainsi $\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$. □

3.4 Etude à l'ordre 1

Lorsque on approxime au premier ordre la fonction d'auto-corrélation il apparait deux constantes; ces deux constantes sont les périodes classiques géométriques associées à l'hamiltonien classique du système. Cette étude à l'ordre un va naturellement nous amené à considérer deux cas suivant que les deux périodes classiques sont commensurables ou non.

3.4.1 Périodes semi-classiques et classiques

En tout premier lieu introduisons les périodes semi-classiques et classiques du système. On va en effet introduire deux paires de périodes classiques ; la première paire sort naturellement de la formule de Taylor effectuée sur les valeurs propres dans la fonction d'auto-corrélation.

Hypothèses 3.4.1. On suppose ici que

$$\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \neq 0, \frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \neq 0.$$

3.4.1.1 Périodes semi-classique

Définition 3.4.2. On définit les périodes semi-classiques T_{scl_1} et T_{scl_2} par :

$$T_{scl_1} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1} \text{ et } T_{scl_2} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial Y}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_2}.$$

En première approximation la fonction d'auto-corrélation est alors égale à :

Proposition 3.4.3. Soit α un réel vérifiant l'inégalité : $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$. On a alors uniformément pour tout $t \in [0, h^\alpha]$:

$$\mathbf{r}(t) = e^{-itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} + O\left(h^{\alpha+2 \min \delta_i - 1}\right).$$

Démonstration. Étudions la différence $\varepsilon(t) := \varepsilon(t, h)$ définie par

$$\varepsilon(t) := \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)} - e^{-itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \right|.$$

Écrivons maintenant la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 2 sur la fonction F autour du point (τ_{n_0}, μ_{m_0}) ; pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, il existe un réel $\rho = \rho(n, m, n_0, m_0) \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} F(\tau_n, \mu_m) &= F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \\ &+ \frac{\partial F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial X}(\tau_n - \tau_{n_0}) + \frac{\partial F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial Y}(\mu_m - \mu_{m_0}) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2} (\tau_n - \tau_{n_0})^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial Y^2} (\mu_m - \mu_{m_0})^2 \\ &+ \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X \partial Y} (\tau_n - \tau_{n_0}) (\mu_m - \mu_{m_0}) ; \end{aligned}$$

et donc en utilisant les expressions de τ_n et de μ_m on obtient

$$\begin{aligned} F(\tau_n, \mu_m) &= F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) + \frac{h(n - n_0)}{T_{scl_1}} + \frac{h(m - m_0)}{T_{scl_2}} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2} \omega_1^2 h^2 (n - n_0)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial Y^2} \omega_2^2 h^2 (m - m_0)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0})) \omega_1 \omega_2 h^2 (n - n_0)(m - m_0). \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\varepsilon(t) = \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \left[e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 \right] \right|$$

où on a posé

$$\begin{aligned} R_{n,m}(h) &:= \frac{h\omega_1^2(n - n_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2} \\ &+ \frac{h\omega_2^2(m - m_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial Y^2} \\ &+ \frac{h\omega_1 \omega_2 (n - n_0)(m - m_0)}{2\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X \partial Y}. \end{aligned}$$

Ensuite à l'aide des ensembles Γ et Δ et par inégalité triangulaire pour tout $t \geq 0$ on a

$$\varepsilon(t) \leq \left| \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \left[e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 \right] \right| + 2 \sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2.$$

D'une part (voir le lemme 3.3.7) on sait que $\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$. D'autre part; pour tout $t \geq 0$, pour h assez petit et quel que soit $(n, m) \in \Delta$ nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{th\omega_1^2(n - n_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2} &\leq tK_1 h^{2\delta_1 - 1}; \\ \frac{th\omega_2^2(m - m_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial Y^2} &\leq tK_2 h^{2\delta_2 - 1}; \\ \frac{th\omega_1 \omega_2 (n - n_0)(m - m_0)}{2\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X \partial Y} &\leq tK_{1,2} h^{\delta_1 + \delta_2 - 1}; \end{aligned}$$

où $K_1, K_2, K_{12} > 0$ sont des constantes indépendantes de h , en effet : en notant par $B((E_1, E_2), r)$ la boule euclidienne de dimension 2 de centre (E_1, E_2) et de rayon r ; comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) = (E_1, E_2)$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists h_0 > 0$, tel que pour tout $h \leq h_0$, $(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \in B((E_1, E_2), \varepsilon)$; ensuite pour tout couple $(n, m) \in \Delta$

$$|\rho(\tau_n - \tau_{n_0})| = h\omega_1\rho |n - n_0| \leq \omega_1 h^{\delta_1},$$

$$|\rho(\mu_m - \mu_{m_0})| = h\omega_2\rho |m - m_0| \leq \omega_2 h^{\delta_2}$$

donc pour h assez petit, disons $h \leq h_0$

$$(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0})) \in B((E_1, E_2), \varepsilon);$$

et ainsi pour tout $h \leq h_0$,

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0})) \right| \leq \sup_{(x,y) \in B((E_1, E_2), \varepsilon)} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(x, y) \right|$$

qui est une constante positive indépendante de h . Ensuite comme $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$, on en déduit que $\alpha > 1 - 2\delta_1$; $\alpha > 1 - 2\delta_2$ et $\alpha > 1 - \delta_1 - \delta_2$; d'où pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ on a

$$\begin{aligned} t |R_{n,m}(h)| &\leq K_1 h^{\alpha+2\delta_1-1} + K_2 h^{\alpha+2\delta_2-1} + K_{1,2} h^{\alpha+\delta_1+\delta_2-1} \\ &\leq M h^{\alpha-1} (h^{2\delta_1} + h^{2\delta_2} + h^{\delta_1+\delta_2}) \end{aligned}$$

avec $M := \max(K_1, K_2, K_3)$

$$\leq 3M h^{\alpha-1} \max(h^{2\delta_1}, h^{2\delta_2}, h^{\delta_1+\delta_2}) = 3M h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1}$$

où par hypothèse $2 \min \delta_i + \alpha - 1 > 0$. Et ainsi pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ et quel que soit le couple $(n, m) \in \Delta$ nous avons

$$e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 = O(h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1});$$

d'où

$$\left| \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \left[e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 \right] \right| = O(h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1}).$$

Au final, on a, montré que pour $t \in [0, h^\alpha]$ on a uniformément $\varepsilon(t) = O(h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1})$. $\square$

3.4.1.2 Périodes classiques

Les deux périodes semi-classiques T_{scl_i} dépendent de h ; comme par la suite on va distinguer les cas où $\frac{T_{scl_1}}{T_{scl_2}} \in \mathbb{Q}$ ou non; il est préférable de supprimer la dépendance en h du quotient $\frac{T_{scl_1}}{T_{scl_2}}$ afin de ne pas faire des hypothèses de commensurabilité valide pour tout $h > 0$. On va donc remplacer les périodes semi-classique T_{scl_i} par les périodes classique T_{cl_i} .

Définition 3.4.4. Les périodes classiques T_{cl_1} et T_{cl_2} sont définies par :

$$T_{cl_1} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \omega_1} \text{ et } T_{cl_2} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \omega_2}.$$

On a évidemment que pour tout $j \in \{1, 2\}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_{scl_j} = T_{cl_j}.$$

Proposition 3.4.5. Soit τ un réel vérifiant l'inégalité : $\tau > -\min \delta_i$. On a alors uniformément pour tout $t \in [0, h^\tau]$:

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} = \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} + O(h^{\tau + \min \delta_i}).$$

Démonstration. Observons que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \left[e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} - e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \right] \right| \\ & \leq \sum_{n,m \in \Gamma} 2 |a_{n,m}|^2 \\ & + 2 \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 \left[\left| 2\pi t(n-n_0) \left(\frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) \right| + \left| 2\pi t(m-m_0) \left(\frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right) \right| \right], \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} & \left| e^{iX_1} e^{iX_2} - e^{iY_1} e^{iY_2} \right| \leq \left| e^{i(X_1+X_2)} - e^{i(Y_1+Y_2)} \right| \\ & \leq 2 |(X_1 + X_2) - (Y_1 + Y_2)| \leq 2 |X_1 - Y_1| + 2 |X_2 - Y_2|. \end{aligned}$$

Ensuite pour tout $t \geq 0$ nous avons

$$\left| 2\pi t(n-n_0) \left(\frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) \right| \leq \left| 2\pi t(n-n_0) \left(\frac{T_{cl_1} - T_{scl_1}}{T_{scl_1} T_{cl_1}} \right) \right|,$$

or

$$\begin{aligned} T_{cl_1} - T_{scl_1} &= \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \omega_1} - \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{\frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) - \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2)}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}, \\ &= \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{\frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) - \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2)}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}, \end{aligned}$$

et d'une part, par l'inégalité des accroissements finis, en notant par $B((E_1, E_2), 1)$ la boule euclidienne de dimension 2 de centre (E_1, E_2) et de rayon 1, on obtient la majoration

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) - \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \right| \\ & \leq \sup_{x,y \in B((E_1, E_2), 1)} \left\| \nabla \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)(x, y) \right\|_{\mathbb{R}^2} \|(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) - (E_1, E_2)\|_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

$$\leq M\sqrt{(\tau_{n_0} - E_1)^2 + (\mu_{m_0} - E_2)^2} \leq Mh\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

où $M > 0$ est une constante indépendante de h . D'autre part comme on suppose que $\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \neq 0$ il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $r_1 > 0$ tels que pour tout couple $(x, y) \in B((E_1, E_2), r_1)$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial X}(x, y) \right| \geq \varepsilon_1;$$

donc comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{n_0} = E_1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_{m_0} = E_2$ il existe alors $h_1 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_1[$

$$(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \in B((E_1, E_2), r_1);$$

ainsi $h \mapsto \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}$ est bornée sur l'ouvert $]0, h_1[$, en effet pour tout $h \in]0, h_1[$

$$\left| \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_1^2} < +\infty$$

d'où avec $M' := 2\pi \frac{Mh\frac{\sqrt{2}}{2}}{\varepsilon_1^2}$, pour tout $h \in]0, h_1[$ nous avons

$$|T_{cl_1} - T_{scl_1}| \leq hM'.$$

Puis comme

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T_{scl_1} T_{cl_1}} \right| &\leq \frac{\omega_1 \omega_2}{4\pi^2} \left| \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \right| \\ &\leq \frac{\omega_1 \omega_2}{4\pi^2} \left(\sup_{x, y \in B((E_1, E_2), 1)} \left| \frac{\partial F}{\partial X}(x, y) \right| \right)^2 < \infty \end{aligned}$$

on arrive au fait qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de h ($C_1 := KM'$) telle que pour tout $h \in]0, h_1[$

$$\left| \frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right| \leq C_1 h.$$

De même il existe $C_2 > 0$ et $h_2 > 0$ tels que pour tout $h \in]0, h_2[$

$$\left| \frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right| \leq C_2 h.$$

Ainsi pour tout $h \in]0, h^*[$ où $h^* = \min h_i$ et pour tout $t \in [0, h^\tau]$ avec $\tau \in \mathbb{R}$, et quel que soient $(n, m) \in \Delta$ on a :

$$\left| t(n - n_0) \left(\frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) \right| \leq C_1 h^{v+\delta_1}, \quad \left| t(m - m_0) \left(\frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right) \right| \leq C_2 h^{v+\delta_2};$$

ainsi pour tout $(t, n, m) \in [0, h^v] \times \Delta$

$$\left| t(n - n_0) \left(\frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) + t(m - m_0) \left(\frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right) \right| \leq Mh^{\tau + \min \delta_i}.$$

Donc

$$\left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \left[e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} - e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \right] \right|$$

$$\leq 4\pi M h^{\tau + \min \delta_i} \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 + O(h^\infty) = O(h^{\tau + \min \delta_i}).$$

□

3.4.1.3 Remarques sur les échelles de temps

Notons que comme la seule contrainte sur le α de l'échelle spécifique est que $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$ avec le choix de prendre $\delta_i \in]\frac{1}{2}, 1[$ ceci autorise donc d'avoir $\alpha < 0$; ce qui donne un choix de α pertinent : pour h assez petit, l'échelle de temps spécifique d'approximation est plus grande que les périodes classiques, en effet pour h assez petit on a :

$$[0, T_{cl_i}] \subset [0, h^\alpha].$$

Ensuite comme $-\min \delta_i - (1 - 2 \min \delta_i) = -1 + \min \delta_i \leq 0$, on a donc

$$h^{-\min \delta_i} \gg h^{1-2 \min \delta_i};$$

on peut donc faire le choix de prendre $\tau = \alpha$. En conclusion, on a immédiatement que le terme principal de la fonction d'auto corrélation dans l'échelle $[0, h^\alpha]$ est :

Définition 3.4.6. Le terme principal de la fonction de retour $\mathbf{r}(t)$ est la série de fonctions

$$\mathbf{r}_1 : t \mapsto e^{-itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)}$$

et son module est le même que celui de la série de fonctions

$$\mathbf{a}_1 : t \mapsto \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)}.$$

3.4.1.4 Interprétation géométrique des périodes

Les deux périodes classiques T_{cl_i} ont une interprétation géométrique bien précise; considérons pour $E_1 > 0$ et $E_2 > 0$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$:

$$M_{E_1, E_2} := \left\{ (x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^4; p_1(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = E_1 \text{ et } p_2(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = E_2 \right\}$$

$$= p_1^{-1}(E_1) \cap p_1^{-1}(E_2) \subset \mathbb{R}^4;$$

où rappelons le $p_j(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = \omega_j \frac{x_j^2 + \xi_j^2}{2}$. Ainsi M_{E_1, E_2} est isomorphe au tore $\mathcal{T} = \mathcal{T}(E_1, E_2)$ donné par $\mathcal{T} = \sqrt{\frac{2E_1}{\omega_1}} \mathbb{S}^1 \times \sqrt{\frac{2E_2}{\omega_2}} \mathbb{S}^1$.

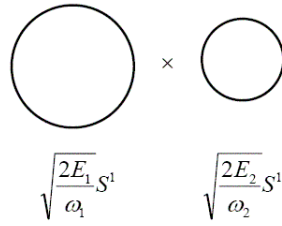


Fig. 25. Les deux générateurs du tore $\mathcal{T}$.

On va calculer le flot hamiltonien de $p = F(p_1, p_2)$ avec un point initial :

$$m_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ \xi_{1,0} \\ \xi_{2,0} \end{pmatrix} \in M_{E_1, E_2}.$$

Les équations de Hamilton sont :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} \left(\omega_1 \frac{x_1^2(t) + \xi_1^2(t)}{2}, \omega_2 \frac{x_2^2(t) + \xi_2^2(t)}{2} \right) \xi_1(t) \omega_1 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} \left(\omega_1 \frac{x_1^2(t) + \xi_1^2(t)}{2}, \omega_2 \frac{x_2^2(t) + \xi_2^2(t)}{2} \right) \xi_2(t) \omega_2 \\ - \frac{\partial F}{\partial X} \left(\omega_1 \frac{x_1^2(t) + \xi_1^2(t)}{2}, \omega_2 \frac{x_2^2(t) + \xi_2^2(t)}{2} \right) x_1(t) \omega_1 \\ - \frac{\partial F}{\partial Y} \left(\omega_1 \frac{x_1^2(t) + \xi_1^2(t)}{2}, \omega_2 \frac{x_2^2(t) + \xi_2^2(t)}{2} \right) x_2(t) \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite comme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p_1 \circ \varphi_t) &= \{p_1, p\} \circ \varphi_t \\ &= \{p_1, F(p_1, p_2)\} \circ \varphi_t = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \frac{\partial F(p_1, p_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial F(p_1, p_2)}{\partial x_1} \\ &= \omega_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial X} \left(\omega_1 \frac{x_1^2 + \xi_1^2}{2}, \omega_2 \frac{x_2^2 + \xi_2^2}{2} \right) \xi_1 - \xi_1 \frac{\partial F}{\partial X} \left(\omega_1 \frac{x_1^2 + \xi_1^2}{2}, \omega_2 \frac{x_2^2 + \xi_2^2}{2} \right) \omega_1 x_1 \\ &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit alors que la fonction $p_1 \circ \varphi_t$ ne dépend pas de t , donc pour tout t nous obtenons

$$\omega_1 \frac{x_1^2(t) + \xi_1^2(t)}{2} = \omega_1 \frac{x_{1,0}^2 + \xi_{1,0}^2}{2} = E_1.$$

De même pour tout t réel on a aussi l'égalité

$$\omega_2 \frac{x_2^2(t) + \xi_2^2(t)}{2} = \omega_2 \frac{x_{2,0}^2 + \xi_{2,0}^2}{2} = E_2.$$

Donc le flot est bien tracé sur le tore $\mathcal{T}$.

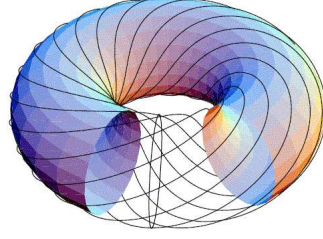


Fig. 26. Le flot hamiltonien sur le tore $\mathcal{T}$.

Par conséquent, en posant

$$a := \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \omega_1, \quad b := \frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \omega_2$$

les équations de Hamilton se réécrivent plus simplement :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \xi_1(t) \\ \beta \xi_2(t) \\ -\alpha x_1(t) \\ -\beta x_2(t) \end{pmatrix};$$

et en posant pour tout indice $j \in \{1, 2\}$, $Z_j(t) := x_j(t) + i\xi_j(t) \in \mathbb{C}$ on a immédiatement les deux égalités $\dot{Z}_1(t) = -iaZ_1(t)$, $\dot{Z}_2(t) = -ibZ_2(t)$. Et par conséquent en intégrant cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 on obtient alors

$$Z_1(t) = Z_1(0)e^{-iat}, \quad Z_2(t) = Z_2(0)e^{-ibt}$$

ainsi que

$$|Z_1(0)|^2 = x_1^2(0) + \xi_1^2(0) = \frac{2E_1}{a}, \quad |Z_2(0)|^2 = x_2^2(0) + \xi_2^2(0) = \frac{2E_2}{b};$$

par conséquent le flot hamiltonien dans le repère (x_1, ξ_1, x_2, ξ_2) est donné par :

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(Z_1(0)) \\ \operatorname{Im}(Z_1(0)) \\ \operatorname{Re}(Z_2(0)) \\ \operatorname{Im}(Z_2(0)) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(Z_1(t)) \\ \operatorname{Im}(Z_1(t)) \\ \operatorname{Re}(Z_2(t)) \\ \operatorname{Im}(Z_2(t)) \end{pmatrix},$$

qui en coordonnées complexe est

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} Z_1(0) \\ Z_2(0) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix}.$$

En coordonnées angulaire le flot s'écrit alors linéairement :

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta_{1,0} - \frac{at}{2\pi} \\ \theta_{2,0} - \frac{bt}{2\pi} \end{pmatrix}$$

avec $\theta_{j,0} \equiv \frac{\arg Z_j(0)}{2\pi} \pmod{1}$.

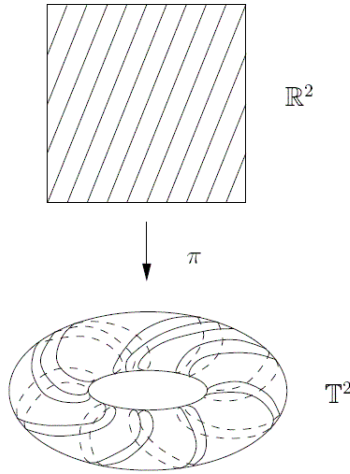


Fig. 27. Le flot hamiltonien tracé sur le tore $\mathcal{T}$ et sur son revêtement universel.

On retrouve alors bien les périodiques classiques du flot hamiltonien φ_t

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \omega_1} = T_{cl_1}, \quad \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \omega_2} = T_{cl_2}.$$

Un résultat classique affirme (voir par exemple [Ar-Av]) que si les deux périodes sont commensurables alors le flot s'enroule périodiquement sur le tore ; si par contre les deux périodes ne sont pas commensurables le flot s'enroule densement sur le tore. Sur la figure suivante on trouve un exemple où le quotient des deux périodes est commensurable : le flot est alors périodique sur le tore.

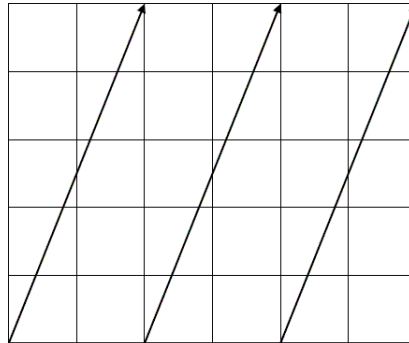


Fig. 28. Le flot hamiltonien tracé sur le tore dans le cas d'une pente rationnelle.

La figure suivante illustre un exemple où le quotient des deux périodes est non-commensurable, c'est à dire non-rationnel : le flot est alors dense sur le tore².

²On parle aussi de quasi-périodicité.

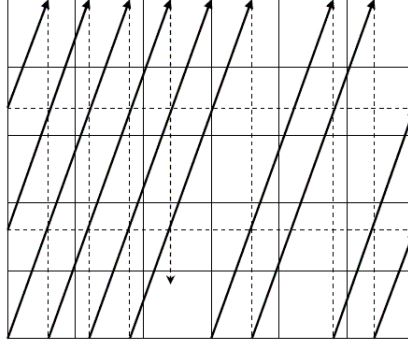


Fig. 29. Le flot hamiltonien tracé sur le tore dans le cas d'une pente irrationnelle.

3.4.1.5 Comportement sur les périodes classiques

Étudions donc la fonction $\mathbf{a}_1(t)$ sur une période $[0, \max T_{cl_i}]$.

Proposition 3.4.7. *Pour tout $t \geq 0$, on a l'égalité :*

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left(l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left(s + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right).$$

Démonstration. L'ingrédient essentiel de la démonstration est la formule sommatoire de Poisson. Pour cela considérons la fonction Ω_t définie par :

$$\Omega_t : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) \mapsto |a_{x_1, x_2}|^2 e^{-2i\pi t \frac{(x_1-n_0)}{T_{cl_1}}} e^{-2i\pi t \frac{(x_2-n_0)}{T_{cl_2}}} \end{cases}$$

où t est un paramètre réel, et a_{x_1, x_2} est, rappelons le, définie par :

$$a_{x_1, x_2} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} h^{\frac{\delta'_1 + \delta'_2 - 2}{2}}} \chi \left(\omega_1 \frac{x - n_0}{h^{\delta'_1 - 1}}, \omega_2 \frac{y - m_0}{h^{\delta'_2 - 1}} \right);$$

et ainsi pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$

$$|a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} = \Omega_t(n, m).$$

Clairement, uniformément par rapport à t , la fonction $\Omega_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Calculons $\mathfrak{F}(\Omega_t)$ sa transformée de Fourier ; on obtient alors que quel que soit $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\mathfrak{F}(\Omega_t)(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_t(x_1, x_2) e^{-2i\pi x_1 \zeta_1} e^{-2i\pi x_2 \zeta_2} dx_1 dx_2;$$

et donc on trouve que que soit $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\mathfrak{F}(\Omega_t)(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{e^{-2i\pi(n_0\zeta_1 + m_0\zeta_2)}}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left(\zeta_1 + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left(\zeta_2 + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right).$$

Maintenant avec l'égalité de Poisson appliquée à la fonction Ω_t on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \Omega_t(n, m) &= \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\Omega_t)(l, s) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left(l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left(s + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne bien l'égalité énoncée dans la proposition . $\square$

On voit tout de suite, compte tenu de la décroissance à l'infini des deux variables de la fonction $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$; que les termes prépondérants dans la série correspondent aux indices l et s tels que $l + \frac{t}{T_{cl_1}}$ ou $s + \frac{t}{T_{cl_2}}$ soient le plus proche de zéro. Précisons cela avec une définition et une proposition.

Définition 3.4.8. Pour tout réel positif t , on définit les entiers $l_i(t) = l_i(t, h)$ comme étant les entiers le plus proche des réels $-\frac{t}{T_{cl_i}}$; on note alors par $d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z})$ la distance entre le réel t et le réseau $T_{cl_i}\mathbb{Z}$:

$$d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z}) = l_i(t) + \frac{t}{T_{cl_i}}.$$

Remarque 3.4.9. Par définition, on a immédiatement que quel que soit $l \in \mathbb{Z}$ tel que $l \neq l_i(t)$ on a la minoration $\left| l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right| \geq \frac{1}{2}$.

On aura besoin du lemme suivant (qui l'analogue en dimension deux du lemme 2.4.10 au chapitre 2) :

Lemme 3.4.10. Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in]0, 1]^2$; alors uniformément pour $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\sum_{l,s \in \mathbb{Z}, |l+u_1| \geq \frac{1}{2}, |s+u_2| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi \left(\frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right| = O(\varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty).$$

Théorème 3.4.11. On a uniformément pour t réel

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) + O(h^\infty). \end{aligned}$$

Démonstration. On va commencer par montrer ce résultat avec la série indexée sur $\mathbb{Z}^2$. Comme $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ on a

$$\forall k, d \in \mathbb{N}^{*2}, \exists B_{k,d} > 0, \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2, \left| \mathfrak{F}(\chi^2)(\zeta_1, \zeta_2) \right| \leq \frac{B_{k,d}}{(1 + |\zeta_1|)^k (1 + |\zeta_2|)^d}.$$

Ensuite, d'après la précédente proposition et le lemme précédent, on a l'égalité, uniforme pour t réel :

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left(l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left(s + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(t, T_{cl_1}\mathbb{Z}), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(t, T_{cl_2}\mathbb{Z}) \right) + O(h^\infty). \end{aligned}$$

Maintenant établissons ce même type de résultat avec la série indexée sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$. Partons simplement de l'égalité

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} - \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) \right| \\ & \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 + O(h^\infty). \end{aligned}$$

Pour finir la preuve il suffit donc de montrer que $\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$. Écrivons alors :

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|^2.$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\omega_1 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}} \right), \omega_2 \left(\frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)h^{\delta'_1+\delta'_2-2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \chi^2 \left(\omega_1 \left(\frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}} \right), \omega_2 \left(\frac{m+m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \right) \\
&\leq \frac{B_{k,q}}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)h^{\delta'_1+\delta'_2-2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} |n-n_0|\right)^k} \right) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \omega_2 h^{1-\delta'_2} |m+m_0|\right)^q} \right).
\end{aligned}$$

Posons :

$$R_h := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} |n-n_0|\right)^k}, \quad S_h := \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \omega_2 h^{1-\delta'_2} |m+m_0|\right)^q}.$$

D'une part nous avons

$$\begin{aligned}
|S_h| &\leq \frac{1}{\omega_2^q} h^{(\delta'_2-1)q} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{|m+m_0|^q} \\
&\leq \frac{1}{\omega_2^q} h^{(\delta'_2-1)q} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(m_0+v)^q} = \frac{1}{\omega_2^q} h^{(\delta'_2-1)q} \frac{1}{(q-1)(m_0)^{q-1}} \\
&\sim \frac{h^{q\delta'_2-1}}{\omega_2(q-1)E_2^{q-1}}
\end{aligned}$$

pour $h \rightarrow 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}
|R_h| &\leq 1 + \sum_{n \neq n_0} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} |n-n_0|\right)^k} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} |n-n_0|\right)^k} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} |n-n_0|\right)^k}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} |n-n_0|\right)^k} &= \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} N\right)^k} \\
&\leq \frac{1}{\omega_1^k} h^{(\delta'_1-1)k} \left(\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{N^k} \right);
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} |n-n_0|\right)^k} &= \sum_{N=1}^{n_0} \frac{1}{\left(1 + \omega_1 h^{1-\delta'_1} N\right)^k} \\
&\leq \sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{\omega_1^k h^{(1-\delta'_1)k} N^k} \leq \frac{1}{\omega_1^k} h^{(\delta'_1-1)k} \left(\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{1}{N^k} \right)
\end{aligned}$$

et ainsi $|R_h| \leq 1 + Mh^{(\delta'_1-1)k}$; où $M > 0$ est une constante indépendante de h .

Par conséquent il existe une constante $C_{k,q} > 0$ indépendante de h telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 \leq C_{k,q} h^{2-\delta'_1-\delta'_2} \left(1 + Mh^{(\delta'_1-1)k} \right) h^{\delta'_2 q-1}$$

$$= C_{k,q} h^{\delta'_2(q-1)+1-\delta'_1} + C_{k,q} M h^{\delta'_2(q-1)+(k-1)(\delta'_1-1)};$$

donc en prenant q assez grand par rapport à k , comme par exemple $q > E \left[\frac{(k-1)(\delta'_2-1)}{\delta'_2} + 1 \right]$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty).$$

De la même façon nous avons

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty), \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$$

par suite $\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$. Ce qui montre le théorème. $\square$

3.4.2 Cas où $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$

On va supposer dans cette sous section que $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$; ainsi $aT_{cl_1} = bT_{cl_2}$. Il existe alors une période commune et le flot hamiltonien est périodique sur le tore.

Définition 3.4.12. Si les deux périodes classiques sont commensurables; la période classique totale du système est définie par $T_{cl} := aT_{cl_1} = bT_{cl_2}$.

Le premier résultat que nous avons expliqué le comportement de la fonction d'auto-corrélation sur une période classique T_{cl} . Dans le théorème suivant on montre que le graphe de la fonction d'auto-corrélation est très "piquée" sur la valeur 1 autour de la période classique.

Théorème 3.4.13. Nous avons :

(i) Pour t tel que $t \in T_{cl}\mathbb{N}$ (i.e pour tout $i \in \{1, 2\}$, $d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z}) = 0$) :

$$\mathbf{a}_1(t) = 1.$$

(ii) Si il existe un indice $i \in \{1, 2\}$ tel que $d(T_{cl_i}\mathbb{Z}, t) > h^{1-\delta'_i}$ alors :

$$\mathbf{a}_1(t) = O(h^\infty).$$

Démonstration. Le premier point (i) est immédiat. Démontrons le second point : en partant de l'égalité donnée par le précédent théorème :

$$\mathbf{a}_1(t) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) + O(h^\infty);$$

et en utilisant toujours le fait que la fonction $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ on a une inégalité du type

$$\forall q \in \mathbb{N}, \exists D_q > 0, \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2, \left| \mathfrak{F}(\chi^2)(\zeta_1, \zeta_2) \right| \leq \frac{D_q}{(1 + |\zeta_1| + |\zeta_2|)^q}$$

et ainsi

$$\left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) \right| \leq \frac{D_q}{\left(1 + \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t) + \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right)^q}.$$

Par conséquent s'il existe un indice $i \in \{1, 2\}$ tel que $d(T_{cl_i}\mathbb{Z}, t) > \omega_i h^{1-\delta'_i}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ de sorte que $d(T_{cl_i}\mathbb{Z}, t) \geq \omega_i h^{1-\delta'_i-\varepsilon}$ et ainsi nous avons pour tout $q \in \mathbb{N}$ l'inégalité suivante :

$$\left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) \right| \leq D_q h^{\varepsilon q}.$$

Par conséquent, comme ceci est vrai pour tout entier $q \in \mathbb{N}$ on en déduit que

$$\mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) = O(h^\infty).$$

□

3.4.3 Cas où $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} = \frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$

Le cas où le réel $\frac{b}{a} = \frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}}$ n'est plus une fraction rationnelle est beaucoup plus délicat, en effet il n'existe plus de période classique commune. Le flot hamiltonien est lui dense sur le tore. Le théorème 3.4.11 nous indique que le comportement à l'ordre 1 de la fonction d'auto-corrélation est donné par la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right).$$

Pour comprendre cette fonction il faut donc analyser l'évolution des distances entre la demi-droite (OM_t) où $O := (0,0)$, $M_t := (t,t)$ et les réseaux $T_{cl_1}\mathbb{Z}$, $T_{cl_2}\mathbb{Z}$ en fonction du temps t et du nombre $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} = \frac{b}{a}$. On va donc débiter cette sous-section par des résultats géométriques, puis on reviendra à l'étude de la fonction d'auto-corrélation $\mathbf{a}_1(t)$.

3.4.3.1 Généralités

Dans le cas où $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} = \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, le flot classique sur le tore n'est pas périodique, mais il est dense sur le tore $\mathcal{T}$. On a vu qu'en coordonnées angulaires le flot hamiltonien est donné par

$$\varphi_t : \begin{cases} [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^2 \\ \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{at}{2\pi} + \theta_{1,0} \\ -\frac{bt}{2\pi} + \theta_{2,0} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Sans perdre de généralité on va supposer que la condition initiale est $\begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que $a, b < 0$. En posant $\mathbf{a} := -\frac{a}{2\pi} > 0$ et $\mathbf{b} := -\frac{b}{2\pi} > 0$, le flot hamiltonien s'écrit alors plus simplement

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} \mathbf{a}t \\ \mathbf{b}t \end{pmatrix}.$$

Rappelons aussi que $T_{cl_1} = \left| \frac{2\pi}{a} \right| = \left| \frac{1}{\mathbf{a}} \right|$ et $T_{cl_2} = \left| \frac{2\pi}{b} \right| = \left| \frac{1}{\mathbf{b}} \right|$. La compréhension de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right)$$

passé donc par l'étude de l'évolution de la distance $d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2)$ en fonction du temps t et du nombre $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$. Commençons tout de suite par une première estimation de la distance entre le point du flot φ_t et l'ensemble $\mathbb{Z}_*^2$:

Proposition 3.4.14. *Pour tout $T > 0$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $C_T > 0$ tel que pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ et quel que soit $t \in]0, T]$*

$$\|(ne_1 + me_2) - (\mathbf{a}t, \mathbf{b}t)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{C_T}{T};$$

où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(ii) *Il existe $K_T > 0$ tel que pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ avec $|n| \leq \mathbf{a}T$; $|m| \leq \mathbf{b}T$*

$$\left| \frac{n}{\mathbf{a}} - \frac{m}{\mathbf{b}} \right| = \left| \frac{2\pi n}{a} - \frac{2\pi m}{b} \right| \geq \frac{K_T}{T}.$$

Cette proposition affirme que si on suppose qu'à un temps T fixé, la distance entre la partie du flot $\{\varphi_t\}_{t \in [0, T]}$ et l'ensemble $\mathbb{Z}_*^2$ est minorée par un coefficient de l'ordre de $1/T$; alors la distance entre les deux périodes classiques T_{cl_i} est aussi minorée par un coefficient de l'ordre de $1/T$; et réciproquement.

