HAL
open science

Optique électromagnétique non-linéaire polyharmonique : théorie et modélisation numérique

Pierre Godard

To cite this version:

Pierre Godard. Optique électromagnétique non-linéaire polyharmonique : théorie et modélisation numérique. Physique [physics]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2009. Français. NNT : . tel-00439833

HAL Id: tel-00439833

https://theses.hal.science/tel-00439833

Submitted on 8 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale : Physique et Sciences de la Matière

Thèse de doctorat de l'Université de Provence

Spécialité : optique électromagnétique

Optique électromagnétique non-linéaire polyharmonique : théorie et modélisation numérique

Thèse présentée par Pierre GODARD

pour l'obtention du grade de docteur de l'Université de Provence

et dirigée par Frédéric ZOLLA et André NICOLET.

Soutenue le 30 Septembre 2009 devant le jury :

Rapporteurs :

Albert FERRANDO :	Université de Valence
Joseph ZYSS :	École Normale Supérieure de Cachan

Examinateurs :

Didier FELBACQ :	Université de Montpellier II
Christophe GEUZAINE :	Université de Liège
Jérome LÉON :	Université de Montpellier II
André NICOLET :	Université d'Aix-Marseille III
Frédéric ZOLLA :	Université d'Aix-Marseille I

Table des matières

Notations **9**

Remerciements **13**

1 L'Optique non-linéaire **15**

1.1 Introduction 16
1.1.1 La phénoménologie 16
1.1.2 Le modèle 17
1.2 Relations de constitution de l'électromagnétisme non-linéaire 28
1.2.1 Vecteur polarisation et tenseurs de susceptibilité 28
1.2.2 Propriétés générales des tenseurs de susceptibilité 31
1.3 Non-linéarité du deuxième ordre 35
1.3.1 Équations de propagation 35
1.3.2 Description d'une jauge globale et de la composante statique . 38
1.3.3 Degrés de l'approximation des équations de propagation . . . 40
1.3.4 Densité d'énergie pour une non-linéarité du second ordre . . . 44
1.4 Non-linéarité du troisième ordre 46
1.4.1 Degrés de l'approximation des équations de propagation . . . 47
1.4.2 Densité d'énergie pour une non-linéarité du troisième ordre . 50
1.5 Caractérisation partielle des pertes d'énergie électrique dans un milieu non-linéaire 51
1.5.1 Généralités 51
1.5.2 Le terme $\chi^{(1)}$ 52
1.5.3 Le terme $\chi^{(2)}$ 53
1.5.4 Le terme $\chi^{(3)}$ 56
1.5.5 Le terme $\chi^{(n)}$ 57
1.6 Un champ incident polychromatique 58
1.6.1 Équations de propagation 58
1.6.2 Degré de l'approximation des équations de propagation 63
1.6.3 Non-linéarité du troisième ordre 66
1.7 L'effet Raman 70
1.8 Notre approche de l'optique non-linéaire 74

2 Quelques généralités en optique non-linéaire **77**
2.1 Le Théorème optique en régime non-linéaire 77
2.1.1 Généralités 77
2.1.2 Le cas bidimensionnel 78
2.2 Quand pouvons-nous parler de cas transverses ? 83
2.2.1 Non-linéarité d'ordre deux 83
2.2.2 Non-linéarité d'ordre trois 85
2.3 Le spectre du champ total 86
2.3.1 Les ensembles minimaux du spectre de $\mathbf{P}^{(n)}$ 86
2.3.2 L'ensemble $\{p\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$ épuise-t-il toutes les fréquences présentes ? 87

3 Les méthodes numériques **91**
3.1 Simulation d'un champ incident 91
3.1.1 Substitution de source 93
3.1.2 En guise de vérification 98
3.1.3 La polarisation TM 104
3.2 Les couches parfaitement adaptées 105
3.2.1 Principe des couches parfaitement adaptées 105
3.2.2 Implémentation des couches parfaitement adaptées 106

4 Diffraction par un cristal photonique présentant un effet Kerr-optique non négligeable **109**
4.1 Introduction 109
4.1.1 Les cristaux photoniques 109
4.1.2 L'effet Kerr-optique 111
4.2 Diffraction bidimensionnelle par un réseau fini de cercles "non-linéaires" 112
4.2.1 Présentation du système simulé 112
4.2.2 Le Mode accepteur 114
4.2.3 Mesures de la non-linéarité 119
4.3 La balance énergétique 123
4.3.1 Un calcul préliminaire 123
4.3.2 Deux intégrales pour la densité linéique de puissance 125
4.3.3 Un cristal photonique éclairé par un fil 132
4.4 Cristal photonique non-linéaire à cœur plein 139
4.5 Diffraction par un matériau massif gravé. 145
4.6 Cristal photonique infini 148

5 Simulations de diffraction avec génération d'harmoniques **151**
5.1 Le borate de baryum. 152
5.2 Diffraction électromagnétique par un cylindre, à l'ordre trois et au degré trois : génération de deuxième et de troisième harmoniques et effet Kerr-optique 153
5.2.1 Présentation du problème 153
5.2.2 Le bilan énergétique 156
5.2.3 La dépendance de $|I_q|^2$ en fonction de l'amplitude A^i du champ incident 171

5.3 Diffraction électromagnétique par un cristal photonique infini, à l'ordre trois et au degré trois 176

Conclusion **189**

A Quelques rappels d'algèbre tensorielle **193**
A.1 Expression des changements de base 193
A.2 Tenseurs isotropes 195
A.3 La nature géométrique de $\mathbf{D}(\mathbf{s}, t)$ est importante ! 197

B Quelques propriétés des formes $\lfloor \cdot, \cdots, \cdot \rfloor$ **201**
B.0.1 Premières propriétés 201
B.0.2 Calculs préliminaires au critère énergétique. 202

C Les démonstrations en théorie des nombres utiles pour le premier chapitre **221**

D Taxonomie des effets non-linéaires **223**

Résumé **239**

Notations

Il ne faut jamais s'exprimer plus clairement que ses propres idées.
Niels Bohr

Généralités mathématiques

$\mathbb{Z}$	l'ensemble des nombres entiers
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres entiers positifs, i.e. $x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{Z} \quad \& \quad x > 0\}$
$-\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres entiers négatifs, i.e. $x \in -\mathbb{N} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes
$i\mathbb{R}$	l'ensemble des imaginaires purs, i.e. $x \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{C} \quad \& \quad x = i\Im m\{x\}\}$
$\Re e\{x\}$	partie réelle du nombre x
$\Im m\{x\}$	partie imaginaire du nombre x
$\overline{x}$	complexe conjugué du nombre x
$\overline{f}$	fonction conjuguée de la fonction f, i.e. si $f : V \to W, x \mapsto f(x)$ et si la conjugaison est définie sur W, alors $\overline{f} : V \to W, x \mapsto \overline{f(x)}$
A^T	matrice transposée de la matrice A
A^*	matrice hermitienne de la matrice A
$diag(\mathbf{v})$	matrice $M = (m_{i,j})$ dont les seules entrées non nulles sont les m_{ii}, qui prennent les valeurs v_i
Ξ_Ω	fonction caractéristique de l'ensemble Ω, i.e. $\Xi_\Omega(P) := \begin{cases} 1, & P \in \Omega \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

Généralités mathématiques (suite)

$\hat{f}$	transformée de Fourier de la fonction f ; convention : $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dt\, f(t) e^{i\omega t}$, d'où $f(t) = \int_{\mathbb{R}} d\omega\, \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t}$
$\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\{1,\cdots,dim(V)\}}$	base d'un espace vectoriel V de dimension $dim(V)$, où $dim(V) < \infty$
$\{\mathbf{e}^i\}_{i\in\{1,\cdots,dim(V)\}}$	base de l'espace vectoriel V', dual de V ; i.e., $e^i e_j = \delta^i{}_j$
$\mathcal{S}_n$	groupe des permutations d'un ensemble E dont le cardinal est n
$Mat_n(\mathbb{R})$	ensemble des matrices n par n à entrées dans $\mathbb{R}^n$
id	matrice identité (la taille étant donnée par le contexte)
$det(A)$	déterminant de la matrice A
$O_n(\mathbb{R})$	groupe orthogonal sur $\mathbb{R}^n$, i.e. $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \quad \& \quad A\,A^T = id\}$
$SO_n(\mathbb{R})$	groupe spécial orthogonal sur $\mathbb{R}^n$, i.e. $A \in SO_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \{A \in O_n(\mathbb{R}) \quad \& \quad det(A) = 1\}$
$d_2(\cdot,\cdot)$	fonction de dégénérescence à deux éléments, i.e. $\mathrm{d}_2(a,b) := \begin{cases} 2, & a \neq b \\ 1, & a = b \end{cases}$
$d_3(\cdot,\cdot,\cdot)$	fonction de dégénérescence à trois éléments, i.e. $\mathrm{d}_3(a,b,c) := \begin{cases} 6, & a \neq b \neq c \neq a \\ 3, & a \neq b = c \\ 3, & b \neq c = a \\ 3, & c \neq a = b \\ 1, & a = b = c \end{cases}$
$a \wedge b$	plus petit diviseur commun des entiers a et b
$\lfloor x \rfloor$	partie entière d'un nombre réel x, i.e., $\lfloor x \rfloor := \max_{z\in\mathbb{Z}}(z - x \leqslant 0)$
$< f >$	moyenne stochastique de la fonction f, i.e. $< f >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)$

Notations électromagnétiques

$\mathbf{E}$	champ électrique total, appartient à $\mathbb{H} := \{f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\}$
$\mathbf{D}$	champ d'induction électrique, appartient à $\mathbb{H}$
$\mathbf{B}$	champ magnétique total, appartient à $\mathbb{H}$
$\mathbf{H}$	champ d'induction magnétique, appartient à $\mathbb{H}$
$\mathbf{E}^i$	champ électrique incident, appartient à $\mathbb{H}$
$\mathbf{E}^d$	champ électrique diffracté, appartient à $\mathbb{H}$
$\mathbf{E}_p$	composante du champ électrique total oscillant à la pulsation $p\omega_I$ lorsque $\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s}, q\omega_I)e^{-iq\omega_I t}$,
$\varepsilon_r^{(1)}(\mathbf{s}, \omega)$	permittivité relative dans un milieu linéaire, local (indépendance du nombre d'onde), dispersif (dépendance de la pulsation ω), inhomogène (dépendance de la position $\mathbf{s}$), stationnaire (indépendance du temps)
$\chi^{(1)}(\mathbf{s}, \omega)$	susceptibilité électrique pour un milieu ayant les mêmes propriétés que dans la notation précédente. On a $\varepsilon_r^{(1)} = 1 + \chi^{(1)}$

Abréviations

COS	Conditions d'onde sortante (détaillées dans le chapitre 3)
PML	Couche parfaitement adaptée, ou "Perfectly Matched Layer"
EDP	Équation(s) aux dérivées partielles

Remerciements

Peu enclin à singer ceux qui m'ont précédé,
J'ai un temps eu l'impudence d'oser songer
À omettre ces classiques trivialités -
Mais à la tradition il faut souvent céder.

Alors pour commencer, je propose ceci :
À mes deux encadrants, à mes deux rapporteurs,
Aux membres du jury, aux divers auditeurs,
À l'éventuel lecteur du présent manuscrit,

À tous mes collègues, mes anciens professeurs,
À mes amis aussi, de Marseille ou d'ailleurs,
À ma famille enfin, j'ai la joie et l'honneur,
D'adresser humblement ces mercis en couleur !

Je dois aux deux premiers un petit commentaire.
J'ai aimé, avec vous, "découvrir" la physique ;
J'aimerais, à présent, plus de mathématique,
Convaincu qu'on grandit en changeant ses repères.

Je pars la tête emplie de nouvelles envies,
Mais si j'ai décidé de ne suivre vos traces,
N'imaginez pas que je ferai la grimace
À chaque évocation de mon passage ici.

Merci Hervé Rigneault et Sophie Bracelet,
Pour le vif intérêt prêté à ce projet
Et la cerise que vous avez apporté.
Puissent ces travaux trouver quelqu'utilité !

Aux suivantes personnes, je veux exprimer
Des regrets : Frank Wagner, pour avoir avorté
La collaboration ; Frédéric Forestier,
Toujours à l'écoute, sans trop désespérer !

Quelques clins d'œil étant également d'usage,
À celles et ceux qui ont partagé, midi
Ou soir, à Fort Fouque, Fresnel ou Luminy,
D'agréables moments, je souhaite rendre hommage.

Amère et honteuse, la dernière pensée,
Pour avoir gravement bouleversé ma vie,
Elle vous est destinée, Oleg Ogievetsky,
Dont je fus ces six ans un peu le protégé.

D'être de déceptions un éternel sujet,
Encore une fois, Monsieur, veuillez m'excuser.

Chapitre 1

L'Optique non-linéaire

> Le doute naît de la vérité, comme une espèce de rejeton, et naturellement ils s'élèvent tous deux, en entrelaçant leurs rameaux.
>
> Dante Alighieri

Ce chapitre a pour but d'introduire l'optique non-linéaire. Nous nous sommes attachés à suivre la démarche scientifique : dans une première partie (1.1.1), quelques expériences seront décrites. Elles stipulent notamment que l'électromagnétisme enseigné lors des cours du premier cycle de nos universités n'est valide qu'aux faibles intensités : la réponse d'un matériau à une excitation électromagnétique peut être non-linéaire en fonction de l'amplitude du champ incident. Nous décrirons un modèle rendant compte de ce changement de paradigme. Dans d'autres chapitres (4, 5) seront présentés des résultats numériques simulant des équations issues du modèle. Bien qu'indispensable, la dernière partie, entendons la vérification expérimentale, n'a pas été réalisée durant cette thèse.

Les concepts de l'optique non-linéaire seront décrits dans la section 1.2 ; cela sera assez formel, dans le sens où, même si leur manipulation pourra s'avérer fastidieuse, les définitions données seront faciles à comprendre. Nous nous sommes imposés de présenter toutes les hypothèses nécessaires (elles sont souvent soulignées) pour expliciter les équations de propagation d'un champ électromagnétique dans un matériau non-linéaire. Deux cas de figure ont été étudiés séparément : dans le plus général, où le spectre des champs électromagnétiques est continu, nous ne savons rien faire d'autre que de poser les équations. La discussion est reléguée au chapitre suivant. Dans le deuxième cas, le spectre des champs électromagnétiques est discret, et nous obtenons un système d'équations de propagation, que nous n'avons jamais rencontré dans la littérature, pour lequel nous avons élaboré des systématiques[1] permettant de résoudre une approximation dudit système, ne serait-ce que numériquement. On remarquera que même si ces approximations, que nous avons dû faire afin de tirer des nombres de nos

[1] Ces systématiques sont les degrés ; ce chapitre ne présente que le degré d, l'introduction du degré d' étant reportée au dernier chapitre.

modèles, sont des exigences théoriques, elles se laissent facilement intégrer par l'intuition, et permettent de retrouver des résultats expérimentaux connus. Les générations de seconde et de troisième harmoniques seront notamment décrites.

La suite de ce chapitre, ainsi que le suivant, établit une correspondance entre les tenseurs décrivant les matériaux et les champs électromagnétiques s'y propageant. Les transferts d'énergie (sections 1.5 et 2.1) ainsi que la conservation de la polarisation du champ électrique (section 2.2) seront étudiés. Le présent chapitre se clôt sur la description de phénomènes non-harmoniques qui peuvent apparaître lorsque le champ incident n'est pas monochromatique (section 1.6) ou lorsque le matériau résonne naturellement à une certaine fréquence (section 1.7).

Tout ce rapport se situe dans le cadre suivant : le milieu est stationnaire, local, non-bianisotrope, magnétiquement linéaire - nous détaillerons tout ceci dans la section 1.1.2.

1.1 Introduction

1.1.1 La phénoménologie

Cette partie se voulait être un aperçu historique des premières manifestations de l'optique non-linéaire. Nous ne sommes pas satisfaits de son état. En effet, nous n'avons jamais rencontré de description détaillée de la genèse de cette matière, et de plus, nous n'avons su nous procurer certains articles fréquemment cités. Les citations associées sont, dans ce cas, recopiées de manière mécanique.

Cette sous-section mise à part, tout ce chapitre montre qu'une voie purement théorique mène naturellement à l'optique non-linéaire. Évidemment, la valeur de cette étude serait bien mince si l'on ne disposait d'aucun moyen expérimental qui atteindrait ce régime. Ceci n'est pas le cas, depuis l'invention du laser. La première émission laser, au moyen d'un cristal de rubis, est due à Théodore Maiman, en 1960. Très vite, l'amélioration des procédés permit d'obtenir des lasers variés (en taille, en matériau, etc.) et des applications industrielles (le perçage dès 1965, le code barre en 1974, etc.).

Les effets non-linéaires de la réponse d'un matériau à un rayonnement électromagnétique issu d'un laser (ou d'un maser) ont très rapidement été découverts : Nicolaas Bloembergen et ses étudiants travaillaient sur l'effet Pockels quand ils reçurent un papier de Peter Franken, qui évoquait une expérience où la génération de seconde harmonique apparaissait ([1]). Un mois après cette expérience fut publié un article ([2]) où une expérience similaire est décrite. Les auteurs, Kaiser et Garrett, parlent de processus "à deux photons". Cette fois, ce n'est pas la seconde harmonique qui est générée mais une longueur d'onde correspondant à une résonance du matériau (le champ incident oscillait à $694\,nm$ et la composante générée oscillait à $425\,nm$).

Dans un article de 1962 ([3]), John Armstrong, Nicolaas Bloembergen, Jacques Ducuing et Peter S. Pershan donnent la base de l'optique non-linéaire théorique : ils développent un modèle semi-classique pour les interactions entre la lumière et la matière, discutent la symétrie des tenseurs $\chi^{(3)}$, trouvent des solutions de systèmes simplifiés décrivant la génération de seconde ou troisième harmonique, ou celle de somme

de fréquences (en séparant, à chaque fois, deux cas, selon qu'il y a accord de phase ou non). Ils évoquent également la génération de sous-harmoniques (et renvoient à [4]), l'effet Kerr électro-optique, etc. Tout ceci suppose un champ incident où le spectre est une somme de deux (ou quatre, voire six) distributions de Dirac, et que le milieu non-linéaire est homogène et infini. Même si les approximations sont nombreuses, on constate que, un an après les découvertes expérimentales, la théorie décrivait déjà quantité de phénomènes observés. Malheureusement, nous n'avons trouvé, avec ces modèles, de comparaisons théorie/expérience qui nous satisfaisaient.

En 1965 fut reportée ([5]) la génération de filaments : lorsqu'un faisceau suffisamment intense et localisé pénètre dans un milieu non-linéaire, il peut se scinder en plusieurs parties, que l'on appelle alors des filaments. Ceci conduit ensuite à ce que l'on appelle des solitons spatiaux. On peut donc observer, en augmentant l'intensité du champ incident, aucun effet non-linéaire, puis un "self-focusing", cette filamentation, et enfin l'endommagement du milieu hôte. La première filamentation due à l'effet Kerr-optique fut présentée en 1982 dans [6].

On ne peut ne serait-ce que citer les divers sous-domaines de l'optique non-linéaire d'aujourd'hui. À l'intérieur même de cette matière, de nombreux sujets sont maintenant éloignés de ce qui nous intéressera dans la suite du document. En guise d'ouverture, le lecteur est renvoyé à la course aux impulsions ultrabrèves ([7]), aux applications en spectroscopie ([8], [9]) ou aux "supercontinuums", découverts en 1970 ([10]), qui ont commencé à être maîtrisés dans les années 1990, grâce à une meilleure compréhension de l'enchaînement des effets qui les produisent ([11], [12]). On peut préciser que les champs constituant ces supercontinuums ne peuvent être approximés par une enveloppe faiblement variable ([13]).

1.1.2 Le modèle

Les deux types d'équations en physique

Deux types de données sont nécessaires à la description d'un phénomène physique
- l'objet de l'étude,
- le contexte dans lequel est placé l'objet.

On aime expliciter cette différence. Par exemple ([14], chapitre 1), en mécanique, on mesure une force $\mathbf{F}_g$ appliquée sur un objet en un point $(\mathbf{s}, t)$ de l'espace-temps ; cette mesure est traduite par la relation $\mathbf{F}_g(\mathbf{s}, t) = m\,\mathbf{g}(\mathbf{s}, t)$. On *définit* ainsi la masse m de l'objet *et* le champ gravitationnel $\mathbf{g}$ en $(\mathbf{s}, t)$. La première est un attribut de l'objet, le second est indépendant de celui-ci.

La séparation existe aussi, et de manière plus fondamentale, entre les équations régissant des quantités physiques ([15]). Par exemple, en thermodynamique, les variables d'énergie interne U, de température T, d'entropie S, de pression P et de volume V sont reliées, pour les systèmes fermés, par $dU = TdS - PdV$. Cette relation est indépendante du milieu considéré. Mais pour obtenir les expressions des différentes variables, des équations *dépendantes du milieu*, reliant ces variables, sont nécessaires, e.g., $PV = kNT$ pour les gaz parfaits (où k est la constante de Boltzmann et N le nombre de particules qui constituent le système).

Les distinctions présentées au paragraphe précédent apparaissent également en électromagnétisme. En effet, nous avons *posé,* concernant la force électrique $\mathbf{F}_e$ en fonction de la charge q de l'objet et du champ électrique $\mathbf{E}$ qui agit sur lui, de manière similaire à son analogue mécanique, la relation $\mathbf{F}_e(\mathbf{s}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{s}, t)$.

La distinction apparaît également dans les équations qui décrivent les champs électromagnétiques. D'un côté, nous avons les relations de Maxwell, qui ne sont que des équations "structurelles" des champs (ce sont eux l'objet de l'étude), de l'autre côté, nous avons les relations constitutives, qui précisent les propriétés du milieu accueillant ces champs.

Les équations de Maxwell

Les longueurs d'onde du spectre visible se situent approximativement entre $400\,nm$ et $800\,nm$. Dans toute cette thèse, on supposera que les longueurs d'onde que l'on utilise sont au moins supérieures à $300\,nm$. La taille d'un atome étant de l'ordre du l'Angström (soit $10^{-10}\,m$), il semble impossible de détailler les comportements de la lumière simultanément à ces deux échelles. On est donc amené à faire l'hypothèse suivante :

> *les ondes que l'on décrira évolueront dans des milieux homogénéisés ; ceci implique que notre modèle ne pourra pas décrire l'action individuelle d'un atome sur la lumière.*

Dans le cadre de cette approximation (qui, précisons-le tout de même, englobe toute l'électromagnétisme classique), les équations de Maxwell s'énoncent ainsi :

$$\begin{pmatrix} \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\begin{pmatrix} \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \rho \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

La nomenclature[2] concernant les champs est rappelée dans le tableau 1.1

$\mathbf{E}$	champ électrique
$\mathbf{B}$	champ magnétique
$\mathbf{D}$	champ d'induction électrique
$\mathbf{H}$	champ d'induction magnétique
$\mathbf{J}$	densité de courant électrique
ρ	densité de charge électrique

TAB. 1.1 – Nomenclatures des champs intervenant dans les équations de Maxwell

[2]Certains auteurs appellent parfois $\mathbf{B}$ le champ d'induction magnétique et $\mathbf{H}$ le champ magnétique. Ceci nous paraît suranné, et nous nous expliquerons.

On distingue, dans les équations de Maxwell, deux ensembles[3] : le premier, (1.1), contient deux relations entre les champs "primitifs", tandis que le second, (1.2), lie les champs d'induction aux sources électriques ; cette dissymétrie est causée par l'absence de source magnétique.

On remarque que les équations de Maxwell ne suffisent pas à résoudre un problème du type : à partir d'une densité de courant $\mathbf{J}$ (dorénavant simplement appelée courant) et d'une densité de charge ρ, expliciter les champs électromagnétiques. En effet, dans $\mathbb{R}^3$, chaque champ présentant trois inconnues, on obtient au total douze quantités à évaluer. Or, les équations de Maxwell ne donnent que huit relations (quatre par ensemble). Elles sont alors complétées par les relations de constitutions.

Les relations de constitutions

Que savons-nous *a priori* sur l'induction électromagnétique ? La réponse diffère selon que l'on se place dans le vide ou dans la matière. En ce qui concerne le premier cas, la réponse est triviale, et le formalisme présenté est en quelque sorte trop compliqué. En effet, par définition, le vide est le milieu qui ne crée pas d'induction. On introduit alors deux constantes fondamentales, ε_0 et μ_0, nommées respectivement permittivité du vide et perméabilité du vide, et dont les valeurs sont fixées uniquement parce que l'on a choisi, comme unités fondamentales, le mètre, la seconde, le kilogramme et l'ampère. Ces valeurs sont [4] $\varepsilon_0 \simeq 8,854\, A^2\, s^4\, kg^{-1}\, m^{-3}$ et $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\, A^{-2}\, s^{-2}\, kg\, m$. On pose alors les relations constitutives de proportionnalité suivantes :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E},$$
$$\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B}.$$

En revanche, dans la matière, nous devons choisir une formulation la plus générale possible. Comme nous l'avons écrit, la "fabrication" d'induction se fait à une autre échelle que celle à laquelle nous travaillons, et nous sommes réduits à la voir comme une boîte noire. À l'entrée, en chaque endroit $\mathbf{s}$ et à chaque instant t, figurent les quantités primitives, et à la sortie les champs d'induction $\mathbf{D}(\mathbf{s}, t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{s}, t)$. Quelles sont donc les quantités dont nous disposons ? Nous nous restreignons aux phénomènes purement électromagnétiques en choisissant, tout simplement, outre l'endroit $\mathbf{s}$ et l'instant t, les champs primitifs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. On pose ainsi[5] :

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}, t) = \mathfrak{D}\big(\{\mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}, \tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_e^d(\mathbf{s})\times T_e^d(t)}, \{\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_b^d(\mathbf{s})\times T_b^d(t)}, \mathbf{s}, t\big) \quad (1.3a)$$

et

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}, t) = \mathfrak{H}\big(\{\mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma}, \tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_e^h(\mathbf{s})\times T_e^h(t)}, \{\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_b^h(\mathbf{s})\times T_b^h(t)}, \mathbf{s}, t\big) \quad (1.3b)$$

[3] Avec une notation issue de la relativité, chaque ensemble se réduit à une équation. Nous y reviendrons.

[4] Dans un système de notation plus usuel, on a $\varepsilon_0 \simeq 8,854\, F\, m^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\, N\, A^{-2}$ où F et N représentent respectivement le farad et le newton.

[5] Afin de simplifier l'exposé, nous supposons que l'espace-temps s'identifie à $\mathbb{R}^4$; aussi, nous nous plaçons dans le référentiel où le matériau est au repos - voir [16]. Enfin, l'article [17], ainsi que les références qui s'y trouvent, ne se limitent pas aux phénomènes purement électromagnétiques.

où, par exemple, $\{\mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma},\tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_e^d(\mathbf{s})\times T_e^d(t)}$ représente l'ensemble des évaluations du champ électrique aux endroits $\boldsymbol{\sigma}$ et aux instants τ, lorsque $\boldsymbol{\sigma}$ et τ parcourent respectivement les ensembles $S_e^d(\mathbf{s}) \subset \mathbb{R}^3$ et $T_e^d(t) \subset \mathbb{R}$.

Naturellement, l'étude du matériau le plus général, et donc le plus compliqué, risque de s'avérer inféconde. Même si ceci peut décevoir le lecteur, nous allons donc immédiatement nous concentrer sur la propriété essentielle des objets qui nous préoccupent : la non-linéarité. Cependant, nous désirons expliciter *toutes* les hypothèses qui permettent de simplifier les expressions (1.3). Seul le cas électrique va être détaillé ; un traitement similaire doit être accordé à la fonctionnelle $\mathfrak{H}$.

– Nous supposons que le matériau est causal. Ceci implique que

$$T_a^b(t) \subset (-\infty, t], \quad (a,b) \in \{e,b\} \times \{d,h\}.$$

On constate en effet que l'égalité précédente est équivalente à la restriction : "les instants τ auxquels sont évalués les champs électrique et magnétique contribuant au champ d'induction à l'instant t sont antérieurs à cet instant". On conviendra que, du point de vue du physicien, la restriction des systèmes étudiés occasionnée par cette hypothèse est bien mince[6].

– Nous supposons que le matériau est spatialement local. Ceci implique que

$$S_a^b(\mathbf{s}) = \{\mathbf{s}\}, \quad (a,b) \in \{e,b\} \times \{d,h\}.$$

La majorité des articles évoque des matériaux locaux (on peut cependant consulter [19], [20], etc.). Ceci est en fait dû au processus d'homogénéisation évoqué plus haut : lorsque l'on moyenne le comportement des champs sur des cellules élémentaires (en général sans signification physique), on "s'arrange" pour que la taille desdites cellules soit suffisamment grande pour pouvoir négliger l'induction que les champs primitifs évoluant dans une cellule impliquent sur une autre cellule, tout en étant suffisamment petite pour éviter d'obtenir un matériau homogène ([21]).

On pourra s'étonner du fait que la non-localité spatiale est relativement peu étudiée alors que la localité temporelle fait plutôt figure d'exception (on parle alors de matériau instantané, ou non-dispersif). En prenant un langage plus imagé, on peut dire que, à l'échelle atomique, la distance d'une période spatiale (i.e., une longueur d'onde) est grande, alors que la durée d'une période temporelle est petite. Cependant, l'étonnement pourra s'amoindrir en intégrant des nombres à cette comparaison : une longueur d'onde (prise dans le vide) d'un micromètre correspond à une période temporelle d'environ $1/3.10^{-14}\,s$.

En s'autorisant à garder le même nom pour la fonctionnelle $\mathfrak{D}$, l'expression de cette dernière se simplifie selon

$$\mathbf{D}(\mathbf{s},t) = \mathfrak{D}\big(\{\mathbf{E}(\mathbf{s},\tau)\}_{\tau\in T_e^d(t)}, \{\mathbf{B}(\mathbf{s},\tau)\}_{\tau\in T_b^d(t)}, \mathbf{s}, t\big).$$

[6] L'article [18], qui se propose de se maintenir dans le régime temporel, propose la définition suivante de la causalité : un matériau est causal si, pour tout réel t, l'annulation des champs primitifs sur $(-\infty, t)$ entraîne l'annulation des champs induits sur le même interval. Cette définition, probablement plus facile à manier mathématiquement que celle que nous donnons, n'autorise le milieu à avoir une polarisation instantanée, et n'est donc pas équivalente à la nôtre.

– Nous supposons que le matériau est non-bianisotrope. Ceci implique que

$$\partial_{\mathbf{B}}\mathfrak{D} = 0,$$
$$\partial_{\mathbf{E}}\mathfrak{H} = 0.$$

Les matériaux chiraux, par exemple, sortent du cadre de cette hypothèse.
On a donc

$$\mathbf{D}(\mathbf{s},t) = \mathfrak{D}\big(\{\mathbf{E}(\mathbf{s},\tau)\}_{\tau\in T_e^d(t)}, \mathbf{s}, t\big).$$

– Nous supposons que le matériau est électriquement stationnaire. Ceci implique que la fonctionnelle $\mathfrak{D}$ ne dépend pas explicitement du temps (elle en dépend bien sûr implicitement).

$$\mathbf{D}(\mathbf{s},t) = \mathfrak{D}\big(\{\mathbf{E}(\mathbf{s},\tau)\}_{\tau\in T_e^d(t)}, \mathbf{s}\big).$$

Cette hypothèse est relativement restrictive : elle implique qu'il ne peut y avoir de processus mécanique, thermique, chimique, etc., qui fasse évoluer le matériau. Comme corollaire immédiat, on notera que l'on ne peut utiliser la fonctionnelle précédente dans une étude comprenant l'endommagement laser.

> *On s'attachera donc à donner des amplitudes suffisamment grandes pour que les effets non-linéaires ne soient pas négligeables, mais d'une manière raisonnable pour que la lumière ne change pas les propriétés du matériau (i.e. les fonctionnelles $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{H}$).*

Pour dire les choses encore autrement, nous n'étudions que l'action de la matière sur la lumière, et nous négligeons l'action réciproque.

Nous ferons une autre hypothèse sur le matériau. Celle-ci est, curieusement, rarement explicitée dans la littérature. Elle consiste à supposer que le matériau est[7] "lisse", dans le sens où $\mathfrak{D}$ admet un développement limité par rapport au champ électrique au voisinage de l'origine. Le cadre de l'optique non-linéaire est alors très simple à énoncer : c'est celui où l'on ne se contente pas d'un développement à l'ordre un.

L'hypothèse du matériau lisse s'avère bien peu commode lorsque ce dernier sature, ou si le champ qui l'illumine le détériore durablement. Remarquons cependant que ces cas de figure sortent du cadre d'un régime stationnaire que nous nous sommes fixés ; de plus, nous avons l'intuition qu'un matériau qui sature est un matériau lisse, mais qu'il existe une fonction n'ayant pas de développement de Taylor, donnée dans la littérature, qui décrit convenablement avec un seul degré de liberté ce qu'une hypothétique fonction polynomiale décrirait avec un grand nombre de degrés de liberté.

Cette notion de matériau lisse sera détaillée dans la section 1.2, où, notamment, la définition du vecteur polarisation sera rappelée.

Digression sur d'autres formulations

Cette digression n'a pas reçu que des suffrages. Si le lecteur souhaite l'esquiver, nous en donnons un bref résumé.

[7] Contrairement aux autres qualificatifs, celui-ci est de notre cru.

Il existe plusieurs formulations des équations de Maxwell. Certaines ont un sens géométrique plus élaboré que celle de l'analyse vectorielle que nous venons de donner, et permettent donc de les rendre plus simples et plus claires. La construction d'autres quantités, telles que l'énergie ou l'impulsion électromagnétiques, s'avère également plus intuitive avec le formalisme de la géométrie différentielle. Nous n'avons cependant, rencontré d'étude satisfaisante sur les relations de constitutions dans ce formalisme.

Le fait que l'on dispose de plusieurs manières pour exprimer le même phénomène est évidemment un avantage. L'annexe A donne le passage entre ces différents vocabulaires. Ceux-ci seront alors équivalents, lorsque la nature géométrique de chaque objet sera tranchée - ce qui n'est, pour l'instant, pas le cas : voir la page 33.

Intéressons-nous à d'autres formulations des équations des champs électromagnétiques. Ceci nous permettra, en particulier de comprendre pourquoi il est préférable de distinguer les champs sources $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ par rapport aux champs d'induction $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ par rapport à $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$ (alors que, pour des raisons essentiellement historiques, la plupart de nos collègues, et nous-mêmes dès la section suivante, exprimons $\mathbf{B}$ en fonction de $\mathbf{H}$).

Remarquons tout d'abord que les champs que l'on manipule sont à l'échelle mésoscopique ; s'il existe des champs microscopiques $\mathbf{E}_m$ et $\mathbf{B}_m$, les champs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ ne sont définis que lors du processus (ou la tentative) d'homogénéisation du milieu à l'échelle mésoscopique[8].

Puisque, d'après le paragraphe précédent, seuls les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ont une signification microscopique, la force électromagnétique $\mathbf{F}_{em}$ qu'exerce un champ de vecteurs $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ sur une particule ne peut s'exprimer qu'en fonction de ces champs. On trouve en effet, en appelant q la charge de la particule et $\mathbf{v}$ sa vitesse, la loi :

$$\mathbf{F}_{em} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Pour cette raison, G. Deschamps a choisi, dans [23], le nom de "champs de force" pour désigner les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ (ainsi que "champs de source" pour $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$).

Ensuite, lorsque l'on utilise des potentiels, on écrit $\mathbf{E} = \nabla V - \partial_t \mathbf{A}$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. L'utilisation des potentiels $\mathbf{T}$ et Ω, dérivant des champs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{D}$ est bien plus exotique ([24]).

On peut encore citer la différence fondamentale entre les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ et les champs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ qui apparaît dans la version discrète de l'électromagnétisme : on utilise, dans cette théorie, deux réseaux ; $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont alors des cochaînes sur le premier alors que $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ sont des cochaînes sur le second (voir à ce sujet, la référence [25]).

Les deux derniers arguments sont liés, et nous allons détailler une autre formulation, qui amène naturellement la version des potentiels et la version discrète.

Lorsque Maxwell, reprenant les travaux de Gauss, d'Ampère, de Faraday et de Lenz, a écrit les systèmes (1.1) et (1.2), il avait choisi le formalisme des quaternions

[8] Pour être plus précis, il existe plusieurs moyens d'arriver aux équations de Maxwell. Nous les avons posées, en suivant la méthode de [14]. Mais on peut également considérer comme fondamentales les conservations de charge électrique et de flux magnétique à toute échelle ; soit, dans une formulation de géométrie différentielle, $d\rho = 0$ et $d\mathbf{J} + \partial_t \rho = 0$. On en déduit, si les groupes de cohomologie H^3 et H^2 de la variété sur laquelle sont définis les champs sont triviaux, les "potentiels" $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ tels que $\rho = d\mathbf{D}$ et $\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D} = d\mathbf{H}$. Dans ce cas, ces champs d'excitation électrique $\mathbf{D}$ et magnétique $\mathbf{H}$ acquièrent un sens microscopique ([22]).

[26] ; c'est-à-dire qu'à un vecteur $\mathbf{X}$, ayant pour coordonnées dans un repère cartésien (X_x, X_y, X_z), il associait le quaternion purement imaginaire $\mathbf{X} = X_x\mathbf{i} + X_y\mathbf{j} + X_z\mathbf{k}$. On peut alors définir un opérateur nabla "quaternionique" ∇_q de sorte que la divergence (respectivement le rotationnel) de $\mathbf{X}$ soit la partie réelle (respectivement la partie imaginaire) de $\nabla_q\mathbf{X}$. Gibbs et Heaviside découvrirent la formulation vectorielle que l'on a utilisée jusqu'à maintenant. Il subsistait cependant une curiosité : les transformations par l'opérateur de parité sur les champs diffèrent selon que celui-ci agit sur les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ou sur les champs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{D}$. Ce problème fut résolu lorsque l'on décrivit ces champs dans une algèbre tensorielle. Apparaissent alors[9] les algèbres de Clifford ([16], [27]), les algèbres des multivecteurs, ou algèbres géométriques[10] ([28]), et les algèbres des formes différentielles (introduites dans [23], et abondamment étudiées depuis). Toutes ont en commun de distinguer des objets associés à des points (les scalaires ou les formes de degré zéro, i.e. les fonctions), des segments (les vecteurs ou les formes de degré un), des aires (les bivecteurs - ou pseudo-vecteurs - ou les formes de degré deux) et des volumes (les pseudo-scalaires ou les formes de degré trois). Nous décrirons plus en détail dans quelles catégories se situent les différentes entités électromagnétiques, mais l'on peut d'ores et déjà préciser que les vecteurs polaires et axiaux sont décrits par, respectivement, les deuxième et troisième objets. E.J. Post, dans [29], énumère les inconvénients de la formulation vectorielle des équations de Maxwell. Le point fondamental est que les milieux chiraux couplent les champs électrique et magnétique, et l'on en vient à additionner des éléments de natures différentes.

Il semble que les algèbres différentielles présentent des avantages importants par rapport aux autres formalismes : l'unicité de l'opérateur de différentiation, la description naturelle des champs (qui deviennent donc des formes, i.e. des objets qui a tout point de la variété associe un covecteur d'un certain rang ; l'étude de ces objets est moins élaborée dans les algèbres de Clifford, par exemple), etc. Aussi, ces objets étant étudiés de manière abondante par les mathématiciens, le physicien peut trouver des relations intéressantes entre, par exemple, la topologie de l'espace sur lequel sont définies les formes et certaines propriétés des formes, etc. Les avantages que présente l'utilisation des formes différentielles sur l'analyse vectorielle sont bien décrites dans [23]. Cet article explique également (voir également la série d'articles [30], [31], [32], [33]) pourquoi, d'un point de vue physique, il est plus naturel de considérer des vecteurs, des covecteurs et le produit de dualité (qui émerge naturellement) qu'uniquement des vecteurs avec un produit scalaire.

Nous avons ici et là utilisé le langage de la géométrie différentielle[11], il est grand temps de le préciser. Cette formulation des équations de Maxwell est tirée de [15], [37], [38], etc.

On note respectivement par $\bigwedge^n(M)$ les formes différentiables de degré n sur une variété différentiable M. Soient alors $(F, G, C) \in \bigwedge^2(M) \times \bigwedge^2(M) \times \bigwedge^3(M)$. Les

[9] Les références données décrivent les présentations de l'électromagnétisme dans ces algèbres. Dans la plupart des cas, une annexe rappelle les propriétés purement mathématiques de ces objets. Nous n'affirmons pas que la paternité de ces sujets revienne aux articles mentionnés, ni que la liste soit exhaustive.

[10] L'auteur avoue qu'il ne saisit pas la distinction entre ces algèbres et celles de Clifford.

[11] Si un lecteur désire s'initier dans ce sujet, nous proposons les livres [34], [35] où la physique n'est jamais loin derrière, ou [36] pour certains aspects plus fondamentaux (qui s'avéreront indispensables. . . dans la méthode des éléments finis !)

équations de Maxwell s'écrivent :

$$dF = 0, \tag{1.4}$$
$$dG = C. \tag{1.5}$$

Ces deux équations sont, respectivement, la réécriture des systèmes (1.1) et 1.2). L'équation de continuité, $dC = 0$, s'obtient en dérivant l'équation des sources. On énumère quelques attraits de cette formulation :

- elle contient deux équations : la première ne contient qu'une forme (correspondant aux champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$) et la seconde contient la forme d'induction et la forme de source.
- les composantes des deux champs de vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ (dans $\mathbb{R}^3$) apparaissent comme des composantes d'un unique tenseur (antisymétrique, de rang deux, dans $\mathbb{R}^4$) F. De même, les composantes des deux champs de vecteurs (dans $\mathbb{R}^3$) $\mathbf{H}$ et $\mathbf{D}$ apparaissent comme des composantes d'un unique tenseur (antisymétrique, de rang deux, dans $\mathbb{R}^4$) G, et la densité ρ s'associe naturellement au vecteur $\mathbf{J}$ pour donner la forme source C. Ainsi, le nombre de quantités physiques pertinentes est grandement diminué (ici, il est divisé par deux). Ceci implique que les unités nécessaires est également grandement diminué, comme cela est rapporté dans le tableau[12] 1.2.
- les opérateurs $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ (et ∇ lorsque l'on introduit les potentiels) sont unifiés en un seul opérateur d (c'est d'ailleurs pourquoi nous avons utilisé cette notation, plutôt que les noms div, rot et $grad$). De la même manière, les deux équations $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A}$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (qui ne sont valables que localement, c'est-à-dire dans l'image d'une carte) sont réunies en $F = dK$, pour un certain élément K de $\bigwedge^1(M)$.
- soit un ϕ difféomorphisme *quelconque* de M ; puisque $\phi^* dA = d\phi^* A$ pour toute forme différentiable A, les équations de Maxwell, sous cette présentation, sont invariantes par ϕ. Cette invariance sous tout difféomorphisme, si importante en relativité générale, n'apparaît pas dans les formules (1.1) et (1.2).
- sous cette présentation, les équations de Maxwell ne requièrent ni métrique ni orientation de l'espace ambient.
- ces équations sont un intermédiaire entre les formulations précédentes et les théories de Yang-Mills. Rappelons simplement que ces théories sont la base du modèle standard, qui décrit les interactions électromagnétique, faible et forte (le lecteur peut se reporter à [39] pour une description détaillée, ou à [40], [41] pour des articles de revue - nous avons trouvé le second excellent ; il raconte notamment la genèse de cette théorie, qui est partie d'une reformulation par Hermann Weyl des équations de Maxwell -, voire à [35] pour une formulation plus proche des mathématiques).

Pour faciliter les comparaisons avec les paragraphes précédents, et une meilleur compréhension de la différence entre la forme F et les formes G et C, on donne une expression, dans des coordonnées cartésiennes, des formes évoquées :

[12] E.J. Post, dans [29], fait remarquer que l'unité de G ou de C est celle de la charge $[e]$, et l'unité de F est celle du flux $[\hbar][e]^{-1}$, unités qui paraissent plus naturelles que celles utilisées dans le système MKSA.

forme	unité	champs associés	unités
F	$m^2\, kg\, s^{-2}\, A^{-1}$	$\mathbf{B}$	$T = kg\, s^{-2}\, A^{-1}$
		$\mathbf{E}$	$V\, m^{-1} = m\, kg\, s^{-3}\, A^{-1}$
G	$s\, A$	$\mathbf{D}$	$m^{-2}\, s\, A$
		$\mathbf{H}$	$m^{-1}\, A$
C	$s\, A$	$\mathbf{J}$	$m^{-2}\, A$
		ρ	$m^{-3}\, s\, A$

TAB. 1.2 – Unités des formes F, G et C, et les unités des champs $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, ρ, $\mathbf{J}$ qui s'en déduisent.

$$F = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy + E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt,$$

$$G = -D_x dy \wedge dz - D_y dz \wedge dx - D_z dx \wedge dy + H_x dx \wedge dt + H_y dy \wedge dt + H_z dz \wedge dt,$$

$$C = -\rho dx \wedge dy \wedge dz + J_x dy \wedge dz \wedge dt + J_y dz \wedge dx \wedge dt + J_z dx \wedge dy \wedge dt,$$

$$K = A_x dx + A_y dy + A_z dz - V dt,$$

où l'on a noté W_i la composante suivant l'axe i du vecteur $\mathbf{W}$, $i \in \{x, y, z\}$.

Ceci permet d'utiliser les définitions suivantes : $\mathbf{B}$ (respectivement $\mathbf{D}$, ρ) sont les "composantes" purement spatiales de la forme F (respectivement de G, de C) alors que $\mathbf{E}$ (respectivement $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$) sont les "composantes" spatio-temporelles de la forme F (respectivement de G, de C). On remarque alors que les signes n'interviennent que dans les formes d'induction et de source.

Dès que l'on munit M d'une métrique (dont la signature est $(3, 1)$ - la définition du temps est ce qui correspond au 1), on peut étudier le comportement des formes par inversion ou par réflexion temporelle. On donne alors la parité suivante : F et K sont impaires, G et C sont paires. On en déduit immédiatement les comportements des champs face au renversement du temps : $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, V et ρ sont pairs, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$ et J sont impairs. En premier cycle universitaire, on obtient ces résultats en utilisant les formules $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + v \times \mathbf{B})$ ainsi que les définitions des champs en fonction des potentiels, et en connaissant les comportements de $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$ et (même si ça paraît beaucoup moins évident) q.

La métrique permet également le passage d'une p-forme vers une $(n - p)$-forme, où n est la dimension de la variété M. La définition du dual de Hodge, opérateur noté $*$, se trouve, par exemple, dans [42]. Dans l'annexe (A), nous exprimons le vecteur $\mathbf{D}$ en fonction d'une 2-forme D et effectuons des changements de coordonnées, pour bien

comprendre pourquoi, en analyse vectorielle, on munit les espaces d'une orientation qui permet de définir les vecteurs axiaux et polaires.

Les relations constitutives utilisent le dual de Hodge. En effet, dans le vide, on pose, dans une notation tridimensionnelle :

$$\begin{cases} D = \varepsilon_0 * E \\ H = \mu_0^{-1} * B. \end{cases}$$

Remarquons que, dans la formulation utilisant la géométrie différentielle, la dimension de l'espace n'est fixée que par ces dernières équations. En effet, puisque, par exemple E est une 1-forme et D une 2-forme, la variété M (purement spatiale dans cette formulation) est forcément de dimension 3.

> *Il faut maintenant écrire les relations de constitution générales et faire une démarche similaire à celle que nous avons réalisée dans la formulation de l'analyse vectorielle. Malheureusement, il nous faut admettre que nous n'y sommes pas parvenus, et que nous n'avons trouvé aucun indice dans la littérature.*

En quelque sorte, nous regrettons que les physiciens théoriciens se soient principalement attachés, dans ce domaine, à élaborer une théorie décrivant, d'une manière simple et élégante, les propriétés électromagnétiques du vide. À notre connaissance, seul A. Bossavit, dans l'article [43], puis dans un article non publié intitulé "Hodge and metric", donne quelques idées sur, par exemple, les espaces à utiliser (les variétés de Finsler) ou le traitement de l'anisotropie… mais l'essentiel du travail reste à fournir.

Nous n'avons jamais rencontré les équations (1.3) dans la littérature[13]. En effet, la forme la plus générale que nous avons trouvée ([44]) est la donnée de deux opérateurs, $\mathbf{Y}_e : \mathbb{H}^4 \to \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{Y}_m : \mathbb{H}^4 \to \mathbb{R}^3$ (les indices se référant à une partie électrique et une autre magnétique) spécifiant un matériau Mat par :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_e\big(\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{D}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{H}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\big) = 0 \\ \mathbf{Y}_m\big(\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{D}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{H}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\big) = 0, \end{cases}$$

dans ce matériau M. S'il ne nous paraît pas facile de traduire simplement la non-localité ou l'inhomogénéité d'un milieu avec ce formalisme, celui-ci donne néanmoins l'image suivante : au départ, les quatre champs électromagnétiques sont définis dans un espace à douze dimensions. Les relations constitutives sont alors exprimées en la contrainte suivante : à chaque instant et en tout lieux, les champs $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$,$\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$ doivent

[13] Même si nous ne doutons pas que la plupart des spécialiste de l'électromagnétisme ont pensé à une telle écriture : par exemple, on trouve dans [18] :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{D}(\{\mathbf{E},\, \mathbf{B}\}) \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}(\{\mathbf{E},\, \mathbf{B}\}). \end{cases}$$

Nous tenons néanmoins à notre formulation pour la simplicité de la traduction entre les propriétés des matériaux et la simplification des fonctionnelles $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{H}$

se trouver dans les noyaux de $\mathbf{Y}_e$ et $\mathbf{Y}_m$; l'intersection de ces noyaux est, d'une manière générique, une variété à six dimensions. Les équations de Maxwell (ainsi que des conditions de bords, et ou ou des conditions initiales) spécifient les quatre champs.

L'article [44] donne également la forme suivante des relations constitutives :

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \mathcal{L}_D\big(\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\big) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathcal{L}_H\big(\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\, \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\big), \end{cases}$$

qui s'approche de (1.3), même si les mêmes remarques concernant la traduction de l'inhomogénéité ou de la non-localité s'appliquent.

Certains auteurs suggèrent que, avec notre formulation, les fonctionnelles $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{H}$ doivent être généralisées afin de pouvoir dépendre des dérivées partielles des champs primitifs. L'article [18] donne une petite revue des effets ainsi décrits. On peut, en exigeant encore une certaine régularité, supposer que ceci est décrit par la non-localité.

Les espaces images des fonctionnelles $(\mathcal{L}_D, \mathcal{L}_H)$, ou de $(\mathfrak{D}, \mathfrak{H})$ doivent être restreints pour des raisons physiques : il faudrait s'assurer que le problème possède au plus une solution, que sur tout intervalle de temps borné, la variation de l'énergie électromagnétique soit également bornée, etc. Ces considérations sont en général très pointues, et l'on se contentera d'études au cas par cas. Signalons également que le principe de Neumann exige que si l'espace dans lequel évoluent les champs électromagnétiques est invariant par les éléments d'un groupe, alors ces mêmes éléments doivent laisser les fonctionnelles définissant les relations constitutives également invariantes ([29]). Il est alors impératif de distinguer, dès que l'on manipule des transformations non unimodulaire (i.e. de déterminants différents de un), de distinguer les vecteurs des bivecteurs, tout comme les scalaires des densités.

Il y a encore une autre formulation[14] des lois de l'électromagnétisme classique : la formulation non-locale, ou intégrale. En réalité, celle-ci se scinde en deux types, selon que l'on considère un espace continu (une variété différentiable) ou un espace discret (un complexe simplicial). Dans le premier cas, on obtient les équations de Maxwell en intégrant (1.4) sur un surface tridimensionnelle ; dans le second, on écrit d'abord le pendant discret de (1.4) en ayant recours à l'opérateur de cobord :

$$\delta\mathfrak{F} = 0, \tag{1.6}$$

$$\delta\mathfrak{G} = \mathfrak{C} \tag{1.7}$$

où l'on a noté $\mathfrak{X}$ la cochaîne correspondant à la forme différentielle X. On obtient alors les équations de Maxwell en contractant (1.6) et (1.7) sur une chaîne tridimensionnelle quelconque.

Les relations constitutives dans une formulation discrète sont également peu développées ; dans [45], elles sont écrites sous la forme d'égalités de fonctions en des points, ce que nous trouvons choquant étant donné le contexte. De plus, aucune référence à la

[14] Le lecteur pourra se sentir frustré de rien voir sur les approches lagrangienne ou hamiltonienne : en effet, nous n'avons jamais rencontré le pendant des relations de constitutions dans ce type de présentation. Néanmoins ces approches ont la faveur de ceux qui veulent unifier l'électromagnétisme aux autres forces (e.g. [39] pour le modèle standard), ainsi que de ceux qui s'intéressent à des modèles semi-classiques.

dispersion ou la non-linéarité ne sont données. Il nous semble que les chercheurs ([46], disponible sur internet, ou [25]) ont davantage définis les outils mathématiques nécessaires qu'étudier une relation du type de (1.3).

Les versions continue ou discrète, différentielle ou intégrales sont équivalentes (au moins dans tous les cas pratiques connus de l'auteur) ; dire qu'une formulation est plus fondamentale qu'une autre est alors un problème qui relève de la métaphysique. Plusieurs ouvrages choisissent une formulation, qui leur paraît plus naturelle, et en déduisent ensuite une autre formulation, plus pratique dans les calculs ([47] passe de différentielle à intégrale en continu, alors que [48] préfère le passage inverse, etc.). Si nous n'oserons discuter de la nature discrète ou continue de l'espace-temps, nous aimons rappeler que l'accès aux données physiques (le champ électromagnétique, son champ d'induction, etc), par l'intermédiaire d'une mesure, nécessite leur évaluation sur un domaine spatio-temporel.

1.2 Relations de constitution de l'électromagnétisme non-linéaire

1.2.1 Vecteur polarisation et tenseurs de susceptibilité

On va continuer, dans cette sous-section, de répondre à la question : "comment déduire le champ d'induction électrique $\mathbf{D}$ en fonction du champ électrique $\mathbf{E}$" ? Pour fixer la route du lecteur expérimenté, le but des lignes qui vont suivre est d'introduire les tenseurs de susceptibilités $\chi^{(n)}$.

On commence par définir le vecteur polarisation électrique[15] $\mathbf{P}$ de sorte que $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$. Puisque, par définition, un matériau diélectrique a les propriétés électriques du vide si $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, le vecteur polarisation mesure l'écart de la réponse du milieu par rapport au vide. Autrement dit, le vecteur polarisation code la manière dont répond le matériau. D'un point de vue microscopique, il correspond à la densité de moment électrique dipolaire. Cette réponse peut varier en fonction de t (respectivement de $\mathbf{s}$) - si le matériau est non-homogène temporellement (respectivement spatialement) - mais également en fonction des instants autres que t (respectivement des lieux autres que $\mathbf{s}$) - si le matériau est non-local temporellement (respectivement spatialement). On se restreint ici à des matériaux locaux spatialement ; si cette approximation ne peut être utilisée, il faut faire à l'espace ce que l'on va faire au temps (le lecteur peut se reporter à [19], par exemple).

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \, Q^{(n)}(\mathbf{s},t;t_1,\cdots,t_n)\mathbf{E}(\mathbf{s},t_1)\cdots\mathbf{E}(\mathbf{s},t_n). \tag{1.8}$$

[15] Dorénavant, on ne spécifiera plus qu'il s'agit de la polarisation électrique - la polarisation magnétique existe aussi, mais ne sera ici jamais considérée.

Ceci est un vecteur, appelé vecteur polarisation d'ordre n.

Notons V' le dual d'un espace vectoriel réel V, ici $\mathbb{R}^3$. Les opérateurs[16] $Q^{(n)}$: $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}$ donnent la manière, au lieu $\mathbf{s}$, dont le champ électrique aux instants $t_1, \cdots, t_n$ et au lieu $\mathbf{s}$ influe sur le vecteur polarisation à l'instant t et au lieu $\mathbf{s}$. L'ordre zéro du vecteur polarisation $\mathbf{P}^{(0)}(\mathbf{s}, t)$ correspond à un moment dipolaire instantané qui existe sans l'excitation d'un champ électrique extérieur. On parle alors de matériau ferroélectrique. Par analogie, on pose $\mathbf{P}^{(0)}(\mathbf{s}, t) = \varepsilon_0 Q^{(0)}(\mathbf{s}, t)$. En explicitant, dans l'expression précédente, les indices sur une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, nous obtenons, pour un entier n positif et des indices $i, i_1, \cdots, i_n$ appartenant à $\{1, 2, 3\}$,

$$P^{(n)\,i}(\mathbf{s}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \, Q^{(n)\,i}{}_{i_1 \cdots i_n}(\mathbf{s}, t; t_1, \cdots, t_n)$$
$$E^{i_1}(\mathbf{s}, t_1) \cdots E^{i_n}(\mathbf{s}, t_n),$$

où v^i est la composante suivant la direction i du vecteur $\mathbf{v}$. La convention sommatoire, dite d'Einstein, sur les indices répétés, est utilisée.

Le vecteur polarisation est alors donné par

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(0)} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}^{(n)}.$$

C'est ainsi qu'apparaît l'hypothèse du matériau lisse : le vecteur polarisation est donné sous la forme d'un développement limité en fonction du champ électrique au voisinage de zéro. Par conséquent, plutôt que de parler de matériau linéaire ou non-linéaire, il vaudrait mieux évoquer un matériau (forcément non-linéaire) étudié dans un régime linéaire ou non-linéaire, selon que $\mathbf{P}$ est égal à $\mathbf{P}^{(1)}$ ou pas. Ceci dépend de la valeur des tenseurs $Q^{(n)}$ d'une part, et de l'amplitude du champ électrique $\mathbf{E}$.

L'unité de $Q^{(n)}$ est le $m^{n-1}\, V^{1-n}\, s^{-n}$, et dépend donc de l'ordre de la non-linéarité ; ainsi les $Q^{(n)}$, pour différents n, ne peuvent être comparés entre eux.

Les opérateurs $Q^{(n)}$ obéissent au principe de causalité, qui peut se formuler ainsi :

– *l'état d'un système à un instant t ne dépend pas de l'environnement du système à des instants postérieurs à t ;*

par conséquent, on a

$$Q^{(n)}(\mathbf{s}, t; t_1, \cdots, t_n) = sgn(t - t_i) Q^{(n)}(\mathbf{s}, t; t_1, \cdots, t_n), \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.9}$$

où

$$sgn(a) = \begin{cases} -1 & a \in \mathbb{R}_-^* \\ 1 & a \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Lorsqu'il existe un i tel que $t < t_i$, l'équation (1.9) implique que $Q^{(n)}(\mathbf{s}, t; t_1, \cdots, t_n)$ est nul. Les relations de Kramers-Kronig sont obtenues en prenant la transformée de Fourier de l'équation (1.9) - confère [49] ou [50] et les références reportées dans ces livres.

[16] On remarquera que la contraction $V' \otimes V \to k$, k étant le corps de base de l'espace vectoriel V, est implicite ; il en sera de même dans tout ce rapport.

Le reste de cette étude ne fait pas référence à la causalité.

Nous avons décidé, dans la section précédente, de nous restreindre à des milieux homogènes dans le temps. En particulier, il ne peut y avoir "d'hystérésis (électrique) intrinsèque", qui apparaît lorsque la réponse du matériau dépend de sa préparation[17]. L'homogénéité temporelle se traduit ainsi : pour tout réel T, le champ électrique mesuré aux instants $t_1, \cdots, t_n$ influe sur le vecteur polarisation à l'instant t de la même manière que le champ électrique mesuré aux instants $t_1 - T, \cdots, t_n - T$ influe sur le vecteur polarisation à l'instant $t - T$, i.e. les tenseurs $Q^{(n)}$ vérifient

$$Q^{(n)}(\mathbf{s}, t; t_1, \cdots, t_n) = Q^{(n)}(\mathbf{s}, t - T; t_1 - T, \cdots, t_n - T), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall T \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si $t = T$, on a

$$Q^{(n)}(\mathbf{s}, T; t_1, \cdots, t_n) = Q^{(n)}(\mathbf{s}, 0; t_1 - T, \cdots, t_n - T), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall T \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les opérateurs $Q^{(n)}$ ne dépendent, outre de la variable d'espace $\mathbf{s}$, que des durées $t_i - t$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, et non des instants $t, t_1, \cdots, t_n$. Il est donc légitime de se restreindre à l'étude du vecteur polarisation à l'instant $t = 0$; ceci nous amène à définir

$$\begin{array}{rccl} R^{(0)}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3, \\ & \mathbf{s} & \mapsto & Q^{(0)}(\mathbf{s}, 0), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} R^{(n)}: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}, \\ & (\mathbf{s}, t_1, \cdots, t_n) & \mapsto & Q^{(n)}(\mathbf{s}, 0; -t_1, \cdots, -t_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Cette fonction $R^{(n)}$ est appelée *fonction de réponse* ou *fonction de corrélation* d'ordre n car elle permet de réécrire la relation (1.8) sous la forme d'une convolution sur $\mathbb{R}^n$ entre les fonctions $R^{(n)}$ et

$$\mathbf{E}^{(n)} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^3)^{\otimes n}, (\mathbf{s}, t_1, \cdots, t_n) \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{s}, t_1) \cdots \mathbf{E}(\mathbf{s}, t_n) \ :$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{s}, t) &= \varepsilon_0 \big(R^{(n)}(\mathbf{s}, \cdot) *_n \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{s}, \cdot) \big)(t) \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \, R^{(n)}(\mathbf{s}, t - t_1, \cdots, t - t_n) \mathbf{E}(\mathbf{s}, t_1) \cdots \mathbf{E}(\mathbf{s}, t_n) \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \, R^{(n)}(\mathbf{s}, t_1, \cdots, t_n) \mathbf{E}(\mathbf{s}, t - t_1) \cdots \mathbf{E}(\mathbf{s}, t - t_n). \end{aligned}$$

En prenant les transformées de Fourier[18] (on suppose qu'elles existent) par rapport aux variables $t - t_1, \cdots, t - t_n$ et en supposant que le théorème de Fubini s'applique, le produit de convolution devient un produit ordinaire :

[17] Nous devons être très prudents : d'autre(s) forme(s) d'hystérésis existe(nt), notamment en optique non-linéaire, où des solutions bistables peuvent apparaître - se reporter à [51] pour un raisonnement heuristique.

[18] Le lecteur est convié à se reporter au chapitre "Notations" en début d'ouvrage pour la convention choisie.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{s},t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\, e^{-i\omega_1 t} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_n\, e^{-i\omega_n t} \\ &\qquad \underline{\chi}^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\cdots\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_n) \\ &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_n\, \underline{\chi}^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n) \\ &\qquad \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\cdots\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_n) e^{-i(\omega_1+\cdots+\omega_n)t} \end{aligned} \tag{1.10}$$

où l'on a défini

$$\begin{aligned} \underline{\chi}^{(n)} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}^3)'^{\otimes n}, \\ (\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n) &\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\, R^{(n)}(\mathbf{s},t_1,\cdots,t_n) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{t}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\cdots,\omega_n)$, $\mathbf{t} = (t_1,\cdots,t_n)$ et le produit de dualité habituel sur $\mathbb{R}^n$. On s'aperçoit que $\underline{\chi}^{(n)}$, tenseur de rang $n+1$ nommé *tenseur de susceptibilité électrique d'ordre* n, est le transformé de Fourier (à un facteur multiplicatif $(2\pi)^n$ près) de la fonction de réponse $R^{(n)}$:

$$\underline{\chi}^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n) = (2\pi)^n\, \hat{R}^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n).$$

$\underline{\chi}^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n)$ donne la manière dont les composantes aux fréquences $\omega_1, \ldots,$ ω_n du champ électrique mesurées à l'endroit $\mathbf{s}$ influent sur le vecteur polarisation à la fréquence $\omega_1 + \cdots + \omega_n$ au même endroit. Son unité est $m^{n-1}\, V^{1-n}$.

1.2.2 Propriétés générales des tenseurs de susceptibilité

Symétrie hermitienne

Puisque le champ $\mathbf{E}$ est réel, il vérifie

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega) = \overline{\hat{\mathbf{E}}}(\mathbf{s},-\omega)\ ;$$

par suite, en reportant ceci dans l'équation (1.10), il vient

$$\underline{\chi}^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n) = \overline{\underline{\chi}^{(n)}}(\mathbf{s},-\omega_1,\cdots,-\omega_n).$$

Symétrie de permutation intrinsèque

Cette sous-section s'attache à présenter ce qui s'appelle la "symétrie de permutation intrinsèque". Développons l'expression (1.10) en composantes :

$$P^{(n)\,i}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_n\, \underline{\chi}^{(n)\,i}{}_{i_1\cdots i_n}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n)$$

$$\hat{E}^{i_1}(\mathbf{s},\omega_1)\cdots\hat{E}^{i_n}(\mathbf{s},\omega_n)e^{-i(\omega_1+\cdots+\omega_n)t}.$$

Nous allons montrer que les tenseurs $\underline{\chi}^{(n)}$ ne sont pas définis de manière unique. En effet, pour a appartenant à $\{1,\cdots,n\}$, les indices i_a et les variables d'intégrations ω_a étant muets, on a, pour toute bijection σ de $\{1,\cdots,n\}$ sur lui-même :

$$P^{(n)\,i}(\mathbf{s},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_{\sigma 1}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_{\sigma n}\,\underline{\chi}^{(n)\,i}{}_{i_{\sigma 1}\cdots i_{\sigma n}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma 1},\cdots,\omega_{\sigma n})$$
$$\hat{E}^{i_{\sigma 1}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma 1})\cdots\hat{E}^{i_{\sigma n}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma n})e^{-i(\omega_{\sigma 1}+\cdots+\omega_{\sigma n})t}.$$

Par conséquent, en notant $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique des bijections de l'ensemble $\{1,\cdots,n\}$ sur lui-même, on a

$$P^{(n)\,i}(\mathbf{s},t)=\frac{\varepsilon_0}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_{\sigma 1}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_{\sigma n}\,\underline{\chi}^{(n)\,i}{}_{i_{\sigma 1}\cdots i_{\sigma n}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma 1},\cdots,\omega_{\sigma n})$$
$$\hat{E}^{i_{\sigma 1}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma 1})\cdots\hat{E}^{i_{\sigma n}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma n})e^{-i(\omega_{\sigma 1}+\cdots+\omega_{\sigma n})t}.$$

Lorsqu'un être indicé sur un ensemble ens est symétrique par rapport à cet ensemble, il est invariant par toute permutation de ens ; c'est le cas ici de la composition des n intégrales ainsi que du produit $\prod_{k=1}^{n}\hat{E}^{i_{\sigma k}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma k})e^{-i\omega_{\sigma k}t}$. On a donc

$$P^{(n)\,i}(\mathbf{s},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_n\,\{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\underline{\chi}^{(n)\,i}{}_{i_{\sigma 1}\cdots i_{\sigma n}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma 1},\cdots,\omega_{\sigma n})\}$$
$$\hat{E}^{i_1}(\mathbf{s},\omega_1)\cdots\hat{E}^{i_n}(\mathbf{s},\omega_n)e^{-i(\omega_1+\cdots+\omega_n)t}.$$

En définissant un nouveau tenseur[19] $\chi^{(n)}=\mathbf{e}_i\,\chi^{(n)\,i}{}_{i_1\cdots i_n}\otimes\mathbf{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{i_n}$, encore appelé tenseur de susceptibilité électrique d'ordre n, par

$$\begin{aligned}\chi^{(n)}:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{C}^3\otimes(\mathbb{C}^3)'^{\otimes n},\\ (\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n) &\mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\mathbf{e}_i\,\underline{\chi}^{(n)\,i}{}_{i_{\sigma 1}\cdots i_{\sigma n}}(\mathbf{s},\omega_{\sigma 1},\cdots,\omega_{\sigma n})\\ &\qquad\otimes\mathbf{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{i_n},\end{aligned}\tag{1.12}$$

on a l'expression suivante du vecteur polarisation à l'ordre n,

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{s},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_n\,\chi^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n)\tag{1.13}$$
$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\cdots\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_n)e^{-i(\omega_1+\cdots+\omega_n)t},$$

[19] On remarquera que celui-ci n'est pas souligné.

avec un tenseur $\chi^{(n)}$ symétrique dans le sens où

$$\chi^{(n)\,i}{}_{i_{\tau 1}\cdots i_{\tau n}}(\mathbf{s},\omega_{\tau 1},\cdots,\omega_{\tau n}) = \chi^{(n)\,i}{}_{i_1\cdots i_n}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n), \quad \forall \tau \in \mathcal{S}_n.$$

Cette symétrisation, qui porte simultanément sur les composantes de $\chi^{(n)}$, qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, et sur les n derniers arguments de ces composantes, apparaît, par exemple, pour le tenseur de susceptibilité quantique dans [52], ou au cas par cas dans les livres usuels d'introduction à l'optique non-linéaire ([49], [50]). Elle est fondamentale pour simplifier les équations de propagation que l'on obtiendra dans les sections suivantes ; elle est également fort utile d'un point de vue expérimental où elle donne, à partir d'une seule mesure, $n!$ valeurs des tenseurs de susceptibilité.

Si une fréquence apparaît plusieurs fois dans $(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n)$, alors il faut symétriser le tenseur selon les indices correspondant à ce doublon. On rencontrera un exemple lorsque l'on présentera l'effet Kerr-optique, à la page 47.

La signification physique du tenseur de susceptibilité d'ordre n $\chi^{(n)}$ s'éclaircit, puisque, contrairement à $\underline{\chi}^{(n)}$, il est défini de manière unique, une symétrie maximale lui ayant été conférée.

Transformations d'un tenseur par un changement de base

Le vecteur polarisation, ou plus précisément le vecteur polarisation $\mathbf{P}^{(n)}$ d'ordre n pour tout entier positif n, et le champ électrique $\mathbf{E}$ sont des vecteurs. Ceci signifie que leur expression sont indépendantes de la base choisie (se reporter à l'annexe A pour plus de détails).

Les expressions des transformations des composantes d'un vecteur lors d'un changement de base induisent celles des transformations des composantes d'un tenseur. À nouveau, ceci est décrit dans l'annexe A.

Ouvrons un commentaire sur un sujet qui nous tient à cœur : il n'y a pas de consensus sur le comportement des champs électromagnétiques lors d'un changement de base : [15], [38] voient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ comme des vecteurs et $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ comme des bivecteurs (nous traduisons éventuellement si nécessaire), [18] considère que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ sont des vecteurs et $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$ des bivecteurs, pour [52], les tenseurs de susceptibilité d'ordre n sont $n+1$ fois contravariants, et par conséquent, il pense que le vecteur polarisation est un covecteur, etc.

Les choses se compliquent encore lorsque le milieu est supposé non-local : pour exprimer le champ d'induction à l'endroit $\mathbf{s}$, plutôt que d'exprimer le champ électrique en un endroit $\boldsymbol{\sigma}$, il est d'usage, en supposant à nouveau une certaine régularité, d'utiliser les dérivées de $\mathbf{E}$ au point $\mathbf{s}$, pour arriver à une relation du type $\mathbf{D}^i = \varepsilon^i{}_j \mathbf{E}^j + \gamma^{ij}{}_k \nabla_j \mathbf{E}^k$. Nous pensons qu'il faut bien prendre garde à la nature du tenseur $\gamma^{\cdot\cdot}{}_{\cdot}$.

La version dans laquelle $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont des vecteurs et $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ des bivecteurs nous paraît être la plus convaincante sous le plan théorique (c'est pourquoi nous avons développé le formalisme ayant recourt à la la géométrie différentielle), mais nous ne connaissons de résultats expérimentaux qui pourraient clore le débat. Nous avons supposé que $\mathbf{P}$ était un vecteur, mais nous n'avons de certitude à ce sujet. *Cette question*

est pourtant fondamentale. L'annexe A, dans laquelle nous avons essayé de rendre d'une manière simple et précise les correspondances entre ces objets, montre que ces différents auteurs ne sauraient comparer les résultats de leurs expériences !

De plus, on rencontre fréquemment une correspondance entre une symétrie microscopique d'un matériau et une symétrie sur les tenseurs de susceptibilité. Or, l'expression de cette dernière dépend du caractère covariant ou contravariant du tenseur. Il est donc impératif qu'un accord s'installe parmi la communauté sur ce sujet.

Définition d'un matériau isotrope

Nous voulons *définir* ce qu'est un matériau isotrope. L'idée fondamentale qui se cache derrière cette notion est celle de l'impossibilité pour la lumière de sélectionner un axe privilégié dans le matériau. Autrement dit, si un tel matériau remplit tout l'espace, toutes les directions se valent.

Une autre image intuitive que l'on peut donner est la suivante : dans un matériau (électriquement) isotrope, les champs électrique et d'induction électrique sont nécessairement parallèles ; en effet, en un point, la polarisation d'un champ électrique brise la symétrie du matériau en introduisant une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à celle-ci. Dans $\mathcal{P}$, toutes les directions se valent et par conséquent la projection de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}$ est nulle, ce qui signifie que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ sont portés par des droites parallèles.

Nous allons, en fait, introduire[20] une définition plus fonctionnelle de l'isotropie, et nous vérifierons ensuite que celle-ci amène les propriétés escomptées.

Un tenseur est dit isotrope si ses *composantes* sont identiques dans toute base orthonormée. Un matériau est alors dit isotrope si les tenseurs qui le caractérisent sont isotropes. En ce qui nous concerne, les tenseurs caractérisant la réponse du matériau à l'excitation d'un champ électrique sont les tenseurs[21] $\{R^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{i_n}\}_{(i,i_1,\cdots,i_n)\in\{1,2,3\}^{n+1}}$ de $\mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}$, la relation suivante doit donc être satisfaite :

$$R^{(n)\,i}{}_{i_1\cdots i_n} = \Lambda^{-1\,i}{}_b\, R^{(n)\,b}{}_{c_1\cdots c_n}\, \Lambda^{c_1}{}_{i_1} \cdots \Lambda^{c_n}{}_{i_n}, \quad \forall \Lambda \in O_3(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Encore une fois, le signe des exposants des diverses matrices Λ est ouvert à la discussion ; il résulte ici de notre "choix" en faveur du caractère vectoriel de $\mathbf{E}$ comme de $\mathbf{P}$.

Dans l'annexe A sont démontrés les résultats suivants :
- l'ensemble des tenseurs caractérisant les matériaux isotropes est un sous-espace vectoriel, que l'on notera $\mathcal{ISO}_n$, de $\mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}$.
- la dimension de $\mathcal{ISO}_n$ est nulle si n est pair.
- un élément M de $\mathcal{ISO}_1$ vérifie

$$M^i{}_j = M^1{}_1 \delta^i{}_j.$$

[20] Nous avons récemment découvert l'article [18] qui emploie la même définition que nous pour l'isotropie, et introduit également la notion de biisotropie.

[21] L'étude qui va suivre aurait pu être faite avec les tenseurs $\chi^{(n)}$.

– un élément M de $\mathcal{ISO}_3$ vérifie

$$M^i{}_{jkl} = M^1{}_{122}\delta^i{}_j\delta_{kl} + M^1{}_{212}\delta^i{}_k\delta_{jl} + M^1{}_{221}\delta^i{}_l\delta_{jk}.$$

– plus généralement, un élément M de $\mathcal{ISO}_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est une somme de toutes les combinaisons des $\delta^i{}_{j_k}$ et des $\delta_{j_l j_m}$ lorsque l'ensemble des j_k, j_l et j_m parcourent $\{1,2,3\}^{2n+1}$.

On en déduit :

– $R^{(2n)} \in \mathcal{ISO}_{2n} \quad \Rightarrow \quad P^{(2n)} = 0$.
  Par conséquent, *dans un matériau isotrope, les seules non-linéarité présentes sont d'ordre impair.*
– $R^{(1)} \in \mathcal{ISO}_1 \quad \Rightarrow \quad (R^{(1)}\mathbf{E})^i = R^{(1)\,1}{}_1\mathbf{E}^i$.
  Par conséquent, dans un matériau isotrope, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}^{(1)}$ sont colinéaires.
– $R^{(3)} \in \mathcal{ISO}_3 \quad \Rightarrow \quad (R^{(3)}\mathbf{EEE})^i = \big(R^{(3)\,1}{}_{122} + R^{(3)\,1}{}_{212} + R^{(3)\,1}{}_{221}\big)\|\mathbf{E}\|^2\mathbf{E}^i$.
  Par conséquent, dans un matériau isotrope, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}^{(3)}$ sont colinéaires.
– plus généralement,
  $R^{(2n+1)} \in \mathcal{ISO}_{2n+1} \quad \Rightarrow \quad (R^{(2n+1)}\mathbf{E}\cdots\mathbf{E})^i = \alpha\|\mathbf{E}\|^{2n}\mathbf{E}^i$, où α vaut $R^{(3)\,1}{}_{122\cdots2} + R^{(3)\,1}{}_{212\cdots2} + \cdots + R^{(3)\,1}{}_{222\cdots1}$.
  Par conséquent, *dans un matériau isotrope,* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{P}^{(2n+1)}$ *sont colinéaires.*

Par conséquent, dans un matériau isotrope, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}$, d'où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$, sont colinéaires.

