



**HAL**  
open science

# Approche modale de la propagation acoustique dans les guides d'ondes ouverts et application à l'acoustique urbaine

Adrien Pelat

► **To cite this version:**

Adrien Pelat. Approche modale de la propagation acoustique dans les guides d'ondes ouverts et application à l'acoustique urbaine. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2009. Français. NNT: . tel-00439840v1

**HAL Id: tel-00439840**

**<https://theses.hal.science/tel-00439840v1>**

Submitted on 8 Dec 2009 (v1), last revised 4 Jan 2010 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DU MAINE, UFR SCIENCES ET TECHNIQUES  
LE MANS, FRANCE

École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

THÈSE DE DOCTORAT  
Spécialité ACOUSTIQUE

---

APPROCHE MODALE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE  
DANS LES GUIDES D'ONDES OUVERTS,  
APPLICATION À L'ACOUSTIQUE URBAINE

---

**Adrien PELAT**

Version provisoire du manuscrit de thèse

Soutenance prévue le 2 décembre 2009 devant le jury composé de

<b>D. BOTTELDOOREN</b>	Professeur, INTEC, Ghent (Belgique)	rapporteur
<b>J. KERGOMARD</b>	Directeur de Recherche, LMA, Marseille	rapporteur
<b>A-S. BONNET-BEN DHIA</b>	Directrice de Recherche, POEMS, Paris	examinatrice
<b>J. FORSSÉN</b>	Professeur, Chalmers University, Göteborg (Suède)	examineur
<b>J. PICAUT</b>	Directeur de Recherche, LCPC, Nantes	examineur
<b>L. SIMON</b>	Professeur, LAUM, Le Mans	directeur de thèse
<b>S. FÉLIX</b>	Chargé de Recherche, LAUM, Le Mans	co-encadrant
<b>V. PAGNEUX</b>	Chargé de Recherche, LAUM, Le Mans	co-encadrant



# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Revue bibliographique en Acoustique Urbaine</b>	<b>7</b>
1.1 Les modèles énergétiques . . . . .	7
1.1.1 Théorie classique de la réverbération . . . . .	7
1.1.2 Méthode des sources images . . . . .	8
1.1.3 Méthode du tir de rayons . . . . .	9
1.1.4 Méthode de radiosité . . . . .	9
1.1.5 Approche particulière . . . . .	10
1.2 Les modèles ondulatoires . . . . .	10
1.2.1 Méthodes numériques de discrétisation de l'espace et du temps . . . . .	10
1.2.2 Méthode des sources équivalentes . . . . .	11
1.2.3 Approche modale . . . . .	12
1.3 Synthèse de la littérature . . . . .	12
1.3.1 Axes de travail dégagés . . . . .	13
<b>2 Approche multimodale de la propagation en milieu guidé</b>	<b>15</b>
2.1 Propagation multimodale dans les guides cylindriques . . . . .	15
2.1.1 Equations dans le cas général . . . . .	15
2.1.2 Exemple du guide à section rectangulaire . . . . .	17
2.2 Le formalisme vectoriel . . . . .	17
2.2.1 Résolution dans le cas d'un guide de longueur finie . . . . .	18
2.3 Propagation multimodale dans les guides de section variable . . . . .	19
2.3.1 Étude d'une discontinuité . . . . .	20
2.3.2 Généralisation au cas du guide irrégulier . . . . .	21
2.4 Matrice de diffusion . . . . .	21
2.4.1 Définition de la matrice de diffusion . . . . .	22
2.4.2 Calcul de $S$ pour un guide de section constante par morceaux . . . . .	22
2.5 Conclusion . . . . .	25
<b>3 Étude préliminaire de la propagation dans des guides irréguliers 2D</b>	<b>27</b>
3.1 Distribution régulière de créneaux . . . . .	28
3.2 Distribution stochastique de discontinuités . . . . .	32

3.3	Conclusion . . . . .	34
A3	Matrice de diffusion d'un créneau . . . . .	35
<b>4</b>	<b>On the use of Leaky modes in open waveguides</b>	<b>37</b>
4.1	Introduction . . . . .	38
4.2	Eigenmodes of the transverse problem . . . . .	39
4.2.1	Theory and formulation . . . . .	39
4.2.2	Numerical resolution . . . . .	42
4.3	Propagation along the street . . . . .	45
4.3.1	Input condition . . . . .	45
4.3.2	Output condition . . . . .	47
4.3.3	Solutions for $\{a_i\}$ and $\{b_i\}$ . . . . .	48
4.4	Results . . . . .	48
4.4.1	Input condition . . . . .	48
4.4.2	Propagation within the waveguide . . . . .	50
4.5	Conclusions . . . . .	51
A4	Formulation in the Perfectly Matched Layers . . . . .	53
<b>5</b>	<b>A coupled Modal-FE method in irregular open waveguides</b>	<b>55</b>
5.1	Introduction . . . . .	56
5.2	2D preliminary study : Wave propagation in a grounded halfspace . . . . .	57
5.2.1	Validation, convergence . . . . .	59
5.2.2	Propagation over a ground with a piecewise constant, range dependent, height . . . . .	62
5.3	Case of a 3D open waveguide . . . . .	64
5.4	Beat phenomenon between to parallel open waveguides . . . . .	67
5.5	Conclusion . . . . .	69
A5	On Perfectly Matched Layers (PML) . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Applications urbaines de la méthode Modal-FE</b>	<b>75</b>
6.1	Etude de l'influence de la largeur des bâtiments sur le champ acoustique . . . . .	75
6.2	Prise en compte d'une impédance finie aux façades . . . . .	80
6.3	Applications de l'approche Modal-FE : deux exemples à deux dimensions . . . . .	85
6.3.1	Diffusion d'une onde par une surface irrégulière . . . . .	85
6.3.2	Ombre acoustique et effets micro-météorologiques . . . . .	87
	<b>Conclusion générale</b>	<b>91</b>
	<b>Références</b>	<b>95</b>