Démonstration. Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii) : supposons qu'il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ et quel que soit $t \in]0, T]$

$$\|(ne_1 + me_2) - (\mathbf{a}t, \mathbf{b}t)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{C_T}{T}$$

alors (comme les normes $\|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2}$ et $|x| + |y|$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$) il existe une constante $D_T > 0$ telle que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ et quel que soit $t \in]0, T]$

$$|n - \mathbf{a}t| + |m - \mathbf{b}t| \geq \frac{D_T}{T}.$$

D'une part en prenant $t = \frac{m}{\mathbf{b}}$ (avec donc $m \leq T\mathbf{b}$) on obtient

$$|n\mathbf{b} - m\mathbf{a}| \geq \frac{\mathbf{b}D_T}{T}$$

d'autre part en prenant $t = \frac{n}{a}$ (avec donc $n \leq Ta$) on obtient

$$|ma - nb| \geq \frac{aD_T}{T}$$

d'où en posant $E_T := \min(a, b)D_T$, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ vérifiant $|n| \leq aT$ et $|m| \leq bT$ nous obtenons

$$|nb - ma| \geq \frac{E_T}{T}$$

i.e.

$$\left| \frac{n}{a} - \frac{m}{b} \right| \geq \frac{E_T}{abT}$$

ainsi avec $K_T := \frac{E_T}{ab}$, on a bien pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ vérifiant $|n| \leq aT$ et $|m| \leq bT$ l'inégalité

$$\left| \frac{n}{a} - \frac{m}{b} \right| \geq \frac{K_T}{T}.$$

Réciproquement, montrons maintenant que $(ii) \Rightarrow (i)$: s'il existe une constante $K_T > 0$ telle que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ vérifiant $|n| \leq aT$ et $|m| \leq bT$ on ait

$$\left| \frac{n}{a} - \frac{m}{b} \right| \geq \frac{K_T}{T},$$

alors pour tout réel positif ou nul t on a aussi par inégalité triangulaire

$$\left| \frac{n}{a} - t \right| + \left| \frac{m}{b} - t \right| \geq \frac{K_T}{T}$$

d'où

$$|n - at| + |m - bt| \geq \frac{K_T \min(a, b)}{T};$$

et donc, (comme les normes $\|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2}$ et $|x| + |y|$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$) il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$ tel que $|n| \leq aT$ et $|m| \leq bT$ on ait

$$\|(ne_1 + me_2) - (at, bt)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{C_T}{T}.$$

□

3.4.3.2 Cas où $\frac{b}{a}$ vérifie une condition diophantienne

Quelques rappels

Au milieu du XIXème siècle, J. Liouville a démontré le

Théorème 3.4.15. (Liouville). Soit θ un nombre irrationnel algébrique réel de degré $d \geq 2$. Il existe une constante $C = C(\theta) > 0$ tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ on ait

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}.$$

En d'autres termes, un nombre algébrique ne s'approche pas bien par les rationnels. Vers le milieu du XX^{ème} siècle, K. F. Roth a considérablement amélioré ce résultats (ce qui lui a valu la médaille Field en 1958).

Définition 3.4.16. On dit qu'un nombre θ irrationnel vérifie une condition diophantienne d'ordre ε si et seulement si il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}.$$

On note par $\mathcal{C}_\varepsilon$ l'ensemble des nombres θ irrationnels qui vérifie une condition diophantienne d'ordre ε . On dit qu'un nombre θ irrationnel est un nombre de Roth si et seulement si $\theta \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}_\varepsilon$; i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0; \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Il y a beaucoup d'exemple de nombre de Roth, par exemple :

Théorème 3.4.17. (Thue-Siegel-Roth). *Tout nombre irrationnel algébrique réel de degré $d \geq 2$ est de Roth.*

Il est aussi connu que (voir par exemple [Cas]) :

Théorème 3.4.18. *La mesure de Lebesgue des nombres de Roth est pleine.*

Remarque 3.4.19. Si un nombre θ est un nombre ε -diophantien alors comme $\left| \theta - \frac{p}{1} \right| \geq C_\varepsilon$ et que $|\theta - p| \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ on en déduit alors que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $0 < C_\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

Estimation de la distance $d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2)$

On va maintenant estimer la distance euclidienne entre la partie du flot $\{\varphi_t\}_{t \in [0, T]}$ et l'ensemble $\mathbb{Z}_*^2$.

Notation 3.4.20. Notons par Δ et Γ les deux droites vectorielles orthogonales

$$\Delta := \text{Vect}(\mathbf{a}e_1 + \mathbf{b}e_2), \Gamma := \text{Vect}(-\mathbf{b}e_1 + \mathbf{a}e_2)$$

où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons aussi π_Δ le projecteur orthogonal sur la droite Δ et π_Γ le projecteur orthogonal sur la droite Γ .

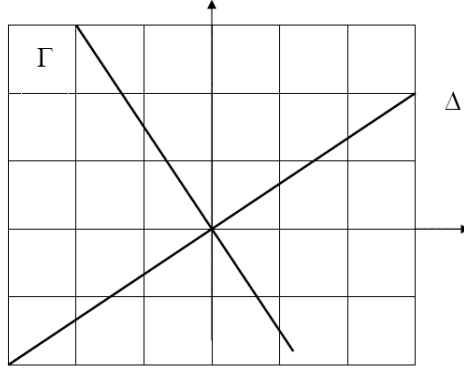


Fig. 30. Les deux droites orthogonales Δ et Γ .

Par la suite on suppose que $\theta = \frac{b}{a}$ est un nombre de Roth.

Lemme 3.4.21. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon > 0$ telle que $K_\varepsilon \leq C_\varepsilon$ où C_ε est la constante de Roth du nombre $\theta = \frac{b}{a}$; telle que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$

$$\|\pi_\Delta(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{K_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}; \quad \|\pi_\Gamma(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{K_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}.$$

Démonstration. En notant par

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

le vecteur directeur normé de la droite Δ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\pi_\Delta(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} &= |\langle u, ne_1 + me_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}| \\ &= |nu_1 + mu_2| = |u_1| |n + m\theta|; \end{aligned}$$

comme θ est un nombre de Roth, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|\pi_\Delta(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} &\geq |u_1| \frac{C_\varepsilon}{|m|^{1+\varepsilon}} \\ &\geq \frac{|u_1| C_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

De la même façon nous avons

$$\|\pi_\Gamma(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq |u_2| \frac{C_\varepsilon}{|n|^{1+\varepsilon}} \geq \frac{|u_2| C_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}};$$

ainsi en posant $K_\varepsilon := \min(|u_1| C_\varepsilon, |u_2| C_\varepsilon) \leq C_\varepsilon$ on a bien

$$\|\pi_\Delta(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{K_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}; \quad \|\pi_\Gamma(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{K_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}.$$

Ce qui montre le lemme. $\square$

De ce lemme on en déduit le :

Théorème 3.4.22. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $K_\varepsilon \leq C_\varepsilon$ où C_ε est la constante de Roth du nombre $\theta = \frac{b}{a}$; telle que pour tout $t \geq 0$*

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \geq \frac{K_\varepsilon}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^{1+\varepsilon}}.$$

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, le point $\varphi_t \in \Delta$; il existe donc un couple $(n_t, m_t) \in \mathbb{Z}_*^2$ tel que

$$\begin{aligned} d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) &= \left\| \overrightarrow{O\varphi_t} - (n_te_1 + m_te_2) \right\|_{\mathbb{R}^2} \\ &\geq \|\pi_\Gamma(n_te_1 + m_te_2)\|_{\mathbb{R}^2}; \end{aligned}$$

et avec le lemme précédent on en déduit alors

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \geq \frac{K_\varepsilon}{\|n_te_1 + m_te_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}.$$

Par ailleurs, nous avons la majoration

$$\left\| \overrightarrow{O\varphi_t} - (n_te_1 + m_te_2) \right\|_{\mathbb{R}^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et par l'inégalité triangulaire renversée on obtient

$$\|n_te_1 + m_te_2\|_{\mathbb{R}^2} \leq \left\| \overrightarrow{O\varphi_t} \right\|_{\mathbb{R}^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où, comme $\left\| \overrightarrow{O\varphi_t} \right\|_{\mathbb{R}^2} = t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ pour tout $t \geq 0$ et quel que soit $\varepsilon > 0$ nous avons

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \geq \frac{K_\varepsilon}{\left(t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1+\varepsilon}}.$$

□

Corollaire 3.4.23. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et quel que soit $\eta \in \left]0, \frac{\sqrt{2}^{1+\varepsilon}}{2}\right[\subset \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ nous avons l'implication suivante :*

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) < \eta \Rightarrow t > \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left(\left(\frac{K_\varepsilon}{\eta} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Démonstration. Supposons que $d(\varphi_t(0), \mathbb{Z}_*^2) < \eta$, ainsi par le précédent théorème pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $K_\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ telle que

$$\frac{K_\varepsilon}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^{1+\varepsilon}} < \eta$$

i.e.

$$\left(\frac{K_\varepsilon}{\eta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < \frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$$

et par conséquent on en déduit l'inégalité souhaitée :

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left(\left(\frac{K_\varepsilon}{\eta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) < t.$$

□

Remarque 3.4.24. Comme $\eta \in \left]0, \frac{\sqrt{2}^{1+\varepsilon}}{2}\right[\subset \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ on a $\left(\frac{K_\varepsilon}{\eta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Notation 3.4.25. Pour $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, on note :

$$t_\eta(\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left(\left(\frac{K_\varepsilon}{\eta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Théorème 3.4.26. Pour tout $\varepsilon > 0$ et quel que soit $\eta \in \left]0, \frac{\sqrt{2}^{1+\varepsilon}}{2}\right[$ avec η assez petit pour que $t_\eta(\varepsilon) \geq \max T_{cl_i}$; pour tout entier $k \geq 1$ il existe une constante $D_k > 0$ telle que pour tout $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$ on ait uniformément

$$|\mathbf{a}_1(t)| \leq D_k h^{k(1-\max \delta'_i)} \eta^{-k}.$$

Démonstration. Par définition de $d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z})$, on a la simple relation valide pour tout $t \geq \max T_{cl_i} > 0$

$$d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z}) = d(t, T_{cl_i}\mathbb{N}^*),$$

puis comme $T_{cl_1} = \left|\frac{1}{\mathbf{a}}\right|$ et $T_{cl_2} = \left|\frac{1}{\mathbf{b}}\right|$ on a

$$d(t, T_{cl_1}\mathbb{Z}) = d(\mathbf{a}t, \mathbb{N}^*), \quad d(t, T_{cl_2}\mathbb{Z}) = d(\mathbf{b}t, \mathbb{N}^*).$$

Ainsi par contraposée du précédent corollaire nous obtenons que pour tout $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$

$$d((\mathbf{a}t, \mathbf{b}t), \mathbb{Z}_*^2) \geq \eta;$$

ce qui implique (comme les normes $\|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2}$ et $|x| + |y|$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$) l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$

$$d(t, T_{cl_1}\mathbb{Z}) + d(t, T_{cl_2}\mathbb{Z}) \geq C\eta.$$

Puis comme la fonction $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\forall k \in \mathbb{N}^2, \exists M_k > 0, \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2, \left| \mathfrak{F}(\chi^2)(\zeta_1, \zeta_2) \right| \leq \frac{M_k}{(|\zeta_1| + |\zeta_2|)^k};$$

d'où pour tout $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$

$$\left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(t, T_{cl_1}\mathbb{Z}), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(t, T_{cl_2}\mathbb{Z}) \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M_k}{\left(\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(t, T_{cl_1}\mathbb{Z}) + \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(t, T_{cl_2}\mathbb{Z}) \right)^k} \\
&\leq \frac{\max(\omega_i)^k M_k}{h^{k \max(\delta'_i)-k} (d(t, T_{cl_1}\mathbb{Z}) + d(t, T_{cl_2}\mathbb{Z}))^k} \\
&\leq \frac{\max(\omega_i)^k M_k}{h^{k \max(\delta'_i)-k}} \frac{1}{C^k \eta^k} = \max(\omega_i) \frac{M^k}{C^k} h^{k(1-\max(\delta'_i))} \eta^{-k};
\end{aligned}$$

d'où le théorème énoncé. $\square$

Puis en appliquant ce théorème avec $\eta = h^s$, où s est un réel de $]0, 1 - \max \delta'_i[$ on obtient immédiatement le :

Corollaire 3.4.27. *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $s \in]0, 1 - \max \delta'_i[$ et pour h assez petit tel que $t_{h^s}(\varepsilon) \geq \max T_{cl_i}$; alors uniformément pour tout $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$ nous avons*

$$\mathbf{a}_1(t) = O(h^\infty).$$

Remarques sur les échelles de temps

Pour que le précédent lemme ait un intérêt il faut vérifier que pour tout $\varepsilon \geq 0$

$$t_{h^s}(\varepsilon) \leq h^\alpha$$

où on rappelle que $\alpha > 1 - 2 \min(\delta_i)$.

Proposition 3.4.28. *En supposant que $\min \delta_i > \frac{2}{3}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $s \in]0, 1 - \max \delta'_i[$ on a*

$$t_{h^s}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left(h^{1-2\min \delta_i} - \sqrt{2} \right).$$

Démonstration. D'une part pour tout $s > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ comme

$$t_{h^s}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left((K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} h^{-\frac{s}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

pour $h \rightarrow 0$ on a donc l'équivalence $t_{h^s} \sim D_\varepsilon h^{-\frac{s}{1+\varepsilon}}$ où $D_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} (K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} > 0$. D'autre part pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$1 - 2\min \delta_i \leq \frac{\max \delta'_i - 1}{1 + \varepsilon},$$

en effet en posant $\phi(\varepsilon) := (1 + \varepsilon) \left(1 - 2\min \delta_i - \frac{\max \delta'_i - 1}{1 + \varepsilon} \right)$ de sorte que $1 - 2\min \delta_i - \frac{\max \delta'_i - 1}{1 + \varepsilon} = \frac{\phi(\varepsilon)}{1 + \varepsilon}$. On note que la fonction $\varepsilon \mapsto \phi(\varepsilon)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi pour tout $\varepsilon \geq 0$

$$\phi(\varepsilon) \leq \phi(0) = 2 - 2\min(\delta_i) - \max(\delta'_i) \leq 2 - 3\min(\delta_i) \leq 0$$

donc pour tout $\varepsilon \geq 0$, $\phi(\varepsilon) \leq 0$ et ainsi

$$1 - 2\min \delta_i \leq \frac{\max \delta'_i - 1}{1 + \varepsilon}.$$

Par suite

$$h^{\frac{\max \delta'_i - 1}{1 + \varepsilon}} \leq h^{1 - 2\min \delta_i}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} t_{hs}(\varepsilon) &\leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left((K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} h^{\frac{\max \delta'_i - 1}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left((K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} h^{1-2\min \delta_i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left(\frac{1}{2} h^{1-2\min \delta_i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

□

3.4.3.3 Utilisation des fractions continues

On peut se demander quels sont les temps précis où $d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) < \eta$? Pour répondre à cette problématique on va utiliser les fractions continues.

Quelques rappels

Les fractions continues sont surtout utilisées pour l'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels. Il existe deux types de fractions continues : les fractions continues finies qui représentent les nombres rationnels et les infinies qui représentent eux les irrationnels. Pour tout nombre réel irrationnel θ il existe une suite de couple $(q_n, p_n) \in \mathbb{N}^2$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Cette suite est donnée par l'algorithme des fractions continues (voir [Ro-Sz], [Khl]). Géométriquement, le principe de construction de cette suite est le suivant (voir [Arn2]) : on pose $v_0 := (0, 1)$ et $v_{-1} := (1, 0)$. Il est clair que ces deux points se situent d'une part et d'autre de la droite d'équation $y = \theta x$. Par récurrence : supposons construits les vecteurs v_{k-1} et v_k alors pour construire le vecteur v_{k+1} on ajoute à v_{k-1} autant de fois que nécessaire le vecteur v_k pour que le nouveau vecteur v_{k+1} se situe du même côté de la droite d'équation $y = \theta x$ que v_{k-1} :

$$v_{k+1} = a_k v_k + v_{k-1}$$

i.e

$$\begin{cases} q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1} \\ p_{k+1} = a_k p_k + p_{k-1} \end{cases}$$

où $(a_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'entiers strictement positifs.

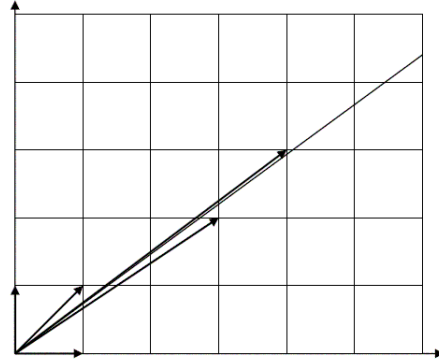


Fig. 31. L'algorithme des fractions continues ; en gras quelques vecteurs v_k .

De là on en déduit en particulier que la suite $(q_n)_n$ est strictement croissante. Avec la notation standard des fractions continues

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

on a (voir par exemple [Khi]) la relation usuelle entre la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ et la suite $(a_n)_n$:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Exemple 3.4.29. Le nombre π s'écrit : $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1 \dots]$.

Temps d'approche

Notons par D la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x = \theta x$. Ainsi pour tout $t \geq 0$;

$$[O\varphi_t] \subset D.$$

Pour $n \geq 0$ fixé on va déterminer le point de la droite D qui réalise la distance entre D et le point $(q_n, p_n) \in \mathbb{N}^2$; ce qui revient à trouver le temps τ_n tel que $d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) = d(D, (q_n, p_n))$.

Proposition 3.4.30. Pour tout $n \geq 1$; l'unique $\tau_n \geq 0$ tel que $d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) = d(D, (q_n, p_n))$ est donné par

$$\tau_n = \frac{aq_n + bp_n}{a^2 + b^2}.$$

De plus nous avons

$$d(\varphi_{\tau_n}, \mathbb{Z}_*^2) \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{1}{q_n} < \frac{1}{q_n}.$$

Démonstration. Pour n fixé non nul, on va chercher $t \geq 0$ tel que $d(\varphi_t, (q_n, p_n)) = d(D, (q_n, p_n))$. Il faut donc trouver $t \geq 0$ tel que :

$$\overrightarrow{O\varphi_t} \perp ((q_n e_1 + p_n e_2) - \overrightarrow{O\varphi_t})$$

ie : il faut donc trouver $t \geq 0$ tel que :

$$\left\langle \overrightarrow{O\varphi_t}, (q_n e_1 + p_n e_2) - \overrightarrow{O\varphi_t} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0.$$

On doit donc résoudre $\mathbf{a}t(q_n - \mathbf{a}t) + \mathbf{b}t(p_n - \mathbf{b}t) = 0$. On trouve comme solution non nulle

$$t = \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}.$$

Et ainsi à $t = \tau_n := \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ on obtient

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) &= d\left(\left(\frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}, \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}q_n + \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right), (q_n, p_n)\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b}p_n - \mathbf{a}^2 q_n - \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}q_n + \mathbf{b}^2 p_n - \mathbf{a}^2 p_n - \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\mathbf{b}^2 (\mathbf{a}p_n - \mathbf{b}q_n)^2 + \mathbf{a}^2 (\mathbf{b}q_n - \mathbf{a}p_n)^2}. \end{aligned}$$

Or comme pour tout entier n on a $\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$, c'est-à-dire pour tout entier n

$$|q_n \mathbf{b} - p_n \mathbf{a}| \leq \frac{\mathbf{a}}{q_n};$$

on en déduit donc l'inégalité valide quel que soit n

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) &\leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\mathbf{b}^2 \frac{\mathbf{a}^2}{q_n^2} + \mathbf{a}^2 \frac{\mathbf{a}^2}{q_n^2}} \\ &\leq \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \frac{1}{q_n} < \frac{1}{q_n}. \end{aligned}$$

Pour conclure il suffit de noter que pour tout entier n on a $d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) \geq d(\varphi_{\tau_n}, \mathbb{Z}_*^2)$. $\square$

Généralisons un peu ce résultat en regardant comme évolue la distance entre l'ensemble $\mathbb{Z}_*^2$ et la partie du flot φ_t lorsque t est dans un voisinage de τ_n .

Notation 3.4.31. Pour tout réel $r > 0$, on note par $I(r)$ la boule fermée de centre τ_n et de rayon $r > 0$:

$$I(r) := \left[\frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} - r, \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + r \right].$$

Proposition 3.4.32. Pour tout réel $r > 0$; quel que soit $t \in I(r)$

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\left(\left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{q_n}\right) + r\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}^2}{q_n} + r\mathbf{b}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)\right)^2}.$$

Démonstration. Partons de l'inégalité vraie pour tout réel $t \geq 0$.

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \leq d(\varphi_t, (q_n, p_n)).$$

Ensuite pour tout $t \in I(r)$ on a très clairement que

$$\varphi_t \in B_{\mathbb{R}}\left(\frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}, r\mathbf{a}\right) \times B_{\mathbb{R}}\left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}q_n + \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}, r\mathbf{b}\right)$$

où $B_{\mathbb{R}}(X, R) := [X - R, X + R]$. Par conséquent

$$\begin{aligned} & d(\varphi_t, (q_n, p_n)) \\ & \leq \sqrt{\left(\frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + r\mathbf{a} - q_n\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}q_n + \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + r\mathbf{b} - p_n\right)^2} \\ & = \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{(\mathbf{a}\mathbf{b}p_n - \mathbf{b}^2 q_n + r\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2))^2 + (\mathbf{a}\mathbf{b}q_n - \mathbf{a}^2 p_n + r\mathbf{b}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2))^2} \\ & \leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\left(\left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{q_n}\right) + r\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}^2}{q_n} + r\mathbf{b}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)\right)^2}. \end{aligned}$$

Ce qui montre l'inégalité proposée. $\square$

Remarque 3.4.33. Pour $r = 0$ on obtient

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\left(\left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{q_n}\right)\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}^2}{q_n}\right)^2} \leq \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \frac{1}{q_n}$$

et on retrouve bien le résultat de la précédente proposition.

On va maintenant donner un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ du réel τ_n :

Proposition 3.4.34. Pour $n \rightarrow \infty$ on a l'équivalent $\tau_n \sim \Omega q_n$ où on a posé $\Omega := \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} > 0$.

Démonstration. Écrivons le quotient τ_n sur Ωq_n :

$$\frac{\tau_n}{\Omega q_n} = \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{q_n(\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta)} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta} + \frac{\mathbf{b}p_n}{q_n(\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta)}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n}{\Omega q_n} = 1$. $\square$

Revenons maintenant à la fonction d'auto-corrélation $\mathbf{a}_1$.

Notation 3.4.35. Pour $\mu > 0$ fixé, on note par $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h(\theta, \mu)$ l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A}_h := \left\{ q_n \in \mathbb{N}, q_n \in \left[h^{\min \delta'_i - 1 + \mu}, h^{1 - 2 \min \delta_i - \mu} \right] \right\}.$$

Remarque 3.4.36. Pour $\mu > 0$ on a $\left[h^{\min \delta'_i - 1 - \mu}, h^{1 - 2 \min \delta_i + \mu} \right] \subset \left[h^{\min \delta'_i - 1}, h^{1 - 2 \min \delta_i} \right]$.

Théorème 3.4.37. Supposons que $\mathcal{A}_h \neq \emptyset$, alors

$$\sup_{n \in \{m \in \mathbb{N}, q_m(\theta) \in \mathcal{A}_h\}} |\mathbf{a}_1(\tau_n) - 1| = O(h^\mu).$$

Démonstration. Appliquons pour commencer la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 1 sur la fonction $(x, y) \mapsto \mathfrak{F}(\chi^2)(x, y)$ autour de l'origine : pour tout réel $t \geq 0$ il existe un réel $\rho = \rho(t, h, T_{cl_1}, T_{cl_2}) \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) &= \mathfrak{F}(\chi^2)(0, 0) \\ &- \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial x} \left(\rho \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), \rho \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) \\ &- \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial y} \left(\rho \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), \rho \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right). \end{aligned}$$

Nous venons de voir que pour tout entier $n \geq 1$ la distance entre la partie du flot φ_{τ_n} et l'ensemble $\mathbb{Z}_*^2$ est strictement plus petite que $\frac{1}{q_n}$. Ainsi si on suppose qu'à partir d'un certain rang la suite $\left(\frac{1}{q_n}\right)_n$ devient très petite, disons que pour tout $n \geq N$ on ait

$$\frac{1}{q_n} < h^s$$

avec $s > 0$. Alors dans ce cas là nous obtenons la majoration

$$d(\varphi_{\tau_n}, \mathbb{Z}_*^2) \leq h^s;$$

et par conséquent pour tout indice $i \in \{1, 2\}$ on a aussi

$$d(\tau_n, T_{cl_i}\mathbb{Z}) \leq h^s.$$

Par conséquent, pour tout indice $i \in \{1, 2\}$ nous avons

$$h^{\delta'_i-1} d(\tau_n, T_{cl_i}\mathbb{Z}) \leq h^{\delta'_i-1+s}$$

et comme on suppose que $s \geq -\min \delta'_i + 1 + \mu$ avec $\mu > 0$

$$h^{\delta'_i-1} d(\tau_n, T_{cl_i}\mathbb{Z}) \leq h^\mu;$$

et comme pour h assez petit

$$\begin{aligned} \left| \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial x} \left(\rho \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n), \rho \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t\tau_n) \right) \right| &\leq Mh^\mu, \\ \left| \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial y} \left(\rho \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n), \rho \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t\tau_n) \right) \right| &\leq Nh^\mu; \end{aligned}$$

où M, M' sont des constantes positives indépendantes de h . Ainsi avec la formule de Taylor précédemment écrite on a immédiatement

$$\sup_{n \in \{m \in \mathbb{N}, q_m(\theta) \in \mathcal{A}_h\}} |\mathbf{a}_1(\tau_n) - 1| = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0, 0)}$$

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \{m \in \mathbb{N}, q_m(\theta) \in \mathcal{A}_h\}} & \left| \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1} \mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial x} \left(\rho \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1} \mathbb{Z}, \tau_n), \rho \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2} \mathbb{Z}, \tau_n) \right) \right. \\ & \left. \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2} \mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial y} \left(\rho \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1} \mathbb{Z}, \tau_n), \rho \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2} \mathbb{Z}, \tau_n) \right) \right| \\ & \leq h^\mu M. \end{aligned}$$

□

3.4.4 Comptage de la suite $(q_n(\theta))_n$

Généralités

Au vu du précédent théorème il est intéressant de déterminer la cardinalité de l'ensemble $\mathcal{A}_h$. Comme la suite $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

$$\text{card} \{ \mathcal{A}_h \} = \text{card} \{ n \in \mathbb{N}, q_n(\theta) \in \mathcal{A}_h \}.$$

Commençons par une minoration simple de $\text{card} \{ \mathcal{A}_h \}$:

$$\text{card} \{ \mathcal{A}_h \} \leq \text{card} \left\{ \mathbb{N} \cap \left[h^{\min \delta'_i-1-\mu}, h^{1-2 \min \delta_i+\mu} \right] \right\} \leq E[\delta(h)] + 1$$

où $\delta(h) := h^{1-2 \min \delta_i+\mu} - h^{\min \delta'_i-1-\mu}$. On a alors que pour $h \rightarrow 0$ l'équivalence $\delta(h) \sim h^{1-2 \min \delta_i+\mu}$. Pour minimiser $\text{card} \{ \mathcal{A}_h \}$ c'est beaucoup plus dur ; cependant il est clair que pour tout $n^* > 1$, il existe $h^* \in]0, 1[$ tel que :

$$\left[h^{\min \delta'_i-1-\mu}, h^{1-2 \min \delta_i+\mu} \right] \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} q_n(\theta) \right) = \{ q_{n^*}(\theta) \}.$$

Pour pouvoir estimer l'entier $\text{card} \{ \mathcal{A}_h \}$ il faut connaître la distribution des $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ sur la droite des réels (en particulier sur le compact $\left[h^{\min \delta'_i-1-\mu}, h^{1-2 \min \delta_i+\mu} \right]$) en fonction du nombre θ . Essayons de donner quelques exemples de distribution de $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Un exemple : le nombre d'or

Le nombre d'or est le nombre l'unique racine réelle de $X^2 - X - 1 = 0$, c'est à dire $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La fraction continue approximant le nombre d'or possède systématiquement la plus petite valeur possible pour chacun des coefficients, à savoir 1 :

$$\varphi = [1, 1, \dots, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

En conséquence le nombre d'or est l'irrationnel qui s'approche le plus mal par des rationnels. Une autre particularité de ce nombre est que la suite des dénominateurs q_n de l'algorithme des fractions continues est égale à la suite de Fibonacci F_n :

$$F_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Notons bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{F}_{n+1}}{\mathbb{F}_n} = \varphi.$$

Ensuite pour $n \rightarrow +\infty$ on a aussi :

$$\mathbb{F}_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Proposition 3.4.38. *En notant par $q_n(x)$ le n -ème dénominateur de l'algorithme des fractions continues de x ; pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ nous avons pour tout $n \geq 0$*

$$q_n(\theta) \geq \mathbb{F}_n.$$

Démonstration. On va démontrer cette proposition par récurrence. Au rang $n = 0$ on a $q_0(\theta) = 1 \geq \mathbb{F}_0$. Ensuite supposons la relation vraie au rang n ; alors comme $q_{n+1}(\theta) = a_n q_n(\theta) + q_{n-1}(\theta)$ avec $a_n \geq 1$ on a alors $q_{n+1}(\theta) \geq q_n(\theta) + q_{n-1}(\theta) \geq \mathbb{F}_n + \mathbb{F}_{n-1}$ et par définition même de la suite de Fibonacci : $\mathbb{F}_{n+1} = \mathbb{F}_n + \mathbb{F}_{n-1}$; ainsi on vient de montrer exactement que $q_{n+1}(\theta) \geq \mathbb{F}_{n+1}$. $\square$

Cas général

Dans le cas général où θ est un irrationnel quelconque on dispose du théorème d'arithmétique analytique suivant (voir par exemple [Ro-Sz]) :

Théorème 3.4.39. (Khinchine-Lévy, 1952). *Pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$; nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(\theta)^{\frac{1}{n}} = K$$

où K est la constante de Khinchine-Lévy $K := e^{\frac{\pi}{12 \ln(2)}} > 1$.

Ainsi, par exemple, à partir d'un certain rang on a :

$$\left(\frac{1}{2} K \right)^n \leq q_n(\theta) \leq \left(\frac{3}{2} K \right)^n.$$

L'étude de la distribution des suites géométriques $\left(\left(\frac{1}{2} K \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\left(\frac{3}{2} K \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le compact $\left[h^{\min \delta_i' - 1 - \mu}, h^{1 - 2 \min \delta_i + \mu} \right]$ est assez simple à faire ; malheureusement ceci ne fournit pas beaucoup d'informations exactes sur la distribution de la suite $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Question ouverte

Connaît t'on la distribution des dénominateurs $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ sur les réels en fonction de θ ; plus précisément pour un compact non vide fixé de $\mathbb{R}_+^*$ est t'il possible d'estimer le nombre d'éléments de la suite $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ dans ce compact en fonction du réel θ et du diamètre de ce compact ?

3.5 Étude à l'ordre 2

Hypothèses 3.5.1. Dans cette section on supposera que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \neq 0, \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(E_1, E_2) \neq 0, \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(E_1, E_2) \neq 0.$$

L'approximation à l'ordre deux de la fonction d'auto-corrélation fait apparaître trois nouvelles quantités : les périodes de renaissances.