On apprend au cours du premier cycle universitaire que si un matériau linéaire est isotrope, alors le tenseur $\epsilon := 1 + \chi^{(1)}$ se réduit à un nombre dans le sens où le tenseur est un multiple de la matrice identité dans toute base orthonormée et en tout point de ce matériau. Notre définition inclut ce résultat en affirmant que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}^{(1)}$ sont colinéaires dans un matériau isotrope.

1.3 Non-linéarité du deuxième ordre

1.3.1 Équations de propagation

En l'absence de courant, les équations de Maxwell donnent la relation suivante[22] :

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) + \partial_t^2\mathbf{D} = 0. \tag{1.14}$$

Afin de rendre explicite l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le cas d'une expérience de diffraction, il nous faut développer (1.14) en utilisant la dépendance du champ d'induction $\mathbf{D}$ en fonction du champ primitif $\mathbf{E}$ donnée dans la section précédente. Pour ce faire, il nous faut d'abord donner le champ électrique total.

Cette section a un rôle principalement didactique. On commence donc avec une non-linéarité du plus bas ordre, un champ incident monochromatique, et un matériau qui ne présente aucune fréquence de résonance. Tout ceci sera généralisé par la suite.

[22] Cette équation a un sens symbolique : le premier terme contient un produit usuel qui n'apparaîtra en fait qu'après la transformée de Fourier.

Soit donc le champ électrique incident $\mathbf{E}^i(\mathbf{s},t) = \mathbf{E}_1^i(\mathbf{s})e^{-i\omega_I t} + \mathbf{E}_{-1}^i(\mathbf{s})e^{i\omega_I t}$, avec $\mathbf{E}_{-1}^i = \overline{\mathbf{E}_1^i}$, illuminant un matériau (lorsque l'ensemble des fréquences présentes dans le champ électrique est $\{p\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$, on note dorénavant $\mathbf{E}_p(\mathbf{s})$ ce que l'on notait $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},p\omega_I)$). En supposant que $\mathbf{P}^{(0)}(\mathbf{s},t)$ s'annule[23], on a

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)},$$

avec, par définition (cf 1.13),

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\, \chi^{(1)}(\mathbf{s},\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)e^{-i\omega_1 t},$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2\, \chi^{(2)}(\mathbf{s},\omega_1,\omega_2)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_2)e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}.$$

Imaginons momentanément que le champ total s'écrive $\mathbf{E}(\mathbf{s},t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{s})e^{-i\omega_I t} + \mathbf{E}_{-1}(\mathbf{s})e^{i\omega_I t}$. On en déduit successivement que $\mathbf{P}^{(2)}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{D}$, $\partial_t^2\mathbf{D}$ sont excités aux fréquences $-2\omega_I$, 0 et $2\omega_I$. Si l'on reporte les expressions de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ dans l'équation (1.14), une contradiction apparaît. On en conclut que le champ total oscille également à ces fréquences : $\mathbf{E}(\mathbf{s},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{s}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{s})e^{-i\omega_I t} + \mathbf{E}_{-1}(\mathbf{s})e^{i\omega_I t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{s})e^{-i2\omega_I t} + \mathbf{E}_{-2}(\mathbf{s})e^{i2\omega_I t}$. Reprenons le même raisonnement : en insérant cette expression de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{P}^{(2)}$, des oscillations aux fréquences $-4\omega_I$, $-3\omega_I$, $3\omega_I$ et $4\omega_I$ apparaissent. Ceci implique que $\partial_t^2\mathbf{D}$ oscille à ces fréquences, ce qui est en contradiction avec (1.14). On en conclut que le champ total oscille également à ces fréquences.

La conclusion est qu'*a priori toutes les harmoniques*[24] *sont présentes dès une non-linéarité d'ordre deux* et le champ total doit s'écrire

$$\mathbf{E}(\mathbf{s},t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}_p(\mathbf{s})e^{-ip\omega_I t}, \tag{1.15}$$

avec $\mathbf{E}_{-p} = \overline{\mathbf{E}_p}$ pour que le champ soit réel.

On note que cet argument indique que toutes les fréquences $p\omega_I$, $p \in \mathbb{Z}$, sont présentes dans le champ ; en aucun cas nous ne pouvons affirmer qu'il n'y a que celles-ci. La section (2.3.2, p.87) développera cette idée..., et l'on verra que l'on ne sait plus rien dire sur les composantes à négliger, sur l'énergie, etc, sans introduire de nouvelles hypothèses.

Pour pouvoir travailler avec la série (1.15), on suppose qu'elle est absolument convergente à $\mathbf{s}$ fixé (et donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$). On pourra donc changer l'ordre des indices (et "commuter" la somme et une intégrale sur le temps). On a donc

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}_p(\mathbf{s})\delta(\omega - p\omega_I),$$

[23] De toute façon, par l'hypothèse d'homogénéité temporelle, $P^{(0)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 R^{(0)}(\mathbf{s})$ est indépendant du temps, et n'est donc pas pris en compte dans l'équation de propagation, puisque c'est $\partial_t^2\mathbf{D}$ qui intervient.

[24] Par harmonique nous entendons une fréquence dont la valeur est un multiple entier de ω_I : $\omega_p = p\omega_I$, $p \in \mathbb{Z}$.

d'où

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \sum_{p\in\mathbb{Z}} \chi^{(1)}(\mathbf{s},p\omega_I)\mathbf{E}_p(\mathbf{s})e^{-ip\omega_I t},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{s},t) &= \varepsilon_0 \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \chi^{(2)}(\mathbf{s},q\omega_I,(p-q)\omega_I)\mathbf{E}_q(\mathbf{s})\mathbf{E}_{p-q}(\mathbf{s})e^{-ip\omega_I t}\\ &= \varepsilon_0 \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \chi^{(2)}(\mathbf{s},(p-q)\omega_I,q\omega_I)\mathbf{E}_{p-q}(\mathbf{s})\mathbf{E}_q(\mathbf{s})e^{-ip\omega_I t}\end{aligned}$$

(la seconde équation s'obtient en utilisant soit la symétrie de permutation intrinsèque soit le changement d'indice $q \mapsto p-q$).

Définissons $\varepsilon_r^{(1)}(\mathbf{s},\omega) := 1 + \chi^{(1)}(\mathbf{s},\omega)$. Nous pouvons maintenant récrire l'équation (1.14) ; en séparant chaque composante grâce à l'unicité de la décomposition de Fourier, ceci donne, pour tout entier p :

$$\begin{aligned}&-\varepsilon_0^{-1}\nabla\times(\mu^{-1}(\mathbf{s},p\omega_I)\nabla\times\mathbf{E}_p(\mathbf{s}))\\ &\quad+\quad (p\omega_I)^2\Big(\varepsilon_r^{(1)}(\mathbf{s},p\omega_I)\mathbf{E}_p(\mathbf{s}) + \sum_{q\in\mathbb{Z}}\chi^{(2)}(\mathbf{s},q\omega_I,(p-q)\omega_I)\mathbf{E}_q(\mathbf{s})\mathbf{E}_{p-q}(\mathbf{s})\Big) = 0.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Afin d'alléger les formules nous proposons les notations inscrites dans le tableau 1.3. Ces notations ne font intervenir le point[25] $\mathbf{s}$ de l'espace sur lequel sont évaluées les fonctions, mais ceci n'entraîne aucun trouble puisque ce point est commun à tous les champs. On écrira donc, de temps à autres, $\mathbf{X}(t)$ pour $\mathbf{X}(\mathbf{s},t)$, $\mathbf{X}\in\{\mathbf{E},\mathbf{P},\mathbf{D},\ldots\}$. On s'autorisera également à omettre l'indice ω_I de la forme multilinéaire $\lfloor\cdot,\cdots,\cdot\rfloor$ lorsqu'il ne pourra y avoir de confusion.

$$\begin{aligned}\lfloor\mathbf{E}_{p_1},\cdots,\mathbf{E}_{p_n}\rfloor_{\omega_I} &:= \quad \chi^{(n)}(p_1\omega_I,\cdots,p_n\omega_I)\mathbf{E}_{p_1}\cdots\mathbf{E}_{p_n}\\ \mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p) &:= \quad -\varepsilon_0^{-1}\nabla\times(\mu^{-1}(p\omega_I)\nabla\times\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)^2\varepsilon_r^{(1)}(p\omega_I)\mathbf{E}_p\end{aligned}$$

TAB. 1.3 – Définitions des notations $\lfloor\mathbf{E}_{p_1},\cdots,\mathbf{E}_{p_n}\rfloor_{\omega_I}$ et $\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p)$.

Ainsi

$$\mathbf{P}^{(1)}(t) = \varepsilon_0 \sum_{p\in\mathbb{Z}} \lfloor\mathbf{E}_p\rfloor e^{-ip\omega_I t},$$

[25] En effet, en toute rigueur, $\mathbf{s}$ est un point de l'espace affine (euclidien) que nous notons $\mathbb{R}^3$ - on rencontre plus souvent le symbole E^3 dans la littérature - et ainsi nous ne distinguons pas un point de son vecteur associé. On admet que ceci est une maladresse, car l'origine du vecteur est totalement arbitraire.

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \varepsilon_0 \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_{p-q} \rfloor e^{-ip\omega_I t},$$

et dans un matériau linéaire, l'équation de propagation de $\mathbf{E}_p$ s'écrit

$$\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p) = 0 \ ;$$

mais $\mathcal{M}_p^{lin}$ étant un opérateur linéaire, cette égalité est trivialement satisfaite si $|p| \neq 1$ (puisque dans un matériau linéaire, si le champ incident est monochromatique, le champ total vibre uniquement à cette fréquence).

Avec les nouvelles notations, les équations de propagation deviennent :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0 \tag{1.17}$$

si $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)}$;

$$\boxed{\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_{p-q} \rfloor = 0, \quad \forall p \in \mathbb{Z}} \tag{1.18}$$

si $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}$.

Grâce aux symétries hermitiennes de μ, de $\chi^{(1)}$ et de $\mathbf{E}$, on a $\mathcal{M}_{-p}^{lin}(\mathbf{E}_{-p}) = \overline{\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p)}$; ainsi l'équation de propagation de $\mathbf{E}_{-p}$ se déduit de celle de $\mathbf{E}_p$ en prenant le complexe conjugué. Nous ne présenterons donc que celle où p est positif ou nul.

1.3.2 Description d'une jauge globale et de la composante statique

Nous regroupons dans cette sous-section deux remarques concernant une transformation laissant le système (1.18) invariant et le caractère particulier des composantes statiques des champs électromagnétiques en régime non-linéaire.

Lorsque le matériau est linéaire et stationnaire, et le champ incident monochromatique, la phase globale du système est inessentielle. Plus précisément, la transformation $\mathbf{E}^i \mapsto e^{i\alpha}\mathbf{E}^i$ a pour seul effet les transformations $\mathbf{X} \mapsto e^{i\alpha}\mathbf{X}$, pour $\mathbf{X} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}\}$. Cette invariance s'appelle une jauge globale et traduit l'absence de pertinence du choix de l'origine sur l'axe du temps : puisque tous les champs oscillent selon $e^{-i\omega t}$, translater t de t_0 revient à multiplier chaque champ par $e^{-i\omega t_0}$; cette opération s'avère triviale sur l'énergie.

La généralisation de ceci au cas où le champ électrique total s'écrit selon

$$\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}_p(\mathbf{s}) e^{-ip\omega_I t} \tag{(1.15)}$$

est facile : le système

$$\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_{p-q} \rfloor = 0, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \tag{(1.18)}$$

est invariant par la transformation $\mathbf{E}_p \mapsto e^{ip\alpha}\mathbf{E}_p$. Par conséquent, en optique non-linéaire également,

> *si le champ incident* $\mathbf{E}^i$ *implique l'ensemble* $\{\mathbf{E}_p^d\}_{p\in\mathbb{Z}}$ *de champs diffractés, alors le champ incident* $e^{i\alpha}\mathbf{E}^i$ *implique l'ensemble* $\{e^{ip\alpha}\mathbf{E}_p^d\}_{p\in\mathbb{Z}}$.

Les définitions et calculs de la section 1.3.4 montreront, après quelques généralisations immédiates aux ordres plus élevés, que ceci se traduit par :

> *le choix de l'origine sur l'axe du temps n'a aucune influence sur les mesures d'énergie.*

Nous ne sommes en fait pas obligés de nous restreindre à des nombres unimodulaires : si l'ensemble $\{\mathbf{E}_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ de champs totaux est solution de (1.18), alors l'ensemble $\{(Ae^{i\alpha})^p\mathbf{E}_p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ est solution de (1.18), avec A et α deux réels quelconques. Ces invariances sont célèbres dans les problèmes de *propagation* ([53], [54]), mais il faut prendre garde à ce qui se passe dans un problème de *diffraction* : comme en régime linéaire, le champ incident est considéré comme donné, et par conséquent son amplitude et sa phase sont fixes. En résumé, les régimes linéaire et non-linéaire sont semblables : à une solution obtenue correspond tout un ensemble (indicé sur $\mathbb{C}$) de solutions, mais la donnée du champ incident fixe ce paramètre libre.

Venons-en à la composante statique du champ électrique ; elle vérifie, quel que soit l'ordre de non-linéarité :

$$\mathcal{M}_0^{lin}(\mathbf{E}_0) = 0,$$

soit

$$\nabla \times (\mu^{-1}(0)\nabla \times \mathbf{E}_0) = 0.$$

$\mathbf{E}_0$ *est donc indépendant de l'ordre auquel le vecteur polarisation est développé, comme des autres composantes du champ électrique*. Nous nous étonnons du fait que les caractéristiques du matériau décrites par les tenseurs $\chi^{(n)}(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ n'aient aucune influence sur le champ électrique dès lors que $\omega_1 + \cdots + \omega_n$ s'annule.

Par conséquent nous allons *décréter* que cette composante s'annule, ce qui est une hypothèse couramment utilisée ([55], [56], [57], etc.). Notons que ceci n'empêche pas une induction électrique statique non nulle (mais à divergence nulle, tout de même) : $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0(\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1}\rfloor + \cdots + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-2}\rfloor + \cdots)$, ou, plus formellement,

$$\mathbf{P}_0^{(n)} = \varepsilon_0 \sum_{\substack{(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^n \\ p_1+\cdots+p_n=0}} \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n}\rfloor.$$

Rappelons que, puisque les équations de propagations du champ électrique font intervenir la dérivée (seconde) du vecteur polarisation, $\mathbf{P}_0^{(n)}$ n'intervient pas dans ces équations.

L'hypothèse $\mathbf{E}_0 = 0$ a un second avantage : si $\mathbf{E}_0$ est nul, alors son rotationnel l'est également et, d'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B},$$

$\mathbf{B}$ n'a pas de terme divergent linéairement dans le temps. Néanmoins, ce procédé exclut l'étude de l'effet Pockels (en l'honneur de Friedrich Carl Alwin Pockels, qui le découvrit en 1893) qui consiste à supposer que parmi tous les tenseurs de susceptibilité $\chi^{(2)}$, seul $\chi^{(2)}(\mathbf{s}, \omega_I, 0)$ est non-nul. On peut alors reprendre la notation $\mathbf{D}_1 = \varepsilon(\omega_I)\mathbf{E}_1$ de l'optique linéaire, avec cette fois $\varepsilon(\omega_I) = \varepsilon_0(1 + \chi^{(1)}(\omega_I) + 2\chi^{(2)}(0, \omega_I)\mathbf{E}_0)$. En d'autres termes, ceci signifie qu'un champ électrique statique change la permittivité du matériau.

Même si le contexte est un peu différent, les auteurs de l'article [58] font remarquer que, dans la résolution du système d'équations de propagation du champ électrique, $\mathbf{E}_0$ peut être assimilé à un paramètre extérieur (qui satisfait $\mathcal{M}_0^{lin}(\mathbf{E}_0) = 0$) : en effet, cette composante agit sur les autres, mais, dès lors qu'elle est générée, l'équation qu'elle satisfait est indépendante des composantes non-statiques.

Enfin, il est clair que les difficultés qui apparaissent avec cette composante sont dues à ce que le champ incident que nous considérons est rigoureusement monochromatique, ce qui n'est évidemment jamais le cas en pratique. Par conséquent, il existe, par la génération de différence de fréquences (voir la section 1.6), des composantes du champ dont la pulsation est proche de zéro, ou au moins beaucoup plus faible que celle que nous considérons habituellement (proche de $10^{15}\ Hz$). L'article [59] étudie ce cas de figure et donne de nombreuses figures intéressantes. Signalons juste que les composantes "statiques" considérées oscillent à des fréquences environ cent fois moindres que celles du champ incident.

1.3.3 Degrés de l'approximation des équations de propagation

Définition

Dans la pratique, pour, d'une part, éviter de devoir résoudre un système infini d'équations, on suppose qu'il existe un entier positif $\underline{d}$ vérifiant

$$\mathbf{E}_p = 0, \quad |p| \geqslant \underline{d}.$$

Pour ce faire, on suppose que le support de $\chi^{(n)}$ est borné dans les fréquences. On introduit ainsi la définition suivante :

définition 1. *le degré d d'approximation à l'ordre n d'un champ monochromatique*

$$d := \min_{\underline{d} \in \mathbb{N}} \{ ||(p_1, \cdots, p_n)||_{l_1(\mathbb{Z})} > \underline{d} \Rightarrow \chi^{(n)}(\mathbf{s}; p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I) = 0, \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \}$$

Par conséquent,

> *en degré d, tous les termes $\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor$ sont nuls dès que $|p_1| + \cdots + |p_n|$ est strictement supérieur à d.*

Dans ce cas, on conviendra que le champ électrique total a la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{s},t) &= \sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\|p|\leqslant d}} \mathbf{E}_p(\mathbf{s})e^{-ip\omega_I t}\\ &= 2\Re e\{\sum_{1\leqslant p\leqslant d} \mathbf{E}_p(\mathbf{s})e^{-ip\omega_I t}\},\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{E}_0$ *s'annule et que* $\mathbf{E}_{-p} = \overline{\mathbf{E}_p}$.

En d'autres termes, on ne garde que les termes dont on est sûr qu'ils ne sont pas nuls. Si la définition ainsi donnée ne convainc pas le lecteur, peut-être celui-ci peut-il se reporter à la section 1.4 où plusieurs effets sont retrouvés de manière naturelle ; si elle lui paraît abrupte, nous lui conseillons de jeter un œil à la section 1.6, où le spectre du champ incident contient plus d'une fréquence positive. Des graphes symbolisant les interactions entre les composantes y sont représentés - en quelque sorte, le champ incident monochromatique est trop trivial pour bien cerner cette définition du degré.

Après quelques fastidieuses opérations, on trouve le système d'équations de propagation des composantes positives du champ électrique :

$$\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)^2 \sum_{q\in\mathcal{Q}} d_2(q,p/2)\lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_{p-q}\rfloor = 0, \quad 1\leqslant p\leqslant d$$

où $\mathcal{Q} := \mathbb{Z}^* \cap [-\lfloor\frac{-|p-d|}{2}\rfloor, \lfloor\frac{p}{2}\rfloor]$ est l'ensemble des entiers non nuls compris entre l'opposé de la partie entière de $\frac{-|p-d|}{2}$ et la partie entière de $\frac{p}{2}$, et $d_2(a,b)$ est la fonction de dégénérescence à deux points, qui a pour image 2 si a et b diffèrent, et 1 dans le cas contraire.

Dans la pratique générale, seuls les cas de plus bas degré sont intéressants[26]. On va donc les énumérer.

Degré un (équation linéaire)

Le cas $d = 1$ est trivial :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0. \tag{1.19}$$

Ceci traduit que l'approximation la plus grossière que l'on puisse faire en optique non-linéaire revient à considérer le régime linéaire. Ceci, ainsi que les titres des prochaines sous-sections, conforte l'idée que notre définition du degré est conforme à l'intuition.

[26]Rendre compte des expériences peut cependant s'avérer plus que laborieux : dès 1987, la quinzième harmonique était détectée, ([60]) et la recherche de haute génération sur une grande distance est maintenant un nouveau domaine d'étude ; un récent article ([61]) décrit une résonance à $\omega = 681\omega_I$!
Nous voudrions ouvrir une parenthèse à ce sujet, pour faire remarquer au lecteur qu'une ampoule électrique génère un champ visible à l'œil en étant alimenté par un courant de $50\,Hz$, ou que faire lentement osciller une feuille de papier produit un son audible pour l'oreille humaine.

Degré deux (génération de seconde harmonique)

Lorsque d vaut deux, on a le système d'équation

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0, \tag{1.20a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0. \tag{1.20b}$$

En effet, au degré deux, $\chi^{(2)}$ ne doit être contracté qu'avec les composantes du champ total correspondant aux fréquences du champ incident. Par conséquent, les seuls tenseurs non nuls sont $\chi^{(2)}(-2\omega_I; -\omega_I, -\omega_I)$, $\chi^{(2)}(0; \omega_I, -\omega_I)$, $\chi^{(2)}(0; -\omega_I, \omega_I)$ et $\chi^{(2)}(2\omega_I; \omega_I, \omega_I)$. Mais le second et le troisième (qui sont complexes conjugués l'un de l'autre) n'interviennent pas dans les équations de propagation, et le premier décrit la génération de la composante $\mathbf{E}_{-2}$, que l'on obtient en fait directement de l'équation de $\mathbf{E}_2$.

Ce système d'équations est abondamment étudié. On le trouve souvent rapidement dans les livres généraux sur l'optique non-linéaire, mais également dans des articles récents, comme [57], même si nous ne sommes pas d'accord avec l'écriture du vecteur polarisation. Il a l'avantage de rendre la non-linéarité, en un sens, triviale. En effet, il n'y a que deux inconnues, qui sont $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, et l'équation pour $\mathbf{E}_1$ ne fait pas intervenir $\mathbf{E}_2$. Par conséquent, on peut d'abord résoudre l'équation (linéaire) pour $\mathbf{E}_1$, puis introduire cette solution dans l'équation (à nouveau linéaire) pour $\mathbf{E}_2$. On ne résout ainsi que des équations linéaires. D'une part, ceci nous permet de nous assurer de l'unicité de la solution, et d'autre part, nous pouvons alors utiliser de nombreuses méthodes analytiques (comme les développements en série, [62]) ou numériques (celles qui, précisément, requièrent les développements en série).

Mais le problème n'est pas linéaire[27] pour autant. C'est à dire que si l'on multiplie le champ incident par un facteur m, les champs $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ ne seront pas multipliés par ce même facteur m. En fait, $\mathbf{E}_1$ est multiplié par m et $\mathbf{E}_2$ par m^2. D'après la section 1.3.2, m peut être un nombre réel comme un nombre complexe.

Lorsque la non-linéarité n'est pas présente dans l'équation que satisfait $\mathbf{E}_1$, il est d'usage de dire que l'on est dans le cadre de la "non-déplétion de l'onde de pompe". On voit alors le champ (total) qui oscille à ω_I comme un réservoir : on peut lui tirer de l'énergie pour générer une composante à $2\omega_I$ sans que celui-ci n'en soit changé.

Degré trois (génération de troisième harmonique)

En degré deux, seules les fréquences présentes dans le champ incident interagissaient. Par la non-linéarité, elles ont générées d'autres pulsations : $-2\omega_I$ et $2\omega_I$. En degré trois, les composantes $\mathbf{E}_{-2}$ et $\mathbf{E}_2$ interagissent avec $\mathbf{E}_{-1}$ et $\mathbf{E}_1$. L'harmonique

[27] Nous n'étudierons pas ce type d'équations en profondeur, et nous nous satisferons de ces définitions plus intuitives que rigoureuses.

supérieure, ici la troisième, est naturellement générée. Certains auteurs parlent alors d'un effet cascade.

Lorsque d vaut trois, les équations de propagation se réduisent donc à

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2\Big(\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1} \rfloor\Big) = 0,$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0,$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2\Big(\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 \rfloor\Big) = 0.$$

En utilisant la propriété 3, page 202, elles deviennent

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 2\omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor = 0, \tag{1.21a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0, \tag{1.21b}$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + 2(3\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor = 0. \tag{1.21c}$$

Le facteur deux venant de la fonction de dégénérescence devrait maintenant paraître naturel.

Degré quatre (génération de quatrième harmonique)

À toutes fins utiles, nous donnons l'étape permettant de faire apparaître la génération de quatrième harmonique :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 2\omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor = 0, \tag{1.22a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2\Big(\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_3 \rfloor\Big) = 0, \tag{1.22b}$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + 2(3\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor = 0, \tag{1.22c}$$

$$\mathcal{M}_4^{lin}(\mathbf{E}_4) + (4\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2 \rfloor\Big) = 0. \tag{1.22d}$$

Nous trouvons cependant ce système (et dans une moindre mesure, ceci vaut également pour le système (1.21)) peu pertinent : en effet, il est peu probable que les ordres trois et quatre ne soient négligeables dans le processus de génération de troisième et quatrième harmonique.

1.3.4 Densité d'énergie pour une non-linéarité du second ordre

Les composantes du champ électrique $\mathbf{E}_p$, et celles du champ magnétique $\mathbf{H}_p$ qui s'en déduisent, interagissant entre elles, la définition habituelle ([63]) de l'énergie électromagnétique dans un milieu dispersif et linéaire n'est plus valable. Nous voulons la définir rigoureusement et la calculer dans le cadre de la section précédente.

Le quadrivecteur énergie-impulsion (ou sa densité locale, notée $(c\mathcal{I}, W)$) est, par définition, à divergence nulle. Nous prenons la convention dans laquelle, dans un système de coordonnées cartésiennes, cette divergence s'écrit

$$\nabla^4 \cdot := (-c\partial_x \ \ -c\partial_y \ \ -c\partial_z \ \ \partial_t) \cdot .$$

D'une manière symbolique, on a donc

$$-c\,\nabla \cdot (c\mathcal{I}) + \partial_t W = 0. \tag{1.23}$$

Restreignons-nous à la partie électromagnétique $(c\mathcal{I}_{em}, W_{em})$ de $(c\mathcal{I}, W)$. Guidés par les unités[28], nous définissons le vecteur $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, écrit $\mathcal{P}$ et appelé vecteur de Poynting, comme étant la densité d'impulsion électromagnétique $\mathcal{I}_{em}$ multipliée par le facteur $-c^2$. La conservation de l'énergie-impulsion électromagnétique s'écrit alors

$$\nabla \cdot \mathcal{P} + \partial_t W_{em} = 0.$$

Cette relation permet de définir la densité d'énergie W_{em}. En effet, en l'absence de courant, on obtient, à partir des relations de Maxwell,

$$\begin{aligned} \partial_t W_{em} &= -\nabla \cdot \mathcal{P} \\ &= (\partial_t \mathbf{B}) \cdot \mathbf{H} + (\partial_t \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

et l'on définit la densité d'énergie électrique W_e par

$$\partial_t W_e = (\partial_t \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}.$$

Lorsque les seuls vecteurs polarisation non-nuls sont aux ordres un et deux et que le champ électrique s'écrit selon la formule (1.15) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}_p(\mathbf{s}) e^{-ip\omega_I t}, \tag{(1.15)}$$

on a

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \sum_{p \in \mathbb{Z}} \Big(\mathbf{E}_p + \lfloor \mathbf{E}_p \rfloor + \sum_{q \in \mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_{p-q} \rfloor \Big) e^{-ip\omega_I t}. \tag{1.24}$$

[28]Une autre raison amène à définir $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$: il faut se rappeler qu'il existe une présentation des équations de Maxwell dans laquelle on remplace les champs de vecteurs $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{J}$ et le champ scalaire ρ par des formes différentielles. $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont des 1-formes, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{J}$ sont des 2-formes, et ρ est une 3-forme. Puisque $\mathcal{P}$ est proportionnel à une impulsion, on va prendre sa divergence spatiale ; il doit donc être associé à une 2-forme. Les candidats sont donc les combinaisons linéaires de $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ ($\wedge$ désignant le produit extérieur), $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{J}$. Le respect des unités exclut les trois dernières possibilités.

La densité d'énergie électrique est donc[29]

$$\begin{aligned} W_e(t) = W_e(0) & \\ & + \varepsilon_0 \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \frac{q}{p}\mathbf{E}_{p-q}\cdot\big(\mathbf{E}_q + \lfloor\mathbf{E}_q\rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}}\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{q-r}\rfloor\big)(e^{-ip\omega_I t}-1) \\ & + \varepsilon_0 \sum_{q\in\mathbb{Z}} -iq\omega_I\mathbf{E}_{-q}\cdot\big(\mathbf{E}_q + \lfloor\mathbf{E}_q\rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}}\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{q-r}\rfloor\big)t. \end{aligned}$$

On constate que le membre de droite de cette expression contient trois termes : le premier est une constante, le second est un terme oscillant, le dernier est un terme divergent linéairement dans le temps. À long terme (long devant la période des ondes que l'on manipule), seul ce dernier importe. Ceci nous amène à calculer la valeur moyenne de la densité de puissance électrique :

$$\begin{aligned} <\partial_t W_e>:= & \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\partial_t W_e \\ & = \varepsilon_0\sum_{q\in\mathbb{Z}}\Big(-iq\omega_I\mathbf{E}_{-q}\cdot\big(\mathbf{E}_q + \lfloor\mathbf{E}_q\rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}}\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{q-r}\rfloor\big)\Big). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Il faut reconnaître, dans $\varepsilon_0\big(\mathbf{E}_q + \lfloor\mathbf{E}_q\rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}}\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{q-r}\rfloor\big)$, le développement de $\mathbf{D}_q$ selon $\varepsilon_0\mathbf{E}_q + \mathbf{P}_q^{(1)} + \mathbf{P}_q^{(2)}$. Or nous savons que seul le vecteur polarisation intègre les caractéristiques du matériau. On s'attend donc à ce que la somme comportant $\varepsilon_0\mathbf{E}_q$ soit nulle, ce qui se vérifie immédiatement par un changement d'indice $q\mapsto -q$ et en utilisant la symétrie du produit de dualité sur $\mathbb{R}^3$ (on suppose à nouveau que la série est absolument convergente). On a donc montré :

> *La moyenne stochastique de la variation d'énergie électrique dans le vide* $\varepsilon_0\sum_{q\in\mathbb{Z}} -iq\omega_I\mathbf{E}_{-q}\cdot\mathbf{E}_q$ *est nulle.*

L'expression (1.25) se simplifie donc selon

$$\begin{aligned} <\partial_t W_e> &= \varepsilon_0\sum_{q\in\mathbb{Z}}\Big(-iq\omega_I\mathbf{E}_{-q}\cdot\big(\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}}\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{q-r}\rfloor\big)\Big) \\ &= \varepsilon_0\sum_{q\in\mathbb{Z}} -iq\omega_I\mathbf{E}_{-q}\cdot\mathbf{P}_q. \end{aligned}$$

On vérifie qu'elle tend vers l'expression habituelle (i.e., linéaire) $\varepsilon_0\sum_{q\in\mathbb{Z}} -iq\omega_I\mathbf{E}_{-q}\cdot\mathbf{P}_q^{(1)}$ lorsque le coefficient de non-linéarité tend vers zéro. On vérifie aussi qu'elle est réelle :

[29] Le point central exprime la contraction : $\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b = \delta_{ij}v_a^i v_b^j$ pour deux vecteurs $\mathbf{v}_a$ et $\mathbf{v}_b$ de $\mathbb{C}^3$ de composantes respectives $\{v_a^i\}$ et $\{v_b^i\}$ en coordonnées cartésiennes.

prendre le complexe conjugué revient à changer q en $-q$ (et r en $-r$ (voir la propriété 2, p. 202), lorsque l'on considère la première ligne) et laisse donc la somme invariante.

Calcul de $W_e(t)$

On présente le détail du calcul de $W_e(t)$. Des expressions (1.15) et (1.24) des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$, on déduit

$$\begin{aligned}
\partial_t W_e(t) :&= \big(\partial_t \mathbf{D}(t)\big)\cdot \mathbf{E}(t)\\
&= \varepsilon_0 \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-iq\omega_I)\Big(\mathbf{E}_q + \lfloor \mathbf{E}_q \rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{q-r}\rfloor\Big) e^{-iq\omega_I t}\cdot \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}_s e^{-is\omega_I t}\\
&= \varepsilon_0 \sum_{(q,s)\in\mathbb{Z}} (-iq\omega_I)\mathbf{E}_s \cdot \Big(\mathbf{E}_q + \lfloor \mathbf{E}_q \rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{q-r}\rfloor\Big) e^{-i(q+s)\omega_I t}\\
&= \varepsilon_0 \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}} (-iq\omega_I)\mathbf{E}_{p-q} \cdot \Big(\mathbf{E}_q + \lfloor \mathbf{E}_q \rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{q-r}\rfloor\Big) e^{-ip\omega_I t}
\end{aligned}$$

L'intégration est alors élémentaire.

1.4 Non-linéarité du troisième ordre

Nous n'avons, jusqu'ici, que présenté les fondements de l'optique non-linéaire, et déduit quelques propriétés. Nous souhaitons maintenant étudier un cas plus précis et nous supposons que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)}$. Afin de répondre à des questions du type "comment varient les intensités des champs aux différentes fréquences lorsque l'intensité du champ incident est multipliée par un facteur m ?", il faut mesurer la part de la non-linéarité d'ordre deux et de celle d'ordre trois dans la génération des différentes harmoniques. Autrement dit, il faut obtenir les équations de propagation des composantes du champ électrique total. Cette sous-section y est consacrée. Nous utilisons la même méthode que celle présentée dans la section (1.3, p. 35).

Le vecteur polarisation à l'ordre trois est

$$\mathbf{P}^{(3)}(t) = \varepsilon_0 \sum_{(p,q,r)\in\mathbb{Z}^3} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{p-q-r}\rfloor e^{-ip\omega_I t}.$$

On obtient alors l'équivalent de l'équation (1.18), pour tout entier p :

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)^2\Big(\sum_{q\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_{p-q}\rfloor + \sum_{(q,r)\in\mathbb{Z}^2} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{p-q-r}\rfloor\Big) = 0,\\ \forall p\in\mathbb{Z}.\end{gathered}} \tag{1.26}$$

Comme à l'ordre deux, l'équation de propagation de $\mathbf{E}_{-p}$ se déduit de celle de $\mathbf{E}_p$ en prenant le complexe conjugué. Nous ne présenterons donc que celle où p est positif. On suppose dorénavant que $\mathbf{E}_0$ est nul.

1.4.1 Degrés de l'approximation des équations de propagation

Degré un (équation linéaire)

Le cas $d = 1$ est encore trivial :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0. \tag{1.27}$$

Degré deux (génération de seconde harmonique)

Lorsque d vaut deux, on a le système d'équations

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0 \tag{1.28a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0. \tag{1.28b}$$

Par conséquent, la non-linéarité d'ordre trois n'est pas visible en degré strictement inférieur à trois. Plus généralement, puisque $\mathbf{E}_0 = 0$, la non-linéarité d'ordre N n'entre en jeu qu'à partie du degré N.

Degré trois (génération de troisième harmonique)

En degré trois, on a

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0, \tag{1.29a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0, \tag{1.29b}$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0. \tag{1.29c}$$

Ce système est riche en nouveautés : le terme $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor$ décrit la rétroaction de $\mathbf{E}_2$ sur $\mathbf{E}_1$; $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$ donne l'effet *Kerr-optique* (en hommage à John Kerr, un physicien écossais, qui l'étudia en 1875), ; et la troisième harmonique est générée par deux processus différents : l'effet cascade, $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor$, qui ne fait intervenir que des non-linéarité d'ordre deux, et la voie directe, par $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$.

Degré quatre (génération de quatrième harmonique)

L'étape suivante se trouve facilement :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor\Big) = 0, \quad (1.30a)$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2\Big(\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_3\rfloor + 6\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\rfloor\Big) = 0, \quad (1.30b)$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor\Big) = 0, \quad (1.30c)$$

$$\mathcal{M}_4^{lin}(\mathbf{E}_4) + (4\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\rfloor\Big) = 0. \quad (1.30d)$$

Commentaires sur le formalisme proposé

Le système d'équations (1.29) est un système complet que l'on étudiera numériquement (dans le chapitre 5). Schématiquement, on peut dire que tout ce qui précède, depuis la section 1.1.2, avait pour but l'obtention de ce système, et l'explicitation des hypothèses nécessaires.

Un article qui pose un système proche du nôtre est, par exemple, [56] avec des termes manquants (selon notre formalisme) et une hypothèse sur la dépendance spatiale des composantes du champ électrique, ce qui donne un système à cinq équations dans $\mathbb{R}^3$.

Un point qui nous parait intéressant concerne les cascades : selon notre systématique, les termes $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2\rfloor$, $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\rfloor$ apparaissent simultanément. À l'ordre trois, le terme $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor$ apparaît également au degré trois. Ce n'est pas toujours ce que l'on trouve dans la littérature.

Par exemple, si les auteurs de [64] choisissent les deux mêmes processus de création de la troisième harmonique, ils ne semblent pas s'intéresser à la déplétion de l'onde de pompe.

Dans l'article [65], la composante fondamentale est supposée être perturbée par les termes $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2\rfloor$, $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor$ et $\lfloor \mathbf{E}_{-2}, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1\rfloor$.

L'article [66] prend en compte la déplétion de l'onde de pompe via les processus, tous d'ordre deux, suivants :

- génération de seconde harmonique $\omega_I + \omega_I = 2\omega_I$ puis génération de différence de fréquences $2\omega_I - \omega_I = \omega_I$;
- génération de seconde harmonique $\omega_I + \omega_I = 2\omega_I$ puis génération de somme de fréquences $2\omega_I + \omega_I = 3\omega_I$ puis génération de différence de fréquences $3\omega_I - 2\omega_I = \omega_I$;
- génération de seconde harmonique $\omega_I + \omega_I = 2\omega_I$ puis génération de somme de fréquences $2\omega_I + \omega_I = 3\omega_I$ puis génération de différence de fréquences $3\omega_I - \omega_I = 2\omega_I$ puis génération de différence de fréquences $2\omega_I - \omega_I = \omega_I$.

On pourrait multiplier les exemples... Il nous paraît clair que l'alternative qui se présente au chercheur est alors la suivante : soit on trouve un modèle pour chaque

matériau, soit on cherche une systématique. Ce que nous proposons est la deuxième voie.

Nous reconnaissons qu'elle n'est pas idéale. En particulier, en résignant à nous occuper, dans ce chapitre, des valeurs numériques des $\chi^{(n)}$, il se peut tout à fait que nos systèmes ne soient pas applicables à un matériau. Ceci sera encore plus visible lorsque nous traiterons les effets Raman ou CARS, p. 70. On aura alors des systèmes assez complexes, et il y a tout lieu de penser, qu'en les utilisants sur un matériau donné, certains termes seront complètement négligeables devant d'autres.

Par exemple, dans un cas précis que l'on détaillera à la page 156, le calcul sur les ordres de grandeur résumé dans le tableau 5.2 justifie la démarche de [64] : si $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$ et $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$ d'un côté, $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor$ et $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor$ de l'autre, ont même module, ils ne sont pas à comparer aux mêmes termes ($\lfloor \mathbf{E}_1 \rfloor$ ou $\lfloor \mathbf{E}_3 \rfloor$), et l'on comprend pourquoi ces auteurs considèrent qu'il y a génération de troisième harmonique et non-déplétion de l'onde de pompe. Néanmoins, ces considérations ne sont obtenues ici qu'en fixant l'amplitude, relativement faible, et le matériau. L'amplitude n'est pas précisée dans [64], et sept matériaux différents sont traités.

Les effets de cascades, dans le sens général où deux processus d'ordre deux sont produits successivement, ont également été étudiés par des voies plus expérimentales, par exemple dans [67], [68], [69], etc. Nous avons apprécié la courte introduction de [70] pour l'approche intuitive qu'il donne des effets à prendre en compte. Enfin, de nombreux théoriciens ([64], [71], etc.) ont introduit des susceptibilités effectives, les amenant par exemple à écrire des rapports du type $\dfrac{\chi^{(3)}(\omega_I, \omega_I, \omega_I)}{\chi^{(2)}(2\omega_I, \omega_I)\chi^{(2)}(\omega_I, \omega_I)}$ que nous ne comprenons pas. Il serait intéressant de pouvoir quantifier, dans un cas particulier simple, la différence entre les deux modèles.

Le chapitre 4 sera dévolu à l'étude de la diffraction d'une onde électromagnétique monochromatique au travers d'un cristal photonique présentant un effet Kerr-optique. L'équation à résoudre est alors

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 3\omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1} \rfloor = 0, \tag{1.31}$$

qui se déduit du système (1.29), mais en ne gardant, comme tenseur de susceptibilité non-linéaire, que $\chi^{(3)}(\omega_I, \omega_I, -\omega_I)$ et en annulant tous les $\chi^{(2)}$.

Comme nous l'avions annoncé lors de la présentation de la symétrie de permutation intrinsèque, à chaque fois qu'une même fréquence apparaît à plusieurs reprises, il faut symétriser le tenseur de susceptibilité :

$$\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1} \rfloor = \frac{1}{2}\big(\chi^{(3)\,i}{}_{jkl} + \chi^{(3)\,i}{}_{kjl}\big) E_1^j E_1^k E_{-1}^l \mathbf{e}_i.$$

L'équation (1.31) a, à notre connaissance, été assez peu étudiée d'un point de vue mathématique. Les travaux du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux font figure d'exception. Par exemple, dans [72] est annoncée l'existence et l'unicité (dans un espace à préciser) de la solution du problème de Kerr-Debye - c'est-à-dire que le tenseur de susceptibilité dépend également du temps, afin de prendre en compte la "relaxation" du matériau ; on voit donc que l'approche pour obtenir l'équation (1.31)

est totalement différente de la nôtre - dans un milieu infini homogène, et il est montré que, quand le temps de relaxation tend vers zéro, la limite des solutions du problème de Kerr-Debye est solution du problème de Kerr.

Reprenons l'équation (1.31) en supposant que le milieu a les propriétés magnétiques du vide

$$-\varepsilon_0^{-1}\nabla\times(\mu_0^{-1}\nabla\times\mathbf{E}_1)+\omega_I^2\varepsilon_r^{(1)}(\omega_I)\mathbf{E}_1+3\omega_I^2\chi^{(3)}(\omega_I,\omega_I,-\omega_I)\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1\mathbf{E}_{-1}=0,$$

soit

$$\triangle\mathbf{E}_1-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}_1)+\left(\frac{\omega_I}{c}\right)^2\left(\varepsilon_r^{(1)}(\omega_I)\mathbf{E}_1+3\chi^{(3)}(\omega_I,\omega_I,-\omega_I)\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1\mathbf{E}_{-1}\right)=0.$$

Si, de plus, $\mathbf{E}_1(x,y,z,t)=u(x,y)\hat{z}$, et si le milieu, d'une part vérifie les conditions de la section 2.2 pour qu'une polarisation $E\parallel$ soit permise, et d'autre part est invariant suivant l'axe $(0,z)$, alors $\nabla\cdot\mathbf{D}_1=0$ implique $\nabla\cdot\mathbf{E}_1=0$ et l'on obtient :

$$\left(\triangle+\left(\frac{\omega_I}{c}\right)^2(\varepsilon_r^{(1)}+n_2|u|^2)\right)u=0, \tag{1.32}$$

avec $\varepsilon_r^{(1)}=1+\chi^{(1)\,z}{}_{z}(\omega_I)$ et $n_2=3\chi^{(3)\,z}{}_{zzz}(\omega_I,\omega_I,-\omega_I)$. Ce sont les conditions du chapitre 4. On insiste sur le fait que l'on a donné un cadre particulier (champ polarisé rectilignement, milieu invariant par translation, etc.), mais qu'à l'intérieur de celui-ci, aucune approximation n'a été faite. En particulier, l'annulation de la divergence de $\mathbf{E}_1$ est rigoureuse.

1.4.2 Densité d'énergie pour une non-linéarité du troisième ordre

Nous reprenons la méthode de la section 1.3.4 page 44 et l'adaptons au cas où $\mathbf{P}=\mathbf{P}^{(1)}+\mathbf{P}^{(2)}+\mathbf{P}^{(3)}$.

On a

$$\mathbf{D}(t)=\varepsilon_0\sum_{p\in\mathbb{Z}}\left(\mathbf{E}_p+\lfloor\mathbf{E}_p\rfloor+\sum_{q\in\mathbb{Z}}\left(\lfloor\mathbf{E}_q,\mathbf{E}_{p-q}\rfloor+\sum_{r\in\mathbb{Z}}\lfloor\mathbf{E}_q,\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{p-q-r}\rfloor\right)\right)e^{-ip\omega_I t}.$$

La densité d'énergie électrique est donc[30]

[30] On note que l'on a omis le terme $\varepsilon_0\sum_{q\in\mathbb{Z}}-iq\omega_I\mathbf{E}_{-q}\cdot\mathbf{E}_q$ puisque, comme indiqué dans l'étude à l'ordre deux, il est nul.

$$
\begin{aligned}
W_e(t) = W_e(0) & \\
& + \varepsilon_0 \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \frac{q}{p}\mathbf{E}_{p-q} \\
& \quad \cdot \Big(\mathbf{E}_q + \lfloor \mathbf{E}_q \rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}} \big(\lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{q-r}\rfloor + \sum_{s\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_{q-r-s}\rfloor\big)\Big)(e^{-ip\omega_I t} - 1) \\
& + \varepsilon_0 \sum_{q\in\mathbb{Z}} -iq\omega_I \mathbf{E}_{-q} \cdot \Big(\lfloor \mathbf{E}_q \rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}} \big(\lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{q-r}\rfloor + \sum_{s\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_{q-r-s}\rfloor\big)\Big)t.
\end{aligned}
$$

Les mêmes remarques qu'au paragraphe 1.3.4 s'appliquent et l'on s'intéresse par conséquent à la valeur moyenne de la densité de puissance électrique, dont l'expression est

$$
\begin{aligned}
< \partial_t W_e > &= \varepsilon_0 \sum_{q\in\mathbb{Z}} -iq\omega_I \mathbf{E}_{-q} \cdot \Big(\lfloor \mathbf{E}_q \rfloor + \sum_{r\in\mathbb{Z}} \big(\lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{q-r}\rfloor + \sum_{s\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_{q-r-s}\rfloor\big)\Big) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} -ip\omega_I \mathbf{E}_{-p} \cdot \mathbf{P}_p.
\end{aligned}
$$

On vérifie qu'elle tend vers l'expression habituelle lorsque le coefficient de non-linéarité tend vers zéro. On vérifie aussi qu'elle est réelle : prendre le complexe conjugué revient à changer p en $-p$ dans la première équation ou q en $-q$, r en $-r$, s en $-s$ (voir la propriété 2, p.202) dans la seconde ; ces opérations laissent la somme invariante.

1.5 Caractérisation partielle des pertes d'énergie électrique dans un milieu non-linéaire

1.5.1 Généralités

Une fois les travaux des sections (1.3.4, p. 44) et (1.4.2, p. 50) effectués, il nous paraît naturel de répondre à la question : à quelle(s) condition(s) le milieu est-il sans pertes électromagnétiques, ou plus précisément, quelle(s) propriété(s) doivent satisfaire les tenseurs $\chi^{(n)}$ pour qu'il n'y ait pas, en moyenne stochastique, de conversion de l'énergie électromagnétique en une autre forme d'énergie[31] [32] ? Encore une fois, on considérera que le milieu a les propriétés magnétiques du vide.

[31] C'est-à-dire qu'il n'y a ni effet Joule (transfert d'énergie électromagnétique en énergie thermique), ni lévitation optique (transfert d'impulsion électromagnétique en impulsion mécanique), etc.

[32] R.W. Boyd affirme ([49] p.34), dans une section où il ne considère qu'une non-linéarité du second ordre : "For a lossless medium all of the components of $\chi^{(2)}_{ijk}(\omega_n, \omega_m)$ are real. The result is obeyed for the classical anharmonic oscillator as can be verified by evaluating the expression for $\chi^{(2)}$ in the limit in which all of the applied frequencies and their sums and differences are significantly different from the resonance frequency. The general proof that $\chi^{(2)}$ is real for a lossless medium is obtained by verifying that the quantum-mechanical expression for $\chi^{(2)}$ is also purely real in this limit."

Entendons-nous bien sur le fait suivant : on s'intéresse à des pertes globales d'énergie électrique. On sait bien que les différentes composantes du champ électrique interagissent entre elles, et que $\mathbf{E}_p$, $|p| \neq 1$, est généré par les champs oscillants à la fréquence fondamentale. La question qui nous concerne ici est : "à quelle condition l'énergie électrique comprise dans le champ incident se retrouve intégralement dans le champ diffracté ?"

Écrivons, quelque soit l'ordre de la non-linéarité,

$$\begin{aligned} < \partial_t W_e > &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} -ip\omega_I \mathbf{E}_{-p} \cdot \mathbf{D}_p \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} -ip\omega_I \mathbf{E}_{-p} \cdot \mathbf{P}_p \\ &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p\in\mathbb{Z}}} -ip\omega_I \mathbf{E}_{-p} \cdot \mathbf{P}_p^{(n)}. \end{aligned}$$

On rappelle que le passage de la première à la seconde ligne signifie que la moyenne stochastique de la variation d'énergie électrique dans le vide est nulle.

N'ayant su trouver une condition nécessaire, on se satisfera d'une condition suffisante pour que la variation d'énergie électromagnétique s'annule à chaque ordre de la non-linéarité, ainsi que pour tout $(n+1)$-uplet différent d'entiers $(-p, p_1, \cdots, p_n)$ tel que les composantes $\mathbf{E}_{-p}$, $\mathbf{E}_{p_1}$, ..., $\mathbf{E}_{p_n}$ interviennent dans $\mathbf{E}_{-p} \cdot \mathbf{P}_p^{(n)}$ (on a donc $p_1 + \cdots + p_n = p$). Les calculs sont donnés dans l'annexe B (et, pour être tout à fait honnête, ils montrent que l'on exige n équations pour chaque $(n+1)$-uplet - on perd donc trois fois de l'information en décidant qu'une somme est nulle si chacun de ses termes est nul).

Une question, qui concerne toute la section, reste ouverte : comment traduire sur les $R^{(n)}$ le critère concernant la conservation de l'énergie électrique que l'on énoncera avec les $\chi^{(n)}$?

1.5.2 Le terme $\chi^{(1)}$

Considérons d'abord le premier ordre. On a

$$< \partial_t W_e^{(1)} >:= \varepsilon_0 \sum_{q\in\mathbb{Z}} -iq\omega_I \mathbf{E}_{-q} \cdot \lfloor \mathbf{E}_q \rfloor.$$

D'après la propriété 4, page 203, ceci devient

$$< \partial_t W_e^{(1)} >= -i\varepsilon_0\omega_I \sum_{q\in\mathbb{N}} q\mathbf{E}_{-q} \cdot \Big(\chi^{(1)}(q\omega_I) - \chi^{(1)\,*}(q\omega_I)\Big)\mathbf{E}_q.$$

Par conséquent, il n'y a pas de transfert de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie si le tenseur $\chi^{(1)}$ est hermitien pour toute pulsation.

$$\boxed{\chi^{(1)}(q\omega_I) = \chi^{(1)\,T}(-q\omega_I)}$$

TAB. 1.4 – Condition sur le tenseur $\chi^{(1)}$ qui garantit l'absence de pertes par effet Joule à l'ordre un.

1.5.3 Le terme $\chi^{(2)}$

Regardons maintenant l'ordre deux :

$$< \partial_t W_e^{(2)} >:= \varepsilon_0 \sum_{(q,r)\in\mathbb{Z}^2} -iq\omega_I \mathbf{E}_{-q} \cdot \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{q-r} \rfloor.$$

D'après la propriété 5 page 204, on a

$$< \partial_t W_e^{(2)} >= \omega_I \varepsilon_0 \Im m\{ \sum_{\substack{q\in\mathbb{N} \\ 0\leqslant r\leqslant q}} d_2(q,r) d_2(r,0) \mathbf{E}_{-(q+r)} \cdot \xi_{q,r}^{(2)} \mathbf{E}_r \mathbf{E}_q \},$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_{q,r}^{(2)} := r\big(\chi^{(2)}(r\omega_I, q\omega_I) - \chi^{(2)\,T_{12}}(-(q+r)\omega_I, q\omega_I)\big) \\ + q\big(\chi^{(2)}(r\omega_I, q\omega_I) - \chi^{(2)\,T_{13}}(r\omega_I, -(q+r)\omega_I)\big). \end{aligned}$$

où le transposé selon les indices 1 et 2 est défini par $\mathbf{v}_a \cdot \chi^{(2)\,T_{12}} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_c := \mathbf{v}_b \cdot \chi^{(2)} \mathbf{v}_a \mathbf{v}_c$ pour tout triplet $(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c)$ de vecteurs $\mathbb{R}^3$, ce qui implique que $(\chi^{(2)\,T_{12}})^i{}_{i_1 i_2} = \chi^{(2)}{}_{i_1}{}^{i}{}_{i_2}$; de même $\mathbf{v}_a \cdot \chi^{(2)\,T_{13}} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_c := \mathbf{v}_c \cdot \chi^{(2)} \mathbf{v}_b \mathbf{v}_a$ et donc $(\chi^{(2)\,T_{13}})^i{}_{i_1 i_2} = \chi^{(2)}{}_{i_2}{}_{i_1}{}^{i}$. Enfin, $d_2(\cdot,\cdot)$ est la fonction de dégénérescence à deux éléments :

$$d_2(a,b) = \begin{cases} 2, & a \neq b \\ 1, & a = b. \end{cases}$$

Par conséquent, il n'y a pas de transfert de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie si le tenseur $\chi^{(2)}$ vérifie, pour tout couple (q,r) d'entiers tel que $q > 0$ et $0 \leqslant r \leqslant q$, et pour tout lieu $\mathbf{s}$, les relations données dans le tableau 1.5.

On note que ces tenseurs ne contribuent pas à la même pulsation dans le vecteur polarisation. En effet, les champs interagissant entre eux, il y a transfert d'énergie électrique entre les différentes composantes du champ associées aux différentes pulsations. Ce que ces deux égalités impliquent, c'est qu'il n'y a pas de conversion de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie.

Une certaine symétrie apparaît lorsque l'on définit $p := -(q+r)$ et que l'on explicite la pulsation excitée dans $\mathbf{P}^{(2)}$ par[33] $\chi^{(2)}(\omega_a + \omega_b; \omega_a, \omega_b)$. En effet, la condition d'absence de transfert de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie s'écrit alors :

[33] La généralisation de cette notation est fréquemment utilisée : elle consiste à faire figurer la pulsation

$$\chi^{(2)}(r\omega_I, q\omega_I) = \chi^{(2)\,T_{12}}(-(q+r)\omega_I, q\omega_I)$$

et

$$\chi^{(2)}(r\omega_I, q\omega_I) = \chi^{(2)\,T_{13}}(r\omega_I, -(q+r)\omega_I)$$

TAB. 1.5 – Conditions sur le tenseur $\chi^{(2)}$ qui garantissent l'absence de pertes par effet Joule à l'ordre deux.

$$\chi^{(2)}(-p\omega_I; r\omega_I, q\omega_I) = \chi^{(2)\,T_{12}}(-r\omega_I; p\omega_I, q\omega_I) = \chi^{(2)\,T_{13}}(-q\omega_I; r\omega_I, p\omega_I). \tag{1.33}$$

Ce résultat apparaît dans [19], précédant : "Similar relations hold for response fonctions of arbitrary order : tensor indices in functions of nonlinear response of absorptionless media can be interchanged arbitrarily, as long as we interchange at the same time the frequencies and wave vectors[34] of the corresponding waves." Cependant, cet ouvrage ne s'intéresse pas à la génération des harmoniques supérieures à la deuxième dans le développement de la polarisation à l'ordre deux, et ne donne pas de démonstration. Enfin, nous pensons être plus précis dans les hypothèses nécessaires dans l'établissement de l'implication. Nous verrons cependant que le critère que l'on exhibera à l'ordre n est exactement celui trouvé par ces auteurs.

Relations de Kleinman

On considère dans ce paragraphe un milieu instantané, c'est-à-dire, un milieu où la fonction de réponse $R^{(n)}$ est du type $A \bigotimes_{i\in\{1,\cdots,n\}} \delta(t_i)$ où A est une fonction de l'espace uniquement. En utilisant la définition (1.11) de $\underline{\chi^{(n)}}$, puis (1.12) de $\chi^{(n)}$, on en déduit que le tenseur de susceptibilité est indépendant des fréquences :

$$\chi^{(n)}_{inst} := \chi^{(n)}(p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I) \qquad \forall (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Appliquons alors la définition de la polarisation à l'ordre un :

résultante de l'interaction dans les variables de $\chi^{(n)}$. Néanmoins, comme ce n'est évidemment pas une variable, nous la séparerons d'un point-virgule plutôt que de l'ordinaire virgule. On s'autorisera également à omettre les variables d'espaces - le milieu étant local, aucune confusion ne peut survenir. En conclusion, on utilisera désormais indifféremment l'une de ces quatre notations : $\chi^{(n)}(\mathbf{s}; \omega_{p_0}; \omega_{p_1}, \cdots, \omega_{p_n})$, $\chi^{(n)}(\mathbf{s}, \omega_{p_1}, \cdots, \omega_{p_n})$, $\chi^{(n)}(\omega_{p_0}; \omega_{p_1}, \cdots, \omega_{p_n})$, $\chi^{(n)}(\omega_{p_1}, \cdots, \omega_{p_n})$ avec $\omega_{p_0} = \omega_{p_1} + \cdots + \omega_{p_n}$.

[34] En ce qui nous concerne, le milieu étant spatialement local, les tenseurs de susceptibilité ne dépendent pas du vecteur d'onde.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(1)}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \chi_{inst}^{(1)} \hat{\mathbf{E}}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} \\ &= \varepsilon_0 \chi_{inst}^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \hat{\mathbf{E}}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} \\ &= \varepsilon_0 \chi_{inst}^{(1)} \mathbf{E}(t).\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $\chi_{inst}^{(1)}$ relie deux quantités réelles, il est lui-même réel.

De même, à l'ordre deux, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(2)}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2\, \chi_{inst}^{(2)} \\ &\qquad \hat{\mathbf{E}}(\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\omega_2) e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \\ &= \varepsilon_0 \chi_{inst}^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\, \hat{\mathbf{E}}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} \\ &\qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2\, \hat{\mathbf{E}}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t} \\ &= \varepsilon_0 \chi_{inst}^{(2)} \mathbf{E}(t)\mathbf{E}(t)\end{aligned}$$

et $\chi_{inst}^{(2)}$ est également réel. Or nous savons que la dispersion des ondes électriques dans un matériau est liée à la perte de leur énergie (ceci est donné par les relations de Kramers-Kronig en milieu linéaire). Peut-être ces considérations justifient-elles l'affirmation de R.W.Boyd, recopiée en note à la page 51. Mais remarquons bien que notre conclusion est totalement différente de la sienne :

> *notre résultat présenté dans le tableau 1.5 montre que l'on peut très bien avoir une conservation de l'énergie électrique dans un matériau où les $\chi^{(2)}$ sont complexes, et par conséquent, on peut très bien avoir une perte d'énergie électrique dans un matériau où les $\chi^{(2)}$ sont réels.*

Ceci sera exploré plus en détail et vérifié numériquement dans le cinquième chapitre.

D'après les tableaux (1.4) et (1.5), les tenseurs correspondant à un milieu sans pertes et instantané vérifient

$$\begin{cases} \text{à l'ordre un :} & \chi_{inst}^{(1)} = \chi_{inst}^{(1)\,T} \\ \text{à l'ordre deux :} & \chi_{inst}^{(2)} = \chi_{inst}^{(2)\,T_{12}} = \chi_{inst}^{(2)\,T_{13}}. \end{cases}$$

Puisque les transpositions (12) et (13) génèrent[35] le groupe symétriques $\mathcal{S}_3$ qui agit sur les composantes de $\chi^{(2)}$ en permutant les indices, on en déduit qu'un milieu non-linéaire d'ordre deux et non dispersif est sans pertes d'énergie électrique si le tenseur de

[35]Ceci signifie que les autres éléments, outre l'identité, (123), (132) et (23) de $\mathcal{S}_3$ s'expriment par des produits de (12) et (23) ; par exemple : $(123) = (13)(12)$, $(132) = (12)(13)$, $(23) = (12)(13)(12)$ - le fait que $\chi_{inst}^{(2)} = \chi_{inst}^{(2)\,T_{23}}$ dans un milieu sans dispersion s'obtient aussi par la permutation de symétrie intrinsèque.

susceptibilité est complètement symétrique. D.A.Kleinman ([73]) a énoncé ce résultat dès 1962.

1.5.4 Le terme $\chi^{(3)}$

L'ordre trois s'étudie d'une manière similaire :

$$< \partial_t W_e^{(3)} >:= \varepsilon_0 \sum_{(q,r,s)\in\mathbb{Z}^3} -iq\omega_I \mathbf{E}_{-q} \cdot \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_{q-r-s} \rfloor.$$

D'après la propriété 6 page 208, on a $< \partial_t W_e^{(3)} >= 0$ si les égalités reportés dans le tableau 1.6 sont satisfaites (on a définit, dans ce tableau, $p := -(q+r+s)$).

$$\begin{gathered}\chi^{(3)}(-p\omega_I; q\omega_I, r\omega_I, s\omega_I) = \chi^{(3)\ T_{12}}(-q\omega_I; p\omega_I, r\omega_I, s\omega_I) \\ = \chi^{(3)\ T_{13}}(-r\omega_I; q\omega_I, p\omega_I, s\omega_I) = \chi^{(3)\ T_{14}}(-s\omega_I; q\omega_I, r\omega_I, p\omega_I)\end{gathered}$$

TAB. 1.6 – Conditions sur le tenseur $\chi^{(3)}$ qui garantissent l'absence de pertes par effet joule à l'ordre trois.

Ne regardons à présent que l'effet Kerr-optique. On a alors [36]

$$\begin{aligned}< \partial_t W_e^{(3)} >_{\text{K opt}} &= -i\varepsilon_0\omega_I \sum_{\substack{(q,r,s)\in\{-1,1\}^3 \\ q-r-s\in\{-1,1\}}} q\mathbf{E}_{-q} \cdot \lfloor \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s, \mathbf{E}_{q-r-s} \rfloor \\ &= -\frac{3}{2}\varepsilon_0\omega_I \Im m\{\mathbf{E}_1 \\ &\quad \cdot \{\chi^{(3)}(\omega_I, -\omega_I, -\omega_I) + \chi^{(3)\ T_{12}}(\omega_I, -\omega_I, -\omega_I) \\ &\quad - \chi^{(3)\ T_{13}}(\omega_I, \omega_I, -\omega_I) - \chi^{(3)\ T_{14}}(\omega_I, -\omega_I, \omega_I)\}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_{-1}\mathbf{E}_{-1}\}\end{aligned}$$

Dans le chapitre 4, section 4.3, nous considérerons l'effet Kerr-optique dans des matériaux invariants suivant un axe (prenons (O, z)), et tels que, lorsqu'ils sont éclairés par un champ électrique polarisé suivant (O, z), ils ne répondent que dans cette direction. Autrement dit, les seules composantes des tenseurs de susceptibilité pertinentes seront $\chi^{(1)\,z}{}_{z}$ et $\chi^{(3)\,z}{}_{zzz}$ et l'on écrira $\mathbf{E}_1(x, y, z) = u_1(x, y)\hat{z}$.

On remarque que, dans ces conditions, les transpositions sur $\chi^{(n)}$ sont triviales, (ce qui implique, par la symétrie de permutation, que l'on peut échanger l'ordre des arguments fréquentiels à notre guise) et l'on peut récrire la condition précédente sous la forme :

[36] Le lecteur aura peut-être plus de facilité à comprendre la ligne suivante s'il se reporte à la section 5.2.2 où le critère énergétique à l'ordre trois est donné.

$$< \partial_t W_e^{(3)} > = -3\varepsilon_0\omega_I \Im m\{\chi^{(3)}(\omega_I, -\omega_I, -\omega_I) - \chi^{(3)}(\omega_I, \omega_I, -\omega_I)\}|u_1|^4,$$

ou encore, d'après la symétrie hermitienne de $\chi^{(3)}$,

$$< \partial_t W_e^{(3)} > = -6\varepsilon_0\omega_I \Im m\{\chi^{(3)}(\omega_I, -\omega_I, -\omega_I)\}|u_1|^4 \ ;$$

On vérifiera, dans les expériences numériques, qu'il y a transfert de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie si et seulement si au moins un des tenseurs $\chi^{(1)}$ ou $\chi^{(3)}$ a une partie imaginaire non nulle. Naturellement amené à attribuer des pertes d'énergie électrique à l'ordre n si $\chi^{(n)}$ a une composante imaginaire, on s'aperçoit que, dans la pratique, le critère annoncé concernant la conservation globale de l'énergie électrique s'avère nécessaire et suffisant.

1.5.5 Le terme $\chi^{(n)}$

En suivant la même méthode que dans les sous-sections précédentes, on arrive facilement aux résultats suivants :

– jusqu'à l'ordre n, i.e., si $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \cdots + \mathbf{P}^{(n)}$, on a :

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0\Big(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}_p e^{-ip\omega_I t} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{(p_1,\cdots,p_k)\in\mathbb{Z}^k} \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_k} \rfloor e^{-i(p_1+\cdots p_k)\omega_I t}\Big)$$

– d'où

$$\begin{aligned} < \partial_t(W_e^{(1)} + \cdots + W_e^{(n)}) > &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} -ip\omega_I \mathbf{E}_{-p}\cdot\mathbf{D}_p \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} -ip\omega_I \mathbf{E}_{-p}\cdot\mathbf{P}_p \\ &= -i\varepsilon_0\omega_I \sum_{k=1}^{n} \sum_{(p_1,\cdots,p_k)\in\mathbb{Z}^k} (p_1+\cdots+p_k)\mathbf{E}_{-(p_1+\cdots+p_k)}\cdot\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_k}\rfloor. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2, page 220, on sait expliciter une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de transfert de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie jusqu'à l'ordre n. Il suffit, en effet, qu'il n'y ait pas de perte d'énergie électrique à chaque ordre k, $k \in \{1, \cdots, n\}$, puis qu'à cet ordre k, les tenseurs $\chi^{(k)}$ vérifient les relations inscrites dans le tableau 1.7 (où l'on a définit $p_0 := -(p_1 + \cdots + p_n)$).

Encore une fois, ce résultat apparaît dans [19]. Malheureusement, nous n'avons pu nous procurer la démonstration et par conséquent nous ignorons comment ces conditions ont été obtenues.

$$\chi^{(n)\,T_{1\,j+1}}(-p_j\omega_I; p_0\omega_I, \cdots, p_{j-1}\omega_I, p_{j+1}\omega_I, \cdots, p_n\omega_I)$$
$$=$$
$$\chi^{(n)}(-p_0\omega_I; p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I)$$
$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}$$

TAB. 1.7 – Conditions sur le tenseur $\chi^{(n)}$ qui garantissent l'absence de pertes par effet joule à l'ordre n.

1.6 Un champ incident polychromatique

Supposons que l'on éclaire un atome, une molécule, un cristal, etc., avec un champ dichromatique ; notons ω_{I_1} et ω_{I_2} les pulsations du champ incident. Si, d'un point de vue électromagnétique, les relations de constitutions décrivant cet objet sont non-linéaires, alors le champ total oscillera à toutes les pulsations $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2}$, avec p_1 et p_2 des nombres entiers arbitraires.

On peut utiliser ce phénomène pour sonder l'objet éclairé ; si une composante du champ total, à la pulsation $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2}$, avec p_1 et p_2 fixés (et non nuls, puisque les composantes correspondant aux pulsations du champ incident auront les plus grandes amplitudes), est grande par rapport aux autres composantes générées, alors on dit que le système est résonant à cette pulsation. Cette résonance peut correspondre à une différence de niveau d'énergie électronique dans un atome, un mouvement de rotation, d'oscillation, etc. d'une molécule, ou d'un certain type de mouvement dans un cristal.

1.6.1 Équations de propagation

Le paragraphe introductif nous amène à généraliser les sections 1.3 et 1.4 au cas où le champ incident a la forme :

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{s}, t) = 2\Re e\{\mathbf{E}^i_{I_1}(\mathbf{s})e^{-i\omega_{I_1}t} + \mathbf{E}^i_{I_2}(\mathbf{s})e^{-i\omega_{I_2}t}\},$$

avec ω_{I_1} et ω_{I_2} deux réels strictement positifs.

Contentons-nous d'abord d'une non-linéarité d'ordre deux : $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}$. Ce qui a été affirmé plus haut, à savoir que l'ensemble minimal du spectre du champ total est l'ensemble des $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2}$, $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$, se démontre de la même manière que celle qui nous permettait, dans le cas monochromatique, à la page 36, d'affirmer que toutes les harmoniques étaient présentes dès l'ordre deux. Le champ total doit donc s'écrire selon

$$\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) = \sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{E}_{p_1,p_2}(\mathbf{s})e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}, \tag{1.34}$$

avec $\mathbf{E}_{-p_1,-p_2} = \overline{\mathbf{E}_{p_1,p_2}}$ pour que le champ soit réel.

Pour la même raison que lorsque le champ incident était monochromatique, on suppose que la série (1.34) est absolument convergente à $\mathbf{s}$ fixé (et donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$). On pourra donc changer l'ordre des indices et "commuter" la somme et une intégrale sur le temps ; on obtient ainsi :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega) = \sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{E}_{p_1,p_2}(\mathbf{s})\delta(\omega - (p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})).$$

On obtient aisément les expressions des vecteurs polarisation :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{s},t) :&= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1\, \chi^{(1)}(\mathbf{s},\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)e^{-i\omega_1 t} \\ &= \varepsilon_0 \sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2} \chi^{(1)}(\mathbf{s}, p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})\mathbf{E}_{p_1,p_2}(\mathbf{s})e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{s},t) :&= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2\, \chi^{(2)}(\mathbf{s},\omega_1,\omega_2)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_2)e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \\ &= \varepsilon_0 \sum_{\substack{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2\\(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2}} \chi^{(2)}(\mathbf{s}, q_1\omega_{I_1} + q_2\omega_{I_2}, (p_1-q_1)\omega_{I_1} + (p_2-q_2)\omega_{I_2}) \\ &\qquad \mathbf{E}_{q_1,q_2}(\mathbf{s})\mathbf{E}_{p_1-q_1,p_2-q_2}(\mathbf{s})e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}.\end{aligned}$$

Définissant toujours $\varepsilon_r^{(1)}(\mathbf{s},\omega) := 1 + \chi^{(1)}(\mathbf{s},\omega)$, l'équation (1.14) :

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) + \partial_t^2 \mathbf{D} = 0 \qquad ((1.14))$$

devient :

$$\begin{aligned}&-\varepsilon_0^{-1} \sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2} e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}\Big\{\nabla \times \big(\mu^{-1}(\mathbf{s}, p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})\nabla \times \mathbf{E}_{p_1,p_2}(\mathbf{s})\big) \\ &\quad + (p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})^2\Big(\varepsilon_r^{(1)}(\mathbf{s}, p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})\mathbf{E}_{p_1,p_2}(\mathbf{s}) \\ &\qquad + \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2} \chi^{(2)}(\mathbf{s}, q_1\omega_{I_1} + q_2\omega_{I_2}, (p_1-q_1)\omega_{I_1} + (p_2-q_2)\omega_{I_2}) \\ &\qquad \mathbf{E}_{q_1,q_2}(\mathbf{s})\mathbf{E}_{p_1-q_1,p_2-q_2}(\mathbf{s})\Big)\Big\} = 0. \qquad (1.35)\end{aligned}$$

Afin de simplifier cette équation, nous introduisons les notations données dans le tableau 1.8 (dans lesquelles le point $\mathbf{s}$ et les pulsations ω_{I_1} et ω_{I_2} du champ incident dichromatique sont sous-entendues).

Avec cette écriture, l'équation (1.35) devient :

$$\begin{aligned}
\lfloor \mathbf{E}_{p_{1_1},p_{2_1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{1_n},p_{2_n}} \rfloor := \quad & \chi^{(n)}(p_{1_1}\omega_{I_1} + p_{2_1}\omega_{I_2}, \cdots, p_{1_n}\omega_{I_1} + p_{2_n}\omega_{I_2}) \\
& \mathbf{E}_{p_{1_1},p_{2_1}} \cdots \mathbf{E}_{p_{1_n},p_{2_n}} \\
\mathcal{M}^{lin}_{p_1,p_2}(\mathbf{E}_{p_1,p_2}) := \quad & -\varepsilon_0^{-1}\nabla \times (\mu^{-1}(p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})\nabla \times \mathbf{E}_{p_1,p_2}) \\
& +(p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})^2\varepsilon_r^{(1)}(p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})\mathbf{E}_{p_1,p_2}
\end{aligned}$$

TAB. 1.8 – Définitions des notations $\lfloor \mathbf{E}_{p_{1_1},p_{2_1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{1_n},p_{2_n}} \rfloor$ et $\mathcal{M}^{lin}_{p_1,p_2}(\mathbf{E}_{p_1,p_2})$.

$$\begin{aligned}
\sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2} & e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}\Big\{\mathcal{M}^{lin}_{p_1,p_2}(\mathbf{E}_{p_1,p_2}) \\
& + (p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})^2 \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2} \lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1,p_2-q_2} \rfloor \Big\} = 0. \qquad (1.36)
\end{aligned}$$

Nous désirons naturellement opérer par la transformée de Fourier inverse, mais il nous faut prendre garde et séparer deux cas (quelques démonstrations sur la théorie des nombres (la plus élémentaire) sont données dans l'annexe C) :

– $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}} \in \mathbb{Q}$, auquel cas les éléments de l'ensemble des $e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}$, lorsque p_1 et p_2 parcourent indépendamment $\mathbb{Z}$, ne sont pas tous différents. Il faut alors changer les indices : de $\{(p_1\omega_{I_1}, p_2\omega_{I_2})\}\big|_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2}$, on passe à :

$$\{\big((bd_2 + c_1)\omega_I, ((a-b)d_1 + c_2)\omega_I\big)\}\big|_{\substack{(a,b)\in\mathbb{Z}^2, \\ 0\leqslant c_1<d_2 \\ 0\leqslant c_2<d_1}}$$

où d_1, d_2 et ω_I sont définis par la propriété 1 p.62. Réécrivons alors $\mathbf{P}^{(2)}$:

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \sum_{\substack{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2}} \lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1,p_2-q_2} \rfloor e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}\Big|_{\substack{p_1=bd_2+c_1 \\ p_2=(a-b)d_1+c_2 \\ q_1=b'd_2+c_1' \\ q_2=(a'-b')d_1+c_2'}} .$$

Puisque, à a, d_1 et d_2 fixés, la pulsation de $\mathbf{E}_{bd_2+c_1,(a-b)d_1+c_2}$ est indépendante de b, il est naturel (même si la rigueur mathématique nous échappe un peu - mais gardons à l'esprit que ceci est "trop" formel : le but est d'introduire de manière naturelle les équations de propagation pouvant être résolues numériquement) de regrouper tous ces termes ; ceci amène à définir

$$\mathbf{E}_{ad_1d_2+c_1d_1+c_2d_2} := \sum_{b\in\mathbb{Z}} \mathbf{E}_{bd_2+c_1,(a-b)d_1+c_2}$$

et

$$\mathcal{M}^{lin}_{ad_1d_2+c_1d_1+c_2d_2} := \sum_{b\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}^{lin}_{bd_2+c_1,(a-b)d_1+c_2}.$$

Aussi, lorsque ω_{I_1} et ω_{I_2} sont fixés, et par conséquent d_1 et d_2, on notera $< a, c_1, c_2 >$ le nombre $ad_1d_2 + c_1d_1 + c_2d_2$. La polarisation au second ordre devient donc :

$$\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \sum_{\substack{(a,a')\in\mathbb{Z}^2\\ 0\leqslant c_1,c_1'<d_2\\ 0\leqslant c_2,c_2'<d_1}} \lfloor \mathbf{E}_{<a',c_1',c_2'>}, \mathbf{E}_{<a-a',c_1-c_1',c_2-c_2'>} \rfloor \, e^{-i<a,c_1,c_2>\omega_I t}.$$

L'équation (1.36) s'écrit alors

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant c_1<d_2\\ 0\leqslant c_2<d_1}} e^{-i<a,c_1,c_2>\omega_I t}\Big\{\mathcal{M}^{lin}_{<a,c_1,c_2>}(\mathbf{E}_{<a,c_1,c_2>}) + (< a, c_1, c_2 > \omega_I)^2 \sum_{\substack{a'\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant c_1'<d_2\\ 0\leqslant c_2'<d_1}} \lfloor \mathbf{E}_{<a',c_1',c_2'>}, \mathbf{E}_{<a-a',c_1-c_1',c_2-c_2'>} \rfloor \Big\} = 0. \tag{1.37}$$

On peut maintenant faire *une* transformée inverse[37] et obtenir, pour des entiers a de $\mathbb{Z}$, c_1 de $[0, \cdots, d_2)$ et c_2 de $[0, \cdots, d_1)$:

$$\mathcal{M}^{lin}_{<a,c_1,c_2>}(\mathbf{E}_{<a,c_1,c_2>}) + (< a, c_1, c_2 > \omega_I)^2 \sum_{\substack{a'\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant c_1'<d_2\\ 0\leqslant c_2'<d_1}} \lfloor \mathbf{E}_{<a',c_1',c_2'>}, \mathbf{E}_{<a-a',c_1-c_1',c_2-c_2'>} \rfloor = 0. \tag{1.38}$$

On remarque que l'équation donnée par $< \tilde{a}, \tilde{c_1}, \tilde{c_2} >$ est le complexe conjugué de celle donnée par $< a, c_1, c_2 >$, où :
- si $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $< \tilde{a}, \tilde{c_1}, \tilde{c_2} >=< -a-2, d_2-c_1, d_1-c_2 >$ [38] ;
- si $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, $< \tilde{a}, \tilde{c_1}, \tilde{c_2} >=< -a-1, 0, d_1-c_2 >$;
- si $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$, $< \tilde{a}, \tilde{c_1}, \tilde{c_2} >=< -a-1, d_2-c_1, 0 >$;

[37] Il fallait exhiber une base de l'algèbre du groupe libre $\mathbb{Z}$, afin de regrouper tous les e^{-iqt} pour un q fixé. On y est parvenu puisque tous les $e^{-i<a,c_1,c_2>\omega_I t}$ sont différents, lorsque a, c_1 et c_2 sont limités à leur ensemble de définition, et lorsque d_1 et d_2 sont définis (de manière unique) par la propriété 1. Schématiquement, on a donc l'ensemble des $< a, c_1, c_2 >$ qui forme une partition du réseau $\mathbb{Z}$, et b qui comptait la "dégénérescence" de l'ensemble $\{(p_1\omega_{I_1}, p_2\omega_{I_2})\}\big|_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2}$.