# Introduction générale

---

Conséquence de l'urbanisation de nos sociétés, le bruit en milieu urbain est devenu un phénomène de société majeur dont les enjeux sociaux, économiques et industriels sont d'une grande importance. Ainsi, les nuisances sonores sont considérées par les populations comme la principale forme de "pollution" en milieu urbain. Face à ce constat, il apparaît essentiel d'améliorer le cadre de vie en milieu urbain particulièrement en cherchant à réduire les nuisances sonores. Cet enjeu de société a trouvé un contexte législatif, notamment depuis la loi "bruit" n°92-1444 du 31 décembre 1992. Ce texte fournit un support légal encadrant d'une part la prévention et la réduction des nuisances sonores, d'autre part la définition de critères de qualité acoustique pour les bâtiments publics. Au niveau européen, la directive 2002/49/CE prévoit d'évaluer l'exposition aux bruits de l'environnement grâce à des cartes de bruit pour définir ensuite des plans de traitement des nuisances. Ainsi, les villes de plus de 250000 habitants ont dû fournir en 2006 leur carte de bruit. Il en sera de même en 2013 pour les villes de plus de 100000 habitants. Un exemple de carte de bruit est montré en figure 1. Cette carte a été produite en 2007, elle représente les niveaux sonores mesurés dans Paris en période de jour. Tant d'un point de vue économique et social que légal, la réalisation de cartes de bruits pertinentes et réalistes est un point clé de la lutte contre le bruit.

L'étude des champs acoustiques en milieu urbain est communément appelée "acoustique urbaine". Dans ce domaine, et plus généralement dans toute problématique liée à la propagation d'ondes audibles, trois principaux aspects peuvent être discernés : l'étude des sources, l'étude de la propagation des ondes rayonnées à travers le milieu et l'étude de la perception de ces ondes. En acoustique urbaine, les sources proviennent de l'activité humaine et industrielle comme par exemple les travaux publics, les usines ou les transports. L'étude de ces sources relève notamment de l'aéroacoustique (bruits de soufflerie), de la mécanique et la vibroacoustique (bruits d'impact, bruits des moteurs de véhicules) ou encore de la tribologie (bruit des contacts pneu/chaussée). Au cours de leur propagation, les ondes rayonnées interagissent fortement avec le milieu urbain. L'étude de phénomènes de diffusion et de diffraction des ondes, ou de phénomènes météorologiques, par exemple, est alors nécessaire. L'ensemble de ces phénomènes donne lieu à la formation de champs acoustiques dont la perception par la population relève de la psycho-acoustique. Il s'agit alors de définir et valider des indicateurs de perception pour établir des liens entre les paramètres physiques des champs acoustiques (niveaux, contenu spectral par exemple) et la représentation cognitive de ces champs acoustiques.

Devant la multitude de ces aspects il apparaît que l'acoustique urbaine au sens large fait appel



FIG. 1 – Carte de bruit de la ville de Paris (<http://www.paris.fr>).

à des connaissances scientifiques nombreuses et variées allant des sciences exactes aux sciences humaines. En France, des organisations de recherche scientifique ont été créées pour apporter des éléments de réponse à la question du bruit en milieu urbain et plus généralement à celle du bruit environnemental. Notamment, le Groupement De Recherche “Bruits des Transports” (GDR CNRS 2493) rassemble une vingtaine d’équipes de chercheurs et ingénieurs provenant aussi bien de la sphère académique que privée. La motivation des membres est de regrouper des compétences variées pour participer de manière structurée aux programmes de recherche et développement sur le plan national et européen. Par ailleurs, l’Institut de Recherche en Sciences et Techniques de la Ville (IRSTV, Fédération de Recherche CNRS 2488) mène des travaux interdisciplinaires sur la ville, qui allient des compétences en sciences de l’ingénieur, en architecture et urbanisme, et en sciences humaines et sociales. Sa particularité est d’associer des recherches sur les environnements physiques urbains à leur intégration dans des projets d’aménagement urbain et à leur perception par les habitants. Un Projet de Recherche Fédératif de l’IRSTV porte notamment sur l’étude des environnements sonores urbains.