3.5.1 Périodes de renaissances

Définition 3.5.2. On définit les périodes de renaissances semi-classiques T_{sren_1} , T_{sren_2} et $T_{sren_{12}}$ du système par :

$$T_{sren_1} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1^2}; T_{sren_2} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_2^2};$$

$$T_{sren_{12}} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1 \omega_2}.$$

De sorte que :

Proposition 3.5.3. Soit β un réel vérifiant l'inégalité : $\beta > 1 - 3 \min \delta_i$. On a alors uniformément pour tout $t \in [0, h^\beta]$:

$$e^{+itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \mathbf{r}(t)$$

$$= \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)}$$

$$+ O\left(h^{\beta+3 \min \delta_i - 1}\right).$$

Démonstration. Le principe de la démonstration est le même que dans la preuve de la proposition 3.4.3. Ici il faut par contre écrire une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 : pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, il existe $\rho = \rho(n, m, n_0, m_0) \in]0, 1[$ tel que

$$F(\tau_n, \mu_m) = F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})$$

$$+ \frac{\partial F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial X} \omega_1 h (n - n_0) + \frac{\partial F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial Y} \omega_2 h (m - m_0)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial X^2} \omega_1^2 h^2 (n - n_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial Y^2} \omega_2^2 h^2 (m - m_0)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial X \partial Y} \omega_1 \omega_2 h^2 (n - n_0) (m - m_0)$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^3} \omega_1^3 h^3 (n - n_0)^3$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2 \partial Y} \omega_1^2 \omega_2 h^3 (n - n_0)^2 (m - m_0)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X \partial Y^2} \omega_1 \omega_2^2 h^3 (n - n_0) (m - m_0)^2 \\
& + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \rho(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \rho(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^3} \omega_2^3 h^3 (m - m_0)^3.
\end{aligned}$$

Ensuite il suffit de noter que pour tout couple $(n, m) \in \Delta$ et pour tout $t \in [0, h^\beta]$

$$\begin{aligned}
\left| t (n - n_0)^3 h^2 \right| & \leq h^{\beta+3\delta_1-1}; \quad \left| t (n - n_0)^2 (m - m_0) h^2 \right| \leq h^{\beta+2\delta_1+\delta_2-1}; \\
\left| t (n - n_0) (m - m_0)^2 h^2 \right| & \leq h^{\beta+\delta_1+2\delta_2-1}; \quad \left| t (m - m_0)^3 h^2 \right| \leq h^{\beta+3\delta_2-1};
\end{aligned}$$

et donc comme

$$\beta > 1 - \min(3\delta_1, 2\delta_1 + \delta_2, \delta_1 + 2\delta_2, 3\delta_2) = 1 - 3 \min \delta_i,$$

quel que soit $t \in [0, h^\beta]$ et pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ nous avons

$$\begin{aligned}
& e^{-2i\pi t((n-n_0)^3 h^2 + (n-n_0)^2 (m-m_0) h^2 + (n-n_0)(m-m_0)^2 h^2 + (m-m_0)^3 h^2)} \\
& = \left(1 + O\left(h^{\beta+3\delta_1-1}\right)\right) \left(1 + O\left(h^{\beta+2\delta_1+\delta_2-1}\right)\right) \\
& \quad \left(1 + O\left(h^{\beta+\delta_1+2\delta_2-1}\right)\right) \left(1 + O\left(h^{\beta+3\delta_2-1}\right)\right) \\
& = 1 + O\left(h^{\beta-1+3 \min \delta_i}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui permet de simplifier la fonction d'auto-corrélation. $\square$

Définition 3.5.4. On définit les périodes de renaissances T_{ren_1} , T_{ren_2} et $T_{ren_{12}}$ par :

$$\begin{aligned}
T_{ren_1} &:= \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \omega_1^2}; \quad T_{ren_2} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(E_1, E_2) \omega_2^2}; \\
T_{ren_{12}} &:= \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(E_1, E_2) \omega_1 \omega_2}.
\end{aligned}$$

On a évidemment que pour tout indice $j \in \{1, 2, 12\}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{sren_j}}{T_{ren_j}} = 1.$$

Les trois périodes semi-classiques T_{sren_j} dépendent de h ainsi que leurs quotients. Comme par la suite on va faire des considérations sur les quotients des périodes, il est préférable de travailler plutôt avec les périodes de renaissances qu'avec les périodes de renaissances semi-classique ; pour celà nous disposons en effet de la :

Proposition 3.5.5. Soit v un réel vérifiant l'inégalité : $v > -2 \min \delta_i$. On a alors uniformément pour $t \in [0, h^v]$:

$$\sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)}$$

$$= \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} + O\left(h^{v+\min(\delta_1, \delta_2)}\right).$$

Démonstration. Le principe de la preuve est le même que celle de la proposition 3.4.5. Observons qu'avec la partition $\mathbb{N}^2 = \Delta \amalg \Gamma$ et par inégalité triangulaire nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \left[e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} \right] \right| \\ & \leq \sum_{n,m \in \Gamma} 2 |a_{n,m}|^2 \\ & + 2 \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 \left[\left| 2\pi t (n-n_0)^2 \left(\frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right) \right| + \left| 2\pi t (m-m_0)^2 \left(\frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right) \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| 2\pi t (n-n_0)(m-m_0) \left(\frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right) \right| \right]; \end{aligned}$$

on a utilisé ici que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left| e^{iX} - e^{iY} \right| \leq 2 |X - Y|.$$

En écrivant

$$\frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} = \frac{T_{ren_1} - T_{sren_1}}{T_{sren_1} T_{ren_1}}$$

et en remarquant

$$\begin{aligned} T_{sren_1} - T_{ren_1} &= \frac{4\pi}{\omega_1^2 h} \left(\frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})} - \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2)} \right) \\ &= \frac{4\pi}{\omega_1^2 h} \left(\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) - \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2)} \right); \end{aligned}$$

d'une part avec l'inégalité des accroissements finis nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) - \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \right| \\ & \leq \sup_{(x,y) \in B((E_1, E_2), 1)} \left\| \nabla \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) (x, y) \right\|_{\mathbb{R}^2} \|(E_1, E_2) - (\tau_{n_0}, \mu_{m_0})\|_{\mathbb{R}^2} \\ & \leq M \sqrt{(E_1 - \tau_{n_0})^2 + (E_2 - \mu_{m_0})^2} \leq Mh \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

où M est une constante strictement positive et indépendante de h . D'autre part comme on suppose que $\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \neq 0$; il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $r_1 > 0$ tels que pour tout $(x, y) \in B((E_1, E_2), r_1)$

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(x, y) \right| \geq \varepsilon_1;$$

donc comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{n_0} = E_1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_{m_0} = E_2$ il existe $h_1 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_1[$

$$(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \in B((E_1, E_2), r_1);$$

ainsi l'application

$$h \mapsto \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}$$

est bornée sur l'ouvert $]0, h_1[$, en effet pour tout $h \in]0, h_1[$

$$\left| \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_1^2} < +\infty;$$

d'où avec $M' := 2\pi \frac{M\sqrt{2}}{\varepsilon_1^2}$, pour tout $h \in]0, h_1[$ nous avons $|T_{sren_1} - T_{ren_1}| \leq M'$. Après, comme

$$\left| \frac{1}{T_{sren_1} T_{ren_1}} \right| \leq h^2 \frac{\left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \right|}{16\pi^2} \leq Kh^2$$

où

$$K := \frac{1}{16\pi^2} \sup_{(x,y) \in B((E_1, E_2), 1)} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(x, y) \right|^2;$$

par conséquent il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de h telle que pour tout $h \in]0, h_1[$

$$\left| \frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right| \leq C_1 h^2$$

(il suffit de prendre $C_1 := KM$). De la même façon on montre l'existence de deux autres constantes $C_2, C_{12} > 0$ indépendantes de h telles que pour tout $h \in]0, h_2[$ on ai

$$\left| \frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right| \leq C_2 h^2$$

et pour tout $h \in]0, h_{12}[$ on ait

$$\left| \frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right| \leq C_{12} h^2.$$

Ensuite quel que soit $t \geq 0$, quel que soit $(n, m) \in \Delta$ et que que soit $h < \min(h_1, h_2, h_{12})$ nous avons

$$\left| t(n - n_0)^2 \left(\frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right) \right| \leq C_1 |t| h^{2\delta_1};$$

$$\left| t (n - n_0) (m - m_0) \left(\frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right) \right| \leq C_{12} |t| h^{\delta_1 + \delta_2};$$

$$\left| t (m - m_0)^2 \left(\frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right) \right| \leq C_2 |t| h^{2\delta_2};$$

et donc pour tout $t \in [0, h^v]$ où v est un réel tel que $v > -2 \min \delta_i$, nous avons

$$\begin{aligned} & \left| t (n - n_0)^2 \left(\frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right) \right| + \left| t (m - m_0)^2 \left(\frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right) \right| \\ & + \left| t (n - n_0) (m - m_0) \left(\frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right) \right| \\ & \leq M h^{v + \min(2\delta_1, \delta_1 + \delta_2, 2\delta_2)} = M h^{v + 2 \min \delta_i} \end{aligned}$$

où $M := 3 \max(C_1, C_2, C_{12})$. Au final on vient de montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $h < \min(h_1, h_2, h_{12})$ et pour tout $v > -2 \min \delta_i$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \left[e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)} \right. \right. \\ & \left. \left. e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} \right] \right| \\ & \leq 2 \sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 + M h^{v + 2 \min \delta_i} \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2. \end{aligned}$$

Ensuite comme d'après le lemme 3.3.7

$$\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$$

et que

$$\sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 \leq \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 = 1 + O(h^\infty)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \left[e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)} \right. \right. \\ & \left. \left. e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} \right] \right| \\ & = O(h^{v + 2 \min \delta_i}). \end{aligned}$$

□

Ainsi le terme d'ordre deux de la fonction d'auto corrélation dans l'échelle $[0, h^\beta]$ est :

Définition 3.5.6. Le terme principal de la fonction de retour $\mathbf{r}(t)$ est la série de fonctions

$$\mathbf{r}_2 : t \mapsto e^{-itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)}$$

et son module est le même que celui de la série de fonctions

$$\mathbf{a}_2 : t \mapsto \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left(\frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)}.$$

3.5.2 Remarque sur les échelle des temps

Rappelons que $(\delta'_i, \delta_i) \in]\frac{1}{2}, 1[{}^2$, avec $\delta'_i > \delta_i$, et que les échelles de temps d'approximation données par les coefficients α et β doivent vérifier : $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$ et $\beta > 1 - 3 \min \delta_i$. Remarquons aussi que

$$\begin{aligned} 1 - 3 \min \delta_i - (1 - 2 \min \delta_i) &= -\min \delta_i < 0, \\ -2 \min \delta_i - (1 - 3 \min \delta_i) &= \min \delta_i - 1 < 0, \end{aligned}$$

ainsi pour h assez petit on a

$$h^{1-2 \min \delta_i} < h^{1-3 \min \delta_i} < h^{-2 \min \delta_i}.$$

On peut donc choisir les coefficients α , β et v tels que :

$$v \leq \beta < -1 < \alpha < 0$$

ce qui permet, pour h assez petit d'avoir les inclusions :

$$[0, T_{cl_i}] \subset [0, h^\alpha] \subset [0, T_{ren_i}] \subset [0, h^\beta] \subseteq [0, h^v].$$

3.5.3 Théorème de renaissance

3.5.3.1 Hypothèse de résonance

Définition 3.5.7. On dira que les trois périodes de renaissances T_{ren_1} , T_{ren_2} , $T_{ren_{12}}$ sont en résonances si et seulement si il existe un triplet $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_{12}}{q_{12}}\right) \in \mathbb{Q}^3$ tel que

$$\frac{p_1}{q_1} T_{ren_1} = \frac{p_2}{q_2} T_{ren_2} = \frac{p_{12}}{q_{12}} T_{ren_{12}};$$

Notation 3.5.8. Dans le cas où les trois périodes de renaissances T_{ren_1} , T_{ren_2} , $T_{ren_{12}}$ sont en résonances on pose :

$$T_{frac} := \frac{p_1}{q_1} T_{ren_1} = \frac{p_2}{q_2} T_{ren_2} = \frac{p_{12}}{q_{12}} T_{ren_{12}}.$$

Pour tout indice $j \in \{1, 2\}$ on note aussi $r_j := p_{12} q_j$, $s_j := q_{12} p_j$, de sorte que pour $j \in \{1, 2\}$

$$T_{ren_j} = \frac{r_j}{s_j} T_{ren_{12}}.$$

Définition 3.5.9. On définit la fonction classique ψ_{cl} à deux variables temps t_1 et t_2 :

$$\psi_{cl}(t_1, t_2) := \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t_1 \frac{n-n_0}{T_{scl1}} - 2i\pi t_2 \frac{m-m_0}{T_{scl2}}}.$$

On a alors immédiatement les propriétés évidentes suivantes :

- (i) pour tout $t \geq 0$, $\psi_{cl}(t, t) = \mathbf{a}_1(t)$;
- (ii) pour tous $t_1, t_2 \geq 0$, $\psi_{cl}(t_1 + T_{scl1}, t_2) = \psi_{cl}(t_1, t_2)$;
- (iii) pour tous $t_1, t_2 \geq 0$, $\psi_{cl}(t_1, t_2 + T_{scl2}) = \psi_{cl}(t_1, t_2)$.

3.5.3.2 Quelques lemmes

Notation 3.5.10. On considère la suite $(\theta_{n,m})_{n,m} = (\theta_{n,m}(h))_{n,m}$ indexée sur $\mathbb{Z}^2$ par :

$$\theta_{n,m} := e^{-2i\pi \left(\frac{p_1}{q_1}(n-n_0)^2 + \frac{p_{12}}{q_{12}}(n-n_0)(m-m_0) + \frac{p_2}{q_2}(m-m_0)^2 \right)}.$$

Proposition 3.5.11. Il existe deux entiers l_1 et l_2 tels que pour tout couple d'entiers $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} \theta_{n+l_1, m} = \theta_{n, m} \\ \theta_{n, m+l_2} = \theta_{n, m} \end{cases}$$

si et seulement si les entiers l_1 et l_2 vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad \frac{l_1^2 p_1}{q_1} + \frac{2p_1 l_1}{q_1} n + \frac{p_1 r_1 l_1}{s_1 q_1} m &\equiv 0 \pmod{1} \\ \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad \frac{l_2^2 p_2}{q_2} + \frac{2p_2 l_2}{q_2} m + \frac{p_2 r_2 l_2}{s_2 q_2} n &\equiv 0 \pmod{1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour tout couple d'entier relatif n, m nous avons :

$$\begin{aligned} \theta_{n+l_1, m} &= \theta_{n, m} \\ \Leftrightarrow \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad \theta_{n+l_1, m} &= \theta_{n, m} e^{-2i\pi \left(\frac{l_1^2 p_1}{q_1} + \frac{2p_1 l_1}{q_1} n + \frac{p_1 r_1 l_1}{s_1 q_1} m \right)} \\ \Leftrightarrow \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \quad \frac{l_1^2 p_1}{q_1} + \frac{2p_1 l_1}{q_1} n + \frac{p_1 r_1 l_1}{s_1 q_1} m &\equiv 0 \pmod{1}. \end{aligned}$$

De même pour l'autre période l_2 . □

Exemple 3.5.12. Une solution de ces deux équations est $l_1 = q_1 s_1$ et $l_2 = q_2 s_2$.

Maintenant pour une paire de périodes l_1, l_2 fixées, munissons l'ensemble des suite (l_1, l_2) -périodiques à valeurs complexes d'une structure hermitienne de la façon suivante :

Définition 3.5.13. Pour une paire d'entier $l_1, l_2 \in (\mathbb{Z}^*)^2$ fixés ; on définit l'ensemble :

$$\mathfrak{S}_{l_1, l_2}(\mathbb{Z}) := \left\{ u_{n,m} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}; \forall n, m \in \mathbb{Z}^2, u_{n+l_1, m} = u_{n, m}; \text{ et } u_{n, m+l_2} = u_{n, m} \right\}.$$

On a alors trivialement la :

Proposition 3.5.14. *L'application :*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}_{l_1, l_2}} : \begin{cases} \mathfrak{S}_{l_1, l_2}(\mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{\mathfrak{S}_{l_1, l_2}} := \frac{1}{|l_1 l_2|} \sum_{n=0}^{|l_1|-1} \sum_{m=0}^{|l_2|-1} u_{n, m} \overline{v_{n, m}} \end{cases}$$

munie $\mathfrak{S}_{l_1, l_2}(\mathbb{Z})$ d'une structure hermitienne de dimension $l_1 l_2$.

Puis on a la

Proposition 3.5.15. *En notant par $\phi_{n, m}^{k, p} := e^{-\frac{2i\pi k n}{l_1}} e^{-\frac{2i\pi p m}{l_2}}$ où $(k, p) \in \mathbb{Z}^2$; la famille $\left\{ \left(\phi_{n, m}^{k, p} \right)_{n, m \in \mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0 \dots l_1-1, p=0 \dots l_2-1}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{S}_{l_1, l_2}(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. La preuve est analogue au cas de la dimension 1. $\square$

Théorème 3.5.16. *Sous l'hypothèse de résonance il existe une famille de $l_1 + l_2$ nombre complexes dépendant de h ; $\left(\widetilde{b_{k_1, k_2}} \right)_{k_1 \in \{0 \dots l_1-1\}, k_2 \in \{0 \dots l_2-1\}}$ où les entiers $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^2$ sont solutions des équations de la proposition 3.5.11 ; telle que pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ on ait l'égalité :*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 \left(t + T_{frac} \right) &= \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \psi_{cl} \left(t + T_{frac} + \frac{k_1}{l_1} T_{scl_1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{l_2} T_{scl_2} \right) \\ &\quad + O \left(h^{\alpha+2 \min \delta_i - 1} \right). \end{aligned}$$

En outre quel que soient les indices $k_1 \in \{0 \dots l_1 - 1\}$, $k_2 \in \{0 \dots l_2 - 1\}$ les coefficients $\widetilde{b_{k_1, k_2}}$ sont données par

$$\widetilde{b_{k_1, k_2}} = e^{-\frac{2i\pi k_1 n_0}{l_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m_0}{l_2}} b_{k_1, k_2}$$

avec

$$\begin{aligned} b_{k_1, k_2} &= b_{k_1, k_2}(h) = \left\langle \sigma_h, \phi^{k_1, k_2} \right\rangle_{\mathfrak{S}_{l_1, l_2}} \\ &= \frac{1}{|l_1 l_2|} \sum_{n=0}^{|l_1|-1} \sum_{m=0}^{|l_2|-1} e^{-2i\pi \left(\frac{p_1}{q_1} (n-n_0)^2 + \frac{p_{12}}{q_{12}} (n-n_0)(m-m_0) + \frac{p_2}{q_2} (m-m_0)^2 \right)} e^{\frac{2i\pi k_1 n}{l_1}} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{l_2}}. \end{aligned}$$

Démonstration. L'idée générale de cette preuve est proche de celle du théorème de renaissances fractionnaire de la dimension 1. Posons $\tilde{n} := n - n_0$, $\tilde{m} := m - m_0$ et considérons la différence $\varepsilon(t)$ définie par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &:= \left| \mathbf{a}_2 \left(t + T_{frac} \right) - \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \psi_{cl} \left(t + T_{frac} + \frac{k_1}{l_1} T_{cl_1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{l_2} T_{cl_2} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl_1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl_1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl_2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl_2}}} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi \frac{p_1 \tilde{n}^2}{q_1}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi \frac{p_2 \tilde{m}^2}{q_2}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} e^{-2i\pi \frac{p_{12} \tilde{n}\tilde{m}}{q_{12}}} \\
& - \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1,k_2}} \psi_{cl} \left(t + T_{frac} + \frac{k_1}{l_1} T_{cl1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{l_2} T_{cl2} \right) \Bigg| \\
& = \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \theta_{n,m} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} \right. \\
& \quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} \\
& \quad \left. - \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1,k_2}} \psi_{cl} \left(t + T_{frac} + \frac{k_1}{l_1} T_{cl1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{l_2} T_{cl2} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Comme la suite $(\theta_{n,m})_{n,m} \in \mathfrak{S}_{l_1,l_2}(\mathbb{Z})$ où $l_1 = q_1 s_1$ et $l_2 = q_2 s_2$ on peut décomposer d'une manière unique la suite $(\theta_{n,m})_{n,m}$ sur la base orthonormée

$\left\{ \left(\phi_{n,m}^{k,p} \right)_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0 \dots l_1-1, p=0 \dots l_2-1}$ de l'espace $\mathfrak{S}_{l_1,l_2}(\mathbb{Z})$:

$$\theta_{n,m} = \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} b_{k_1,k_2} \phi_{n,m}^{k_1,k_2}.$$

où $b_{k_1,k_2} = \langle \theta, \phi^{k_1,k_2} \rangle_{\mathfrak{S}_{l_1,l_2}}$. Par suite nous avons :

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} |a_{n,m}|^2 b_{k_1,k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} \right. \\
& \quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} \phi_{n,m}^{k_1,k_2} \\
& \quad \left. - \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1,k_2}} \psi_{cl} \left(t + T_{frac} + \frac{k_1}{l_1} T_{scl1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{l_2} T_{scl2} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} |a_{n,m}|^2 b_{k_1,k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} \right. \\
& \quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} \phi_{n,m}^{k_1,k_2} \\
& \quad - \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1,k_2}} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi k_1 \frac{\tilde{n}}{l_1}} \\
& \quad \left. e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi k_2 \frac{\tilde{m}}{l_2}} \right| \\
&= \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} |a_{n,m}|^2 b_{k_1,k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} e^{-\frac{2i\pi k_1 n}{l_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m}{l_2}} \\
& - \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi k_1 \frac{\tilde{n}}{l_1}} \\
& e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi k_2 \frac{\tilde{m}}{l_2}} \Big|.
\end{aligned}$$

Et comme $\widetilde{b_{k_1, k_2}} e^{-2i\pi k_1 \frac{\tilde{n}}{l_1}} e^{-2i\pi k_2 \frac{\tilde{m}}{l_2}} = b_{k_1, k_2} e^{-\frac{2i\pi k_1 n}{l_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m}{l_2}}$ on en déduit alors

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(t) = \\
& \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} |a_{n, m}|^2 b_{k_1, k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-\frac{2i\pi k_1 n}{l_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m}{l_2}} \right. \\
& \left. \left(-1 + e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Ensuite, en s'inspirant encore du cas de la dimension 1, on partitionne $\mathbb{N}^2$ avec les ensembles Δ et Γ et il suffit alors d'étudier la série sur l'ensemble Δ . Il existe des constantes $C_1, C_2, C_{12} > 0$ telles quel que soit le couple $(n, m) \in \Delta$ et pour tout $t \in [0, h^\alpha]$:

$$\begin{aligned}
& \left| t \frac{(n - n_0)^2}{T_{ren1}} \right| \leq C_1 h^{\alpha+2\delta_1-1}; \quad \left| t \frac{(m - m_0)^2}{T_{ren2}} \right| \leq C_2 h^{\alpha+2\delta_2-1}; \\
& \left| t \frac{(n - n_0)(m - m_0)}{T_{ren12}} \right| \leq C_{12} h^{\alpha+\delta_1+\delta_2-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $t \in [0, h^\alpha]$ et quel que soit $(n, m) \in \Delta$ nous avons :

$$e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} - 1 = O\left(h^{\alpha+2\min\delta_i-1}\right).$$

□

En prenant $t = 0$ on obtient le :

Corollaire 3.5.17. *Sous les mêmes hypothèses :*

$$\mathbf{a}_2(T_{frac}) = \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \psi_{cl} \left(T_{frac} + \frac{k_1}{l_1} T_{scl1}, T_{frac} + \frac{k_2}{l_2} T_{scl2} \right).$$

3.5.3.3 Calcul des coefficients

Dans cette sous section on s'inspire directement des résultats établis en dimension 1.

Théorème 3.5.18. *Supposons que l'hypothèse de résonance soit vérifiée avec en plus $\frac{p_{12}}{q_{12}} \in \mathbb{Z}$; alors :*

$$|b_{k_1, k_2}|^2 = \frac{1}{l_1^2 l_2^2} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_1 s_1}{l_1} x^2} e^{\frac{2i\pi k_1}{l_1} x} \right|^2 \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_2 s_2}{l_2} y^2} e^{\frac{2i\pi k_2}{l_2} y} \right|^2.$$

Démonstration. De même que dans la proposition 2.6.1 du cas de la dimension 1 on a déjà que pour tous indices $k_1 \in \{0 \dots l_1 - 1\}$, $k_2 \in \{0 \dots l_2 - 1\}$

$$\begin{aligned} |b_{k_1, k_2}| &= \frac{1}{l_1 l_2} \left| \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} e^{-2i\pi \left(\frac{p_1}{q_1} n^2 + \frac{p_{12}}{q_{12}} nm + \frac{p_2}{q_2} m^2 \right)} e^{\frac{2i\pi k_1 n}{l_1}} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{l_2}} \right|; \\ &= \frac{1}{l_1 l_2} \left| \sum_{m=0}^{l_2-1} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{l_2}} e^{-2i\pi \frac{p_2}{q_2} m^2} \sum_{n=0}^{l_1-1} e^{-2i\pi \frac{p_1}{q_1} n^2} e^{\frac{2i\pi n}{l_1} \left(k_1 - \frac{p_{12}}{q_{12}} l_1 m \right)} \right| \end{aligned}$$

et comme $l_1 = q_1 s_1 = q_1 q_{12} p_1$ nous obtenons que

$$|b_{k_1, k_2}| = \frac{1}{l_1 l_2} \left| \sum_{m=0}^{l_2-1} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{l_2}} e^{-2i\pi \frac{p_2}{q_2} m^2} \sum_{n=0}^{l_1-1} e^{-2i\pi \frac{p_1}{q_1} n^2} e^{\frac{2i\pi n}{l_1} (k_1 - p_{12} q_1 s_1 m)} \right|.$$

Pour $j \in \{1, 2\}$, on considère χ_j les caractères donnés par

$$\chi_j : \begin{cases} \mathbb{Z}/l_j \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^* \\ a \mapsto e^{-2i\pi \frac{a}{l_j}}; \end{cases}$$

et ainsi

$$|b_{k_1, k_2}| = \frac{1}{l_1 l_2} \left| \sum_{m=0}^{l_2-1} \chi_2 \left(p_2 s_2 m^2 - k_2 m \right) \sum_{n=0}^{l_1-1} \chi_1 \left(p_1 s_1 n^2 - n(k_1 - p_{12} q_1 p_1 m) \right) \right|;$$

par conséquent

$$\begin{aligned} |b_{k_1, k_2}|^2 &= \frac{1}{l_1^2 l_2^2} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} \chi_1 \left(p_1 s_1 x^2 - x(k_1 - p_{12} q_1 p_1 y) \right) \chi_2 \left(p_2 s_2 y^2 - k_2 y \right) \right) \\ &\quad \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} \chi_1 \left(-p_1 s_1 z^2 + z(k_1 - p_{12} q_1 p_1 t) \right) \chi_2 \left(-p_2 s_2 t^2 + k_2 t \right) \right) \\ &= \frac{1}{l_1^2 l_2^2} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} \sum_{z \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} \right. \\ &\quad \left. \chi_1 \left(p_1 s_1 (x^2 - z^2) - k_1(x - z) + p_{12} q_1 p_1(xy - zt) \right) \chi_2 \left(p_2 s_2 (y^2 - t^2) - k_2(y - t) \right) \right). \end{aligned}$$

Maintenant comme $\frac{p_{12}}{q_{12}} \in \mathbb{Z}$ alors $l_1 = q_1 q_{12} p_1 |q_1 p_1 p_{12}|$ et donc pour tout

x, y, z, t nous avons $p_{12} q_1 p_1(xy - zt) \in l_1 \mathbb{Z}$; d'où pour tout x, y, z, t on a $\chi_1(p_{12} q_1 p_1(xy - zt)) = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} |b_{k_1, k_2}|^2 &= \frac{1}{l_1^2 l_2^2} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} \sum_{z \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/l_2 \mathbb{Z}} \right. \\ &\quad \left. \chi_1 \left(p_1 s_1 (x^2 - z^2) - k_1(x - z) \right) \chi_2 \left(p_2 s_2 (y^2 - t^2) - k_2(y - t) \right) \right) \\ &= \frac{1}{l_1^2 l_2^2} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \sum_{z \in \mathbb{Z}/l_1 \mathbb{Z}} \chi_1 \left(p_1 s_1 (x^2 - z^2) - k_1(x - z) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{y \in \mathbb{Z}/l_2\mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/l_2\mathbb{Z}} \chi_2 \left(p_2 s_2 (y^2 - t^2) - k_2 (y - t) \right) \\
&= \frac{1}{l_1^2} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}/l_1\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_1 s_1}{l_1} x^2} e^{\frac{2i\pi k_1}{l_1} x} \right|^2 \frac{1}{l_2^2} \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}/l_2\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_2 s_2}{l_2} y^2} e^{\frac{2i\pi k_2}{l_2} y} \right|^2.
\end{aligned}$$

□

Ensuite les résultats établis dans le cas de la dimension 1 nous permettent de calculer les deux termes

$$\frac{1}{l_1} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}/l_1\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_1 s_1}{l_1} x^2} e^{\frac{2i\pi k_1}{l_1} x} \right|, \quad \frac{1}{l_2} \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}/l_2\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_2 s_2}{l_2} y^2} e^{\frac{2i\pi k_2}{l_2} y} \right|$$

en fonction des entiers l_i , p_i , s_i et k_i .

Chapitre 4

Sur le spectre semi-classique d'un hamiltonien de dimension 1 autour d'une singularité hyperbolique

Ce chapitre a fait l'objet d'une pré-publication au actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de Grenoble et d'une publication aux Annales de la Faculté des sciences de Toulouse [Lab2].

4.1 Introduction

Sur la variété $M = \mathbb{R}$, l'opérateur de Schrödinger P_h de potentiel V , V étant une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est l'opérateur linéaire non-borné sur l'espace des fonctions C^∞ à support compact $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définit par :

$$P_h := -\frac{h^2}{2}\Delta + V,$$

où V est l'opérateur de multiplication par la fonction V , le laplacien est donné par $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ et h est le paramètre semi-classique. Le spectre semi-classique d'un opérateur de Schrödinger en dimension 1 est bien connu [Ge-Gr], [He-Ro] et [Col8] dans les zones dites elliptiques, c'est-à-dire en dehors des maxima locaux de la fonction potentiel V ; on parle alors de règles de Bohr-Sommerfeld régulières. Dans ce chapitre on se concentre sur le cas d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel type double puits, c'est-à-dire que $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ et V possédant exactement un maximum local non-dégénéré, que l'on supposera par exemple atteint en 0. Le modèle du double puits à été beaucoup étudié [BPU], [He-Sj2], en particulier dans [He-Ro] et [Fu-Ra] pour l'étude de la transition de l'espacement des valeurs propres. Cependant le spectre du double puits reste globalement assez mystérieux. Dans l'étude des singularités de l'application moment d'un système complètement intégrable, l'opérateur de Schrödinger avec double puits est le modèle type pour les singularités non-dégénérées de type hyperbolique [VuN4]. En effet, pour un hamiltonien $p : M \rightarrow \mathbb{R}$ tel que 0 soit valeur critique de p , et

tel que les fibres dans un voisinage de 0 soient compactes et connexes et ne contiennent qu'un unique point critique non-dégénéré de type hyperbolique : la fibre $\Lambda_0 := p^{-1}(0)$ est alors un "huit" et le feuilletage dans un voisinage de la fibre singulière Λ_0 est difféomorphe à celui du double puits.

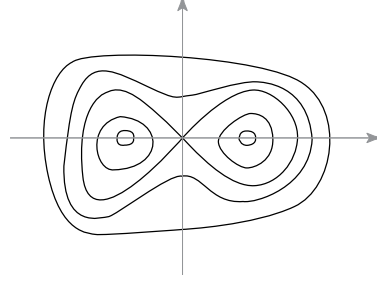


Fig. 32. Le feuilletage autour d'une singularité hyperbolique.

Dans une série de trois articles [Co-Pa1], [Co-Pa2] et [Co-Pa3] Y. Colin de Verdière et B. Parisse se sont intéressés au spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger, en dimension 1 avec un potentiel ayant un maximum local non-dégénéré. Dans [Co-Pa3] ils traitent de manière générale l'étude des singularités. Dans [Co-Pa1] et [Co-Pa2] les deux auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour trouver le spectre semi-classique dans un compact centré autour de l'origine de l'opérateur linéaire :

$$P_h := -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V$$

avec un potentiel V type double puits. Dans la première partie de ce chapitre on rappelle d'abord la formule donnée par Y. Colin de Verdière et B. Parisse. Dans la seconde partie on utilise cette formule pour expliciter, dans une certaine mesure, le spectre de l'opérateur P_h . On montre en particulier que le spectre de l'opérateur P_h dans le compact $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$ est constitué de deux familles de réels $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ vérifiant :

$$\cdots < \beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h) < \cdots$$

et, il existe C, C' deux constantes réelles strictement positives telles que

$$\frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}, \quad \frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\beta_{k+1}(h) - \beta_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}.$$

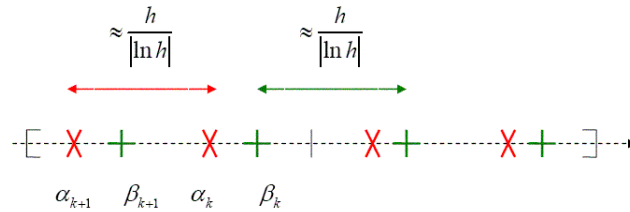


Fig. 33. Le spectre de P_h : les croix obliques rouges représentent les valeurs propres issues de la famille $(\alpha_k(h))_k$; et les croix verticales-horizontales vertes représentent les valeurs propres issues de la famille $(\beta_k(h))_k$.

4.2 La formule de Colin de Verdière-Parisse

4.2.1 Le cadre

Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ et V possédant exactement un maximum local strict non dégénéré, que l'on supposera atteint en 0, ainsi : $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$, $V''(0) < 0$. On supposera aussi que la fonction possède exactement deux puits : il existe $x_1 < 0 < x_2$ tels que $V(x_1) = V(x_2) = 0$, $V > 0$ dans $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ et $V \leq 0$ dans $[x_1, x_2]$. En plus $V'(x_1) < 0$ et $V'(x_2) > 0$.

Exemple 4.2.1. Un exemple typique non-générique est la fonction potentiel $V(x) = x^4 - x^2$.