[38] Ces correspondances, ainsi que les suivantes, paraissent peu naturelles ; elles sont dues aux exigences $0 \leqslant \underline{c_1} \leqslant d_2$ et $0 \leqslant \underline{c_2} \leqslant d_1$ dans l'écriture de $< \underline{a}, \underline{c_1}, \underline{c_2} >$, donc à $0 \leqslant d_2 - c_1 \leqslant d_2$ et $0 \leqslant d_1 - c_2 \leqslant d_1$.

– si $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $< \tilde{a}, \tilde{c_1}, \tilde{c_2} >=< -a, 0, 0 >$.
Par conséquent, on ne s'intéressera qu'au cas où $< a, c_1, c_2 >$ est positif, et l'on utilisera la relation $\mathbf{E}_{<\tilde{a},\tilde{c_1},\tilde{c_2}>} = \overline{\mathbf{E}_{<a,c_1,c_2>}}$ pour déduire les autres composantes.

– $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, auquel cas tous les $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2}$ sont différents lorsque p_1 et p_2 parcourent $\mathbb{Z}$, et *deux* transformées de Fourier inverses sur (1.36) donnent, pour tout couple (p_1, p_2) de $\mathbb{Z}^2$, l'équation suivante :

$$\mathcal{M}^{lin}_{p_1,p_2}(\mathbf{E}_{p_1,p_2}) + (p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})^2 \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2} \lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1,p_2-q_2} \rfloor = 0. \tag{1.39}$$

On remarque que l'équation donnée par le couple $(-p_1, -p_2)$ est le complexe conjuguée de celle donnée par le couple (p_1, p_2) ; par conséquent, on ne s'intéressera dorénavant qu'au cas où $p_1 + p_2$ est non-négatif, et l'on utilisera la relation $\mathbf{E}_{-p_1,-p_2} = \overline{\mathbf{E}_{p_1,p_2}}$ pour déduire les autres composantes.

propriété 1. *Diverses écritures d'un nombre rationnel*
À un nombre rationnel $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}}$ donné, tel que ω_{I_1} et ω_{I_2} soient tous deux positifs, il existe un et un seul triplet $(\omega_I, d_1, d_2) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} \omega_{I_1} = d_1\omega_I \\ \omega_{I_2} = d_2\omega_I \\ d_1 \wedge d_2 = 1. \end{cases}$$

Cette propriété montre que le cas où $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}}$ est rationnel se ramène à un champ harmonique, dans le sens où le spectre de Fourier ne contient que des multiples de ω_I ; cette pulsation ω_I est en quelque sorte le plus grand diviseur commun de ω_{I_1} et ω_{I_2} (elle l'est véritablement si ces deux nombres sont des entiers).

Détaillons quelques exemples afin de mieux cerner l'équation (1.38). Pour vérifier la consistence avec la cas où le champ incident est monochromatique, choisissons $\omega_{I_1} = \omega_{I_2} =: \omega_I$. On a alors $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ et $\omega_I = \omega_I$, et l'on en déduit que c_1 et c_2 sont réduits à zéro. L'équation devient alors, pour tout entier a :

$$\mathcal{M}^{lin}_a(\mathbf{E}_a) + (a\omega_I)^2 \sum_{a'\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_{a'}, \mathbf{E}_{a-a'} \rfloor = 0$$

et l'on retrouve, après un changement d'indice, l'équation (1.18).

Dans un cas moins trivial, on peut, sans perte de généralité, supposer que $\omega_{I_1} < \omega_{I_2}$. Intuitivement, on imagine que si le rapport des deux fréquences du champ incident est très différent de l'unité, alors, en quelque sorte, les composantes générées par $\mathbf{E}^i_{I_1}$ ne verront pas celles générées par $\mathbf{E}^i_{I_2}$. En d'autres termes, le nombre de cascades nécessaires pour que la non-linéarité crée une haute harmonique de ω_{I_1}, donc correspondant à une pulsation proche de ω_{I_2}, étant élevé, la valeur des tenseurs de susceptibilité associés (i.e., du type $\chi^{(2)}(\omega_{I_2}, N\omega_{I_1})$, avec N un "grand" nombre entier -

dans la pratique, on voit que cinq est déjà grand et l'on prendra comme exemple un rapport $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}}$ égale à trois) est faible.

Choisissons ainsi $d_1 = 1$ et $d_2 = 3$. On a donc $\omega_{I_1} = \omega_I$ et $\omega_{I_2} = 3\omega_I$, $c_1 \in \{0, 1, 2\}$ et $c_2 = 0$. L'équation (1.38) devient donc

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}^{lin}_{3a+c_1}(\mathbf{E}_{3a+c_1})\\&\quad + \big((3a+c_1)\omega_I\big)^2 \sum_{\substack{a'\in\mathbb{Z}\\0\leqslant c_1'<3}} \lfloor \mathbf{E}_{3a'+c_1'}, \mathbf{E}_{3(a-a')+c_1-c_1'}\rfloor = 0.\end{aligned}$$

On reprendra cet exemple par la suite. Auparavant, comme dans le cas monochromatique, nous voulons donner une méthode permettant d'exhiber un système *fini* approximant les systèmes (1.38) et (1.39).

1.6.2 Degré de l'approximation des équations de propagation

La définition suivante est une généralisation immédiate de la définition (1), donnée page 40, lorsque le champ incident est dichromatique, et laisse facilement prévoir celle qui conviendrait d'adapter dans le cas où le champ incident oscillerait à un nombre k de fréquences :

définition 2. *le degré d d'approximation à l'ordre n d'un champ dichromatique*

$$\begin{aligned}d := \min_{\underline{d}\in\mathbb{N}}\{&||(p_{1_1}, p_{1_2}, \cdots, p_{n_1}, p_{n_2})||_{l_1(\mathbb{Z})} > \underline{d}\\&\Rightarrow \chi^{(n)}(\mathbf{s}; p_{1_1}\omega_{I_1} + p_{1_2}\omega_{I_2}, \cdots, p_{n_1}\omega_{I_1} + p_{n_2}\omega_{I_2}) = 0, \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3\}\end{aligned}$$

La justification de cette définition sera donnée dans une prochaine sous-section.

Degré un (équations linéaires)

Le cas $d = 1$ est trivial :

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,0}(\mathbf{E}_{1,0}) = 0, \tag{1.40a}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,1}(\mathbf{E}_{0,1}) = 0. \tag{1.40b}$$

Les champs aux pulsations ω_{I_1} et ω_{I_2} "vivent" alors indépendamment l'un de l'autre.

Degré deux (générations de somme et de différence de fréquences)

Lorsque d vaut deux, on a le système d'équations

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,0}(\mathbf{E}_{1,0}) = 0, \tag{1.41a}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,1}(\mathbf{E}_{0,1}) = 0, \tag{1.41b}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2,0}(\mathbf{E}_{2,0}) + (2\omega_{I_1})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{1,0} \rfloor = 0, \tag{1.41c}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,2}(\mathbf{E}_{0,2}) + (2\omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{0,1}, \mathbf{E}_{0,1} \rfloor = 0, \tag{1.41d}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,1}(\mathbf{E}_{1,1}) + 2(\omega_{I_1} + \omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{0,1} \rfloor = 0, \tag{1.41e}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{-1,1}(\mathbf{E}_{-1,1}) + 2(-\omega_{I_1} + \omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{-1,0}, \mathbf{E}_{0,1} \rfloor = 0, \tag{1.41f}$$

où l'on a supposé que $\omega_{I_1} < \omega_{I_2}$. Les phénomènes décrits par ces équations sont, outre la génération de seconde harmonique pour ω_{I_1} (eq. 1.41c) comme pour ω_{I_2} (eq. 1.41d), les générations de somme de fréquences (eq. 1.41e) et de différences de fréquences (eq. 1.41f). Remarquons que ce système a, comme dans le cas d'un champ monochromatique au degré deux, une non-linéarité triviale, dans le sens où on peut exhiber la solution en ne résolvant que des équations linéaires.

Appliquons ceci au cas, déjà étudié, où $\omega_{I_1} = \omega_I$ et $\omega_{I_2} = 3\omega_I$. L'intérêt est, évidemment, que dans ce cas, on a $2\omega_{I_1} = \omega_{I_2} - \omega_{I_1}$, et ainsi la seconde harmonique associée à ω_{I_1} oscille à la même fréquence que la composante générée par la différence de fréquences. En reprenant les notations du paragraphe précédent, on a donc :

$$\mathcal{M}^{lin}_{1}(\mathbf{E}_1) = 0, \tag{1.42a}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \big(\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor + 2 \lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_3 \rfloor \big) = 0, \tag{1.42b}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{3}(\mathbf{E}_3) = 0, \tag{1.42c}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{4}(\mathbf{E}_4) + 2(4\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3 \rfloor = 0, \tag{1.42d}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{6}(\mathbf{E}_6) + (6\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3 \rfloor = 0. \tag{1.42e}$$

On remarque que ce système ne correspond à aucune approximation (aucun degré) du cas monochromatique où le champ incident oscillerait à la fréquence ω_I. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'il exclut, par exemple, toute rétroaction des harmoniques sur la composante $\mathbf{E}_1$. Nous donnerons, à la page 163, une autre définition

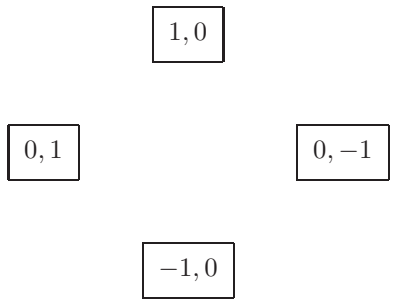


FIG. 1.1 – Γ_1, le graphe associé au champ total en degré un.

du degré[39]. Mais même avec cette définition alternative, ce système ne correspond à aucune approximation du cas monochromatique (on peut encore regarder l'équation (1.42a)).

Approche intuitive du degré

La définition 2 du degré étant probablement abrupte pour la plupart des lecteurs, nous voulons donner une méthode qui permet de trouver un système d'équations à un ordre et à un degré arbitraires donnés. Cette approche intuitive apporte également la raison physique de notre définition. Un graphe construit par induction s'avère utile à la visualisation de ce que l'on entend par degré.

Pour simplifier la discussion, nous supposons, dans un premier temps, que $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}}$ est irrationnel. Les dégénérescences éventuelles à traiter dans le cas contraire sont immédiates, et seront illustrées par des exemples.

Le degré un correspond au champ qui oscille aux fréquences du champ incident ; on a donc $\mathbf{E} = 2\Re e\{\mathbf{E}_{1,0} + \mathbf{E}_{0,1}\}$. Le graphe Γ_1 est représenté dans la figure 1.1.

Puisque le matériau est non-linéaire, les composantes du champ interagissent entre elles et de nouvelles fréquences apparaissent. Ces fréquences sont, par définition du degré deux, les "premières interactions", au sens où elles sont déterminées par les sommes d'exactement deux éléments associés aux sommets de Γ_1. La somme des fréquences $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2}$ et $q_1\omega_{I_1} + q_2\omega_{I_2}$ est représentée par une arête reliant les sommets p_1, p_2 et q_1, q_2. Les fréquences présentes dans le champ total au degré deux sont donc associées aux sommets et aux arêtes de Γ_2. À la fin, on supprime les interactions qui font apparaître la composante nulle.

On définit le graphe Γ_3 de la manière suivante : l'ensemble de ses sommets est l'ensemble des objets marqués[40] de Γ_2. Il y a donc les fréquences présentes dans le

[39]Le degré est la notion permettant de passer d'un système infini d'équations à un système fini. Tout l'arbitraire de la troncature est dans le choix de cette définition ; s'il ne peut y avoir d'arguments permettant d'affirmer que ce passage est unique, nous pensons que la définition que l'on donne dans ce chapitre est la plus pertinente d'un point de vue physique. La présence d'un point de vue alternatif est néanmoins préférable lors des simulations numériques : en effet, contrairement à la définition alternative, le système physique perd forcément de l'énergie électrique si l'on utilise la définition introduite dans ces pages.

[40]Par objet marqué, on entend tout sommet ou toute arête associés à une fréquence $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2}$. Dans le graphe, un sommet marqué est noté p_1, p_2 et le même sigle p_1, p_2 est adjacent à une arête marquée.

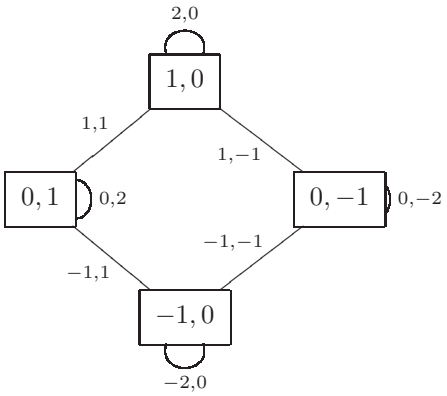


FIG. 1.2 – Γ_2, le graphe associé au champ total en degré deux.

champ incident, que l'on encadrera dans une boîte rectangulaire, et celles générées lors des premières interactions (i.e., à l'ordre deux), que l'on encerclera. Ensuite, on relie un sommet du premier type à un sommet du deuxième type si leur interaction génère une nouvelle fréquence[41]. Sur l'arête reliant les sommets p_1, p_2 et q_1, q_2 on marque $p_1 + q_1, p_2 + q_2$, correspondant à la fréquence $(p_1 + q_1)\omega_{I_1} + (p_2 + q_2)\omega_{I_2}$. On obtient alors le graphe de la figure 1.3.

Il est apparent sur ce graphe qu'il y a plusieurs moyens de créer la même harmonique : par exemple, l'harmonique $2\omega_{I_1} + \omega_{I_2}$ est générée lors de l'interaction entre $\mathbf{E}_{1,1}$ et $\mathbf{E}_{1,0}$, ou de celle entre $\mathbf{E}_{2,0}$ et $\mathbf{E}_{0,1}$.

Le graphe Γ_3 décrit donc les interactions présentes en degré trois mais pas en degré deux. Pour écrire les équations, il faut donc prendre en compte toutes les interactions décrites sur Γ_2 et sur Γ_3.

On imagine que le lecteur pourra sans difficulté dessiner le graphe Γ_4 ; mais, encore une fois, nous supposons qu'il vaut mieux, pour décrire les générations de troisième et quatrième harmoniques, quitter l'ordre deux et atteindre l'ordre trois (puis quatre). C'est ce que nous allons faire dans la prochaine section. Pour finir, on note qu'à l'ordre N, les arrêtes de l'hypergraphe Γ_d relient N sommets.

1.6.3 Non-linéarité du troisième ordre

Nous voulons les équations de propagation à l'ordre trois, i.e., le vecteur polarisation se développe maintenant selon :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)}.$$

Il y a deux raisons pour s'intéresser à ce développement : la cohérence interne à ce chapitre d'une part, et leur utilité pour l'étude des résonances non-harmoniques que peuvent présenter un matériau (étude réalisée dans la prochaine section).

Lorsque d vaut deux, tous les objets de Γ_d sont marqués.

[41] Après avoir lu la phrase suivante, on comprend que les sommets p_1, p_2 et q_1, q_2 sont reliés si et seulement si les signes de p_1 et de q_1 d'un côté, et de p_2 et q_2 de l'autre, sont identiques.

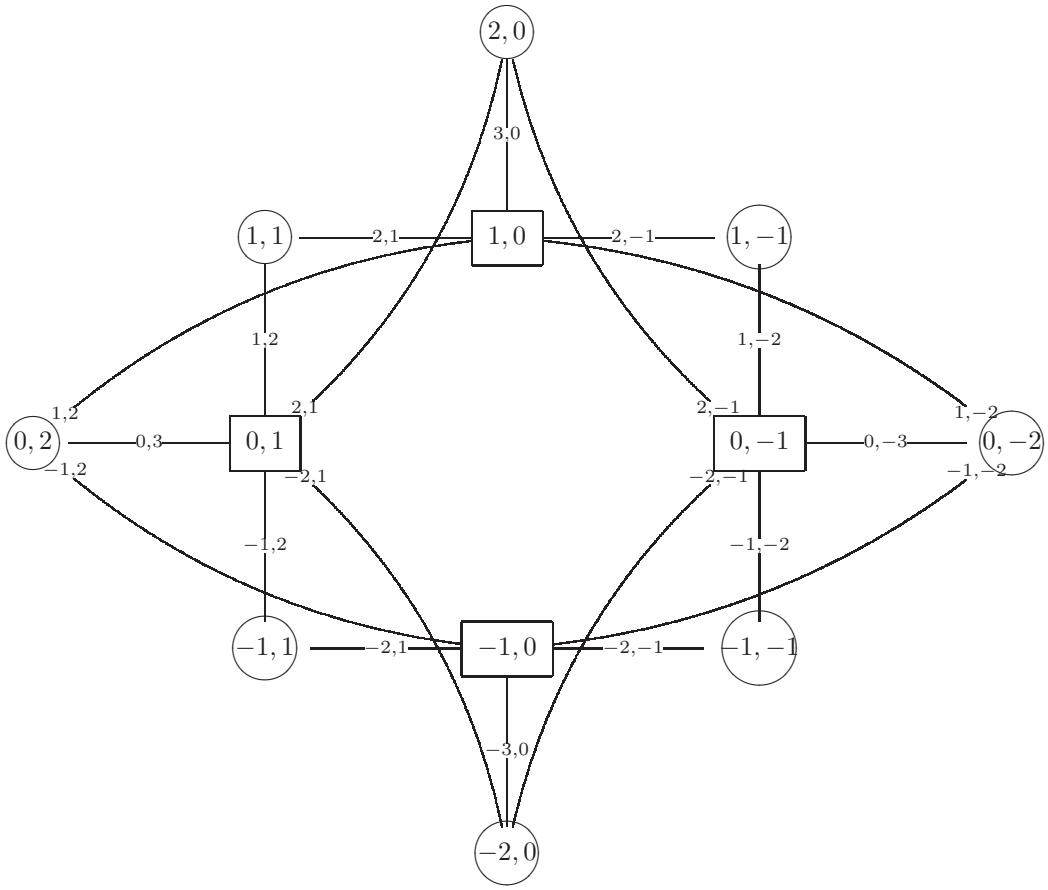


FIG. 1.3 – Γ_3, le graphe associé au champ total en degré trois.

Avec les écritures issues du tableau 1.8, nous avons :

$$\mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{s},t) := \varepsilon_0 \sum_{\substack{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2\\(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2\\(r_1,r_2)\in\mathbb{Z}^2}} \lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{r_1,r_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1-r_1,p_2-q_2-r_2} \rfloor e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}.$$

et par conséquent l'équation (1.14) s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2} & e^{-i(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})t}\Big\{\mathcal{M}^{lin}_{p_1,p_2}(\mathbf{E}_{p_1,p_2})\\ &+(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})^2 \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2}\Big(\lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1,p_2-q_2}\rfloor\\ &+\sum_{(r_1,r_2)\in\mathbb{Z}^2}\lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{r_1,r_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1-r_1,p_2-q_2-r_2}\rfloor\Big)\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{1.43}$$

– si $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}} \in \mathbb{Q}$, l'équation de propagation de la composante oscillant à la pulsation $(ad_1d_2 + c_1d_1 + c_2d_2)\omega_I$ est :

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}^{lin}_{<a,c_1,c_2>}(\mathbf{E}_{<a,c_1,c_2>})\\ &+(<a,c_1,c_2>\omega_I)^2 \sum_{\substack{a'\in\mathbb{Z}\\0\leqslant c'_1<d_2\\0\leqslant c'_2<d_1}}\Big(\lfloor \mathbf{E}_{<a',c'_1,c'_2>}, \mathbf{E}_{<a-a',c_1-c'_1,c_2-c'_2>}\rfloor\\ &+\sum_{\substack{a"\in\mathbb{Z}\\0\leqslant c"_1<d_2\\0\leqslant c"_2<d_1}}\lfloor \mathbf{E}_{<a',c'_1,c'_2>}, \mathbf{E}_{<a",c"_1,c"_2>}, \mathbf{E}_{<a-a'-a",c_1-c'_1-c"_1,c_2-c'_2-c"_2>}\rfloor\Big) = 0.\end{aligned} \tag{1.44}$$

– $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_1}} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, auquel cas l'équation de propagation de la composante oscillant à la pulsation $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2}$ est :

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}^{lin}_{p_1,p_2}(\mathbf{E}_{p_1,p_2})\\ &+(p_1\omega_{I_1}+p_2\omega_{I_2})^2 \sum_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Z}^2}\Big(\lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1,p_2-q_2}\rfloor\\ &+\sum_{(r_1,r_2)\in\mathbb{Z}^2}\lfloor \mathbf{E}_{q_1,q_2}, \mathbf{E}_{r_1,r_2}, \mathbf{E}_{p_1-q_1-r_1,p_2-q_2-r_2}\rfloor\Big) = 0.\end{aligned} \tag{1.45}$$

Continuons l'exemple où $\omega_{I_1} = \omega_I$ et $\omega_{I_2} = 3\omega_I$. Nous savons que la non-linéarité d'ordre N n'apparaît pas dans les équations de degré d si $d < N$. Il nous faut donc étudier le degré trois.

À l'ordre deux, la relation $2\omega_{I_1} = \omega_{I_2} - \omega_{I_1}$ implique une dégénérescence : la seconde harmonique associée à ω_{I_1} oscille à la même fréquence que la composante générée par la différence de fréquences (équation ((1.42b))). Au degré trois, de nombreux effets se superposent ; on les résume dans les relations suivantes : $\omega_{I_2} - \omega_{I_1} - \omega_{I_1} = \omega_{I_1}$ pour (1.46a), $\omega_{I_1} + 2\omega_{I_1} = \omega_{I_2}$ et $\omega_{I_1} + \omega_{I_1} + \omega_{I_1} = \omega_{I_2}$ pour (1.46c), $\omega_{I_1} + \omega_{I_1} + \omega_{I_2} = -\omega_{I_1} + \omega_{I_2} + \omega_{I_2}$ pour (1.46h),

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_{-2}, \mathbf{E}_3\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_{-3}, \mathbf{E}_4\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_3\rfloor + 6\lfloor \mathbf{E}_{-3}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3\rfloor\Big) = 0, \tag{1.46a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2\big(\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-1}\rfloor\big) = 0, \tag{1.46b}$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_4\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_{-3}, \mathbf{E}_6\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-3}, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3\rfloor + 6\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3\rfloor\Big) = 0, \tag{1.46c}$$

$$\mathcal{M}_4^{lin}(\mathbf{E}_4) + (4\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3\rfloor = 0, \tag{1.46d}$$

$$\mathcal{M}_5^{lin}(\mathbf{E}_5) + (5\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_4\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_6\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3\rfloor\Big) = 0, \tag{1.46e}$$

$$\mathcal{M}_6^{lin}(\mathbf{E}_6) + (6\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3\rfloor = 0, \tag{1.46f}$$

$$\mathcal{M}_7^{lin}(\mathbf{E}_7) + (7\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_6\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3\rfloor\Big) = 0, \tag{1.46g}$$

$$\mathcal{M}_9^{lin}(\mathbf{E}_9) + (9\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_6\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3\rfloor\Big) = 0. \tag{1.46h}$$

Pour trouver tous les termes d'ordre deux, nous conseillons au lecteur d'adapter les graphes Γ_2 et Γ_3 à ce cas de figure. En ce qui concerne l'ordre trois, on peut vérifier que les différents triplets $\big((p_{1_1}, p_{1_2}), (p_{2_1}, p_{2_2}), (p_{3_1}, p_{3_2})\big)$ intervenant dans la définition du degré sont :

- $\big((0,-1),(0,1),(1,0)\big)$ contribuant à la composante ω_I ;
- $\big((0,-1),(0,1),(0,1)\big)$ contribuant à la composante $3\omega_I$;
- $\big((-1,0),(-1,0),(0,1)\big)$ contribuant à la composante ω_I ;
- $\big((-1,0),(1,0),(1,0)\big)$ contribuant à la composante ω_I ;
- $\big((-1,0),(1,0),(0,1)\big)$ contribuant à la composante $3\omega_I$;
- $\big((-1,0),(0,1),(0,1)\big)$ contribuant à la composante $5\omega_I$;

– $\big((1,0),(1,0),(1,0)\big)$ contribuant à la composante $3\omega_I$;
– $\big((1,0),(1,0),(0,1)\big)$ contribuant à la composante $5\omega_I$;
– $\big((1,0),(0,1),(0,1)\big)$ contribuant à la composante $7\omega_I$;
– $\big((0,1),(0,1),(0,1)\big)$ contribuant à la composante $9\omega_I$;

Que le lecteur ne se méprenne pas, il s'agit bien d'un système *à l'ordre trois* et au degré trois. La neuvième harmonique qui apparaît ne résulte que de la génération de troisième harmonique de la fréquence $\omega_{I_2} = 3\omega_I$ présente dans le champ incident $\mathbf{E}^i(\mathbf{s},t) = 2\Re e\{\mathbf{E}^i_{\mathcal{I}}(\mathbf{s})e^{-i\omega_I t} + \mathbf{E}^i_{\mathcal{3}}(\mathbf{s})e^{-3i\omega_I t}\}$.

Encore une fois, on admet que même si la résolution numérique de ce système serait plus fastidieuse que difficile, on ne peut se contenter de pareilles généralités, et il serait plus pertinent de se concentrer sur tel ou tel effet (par exemple, dans ce cas, ceux provenant des dégénérescences).

1.7 L'effet Raman

Nous avons évoqué l'effet Pockels ; nous avons obtenu les équations de propagation du champ total dans l'hypothèse harmonique et ainsi étudié l'effet Kerr optique, la génération de seconde, troisième et quatrième harmoniques ; la section précédente présentait le formalisme décrivant les mélanges à plusieurs ondes. Nous envisageons maintenant d'entamer le dernier chantier : nous extirper des réponses harmoniques. Nous pourrons alors simuler, *d'un point de vue purement électromagnétique*, les effets Raman, Brillouin ou paramétriques.

Précisons ce que nous entendons par "d'un point de vue purement électromagnétique" : les champs qui nous intéressent sont à l'échelle mésoscopique, échelle à laquelle la matière est homogène ; autrement dit, notre modèle ignore qu'elle est constituée d'atomes, et ne peut par conséquent, avoir recours à la mécanique quantique (ni même à une théorie semi-classique) pour donner les tenseurs $\chi^{(n)}$ et μ qui décrivent la réponse du matériau. *On se les donne donc* a priori *et l'origine de leurs résonances ne nous concerne pas*. Par conséquent les effets paramétriques, Brillouin et Raman seront décrits simultanément ; par simplicité, on ne parlera plus que d'effet Raman[42].

La nouveauté est donc de supposer que le matériau a une[43] fréquence de résonance, notée ω_s. On a donc :

$$\big\{\exists j \in \{1,\cdots,n\} \ : \ \omega_j \neq p\omega_I + q\omega_s \ \forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2\big\} \Rightarrow \chi^{(n)}(\omega_1,\cdots,\omega_n) = 0.$$

On suppose immédiatement un développement à l'ordre trois du vecteur polarisation. En considérant les multiples effets de cascade, le champ total se récrit selon (1.34) avec $\omega_{I_1} = \omega_I$ (la pulsation du champ incident) et $\omega_{I_2} = \omega_s$. Ceci conduit donc à l'équation de propagation (1.43) et donc à (1.44) ou à (1.45) selon que $\frac{\omega_I}{\omega_s}$ est rationnel ou non.

[42] Nous ne donnerons ici que les équations de propagation des composantes de Fourier, et nous ne parlerons pas d'énergie - car dans ce cas ces processus diffèrent. On pourra se reporter à [50] pour ces questions.

[43] Nous parlons de l'effet Raman spontané ; il existe un autre effet, portant le nom d'effet Raman stimulé, qui fait intervenir trois fréquences différentes. Bien que le système ne serait que fastidieux à obtenir, nous ne le ferons pas ici.

Les effets intéressants apparaissent dès que l'on prend en compte le degré (défini de la même manière qu'avec un champ incident dichromatique). Suivant notre habitude, nous énumérons les équations pour les plus basses valeurs du degré.

Degré un (équations linéaires)

Le cas $d = 1$ donne :

$$\mathcal{M}_{1,0}^{lin}(\mathbf{E}_{1,0}) = 0, \tag{1.47a}$$

$$\mathcal{M}_{0,1}^{lin}(\mathbf{E}_{0,1}) = 0. \tag{1.47b}$$

La différence avec la section précédente est que $\mathbf{E}_{0,1}$ n'a pas de source. Il est donc nul : on retrouve donc que l'effet Raman exige des matériaux électromagnétiquement non-linéaires.

Degré deux

S'il n'y a pas de dégénérescence accidentelle, on se retrouve dans le même cas que pour le degré un : $\mathbf{E}_{0,1}$ n'a pas de source dans le système d'équation (1.41), il s'annule et ledit système se simplifie à l'étude de la génération de seconde harmonique pour $\mathbf{E}_{1,0}$. Plus généralement, on s'aperçoit que la source de $\mathbf{E}_{0,1}$ est nulle si seuls des effets d'ordre deux sont pris en compte. On retrouve encore que l'effet Raman n'est pas un effet d'ordre deux. Plus généralement, remarquons que ce que l'on vient de comprendre pour le $\chi^{(2)}$ s'applique à tous les ordres pairs :

> *sans dégénérescence accidentelle, si le champ incident n'oscille qu'à la fréquence ω_I, et si ω_s est une fréquence de résonance du matériau, seules les non-linéarités d'ordre impaires peuvent engendrer un champ oscillant à la pulsation $p\omega_I + q\omega_s$, avec q non-nul.*

Par rapport au système (1.41), quelle dégénérescence peut arriver ? Il y en a deux : $\mathbf{E}_{0,1} = \mathbf{E}_{1,-1}$, i.e., $2\omega_s = \omega_I$, et $\mathbf{E}_{0,1} = \mathbf{E}_{2,0}$, i.e., $\omega_s = 2\omega_I$. Le premier cas, qui permet de décrire la génération de sous-harmonique, est fondamental. On donne alors le système d'équations :

$$\mathcal{M}_{1/2}^{lin}(\mathbf{E}_{1/2}) + 2(\omega_I/2)^2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1/2}\rfloor = 0, \tag{1.48a}$$

$$\mathcal{M}_{1}^{lin}(\mathbf{E}_{1}) + \omega_I^2\lfloor \mathbf{E}_{1/2}, \mathbf{E}_{1/2}\rfloor = 0, \tag{1.48b}$$

$$\mathcal{M}_{3/2}^{lin}(\mathbf{E}_{3/2}) + 2(3\omega_I/2)^2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{1/2}\rfloor = 0, \tag{1.48c}$$

$$\mathcal{M}_{2}^{lin}(\mathbf{E}_{2}) + (2\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{1}\rfloor = 0. \tag{1.48d}$$

On remarque que la génération de seconde harmonique apparaît simultanément à la génération d'une composante oscillant à la pulsation $\omega_I/2$.

L'autre dégénérescence n'est, à notre avis, pas intéressante, puisque la génération de seconde harmonique est à traiter selon avec le système (1.20) exposé à la section 1.3. Celui que l'on obtient ici lui ne lui est pas équivalent :

$$\mathcal{M}_{1}^{lin}(\mathbf{E}_{1}) + 2(\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1}\rfloor = 0,$$

$$\mathcal{M}_{2}^{lin}(\mathbf{E}_{2}) + (2\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{1}\rfloor = 0,$$

$$\mathcal{M}_{3}^{lin}(\mathbf{E}_{3}) + 2(3\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{1}\rfloor = 0,$$

$$\mathcal{M}_{4}^{lin}(\mathbf{E}_{4}) + (4\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{2}\rfloor = 0.$$

Degré trois (apparition de l'effet Raman)

À partir de l'énumération qui suit le système (1.46), on déduit immédiatement le système suivant, où pour (1.50j), (respectivement (1.50k) puis (1.50l)), on suppose que $\omega_s > \omega_I$ (respectivement $2\omega_s > \omega_I$ et $2\omega_I > \omega_s$ - mais rappelons que la seule justification de ces hypothèses est de présenter les équations de propagation des composantes associées à des fréquences positives) :

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,0}(\mathbf{E}_{1,0}) + \omega_I^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{2,0}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{0,-1}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,-1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 6\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor\Big) = 0, \quad (1.50a)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2,0}(\mathbf{E}_{2,0}) + (2\omega_I)^2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor = 0, \quad (1.50b)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{3,0}(\mathbf{E}_{3,0}) + (3\omega_I)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{2,0}\rfloor + \lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor\Big) = 0, \quad (1.50c)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,1}(\mathbf{E}_{0,1}) + (\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{0,2}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{-1,0}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{-1,1},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 6\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad (1.50d)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,2}(\mathbf{E}_{0,2}) + (2\omega_s)^2\lfloor\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor = 0, \quad (1.50e)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,3}(\mathbf{E}_{0,3}) + (3\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,2}\rfloor + \lfloor\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad (1.50f)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,1}(\mathbf{E}_{1,1}) + 2(\omega_I + \omega_s)^2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor = 0, \quad (1.50g)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2,1}(\mathbf{E}_{2,1}) + (2\omega_I + \omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{2,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad (1.50h)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,2}(\mathbf{E}_{1,2}) + (\omega_I + 2\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{0,2},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad (1.50i)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{-1,1}(\mathbf{E}_{-1,1}) + 2(-\omega_I + \omega_s)^2\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor = 0, \quad (1.50j)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{-1,2}(\mathbf{E}_{-1,2}) + (-\omega_I + 2\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{0,2}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{-1,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad (1.50k)$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2,-1}(\mathbf{E}_{2,-1}) + (2\omega_I - \omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{2,0},\mathbf{E}_{0,-1}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,-1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor\Big) = 0. \quad (1.50l)$$

Les composantes les plus intéressantes sont $\mathbf{E}_{0,1}$ et $\mathbf{E}_{2,-1}$, qui décrivent respectivement le comportement de l'oscillation à ω_s et l'effet CARS (pour Coherent Anti-Stokes Raman Scattering) ; le reste n'a été écrit que pour la cohérence de la démarche. Lorsque ω_s est supérieur à ω_I, le champ $\mathbf{E}_{0,1}$ émis est plus énergétique que le champ incident[44] : on parle alors de composante anti-Stokes ; lorsque ω_s est inférieur à ω_I, le milieu a pompé de l'énergie, et l'on parle alors de composante Stokes.

La composante CARS, très utilisée en spectroscopie, a trois sources : $\lfloor \mathbf{E}_{2,0}, \mathbf{E}_{0,-1} \rfloor$, $\lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{1,-1} \rfloor$ et $\lfloor \mathbf{E}_{0,-1}, \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{1,0} \rfloor$. Pourtant, à notre connaissance, seule celle de degré trois est considérée dans la littérature. Nous nous étonnons que les cascades soient négligées.

Nous pouvons aussi supposer que ω_s est une sous-harmonique. Dans ce cas il faut prendre garde : si des dégénérescences apparaissent (du type $\omega_s + \omega_s + \omega_s = \omega_I$), il faut changer les équations d'une manière similaire à celle utilisée dans l'exemple où ω_{I_1} valait ω_I et ω_{I_2}, $3\omega_I$, ou dans l'exemple où l'on avait $\omega_s + \omega_s = \omega_I$.

1.8 Notre approche de l'optique non-linéaire

Pour écrire franchement, une question m'obsède : pourquoi, puisque l'optique non-linéaire a une cinquantaine d'années, sommes-nous les premiers, à notre connaissance, à avoir écrit les équations de propagation telles que (1.26) ou (2.1) - la seconde, qui est le pendant continu de la première, apparaîtra dans le prochain chapitre ? Ou encore, pourquoi, malgré toute l'estime que nous avons pour nos collègues et nos prédécesseurs, n'avons-nous trouvé nulle part une notion similaire à ce que nous appelons le degré ? Cette notion est pourtant essentielle à nos yeux, puisqu'elle permet de fixer une *méthode* rendant fini le système d'équations à résoudre. En demandant au lecteur de nous excuser le caractère schématique, voire caricatural de ce qui suit, caractère évidemment dicté par l'étendue du sujet, nous tentons, dans les prochaines lignes, d'expliquer comment nous avons pu nous démarquer, pratiquement dès les premières pages de ce chapitre.

Il me semble que la raison principale est la différence de méthodes : nous n'avons trouvé personne dans ce domaine qui ait privilégié la méthode analytique. Ayant peine à croire que ceci n'ait été réalisé, nous supposons qu'il s'agit là d'un défaut de diffusion. En simplifiant à l'extrême, nous avons l'impression que les physiciens voulaient décrire un effet, et "arrangeaient" les équations de Maxwell pour prendre en compte ce phénomène. Ceci est la méthode synthétique, dans le sens où elle exige trois données initiales : les lois gouvernant les champs électromagnétiques mésoscopiques, des relations de constitutions particulières à un matériau, et l'effet en question.

Si l'on peut parier que notre approximation concorde fortement avec la leur dans la plupart des cas (et si elles diffèrent, il est entendu que l'expérience doit en invalider au moins une), l'intérêt de notre travail réside principalement en la démonstration que les équations de Maxwell portent en elles une bonne partie, si ce n'est l'intégralité,

[44] Cet argument est issu de la mécanique quantique, où l'énergie d'une particule est proportionnelle à la pulsation de l'onde associée.

des effets non-linéaires observés (confère l'annexe D). En effet, ce sont ces équations qui, ne formant pas un système clos, nous ont obligé à écrire les relations constitutives générales que nous avons posées. Il n'y a donc qu'une donnée initiale[45]. Évidemment, nous nous sommes concentrés par la suite sur un certain type de matériau, mais nous ne voyons là que notre incapacité à étudier les relations constitutives dans toute leur généralité. Lorsqu'elle sera achevée, cette méthode analytique devrait permettre la description de *tous* les effets de l'optique mésoscopique non-linéaire. Pour l'heure, nous ne connaissons d'effet, suffisamment maîtrisé pour être contenu en une forme mathématique claire, qui ne puisse être décrit par notre procédure ; mais l'étendue de ce domaine et ses avancées permanentes nous incitent à la plus grande prudence. En outre, nous sommes bien conscients de la complexité de notre méthode, dès qu'elle s'attache à décrire la génération de très hautes harmoniques, les processus incohérents, les cas où le champ incident contient de nombreuses fréquences... Enfin, elle est, à l'heure actuelle, incomplète, puisque nous n'avons trouvé de moyens de résoudre l'équation de propagation dans le domaine temporel que nous exposons au prochain chapitre.

Nous ne connaissons de mathématiciens qui se soient spécialement intéressés aux équations que nous posons (ni même, en ajoutant d'autres hypothèses ; par exemple l'effet Kerr-optique décrit par l'équation (1.31)). Par conséquent, qu'étudient les mathématiciens ? Nous dirons qu'il y a deux sujets fort développés : le cas où une approximation paraxiale est utilisée (nous y reviendrons), et le cas où l'on remplace l'opérateur de Maxwell linéaire de composante p

$$\mathcal{M}_p^{lin} \,:\, \mathbf{E}_p \mapsto -\varepsilon_0^{-1}\nabla\times(\mu^{-1}(p\omega_I)\nabla\times\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)^2\varepsilon_r^{(1)}(p\omega_I)\mathbf{E}_p,$$

qui est un opérateur différentiel d'ordre deux, par l'opérateur

$$\mathcal{M}_{p,\,app}^{lin} \,:\, \mathbf{E}_p \mapsto -\varepsilon_0^{-1}\partial_z(\mu^{-1}(p\omega_I)\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)\varepsilon_r^{(1)}(p\omega_I)\mathbf{E}_p,$$

d'ordre un. Cette hypothèse, ou une légère variante selon le contexte, se trouve par exemple dans [74], [75], mais aussi chez certains expérimentateurs ([76]).

Une autre approximation, fort appréciée il y a quelques années ([49], [50], [8], [77], etc., ou [78] pour un article très récent), mais qui devrait, nous semble-t-il, perdre de son intérêt avec l'incroyable[46] potentiel actuel du numérique consiste à "confondre" le champ incident avec le champ total. Ainsi peut-on voir dans [50] qu'un milieu non-linéaire traversé par deux champs électriques $\mathbf{E}_{(j)}(\mathbf{s},t) = 2\Re e\{A_j\, e^{i(\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{s}-\omega_j t)}\}$, $j\in\{1,2\}$ présente une non-linéarité du deuxième ordre du type $\varepsilon_0\chi^{(2)}\mathbf{E}_{(1)}\mathbf{E}_{(2)}$. Les cartes de champs que nous présenterons dans le chapitre 5 suggèrent que l'onde plane

[45] En d'autres termes, nous affirmons, avec une suffisance dont nous ne parvenons à nous défaire, avoir élevé au rang de vérités nécessaires les effets observés, qui, dans quelques livres spécialisés, pouvaient apparaître comme simplement contingents. Afin de moduler cette déclaration, il nous faut cependant reconnaître que nous avons besoin de deux hypothèses : l'existence de matériaux lisses dans lesquels la série (1.15) décrivant le champ électrique $\mathbf{E}$, converge absolument.

[46] J'imagine en effet que M.Bloembergen et ses confrères ne pouvaient imaginer, au début des années 60, qu'il nous serait aujourd'hui possible de sortir des nombres des systèmes d'équations vectorielles aux dérivées partielles non-linéaires couplées que nous présentons. Or, pour valider une théorie, il faut bien confronter ces nombres à ceux issus de l'expérience.

$\mathbf{E}_j$ est une mauvaise approximation pour le champ total (qui est, rappelons-le, le champ dont dépend le vecteur polarisation). À titre personnel, nous regrettons que le lecteur de la quasi-totalité des livres standards ou d'un nombre immense d'articles sur l'optique non-linéaire ne soit pas averti que cette onde plane $\varepsilon_0\chi^{(2)}\mathbf{E}_{(1)}\mathbf{E}_{(2)}$ est sensée représenter le champ total. Encore une fois, à l'heure où l'informatique s'est extraordinairement développé, nous ne comprenons pas pourquoi cette approximation n'est, d'après ce que l'on a rencontré, pas discutée.

Passons maintenant à quelques applications principales de l'optique non-linéaire : on peut citer la biophotonique (irradier des tissus afin de tuer quelques cellules malignes), les nanotechnologies (par exemple, sectionner ou graver des matériaux grâce à un laser), la microscopie (les fréquences générées peuvent être dans certaines plages intéressantes pour la sensibilité des détecteurs, la transparence de l'objet, etc.), la télécommunication, etc.

Dans les exemples que nous venons de donner, il faut bien distinguer les deux premiers du dernier : dans les uns, le matériau est non-stationnaire, dans l'autre, les propriétés de la matière ne changent pas au cours du temps. Si une mise en équation rigoureuse du premier cas nous est inconnue, l'étude des solitons en optique non-linéaire est d'une richesse surprenante. Alors quelle est la grande différence entre nos équations, à notre connaissance nouvelles pour les plus générales, et les équations de la propagation dans des fibres ?

Cette grande différence réside dans une simplification que nous ne pouvons pas faire : en effet, dans les hypothèses que nous avons énumérées tout au long de ce chapitre (le matériau est causal, spatialement local, non-bianisotrope, électriquement stationnaire, puis celles portant sur le spectre du champ total) nous nous sommes refusés à supposer quoi que se soit d'*a priori* sur la taille du matériau (qu'après, nous allons supposer qu'il est invariant par translation dans une direction et utiliser les éléments finis, et par conséquent supposer que cette taille est de l'ordre de la longueur d'onde est une autre histoire) ; c'est ce qui donne à nos équations toutes leur généralité. En revanche, lorsque l'on veut spécifiquement étudier la propagation d'une onde dans une fibre optique, il paraît légitime de simplifier les équations de Maxwell pour prendre en compte que la propagation de l'excitation se fait essentiellement dans une direction, direction dans laquelle le matériau hôte peut être considéré comme infini.

C'est alors qu'apparaît l'hypothèse paraxiale, utilisée chez la quasi-totalité de nos confrères. Les équations sont soit du type paraboliques, et l'équation de Schrödinger non-linéaire fait figure de favorie[47], soit à nouveau des équations d'ordre un, et le comportement du système est gouverné par les effets d'accords de phase. La littérature sur ce sujet est des plus abondantes, depuis les premiers travaux de Bloembergen jusqu'à des dizaines d'articles qui paraissent encore chaque année.

[47] L'article de revue ([13]), bien que déjà un peu ancien, donne des dizaines de modèles de ce genre, et discute des méthodes analytiques ou numériques pour les résoudre.

Chapitre 2

Quelques généralités en optique non-linéaire

> Le physicien doit se limiter à la description des relations entre les perceptions.
>
> Werner Heisenberg

Ce chapitre peut être vu comme une annexe du premier. Il y est discuté quelques généralisations de certaines propriétés bien connues en optique linéaire. Nous évoquerons tout d'abord le théorème optique, qui, par sa validation, conforte nos expériences numériques ; il suit un critère permettant de faire de l'optique non-linéaire avec une seule inconnue ; enfin, nous discuterons du spectre du champ électrique total.

2.1 Le Théorème optique en régime non-linéaire

2.1.1 Généralités

Nous souhaitons récrire le théorème optique lorsque le milieu diffractant est non-linéaire. Les calculs sont assez longs mais il faut noter que nul part l'ordre de la non-linéarité n'est imposé. La seule hypothèse supplémentaire, par rapport à [63] est l'écriture du champ électrique total comme une somme sur toutes les harmoniques de la fréquence du champ incident.

Rappelons que ce théorème n'est qu'une certaine formulation de la relation (1.23)

$$-c\,\nabla\cdot(c\mathcal{I})+\partial_t W=0.$$

Reprenons

$$\mathbf{E}(\mathbf{s},t)=\sum_{p\in\mathbb{Z}}\mathbf{E}_p(\mathbf{s})e^{-ip\omega_I t}. \qquad ((1.15))$$

Si besoin est, on écrira de la même manière :

$$\mathbf{X}(\mathbf{s},t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \mathbf{X}_p(\mathbf{s}) e^{-ip\omega_I t},\ \ \mathbf{X} \in \{\mathbf{B}, \mathbf{H}, u^d, u^i, \ldots\}$$

On suppose que ces séries convergent absolument, donc uniformément par rapport à la variable t. Leur dérivée se fait donc terme par terme et l'on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\mathbf{B}(\mathbf{s},t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} (ip\omega_I)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_p(\mathbf{s}) e^{-ip\omega_I t} - \nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{s}) t + \mathbf{B}_0(\mathbf{s}).$$

Pour les mêmes raisons que celles qui nous ont poussées à supprimer la composante statique du champ électrique dans le chapitre précédent, on suppose que $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ s'annulent.

Le vecteur de Poynting s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbf{s},t) :&= \mathbf{E}(\mathbf{s},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{s},t) \\ &= \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*} (iq\omega_I \mu(q\omega_I))^{-1} \mathbf{E}_{p-q}(\mathbf{s}) \times (\nabla \times \mathbf{E}_q(\mathbf{s})) e^{-ip\omega_I t}.\end{aligned}$$

2.1.2 Le cas bidimensionnel

On se place dans le cas où le système est invariant selon un axe (appelé (O,z)). La polarisation du champ électrique incident est telle que

$$\mathbf{E}^i(x,y,z,t) = \left(u_1^i(x,y) e^{-i\omega_I t} + u_{-1}^i(x,y) e^{i\omega_I t}\right)\hat{z}$$

(avec $u_1^i = \overline{u_{-1}^i}$) et on suppose que[1] le champ total suit la polarisation du champ incident

$$\mathbf{E}_p(x,y,z) = u_p(x,y)\hat{z},$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^d(x,y,z,t) :&= \mathbf{E}(x,y,z,t) - \mathbf{E}^i(x,y,z,t) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p^d(x,y) e^{-ip\omega_I t}\hat{z}\end{aligned}$$

avec donc $u_p^d = u_p - \delta_{|p|,1} u_p^i$. On s'autorise l'abus de notation $f(x,y) = f(r,\theta)$, où (x,y) (respectivement (r,θ)) sont les coordonnées cartésiennes (respectivement polaires) du plan $(0,x,y)$ orthogonal à l'axe $(0,z)$ et passant par 0.

Considérons une coupe bidimensionnelle du système dans $(0,x,y)$; soit Ω_d la région comportant le milieu (non-linéaire) diffractant et soit Σ un disque comportant Ω_d. La (densité linéique de) puissance absorbée dans Σ est, par définition,

[1] On verra à la section (2.2, p.83) à quelles conditions le champ diffracté est polarisé rectilignement suivant (O,z).

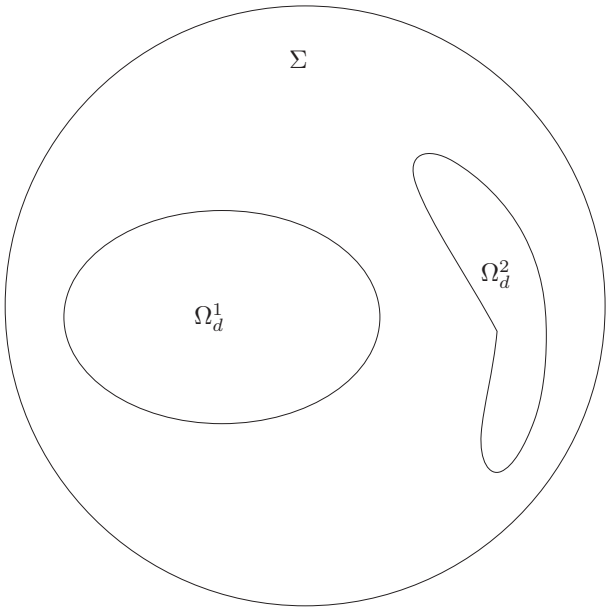


FIG. 2.1 – La géométrie d'une expérience de diffraction : le milieu (éventuellement non-linéaire) est dans $\Omega_d := \Omega_d^1 \cup \Omega_d^2$. Le cercle $\partial\Sigma$ sur lequel on intègre le vecteur de Poynting est le bord du disque Σ représenté sur cette image.

$$I := -\int_\Sigma ds\, \partial_t W,$$

soit, d'après (1.23) :

$$I = \int_{\partial\Sigma} dl\, \mathcal{P} \cdot \hat{n}.$$

En prenant en considération les orientations des vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, on a

$$I = \int_{\partial\Sigma} dl \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*} (iq\omega_I \mu(q\omega_I))^{-1} u_{p-q} \nabla u_q \cdot \hat{n}\, e^{-ip\omega_I t}.$$

Puisque cette puissance varie périodiquement dans le temps, il semble pertinent de ne s'intéresser qu'à sa valeur moyenne (se reporter à la discussion sur les trois termes de l'énergie à la page 45). On définit alors la moyenne stochastique d'une série $A(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_p e^{-ip\omega t}$ comme suit :

$$< A >:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\, A(t).$$

On a donc[2] $< A >= a_0$. Ceci permet de simplifier la somme sur p :

$$< I >= \int_{\partial\Sigma} dl \sum_{q\in\mathbb{Z}^*} (iq\omega_I \mu(q\omega_I))^{-1} u_{-q} \nabla u_q \cdot \hat{n},$$

soit

$$< I >= \int_{\partial\Sigma} dl \sum_{q\in\mathbb{N}} \big\{ (iq\omega_I \mu(q\omega_I))^{-1} u_{-q} \nabla u_q \\ +(-iq\omega_I \mu(-q\omega_I))^{-1} u_q \nabla u_{-q} \big\} \cdot \hat{n}.$$

Puisque $u_{-q} = \overline{u_q}$ et $\mu(-\omega) = \overline{\mu}(\omega)$ (dû à la réalité de la fonction de réponse magnétique), ceci donne

$$< I >= \int_{\partial\Sigma} dl \sum_{q\in\mathbb{N}} 2\Re e\{(-iq\omega_I \mu(-q\omega_I))^{-1} u_q \nabla u_{-q}\} \cdot \hat{n},$$

que l'on récrit sous la forme (on suppose ici que le milieu extérieur est magnétiquement homogène ; ceci nous permet de sortir le tenseur μ de l'intégral. On convient qu'il n'y aurait aucune difficulté à généraliser ceci.)

$$< I >= -2\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} (q\omega_I \mu(-q\omega_I))^{-1} \int_{\partial\Sigma} dl\, u_q \nabla \overline{u_q} \cdot \hat{n}\}.$$

En utilisant le produit scalaire linéaire à gauche $(\langle , \rangle)$ de $L^2(\partial\Sigma)$, on a donc

$$< I >= -2\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} (q\omega_I \mu(-q\omega_I))^{-1} \langle u_q, \frac{du_q}{dn} \rangle\}.$$

On explicite maintenant les champs incident et diffracté dans le produit scalaire :

$$\langle u_q, \frac{du_q}{dn} \rangle = \langle u_q^d, \frac{du_q^d}{dn} \rangle \quad q > 1,$$

$$\langle u_1, \frac{du_1}{dn} \rangle = \langle u_1^d + u_1^i, \frac{d(u_1^d + u_1^i)}{dn} \rangle.$$

On a donc, avec des notations qui parlent d'elles-mêmes,

[2]Plus généralement si $A(t) = \Sigma_{p\in\mathbb{Z}} a_p e^{-i\omega_p t}$ converge uniformément alors $< A >= \Sigma_{p\in\mathbb{Z}} a_p \delta_{\omega_p,0}$; de même, si l'ensemble des pulsations n'est pas discret, c'est-à-dire si la somme doit être une intégrale, l'ordre des deux intégrales de $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}} d\omega\, \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s}, \omega) e^{-i\omega t}$ peut être interverti si la seconde converge uniformément par rapport à t. On pourrait consulter quelque spécialiste de la transformée de Fourier pour savoir si cette affirmation est physiquement raisonnable ou non. En revanche, d'un point de vue numérique, elle est impraticable.

$$< I^{ii} > = -2\Im m\{(\omega_I \mu(-\omega_I))^{-1} \langle u_1^i, \frac{du_1^i}{dn} \rangle\},$$

$$< I^{di} > + < I^{id} > = -2\Im m\{(\omega_I \mu(-\omega_I))^{-1} \big(\langle u_1^d, \frac{du_1^i}{dn} \rangle + \langle u_1^i, \frac{du_1^d}{dn} \rangle\big)\},$$

$$< I^{dd} > = -2\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} (q\omega_I \mu(-q\omega_I))^{-1} \langle u_q^d, \frac{du_q^d}{dn} \rangle\}.$$

Afin d'expliciter plus précisément les expressions précédentes, on suppose que Σ est un disque de centre O et de rayon r_0. Dorénavant, on astreint $\mu(\omega)$ à être réel, et le milieu occupant $\mathbb{R}^2\backslash\Sigma$ à être isotrope et sans pertes. Puisque Σ contient strictement $\overline{\Omega_d}$, le champ électrique vérifie l'équation de Helmholtz en dehors de Σ. On utilise alors, sur $\partial\Sigma$, les développements suivants[3] :

$$u_1^i(r,\theta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \big(r_\alpha J_\alpha(kr) + s_\alpha H_\alpha^{(1)}(kr)\big) e^{-i\alpha\theta},$$
$$u_p^d(r,\theta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} b_{p,\alpha} H_\alpha^{(1)}(kr) e^{-i\alpha\theta}.$$

Le milieu occupant $\mathbb{R}^2\backslash\Sigma$ étant sans pertes, $\varepsilon(\omega)$ est réel dans cette région ; par conséquent $k(\omega)$ l'est aussi et on a les formules

$$\overline{J_\alpha}(kr) = J_\alpha(kr),$$
$$\overline{H_\alpha^{(1)}}(kr) = H_\alpha^{(2)}(kr).$$

Il s'ensuit que

$$\Im m\{\langle u_1^i, \frac{du_1^i}{dn} \rangle\} = \Im m\{\int_0^{2\pi} d\theta \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2} \Big(r_\alpha J_\alpha(kr) + s_\alpha H_\alpha^{(1)}(kr)\Big) e^{-i\alpha\theta}$$
$$\partial_r \Big(\overline{r_\beta} J_\beta(kr) + \overline{s_\beta} H_\beta^{(2)}(kr)\Big) e^{i\beta\theta} r\Big|_{r=r_0}\},$$

soit, en intégrant

$$\Im m\{\langle u_1^i, \frac{du_1^i}{dn} \rangle\}$$

[3]Le développement de u^i sur les J_n et les $H_n^{(1)}$ se justifie par le fait suivant : dans les applications, u^i sera, en général, soit une onde plane (donc tous les s_α sont nuls), soit un champ créé par un fil orienté suivant l'axe $(0,z)$; si celui-ci coupe le plan $(0,x,y)$ en un point intérieur (respectivement extérieur) à Σ, alors tous les r_α sont nuls (respectivement tous les s_α sont nuls).

$$= 2\pi\Im m\{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}}\Big(r_\alpha J_\alpha(kr) + s_\alpha H_\alpha^{(1)}(kr)\Big)\partial_r\Big(\overline{r_\alpha}J_\alpha(kr) + \overline{s_\alpha}H_\alpha^{(2)}(kr)\Big)r\Big|_{r=r_0}\}.$$

Développons maintenant $H_\alpha^{(1)}$ (respectivement $H_\alpha^{(2)}$) en sa partie réelle et sa partie imaginaire : $H_\alpha^{(1)} = J_\alpha + iN_\alpha$ (respectivement $H_\alpha^{(2)} = J_\alpha - iN_\alpha$). Ceci donne

$$\Im m\{\langle u_1^i, \frac{du_1^i}{dn}\rangle\}$$
$$= -2\pi\Re e\{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}}(r_\alpha + s_\alpha)\overline{s_\alpha}\Big(J_\alpha(kr)\partial_r N_\alpha(kr) - \partial_r J_\alpha(kr)N_\alpha(kr)\Big)r\Big|_{r=r_0}\},$$

soit, d'après la formule du wronskien[4],

$$J_\alpha(kr)\partial_r N_\alpha(kr) - N_\alpha(kr)\partial_r J_\alpha(kr) = \frac{2}{r\pi},$$

on obtient

$$\Im m\{\langle u_1^i, \frac{du_1^i}{dn}\rangle\} = -4\Re e\{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}}(r_\alpha + s_\alpha)\overline{s_\alpha}\}.$$

L'expression de $< I^{ii} >$ est ainsi

$$< I^{ii} >= 8(\omega_I\mu(\omega_I))^{-1}\Re e\{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}}(r_\alpha + s_\alpha)\overline{s_\alpha}\}.$$

En suivant la même méthode, on obtient

$$< I^{id} + I^{di} > = 8(\omega_I\mu(\omega_I))^{-1}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}}\Re e\{b_{1,\alpha}(\overline{r_\alpha} + 2\overline{s_\alpha})\},$$
$$< I^{dd} > = 8\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in\mathbb{N}}(q\omega_I\mu(q\omega_I))^{-1}|b_{q,\alpha}|^2.$$

La partie incidente, $< I^{ii} >$ ne dépend évidemment pas du matériau diffractant (on rappelle que le μ correspond à la permittivité magnétique, constante dans l'espace, du milieu extérieur). Puisque le matériau extérieur, situé dans $\mathbb{R}^2\backslash\Sigma$ est sans pertes, ce terme décrit la puissance *générée* dans Σ.

La partie couplée, $< I^{id} + I^{di} >$ ne dépend du champ diffracté qu'à la fréquence du champ incident (mais ce terme est néanmoins sensible à la non-linéarité, par la rétroaction des harmoniques sur la fréquence génératrice ω_I).

Enfin, en notant $< I^{dd} >_q$ la moyenne stochastique de la puissance correspondant au champ diffracté à la fréquence $q\omega_I$, on a $< I^{dd} >= \sum_{q\in\mathbb{N}} < I^{dd} >_q$. Ceci est donc

[4]On appréciera le fait que c'est grâce à cette formule que les expressions sont indépendantes vis-à-vis de r_0 - remarque physiquement évidente, puisque les pertes sont localisées dans Ω_d. On pourra se reporter au chapitre 4, page 128, pour une démonstration de cette formule.

une généralisation naturelle de la formule obtenue dans le cas linéaire, rappelée dans le paragraphe suivant.

En effet, on souhaite comparer nos résultats avec la formule 14 du chapitre 15 de [63]. Dans cette formule, le milieu est linéaire donc lorsque q est restreint aux entiers positifs, on a $b_{q,\alpha} = b_{1,\alpha}\delta_{q,1}$; ensuite, le champ incident est une onde plane, donc tous les s_α sont nuls.

Nos formules sont donc

$$\begin{aligned} < I^{ii} > &= 0 \\ < I^{id} + I^{di} > &= 8(\omega_I \mu(\omega_I))^{-1} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \Re e\{b_{1,\alpha}\overline{r_\alpha}\} \\ < I^{dd} > &= 8(\omega_I \mu(\omega_I))^{-1} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} |b_{1,\alpha}|^2 \end{aligned}$$

La moyenne stochastique de la puissance transmise est donc proportionnelle à

$$< I > \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \left(|b_{1,\alpha}|^2 + \Re e\{b_{1,\alpha}\overline{r_\alpha}\}\right),$$

ce qui est la formule de [63].

2.2 Quand pouvons-nous parler de cas transverses ?

On répond dans cette section à la question suivante : dans une base cartésienne, quand peut-on séparer un problème sur $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ en deux problèmes (E^x, E^y, H^z) et (H^x, H^y, E^z) [5]. Pour cela, il faut étudier chaque équation de Maxwell séparément. On met en garde le lecteur sur un point : dans le cas linéaire, si les solutions TE et TM sont connues, alors la solution générale n'est autre qu'une combinaison linéaire des deux. Il n'en va pas de même en régime non-linéaire.

2.2.1 Non-linéarité d'ordre deux

Afin de ne pas entraver la généralité du problème, on utilise les transformées de Fourier des champs (ceci sera expliqué en 2.3.2). Les expressions étant longues, on ne note aucune fréquence. Les conventions sont les suivantes : dans le membre de gauche, le champ est évalué en $(\mathbf{s}, \omega)$; μ, $\chi^{(1)}$, $\hat{\mathbf{H}}$ et $\hat{\mathbf{E}}$ s'il appartient à une partie linéaire (i.e., s'il est précédé de $\chi^{(1)}$ ou $1+\chi^{(1)}$) sont évalués en $(\mathbf{s}, \omega)$; lorsque $\chi^{(2)}$ apparaît, il faut lire $\chi^{(2)}(\mathbf{s}, \omega, \omega - \omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s}, \omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s}, \omega - \omega_1)$. Concernant le milieu hôte, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le milieu est stationnaire, local, non-bianisotrope, magnétiquement linéaire
- le milieu est homogène dans le temps

[5] Il s'agit donc de définir la notion de z-anisotropie pour un matériau non-linéaire.

- le vecteur polarisation électrique est non-linéaire à l'ordre deux : on a $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}$
- le milieu est invariant selon z ; ceci-implique que $\partial_z X = \mathbf{0}$ où X est une composante quelconque d'un tenseur $\chi^{(n)}$ ou du tenseur μ
- les champs sont invariants selon z ; ceci-implique que $\partial_z \mathbf{E} = \mathbf{0}$ et $\partial_z \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Dans ces conditions, détaillons l'équation de Maxwell-Faraday

$$\begin{pmatrix} \partial_y \hat{E}^z \\ -\partial_x \hat{E}^z \\ \partial_x \hat{E}^y - \partial_y \hat{E}^x \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} \mu^x{}_x \hat{H}^x + \mu^x{}_y \hat{H}^y + \mu^x{}_z \hat{H}^z \\ \mu^y{}_x \hat{H}^x + \mu^y{}_y \hat{H}^y + \mu^y{}_z \hat{H}^z \\ \mu^z{}_x \hat{H}^x + \mu^z{}_y \hat{H}^y + \mu^z{}_z \hat{H}^z \end{pmatrix}.$$

Dans la première équation, E^z apparaît à gauche, nous sommes donc dans le système d'inconnues (H^x, H^y, E^z) ; on exige donc $\mu^x{}_z = 0$. En raisonnant de la même manière, on constate que le problème est découplé si μ est du type

$$\mu^{\cdot}_{\cdot} = \begin{pmatrix} \mu^x_x & \mu^x_y & 0 \\ \mu^y_x & \mu^y_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu^z_z \end{pmatrix}.$$

Passons à l'équation de Maxwell-Ampère. Projetons notre équation sur l'axe $(0, x)$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \partial_y \hat{H}^z - \hat{J}_x = -i\omega\varepsilon_0 \{ & (1 + \chi^{(1)\,x}{}_x) \hat{E}^x + \chi^{(1)\,x}{}_y \hat{E}^y + \chi^{(1)\,x}{}_z \hat{E}^z \\ + \int d\omega_1 \big(& \chi^{(2)\,x}{}_{xx} \hat{E}^x \hat{E}^x + \chi^{(2)\,x}{}_{xy} \hat{E}^x \hat{E}^y + \chi^{(2)\,x}{}_{xz} \hat{E}^x \hat{E}^z \\ & + \chi^{(2)\,x}{}_{yx} \hat{E}^y \hat{E}^x + \chi^{(2)\,x}{}_{yy} \hat{E}^y \hat{E}^y + \chi^{(2)\,x}{}_{yz} \hat{E}^y \hat{E}^z \\ & + \chi^{(2)\,x}{}_{zx} \hat{E}^z \hat{E}^x + \chi^{(2)\,x}{}_{zy} \hat{E}^z \hat{E}^y + \chi^{(2)\,x}{}_{zz} \hat{E}^z \hat{E}^z \big) \}. \end{aligned}$$

Puisque nous avons $\hat{H}^z$ à gauche, nous ne voulons que du $\hat{E}^x$ et du $\hat{E}^y$ à droite ; par conséquent le problème est découplé si l'on a $\chi^{(1)\,x}{}_z = 0$, $\chi^{(2)\,x}{}_{xz} = \chi^{(2)\,x}{}_{yz} = \chi^{(2)\,x}{}_{zx} = \chi^{(2)\,x}{}_{zy} = \chi^{(2)\,x}{}_{zz} = 0$. Il faut étudier les deux autres projections de la même manière.

Nous obtenons un problème découplé si la susceptibilité est du type

$$\chi^{(1)\,\cdot}{}_{\cdot} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)\,x}{}_x & \chi^{(1)\,x}{}_y & 0 \\ \chi^{(1)\,y}{}_x & \chi^{(1)\,y}{}_y & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{(1)\,z}_z \end{pmatrix},$$

$$\chi^{(2)\,x}{}_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)\,x}{}_{xx} & \chi^{(2)\,x}{}_{xy} & 0 \\ \chi^{(2)\,x}{}_{yx} & \chi^{(2)\,x}{}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi^{(2)\,y}{}_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)\,y}{}_{xx} & \chi^{(2)\,y}{}_{xy} & 0 \\ \chi^{(2)\,y}{}_{yx} & \chi^{(2)\,y}{}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi^{(2)\,z}{}_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{(2)\,z}{}_{zz} \end{pmatrix}.$$

Grâce aux conditions d'invariance des champs et du milieu, les deux dernières équations de Maxwell n'apportent aucune restriction.

Certaines contraintes sont imposées aux composantes des tenseurs selon les symétries des matériaux qu'ils décrivent. Celles-ci sont connues pour les trente-deux classes de cristal (on les trouve, par exemple, dans [49], p.45) ; aucune ne correspond *a priori*[6] à cet ensemble de tenseurs.

2.2.2 Non-linéarité d'ordre trois

Supposons à présent que le vecteur polarisation soit développé jusqu'à l'ordre trois : $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)}$. On obtient un découplage si les tenseurs μ, $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(2)}$ sont du même type que ceux présentés dans la précédente sous-section, et si de plus $\chi^{(3)}$ est du type :

$$\chi^{(3)\,x}{}_{x\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \chi^{(3)\,x}{}_{xxx} & \chi^{(3)\,x}{}_{xxy} & 0 \\ \chi^{(3)\,x}{}_{xyx} & \chi^{(3)\,x}{}_{xyy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi^{(3)\,x}{}_{y\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \chi^{(3)\,x}{}_{yxx} & \chi^{(3)\,x}{}_{yxy} & 0 \\ \chi^{(3)\,x}{}_{yyx} & \chi^{(3)\,x}{}_{yyy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(3)\,x}{}_{z\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(3)\,y}{}_{x\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \chi^{(3)\,y}{}_{xxx} & \chi^{(3)\,y}{}_{xxy} & 0 \\ \chi^{(3)\,y}{}_{xyx} & \chi^{(3)\,y}{}_{xyy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi^{(3)\,y}{}_{y\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} \chi^{(3)\,y}{}_{yxx} & \chi^{(3)\,y}{}_{yxy} & 0 \\ \chi^{(3)\,y}{}_{yyx} & \chi^{(3)\,y}{}_{yyy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(3)\,y}{}_{z\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(3)\,z}{}_{x\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(3)\,z}{}_{y\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[6] On veut exclure par là les cas où, par exemple, toutes les composantes s'annulent, ce qui arrive dès que le système a la symétrie d'inversion, cf. la démonstration de la propriété 2 dans l'annexe A.

$$\chi^{(3)\,z}{}_{z\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^{(3)\,z}{}_{zzz} \end{pmatrix}$$

On vérifie à nouveau qu'*a priori* aucune classe de cristal n'impose à ses tenseurs d'avoir des composantes du type de celles présentées. Les contraintes sont données, par exemple, dans [49], p.51-53.

2.3 Le spectre du champ total

2.3.1 Les ensembles minimaux du spectre de $\mathbf{P}^{(n)}$

Nous avons détaillé, dans la section 1.3 pourquoi le vecteur polarisation à l'ordre deux oscille aux pulsations appartenant à un ensemble contenant $\mathcal{E}^{(2)}_{min} := \{p\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$, lorsqu'un matériau est illuminé par un champ incident monochromatique vibrant à la pulsation ω_I. On appelle $\mathcal{E}^{(2)}_{min}$ l'ensemble minimal associé au vecteur polarisation à l'ordre deux. Avec des notations évidentes, la présente sous-section a pour but de montrer que :

- si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors $\mathcal{E}^{(n)}_{min} = \{p\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$;
- si $n \in \mathbb{N}$ est impair, alors $\mathcal{E}^{(n)}_{min} = \{(2p+1)\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$.

L'indice "min" a pour but de rappeler que rien n'exclut que d'autres fréquences soient présentes dans le spectre du champ. Dire que $\mathbf{E}$ n'oscille qu'aux fréquences incluses dans $\mathcal{E}^{(n)}_{min}$ constitue donc une hypothèse supplémentaire.

Les critères que doit vérifier $\mathcal{E}^{(n)}_{min}$ sont les suivants :

- $p \in \mathcal{E}^{(n)}_{min} \;\Rightarrow\; -p \in \mathcal{E}^{(n)}_{min}$;
- $(p_1, \cdots, p_n) \in \mathcal{E}^{(n)}_{min} \;\Rightarrow\; p_1 + \cdots + p_n \in \mathcal{E}^{(n)}_{min}$.

La première exigence résulte de la réalité de $\mathbf{P}$, la seconde provient de la définition même de $\mathbf{P}^{(n)}$, qui couple n composantes du champ électrique *via*

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{s},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_n\, \chi^{(n)}(\mathbf{s},\omega_1,\cdots,\omega_n) \qquad ((1.13))$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\cdots\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_n)e^{-i(\omega_1+\cdots+\omega_n)t},$$

de la définition du champ d'induction électrique,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}^{(n)}$$

et de l'équation de propagation du champ électrique,

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) + \partial_t^2 \mathbf{D} = 0. \qquad ((1.14))$$

Concentrons-nous d'abord sur la seconde condition que doit satisfaire $\mathcal{E}^{(n)}_{min}$. Si n est pair, alors en choisissant $\omega_i = \omega_I$ (respectivement $\omega_i = -\omega_I$) si $i \in \{1, \cdots, n\}$ est

pair (respectivement impair), on déduit que la fréquence nulle est dans $\mathcal{E}_{min}^{(n)}$. On montre alors par induction sur p, en choisissant $(\omega_1, \cdots, \omega_n) = (p\omega_I, \omega_I, 0, \cdots, 0)$ que tous les multiples entiers positifs de ω_I sont dans $\mathcal{E}_{min}^{(n)}$, puis en choisissant $(\omega_1, \cdots, \omega_n) = (-p\omega_I, -\omega_I, 0, \cdots, 0)$ que tous les multiples entiers de ω_I sont dans $\mathcal{E}_{min}^{(n)}$. La deuxième condition est alors vérifiée. Puisque l'ensemble exhibé satisfait la première condition, alors $\mathcal{E}_{min}^{(n)} = \{p\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$.

L'argument lorsque n est impair est le suivant : on ne peut, en sommant un nombre impair de termes issus de l'ensemble $\{\omega_I, -\omega_I\}$ obtenir un multiple pair de ω_I. En revanche, tous les multiples impairs sont dans $\mathcal{E}_{min}^{(n)}$: il suffit de sélectionner

$$(\omega_1, \cdots, \omega_n) = ((2p+1)\omega_I, \omega_I, \omega_I, \omega_I, -\omega_I, \cdots, \omega_I, -\omega_I)$$

ou

$$(\omega_1, \cdots, \omega_n) = (-(2p+1)\omega_I, -\omega_I, -\omega_I, \omega_I, -\omega_I, \cdots, \omega_I, -\omega_I)$$

et de procéder par induction. L'ensemble exhibé satisfait les deux conditions, et par conséquent $\mathcal{E}_{min}^{(n)} = \{(2p+1)\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$.

Plus qu'un jeu mathématique, la propriété énoncée a le corollaire suivant :

> *l'ensemble minimal contenant les fréquences auxquelles oscille le champ total d'un matériau isotrope, qui, d'après la propriété 2 de l'annexe A, n'a que des non-linéarités d'ordre impair, est l'ensemble des multiples entiers impairs de la fréquence du champ monochromatique incident.*

La section suivante va dans l'autre sens : que pouvons-nous déduire lorsque l'ensemble maximal des fréquences du champ incident est sélectionné ?

2.3.2 L'ensemble $\{p\omega_I\}_{p\in\mathbb{Z}}$ épuise-t-il toutes les fréquences présentes ?

On cherche à supprimer l'hypothèse de la périodicité temporelle du champ électrique. Par conséquent, on va travailler avec la *transformée* de Fourier (par rapport au temps) du champ électrique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) = \int_{\mathbb{R}} d\omega\, \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s}, \omega) e^{-i\omega t}.$$

Reprenons l'équation (1.14) et remplaçons $\mathbf{D}$ par $\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$:

$$\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) + \partial_t^2(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0.$$

Non-linéarité d'ordre deux

En utilisant la formulation (1.13) et en supposant que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}$, on a :

$$\partial_t^2 \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{s},t) = -\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}} d\omega\, \omega^2 \chi^{(1)}(\mathbf{s},\omega)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega)e^{-i\omega t},$$

$$\partial_t^2 \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{s},t) = -\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}} d\omega\, \omega^2 \int_{\mathbb{R}} d\omega_1\, \chi^{(2)}(\mathbf{s},\omega_1,\omega-\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega-\omega_1)e^{-i\omega t}.$$

L'équation de propagation du champ électrique s'écrit donc :

$$0 = \int_{\mathbb{R}} d\omega\, e^{-i\omega t}\Big\{\nabla \times (\mu^{-1}\nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega))$$

$$-\omega^2\varepsilon_0\Big(\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega)+\chi^{(1)}(\mathbf{s},\omega)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega)+\int_{\mathbb{R}} d\omega_1\, \chi^{(2)}(\mathbf{s},\omega_1,\omega-\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{s},\omega-\omega_1)\Big)\Big\}.$$

En prenant la transformée de Fourier inverse et en utilisant les notations déjà introduites[7], ceci se récrit de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_\omega^{lin}(\hat{\mathbf{E}}(\omega)) + \omega^2 \int_{\mathbb{R}} d\omega_1\, \lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1), \hat{\mathbf{E}}(\omega-\omega_1)\rfloor = 0.$$

Ceci est l'équation de propagation d'une composante du champ électrique à une pulsation ω quelconque ; par conséquent, *pour pouvoir se situer dans le cadre des autres sections de ce chapitre, il faut donc ajouter l'hypothèse supplémentaire que les $\chi^{(n)}$ sont nuls s'ils ne sont pas évalués sur les multiples entiers de la fréquence ω_I du champ incident.*

On rappelle que ce n'est qu'en étudiant le *degré* que l'on a "montré" que l'effet Raman ne pouvait être qu'un effet d'ordre trois. Nous ne nous concentrerons pas, dans cet ouvrage, sur une notion du degré lorsque le champ électrique a un spectre continu.

Par un calcul direct, on obtient l'expression de la densité de puissance électrique :

$$\partial_t W_e(t) = \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}} d\omega\, e^{-i\omega t} \int_{\mathbb{R}} d\omega_1\, (-i\omega_1)\hat{\mathbf{E}}(\omega-\omega_1)$$

$$\cdot\{\hat{\mathbf{E}}(\omega_1) + \lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1)\rfloor + \int_{\mathbb{R}} d\omega_2\, \lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1), \hat{\mathbf{E}}(\omega_2-\omega_1)\rfloor\}.$$

Nous ne savons quel sens donner à l'expression

$$\begin{aligned} < \partial_t W_e(t) >:= & \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^\infty dt\, \partial_t W_e(t) \\ = & \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\big(W_e(T) - W_e(0)\big). \end{aligned}$$

[7] Puisque l'on n'a plus $\omega = p\omega_I$ pour un certain entier p, on note explicitement la pulsation.

Non-linéarité d'ordre trois

Les généralisations sont immédiates : l'équation de propagation de la composante à la fréquence ω du champ électrique est

$$\mathcal{M}_{\omega}^{lin}(\hat{\mathbf{E}}(\omega)) \tag{2.1}$$
$$+\,\omega^2 \int_{\mathbb{R}} d\omega_1 \left(\lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1), \hat{\mathbf{E}}(\omega-\omega_1) \rfloor + \int_{\mathbb{R}} d\omega_2 \, \lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1), \hat{\mathbf{E}}(\omega_2), \hat{\mathbf{E}}(\omega-\omega_1-\omega_2) \rfloor \right) = 0$$

et l'expression de la densité de puissance électrique est

$$\partial_t W_e(t) = \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}} d\omega \, e^{-i\omega t} \int_{\mathbb{R}} d\omega_1 \, (-i\omega_1) \hat{\mathbf{E}}(\omega-\omega_1) \cdot \{ \hat{\mathbf{E}}(\omega_1) + \lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1) \rfloor$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} d\omega_2 \Big(\lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1), \hat{\mathbf{E}}(\omega_2-\omega_1) \rfloor + \int_{\mathbb{R}} d\omega_3 \, \lfloor \hat{\mathbf{E}}(\omega_1), \hat{\mathbf{E}}(\omega_2), \hat{\mathbf{E}}(\omega_3-\omega_1-\omega_2) \rfloor \Big) \}.$$

L'équation (2.1) est l'équation de propagation la plus générale de ce manuscrit, et l'on pourrait sans difficulté écrire son analogue pour un ordre de non-linéarité fini quelconque. Nous répétons que si nous nous cantonnerons, dans les simulations, à un spectre discret des champs électromagnétiques, c'est bien parce que nous n'avons aucune idée d'une méthode "rigoureuse" qui permettrait de la résoudre.

Une excursion vers l'équation de Duffing

Soit une boule, de masse constante m et de centre de gravité g, attachée à un ressort, dont la force de rappel est du type $F_r(x) = -(b\,x + c\,x^3)$, où $x = x(t)$ donne la position de g à l'instant t. On suppose que la boule est astreinte à se mouver dans un espace à une dimension, et par conséquent x est à image dans $\mathbb{R}$. Les frottements sont simulés par une force $F_{ftm}(\dot{x}) = -a\,\dot{x}$ - nous utiliserons dans cette section le point situé au-dessus d'une fonction pour signifier sa dérivée. Enfin, on imagine qu'un forçage $f\,cos(\omega_I t)$ entretient le mouvement, de sorte que la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x + c\,x^3 = f\,cos(\omega_I t). \tag{2.2}$$

Il est connu ([79], par exemple) que l'équation précédente, appelée "équation de Duffing", présente, même lorsque a s'annule, des solutions qui oscillent à des fréquences du type $\omega = \omega_I/p$ où p est un nombre entier (impair pour des raisons de symétrie).

Revenons maintenant à l'équation de propagation de la composante $\mathbf{E}_p$ du champ électrique total dans un matériau non-linéaire d'ordre trois :

$$\mathcal{M}_p^{lin}(\mathbf{E}_p) + (p\omega_I)^2 \Big(\sum_{q\in\mathbb{Z}} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_{p-q} \rfloor + \sum_{(q,r)\in\mathbb{Z}^2} \lfloor \mathbf{E}_q, \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_{p-q-r} \rfloor \Big) = 0,$$
$$\forall p \in \mathbb{Z}, \tag{(1.26)}$$

Imaginons l'équation de propagation de la composante $\mathbf{E}_p^d$ du champ électrique diffracté, avec dans le membre de droite les termes qui ne contiennent que le champ incident. Nous sommes face à une équation aux dérivées partielles du second-ordre, non-linéaire et avec forçage ; ces caractéristiques étant très proches de l'équation de Duffing, il y a tout lieu de penser que leurs propriétés ont certaines similarités. Ceci constitue l'approche mathématique qui nous a amené à considérer des matériaux non-linéaires générant des sous-harmoniques. Ceci a été évoqué, pour la première fois à notre connaissance, dans [3].

Chapitre 3

Les méthodes numériques

3.1 Simulation d'un champ incident

> Puisque ces mystères me dépassent, feignons d'en être l'organisateur.
>
> Jean Cocteau

Lors d'études de diffraction, il arrive que la source soit très éloignée de l'obstacle. Cette source (que nous appellerons S) peut même, dans le cas d'une onde plane incidente, être située "à l'infini". Si donc l'on veut résoudre le problème schématisé sur la figure 3.1 par une méthode de type éléments finis, il va falloir trouver une technique qui permette de ramener les sources à distance finie, dans la région Ω_m, qui représente la zone maillée.

Une première technique, qui a prouvé son efficacité, consiste à changer d'inconnue en passant du champ total au champ diffracté. Malheureusement, cette méthode devient inopérante dès lors que l'obstacle possède des caractères non-linéaires ; elle n'est donc pas adaptée à la situation qui est la nôtre. Détaillons.

Au risque de décevoir le lecteur, la généralité des premiers chapitres ne sera pas exploitée : toutes nos simulations seront bidimensionnelles. La situation qui est la nôtre est donc l'étude de la diffraction d'ondes électromagnétiques dans un système invariant suivant une direction (que nous prendrons comme axe (O, z)). Le champ électrique est par hypothèse polarisé suivant cet axe (c'est la polarisation $E \parallel$) et constant suivant cette direction. Aussi, pour l'instant, nous supposons que le champ électromagnétique est harmonique. On posera donc[1], dans un système de coordonnées cartésiennes, $\mathbf{E}(x, y, z, t) = 2\Re e\{u(x, y)e^{-i\omega t}\}\hat{z}$ pour tout point P de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ est dans le plan perpendiculaire à l'axe d'invariance.

Le système consiste en un objet diffractant (<u>local</u>, <u>stationnaire</u> et tel que si le champ électrique incident est polarisé suivant $\hat{z}$, alors le champ total l'est aussi) strictement in-

[1] Ainsi que d'autres formules analogues pour $\mathbf{E}^i$, $\mathbf{E}^d$, etc., dont les définitions sont immédiates. Le lecteur aura compris que l'on note $u\hat{z}$ ce que l'on notait $\mathbf{E}_1$ dans les cas vectoriels des chapitres précédents.

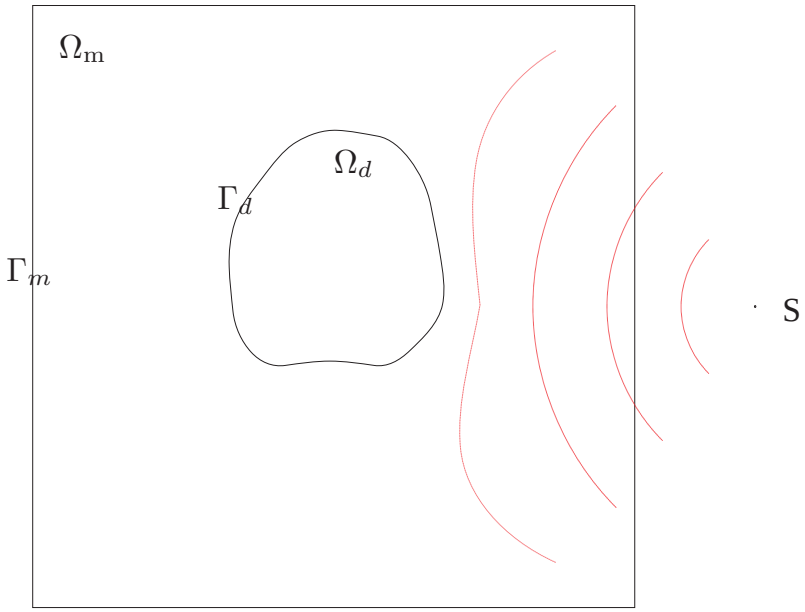


FIG. 3.1 – Une expérience typique de diffraction.

clus dans Ω_m et entouré par, disons, dans un premier temps, le vide. Il n'y a ni courant ni charge ponctuelle. On commence par le cas où le milieu est *linéaire*. On supposera, par simplicité, que le milieu diffractant est non magnétique et a pour permittivité relative (éventuellement inhomogène) ε_d. On a donc $\varepsilon_r(P) = 1 + (\varepsilon_d(P) - 1)\Xi_\Omega(P),\ P \in \mathbb{R}^2$, où Ξ est la fonction caractéristique (le symbole χ étant réservé pour la susceptibilité).

La méthode consiste à écrire l'équation de propagation du champ diffracté. Le champ électrique total vérifie l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^2$:

$$\triangle \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = \mathfrak{s},$$

où $\mathfrak{s}$ est la source du champ incident[2] :

$$\triangle \mathbf{E}^i + k_0^2 \mathbf{E}^i = \mathfrak{s}.$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient

$$\triangle \mathbf{E}^d + k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^d = k_0^2 (1 - \varepsilon_r) \mathbf{E}^i.$$

On remarque que la source du champ diffracté est bien l'objet diffractant (car $1 - \varepsilon_r$ s'annule en dehors de Ω_d).

[2]On note S la source physique du problème et $\mathfrak{s}$ la source qu'elle induit dans l'équation de Helmholtz. Notons que cette équation est rigoureusement satisfaite dans le cadre que l'on s'est fixé. En particulier, comme ceci sera détaillé au chapitre suivant, la divergence du champ électrique s'annule exactement.

Insérons maintenant $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^d$ dans l'équation *non-linéaire* d'un milieu, situé dans Ω_d, présentant l'effet Kerr-optique (se reporter à l'équation 1.32 - on remarque que rien n'empêche $\varepsilon_r^{(1)}$ et $\chi^{(3)}$ à être non-constant dans Ω_d) :

$$\triangle \mathbf{E} + k_0^2(\varepsilon_r^{(1)} + \chi^{(3)}|\mathbf{E}|^2)\mathbf{E} = \mathfrak{s}, \tag{3.1}$$

et nous obtenons :

$$\triangle \mathbf{E}^d + k_0^2(T_d(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^d)\mathbf{E}^d + T_i(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^d)\mathbf{E}^i) = k_0^2(1 - \varepsilon_r^{(1)})\mathbf{E}^i$$

où

$$T_d(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^d) := 1 + (\varepsilon_r^{(1)} + \chi^{(3)}|\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^d|^2 - 1)\Xi_{\Omega_d}$$

et

$$T_i(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^d) := \chi^{(3)}|\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^d|^2\Xi_{\Omega_d}.$$

Le régime non-linéaire complexifie grandement l'équation que doit satisfaire le champ diffracté. Nous l'avons malgré tout expérimenté numériquement, en prenant comme partie incidente une onde plane. Le programme ne convergeait pas, même pour de très faibles valeurs de $\chi^{(3)}$.

En vue du prochain chapitre, il nous faut donc trouver une autre méthode pour résoudre notre problème formulé avec le champ total u. Certains auteurs annulent le champ diffracté u^d sur $\Gamma_m := \partial\Omega_m$, comme cela est suggéré sur la figure 3.2. Ceci revient donc à imposer :

$$u|_{\Gamma_m} = u^i|_{\Gamma_m}$$

$$\frac{du}{dn}\Big|_{\Gamma_m} = \frac{du^i}{dn}\Big|_{\Gamma_m}$$

où u^i est le champ rayonné par S.

Cette hypothèse est trop restrictive à nos yeux. Nous allons maintenant présenter une procédure qui semble être suffisamment générale pour convenir à nos besoins futurs.

3.1.1 Substitution de source

L'idée est résumée sur la figure 3.3 : on souhaite simuler le champ incident u^i rayonné par S par une source convenablement choisie à l'intérieur de Ω_m. Cette source est un courant localisé sur une courbe fermée (un lacet de Jordan) Γ, elle même contenue dans Ω_m et contenant Ω_d. Cette courbe définit ainsi un intérieur Ω_i et un extérieur Ω_e. Il nous faut donc trouver le courant $\mathbf{j}$ qui, positionné sur Γ, génère le même champ u_v^i dans Ω_i que le champ u^i créé par S. Remarquons que les sources peuvent être de nature différente : si S est une charge, on remplace la source de l'équation de Gauss

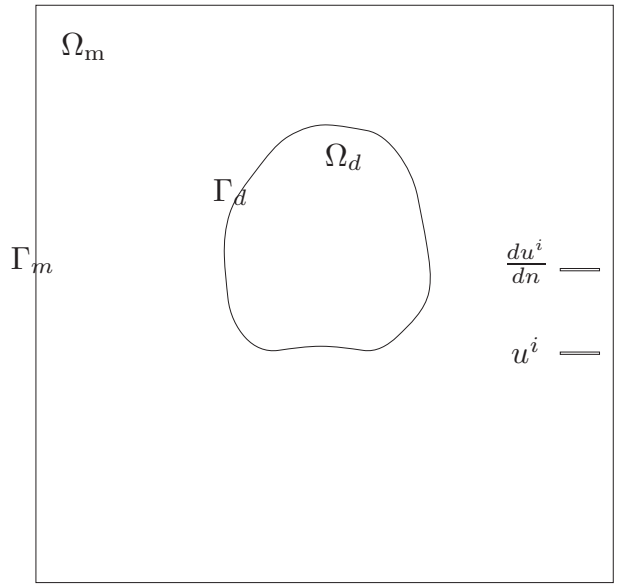


FIG. 3.2 – Deuxième méthode : on impose les conditions de bord pour u et sa dérivée. Le problème vient du fait que ces conditions sont données à l'infini.

par une source dans l'équation d'Ampère[3]. Il existe une fonction $\jmath : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telle que le courant $\mathbf{j}$ vérifie $\mathbf{j} = \jmath\hat{z}$.

La permittivité relative du milieu hôte (pour lequel on suppose que l'induction est, comme pour le vide, proportionnelle à l'excitation : $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$) est notée ε_r ; k_r est défini, selon l'habitude, par $k_r := k_0\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$. Puisque ce qui nous préoccupe pour l'heure est l'implémentation du champ incident (dans un milieu homogène et isotrope), ces champs de tenseurs sont constants, et on les identifiera donc à des scalaires (éventuellement complexes). Ω est un domaine fermé et simplement connexe du plan, dont le bord $\Gamma := \partial\Omega$ est différentiable (puisque nous allons utiliser le vecteur normal, orienté vers l'extérieur, à cette courbe).

Le but est donc de trouver une fonction $\jmath : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ satisfaisant[4]

$$\left(\triangle + k_r^2\right)u_v^i = -i\omega\mu_0\jmath\delta_\Gamma, \tag{3.2}$$

$$\lim_{r\to\infty} |\sqrt{r}\, u_v^i| < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{du_v^i}{dr} - ik_r u_v^i\right) = 0, \text{ [5]} \tag{3.3}$$

$$u_v^i|_{\dot{\Omega}} = u^i|_{\dot{\Omega}}. \tag{3.4}$$

[3]Par ailleurs, on peut avoir des difficultés à implémenter dans une expérience numérique une onde plane incidente, puisque celle-ci n'a nul besoin de source pour exister. Le procédé que nous développons permet d'y remédier : on remplace localement un champ existant sans source par un champ généré par un courant.

[4]Ω est un fermé, donc $\dot{\Omega} := \Omega\backslash\partial\Omega$.

[5]Ces deux conditions sont souvent rassemblées sous le nom de condition d'onde sortante (COS).

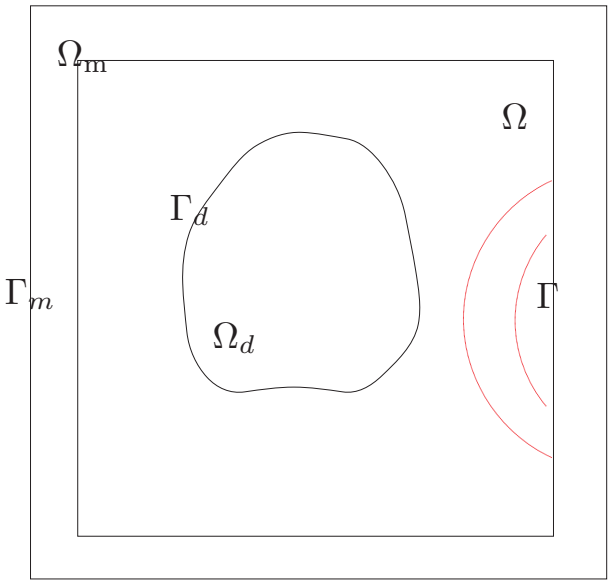


FIG. 3.3 – Troisième méthode : le champ généré par $\mathbf{j}$ sur Γ est le même que celui généré par q en $\mathbf{r}_S$. Le point $\mathbf{r}_S$ peut être très éloigné de Ω_d ; ici, il est supposé être en dehors de Ω_m.

On suppose que u^i est connue[6] et satisfait

$$\left(\triangle + k_r^2\right) u^i = \mathfrak{s}, \tag{3.5}$$

$$|u^i(P)| < \infty \qquad \forall P \in \Omega. \tag{3.6}$$

Le fait que $u^i(P)$ soit borné dans Ω signifie que cette méthode ne peut simuler une source contenue dans Ω (ce qui n'aurait évidemment aucun intérêt, la source serait alors déjà dans la zone maillée) ; en d'autres termes, cette méthode ne peut inverser la flèche du temps, en substituant un champ qui traverserait Ω vers l'extérieur par un courant sur Ω.

La méthode est la suivante : on commence par supposer que Ω est un métal infiniment conducteur, illuminé par une source S ; on a alors

$$\left(\triangle + k_r^2\right) u = \mathfrak{s}, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^2 \backslash \Omega \tag{3.7}$$

[6] Il est donc nécessaire d'ajouter une condition ; en pratique, ceci pourra être une condition d'onde sortante si l'on veut simuler une onde générée par un fil orienté suivant l'axe $(0, z)$, qui intersecte le plan de l'étude en un point $\mathbf{r_0}$ et sur lequel circule un courant d'intensité I ; dans ce cas $\mathfrak{s} = -i\omega\mu_0 I \delta_{\mathbf{r_0}}$. Ceci pourra également être une formule explicite, telle $u^i(x, y) = Ae^{i(k_x x + k_y y)}$ si l'on désire simuler une onde plane d'amplitude A et de vecteur d'onde $(k_x, k_y, 0)$; dans ce cas la source $\mathfrak{s}$ s'annule, etc.

et u satisfait une condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$. En outre, dans Ω, le champ total s'annule ; ainsi, puisque S est naturellement[7] en dehors de Ω, et donc $Supp\{\mathfrak{s}\} \subset \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$, on a aussi

$$\Big(\triangle + k_r^2\Big)u = \mathfrak{s}, \qquad \text{dans } \dot{\Omega}. \tag{3.8}$$

Des deux dernières équations, on déduit :

$$\Big(\triangle + k_r^2\Big)u = \mathfrak{s} + \left[\frac{du}{dn}\right]\Big|_\Gamma \delta_\Gamma, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^2 \tag{3.9}$$

où, et à partir de maintenant, u est une distribution.

Le champ diffracté, $u^d := u - u^i$, vérifie donc l'équation suivante, obtenue en soustrayant (3.9) par (3.5) :

$$\Big(\triangle + k_r^2\Big)u^d = \left[\frac{du}{dn}\right]\Big|_\Gamma \delta_\Gamma. \tag{3.10}$$

u^d satisfait aussi une COS identique à (3.3). Comparant (3.2) avec (3.10), on conclut que, si

$$-i\omega\mu_0 \jmath = \left[\frac{du}{dn}\right]\Big|_\Gamma,$$

alors u_v^i et u^d satisfont la même équation aux dérivées partielles et la même condition de bord ; on a donc $u_v^i = u^d$. Par conséquent, choisissant

$$\jmath = \frac{1}{i\omega\mu_0}\left[\frac{du}{dn}\right]\Big|_\Gamma, \tag{3.11}$$

on a[8]

$$u_v^i|_\Omega = -u^d|_\Omega = u^i|_\Omega.$$

On note que, lorsque u^i et Γ sont donnés, la solution $\mathbf{j}$ du problème est explicitement donnée par l'équation (3.11) ; ainsi, le champ u_v^i réalisant le "mirage" est déterminé de manière unique.

Enfin, il est peut être rassurant de constater que, pour que le mirage ait lieu, Γ doit être borné.

Nous avons vu que Γ doit être différentiable. Nous avons fait des simulations par la méthode des éléments finis sur des ellipses ou des rectangles ; pour les premières, les sauts sont faibles mais nombreux (et la géométrie tend à être lisse lorsque le maillage s'affine), tandis que pour les seconds, ils sont peu nombreux mais importants (et indépendants du maillage). On verra par la suite qu'à densité de maillage comparable, la précision est également comparable dans les deux cas.

[7] Le terme naturellement repose soit sur une raison physique évidente : il n'y aurait aucun sens à insérer une source dans un milieu infiniment conducteur, soit sur l'équation (3.6).

[8] $-u^d|_\Omega = u^i|_\Omega$ puisque u s'annule dans Ω.

Nous avons nommé le courant **j** substituant la source S une *antenne virtuelle*, d'où l'indice v apparaissant dans le champ u_v^i.

cas particulier du cercle

Si Γ a une forme quelconque, alors u (ou plus précisément u^d) ne peut être exprimée que numériquement. On extrait alors le courant **j** généré et la simulation sur la diffraction par un objet, inclus dans Ω peut débuter (évidemment, Ω a maintenant les propriétés du milieu hôte et n'est plus un métal infiniment conducteur). Cependant, si Γ est un cercle (que l'on prendra centré sur l'origine et de rayon R), il est possible d'obtenir une expression analytique de **j**.

Étant donné que le champ électrique généré par l'antenne virtuelle satisfait une équation de Helmholtz (eq.3.2), il vérifie le développement de Fourier-Bessel suivant :

$$u_v^i(r,\theta) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(a_n^{in} J_n(k_r r) + b_n^{in} H_n^{(1)}(k_r r)\Big) e^{in\theta}, & r \leq R \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(a_n^{out} J_n(k_r r) + b_n^{out} H_n^{(1)}(k_r r)\Big) e^{in\theta}, & r \geq R \end{cases}$$

Dans Ω, le champ est borné (eq.3.4 et 3.6) et donc tous les b_n^{in} s'annulent. En dehors de Ω, u_v^i satisfait une COS (eq.3.3), ce qui implique que les a_n^{out} valent identiquement zéro. Par l'équation (3.4), les restrictions à Ω de u_v^i et de u^i sont identiques ; écrivons donc le développement de Fourier-Bessel de u^i :

$$u^i(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n J_n(k_r r) e^{in\theta},$$

et l'on a donc $a_n^{in} = a_n$. Enfin, u_v^i étant continu à l'interface, on a $b_n^{out} = \dfrac{a_n^{in} J_n(k_r R)}{H_n^{(1)}(k_r R)}$. Toutes les conditions (de eq.3.2 à eq.3.6) ont été utilisées, et l'on obtient ainsi l'unique solution pour u_v^i :

$$u_v^i(r,\theta) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n J_n(k_r r) e^{in\theta}, & r \leq R \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{a_n J_n(k_r R)}{H_n^{(1)}(k_r R)} H_n^{(1)}(k_r r) e^{in\theta}, & r \geq R \end{cases}$$

Développant $\jmath$ sur une base de Fourier,

$$\jmath(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} j_n(r) e^{in\theta},$$

et appliquant la relation (3.11), on déduit l'expression suivante pour le courant circulant sur l'antenne virtuelle :

$$j_n(r) = \frac{a_n k_r}{2i\omega\mu_0} \Big\{ \frac{J_n(k_r R)}{H_n^{(1)}(k_r R)} (H_{n-1}^{(1)} - H_{n+1}^{(1)})(k_r r) - (J_{n-1} - J_{n+1})(k_r r) \Big\}.$$

On rappelle que, pour simuler une onde plane d'amplitude A, se propageant le long de l'axe des x en sens décroissant, les coefficients a_n sont $a_n = A(-i)^n$, et que pour un champ généré par un courant d'intensité I circulant dans un fil parallèle à l'axe (O, z) et coupant le plan de l'étude au point (r_s, θ_s) en coordonnées polaires, on a $a_n = \dfrac{\omega\mu I}{4} H_n^{(1)}(kr_s)e^{-in\theta_s}$. Le troisième cas que l'on utilisera sera un faisceau gaussien ; nous prendrons alors sa transformée de Fourier numériquement.

Le courant $\mathbf{j}$ sur Γ, ainsi que la partie réelle $\Re e\{u_v^i\}$ du champ virtuel, sont présentés sur les figures 3.4 et 3.5. Un exemple de simulation d'une onde plane dans un rectangle est présenté sur la figure 3.1.1.

3.1.2 En guise de vérification

Les mêmes équations conduisent-elles aux mêmes solutions ?

Les caractéristiques de l'objet situé dans Ω_d étant fixées, est-ce que les champs incidents u^i et u_v^i conduisent aux mêmes champs diffractés, respectivement u^d et u_v^d ? On autorise le "k" du milieu à être non-linéaire, mais l'on se restreint à un milieu magnétiquement homogène.

D'un côté nous avons

$$\triangle u + k^2(u)u = \mathfrak{s}, \tag{3.12}$$

$$\triangle u^i + k_r^2 u^i = \mathfrak{s}, \tag{3.13}$$

$u^d := u - u^i$ vérifie les conditions d'onde sortante ; nous en déduisons

$$\triangle u^d + k^2(u^i + u^d)u^d = (k_r^2 - k^2(u^i + u^d))u^i. \tag{3.14}$$

D'une manière similaire, les équations pour les champs virtuels sont

$$\triangle u_v + k^2(u_v)u_v = -i\omega\mu_0\mu_r j\delta_\Gamma, \tag{3.15}$$

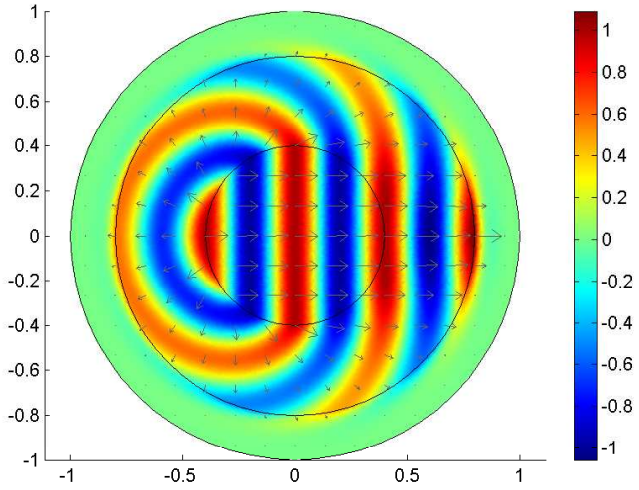
$$\triangle u_v^i + k_r^2 u_v^i = -i\omega\mu_0\mu_r j\delta_\Gamma, \tag{3.16}$$

$u_v^d := u_v - u_v^i$ vérifie les conditions d'onde sortante ; ce qui amène à

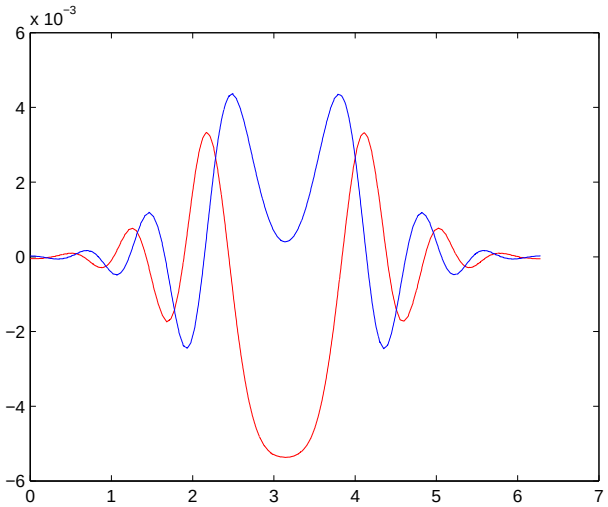
$$\triangle u_v^d + k^2(u_v^i + u_v^d)u_v^d = (k_r^2 - k^2(u_v^i + u_v^d))u_v^i. \tag{3.17}$$

Dans $\overline{\Omega_d}$, puisque $\overline{\Omega_d}$ est inclus dans $\overline{\Omega}$ et que $u_v^i|_{\overline{\Omega_i}} = u^i|_{\overline{\Omega_i}}$, u^d et u_v^d satisfont la même équation aux dérivées partielles. Il en est de même dans $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega_d}$, où $k^2(u^i + u^d)$ et $k^2(u_v^i + u_v^d)$ valent k_0^2, (et par conséquent les termes de droites sont nuls). En outre, u^d et u_v^d vérifient toutes deux une condition d'onde sortante et sont continues sur Γ. On en déduit que ces deux fonctions satisfont exactement les mêmes conditions.

Le dernier paragraphe est rassurant, mais le problème n'est pas forcément bien posé pour autant. Nous sommes en présence d'équations aux dérivées partielles ordinaires non-linéaires, et rien ne nous assure de l'unicité de la solution. En particulier, il n'est pas impossible que, dans une étude numérique, le *solveur* converge vers une solution

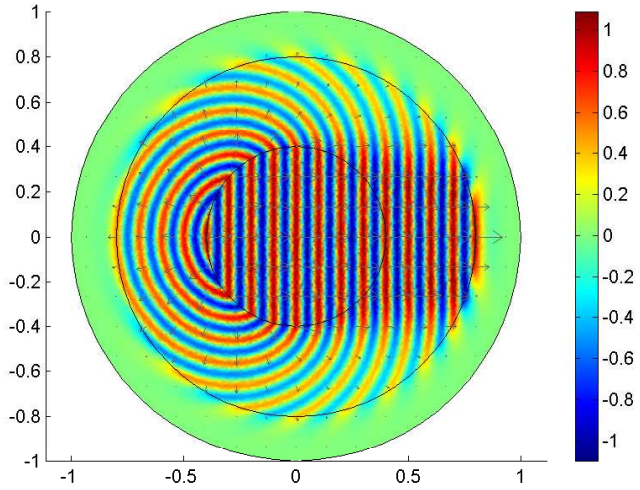


(a) La partie réelle $\Re e\{u_v^i\}$, en $V.m^{-1}$, du champ généré par l'antenne virtuelle, et des flèches indiquant le flot du vecteur de Poynting.

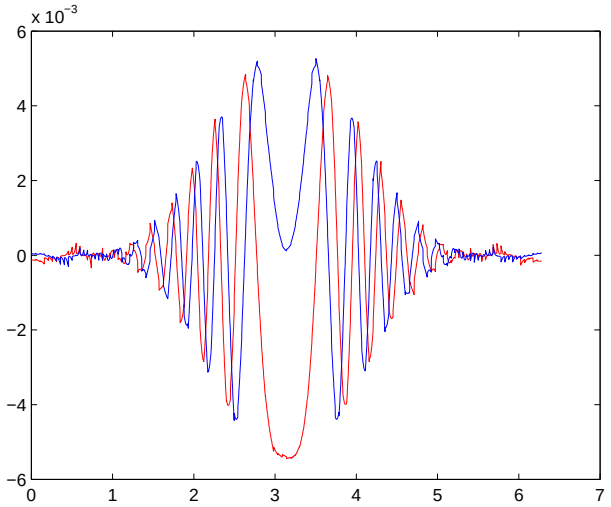


(b) Les parties réelle (en rouge) et imaginaire (en bleu) du courant **j**, en $A.m^{-1}$, de l'antenne virtuelle, en fonction de l'angle polaire. Comme on le voit dans 3.4(a), deux longueurs d'onde sont simulées dans Ω.

FIG. 3.4 – Une onde plane u_v^i est générée dans le disque Ω par le courant **j** sur $\Gamma = \partial\Omega$. En dehors de Ω, u_v^i diffère de u^i (qui est une onde plane) ; en particulier, u_v^i satisfait une COS, d'où l'utilisation de PML (l'anneau extérieur, sur le bord duquel u_v^i s'annule presque - voir la section 3.2).

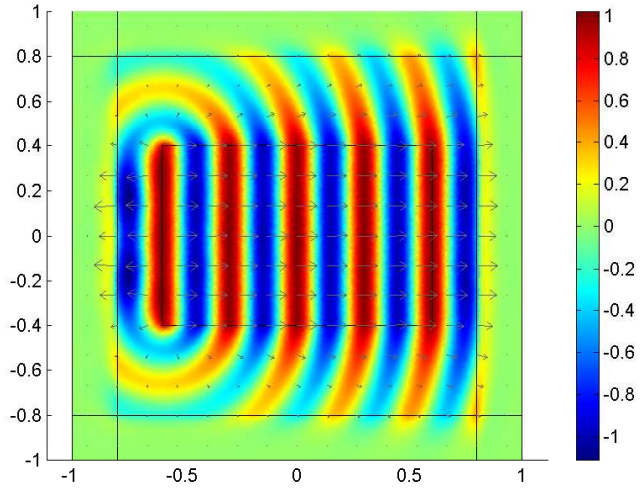


(a) Même chose que 3.4(a), avec huit longueurs d'onde simulées dans Ω.

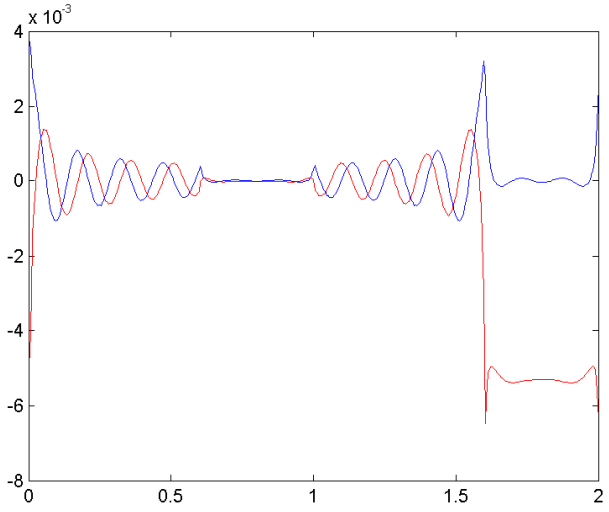


(b) Même chose que 3.4(b), avec huit longueurs d'onde simulées dans Ω.

FIG. 3.5 – Même chose que 3.4, avec huit longueurs d'onde simulées dans Ω. On voit qu'il devient difficile d'avoir un courant (et donc un champ) précis si le nombre de longueurs d'onde augmente.



(a) Même chose que 3.4(a), lorsque Ω est un rectangle.



(b) Même chose que 3.4(b), lorsque Ω est un rectangle.

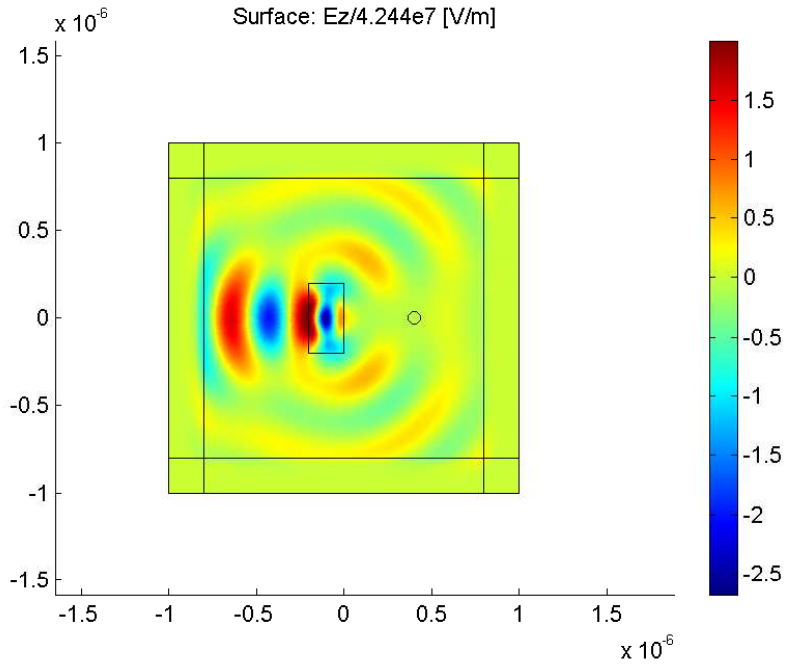


FIG. 3.6 – Carte du champ diffracté par un matériau caractérisé par $(\varepsilon_r, \mu_r) = (3, 2)$. L'inconnue de ce problème était le champ diffracté.

dans un cas et vers une autre dans l'autre cas (à supposer que u^i soit directement implémentable). Nous avons cherché, en vain, ce genre de phénomène, où la source consistait en un courant circulant sur un fil proche d'un cristal photonique non-linéaire susceptible de présenter de la bistabilité, (c'est-à-dire que plusieurs solutions satisfaisaient le système).

Diffraction par un matériau linéaire

Nous avons également voulu vérifier notre méthode et tester sa robustesse par une simulation numérique. Nous avons donc comparé des figures de diffraction d'une onde plane sur un objet linéaire avec des valeurs de permittivité et de perméabilité relatives respectivement égales à 3 et 2.

Dans le premier cas, l'onde plane est obtenue à partir de la première méthode exposée dans le chapitre : l'inconnue du problème est le champ diffracté. La distance entre la source, ici un courant circulant dans un fil, et l'objet est de cent longueurs d'onde. Nous obtenons la carte de champ de la figure 3.6.

Dans le deuxième cas, l'onde plane est simulée par le courant calculée dans la méthode de l'antenne virtuelle. Le résultat est présenté sur la figure 3.7.

Les cartes de champ, restreintes à Ω sont très semblables, ce qui conforte notre méthode. Remarquons néanmoins que la méthode de l'antenne virtuelle présente deux

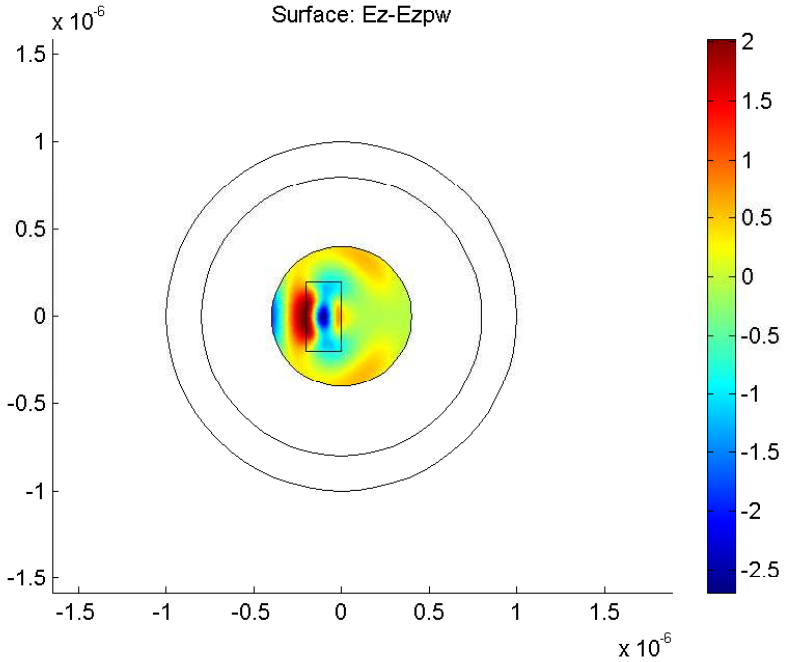


FIG. 3.7 – Carte du champ diffracté par un matériau caractérisé par $(\varepsilon_r, \mu_r) = (3, 2)$. L'inconnue de ce problème était le champ total.

avantages :

- Dans la première méthode, nous avons simulé une onde plane par une onde cylindrique (afin d'éviter que la solution nulle ne soit exhibée) dont la source est très éloignée de l'objet diffractant. La précision est donc moindre.
- La méthode de l'antenne virtuelle donne un accès direct à l'amplitude du champ incident. Ceci est impossible avec la première méthode, et c'est pourquoi nous avons renormalisé le champ sur la figure 3.6.

3.1.3 La polarisation TM

Nous souhaitons simuler un champ incident dans Ω en polarisation TM - on écrit alors $\mathbf{H} = \Re e\{ue^{-i\omega t}\}\hat{z}$. On rappelle que la section 2.2 donnait les conditions que doivent satisfaire les tenseurs de susceptibilité et de perméabilité pour que la polarisation du champ incident soit préservée par le champ total. La généralisation à d'autres champs incidents étant immédiate, nous ne traitons que le cas de l'onde plane. Aussi, nous supposons immédiatement que Ω est un disque.

L'idée est d'adapter la méthode de la section 3.1.1. Cependant, on se heurte rapidement à un problème pratique : du fait de la relation $n \times (\mathbf{H}_{ext} - \mathbf{H}_{int}) = \mathbf{j}|_\Gamma$, le courant électrique doit être dans le plan (O, x, y), ce qui, en gardant la spécificité bidimensionnelle de nos simulations, n'est pas implémentable dans le logiciel Comsol Multiphysics que nous utilisons.

Il existe cependant une autre possibilité, qui se rapproche de l'esprit de la section déjà citée. Puisque cette simulation d'onde plane n'est qu'un problème *numérique*, on peut mettre un courant *magnétique*. On "recopie" alors le travail déjà fait avec le changement de variable $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{j}) \mapsto (\mathbf{H}, -\mathbf{B}, \mathbf{E}, -\mathbf{D}, \mathbf{j}^m)$ où $\mathbf{j}^m$ est le courant magnétique. À nouveau, des charges (électriques ou magnétiques) seront non nécessaires.

Partons des équations de Maxwell transformées :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{j}^m.$$

On a alors :

$$\nabla \times (\varepsilon_r^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) = \varepsilon_0 \mu \omega^2 \mathbf{H} - i\omega\varepsilon_0 \mathbf{j}^m.$$

Puisque les conditions à l'interface sont inhabituelles, nous les détaillons :

- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \hat{n} \cdot [\mathbf{B}]\,|_\Gamma = 0$
- $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \hat{n} \cdot [\mathbf{D}]\,|_\Gamma = 0$
- $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \hat{n} \times [\mathbf{H}]\,|_\Gamma = 0$
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{j}^m \Rightarrow \hat{n} \times [\mathbf{E}]\,|_\Gamma = \mathbf{j}^m$

Dans notre cas (régime harmonique, milieu électriquement isotrope, non magnétique, polarisation TM), elles se réduisent à :

- $[u]\,|_\Gamma = 0$

– $-i\omega\varepsilon_0 \mathbf{j}^m = \left[\varepsilon_r^{-1}\hat{n}\times(\nabla\times\mathbf{H})\right]|_\Gamma = -\left[\varepsilon_r^{-1}\frac{du}{dr}\right]|_\Gamma \hat{z}$.

La décomposition de la fonction u à l'intérieur et à l'extérieur de Γ (cercle de rayon R centré sur l'origine) est :

$$\begin{cases} u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n J_n(k_r r)e^{in\theta}, \quad r \leqslant R \\ u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{i^n J_n(k_r R)}{H_n^{(1)}(k_r R)} H_n^{(1)}(k_r r)e^{in\theta}, \quad r \geqslant R \end{cases}$$

où l'on a déjà pris en compte la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface.

Écrivons la décomposition en série de Fourier de la source :

$$s = i\omega\varepsilon_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} j_n^m e^{in\theta}.$$

Le saut de la dérivée normale du champ magnétique à l'interface donne donc :

$$j_n^m = \frac{-i^n}{2i\omega\varepsilon 0}\left\{\frac{k_r}{\varepsilon_r}(J_{n-1}-J_{n+1})(k_{int}r_0) - \frac{k_r}{\varepsilon_r}\frac{J_n(k_r r_0)}{H_n^{(1)}(k_r r_0)}(H_{n-1}^{(1)} - H_{n+1}^{(1)})(k_r r_0)\right\}.$$

Hélas, si cette astuce peut paraître intéressante, les courants magnétiques ne sont implémentables sur Comsol Multiphysics qu'en trois dimensions… De plus, la résolution est alors complètement vectorielle et l'on perd énormément de temps et de mémoire pour trouver $\mathbf{H}\cdot\hat{x} = \mathbf{H}\cdot\hat{y} = 0$. Nous nous sommes finalement cantonnés à la polarisation $E \parallel$.

3.2 Les couches parfaitement adaptées

3.2.1 Principe des couches parfaitement adaptées

Cette section explique succinctement ce que sont les PML (pour Perfectly Matched Layer, soit couches parfaitement adaptées). Nous voulons simplement donner le principe[9], sans chercher des généralisations systématiques (le lecteur intéressé peut se reporter à [80], [81]). Leur nécessité est évidente : nous simulons la diffraction dans un domaine physique R très grand, voire non-borné (puisque R est souvent le plan $\mathbb{R}^2$) par la méthode des éléments finis, qui maille un domaine Ω_m fini.

On est donc réduit à déclarer que seule une partie DI est (supposée) digne d'intérêt[10]. Attention, lorsque nous utilisons une antenne virtuelle, le champ à l'extérieur de Γ, bien que n'ayant aucune signification physique, est néanmoins dans DI. Les valeurs des champs sont inconnues sur le bord de DI, mais connues sur le "bord" de R, ou à l'infini dans le cas $R = \mathbb{R}^2$, puisque le champ diffracté satisfait, par définition, la condition d'onde sortante. Les PML sont un outil qui permet de connaître les champs dans

[9] Précisons que celles que nous avons utilisés dans les simulations présentées aux chapitre 4 et 5 furent mises en œuvre par le logiciel Comsol Multiphysics.

[10] DI est choisit homéomorphe à un disque. L'acronyme est pour domaine d'intérêt.

DI, en résolvant une équation aux dérivées partielles dans DI avec aucune condition de bord sur ce domaine.

Soit PML une région de R entourant DI, contenant les PML. Dans DI, le système électromagnétique est décrit par le couple $(\varepsilon(P), \mu(P))$ pour tout point P de DI. On suppose que le milieu diffractant, qui occupe l'espace Ω_d, est entièrement inclus dans DI, et qu'il est entouré de vide. On a donc

$$P \in \partial DI \Rightarrow (\varepsilon(P), \mu(P)) = (\varepsilon_0, \mu_0).$$

Nous étendons le système de DI à $\mathbb{R}^2$ en "remplissant" $\mathbb{R}^2 \backslash DI$ de vide.

On prolonge encore ce système à $\mathbb{C}^2$, isomorphe à $\mathbb{R}^4$ en tant que variété réelle. On se donne alors un système de coordonnées $(x, y) = (x' + ix", y' + iy")$ tel que (x', y') soit un système de coordonnées dans le plan $\mathbb{R}^2$ de l'étape précédente. Les propriétés optiques des points tels que $(x', x") \neq (x', 0)$ ou $(y', y") \neq (y', 0)$ sont à nouveau (ε_0, μ_0).

On restreint $\mathbb{C}^2$ à une surface réelle $\mathcal{P} = s(DI \cup PML)$ où s est une application injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ telle que sa restriction à DI (plongé dans $\mathbb{C}^2$) soit l'identité.

On réalise alors une transformation géométrique : on ramène, par l'application s^{-1}, le système composé des points de $\mathcal{P}$ et des caractéristiques induites par l'application s de (ε_r, μ_r) dans $s(DI)$ et (ε_0, μ_0) dans $s(PML)$, dans $DI \cup PML$, avec des caractéristiques $(\tilde{\varepsilon_r}, \tilde{\mu_r})$. Puisque $s_{|DI} = id_{|DI}$, on a à nouveau les caractéristiques (ε_r, μ_r) dans DI. Autrement dit, l'équation à résoudre est localement, i.e., dans le domaine d'intérêt, la même. En revanche, le milieu PML n'a plus les caractéristiques du vide.

L'application s n'est pour l'instant pas du tout spécifiée dans PML. On lui impose alors les conditions suivantes :

- elle est continue : ainsi, les champs qui "s'échappent" de DI ne rencontreront aucun obstacle qui en ramènerait une partie dans ce domaine, par réflexion ;
- elle assure aux champs une décroissance exponentielle dans les PML.

La dernière étape consiste à tronquer les champs, en choisissant une zone PML suffisamment grande pour garantir la petitesse de ces variables. Pour résumer, le système physique nous donne les EDP dans DI, s nous donne les EDP dans PML et la condition de bord de PML est une condition de Dirichlet[11].

3.2.2 Implémentation des couches parfaitement adaptées

Nous étudierons trois géométries bidimensionnelles : un cristal photonique fini (dans le chapitre 4) dont l'ensemble des tiges a une forme globale relativement circulaire, un cercle (chap. 5) et un cristal photonique infini (chap. 4 et 5). Dans les deux premiers cas, il sera opportun de placer l'antenne virtuel sur un cercle Γ entourant le système diffractant Ω_d. Le domaine d'intérêt DI sera donc à symétrie circulaire. Les PML sont alors faciles à implémenter. Nous donnons tous les détails.

[11] En vérité, il est plus adroit de mettre une condition de Neumann : puisque un champ quelconque u est à décroissance exponentielle dans PML, non seulement u, mais également sa dérivée tend à s'annuler. Laisser libre la valeur de u sur le bord extérieur de PML est donc un moyen de vérifier qu'elle est effectivement proche de zéro.

Les régions DI et PML sont respectivement le disque $\mathcal{D}(0, r_d)$ et l'anneau $\mathcal{D}(0, r_f)\backslash\mathcal{D}(0, r_d)$; r_d et r_f sont donc les rayons des cercles délimitant les PML.

Soient

$$\begin{array}{llll} \sigma : & (r_d, +\infty) & \rightarrow & \mathbb{R}, \\ & \rho & \mapsto & (\dfrac{\rho - r_d}{r_f - r_d})^m \tau, \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} s : & \mathcal{D}(0, r_f) & \rightarrow & \mathbb{C}, \\ & (\rho, \phi) & \mapsto & (\Xi_{[0,r_d]}(\rho) + (1 - i\dfrac{\sigma(\rho)}{\omega\varepsilon_0})\Xi_{(r_d,r_f]}(\rho), \phi), \end{array}$$

où m et τ sont des constantes réelles à déterminer (leur valeur exacte n'a en fait que peu d'intérêt, pourvu que la décroissance rapide soit assurée).

La surface $\mathcal{P}$ est ainsi définie par $\mathcal{P} = s(DI \cup PML)$ et on la munit du système de coordonnées $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$ donné par

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \int_0^\rho s(\rho')d\rho' \\ \tilde{\phi} = \phi. \end{cases}$$

On vérifie que

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho, & 0 \leq \rho \leq r_d \\ \rho - \frac{i\tau}{\omega\varepsilon_0(m+1)} \frac{(\rho - r_d)^{m+1}}{(r_f - r_d)^m}, & r_d \leq \rho \leq r_f. \end{cases}$$

Le logiciel Comsol Multiphysics ne comprenant que les coordonnées cartésiennes, il nous faut quatre systèmes de coordonnées : $e_{\tilde{x}} := (\tilde{x}, \tilde{y})$, $e_{\tilde{\rho}} := (\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$, $e_\rho := (\rho, \phi)$, $e_x := (x, y)$. Si l'on note J_{ab} la Jacobienne du système de coordonnée a vers le système de coordonnée b, on a

$$J_{e_{\tilde{x}} e_{\tilde{\rho}}}(\tilde{\rho}, \tilde{\phi}) \begin{pmatrix} cos(\tilde{\phi}) & -\tilde{\rho} sin(\tilde{\phi}) \\ sin(\tilde{\phi}) & \tilde{\rho} cos(\tilde{\phi}) \end{pmatrix},$$

$$J_{e_{\tilde{\rho}} e_\rho}(\rho, \phi) \begin{pmatrix} s(\rho) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_{e_\rho e_x}(x, y) \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Nous plongeons maintenant le système initial dans un espace réel tridimensionnel, que nous prendrons doté d'un système de coordonnées $(0, x, y, z)$ de telle sorte que $(0, x, y)$ soit le système de coordonnées du même nom que l'on utilisait dans $\mathbb{R}^2$. Puisque nous sommes en polarisation $E \parallel$ et en milieu z-anisotrope, et que la transformation géométrique ne modifie en rien l'axe $(0, z)$, la permittivité est inchangée dans les PML. En revanche, la perméabilité devient

$$\mu(x, y) = J^{-1}_{e_{\tilde{x}} e_x} \mu_0 (J^{-1}_{e_{\tilde{x}} e_x})^T det J_{e_{\tilde{x}} e_x}$$

où A^T est la matrice transposée de A. On rappelle que

$$J_{e_{\tilde{x}} e_x} = J_{e_{\tilde{x}} e_{\tilde{\rho}}} J_{e_{\tilde{\rho}} e_\rho} J_{e_\rho e_x}.$$

Nous avons signalé que nous aurons également besoin de PML lors de l'étude du cristal photonique infini. Ces PML, rectangulaires, se construisent sur le même principe.

Chapitre 4

Diffraction par un cristal photonique présentant un effet Kerr-optique non négligeable

> Toi qui médites sur la nature des choses, je ne te loue point de connaître les processus que la nature effectue ordinairement d'elle-même, mais me réjouis si tu connais le résultat des problèmes que ton esprit conçoit.
>
> Leonard

4.1 Introduction

4.1.1 Les cristaux photoniques

A l'échelle qui nous intéresse (fréquences proches du spectre optique), la lumière est une onde électromagnétique, c'est-à-dire une oscillation des champs électrique et magnétique, ainsi que des champs d'induction associés. Cette oscillation est généralement décomposable, par transformation de Fourier, en oscillations périodiques, dans l'espace et dans le temps. On s'intéresse alors couramment au comportement des ondes périodiques élémentaires : les ondes planes. Une stratégie pour contrôler la lumière est de la faire se propager dans un milieu lui aussi périodique ; ainsi peut-on espérer l'existence de phénomènes de résonance entre les deux périodes. Autrement dit, nous cherchons des domaines de fréquences dans lesquels, pour une faible variation de la longueur d'onde, le comportement des champs variera énormément.

Le chemin, entre les objectifs juste cités et leur réalisation pratique fut bien long : les études théoriques débutèrent en 1887, lorsque Lord Rayleigh montra qu'un empilement périodique (selon une dimension) de plusieurs couches de diélectriques pouvait presqu'empêcher la lumière, oscillant entre deux fréquences ν_1 et ν_2 déterminées, de

passer. L'empilement est appellé un *miroir de Bragg*, et l'on dit que ν_1 et ν_2 encadrent une *bande interdite*[1]. Un siècle s'est écoulé avant qu'Eli Yablonovitch et Sajeev John, en 1987, construisent des structures bi- ou tridimensionnelles possédant des bandes interdites ([83]). Mais, hélas !, ces structures appelées cristaux photoniques étaient situées dans le domaine millimétrique, et leur réalisation avec des bandes interdites localisées dans les domaines visible ou proche infrarouge restait un objectif au début de cette décennie ([84]). Même si depuis, les techniques n'ont cessé de s'améliorer, la fabrication du système principal que l'on proposera dans cet article n'est pas encore possible.

Les cristaux photoniques jouissent de grandes applications technologiques, pour acheminer ou pour filtrer la lumière. En effet, en entourant de l'air par une structure à bande interdite, la cavité ainsi formée fait office de guide d'onde à très faibles pertes. Ceci est prometteur dans différents champs d'application : les communications (pour, par exemple, assurer un nouveau mode de confinement dans les fibres microstructurées ([42]), inhiber, sur certaines plages de fréquences, les émissions spontanées dans les lasers, etc.), la chimie ou la médecine (la modification des caractéristiques du guide apportée par la présence d'une molécule dans le guide est négligeable ; la lumière peut alors "pousser" ladite molécule et l'acheminer à un endroit très précis ([82])), l'informatique, etc. Nous proposerons un exemple de filtre dans ce chapitre.

L'étude numérique des cristaux photoniques est maintenant axée sur de nombreux points, parmi lesquels :

- la simulation des structures tridimensionnelles,
- un contrôle maximal des bandes photoniques interdites ; c'est-à dire que l'on veut savoir quelles fréquences, quelles polarisations, quelles incidences, etc. vont être "bloquées",
- la prise en compte des effets non-linéaires ([85], [86], [87], [88], etc.).

Nous nous plaçons dans cette dernière optique. Plus précisément, nous allons étudier l'effet Kerr-optique. D'après le chapitre 1, nous devons donc considérer l'ordre trois et le degré trois. Le système d'équation à résoudre est donc (1.29). Cependant, ce système présente de nombreuses difficultés par rapport au cas linéaire, et nous avons préféré traiter, dans un premier temps, l'effet Kerr-optique isolément ; le chapitre 5 présentera des solutions du système complet.

Nous supposons donc que, devant $\chi^{(3)}(\omega, \omega, -\omega)$, tous les $\chi^{(3)}$ sont négligeables, et que les $\chi^{(2)}$ s'annulent. Il n'y a donc qu'une seule composante positive dans le spectre des champs. La permittivité ε, que l'on rencontre en régime linéaire, peut alors être élargie, et l'on écrit $\mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E} + \varepsilon_2 \overline{\mathbf{E}}$, où ε_1 dépend de $\mathbf{E} \otimes \overline{\mathbf{E}}$, et ε_2 dépend de $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$. La polarisation que l'on choisira nous permettra d'écrire $\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi^{(1)} + \chi^{(3)}\|\mathbf{E}\|^2)\mathbf{E}$.

Pour résumer, nous allons étudier la diffraction d'une onde plane à travers un cristal photonique (fini) présentant un effet Kerr-optique non-négligeable. Avant de rentrer dans les détails de l'analyse numérique, nous présentons, dans la sous-section suivante, quelques aspects de l'effet Kerr-optique.

[1] Ce nom est issu de la physique des états solides - nous donnerons quelques détails concernant l'analogie entre les deux sujets d'étude à la page 116. Pour que lui soit exposée une analyse plus précise, le lecteur peut se reporter à l'article introductif [82], ainsi qu'aux références qu'il y trouvera.

Parenthèse sur la localisation d'Anderson

Nous voudrions également signaler que, parallèlement à l'étude du comportement des champs dans les cristaux photoniques, s'est développé un travail sur les milieux désordonnés. Si les travaux théoriques ont commencé peu après la seconde guerre mondiale, culminant avec l'article [10] de P.W. Anderson, les méthodes numériques ont à nouveau permis de rapprocher la théorie et l'expérience. Ce que nous trouvons étonnant, c'est que des causes opposées donnent des effets similaires : les milieux périodiques que sont les cristaux et les milieux désordonnés permettent de localiser les champs électromagnétiques. Les voies vers le contrôle de la lumière, ou, dans un autre contexte, du transport des électrons, sont donc multiples.

La littérature sur ce sujet est très vaste et nous ne l'avons qu'à peine survolée, mais nous avons tout de même trouvé l'article [89], dont les conditions, exceptée bien sûr le désordre, s'approchent raisonnablement des nôtres. L'article [90] étudie l'émission de la seconde harmonique dans un milieu désordonné.

4.1.2 L'effet Kerr-optique

L'effet Kerr-optique a de nombreuses applications. Énumérons quelques exemples. En premier lieu, lorsqu'une impulsion pénètre un milieu présentant un effet Kerr-optique (nous supposerons que les coefficients pertinents des $\chi^{(3)}$ sont tous positifs), la fréquence du "début" de l'onde (où $\frac{\partial I}{\partial t} > 0$) croît (décalage vers le rouge), alors que la fréquence de la "queue" de l'onde subit un décalage vers le bleu. C'est ce que l'on appelle l'auto-modulation de phase. Dans une zone de dispersion anormale, ceci peut être utilisé pour compresser le support de l'onde, i.e., générer des impulsions ultra-courtes.

À l'inverse, les décalages de la fréquence évoqués au paragraphe précédent peuvent être utilisés pour enrichir le spectre d'un champ électromagnétique quasi monochromatique. Ceci peut être avantageux lors de la recherche de supercontinuum.

Si une onde, à chaque instant localisée dans l'espace, se propage dans un milieu présentant un effet Kerr-optique, celle-ci induit une variation des propriétés électromagnétiques de son environnement. Ces variations, proportionnelles en chaque point à la puissance de l'onde, peuvent compenser la dispersion naturelle et conduisent à la création par l'onde d'un guide pour l'onde. Si la compensation est parfaite, les anglophones appellent ce phénomène le "self-trapping" ; dans ce cas, l'enveloppe de l'onde est constante au cours du temps, et l'on parle de soliton temporel. Si la puissance du champ augmente encore, l'effet observé est le "self-focusing" si l'enveloppe rétrécit, voire la filamentation si, dû fait de certaines inhomogénéités dans le matériau ou dans le champ initial, l'enveloppe se sépare en plusieurs "filaments". R.W. Boyd donne des valeurs typiques de $\chi^{(3)}$ dans les verres ou dans les cristaux : de l'ordre de[2] $10^{-20}\, m^2/W$, ce qui conduit à des puissances de l'ordre du megawatt pour atteindre le self-trapping.

Le guide créé par une onde p peut ne pas être adapté à elle-même, p, mais à une onde s d'une autre fréquence. On appelle alors p l'onde de pompe et s le signal. R. De La Fuente, A. Barthelemy et C. Froehly, dans [91], relatent une expérience où s n'est autre que la seconde harmonique de p.

[2] Bien noter l'unité ; dans le reste de l'ouvrage, les $\chi^{(3)}$ sont exprimés en m^2/V^2.

4.2 Diffraction bidimensionnelle par un réseau fini de cercles "non-linéaires"

4.2.1 Présentation du système simulé

En 2000, E. Centeno et D. Felbacq publièrent un article ([85]) où est étudiée, notamment, la diffraction par un réseau fini de tiges invariant suivant une direction (que nous appellerons l'axe (O, z)). Nous avons essayé de recréer leur simulation et comparé certains résultats obtenus : le moins que l'on puisse dire est qu'ils sont totalement différents.

Les tiges sont entourées par le vide. Elles sont non magnétiques, stationnaires et homogènes dans le sens où la relation de constitution est indépendante des variables d'espace (même si elle lie des champs qui, eux, dépendent de ces variables). Il n'y a ni charges ni courants. Les champs sont harmoniques,

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \Re e\{\mathbf{E}_1(x, y, z)e^{-i\omega t}\},$$

et la polarisation est $\mathbf{E}\|$, i.e., le champ électrique est polarisé suivant l'axe (O, z) et $\partial_z \mathbf{E} = 0$: on parle alors de diffraction bidimensionnelle. Le système est électriquement z-anisotrope (i.e. il existe un système de coordonnées cartésiennes dans lequel $\varepsilon_{kl} = 0$ pour $(k, l) \in \{(x, z), (y, z), (z, x), (z, y)\}$) et invariant par translation suivant z. Le problème devient alors scalaire ; on choisit de le résoudre en $u := \mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}$. Dans ce cas, le seul coefficient pertinent de $\chi^{(3)}$ est $\chi^{(3)\,z}{}_{zzz}(\omega, \omega, -\omega)$, et l'on est donc assuré que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{P}$ ont la même polarisation.

De l'orientation du champ électrique et de l'invariance du système suivant cette même orientation, on déduit, grâce à l'absence de charge, que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, d'où $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0$. Les deux équations de Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{B}_1, \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = -i\omega \mathbf{D}_1, \tag{4.2}$$

donnent $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E}_1$. Soit, puisque de $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0$,

$$\Big(\triangle + k_0^2 (\varepsilon_r)_{zz}\Big) u = 0. \tag{4.3}$$

On étudie la diffraction par un réseau triangulaire fini de cercles de rayon r_t plongés dans le vide. La non-linéarité est donnée par $(\varepsilon_r)_{zz} := \varepsilon_d + \chi^{(3)}|u|^2$, $(\varepsilon_d, \chi^{(3)}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$: c'est l'effet Kerr-optique.

Le cristal est illuminé par une onde plane, arrivant de la droite, et simulée grâce à une antenne virtuelle (cf. la section 3.1.1). La figure 4.1 présente la géométrie du système. Les deux plus grands cercles contiennent les PML. Le troisième, $\partial\Omega$, est celui sur lequel est générée l'onde incidente ; le quatrième, $\partial\Sigma$, sera expliqué par la suite. Il y a une barre parallèle à l'axe (O, y) qui sert à mesurer la transmission. Cette dernière est définie comme le rapport entre le flux du vecteur de Poynting (avec les champs totaux) sur le segment $\mathcal{S}$ sur le flux du même vecteur, sur le même segment, cette fois pris avec

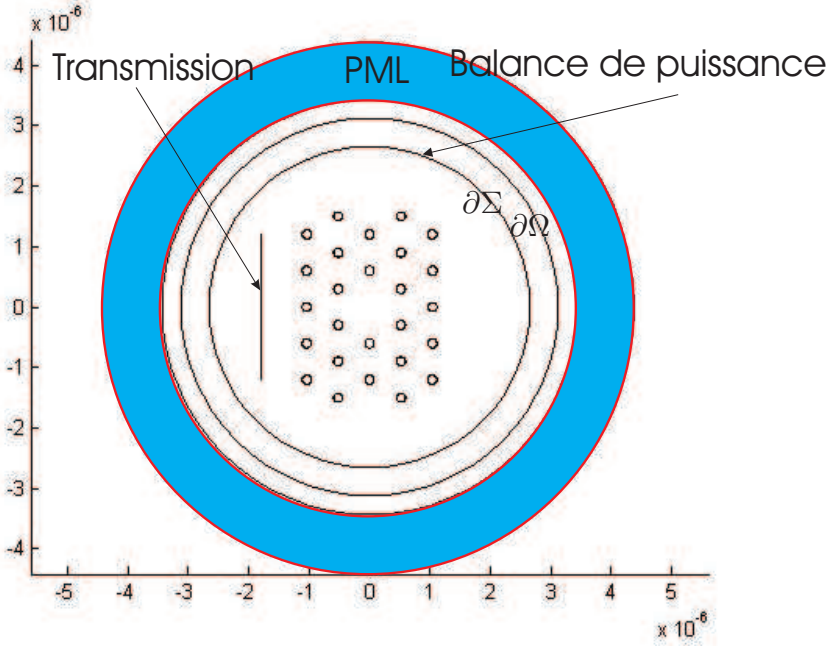


FIG. 4.1 – Une section du système étudié. Le cristal photonique consiste en vingt-six tiges (représentées par les petits cercles sur l'image) invariantes suivant la direction perpendiculaire à la feuille. Le segment $\mathcal{S}$ sur la gauche est utilisé pour l'extrapolation de la transmission à travers le cristal. Les quatre cercles centrés sur l'origine sont, du plus interne au plus externe : 1. $\partial\Sigma$, utilisé pour l'extrapolation de la puissance, 2. $\Gamma := \partial\Omega$ sur lequel le courant de l'antenne virtuelle circule, 3. la frontière intérieure des PML, 4. la frontière extérieure des PML.

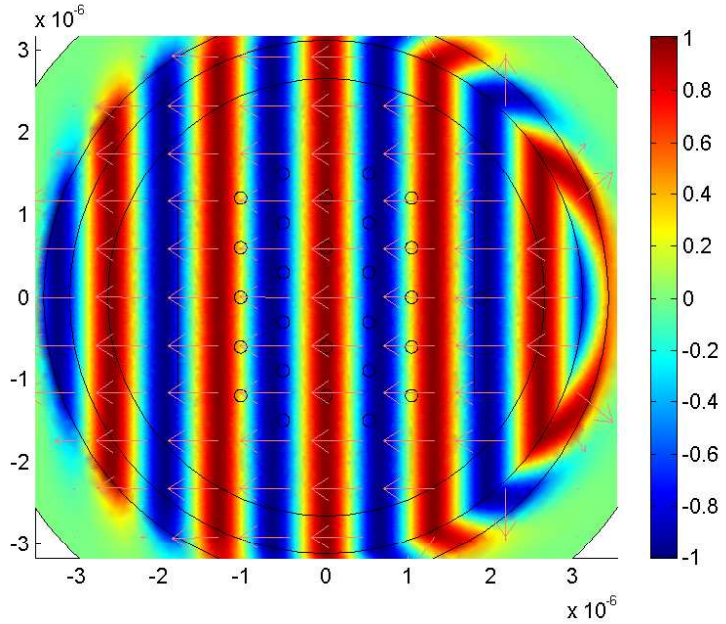


FIG. 4.2 – La partie réelle de l'onde plane incidente, en V/m, à la fréquence de résonance λ_a (voir la section 4.2.2).On observe que celle-ci est approximativement égale au diamètre de la cavité. Les flèches indiquent le flot du vecteur de Poynting du champ incident.

les champs incidents. C'est donc une mesure du rapport de la puissance circulant de la droite vers la gauche, lorsque le cristal est présent ou absent.

On donne les champs incidents en coordonnées cartésiennes : de $\mathbf{E}_1^i(x,y) = Ae^{-ikx}\hat{z}$, on déduit $\mathbf{H}_1^i(x,y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}Ae^{-ikx}\hat{y}$ ainsi que $\widetilde{\mathbf{P}^i} = \frac{-|A|^2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\hat{x}$, le vecteur de Poynting complexe[3]. Pour avoir le flux incident du vecteur de Poynting sur une barre, on multiplie simplement la dernière expression par la longueur de la barre. La partie réelle du champ électrique incident est présentée sur la figure 4.2, avec une longueur d'onde relative $\frac{\lambda}{2r_t} = 8,7$. Le pas du réseau est $d = 8r_t$.

4.2.2 Le Mode accepteur

Nous avons, tout comme MM. Centeno et Felbacq, enlevé la tige située au centre du réseau, afin de créer un mode dit accepteur. La figure 4.3 explique, mieux qu'un long discours, ce que l'on entend par là.

[3]Le lecteur a sans doute remarqué que nous posions, en degré un, dans les chapitres 1 et 2, $\mathbf{E} = 2\Re e\{\mathbf{E}_1\, e^{-i\omega t}\}$, alors que nous avons maintenant défini $\mathbf{E} = \Re e\{E_1\, e^{-i\omega t}\}$. De même nous posions $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ alors que nous nous intéressons dorénavant à $\widetilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2}\Re e\{\mathbf{E}_1 \times \overline{\mathbf{H}_1}\}$. C'est la simplicité qui

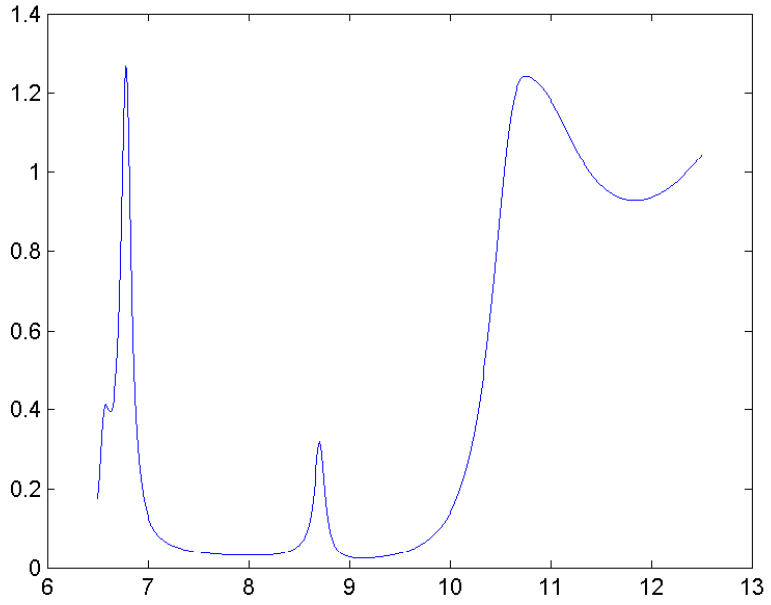


FIG. 4.3 – La transmission T en fonction de la longueur d'onde relative $\frac{\lambda}{2r_t}$. La bande interdite est approximativement entre 7 et 10 ; le mode accepteur est à $\frac{\lambda_a}{2r_t} := 8,7$.

La courbe peut choquer puisqu'elle dépasse l'unité pour certaines longueurs d'onde. Ceci signifie que le cristal peut focaliser le champ électrique derrière lui.

Voici une petite analogie permettant de mieux comprendre le vocabulaire utilisé et l'origine de ces recherches. Nous avons signalé, dans l'introduction, qu'une voie parallèle avait été abordée en physique de la matière condensée pour contrôler les mouvements des électrons. En effet, lorsqu'un electron se propage dans un semiconducteur, le potentiel de Coulomb qu'il rencontre est périodique, dû à la structure cristalline du milieu hôte. Ceci conduit aux fameuses bandes d'énergie, autorisée si un électron peut avoir une énergie située dans cette bande, ou interdite, dans l'autre cas.

Un défaut dans le cristal change localement ces bandes, et peut ainsi permettre à un électron ayant, par rapport au cristal, une énergie se situant dans une bande interdite, de se localiser autour de ce défaut.

Par ces explications heuristiques, on saisit pourquoi nous avons enlevé une tige et pourquoi cette suppression crée un mode accepteur dans la zone où la transmission était très faible (zone que certains auteurs nomment "bande interdite photonique").

Pour cette simulation, sauf mention explicite du contraire, nous avons choisi le coefficient de la permittivité relative constante [4] $\varepsilon_d = 8,41$ et l'amplitude du champ incident $A = 1O^6\, V/m$. Le coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$ oscille entre 0, -10^{-15} et $-10^{-14}\, m^2/V^2$ (Pour d'avantage accentuer les effets non-linéaires). Dans l'article de référence, avec des unités arbitraires, ε_d a la même valeur et $\chi^{(3)}$ vaut, lorsqu'il est non-nul, -10^{-3} ; l'amplitude n'est pas précisée. La communauté des numériciens utilise régulièrement ces valeurs ([85], [88], [93], etc.), valeurs qui s'identifient aux nôtres si l'on suppose qu'ils s'expriment en micromètres et en Volts.

Des valeurs typiques de non-linéarités dans les matériaux sont données dans l'article [94] : autour de $10^{-19}\, m^2/V^2$, pour les diélectriques les plus non-linéaires, pouvant aller jusqu'à $10^{-14}\, m^2/V^2$ pour les semi-conducteurs. Le prochain chapitre donnera plus de détails sur l'état actuel des possibilités expérimentales, et s'attachera à simuler des systèmes physiquement réalistes, ainsi qu'à utiliser un langage proche de celui des expérimentateurs.