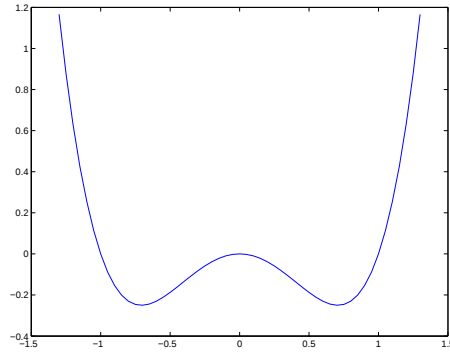


Fig. 34. La courbe représentative de la fonction potentiel $V(x) = x^4 - x^2$. On distingue les deux puits (les minima) du potentiel, le droit et le gauche.

On notera par p la fonction définie sur le fibré cotangent de $\mathbb{R}$ par :

$$p(x, \xi) := \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in C^\infty(T^*\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

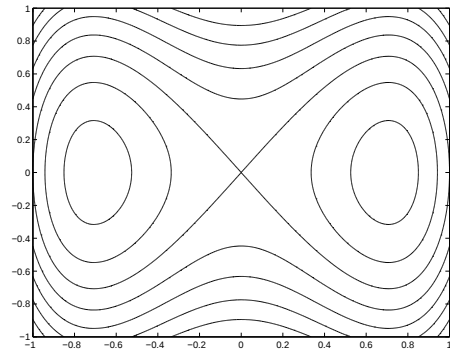


Fig. 35. Courbes de $p^{-1}(c)$ avec des $c > 0$: une seule composante connexe, $c=0$: le huit hyperbolique, $c < 0$: deux composantes connexes.

Son quantifié de Weyl P_h est donné par :

$$P_h = -\frac{h^2}{2}\Delta + V.$$

4.2.2 Énoncé de la formule

Y. Colin de Verdière et B. Parisse ont donné les règles de Bohr-Sommerfeld dans le cas singulier sous la forme suivante :

Théorème 4.2.2. *Pour $E \in [-\delta, \delta]$; où δ est un réel strictement positif suffisamment petit et indépendant de h ; l'équation :*

$$(P_h - EI_d) u_h = O(h^\infty)$$

admet une solution $u_h \in L^2(\mathbb{R})$ non triviale avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}\{E\}$ si et seulement si le réel E vérifie l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{\frac{2\pi i \varepsilon}{h}}}} \cos\left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right)\right) \quad (4.1)$$

où :

$$\varepsilon := \varepsilon(E), \theta_{+/-} := \theta_{+/-}(E) = S^{+/-}(E)/h.$$

Les fonctions ε et $S^{+/-}$ admettant des développements asymptotiques en puissance de h avec des coefficients C^∞ par rapport à E .

4.2.3 Les grandes étapes de la preuve

On résume [Co-Pa1], [Co-Pa2] et une bonne partie de [Co-Pa3]. La preuve de la formule se décompose en plusieurs grandes étapes.

La stratégie

La première étape de la preuve est une étude locale autour de la singularité. Pour ça on utilise une forme normale de Birkhoff quantique de manière à se ramener à une équation différentielle linéaire du premier ordre. On exhibe alors quatre solutions et on utilise le fait que l'ensemble des solutions est de dimension 2, pour en déduire une dépendance linéaire entre ces solutions. La seconde étape consiste à prolonger de manière globale les fonctions solutions, ce qui donnera à nouveau une dépendance linéaire entre les solutions. A la fin, on exprime simultanément ces relations linéaires avec un déterminant et un peu d'algèbre linéaire.

Première étape : Étude locale autour de la singularité

Pour un réel $E \in [-\delta, \delta]$, où δ est une constante réelle strictement positive et indépendante de h , on va étudier l'équation $(P_h - EI_d) u_h = O(h^\infty)$ avec une forme normale quantique autour de l'origine, utilisons le théorème suivant (voir [CLP]) :

Théorème 4.2.3. *Il existe U un opérateur intégral de Fourier, N un opérateur pseudo-différentiel elliptique en 0 et une fonction ε ayant un développement asymptotique en puissance de h : $\varepsilon(E) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon_j(E)h^j$ où les fonctions ε_j sont de classe C^∞ par rapport à E et indépendante de h ; tels que microlocalement dans un ouvert Ω_0 contenant l'origine, on ait pour tout $E \in [-\delta, \delta]$:*

$$U^{-1}(P_h - EI_d)U = N \left(\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d \right)$$

$$\text{où } \widehat{x\xi} := \frac{h}{i} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} I_d \right) \text{ avec } \varepsilon_0(0) = 0 \text{ et } \varepsilon'_0(0) = \frac{1}{\sqrt{-V''(0)}}.$$

La démonstration de ce théorème de forme normale quantique est donnée dans [CLP], ou [Co-Pa1], la preuve utilise le lemme de Morse isochore [Co-Ve]. L'analogie analytique de cette forme normale est donné dans [He-Sj2]. Le cas de la catégorie C^∞ de ce type de forme normale est prouvé par J. Sjöstrand [Sjo1], [Sjo2].

Remarque 4.2.4. Cette forme normale reste valide uniquement pour $|E| \leq \delta$, où δ est un réel strictement positif suffisamment petit mais indépendant de h .

Pour tout $|E| \leq \delta$ on a :

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0(E) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j(E)h^j;$$

ainsi, en appliquant la formule de Taylor sur la fonction de classe C^∞ ε_0 ; pour tout $E \in [-\delta, \delta]$ nous avons :

$$\varepsilon(E) = \frac{E}{\sqrt{-V''(0)}} + O(E^2) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j(E)h^j.$$

Par la suite on va utiliser ce théorème avec $E = \lambda h^\alpha$ où $\lambda \in [-1, 1]$; $\alpha \geq 0$ et h assez petit pour que $[-h^\alpha, h^\alpha] \subset [-\delta, \delta]$. Ainsi, pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$:

$$\varepsilon(\lambda h^\alpha) = \frac{\lambda h^\alpha}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha}) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j(\lambda h^\alpha)h^j. \quad (4.2)$$

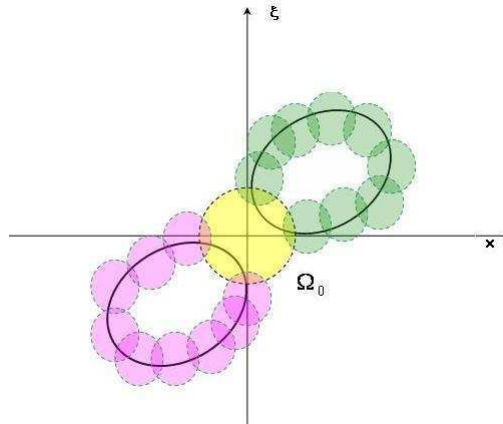


Fig. 36. Ouvert Ω_0 où la forme normale est valide.

Grâce à ce théorème de forme normale semi-classique on a un lien très simple entre les vecteurs propres des opérateurs $(P_h - EI_d)$ et $\widehat{x\zeta} - \varepsilon(E)I_d$; en effet on voit facilement que :

$$(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty) \Leftrightarrow (\widehat{x\zeta} - \varepsilon(E)I_d) U^{-1}(u_h) = O(h^\infty).$$

Ainsi si on travaille sur l'ouvert Ω_0 où la forme normale est valide, on est amené à résoudre : $(\widehat{x\zeta} - \varepsilon(E)I_d) v_h = O(h^\infty)$, ie, résoudre :

$$xv'_h(x) + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon(E)}{h}\right) v_h(x) = O(h^\infty).$$

Alors, par simple intégration d'équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre, les solutions exactes de $(\widehat{x\zeta} - \varepsilon(E)I_d) v_h = 0$ sont engendrées par les deux fonctions :

$$\varphi_1(x) := x_+^{-\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) e^{-\frac{1}{2}\ln(x) + i\frac{\varepsilon}{h}\ln(x)};$$

$$\varphi_2(x) := x_-^{-\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x) e^{-\frac{1}{2}\ln(-x) + i\frac{\varepsilon}{h}\ln(-x)}.$$

Ensuite, l'idée est de construire deux autres solutions de l'équation différentielle $(\widehat{x\zeta} - \varepsilon(E)I_d) v_h = 0$. L'idée est de pouvoir écrire une relation linéaire entre ces quatre solutions. Pour cela on utilise la h -transformée de Fourier définie par :

$$\mathcal{F}_h(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{ixt}{h}} dt.$$

En effet, en utilisant les propriétés usuelles sur la dérivation des h -transformées de Fourier on a la :

Proposition 4.2.5. En posant $\varphi_1^*(x) := x_+^{-\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon}{h}}$ et $\varphi_2^*(x) := x_-^{-\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon}{h}}$, les deux fonctions φ_3 et φ_4 définies par

$$\varphi_3(\zeta) := e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h(\varphi_1^*)(-\zeta) \quad \text{et} \quad \varphi_4(\zeta) := e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h(\varphi_2^*)(-\zeta)$$

sont aussi solutions exactes de $\widehat{x\zeta} - \varepsilon(E)I_d = 0$.

Maintenant si u_h est solution de $(\widehat{x\zeta} - \varepsilon(E)I_d) u_h = b_h$ où le second membre b_h est un $O(h^\infty)$, on peut, en utilisant essentiellement la méthode de la variation de la constante, voir [Co-Pa1], montrer que nécessairement il existe un unique couple $x_1, x_2 \in \mathbb{C}_h^2$ tel que $u_h = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + O(h^\infty)$, en effet :

Théorème 4.2.6. [Co-Pa1] L'espace des solutions microlocales de l'équation $(P_h - EI_d) u_h = O(h^\infty)$ dans Ω_0 est un $\mathbb{C}_h$ -module libre de rang 2.

En notant par $\mathcal{B} := \{\varphi_1, \varphi_2\}$ et $\mathcal{B}' := \{\varphi_3, \varphi_4\}$ les deux bases de solutions, la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donnée par :

Théorème 4.2.7. La matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$Q = \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-\frac{\varepsilon}{h}} \\ ie^{-\frac{\varepsilon}{h}} & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{E} := \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon}{h}(\frac{\pi}{2} + \ln(h))} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\frac{\varepsilon}{h}}}} e^{i \arg(\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})) + i\frac{\varepsilon}{h} \ln(h)}.$$

Pour prouver celà on a besoin du (voir annexe) :

Lemme 4.2.8. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}^*$ on a, au sens des distributions, que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h \left(\left[x_+^\lambda \right] \right) (\xi) &= \frac{i\Gamma(\lambda + 1)}{\sqrt{2\pi}} h^{\lambda + \frac{1}{2}} \left[e^{i\frac{\pi}{2}\lambda} \xi_-^{-\lambda-1} - e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \xi_+^{-\lambda-1} \right]; \\ \mathcal{F}_h \left(\left[x_-^\lambda \right] \right) (\xi) &= \frac{i\Gamma(\lambda + 1)}{\sqrt{2\pi}} h^{\lambda + \frac{1}{2}} \left[e^{i\frac{\pi}{2}\lambda} \xi_+^{-\lambda-1} - e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda} \xi_-^{-\lambda-1} \right] \end{aligned}$$

Γ désignant la fonction Gamma d'Euler usuelle.

Démonstration. (du théorème) Ce type de calcul exact de matrice de passage est écrit dans de nombreux endroits de la littérature (voir **[Ge-Sh]** pour le calcul des transformées de Fourier des distributions $\left[x_{+/-}^\alpha \right]$ et voir **[Co-Pa1]**, **[He-Sj2]**, **[Ram]** pour le calcul des matrices). Du lemme, on en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(\varphi_1)(\xi) &= \mathcal{F}_h \left(\left[x_+^{-\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}} \right] \right) (\xi) \\ &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \xi_-^{-\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon}{h}} - e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \xi_+^{-\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon}{h}} \right]. \end{aligned}$$

En appliquant à nouveau $\mathcal{F}_h$ on a :

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}_h \circ \mathcal{F}_h)(\varphi_1)(x) \\ &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h \left(\left[\xi_-^{-\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon}{h}} \right] \right) (x) - e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \mathcal{F}_h \left(\left[\xi_+^{-\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon}{h}} \right] \right) (x) \right] \end{aligned}$$

ie

$$\begin{aligned} \varphi_1(-x) &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h(\varphi_2^*)(x) - e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \mathcal{F}_h(\varphi_1^*)(x) \right] \\ &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_4(-x) - e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_3(-x) \right] \end{aligned}$$

et donc :

$$\varphi_1(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}) e^{\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}}}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[\varphi_3(x) + ie^{-\pi\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_4(x) \right].$$

De la même manière on exprime la fonction φ_2 comme combinaison linéaire des fonctions φ_3 et φ_4

$$\varphi_2(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}) e^{\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}}}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[\varphi_4(x) + ie^{-\pi\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_3(x) \right].$$

Par conséquent la matrice Q s'écrit

$$Q = \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-\frac{\varepsilon}{h}\pi} \\ ie^{-\frac{\varepsilon}{h}\pi} & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{E} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon}{h}(\frac{\pi}{2} + \ln(h))}$. Pour finir la démonstration, il reste juste à vérifier que :

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon}{h}(\frac{\pi}{2} + \ln(h))} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\frac{\varepsilon}{h}}}} e^{i \arg(\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})) + i\frac{\varepsilon}{h} \ln(h)},$$

en effet comme

$$\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right) \right) = -i \ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right) \right) + i \ln \left(\left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right) \right| \right)$$

on a donc

$$e^{i \arg(\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}))} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\left| \Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}) \right|}.$$

Et comme

$$\left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right) \right|^2 = \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right) \overline{\Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right)} = \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon}{h} \right)$$

en appliquant la formule des compléments on a :

$$\left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h} \right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cos(\pi i\frac{\varepsilon}{h})} = \frac{\pi}{\cosh(\pi\frac{\varepsilon}{h})}$$

et donc

$$e^{i \arg(\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}))} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{e^{\pi\frac{\varepsilon}{h}} + e^{-\frac{\varepsilon}{h}\pi}};$$

ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi\frac{\varepsilon}{h}}}} e^{i \arg(\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}))} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon}{h}\frac{\pi}{2}}.$$

Ce qui montre le théorème. $\square$

Remarque 4.2.9. Dans [Ram] on trouve un calcul similaire de ce type de matrice ; T. Ramond utilise une forme normale analytique pour calculer une matrice de diffusion au sommet d'une barrière de potentiel.

Revenons maintenant à l'étude de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$: si u_h est une solution globale non triviale, en se plaçant sur l'ouvert Ω_0 où la forme normale est valide, il existe alors un quadruplet $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{C}_h)^4$ tel que $U^{-1}u_h = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 = x_3\phi_3 + x_4\phi_4$. Ensuite en posant pour tout indice $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\phi_j := U\varphi_j$, les deux familles de fonctions $\mathcal{C} := \{\phi_1, \phi_2\}$ et $\mathcal{C}' := \{\phi_3, \phi_4\}$ sont deux bases de solutions de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$ dans l'ouvert Ω_0 . Donc, dans Ω_0 on a $u_h = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 = x_3\phi_3 + x_4\phi_4$. Et ainsi on a la relation matrice-vecteur suivante :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Seconde étape : Étude globale

Toutes les fibres $\Lambda_E := p^{-1}(E)$ sont compactes, pour $E \neq 0$, la fibre $\Lambda_0 := p^{-1}(0)$ étant l'unique fibre singulière du feuilletage. L'ensemble $Y_0 := p^{-1}(0) - \Omega_0$ est une partie régulière de la fibre Λ_0 , pour $E \in [-\delta, \delta]$ le faisceau des solutions microlocales de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$ au dessus de Λ_E est un fibré plat de dimension 1 (voir [VuN2], [VuN3], [VuN4]).

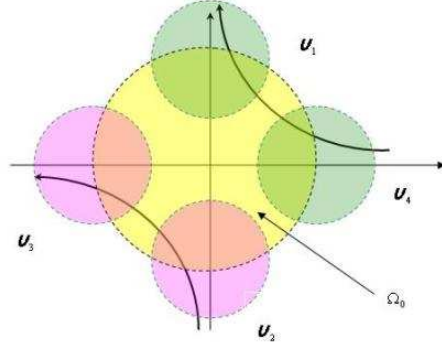


Fig. 37. Les ouverts U_1, U_2, U_3, U_4 et Ω_0 .

La fonction ϕ_1 est une solution microlocale de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$ sur l'ouvert U_1 et la fonction ϕ_4 est solution sur l'ouvert U_4 ; avec l'argument de la dimension 1 on peut montrer ([VuN2], [VuN3], [VuN4]) qu'il y a une unique façon de prolonger la solution ϕ_1 le long de la courbe en évitant la singularité pour arriver sur l'ouvert U_4 ; la solution finale $\tilde{\phi}_1$ diffère alors de la solution ϕ_4 par un facteur de phase ([VuN2], [VuN3], [VuN4]) :

$$\tilde{\phi}_1 = e^{iS^+(E)/h} \phi_4;$$

où la fonction S^+ admet un développement asymptotique en puissance de h :

$$S^+(E) = \sum_{j=0}^{+\infty} S_j^+(E) h^j;$$

avec des coefficients S_j^+ qui sont C^∞ par rapport à la variable E . De la même façon on a que

$$\tilde{\phi}_2 = e^{iS^-(E)/h} \phi_3$$

avec aussi une fonction S_- ayant un développement asymptotique en puissance de h :

$$S^-(E) = \sum_{j=0}^{+\infty} S_j^-(E) h^j$$

avec des coefficients S_j^- qui sont C^∞ par rapport à la variable E . Ces deux séries formelles $S^{+/-}$ sont appelées actions singulières. On posera pour la suite

$$\theta_{+/-}(E) := \frac{S^{+/-}(E)}{h}.$$

A ce stade là, il ne reste plus qu'à écrire les relations locales et globales pour montrer le théorème : soit u_h une solution globale de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$, telle que sur chacun des ouverts U_1, U_2, U_3, U_4 (voir Figure 37) on ait pour tout indices $j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$u_h|_{U_j} = x_j \phi_j;$$

on a alors que :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_-(E)} \\ e^{i\theta_+(E)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi il existe une fonction $u_h = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 = x_3 \phi_3 + x_4 \phi_4$ solution globale non triviale de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \det \left(Q - \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_-(E)} \\ e^{i\theta_+(E)} & 0 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \left(Q \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta_+(E)} \\ e^{-i\theta_-(E)} & 0 \end{pmatrix} - I_2 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\in \text{Spec}(T(\mathcal{E})); \end{aligned}$$

où on a posé

$$T(\mathcal{E}) := Q \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta_+(E)} \\ e^{-i\theta_-(E)} & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_-(E)} i e^{-\varepsilon(E)\pi/h} & e^{-i\theta_+(E)} \\ e^{-i\theta_-(E)} & e^{-i\theta_+(E)} i e^{-\varepsilon(E)\pi/h} \end{pmatrix}.$$

Et maintenant à ce stade là, pour conclure on utilise le lemme 1 de [Co-Pa1], rappelons le :

Lemme 4.2.10. [Co-Pa1] Soit $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice unitaire de $M_2(\mathbb{C})$, telle que $U \neq \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{-i\theta_2} & 0 \end{pmatrix}$; alors

$$1 \in \text{Spec}(U) \Leftrightarrow |a| \cos \left(\frac{\arg(da)}{2} - \arg(a) \right) = \cos \left(\frac{\arg(da)}{2} \right), \quad |d| = |a|.$$

En appliquant ce lemme à la matrice $T(\mathcal{E})$ on arrive bien à :

$$\begin{aligned} 1 \in \text{Spec}(T(\mathcal{E})) &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\frac{2\pi\varepsilon}{h}}}} \cos \left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \right) &= \cos \left(-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \ln(h) + \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon}{h} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne bien la formule proposée dans le théorème 4.2.2.

Remarque 4.2.11. Dans [Co-Pa3], Y. Colin de Verdière et B. Parisse montrent que dans le cas où $E = \lambda h$ avec $\lambda \in [-1, 1]$, les actions singulières peuvent s'écrire avec des invariants symplectiques :

$$S_0^{+/-}(E) = A_{+/-}(E) + \varepsilon_0(E) \ln |\varepsilon_0(E)| - \varepsilon_0(E)$$

$$\text{où } A_{+/-}(E) := \int_{P=E, +/-} \xi \, dx.$$

4.2.4 Du singulier au régulier

L'asymptotique de la formule de Y. Colin de Verdière et de B. Parisse dans les zones $\frac{\varepsilon}{h} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\varepsilon}{h} \rightarrow -\infty$ nous redonne bien les règles de quantification régulière. Soient $E_+, E_- \in [-1, 1]^2$ tels que $0 < E_- < E_+$ avec $E_- > \epsilon$ où ϵ est un réel strictement positif indépendant de h .

Haut de spectre

C'est le cas où $E \in I_+ := [E_-, E_+]$, l'ensemble $J_+ := p^{-1}(I_+)$ est alors un anneau topologique. Pour tout $E \in I_+$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{h} = +\infty$ donc en utilisant la formule de Stirling, pour $h \rightarrow 0$ on a

$$\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon}{h} \right) \right) = \frac{\varepsilon}{h} \ln \left| \frac{\varepsilon}{h} \right| - \frac{\varepsilon}{h} + o(1)$$

d'où pour $h \rightarrow 0$:

$$-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \ln(h) + \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon}{h} \right) \right) = -\frac{1}{h} A_{+/-}(E) + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

D'autre part comme $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+e^{\frac{2\pi\varepsilon}{h}}}} = 0$; l'asymptotique de la formule de Colin de Verdière-Parisse est alors :

$$0 = \cos \left(-\frac{A(E)}{2h} + \frac{\pi}{2} + o(1) \right)$$

où $A(E) = A_+(E) + A_-(E)$, ce qui donne bien les règles de Bohr-Sommerfeld régulières pour un puit : $\frac{1}{h} A(E) + o(1) \in \pi\mathbb{Z}$.

Bas de spectre

C'est le cas où $E \in I_- := [-E_+, -E_-]$, l'ensemble $J_- := p^{-1}(I_-)$ est alors la réunion de deux anneaux topologiques. Pour tout $E \in I_-$, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{h} = -\infty$ donc toujours avec la formule de Stirling, pour $h \rightarrow 0$:

$$\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon}{h} \right) \right) = \frac{\varepsilon}{h} \ln \left| \frac{\varepsilon}{h} \right| - \frac{\varepsilon}{h} + o(1)$$

d'où pour $h \rightarrow 0$:

$$-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \ln(h) + \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon}{h} \right) \right) = -\frac{1}{h} A_{+/-}(E) + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

D'autre part comme $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+e^{\frac{2\pi\varepsilon}{h}}}} = 1$; l'asymptotique de la Colin de Verdière-Parisse est :

$$\cos \left(\frac{A_+(E) - A_-(E)}{2h} + O(1) \right) = \cos \left(-\frac{A_+(E) + A_-(E)}{2h} + \frac{\pi}{2} + o(1) \right)$$

ce qui implique donc

$$\begin{cases} \frac{A_+(E)}{h} + \frac{\pi}{2} + O(1) \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \text{et} \\ \frac{A_-(E)}{h} + \frac{\pi}{2} + O(1) \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ce sont bien les règles de Bohr-Sommerfeld régulières pour les deux puits.

4.3 La forme du spectre autour de la singularité

4.3.1 Introduction et résultats

On va dans cette partie utiliser la formule du théorème 4.2.2 pour en déduire des informations sur le spectre semi-classique autour de l'origine de l'opérateur :

$$P_h := -\frac{h^2}{2}\Delta + V.$$

Précisément on va démontrer le :

Théorème 4.3.1. *Le spectre semi-classique de l'opérateur P_h sur le compact $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$ s'écrit comme la réunion disjointe*

$$(\alpha_k(h))_{k \in I_h} \sqcup (\beta_l(h))_{l \in J_h}$$

de deux familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ s'écrivant $\alpha_k(h) := \sqrt{h}\mathcal{A}_h(2\pi k)$, $\beta_l(h) := \sqrt{h}\mathcal{B}_h(2\pi l)$; les fonctions $\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{B}_h$ étant de classe C^∞ . De plus les familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ sont strictement décroissantes et en quinconce :

$$\beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

En outre l'interstice spectral est de l'ordre de $O(h/|\ln(h)|)$: il existe C, C' deux constantes réelles strictement positives indépendantes de h et de l'indicateur telles que :

$$\frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}, \quad \frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\beta_{k+1}(h) - \beta_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}.$$

Qui a pour conséquence immédiate le :

Corollaire 4.3.2. *Le nombre de valeurs propres de l'opérateur P_h dans le compact $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$ est de l'ordre de $|\ln(h)|/\sqrt{h}$.*

Avant de démontrer le théorème on va d'abord interpréter géométriquement le terme en $\ln(h)$.

4.3.2 Interprétation géométrique

Le terme $|\ln(h)|$ est la signature de la singularité hyperbolique : en effet géométriquement il correspond au temps de parcours du flot classique avec un point initial situé à une distance $\sqrt{h}$ de l'origine.

Théorème 4.3.3. Soit $m_h \in T^*\mathbb{R}$ de coordonnées $(\sqrt{h}, 0)$ dans le repère $(0, x, \xi)$. Alors le flot hamiltonien associé à p et de point initial m_h est périodique et sa période τ_h vérifie pour $h \rightarrow 0$ l'équivalent suivant :

$$\tau_h \sim \frac{|\ln(h)|}{K}$$

où K est une constante réelle non nulle et indépendante de h .

Démonstration. Sans perdre de généralités comme $V''(0) < 0$ on peut supposer que $-V''(0) = 1$. Ensuite notons par $\Lambda_h = p^{-1}\{p(m_h)\}$ l'unique fibre régulière contenant le point m_h ; le flot hamiltonien $\varphi_t(m_h)$ associé à p et de point initial m_h est alors périodique et supporté sur la fibre Λ_h . Pour estimer la période de ce flot on va faire deux étapes : d'abord une étape en se plaçant autour de la singularité (en 0) où on peut utiliser une forme normale classique symplectique pour estimer le temps de visite du flot dans un voisinage de la singularité. Ensuite la seconde étape consiste à estimer le temps de visite du flot en dehors de ce voisinage.

Première étape. Avant d'utiliser une forme normale on va d'abord faire un changement de repère préliminaire : en faisant un développement limité de la fonction V autour de 0 :

$$\begin{aligned} p(x, \xi) &= \frac{\xi^2}{2} + V(x) = \frac{\xi^2}{2} + V(0) + V'(0)x + \frac{V''(0)}{2}x^2 + o(x^3) \\ &= \frac{\xi^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^3); \end{aligned}$$

donc sur un voisinage de $(0, 0)$ nous avons que

$$p(x, \xi) = \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + o(x^3).$$

L'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

est un C^1 -difféomorphisme linéaire et son inverse φ^{-1} est égale à φ . Ainsi dans les nouvelles variables $(X, \Xi) := \varphi(x, \xi)$ on a

$$p(X, \Xi) = X\Xi + o(X^3\Xi^3);$$

et le point initial m_h a pour nouvelles coordonnées $m_h = \left(\sqrt{\frac{h}{2}}, \sqrt{\frac{h}{2}} \right)$. Maintenant le théorème 2 de forme normale de Moser (voir [Mos]) assure l'existence d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine, d'un symplectomorphisme $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ et d'une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que pour tout $(X, \Xi) \in U$ on ait

$$p(X, \Xi) = F(X\Xi).$$

Ainsi les équations de Hamilton du flot sont alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = F'(X\Xi) X \\ \dot{\Xi} = -F'(X\Xi) \Xi. \end{cases}$$

Notons bien que $t \mapsto X(t)\Xi(t)$ est constante, ainsi pour tout $t \geq 0$ on a l'égalité $X(t)\Xi(t) = X(0)\Xi(0) = \frac{h}{2}$. En posant $C_h := F'\left(\frac{h}{2}\right)$ et pour h assez petit pour que le point m_h soit dans l'ouvert U et que $F'\left(\frac{h}{2}\right) \neq 0$ (en effet $F'\left(\frac{h}{2}\right) = F'(0) + F''(0)\frac{h}{2} + o(h^2)$ avec $F'(0) \neq 0$); nous avons donc que pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} X(t) = \sqrt{\frac{h}{2}} e^{C_h t} \\ \Xi(t) = \sqrt{\frac{h}{2}} e^{-C_h t}. \end{cases}$$

Or comme U est un ouvert non vide contenant 0, il existe une constante $A > 0$ telle que la boule $B_\infty(0, A)$ (pour la distance infinie de $\mathbb{R}^2$) de centre 0 et de rayon A soit incluse dans U . Sans perdre de généralité on va supposé que $C_h < 0$. On va calculer le temps $\tau_1(h)$ pour que le flot hamiltonien partant du point $m_h = (X(0), \Xi(0)) = \left(\sqrt{\frac{h}{2}}, \sqrt{\frac{h}{2}}\right)$ sorte de la boule carré $B_\infty(0, A)$: il faut donc trouver t tel que $\Xi(t) = A$. On a alors immédiatement que :

$$\begin{aligned} \tau_1(h) &= \frac{1}{C_h} \ln \left(\sqrt{\frac{h}{2}} \right) - \frac{1}{C_h} \ln(A) \\ &= \frac{1}{2C_h} \ln(h) - \frac{1}{2C_h} \ln(2) - \frac{1}{C_h} \ln(A). \end{aligned}$$

Ainsi sur une période complète du flot hamiltonien partant du point m_h le temps total de parcours du flot dans la boule $B_\infty(0, A)$ est $2\tau_1(h)$.

Seconde étape. Il reste donc maintenant à estimer le temps de parcours du flot hamiltonien en dehors de la boule $B_\infty(0, A)$. En fait, on va montrer que ce temps est négligeable par rapport à $\tau_1(h)$. Considérons alors le point $a = (0, A)$ et comme l'unique fibre $\Lambda_A = p^{-1}\{p(a)\}$ qui contienne ce point a ne contient pas de singularité en dehors de la boule $B_\infty(0, A)$, le flot hamiltonien de point initial a va nécessairement revenir en temps fini dans la boule $B_\infty(0, A)$, on peut alors considérer le réel :

$$t^* := \inf \left\{ t > 0; \varphi_t(a) \in \overline{B_\infty(0, A)} \right\}$$

et poser $b := \varphi_{t^*}(a)$. Notons aussi par T_a l'hyperplan transverse au flot $(\varphi_t(a))_{t \geq 0}$ au point a , et par T_b l'hyperplan transverse au flot $(\varphi_t(a))_{t \geq 0}$ au point b . Comme le flot hamiltonien est associé au champs de vecteur C^∞

$$\chi_p = \begin{pmatrix} \Xi \\ V'(X) \end{pmatrix}$$

qui ne s'annule pas en a et en b , par un théorème classique de calcul différentiel de type application de Poincaré (voir par exemple [Lau]) il existe Ω_a un voisinage ouvert de a dans le plan T_a , une fonction θ de Ω_a dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\theta(a) = 0$ avec les propriétés suivantes :

- 1) pour tout $x \in \Omega_a$ on a $\varphi_{t^*+\theta(x)}(x) \in T_b$;
- 2) l'application $x \mapsto \varphi_{t^*+\theta(x)}(x)$ est un difféomorphisme local de Ω_a dans Ω_b un voisinage ouvert de b dans le plan T_b .

Autrement dit, partant d'un point voisin de a sur l'hyperplan T_a le flot rencontre l'autre hyperplan T_b en un temps voisin de t^* qui est une fonction différentiable du point de départ. Donc en particulier comme Ω_a est un voisinage ouvert de a dans $T_a \simeq \mathbb{R}$, par compacité locale il existe K_a un compact de $\mathbb{R}$ tel que $a \in K_a \subset \Omega_a$ avec $K_a \neq \{a\}$ et donc évidemment pour tout $x \in K_a$ on a $|\theta(x)| \leq \sup_{x \in K_a} |\theta(x)|$. Ainsi, comme :

$$\varphi_{\tau_1(h)}(m_h) = \left(\frac{h}{2A}, A \right)$$

pour h assez petit on a que $\varphi_{\tau_1(h)}(m_h) \in K_a \times \{A\}$ et donc :

$$\left| \theta \left(\varphi_{\tau_1(h)}(m_h) \right) \right| \leq \sup_{x \in K_a} |\theta(x)| ;$$

d'où au final la période totale τ_h du flot hamiltonien est égale à

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \tau_1(h) + \theta \left(\varphi_{\tau_1(h)}(m_h) \right) \\ &= \frac{1}{2C_h} \ln(h) - \frac{1}{2C_h} \ln(2) - \frac{1}{C_h} \ln(A) + \theta \left(\varphi_{\tau_1(h)}(m_h) \right) ; \end{aligned}$$

et donc pour $h \rightarrow 0$ on a l'équivalent suivant $\tau(h) \sim \frac{\ln(h)}{2F'(\frac{h}{2})}$; et comme $F'(\frac{h}{2}) = F'(0) + F''(0)\frac{h}{2} + o(h^2)$ avec $F'(0) \neq 0$; pour $h \rightarrow 0$ on a l'équivalent $\tau(h) \sim \frac{\ln(h)}{2F'(0)}$. $\square$

Remarque 4.3.4. Pour un calcul voisin voir l'article de S. De Bièvre et D. Robert [DB-Ro].