Encore une fois, nous mettons en garde sur le fait que le champ présent dans la non-linéarité $\varepsilon_0\chi^{(3)}|\mathbf{E}|^2$ est le champ total et non le champ incident, et par conséquent les résultats ne sont pas indifférents au changement d'échelle $A \mapsto \alpha A$, $\chi^{(3)} \mapsto \alpha^{-2}\chi^{(3)}$, avec α réel.

Le mode accepteur est le champ correspondant à la longueur d'onde de résonance, $\frac{\lambda_a}{2r_t} = 8,7$. Cette valeur correspond approximativement au diamètre de la microcavité. Parmi les champ ayant une fréquence correspondant à l'intervalle de longueur d'onde relative $[7\,;\,10]$, ceux qui ont une fréquence très proches de $\nu_a := c/\lambda_a$ passent à travers le réseau bien plus que les autres (attention cependant à l'absence du principe de superposition : il faut "envoyer les ondes planes les unes après les autres"). Le réseau agit alors comme un filtre. MM. Centeno et Felbacq ont obtenu une courbe de transmission avec un pic de résonance centré sur $\frac{\lambda_a^{CF}}{2r_t} = 9,06$ et s'élevant sur plus de cinq

nous recommande ces choix : nous souhaitons confronter nos résultats à ceux des autres chercheurs.

[4] Cette valeur est celle du $Te_2Al_3Se_5$, couramment abrégé en TAS. Pour un descriptif de ce verre, se reporter à [92].

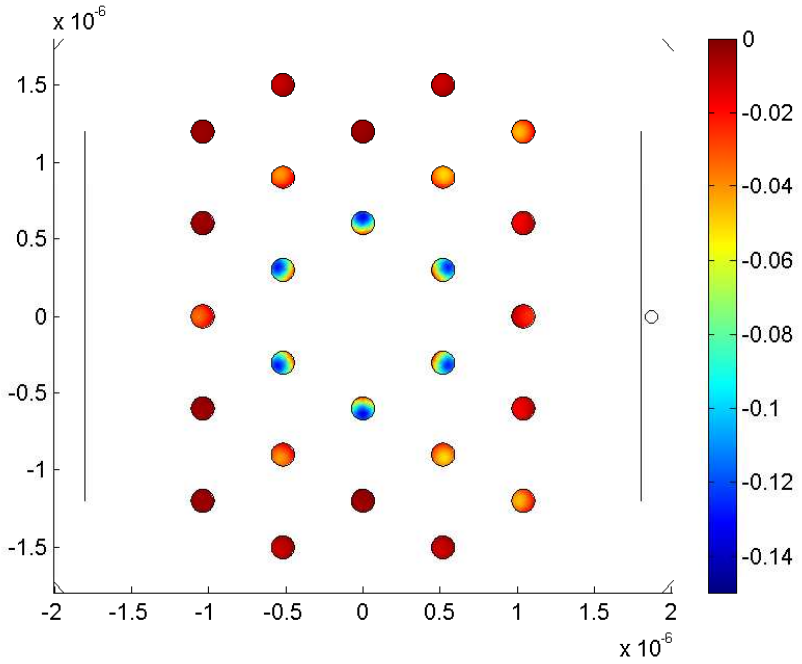


FIG. 4.4 – Carte de la variation de la permittivité relative : $\chi^{(3)}|u|^2 = \varepsilon_r - \varepsilon_d$ où la permittivité relative constante des tiges est $\varepsilon_d = 8,41$.

ordres de grandeur.

Parce que le rapport entre la longueur d'onde et la taille des cercles est grand, les auteurs de [85] ont approximé la permittivité relative dans chaque tige comme étant constante, et ceux de [93] ont supposé qu'elle était à symétrie circulaire. Ceci est appelé l'approximation au champ moyen. La figure 4.4 permet de voir les limites de cette méthode. Il y est présenté une carte de la variation de la permittivité relative des tiges lorsque $\chi^{(3)} = -10^{-14}\, m^2/V^2$ et $\lambda = \lambda_a$. Néanmoins, ces approximations dans la donnée de la permittivité relative n'engendrent qu'une très faible erreur dans le calcul du champ : en effet, puisque la valeur de ε_d retenue est grande, ces variations sont très petites ($\max \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_d}{\varepsilon_d} \leqslant 1,8\%$). L'avantage de la méthode des éléments finis, qui a un contrôle sur l'hypothèse d'homogénéité, serait plus manifeste avec une permittivité linéaire relative légèrement supérieure à un (mais d'un autre côté, la localisation est bien moindre dans ce cas ; ceci explique le décevant $\max \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_d}{\varepsilon_d} \leqslant 1\%$ sur la figure 4.5, où $\chi^{(3)} = -10^{-14}\, m^2/V^2$, $\varepsilon_d = 2$ et $\lambda = \lambda_a$).

La longueur d'onde de résonance varie très peu en fonction des paramètres : par exemple, elle passe de $8,7$ à $8,6$ si ε_d passe de $8,41$ à 2. Ceci nous amène à conjecturer que le paramètre principal concernant la longueur d'onde de résonance est la taille de la microcavité.

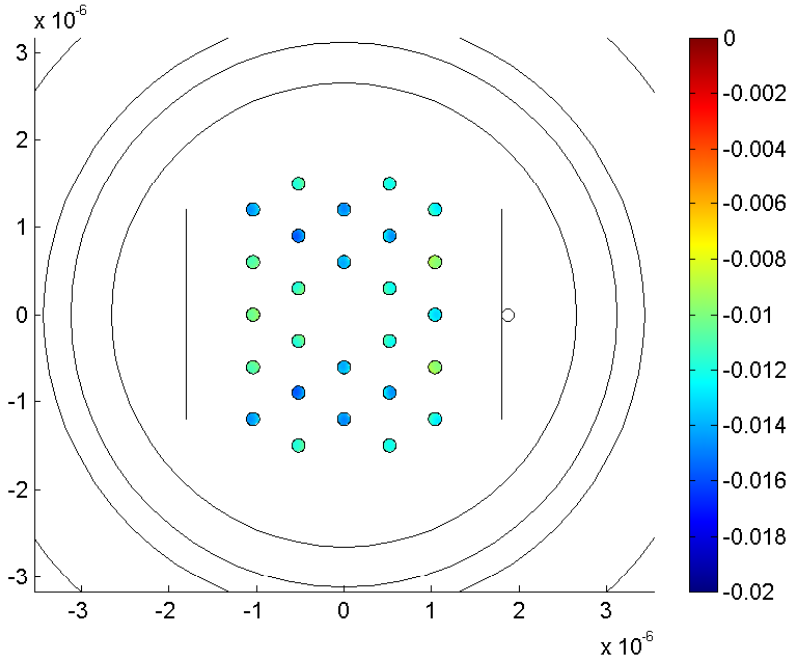


FIG. 4.5 – Carte de la variation de la permittivité relative : $\chi^{(3)}|u|^2 = \varepsilon_r - \varepsilon_d$ où la permittivité relative constante des tiges est $\varepsilon_d = 2$. On remarque que, du fait de l'absence de forte localisation, la variation de permittivité est à peu près homogène pour l'ensemble les tiges.

Une simulation de la diffraction par un super-réseau[5]non-linéaire (sans trou au milieu) a été décrite dans un autre article [95]. Il y a également une bande photonique interdite. MM. Chen et Mills ont envoyé une onde à une longueur d'onde interdite et obtenu la variation de la transmission en fonction de l'amplitude. Il y a, comme dans [85] ou [96], un phénomène de bistabilité. Malheureusement, la forme du réseau n'est pas donnée, si bien que l'on ne peut refaire l'expérience.

4.2.3 Mesures de la non-linéarité

Les cartes de champ

Nous montrons sur la figure 4.6 des cartes de la partie réelle du champ électrique total $\Re e\{u\}$. Le propre de la fréquence de résonance est la localisation du champ à l'intérieur de la microcavité (comparer les figure 4.6(a) et 4.6(d), qui sont toutes deux prises avec des tiges linéaires). C'est par cette localisation que se justifie le terme de *mode accepteur*, qui désigne donc le champ à cette longueur d'onde. Dans la microcavité, la partie réelle du champ électrique atteint la valeur, en régime linéaire, de $4,8.10^6\,V/m$; ceci est à comparer avec l'amplitude du champ électrique incident, $A = 10^6\,V/m$. Si les tiges présentent un effet Kerr-optique avec $\chi^{(3)} = -10^{-14}\,m^2/V^2$, alors la partie réelle du champ électrique atteint la valeur de $6,5.10^6\,V/m$ (fig. 4.6(b)) ; en revanche, ce pic diminue si les tiges ont une non-linéarité positive (fig. 4.6(c)). La non-linéarité permet ainsi d'accentuer ou de diminuer la localisation du champ.

La section efficace différentielle

Les tiges non-linéaires sont entourées par du vide. Par conséquent, en dehors de tout domaine de $\mathbb{R}^2$ qui contient toutes les tiges, le champ diffracté vérifie l'équation de Helmholtz avec une condition d'onde sortante. Il s'exprime donc en une série de fonction de Hankel :

$$\mathbf{E}_1^d(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}\hat{z}, \qquad (r,\theta) \notin \Omega_d. \tag{4.4}$$

Les fonctions de Hankel étant asymptotiquement (quand r tend vers l'infini) en $r^{-1/2}$, la définition suivante de la section efficace différentielle[6],

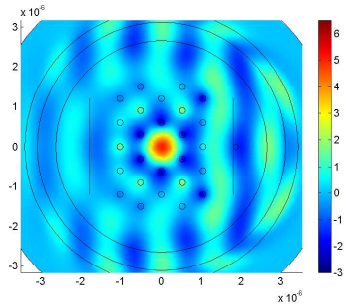
$$\sigma(\theta) = \lim_{r\to\infty} 2\pi r \frac{|\mathbf{E}^d(r,\theta)|^2}{|\mathbf{E}^i(r,\theta)|^2} \tag{4.5}$$

donne donc un nombre borné et, sauf accident ponctuel, non nul. Nous l'avons mesuré.

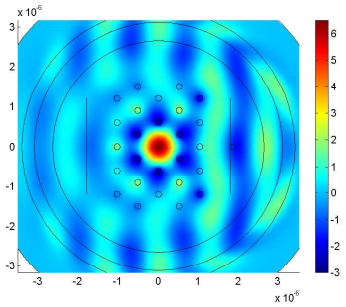
Notons que le développement (4.4) permet d'évaluer le champ électrique en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\Omega_d$. Ainsi, même avec la méthode des éléments finis, on peut connaître rigoureusement la section efficace différentielle, pourvu que l'on sache mesurer les coefficients b_n.

[5]Un super-réseau est un solide cristallin avec des couches alternées périodiquement de plusieurs substances.

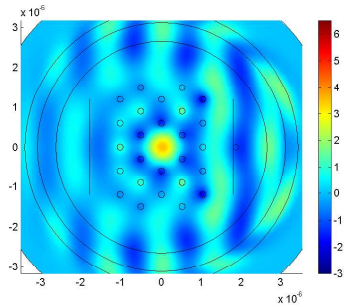
[6]Si $\mathbf{E}^i$ n'est pas une onde plane, il convient de ne pas diviser par $|\mathbf{E}^i(r,\theta)|^2$.



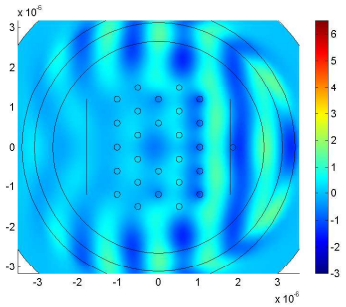
(a) $\chi^{(3)} = 0\, m^2/V^2$, $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.7$.



(b) $\chi^{(3)} = -10^{-14}\, m^2/V^2$, $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.7$.



(c) $\chi^{(3)} = 10^{-14}\, m^2/V^2$, $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.7$.



(d) $\chi^{(3)} = 0\, m^2/V^2$, $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.3$.

FIG. 4.6 – La partie réelle du champ électrique total $\Re e\{u\}$, en MV/m, pour différentes valeurs du coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$ (zero dans 4.6(a) et 4.6(d), négatif dans 4.6(b) et positif dans 4.6(c)) et pour différentes longueurs d'onde (la longueur d'onde de résonance $\lambda_r = \lambda_a$ dans 4.6(a), 4.6(b) et 4.6(c), et dans le trou dans 4.6(d)).

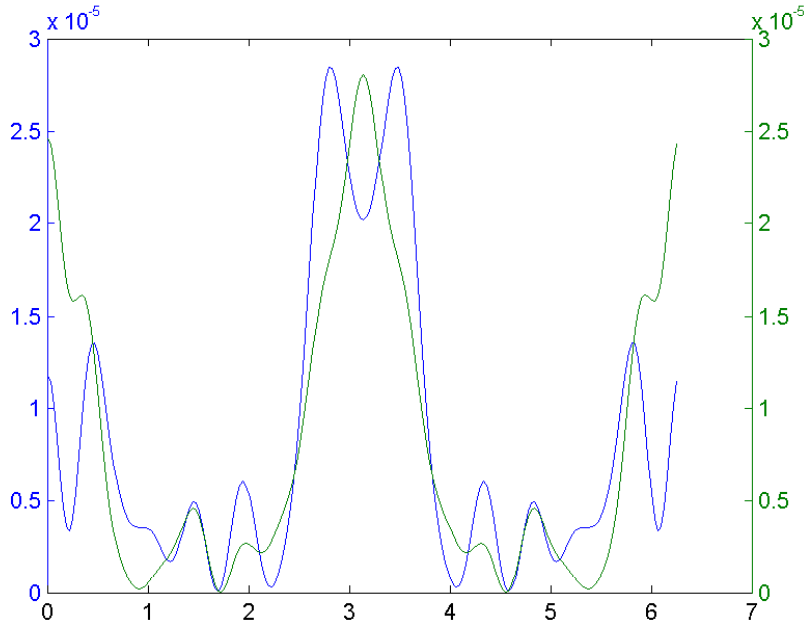


FIG. 4.7 – La section efficace différentielle à la longueur d'onde relative de résonance $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.7$ en bleue et dans la bande interdite $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.3$ en vert.

Lorsque l'on regarde les cartes de champs, sur les figures 4.6(a) et 4.6(b), on voit que la non-linéarité n'a pas d'effet visible sur ce cercle. Ceci se retrouve, dans la mesure de la section efficace différentielle, où les deux courbes, en régime linéaire et en régime non-linéaire, sont superposées. En revanche, cette fonction peut varier de façon non-négligeable pour de faibles écarts de longueur d'onde - par exemple, lorsque l'on passe de la longueur d'onde de résonance à une longueur d'onde située dans la bande interdite (comparer les figures 4.6(a) et 4.6(d)). Nous montrons les sections efficaces différentielles obtenues pour deux fréquences rapprochées sur la figure 4.7. En abscisse figure l'angle, variant entre 0 et 2π ; la valeur zéro se confond avec l'axe (O, x) dans le sens des x croissants.

L'influence de la non-linéarité sur la fréquence de résonance

Nous réalisons une autre expérience permettant encore d'observer les effets de la non-linéarité : on garde tous les paramètres fixes exceptée l'amplitude du champ incident. On collecte alors le coefficient de transmission sur le segment $\mathcal{S}$. On obtient la courbe 4.8. Le coefficient de transmission n'est pas constant, il varie très peu sur un très large spectre d'amplitude et commence à varier significativement lorsque l'amplitude dépasse le megavolt.

On peut, avec des arguments heuristiques, expliquer le comportement du coefficient

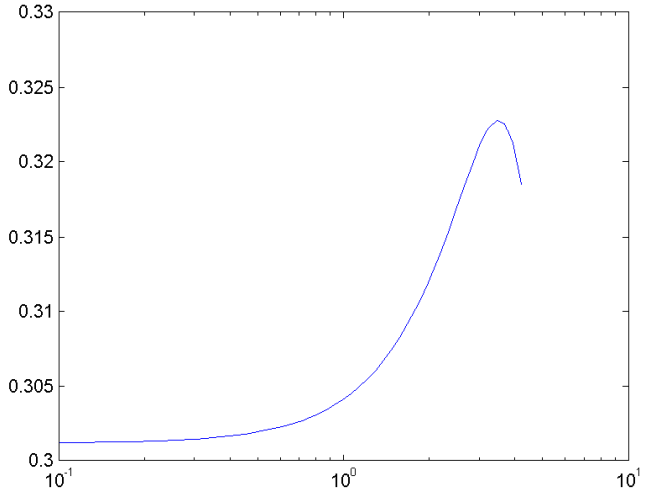


FIG. 4.8 – Le coefficient de transmission en fonction de l'amplitude, avec $\chi^{(3)} = -10^{-15}\, m^2/V^2$, $\varepsilon_d = 8,41$, $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.69$.

de transmission en fonction de l'amplitude. Un effet Kerr-optique induit une variation de la permittivité relative. Avec un $\chi^{(3)}$ négatif, lorsque l'amplitude A du champ incident augmente, la permittivité diminue. Ceci affecte le "ka" k du milieu, défini par $k := \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} k_0$ (qui, lui aussi, diminue), et par conséquent la longueur d'onde du milieu augmente. Ainsi, la longueur d'onde de résonance est plus petite, dans le cas des fortes non-linéarités que dans le régime linéaire. Ceci se voit très bien sur la figure 4.8, où nous nous plaçons à une longueur d'onde relative $\frac{\lambda}{2r_t}$ égale à 8.69. Puisque la longueur d'onde relative de résonance du système linéaire est $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.7$, nous sommes, aux faibles amplitudes, "dans le gap[7]", puis, l'amplitude augmentant, nous observons la résonance, et enfin, nous retournons dans le gap.

La limite de cet argument tient dans le fait que la longueur d'onde de résonance dépend, et ceci de manière très importante, de la taille de la microcavité, qui est, *a posteriori*, d'une longueur d'onde, comme nous l'avons remarqué à la page 117.

Afin d'appuyer les résultats du paragraphe précédent, nous représentons, sur la même figure (fig. 4.9), la transmission à travers le cristal en fonction de la longueur d'onde pour différentes amplitudes. Le résultat final n'est pas complètement satisfaisant puisque le programme n'a pas trouvé de solution lorsque l'amplitude était trop forte ($A \geqslant 5.10^6\, V/m$) et que l'on se situait proche de la fréquence de résonance. Le décalage vers les plus petites longueurs d'onde du pic ne fait cependant aucun doute.

[7]Les guillemets sont justifiées par le caractère schématique de ces commentaires : la résonance étant relativement faible et étalée, il est exagéré de dire que $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.69$ est situé dans la bande interdite. Néanmoins, le fait que l'on passe le pic avec une longueur d'onde dans le vide constante est indiscutable.

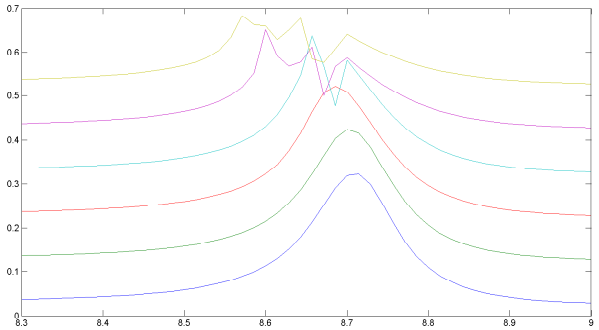


FIG. 4.9 – Le coefficient de transmission en fonction de la longueur d'onde, avec $\chi^{(3)} = -10^{-15}\, m^2/V^2$, $\varepsilon_d = 8,41$, $A \in \{0,2,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10\}$. Pour faciliter la lecture, la première courbe a été décalée de $0 \times 0,1$ vers le haut, la seconde de $1 \times 0,1$, etc. On remarque qu'à partir de $A = 5.10^6\, V/m$, le solveur ne converge pas dans la bande de résonance.

4.3 La balance énergétique

Dans le chapitre 2, nous avons généralisé le théorème optique au cas où le champ incident est polychromatique. Nous pensons qu'il peut être avantageux pour certains lecteurs d'en redonner une démonstration dans le cas beaucoup plus simple où la non-linéarité se résume à un effet Kerr-optique. Aussi, des champs incidents précis seront donnés ; il s'agit des champs les plus courants : une onde plane puis un champ généré par un fil porté par une droite parallèle à l'axe (O, z). Le cas d'un champ incident gaussien est un peu différent, puisque celui généralement donné dans la littérature ne satisfait pas les équations de Maxwell, et ne peut donc être simulé par une antenne virtuelle. Nous reviendrons sur ce point dans le prochain chapitre.

4.3.1 Un calcul préliminaire

Cette petite sous-section a pour but de déduire une conséquence (l'équation (4.8)) des conditions que nous nous sommes fixés dans tout le chapitre. En particulier, le milieu est magnétiquement linéaire, local, stationnaire, électriquement z-anisotrope. On exige maintenant qu'il soit magnétiquement isotrope.

Soient $\mu_r \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon_r \in \{\{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}\} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}\}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ vérifiant l'équation

$$\mu_r^{-1} \nabla(\nabla\, u) + k_0^2 \varepsilon_r(u) u = 0. \tag{4.6}$$

On pense à $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \Re e\{u(x, y) e^{-i\omega t}\}\hat{z}$ et l'on a alors

$$\nabla\, u \times \hat{z} = \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\partial_t \mathbf{B}_1 = i\omega\mu \mathbf{H}_1,$$

où $\mathbf{E}_1$ vaut donc $u\hat{z}$.

Le vecteur de Poynting complexe s'écrit donc

$$\widetilde{\mathbf{P}} := \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 \times \overline{\mathbf{H}_1} = \frac{i}{2\omega\mu} u \, \nabla \, \bar{u}. \tag{4.7}$$

Multiplions maintenant (4.6) par $\overline{u}$:

$$\overline{u}\mu_r^{-1} \, \nabla(\nabla \, u) + k_0^2 \varepsilon_r(u)|u|^2 = 0,$$

d'où, en intégrant par partie,

$$\Im m\{\int_\Sigma \nabla(\mu_r^{-1}\overline{u} \, grad \, u) \, ds\} - \Im m\{\int_\Sigma \mu_r^{-1}|\nabla \, u|^2 \, ds\} + k_0^2 \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)|u|^2 \, ds = 0$$

pour toute surface fermée Σ (on a écrit $\varepsilon_r" := \Im m\{\varepsilon_r\}$). On en déduit, puisque μ est à image réelle,

$$\Im m\{\int_{\partial\Sigma} \mu_r^{-1}\overline{u} \, \nabla \, u \cdot \hat{n} \, dl\} + k_0^2 \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)|u|^2 \, ds = 0$$

soit, d'après (4.7)

$$\Im m\{\int_{\partial\Sigma} 2i\omega\mu_0 \overline{\widetilde{\mathbf{P}}} \cdot \hat{n} \, dl\} = -k_0^2 \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)|u|^2 \, ds$$

et finalement

$$\int_{\partial\Sigma} \Re e\{\widetilde{\mathbf{P}}\} \cdot \hat{n} \, dl = -\frac{\varepsilon_0\omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)|u|^2 \, ds. \tag{4.8}$$

Pour interpréter cette relation, rappelons que la densité d'énergie électrique W_e est définie par l'intégrale (donc à une constante additive près) de

$$\partial_t W_e := \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}.$$

Puisque nous ne nous intéressons qu'à une composante de Fourier des champs et que rien ne dépend de z, on a posé $\mathbf{E}(x,y,z,t) = \Re e\{\mathbf{E}_1(x,y,z)e^{-i\omega t}\}$ et $\mathbf{D}(x,y,z,t) = \Re e\{\mathbf{D}_1(x,y,z)e^{-i\omega t}\}$, avec maintenant des composantes complexes. Il semble alors plus intéressant de définir la variation de la densité d'énergie électrique en la moyennant sur une période, d'où

$$\partial_t W_e^{harm}(\omega) := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D} dt$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$. On obtient rapidement

$$\partial_t W_e^{harm} = \frac{-\omega}{2} \Im m\{\mathbf{E}_1 \cdot \overline{\mathbf{D}_1}\},$$

qui est, par définition, la densité volumique de puissance électrique instantanée $\mathcal{P}_e^{harm}$.

Comme $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$, que l'on a défini $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de sorte que $u\hat{z} = \mathbf{E}_1$, et que ε_r est tel que $\mathbf{D}$ est polarisé suivant z, on a

$$\mathcal{P}_e^{harm}(\omega) = -\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \varepsilon_r" |u|^2.$$

Ceci est l'intégrande du terme de droite de l'équation. Cette égalité décrit donc deux expressions de la densité de puissance dissipée par le système : à gauche, on a ce qui sort de la surface Σ, à droite, on ce qui est absorbé dans Σ. Ces deux nombres coincident puisqu'il n'y a pas de source dans cette surface.

4.3.2 Deux intégrales pour la densité linéique de puissance

La sous-section précédente nous amène à évaluer numériquement

$$I := \int_{\partial\Sigma} \Re e\{\widetilde{\mathbf{P}}\}\, dl.$$

Nous allons, moyennant quelques conditions, reformuler cette expression. Seuls les coefficients de l'expression du champ diffracté dans un certain développement seront à interpoler par la simulation.

On reprend $\widetilde{P} = \frac{i}{2\omega\mu} u \nabla \overline{u}$ et on sépare u (qui représente le champ électrique total) en deux parties u^i et u^d et donc I en quatre parties :

$$I = I^{ii} + I^{id} + I^{di} + I^{dd}.$$

La surface fermée Σ doit englober toutes les tiges non-linéaires ; par commodité, notamment pour utiliser la transformée de Fourier, on prendra un cercle de centre O et de rayon r_Σ. Puisque le champ diffracté vérifie l'équation de Helmholtz sur et à l'extérieur de Σ ainsi que la condition d'onde sortante, il peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{E}_1^d(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}\, \hat{z}.$$

Nous avons besoin d'une convergence absolue et uniforme par rapport à r de cette série.

Nous écrivons maintenant le champ incident de la manière suivante :

$$u^i(x,y) = Ae^{-ikx}, \quad A \in \mathbb{C}$$

soit

$$u^i(r,\theta) = Ae^{-ikr\cos(\theta)} = A \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n J_n(kr) e^{in\theta}$$

Enfin, nous allons utiliser les propriétés suivantes :

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - n\pi/2 - \pi/4) + o(1),$$

$$H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - n\pi/2 - \pi/4)} + o(1),$$
$$\frac{dC_n}{dz}(z) = \frac{C_{n-1} - C_{n+1}}{2}(z), \quad C \in \{J, H^{(1)}\},$$

ainsi que la notation $\lfloor \alpha \rfloor := max_{\beta \in \mathbb{Z}}\{\beta \leq \alpha\}$.

Conjuguant ces formules, on obtient successivement, après quelques lignes de calcul[8] :

$$\begin{aligned} I^{ii} :&= \frac{-1}{2\mu\omega} \Im m\{\int_{partial\Sigma} u^i(r,\theta) \nabla \overline{u^i}(r,\theta) \cdot \hat{n}\, dl\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^{di} :&= \frac{-1}{2\mu\omega} \Im m\{\int_{partial\Sigma} u^d(r,\theta) \nabla \overline{u^i}(r,\theta) \cdot \hat{n}\, dl\} \\ &= \frac{-1}{\mu\omega} \Im m\{\overline{A} e^{ikr_\Sigma}(1+i) \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n((-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \cos(kr_\Sigma) + (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sin(kr_\Sigma))\} + o(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^{id} :&= \frac{-1}{2\mu\omega} \Im m\{\int_{partial\Sigma} u^i(r,\theta) \nabla \overline{u^d}(r,\theta) \cdot \hat{n}\, dl\} \\ &= \frac{-1}{\mu\omega} \Im m\{A e^{-ikr_\Sigma}(1+i) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{b_n}((-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \sin(kr_\Sigma) + (-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \cos(kr_\Sigma))\} + o(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^{dd} :&= \frac{-1}{2\mu\omega} \Im m\{\int_{partial\Sigma} u^d(r,\theta) \nabla \overline{u^d}(r,\theta) \cdot \hat{n}\, dl\} \\ &= \frac{-2}{\mu\omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 + o(1). \end{aligned}$$

On définit $\alpha_n := (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ et $\beta_n := (-1)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$. En remarquant que I contient la somme sur n de

$$\begin{aligned} &(\Re e + \Im m)(A e^{-ikr_\Sigma} \overline{b_n})(\alpha_n \sin(kr_\Sigma) - \beta_n \cos(kr_\Sigma)) \\ &+ (\Re e + \Im m)(\overline{A} e^{ikr_\Sigma} b_n)(\alpha_n \cos(kr_\Sigma) + \beta_n \sin(kr_\Sigma)), \end{aligned}$$

[8] Nous allons donner deux méthodes pour arriver à des résultats d'apparence proches, mais pas exactement identiques. La première est à notre connaissance originale, la seconde, bien connue des opticiens, est issue de [63], par exemple. Aucune des méthode n'est détaillée ; en revanche, les calculs seront explicités lorsque le champ incident sera généré par un fil, dans la prochaine sous-section. La méthode utilisée sera la même que celle de [63], mais dans un nouveau contexte.

il vient à l'esprit de factoriser ce terme, appelé $T_n(r_\Sigma)$, de la manière suivante :

$$T_n(r_\Sigma) := \begin{pmatrix} \Re e\{(V_n)\} & \Im m\{(V_n)\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kr_\Sigma) & \sin(kr_\Sigma) \\ \sin(kr_\Sigma) & -\cos(kr_\Sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$V_n := Ae^{-ikr_\Sigma}\overline{b_n},$$
$$w_n := \alpha_n - \beta_n = 2(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}\delta_{n,2\lfloor n/2 \rfloor}$$

et

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} \cos(kr_\Sigma) & -\sin(kr_\Sigma) \\ -\sin(kr_\Sigma) & -\cos(kr_\Sigma) \end{pmatrix},$$

la matrice de réflexion autour de la droite passant par l'origine des coordonnées et faisant un angle (signé, donc positif) de $\frac{\pi r_\Sigma}{\lambda}$ avec l'axe (O, x). Les formules suivantes étant valides pour tout entier n :

$$w_{n-1} = \alpha_n + \beta_n, \quad w_n = w_{-n} = w_{n+4}, \quad w_n w_{n+1} = 0,$$

on obtient l'expression suivante :

$$\boxed{I = \frac{-1}{\mu\omega}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2|b_n|^2 + T_n(r_\Sigma)) + o(1).} \tag{4.9}$$

On insiste sur le fait que, dans cette formulation, T_n dépend de r_Σ.

On conçoit aisément que I^{ii} s'annule : l'onde plane incidente étant susceptible de se propager dans le vide, il ne peut y avoir de pertes d'énergie dans aucun domaine borné.

L'équation (4.8) fut vérifiée numériquement. L'inconnue du problème est le champ diffracté, ou, plus précisément, les coefficients b_n qui interviennent dans la série de Fourier de u^d. Pour les obtenir, on interpole le champ total sur le plus petit cercle centré sur l'origine, on lui retire le champ incident (connu), on opère une transformée de Fourier et l'on divise par la valeur, également connue, de $H_n^{(2)}(kr_\Sigma)$.

M.Petit ([63]) a développé $I^{id} + I^{di}$ d'une autre manière. On obtient en effet, en supprimant le développement de la dérivée :

$$\begin{aligned} I^{id} + I^{di} = \frac{-2}{\mu\omega}\frac{-kr_\Sigma\pi}{2}\Im m\{\overline{A}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-i)^n b_n H_n^{(1)}(kr_\Sigma)J_n'(kr_\Sigma) \\ +A\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n\overline{b_n}J_n(kr_\Sigma)H_n^{(2)'}(kr_\Sigma)\}. \end{aligned}$$

On utilise alors les définitions des fonctions de Hankel : $H_n^{(1)}(x) := J_n(x) + iN_n(x)$, et si x est réel, $H_n^{(2)}(x) := \overline{H_n^{(1)}}(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} I^{id} + I^{di} &= \frac{2}{\mu\omega}\frac{kr_\Sigma\pi}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\big(\Im m\{\overline{A}(-i)^n b_n\} + \Im m\{Ai^n\overline{b_n}\}\big)J_n(kr_\Sigma)J_n'(kr_\Sigma) \\ &\quad - \Re e\{\overline{A}(-i)^n b_n\}N_n(kr_\Sigma)J_n'(kr_\Sigma) + \Re e\{Ai^n\overline{b_n}\}J_n(kr_\Sigma)N_n'(kr_\Sigma)\Big) \\ &= \frac{2}{\mu\omega}\frac{kr_\Sigma\pi}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Re e\{Ai^n\overline{b_n}\}\Big(J_n(kr_\Sigma)N_n'(kr_\Sigma) - N_n(kr_\Sigma)J_n'(kr_\Sigma)\Big). \end{aligned}$$

Grâce à la relation

$$J_n(x)N_n'(x) - N_n(x)J_n'(x) = \frac{2}{x\pi}, \tag{4.10}$$

on obtient

$$I^{id} + I^{di} = \frac{-2}{\mu\omega}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Re e\{Ai^n\overline{b_n}\},$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{-2}{\mu\omega}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(|b_n|^2 + \Re e\{Ai^n\overline{b_n}\}\big).} \tag{4.11}$$

La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \theta \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} Ai^n\overline{b_n}e^{-in\theta}$ (à nouveau, on suppose que la série converge uniformément pour $\theta \in [0, 2\pi]$) permet d'exprimer I de la manière suivante :

$$I = \frac{2}{\mu\omega}\Big(\frac{1}{2\pi|A|^2}\int_0^{2\pi}|F(\theta)|^2\,d\theta + \Re e\{F(0)\}\Big).$$

Cette expression ne dépend pas de r_Σ, ce qui est physiquement clair, puisque le milieu diffractant est entouré d'un milieu sans pertes. Par conséquent, si l'on connaît le flux d'énergie traversant un cercle de rayon tendant vers l'infini, on le connaît également à travers tout cercle, concentrique au premier, extérieur à l'objet diffractant.

Les deux expressions encadrées sont apparemment différentes : $I(nous)$ dépend de r_Σ, alors que $I(Petit)$ n'en dépend pas. Cela signifie que, dans le développement asymptotique, le terme $o(1)$ est en fait nul.

Tout repose sur l'équation (4.10). Nous allons donc donner les étapes de la démonstration. Pour simplifier l'écriture, on n'écrit pas les indices qui donnent l'ordre des fonctions de Bessel ou de Neumann.

Puisque J et N vérifient l'équation de Bessel, on a

$$(\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1 - \frac{n^2}{x^2})J(x) = 0,$$

$$(\partial_x^2 + \frac{1}{x}\partial_x + 1 - \frac{n^2}{x^2})N(x) = 0.$$

En multipliant la première par $N(x)$ et lui soustrayant la seconde multipliée par $J(x)$, on obtient

$$N(x)\partial_x^2 J(x) - J(x)\partial_x^2 N(x) + \frac{1}{x}\big(N(x)\partial_x J(x) - J(x)\partial_x N(x)\big) = 0.$$

On en déduit que $x(N(x)\partial_x J(x) - J(x)\partial_x N(x))$ est une constante, dont la valeur dépend *a priori* de n :

$$N(x)\partial_x J(x) - J(x)\partial_x N(x) = \frac{c(n)}{x}.$$

On obtient la valeur de $c(n)$ par un développement asymptotique (où l'on découvre qu'elle est en réalité indépendante de n). Lorsque nous avions développé $I^{id} + I^{di}$, nous obtenions $\frac{\tilde{c}}{x} + o(\frac{1}{x})$. En le comparant au terme de droite, on s'aperçoit maintenant que l'on a exactement $\frac{\tilde{c}}{x}$.

Puisque l'on a fixé la direction de propagation du champ incident suivant l'axe $(0, x)$ et que la géométrie du système est symétrique par rapport à ce même axe, on a $u(r, \theta) = u(r, -\theta)$, d'où

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(kr)e^{in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(kr)e^{-in\theta}.$$

En utilisant l'invariance de la somme par $n \mapsto -n$ et la relation (valable lorsque n est un entier) $H_n^{(1)} = (-1)^n H_{-n}^{(1)}$, on obtient :

$$b_n = (-1)^n b_{-n}.$$

Résultats

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	0
permittivité relative ε_d	8,41-2i
nombre de coefficients de Fourier	375
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
amplitude du champ incident A	10^6
maximum de $\|E_z\|$ sur $\mathcal{C}$	$1,7921.10^6$
r_Σ	$2,6520.10^{-6}$
I^{dd}	$7,2432.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-9,6631.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$-2,4199.10^3$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$-(2,4219 + 2,0506i).10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\|u\|^2\, ds$	$-2,4201.10^3$

TAB. 4.1 – Différentes expressions de I en régime linéaire (unité SI). Le $\chi^{(1)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

Les résultats sont regroupés dans les tableaux de 4.1 à 4.4. On s'aperçoit que la (très forte) non-linéarité fait accroître (très légèrement) les pertes.

Afin de mesurer l'erreur numérique, on retire l'objet diffractant et l'on mesure u^d ;

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	-10^{-16}
permittivité relative ε_d	8,41-2i
nombre de coefficients de Fourier	375
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
amplitude du champ incident A	10^6
maximum de $\|E_z\|$ sur $\mathcal{C}$	$1,7921.10^6$
nombre d'itération de Newton	2
r_Σ	$2,6520.10^{-6}$
I^{dd}	$7,2431.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-9,6631.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$-2,4199.10^3$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$-(2,4219 + 2,0506i).10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\|u\|^2\, ds$	$-2,4202.10^3$

TAB. 4.2 – Différentes expressions de I en régime non-linéaire (unité SI). Le $\chi^{(1)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	-1.10^{-12}
permittivité relative ε_d	8,41-2i
nombre de coefficients de Fourier	375
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
amplitude du champ incident A	10^6
nombre d'itération de Newton	20
maximum de $\|E_z\|$ sur $\mathcal{C}$	$1,6791.10^6$
r_Σ	$2,6520.10^{-6}$
I^{dd}	$6,8119.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-9,6304.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$-2,8185.10^3$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$-(2,8208 + 2,0530i).10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\|u\|^2\, ds$	$-2,8187.10^3$

TAB. 4.3 – Différentes expressions de I en régime non-linéaire (unité SI). Le $\chi^{(1)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	$-(1 + 10i)10^{-15}$
permittivité relative ε_d	8,41
nombre de coefficients de Fourier	361
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
amplitude du champ incident A	10^6
maximum de $\|E_z\|$ sur $\mathcal{C}$	$1,6791.10^6$
nombre d'itération de Newton	20
r_Σ	$2,6520.10^{-6}$
I^{dd}	$9,8808.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-1,0271.10^4$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$-3,9005.10^2$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$-(3,8871 + 2,8074i).10^2$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\|u\|^2\, ds$	$-3,9092.10^2$

TAB. 4.4 – Différentes expressions de I en régime non-linéaire (unité SI). Le $\chi^{(3)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

on obtient alors $\max \frac{|u^d|}{|u^i|} \sim 8.10^{-4}$. On remarque alors que l'on a une précision de trois chiffres significatifs sur le champ incident, et nous retrouvons ces trois chiffres lors des balances énergétiques (comparer les deux dernières lignes de chaque tableau).

4.3.3 Un cristal photonique éclairé par un fil

Nous considérons à présent le cas où la source est un courant $\vec{\mathbf{j}}$ passant dans un fil dirigé suivant $(0, z)$. Outre d'observer ce qui ce passe lorsque la source est localisée et proche de l'objet diffractant (en quelques sortes, le cristal est éclairé par un dipole), ceci permet de vérifier la méthode de l'antenne virtuelle et de voir avec quelle simplicité elle s'applique à diverses situations. L'intersection entre le plan de notre étude et le fil est un point que l'on notera (x_s, y_s) en coordonnées cartésiennes ou (r_s, θ_s) en coordonnées polaires. Ce point n'est pas situé dans une tige, ni sur le cercle $\partial\Sigma$ sur lequel nous faisons nos bilans d'énergie. On pose $\vec{\mathbf{j}} = \Re e\{j_1\, e^{-i\omega t}\}\hat{z}$ ainsi que $j_1 = I\delta_{\mathbf{r}_s}$. Le champ incident satisfait alors l'équation

$$\triangle u^i + k^2 u^i = -i\omega\mu j_1$$

et l'on en déduit

$$u^i(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)(-i\omega\mu I)\delta_{\mathbf{r}_s}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$

soit

$$u^i(\mathbf{r}) = \frac{\omega\mu I}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)$$

ou encore, en utilisant la formule de Graf

$$u^i(r,\theta) = \begin{cases} \frac{\omega\mu I}{4} \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_s) H_n^{(1)}(kr) e^{in(\theta-\theta_s)}, & r \geqslant r_s \\ \frac{\omega\mu I}{4} \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr) H_n^{(1)}(kr_s) e^{in(\theta-\theta_s)}, & r \leqslant r_s. \end{cases}$$

On cherche l'équivalent de la formule (4.8) (ce sera la formule (4.12)). On repart de

$$\nabla \cdot (\mu_r^{-1} \nabla u) + k_0^2 \varepsilon_r u = -i\omega\mu_0 I \delta_{\mathbf{r}_s}$$

avec $I \in \mathbb{R}$ et une perméabilité à image réelle.

En multipliant par u le complexe conjugué de cette équation, en intégrant sur le disque Σ et en applicant le théorème de Stokes, on obtient

$$\int_{\partial\Sigma} u\, \mu_r^{-1} \nabla\overline{u} \cdot \hat{n}\, dl - \int_\Sigma \nabla u \cdot \mu_r^{-1} \nabla\overline{u}\, ds + \int_\Sigma k_0^2 \overline{\epsilon_r} |u|^2\, ds = i\omega\mu_0 I \int_\Sigma u\delta_{\mathbf{r}_s} ds.$$

En appelant $\tilde{u}(\mathbf{r}_s)$ la dernière intégrale (dont la partie réelle est finie) et en supposant le milieu magnétiquement scalaire et sans pertes, on déduit

$$\Im m\{\int_{\partial\Sigma} \mu_r^{-1}\, u\nabla\bar{u}\cdot\hat{n}\; dl\} = -k_0^2\int_{\Sigma}\epsilon_r"|u|^2\; ds + \omega\mu_0 I\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}.$$

Comme $\mu_r^{-1}u\nabla\bar{u} = -2i\omega\mu_0\widetilde{\mathbf{P}}$, on a

$$\int_{\partial\Sigma}\Re e\{\widetilde{\mathbf{P}}\}\cdot\hat{n}\; dl = -\frac{\varepsilon_0\omega}{2}\int_{\Sigma}\varepsilon_r"(u)|u|^2\; ds - \frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}. \tag{4.12}$$

Nous reprenons donc les calculs des différentes parties de I. Les étapes et la plupart des formules utilisées sont les mêmes que dans la partie précédente. Nous supposons toujours une convergence uniforme de tout ce qui nous arrange.

Le fil est dans Σ

$$\begin{aligned}
I^{ii} :&= -\frac{1}{2\mu\omega}\Im m\{\int_0^{2\pi} u^i(r_\Sigma,\theta)\,\nabla\,\overline{u^i}(r_\Sigma,\theta)\cdot\hat{n}r_\Sigma\; d\theta\}\\
&= -\frac{1}{2\mu\omega}(\frac{\omega\mu I}{4})^2\Im m\{\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_s)H_n^{(1)}(kr_\Sigma)e^{in(\theta-\theta_s)}\\
&\quad\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_m(kr_s)\frac{dH_m^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma)e^{-im(\theta-\theta_s)}r_\Sigma\; d\theta\}\\
&= -2\pi\frac{\omega\mu I^2}{32}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_s)H_n^{(1)}(kr_\Sigma)e^{-in\theta_s}\;\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_m(kr_s)\frac{dH_m^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma)e^{im\theta_s}\delta_{mn}r_\Sigma\}\\
&= \frac{\omega\mu\pi I^2}{16}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(J_n(kr_s)\big)^2\Big(J_n(kr_\Sigma)\frac{dN_n}{dr}(kr_\Sigma) - N_n(kr_\Sigma)\frac{dJ_n}{dr}(kr_\Sigma)\Big)r_\Sigma\\
&= -\frac{\omega\mu I^2}{8}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_s)^2\\
&= -\frac{\omega\mu I^2}{8}.
\end{aligned}$$

La dernière étape du calcul précédent est détaillée en annexe, à la page 134.

$$
\begin{aligned}
I^{id} + I^{di} :&= -\frac{1}{2\mu\omega}\Im m\{\int_0^{2\pi} \Big(u^i(r_\Sigma,\theta)\,\nabla\,\overline{u^d}(r_\Sigma,\theta) + u^d(r_\Sigma,\theta)\,\nabla\,\overline{u^i}(r_\Sigma,\theta)\Big)\cdot \hat{n} r_\Sigma\, d\theta\} \\
&= -\frac{1}{2\mu\omega}\frac{\omega\mu I}{4}\Im m\{\int_0^{2\pi} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \Big(J_n(kr_s)H_n^{(1)}(kr_\Sigma)e^{i(n-m)\theta - in\theta_s}\overline{b_m}\frac{dH_m^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma) \\
&+ b_n H_n^{(1)}(kr_\Sigma)e^{i(n-m)\theta + im\theta_s}J_m(kr_s)\frac{dH_m^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma)\Big) r_\Sigma\, d\theta\} \\
&= \frac{-I\pi}{4}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(e^{-in\theta_s}\overline{b_n}J_n(kr_s)H_n^{(1)}(kr_\Sigma)\frac{dH_n^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma) \\
&\quad + e^{in\theta_s}b_n H_n^{(1)}(kr_\Sigma)J_n(kr_s)\frac{dH_n^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma)\Big)\} r_\Sigma \\
&= \frac{-I\pi}{4}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta_s}b_n J_n(kr_s)\big(H_n^{(1)}(kr_\Sigma)\frac{dH_n^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma) - H_n^{(2)}(kr_\Sigma)\frac{dH_n^{(1)}}{dr}(kr_\Sigma)\big)\} r_\Sigma.
\end{aligned}
$$

On utilise le wronskien

$$
H_n^{(1)}(z)\frac{dH_n^{(2)}(z)}{dz} - H_n^{(2)}(z)\frac{dH_n^{(1)}(z)}{dz} = \frac{-4i}{z\pi}\ ;
$$

il apparaît ainsi le complexe conjugué du premier terme sommé, ces deux termes se simplifiant en prenant la partie imaginaire. On a donc

$$
\begin{aligned}
I^{id} + I^{di} &= I\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta_s}b_n J_n(kr_s)i\} \\
&= I\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_s)\Re e\{e^{in\theta_s}b_n\}.
\end{aligned}
$$

La dernière intégrale, ne faisant pas intervenir le champ incident, est inchangée :

$$
I^{dd} = \frac{-2}{\mu\omega}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|^2.
$$

Comme dans le cas d'une onde plane incidente, I ne dépend pas de r_Σ, ce qui est physiquement évident (il en sera de même lorsque le fil sera en dehors de Σ).

ANNEXE

Soit A une fonction Riemann-intégrable, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique. Sa transformée de Fourier s'écrit

$$
A(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta},
$$

soit

$$\check{\mathcal{F}}(A) = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} =: \underline{a}.$$

Le théorème de Parseval annonce que la transformée de Fourier $\check{\mathcal{F}} : (L^2, [0, 2\pi)) \to (l^2, \mathbb{C})$ d'inverse $\hat{\mathcal{F}}$, est unitaire, ce qui s'écrit

$$(\underline{a}, \check{\mathcal{F}}(A))_{l^2} = (\hat{\mathcal{F}}(\underline{a}), A)_{L^2},$$

où encore, plus explicitement,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |A(x)|^2 dx.$$

D'un autre côté, nous savons que l'on peut définir les fonctions de Bessel à coefficients entiers par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)e^{in\theta} = e^{iz\sin(\theta)}.$$

Nous restreindrons cette égalité à un z, noté kr_s, réel. $J_n(kr_s)$ est alors réel.

De ces deux derniers faits, on déduit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |J_n(kr_s)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{ikr_s\sin(\theta)}|^2 d\theta,$$

d'où[9]

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_s)^2 = 1.$$

[9]Relation que l'on peut aussi déduire comme un cas particulier du théorème d'addition des fonctions cylindriques.

Le fil est en dehors de Σ

$$
\begin{aligned}
I^{ii} :&= \frac{-1}{2\mu\omega}\Im m\{\int_0^{2\pi} u^i(r_\Sigma,\theta)\,\nabla\,\overline{u^i}(r_\Sigma,\theta)\cdot\hat{n}r_\Sigma\,d\theta\}\\
&= \frac{-1}{2\mu\omega}(\frac{\omega\mu I}{4})^2\Im m\{\int_0^{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_\Sigma)H_n^{(1)}(kr_s)e^{in(\theta-\theta_s)}\\
&\quad\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{dJ_m(kr_\Sigma)}{dr}H_m^{(2)}(kr_s)e^{-im(\theta-\theta_s)}r_\Sigma\,d\theta\}\\
&= -2\pi\frac{\omega\mu I^2}{32}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(kr_\Sigma)H_n^{(1)}(kr_s)\frac{dJ_n}{dr}(kr_\Sigma)H_n^{(2)}(kr_s)r_\Sigma\}\\
&= -\frac{\omega\mu\pi I^2}{16}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}|H_n^{(2)}(kr_s)|^2\,J_n(kr_\Sigma)\frac{dJ_n}{dr}(kr_\Sigma)r_\Sigma\}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I^{id}+I^{di} :&= \frac{-1}{2\mu\omega}\Im m\{\int_0^{2\pi}\Big(u^i(r_\Sigma,\theta)\,\nabla\,\overline{u^d}(r_\Sigma,\theta)+u^d(r_\Sigma,\theta)\,\nabla\,\overline{u^i}(r_\Sigma,\theta)\Big)\cdot\hat{n}r_\Sigma\,d\theta\}\\
&= \frac{-1}{2\mu\omega}\frac{\omega\mu I}{4}\Im m\{\int_0^{2\pi}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\Big(J_n(kr_\Sigma)H_n^{(1)}(kr_s)e^{i(n-m)\theta-in\theta_s}\overline{b_m}\frac{dH_m^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma)\\
&+ b_nH_n^{(1)}(kr_\Sigma)e^{i(n-m)\theta+im\theta_s}\frac{dJ_m}{dr}(kr_\Sigma)H_m^{(2)}(kr_s)\Big)r_\Sigma\,d\theta\}\\
&= \frac{-I\pi}{4}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(e^{-in\theta_s}\overline{b_n}J_n(kr_\Sigma)H_n^{(1)}(kr_s)\frac{dH_n^{(2)}}{dr}(kr_\Sigma)\\
&+ e^{in\theta_s}b_nH_n^{(1)}(kr_\Sigma)\frac{dJ_n(kr_\Sigma)}{dr}H_n^{(2)}(kr_s)\Big)r_\Sigma\}\\
&= \frac{-I\pi}{4}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{in\theta_s}b_nH_n^{(2)}(kr_s)\Big(-J_n(kr_\Sigma)\frac{dH_n^{(1)}}{dr}(kr_\Sigma)\\
&+ H_n^{(1)}(kr_\Sigma)\frac{dJ_n(kr_\Sigma)}{dr}\Big)r_\Sigma\}\\
&= \frac{-I\pi}{4}\Im m\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}ie^{in\theta_s}b_nH_n^{(2)}(kr_s)\frac{2}{r_\Sigma\pi}r_\Sigma\}\\
&= -\frac{I}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Re e\{e^{in\theta_s}b_nH_n^{(2)}(kr_s)\}.
\end{aligned}
$$

Enfin, on a encore :

$$I^{dd} = -\frac{2}{\mu\omega}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n|^2.$$

On donne une manière plus élégante de calculer I^{ii}, méthode valable pour tout r positif ou nul. Dans le cas où il n'y a aucun milieu diffractant (ce qui justifie la quatrième égalité du calcul qui suit), on a

$$\begin{aligned}
I^{ii} &= I \\
&= \frac{-I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\} \\
&= \frac{-I}{2}\int_\Sigma \Re e\{u(\mathbf{r})\}\delta_{\mathbf{r}_s}(\mathbf{r})\,ds \\
&= \frac{-I}{2}\int_\Sigma \Re e\{u^i(\mathbf{r})\}\delta_{\mathbf{r}_s}(\mathbf{r})\,ds \\
&= \frac{-I}{2}\Re e\{\int_\Sigma \frac{\omega\mu I}{4}H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|)\delta_{\mathbf{r}_s}(\mathbf{r})\,ds\} \\
&= \frac{-\omega I^2\mu}{8}\int_\Sigma J_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|)\delta_{\mathbf{r}_s}(\mathbf{r})\,ds\ ;
\end{aligned}$$

puisque $J_0(0)$ vaut un, on a

$$I^{ii} = \begin{cases} -\frac{\omega I^2\mu}{8}, & \mathbf{r}_s \in \Sigma \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

On remarque que, une fois ce calcul fait, la réponse à "est-ce que $\mathbf{r}_s$ appartient à Σ ?" est suffisant pour déterminer I^{ii}. Ceci est évident après quelques instants de réflexion.

Résultats

Les résultats sont présentés dans les tableaux 4.5, et 4.6 et 4.10 lorsque $r_s < r_\Sigma$ et dans les tableaux 4.7 et 4.8 et 4.9 lorsque $r_s > r_\Sigma$. Nous présentons également les cartes du champ électrique total dans chaque cas (figures 4.10, 4.11) lorsque $r_s < R$; nous présentons aussi les résultats lorsqu'il n'y a pas de pertes (4.12).

Nous sommes étonné de constater que la partie imaginaire de l'intégrale du vecteur de Poynting sur $\mathcal{C}$ est *plus* faible que la partie réelle lorsqu'il n'y a pas de perte. Nous pensions que la première serait bien supérieure. Nous avons changé quelques paramètres (la permittivité, le rayon r_Σ, etc), mais le rapport entre les deux parties en question n'a pas qualitativement évolué.

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	0
permittivité relative ε_d	8,41-2i
nombre de coefficients de Fourier	375
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
intensité du courant I	5.10^{-3}
nombre d'itération de Newton	1
r_Σ	$0,85 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}$
(x_s, y_s)	$(0,6 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}, 0)$
I^{ii}	$5,6683.10^3$
I^{dd}	$2,6341.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-4,9575.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$3,34492.10^3$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$(3,34676 + 0,2569i).10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds$	$-9,6426.10^2$
$-\frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$4,3091.10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds - \frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$3,34485.10^3$

TAB. 4.5 – Différentes expressions de I en régime linéaire (unité SI) lorsque $r_s < r_\Sigma$. Le $\chi^{(1)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	-10^{-12}
permittivité relative ε_d	8,41-2i
nombre de coefficients de Fourier	375
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
intensité du courant I	5.10^{-3}
nombre d'itération de Newton	21
r_Σ	$0,85 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}$
(x_s, y_s)	$(0,6 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}, 0)$
I^{ii}	$5,6683.10^3$
I^{dd}	$2,4809.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-4,6802.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$3,46900.10^3$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$(3,47090 + 0,2632i).10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds$	$-1,1486.10^3$
$-\frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$4,6175.10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds - \frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$3,46890.10^3$

TAB. 4.6 – Différentes expressions de I en régime non-linéaire (unité SI) lorsque $r_s < r_\Sigma$. Le $\chi^{(1)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	0
permittivité relative ε_d	8,41-2i
nombre de coefficients de Fourier	375
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
intensité du courant I	10^{-2}
nombre d'itération de Newton	1
r_Σ	$0,85 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}$
(x_s, y_s)	$(2 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}, 0)$
I^{ii}	0
I^{dd}	$3,1406.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-4,2207.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$-1,0802.10^3$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$-(1,0811 + 1,0430i).10^3$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\|u\|^2\, ds$	$-1,0804.10^3$
$-\frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	0
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\|u\|^2\, ds - \frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$-1,0804.10^3$

TAB. 4.7 – Différentes expressions de I en régime linéaire (unité SI) lorsque $r_s > r_\Sigma$. Le $\chi^{(1)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

4.4 Cristal photonique non-linéaire à cœur plein

Dans les sections précédentes, la tige centrale du cristal était retirée. Ceci avait pour conséquence l'apparition d'une longueur d'onde de résonance, approximativement égale au diamètre de la microcavité. À cette longueur d'onde, le champ électrique était fortement localisé, précisément dans le défaut du système. Cette localisation était encore renforcée lorsque les tiges étaient non-linéaires, si le coefficient de non-linéarité est négatif. En dehors de la microcavité, les effets de la non-linéarité sur le champ ne sont pas visibles. Ainsi résumés, ces résultats paraissent paradoxaux : l'influence sur le champ de la non-linéarité des tiges est importante uniquement dans le défaut.

La présente section s'ingénue à trouver un système qui optimise encore la localisation du champ dans la microcavité. Le principe est simple : ajoutons, au centre du cristal, une tige de très faible permittivité relative (on prendra, de manière exagérée, $\varepsilon_c^{(1)} = 1$) mais présentant un effet Kerr optique positif (la valeur $\chi_c^{(3)} = 5.10^{-4}\, V^2/m^2$ est retenue). On a ainsi un cristal photonique à cœur plein. De par le signe de la non-linéarité, le champ, déjà fortement localisé sur cette tige, a tendance à se focaliser encore d'avantage, et ainsi à augmenter la permittivité de la tige centrale, et donc à se rétracter encore au sein de la microcavité... On obtient ainsi un système qui s'entretient lui-même... jusqu'à converger, comme le montre les figures 4.14 et 4.13 (où l'on a ajouté, afin de faciliter la lecture, le cas où $\chi_c^{(3)} = 0\, V^2/m^2$, c'est-à-dire que le cœur est du vide - l'image est donc la même que 4.6(a)). Tous les autres paramètres (géométriques comme optiques) sont les mêmes que dans les sections précédentes ; en parti-

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	-2.10^{-12}
permittivité relative ε_d	8,41-2i
nombre de coefficients de Fourier	375
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	72 916
intensité du courant I	10^{-2}
nombre d'itération de Newton	18
r_Σ	$0,85 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}$
(x_s, y_s)	$(2 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}, 0)$
I^{ii}	0
I^{dd}	$2,9178.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-4,1887.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$-1,2710.10^3$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$-(1,2721 + 1,0028i).10^3$
$-\frac{\varepsilon_0\omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds$	$-1,2712.10^3$
$-\frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	0
$-\frac{\varepsilon_0\omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds - \frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$-1,2712.10^3$

TAB. 4.8 – Différentes expressions de I en régime non-linéaire (unité SI) lorsque $r_s > r_\Sigma$. Le $\chi^{(1)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	$-(1+i).10^{-14}$
permittivité relative ε_d	8,41
nombre de coefficients de Fourier	371
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	43 950
intensité du courant I	10^{-2}
nombre d'itération de Newton	15
r_Σ	$0,85 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}$
(x_s, y_s)	$(2 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}, 0)$
I^{ii}	0
I^{dd}	$4,2071.10^3$
$I^{id} + I^{di}$	$-4,3303.10^3$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$-1,2324.10^2$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$-(1,2129 + 0,7961i).10^2$
$-\frac{\varepsilon_0\omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds$	$-1,2301.10^2$
$-\frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	0
$-\frac{\varepsilon_0\omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds - \frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$-1,2301.10^2$

TAB. 4.9 – Différentes expressions de I en régime non-linéaire (unité SI) lorsque $r_s > r_\Sigma$. Le $\chi^{(3)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$	$-(1+i).10^{-14}$
permittivité relative ε_d	8,41
nombre de coefficients de Fourier	371
nombre de points pour extrapoler u^d	50
nombre d'éléments	43 950
intensité du courant I	10^{-3}
nombre d'itération de Newton	8
r_Σ	$0,85 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}$
(x_s, y_s)	$(0,6 \times 1,2 \times 2,6.10^{-6}, 0)$
I^{ii}	$2,2673.10^2$
I^{dd}	$1,5197.10^2$
$I^{id} + I^{di}$	$-1,6673.10^2$
$I := I^{ii} + I^{di} + I^{id} + I^{dd}$	$2,1197.10^2$
$\int_{\partial\Sigma} \hat{P} \cdot \hat{n}\, dl$	$(2,1289 + 0,141i).10^2$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds$	$-3,9877.10^{-1}$
$-\frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$2,1239.10^2$
$-\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)\lvert u\rvert^2\, ds - \frac{I}{2}\Re e\{\tilde{u}(\mathbf{r}_s)\}$	$2,1199.10^2$

TAB. 4.10 – Différentes expressions de I en régime non-linéaire (unité SI) lorsque $r_s < r_\Sigma$. Le $\chi^{(3)}$ induit des pertes d'énergie électrique.

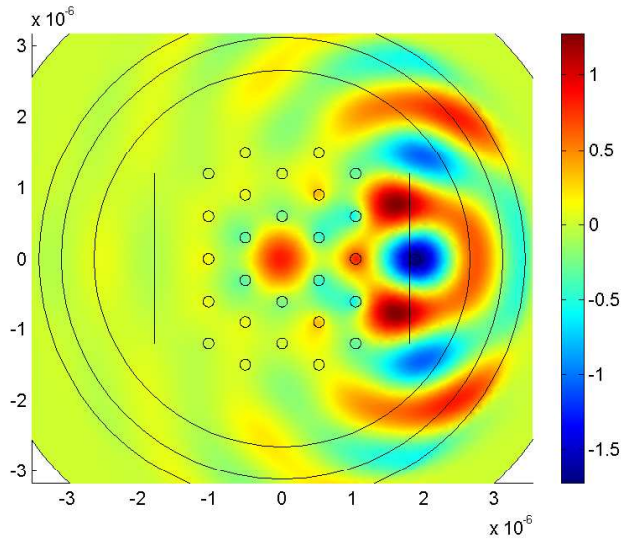


FIG. 4.10 – La Partie réelle du champ électrique total $\Re e\{u\}$ en MV/m, avec $\chi^{(3)} = 0\, m^2/V^2$ et $\varepsilon_r^{(1)} = 8.41 - 2i$.

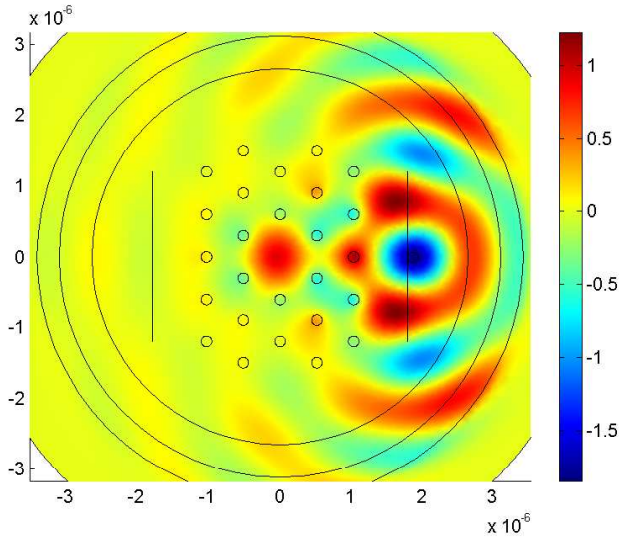


FIG. 4.11 – La Partie réelle du champ électrique total $\Re e\{u\}$ en MV/m, avec $\chi^{(3)} = -10^{-12}\, m^2/V^2$ et $\varepsilon_r^{(1)} = 8.41 - 2i$.

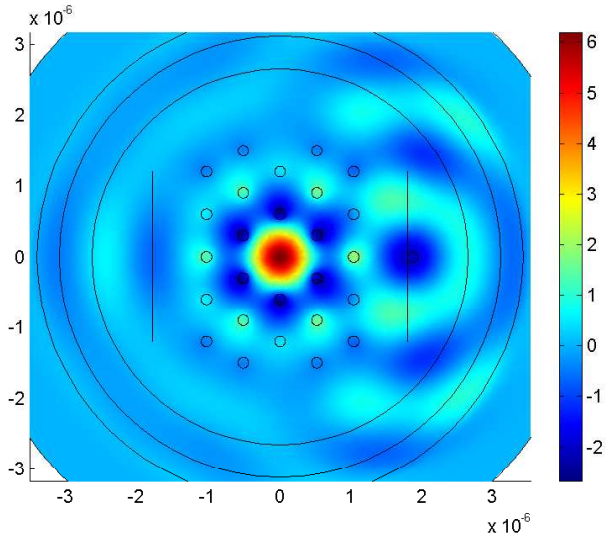
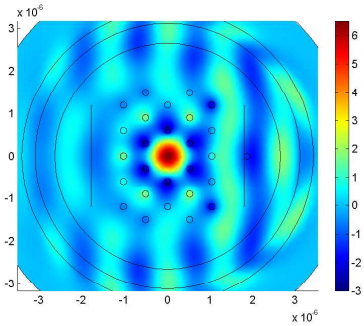
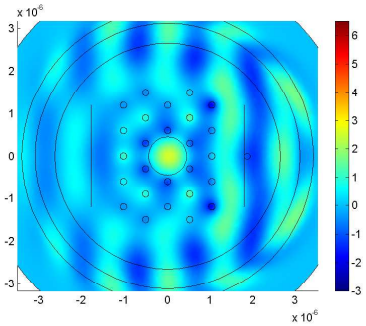


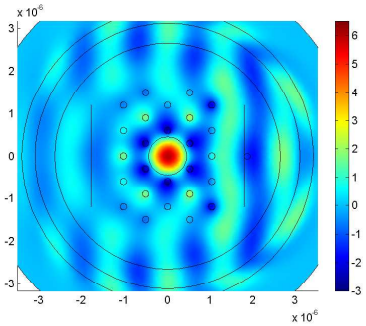
FIG. 4.12 – La Partie réelle du champ électrique total $\Re e\{u\}$ en MV/m, avec $\chi^{(3)} = 0\, m^2/V^2$ et $\varepsilon_r^{(1)} = 8.41$.



(a) $\chi_c^{(3)} = 0\, m^2/V^2$, $\lambda_r = 8.7$.



(b) $\chi_c^{(3)} = 5.10^{-16}\, m^2/V^2$, $\lambda_r = 8.7$.



(c) $\chi_c^{(3)} = 5.10^{-16}\, m^2/V^2$, $\lambda_r = 8.74$.

FIG. 4.13 – La partie réelle du champ électrique total $\Re e\{u\}$, en MV/m, pour différentes valeurs du coefficient de non-linéarité $\chi_c^{(3)}$ de la tige centrale (zero dans 4.13(a), positif dans 4.13(b)) à la longueur d'onde de résonance $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.7$ du cristal à cœur creux (4.13(a) et 4.13(b)) et à la longueur d'onde de résonance $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.74$ du cristal à cœur plein (4.13(c)).

culier, l'amplitude du champ incident est $A = 10^6\, V/m$, la permittivité constante des tiges est $\varepsilon_d = 8,41$, le coefficient de non-linéarité des tiges est $\chi^{(3)} = -10^{-15}\, m^2/V^2$.

Jugeant le pic du champ extrêmement faible dans l'image 4.13(b), nous avons vérifié la courbe de transmission du cristal à cœur non-linéaire. Il s'avère que la fréquence de résonance a légèrement évolué : si $\frac{\lambda}{2r_t}$ valait 8.7 dans un cristal à cœur vide, elle est maintenant de 8.74. Et ce résultat nous paraît important : pour avoir des variations similaires sur la localisation du champ, le cristal photonique a cœur non-linéaire plein est bien plus efficace que le cristal photonique à cœur creux. En effet, dans le premier cas, il faut s'écarter de la longueur d'onde de résonance d'une quantité égale à $8,7 - 8,3 = 0,4$, alors que, dans le second cas, cette quantité est presque dix fois moindre : $8,74 - 8,7$.

Nous rappelons que le maximum de la variation de permittivité dans les tiges, dans la section 4.2, était 1.8%. Cette variation est ici beaucoup plus forte, puisque, encore une fois, la localisation du champ a lieu dans un matériau non-linéaire. On observe, sur

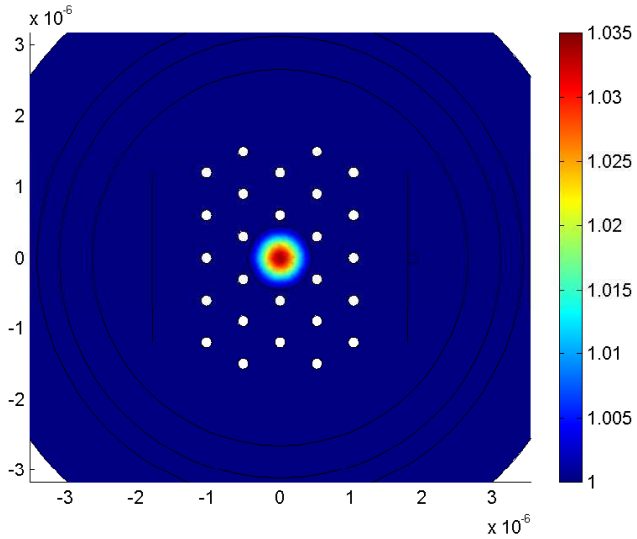


FIG. 4.14 – La permittivité relative ε_r à la longueur d'onde de résonance ($\frac{\lambda}{2r_t} = 8.74$) lorsque le cœur est occupé par une tige à non-linéarité positive (la permittivité des tiges n'est pas montrée - elle est très peu différente de celle présentée sur la figure 4.4). Bien que la variation de permittivité soit relativement importante ($3,4\%$), elle n'a pratiquement pas d'effet sur les champs en dehors de la microcavité.

la figure 4.14, qu'elle atteint 3.4% à la nouvelle fréquence de résonance (elle descend à 2.4% à $\frac{\lambda}{2r_t} = 8.7$).

On peut regretter que les cartes 4.13(a) et 4.13(c) se ressemblent beaucoup, c'est-à-dire que la non-linéarité du cœur n'a que peu d'influence sur les champs. La raison est la même que celle qui accrédite la méthode du champ moyen : une variation de permittivité relative de $3,4\%$ est à la fois énorme pour le matériau, mais trop petite pour changer réellement le comportement des champs.

4.5 Diffraction par un matériau massif gravé.

Cette section a le même objectif que la précédente : trouver un système qui s'"emballe" en focalisant l'onde dans la cavité. Nous proposons la simulation suivante, où le champ est localisé dans un milieu non-linéaire. Une onde plane d'amplitude $10^6\,V/m$ illumine *une* tige de permittivité relative $\varepsilon_d = 8,41$ et de rayon r_b, dans laquelle est gravé un réseau de trou d'air (la permittivité est donc inversé par rapport à la section 4.2).

Notons $\widetilde{\mathbf{P}}_{A^i,\,\chi^{(3)}}$ (respectivement $\widetilde{\mathbf{P}}^i_{A^i,\,\chi^{(3)}}$) le vecteur de Poynting complexe associé au champ total (respectivement au champ incident), lorsque l'amplitude du champ incident est A^i et le coefficient de non-linéarité $\chi^{(3)}$. On définit alors le coefficient de transmission $T^{\mathcal{S}}_{A^i,\,\chi^{(3)}}$ par

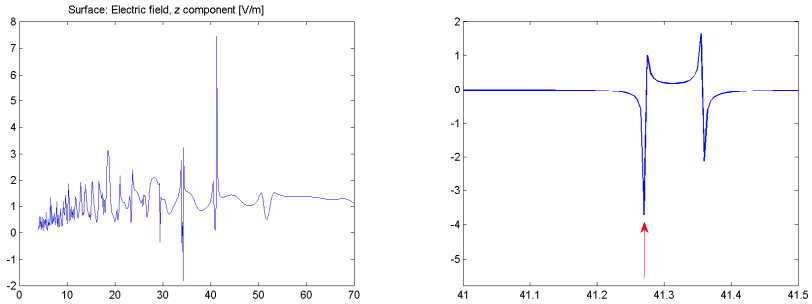
$$T^{\mathcal{S}}_{A^i,\,\chi^{(3)}} = \frac{\int_{\mathcal{S}} \Re e\{\widetilde{\mathbf{P}}_{A^i,\,\chi^{(3)}}\} \cdot \hat{n}\, dl}{\int_{\mathcal{S}} \Re e\{\widetilde{\mathbf{P}}^i_{A^i,\,\chi^{(3)}}\} \cdot \hat{n}\, dl}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ étant la normale extérieure à la tige, et $\mathcal{S}$ est le segment situé à gauche, derrière cette tige.

La transmission $T^{\mathcal{S}}_{10^6,\,0}$ du système est présentée sur la figure 4.15(a). Le résultat peut paraître curieux : $T^{\mathcal{S}}_{10^6,\,0}$ peut être supérieur à l'unité (c'est-à-dire que, comme dans les systèmes précédents, la tige peut focaliser derrière elle) ou même négative (et en effet, pour certaine valeur de longueur d'onde, le flux du vecteur de Poynting va de la gauche vers la droite. Il semble que le phénomène de "jet photonique" ait lieu. Il nous faudrait approfondir ceci.).

On regarde ensuite l'influence de la non-linéarité et, afin d'avoir un effet spectaculaire, on se place à la plus grande résonance. Nous gardons la valeur $\chi^{(3)} = -10^{-15}\,m^2/V^2$. Deux courbes sont présentées : sur la première (figure 4.15(a)) est simulée un régime linéaire ; sur la seconde (figure 4.15(b)), on voit la différence de transmission entre l'amplitude quasi-nulle et une autre égale à $A^i = 10^6\,V/m$. À la fréquence de résonance, le coefficient de non-linéarité a des conséquences énormes sur le comportement des champs, comme le montre les deux cartes (figure 4.16), du module du champ électrique, en régime linéaire ou non-linéaire (avec $\chi^{(3)} = -5.10^{-13}\,m^2/V^2$).

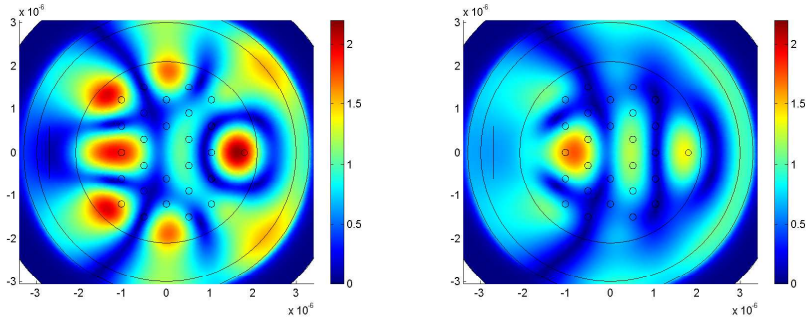
Enfin, un bilan d'énergie permets de conforter nos résultats : avec $\varepsilon_r^{(0)} = 8.41 + 2i$ et en appelant Σ le plus petit disque contenant entièrement la tige, nous avons deux expressions de la moyenne stochastique de la densité linéique de puissance électrique $\mathcal{P}_e^{harm}$ perdue à l'intérieur de $\partial\Sigma$, donc dans la tige :



(a) $T^{\mathcal{S}}_{10^6,\,0}$.

(b) $T^{\mathcal{S}}_{10^{-2},\,-10^{-15}} - T^{\mathcal{S}}_{10^6,\,-10^{-15}}$.

FIG. 4.15 – 4.15(a) : La transmission $T^{\mathcal{S}}_{A^i,\,\chi^{(3)}}$ en fonction de la longueur d'onde relative $\lambda/(2r_h)$, où r_h est me diamètre des trous. 4.15(b) : La différence $(T^{\mathcal{S}}_{10^{-2},\,-10^{-15}} - T^{\mathcal{S}}_{10^6,\,-10^{-15}})$ de transmission entre le régime linéaire et le régime non-linéaire en fonction de la longueur d'onde relative



(a) $\chi^{(3)} = 0\,m^2/V^2$.

(b) $\chi^{(3)} = -0,5.10^{-12}\,m^2/V^2$.

FIG. 4.16 – Le module $|u|$ du champ électrique, en MV/m, en régime linéaire (4.16(a)) ou non-linéaire (4.16(b)), à la longueur d'onde de résonance $\lambda/d = 41.27$; cette longueur correspond à la flèche rouge sur la figure 4.15(b). On note que l'échelle est commune aux deux figures.

$$\int_\Sigma \mathcal{P}_e^{harm}\, ds = -\int_{\partial\Sigma} \Re e(\widetilde{\mathbf{P}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dl. \tag{4.13}$$

$$\int_\Sigma \mathcal{P}_e^{harm}\, ds = -\frac{\varepsilon_0 \omega}{2} \int_\Sigma \varepsilon_r"(u)|u|^2\, ds. \tag{4.14}$$

La différence des deux termes, normalisée en divisant par $\int_{\partial\Sigma} |\Re e(\mathbf{P}^{inc}) \cdot \hat{n}|\, dl$, est $1,2.10^{-4}$, pour le régime linéaire comme pour le régime non-linéaire. Nous nous satisfaisons de ce résultat.