4.3.3 Démonstration du théorème 4.3.1

Stratégie

La formule du théorème 4.2.2 est une équation fonctionnelle implicite ; on va inverser (au sens bijectif) cette fonction de manière à pouvoir expliciter les valeurs propres. Pour cela on va utiliser ce théorème avec $E = \lambda h^\alpha$ où la variable $\lambda \in [-1, 1]$ et le paramètre $\alpha \geq 0$. Par la suite on va voir que si l'on choisit $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$ de sorte qu'on ait l'inclusion évidente $[-h^\alpha, h^\alpha] \subseteq [-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$, on peut montrer assez facilement le théorème 4.3.1 avec des techniques d'analyse réelle assez basiques. Afin de comprendre pourquoi on suppose que le paramètre $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$, plutôt qu'écrire la preuve directement avec $\alpha = \frac{1}{2}$ on écrira toute la preuve avec $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$ (voir dans la preuve de la proposition 4.3.5 les majorants des égalités 4.4 et 4.5).

Prologue

On va commencer par des notations : pour alléger l'écriture on définit sur le compact $[-\delta, \delta]$ la fonction de la variable E :

$$F_h(E) := -\frac{\theta_+(E) + \theta_-(E)}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon(E)}{h} \ln(h) + \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(E)}{h} \right) \right)$$

et sur le compact $[-1, 1]$ la fonction de la variable λ :

$$\begin{aligned} f_h(\lambda) &:= F_h(\lambda h^\alpha) \\ &= -\frac{\theta_+(\lambda h^\alpha) + \theta_-(\lambda h^\alpha)}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \ln(h) + \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right); \end{aligned}$$

puis sur $[-\delta, \delta]$ la fonction de la variable E :

$$G_h(E) := \frac{\theta_+(E) - \theta_-(E)}{2}$$

et sur $[-1, 1]$ la fonction de la variable λ

$$g_h(\lambda) := G_h(\lambda h^\alpha) = \frac{\theta_+(\lambda h^\alpha) - \theta_-(\lambda h^\alpha)}{2}.$$

Pour finir avec les notations, sur le compact $[-1, 1]$, on définit les deux fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_h(\lambda) &:= f_h(\lambda) - \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right); \\ \mathcal{Z}_h(\lambda) &:= f_h(\lambda) + \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right). \end{aligned}$$

Le théorème 4.2.2 affirme alors exactement que :

$$\begin{aligned} h^\alpha \lambda \in \Sigma_h(P_{h'}[-h^\alpha, h^\alpha]) &\Leftrightarrow \frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} = \cos(f_h(\lambda)) \\ &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f_h(\lambda) \equiv \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) [2\pi] \\ \text{ou} \\ f_h(\lambda) \equiv -\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) [2\pi] \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \mathcal{Y}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \mathcal{Z}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

L'idée pour expliciter le spectre est d'inverser les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ pour avoir une formule explicite. On va d'abord montrer que :

Proposition 4.3.5. *Pour h assez petit, la fonction $\mathcal{Y}_h$ (resp. la fonction $\mathcal{Z}_h$) réalise une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $\mathcal{Y}_h([-1, 1])$ (resp. sur $\mathcal{Z}_h([-1, 1])$). En outre, on a uniformément sur le compact $[-1, 1]$ que*

$$\frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \leq \mathcal{Y}'_h(\lambda) \leq \frac{\alpha h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}).$$

De même pour la fonction $\mathcal{Z}_h$.

Démonstration. Avec la définition de la fonction $\mathcal{Y}_h$, pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}'_h(\lambda) &= f'_h(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) \right] \\ &= -h^\alpha \frac{\theta'_+(\lambda h^\alpha) + \theta'_-(\lambda h^\alpha)}{2} + h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \ln(h) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

On va estimer, un par un, les quatres éléments de cette somme. Comme la fonction $E \mapsto -(\Theta'_+(E) + \Theta'_-(E))/2$ admet un développement asymptotique en puissance de h de -1 à $+\infty$, avec des coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à E , on a donc que la fonction $\lambda \mapsto -h^\alpha \frac{\theta'_+(\lambda h^\alpha) + \theta'_-(\lambda h^\alpha)}{2}$ admet un développement asymptotique de $\alpha - 1$ à $+\infty$, avec des coefficients $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à λ , ainsi nous avons sur le compact $[-1, 1]$

$$-h^\alpha \frac{\theta'_+(\lambda h^\alpha) + \theta'_-(\lambda h^\alpha)}{2} = O(h^{\alpha-1}).$$

Ensuite on va estimer le terme $\lambda \mapsto h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \ln(h)$: en utilisant le développement asymptotique de la fonction ε et en le dérivant on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \varepsilon'_j(\lambda h^\alpha) h^j = \varepsilon'_0(\lambda h^\alpha) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon'_j(\lambda h^\alpha) h^j \\ &= \varepsilon'_0(0) + O(h^\alpha) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon'_j(\lambda h^\alpha) h^j \\ &= \frac{1}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^\alpha) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon'_j(\lambda h^\alpha) h^j. \end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons que sur le compact $[-1, 1]$

$$h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \ln(h) = \frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1} \ln(h)) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon'_j(\lambda h^\alpha) h^{j+\alpha-1} \ln(h).$$

Estimons maintenant le terme $\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) \right]$: par un simple calcul de dérivée on a pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ l'égalité :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(g_h(\lambda))g'_h(\lambda)[1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)] + \pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\cos(g_h(\lambda))\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}{(1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h))\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}} \\
&= \frac{\sin(g_h(\lambda))g'_h(\lambda)}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}} \\
&\quad + \frac{\pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\cos(g_h(\lambda))\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}{(1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h))\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}}.
\end{aligned}$$

Or pour tout $\lambda \in [-1, 1]$, comme : $1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) \geq 1$ on a donc la minoration :

$$\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))} \geq \sqrt{1 - \cos^2(g_h(\lambda))} = |\sin(g_h(\lambda))|;$$

d'où pour tout $\lambda \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\sin(g_h(\lambda))g'_h(\lambda)}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}} \right| \leq |g'_h(\lambda)| \\
&= \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\theta_+(\lambda h^\alpha) - \theta_-(\lambda h^\alpha)}{2} \right] \right| = h^\alpha \left| \frac{\theta'_+(\lambda h^\alpha) - \theta'_-(\lambda h^\alpha)}{2} \right| \\
&= \frac{h^\alpha}{2} \left| \frac{S'_{0,+}(\lambda h^\alpha) - S'_{0,-}(\lambda h^\alpha)}{h} \right. \\
&\quad \left. + (S'_{1,+}(\lambda h^\alpha) - S'_{1,-}(\lambda h^\alpha)) + \sum_{j=2}^{+\infty} (S'_{j,+}(\lambda h^\alpha) - S'_{j,-}(\lambda h^\alpha)) h^{j-1} \right| \\
&= O(h^{\alpha-1})
\end{aligned}$$

sur tout le compact $[-1, 1]$. Ensuite comme pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$:

$$\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))} \geq \exp(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h);$$

nous avons alors que pour tout scalaire $\lambda \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\cos(g_h(\lambda))\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}{(1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h))\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}} \right| \\
&\leq \left| \pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha) \right| \exp(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h);
\end{aligned}$$

avec d'une part

$$\begin{aligned}
\left| \pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha) \right| &= \left| \frac{\pi h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) + \sum_{j=1}^{+\infty} \pi \varepsilon'_j(\lambda h^\alpha) h^{j+\alpha-1} \right| \\
&= O(h^{\alpha-1})
\end{aligned}$$

sur le compact $[-1, 1]$, et d'autre part

$$\exp(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) = \exp\left(\frac{\pi\lambda h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) + \sum_{j=1}^{+\infty} \pi\varepsilon_j(\lambda h^\alpha)h^{j-1}\right); \quad (4.4)$$

comme $\alpha \geq \frac{1}{2}$, on en déduit alors que sur le compact $[-1, 0]$

$$\lambda \mapsto \exp(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) = O(1);$$

ainsi sur tout le compact $[-1, 0]$

$$\lambda \mapsto \left| \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \cos(g_h(\lambda)) \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}{(1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)) \sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}} \right| = O(h^{\alpha-1}).$$

D'autre part, pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ on a aussi

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \cos(g_h(\lambda)) \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}{\underbrace{(1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h))}_{\geq \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)} \underbrace{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}}_{\geq \exp(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right| \\ & \leq \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}{\exp(3\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)} \\ & = \underbrace{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha)}_{=O(h^{\alpha-1})} \exp(-\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h); \end{aligned}$$

avec

$$\exp(-\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) = \exp\left(-\frac{\pi\lambda h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) - \sum_{j=1}^{+\infty} \pi\varepsilon_j(\lambda h^\alpha)h^{j-1}\right); \quad (4.5)$$

donc toujours comme $\alpha \geq \frac{1}{2}$, on en déduit que sur tout le compact $[0, 1]$ on a

$$\lambda \mapsto \exp(-\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) = O(1);$$

ainsi sur tout le compact $[0, 1]$ on obtient

$$\lambda \mapsto \left| \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \cos(g_h(\lambda)) \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}{(1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)) \sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h) - \cos^2(g_h(\lambda))}} \right| = O(h^{\alpha-1}).$$

On vient donc de montrer que sur $[-1, 1]$

$$\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) \right] = O(h^{\alpha-1}).$$

Ensuite, pour finir, on va calculer et estimer la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right) \right];$$

pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\operatorname{Im} \left(\ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right) \right) \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right) \right) \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) i h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right)} \right] \\ &= h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \operatorname{Re} \left[\frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right)} \right] = h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right); \end{aligned}$$

où Ψ est la fonction di-Gamma définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$ par $\Psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ (voir [Ab-St]). Rappelons que pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$,

$$\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} = \frac{\lambda h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j(\lambda h^\alpha) h^{j-1}.$$

Donc comme la fonction $x \mapsto \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + ix \right) \right)$ est paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'encadrement pour tout $\lambda \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i O(h^{2\alpha-1}) \right) \right) &\leq \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right) \\ &\leq \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{i h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + i O(h^{2\alpha-1}) \right) \right). \end{aligned}$$

Alors d'une part, comme $\alpha \geq \frac{1}{2}$ nous avons que sur le compact $[-1, 1]$:

$$\operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i O(h^{2\alpha-1}) \right) \right) = O(1);$$

d'autre part, comme (voir [Ab-St]) pour $|y| \rightarrow +\infty$

$$\operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + iy \right) \right) = \ln |y| + O\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

on en déduit (car $\alpha < 1$)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{i h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + i O(h^{2\alpha-1}) \right) \right) \\ &= \ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right| + O \left(\frac{1}{\left(\frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right)^2} \right); \end{aligned}$$

puis comme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(\frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right)^2} = \frac{1}{\frac{h^{2\alpha-2}}{-V''(0)} + O(h^{3\alpha-2})} \\ & = \frac{-V''(0)h^{2-2\alpha}}{1 + O(h^\alpha)} = -V''(0)h^{2-2\alpha} + O(h^{2-\alpha}) = O(h^{2-2\alpha}); \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} & \ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right| = \ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} (1 + O(h^\alpha)) \right| \\ & = \ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} \right| + \ln |1 + O(h^\alpha)| = (\alpha - 1) \ln |h| - \ln \left| \sqrt{-V''(0)} \right| + O(h^\alpha); \end{aligned}$$

on en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{ih^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + iO(h^{2\alpha-1}) \right) \right) \\ & = (\alpha - 1) \ln |h| - \ln \left| \sqrt{-V''(0)} \right| + O(h^\alpha) + O(h^{2-2\alpha}). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ nous avons l'encadrement :

$$m_\alpha(h) \leq \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} \right) \right) \right] \leq M_\alpha(h);$$

où les fonctions $m(\lambda) = m(\lambda, \alpha, h)$ et $M(\lambda) = M(\lambda, \alpha, h)$ sont définies pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ par :

$$\begin{aligned} m(\lambda) &:= h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + iO(h^{2\alpha-1}) \right) \right) \\ &= O(h^{\alpha-1}); \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M(\lambda) &:= h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{ih^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + iO(h^{2\alpha-1}) \right) \right) \\ &= \left[\frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right] \left[(\alpha - 1) \ln |h| - \ln \left| \sqrt{-V''(0)} \right| + O(h^\alpha) + O(h^{2-2\alpha}) \right] \\ &= \frac{(\alpha - 1)h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} \ln(h) + O(h^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Ainsi au final, on en déduit que pour tout $\lambda \in [-1, 1]$:

$$\frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \leq \mathcal{Y}'_h(\lambda) \leq \frac{\alpha h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}).$$

Ensuite pour h assez petit on conclut que pour tout $\lambda \in [-1, 1]$, $\mathcal{Y}'_h(\lambda) < 0$ et donc la fonction $\mathcal{Y}_h$ est bien strictement décroissante sur le compact $[-1, 1]$. De même pour la fonction $\mathcal{Z}_h$. $\square$

Existence des deux familles de valeurs propres

Comme les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sont toutes deux bijectives, considérons leurs bijections réciproques, que l'on renote par :

$$\mathcal{A}_h := \mathcal{Y}_h^{-1} : \mathcal{Y}_h([-1, 1]) \rightarrow [-1, 1];$$

$$\mathcal{B}_h := \mathcal{Z}_h^{-1} : \mathcal{Z}_h([-1, 1]) \rightarrow [-1, 1].$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante des valeurs propres semi-classique devient :

$$\begin{aligned} & h^\alpha \lambda \in \Sigma_h(P_h, [-h^\alpha, h^\alpha]) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mathcal{Y}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z} & \text{avec } \lambda \in [-1, 1] \\ \text{ou} \\ \mathcal{Z}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z} & \text{avec } \lambda \in [-1, 1] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \lambda \in \left(\bigcup_{k \in I_h} \mathcal{A}_h(2\pi k) \right) \cup \left(\bigcup_{l \in J_h} \mathcal{B}_h(2\pi l) \right) \end{aligned}$$

où on a posé

$$I_h := \{k \in \mathbb{Z}, 2\pi k \in \mathcal{Y}_h([-1, 1])\} = \frac{\mathcal{Y}_h([-1, 1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z},$$

$$J_h := \{l \in \mathbb{Z}, 2\pi l \in \mathcal{Z}_h([-1, 1])\} = \frac{\mathcal{Z}_h([-1, 1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}.$$

En résumant nous avons alors la :

Proposition 4.3.6. *L'équation $(P_h - h^\alpha \lambda I_d)u_h = O(h^\infty)$ admet une solution $u_h \in L^2(\mathbb{R})$ non triviale avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}\{0\}$ si et seulement si :*

$$\lambda \in \left(\bigcup_{k \in I_h} \mathcal{A}_h(2\pi k) \right) \cup \left(\bigcup_{l \in J_h} \mathcal{B}_h(2\pi l) \right)$$

où $\mathcal{A}_h = \mathcal{Y}_h^{-1}$, $\mathcal{B}_h = \mathcal{Z}_h^{-1}$ et $I_h = \frac{\mathcal{Y}_h([-1, 1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$, $J_h = \frac{\mathcal{Z}_h([-1, 1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$.

Notons bien que les ensembles I_h et J_h ne sont pas vides, en effet on a même un encadrement du nombre d'éléments de ces deux ensembles :

Proposition 4.3.7. *Pour h assez petit, nous avons les encadrements suivants :*

$$E \left[-\frac{\alpha h^{\alpha-1} \ln(h)}{\pi \sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \right] \leq \text{Card}(I_h) \leq E \left[-\frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\pi \sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \right] + 1$$

où $E[x]$ désigne la partie entière de x . On a le même encadrement pour le cardinal de l'ensemble J_h .

Démonstration. On va faire la preuve de la proposition uniquement pour l'ensemble I_h . Comme la fonction $\mathcal{Y}_h$ est strictement décroissante sur le compact $[-1, 1]$, le diamètre du compact $\mathcal{Y}_h([-1, 1])$ est simplement donné par la relation :

$$\text{diam}(\mathcal{Y}_h([-1, 1])) = \mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Y}_h(1).$$

Par le théorème des accroissements finis il existe un réel $\xi = \xi(h) \in]-1, 1[$ tel que :

$$\mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Y}_h(1) = -2\mathcal{Y}'_h(\xi) > 0.$$

On obtient donc avec l'estimation de la fonction $\mathcal{Y}'_h$ l'encadrement suivant :

$$-2\alpha \frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \leq \text{diam}(\mathcal{Y}_h([-1, 1])) \leq \frac{-2h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}).$$

La suite de la preuve est alors directe. $\square$

Quinconce et interstice

Comme on l'a vu, dans le compact $[-h^\alpha, h^\alpha]$ (avec $\alpha \geq \frac{1}{2}$) le spectre semi-classique de l'opérateur :

$$P_h = -\frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V$$

est constitué de deux familles : d'abord la famille

$$\alpha_k(h) := h^\alpha \mathcal{A}_h(2\pi k), k \in I_h;$$

puis la famille

$$\beta_l(h) := h^\alpha \mathcal{B}_h(2\pi l), l \in J_h.$$

Donnons les propriétés importantes de ces deux familles de nombres réels

Proposition 4.3.8. *Pour h assez petit, les deux familles de réels $(\alpha_k(h))_{k \in I_h}$ et $(\beta_l(h))_{l \in J_h}$ sont strictement décroissantes.*

Démonstration. Cela tient juste du fait que les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissantes, donc leurs bijections réciproques le sont aussi. $\square$

Proposition 4.3.9. *La famille*

$$\left\{ (\alpha_n(h))_{n \in I_h}, (\beta_l(h))_{l \in J_h} \right\}$$

est une famille de réels deux à deux bien distincts ; en d'autre termes :

$$(\alpha_n(h))_{n \in I_h} \cap (\beta_l(h))_{l \in J_h} = \emptyset.$$

Démonstration. Les familles $\{\alpha_n(h)\}_{n \in I_h}$ et $\{\beta_l(h)\}_{l \in J_h}$ étant des familles de réels strictement décroissantes, il suffit juste de vérifier que ces deux familles n'ont pas de valeur commune. Raisonnons par l'absurde : supposons donc qu'il existe un couple $(k, l) \in I_h \times J_h$ tel que $\alpha_k(h) = \beta_l(h)$, ie : $\mathcal{A}_h(2\pi k) = \mathcal{B}_h(2\pi l)$. En notant par λ cette valeur commune, c'est-à-dire :

$$\lambda := \mathcal{A}_h(2\pi k) = \mathcal{B}_h(2\pi l);$$

puis en appliquant les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sur le réel λ , on a que

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) = 2\pi k \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ et } \mathcal{Z}_h(\lambda) = 2\pi l \in 2\pi\mathbb{Z}$$

et par conséquent :

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z};$$

donc par définition des fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ nous avons

$$-2 \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

d'où :

$$\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right) \in \pi\mathbb{Z};$$

ainsi nécessairement on a

$$\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \in \{-1, 1\}.$$

Ce qui implique finalement l'égalité :

$$\underbrace{\cos^2(g_h(\lambda))}_{\leq 1} = \underbrace{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}_{> 1}$$

qui est absurde, d'où la proposition. $\square$

On va maintenant s'intéresser à comparer ces deux familles entre elles, pour cela il faut prendre des indices appartenant à $I_h \cap J_h$. On va donc d'abord s'assurer que l'ensemble $I_h \cap J_h \subset \mathbb{Z}$ est non vide.

Proposition 4.3.10. *Pour h assez petit, nous avons*

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\alpha(\xi - 1)h^{\alpha-1} \ln(h)}{\pi \sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \right] &\leq \text{Card}(I_h \cap J_h) \\ &\leq E \left[\frac{(\xi - 1)h^{\alpha-1} \ln(h)}{\pi \sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \right] + 1 \end{aligned}$$

où $\xi = \xi(h) \in]-1, 1[$.

Démonstration. Écrivons juste la différence entre les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$, pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ nous avons

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda) = \underbrace{-2 \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right)}_{\in [-2\pi, 0]}$$

donc en particulier

$$\mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Z}_h(-1) < 0 \text{ et } \mathcal{Y}_h(1) - \mathcal{Z}_h(1) < 0$$

(pour le strict dans les inégalités, voir la démonstration de la précédente proposition); et donc

$$\mathcal{Y}_h(1) < \mathcal{Z}_h(1) < \mathcal{Y}_h(-1) < \mathcal{Z}_h(-1).$$

Ensuite comme d'après la preuve de la proposition 4.3.5 on a l'encadrement :

$$-2\alpha \frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \leq \text{diam}(\mathcal{Y}_h([-1, 1])) \leq \frac{-2h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1})$$

et en utilisant aussi que pour tout $\lambda \in [-1, 1]$

$$|\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda)| \leq 2\pi$$

on voit immédiatement que pour h assez petit $\mathcal{Y}_h([-1, 1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1, 1]) \neq \emptyset$; et on a même mieux, en effet comme :

$$\text{diam}(\mathcal{Y}_h([-1, 1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1, 1])) = \mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Z}_h(1)$$

puis que

$$\mathcal{Z}_h(1) < \mathcal{Y}_h(-1) < \mathcal{Z}_h(-1)$$

par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel $\xi = \xi(h) \in]-1, 1[$ tel que $\mathcal{Y}_h(-1) = \mathcal{Z}_h(\xi)$, par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} \text{diam}(\mathcal{Y}_h([-1, 1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1, 1])) &= \mathcal{Z}_h(\xi) - \mathcal{Z}_h(1) \\ &= \mathcal{Z}'_h(\theta)(\xi - 1); \end{aligned}$$

où $\theta = \theta(h) \in]\xi, 1[$ est donné par le théorème des accroissements finis; d'où au final l'encadrement :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha h^{\alpha-1} \ln(h)(\xi - 1)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) &\leq \text{diam}(\mathcal{Y}_h([-1, 1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1, 1])) \\ &\leq \frac{h^{\alpha-1} \ln(h)(\xi - 1)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

et on en déduit alors la proposition. $\square$

Proposition 4.3.11. Pour h assez petit et pour tout $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$

$$\alpha_k(h) < \beta_k(h).$$

Démonstration. On sait déjà que pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda) = \underbrace{-2 \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right)}_{\in [-2\pi, 0]} \leq 0.$$

La proposition 4.3.9 nous informe de plus que la précédente inégalité est stricte : pour tout $\lambda \in [-1, 1]$

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) < \mathcal{Z}_h(\lambda).$$

De là on déduit que pour tout indice $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Y}_h(\mathcal{A}_h(2\pi k)) < \mathcal{Z}_h(\mathcal{A}_h(2\pi k))$$

ie :

$$2\pi k < \mathcal{Z}_h(\mathcal{A}_h(2\pi k)).$$

Comme par hypothèse $2\pi k \in \mathcal{Z}_h([-1, 1])$ en appliquant sur la dernière inégalité la fonction $\mathcal{B}_h : \mathcal{Z}_h([-1, 1]) \rightarrow [-1, 1]$ (qui est strictement décroissante) on arrive à :

$$\mathcal{B}_h(2\pi k) > \mathcal{A}_h(2\pi k)$$

et donc

$$\alpha_k(h) < \beta_k(h).$$

□

Ensuite dans le même style on a la :

Proposition 4.3.12. Pour h assez petit et pour tout indice $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$ nous avons :

$$\beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

Démonstration. Pour tout indice $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$, considérons les deux réels $\theta_k = \theta_k(h)$, $\zeta_k = \zeta_k(h)$ donnés par

$$\theta_k := \mathcal{B}_h(2\pi k) \in [-1, 1];$$

$$\zeta_k := \mathcal{A}_h(2\pi k) - \mathcal{A}_h(2\pi(k-1)) < 0.$$

Alors comme :

$$\begin{aligned} & \mathcal{Y}_h(\theta_k + \zeta_k) - \mathcal{Z}_h(\theta_k) \\ &= f_h(\theta_k + \zeta_k) - f_h(\theta_k) - \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\theta_k + \zeta_k))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon((\theta_k + \zeta_k)h^\alpha)/h)}} \right) \\ & \quad - \arccos \left(\frac{\cos(g_h(\theta_k))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon((\theta_k + \zeta_k)h^\alpha)/h)}} \right) \\ &= f_h(\theta_k + \zeta_k) - f_h(\theta_k) + O(1) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{f'_h(\tau_k)\zeta_k}_{>0 \text{ (car } \zeta_k < 0)} + O(1)$$

où $\tau_k = \tau_k(h)$ est donné par le théorème des accroissements finis ; alors :

$$\mathcal{Y}_h(\theta_k + \zeta_k) > \mathcal{Z}_h(\theta_k)$$

ie :

$$\mathcal{Y}_h(\mathcal{B}_h(2\pi k) + \zeta_k) > 2\pi k.$$

D'où en appliquant la fonction $\mathcal{A}_h$ (qui est strictement décroissante) nous obtenons alors :

$$\mathcal{B}_h(2\pi k) + \zeta_k < \mathcal{A}_h(2\pi k)$$

et ainsi

$$\mathcal{B}_h(2\pi k) + \mathcal{A}_h(2\pi k) - \mathcal{A}_h(2\pi(k-1)) < \mathcal{A}_h(2\pi k)$$

soit encore

$$\beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

□

Pour finir, estimons la distance entre les valeurs propres :

Proposition 4.3.13. *Il existe C et C' deux nombres réels strictement positifs et indépendants de h tels que :*

$$\frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}, \quad \frac{Ch}{|\ln(h)|} \leq |\beta_{l+1}(h) - \beta_l(h)| \leq \frac{C'h}{|\ln(h)|}.$$

Démonstration. Or pour tout indice $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| &= h^\alpha |\mathcal{A}_h(2\pi(k+1)) - \mathcal{A}_h(2\pi k)| \\ &= 2\pi h^\alpha |\mathcal{A}'_h(\xi_k)| \end{aligned}$$

où le réel $\xi_k = \xi_k(h) \in]k, k+1[$ est donné par le théorème des accroissements finis. Il reste alors à écrire simplement que

$$|\mathcal{A}'_h(\xi_k)| = \left| \frac{1}{\mathcal{Y}'_h(\mathcal{A}_h(\xi_k))} \right|$$

pour avoir l'encadrement suivant :

$$\frac{2\pi h^\alpha}{\frac{h^{\alpha-1}|\ln(h)|}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1})} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{2\pi h^\alpha}{\frac{\alpha h^{\alpha-1}|\ln(h)|}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1})}.$$

Ensuite il reste juste à noter que :

$$\frac{h^\alpha}{h^{\alpha-1}|\ln(h)| + O(h^{\alpha-1})} = \frac{h}{|\ln(h)| + O(1)}$$

$$= \frac{h}{|\ln(h)|} \frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{|\ln(h)|}\right)} = \frac{h}{|\ln(h)|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\ln(h)|}\right)\right)$$

et comme pour h assez petit $h / \ln(h)^2 \ll h / |\ln(h)|$ on démontre la proposition. $\square$

En résumant toute cette partie 4, on a bien montré le théorème 4.3.1.

4.3.4 Quelques remarques

Pour finir, on va donner deux remarques, la première est technique et concerne le diamètre du compact où le théorème principal 4.3.1 est valide. Dans la seconde remarque on tente de donner un panorama global sur l'allure du spectre du double puits à l'aide des résultats connus sur le haut de spectre [Ram], [Col8] et sur le bas de spectre [He-Sj1]. Quelques tracés numériques sont aussi proposés.

Une remarque technique

Dans la preuve du théorème 4.3.1 on a vu la nécessité technique d'avoir supposé $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (voir en particulier dans la preuve de la proposition 4.3.5 les majorants des égalités 4.4 et 4.5). Cependant, malgré cette hypothèse, le théorème 4.3.1 reste assez intéressant, notamment en vue d'applications : par exemple pour l'étude de la dynamique quantique d'un paquet d'ondes, en effet la taille $\sqrt{h}$ est (modulo un facteur multiplicatif) la taille d'un boule d'aire h , c'est à dire en physique la taille d'un quanta.

Une remarque sur le spectre global du double puits

Pour fixer les idées, on va supposer que le double puits est symétrique (la fonction V est paire), le bas du spectre est alors uniquement constitué de quasi-doublets¹ de valeurs propres distant l'un de l'autre de h . Le haut de spectre est constitué de valeurs propres régulièrement espacées de taille h (voir [He-Ro], [Col8]). Sur la figure 38 on voit le passage du spectre quasi-double correspondant au bas du spectre au spectre simple correspondant au haut du spectre. On voit aussi que les valeurs propres se resserrent entre elles au passage du maximum local et s'écartent lorsque on monte vers le haut du spectre.

¹En fait les valeurs propres sont toutes simples, mais la présence des deux puits induit deux spectres exponentiellement proches l'un de l'autre ; voir [He-Sj1].

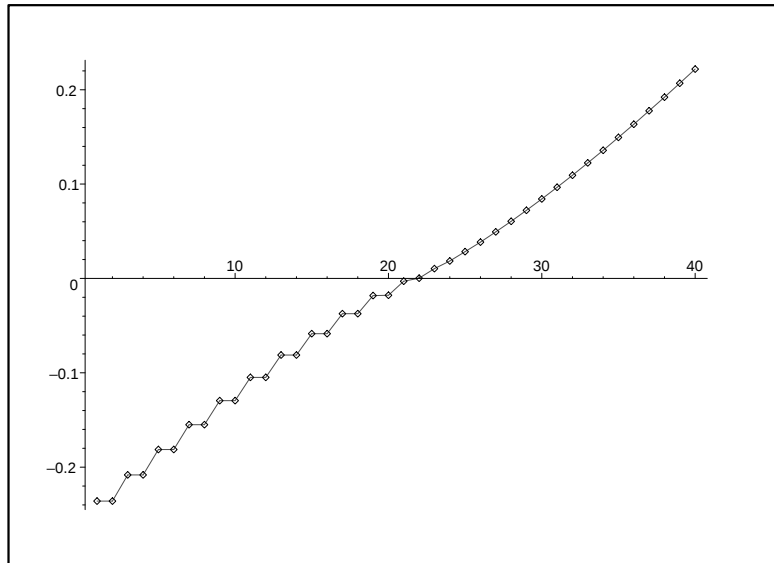


Fig. 38. Tracé numérique d'une partie du spectre du double puits symétrique : sur l'axe des abscisses on trouve un indexage des valeurs propres, et sur l'axe des ordonnées on trouve les valeurs propres.

La figure 39 ci dessous décrit la différence entre 2 valeurs propres consécutives : en passant du bas au haut du spectre on voit que l'oscillation induite par le phénomène de quasi-doublets diminue jusqu'à disparaître. Sur cette même figure 39 on distingue aussi très bien le resserrement "logarithmique" des valeurs propres au passage du maximum local, puis l'écartement, lui aussi "logarithmique", des valeurs propres quand on remonte dans la haut du spectre.

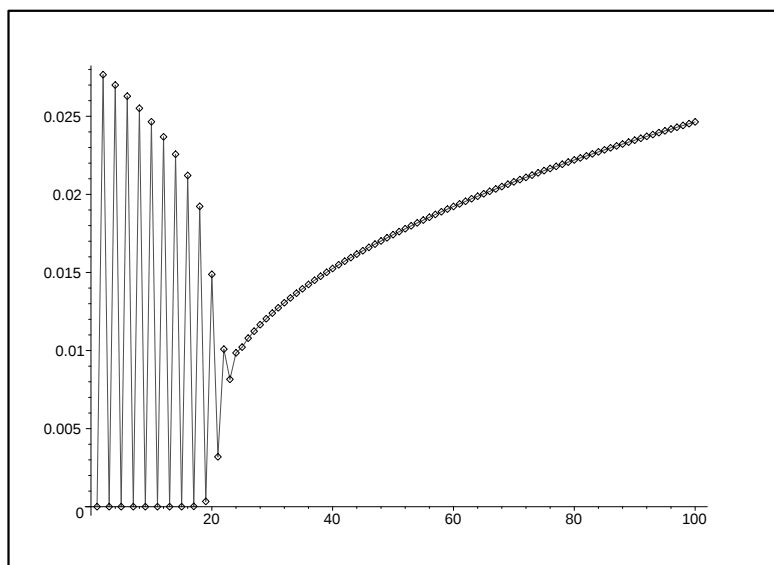


Fig. 39. Tracé numérique de la différence entre 2 valeurs propres consécutives dans le cas du double puits symétrique : sur l'axe des abscisses on trouve un indexage des valeurs propres, et sur l'axe des ordonnées on trouve la différence entre 2 valeurs propres consécutives.

Cet chapitre donne le trait d'union entre ces deux zones : même si les transitions restent mathématiquement délicates à écrire, on peut imaginer qu'en partant du bas de spectre et en montant vers le maximum local, la quinconce exponentielle des quasi-doublets augmente jusqu'à apparaître clairement. Dans le même temps, toutes les valeurs propres se resserrent (passage de la distance spectrale h à $h/|\ln(h)|$). Ensuite quand on continue de monter du maximum vers le haut de spectre, il faut là aussi imaginer que la quinconce devient équidistante et que les valeurs propres s'écartent (passage de la distance $h/|\ln(h)|$ à h).

Chapitre 5

Dynamique hyperbolique

5.1 Introduction

Ce chapitre propose une étude la dynamique semi-classique en temps long dans le cas d'un hamiltonien quantique de dimension 1 avec une singularité hyperbolique ; c'est-à-dire dans le cas d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel type double puits. Ce chapitre est l'analogue hyperbolique du chapitre 2. A l'instar du chapitre 2 on va aussi utiliser la description locale du spectre (en particulier autour de la singularité) pour comprendre la dynamique semi-classique associée. Le chapitre précédent donne justement une description locale dans le compact $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$ du spectre de l'opérateur de l'opérateur de Schrödinger en dimension 1 :

$$P_h = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

avec V un potentiel double puits ; c'est-à-dire : $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$$

et V possédant exactement un maximum local non dégénéré, que l'on supposera atteint en 0, ainsi : $V(0) = 0$; $V'(0) = 0$; $V''(0) < 0$. Dans ce chapitre (et ceux pour des raisons techniques) on va seulement "utiliser" le spectre de l'opérateur P_h dans le compact $[-h, h] \subset [-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$. Précisément on va travailler avec un état initial (vecteur initial dans la dynamique) microlocalisé dans un compact de diamètre de taille h . La raison de ce choix est technique ; en effet les estimations des lemmes 5.5.1 et 5.7.1 sont très délicates à faire dans le contexte plus "général" $[-\sqrt{h}, \sqrt{h}]$.