En aparté, nous expliquons comment nous avons obtenu une approximation de la longueur d'onde de résonance, qui nous était complètement inconnue (on se basait, auparavant, sur des simulations rapportées dans la littérature). C'est une méthode classique utilisée en régime linéaire. On pose donc $\chi^{(3)} = 0$. En augmentant progressivement l'amplitude, on suivra numériquement la correction à apporter lorsque l'effet Kerr-optique sera pris en compte.

On commence par supprimer le champ incident, i.e., on s'intéresse aux modes susceptibles de se propager sans excitation extérieure. Le champ électrique est du type $\mathbf{E}(x,y,z,t) = \Re e\{u(x,y)e^{-i\omega t}\}\hat{z}$ avec une fonction u satisfaisant l'équation de Helmholtz :

$$\triangle u + k_0^2 \varepsilon_r u = 0.$$

On peut donc écrire, pour des coefficients a_n et b_n complexes,

$$u(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n J_n(k_r r) e^{in\theta}, & r \leqslant r_b \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(k_0 r) e^{in\theta}, & r \geqslant r_b \end{cases}$$

où nous avons posé, suivant l'usage, $k_r := k_0\sqrt{\varepsilon_r}$. Des deux relations de passage

$$\begin{cases} [u]\,|_{\Gamma_b} & = 0 \\ \left[\frac{du}{dn}\right]|_{\Gamma_b} & = 0, \end{cases}$$

où Γ_b est le bord de la tige, on déduit le système

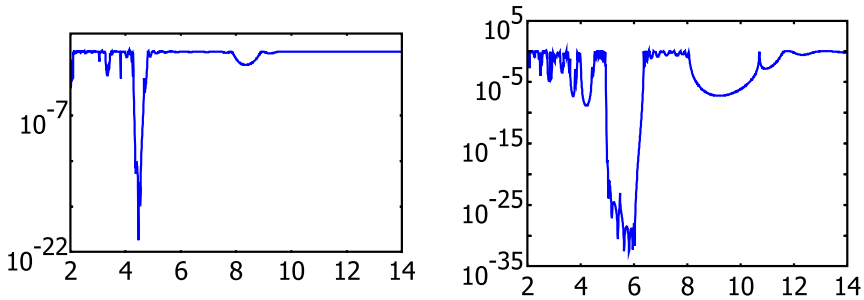
$$\begin{cases} a_n J_n(k_r r_b) - b_n H_n^{(1)}(k_0 r_b) = 0 \\ a_n \partial_r J_n(k_r r_b) - b_n \partial_r H_n^{(1)}(k_0 r_b) = 0 \end{cases}$$

valide pour tout entier n ; système qui peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} J_n(k_r r_b) & -H_n^{(1)}(k_0 r_b) \\ \partial_r J_n(k_r r_b) & -\partial_r H_n^{(1)}(k_0 r_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que le déterminant

$$\partial_r J_n(k_r r_b) H_n^{(1)}(k_0 r_b) - J_n(k_r r_b) \partial_r H_n^{(1)}(k_0 r_b) \tag{4.15}$$



(a) $\varepsilon_d = 3$. (b) $\varepsilon_d = 8.41$.

FIG. 4.17 – La transmission d'un cristal photonique infini en fonction de la longueur d'onde relative, pour différentes valeurs de la permittivité relative des tiges ($\varepsilon_d = 3$ dans 4.17(a), $\varepsilon_d = 8.41$ dans 4.17(b)).

s'annule. Nous avons, grâce à l'aide de Matlab, cherché les pulsations $\omega = k_0 c$ satisfaisant cette relation, considéré celle qui avait la plus petite partie réelle, constaté qu'elle avait une grande partie imaginaire en valeur absolue (et par conséquent le pôle, en longueur d'onde, est proche de l'axe réelle, ou encore, la résonance est importante), et il ne restait plus qu'à centrer la courbe de transmission présentée plus haut autour de cette longueur d'onde. Une légère différence apparaissait néanmoins, due aux trous d'air percée dans la tige hôte.

4.6 Cristal photonique infini

Déçus par la faiblesse de la résonance de notre cristal fini (à cœur vide - voir la figure 4.3), nous avons voulu voir comment le nombre de tiges importait. Nous avons donc considéré un réseau (carré) avec dix-sept lignes de tiges en profondeur et une infinité en largeur - on utilise donc des conditions périodiques suivant cette direction. La géométrie du système est donnée sur la figure 4.18 et une courbe de transmission est présentée en 4.17.

La différence entre un cristal fini, mais comportant tout de même vingt-six tiges, et un cristal infini, est des plus remarquables. En effet, certains auteurs rapportent des courbes bien plus impressionnantes que la nôtre (4.3), même avec un cristal fini : lorsque la longueur d'onde relative varie d'une unité, la transmission s'étale sur plus de cinq (respectivement quatre, quinze) ordres de grandeur dans [85] ([97], [98]), etc. D'autant plus que, dans ces références, le réseau (hexagonal (hexagonal, carré)) contient un petit nombre de tiges (26 (84, 81)). Dans [98], il n'y a même pas de micro-cavité ; or, selon nos intuitions, c'est précisément celle-ci qui est responsable du mode accepteur (nous avons mis une cavité, mais celle-ci n'avait pas grande influence sur la transmission).

En conclusion, le filtre en fréquence que nous voulions modéliser est, selon nos simulations, peu efficace si le cristal est fini, très efficace, si le cristal est infini. Dans le

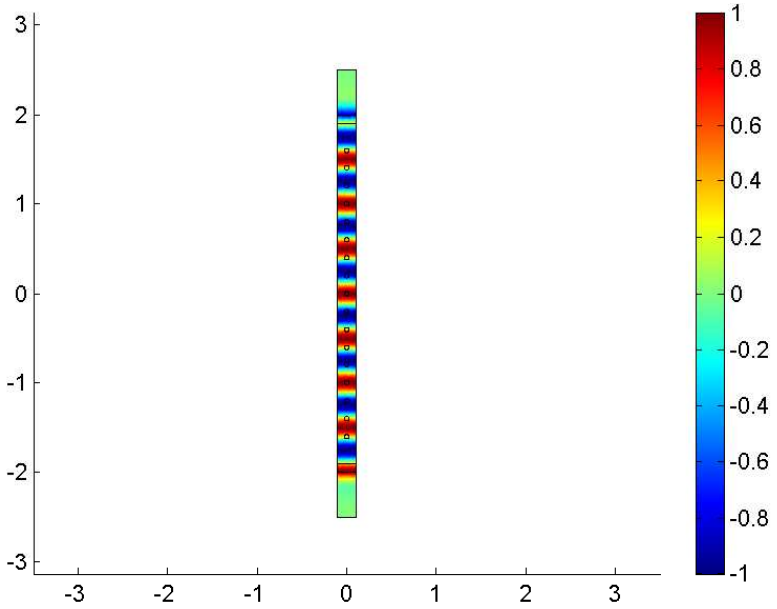


FIG. 4.18 – La géométrie du système et la partie réelle de l'onde plane incidente, en MV/m, à une fréquence de résonance $\frac{\lambda}{2r_t} = 6.1$.

prochain chapitre, nous étudierons l'influence de la non-linéarité sur le système de cette section. On verra alors que, puisque la réponse de ce cristal est très dépendante de la longueur d'onde, on pourra trouver des fréquences pour lesquelles chaque composante du champ électrique a un comportement différent.

Chapitre 5

Simulations de diffraction avec génération d'harmoniques

Si les sciences de la nature ne sont pas à même de prédire,
elles ne sont plus qu'un amusement d'érudits.
Max Planck

Le chapitre 1 est une présentation théorique de l'optique non-linéaire. Moyennant des hypothèses, certes nombreuses mais physiquement acceptables, nous avons obtenu, entre autres choses, les équations de propagation des composantes du champ électrique se propageant dans un matériau non-linéaire. Le chapitre 4 se limitait au cas non-linéaire le plus simple (les champs n'oscillaient qu'à une seule fréquence) ; ce présent chapitre recense quelques simulations numériques réalisées dans un cadre un peu moins restrictif (la génération d'harmonique est prise en compte). Naturellement, nous en profitons pour vérifier quelques propriétés énoncées dans la partie théorique, concernant par exemple, la conservation de l'énergie électrique.

Nous présentons aussi dans ce chapitre une autre systématique permettant d'approximer le système infini d'équations en un système fini. Nous avions défini le degré d dans le premier chapitre, nous allons ici définir le degré d'. Les équations qu'il amènera n'ont jamais été rencontrées dans la littérature, et nous avouerons qu'elles sont en effet peu intuitives. Néanmoins, ce degré permet l'étude de matériau sans pertes, ce qui a quelques avantages du point de vue numérique.

Cette notion de degré est fondamentale dans nos travaux. Le système d'équations que la théorie présente ne peut être résolu ; il faut donc le simplifier. Il n'y a, pour ceci, pas de procédure unique, et il n'est alors pas étonnant qu'il n'y a pas une unique définition "sensée" du degré.

Ce chapitre se veut aussi être le chaînon entre la partie théorique réalisée par nos soins et une partie expérimentale, pour l'instant non-accomplie. On s'attachera donc à étudier un système réaliste, ainsi qu'à utiliser un langage facilement compréhensible aux expérimentateurs. Un exemple précis, le borate de baryum a été choisi. On com-

λ	n_e	$\chi^{(1)\,z}{}_{z}$	$\chi^{(2)\,z}{}_{zz}$	$\chi^{(3)\,z}{}_{zzz}$
1064	1.5426	1.3796	2.10^{-12}	10^{-23}
532	1.5555	1.4196	2.10^{-12}	10^{-23}
355	1.5775	1.4885	2.10^{-12}	10^{-23}

TAB. 5.1 – La longueur d'onde en nm, l'indice de réfraction de l'axe extraordinaire, et les entrées dont nous nous servirons des tenseurs de susceptibilité, respectivement sans unité, en m/V et en m^2/V^2.

mence par exposer certaines de ses propriétés.

5.1 Le borate de baryum.

Le borate de baryum (BaB_2O_4, couramment abrégé en BBO) est un matériau dont les propriétés optiques sont fortement non-linéaires. Il se présente sous deux phases : la phase β qui nous intéressera et une autre, nommée α, apparaissant à une température supérieure à $925^{\circ}C$. Il est relativement transparent dans la zone spectrale $200 - 1750\,nm$ (certaines sources, comme [99] ou [100], agrandissent cette fenêtre, mais ceci sera sans importance pour nous). C'est un cristal de classe trigonale et son groupe ponctuel de symétrie est $3m$. Nous alignerons la polarisation du champ incident avec l'axe extraordinaire, direction que l'on appellera axe (O, z).

Les relations entre les différentes composantes des tenseurs $\chi^{(1)}$ et μ, puis $\chi^{(2)}$ et enfin $\chi^{(3)}$ sont données respectivement dans [49] aux pages 45, 51 et $52 - 53$. On vérifie alors qu'il n'y a aucune entrée du type $\chi^{(1)\,x}{}_{z}$, $\chi^{(2)\,y}{}_{zz}$, etc., qui empêcherait une étude scalaire du problème[1]. Puisque le champ électrique n'est polarisé suivant une seule direction, nous noterons parfois $u_q := \mathbf{E}_q \cdot \hat{z}$ la composante de $\mathbf{E}_q$ dans cette direction.

Les indices de réfraction, aux longueurs d'onde que l'on utilisera dans les simulations, sont données dans le tableau 5.1. Nous n'avons trouvé, dans la littérature, la perméabilité de ce matériau. Cette dernière sera donc fixée à l'unité dans les simulations, même si les calculs garderont leur généralité. Dès que l'ordre de non-linéarité est supérieur à un, les tenseurs de susceptibilité lus dans les revues ou dans les catalogues d'entreprise spécialisée sont des nombres. Nous considérons donc les tenseurs indépendants de la fréquence (ce qui signifie que la non-linéarité est instantanée), et supposons que ces nombres correspondent aux composantes qui nous intéressent.

D'après la compagnie *Coherent* ([101]), le seuil d'endommagement du matériau est supérieur au GW. Puisque nous allons nous restreindre à une étude bidimensionnelle, nous ne pouvons réellement comparer nos valeurs à celle-ci.

[1] Notons que ces tenseurs ne satisfont pas pour autant les conditions exhibées dans la section (2.2), page 83. Et en effet, si, sans changer de système de coordonnées, on orientait le champ électrique incident selon un autre axe (quelconque), alors le champ d'induction électrique aurait des composantes non nulles selon les trois directions, et ne serait donc pas parallèle au champ incident. Autrement dit, le problème scalaire tolère une et une seule polarisation du champ électrique incident.

5.2 Diffraction électromagnétique par un cylindre, à l'ordre trois et au degré trois : génération de deuxième et de troisième harmoniques et effet Kerr-optique

5.2.1 Présentation du problème

Rappelons de manière synthétique nos hypothèses : le matériau est ordinaire, causal, spatialement-local, non-bianisotrope, stationnaire, lisse, magnétiquement linéaire. Il n'y a pas de courant. Dans ces conditions, l'équation de propagation du champ électrique s'écrit

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \partial_t^2 \mathbf{D} = 0. \qquad ((1.14))$$

Ajoutons l'hypothèse d'un développement fini de la polarisation électrique, s'arrêtant à l'ordre trois. On a donc $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(0)} + \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)}$, soit :

$$\chi^{(n)} = 0 \text{ si } n > 3\,;$$

comme nous l'avons vu, l'hypothèse de stationnarité implique que $\mathbf{P}^{(0)}$ n'apparaît pas dans l'équation de propagation et peut être considéré comme nulle. Supposons en outre que le matériau, éclairé par un champ incident monochromatique de pulsation ω_I, ne génère ni non-harmonique (les pulsations que l'on notait ω_s dans le premier chapitre) ni champ stationnaire, i.e.

$$\exists i \in \{0, \cdots, n\} \ : \ \omega_i \neq p\omega_I, \ p \in \mathbb{Z}^*, \Rightarrow \ \chi^{(n)}(\omega_0; \omega_1, \cdots, \omega_n) = 0,$$

où ω_0 vaut $\omega_1 + \cdots + \omega_n$. Enfin, limitons nous au degré trois : c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse qu'aux composantes $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ (et bien entendu à leur conjuguée), et que l'on néglige les termes $\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \mathbf{E}_{p_2} \rfloor$, respectivement $\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \mathbf{E}_{p_2}, \mathbf{E}_{p_3} \rfloor$, si $|p_1| + |p_2|$, respectivement $|p_1| + |p_2| + |p_3|$, est strictement supérieur à trois[2]. On obtient alors les équations (trouvées dans la section 1.4 page 47)

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0, \qquad ((1.29a))$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0, \qquad ((1.29b))$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0. \qquad ((1.29c))$$

[2] Rappelons que dès que le système d'équations à résoudre est non-linéaire, ce système est infini. Afin d'en expliciter des solutions, mêmes numériques, il faut trouver une approximation finie dudit système ; le critère que nous venons de donner est la manière la plus physique que nous ayons trouvée qui permette de ne considérer que les "premières interactions".

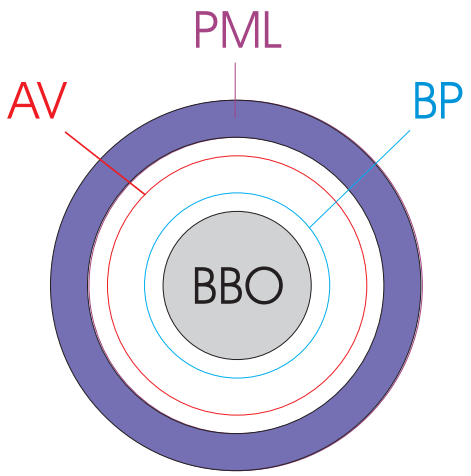


FIG. 5.1 – Schéma de la géométrie.

légende :

AV	antenne virtuelle	PML	couches parfaitement adaptées
BP	bilan de puissance	BBO	borate de baryum

avec

$$\mathbf{E}(\mathbf{s},t) = 2\Re e\{\mathbf{E}_1(\mathbf{s})e^{-i\omega_I t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{s})e^{-2i\omega_I t} + \mathbf{E}_3(\mathbf{s})e^{-3i\omega_I t}\}.$$

Pour que la définition du champ incident reste pertinente, la région Ω_d de l'espace $\mathbb{R}^3$ contenant le matériau est "limitée dans une certaine direction", ou, de manière plus précise, dans un système de coordonnées cartésien, il existe une direction (choisissons l'axe $(O,\hat{x})$) et une abscisse x_{max} telles que, si $\mathbf{x}$ appartient à Ω_d, alors $\hat{x}\cdot\mathbf{x} < x_{max}$.

Nous commençons avec une géométrie des plus simples : Ω_d est un cylindre dans $\mathbb{R}^3$. Le même symbole Ω_d fera également référence à la projection du cylindre perpendiculairement à l'axe d'invariance de l'étude (c'est-à-dire le disque dans le plan (O,x,y)). Le rôle de chacun des différents cercles présents sur les cartes de champs est donné sur le schéma 5.1.

Sur les figures 5.3 à 5.9, nous voyons plusieurs cercles concentriques. Ceux-ci représentent, avec des rayons croissants, la section de l'objet diffractant, le cercle $\partial\Sigma$ sur lequel nous effectuons les bilans d'énergie, l'antenne virtuelle. Pour la simulation, nous avons encore besoin de deux autres cercles, marquant le début (nous en voyons quelques bribes sur les images) et la fin des PML.

Le comportement global de chaque composante est assez intuitif. Nous avons essayé de le représenter synoptiquement par un "film", où l'on voit, avec une échelle

$$0 \xrightarrow{L} 10^9 \xrightarrow{f\,NL} 3.10^9 \xrightarrow{F\,NL} 5.10^9 \xrightarrow{MD}$$

FIG. 5.2 – Les différents régimes en fonction de l'amplitude A^i du champ électrique incident.

légende :

L	régime linéaire	F NL	régime fortement non-linéaire
f NL	régime faiblement non-linéaire	MD	modèle dépassé

commune aux trois fonctions[3], leur partie réelle (afin de relever la cohérence des longueurs d'ondes) en fonction de l'amplitude du champ incident. Ceci apparaît dans les figures 5.3 à 5.9.

Nous résumons les différents régimes en fonction de l'amplitude A^i du champ électrique incident sur le schéma 5.2. Lorsque A^i est supérieur à $5.10^9\,V/m$, $\Re e\{u_2\}$ présente localement des pics supérieurs à ceux de $\Re e\{u_1\}$; le modèle est donc caduque. Afin de dépasser ce seuil, il faut augmenter le degré ou l'ordre de non-linéarité, et donc prendre en compte la quatrième harmonique. Cependant, nous pensons que ceci n'aurait que peu d'intérêt : il est vain de ne se concentrer que sur la partie électromagnétique. Lorsque l'énergie du faisceau incidente est importante, les couplages thermiques ou mécaniques ne peuvent plus être ignorés. Rappelons que l'étude de ces couplages, inéluctable à long terme, implique de sortir de l'hypothèse du matériau stationnaire. Ce passionnant travail théorique n'est, à notre connaissance, pas encore achevé ([17]).

Afin d'obtenir des effets non-linéaires visibles avec des amplitudes plus basses, on peut changer la géométrie de l'objet diffractant, et nous prendrons des cristaux photoniques à la fin de ce chapitre (on pourrait également prendre des matériaux avec des surfaces rugueuses), ou changer le champ incident. Nous choisirons, un peu plus loin, un champ incident gaussien, et l'on mettra en coïncidence le centre du faisceau et celui du cylindre, afin que le maximum de puissance soit dans le milieu non-linéaire.

Il est parfois affirmé dans la littérature ([102], par exemple) que la troisième harmonique est principalement générée par un effet cascade[4]. On peut justifier ceci. Lorsque l'amplitude du champ incident est de l'ordre de $A^i \simeq 10^9\,V/m$, on a grossièrement $\|\mathbf{E}_1\| \simeq 10^9\,V/m$, $\|\mathbf{E}_2\| \simeq 10^8\,V/m$ et $\|\mathbf{E}_3\| \simeq 10^6\,V/m$. En prenant également les approximations suivantes pour le BBO : $\mu \simeq 1$, $\chi^{(1)} \simeq 1$, $\chi^{(2)} \simeq 10^{-12}\,m/V$, et $\chi^{(3)} \simeq 10^{-23}\,m^2/V^2$, on obtient les ordres de grandeur de chaque terme de l'équation de propagation pour $\mathbf{E}_p$ (outre $-\varepsilon_0^{-1}\nabla\times(\mu^{-1}(p\omega_I)\nabla\times\mathbf{E}_p)$) reportés dans le tableau 5.2.

La comparaison reportée est confirmée par notre modèle, puisque $\|\lfloor\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_1\rfloor\| \simeq \|\lfloor\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_1\rfloor\|/10$. Aussi, $\mathbf{E}_{-p} = \overline{\mathbf{E}_p}$ implique immédiatement que la déplétion de l'onde de pompe $\lfloor\mathbf{E}_{-1},\mathbf{E}_2\rfloor$ est davantage responsable des perturbations causées sur $\mathbf{E}_1$ que l'effet Kerr-optique $\lfloor\mathbf{E}_{-1},\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_1\rfloor$.

[3]Ce choix est discutable. Évidemment, des détecteurs sophistiqués pourraient voir les harmoniques bien avant ce que nous indiquons dans les commentaires des figures. Mais il nous semble pédagogiquement préférable - au moins dans un premier temps.

[4]L'inverse se trouve également ([69]).

$\mathbf{E}_1 + \lfloor \mathbf{E}_1 \rfloor$ $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor$ $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$	10^9 10^5 10^4
$\mathbf{E}_2 + \lfloor \mathbf{E}_2 \rfloor$ $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$	10^8 10^6
$\mathbf{E}_3 + \lfloor \mathbf{E}_3 \rfloor$ $\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 \rfloor$ $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$	10^6 10^5 10^4

TAB. 5.2 – Les ordres de grandeur, en V/m, des différentes sources de $\mathbf{E}_p$, lorsque $A^i \simeq 10^9\, V/m$.

Rappelons néanmoins que le $\chi^{(2)}$ du BBO est relativement important, alors que son $\chi^{(3)}$ est faible (environ dix fois moindre que celui de la silice, selon [103] - mais il faudrait s'assurer que les mêmes composantes soient comparées). Ces considérations ne sont donc applicables qu'avec la plus grande prudence.

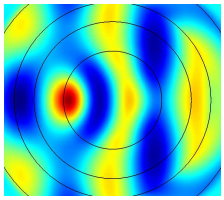
Une étude de la génération de seconde harmonique, sans la déplétion de l'onde de pompe, par un cylindre métallique a été réalisée dans [62]. Il y a de grandes différences à indiquer : l'objet diffractant étant métallique, il n'y a pas à faire à une non-linéarité de volume, comme c'est le cas dans tout ce manuscrit, mais à une non-linéarité de surface (d'ailleurs, l'objet qu'ils étudient est isotrope, et la seconde harmonique ne peut alors être générée qu'à l'interface des deux matériaux, qui ont chacun la symétrie d'inversion). Le vecteur polarisation qu'ils considèrent est totalement différent du nôtre : il ne dépend que des dérivées du champ électrique. Enfin, chaque composante satisfait une équation de Helmholtz, la non-linéarité n'intervenant que dans les conditions aux bords. Une étude analytique bien plus poussée peut donc être réalisée.

5.2.2 Le bilan énergétique

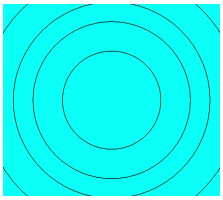
Présentation

Nous avons pris l'habitude de vérifier toutes nos simulations par un bilan énergétique ; les motivations d'un tel examen sont, d'une part, l'assurance de la cohérence de la simulation numérique, étant donné que l'on compare deux expressions très différentes (par exemple une intégrale sur un domaine Σ et une intégrale sur le bord $\partial\Sigma$, un terme contenant les dérivées partielles des composantes du champ, contrairement à l'autre, etc.), et d'autre part, un contrôle de la théorie exposée aux chapitres 1 et 2.

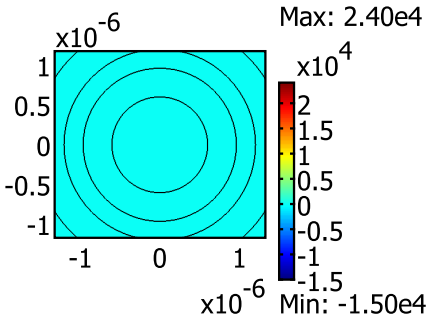
Nous allons en fait faire mieux qu'un bilan énergétique : chaque équation de pro-



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$.

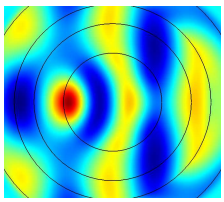


(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$.

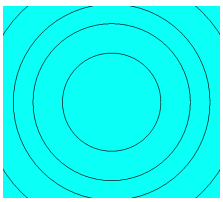


(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$.

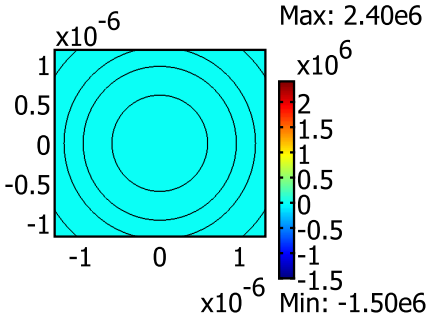
FIG. 5.3 – $A^i = 10^4\, V/m$. À cette amplitude, le régime linéaire est une très bonne approximation.



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$.

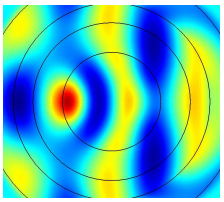


(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$.

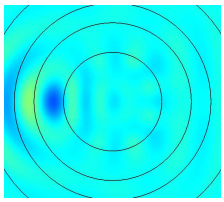


(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$.

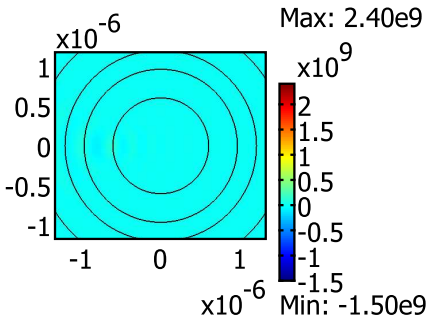
FIG. 5.4 – $A^i = 10^6\, V/m$.



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$.



(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$.



(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$.

FIG. 5.5 – $A^i = 10^9\, V/m$. La génération de seconde harmonique apparaît. Nous entrons donc dans le régime faiblement non-linéaire.

pagation donne une quantité conservée, et la densité linéique de puissance n'est que la somme sur toutes les composantes de ces quantités. On trouve en effet facilement que la moyenne stochastique de la densité linéique de puissance peut s'évaluer, à chaque composante, de deux manières différentes [5] :

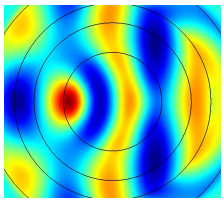
$$I_1 := < \int_{\partial\Sigma} dl\, \mathcal{P}_{0,1} \cdot \hat{n} >= -2\omega_I \int_{\Sigma} ds\, \Im m\{\mathbf{D}_1 \cdot \overline{\mathbf{E}_1}\}, \tag{5.2}$$

$$I_2 := < \int_{\partial\Sigma} dl\, \mathcal{P}_{0,2} \cdot \hat{n} >= -4\omega_I \int_{\Sigma} ds\, \Im m\{\mathbf{D}_2 \cdot \overline{\mathbf{E}_2}\}, \tag{5.3}$$

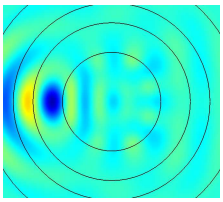
$$I_3 := < \int_{\partial\Sigma} dl\, \mathcal{P}_{0,3} \cdot \hat{n} >= -6\omega_I \int_{\Sigma} ds\, \Im m\{\mathbf{D}_3 \cdot \overline{\mathbf{E}_3}\}. \tag{5.4}$$

Le facteur 2 est dû à la somme $\partial_t(\mathbf{D}_{-q} \cdot \mathbf{E}_q + \mathbf{D}_q \cdot \mathbf{E}_{-q})$ pour $q \in \{1, 2, 3\}$; on a noté $\mathcal{P}_{0,q} := 2\Re e\{(iq\omega_I \mu(q\omega_I))^{-1} \mathbf{E}_{-q} \times (\nabla \times \mathbf{E}_q)\}$ la contribution de la composante q du champ électrique à la composante zéro du champ de Poynting, car, comme ceci est expliqué dans la section 2.1) :

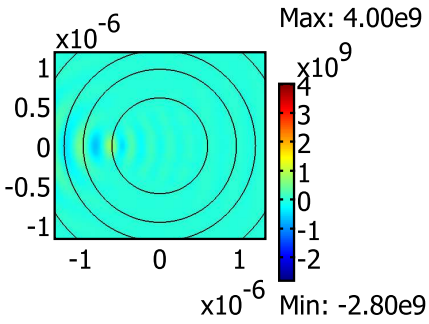
[5] On rappelle que l'on a supposé que la perméabilité était à image réelle pour toute fréquence. Ceci implique l'absence de conversion de l'énergie magnétique en une autre forme d'énergie.



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$.



(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$.



(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$.

FIG. 5.6 – $A^i = 2.10^9\, V/m$. À partir de cette amplitude, "tout va très vite" : la troisième harmonique n'est plus négligeable.

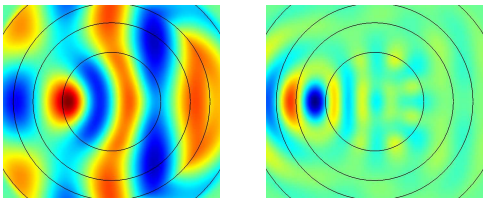
$$\begin{aligned}\mathcal{P} &:= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*} (iq\omega_I \mu(q\omega_I))^{-1} \mathbf{E}_{p-q} \times (\nabla \times \mathbf{E}_q) e^{-ip\omega_I t},\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}< \mathcal{P} > &:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\, \mathcal{P}(t) \\ &= \mathcal{P}_0 \\ &= \sum_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_{0,q}.\end{aligned}$$

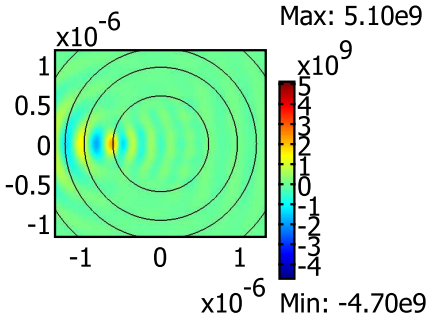
À quelles conditions sommes-nous sûrs que ce matériau soit sans pertes ?

Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le critère énergétique. Ceci nous permettra d'avoir une meilleure intuition sur ce critère, et de juger de son utilité. On rappelle que nous n'avons su donné une condition nécessaire et suffisante (ceci est décrit à la page 52). Nous devons regarder ce qui se passe, d'une part, ordre par



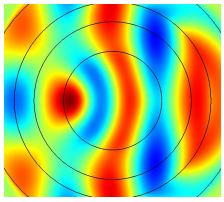
(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$.

(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$.

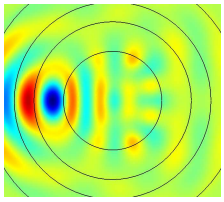


(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$.

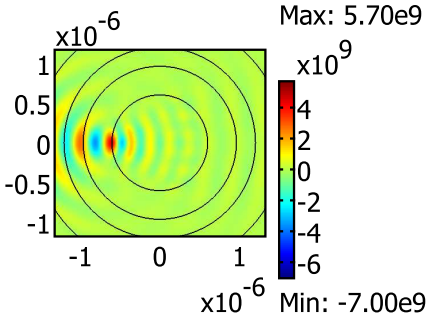
FIG. 5.7 – $A^i = 3.10^9\, V/m$. On commence à voir des variations sur $\mathbf{E}_1$, dues à l'effet Kerr-optique et à la déplétion de l'onde de pompe. C'est ce que nous appelons le régime fortement non-linéaire.



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$.

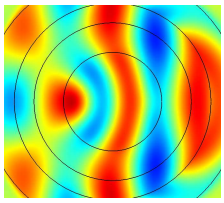


(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$.

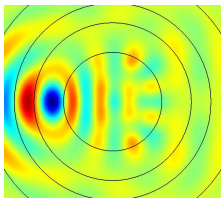


(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$.

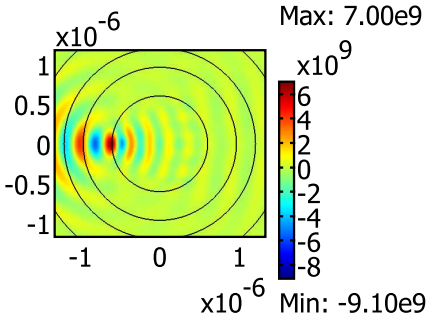
FIG. 5.8 – $A^i = 4.10^9\, V/m$.



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$.



(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$.



(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$.

FIG. 5.9 – $A^i = 5.10^9\, V/m$. $\mathbf{E}_2$ présente des pics de module supérieurs à ceux de $\mathbf{E}_1$; à ce stade, notre modèle est dépassé.

ordre, et d'autre part, pour tout $(n+1)$-uplet différent d'entiers $(-p_0, p_1, \cdots, p_n)$ tel que les composantes $\mathbf{E}_{-p_0}$, $\mathbf{E}_{p_1}$, ..., $\mathbf{E}_{p_n}$ interviennent dans $\mathbf{E}_{-p_0} \cdot \mathbf{P}_{p_0}^{(n)}$, avec $p_1 + \cdots + p_n = p_0$.

A l'ordre un, c'est-à-dire, en régime linéaire, nous exigeons

$$\chi^{(1)}(q\omega_I) = \chi^{(1)\,T}(-q\omega_I),$$

que nous pouvons reformuler ainsi dans le cas scalaire qui nous concerne :

$$\chi^{(1)\,z}{}_{z}(q\omega_I) \in \mathbb{R}.$$

L'ordre deux est déjà plus intéressant. Il consiste en

$$\begin{cases} \chi^{(2)}(-p\omega_I; r\omega_I, q\omega_I) = \chi^{(2)\,T_{12}}(-r\omega_I; p\omega_I, q\omega_I) \\ \chi^{(2)}(-p\omega_I; r\omega_I, q\omega_I) = \chi^{(2)\,T_{13}}(-q\omega_I; r\omega_I, p\omega_I) \end{cases}$$

avec $p := -(q+r)$. En degré deux, les nombres p, r et q sont limités aux valeurs -2, -1, 1 et 2. Dans le cas scalaire, les transpositions sont invisibles, et de plus, grâce à la symétrie de permutation intrinsèque, les variables q et r, telles qu'elle viennent d'être présentées, sont interchangeables, si bien que le groupe $\mathcal{S}_3$ agit sur les *trois* "variables" p, q et r. On suppose donc que $p \leqslant q \leqslant r$. Enfin, par la symétrie hermitienne, on peut imposer à p d'être négatif.

Lorsque p vaut -2, r et q sont contraints d'être tous deux égaux à 1 ; lorsque p vaut -1, q doit être égal à -1, et r à 2. On vérifie alors que les deux équations du critère énergétique sont équivalentes à

$$\chi^{(2)\,z}{}_{zz}(2\omega_I; \omega_I, \omega_I) = \chi^{(2)\,z}{}_{zz}(-\omega_I; -2\omega_I, \omega_I),$$

soit

$$\chi^{(2)\,z}{}_{zz}(2\omega_I; \omega_I, \omega_I) = \overline{\chi}^{(2)\,z}{}_{zz}(\omega_I; 2\omega_I, -\omega_I). \tag{5.5}$$

À notre avis, ceci est le meilleur exemple d'application du critère énergétique. Il stipule que, *avec la polarisation que nous avons choisie, si le $\chi^{(2)}$ intervenant dans la génération de seconde harmonique est le complexe conjugué de celui intervenant dans la contre-réaction de $\mathbf{E}_2$ sur $\mathbf{E}_1$, alors il n'y a pas de perte à cet ordre*. Ceci a deux conséquences potentiellement surprenantes pour les personnes peu habituées à l'optique non-linéaire : on peut avoir des pertes avec des χ réels, et (sa contraposée) un matériau caractérisé par des χ complexes peut ne pas causer de perte d'énergie électrique.

Pour le système complet à l'ordre trois et au degré trois, les remarques présentées plus haut pour obtenir les conditions à l'ordre deux deviennent fort appréciables[6], et aboutissent à

[6]Concrètement, elles impliquent que l'on peut ramener l'étude des $\chi^{(3)}(-p\omega_I; s\omega_I, q\omega_I, r\omega_I)$ au cas où $-3 \leqslant p \leqslant s \leqslant r \leqslant q \leqslant 3$ et $p \leqslant -1$.

$$\begin{cases} \chi^{(1)}(\omega_I;\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(1)}(2\omega_I;2\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(1)}(3\omega_I;3\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(2)}(2\omega_I;3\omega_I,-\omega_I) = \chi^{(2)}(\omega_I;3\omega_I,-2\omega_I) = \overline{\chi^{(2)}}(3\omega_I;2\omega_I,\omega_I) \\ \chi^{(2)}(\omega_I;2\omega_I,-\omega_I) = \overline{\chi^{(2)}}(2\omega_I;\omega_I,\omega_I) \\ \chi^{(3)}(3\omega_I;3\omega_I,3\omega_I,-3\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(3)}(3\omega_I;3\omega_I,2\omega_I,-2\omega_I) = \chi^{(3)}(2\omega_I;3\omega_I,2\omega_I,-3\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(3)}(3\omega_I;3\omega_I,\omega_I,-\omega_I) = \chi^{(3)}(\omega_I;3\omega_I,\omega_I,-3\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(3)}(2\omega_I;3\omega_I,\omega_I,-2\omega_I) = \overline{\chi^{(3)}}(\omega_I;-3\omega_I,2\omega_I,2\omega_I) = \overline{\chi^{(3)}}(3\omega_I;2\omega_I,2\omega_I,-\omega_I) \\ \chi^{(3)}(\omega_I;3\omega_I,-\omega_I,-\omega_I) = \overline{\chi^{(3)}}(3\omega_I;\omega_I,\omega_I,\omega_I) \\ \chi^{(3)}(2\omega_I;2\omega_I,2\omega_I,-2\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(3)}(2\omega_I;2\omega_I,\omega_I,-\omega_I) = \chi^{(3)}(\omega_I;2\omega_I,\omega_I,-2\omega_I) \in \mathbb{R} \\ \chi^{(3)}(\omega_I;\omega_I,\omega_I,-\omega_I) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.6}$$

où, d'après la symétrie du matériau et la polarisation que nous avons choisie, seules les composantes suivant z nous préoccupent. Il nous semblerait intéressant de juger ces conditions en utilisant un modèle relativement simple pour les $\chi^{(n)}$ (modèle de Drude, par exemple).

Nous remarquons qu'avec la définition de degré et les valeurs des $\chi^{(n)}$ que nous avons prises, des pertes apparaissent forcément, ou de manière plus précise :

> *le système d'équation (1.29) conduit forcément à un transfert d'énergie électrique en une autre forme d'énergie.*

Pour s'en convaincre, regardons d'un peu plus près les équations que doivent satisfaire les $\chi^{(n)}$:

- à l'ordre un, les $\chi^{(1)}$ du matériau satisfont les exigences de (5.6).
- à l'ordre deux, $\chi^{(2)}(3\omega_I;2\omega_I,\omega_I)$ n'est pas nul, alors que les autres termes auxquels il doit être conjugué pour éviter les pertes d'énergie électrique sont nuls.
- à l'ordre trois, $\chi^{(3)}(3\omega_I;\omega_I,\omega_I,\omega_I)$ n'est pas nul, alors que le terme auquel il doit être conjugué pour éviter les pertes d'énergie électrique est nul.

Rappelons-nous quelle était la raison de l'introduction du degré : il s'agissait de trouver un système fini d'équations approximant le système infini (1.26). Évidemment, comme en témoigne la quantité de système présent dans la littérature, il n'existe pas un unique moyen systématique (physiquement pertinent) d'obtenir des équations numériquement résolvables. La preuve en est que nous donnons ci-dessous une autre définition du degré :

$$d' := \min_{\underline{d}\in\mathbb{N}}\{||(p_0,\cdots,p_n)||_{l_\infty(\mathbb{Z})} > \underline{d} \Rightarrow \chi^{(n)}(\mathbf{s};p_0\omega_I;p_1\omega_I,\cdots,p_n\omega_I) = 0, \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^3\}.$$

On obtient alors le système suivant d'équation[7] :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) \\
&\quad + \omega_I^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-2}\rfloor + 2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1}\rfloor \\
&\quad + 6\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-3}\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_{-1}\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-3}\rfloor \\
&\quad + 6\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-2}\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1}\rfloor\Big) = 0,
\end{aligned} \tag{5.7a}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) \\
&\quad + (2\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-1}\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor \\
&\quad + 6\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-3}\rfloor + 6\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-2}\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-2}\rfloor \\
&\quad + 6\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1}\rfloor\Big) = 0,
\end{aligned} \tag{5.7b}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) \\
&\quad + (3\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1\rfloor \\
&\quad + 3\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-3}\rfloor + 6\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-2}\rfloor + 6\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1}\rfloor \\
&\quad + 3\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1}\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{5.7c}$$

On peut alors vérifier, et nous le ferons numériquement dans quelques paragraphes, qu'un champ électromagnétique se propageant dans un tel matériau peut être sans perte d'énergie électrique.

Avec cette définition du degré, le système à l'ordre deux et au degré deux est :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 2\omega_I^2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1}\rfloor = 0, \tag{5.8a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor = 0. \tag{5.8b}$$

En supposant les $\chi^{(1)}$ réels, la densité linéique de puissance électrique donnée par chaque équation est alors

$$I_1 = -4\omega_I\varepsilon_0 \int_\Sigma ds\, \Im m\{\chi^{(2)}(2\omega_I, -\omega_I)u_2\overline{u}_1^2\}$$

[7]Nous avons reporté cette définition alternative car, bien qu'elle ait indéniablement un intérêt pour la simulation numérique, puisqu'elle permet de considérer des matériaux sans pertes, elle ne corrobore pas l'intuition en ce qu'elle garde des termes tels que $\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-3}\rfloor$ ou $\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-2}\rfloor$, termes complètement négligeables devant $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1}\rfloor$. Notons cependant que, précisément parce ces termes sont négligeables, la résolution numérique du système (5.7) n'est pour ainsi dire pas plus difficile que celle du système (1.29).

et

$$I_2 = -4\omega_I \varepsilon_0 \int_\Sigma ds\, \Im m\{\chi^{(2)}(\omega_I, \omega_I) u_I^2 \overline{u}_2\} \; ;$$

on voit, d'une part, que la condition (5.5) est évidemment suffisante[8], mais d'autre part, que pour qu'il n'y ait pas de transfert à l'ordre deux d'énergie électrique en une autre forme d'énergie, on doit avoir

$$\int_\Sigma ds\, \Im m\{\big(\chi^{(2)}(2\omega_I, -\omega_I) - \overline{\chi^{(2)}}(\omega_I, \omega_I)\big) u_2 \overline{u}_1^2\} = 0.$$

Malgré toutes les hypothèses faites dans cette section, il apparaît dans cette équation combien il doit être difficile de trouver un critère énergétique nécessaire et suffisant (dans le cas général, $\chi^{(2)}$ n'a aucune raison d'être homogène, même par morceau).

Vérification de la généralisation des relations de Kleinman à un matériau dispersif

Nous avons annoncé, en accord avec [19], que contrairement à ce que l'on trouve parfois dans la littérature, un matériau ayant des $\chi^{(n)}$ réels n'est pas forcément sans perte, et donc qu'il peut y avoir une conservation de l'énergie électrique dans un matériau ayant des $\chi^{(n)}$ complexes. Nous prenons donc des $\chi^{(n)}$ un peu arbitraires, mais vérifiant le critère énergétique. Ces valeurs sont reportées dans le tableau 5.3. Le système d'équations que l'on doit résoudre dans cette vérification est issu de la deuxième définition du degré (système (5.7)), puisque si l'on prent le degré d, le matériau est actif dès lors que les $\chi^{(1)}$ sont hermitiens.

L'amplitude du champ incident, qui est une onde plane, est $A^i = 5.10^9\, V/m$. À la vue d'une telle valeur, un expérimentateur crierait sans doute au délire... Mais la justification est la volonté de comparer I_1, I_2 et I_3. Puisque l'erreur numérique n'est pas nulle, il faut que ces trois nombres aient des valeurs du même ordre de grandeur. Remarquons que cette si grande amplitude du champ incident rend la non-linéarité tellement importante que les composantes $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ ont des modules de même ordre de grandeur. Le *solveur* que nous avons utilisé traite la non-linéarité par une méthode de Newton-Raphson. Dix-sept étapes ont été nécessaires pour exhiber trois fonctions satisfaisant le système d'équations donné, à une erreur standard fixée à l'avance près.

Les résultats sont exprimés dans le tableau 5.4. L'unité de I_q est le W/m. Les champs oscillants rapidement, il est normal que l'intégrale évaluée sur la surface Σ soit plus précise que celle évaluée sur son bord $\partial\Sigma$.

La dépendance de $|I_3|^2$ en fonction du rayon r_c du cylindre

Les figures 5.3, ..., 5.9 montraient que les équations que l'on résout donne, dans un cas usuel d'optique non-linéaire, des résultats usuels d'optique non-linéaire. Si ceci rassure le physicien, il n'aime pas s'en contenter. Nous cherchions donc des effets plus curieux, et avions demandé conseil à nos collègues Sophie Bracelet et Hervé Rigneault.

[8] En détail, si $\chi^{(2)}(2\omega_I, -\omega_I) = \overline{\chi^{(2)}}(\omega_I, \omega_I)$, alors $\chi^{(2)}(2\omega_I, -\omega_I) u_2 \overline{u}_1^2 = \overline{\chi^{(2)}(\omega_I, \omega_I) \overline{u_2} u_1^2}$ et donc $I_1 + I_2 = 0$: la quantité d'énergie électrique est conservée.

$\chi^{(1)}(\omega_I)$ $\chi^{(1)}(2\omega_I)$ $\chi^{(1)}(3\omega_I)$	1.3793 1.4196 1.4885
$\chi^{(2)}(-\omega_I, 2\omega_I)$ $\chi^{(2)}(-2\omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(2)}(-\omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(2)}(\omega_I, \omega_I)$ $\chi^{(2)}(\omega_I, 2\omega_I)$	$(4-70i).10^{-12}\, m/V$ $(3+20i).10^{-12}\, m/V$ $\frac{\chi^{(2)}(-2\omega_I, 3\omega_I)}{\chi^{(2)}(-\omega_I, 2\omega_I)}$ $\frac{\chi^{(2)}(-\omega_I, 2\omega_I)}{\chi^{(2)}(-2\omega_I, 3\omega_I)}$
$\chi^{(3)}(-3\omega_I, \omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-\omega_I, -\omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-3\omega_I, 2\omega_I, 2\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-2\omega_I, \omega_I, 2\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-\omega_I, \omega_I, \omega_I)$ $\chi^{(3)}(-3\omega_I, 2\omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-2\omega_I, 2\omega_I, 2\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-3\omega_I, 3\omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-\omega_I, \omega_I, 2\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-2\omega_I, 2\omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-\omega_I, \omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-\omega_I, 2\omega_I, 2\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-2\omega_I, \omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(\omega_I, \omega_I, \omega_I)$	$1,7.10^{-23}\, m^2/V^2$ $(1+4i).10^{-23}\, m^2/V^2$ $(1-2i).10^{-23}\, m^2/V^2$ $-5,2.10^{-23}\, m^2/V^2$ $-4.10^{-23}\, m^2/V^2$ $4.10^{-23}\, m^2/V^2$ $9.10^{-23}\, m^2/V^2$ $1.10^{-23}\, m^2/V^2$ $\chi^{(3)}(-2\omega_I, \omega_I, 2\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-3\omega_I, 2\omega_I, 3\omega_I)$ $\chi^{(3)}(-3\omega_I, \omega_I, 3\omega_I)$ $\frac{\chi^{(3)}(-3\omega_I, 2\omega_I, 2\omega_I)}{\chi^{(3)}(-3\omega_I, 2\omega_I, 2\omega_I)}$ $\frac{\chi^{(3)}(-3\omega_I, 2\omega_I, 2\omega_I)}{\chi^{(3)}(-\omega_I, -\omega_I, 3\omega_I)}$

TAB. 5.3 – Des valeurs de susceptibilité $\chi^{(n)}$ un peu arbitraires qui caractériseraient un milieu non-linéaire et dispersif, dans lequel des champs électromagnétiques se propageraient sans perte d'énergie électrique.

	I_q évaluée sur une courbe	I_q évaluée sur une surface
I_1	$-7,163.10^{10}$	$-7,149.10^{10}$
I_2	$5,368.10^{10}$	$5,323.10^{10}$
I_3	$1,863.10^{10}$	$1,826.10^{10}$
$I_1 + I_2 + I_3$	$0,068.10^{10}$	$0,000.10^{10}$

TAB. 5.4 – Comparaison des deux manières de calculer I_q : par une intégrale sur une courbe ($< \int_{\partial\Sigma} dl\, \mathcal{P}_{0,q} \cdot \hat{n} >$) ou par une intégrale sur une surface ($-2q\omega_I \int_\Sigma ds\, \Im m\{\mathbf{D}_q \cdot \overline{\mathbf{E}_q}\}$). Puisque que les sources du champ incident ne sont pas localisées dans la surface Σ et que le matériau est sans pertes, la somme des puissances $I_1 + I_2 + I_3$ doit s'annuler ; ceci est vérifié à l'erreur numérique près.

Ils ont attiré notre attention sur la taille du cylindre, et ont prédit le fait suivant : si le faisceau est focalisé, la puissance émise par les harmoniques devrait baisser lorsque le rayon r_c du cylindre augmente.

Pour tester ce phénomène, nous avons, sur l'antenne virtuelle, généré un courant qui simulait, autour du cylindre, le faisceau gaussien suivant ([104]) :

$$u^i(x,y) = \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} d\theta\, p(\theta) e^{ik_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}$$

où

$$p(\theta) = \frac{k_0 \cos\theta}{2\pi} e^{-(k_0 \Delta x_w \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{2})^2 + ik_0(x_w \cos\theta + y_w \sin\theta)}$$

avec Δx_w le rayon du col du faisceau (le "waist", en anglais), θ_0 l'angle que fait la droite au centre du faisceau avec l'axe $(0,x)$, et (x_w, y_w) les coordonnées du centre du faisceau. Nous avons pris un champ incident qui venait des x croissants, parallèlement à cet axe, et centré sur l'origine. Le centre du faisceau coïncidant avec celui de la tige diffractante, le maximum de puissance est dans l'objet non-linéaire. Le module de ce champ est présenté sur la figure 5.10.

Suivant toujours l'intuition de H. Rigneault, nous avons annulé les $\chi^{(2)}$, et augmenté les $\chi^{(1)}(3\omega_I)$ (nous avons pris $\chi^{(1)}(3\omega_I) = 3.4655$, soit le triple de ce que l'on trouve dans le BBO). Le résultat est affiché sur l'image 5.11.

L'effet a bien eu lieu : malgré les résonances (sur plus d'un ordre de grandeur), on observe que *la puissance émise à $3\omega_I$ diminue si la taille de l'objet non-linéaire augmente*. Ce phénomène avait en fait déjà été pressenti, avec des méthodes moins rigoureuses[9].

[9] Évidemment, nous ne condamnons nullement ces personnes ([105], par exemple), dont l'intuition physique nous dépasse. Les rôles sont répartis, et nous ne faisons que rendre un peu plus propre ce qu'ils ont pressenti.

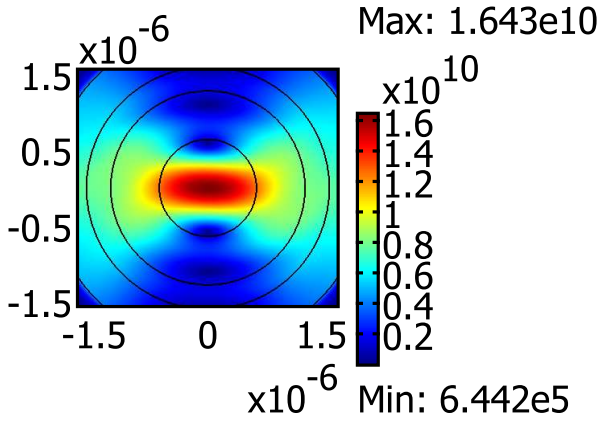


FIG. 5.10 – Module $|E_1^i|$ du champ incident gaussien.

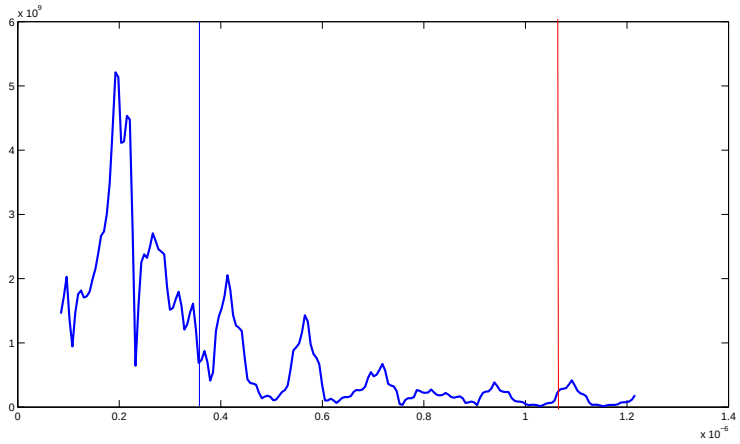


FIG. 5.11 – La densité linéique de puissance émise à $3\omega_I$ I_3 en fonction du rayon r_c du cylindre. La barre rouge correspond à la longueur d'onde associée à ω_I (soit $1064\,nm$), celle en bleue correspond à la longueur d'onde associée à $3\omega_I$ (soit $355\,nm$). On a $\chi^{(1)}(\omega_I) = 1,3793$, $\chi^{(1)}(3\omega_I) = 7,4425$, les $\chi^{(2)}$ sont nuls et tous les $\chi^{(3)}$ non nuls valent $10^{-23}\,m^2/V^2$. Le degré choisit est celui que l'on a noté d.

Ceci ne satisfaisait pas complètement nos amis expérimentateurs. Ce qui les intéressait était de savoir si le "déficit" de puissance émise par la troisième harmonique était dû à une augmentation de pertes ou à une recombinaison de la première harmonique. Puisque le système à résoudre pour obtenir la figure 5.11 est

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 3\omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0,$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0,$$

nous ne pouvions répondre à la question. Cela dit, en prenant la définition alternative du degré d', le système devient (c'est (5.7) en annulant tous les $\chi^{(2)}$, ce qui implique, d'après la section 2.3.1, qu'il n'y a que des harmoniques impaires)

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1)\\ &\qquad + \omega_I^2\Big(6\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-3}\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_{-1}\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1}\rfloor\Big) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3)\\ &\qquad + (3\omega_I)^2\Big(3\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-3}\rfloor + 6\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1}\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor\Big) = 0.\end{aligned}$$

Les termes $\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-3}\rfloor$ et $\lfloor \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_{-1}\rfloor +$ impliquent bien que $\mathbf{E}_3$ peut "redevenir" du $\mathbf{E}_1$. Les conditions du critère énergétique sont vérifiées, et l'on peut alors écarté la première hypothèse. L'image que l'on a à l'esprit est alors la suivante :

- Si r_c est nul, il n'y a évidemment pas de génération d'harmoniques, le milieu étant complètement linéaire.
- Sur une certaine plage, plus r_c grandit, plus la puissance I_3 est importante [10].
- À partir d'une certaine valeur, I_3 a tendance à décroître lorsque r_c croît. On peut dire, avec un langage imagé, que le champ à $3\omega_I$ se recombine en du champ à ω_I, mais la prudence nous impose de nous conformer aux observations de la courbe 5.12 : lorsque r_c grandit, le système génère moins d'harmonique.
- Si la valeur de r_c augmente encore, nous pensons que, aux résonances près, ceci n'aura pas d'influence sur I_3 (et d'ailleurs, c'est ce que nous observons sur la figure 5.12). En effet, la section de la tige est très supérieure à la zone sur laquelle le faisceau est localisé, et par conséquent, seule la non-linéarité au centre du cylindre est prise en compte.

D'après ces scientifiques, nous devrions pouvoir observer ce phénomène avec des $\chi^{(n)}$ réalistes, c'est-à-dire sans la dispersion chromatique démesurée que nous imposons, en choisissant un champ incident gaussien présentant une phase de Gouy. Des travaux sont en cours de réalisations.

[10] Ceci est une conjecture ; nous pourrons la vérifier à partir d'une valeur minimale de r_c, mais nous sommes néanmoins limité par des problèmes de maillage.

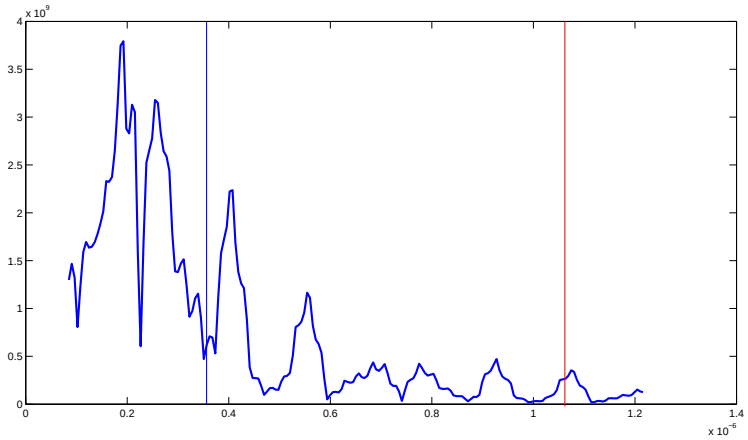


FIG. 5.12 – La densité linéique de puissance émise à $3\omega_I$ I_3 en fonction du rayon r_c du cylindre. La barre rouge correspond à la longueur d'onde associée à ω_I (soit $1064\,nm$), celle en bleue correspond à la longueur d'onde associée à $3\omega_I$ (soit $355\,nm$). On a $\chi^{(1)}(\omega_I) = 1.3793$, $\chi^{(1)}(3\omega_I) = 7.4425$, les $\chi^{(2)}$ sont nuls et tous les $\chi^{(3)}$ non nuls valent $10^{-23}\,m^2/V^2$. Le degré choisit est celui que l'on a noté d'.

Pour clôturer cette section, mentionnons qu'une non-linéarité non-nulle au second ordre n'annule pas le phénomène, comme le montre les figures 5.13 et 5.14, où l'on a indiqué également, en échelle logarithmique, les densités de puissances $-I_1$ et I_2. Le système que l'on a résolu pour cette simulation est celui qui nous semble le plus physique (i.e., on a utilisé le degré d) :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2\rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor\Big) = 0, \qquad ((1.29a))$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor = 0, \qquad ((1.29b))$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2\Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1\rfloor\Big) = 0. \qquad ((1.29c))$$

Commentaire sur les différents modèles

Si un expérimentateur réalise l'expérience que nous simulons, avec quel système d'équations devrons-nous confronter les résultats ? Notre avis sur ce point peut cho-

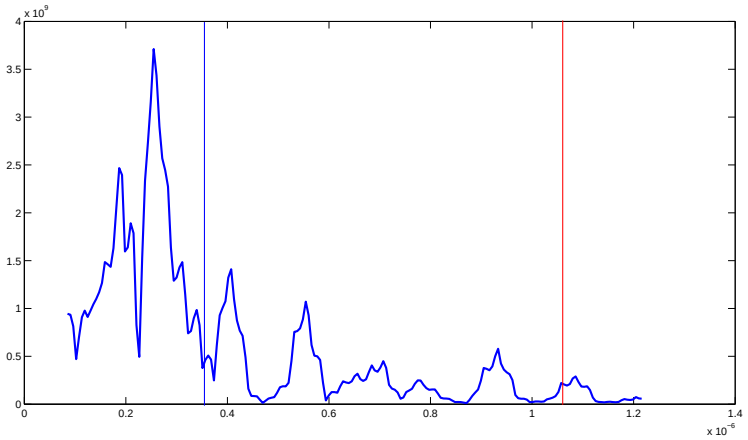


FIG. 5.13 – La densité linéique de puissance émise à $3\omega_I$ I_3 en fonction du rayon r_c du cylindre. La barre rouge correspond à la longueur d'onde associée à ω_I (soit $1064\,nm$), celle en bleue correspond à la longueur d'onde associée à $3\omega_I$ (soit $355\,nm$). On a $\chi^{(1)}(\omega_I) = 1.3793$, $\chi^{(1)}(3\omega_I) = 7.4425$, les $\chi^{(2)}$ non nuls valent $2.10^{-12}\,m/V$ et les $\chi^{(3)}$ non nuls valent $10^{-23}\,m^2/V^2$. Le degré choisit est celui que l'on a noté d'.

quer[11] : peu importe ! En effet, comme nous l'avons déjà dit, les équations issues du degré d' contiennent les mêmes éléments que celles issues du degré d, plus quelques autres termes, de module très petit. Par conséquent, les solutions de ces différents systèmes sont extrêmement proches, et nous pensons que l'écart entre la théorie et l'expérience ne pourra être corrigé par le choix du degré.

Nous avons comparé les cartes de champ de chaque composante pour différent rayon du cylindre. La composante qui est le plus sensible au système est la troisième harmonique (on compare par rapport à la fondamentale, puisque $\mathbf{E}_2$ est absent si les $\chi^{(2)}$ sont nuls). On montre, sur les figures 5.15 et 5.16, les résultats, et le lecteur pourra se convaincre que ces solutions sont en effet très proches les unes des autres.

5.2.3 La dépendance de $|I_q|^2$ en fonction de l'amplitude A^i du champ incident

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée à la page 46 : "comment varient les intensités des champs aux différentes fréquences lorsque l'intensité du champ incident est multipliée par un facteur m ?" Les pertes aux ordres supérieurs étant, par construction, masquées par celles de l'ordre un, on suppose que les $\chi^{(1)}$ sont réels afin de limiter les échanges d'énergie aux $\chi^{(2)}$ et aux $\chi^{(3)}$. L'onde incidente est une onde plane venant de la droite : $\mathbf{E}^i(x,y,z,t) = 2\Re e\{A^i e^{-i(k_I x+\omega_I t)}\}\hat{z}$.

[11] Mais il peut cependant y avoir des surprises. . .comme l'on verra avec le cristal photonique.

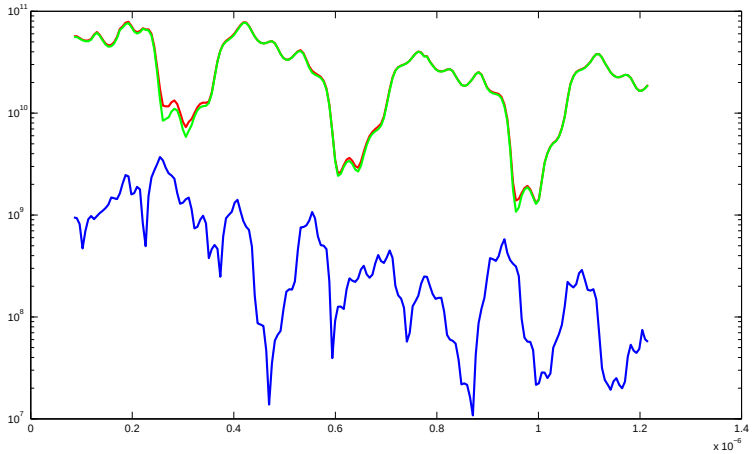
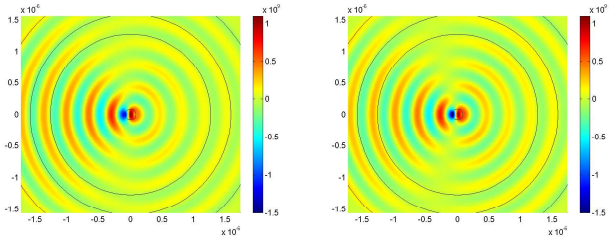
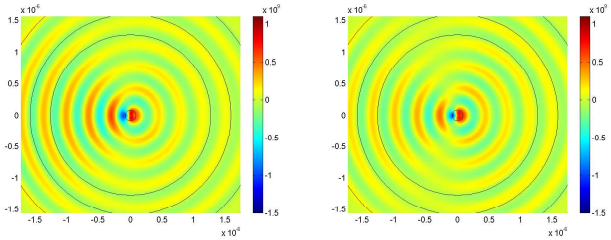


FIG. 5.14 – Les densités linéiques de puissance $-I_1$, I_2, I_3 émise à ω_I (rouge), $2\omega_I$ (vert), $3\omega_I$ (bleu) en fonction du rayon r_c du cylindre. La barre rouge correspond à la longueur d'onde associée à ω_I (soit $1064\,nm$), celle en vert correspond à la longueur d'onde associée à $2\omega_I$ (soit $532\,nm$), celle en bleu correspond à la longueur d'onde associée à $3\omega_I$ (soit $355\,nm$). On a $\chi^{(1)}(\omega_I) = 1,3793$, $\chi^{(1)}(2\omega_I) = 4,2588$, $\chi^{(1)}(3\omega_I) = 7,4425$, tous les $\chi^{(2)}$ non nuls valent $2.10^{-12}\,m/V$ et tous les $\chi^{(3)}$ non nuls valent $10^{-23}\,m^2/V^2$. Le degré choisit est celui que l'on a noté d'.

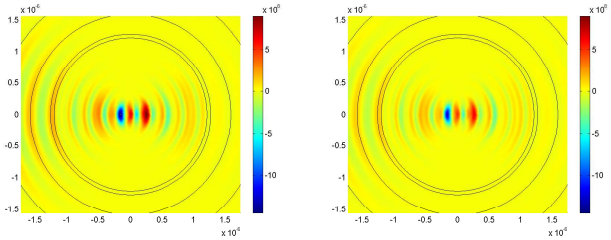


(a) degré d, $\chi^{(2)} = 0$ (b) degré d

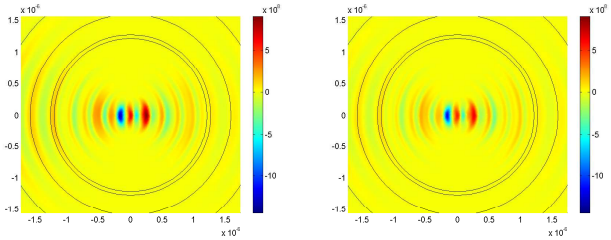


(c) degré d', $\chi^{(2)} = 0$ (d) degré d'

FIG. 5.15 – La partie réelle de la troisième harmonique $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$ pour différents systèmes d'équations, lorsque le rayon du cylindre vaut $r_c = 85\,nm$. Lorsqu'il n'y a pas la mention "$\chi^{(2)} = 0$", les $\chi^{(2)}$ non nuls valent $2.10^{-12}\,V/m$.



(a) degré d, $\chi^{(2)} = 0$ (b) degré d



(c) degré d', $\chi^{(2)} = 0$ (d) degré d'

FIG. 5.16 – La partie réelle de la troisième harmonique $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$ pour différents systèmes d'équations, lorsque le rayon du cylindre vaut $r_c = 1,2\,\mu m$. Lorsqu'il n'y a pas la mention "$\chi^{(2)} = 0$", les $\chi^{(2)}$ non nuls valent $2.10^{-12}\,V/m$.

Raisonnement intuitif avec la définition du degré d'

À l'ordre deux et au degré d' deux, les équations de propagations sont :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 2\omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1} \rfloor = 0,$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0.$$

On a donc, avec des $\chi^{(1)}$ réels,

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\partial\Sigma} dl\, \mathcal{P}_{0,1} \cdot \hat{n} \qquad (5.11) \\ &= -4\omega_I \varepsilon_0 \int_{\Sigma} ds\, \Im m\{\chi^{(2)}(2\omega_I, -\omega_I) u_2 \overline{u}_1^2\}, \\ I_2 &:= \int_{\partial\Sigma} dl\, \mathcal{P}_{0,2} \cdot \hat{n} \qquad (5.12) \\ &= -4\omega_I \varepsilon_0 \int_{\Sigma} ds\, \Im m\{\chi^{(2)}(\omega_I, \omega_I) u_1^2 \overline{u}_2\}. \end{aligned}$$

Dans un régime faiblement linéaire, on imagine que les effets d'une augmentation d'un facteur dix de l'amplitude de $\mathbf{E}^i$ sont les suivants : la composante $\mathbf{E}_1$ augmente d'un facteur dix et la composante $\mathbf{E}_2$ augmente d'un facteur cent (puisque sa source principale est $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$). Ceci a été vérifié numériquement. Étudions maintenons l'énergie : d'un côté, dans le terme de gauche de (5.11), on s'attend à ce que l'intégrale de $\mathcal{P}_{0,1} := 2\Re e\{(i\omega_I \mu(\omega_I))^{-1} \nabla u_1 \overline{u}_1\}$ varie de manière quadratique, c'est-à-dire à ce qu'elle augmente d'un facteur cent lorsque A^i augmente d'un facteur dix, mais d'un autre côté, $u_2 \overline{u}_1^2$ augmentant par la même occasion d'un facteur dix-mille, on s'attend à ce que le terme de droite croisse du même facteur[12].

Alors qu'en est-il ? Quel est le comportement de I_1 lorsque l'amplitude du champ incident augmente ? La réponse est donnée par la figure 5.17, où sont exposées $-I_1$ et I_2. Nous nous sommes soumis à la condition du critère énergétique :

$$\chi^{(2)\,z}{}_{zz}(2\omega_I; \omega_I, \omega_I) = \overline{\chi}^{(2)\,z}{}_{zz}(\omega_I; 2\omega_I, -\omega_I).$$

Les courbes sont complètement superposées, ainsi $I_1 + I_2$ s'annule et on a la confirmation numérique de la conservation de l'énergie électrique dans ce cas.

Lorsque l'amplitude A^i du champ incident est inférieure à $10^9\, V/m$, la courbe est une droite (en échelle logarithmique sur les deux axes) ; ceci confirme la dépendance exponentielle de I_1 et de I_2 en fonction de A^i que l'on imaginait aux "petites" amplitudes. Passé ce seuil de $10^9\, V/m$, cette droite s'affaisse : à ces énergies, les composantes $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ ont des amplitudes semblables, et par conséquent les sources

[12] Concernant I_2, les deux parties sont supposées augmenter du même facteur dix-mille.

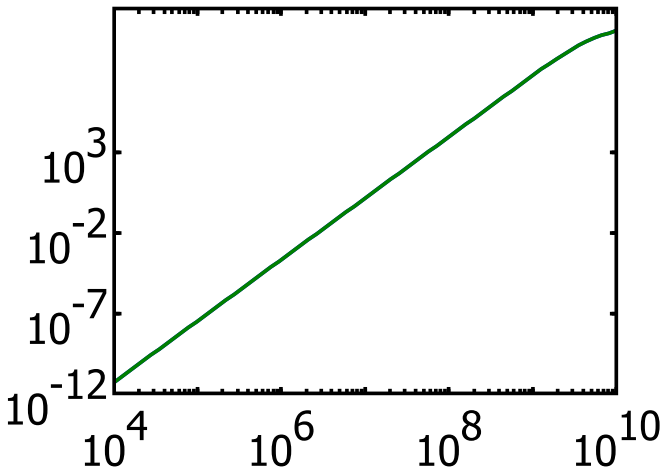


FIG. 5.17 – Les contributions des composantes $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ du champ électrique à la composante zéro du champ de Poynting $-I_1(A^i)$ et $I_2(A^i)$, lorsque $\chi^{(2)\,z}{}_{zz}(2\omega_I;\omega_I,\omega_I) = \overline{\chi}^{(2)\,z}{}_{zz}(\omega_I;2\omega_I,-\omega_I)$. Les deux courbes sont superposées car le système ne perd pas d'énergie. Jusqu'à une certaine amplitude du champ incident, les courbes sont des droites ; ensuite, le système sature.

$\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1} \rfloor$ et $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$ issues de $\mathbf{P}^{(2)}$, générant respectivement $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, sont comparables. Avec un langage imagé, le système sature ; on ne puise plus du $\mathbf{E}_1$ pour fabriquer du $\mathbf{E}_2$; la contre-réaction $\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_{-1} \rfloor$ de $\mathbf{E}_2$ sur $\mathbf{E}_1$ est du même ordre que l'action $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$ de $\mathbf{E}_1$ sur $\mathbf{E}_2$.

Pour rendre compte d'une simulation plus réaliste, nous prenons exactement les paramètres du BBO et passons maintenant au système (5.7) d'ordre trois et de degré d' trois. De même, nous mesurons les valeurs $I_q(A^i)$, $q \in \{1,2,3\}$, des contributions de chaque composante au flux du vecteur de Poynting. Nous obtenons les courbes indiquées sur la figure 5.18.

Le comportement exponentiel pressenti et observé numériquement laisse prévoir une loi du type :

$$I_1^f(A^i) = -I_1^0\,(A^i)^{c_1}, \tag{5.13}$$

$$I_2^f(A^i) = I_2^0\,(A^i)^{c_2}, \tag{5.14}$$

$$I_3^f(A^i) = I_3^0\,(A^i)^{c_3}, \tag{5.15}$$

où A^i est l'amplitude du champ incident et I_j^0 et c_j sont des nombres à déterminer.

	$A^i = 10^4$	$A^i = 10^7$	$A^i = 10^{10}$
$-I_1(A^i)$	$3,6269788.10^{-12}$	$3,6269471$	$3,2052553.10^{11}$
$I_2(A^i)$	$3,6269780.10^{-12}$	$3,6269404$	$1,8788323.10^{11}$
$I_3(A^i)$	$6,6581691.10^{-24}$	$6,6580874.10^{-6}$	$1,3264227.10^{11}$

TAB. 5.5 – Mesures des contributions I_q de chaque composante u_q au flux du vecteur de Poynting à travers $\partial\Sigma$, en W/m, en fonction de l'amplitude A^i du champ incident en V/m. Les résultats les plus marquants sont d'une part, l'accord des sept premiers chiffres de $I_1(10^4)$ et de $-I_2(10^4)$, et la déviation du comportement exponentiel au cinquième chiffre significatif de $I_3(10^7)$. Ceci est dû au fait que I_3 est négligeable devant I_2 aux faibles amplitudes. Le système résolu est (1.29).

L'exposant f a pour but de rappeler que ceci ne peut être valable qu'en régime faiblement non-linéaire.

Les mesures, indiquées dans la première colonne du tableau 5.5, amènent alors à poser, pour les faibles amplitudes :

$$I_1^f(A^i) = -3,6.10^{-28}(A^i)^4, \tag{5.16}$$

$$I_2^f(A^i) = 3,6.10^{-28}(A^i)^4, \tag{5.17}$$

$$I_3^f(A^i) = 6,7.10^{-48}(A^i)^6. \tag{5.18}$$

Les déviations entre ces lois empiriques et les courbes obtenues par la simulation sont présentées aux figures 5.19 et 5.20.

D'après la figure 5.18, les lois I_1^f et I_2^f sont des bonnes approximations lorsque A^i est inférieur à $10^9\ V/m$. Ceci est confirmé par le tableau 5.5 où l'on a facilité une lecture de précision.

5.3 Diffraction électromagnétique par un cristal photonique infini, à l'ordre trois et au degré trois

Nous remplaçons la tige de la section précédente par un cristal photonique ; on a donc un réseau bidimensionnel (infini) de tiges de BBO dans du vide. Les motivations sont nombreuses :

– nous avons vu dans la section 4.6 que les résonances de la transmission en fonction de la longueur d'onde à travers un tel système sont exacerbées ; puisque nous manipulons maintenant des champs polyharmoniques, nous pensons qu'il est possible d'adapter la fréquence du champ incident pour que les différentes composantes $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ aient des comportements très différents[13].

[13] L'article [90] "joue" d'une manière analogue avec un matériau désordonné. Dans ces milieux apparaît, pour chaque longueur d'onde du champ électromagnétique, une longueur de cohérence, qui dépend, outre de cette longueur d'onde, du degré de désordre. Leur but est ainsi d'exhiber une structure telle que la taille de l'objet soit plus grande que la longueur de cohérence de la composante fondamentale (pour que cette

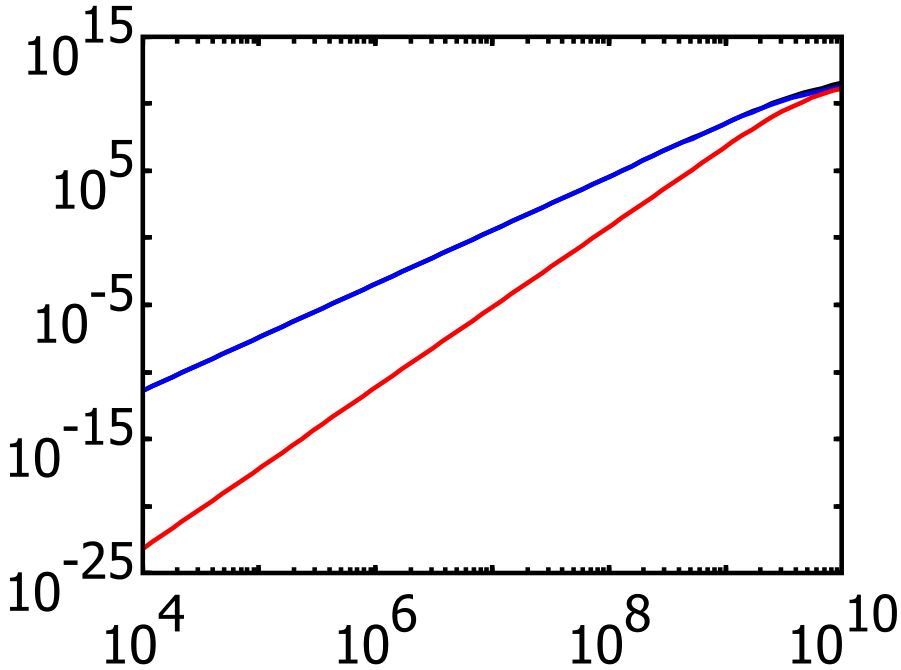


FIG. 5.18 – Les contributions des composantes $\mathbf{E}_1$ (noir), $\mathbf{E}_2$ (bleu) et $\mathbf{E}_3$ (rouge) du champ électrique à la composante zéro du champ de Poynting $-I_1(A^i)$, $I_2(A^i)$ et $I_3(A^i)$, lorsque $\chi^{(2)\,z}{}_{zz}(2\omega_I;\omega_I,\omega_I) = \overline{\chi}^{(2)\,z}{}_{zz}(\omega_I;2\omega_I,-\omega_I)$. Les deux courbes $I_1(A^i)$ et $-I_2(A^i)$ sont superposées jusqu'à ce que la réaction de $\mathbf{E}_3$ sur $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ ne soit plus négligeable (c'est-à-dire jusqu'à ce que l'amplitude du champ incident vaille approximativement $2.10^9\,V/m$ - la figure suivante est d'avantage focalisée sur cette région).

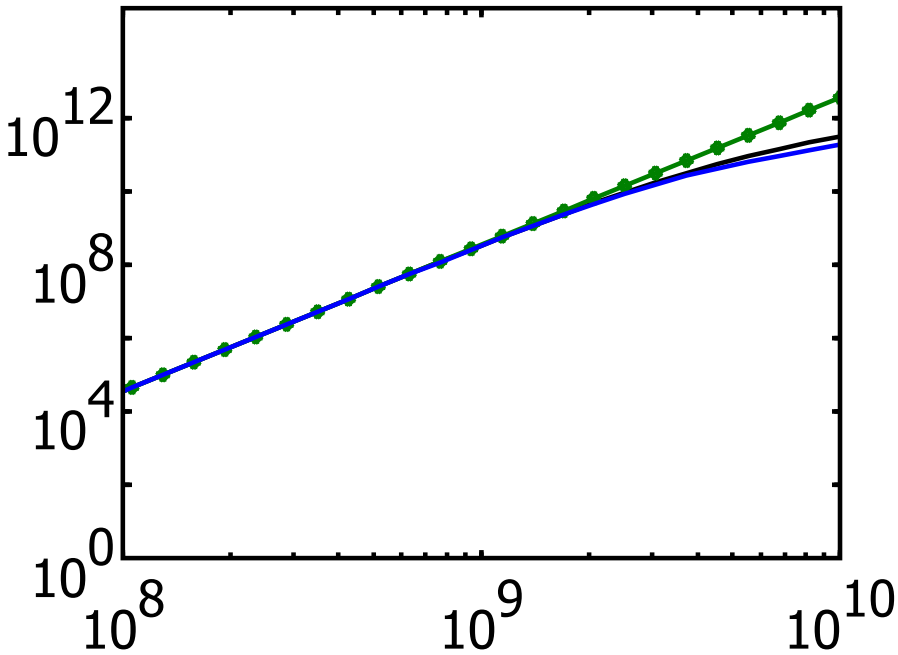


FIG. 5.19 – Les contributions des composantes $\mathbf{E}_1$ (noir), $\mathbf{E}_2$ (bleu) et leur approximation aux petites amplitudes (la courbe avec les ronds) du champ électrique à la composante zéro du champ de Poynting $-I_1(A^i)$, $I_2(A^i)$ et $-I_1^f(A^i)$, dans les mêmes conditions que celles de la figure 5.18.

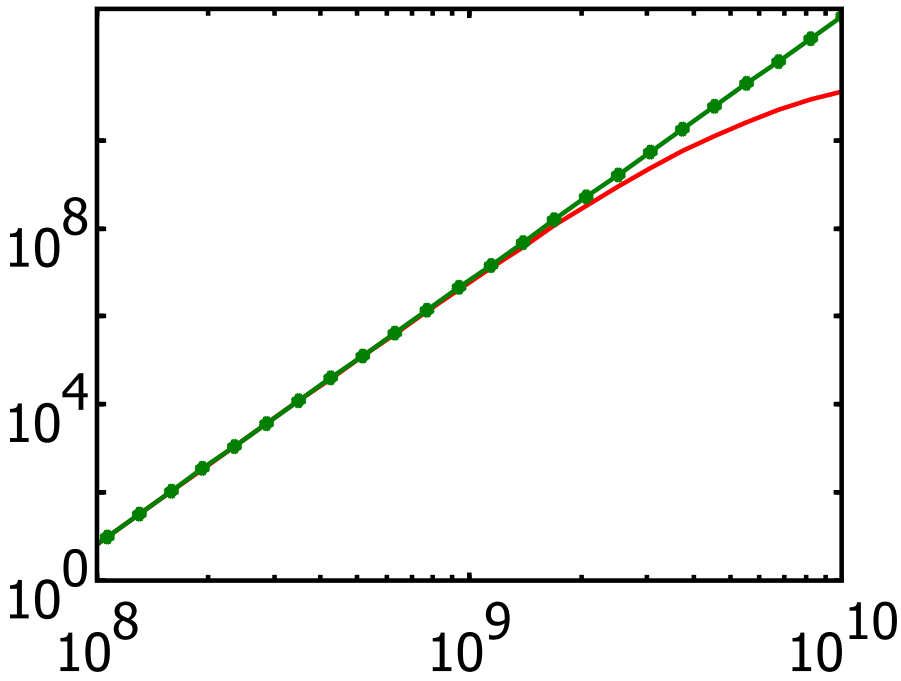


FIG. 5.20 – La contribution de la composante $\mathbf{E}_3$ (rouge) et son approximation $I_3^f(A^i)$ aux petites amplitudes (la courbe avec les ronds) du champ électrique à la composante zéro du champ de Poynting $I_3(A^i)$ et $I_3^f(A^i)$, dans les mêmes conditions que celles de la figure 5.18.

– nous savons ([63] pour un ouvrage de référence) qu'en optique linéaire, les ordres permis par le réseau dépendent de la longueur d'onde. On conjecture que si le matériau est lisse et non-linéaire, plus la longueur d'onde sera petite, plus les directions de propagation d'une composante du champ seront étalées. Ainsi, la dispersion chromatique sera plus large pour les harmoniques supérieures que pour la composante fondamentale, oscillant à la fréquence du champ incident.
– lorsque l'on peut obtenir la solution du système à résoudre en ne résolvant que des équations linéaires (en particulier, en négligeant l'effet Kerr-optique ou la déplétion de l'onde de pompe), on peut montrer que la période du champ totale est égale à celle du réseau. On pose alors la question suivante : si l'on prend en compte certaines contre-réaction des harmoniques sur la composante fondamentale, existe-t-il des solutions qui ont des périodes différentes de celle du réseau ?

Nous reprenons chaque point en détail. Commençons donc par nous concentrer sur la région qui accueille le champ diffracté. Soit r_t le diamètre des tiges et d le pas du réseau ; on a choisit $r_t = d/8$ et $d = \lambda_I/2,25$, de sorte que la longueur d'onde de $\mathbf{E}_2$ soit proche de la périodicité du réseau et celle de $\mathbf{E}_3$ lui soit inférieure. Une onde plane, en incidence normale[14] éclaire ce système. Comme on le lit sur la figure 5.21, le champ $\mathbf{E}_1$ a une longueur d'onde trop grande pour que le cristal ait un effet non-négligeable sur lui (on rappelle que le coefficient de susceptibilité linéaire du BBO est assez faible). En revanche, $\mathbf{E}_2$ est principalement localisé dans le cristal, et $\mathbf{E}_3$ est quant à lui complètement transmis. Notre but est donc atteint : les trois composantes ont des comportements différents.

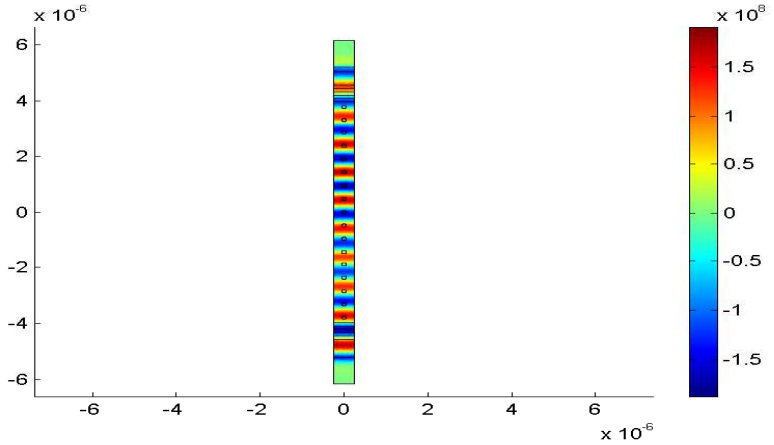
Les figures 5.21 et 5.22 permettent de mesurer l'hypothèse de la non-déplétion de l'onde de pompe (pour $\mathbf{E}_1$) et de comparer des champs à des fréquences identiques mais générés par des sources différentes (par $\mathbf{E}_1$ dans la première figure, par une onde plane à la longueur d'onde $\lambda_I = 532nm$ ou $\lambda_I = 355nm$ pour la seconde). Notons que l'amplitude du champ incident est $A^i = 10^8\, V/m$ dans les deux figures, ce qui amène à la conclusion que l'on ne peut prédire le comportement des harmoniques avec une courbe de transmission du cristal en régime linéaire.

Nous passons au deuxième point. Il va être pratique d'imposer un système de coordonnées : on appelle l'axe (O, z) l'axe d'invariance du cristal, perpendiculaire aux cartes de champs que nous montrons ; ensuite, nous choisissons les axes (O, x) et (O, y) comme le veut la tradition. Le système physique est donc périodique suivant les x.

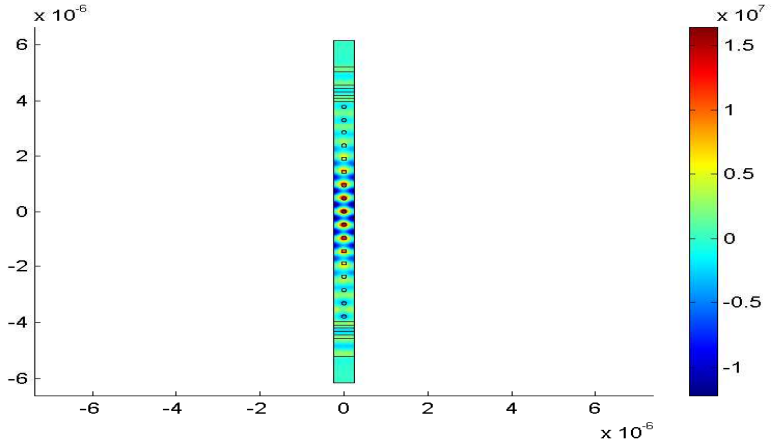
L'amplitude du champ à la fréquence ω_I varie d'une manière proportionnelle à l'amplitude du champ incident ; il parait donc raisonnable, dans un régime où la non-linéarité est faible, de reprendre le système (1.29) en lui appliquant l'hypothèse de la non-déplétion de l'onde de pompe et en négligeant l'effet Kerr-optique. On se donne donc le système suivant :

composante soit localisée), mais plus petite que celle la seconde harmonique (pour que cette composante se propage).

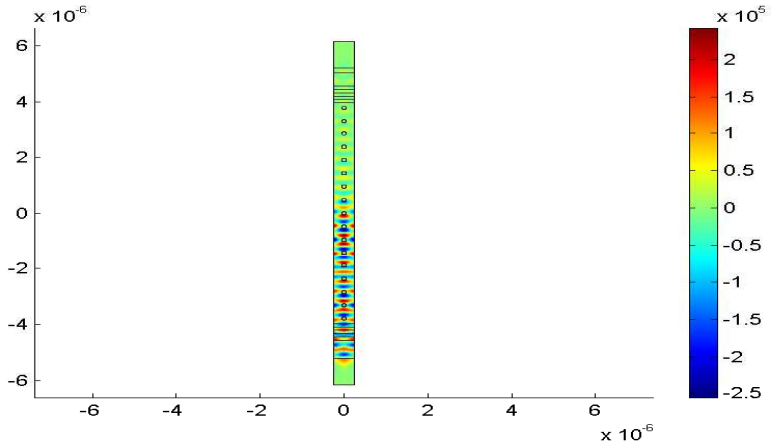
[14] Avec les notations habituelles (voir [63]), on a $\theta = 0$.



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$

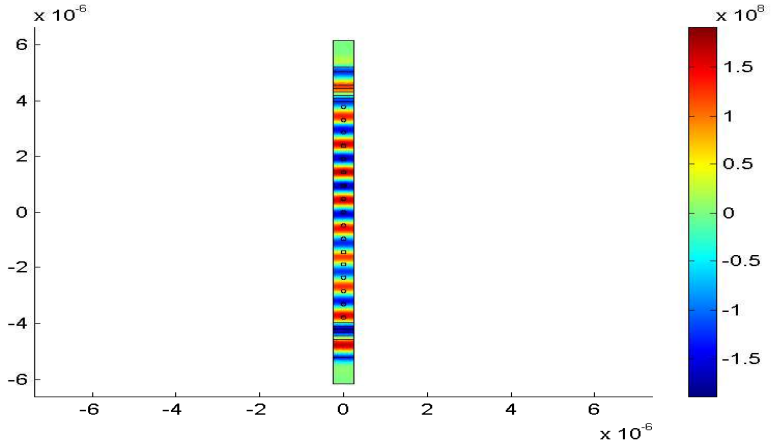


(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$

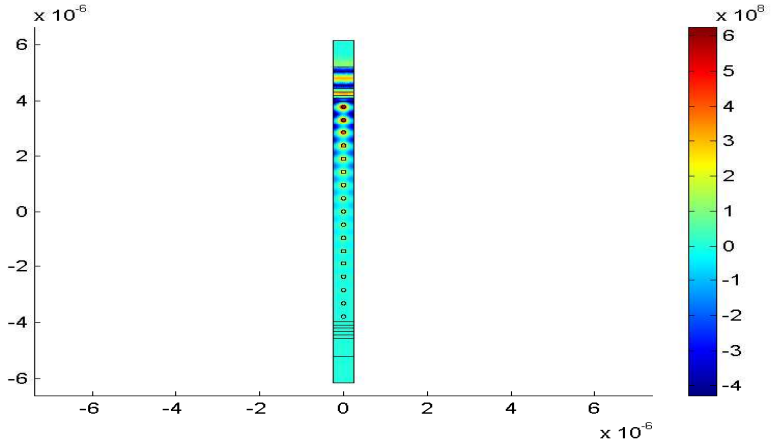


(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$

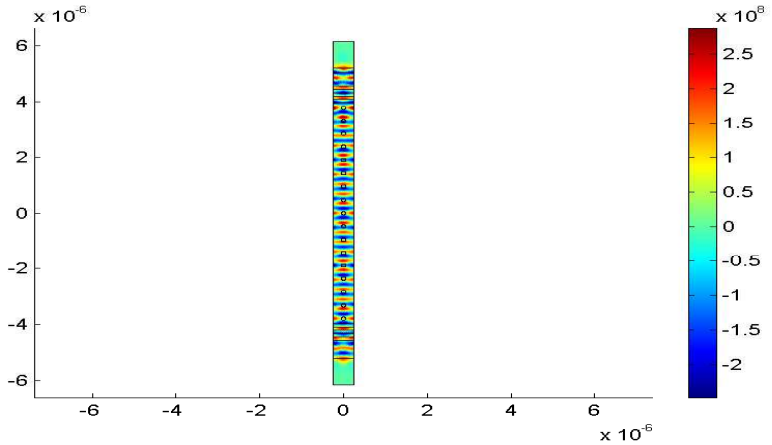
FIG. 5.21 – Cartes de $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$, de $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$ et de $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$ aux longueurs d'ondes respectives $\lambda_I = 1064\,nm$, $\frac{\lambda_I}{2} = 532\,nm$ et $\frac{\lambda_I}{3} = 355\,nm$.



(a) $\Re e\{\mathbf{E}_1 \cdot \hat{z}\}$



(b) $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$



(c) $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$

FIG. 5.22 – Même chose qu'à la figure 5.21 mais en régime linéaire. Il a donc fallu trois simulations avec $\lambda_I = 1064\,nm$, $\lambda_I = 532\,nm$ et $\lambda_I = 355\,nm$ pour obtenir ces cartes.

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0, \tag{5.19a}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0, \tag{5.19b}$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0. \tag{5.19c}$$

Maintenant, puisque $\mathbf{E}_1$ satisfait exactement l'équation qu'il vérifierait si le matériau était linéaire, on peut appliquer la démonstration valable dans ce cas de figure et ainsi poser (se reporter, par exemple, à [63]) :

$$\mathbf{E}_1(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}_{1,n}(y) e^{i\alpha_n x} \hat{z},$$

avec $\alpha_n = n\frac{2\pi}{d} + k\sin(\theta)$, où θ est l'angle entre le vecteur d'onde k^i du champ incident et l'axe (O, y), pris dans le sens des y croissants. Cette formule montre que $\mathbf{E}_1(x + d, y) = \mathbf{E}_1(x, y)$.

Considérons maintenant la seconde équation, et translatons-la d'une distance d suivant l'axe des x. Excepté $\mathbf{E}_2$, tous les termes de cet équation sont laissés invariants (i.e. $\chi^{(1)}(x+d, y, 2\omega_I) = \chi^{(1)}(x, y, 2\omega_I)$, $\chi^{(2)}(x+d, y, \omega_I, \omega_I) = \chi^{(2)}(x, y, \omega_I, \omega_I)$, $\mu(x + d, y, 2\omega_I) = \mu(x, y, 2\omega_I)$, et $\mathbf{E}_1(x + d, y) = \mathbf{E}_1(x, y)$). Par conséquent, en appelant τ_d l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + d, y)$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_2 \circ \tau_d$ satisfont la même équation linéaire aux dérivées partielles, et les même conditions aux limites lorsque $|y|$ tend vers l'infini ; les physiciens admettent alors que ces deux fonctions sont égales, et l'on a $\mathbf{E}_2(x + d, y) = \mathbf{E}_2(x, y)$.

En utilisant un raisonnement analogue, on montre que $\mathbf{E}_3(x + d, y) = \mathbf{E}_3(x, y)$, et ainsi le champ total a la symétrie de translation du réseau. Après un moment de réflexion, on s'aperçoit alors que la clef de ce transfert de symétrie est le fait que l'on peut résoudre le système (5.19) en ne résolvant que des équations linéaires.

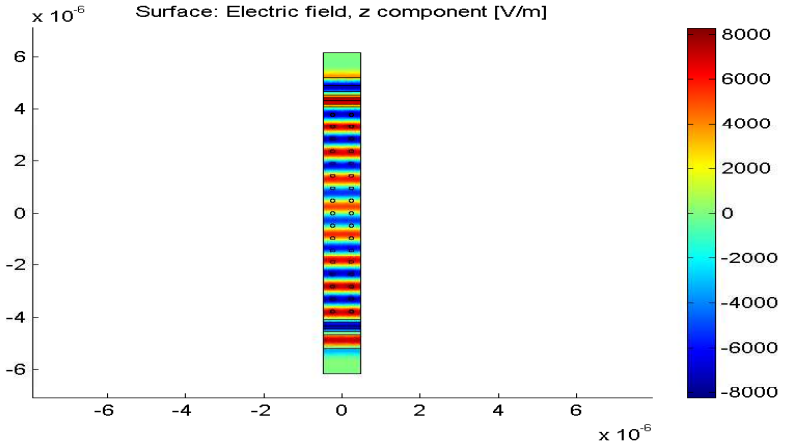
On remarque également que si l'on résout un système d'équations en ne résolvant que des équations linéaires, alors la solution de ce système est (pour les physiciens) nécessairement unique. En revanche, rien n'oblige (5.7) à avoir cette propriété, et nous allons effectivement montrer que ce n'est pas le cas.

Regardons la figure 5.21 : nous avons imposé, pour chaque composante q du champ électrique, la condition $\mathbf{E}_q(x + d, y) = \mathbf{E}_q(x, y)$. Le programme a convergé, et par conséquent il existe des solutions de (5.7) avec un champ total qui a la symétrie de translation du réseau. Mais regardons maintenant les champs exhibés sur la figure 5.23 : nous avons allégé la condition précédente en la suivante : $\mathbf{E}_q(x + 2d, y) = \mathbf{E}_q(x, y)$. Nous remarquons que $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ ont la symétrie de translation du système diffractant, $\mathbf{E}_3$ ne l'a pas : $\mathbf{E}_3(x + d, y) \neq \mathbf{E}_3(x, y)$. Ceci constitue le troisième point.

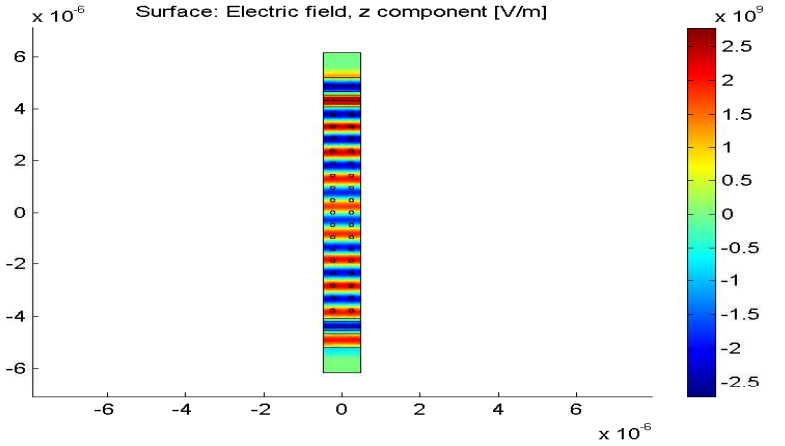
Plus étonnant encore, $\mathbf{E}_3$ n'est pas d-quasipériodique, ce qui est un effet purement non-linéaire. Nous signalons que nous avons obtenu cette solution dès le premier essai ; on peut donc conjecturer que des champs non-quasipériodiques dans des milieux périodiques non-linéaires doivent "facilement" apparaître. Nous n'avons jamais rencontré d'articles où ceci a été mis en question.

Le paragraphe précédent a montré qu'en optique non-linéaire, le champ diffracté peut ne pas avoir la symétrie de l'objet diffractant. Remarquons que ce phénomène apparaît ici dès les très faibles amplitudes : $A^i = 10^4\, V/m$ dans 5.23. Et ceci amène une autre question : puisque numériquement il existe plusieurs solutions de notre système d'équations, que va mesurer un expérimentateur, et que faut-il ajouter à notre système pour garantir l'unicité de la solution ? Rappelons que la multiplicité des solutions des équations des ondes non-linéaires est bien connue dans le cas d'un effet Kerr-optique ([55] [85], [86], etc). Nous l'avons ici mise en valeur dans le cas de la génération d'harmonique.

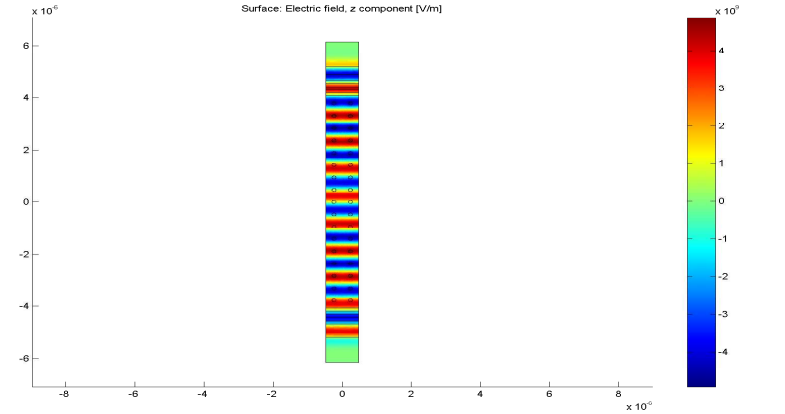
Ces considérations amènent à la conclusion suivante : ce n'est pas parce que les systèmes (1.29) et (5.19) sont quasiment identiques aux très petites amplitudes du champ incident que les solutions du premier sont semblables à celles du second. Ainsi, dans l'étude des phénomènes non-linéaires dans des géométrie résonantes pointe-elle l'idée du chaos.



(a) $A^i = 10^4\, V/m$

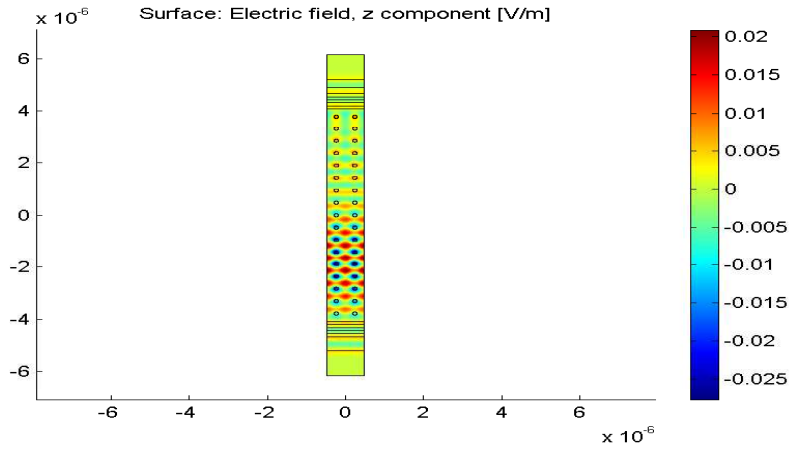


(b) $A^i = 3.10^9\, V/m$

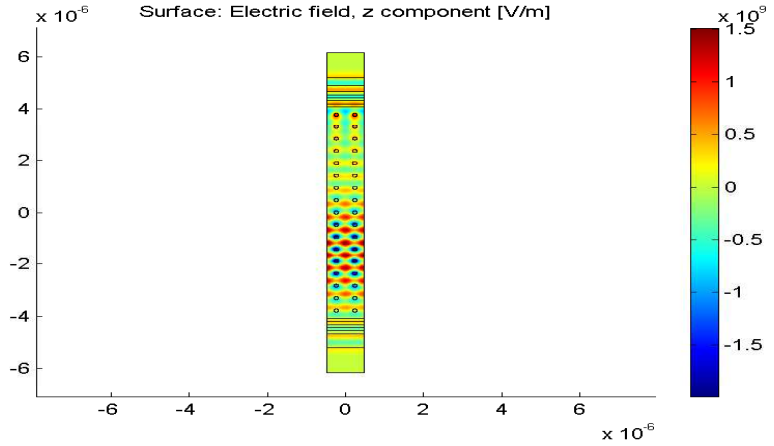


(c) $A^i = 6.10^9\, V/m$

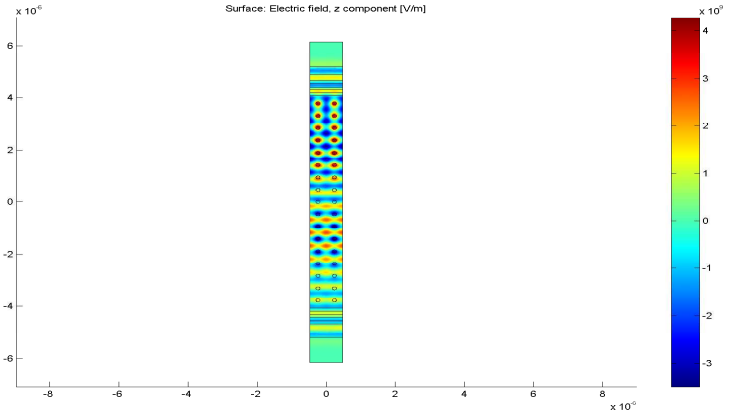
FIG. 5.23 – Cartes de $\Re e\{\mathbf{E}_I \cdot \hat{z}\}$, à la longueur d'onde $\lambda_I = 1064\, nm$, pour différentes amplitudes A^i du champ incident.



(a) $A^i = 10^4\ V/m$

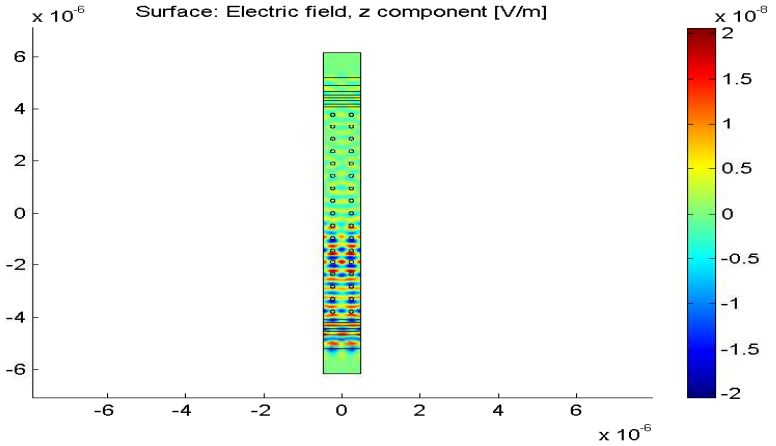


(b) $A^i = 3.10^9\ V/m$

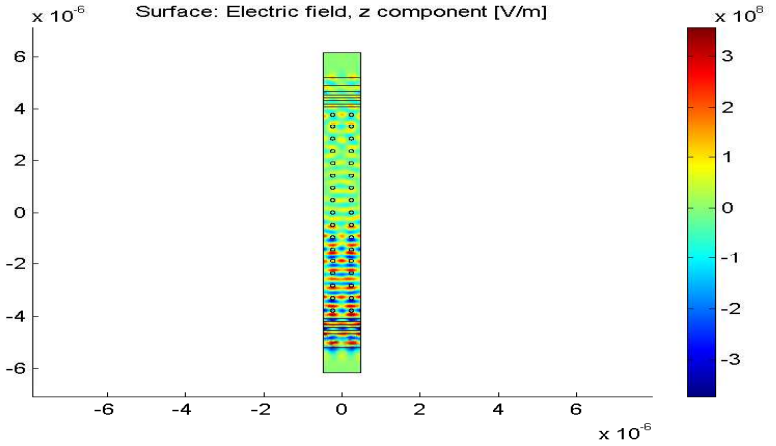


(c) $A^i = 6.10^9\ V/m$

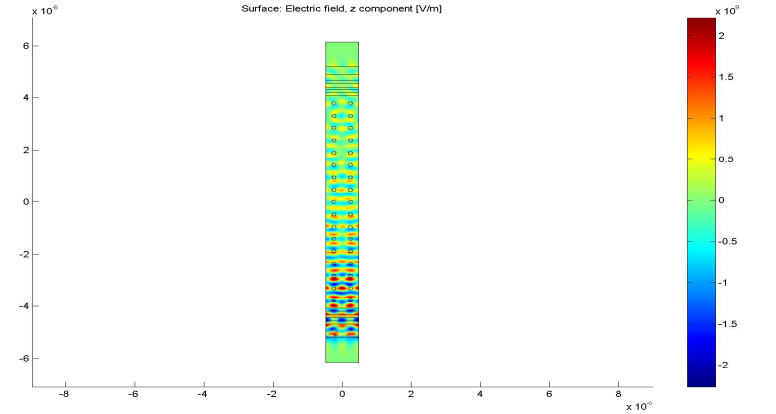
FIG. 5.24 – Cartes de $\Re e\{\mathbf{E}_2 \cdot \hat{z}\}$, à la longueur d'onde $\frac{\lambda_I}{2} = 532\,nm$, pour différentes amplitudes A^i du champ incident.



(a) $A^i = 10^4\ V/m$



(b) $A^i = 3.10^9\ V/m$



(c) $A^i = 6.10^9\ V/m$

FIG. 5.25 – Cartes de $\Re e\{\mathbf{E}_3 \cdot \hat{z}\}$, à la longueur d'onde $\frac{\lambda_I}{3} = 355\,nm$, pour différentes amplitudes A^i du champ incident.

Conclusion et perspectives

Conclusion

L'optique non-linéaire est un vaste domaine où se côtoient des scientifiques aptes à la théorie, la simulation sur ordinateur ou l'expérience. Nous avons voulu, dans cette thèse, réunir plusieurs spécialistes de l'institut Fresnel afin d'étudier tous les aspects d'une partie de la physique, des principes fondamentaux à leur vérification expérimentale et aux applications. Nous présentons dans ce rapport la théorie (chapitre 1 pour les définitions et la méthode, chapitre 2 pour certaines propriétés, l'annexe D pour comparer avec ce que l'on trouve dans la littérature), les outils permettant de réaliser quelques simulations (chapitre 3), et leurs résultats (chapitre 4 pour l'effet Kerr-optique, chapitre 5 pour la génération de deuxième et troisième harmoniques, l'effet Kerr-optique et la déplétion de l'onde de pompe). La partie expérimentale n'a pas été réalisée. Il s'agit principalement d'un manque de temps, ou de rapidité. Cependant, des interactions avec Hervé Rigneault et Sophie Bracelet ont eu lieu, et nous espérons fortement que le travail engagé ne s'arrêtera pas avec la soutenance.

La majeure partie des publications en optique non-linéaire est dévolue à ses applications aux télécommunications, à l'imagerie, etc. Mes encadrants nourrissaient le projet d'une étude sur la diffraction par un milieu non-linéaire, domaine jusque là relativement vierge. Après quelques mois d'hésitation, nous avons décidé de tout reprendre depuis les équations de Maxwell. Celles-ci, ne formant pas un système clos, nous ont obligés à poser les relations constitutives générales :

$$\mathbf{D}(\mathbf{s},t) = \mathfrak{D}\big(\{\mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma},\tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_e^d(\mathbf{s})\times T_e^d(t)}, \{\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma},\tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_b^d(\mathbf{s})\times T_b^d(t)}, \mathbf{s}, t\big), \tag{(1.3a)}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{s},t) = \mathfrak{H}\big(\{\mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma},\tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_e^h(\mathbf{s})\times T_e^h(t)}, \{\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma},\tau)\}_{(\boldsymbol{\sigma},\tau)\in S_b^h(\mathbf{s})\times T_b^h(t)}, \mathbf{s}, t\big). \tag{(1.3b)}$$

Puisque notre objectif est de tirer des nombres de certaines équations, nous devons faire des hypothèses. Nous pensons que les plus importantes stipulent que le matériau diffractant est stationnaire et non-linéaire. Dans ce cadre, nous trouvons les systèmes infinis d'équations de propagations, que le spectre des champs électromagnétiques soit discret (équation (1.26) lorsque le champ incident est monochromatique) ou continu

(équation (2.1), pour le troisième ordre). Nous sommes capables de trouver une méthode d'approximation dans le premier cas uniquement. Cette méthode, que l'on appelle le degré, permet, en ne considérant qu'un système fini, de trouver des solutions approchées par la simulation numérique.

La méthode des éléments finis est adaptée aux études de diffraction par un objet non-linéaire, puisque l'on contrôle facilement l'inhomogénéité du vecteur polarisation (donc de la permittivité dans l'effet Kerr-optique). Une contrainte est alors d'implémenter le champ incident dans la zone maillée, alors que, physiquement, il peut se trouver loin de l'objet diffractant. Nous résolvons cette difficulté par ce que nous avons baptisée une antenne virtuelle. L'idée est d'insérer, proche de l'objet diffractant, une boucle de courant générant un champ "virtuel" dont la restriction, à l'intérieur de cette boucle, est identique au champ incident "physique". Nous vérifions que, lorsque l'on place un matériau diffractant dans la boucle, les champs diffractés issus des champs incidents virtuel ou physique sont identiques. Ce procédé nous permet, dans ce rapport, de connaître la réponse électromagnétique à une onde plane, un champ généré par un courant ou un faisceau gaussien.

Les simulations du chapitre 4 peuvent, je pense, s'effacer devant celles du chapitre suivant, où l'on prend en compte la génération d'harmoniques. Les objets diffractants sont un cylindre ou un cristal photonique infini. Les résultats principaux sont, pour le premier, une caractérisation des différents régimes (linéaire, faiblement non-linéaire, fortement non-linéaire) en fonction de l'amplitude du champ incident, un bilan énergétique rigoureux et une étude de la dépendance de la puissance émise à la troisième harmonique en fonction du rayon du cylindre ; quelques conclusions, peu intuitives au premier abord, sont exposées pour cette dernière étude. En ce qui concerne la diffraction par un cristal photonique, nous montrons que, puisqu'il présente de très grandes résonances, les différentes harmoniques du champ électrique peuvent avoir des comportements totalement différents. Aussi, contrairement à ce qui semble être toujours admis, nous exhibons des solutions non d-quasi-périodiques dans un système physique d-périodique.

Perspectives

Plusieurs travaux me tiennent à cœur pour clôturer ou prolonger cette thèse. Le plus immédiat concerne la collaboration avec Hervé Rigneault et Sophie Bracelet. Il devrait voir le jour dans les toutes prochaines semaines.

Afin de faciliter ces échanges théorie-expérience, il faudrait supprimer quelques hypothèses que nous utilisons dans toutes les simulations. En particulier, nous nous sommes restreints à des systèmes physiques invariants suivant une direction, et nous n'avons étudié qu'une seule polarisation, celle qui permet une étude scalaire - pour chaque composante - du problème. Enfin, bien que possibles, les simulations multi-échelles ne sont pas aisées avec la méthode des éléments finis, ce qui contraint les sections des objets que l'on considère à être proches des longueurs d'onde mises en jeu. Il est souhaitable de généraliser tout ceci.

Le critère énergétique que nous donnons n'est pas complet en l'état. Il serait souhaitable de le généraliser aux processus multiharmoniques, afin de mieux cerner, par

exemple, les échanges d'énergie dans les résonances Raman. Aussi, nous pourrions le comparer à d'autres approches, en particulier les formulations hamiltoniennes, qui obtiennent peut-être plus facilement une condition nécessaire et suffisante.

Un autre sujet, intéressant, sur lequel nous nous sommes peu attardé concerne l'unicité des solutions que nous présentons. En effet, la plupart du temps, il suffit que notre programme converge pour que nous passons à l'analyse de cette solution, sans plus nous questionner (excepté pour le cristal photonique infini, où nous montrons que, en laissant plus ou moins de liberté aux solutions, le programme ne converge pas toujours sur les mêmes). Les systèmes que l'on résout sont non-linéaires, et il semble que peu de mathématiciens se soient penchés sur des problèmes dont les résultats, déchiffrables par nos soins, nous concerneraient directement. Il existe même de nombreux cas où une bistabilité est prouvée numériquement ; nous avons essayé de reproduire ces simulations, mais sans succès.

Tous les matériaux que l'on considère ici sont stationnaires. Ceci me parait gênant pour la raison suivante : nous nous intéressons au régime non-linéaire, et par conséquent, à la réponse du matériau aux fortes, voire très fortes amplitudes. À ce niveau, les effets thermiques ou mécaniques sont rarement négligeables. Il est donc urgent, même si ceci est un immense chantier, de coupler les équations de Maxwell, les équations de la thermodynamique et celles de la mécanique du solide. On pourrait alors faire des prévisions sur, par exemple, l'endommagement laser ou sur certaines techniques industrielles (découpe de matériaux, etc.).

Peut-être pourrions-nous finir par un regret, celui de n'avoir trouvé, dans la littérature, une approche semblable à la nôtre (i.e., une approche analytique et non synthétique, comme ceci est décrit à la page 74) pour étudier l'optique non-linéaire. On peut même généraliser ceci à d'autres théories : en effet, même si cela paraît inconcevable, nous n'avons rencontré d'étude sur les relations constitutives qui nous ont pleinement convaincus. Si le problème est plus grave qu'une trop faible communication, un travail d'unification de plusieurs domaines de la physique classique est, par cette voie, indispensable.

Annexe A

Quelques rappels d'algèbre tensorielle

Cette annexe rassemble les calculs et notions relatifs aux tenseurs nécessaires tout au long de ce rapport. Une première section répond essentiellement à la question : "comment varient les composantes d'un tenseur lors d'un changement de base ?" ; la section suivante s'intéresse aux tenseurs dits isotropes. Nous nous sommes inspirés des ouvrages suivants (les sujets abordés dans ces articles ou livres sont souvent vastes - les résumés donnés ici ne concernent que la partie apportant un éclairage sur le thème de ces sections) :

- pour la section A.1 : le livre de H.Whitney [36] sur l'intégration dans des variétés, le cours de R.Coquereaux [35] ainsi que le livre de J.E.Marsden et T.S.Ratiu [34] sur la géométrie différentielle, l'article de G.Marmo, E.Parasecoli et W.M.Tulczyjew [38] sur une écriture rigoureuse des équations de Maxwell.
- pour la section A.2, nous avons adapté des démonstrations de G.B.Gurevich [106] qui explique comment trouver des tenseurs (relatifs) dont les composantes sont les mêmes dans toute base de $(k^n)^{\otimes m} \otimes (k^p)'^{\otimes q}$, k étant le corps sur lequel sont construits les tenseurs. On annonce un résultat sur la théorie des invariants des groupe de Lie, que l'on peut trouver dans [107], [108] ou, selon une autre méthode dans [109].

A.1 Expression des changements de base

Soit $\mathbf{v}$ un vecteur, c'est-à-dire un élément d'un espace vectoriel V de dimension d, où d est un entier naturel, sur un corps k (en pratique, k sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On écrit

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_i v^i,$$

où $\{\mathbf{e}_i\}_{i\in\{1,\cdots,d\}}$ est une base de V et $v^i \in k$. Le choix de la base permet de donner un automorphisme entre le groupe $GL_d(k)$ agissant sur les composantes $\{v^1, \cdots, v^n\}$ et le groupe $Aut(V)$ permutant les vecteurs de V (et en particulier les vecteurs de

base). En effet, un élément g de $Aut(V)$, de matrice associée Λ, détermine l'élément γ de $GL_d(k)$, de matrice associée Λ^{-1}. En ordonnant les composantes et les vecteurs de base comme dans l'expression ci-dessus, $Aut(V)$ agit à droite et $GL_d(k)$ agit à gauche (d'où l'inverse entre les matrices de représentations de g et de γ).

Soit $\tilde{\mathbf{v}}$ le vecteur $\mathbf{v}$ exprimé dans la base $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$, transformée de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ par g ; i.e. $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_i \cdot g$ pour tout i. On a donc

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}} &= \tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{v}^i \\
&= (\mathbf{e}_i \cdot g)(\gamma \cdot v^i) \\
&= (\mathbf{e}_j \Lambda^j{}_i)(\Lambda^{-1}{}^i{}_k v^k) \\
&= \mathbf{e}_j \Lambda^j{}_i \Lambda^{-1}{}^i{}_k v^k \\
&= \mathbf{e}_j \delta^j{}_k v^k \\
&= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

C'est ce que l'on entend par "le vecteur est indépendant du système de coordonnées".

Toute quantité physique, telle que le vecteur polarisation $\mathbf{P}$, les fonctions de réponse $R^{(n)}$, etc. sont des quantités intrinsèques, i.e. leurs expressions sont indépendantes d'un choix de base. Nous venons de voir comment s'expriment les transformations des composantes lors d'un changement de base pour obtenir $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$; il nous faut maintenant étudier comment s'expriment les transformations des composantes lors d'un changement de base pour obtenir $\tilde{R^{(n)}} = R^{(n)}$. Puisque $R^{(n)}$ est un tenseur de rang $n+1$ à image dans $\mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}$, on doit comprendre comment évolue les composantes des vecteurs duaux, et donner la généralisation aux tenseurs d'ordre supérieur.

Le dual de l'espace vectoriel V est l'ensemble V' des applications linéaires de V sur k. On montre que c'est un espace vectoriel de même dimension que V et qu'à toute base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V correspond une unique base $\{\mathbf{e}'^i\}$ de V' définie par $\mathbf{e}'^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$. Les éléments de V' sont appelés des covecteurs et s'écrivent ainsi :

$$\mathbf{v}' = v'_i \mathbf{e}'^i.$$

Puisque V' est lui-même un espace vectoriel, le choix d'une base permet de donner un automorphisme entre le groupe $GL_d(k)$ agissant sur les composantes $\{v'_1, \cdots, v'_n\}$ et le groupe $Aut(V')$ permutant les covecteurs de V' (et en particulier les covecteurs de base). Avec des notations évidentes, le covecteur $\tilde{\mathbf{v}}'$ obtenu de $\mathbf{v}'$ en changeant la base selon $\tilde{\mathbf{e}}'^i = g \cdot \mathbf{e}'^i$ est identique à $\mathbf{v}'$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}' &= \tilde{v}'_i \tilde{\mathbf{e}}'^i \\
&= (v'_i \cdot \gamma)(g \cdot \mathbf{e}'^i) \\
&= (v'_j \Lambda^j{}_i)(\Lambda^{-1}{}^i{}_k \mathbf{e}'^k) \\
&= v'_j \delta^j{}_k \mathbf{e}'^k \\
&= \mathbf{v}'
\end{aligned}$$

Ceci se généralise d'une manière naturelle aux tenseurs (éventuellement mixte) d'ordre supérieur. L'ensemble des[1] $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_n} \otimes \mathbf{e}'^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}'^{j_n}$ lorsque $(i_1, \cdots, i_n)$

[1] $\mathbf{e}_i$ est le i-ème vecteur de la base considérée - attention à l'écriture, ceci n'a rien à voir avec la i-ème composante d'un covecteur $\mathbf{e}$; cette composante, étant un nombre, s'écrirait e_i...

parcourt $\{1,\cdots,d\}^n$ et $(j_1,\cdots,j_n)$ parcourt $\{1,\cdots,d\}^{n'}$, est une base de $V^{\otimes n}\otimes V'^{\otimes n'}$. Ainsi un tenseur $X=\mathbf{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_n}X^{i_1\cdots i_n}{}_{j_1\cdots j_{n'}}\otimes\mathbf{e}'^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}'^{j_{n'}}$ appartenant à $V^{\otimes n}\otimes V'^{\otimes n'}$ se transforme selon :

$$X=\left(\mathbf{e}_{a_1}\Lambda^{a_1}{}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{a_n}\Lambda^{a_n}{}_{i_n}\right)\left(\Lambda^{-1\,i_1}{}_{b_1}\cdots\Lambda^{-1\,i_n}{}_{b_n}X^{b_1\cdots b_n}{}_{c_1\cdots c_{n'}}\Lambda^{c_1}{}_{j_1}\cdots\Lambda^{c_{n'}}{}_{j_{n'}}\right)$$
$$\otimes\left(\Lambda^{-1\,j_1}{}_{d_1}\mathbf{e}'^{d_1}\otimes\cdots\otimes\Lambda^{-1\,j_{n'}}{}_{d_{n'}}\mathbf{e}'^{d_{n'}}\right).$$

On peut donc exprimer les composantes de $R^{(n)}$ dans la base des $\tilde{\mathbf{e}}_i:=\mathbf{e}_i\cdot g$ et des $\tilde{\mathbf{e}}'^i:=g'\cdot\mathbf{e}'^i$ (g' étant l'automorphisme de $(\mathbb{R}^3)'$ induit par g, i.e. $g'=g^{-1}$) :

$$\tilde{R}^{(n)\,i}{}_{i_1\cdots i_n}=\Lambda^{-1\,i}{}_b\,R^{(n)\,b}{}_{c_1\cdots c_n}\,\Lambda^{c_1}{}_{i_1}\cdots\Lambda^{c_n}{}_{i_n} \tag{A.1}$$

où Λ est la matrice de représentation de g, et $\{R^{(n)\,i}{}_{i_1\cdots i_n}\}_{(i,i_1,\cdots,i_n)\in\{1,2,3\}^{n+1}}$ sont les composantes de $R^{(n)}$ dans la base $\{\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{i_n}\}_{(i,i_1,\cdots,i_n)\in\{1,2,3\}^{n+1}}$.

Contractant (A.1), par $\tilde{\mathbf{e}}_i$ et par $\tilde{\mathbf{e}}'^{i_1}\otimes\cdots\otimes\tilde{\mathbf{e}}'^{i_n}$, on obtient bien $\tilde{R^{(n)}}=R^{(n)}$.

A.2 Tenseurs isotropes

On s'intéresse aux tenseurs $R^{(n)}\in\mathcal{V}_n:=\{f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^3\otimes(\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}\}$, $n\in\mathbb{N}$, utilisés dans l'expression (déduite du chap.1, p.30)

$$\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{s},t)=\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\,R^{(n)}(\mathbf{s},t-t_1,\cdots,t-t_n)\mathbf{E}(\mathbf{s},t_1)\cdots\mathbf{E}(\mathbf{s},t_n).$$

Un tenseur $R^{(n)}$ est dit *isotrope* si ses composantes sont identiques dans toute base orthonormée ; d'après la section précédente, cette condition est équivalente à

$$R^{(n)\,i}{}_{i_1\cdots i_n}=\Lambda^{-1\,i}{}_b\,R^{(n)\,b}{}_{c_1\cdots c_n}\,\Lambda^{c_1}{}_{i_1}\cdots\Lambda^{c_n}{}_{i_n},\quad\forall\Lambda\in O_3(\mathbb{R}),\forall n\in\mathbb{N}.$$

On note $\mathcal{ISO}_n$ l'ensemble des tenseurs isotropes de $\mathcal{V}_n$.

Propriété 1. *Linéarité*
$\mathcal{ISO}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}_n$.

Démonstration. C'est évident, puisque l'action de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{V}_n$ est linéaire. □

Propriété 2. *Description de $\mathcal{ISO}_{2n}$, $n\in\mathbb{N}$*

$$n=0\ mod\ 2\qquad\Rightarrow\qquad dim(\mathcal{ISO}_n)=0.$$

Démonstration. Soit M un élément de $(\mathbb{R}^3)^{\otimes m}\otimes(\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}$. On remarque que $-id$, où id est la matrice identité de O_3, appartient à O_3 et est son propre inverse. Ainsi

$$\begin{aligned}\big((-id)\cdot M\big)^{i_1\cdots i_m}{}_{j_1\cdots j_n} &= (-\delta^{i_1}{}_{k_1})\cdots(-\delta^{i_m}{}_{k_m})M^{k_1\cdots k_m}{}_{l_1\cdots l_n}(-\delta^{l_1}{}_{j_1})\cdots(-\delta^{l_n}{}_{j_n})\\ &= (-1)^{m-n}M^{i_1\cdots i_m}{}_{j_1\cdots j_n}\ ;\end{aligned}$$

par conséquent, une condition nécessaire pour que M, non nul, soit isotrope est que $m-n=0\ mod\ 2$. En prenant m égal à un, on obtient le résultat annoncé.

□

Propriété 3. *Description de $\mathcal{ISO}_1$*

$$M\in\mathcal{ISO}_1 \qquad\Leftrightarrow\qquad M^i{}_j = M^1{}_1\delta^i{}_j$$

Démonstration. Soit M un élément de $\mathcal{ISO}_1$. Par définition, on a alors[2], pour toute transformation orthogonale Λ,

$$M^i{}_j = \Lambda^{-1\,i}{}_a\Lambda^b{}_j M^a{}_b,$$

soit

$$M\,\Lambda = \Lambda\,M.$$

En prenant $\Lambda = diag(1,-1,-1)$, puis $\Lambda = diag(-1,-1,1)$, un calcul explicite montre que M doit être diagonal. En prenant une rotation autour de la première (respectivement la troisième) coordonnée, on en déduit que $M = diag(M^1{}_1, M^3{}_3, M^3{}_3)$ (respectivement $M = diag(M^1{}_1, M^1{}_1, M^3{}_3)$) et une implication s'ensuit[3].

La réciproque est triviale.

□

Ce problème est bien connu des mathématiciens. Si nous n'avons trouvé des démonstrations faciles que lorsque les tenseurs $R^{(n)}$ étaient de rang impair ou de rang deux, la réponse est connue pour un n quelconque :

un élément $M = \mathbf{e}_{i_1}M^i{}_{i_1\cdots i_{2n+1}}\otimes\mathbf{e}'^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}'^{i_{2n+1}}$ de $\mathcal{ISO}_{2n+1}$ est une combinaison linéaire de tenseurs du type $\delta^i{}_{i_j}\delta_{i'_1i'_2}\cdots\delta_{i'_{2n-1}i'_{2n}}$ où j parcourt $\{1,\cdots,2n+1\}$ et $\{i'_1,\cdots,i'_{2n}\}$ est une permutation de $\{i_1,\cdots,i_{2n+1}\}\backslash\{i_j\}$.

Nous ne pouvons rentrer dans les détails. Néanmoins, précisons qu'il existe deux manières d'aboutir à ce résultat : la première utilise la théorie des caractères d'un groupe de Lie compact, qui permet facilement de calculer le nombre de fois que la représentation triviale est contenue dans une représentation ρ quelconque. On peut maintenant reformuler la définition d'un tenseur isotrope : c'est un tenseur pour lequel toute action de $\mathcal{O}_\ni$ sur lui-même est triviale. La dimension de $\mathcal{ISO}_n$ est donc le nombre de

[2]Remarquons tout d'abord que ceci est un système de neuf équations (les indices i et j étant libres) pour neuf inconnues (les $M^i{}_j$).

[3]On remarque que notre démonstration est plus forte que l'énoncé, puisque l'ensemble des matrices Λ utilisées est restreint à SO_3. C'est cependant évident que les tenseurs invariants par SO_3 sont invariants par O_3 puisque le second groupe est généré par le premier et la matrice $-id$, qui commute avec tout élément de $Mat_3(\mathbb{R})$

fois que la représentation triviale est contenue dans la représentation naturelle de $\mathcal{O}_{\ni}$ sur $\mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^3)'^{\otimes n}$. Nous conseillons [109]pour ces questions.

La deuxième méthode est plus directe : elle est issue de la théorie des invariants. Notre question est donc un des problème les plus simples que ce domaine des mathématiques étudie. Quelques idées, suffisantes pour ce qui nous concerne, peuvent être prises dans [107], mais nous recommandons plutôt le livre [108].

A.3 La nature géométrique de $\mathrm{D}(\mathrm{s},t)$ est importante !

Nous avons affirmé, dans la section 1.1.2, qu'il y avait plusieurs formulations des lois de l'électromagnétisme : la plus usuelle utilise des vecteurs, la plus intéressante (entendons géométrique, moderne, etc.) utilise des formes différentielles. Le champ d'induction électrique est, dans la première, un "vecteur"[4], qualifié d'axial lorsque l'on effectue des changements de bases, une forme différentielle de degré deux dans la seconde. Notre but est double : nous voulons clarifier le passage d'un "vecteur" axial à la 2-forme (ainsi que le passage inverse), et montrer que $\mathbf{D}$ n'est pas un vecteur (nu). On rappelle qu'à la page 33, nous avions insisté sur le fait qu'il n'y ait pas, dans la littérature, de consensus sur la nature géométrique de $\mathbf{D}$. On note $\underline{\mathbf{D}}$ le vecteur et $\mathcal{D}$ la forme.

Analyse vectorielle

Commençons par croire que $\underline{\mathbf{D}}$ est un vecteur, défini comme un élément d'un espace vectoriel. Soient $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ et $\{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ deux repères orthonormés, et Λ une application envoyant le vecteur $\mathbf{e}_i$ au vecteur $\tilde{\mathbf{e}}_i$, $i \in \{1,2,3\}$. D'après la première section de cette annexe, notant $\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{e}_i \underline{D}^i = \tilde{\mathbf{e}}_i \underline{\tilde{D}}^i$, on a

$$\underline{\tilde{D}}^i = \Lambda^{-1\,i}{}_j \underline{D}^j. \tag{A.2}$$

Géométrie différentielle

On se donne deux systèmes de coordonnées $\mathfrak{C}_x$ et $\mathfrak{C}_y$ de sorte qu'en un point $\mathbf{p}$ de $\mathbb{R}^3$ (on confond l'espace affine et son espace vectoriel associé), on ait :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \mathcal{D}_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j & \text{dans } \mathfrak{C}_x \\ \mathcal{D}_{ij}(y) dy^i \wedge dy^j & \text{dans } \mathfrak{C}_y. \end{cases}$$

La relation entre les coefficients de la forme exprimée dans les deux repères est[5] :

$$\mathcal{D}_{kl}(y) = \mathcal{D}_{ij}(x) \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}.$$

[4]Dans cette section, un vecteur est un élément d'un espace vectoriel "nu". On mettra des guillemets autour d'un élément tel que $\mathbf{D}(\mathbf{s},t)$, qui contient un vecteur et une orientation de l'espace.

[5]Nous admettons que la notation où l'on exprime le système de coordonnées entre parenthèses n'est pas satisfaisante.

Afin de convertir cette forme en un "vecteur", nous avons besoin d'une métrique. On note

$$g = \begin{cases} g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j \text{ dans } \mathfrak{C}_x \\ g_{ij}(y)dy^i \otimes dy^j \text{ dans } \mathfrak{C}_y, \end{cases}$$

et l'on a donc

$$g_{kl}(y) = g_{ij}(x)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}. \tag{A.3}$$

Ouvrons deux parenthèses dont l'utilité apparaîtra rapidement :

– On remarque qu'en prenant le déterminant de la dernière équation, on a

$$det(g(y)) = det(g(x))\big(Jac(f)\big)^2, \tag{A.4}$$

où f est le changement de coordonnées localement défini par $f(y^1, y^2, y^3) = (x^1, x^2, x^3)$, et $Jac(f)$ est son jacobien.

– En multipliant (A.3) par

$$g^{ln}(y)g^{ab}(x)\frac{\partial y^k}{\partial x^a}\frac{\partial y^m}{\partial x^b},$$

on obtient :

$$g^{kl}(y) = g^{ij}(x)\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}. \tag{A.5}$$

Le "vecteur" $\mathbf{D}$ est alors défini *via* le dual de Hodge :

$$D^i(x) = g^{ij}(x)\big(*\mathcal{D}\big)_j(x).$$

En ne regardant que les dimensions, i.e., en négligeant la parité des objets que nous manipulons, cette équation est cohérente : $\mathcal{D}$ est une deux-forme, donc $*\mathcal{D}$ est une une-forme, donc $\big(*\mathcal{D}\big)(x)$ est un covecteur, et l'on a bien une égalité entre les composantes d'un vecteur.

La définition du dual de Hodge appliquée à $\mathcal{D}$ donne ([42]) :

$$*\mathcal{D}(z) = \epsilon_{i_1 i_2 i_3}|det(g(z))|^{1/2}\mathcal{D}_{j_1 j_2}(z)g^{i_1 j_1}(z)g^{i_2 j_2}(z)dz^{i_3},$$

où $z \in \{x, y\}$.

L'équation (A.5) mène alors à

$$\begin{aligned} *\mathcal{D}(y) &= \epsilon_{i_1 i_2 i_3}|det(g(y))|^{1/2}\mathcal{D}_{j_1 j_2}(y)g^{i_1 j_1}(y)g^{i_2 j_2}(y)dy^{i_3} \\ &= \epsilon_{i_1 i_2 i_3}|det(g(y))|^{1/2}\mathcal{D}_{ij}(x)\frac{\partial x^i}{\partial y^{j_1}}\frac{\partial x^j}{\partial y^{j_2}} \\ &\quad g^{k_1 l_1}(x)\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{l_1}}g^{k_2 l_2}(x)\frac{\partial y^{i_2}}{\partial x^{k_2}}\frac{\partial y^{j_2}}{\partial x^{l_2}}\frac{\partial y^{i_3}}{\partial x^{k_3}}dx^{k_3}. \end{aligned}$$

Cette relation, valable pour tout changement de coordonnées, se simplifie considérablement si ce changement, $f(y^1, y^2, y^3) = (x^1, x^2, x^3)$, est une application linéaire[6]. Dans ce cas, on note ${\Lambda^i}_j y^j = x^i$. On a donc

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = {\Lambda^i}_j \text{ et } \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = {\Lambda^{-1}}^i{}_j,$$

d'où

$$\begin{aligned} *\mathcal{D}(y) = \epsilon_{i_1 i_2 i_3} |det(g(y))|^{1/2} \mathcal{D}_{ij}(x) \\ g^{k_1 i}(x) g^{k_2 j}(x) {\Lambda^{-1}}^{i_1}_{k_1} {\Lambda^{-1}}^{i_2}_{k_2} {\Lambda^{-1}}^{i_3}_{k_3} dx^{k_3}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque Λ est une matrice trois par trois, on a

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3} {\Lambda^{-1}}^{i_1}_{k_1} {\Lambda^{-1}}^{i_2}_{k_2} {\Lambda^{-1}}^{i_3}_{k_3} = det(\Lambda^{-1}) \epsilon_{k_1 k_2 k_3}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} *\mathcal{D}(y) &= det(\Lambda^{-1}) \epsilon_{k_1 k_2 k_3} |det(g(y))|^{1/2} \mathcal{D}_{ij}(x) g^{k_1 i}(x) g^{k_2 j}(x) dx^{k_3} \\ &= det(\Lambda^{-1}) \frac{|det(g(y))|^{1/2}}{|det(g(x))|^{1/2}} * \mathcal{D}(x). \end{aligned}$$

Puisque f est linéaire, on a $Jac(f) = det(\Lambda)$; la formule (A.4) et la propriété d'homomorphisme de groupe du déterminant entre $\mathcal{GL}_n(k)$ et k impliquent alors :

$$det(\Lambda^{-1}) \frac{|det(g(y))|^{1/2}}{|det(g(x))|^{1/2}} = \frac{|det(\Lambda)|}{det(\Lambda)}.$$

On a donc

$$*\mathcal{D}(y) = \frac{|det(\Lambda)|}{det(\Lambda)} * \mathcal{D}(x),$$

soit, en composantes (on rappelle que $*\mathcal{D}(z)$ est un covecteur) :

$$(*\mathcal{D})_i(y) = \frac{|det(\Lambda)|}{det(\Lambda)} (*\mathcal{D})_j(x) {\Lambda^j}_i.$$

Ainsi, définissant $D^i(z) := g^{ij}(z)(*\mathcal{D})_j(z)$, on a

[6]Cette restriction est justifiée puisque notre but est de comparer le résultat final avec celui de l'analyse vectorielle, et l'opérateur Λ intervenant dans l'équation (A.2) est un élément de $\mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
D^i(y) :&= g^{ij}(y)(*\mathcal{D})_j(y) \\
&= g^{ab}(x)\Lambda^{-1\,i}{}_a\Lambda^{-1\,j}{}_b\frac{|det(\Lambda)|}{det(\Lambda)}(*\mathcal{D})_k(x)\Lambda^k{}_j \\
&= \frac{|det(\Lambda)|}{det(\Lambda)}g^{jk}(x)\Lambda^{-1\,i}{}_j(*\mathcal{D})_k(x) \\
&= \frac{|det(\Lambda)|}{det(\Lambda)}\Lambda^{-1\,i}{}_jD^j(x).
\end{aligned}
$$

Comparaison des deux formulations

Si l'on représente le champ d'induction par un vecteur, les expressions des composantes dans deux systèmes de coordonnées sont liées par la relation :

$$\underline{\tilde{D}}^i = \Lambda^{-1\,i}{}_j\underline{D}^j. \qquad \text{((A.2))}$$

Si l'on représente le champ d'induction par une 2-forme, les expressions des composantes dans deux systèmes de coordonnées sont liées par la relation

$$\mathcal{D}_{kl}(y) = \mathcal{D}_{ij}(x)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial x^j}{\partial y^l}.$$

En définissant alors un "vecteur", dans un système de coordonnées z par

$$D^i(z) = g^{ij}(z)\big(*\mathcal{D}\big)_j(z),$$

les expressions des composantes de ce "vecteur" dans deux systèmes de coordonnées sont liées par la relation

$$D^i(y) = \frac{|det(\Lambda)|}{det(\Lambda)}\Lambda^{-1\,i}{}_jD^j(x). \qquad \text{(A.6)}$$

Observant que les deux expressions (A.2) et (A.6) diffèrent, nous insistons encore sur la nécessité d'une expérience qui trancherait[7] la question.

[7]Le conditionnel est à prendre avec précaution : il serait étonnant que cette expérience n'ait pas encore eut lieu. Néanmoins, personne ne lui fait référence, et chacun reste dogmatique sur la nature des champs électromagnétiques, et en particulier de $\mathbf{D}$.

Annexe B

Quelques propriétés des formes $\lfloor \cdot, \cdots, \cdot \rfloor$

Quelques propriétés des formes $\lfloor \cdot, \cdots, \cdot \rfloor$ sont regroupées dans cette annexe. Les interprétations physiques sont souvent données dans le document principal. Puisque toutes les fonctions de l'espace sont évaluées en un même vecteur $\mathbf{s}$, ce dernier n'apparaîtra pas dans les relations.

On rappelle que

$$\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor_{\omega_I} := \chi^{(n)}(p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I)\mathbf{E}_{p_1} \cdots \mathbf{E}_{p_n}.$$

Puisque $\chi^{(n)}$ est à image dans $\mathbb{C}^3 \otimes (\mathbb{C}^3)'^{\otimes n}$, $\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor_{\omega_I}$ est un vecteur. L'indice ω_I, correspondant à l'unique pulsation du champ incident, ne sera plus précisé dans la suite.

B.0.1 Premières propriétés

On rappelle ce que signifie "$\lfloor \cdot, \cdots, \cdot \rfloor$ est multilinéaire" :

$$\forall (\mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{j-1}}, \mathbf{E}_{p_j}, \mathbf{E}_{p_{j'}}, \mathbf{E}_{p_{j+1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n}) \in (\mathbb{C}^3)^{n+1},\ \forall \lambda \in \mathbb{C} :$$

$$\begin{aligned}\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{j-1}}, \mathbf{E}_{p_j} + \lambda \mathbf{E}_{p_{j'}}, \mathbf{E}_{p_{j+1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor &= \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{j-1}}, \mathbf{E}_{p_j}, \mathbf{E}_{p_{j+1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor \\ &\quad + \lambda \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{j-1}}, \mathbf{E}_{p_{j'}}, \mathbf{E}_{p_{j+1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor.\end{aligned}$$

Propriété 1. *Multilinéarité*
$\lfloor \cdot, \cdots, \cdot \rfloor$ *est une application multilinéaire.*

Démonstration. Immédiate. □

Propriété 2. *Symétrie hermitienne*

$$\lfloor \mathbf{E}_{-p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{-p_n} \rfloor = \overline{\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor}, \quad \forall (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Démonstration. On a, en explicitant la définition de la forme n-linéaire, la symétrie hermitienne de $\chi^{(n)}$ (immédiatement déduite de celle de $\underline{\chi}^{(n)}$, donnée p.31) et en utilisant $\overline{\mathbf{E}_p} = \mathbf{E}_{-p}$ (voir p.31) :

$$\begin{aligned}
\overline{\lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor} &= \overline{\chi^{(n)}(p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I)\mathbf{E}_{p_1} \cdots \mathbf{E}_{p_n}} \\
&= \chi^{(n)}(-p_1\omega_I, \cdots, -p_n\omega_I)\mathbf{E}_{-p_1} \cdots \mathbf{E}_{-p_n} \\
&= \lfloor \mathbf{E}_{-p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{-p_n} \rfloor
\end{aligned}$$

□

Sans la propriété précédente, nous devrions donner les équations de propagation de la composante $\mathbf{E}_p$ et de $\mathbf{E}_{-p}$. Pour la prochaine propriété, qui s'avère très utile pour simplifier les équations de propagations en permettant de regrouper toutes les manières dont les composantes $\mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n}$ interagissent entre elles, on note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations d'un ensemble de n éléments.

Propriété 3. *Symétrie intrinsèque*

$$\lfloor \mathbf{E}_{p_{\tau 1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{\tau n}} \rfloor = \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor, \quad \forall \tau \in \mathcal{S}_n.$$

Démonstration. Par définition, puis successivement en renommant les indices de sommation, utilisant la symétrie de permutation intrinsèque (voir p.31) et le fait que τ soit une bijection (par conséquent $E^{i_{\tau 1}}_{p_{\tau 1}} \cdots E^{i_{\tau n}}_{p_{\tau n}} = E^{i_1}_{p_1} \cdots E^{i_n}_{p_n}$), on a

$$\begin{aligned}
\lfloor \mathbf{E}_{p_{\tau 1}}, \cdots, \mathbf{E}_{p_{\tau n}} \rfloor^i &= \chi^{(n)\,i}_{\;\;i_1 \cdots i_n}(p_{\tau 1}\omega_I, \cdots, p_{\tau n}\omega_I) E^{i_1}_{p_{\tau 1}} \cdots E^{i_n}_{p_{\tau n}} \\
&= \chi^{(n)\,i}_{\;\;i_{\tau 1} \cdots i_{\tau n}}(p_{\tau 1}\omega_I, \cdots, p_{\tau n}\omega_I) E^{i_{\tau 1}}_{p_{\tau 1}} \cdots E^{i_{\tau n}}_{p_{\tau n}} \\
&= \chi^{(n)\,i}_{\;\;i_1 \cdots i_n}(p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I) E^{i_{\tau 1}}_{p_{\tau 1}} \cdots E^{i_{\tau n}}_{p_{\tau n}} \\
&= \chi^{(n)\,i}_{\;\;i_1 \cdots i_n}(p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I) E^{i_1}_{p_1} \cdots E^{i_n}_{p_n} \\
&= \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor^i.
\end{aligned}$$

□

B.0.2 Calculs préliminaires au critère énergétique.

Nous avons vu, au chapitre 1 que la moyenne stochastique de la puissance dissipée à l'ordre n est proportionnelle à[1]

$$< \partial_t W_e^{(n)} > \sim P_n := \sum_{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{Z}^n} (p_1 + \cdots + p_n)\, G_{p_1, \cdots, p_n}$$

où $G_{p_1, \cdots, p_n} := \mathbf{E}_{-(p_1 + \cdots + p_n)} \cdot \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \cdots, \mathbf{E}_{p_n} \rfloor$. Les prochaines propriétés ont pour but de mettre en évidence un critère simple qui garantit l'annulation de $< \partial_t W_e^{(n)} >$. La stratégie est la suivante :

[1] La convergence de cette série n'est pas discutée.

i. dans un premier temps, on réorganise (par des changements de variables) la somme sur $\mathbb{Z}^n$, $\displaystyle\sum_{(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^n}$, en une somme sur un produit de deux cônes, l'un avec les composantes positives et l'autre avec les composantes négatives (le reste étant évidemment les composantes nulles), $\displaystyle\sum_{\substack{p_1\in\mathbb{N}\\ 0<p_2\leqslant p_1\\ \cdots\\ 0<p_q\leqslant p_{q-1}\\ p_{q+1}\in(-\mathbb{N})\\ p_{q+1}\leqslant p_{q+2}<0\\ \cdots\\ p_{r-1}\leqslant p_r<0\\ p_{r+1}=\cdots=p_n=0}}$;

ii. dans un second temps, on "factorise" les champs électriques en transposant convenablement les tenseurs de susceptibilité.

Le lecteur un peu expérimenté dans le maniement des sommes peut directement passer au théorème 1 où l'on donne un critère à l'ordre n ; pour les autres, les prochaines propriétés se veulent le plus didactique possible.

Lemme 1. *Propriétés de* $G_{p_1,\cdots,p_n}$

i. $G_{p_{\tau 1},\cdots,p_{\tau n}} = G_{p_1,\cdots,p_n}, \quad \forall\tau\in\mathcal{S}_n,$

ii. $\overline{G_{p_1,\cdots,p_n}} = G_{-p_1,\cdots,-p_n},$

iii. $P_n \in i\mathbb{R}.$

Démonstration. Les deux premières affirmations sont immédiatement déductibles des propriétés 2 et 3. En ce qui concerne la dernière, nous calculons

$$\begin{aligned}\overline{P_n} :&= \sum_{(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^n} (p_1+\cdots+p_n)\,\overline{G_{p_1,\cdots,p_n}}\\ &= -\sum_{(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^n} (-p_1-\cdots-p_n)\,G_{-p_1,\cdots,-p_n}\\ &= -P_n,\end{aligned}$$

où, à la deuxième ligne, nous avons renommé l'indice p_i en $-p_i$, $i\in\{1,\cdots,n\}$.

□

La troisième partie de ce lemme assure la réalité de $<\partial_t W_e^{(n)}>$.

Propriété 4. *Rang un*

i. $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{Z}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor = \sum_{q\in\mathbb{N}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\big(\chi^{(1)}(q\omega_I)-\chi^{(1)*}(q\omega_I)\big)\mathbf{E}_q,$

ii. $\displaystyle\sum_{q\in\mathbb{Z}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor = 2i\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor\}.$

Démonstration. Voici tous les détails pour établir la première formule :

$$\begin{aligned}
\sum_{q\in\mathbb{Z}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\chi^{(1)}(q\omega_I)\mathbf{E}_q\\
&= \sum_{q\in\mathbb{N}} q\Big(\mathbf{E}_{-q}\cdot\chi^{(1)}(q\omega_I)\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_q\cdot\chi^{(1)}(-q\omega_I)\mathbf{E}_{-q}\Big)\\
&= \sum_{q\in\mathbb{N}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\big(\chi^{(1)}(q\omega_I) - \chi^{(1)\,T}(-q\omega_I)\big)\mathbf{E}_q\\
&= \sum_{q\in\mathbb{N}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\big(\chi^{(1)}(q\omega_I) - \chi^{(1)\,*}(q\omega_I)\big)\mathbf{E}_q.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la seconde formule, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{q\in\mathbb{Z}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor &= \sum_{q\in\mathbb{N}} q\big(\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor - \mathbf{E}_q\cdot\lfloor\mathbf{E}_{-q}\rfloor\big)\\
&= \sum_{q\in\mathbb{N}} q\big(\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor - \overline{\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor}\big)\\
&= 2i\sum_{q\in\mathbb{N}} q\,\Im m\{\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_q\rfloor\}.
\end{aligned}$$

□

Nous avons donné deux formules pour l'ordre un. La première est celle bien connue sur les pertes d'énergie électrique en régime linéaire, mais c'est la deuxième qui s'avère plus facile à généraliser en vue du théorème 1.