Dans ce chapitre on utilisera les résultats du chapitre précédent avec $\alpha = 1$.

La théorie générale (voir le chapitre 1) nous informe que le spectre semi-classique de l'opérateur P_h est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie s'accumulant en $+\infty$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} V(x) \leq \lambda_1(h) < \lambda_2(h) \leq \dots \leq \lambda_n(h) \rightarrow +\infty.$$

Notation 5.1.1. On notera par e_n les vecteurs propres de P_h associés $P_h e_n = \lambda_n(h) e_n$. Ces vecteurs propres forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

On a vu dans le chapitre précédent que le spectre de l'opérateur P_h dans le compact $[-h, h]$ est constitué d'une réunion disjointe :

$$(\alpha_k(h))_{k \in \mathbf{I}_h} \sqcup (\beta_l(h))_{l \in \mathbf{J}_h}$$

de deux familles de réels $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ s'écrivant $\alpha_k(h) := h\mathcal{A}_h(2\pi k)$, $\beta_l(h) := h\mathcal{B}_h(2\pi l)$; les fonctions $\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{B}_h$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ uniformément par rapport à $h > 0$. De plus les familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ sont strictement décroissantes et en quinconce :

$$\beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

En outre l'interstice spectral est de l'ordre de $O(h/|\ln(h)|)$.

Notation 5.1.2. On notera par Θ_h l'ensemble des indices des valeurs propres de l'opérateur P_h dans le compact $[-h, h]$ $\Theta_h := \{n \in \mathbb{N}, \lambda_n(h) \in [-h, h]\}$.

5.2 Expression de la fonction d'auto-corrélation

Soit maintenant un vecteur initial $\psi_0 \in D(P_h) \subset L^2(\mathbb{R})$ et notons par $(c_n(h))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $l^2(\mathbb{N})$ donnée par $(c_n(h))_{n \in \mathbb{N}} = \pi(\psi_0)$. La fonction de retour dans la base des vecteurs propres s'écrit sous la forme

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_n(h)}.$$

Ici, on va juste utiliser "la connaissance" des valeurs propres de P_h dans le compact $[-h, h]$; on va donc réécrire la précédente série en faisant apparaître l'ensemble Θ_h : pour tout réel t

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n \in \Theta_h} |c_n|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_n(h)} + \sum_{n \in \mathbb{N} - \Theta_h} |c_n|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_n(h)}.$$

Par la suite, avec un choix d'état initial localisé autour de l'origine ; la seconde série sera alors nulle (modulo un reste en $O\left(\frac{1}{\ln(h)^\infty}\right)$). Ensuite pour la série qui reste l'idée naturelle est alors de la découper en deux de manière à faire apparaître les deux familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$. Pour faire ce découpage il faut être un peu prudent car les ensembles d'indices $\mathbf{I}_h$ et $\mathbf{J}_h$ ne forment pas directement une partition de Θ_h . On va cependant en construire une : comme les valeurs propres de l'opérateur P_h dans le compact $[-h, h]$ sont toutes distinctes ; pour tout indice $k \in \mathbf{I}_h$ (resp. $l \in \mathbf{J}_h$) il existe un unique indice $\sigma_1(k) \in \Theta_h$ (resp. $\sigma_2(l) \in \Theta_h$) tel que :

$$\begin{cases} h\mathcal{A}_h(2\pi k) = \lambda_{\sigma_1(k)}(h) \\ h\mathcal{B}_h(2\pi l) = \lambda_{\sigma_2(l)}(h). \end{cases}$$

On peut alors définir les applications :

$$\sigma_1 : \begin{cases} \mathbf{I}_h \rightarrow \Theta_h \\ k \mapsto \sigma_1(k) \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_2 : \begin{cases} \mathbf{J}_h \rightarrow \Theta_h \\ l \mapsto \sigma_2(l) \end{cases}$$

Ces deux applications σ_1 et σ_2 sont clairement injectives ; ainsi $\mathbf{I}_h$ et $\sigma_1(\mathbf{I}_h)$ sont en bijection et $\mathbf{J}_h$ et $\sigma_2(\mathbf{J}_h)$ le sont aussi. D'autre part, on a aussi que $\sigma_1(\mathbf{I}_h)$ et $\sigma_2(\mathbf{J}_h)$ forment une partition de Θ_h . Ainsi la fonction de retour $\mathbf{r}(t)$ se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \sum_{k \in \sigma_1(\mathbf{I}_h)} |c_k|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_k(h)} + \sum_{l \in \sigma_2(\mathbf{J}_h)} |c_l|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_l(h)} \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N} - \Theta_h} |c_n|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_n(h)} \\ &= \sum_{k \in \mathbf{I}_h} \left| c_{\sigma_1(k)} \right|^2 e^{-it \mathcal{A}_h(2\pi k)} + \sum_{l \in \mathbf{J}_h} \left| c_{\sigma_2(l)} \right|^2 e^{-it \mathcal{B}_h(2\pi l)} \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N} - \Theta_h} |c_n|^2 e^{-i \frac{t}{h} \lambda_n(h)}. \end{aligned}$$

On va alors étudier ces deux premières séries de fonctions indépendamment l'une de l'autre.

Définition 5.2.1. On considère les fonctions d'auto-corrélation partielle de notre système hamiltonien

$$\mathbf{a}(t) := \sum_{k \in \mathbf{I}_h} \left| c_{\sigma_1(k)} \right|^2 e^{-it \mathcal{A}_h(2\pi k)}, \quad \mathbf{b}(t) := \sum_{l \in \mathbf{J}_h} \left| c_{\sigma_2(l)} \right|^2 e^{-it \mathcal{B}_h(2\pi l)}.$$

Avant d'étudier ces quantités en détails ; on va d'abord définir un état initial pour la dynamique semi-classique.

5.3 Choix d'un état initial localisé en énergie

5.3.1 Préliminaires

Définissons un état initial ψ_0 de la dynamique dépendant de h et localisé autour d'un nombre réel E_h proche de l'origine. Soit un réel $E \in [-1, 1]$ indépendant de h et posons $E_h := hE$.

Définition 5.3.1. On définit $n_0 = n_0(h, E)$ et $m_0 = m_0(h, E)$ les entiers naturels :

$$n_0 := \arg \min_{n \in \mathbf{I}_h} |h \mathcal{A}_h(2\pi n) - hE| \quad \text{et} \quad m_0 := \arg \min_{m \in \mathbf{J}_h} |h \mathcal{B}_h(2\pi m) - hE|.$$

Remarque 5.3.2. Dans le cas où le réel hE serait exactement au milieu de deux valeurs propres consécutives $h \mathcal{A}_h(2\pi n)$ et $h \mathcal{A}_h(2\pi n + 2\pi)$ on choisira de prendre $n_0 = n$. On supposera ainsi que l'entier n_0 est unique. De même pour l'entier m_0 . On va supposer ici que ces deux entiers n_0 et m_0 sont uniques.

L'entier n_0 (resp. m_0) est donc l'indice de la valeur propre de la famille $(\alpha_k(h))_k$ (resp. de la famille $(\beta_l(h))_l$) la plus proche du réel hE . Ainsi comme l'interstice spectral est de l'ordre de $O(h / |\ln(h)|)$ il existe une constante réelle $C > 0$ telle que :

$$|h \mathcal{A}_h(2\pi n_0) - hE| \leq \frac{Ch}{|\ln h|}, \quad |h \mathcal{B}_h(2\pi m_0) - hE| \leq \frac{Ch}{|\ln h|}.$$

On a alors le lemme :

Lemme 5.3.3. Pour $h \rightarrow 0$ on a les équivalents suivants :

$$n_0 \sim \frac{N}{h} \text{ et } m_0 \sim \frac{M}{h}$$

où N et M sont des réels non nuls.

Démonstration. On va donner la preuve uniquement pour l'entier n_0 . Comme

$$|\mathcal{A}_h(2\pi n_0) - E| \leq \frac{C}{|\ln h|};$$

c'est-à-dire que $\mathcal{A}_h(2\pi n_0) = E + O\left(\frac{1}{|\ln h|}\right)$ nous avons alors

$$\begin{aligned} 2\pi n_0 &= \mathcal{Y}_h\left(E + O\left(\frac{1}{|\ln h|}\right)\right) \\ &= f_h\left(E + O\left(\frac{1}{|\ln h|}\right)\right) - \arccos\left(\frac{\cos\left(g_h\left(E + O\left(\frac{1}{|\ln h|}\right)\right)\right)}{\sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon\left(hE + O\left(\frac{h}{|\ln h|}\right)\right)/h\right)}}\right). \end{aligned}$$

Avec par définition (voir chapitre précédent)

$$\begin{aligned} f_h\left(E + O\left(\frac{1}{|\ln h|}\right)\right) &= F_h\left(hE + O\left(\frac{h}{|\ln h|}\right)\right) \\ &= -\frac{\theta_+(hE + O(h/|\ln(h)|)) + \theta_-(hE + O(h/|\ln(h)|))}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &\quad + \frac{\varepsilon(hE + O(h/|\ln(h)|))}{h} \ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon(hE + O(h/|\ln(h)|))}{h}\right)\right). \end{aligned}$$

En multipliant $2\pi n_0$ par h nous avons donc :

$$\begin{aligned} 2\pi n_0 h &= -h \frac{\theta_+(hE + O(h/|\ln(h)|)) + \theta_-(hE + O(h/|\ln(h)|))}{2} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} h + \varepsilon(hE + O(h/|\ln(h)|)) \ln(h) + h \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon(hE + O(h/|\ln(h)|))}{h}\right)\right) \\ &\quad - h \arccos\left(\frac{\cos\left(g_h\left(E + O\left(\frac{1}{|\ln h|}\right)\right)\right)}{\sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon\left(hE + O\left(\frac{h}{|\ln h|}\right)\right)/h\right)}}\right). \end{aligned}$$

Evaluons un par un les cinq termes de droite de la précédente égalité. Comme la fonction

$$E \mapsto -\frac{\theta_+(hE + O(h/|\ln(h)|)) + \theta_-(hE + O(h/|\ln(h)|))}{2}$$

admet un développement asymptotique en puissance de h de -1 à $+\infty$, nous avons

$$-h \frac{\theta_+(hE + O(h/|\ln(h)|)) + \theta_-(hE + O(h/|\ln(h)|))}{2} = O(1);$$

on a même mieux, pour $h \rightarrow 0$

$$-h \frac{\theta_+(hE + O(h/|\ln(h)|)) + \theta_-(hE + O(h/|\ln(h)|))}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} (S_{-1}^+(0) + S_{-1}^-(0)) \neq 0$$

où les quantités S^+/S^- sont définies au chapitre précédent. Ensuite :

$$\varepsilon(hE + O(h/|\ln(h)|)) \ln(h) = \left[\frac{hE + O(h/|\ln(h)|)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^2) \right] \ln(h) \rightarrow 0.$$

Pour finir, comme

$$\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(hE + O(h/|\ln(h)|))}{h} \right) \right) = O(1)$$

et

$$\arccos \left(\frac{\cos \left(g_h \left(E + O \left(\frac{1}{|\ln h|} \right) \right) \right)}{\sqrt{1 + \exp \left(2\pi\varepsilon \left(hE + O \left(\frac{h}{|\ln h|} \right) \right) / h} \right)}} \right) = O(1);$$

on a que, pour $h \rightarrow 0$:

$$h \arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(hE + O(h/|\ln(h)|))}{h} \right) \right) \rightarrow 0$$

et

$$h \arccos \left(\frac{\cos \left(g_h \left(E + O \left(\frac{1}{|\ln h|} \right) \right) \right)}{\sqrt{1 + \exp \left(2\pi\varepsilon \left(hE + O \left(\frac{h}{|\ln h|} \right) \right) / h} \right)}} \right) \rightarrow 0.$$

Ainsi au final

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2\pi n_0 h = -\frac{1}{2} (S_{-1}^+(0) + S_{-1}^-(0));$$

d'où le lemme proposé. $\square$

5.3.2 Première définition (provisoire)

Pour une commodité technique on va d'abord introduire la nouvelle suite :

Définition 5.3.4. Pour tout entier $n \in \Theta_h$ on considère la famille :

$$\mu_{n,0} := \begin{cases} h\mathcal{A}_h(2\pi n_0) & \text{si } n \in \sigma_1(\mathbf{I}_h) \\ h\mathcal{B}_h(2\pi m_0) & \text{si } n \in \sigma_2(\mathbf{J}_h). \end{cases}$$

On étend ensuite cette famille en une suite indexée sur $\mathbb{N}$ en posant $\mu_{n,0} = 0$ pour les entiers $n \in \mathbb{N} - \Theta_h$.

Cette suite prend uniquement deux valeurs suivant l'entier n : soit la valeur propre de la famille $(\alpha_k(h))_k$ la plus proche du réel hE ; ou bien la valeur propre de la famille $(\beta_l(h))_l$ la plus proche de hE . A ce stade là on peut donner la première définition (provisoire) de notre état initial localisé autour de hE :

Définition 5.3.5. Considérons la suite $(c_n(h))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$c_n := c_n(h) = K_h \chi \left(\frac{\mu_n - \mu_{n,0}}{h^{\alpha'}} |\ln h|^{\gamma'} \right) \chi_0 \left(\frac{\mu_n - \mu_{n,0}}{2h} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

où $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction non identiquement nulle, positive et paire ; α' et γ' sont deux réels ; $\chi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi_0 \equiv 1$ sur $] -1, 1[$ et $\text{supp}(\chi_0) \subset [-1, 1]$; et

$$K_h := \left\| \chi \left(\frac{\mu_n - \mu_{n,0}}{h^{\alpha'}} |\ln h|^{\gamma'} \right) \chi_0 \left(\frac{\mu_n - \mu_{n,0}}{2h} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N})}.$$

On va détailler ce choix d'état initial :

1. La terme $\chi \left(\frac{\mu_n - \mu_{n,0}}{h^{\alpha'}} |\ln h|^{\gamma'} \right)$ sert à localiser autour, non pas de E_h directement, mais pour des raisons de commodité technique, autour de la valeur propre la plus proche de hE .
2. Les constantes α' et γ' servent à modifier la dilatation de la fonction χ .
3. La fonction χ_0 sert à tronquer les valeurs propres qui sont en dehors du compact $[-h, h]$.

5.3.3 Ajustement des constantes de dilatation α' et γ'

L'unique choix possible pour avoir à la fois une localisation de l'état initial plus grande que l'interstice spectral de l'opérateur et pour avoir une localisation dans le compact $[-h, h]$; c'est à dire avoir en même temps

$$\frac{h^{\alpha'}}{|\ln h|^{\gamma'}} \gg \frac{h}{|\ln h|}; \quad \frac{h^{\alpha'}}{|\ln h|^{\gamma'}} \leq h$$

est de prendre :

$$\alpha' = 1; \quad 0 \leq \gamma' < 1.$$

Remarque 5.3.6. Le choix le plus "large" de $h^{\alpha'} / |\ln h|^{\gamma'} = h / |\ln h|^{\gamma'}$ est le choix consistant à prendre $\gamma' = 0$.

Sous ces hypothèses on peut donc supprimer la fonction χ_0 et on arrive donc à la seconde définition provisoire suivante :

5.3.4 Seconde définition (provisoire)

Définition 5.3.7. Considérons la suite $(c_n(h))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$c_n := K_h \chi \left(\frac{\mu_n - \mu_{n,0}}{h} |\ln h|^{\gamma'} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

où $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction non identiquement nulle, positive et paire ; $0 \leq \gamma' < 1$; et

$$K_h := \left\| \chi \left(\frac{\mu_n - \mu_{n,0}}{h} |\ln h|^{\gamma'} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N})}.$$

Quand on écrit alors les fonctions d'auto-corrélation partielles $\mathbf{a}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ il apparait les suites $(c_{\sigma_1(k)})_k$ et $(c_{\sigma_2(l)})_l$; pour alléger l'écriture :

Notation 5.3.8. On pose

$$a_n := c_{\sigma_1(n)} = K_h \chi \left((\mathcal{A}_h(2\pi n) - \mathcal{A}_h(2\pi n_0)) |\ln h|^{\gamma'} \right);$$

$$b_m := c_{\sigma_2(m)} = K_h \chi \left((\mathcal{B}_h(2\pi m) - \mathcal{B}_h(2\pi m_0)) |\ln h|^{\gamma'} \right).$$

5.4 Etude d'une fonction d'auto-corrélation partielle

On va dans cette partie étudier une des fonctions d'auto-corrélation partielle; disons par exemple la fonction $t \mapsto \mathbf{a}(t)$. Avant de commencer l'étude on va donner une définition définitive d'un état initial. Par le théorème des accroissements finis il existe un réel $\zeta = \zeta(n, h, E) \in \mathcal{Y}_h([-1, 1])$ tel que

$$\mathcal{A}_h(2\pi n) - \mathcal{A}_h(2\pi n_0) = \mathcal{A}'_h(\zeta) 2\pi(n - n_0)$$

ainsi comme

$$\mathcal{A}'_h(\zeta) = \frac{2\pi}{\frac{|\ln(h)|}{\sqrt{-V''(0)}} + O(1)};$$

nous avons donc

$$\mathcal{A}_h(2\pi n) - \mathcal{A}_h(2\pi n_0) = \frac{2\pi(n - n_0) \sqrt{-V''(0)}}{|\ln h|} \left(1 + O \left| \frac{1}{|\ln h|} \right| \right).$$

On est donc amené à la définition (définitive et plus facile à manipuler) suivante :

Définition 5.4.1. Considérons la suite $(a_n(h))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$a_n := K_h \chi \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right), n \in \mathbb{Z}$$

où $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction non identiquement nulle, positive et paire; $0 \leq \gamma' < 1$; et

$$K_h := \left\| \chi \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N})}.$$

Enonçons les premières propriétés de la suite a_n :

Proposition 5.4.2. La suite $(a_n(h))_n \in l^2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Comme $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $M_h \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $|a_n| \leq \frac{M}{(1+n^2)} \in l^2(\mathbb{Z})$ et ainsi $(a_n(h))_n \in l^2(\mathbb{Z})$. $\square$

Théorème 5.4.3. *Nous avons que*

$$K_h = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} |\ln h|^{\frac{1-\gamma'}{2}}} + O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|;$$

et ainsi

$$\|a_n\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1 + O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|.$$

Démonstration. Avec la formule sommatoire de Poisson, le précédent lemme et le lemme 2.4.8 du chapitre 2 nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) &= |\ln h|^{1-\gamma'} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-l |\ln h|^{1-\gamma'} \right) \\ &= |\ln h|^{1-\gamma'} \left[\mathfrak{F}(\chi^2)(0) + O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right| \right] \end{aligned}$$

On va maintenant revenir à l'indexage sur $\mathbb{N}$; on part de la simple égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) - \sum_{n=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) \\ &= |\ln h|^{1-\gamma'} \mathfrak{F}(\chi^2)(0) + O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right| - \sum_{n=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right). \end{aligned}$$

Par parité de la fonction $\mathfrak{F}(\chi^2)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi^2 \left(\frac{n + n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) \leq B_k |\ln h|^{(1-\gamma')k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n + n_0|^k}.$$

Par les théorèmes généraux de comparaisons entre séries et intégrales, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} B_k |\ln h|^{(1-\gamma')k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n + n_0|^k} &\leq B_k |\ln h|^{(1-\gamma')k} \int_0^\infty \frac{du}{(u + n_0)^k} \\ &= |\ln h|^{(1-\gamma')(k-1)} \frac{B_k}{(k-1)} \frac{1}{n_0^{k-1}}. \end{aligned}$$

Maintenant, on sait que quand $h \rightarrow 0$ on a $n_0 \sim \frac{N}{h}$ où $N \neq 0$, ainsi, quand $h \rightarrow 0$ on obtient

$$|\ln h|^{(1-\gamma')k} \frac{B_k}{(k-1)} \frac{1}{n_0^{k-1}} \sim \frac{B_k}{N^{k-1}(k-1)} h^{k-1} |\ln h|^{(1-\gamma')k}$$

et par conséquent $\sum_{n=-\infty}^{-1} \chi^2 \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) = O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|$. Au final on a bien :

$$\left\| \chi \left(\frac{n - n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N})}^2 = |\ln h|^{1-\gamma'} \mathfrak{F}(\chi^2)(0) + O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|;$$

d'où $K_h = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)|\ln h|^{\frac{1-\gamma'}{2}}}} + O\left|\frac{1}{\ln(h)^\infty}\right|$. Ensuite il suffit de réécrire que

$$\|a_n\|_{l^2(\mathbb{N})}^2 = K_h^2 |\ln h|^{1-\gamma'} \left[\mathfrak{F}(\chi^2)(0) + O\left|\frac{1}{\ln(h)^\infty}\right| \right] = 1 + O\left|\frac{1}{\ln(h)^\infty}\right|.$$

□

5.4.1 Découpe de la série

Commençons par une définition :

Définition 5.4.4. On définit les ensemble d'entiers $\Delta = \Delta(h, E)$ et $\Gamma = \Gamma(h, E)$ par :

$$\Delta := \{n \in \mathbb{N}, |n - n_0| \leq |\ln(h)|^\gamma\} \subset \mathbb{N}$$

et

$$\Gamma := \mathbb{N} - \Delta$$

où le réel γ vérifie $\gamma < 1$ et $\gamma + \gamma' > 1$.

Remarque 5.4.5. Comme $\gamma < 1$ nous avons que $|\ln(h)|^\gamma < |\ln(h)|$ et donc par conséquent comme pour $h \rightarrow 0$ on a $\text{Card}(\mathbf{I}_h) \sim |\ln(h)|$; on obtient, pour h assez petit, l'inclusion : $\Delta \subset \mathbf{I}_h$. D'autre part comme $\gamma + \gamma' > 1$ on a $|\ln(h)|^{1-\gamma'} \ll |\ln(h)|^\gamma$ ce qui signifie que l'ensemble Δ est plus "grand" que la localisation de l'état initial.

Lemme 5.4.6. Nous avons :

$$\sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 = O\left|\frac{1}{\ln(h)^\infty}\right|.$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 2.3.12 du chapitre 2. □

5.5 Détermination du terme principal de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique

5.5.1 But

On va étudier la série de fonctions

$$\mathbf{a} : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it.A_h(2\pi n)};$$

que par une formule de Taylor à l'ordre 2, on écrira :

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0) + \mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2)}$$

où $\zeta = \zeta(n, h, E) \in \mathcal{Y}_h([-1, 1])$.

Lemme 5.5.1. Nous avons uniformément sur le compact $[-1, 1]$ que :

$$\lambda \mapsto (\mathcal{A}''_h \circ \mathcal{Y}_h)(\lambda) = O\left|\frac{1}{\ln(h)^3}\right|.$$

Démonstration. Les formules de dérivation donnent que pour tout réel $x \in \mathcal{Y}_h([-1, 1])$

$$\mathcal{A}_h''(x) = \frac{-(\mathcal{Y}_h''' \circ \mathcal{A}_h)(x)}{(\mathcal{Y}_h' \circ \mathcal{A}_h)^3(x)};$$

et donc pour tout $\lambda \in [-1, 1]$

$$(\mathcal{A}_h'' \circ \mathcal{Y}_h)(\lambda) = \frac{-\mathcal{Y}_h'''(\lambda)}{(\mathcal{Y}_h')^3(\lambda)}.$$

Estimons d'abord la fonction $\mathcal{Y}_h''$. Pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_h''(\lambda) &= -h^2 \frac{\theta_+''(\lambda h) + \theta_-''(\lambda h)}{2} + h\varepsilon''(\lambda h) \ln(h) \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] - \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Or pour tout $\lambda \in [-1, 1]$ on a

$$-h^2 \frac{\theta_+''(\lambda h) + \theta_-''(\lambda h)}{2} = O(h)$$

et

$$h\varepsilon''(\lambda h) \ln(h) = O(h \ln(h)).$$

Estimons ensuite le terme $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right]$; un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\varepsilon'(\lambda h) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] \\ &= h\varepsilon''(\lambda h) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) - (\varepsilon'(\lambda h))^2 \operatorname{Im} \left(\Psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right), \end{aligned}$$

où $\Psi^{(1)}$ est la première dérivée de la fonction di-Gamma d'Euler **[Ab-St]**. Ainsi clairement la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\varepsilon'(\lambda h) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right]$$

est égale à un $O(1)$ sur le compact $[-1, 1]$. Pour finir estimons le terme

$$\lambda \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h)}} \right) \right],$$

par un calcul un peu laborieux, pour tout scalaire $\lambda \in [-1, 1]$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h)}} \right) \right] = \frac{N_h(\lambda)}{D_h(\lambda)}$$

où le numérateur $N_h(\lambda)$ est un polynome de degré fini indépendant de h en les variables

$$\left(\cos(g_h(\lambda)), \sin(g_h(\lambda)), \frac{\partial}{\partial \lambda}(g_h(\lambda)), \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(g_h(\lambda)) \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right), \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left(\frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right), \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h) \right).$$

Ainsi $\lambda \mapsto N_h(\lambda) = O(1)$ sur tout le compact $[-1, 1]$. Ensuite le dénominateur est donné précisément par

$$D_h(\lambda) = (1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h))^2 \left(1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h) - \cos^2(g_h(\lambda)) \right)^{\frac{3}{2}};$$

alors comme la fonction $\lambda \mapsto \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h)$ est un $O(1)$ toujours positif sur le compact $[-1, 1]$, on voit sans peine que sur $[-1, 1]$

$$\lambda \mapsto \frac{1}{D_h(\lambda)} = O(1).$$

Ainsi au final sur le compact $[-1, 1]$

$$\lambda \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h)/h)}} \right) \right] = O(1).$$

Par conséquent sur $[-1, 1]$ nous avons que $\lambda \mapsto \mathcal{Y}_h''(\lambda) = O(1)$. Pour finir comme on a uniformément sur le compact $[-1, 1]$ l'égalité

$$\mathcal{Y}_h'(\lambda) = \frac{\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(1),$$

on en déduit alors $\lambda \mapsto (\mathcal{A}_h'' \circ \mathcal{Y}_h)(\lambda) = O\left|\frac{1}{\ln(h)^3}\right|$ sur tout le compact $[-1, 1]$. $\square$

5.5.2 Définition d'une échelle de temps spécifique

Proposition 5.5.2. Soit α un réel vérifiant l'inégalité : $\alpha < 3 - 2\gamma$. On a alors uniformément pour $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\mathcal{A}_h(2\pi n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}_h'(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} + O\left(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}\right).$$

Démonstration. Etudions la différence $\varepsilon(t) := \varepsilon(t, h)$ définie par

$$\varepsilon(t) := \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\mathcal{A}_h(2\pi n)} - \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}_h'(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} \right|.$$

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne l'existence d'un réel $\zeta = \zeta(n, h, E) \in \mathcal{Y}_h([-1, 1])$ tel que

$$\mathcal{A}_h(2\pi n) = \mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}_h'(2\pi n_0)2\pi(n-n_0) + \mathcal{A}_h''(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2$$

et ainsi pour tout réel t

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0) + \mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} \left[e^{-it\mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2} - 1 \right] \right|.\end{aligned}$$

Avec les ensembles Γ et Δ et par inégalité triangulaire on obtient pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &\leq \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} \left[e^{-it\mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2} - 1 \right] \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} \left[e^{-it\mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2} - 1 \right] \right|.\end{aligned}$$

Regardons d'abord le terme de droite de la précédente majoration de la fonction $\delta(t)$:

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} \left[e^{-it\mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2} - 1 \right] \right| \\ &\leq 2 \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 = O\left(\frac{1}{\ln(h)^\infty}\right)\end{aligned}$$

d'après le lemme 5.4.6. Maintenant étudions le terme de gauche majoration de $\varepsilon(t)$. Avec le précédent lemme : pour tout entier $n \in \Delta$ et pour tout réel $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$

$$t\mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2 \leq M |\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}$$

où $M > 0$ est une constante indépendante de h ; par conséquent pour tout entier $n \in \Delta$ et pour tout réel $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$

$$e^{-it\mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2} - 1 = O\left(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}\right);$$

et ainsi pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$ nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))} \left[e^{-it\mathcal{A}''_h(\zeta)2\pi^2(n-n_0)^2} - 1 \right] \right| \\ &\leq O\left(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}\right) \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \\ &\leq O\left(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}\right) \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = O\left(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}\right).\end{aligned}$$

Au final, on a montré que uniformément pour $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$ on a $\varepsilon(t) = O\left(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}\right)$. C'est exactement l'égalité proposée dans l'énoncé. $\square$

En conclusion, on a immédiatement que le terme principal de la fonction d'auto corrélation partielle $\mathbf{a}(t)$ dans l'échelle $[0, |\ln(h)|^\alpha]$ est :

Définition 5.5.3. Le terme principal de la fonction d'auto-corrélation partielle $\mathbf{a}(t)$ est la série de fonctions :

$$\mathbf{a}_1 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0))}.$$

On définit aussi la fonction $\tilde{\mathbf{a}}_1$ par

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0)}.$$

Ainsi que quel que soit $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$

$$\mathbf{a}_1(t) = e^{-it\mathcal{A}_h(2\pi n_0)} \tilde{\mathbf{a}}_1(t).$$

Étudions maintenant cette série en détails :

5.6 Comportement semi-classique du terme principal

5.6.1 Périodicité du terme principal en limite semi-classique

Ainsi le module du terme principal de la fonction d'auto-corrélation partielle $\mathbf{a}(t)$ est une fonction périodique de période $\frac{1}{\mathcal{A}'_h(2\pi n_0)}$.

Définition 5.6.1. On définit la période hyperbolique $T_{hyp} = T_{hyp}(h, E)$ par

$$T_{hyp} := \frac{1}{\mathcal{A}'_h(2\pi n_0)}.$$

Compte tenu de l'estimation de la fonction $\mathcal{A}'_h$ on voit que quand $h \rightarrow 0$ on a $T_{hyp} \sim K |\ln(h)|$; où $K > 0$ est une constante indépendante de h .

5.6.2 Interprétation géométrique de la période

La période T_{hyp} de l'approximation à l'ordre 1 de la fonction d'auto-corrélation quantique correspond géométriquement à la période du flot classique associé (voir le chapitre précédent).

5.6.3 Echelle de temps spécifique et période classique

Comme $\gamma < 1$ on a par conséquent que $1 < 3 - 2\gamma$; ainsi il existe au moins un réel α tel que $\alpha \in]1, 3 - 2\gamma[$ et donc :

$$|\ln(h)| < |\ln(h)|^\alpha < |\ln(h)|^{3-2\gamma}.$$

Ceci autorise donc d'avoir un choix de α pertinent : pour h assez petit, l'échelle de temps spécifique d'approximation est plus grande que la période hyperbolique, en effet, pour h assez petit on a

$$[0, T_{hyp}] \subset [0, |\ln(h)|^\alpha].$$

5.6.4 Comportement sur une période classique

Etudions la fonction $\mathbf{a}_1(t)$ sur une période $[0, T_{hyp}]$.

Proposition 5.6.2. *Pour tout $t \geq 0$, on a l'égalité :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(l + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right).$$

Démonstration. L'ingrédient essentiel de la démonstration est la formule sommatoire de Poisson. Considérons la fonction Ω_t définie par :

$$\Omega_t : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto |a_x|^2 e^{-it2\pi(x-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$, et a_x est, rappelons le, définie par :

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} |\ln h|^{\frac{1-\gamma'}{2}}} \chi \left(\frac{x-n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right);$$

ainsi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_t(n).$$

Clairement $\Omega_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, calculons donc $\mathfrak{F}(\Omega_t)$ sa transformée de Fourier ; on obtient alors que quel que soit $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}(\Omega_t)(\zeta) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0) |\ln h|^{1-\gamma'}} e^{it2\pi n_0 \frac{1}{T_{hyp}}} \mathfrak{F} \left(\chi^2 \left(\frac{x-n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}} \right) e^{-it2\pi x \frac{1}{T_{hyp}}} \right) (\zeta).$$

En appliquant le lemme 2.3.7 avec $f = \chi^2$, $\alpha = 1/|\ln h|^{1-\gamma'}$, $\beta = \frac{x-n_0}{|\ln h|^{1-\gamma'}}$ et $\gamma = -\frac{2\pi t}{T_{hyp}}$; on trouve que quelque soit $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}(\Omega_t)(\zeta) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} e^{-2i\pi n_0 \zeta} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(\zeta + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right).$$

Maintenant avec l'égalité de Poisson appliquée à la fonction Ω_t on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_t(n) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\Omega_t)(l) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(l + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne l'égalité énoncée dans la proposition. $\square$

Pour comprendre la fonction $\mathbf{a}_1(t)$ on va donc s'intéresser à la nouvelle série de fonctions :

$$t \mapsto \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(l + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right).$$

On voit tout de suite, compte tenu de la décroissance à l'infini de la fonction $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, que les termes prépondérants dans la série correspondent aux indices l tels que $\left(l + \frac{t}{T_{hyp}}\right)$ soit le plus proche de zéro. Précisons cela avec une définition et une proposition.

Définition 5.6.3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit $l(t) = l(t, h, E)$ comme étant l'entier le plus proche du réel $\frac{-t}{T_{hyp}}$; et donc

$$l(t) + \frac{t}{T_{hyp}} = d\left(t, T_{hyp}\mathbb{Z}\right).$$

Remarque 5.6.4. Quitte à modifier le paramètre h , donc quitte à modifier la valeur de T_{hyp} , on supposera que l'entier $l(t)$ est unique. Par ailleurs pour tout $l \in \mathbb{Z}$ tel que $l \neq l(t)$ on a :

$$\left|l + \frac{t}{T_{hyp}}\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Théorème 5.6.5. On a uniformément pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{\frac{-it2\pi(n-n_0)}{T_{hyp}}} = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} d\left(t, T_{hyp}\mathbb{Z}\right) \right) + O\left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|.$$

Démonstration. On va commencer par montrer ce résultat avec la série indexée sur $\mathbb{Z}$. D'après la précédente proposition et le lemme 2.4.7 du chapitre 2 on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(l + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} d\left(t, T_{hyp}\mathbb{Z}\right) \right) + O\left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|. \end{aligned}$$

On va maintenant montrer le résultat avec la série indexée sur $\mathbb{N}$. On part de l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} - \sum_{n=-\infty}^{-1} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}}; \end{aligned}$$

qui avec la proposition se réécrit aussi

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(l + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right) \\ &\quad - \sum_{n=-\infty}^{-1} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} - \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} d \left(t, T_{hyp} \mathbb{Z} \right) \right) \right|$$

est, par inégalité triangulaire, majorée par

$$\leq \sum_{l \neq l(t)} \left| \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(l + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right) \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}|^2.$$

Rappelons que précédemment nous avons vu que pour tout t positif

$$\frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l \neq l(t)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} \left(l + \frac{t}{T_{hyp}} \right) \right) = O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|;$$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{-n}|^2 = O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|$. D'où le théorème. $\square$

Finissons par un corollaire d'affinage :

Corollaire 5.6.6. *Nous avons que :*

(i) *pour t tel que $t \in T_{hyp} \mathbb{N}$ on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} = 1.$$

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - \gamma'$ et pour t tel que $\left| d \left(t, T_{hyp} \mathbb{Z} \right) \right| > |\ln h|^{\gamma'-1+\varepsilon}$; on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it2\pi(n-n_0)\frac{1}{T_{hyp}}} = O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|.$$

Démonstration. Le premier point découle directement du précédent théorème.

Pour le second point : si $\left| -|\ln h|^{1-\gamma'} (l(t) + t\mathcal{A}'_h(2\pi n_0)) \right| > |\ln h|^\varepsilon$ on a donc :

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left(-|\ln h|^{1-\gamma'} (l(t) + t\mathcal{A}'_h(2\pi n_0)) \right) \right| &\leq \frac{B_k}{(1 + |\ln h|^\varepsilon)^k} \\ &\leq B_k |\ln h|^{-\varepsilon k}. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai quel que soit l'entier k ; le second point est démontré. $\square$

5.7 Détermination du terme d'ordre deux de la fonction d'auto-corrélation en limite semi-classique

On va faire la même démarche d'étude que précédemment : on va trouver une échelle de temps sur laquelle on peut simplifier la fonction d'auto-corrélation dans un régime semi classique.

5.7.1 But

On va continuer à étudier la série de fonctions $\mathbf{a}(t)$ que par une formule de Taylor à l'ordre 3, on écrira :

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it \left(\mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}'_h(2\pi n_0) 2\pi(n-n_0) + \mathcal{A}''(2\pi n_0) 2\pi^2(n-n_0)^2 + \mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8} (n-n_0)^3 \right)}$$

où le nombre réel. $\zeta = \zeta(n, h, E)$.

Lemme 5.7.1. *Nous avons uniformément sur le compact $[-1, 1]$ que :*

$$\lambda \mapsto \left(\mathcal{A}_h^{(3)} \circ \mathcal{Y}_h \right) (\lambda) = O \left| \frac{1}{\ln(h)^4} \right|.$$

Démonstration. Les formules de dérivation donnent l'égalité valide pour tout $x \in \mathcal{Y}_h([-1, 1])$

$$\mathcal{A}_h^{(3)}(x) = \frac{-\left(\mathcal{Y}_h^{(3)} \circ \mathcal{A}_h\right)(x)}{\left(\mathcal{Y}_h' \circ \mathcal{A}_h\right)^4(x)} + \frac{3\left(\mathcal{Y}_h'' \circ \mathcal{A}_h\right)^2(x)}{\left(\mathcal{Y}_h' \circ \mathcal{A}_h\right)^5(x)};$$

et donc pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$

$$\left(\mathcal{A}_h^{(3)} \circ \mathcal{Y}_h \right) (\lambda) = \frac{-\mathcal{Y}_h^{(3)}(\lambda)}{\left(\mathcal{Y}_h'\right)^4(\lambda)} + \frac{3\left(\mathcal{Y}_h''\right)^2(\lambda)}{\left(\mathcal{Y}_h'\right)^5(\lambda)}.$$

Pour débiter estimons la fonction $\lambda \mapsto \mathcal{Y}_h^{(3)}(\lambda)$. Pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_h^{(3)}(\lambda) &= -h^3 \frac{\theta_+^{(3)}(\lambda h) + \theta_-^{(3)}(\lambda h)}{2} + h^2 \varepsilon^{(3)}(\lambda h) \ln(h) \\ &+ \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] - \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi \varepsilon(\lambda h)/h)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Uniformément sur le compact $[-1, 1]$

$$\lambda \mapsto -h^3 \frac{\theta_+^{(3)}(\lambda h) + \theta_-^{(3)}(\lambda h)}{2} = O(h^2)$$

et

$$\lambda \mapsto h^2 \varepsilon^{(3)}(\lambda h) \ln(h) = O(h^2 \ln(h)).$$

Ensuite estimons le terme $\lambda \mapsto \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right]$: pour tout réel $\lambda \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[h \varepsilon''(\lambda h) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) - (\varepsilon'(\lambda h))^2 \operatorname{Im} \left(\Psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h^2 \varepsilon^{(3)}(\lambda h) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) + h \varepsilon''(\lambda h) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] \\
&- 2h \varepsilon'(\lambda h) \varepsilon''(\lambda h) \operatorname{Im} \left(\Psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) - (\varepsilon'(\lambda h))^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\operatorname{Im} \left(\Psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right] \\
&= h^2 \varepsilon^{(3)}(\lambda h) \operatorname{Re} \left(\Psi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) - 3h \varepsilon''(\lambda h) \varepsilon'(\lambda h) \operatorname{Im} \left(\Psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \\
&\quad + (\varepsilon'(\lambda h))^3 \operatorname{Re} \left(\Psi^{(2)} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right);
\end{aligned}$$

et ainsi, clairement, cette fonction $\lambda \mapsto \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h)}{h} \right) \right) \right]$ est égale à un $O(1)$ sur tout le compact $[-1, 1]$. Pour finir estimons le terme

$$\lambda \mapsto \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi \varepsilon(\lambda h)/h)}} \right) \right],$$

en utilisant les notations de la preuve du lemme 5.5.1, pour tout scalaire $\lambda \in [-1, 1]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \left[\arccos \left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1 + \exp(2\pi \varepsilon(\lambda h)/h)}} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{N_h}{D_h} \right) \\
&= \frac{N'_h(\lambda) D_h(\lambda) - N_h(\lambda) D'_h(\lambda)}{D_h^2(\lambda)};
\end{aligned}$$

toujours d'après la preuve du lemme 5.5.1, sur le compact $[-1, 1]$ on a

$$\lambda \mapsto \frac{1}{D_h^2(\lambda)} = O(1).$$

De même, avec les estimations faites dans la preuve du lemme 5.5.1 on montre très facilement que le numérateur $N'_h(\lambda) D_h(\lambda) - N_h(\lambda) D'_h(\lambda)$ de la fraction dérivée est aussi un $O(1)$ sur tout le compact $[-1, 1]$. Par conséquent pour tout $\lambda \in [-1, 1]$. Par suite, sur $[-1, 1]$ nous avons $\lambda \mapsto \mathcal{Y}_h^{(3)}(\lambda) = O(1)$. Puis comme on a uniformément sur le compact $[-1, 1]$ l'égalité

$$\mathcal{Y}'_h(\lambda) = \frac{\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(1),$$

on en déduit alors

$$\lambda \mapsto \frac{-\mathcal{Y}_h^{(3)}(\lambda)}{(\mathcal{Y}'_h(\lambda))^4} = O \left| \frac{1}{\ln(h)^4} \right|.$$

sur tout le compact $[-1, 1]$. Dans la preuve du lemme 5.5.1 nous avons vu que sur $[-1, 1]$:

$$\lambda \mapsto \mathcal{Y}_h''(\lambda) = O \left| \frac{1}{\ln(h)^3} \right|$$

ainsi sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$:

$$\lambda \mapsto \frac{(\mathcal{Y}_h'')^2(\lambda)}{(\mathcal{Y}_h')^5(\lambda)} = O\left|\frac{1}{\ln(h)^5}\right|;$$

et alors la fonction

$$\lambda \mapsto \left(\mathcal{A}_h^{(3)} \circ \mathcal{Y}_h\right)(\lambda) = \frac{-\mathcal{Y}_h^{(3)}(\lambda)}{(\mathcal{Y}_h')^4(\lambda)} + \frac{3(\mathcal{Y}_h'')^2(\lambda)}{(\mathcal{Y}_h')^5(\lambda)}$$

est bien égale à un $O\left|\frac{1}{\ln(h)^4}\right|$ sur $[-1, 1]$. $\square$

Notation 5.7.2. On notera par $R_2(X) = R_2(h, n_0, X)$ le polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par :

$$R_2(X) := \mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}_h'(2\pi n_0)2\pi(X - n_0) + \mathcal{A}_h''(2\pi n_0)2\pi^2(X - n_0)^2.$$

5.7.2 Définition d'une nouvelle échelle de temps spécifique

Proposition 5.7.3. Soit β un réel vérifiant l'inégalité : $\beta < 4 - 3\gamma$. On a alors uniformément pour $t \in [0, |\ln(h)|^\beta]$

$$\mathbf{a}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} + O\left(|\ln(h)|^{\beta+3\gamma-4}\right).$$

Démonstration. Etudions la différence $\varepsilon(t) := \varepsilon(t, h)$ définie par

$$\varepsilon(t) := \left| \mathbf{a}(t) - \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \right|.$$

Avec la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 on a l'existence d'un réel $\zeta = \zeta(n, h, E) \in \mathcal{Y}_h([-1, 1])$ vérifiant

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(2\pi n) &= \mathcal{A}_h(2\pi n_0) + \mathcal{A}_h'(2\pi n_0)2\pi(n - n_0) \\ &+ \mathcal{A}_h''(2\pi n_0)2\pi^2(n - n_0)^2 + \mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n - n_0)^3; \end{aligned}$$

ainsi pour tout réel t

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it\left(Q_2(n) + \mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n - n_0)^3\right)} - \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \left[e^{-it\mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n - n_0)^3} - 1 \right] \right|. \end{aligned}$$

Ainsi à l'aide des ensembles Γ et Δ et par inégalité triangulaire, pour tout $t \geq 0$ on a

$$\varepsilon(t) \leq \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \left[e^{-it\mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n - n_0)^3} - 1 \right] \right|$$

$$+ \left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \left[e^{-it\mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n-n_0)^3} - 1 \right] \right|.$$

Regardons d'abord le terme de droite de la précédente majoration de la fonction $\varepsilon(t)$:

$$\left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \left[e^{-it\mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n-n_0)^3} - 1 \right] \right| \leq 2 \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 = O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|$$

d'après le lemme 5.4.6. Maintenant étudions le terme de gauche : comme pour tout $n \in \Delta$ et pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\beta]$

$$t\mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n-n_0)^3 \leq M |\ln(h)|^{\beta+3\gamma-4}$$

où $M > 0$; par conséquent nous avons pour tout $n \in \Delta$ et pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\beta]$

$$e^{-it\mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n-n_0)^3} - 1 = O \left(|\ln(h)|^{\beta+3\gamma-4} \right)$$

et ainsi pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\beta]$ nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)} \left[e^{-it\mathcal{A}_h^{(3)}(\zeta) \frac{(2\pi)^3}{8}(n-n_0)^3} - 1 \right] \right| \\ & \leq O \left(|\ln(h)|^{\beta+3\gamma-4} \right) \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \\ & \leq O \left(|\ln(h)|^{\beta+3\gamma-4} \right) \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = O \left(|\ln(h)|^{\beta+3\gamma-4} \right). \end{aligned}$$

Au final, on a, montré que uniformément en $t \in [0, |\ln(h)|^\beta]$ on a $\varepsilon(t) = O \left(|\ln(h)|^{\beta+3\gamma-4} \right)$. $\square$

En conclusion, on a immédiatement que le terme principal de la fonction d'auto corrélation dans l'échelle $[0, |\ln(h)|^\beta]$ est la série de fonctions :

Définition 5.7.4. L'approximation à l'ordre 2 de la fonction d'auto-corrélation partielle $\mathbf{a}(t)$ est la série de fonctions :

$$\mathbf{a}_2 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-itQ_2(n)}.$$

On définit aussi la fonction :

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 : t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0) + \mathcal{A}''_h(2\pi n_0)2\pi^2(n-n_0)^2)}.$$

Ainsi que quel que soit $t \in [0, |\ln(h)|^\beta]$

$$\mathbf{a}_2(t) = e^{-it\mathcal{A}_h(2\pi n_0)} \tilde{\mathbf{a}}_2(t).$$

Commençons par remarquer que quel que soit $t \in [0, |\ln(h)|^\beta]$

$$|\mathbf{a}_2(t)| = |\tilde{\mathbf{a}}_2(t)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-it(\mathcal{A}'_h(2\pi n_0)2\pi(n-n_0) + \mathcal{A}''_h(2\pi n_0)2\pi^2(n-n_0)^2)} \right|.$$

5.8 Théorème de pleine renaissance

On va mettre en évidence une nouvelle période, bien plus grande que la période hyperbolique, où l'on trouve des phénomènes particuliers purement quantiques. Commençons par des notations :

Définition 5.8.1. On définit la période de renaissance $T_{ren} = T_{ren}(h, E)$ par

$$T_{ren} := \frac{1}{\pi \mathcal{A}''_h(2\pi n_0)}$$

et on notera par $N_h = N(h)$ la partie entière de la division euclidienne de T_{ren} par T_{hyp} :

$$N_h := E \left[\frac{T_{ren}}{T_{hyp}} \right] \in \mathbb{N}.$$

De sorte que par division euclidienne : il existe un unique un réel $\Theta_h \in [0, 1[$ tel que :

$$\frac{T_{ren}}{T_{hyp}} = N_h + \Theta_h.$$

Proposition 5.8.2. Si on suppose que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\mathcal{Y}''_h \circ \mathcal{A}_h)(2\pi n_0) = K$$

où K est une constante non nulle ; alors

$$T_{ren} = \frac{|\ln(h)|^3}{K (-V''(0))^{\frac{3}{2}}} + O(1).$$

Démonstration. Par définition de la période de renaissance on a

$$T_{ren} = -\frac{(\mathcal{Y}'_h \circ \mathcal{A}_h)^3(2\pi n_0)}{\pi (\mathcal{Y}''_h \circ \mathcal{A}_h)(2\pi n_0)}.$$

Si on suppose donc que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\mathcal{Y}''_h \circ \mathcal{A}_h)(2\pi n_0) = K$$

on en déduit alors facilement que

$$T_{ren} = \frac{-\ln(h)^3}{K (-V''(0))^{\frac{3}{2}}} + O(1).$$

□

Théorème 5.8.3. Avec les précédentes notations nous avons :

(i) Si $\Theta_h = 0$; alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\tilde{\mathbf{a}}_2(t + N_h T_{hyp}) = \tilde{\mathbf{a}}_2(t + T_{ren}) = \tilde{\mathbf{a}}_2(t);$$

(ii) Si $\Theta_h \in]0, 1[$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\tilde{\mathbf{a}}_2(t + N_h T_{hyp}) = \tilde{\mathbf{a}}_2(t) + O\left|\frac{1}{\ln(h)^{2-2\gamma}}\right|;$$

donc en particulier :

$$\left|\mathbf{a}_2(t + N_h T_{hyp})\right| = \left|\mathbf{a}_2(t)\right| + O\left|\frac{1}{\ln(h)^{2-2\gamma}}\right|.$$

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}_2(t + N_h T_{hyp}) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t + N_h T_{hyp}}{T_{hyp}}(n - n_0)} e^{-2i\pi \frac{(t + T_{ren} - T_{hyp}\Theta_h)}{T_{ren}}(n - n_0)^2} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n - n_0)} e^{-2i\pi \frac{(t - T_{hyp}\Theta_h)}{T_{ren}}(n - n_0)^2}.\end{aligned}$$

Si on suppose que $\Theta_h = 0$; alors bien évidemment

$$\tilde{\mathbf{a}}_2(t + N_h T_{hyp}) = \tilde{\mathbf{a}}_2(t).$$

Supposons que $\Theta_h \in]0, 1[$, étudions la différence : $|\mathbf{a}_2(t + N_h T_{cl}) - \mathbf{a}_2(t)|$. Or par définition pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{\mathbf{a}}_2(t + N_h T_{hyp}) - \tilde{\mathbf{a}}_2(t)\right| \\ &= \left|\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n - n_0)} e^{-2i\pi \frac{(t - T_{hyp}\Theta_h)}{T_{ren}}(n - n_0)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n - n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n - n_0)^2}\right| \\ &= \left|\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n - n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n - n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{hyp}}{T_{ren}}(n - n_0)^2} - 1\right)\right| \\ &\leq \left|\sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n - n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n - n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{hyp}}{T_{ren}}(n - n_0)^2} - 1\right)\right| \\ &\quad + \left|\sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n - n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n - n_0)^2} \left(e^{2i\pi \Theta_h \frac{T_{hyp}}{T_{ren}}(n - n_0)^2} - 1\right)\right|.\end{aligned}$$

Majorons le premier terme : quel que soit l'entier $n \in \Delta$ nous avons que

$$(n - n_0)^2 \leq |\ln(h)|^{2\gamma}$$

ainsi quand $h \rightarrow 0$, on obtient que quel que soit l'entier $n \in \Delta$:

$$e^{2i\pi\Theta_h \frac{T_{hyp}}{T_{ren}}(n-n_0)^2} = 1 + O\left(|\ln(h)|^{2\gamma-2}\right).$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n-n_0)^2} \left(e^{2i\pi\Theta_h \frac{T_{hyp}}{T_{ren}}(n-n_0)^2} - 1 \right) \right| \\ & \leq O\left(|\ln(h)|^{2\gamma-2}\right) \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \\ & \leq O\left(|\ln(h)|^{2\gamma-2}\right) \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = O\left(|\ln(h)|^{2\gamma-2}\right). \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}}(n-n_0)} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}}(n-n_0)^2} \left(e^{2i\pi\Theta_h \frac{T_{hyp}}{T_{ren}}(n-n_0)^2} - 1 \right) \right| \\ & \leq \sum_{n \in \Gamma} 2|a_n|^2 = O\left|\frac{1}{\ln(h)^\infty}\right|. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.8.4. Nous avons que

$$\frac{N_h T_{hyp}}{T_{ren}} = \frac{T_{ren} - \Theta_h T_{hyp}}{T_{ren}} = 1 - \frac{\Theta_h T_{hyp}}{T_{ren}} \rightarrow 1$$

quand $h \rightarrow 0$; ainsi $N_h T_{hyp} \sim T_{ren}$ quand $h \rightarrow 0$.

La proposition précédente montre que $t \mapsto \tilde{\mathbf{a}}_2(t)$, est, modulo un reste en $|\ln(h)|^{2\gamma-2}$, périodique, avec une période équivalente, quand $h \rightarrow 0$, à T_{ren} . C'est ce qu'on appellera le phénomène de renaissance.

5.9 Théorème de renaissances fractionnaires

On va s'intéresser à ce qui se passe sur des temps proches de $\frac{p}{q}T_{ren}$ où $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel.

5.9.1 Le principal théorème

Maintenant énonçons le théorème sur les renaissances fractionnaires :

Théorème 5.9.1. *Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1$; il existe une famille de p nombre complexes dépendant de h ; $(\tilde{b}_k(l))_{k \in \{0 \dots p-1\}}$ où l'entier $l \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation :*

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \frac{2pl}{q}m + \frac{pl^2}{q} \equiv 0 \pmod{1}$$

telle que pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$ on ait l'égalité :

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{hyp} \right) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \tilde{\mathbf{a}}_1 \left(t + T_{hyp} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) + O \left(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3} \right)$$

Les coefficients $\tilde{b}_k(l)$ sont nommés coefficients fractionnaires ; et sont données par :
quel que soit $k \in \{0 \dots l-1\}$

$$\tilde{b}_k(l) = e^{-\frac{2i\pi k n_0}{l}} b_k(l)$$

où

$$b_k(l) = b_k(h, l) = \left\langle \sigma_h(p, q), \phi^k \right\rangle_{\mathfrak{S}_l} = \frac{1}{l} \sum_{n=0}^{l-1} e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}}.$$

En outre en supposant de plus que $\frac{T_{ren}}{T_{hyp}} \in \mathbb{Q}$, on a alors l'égalité stricte :

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 \left(t + \frac{p}{q} T_{ren} \right) = \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \tilde{\mathbf{a}}_1 \left(t + T_{hyp} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right).$$

Démonstration. Pour plus de commodité pour l'écriture, posons $\tilde{n} := n - n_0$.
Soit aussi $l \in \mathbb{Z}$ solution de l'équation de l'énoncé. Ainsi d'une part nous avons

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \frac{N_h T_{hyp}}{T_{ren}} \tilde{n}^2}.$$

Alors comme $T_{ren} = N_h T_{hyp} + \Theta_h T_{hyp}$ on a :

$$e^{-2i\pi \frac{p}{q} \frac{N_h T_{hyp}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} = e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp}}{T_{ren}} \tilde{n}^2}$$

et que clairement par définition de l'entier l

$$e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n}^2} = e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} \in \mathfrak{S}_l(\mathbb{Z});$$

ainsi on peut décomposer de manière unique la suite $\left(e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} \right)_n$ sur la base orthonormée $\left(\phi^k \right)_{k \in \{0 \dots l-1\}}$ de $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n}^2} &= e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} = \sum_{k=0}^{l-1} \left\langle \sigma_h(p, q), \phi^k \right\rangle_{\mathfrak{S}_l} \phi_n^k \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} b_k(l) e^{-2i\pi \frac{k}{l} n}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{a}}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{hyp} \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} \left(\sum_{k=0}^{l-1} b_k(l) e^{-2i\pi \frac{k}{l} n} \right) e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp}}{T_{ren}} \tilde{n}^2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{l-1} b_k(l) |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-2i\pi \frac{k}{l} n} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp} p}{T_{ren}} \tilde{n}^2}.$$

D'autre part

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 \left(t + T_{hyp} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{k}{l} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \tilde{\mathbf{a}}_1 \left(t + T_{hyp} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} e^{-\frac{2i\pi k n_0}{l}} b_k(l) \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{k}{l} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{k n}{l}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} N_h \tilde{n}}. \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{\mathbf{a}}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{hyp} \right) - \sum_{k=0}^{l-1} \tilde{b}_k(l) \tilde{\mathbf{a}}_1 \left(t + T_{hyp} \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q} N_h \right) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp} p}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right|; \end{aligned}$$

puis en partitionnant $\mathbb{N}$ avec Δ et Γ au niveau de la première série, et par inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} & \leq \left| \sum_{n \in \Gamma} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp} p}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{n \in \Delta} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp} p}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right|. \end{aligned}$$

Majorons la première somme :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \Gamma} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{hyp}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-\frac{2i\pi k n}{l}} \left(e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp} p}{T_{ren}} \tilde{n}^2} - 1 \right) \right| \\ & \leq 2 \left(\sum_{n \in \Gamma} |a_n|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^{l-1} |b_k(l)| \right) = O \left| \frac{1}{\ln(h)^\infty} \right|. \end{aligned}$$

Ensuite pour la seconde somme, examinons le terme :

$$e^{-2i\pi \frac{t}{T_{ren}} \tilde{n}^2} e^{2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp} p}{T_{ren}} \tilde{n}^2} = e^{-2i\pi \left(t + \Theta_h T_{hyp} \frac{p}{q} \right) \frac{1}{T_{ren}} \tilde{n}^2}.$$

Or quel que soit $n \in \Delta$ et pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$ on a qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left| \left(t + \frac{\Theta_h T_{hyp} p}{q} \right) \frac{(n - n_0)^2}{T_{ren}} \right| \leq C \left(|\ln(h)|^{2\gamma-3+\alpha} + |\ln(h)|^{2\gamma-2} \right)$$

$$\leq 2C |\ln(h)|^{2\gamma-2}.$$

Ainsi il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$

$$\left| \sum_{n \in \Delta} \sum_{k=0}^{l-1} |a_n|^2 b_k(l) e^{-2i\pi \frac{t}{T_{cl}} \tilde{n}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} \tilde{n} N_h} e^{-\frac{2i\pi k n}{T}} \left(e^{-2i\pi \frac{t \tilde{n}^2}{T_{ren}}} e^{+2i\pi \frac{p}{q} \frac{\Theta_h T_{hyp} \tilde{n}^2}{T_{ren}}} - 1 \right) \right|$$

$$\leq A |\ln(h)|^{2\gamma-2} \sum_{n \in \Delta} |a_n|^2 \leq A |\ln(h)|^{2\gamma-2} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2.$$

Ensuite dans le cas particulier où $t = 0$ et $\frac{T_{ren}}{T_{cl}} \in \mathbb{Q}$ alors $\Theta_h = 0$ et on obtient alors immédiatement l'égalité stricte proposée en fin d'énoncé, d'où le théorème. $\square$

Corollaire 5.9.2. *Nous avons l'égalité :*

$$\sum_{k=0}^{l-1} |b_k(l)|^2 = 1.$$

Démonstration. C'est simple : comme $b_k(l) = \langle \sigma_h(p, q), \phi^k \rangle_{\mathfrak{S}_l}$ et que $(\phi^k)_{k \in \{0 \dots l-1\}}$ est une base orthonormée $\mathfrak{S}_l(\mathbb{Z})$, avec l'égalité de Pythagore nous obtenons que

$$\sum_{k=0}^{l-1} |b_k(l)|^2 = \|\sigma_h(p, q)\|_{\mathfrak{S}_l}^2 = 1.$$

$\square$

Examinons deux cas particulier du théorème : le cas où $\frac{p}{q} = 1$ et le cas où $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$.

Corollaire 5.9.3. *Avec les mêmes notations qu'au précédent théorème ;*

(i) *pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$*

$$\tilde{\mathbf{a}}_2(t + N_h T_{hyp}) = \tilde{\mathbf{a}}_1(t) + O(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3});$$

(ii) *pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$*

$$\tilde{\mathbf{a}}_2\left(t + \frac{N_h T_{cl}}{2}\right) = \tilde{\mathbf{a}}_1\left(t + \left(\frac{N_h + 1}{2}\right) T_{cl}\right) + O(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3});$$

en particulier si N_h est impair, alors :

$$\tilde{\mathbf{a}}_2\left(t + \frac{N_h T_{cl}}{2}\right) = \tilde{\mathbf{a}}_1(t) + O(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3})$$

et si N_h est pair, alors :

$$\tilde{\mathbf{a}}_2\left(t + \frac{N_h T_{cl}}{2}\right) = \tilde{\mathbf{a}}_1\left(t + \frac{T_{cl}}{2}\right) + O(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}).$$

Démonstration. Commerçons par le cas (i) : ici $p = 1, q = l = 1$; donc par le précédent théorème on a l'égalité valable pour tout $t \in [0, |\ln(h)|^\alpha]$ suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{hyp} \right) &= \tilde{b}_0(1) \tilde{\mathbf{a}}_1(t + T_{cl} N_h) + O(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}) \\ &= \tilde{b}_0(1) \tilde{\mathbf{a}}_1(t) + O(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3})\end{aligned}$$

et $b_0(1) = \frac{1}{1} e^{-2i\pi n_0^2} = 1$, donc et $\tilde{b}_0(1) = 1$. Ensuite pour le second cas, on a que $p = 1, q = l = 2$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}_2 \left(t + \frac{p}{q} N_h T_{cl} \right) &= \\ \tilde{b}_0(2) \tilde{\mathbf{a}}_1 \left(t + \frac{T_{cl} N_h}{2} \right) &+ \tilde{b}_1(2) \tilde{\mathbf{a}}_1 \left(t + T_{cl} \left(\frac{1}{2} + \frac{N_h}{2} \right) \right) + O(|\ln(h)|^{\alpha+2\gamma-3}).\end{aligned}$$

Calculons ensuite les coefficients $b_0(2) = \frac{1}{2} e^{-2i\pi \frac{1}{2} n_0^2} + \frac{1}{2} e^{-2i\pi \frac{1}{2} (1-n_0)^2} = 0$ donc $\tilde{b}_0(2) = 0$. Ensuite :

$$\begin{aligned}b_1(2) &= \frac{1}{2} e^{-2i\pi \frac{1}{2} n_0^2} e^{\frac{2i\pi 0}{2}} + \frac{1}{2} e^{-2i\pi \frac{1}{2} (1-n_0)^2} e^{\frac{2i\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\pi n_0^2} + (-1) e^{-i\pi (n_0-1)^2} \right) = (-1)^{n_0}\end{aligned}$$

et donc $\tilde{b}_1(2) = e^{-i\pi n_0} (-1)^{n_0} = 1$. Ensuite la discussion suivant la parité de N_h vient directement de la propriété de T_{hyp} -périodicité de la fonction $t \mapsto \mathbf{a}_1(t)$. $\square$

5.9.2 Calcul explicite du module des coefficients de renaissance

Concernant les coefficients $\tilde{b}_k(l)$ du théorème de renaissance, on sait juste que

$$\sum_{k=0}^{l-1} |\tilde{b}_k(l)|^2 = 1.$$

Mais on peut mieux faire; en effet on va donner une formule pour calculer le module de chacun de ses coefficients $\tilde{b}_k(l)$. D'après le chapitre deux, il y a deux cas à traiter : le premier cas où $l = q$ et l'autre cas où $l = \frac{q}{2}$.

5.9.2.1 Cas où on choisit $l = q$

Dans le cas où q impair on a :

Théorème 5.9.4. *Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et q impair, alors e pour tout $k \in \{0 \dots q-1\}$ nous avons :*

$$|b_k(q)|^2 = \frac{1}{q}.$$

Et dans le cas ou q pair :

Théorème 5.9.5. Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et q pair ; pour tout $k \in \{0 \dots q-1\}$ nous avons :

$$\text{Si } \frac{q}{2} \text{ est pair, alors : } |b_k(q)|^2 = \begin{cases} \frac{2}{q} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Si } \frac{q}{2} \text{ est impair, alors : } |b_k(q)|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.9.2.2 Cas où $l = \frac{q}{2}$

C'est donc le cas où $q \in 4\mathbb{Z}$. En fait on peut se ramener assez facilement au cas précédent pour faire le calcul du module des coefficients.

Théorème 5.9.6. Quel que soit le couple d'entiers p et q , avec $p \wedge q = 1$ et $q \in 4\mathbb{Z}^*$; nous avons que pour tout $k \in \{0 \dots \frac{q}{2} - 1\}$

$$\left| b_k\left(\frac{q}{2}\right) \right|^2 = \frac{2}{q}.$$

5.9.3 Comparaison des échelles de temps d'approximation, classique et de renaissances

Comme $\gamma < 1$ on a par conséquent que $1 < 3 - 2\gamma$ et ainsi il existe au moins un réel α tel que $\alpha \in]1, 3 - 2\gamma[$ et donc il existe bien au moins un réel α tel que :

$$|\ln(h)| < |\ln(h)|^\alpha < |\ln(h)|^{3-2\gamma}.$$

Ceci autorise donc d'avoir un choix de α pertinent : pour h assez petit, l'échelle de temps spécifique d'approximation est plus grande que la période classique, en effet on a :

$$[0, T_{hyp}] \subset [0, |\ln(h)|^\alpha].$$

Ensuite en prenant $\gamma < \frac{1}{3}$ on a $3 < 4 - 3\gamma$ et ainsi il existe au moins un réel β tel que $\beta \in]1, 4 - 3\gamma[$ et donc il existe bien au moins un réel α tel que :

$$|\ln(h)|^3 < |\ln(h)|^\beta < |\ln(h)|^{4-3\gamma}.$$

Ceci autorise donc d'avoir un choix de α pertinent : pour h assez petit, l'échelle de temps spécifique d'approximation est plus grande que la période de renaissance, en effet on a :

$$[0, T_{ren}] \subset [0, |\ln(h)|^\beta].$$

Annexes

Fonctions d'Airy

Les fonctions d'Airy sont des fonctions spéciales usuelles ; il y a beaucoup de façons de les définir. On présente ici une des façon : celle par les séries entières : on cherche à résoudre l'équation différentielle $y'' - xy = 0$ avec une fonction $y(x)$ admettant un développement en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Ainsi

$$\begin{aligned} y'' - xy = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n-1})x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)} \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent $a_k = \frac{a_{k-3}}{k(k-1)} \quad \forall k \geq 3$. La donnée de a_0 et de a_1 détermine complètement la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ (en effet $a_2 = 0$) et :

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{1.4.7 \dots (3k-2)}{(3k)!} a_0 \quad \forall k \geq 0, \\ a_{3k+1} &= \frac{2.5.8 \dots (3k-1)}{(3k+1)!} a_1 \quad \forall k \geq 0, \\ a_{3k+2} &= 0 \quad \forall k \geq 0; \end{aligned}$$

et donc en posant

$$y_1(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1.4.7 \dots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}, \quad y_2(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2.5.8 \dots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

la solution

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{3k+2} x^{3k+2}$$

s'écrit

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x).$$

Notons bien que les fonctions y_1 et y_2 sont bien définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; en effet en posant $u_k := \frac{1.4.7 \dots (3k-2)}{(3k)!}$ et $X := x^3$ on a $y_1(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n$; puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(3n+3)(3n+2)} = 0$$

et donc le rayon de convergence de cette série est $+\infty$. De même pour l'autre série. On est alors en mesure de donner la :

Définition. Les fonctions d'Airy réelles $A_i(x)$ et $B_i(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$A_i(x) := a_0 y_1(x) - a_1 y_2(x), \quad B_i(x) := \sqrt{3} a_0 y_1(x) + \sqrt{3} a_1 y_2(x)$$

où $a_0 = \frac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} > 0$ et $a_1 = \frac{3^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} > 0$.