Propriété 5. *Rang deux*

$$\sum_{(q,r)\in\mathbb{Z}^2} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{q-r}\rfloor = i\Im m\{\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0\leqslant r\leqslant q}} d_2(q,r)d_2(r,0)\mathbf{E}_{-(q+r)}\cdot\xi^{(2)}_{q,r}\mathbf{E}_r\mathbf{E}_q\},$$

avec

$$\xi^{(2)}_{q,r} := (q+r)\chi^{(2)}(r\omega_I,q\omega_I) - r\chi^{(2)\,T_{12}}(-(q+r)\omega_I,q\omega_I) - q\chi^{(2)\,T_{13}}(r\omega_I,-(q+r)\omega_I).$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que par $q \mapsto q+r$, le terme de gauche devient

$$\begin{aligned}
\sum_{(q,r)\in\mathbb{Z}^2} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{q-r}\rfloor &= \sum_{(q,r)\in\mathbb{Z}^2}(q+r)\mathbf{E}_{-(q+r)}\cdot\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_q\rfloor\\
&= P_2.
\end{aligned}$$

On commence par se ramener à une somme dans un cadran. D'abord on s'arrange pour n'avoir que des r positifs ou nuls :

$$P_2 = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}\\ r\in\mathbb{N}}} (q+r)\ G_{q,r} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} q\ G_{q,0} + \sum_{\substack{q\in\mathbb{Z}\\ r\in\mathbb{N}}} (q-r)\ G_{q,-r},$$

puis on fait la même chose pour q :

$$\begin{aligned} P_2 = & \sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (q+r)\ G_{q,r} + \sum_{r\in\mathbb{N}} r\ G_{0,r} + \sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (r-q)\ G_{-q,r} \\ & + \sum_{q\in\mathbb{N}} q\ G_{q,0} + 0 + \sum_{q\in\mathbb{N}} (-q)\ G_{-q,0} \\ & + \sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (q-r)\ G_{q,-r} + \sum_{r\in\mathbb{N}} (-r)\ G_{0,-r} + \sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} -(q+r)\ G_{-q,-r}. \end{aligned}$$

Utilisant le lemme (partie i) - dorénavant, cette utilisation ne sera plus mentionnée - et quelques changements d'indice lorsque l'un d'entre eux est nul, on obtient

$$P_2 = 2\sum_{q\in\mathbb{N}} q\ (G_{q,0} - G_{-q,0}) + \sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (q+r)\ (G_{q,r} - G_{-q,-r}) + \sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (q-r)\ (G_{q,-r} - G_{-q,r}).$$

Soient P_2^0 (respectivement P_2^+, P_2^-) les termes de P_2 où la composante $\mathbf{E}_0$ apparaît dans $G_{\cdot,\cdot}$ (respectivement deux composantes positives, négatives, du champ électrique apparaissent). Pour les expliciter, on sépare la dernière somme selon que r soit supérieur ou inférieur à q (le terme s'annule s'ils sont égaux) :

$$\begin{aligned} P_2^0 &:= 2\sum_{q\in\mathbb{N}} q\ (G_{q,0} - G_{-q,0}), \\ P_2^+ &:= \sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (q+r)\ G_{q,r} + \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ r>q}} (q-r)\ G_{q,-r} - \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} (q-r)\ G_{-q,r}, \\ P_2^- &:= -\sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (q+r)\ G_{-q,-r} + \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} (q-r)\ G_{q,-r} - \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ r>q}} (q-r)\ G_{-q,r}. \end{aligned}$$

Grace au lemme (partie ii), on a

$$P_2^0 = 4i\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} q\ G_{q,0}\}$$

et

$$P_2^- = -\overline{P_2^+}.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à travailler P_2^+. On commence par étudier la première somme. Séparons-la selon que r soit inférieur, égal ou supérieur à q, puis, dans le troisième terme, échangeons le nom des indices et inversons leur ordre, et enfin regroupons grâce à la fonction de dégénérescence $d_2(\cdot,\cdot)$ d'un ensemble à deux éléments, dont la définition se trouve dans les Notations, page 9 :

$$\begin{aligned}
\sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2} (q+r)\, G_{q,r} &= \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} (q+r)\, G_{q,r} + \sum_{q\in\mathbb{N}} 2q\, G_{q,q} + \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ r>q}} (q+r)\, G_{q,r} \\
&= \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} (q+r)\, G_{q,r} + \sum_{q\in\mathbb{N}} 2q\, G_{q,q} + \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ q>r}} (r+q)\, G_{r,q} \\
&= \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} (q+r)\, G_{q,r} + \sum_{q\in\mathbb{N}} 2q\, G_{q,q} + \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} (r+q)\, G_{r,q} \\
&= \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r\leqslant q}} d_2(q,r)(q+r)\, G_{q,r}. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

Ensuite, en changeant le nom des indices dans la deuxième somme de P_2^+ et leur ordre dans la troisième, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ r>q}} (q-r)\, G_{q,-r} - \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} (q-r)\, G_{-q,r} &= \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ q>r}} (r-q)\, G_{r,-q} - \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ q>r}} (q-r)\, G_{-q,r} \\
&= 2\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ q>r}} (r-q)\, G_{r,-q}.
\end{aligned}$$

On remplace[2] ensuite q par $q+r$ et on sépare le résultat en trois parties, selon que r soit inférieur, égal ou supérieur à q, par la même méthode que pour le calcul de (B.1) :

[2]Les composantes apparaissant dans $G_{q,r}$ sont $\mathbf{E}_q$, $\mathbf{E}_r$ et $\mathbf{E}_{-(q+r)}$; les composantes apparaissant dans $G_{r,-q}$ sont $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{E}_{-q}$ et $\mathbf{E}_{q-r}$. Ce changement d'indice est donc nécessaire pour pouvoir factoriser les composantes dans la somme de (B.1) et de (B.2).

$$
\begin{aligned}
2\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ q>r}}(r-q)\ G_{r,-q} &= 2\sum_{(q,r)\in\mathbb{N}^2}(-q)\ G_{r,-(q+r)}\\
&= -2\Big\{\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} q\ G_{r,-(q+r)} + \sum_{q\in\mathbb{N}} q\ G_{q,-2q} + \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ r>q}} q\ G_{r,-(q+r)}\Big\}\\
&= -2\Big\{\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} q\ G_{r,-(q+r)} + \sum_{q\in\mathbb{N}} q\ G_{q,-2q} + \sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ q>r}} r\ G_{q,-(r+q)}\Big\}\\
&= -2\Big\{\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} q\ G_{r,-(q+r)} + \sum_{q\in\mathbb{N}} q\ G_{q,-2q} + \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r<q}} r\ G_{q,-(r+q)}\Big\}\\
&= -\Big\{\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r\leqslant q}} d_2(q,r)\big(q\ G_{r,-(q+r)} + r\ G_{q,-(r+q)}\big)\Big\}. \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}
$$

On a donc, en additionnant (B.1) et (B.2),

$$
\begin{aligned}
P_2^+ &= \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r\leqslant q}} d_2(q,r)\big((q+r)\ G_{q,r} - q\ G_{r,-(q+r)} - r\ G_{q,-(r+q)}\big)\\
&= \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r\leqslant q}} d_2(q,r)\big((q+r)\ G_{r,q} - r\ G_{-(q+r),q} - q\ G_{r,-(q+r)}\big),
\end{aligned}
$$

soit, en remplaçant $G_{\cdot,\cdot}$ par son expression :

$$
P_2^+ = \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r\leqslant q}} d_2(q,r)\Big((q+r)\mathbf{E}_{-(q+r)}\cdot\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_q\rfloor - r\,\mathbf{E}_r\cdot\lfloor\mathbf{E}_{-(q+r)},\mathbf{E}_q\rfloor - q\,\mathbf{E}_q\cdot\lfloor\mathbf{E}_r,\mathbf{E}_{-(q+r)}\rfloor\Big).
$$

On utilise maintenant les transpositions pour mettre les composantes du champ électrique en facteur :

$$
P_2^+ = \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ 0<r\leqslant q}} d_2(q,r)\mathbf{E}_{-(q+r)}\cdot\xi^{(2)}_{q,r}\mathbf{E}_r\mathbf{E}_q,
$$

où

$$
\xi^{(2)}_{q,r} := (q+r)\chi^{(2)}(r\omega_I, q\omega_I) - r\chi^{(2)\,T_{12}}(-(q+r)\omega_I, q\omega_I) - q\chi^{(2)\,T_{13}}(r\omega_I, -(q+r)\omega_I).
$$

Par souci de symétrie, on écrit P_2^0 de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
P_2^0 &= 2i\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} q\Big(G_{0,q} - G_{0,-q}\Big)\} \\
&= 2i\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} q\Big(\mathbf{E}_{-q}\cdot\chi^{(2)}(0,q\omega_I)\mathbf{E}_0\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_q\cdot\chi^{(2)}(0,-q\omega_I)\mathbf{E}_0\mathbf{E}_{-q}\Big)\} \\
&= 2i\Im m\{\sum_{q\in\mathbb{N}} q\,\mathbf{E}_{-q}\cdot\Big(\chi^{(2)}(0,q\omega_I) - \chi^{(2)\,T_{13}}(0,-q\omega_I)\Big)\mathbf{E}_0\mathbf{E}_q\} \\
&= i\Im m\{\sum_{\substack{q\in\mathbb{N}\\ r=0}} d_2(q,r)\mathbf{E}_{-(q+r)}\cdot\xi^{(2)}_{q,r}\mathbf{E}_r\mathbf{E}_q\}
\end{aligned}
$$

ce qui s'inclut naturellement, au facteur deux près[3], dans $P_2^+ + P_2^- = 2i\Im m\{P_2^+\}$ lorsque r s'annule.

□

Attention, le $\xi^{(2)}_{\cdot,\cdot}$ n'est pas exactement le $\xi^{(n)}_{\cdot,\cdots,\cdot}$ (avec $n+1$ indices) du théorème 1 lorsque n vaut deux.

Propriété 6. *Rang trois*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{Z}^3} (p_1+p_2+p_3)\, G_{p_1,p_2,p_3} \\
&= -i\Im m\{2 \sum_{\substack{p_3>0\\ 0<p_2\leqslant p_3\\ 0<p_1\leqslant p_2\\ p_0=-(p_1+p_2+p_3)}} d_3(p_1,p_2,p_3)\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3} \\
&\quad + \frac{3}{2} \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N}\\ 0<p_1\leqslant p_0\\ p_3\in-\mathbb{N}\\ p_3\leqslant p_2<0\\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_0,p_1)d_2(p_2,p_3)\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3} \\
&\quad + 6 \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N}\\ 0<p_1\leqslant p_0\\ p_2=0\\ p_3=-(p_1+p_0)}} d_2(p_0,p_1)\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3} \\
&\quad + 3 \sum_{p_0\in\mathbb{N},\ p_1=0,\ p_2=0,\ p_3=-p_0} \xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3}\}
\end{aligned}
$$

avec

[3]On intègre ce facteur grace à un terme $d_2(r,0)$.

$$
\begin{aligned}
\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3} &:= p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_0,p_2,p_3} + p_2\ G_{p_1,p_0,p_3} + p_3\ G_{p_1,p_2,p_0} \\
&= \mathbf{E}_{p_0} \cdot \Big\{ p_1 \Big(\chi^{(3)\,T_{12}}(p_0\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) - \chi^{(3)}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) \Big) \\
&\qquad + p_2 \Big(\chi^{(3)\,T_{13}}(p_1\omega_I, p_0\omega_I, p_3\omega_I) - \chi^{(3)}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) \Big) \\
&\qquad + p_3 \Big(\chi^{(3)\,T_{14}}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_0\omega_I) - \chi^{(3)}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) \Big) \Big\} \mathbf{E}_{p_1} \mathbf{E}_{p_2} \mathbf{E}_{p_3}
\end{aligned}
$$

Démonstration. On présente la démonstration à l'ordre trois en vue de préparer celle à un ordre n quelconque. Il s'agit donc d'évaluer

$$
P_3 := \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{Z}^3} (p_1 + p_2 + p_3)\ G_{p_1,p_2,p_3}.
$$

A un triplet (p_1, p_2, p_3) donné, on associe le nombre $p_0 := -(p_1+p_2+p_3)$. Ainsi, les composantes du champ électrique à ordonner sont $p_0\omega_I$, $p_1\omega_I$, $p_2\omega_I$ et $p_3\omega_I$. Ceci nous pousse à récrire P_3 de la manière suivante :

$$
P_3 = - \sum_{\substack{(p_0,p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{Z}^4 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}.
$$

On sait que $G_{\cdot,\cdot,\cdot}$ comme $\mathbf{E}_p$ ont une symétrie hermitienne. Par conséquent, le terme associé à un ensemble d'indices (p_1, p_2, p_3) est lié (c'est le complexe conjugué) au terme associé à l'ensemble d'indices $(-p_1, -p_2, -p_3)$. Pour éviter cette dispersion d'information, on sépare cette somme P_3 en regroupant les termes qui ont le même nombre d'indices p_i, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, positifs, nuls ou négatifs :

$$
P_3^{abc} := - \sum_{\substack{(p_0,p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{Z}^4 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0 \\ |\{i:p_i>0\}|=a \\ |\{i:p_i=0\}|=b \\ |\{i:p_i<0\}|=c}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}.
$$

On a alors[4] $P_3 = P_3^{301} + P_3^{202} + P_3^{211} + P_3^{121} + P_3^{112} + P_3^{103}$, avec, par exemple,

$$
P_3^{301} = - \sum_{\substack{(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{N}^3,\ p_0=-(p_1+p_2+p_3) \\ \cup(p_0,p_2,p_3)\in\mathbb{N}^3,\ p_1=-(p_0+p_2+p_3) \\ \cup(p_0,p_1,p_3)\in\mathbb{N}^3,\ p_2=-(p_0+p_1+p_3) \\ \cup(p_0,p_1,p_2)\in\mathbb{N}^3,\ p_3=-(p_0+p_1+p_2)}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}.
$$

Les autres sommes sont données plus loin.

On sépare encore cette somme en deux parties : $P_3^{301} = P_3^{30\bar{1}} + P_3^{\bar{3}01}$ où le premier terme correspond à la somme sur $\{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{N}^3,\ p_0 = -(p_1 + p_2 + p_3)\}$ et le second terme correspond au reste ; par conséquent, le nombre chapeauté d'une barre

[4] En effet, P_3^{400}, P_3^{310}, P_3^{220}, P_3^{130}, P_3^{031}, P_3^{022}, P_3^{013} et P_3^{004} sont des sommes sur l'ensemble vide dû à la condition $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0$ et P_3^{040} est nul.

correspond à l'ensemble qui contient p_0. La raison de ce clivage est la dissymétrie, dans le terme sommé, entre p_0 et les autres indices.

La suite est purement technique : il suffit de récrire chaque somme sur un ensemble symétrique en une somme sur une "région fondamentale". La fonction de dégénérescence $d_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ compte le nombre de triplets de l'ensemble associés à un triplet de la région.

On a d'un côté

$$\begin{aligned} P_3^{30\bar{1}} :&= - \sum_{\substack{(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{N}^3 \\ p_0=-(p_1+p_2+p_3)}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\ &= - \sum_{\substack{p_3>0 \\ 0<p_2\leqslant p_3 \\ 0<p_1\leqslant p_2 \\ p_0=-(p_1+p_2+p_3)}} d_3(p_1,p_2,p_3) p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}, \end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} P_3^{\bar{3}01} :&= - \sum_{\substack{(p_0,p_2,p_3)\in\mathbb{N}^3,\ p_1=-(p_0+p_2+p_3) \\ \cup(p_0,p_1,p_3)\in\mathbb{N}^3,\ p_2=-(p_0+p_1+p_3) \\ \cup(p_0,p_1,p_2)\in\mathbb{N}^3,\ p_3=-(p_0+p_1+p_2)}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\ &= -3 \sum_{(p_0,p_1,p_2)\in\mathbb{N}^3,\ p_3=-(p_0+p_1+p_2)} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\ &= - \sum_{(p_0,p_1,p_2)\in\mathbb{N}^3,\ p_3=-(p_0+p_1+p_2)} \Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_2,p_0,p_3} + p_2\ G_{p_0,p_1,p_3}\Big) \\ &= - \sum_{\substack{p_2>0 \\ 0<p_1\leqslant p_2 \\ 0<p_0\leqslant p_1 \\ p_3=-(p_0+p_1+p_2)}} d_3(p_0,p_1,p_2)\Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_2,p_0,p_3} + p_2\ G_{p_0,p_1,p_3}\Big) \end{aligned}$$

où pour l'avant-dernière ligne, on a symétrisé, en changeant les indices, par le groupe cyclique généré par la permutation (012) afin de rendre en coïncidence la symétrie de l'ensemble de sommation avec celle du terme sommé. La deuxième étape, inutile ici puisque l'on change les indices deux fois consécutivement, permet d'aller plus vite dans les prochains calculs. Procédons à un changement d'indice afin de rassembler les deux parties de P_3^{301} :

$$P_3^{\bar{3}01} = - \sum_{\substack{p_3>0 \\ 0<p_2\leqslant p_3 \\ 0<p_1\leqslant p_2 \\ p_0=-(p_1+p_2+p_3)}} d_3(p_1,p_2,p_3)\Big(p_1\ G_{p_2,p_3,p_0} + p_2\ G_{p_3,p_1,p_0} + p_3\ G_{p_1,p_2,p_0}\Big)$$

d'où

$$P_3^{301} = - \sum_{\substack{p_3>0 \\ 0<p_2\leqslant p_3 \\ 0<p_1\leqslant p_2 \\ p_0=-(p_1+p_2+p_3)}} d_3(p_1,p_2,p_3) \Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_2,p_3,p_0} + p_2\ G_{p_3,p_1,p_0} + p_3\ G_{p_1,p_2,p_0}\Big).$$

On appelle $\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3}$ le terme entre parenthèses. Nous allons voir que chaque $P_3^{\cdots}$ s'écrit comme une somme de $\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3}$, pondérée par des fonctions de dégénérescence, sur des ensembles convenables.

P_3^{301} ne contenait que les indices positifs à symétriser. D'autres sommes, par exemple P_3^{202}, en contiennent plusieurs. Ceci ne présente pas de difficultés car ces organisations sont indépendantes les unes des autres. Suivant les notations précédentes, on calcule

$$\begin{aligned}
P_3^{\bar{2}02} :&= - \sum_{\substack{(p_0,p_1)\in\mathbb{N}^2,\ (p_2,p_3)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0 \\ \cup(p_0,p_2)\in\mathbb{N}^2,\ (p_3,p_1)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0 \\ \cup(p_0,p_3)\in\mathbb{N}^2,\ (p_1,p_2)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\
&= -3 \sum_{(p_0,p_1)\in\mathbb{N}^2,\ (p_2,p_3)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N} \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ (p_2,p_3)\in(-\mathbb{N})^2 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_0,p_1)\Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_0,p_2,p_3}\Big) \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N} \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ p_3\in-\mathbb{N} \\ p_3\leqslant p_2<0 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_0,p_1)d_2(p_2,p_3)\Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_0,p_2,p_3}\Big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_3^{20\bar{2}} :&= - \sum_{\substack{(p_1,p_2)\in\mathbb{N}^2,\ (p_0,p_3)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0 \\ \cup(p_2,p_3)\in\mathbb{N}^2,\ (p_0,p_1)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0 \\ \cup(p_3,p_1)\in\mathbb{N}^2,\ (p_0,p_2)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\
&= -3 \sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{N}^2,\ (p_0,p_3)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\
&= -3 \sum_{\substack{p_1\in\mathbb{N} \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ (p_0,p_3)\in(-\mathbb{N})^2,\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_1,p_2)p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{\substack{p_1\in\mathbb{N} \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ p_3\in-\mathbb{N} \\ p_3\leqslant p_0<0 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_1,p_2)d_2(p_0,p_3)\Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_3\ G_{p_1,p_2,p_0}\Big) \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N} \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ p_3\in-\mathbb{N} \\ p_3\leqslant p_2<0 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_0,p_1)d_2(p_2,p_3)\Big(p_2\ G_{p_0,p_1,p_3} + p_3\ G_{p_0,p_1,p_2}\Big)
\end{aligned}
$$

où la dernière ligne est un simple changement d'indice afin de pouvoir donner l'expression suivante de P_3^{202} :

$$
\begin{aligned}
P_3^{202} &= P_3^{\bar{2}02} + P_3^{20\bar{2}} \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N} \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ p_3\in-\mathbb{N} \\ p_3\leqslant p_2<0 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_0,p_1)d_2(p_2,p_3) \\
&\qquad \Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_0,p_2,p_3} + p_2\ G_{p_0,p_1,p_3} + p_3\ G_{p_0,p_1,p_2}\Big) \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N} \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ p_3\in-\mathbb{N} \\ p_3\leqslant p_2<0 \\ p_0+p_1+p_2+p_3=0}} d_2(p_0,p_1)d_2(p_2,p_3)\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3}.
\end{aligned}
$$

Continuons[5] en appliquant la même méthode sur les autres parties de P_3. On s'autorise à aller un peu plus vite :

[5] Le lecteur peut probablement se reporter au théorème 1 dès maintenant.

$$
\begin{aligned}
P_3^{\bar{2}11} :&= - \sum_{\substack{(p_0,p_1)\in\mathbb{N}^2,\ p_2=0,\ p_3=-(p_0+p_1)\\ \cup(p_0,p_1)\in\mathbb{N}^2,\ p_3=0,\ p_2=-(p_0+p_1)\\ \cup(p_0,p_2)\in\mathbb{N}^2,\ p_1=0,\ p_3=-(p_0+p_2)\\ \cup(p_0,p_2)\in\mathbb{N}^2,\ p_3=0,\ p_1=-(p_0+p_2)\\ \cup(p_0,p_3)\in\mathbb{N}^2,\ p_1=0,\ p_2=-(p_0+p_3)\\ \cup(p_0,p_3)\in\mathbb{N}^2,\ p_2=0,\ p_1=-(p_0+p_3)}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}\\
&= -6 \sum_{(p_0,p_1)\in\mathbb{N}^2,\ p_2=0,\ p_3=-(p_0+p_1)} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}\\
&= -3 \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N}\\ 0<p_1\leqslant p_0\\ p_2=0\\ p_3=-(p_0+p_1)}} d_2(p_0,p_1)\Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_0,p_2,p_3}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3^{21\bar{1}} :&= - \sum_{\substack{(p_1,p_2)\in\mathbb{N}^2,\ p_3=0,\ p_0=-(p_1+p_2)\\ (p_1,p_3)\in\mathbb{N}^2,\ p_2=0,\ p_0=-(p_1+p_3)\\ (p_2,p_3)\in\mathbb{N}^2,\ p_1=0,\ p_0=-(p_2+p_3)}} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}\\
&= -3 \sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{N}^2,\ p_3=0,\ p_0=-(p_1+p_2)} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}\\
&= -3 \sum_{\substack{p_2\in\mathbb{N}\\ 0<p_1\leqslant p_2\\ p_3=0\\ p_0=-(p_1+p_2)}} d_2(p_1,p_2)p_0\ G_{p_1,p_2,p_3}\\
&= -3 \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N}\\ 0<p_1\leqslant p_0\\ p_2=0\\ p_3=-(p_1+p_0)}} d_2(p_1,p_0)p_3\ G_{p_1,p_0,p_2}
\end{aligned}
$$

et, évidemment, $P_3^{2\bar{1}1} = 0$. En rassemblant ces sommes, on obtient

$$
\begin{aligned}
P_3^{211} &= P_3^{\bar{2}11} + P_3^{21\bar{1}}\\
&= -3 \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N}\\ 0<p_1\leqslant p_0\\ p_2=0\\ p_3=-(p_1+p_0)}} d_2(p_0,p_1)\Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_0,p_2,p_3} + p_3\ G_{p_1,p_2,p_0}\Big)\\
&= -3 \sum_{\substack{p_0\in\mathbb{N}\\ 0<p_1\leqslant p_0\\ p_2=0\\ p_3=-(p_1+p_0)}} d_2(p_0,p_1)\xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3}.
\end{aligned}
$$

En utilisant le lemme (partie ii), on montre que $P_3^{103} = -\overline{P_3^{301}}$ et $P_3^{112} = -\overline{P_3^{211}}$. Il ne reste donc plus qu'à calculer P_3^{121}.

$$P_3^{\bar{1}21} = -3 \sum_{p_0 \in \mathbb{N},\ p_1=0,\ p_2=0,\ p_3=-p_0} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3},$$

$$\begin{aligned} P_3^{12\bar{1}} &= -3 \sum_{p_3 \in \mathbb{N},\ p_1=0,\ p_2=0,\ p_0=-p_3} p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} \\ &= -3 \sum_{p_0 \in \mathbb{N},\ p_1=0,\ p_2=0,\ p_3=-p_0} p_3\ G_{p_1,p_2,p_0}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_3^{121} &= P_3^{\bar{1}21} + P_3^{12\bar{1}} \\ &= -3 \sum_{p_0 \in \mathbb{N},\ p_1=0,\ p_2=0,\ p_3=-p_0} \Big(p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_3\ G_{p_1,p_2,p_0} \Big) \\ &= -3 \sum_{p_0 \in \mathbb{N},\ p_1=0,\ p_2=0,\ p_3=-p_0} \xi^{(3)}_{p,p_1,p_2,p_3}. \end{aligned}$$

Pour finir, on a

$$\begin{aligned} \xi^{(3)}_{p_0,p_1,p_2,p_3} &:= p_0\ G_{p_1,p_2,p_3} + p_1\ G_{p_0,p_2,p_3} + p_2\ G_{p_1,p_0,p_3} + p_3\ G_{p_1,p_2,p_0} \\ &= -(p_1+p_2+p_3)\mathbf{E}_{p_0} \cdot \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \mathbf{E}_{p_2}, \mathbf{E}_{p_3} \rfloor + p_1\, \mathbf{E}_{p_1} \cdot \lfloor \mathbf{E}_{p_0}, \mathbf{E}_{p_2}, \mathbf{E}_{p_3} \rfloor \\ &\qquad + p_2\, \mathbf{E}_{p_2} \cdot \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \mathbf{E}_{p_0}, \mathbf{E}_{p_3} \rfloor + p_3\, \mathbf{E}_{p_3} \cdot \lfloor \mathbf{E}_{p_1}, \mathbf{E}_{p_2}, \mathbf{E}_{p_0} \rfloor \\ &= \mathbf{E}_{p_0} \cdot \Big\{ p_1 \Big(\chi^{(3)\,T_{12}}(p_0\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) - \chi^{(3)}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) \Big) \\ &\qquad + p_2 \Big(\chi^{(3)\,T_{13}}(p_1\omega_I, p_0\omega_I, p_3\omega_I) - \chi^{(3)}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) \Big) \\ &\qquad + p_3 \Big(\chi^{(3)\,T_{14}}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_0\omega_I) - \chi^{(3)}(p_1\omega_I, p_2\omega_I, p_3\omega_I) \Big) \Big\} \\ &\qquad \mathbf{E}_{p_1} \mathbf{E}_{p_2} \mathbf{E}_{p_3}. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant est une généralisation (concernant les transferts d'énergie) des trois propriétés précédentes. Avant de l'énoncer, on souhaite présenter d'une manière plus rigoureuse la fonction de dégénérescence. Pour nous, $d(a_1, \cdots, a_n)$ est le nombre de fois que le n-uplet $(a_1, \cdots, a_n)$ tel que $a_1 \in \mathbb{Z},\ a_2 \geqslant a_1,\ \cdots,\ a_n \geqslant a_{n-1}$ apparaît dans l'ensemble des n-uplets $(a_1, \cdots, a_n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

Pour plus de symétrie, on note $\chi^{(n)}(-(p_1 + \cdots + p_n)\omega_1; p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I)$ ce que l'on notait $\chi^{(n)}(p_1\omega_I, \cdots, p_n\omega_I)$.

Théorème 1. *Calcul préliminaire au critère énergétique*

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^n} (p_1+\cdots+p_n) G_{p_1,\cdots,p_n}$$

$$= -i\Im m\{ \sum_{\substack{(a,b,c)\in[1,\cdots,n+1]^3 \\ a+b+c=n+1 \\ a\leqslant c}} \frac{n!}{a!b!c!}$$

$$\sum_{\substack{p_0>0 \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ \cdots \\ 0<p_{a-1}\leqslant p_{a-2} \\ p_a=\cdots=p_{a+b-1}=0 \\ p_{a+b}<0 \\ p_{a+b}\leqslant p_{a+b+1}<0 \\ \cdots \\ p_{a+b+c-2}\leqslant p_n<0 \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_a(p_0,\cdots,p_{a-1}) d_c(p_{a+b},\cdots,p_n) \xi^{(n)}_{p_0,\cdots,p_n}\}.$$

où

$$\xi^{(n)}_{p_0,\cdots,p_n} := \frac{1}{n+1} \sum_{\sigma\in\mathcal{C}_{n+1}} p_{\sigma 0} G_{p_{\sigma 1}\cdots p_{\sigma n}}$$

avec $\mathcal{C}_{n+1}$ *le groupe cyclique généré par la permutation* $(01\cdots n)$.

Démonstration. Si n vaut un, la démonstration est donnée dans la propriété 4. En effet, on a alors $j=1$ et $p_0=-p_1$. Par conséquent, dire $\chi^{(1)\,T_{12}}(-p_1\omega_I;-p_1\omega_I) = \chi^{(1)}(p_1\omega_I;p_1\omega_I)$ revient à dire que $\chi^{(1)}$ est hermitien, et nous avons vu que ceci impliquait l'annulation de P_1 et donc de $<\partial_t W_e^{(1)}>$. On traite maintenant le cas où n est strictement supérieur à un.

A un n-uplet $(p_1,\cdots,p_n)$ donné, on associe le nombre $p_0 := -(p_1+\cdots+p_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} P_n :&= \sum_{(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^n} (p_1+\cdots+p_n)\, G_{p_1,\cdots,p_n} \\ &= -\sum_{\substack{(p_0,p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+1} \\ p_0+p_1+\cdots+p_n=0}} p_0\, G_{p_1,\cdots,p_n} \\ &= \sum_{\substack{(a,b,c)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^3 \\ a+b+c=n+1}} (P_n^{\bar{a}bc} + P_n^{ab\bar{c}}), \end{aligned}$$

où

$$P_n^{\bar{a}bc} := - \sum_{\substack{(p_0,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+1} \\ p_0+\cdots+p_n=0 \\ |\{i:p_i>0\}|=a \\ |\{i:p_i=0\}|=b \\ |\{i:p_i<0\}|=c \\ p_0>0}} p_0 \; G_{p_1,\cdots,p_n}$$

et

$$P_n^{ab\bar{c}} := - \sum_{\substack{(p_0,\cdots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+1} \\ p_0+\cdots+p_n=0 \\ |\{i:p_i>0\}|=a \\ |\{i:p_i=0\}|=b \\ |\{i:p_i<0\}|=c \\ p_0<0}} p_0 \; G_{p_1,\cdots,p_n}.$$

On commence par étudier $P_n^{\bar{a}bc}$. Puisqu'il y a exactement $a-1$ indices positifs en plus de p_0, b indices nuls, et c indices négatifs, on a

$$P_n^{\bar{a}bc} = -\frac{(a+b+c-1)!}{(a-1)!b!c!} \sum_{\substack{p_0>0 \\ (p_1,\cdots,p_{a-1})\in\mathbb{N}^{a-1} \\ p_a=\cdots=p_{a+b-1}=0 \\ (p_{a+b},\cdots,p_{a+b+c-1})\in(-\mathbb{N})^c \\ p_0+\cdots+p_n=0}} p_0 \; G_{p_1,\cdots,p_n};$$

on utilise alors la fonction de dégénérescence sur les deux ensembles indépendants (i.e., les composantes positives et les composantes négatives) pour ordonner les indices[6] :

[6]Pour avoir des expressions plus courtes, on convient que $p_n = p_{a+b+c-1}$.

$$
\begin{aligned}
P_n^{\bar{a}bc} &= -\frac{(a+b+c-1)!}{(a-1)!b!c!} \sum_{\substack{p_0>0 \\ (p_1,\cdots,p_{a-1})\in\mathbb{N}^{a-1} \\ p_a=\cdots=p_{a+b-1}=0 \\ p_{a+b}<0 \\ p_{a+b}\leqslant p_{a+b+1}<0 \\ \cdots \\ p_{a+b+c-2}\leqslant p_n<0 \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_c(p_{a+b},\cdots,p_n)p_0\ G_{p_1,\cdots,p_n} \\
&= -\frac{(a+b+c-1)!}{a!b!c!} \sum_{\substack{(p_0,p_1,\cdots,p_{a-1})\in\mathbb{N}^{a} \\ p_a=\cdots=p_{a+b-1}=0 \\ p_{a+b}<0 \\ p_{a+b}\leqslant p_{a+b+1}<0 \\ \cdots \\ p_{a+b+c-2}\leqslant p_n<0 \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_c(p_{a+b},\cdots,p_n) \\
&\Big(p_0\ G_{p_1,\cdots,p_{a-1},p_a,\cdots,p_n} + p_1\ G_{p_2,\cdots,p_0,p_a,\cdots,p_n} + \cdots + p_{a-1}\ G_{p_0,\cdots,p_{a-2},p_a,\cdots,p_n}\Big) \\
&= -\frac{(a+b+c-1)!}{a!b!c!} \sum_{\substack{p_0>0 \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ \cdots \\ 0<p_{a-1}\leqslant p_{a-2} \\ p_a=\cdots=p_{a+b-1}=0 \\ p_{a+b}<0 \\ p_{a+b}\leqslant p_{a+b+1}<0 \\ \cdots \\ p_{a+b+c-2}\leqslant p_n<0 \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_a(p_0,\cdots,p_{a-1})d_c(p_{a+b},\cdots,p_n) \\
&\Big(p_0\ G_{p_1,\cdots,p_{a-1},p_a,\cdots,p_n} + p_1\ G_{p_2,\cdots,p_0,p_a,\cdots,p_n} + \cdots + p_{a-1}\ G_{p_0,\cdots,p_{a-2},p_a,\cdots,p_n}\Big)
\end{aligned}
$$

où nous avons, à la deuxième étape, symétrisé par le groupe généré par la permutation $(01\cdots a-1)$, ce qui explique que le dénominateur passe de $(a-1)!$ à $a!$.

La démarche est similaire pour $P_n^{ab\bar{c}}$:

$$
\begin{aligned}
P_n^{ab\bar{c}} &= -\frac{(a+b+c-1)!}{a!b!(c-1)!} \sum_{\substack{p_0<0 \\ (p_1,\cdots,p_a)\in\mathbb{N}^a \\ p_{a+1}=\cdots=p_{a+b}=0 \\ (p_{a+b+1},\cdots,p_n)\in(-\mathbb{N})^{c-1} \\ p_0+\cdots+p_n=0}} p_0\ G_{p_1,\cdots,p_n} \\
&= -\frac{(a+b+c-1)!}{a!b!(c-1)!} \sum_{\substack{p_0<0 \\ p_1>0 \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ \cdots \\ 0<p_a\leqslant p_{a-1} \\ p_{a+1}=\cdots=p_{a+b}=0 \\ (p_{a+b+1},\cdots,p_n)\in(-\mathbb{N})^{c-1} \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_a(p_1,\cdots,p_a)p_0\ G_{p_1,\cdots,p_n} \\
&= -\frac{(a+b+c-1)!}{a!b!(c-1)!} \sum_{\substack{p_1>0 \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ \cdots \\ 0<p_a\leqslant p_{a-1} \\ p_{a+1}=\cdots=p_{a+b}=0 \\ (p_0,p_{a+b+1},\cdots,p_n)\in(-\mathbb{N})^{c} \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_a(p_1,\cdots,p_a) \\
&\Big(p_0\ G_{p_1,\cdots,p_{a+b},p_{a+b+1},\cdots,p_n} + p_{a+b+1}\ G_{p_1,\cdots,p_{a+b},p_{a+b+2},\cdots,p_0} \\
&\qquad + \cdots + p_n\ G_{p_1,\cdots,p_{a+b},p_0,\cdots,p_{a+b+c-2}}\Big) \\
&= -\frac{(a+b+c-1)!}{a!b!c!} \sum_{\substack{p_1>0 \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ \cdots \\ 0<p_a\leqslant p_{a-1} \\ p_{a+1}=\cdots=p_{a+b}=0 \\ p_0<0 \\ p_0\leqslant p_{a+b+1}<0 \\ p_{a+b+1}\leqslant p_{a+b+2}<0 \\ \cdots \\ p_{a+b+c-2}\leqslant p_n<0 \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_a(p_1,\cdots,p_a)d_c(p_0,p_{a+b+1},\cdots,p_n) \\
&\Big(p_0\ G_{p_1,\cdots,p_{a+b},p_{a+b+1},\cdots,p_n} + p_{a+b+1}\ G_{p_1,\cdots,p_{a+b},p_{a+b+2},\cdots,p_0} \\
&\qquad + \cdots + p_n\ G_{p_1,\cdots,p_{a+b},p_0,\cdots,p_{a+b+c-2}}\Big).
\end{aligned}
$$

Afin de comparer ce résultat avec $P_n^{\bar{a}bc}$, on effectue le changement d'indice $p_0 \mapsto p_{a+b} \mapsto p_{a+b-1} \mapsto \cdots \mapsto p_2 \mapsto p_1 \mapsto p_0$.

On a alors

$$P_n^{ab\bar{c}} = -\frac{(a+b+c-1)!}{a!b!c!} \sum_{\substack{p_0>0 \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ \cdots \\ 0<p_{a-1}\leqslant p_{a-2} \\ p_a=\cdots=p_{a+b-1}=0 \\ p_{a+b}<0 \\ p_{a+b}\leqslant p_{a+b+1}<0 \\ \cdots \\ p_{a+b+c-2}\leqslant p_n<0 \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_a(p_0,\cdots,p_{a-1})d_c(p_{a+b},p_{a+b+1},\cdots,p_n)$$

$$\Big(p_{a+b}\ G_{p_0,\cdots,p_{a+b-1},p_{a+b+1},\cdots,p_n} + p_{a+b+1}\ G_{p_0,\cdots,p_{a+b-1},p_{a+b+2},\cdots,p_{a+b}}$$
$$+\cdots+p_n\ G_{p_0,\cdots,p_{a+b-1},p_{a+b},\cdots,p_{a+b+c-2}}\Big).$$

Définissons

$$\xi^{(n)}_{p_0,\cdots,p_n} := p_0\ G_{p_1,\cdots,p_n} + p_1\ G_{p_0,p_2,\cdots,p_n} \cdots + p_n\ G_{p_0,\cdots,p_{n-1}}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} P_n^{abc} &:= P_n^{\bar{a}bc} + P_n^{ab\bar{c}} \\ &= -\frac{n!}{a!b!c!} \sum_{\substack{p_0>0 \\ 0<p_1\leqslant p_0 \\ 0<p_2\leqslant p_1 \\ \cdots \\ 0<p_{a-1}\leqslant p_{a-2} \\ p_a=\cdots=p_{a+b-1}=0 \\ p_{a+b}<0 \\ p_{a+b}\leqslant p_{a+b+1}<0 \\ \cdots \\ p_{a+b+c-2}\leqslant p_n<0 \\ p_0+\cdots+p_n=0}} d_a(p_0,\cdots,p_{a-1})d_c(p_{a+b},p_{a+b+1},\cdots,p_n) \\ &\quad \xi^{(n)}_{p_0,\cdots,p_n}. \end{aligned}$$

Pour en arriver à l'expression donnée dans l'énoncé du théorème, il suffit de remarquer la partie ii du lemme implique que $\overline{P^{abc}} = -P^{cba}$.

□

Puisque

$$P_n = \sum_{(a,b,c)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^3 a+b+c=n+1} P_n^{abc},$$

le théorème implique que si $\xi^{(n)}_{p_0,\cdots,p_n}$ s'annule pour tous les p_i, $i \in \{0,1,\cdots,n\}$ alors P_n est nul.

Mais, étant donné que[7] $p_0 := -(p_1+\cdots+p_n)$, on a

[7] Cette condition sera implicite jusqu'à la fin de cette section.

$$\xi^{(n)}_{p_0,\cdots,p_n} = p_1\ (G_{p_0,p_2,\cdots,p_n} - G_{p_1,\cdots,p_n}) + \cdots + p_n\ (G_{p_0,\cdots,p_{n-1}} - G_{p_1,\cdots,p_n}).$$

Une manière d'annuler $\xi^{(n)}_{p_0,\cdots,p_n}$ est donc de supposer que

$$G_{p_0,p_1,\cdots,p_{j-1},p_{j+1},\cdots,p_n} = G_{p_1,\cdots,p_n} \qquad \forall j \in \{1,\cdots,n\},\ \forall (p_0,\cdots,p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

soit

$$\forall j \in \{1,\cdots,n\}\ \forall (p_0,\cdots,p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}\ :$$
$$\mathbf{E}_{p_j} \cdot \lfloor \mathbf{E}_{p_0},\cdots,\mathbf{E}_{p_{j-1}},\mathbf{E}_{p_{j+1}},\cdots,\mathbf{E}_{p_n} \rfloor = \mathbf{E}_{p_0} \cdot \lfloor \mathbf{E}_{p_1},\cdots,\mathbf{E}_{p_n} \rfloor$$

et donc, par définition :

$$\begin{aligned}
&\forall j \in \{1,\cdots,n\}\ \forall (p_0,\cdots,p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}\ :\\
&\mathbf{E}_{p_j} \cdot \chi^{(n)}(-p_j\omega_I; p_0\omega_I,\cdots,p_{j-1}\omega_I,p_{j+1}\omega_I,\cdots,p_n\omega_I)\mathbf{E}_{p_0},\cdots\mathbf{E}_{p_{j-1}}\mathbf{E}_{p_{j+1}}\cdots\mathbf{E}_{p_n}\\
&\quad = \mathbf{E}_{p_0} \cdot \chi^{(n)}(-p_0\omega_I; p_1\omega_I,\cdots,p_n\omega_I)\mathbf{E}_{p_1}\cdots\mathbf{E}_{p_n}.
\end{aligned}$$

Cette condition est réalisée si la suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}
&\forall j \in \{1,\cdots,n\}\ \forall (p_0,\cdots,p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}\ :\\
&\chi^{(n)\ T_{1\,j+1}}(-p_j\omega_I; p_0\omega_I,\cdots,p_{j-1}\omega_I,p_{j+1}\omega_I,\cdots,p_n\omega_I)\\
&\quad = \chi^{(n)}(-p_0\omega_I; p_1\omega_I,\cdots,p_n\omega_I).
\end{aligned}$$

En conclusion :

Théorème 2. *Critère énergétique*
$\forall n \in \mathbb{N}\ :$

$$\begin{aligned}
&\Big\{\forall j \in \{1,\cdots,n\}\ \forall (p_0,\cdots,p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid p_0 + \cdots + p_n = 0\ :\\
&\chi^{(n)\ T_{1\,j+1}}(-p_j\omega_I; p_0\omega_I,\cdots,p_{j-1}\omega_I,p_{j+1}\omega_I,\cdots,p_n\omega_I) = \chi^{(n)}(-p_0\omega_I; p_1\omega_I,\cdots,p_n\omega_I)\Big\}\\
&\Rightarrow P_n = 0\\
&\Rightarrow < \partial_t W_e^{(n)} >= 0.
\end{aligned}$$

Annexe C

Les démonstrations en théorie des nombres utiles pour le premier chapitre

Nous donnons les démonstrations relatives à quelques changement d'écritures, lors de l'étude des champs incident dichromatiques.

On commence par la propriété 1 : par hypothèse, il existe un unique couple (d_1, d_2) de nombres positifs premiers entre eux satisfaisant $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}} = \frac{d_1}{d_2}$; on définit alors $\omega_I := \frac{\omega_{I_1}}{d_1}$ et toutes les propriétés du triplet (ω_I, d_1, d_2) sont maintenant évidentes.

Justifions maintenant l'écriture de (1.37). Par la division euclidienne, il existe, correspondant à un p_1 donné, un unique couple $(a_1, c_1) \in \mathbb{Z} \times [0, \cdots, d_2)$ tel que $p_1 = a_1 d_2 + c_1$; de même il existe, correspondant à un p_2 donné, un unique couple $(a_2, c_2) \in \mathbb{Z} \times [0, \cdots, d_1)$ tel que $p_2 = a_2 d_1 + c_2$. On obtient alors, par une simple substitution, puis en renommant les variables a_1 et a_2, l'équation (1.37). Nous nous sommes ensuite permis de faire une transformée de Fourier inverse ; en particulier, nous avons affirmé que les fonctions $e^{-i(ad_1d_2+c_1d_1+c_2d_2)\omega_I t}\Big|_{\substack{a\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant c_1<d_2\\ 0\leqslant c_2<d_1}}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$. En effet, avec des ensembles de définitions évidentes, si $ad_1d_2 + c_1d_1 + c_2d_2 = a'd_1d_2 + c'_1d_1 + c'_2d_2$, soit si $(a - a')d_1d_2 = (c'_1 - c_1)d_1 + (c'_2 - c_2)d_2$, alors d_2 divise $(c'_1 - c_1)d_1$, donc d_2 divise $c'_1 - c_1$, puisque d_1 et d_2 sont premiers entre eux. Mais comme $c'_1 - c_1$ appartient à $(-d_2, d_2)$, on a $c'_1 = c_1$. Par le même raisonnement, on a $c'_2 = c_2$, et donc $a' = a$. L'indépendance des fonctions est maintenant assurée par le fait que l'ensemble de ces fonctions est précisément une base de l'algèbre du groupe libre généré par l'élément $e^{i\omega_I t}$.

Démontrons que si $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}}$ est irrationnel, alors l'égalité $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2} = q_1\omega_{I_1} + q_2\omega_{I_2}$ implique $p_1 = q_1$ et $p_2 = q_2$: en effet, la condition se récrit

$$q_2 - p_2 = (p_1 - q_1)\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}}$$

et l'on remarque que le terme de gauche est un entier, alors que le terme de droite, si $p_1 \neq q_1$, est un irrationnel.

La même factorisation montre que, si $p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2} = q_1\omega_{I_1} + q_2\omega_{I_2}$ pour des couples (p_1, q_1) et (p_2, q_2) différents, alors le quotient $\frac{\omega_{I_1}}{\omega_{I_2}}$ est rationnel.

Annexe D

Taxonomie des effets non-linéaires

> L'atomisme est un fait pour les niais ; aux yeux des grands génies, ce n'est qu'une convention.
>
> Alain

Nous avons présenté l'optique non-linéaire d'une manière peu conventionnelle : plutôt que de vouloir décrire tel ou tel effet observé, nous sommes partis des relations de Maxwell, y avons ajouté les relations constitutives les plus larges possibles, et avons ainsi retrouvé, par la méthode déductive, la plupart des effets connus. Afin de convaincre le lecteur et pour l'aider à faire le lien avec ce qu'il connaît, nous souhaitons reprendre la plupart des équations que l'on a obtenues, mais avec cette fois-ci la méthode inductive.

On rappelle que l'ordre d'un effet sous-entend l'ordre de non-linéarité (c'est-à-dire qu'à l'ordre N le vecteur polarisation s'écrit $\mathbf{P} = \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} \mathbf{P}^{(n)}$) et le degré d, défini pour un champ incident monochromatique (resp. dichromatique) à la page 40 (resp. 63), correspond grossièrement à la précision dans le nombre d'harmoniques prises en compte. Enfin, rappelons que, suivant notre intuition, les systèmes d'équations que nous présentons (dans le corps du texte) décrivent mal la composante $\mathbf{E}_d$ si $d > N$, et que les effets d'ordre N ne sont totalement visibles que lorsque $d = N$.

Dans le corps du texte, nous avons supposé que la composante statique du champ électrique s'annulait (page 39) ; nous la rétablissons ici uniquement lorsqu'elle est indispensable.

Génération de seconde harmonique : $N = 2$, $d = 2$

Le système le plus simple à résoudre est :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0, \tag{(1.20a)}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0. \tag{(1.20b)}$$

Nous pensons que la non-déplétion de l'onde de pompe, qui fait intervenir le terme $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor$ apparaît simultanément à la génération de troisième harmonique[1].

Génération de troisième harmonique : $N = 3$, $d = 3$

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0, \tag{(1.29a)}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0, \tag{(1.29b)}$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0. \tag{(1.29c)}$$

Les sources de ce champ oscillant à $3\omega_I$ sont $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor$ et $\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$. Il y a donc un effet d'ordre trois et un autre constitué de deux effets d'ordre deux.

Effet Kerr-optique : $N = 3$, $d = 3$

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + \omega_I^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_2 \rfloor + 3\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0, \tag{(1.29a)}$$

$$\mathcal{M}_2^{lin}(\mathbf{E}_2) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0, \tag{(1.29b)}$$

$$\mathcal{M}_3^{lin}(\mathbf{E}_3) + (3\omega_I)^2 \Big(2\lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rfloor + \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor \Big) = 0. \tag{(1.29c)}$$

L'effet Kerr-optique est la variation de permittivité engendrée par le terme $\lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor$.

Effet Pockels : $N = 2$, $d = 2$

[1] On répète l'argument : les deux termes d'ordre deux à comparer sont $\chi^{(2)}(-\omega_I, 2\omega_I)\mathbf{E}_{-1}\mathbf{E}_2$ et $\chi^{(2)}(\omega_I, 2\omega_I)\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$. Les modules des champs sont identiques et nous ne voyons aucune raison, en électromagnétisme classique, de supposer qu'un des $\chi^{(2)}$ a une valeur bien supérieure à l'autre.

$$\mathcal{M}_0^{lin}(\mathbf{E}_0) = 0,$$

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 2\omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0.$$

C'est la manière de résoudre l'équation $\mathcal{M}_0^{lin}(\mathbf{E}_0)$ gouvernant le champ statique qui nous intriguait, et nous a poussé à supposer, comme dans la quasi-totalité de la littérature, que cette composante était identiquement nulle.

Effet Kerr électro-optique : $N = 3$, $d = 1$

$$\mathcal{M}_0^{lin}(\mathbf{E}_0) = 0,$$

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) + 3\omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0,$$

Rectification optique : $N = 2$, $d = 1$

Le terme $\chi^{(2)}(-\omega_I, \omega_I)\mathbf{E}_{-1}\mathbf{E}_1$ est responsable d'une polarisation statique, qui à l'ordre deux et au degré deux s'écrit : $\mathbf{P}^{(2)} = 2\varepsilon_0 \lfloor \mathbf{E}_{-1}, \mathbf{E}_1 \rfloor$. La dérivée de ce terme s'annule, et par conséquent l'équation de propagation du champ électrique est simplement :

$$\mathcal{M}_1^{lin}(\mathbf{E}_1) = 0. \qquad ((1.19))$$

Génération de somme de fréquences : $N = 2$, $d = 2$

Si le champ incident est dichromatique,

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{s}, t) = 2\Re e\{\mathbf{E}^i_{I_1}(\mathbf{s})e^{-i\omega_{I_1} t} + \mathbf{E}^i_{I_2}(\mathbf{s})e^{-i\omega_{I_2} t}\},$$

alors le champ total doit s'écrire selon

$$\mathbf{E}(\mathbf{s}, t) = \sum_{(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{E}_{p_1,p_2}(\mathbf{s})e^{-i(p_1\omega_{I_1} + p_2\omega_{I_2})t}. \qquad ((1.34))$$

À l'ordre deux et au degré deux, ceci amène au système d'équations suivant :

$$\mathcal{M}_{1,0}^{lin}(\mathbf{E}_{1,0}) = 0, \tag{(1.41a)}$$

$$\mathcal{M}_{0,1}^{lin}(\mathbf{E}_{0,1}) = 0, \tag{(1.41b)}$$

$$\mathcal{M}_{2,0}^{lin}(\mathbf{E}_{2,0}) + (2\omega_{I_1})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{1,0} \rfloor = 0, \tag{(1.41c)}$$

$$\mathcal{M}_{0,2}^{lin}(\mathbf{E}_{0,2}) + (2\omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{0,1}, \mathbf{E}_{0,1} \rfloor = 0, \tag{(1.41d)}$$

$$\mathcal{M}_{1,1}^{lin}(\mathbf{E}_{1,1}) + (\omega_{I_1} + \omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{0,1} \rfloor = 0, \tag{(1.41e)}$$

$$\mathcal{M}_{1,-1}^{lin}(\mathbf{E}_{1,-1}) + (\omega_{I_1} - \omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{0,-1} \rfloor = 0. \tag{(1.41f)}$$

En appelant ω_{I_1} et ω_{I_2} les deux fréquences incidentes, la composante $\mathbf{E}_{1,1}$ oscille à la fréquence $\omega_{I_1} + \omega_{I_2}$; elle décrit donc la génération de somme de fréquences.

Génération de différence de fréquences : $N = 2$, $d = 2$

$$\mathcal{M}_{1,0}^{lin}(\mathbf{E}_{1,0}) = 0, \tag{(1.41a)}$$

$$\mathcal{M}_{0,1}^{lin}(\mathbf{E}_{0,1}) = 0, \tag{(1.41b)}$$

$$\mathcal{M}_{2,0}^{lin}(\mathbf{E}_{2,0}) + (2\omega_{I_1})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{1,0} \rfloor = 0, \tag{(1.41c)}$$

$$\mathcal{M}_{0,2}^{lin}(\mathbf{E}_{0,2}) + (2\omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{0,1}, \mathbf{E}_{0,1} \rfloor = 0, \tag{(1.41d)}$$

$$\mathcal{M}_{1,1}^{lin}(\mathbf{E}_{1,1}) + 2(\omega_{I_1} + \omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{0,1} \rfloor = 0, \tag{(1.41e)}$$

$$\mathcal{M}_{1,-1}^{lin}(\mathbf{E}_{1,-1}) + 2(\omega_{I_1} - \omega_{I_2})^2 \lfloor \mathbf{E}_{1,0}, \mathbf{E}_{0,-1} \rfloor = 0. \tag{(1.41f)}$$

En suivant les notations introduites dans le paragraphe précédent, la composante[2] $\mathbf{E}_{1,-1}$ oscille à la fréquence $\omega_{I_1} - \omega_{I_2}$; elle décrit donc la génération de différence de fréquences.

[2] On suppose que $\omega_{I_1} > \omega_{I_2}$ afin de considérer une fréquence positive.

Effet Raman ou effet Brilloin : $N = 3$, $d = 3$

Si (pour une raison qui ne nous concerne pas) le milieu, éclairé par un champ monochromatique oscillant à la pulsation ω_I, présente une résonance à la pulsation ω_s, le champ électrique est décrit par le système suivant (où l'on a supposé que les inégalités suivantes étaient respectées : $\omega_s > \omega_I$, $2\omega_s > \omega_I$ et $2\omega_I > \omega_s$) :

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,0}(\mathbf{E}_{1,0}) + \omega_I^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{2,0}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{0,-1}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,-1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 6\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor\Big) = 0, \quad ((1.50a))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2,0}(\mathbf{E}_{2,0}) + (2\omega_I)^2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor = 0, \quad ((1.50b))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{3,0}(\mathbf{E}_{3,0}) + (3\omega_I)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{2,0}\rfloor + \lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor\Big) = 0, \quad ((1.50c))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,1}(\mathbf{E}_{0,1}) + (\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{0,2}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{-1,0}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{-1,1},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 6\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad ((1.50d))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,2}(\mathbf{E}_{0,2}) + (2\omega_s)^2\lfloor\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor = 0, \quad ((1.50e))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{0,3}(\mathbf{E}_{0,3}) + (3\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,2}\rfloor + \lfloor\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad ((1.50f))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,1}(\mathbf{E}_{1,1}) + 2(\omega_I+\omega_s)^2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor = 0, \quad ((1.50g))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2,1}(\mathbf{E}_{2,1}) + (2\omega_I+\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{2,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad ((1.50h))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{1,2}(\mathbf{E}_{1,2}) + (\omega_I+2\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{0,2},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad ((1.50i))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{-1,1}(\mathbf{E}_{-1,1}) + 2(-\omega_I+\omega_s)^2\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor = 0, \quad ((1.50j))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{-1,2}(\mathbf{E}_{-1,2}) + (-\omega_I+2\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{0,2}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{-1,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{-1,0},\mathbf{E}_{0,1},\mathbf{E}_{0,1}\rfloor\Big) = 0, \quad ((1.50k))$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2,-1}(\mathbf{E}_{2,-1}) + (2\omega_I-\omega_s)^2\Big(2\lfloor\mathbf{E}_{2,0},\mathbf{E}_{0,-1}\rfloor + 2\lfloor\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,-1}\rfloor + 3\lfloor\mathbf{E}_{0,-1},\mathbf{E}_{1,0},\mathbf{E}_{1,0}\rfloor\Big) = 0. \quad ((1.50l))$$

La résonance est décrite par la composante $\mathbf{E}_{0,1}$. Lorsque ω_s est supérieur à ω_I, le champ $\mathbf{E}_{0,1}$ émis est plus énergétique que le champ incident : on parle alors de composante anti-Stokes ; lorsque ω_s est inférieur à ω_I, le milieu a pompé de l'énergie, et l'on parle alors de composante Stokes.

Effet CARS : $N = 3$, $d = 3$
Le système est le même que pour l'effet Raman. La composante CARS est $\mathbf{E}_{2,-1}$.

Génération de sous-harmonique, à la pulsation $\omega_I/2$: $N = 2$, $d = 2$

$$\mathcal{M}^{lin}_{1/2}(\mathbf{E}_{1/2}) + 2(1/2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{-1/2} \rfloor = 0, \tag{(1.48a)}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{1}(\mathbf{E}_{1}) + \omega_I^2 \lfloor \mathbf{E}_{1/2}, \mathbf{E}_{1/2} \rfloor = 0, \tag{(1.48b)}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{3/2}(\mathbf{E}_{3/2}) + 2(3/2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_{1/2} \rfloor = 0, \tag{(1.48c)}$$

$$\mathcal{M}^{lin}_{2}(\mathbf{E}_{2}) + (2\omega_I)^2 \lfloor \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1 \rfloor = 0. \tag{(1.48d)}$$

Le système décrivant la Génération de sous-harmonique à la pulsation $\omega_I/3$ n'a pas été décrit, mais s'obtient facilement de celui décrivant l'effet Raman, en prenant $\omega_s = \omega_I/3$.

Nous pensons que la *totalité* des effets non-linéaires apparaissant dans des matériaux spatialement-locaux, non-bianisotropes, stationnaires et magnétiquement linéaires, peut être décrit par des systèmes généralisant ce que nous avons donné. Néanmoins, il est évident que de nouvelles simplifications doivent être effectuées pour décrire des effets complexes, tels le mélange à quatre ondes, la génération de très grandes harmoniques (plusieurs centaines, si l'on en croit certains articles), etc. Comme nous l'avons avoué dans le document principal, notre description de l'effet Raman est déjà très lourde, et doit pouvoir être simplifiée par des arguments microscopiques.

Bibliographie

[1] N. Bloembergen. *Encounters in Nonlinear Optics - Selected Papers with Commentary*. World Scientific Publishing, 1996.

[2] W. Kaiser and C.G.B. Garrett. Two-photon excitation in $caf_2 : eu^{2+}$. *Physical Review Letters*, 7(6) :229, 1961.

[3] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P.S. Pershan. Interactions between lightwaves in a nonlinear dielectric. *Physical Review*, 127 :1918, 1962.

[4] R.H. Kingston. unknown. *Proceeding IRE*, 50 :472, 1962.

[5] N.F. Pilipetskii and A.R. Rustamov. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 2 :88, 1965.

[6] A. Ashkin, J.M. Dziedzic, and P.W. Smith. Continuous-wave self-focusing and self-trapping of light in artificial kerr media. *Optics Letters*, 7 :276, 1982.

[7] P.B. Corkum and Z. Chang. The attosecond revolution. *Optics and Photonics News*, 19(10) :24, 2008.

[8] W.M. Tolles, J.W. Nibler, J.R. McDonald, and A.B. Harvey. A review of the theory and application of coherent anti-stokes raman spectroscopy (cars). *Applied Spectroscopy*, 31(4) :253, 1977.

[9] J.X. Cheng, A. Volkmer, and X.S. Xie. Theoretical and experimental characterization of coherent anti-stokes raman scattering microscopy. *Journal of the Optical Society of America B*, 19(6) :1363, 2002.

[10] R.R. Alfano and S.L. Shapiro. Two-dimensional green's function and local density of states in photonic crystals consisting of a finite number of cylinders of infinite length. *Physics Review Letters*, 24(584) :592, 1970.

[11] J.K. Ranka, R.W. Schirmer, and A.L. Gaeta. Observation of pulse splitting in nonlinear dispersive media. *Physical Review Letters*, 77 :3783, 1996.

[12] G. Stegeman, D.J. Hagan, and L. Torner. $\chi^{(2)}$ cascading phenomena and their applications to all-optical signal processing, mode-locking, pulse compression and solitons. *Optical and Quantum Electronics*, 28 :1691, 1996.

[13] Y.S. Kivshar and D.E. Pelinovsky. Self-focusing and transverse instabilities of solitary waves. *Physics Report*, 331 :117, 2000.

[14] G. Scharf. *From Electrostatics to Optics*. Springer-Verlag, 1994.

[15] A. Nicolet and F. Zolla. On the definition of energy in general electromagnetic media. *Compel*, 25(1) :55, 2006.

[16] P. Puska. Covariant isotropic constitutive relations in clifford's geometric algebra. *Progress in Electromagnetics Research*, 32 :413, 2001.

[17] A. Montanaro. On the constitutive relations in thermo-electroelasticity. internet document : arxiv, 0910.1344v2, 2009.

[18] A. Karlsson and G. Kristensson. Constitutive relations, dissipation and reciprocity for the maxwell equations in the time domain. *Journal of Electronic Waves and Application*, 6 :537, 1992.

[19] N.I. Zheludev S.V. Popov, Y.P. Svirko. *Susceptibility tensors for nonlinear optics*. Optics and Optoelectronics Series. Institute of Physics Publishing, 1995.

[20] Mohammed Camar-Eddine and Pierre Seppecher. Non-local interactions resulting from the homogenization of a linear diffusive medium. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série Mathématique*, 332(5) :485, 2001.

[21] A. Cabuz. On electrons, dielectrics and beyond - the classical theory of electromagnetic metamaterials. *to appear*, 2009.

[22] F.W. Hehl and Y.N. Obukov. A gentle introduction to the foudations of classical electrodynamics : the meaning of the excitations (D, B) and the field strengths (E, B). *arXiv :physics*, (0005084v2), 2000.

[23] G. Deschamps. Electromagnetics and differential forms. *IEEE*, 69(6) :676, 1981.

[24] A. Abakar, X. Brunotte, F. Foucher, S. Clenet, G. Krebs, P. Dubois, and G. Meunier. Playa : promouvoir la simulation des contrôles non destructifs par courants de foucault. internet document : http ://www.ndt.net/article/cofrend2008/papers/142.pdf, 2009.

[25] E. Tonti. Finite formulation of the electromagnetic field. *Progress In Electromagnetics Research*, 32 :1, 2001.

[26] C.C. Silva and R.A Martins. Polar and axial vectors versus quaternions. *American Journal of Physics*, 70(9) :958, 2002.

[27] N. Salingaros. Invariants of the electromagnetic field and electromagnetic waves. *American Journal of Physics*, 53(4) :361, 1984.

[28] D. Hestenes. Vectors, spinors, and complex numbers in classical and quantum physics. *American Journal of Physics*, 39 :1013, 1971.

[29] E.J. Post. *Seperating Field and Constitutive Equations in Electromagnetic Theory, in Introduction to Complex Mediums for Optics ans Electromagnetics*. SPIE Press, 2003.

[30] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism (1). *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 6 :17, 1998.

[31] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism (2). *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 6 :114, 1998.

[32] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism (3). *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 6 :233, 1998.

[33] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism (4). *Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 6 :318, 1998.

[34] J.E. Marsden and T.S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry, 2nd edition*, volume 17. Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1999.

[35] R. Coquereaux. Espaces fibrés et connexions. internet document : http ://www.cpt.univ-mrs.fr/ coque/, 2002.

[36] H. Whitney. *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press, 1957.

[37] E.J. Post. The constitutive map and some of its ramifications. *Ann. Phy. (NY)*, 71 :497, 1972.

[38] G. Marmo, E. Parasecoli, and W.M. Tulczyjew. Space-time orientations and Maxwell's equations. *arxiv :0708.3543v1*, 2007.

[39] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995.

[40] S. Marateck. The differential geometry and physical basis for the applications of feynman diagrams. *Notices of the American Mathematical Society*, 53(7) :744, 2006.

[41] V.S. Varadarajan. *A Tribute to C.S. Seshadri : Perspectives in Geometry and Representation Theory*. New Delhi, Hindustan Book Agency, 2003.

[42] F. Zolla, G. Renversez, A. Nicolet, B. Kuhlmey, S. Guenneau, and D. Felbacq. *Foundations of Photonic Crystal Fibres*. Imperial College Press, 2003.

[43] A. Bossavit. On the notion of anisotropy in constitutive laws : some implications of the "hodge implies metric" result. *Compel*, 20(1) :233, 2003.

[44] W.S. Weiglhofer. *Constitutive Characterization of Simple and Complex Mediums, in Introduction to Complex Mediums for Optics ans Electromagnetics*. SPIE Press, 2003.

[45] T. Tarhasaari and L. Kettunen. Wave propagation and cochain formulations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3) :1195, 2003.

[46] E. Tonti. *On the Geometrical Structure of the Electromagnetism, in Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures*. Pitagora Editrice Bologna, 1995.

[47] L.D. Landau and E.M. Lifshits. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon, New-York, 1994.

[48] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics, 3rd edition*. Wiley, New-York, 1999.

[49] R.W. Boyd. *Non Linear Optics, 2nd edition*. Academic Press, Amsterdam, 2003.

[50] N. Bloembergen. *Nonlinear Optics*. W.A. Benjamin, New York, 1965.

[51] J. Bravo-Abad, A. Rodriguez, P. Bermel, S.G. Johnson, J.D. Joannopoulos, and M. Soljacic. Enhanced nonlinear optics in photonic-crystal microcavities. *Optics Express*, 15(24) :16161, 2007.

[52] F. Jonsson. Lecture notes on nonlinear optics. internet document : http ://www.jonsson.eu/research/lectures/nlo2003/compiled/nlo2003.pdf, 2004.

[53] A. Ferrando, M. Zacares, P. Fernandez de Cordoba, D. Binosi, and J.A. Monsoriu. Spatial soliton formation in photonic crystal fibers. *Optics Express*, 11(5) :452, 2003.

[54] A. Nicolet, F. Drouart, G. Renversez, and C. Geuzaine. A finite element analysis of spatial solitons in optical fibers. *Compel*, 26(4) :1105, 2007.

[55] S. Enoch and H. Akhouayri. Bistable prism coupler with both second- and third-order nonlinearities. *Journal of the Optical Society of America B*, 14(3) :588, 1997.

[56] P.S. Banks, M.D. Feit, and M.D. Perry. High-intensity third harmonic generation. *Journal of the Optical Society of America B*, 19(1) :102, 2002.

[57] E. Centeno and D. Felbacq. Second-harmonic emission in two-dimensional photonic crystals. *Journal of the Optical Society of America B*, 23(10) :2257, 2006.

[58] J. Leon, P. Anghel-Vasilescu, F. Ginovart, and N. Allegra. Scattering of slow-light gap solitons with charges in a two-level medium. internet document : arxiv, 0811.4474v1, 2008.

[59] T. Hattori and K. Takeuchi. Simulation study on cascaded terahertz pulse generation in electro-optic crystals. *Optics Express*, 15(13) :8076, 2007.

[60] J. Wildenauer. Generation of the ninth, eleventh and fifteenth harmonics of iodine laser radiation. *Journal of applied physics*, 62(1) :41, 1987.

[61] A.L. Lytle, X. Zhang, R.L. Sandberg, O. Cohen, H.C. Kapteyn, and M.M. Murnane. Quasi-phase matching and characterization of high-order generation in hollow waveguides using counterpropagating light. *Optics Express*, 16(9) :6544, 2008.

[62] C.I. Valencia, E.R. Méndez, and B.S. Mendoza. Second-harmonic generation in the generation of light by an infinite cylinder. *Journal of the Optical Society of America*, 21(1) :36, 2004.

[63] R. Petit. *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*. Masson, 1988.

[64] C. Bosshard, U. Gubler, P. Kaatz, W. Mazerant, and U. Meier. Non-phase-matched optical third-harmonic generation in noncentrosymmetric media : Cascaded second-order contributions for the calibration of third-order nonlinearities. *Physical Review B*, 61(16) :10688, 2000.

[65] K. Wang, L. Qian, D. Zhang, H. Yang, and H. Zhu. Cascaded nonlinear phase shifts in quasi-phase-matched strucures. *Physical Review A*, 76 :13805, 2007.

[66] K. Koynov and S. Saltiel. Nonlinear phase shift via multistep $\chi^{(2)}$ cascading. *Optics communications*, 152 :96, 1998.

[67] D.Y. Kim, W.E. Torruellas, J. Kang, C. Bosshard, G.I. Stegeman, P. Vidakovic, J. Zyss, W. E. Moerner, R. Twieg, and G. Bjorklund. Second-order cascading as the origin of large third-order effects in organic single-crystal-core fibers. *Optics Letters*, 19(12) :868, 1994.

[68] G.P. Banfi, P.K. Datta, V. Degiorgio, G. Donelli, and D. Fortusini. Frequency shifting through cascaded second-order processes in a n-(4-nitrophenyl)-l-prolinol crystal. *Optics Letters*, 23(6) :439, 1998.

[69] I.V. Tomov, B. Van Wonterghem, and P.M. Rentzepis. Third-harmonic generation in barium borate. *Applied Optics*, 31(21) :4172, 1992.

[70] P.S. Banks, M.D. Feit, and M.D. Perry. High-intensity third-harmonic generation in beta barium borate through second-order and third-order susceptibilities. *Optics Letters*, 24(1) :4, 1999.

[71] G. Meredith. Cascading in optical third-harmonic generation by crystalline quartz. *Physical Review B*, 24(10) :5522, 1981.

[72] B. Hanouzet and P.Huynh. Approximation par relaxation d'un système de maxwell non linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 330(3) :193, 2000.

[73] D.A. Kleinman. Nonlinear dielectric polarization in optical media. *Physics Review*, 126 :1977, 1962.

[74] J.L. Joly, Guy Métivier, and J. Rauch. Recent results in nonlinear geometric optics i. Proceedings 7th International Conference on Hyperbolic Problems, Zurich, 1998.

[75] E. Rosencher and C. Fabre. Oscillation characteristics of continuous-wave optical parametric oscillators : beyond the mean-field approximation. *Journal of the Optical Society of America*, 19(5) :1107, 2002.

[76] F. Hache, A. Zéboulon, G. Gallot, and M.G. Gale. Cascaded second-order effects in the femtosecond regime in β-barium borate : self-compression in a visible femtosecond optical parametric oscillator. *Optics Letters*, 20(14) :1556, 1995.

[77] U. Roy, T.S. Raju, and P.K. Panigrahi. Sinusoidal excitations in reduced maxwell-duffing model. internet document : arxiv, 0711.0449v1, 2007.

[78] J. Petschulat, A. Chipouline, A. Tunnermann, T. Pertsch, C. Menzel, C. Rockstuhl, and F. Lederer. Multipole nonlinearity of metamaterials. internet document : arxiv, 0908.4019v2, 2009. physics, optics.

[79] L.N. Hand and J.D. Finch. *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.

[80] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185, 1994.

[81] Y. Ould Agha. *Transformations géométriques réelles et complexes : application à la recherche de modes à pertes dans des fibres optiques microstructurées*. PhD thesis, Universite de Provence, 2007.

[82] S. Dey. Photonic crystals fiber : An introduction. internet document : http ://web.mit.edu/sdey/www/mit/photonic.pdf, 2004.

[83] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters*, 58(20) :2059, 1987.

[84] J.B. Pendry. Photonic gap materials. *Current Science*, 76 :1311, 1999.

[85] E. Centeno and D. Felbacq. Optical bistability in finite-size nonlinear bidimensional photonic crystals doped by a microcavity. *Physical Review B*, 62(12) :7683, 2000.

[86] M. Soljacic, M. Ibanescu, S.G. Johnson, Y. Fink, and J.D. Joannopoulos. Optimal bistable switching in nonlinear photonic crystals. *Physical Review E*, 66 :55601, 2002.

[87] B. Ulug A. Cicek. Influence of kerr nonlinearity on the band structures of two-dimensional photonic crystals. *ScienceDirect*, 281 :3924, 2008.

[88] P. Xie and Z.Q. Zhang. Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals. *Physical Review Letters*, 91(21) :213904, 2003.

[89] D. Laurent, O. Legrand, P. Sebbah, C. Vanneste, and F. Mortessagne. Localized modes in a finite-size open disordered microwave cavity. *Physical Reviews Letters*, 99 :253902, 2007.

[90] M. Centini, D. Felbacq, D.S. Wiersma, C. Sibilia, M. Scalora, and M. Bertolotti. Resonant second-harmonic generation in random dielectric structures. *Journal of the European Optical Society*, 1 :6021, 2006.

[91] R. De La Fuente, A. Barthelemy, and C. Froehly. Spatial-soliton-induced guided waves in a homogeneous nonlinear kerr medium. *Optics Letters*, 16(11) :793, 1991.

[92] B. Bruneau, X.H. Zhang, F. Smektala, J.L. Adam, J. Troles, H.L. Ma, C. Boussard-Plèdel, J. Lucas, P. Lucas, D. Le Coq, M. Riley, and J.H. Simmons. Recent advances in chalcogenide glasses. *Journal of Non-crystalline Solides*, 345 :276, 2004.

[93] P. Xie, Z.Q. Zhang, and Z. Zhang. Gap solitons and solitons trains in finite-sized two-dimensional periodic and quasiperiodic photonic crystals. *Physical Review E*, 67 :026607, 2003.

[94] S. John and N. Aközbek. Nonlinear optical solitary waves in a photonic band gap. *Physical Review Letters*, 71(8) :1168, 1993.

[95] W. Chen and D.L. Mills. Gap solitons and the nonlinear optical response of supperlattices. *Physical Review Letters*, 58(2) :160, 1987.

[96] M.G. Banaee, A.R. Cowan, and J.F. Young. Third-order nonlinear influence on the specular reflectivity of two-dimensional waveguide-based photonic crystals. *Journal of the Optical Society of America B*, 19(9) :2224, 2002.

[97] G. Tayeb and D. Maistre. Rigorous theoretical study of finite-size two-dimensional photonic crystals doped by microcavities. *J. Opt. Soc Am. A*, 14(12) :55601, 1997.

[98] A.A. Asatryan, K. Bush, R.C. McPhedran, L.C. Botten, C. Martijn de Sterke, and N.A. Nicorovici. Two-dimensional green's function and local density of states in photonic crystals consisting of a finite number of cylinders of infinite length. *Physical Review E*, 63 :46612, 2001.

[99] company. United crystal. internet address : $http : //www.unitedcrystals.com/index.html$.

[100] R.S. Klein, G.E. Kugel, A. Maillard, A. Sifi, and K. Polgar. Absolute nonlinear optical coefficients measurements of bbo single crystal and determination of angular acceptance by second harmonic generation. *Optical Materials*, 22 :163, 2003.

[101] company. Coherent. internet address : $http : //www.coherent.com/$.

[102] P.S. Banks and M.D. Perry. High intensity third harmonic generation using a single crystal of bbo. internet document : http ://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/292440-aS2ZwK/webviewable/292440.pdf, 1996.

[103] S. Nakamura. Comparison between finite-difference time-domain calculation with all parameters of sellmeier′ s fitting equation and experimental results for slightly chirped 12-fs laser pulse propagation in a silica fiber. *Journal of Lightwave Technology*, 23(2) :855, 2005.

[104] G. Bouchitté, D. Felbacq, and F. Zolla. Do fresnel coefficients exist ? *Wave Motion*, 42(1) :75, 2004.

[105] U. Gubler and C. Bosshard. Optical third-harmonic generation of fused silica in gas atmoshere : Absolute value of the third nonlinear optical susceptibility $\chi^{(3)}$. *Physical Review B*, 61(16) :10702, 2000.

[106] G.B. Gurevich. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. P.Noordhoff Ltd - Groningen, The Netherlands, 1964.

[107] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory. A first course*, volume 129. Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, New York, 1991.

[108] R. Goodman and N.R. Wallach. *Representations and Invariants of the Classical Groups*. Cambridge University Press, 1998.

[109] W. Miller. *Symmetry Groups and Their Applications*. Accadamic Press, New-York, 1972.

Résumé - Abstract

RÉSUMÉ : Les équations de Maxwell, qui gouvernent le comportement des champs électromagnétiques mésoscopiques, ne forment pas un ensemble clos d'équations. Il faut donc les compléter avec des relations constitutives, qui caractérisent un matériau. Nous avons voulu donner des relations fort générales, et les simplifier ensuite, en explicitant toutes les restrictions physiques que cela comportait, jusqu'à obtenir un système fini d'équations aux dérivées partielles non-linéaires couplées résoluble numériquement (méthode des éléments finis). Cela nous a permis d'étudier la diffraction d'un champ électromagnétique par un système, ayant la forme d'un cylindre ou d'un cristal photonique, fini ou infini, générant une deuxième et une troisième harmonique. Ces différentes composantes du champ électrique interagissent entre elles, par l'effet Kerr-optique ou la déplétion de l'onde de pompe.

Nous avons aussi généralisé à l'optique non-linéaire quelques propriétés des matériaux bien connues dans le régime linéaire, comme l'anisotropie ou la perte d'énergie électrique.

MOTS CLÉS : Équations constitutives - Optique non-linéaire - Génération d'harmoniques - Effet Kerr-optique - Diffraction - Méthode des éléments finis - Antenne virtuelle - Anisotropie - Relations de Kleinman

ABSTRACT : Maxwell equations, which describe the behavior of mesoscopic electromagnetic fields, are not a closed system. We thus have to add constitutive relations that characterize a host medium. We give very general relations, and then simplify them, specifying at each step the physical restrictions that this entails, up to obtain a finite set of coupled nonlinear partial differential equations that we are able to solve numerically. This leads us to study the scattering by an electromagnetic field on a system, that has either the shape of a cylinder or a finite or infinite photonic crystal, and that generates a second and a third harmonic. These different spectral components of the electric field interact with themselves by the optical Kerr-effect and the depletion of the pump wave.

We also generalize to the nonlinear regime some of the properties of materials well-known in the linear one, like the anisotropy or the electric energy loss.

KEY WORDS : Constitutive equations - Nonlinear optics - Harmonic generation - Optical Kerr effect - Scattering - Finite element method - Virtual antenna - Anisotropy - Kleinman Relations