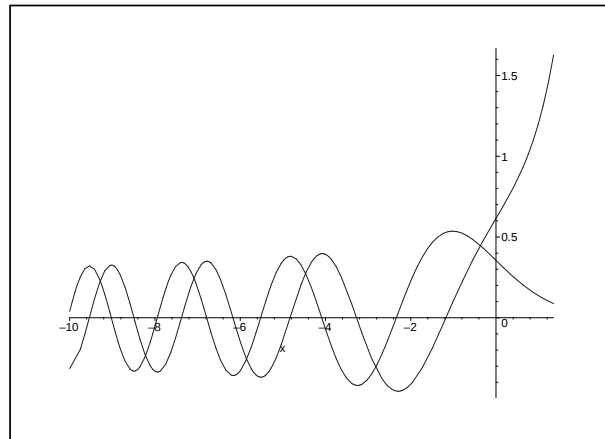


Fig 40. Les fonctions d'Airy.

On a la [Ab-St] :

Proposition. Nous avons pour $x \rightarrow +\infty$ les équivalents suivants

$$A_i\left(k^{\frac{2}{3}}x\right) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{4}}} \quad \text{et} \quad B_i\left(k^{\frac{2}{3}}x\right) \sim \frac{e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{4}}}.$$

Avec cette définition par les séries entières on peut définir les fonctions d'Airy sur $\mathbb{C}$; et ainsi $z \mapsto A_i(z)$ et $z \mapsto B_i(z)$ sont des fonctions entières. Pour finir donnons le :

Théorème. Les fonctions d'Airy réelles $A_i(x)$ et $B_i(x)$ forment une base de solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux $y'' = xy$.

Démonstration. Dejà par construction des fonctions d'Airy $A_i(x)$ et $B_i(x)$ il est clair que ces deux fonctions sont solution de : $y'' = xy$. Ensuite par un argument d'étagement des degrés les fonctions y_1 et y_2 sont libres. Considérons λ_1 et λ_2 deux réels tels que :

$$\lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i = 0$$

on a donc

$$(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 \sqrt{3} a_0) y_1 + (\sqrt{3} \lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_1) y_2 = 0$$

d'où comme les fonctions y_1 et y_2 sont libres et a_0, a_1 sont non nuls

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3} \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

□

Ensuite de là on voit facilement que pour $k > 0$ une base de solutions de $y'' = k^2 xy$ est

$$\left\{ x \mapsto A_i \left(k^{\frac{2}{3}} x \right); x \mapsto B_i \left(k^{\frac{2}{3}} x \right) \right\}.$$

Distributions tempérées holomorphes

Le but de cette annexe est de montrer de manière détaillée, à l'aide des distributions, le lemme 4.2.8 (voir aussi [Ge-Sh]).

Définition. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et considérons l'application :

$$T. : \begin{cases} U \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\ \lambda \mapsto T_\lambda. \end{cases}$$

On dira que la distribution T_λ est holomorphe sur U si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la fonction $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$ est holomorphe sur U .

Les distributions $[x_+^\lambda]$ et $[x_-^\lambda]$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\lambda) > -1$, on définit alors les fonctions x_+^λ et x_-^λ par :

$$x_+^\lambda := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) x^\lambda, \quad x_-^\lambda := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x) |x|^\lambda.$$

Comme $\text{Re}(\lambda) > -1$ on vérifie sans peine que x_+^λ et x_-^λ sont dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ et que les distributions régulières associées $[x_+^\lambda]$ et $[x_-^\lambda]$ sont holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > -1\}$.

Proposition. Les distributions $[x_+^\lambda]$ et $[x_-^\lambda]$ admettent toutes les deux un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-^*$.

Démonstration. Pour le moment la distribution $[x_+^\lambda]$ n'a de sens que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Re}(\lambda) > -1$. Alors comme pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nous avons

$$\langle [x_+^\lambda], \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1}.$$

Il est clair que la fonction $\lambda \mapsto \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-1\}$; que $\lambda \mapsto \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) dx$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$; et que $\lambda \mapsto \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0)) dx$ est absolument convergente pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > -2$. Ainsi l'égalité précédente est vraie pour $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1\}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > -2$; on vient donc de définir la distribution $[x_+^\lambda]$ pour $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1\}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > -2$. Itérons ce procédé : en écrivant que

$$\begin{aligned} \langle [x_+^\lambda], \varphi \rangle_{S', S} &= \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) \right) dx \\ &\quad + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}. \end{aligned}$$

Avec le même procédé qu'avant, on peut définir la distribution $[x_+^\lambda]$ pour $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1, -2, \dots, -n\}$ et tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > -n-1$. Ainsi par récurrence on peut définir la distribution $[x_+^\lambda]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \{\mathbb{Z}_-\}$. $\square$

Les distributions $(x+i0)^\lambda$ et $(x-i0)^\lambda$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on définit la fonction $(x+iy)^\lambda$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$(x+iy)^\lambda := e^{\lambda \ln(x+iy)} = e^{\lambda \ln|x^2+y^2| + \lambda i \arg(x+iy)}.$$

Ainsi comme $z = x+iy \mapsto z^\lambda = (x+iy)^\lambda$ est holomorphe sur $U_\pi := \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, on va s'intéresser aux limites quand on s'approche de l'axe des réels par le haut et par le bas de l'axe; on a simplement que :

$$\begin{aligned} (x+i0)^\lambda &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{\lambda i \arg(x+iy)} = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x \geq 0 \\ |x|^\lambda e^{\lambda i \pi} & \text{si } x \leq 0; \end{cases} \\ (x-i0)^\lambda &= \lim_{y \rightarrow 0^-} (x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{\lambda i \arg(x+iy)} = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x \geq 0 \\ |x|^\lambda e^{-\lambda i \pi} & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ces deux nouvelles fonctions $(x+i0)^\lambda$ et $(x-i0)^\lambda$ sont bien définies sur tout $\mathbb{C}$ et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > -1$ ces fonctions peuvent aussi s'écrire :

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{\lambda i \pi} x_-^\lambda \text{ et } (x-i0)^\lambda = x_-^\lambda + e^{-\lambda i \pi} x_+^\lambda.$$

Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > -1$, au sens des distributions nous avons :

$$(x+i0)^\lambda = [x_+^\lambda] + e^{\lambda i \pi} [x_-^\lambda] \text{ et } (x-i0)^\lambda = [x_-^\lambda] + e^{-\lambda i \pi} [x_+^\lambda].$$

Avec la proposition précédente on peut définir un prolongement holomorphe de $(x+i0)^\lambda$ et de $(x-i0)^\lambda$ à $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$.

Calcul de la transformée de Fourier de $[x_+^\lambda]$ et de $[x_-^\lambda]$.

On va démontrer le lemme 4.2.8 : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) \in]0, 1[$ et $\tau > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1\left(t_+^\lambda e^{-\tau t}\right)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-\tau t} e^{-ixt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{ist} dt\end{aligned}\quad (5.1)$$

où on a posé $s := -x + \tau i$. Comme $\operatorname{Im}(s) > 0$, l'intégrale (4.1) converge absolument et on peut voir avec le théorème de convergence dominée que la distribution $[x_+^\lambda e^{-\tau x}]$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $[x_+^\lambda]$ quand $\tau \rightarrow 0$; ainsi par continuité de la transformée de Fourier la distribution $\mathcal{F}_1([x_+^\lambda e^{-\tau x}])$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\mathcal{F}_1([x_+^\lambda])$ quand $\tau \rightarrow 0$. On va maintenant calculer l'intégrale (4.1) : en faisant le changement de variable $u := -ist$, avec $s = -x + \tau i$, où $\tau > 0$, ainsi $\arg(s) \in]0, \pi[$ on a :

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda e^{ist} dt = \left(\frac{i}{s}\right)^{\lambda+1} \int_L u^\lambda e^{-u} du$$

où L est la demi-droite partant de 0 et d'angle $\arg(-is)$. Notons bien que $\arg(-ist) = \arg(s) - \frac{\pi}{2}$, donc $\arg(-ist) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Maintenant montrons que :

$$\int_L u^\lambda e^{-u} du = \int_0^{+\infty} x^\lambda e^{-x} dx.$$

Pour cela soit $0 < \epsilon < R$, et considérons le lacet orienté $\gamma_{\epsilon,R}$ du plan complexe défini sur la figure 41.

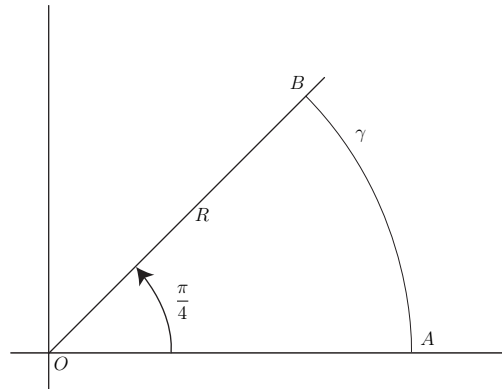


Fig. 41. Chemin d'intégration $\gamma_{\epsilon,R} := L_{\epsilon,R} \cup C_R \cup [R, \epsilon] \cup C_\epsilon$.

Alors comme $f : z \mapsto z^\lambda e^{-z} = e^{\lambda \ln(z)} e^{-z}$ est holomorphe sur tout ouvert de $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ par le théorème de Cauchy on a d'une part

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = 0$$

et d'autre part, en décomposant le lacet on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = \int_{L_{\epsilon,R}} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_R^{\epsilon} f(x) dx + \int_{C_{\epsilon}} f(z) dz. \quad (5.2)$$

Or avec le changement de variable $z := Re^{i\theta}$ dans la seconde intégrale de (4.2) nous avons

$$\int_{C_R} f(z) dz = -i \int_0^{\arg(-is)} R^{\lambda+1} e^{i\lambda\theta} e^{-Re^{i\theta}} d\theta.$$

Or

$$\left| R^{\lambda+1} e^{i\lambda\theta} e^{-Re^{i\theta}} \right| \leq R^{\operatorname{Re}(\lambda)+1} e^{-R \cos(\theta)};$$

donc, comme $\arg(-is) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, pour tout $\theta \in [0, \arg(-is)]$, $\cos(\theta) > 0$, ainsi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{\operatorname{Re}(\lambda)+1} e^{-R \cos(\theta)} = 0$$

d'où par convergence dominée sur un compact :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Avec le changement de variable $z := \epsilon e^{i\theta}$ dans la quatrième intégrale de (4.2) nous avons

$$\int_{C_{\epsilon}} f(z) dz = i \int_0^{\arg(-is)} \epsilon^{\lambda+1} e^{i\lambda\theta} e^{-\epsilon e^{i\theta}} d\theta$$

donc

$$\left| \int_{C_{\epsilon}} f(z) dz \right| \leq \epsilon^{\operatorname{Re}(\lambda)+1} |\arg(-is)|;$$

et comme $\operatorname{Re}(\lambda) + 1 > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{\operatorname{Re}(\lambda)+1} |\arg(-is)| = 0$$

on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_{\epsilon}} f(z) dz = 0.$$

Enfin par le théorème de Cauchy, et comme (5.1) converge absolument, en faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$, l'égalité est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $-1 < \operatorname{Re}(\lambda) < 0$

$$0 = \int_L u^{\lambda} e^{-u} dt + \int_{+\infty}^0 x^{\lambda} e^{-x} dx;$$

donc

$$\int_L u^{\lambda} e^{-u} dt = \int_0^{+\infty} x^{\lambda} e^{-x} dx = \Gamma(\lambda + 1)$$

ie :

$$\mathcal{F}_1 \left(t_+^{\lambda} e^{-\tau t} \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{s} \right)^{\lambda+1} \Gamma(\lambda + 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{s} \right)^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i\tau)^{\lambda+1}} \Gamma(\lambda+1).$$

Maintenant passons à la limite ($\tau \rightarrow 0$) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on obtient :

$$\mathcal{F}_1 \left(\left[t_+^\lambda \right] \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i.0)^{\lambda+1}} \Gamma(\lambda+1).$$

Alors comme $\lambda \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i.0)^{\lambda+1}} \Gamma(\lambda+1)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$ et que $\lambda \mapsto \mathcal{F}_1 \left(\left[t_+^\lambda \right] \right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^*$, par un prolongement holomorphe la précédente égalité reste vraie sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^*$. Et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}^*$ nous avons

$$\mathcal{F}_1 \left(\left[t_+^\lambda \right] \right) (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i.0)^{\lambda+1}} \Gamma(\lambda+1)$$

et donc

$$\mathcal{F}_1 \left(\left[t_+^\lambda \right] \right) (-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(x+i.0)^{\lambda+1}} \Gamma(\lambda+1);$$

ensuite comme

$$(x+i.0)^{-\lambda-1} = \left[x_+^{-\lambda-1} \right] - e^{-\lambda i\pi} \left[x_-^{-\lambda-1} \right];$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}^*$ on a

$$\mathcal{F}_1 \left(\left[t_+^\lambda \right] \right) (-x) = \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda} \Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[x_+^{-\lambda-1} \right] - e^{-\lambda i\pi} \left[x_-^{-\lambda-1} \right] \right)$$

d'où

$$\mathcal{F}_1 \left(\left[t_+^\lambda \right] \right) (x) = \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda} \Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[x_-^{-\lambda-1} \right] - e^{-\lambda i\pi} \left[x_+^{-\lambda-1} \right] \right).$$

Principales notations

- Dans toute la suite, sans précisions particulière $\mathcal{H}, \langle \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ désignera un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$, on notera I son élément identité.
- h sera le paramètre semi-classique.
- $L_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$: l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ continues pour la norme de $\mathcal{H}$, on notera $||| \cdot |||$ sa norme d'opérateur associée.
- $l^2(\mathbb{Z})$: l'ensemble des suites de carrées sommables.
- $\sigma_p(A)$ désignera le spectre ponctuel d'un opérateur A , ie ses valeurs propres.
- $\sigma(A)$ désignera le spectre de A , ie le complémentaire de l'ensemble résolvant de A dans le corps des complexes.
- On notera $L^p(M)$ l'espace de Lebesgue usuel d'ordre p sur la variété M .
- On notera $H^p(M)$ l'espace de Sobolev usuel d'ordre p sur la variété M .
- On notera $\mathcal{S}(M)$ l'espace de Schwartz sur la variété M .
- On notera $\mathcal{D}(M)$ l'espace des fonctions tests sur la variété M .
- Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on notera $\mathfrak{F}(f)(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$ sa transformée de Fourier usuelle.
- Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on notera $\mathfrak{F}_h(f)(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{ixt}{h}} dt$ sa h -transformée de Fourier.
- Pour tout réel x , on notera $E[x]$ sa partie entière.
- On dira qu'une fonction f_h est égale à $O(h^\infty)$ sur un compact $I \subset \mathbb{R}$ ssi quel que soit un entier $k \in \mathbb{N}$ il existe une constante $M_k > 0$ telle que $\sup_{x \in I} |f(x)| \leq M_k h^k$.
- On notera par TM (resp. T^*M) le fibré tangent (resp. cotangent) d'une variété M .

Bibliographie

- [Ab-St] M. ABRAMOWITZ & I.A STEGUN, *Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. New York : Dover, pp. 255-258 and 260-263, 1972.
- [Ann] C. ANNE, *Majoration de multiplicités pour l'opérateur de Schrödinger*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble 8 : 53-60, 1989-1990.
- [Ar-Av] V. I ARNOLD & A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, N. 9 in Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, Gauthiers-Villars, Paris, 1967.
- [Arn1] V. I ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, N. 60 in GTM. Springer, 1989.
- [Arn2] V.I ARNOLD, *Chapitres supplémentaires sur les EDO*, Springer Universitext, 1980.
- [Arn3] V.I ARNOLD, *Ordinary Differential Equations*, Springer Universitext, 2006.
- [Av-Pe] I. Sh. AVERBUKH & N. F PERELMAN, *Fractional revivals : universality in the long-term evolution of quantum wave packets beyond the correspondance principle dynamics*. Physics Letters A, 139, p. 449-453, 1989.
- [Arv1] W. ARVERSON, *A short course on spectral theory*, Springer, 2001 (Graduate Texts in Mathematics).
- [Arv2] W. ARVERSON, *An invitation to C*-Algebras*, Springer, 1976 (Graduate Texts in Mathematics).
- [Aud1] M. AUDIN, *The topology of torus action on symplectic manifolds*, Progress in Math, Birkhäuser, 1991.
- [Aud2] M. AUDIN, *Les systèmes hamiltoniens et leurs intégrabilité*, Cours spécialisés 8, SMF, 2001.
- [Ba-We] S. BATES & A.WEINSTEIN, *Lectures on the geometry of quantization*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, 1997.
- [Ber1] P. BERARD, *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques* , Astérisque 177-178 : 127-154, 1989.
- [Ber2] P. BERARD, *Transplantation et isospectralité I* , Math. Ann. 292 : 547-559, 1992.

- [Ber3] P. BERARD, *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc. 48 : 565-576, 1993.
- [Ber4] P. BERARD, *The isospectral problem for Riemannian manifolds*, Cours de DEA, Grenoble 1993. [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/isos-dea93.ps](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/isos-dea93.ps)
- [Ber5] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Introduction*, Auxerre 2001. [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/tambours.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/tambours.pdf)
- [Ber6] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 1*, Auxerre 2001. [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre1.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre1.pdf)
- [Ber7] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 2*, Auxerre 2001. [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre2.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre2.pdf)
- [Be-Be] P. BERARD & M. BERGER, *Le spectre d'une variété riemannienne en 1982*, Kaigai (Tokyo), 1983.
- [BGM] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.
- [Berr] M. BERRY, *Some quantum-to-classical asymptotics*. In Gionnoni & al [GVZJ], pages 251-303.
- [Bes] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier. 30 : 109-128, 1980.
- [Bil] J. M. BILY, *Propagation d'états cohérents et applications*, PhD Thesis, Université de Nantes, 2001.
- [BKP] R. BLUHM, V. A. KOSTELECKY & J. A. PORTER, *The evolution and revival structure of localized quantum wave packets*. American Journal of Physics 64, 944, 1996.
- [Bl-Ko] R. BLUHM & V. A. KOSTELECKY , *Long term evolution and revival structure of Rydberg wave packets for hydrogen and alkali-metal atoms*. Phys. Rev A51, 4767-4786, 1995.
- [Bou] N. BOURBAKI, *Théorie spectrale*, Hermann, 1970.
- [Bo-Gu] L. BOUTET DE MONVEL & V. GUILLEMIN , *The spectral theory of Toeplitz operators*, N. 99 in Annals of Mathematics, Princeton University press, 1981.
- [BPU] R. BRUMMELHUIS, T. PAUL & A. URIBE, *Spectral estimates around a critical level*, Duke Math. J, 78(3) :477-530, 1995.
- [Car] T. CARLEMAN, *Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger*, Ark. Mat. Astr. Fys. 24B 11 :1-7, 1934.
- [Ca-Ru] J. CARRY & P. RUSU, *Separatrix eigenfunction*, Phys. Review A 45(12) :8501-8512, 1992.
- [Cart] P. CARTIER, *Introduction aux problèmes mathématiques de la mécanique quantique*, Strasbourg : Département de mathématique, 1971.

- [Cas] J. W. CASSELS, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge Tracts, 45, Cambridge Univ. Press, 1957.
- [CKTB] A. CATTANEO, B. KELLER, C. TOROSIAN & A. BRUGUIERES, *Déformation Quantification Théorie de Lie*, Panoramas et synthèses 20, SMF, 2005.
- [Ch-VuN] L. CHARLES & S. VU NGOC, *Spectral asymptotics via the semi-classical birkhoff normal form*, math.SP.0605096.
- [Che1] S. Y. CHENG, *Eigenvalues comparison theorems and geometric applications*, Math. Z. 143 : 289-290, 1975.
- [Che2] S. Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. 51 : 43-55, 1979.
- [Col1] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I*, Compositio Mathematica, 27 : 80-106, 1973.
- [Col2] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II*, Compositio Mathematica, 27 : 159-184, 1973.
- [Co-Ve] Y. COLIN DE VERDIERE & J. VEY, *Le lemme de Morse isochore*, Topology, 18 : 283-293, 1979.
- [Col3] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commute II*, Math. Z., vol 71, p. 51-73, 1980.
- [Col4] Y. COLIN DE VERDIERE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comment. Math. Helv, 61 : 254-270, 1986.
- [Col5] Y. COLIN DE VERDIERE, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 20 : 599-615, 1987.
- [Co-Pa1] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSE, *Equilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale*, Comm PDE, 19 : 1535-1564, 1994.
- [Co-Pa2] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSE, *Equilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerferld*, Ann IHP, 61 : 347-367, 1994.
- [Col6] Y. COLIN DE VERDIERE, *Le spectre du laplacien : survol partiel depuis le Berger-Gauduchon-Mazet et problèmes*, Actes de la table tournante en l'honneur de Marcel Berger, Séminaires et Congrès SMF, 1 : 233-252, 1996.
- [Col7] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectres de graphes*, Cours Spécialisés numéro 4, SMF, 1998.
- [CLP] Y. COLIN DE VERDIERE, M. LOMBARDI & J. POLLET, *The microlocal Landau-Zener formula*, Ann. IHP, 71 : 95-127, 1999.
- [Co-Pa3] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSE, *Singular Bohr-Sommerfeld rules*, Commun. Math. Phys, 205 : 459-500, 2000.
- [Col8] Y. COLIN DE VERDIERE, *Bohr-Sommerfeld rules to all orders*, Henri Poincaré Acta, 6, 925-936, 2005.

- [Col9] Y. COLIN DE VERDIERE, *Méthodes semi-classique et théorie spectrale*, Cours de DEA, 2006.
- [Col10] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics : thirty years after*, Ann. Inst. Fourier. 57 (7) : 2429-2463, 2008.
- [Col11] Y. COLIN DE VERDIERE, *Semi-classical Analysis of Integrable Systems*, GAP 4, Centre de Recerca Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, 2008.
- [Co-Ro] M. COMBES & D. ROBERT, *A phase study of the quantum Loschmidt Echo in the semi-classical limit*, [arXiv : quant-ph0510151], 2005.
- [Con] A. CONNES, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [Co-Hi] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Intersciences Publishers, New York, 1953.
- [DB-Ro] S. DE BIEVRE & D. ROBERT, *Semi-classical propagation on $\log(\hbar)$ time scales*. Int. Math. Res. Not, No 12, 667-696, 2003.
- [DW-Le] M. DE WILDE & P. LECOMPTE, *Existence of star-product and a formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*. Lett. Math. Phys. 7, 487-496, 1983.
- [Di-Sj] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math Society Lectures Note Series 268, 1999.
- [Dui] J.J. DUISTERMAAT, *Fourier Integral Operators*, Progress in mathematics, Birkhäuser, 1996.
- [Du-Ho] J.J. DUISTERMAAT & L. HÖRMANDER, *Fourier integral operators II*, Acta Math., Vol 128, 183-269, 1972.
- [Eli1] L. ELIASSON, *Hamiltonians systems with Poisson commuting integrals*, PhD thesis, University of Stockholm, 1984.
- [Eli2] L. ELIASSON, *Normals forms for hamiltonians systems with Poisson commuting integrals - elliptic case*, Comment. Math. Helv., 65, 4-35, 1990.
- [Ego] J.V. EGOROV, *The canonical transformation of pseudodifferential operators*, Uspehi Mat. Nauk, vol 24, 149, 235-236, 1969.
- [Ev-Zw] L. EVANS & M. ZWORSKI, *Lectures on semiclassical analysis*. [http ://mathh-berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf](http://mathh-berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf).
- [Fab] G. FABER, *Beweis, dass unter allen homogen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kriesförmige den tiefsten Grundton gibt*. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang, 169-172, 1923.
- [Fed] B. FEDOSOV, *Deformation quantization and index theory*, 9, Akademie Verlag, 1996.
- [Fol] G. B. FOLLAND, *Harmonic analysis in phase plane*, 122, Princeton University Press, 1989.
- [Fom1] A.T. FOMENKO, *Symplectic Geometry*, Gordon and Breach Publishers, 1995.

- [Fom2] A.T FOMENKO, *Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [Fri] K. FRIEDRICHS, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109 : 465-487, 685-713, 1934.
- [Fu-Ra] S. FUJIE & T. RAMOND, *Breit-Wigner formula at barrier tops*, J. Math. Phys, 44(5) : 1971-1983, 2003.
- [Gal] S. GALLOT, *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Astérisque, (163-164), 281, 1989.
- [Ge-Sh] I. GEL'FAND & G. SHILOV, *Generalized Functions*, Vol. 1, Academic Press, 1964.
- [Ge-Gr] C. GERARD & A. GRIGIS, *Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier*, Journal of Differential Equation 72 :149-177, 1988.
- [GVZJ] M.J GIANNONI, A. VOROS & J. ZINN-JUSTIN editors, *Chaos et physique théorique*, Les Houches, école d'été de physique théorique 1989, session LII, North-Holland.
- [Go-Wi] C. GORDON & E.N. WILSON, *Isospectral deformations on compact manifolds*, J. Diff. Geom. 19 : 241-256, 1984.
- [GWW1] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones mathematicae 110 : 1-22, 1992.
- [GWW2] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *One cannot hear the shape of a drum*, Bulletin of the AMS 27 : 134-138, 1992.
- [Gor] C. GORDON, *Isospectral closed riemannian manifolds which are not locally isometric*, J. Diff. Geom. 37 : 639-649, 1993.
- [Gr-Sj] A. GRIGIS & J. SJÖSTRAND, *Microlocal analysis and differential operators, an introduction*, London Math Society Lectures Note Series 196, 1994.
- [Gro] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math, 82, 1985.
- [Grot] A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles*, 1986.
- [Gui] A. GUICHARDET, *Intégration analyse hilbertienne*, Ellipses, 1989.
- [Gu-St] V. GUILLEMIN & S. STERNBERG, *Geometric asymptotics*, AMS, 1976.
- [Gu-Si] S. J GUSTAFSON & I. M SIGAL, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer, 2003.
- [He-Ro] B. HELFFER & D. ROBERT, *Puit de potentiel généralisé et asymptotique semi-classique*, Annales de l'IHP Physique Théorique 41(3) :291-331, 1984.
- [He-Sj1] B. HELFFER & J. SJÖSTRAND, *Multiple wells in the semi-classical limit I*, Comm. in Partial Differential Equation 9(4) :337-408, 1984.
- [He-Sj2] B. HELFFER & J. SJÖSTRAND, *Semiclassical analysis of Harper's equation*, Bulletin, Société Mathématique de France, Mémoire, 39, 1990.

- [Hel] B. HELFFER, *30 ans d'analyse semi-classique bibliographie commentée*, Notes d'exposé, <http://www.math.u-psud.fr/~helffer/histoire2003.ps>, 2003.
- [Hor1] L. HÖRMANDER, *The weyl calculus of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl., 32(3) :360-444, 1979.
- [Hor2] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol I-IV, Springer, 1983-90.
- [Kac] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly 73 (4) : 1-23, 1966.
- [Kat1] T. KATO, *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. 13 : 135-148, 1972.
- [Kat2] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1980 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 142).
- [Khi] A. Y. KHINTCHINE, *Continued fractions*, P. Noordhoff, Ltd. Groningen, 1963.
- [Ko-Sh1] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry*, Proceedings of the conference "Functional Analysis, Partial Differential Equations and Applications" dedicated to the V. G. Maz'ya 60th birthday, Rostock, 1998.
- [Ko-Sh2] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Conditions for the discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds*, Funct. Anal. and Appl. 33, 1999.
- [Kon] M. KONTSEVITCH, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, Preprint of the IHES [arxiv : q-alg/9709040], 1997.
- [Kra] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. 94 : 97-100, 1925.
- [Lab1] O. LABLEE, *Spectre du Laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique*, Gazette des Mathématiciens, Société Mathématique de France :116, 2008.
- [Lab2] O. LABLEE, *Sur le spectre semi-classique d'un système intégrable de dimension 1 autour d'une singularité hyperbolique*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., vol 19, 1., pp. 85-123, 2010.
- [Lau] F. LAUDENBACH, *Calcul différentiel et intégral*, Editions de l'école polytechnique, 2000.
- [LAS] C. LEICHTLE, I. Sh. AVERBUKH & W. SCHLEICH, *Multilevel quantum beats : An analytical approach.* Phys. Rev. A, 54, pp. 5299-5312, 1996.
- [Le-Br] P. LEVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale*, Dunod, 2003.
- [Mar] A. MARTINEZ, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, 2001.
- [Marz] C. MARZ, *Spectral Asymptotics for Hill's Equation near the potential maximum*, Asymptotics Analysis 5 :221-267, 1992.

- [MD-Sa] D. McDUFF & D. SALOMON, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monograph, 1995.
- [Mes] A. MESSIAH, *Mécanique quantique*, Dunod, 1962.
- [Mil] J. MILNOR, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 51 : 542, 1964.
- [Mir] E. MIRANDA, *On symplectic linearization of singular Lagrangian foliation*. PhD thesis, Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.
- [Mos] J. MOSER, *The Analytic Invariants of an Area-Preserving Mapping Near a Hyperbolic Fixed Point*, Comm. on pure and applied math, Vol. 9, 673-692, 1956.
- [Nad] N. NADIRASHVILI, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator*, Math. USSR Sbornik, 61 : 225-238, 1988.
- [Ole1] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger operators on a complete Riemannian manifold*, Math. Notes. 54 :934-939, 1993.
- [Ole2] I. M. OLEINIK, *On the connection of the classical and quantum mechanical completeness of a potential at infinity on complete Riemannian manifolds*, Math. Notes. 55 : 380-386, 1994.
- [Ole3] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger-type operators on a complete Riemannian manifold*, PhD thesis, Northeastern University, 1997.
- [Pau1] T. PAUL, *Echelles de temps pour l'évolution quantique à petite constante de planck*, Séminaire X-EDP, 2007.
- [Pau2] T. PAUL, *Reconstruction and non-reconstruction of wave packets*, Preprint, 2008.
- [Pau3] T. PAUL, *Reconstruction of wave packets on a hyperbolic trajectory*, Preprint, 2008.
- [Ram] T. RAMOND, *Semiclassical study of quantum scattering on the line*, Comm. Math. Phys., 177, p.221-254, 1996.
- [Re-Si] M. REED & B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1975.
- [Rob1] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1987.
- [Rob2] D. ROBERT, *Revivals of wave packets and Bohr-Sommerfeld quantization rules*, Adventures in mathematical physics, 219-235, Contemp. Math., 447, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Rob3] D. ROBERT, *Propagation of coherent states in quantum mechanics and application*, proc. CIMPA, 2005.
- [Robi1] R. W. ROBINNET, *Quantum wave packet revivals*, Physics Reports. 392, 1-119, 2005.

- [Robi2] R. W. ROBINNET, *Wave packets revivals and quasirevivals in one-dimensionnal power law potentials*, Journal of Mathematical Physics, Volume 41(4), 2000.
- [Ro-Sz] A. M. ROCKETT & P. SZÜSZ, *Continued fractions*, World Scientific Publishing Co., Inc, River Edge, NJ, 1992.
- [Sjo1] J. SJÖSTRAND, *Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions*, Microlocal analysis and applications (Montecatini Terme, 1989), Lect. Notes in Math., 1495, Springer, Berlin, 1991.
- [Sjo2] J. SJÖSTRAND, *Density of states oscillations for magnetic Schrödinger operators*, Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1990), 295-345, Math. Sci. Engrg., 186, Academic Press, Boston, MA, 1992.
- [Sev] B. SEVENNEC, *Majoration topologique de la multiplicité du spectre des surfaces*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie de Grenoble, 12 : 29-35, 1993-1994.
- [Sun] T. SUNADA, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, Ann. of Math. 121 : 169-186, 1985.
- [Tay] M. E. TAYLOR, *Noncommutative harmonic analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1986.
- [VuN1] S. VU NGOC, *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités*, PhD Thesis, Institut Fourier 1998.
- [VuN2] S. VU NGOC, *Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment*, Asymptotic analysis, vol. 24 (3-4), p.319-342, 2000.
- [VuN3] S. VU NGOC, *Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type*, Comm. Pure and Applied Math., vol 53, number 2, pp.143-217, 2000.
- [VuN4] S. VU NGOC, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, Panoramas et synthèses 22, SMF, 2006.
- [Wil] J. WILLIAMSON, *On the algebraic problem concerning the normal form of linear dynamical systems*, Amer. J. Math., 58(1), 141-163, 1936.
- [Zel] S. ZELDITCH, *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plain domains*, Geom. And Func. Ana. 10 : 628-677, 2000.