Dans ce contexte scientifique, une Opération de Recherche “Acoustique Urbaine” a été créée en 2006 au Laboratoire d’Acoustique de l’Université du Maine. Cette Opération de Recherche est intégrée à l’IRSTV et participe aux activités du GDR “bruits des Transports”. 2 chercheurs, 4 enseignant-chercheurs, 1 doctorant et 1 technicien sont associés à cette équipe dont l’objectif global est la description ondulatoire de la propagation du son en milieu urbain, description qui permette une compréhension physique des phénomènes mis en jeu, en considérant la complexité géométrique du milieu. Dans ce but, des études théoriques, numériques et expérimentales sont menées conjointement. Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été réalisés dans le cadre des

activités de cette Opération de Recherche.

Dans cette thèse, l'intérêt est focalisé sur l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans une rue. Pour aborder ce problème, l'idée essentielle est de considérer la rue comme un guide d'ondes acoustiques. En effet, la forme typiquement allongée d'une rue délimitée par le sol et les façades des bâtiments favorise le guidage des ondes acoustiques dans l'axe de la rue. Toutefois, la rue est un guide d'ondes complexe dont trois principales caractéristiques propres peuvent être identifiées.

Une première caractéristique, géométrique, est l'ouverture de la rue sur le ciel. Ce guide est donc un domaine de propagation partiellement borné et couplé à un espace infini. Il en résulte un confinement partiel du champ acoustique où les ondes subissent des pertes radiatives depuis la partie guidée du domaine de propagation, la rue, vers la partie non bornée du domaine, le ciel.

Ensuite, la morphologie irrégulière des différentes façades des bâtiments délimitant la rue induit de nombreuses réflexions, spéculaires et diffuses qui peuvent donner lieu à des champs acoustiques complexes. Quelles que soient les approches utilisées, la prise en compte de ces phénomènes de diffusion est primordiale pour l'obtention d'une représentation appropriée des champs acoustiques en milieu urbain.

Enfin, le fluide dans lequel les ondes se propagent - l'air -, peut être soumis à des phénomènes micro-météorologiques qui induisent des inhomogénéités dans le volume du milieu de propagation. Ces inhomogénéités contribuent à la structure du champ acoustique.

Dans les travaux présentés dans ce document, une attention toute particulière est portée à la description d'une part du rayonnement des ondes de la rue vers le ciel, d'autre part des multiples réflexions aux façades. En revanche, même si un résultat illustrera une manière de prendre en compte les effets météorologiques, aucune étude approfondie ne sera entreprise sur ce sujet. La démarche scientifique mise en oeuvre pour traiter la propagation acoustique dans un tel guide représentant une rue est basée sur le principe de la décomposition modale qui fait notamment apparaître la notion de mode guidé. Le champ d'ondes est dans cette approche une combinaison d'un ensemble de modes (appelé base modale) dont les contributions dépendent notamment de la source acoustique. Cette approche, dite multimodale, a été largement développée et utilisée dans le cas de guides fermés. Elle est ici adaptée théoriquement et numériquement aux spécificités des "guides urbains" décrites précédemment. Ces guides sont dits ouverts, en référence à leur géométrie partiellement bornée ou dits fuyants, en référence à la fuite des ondes au travers de l'ouverture.

Qu'elle soit électromagnétique ou acoustique, la propagation des ondes dans les guides fuyants est encore aujourd'hui un domaine de recherche très actif. Des outils mathématiques et numériques ont été développés pour les ondes électromagnétiques<sup>1</sup> pour être ensuite transposés au

---

<sup>1</sup>Voir l'introduction d'un récent article [33] pour une revue bibliographique assez détaillée portant sur les travaux sur ces aspects publiés dans les années 60 et 70



cas des ondes acoustiques. Notamment, l'avènement des technologies modernes avec par exemple l'électronique intégrée ou les technologies de communication a été le support de nombreuses recherches en électromagnétisme. En effet, prenons l'exemple de la fibre optique à saut d'indice. Dans un tel guide, les ondes électromagnétiques se propagent dans le coeur de la fibre doté d'un certain indice optique. Ce coeur est revêtu d'une gaine optique dotée d'un indice optique différent. Ainsi, au travers de l'interface non parfaitement réfléchissante entre les deux matériaux, les ondes principalement confinées dans le coeur perdent de l'énergie dans la gaine au cours de leur propagation. En acoustique sous-marine, les ondes acoustiques peuvent se propager le long d'un guide naturel - l'océan - délimité entre la surface de l'eau et les fonds marins. Si à la surface de l'eau une condition de Dirichlet peut être considérée, il n'en va pas de même pour les fonds marins composés de sédiments pouvant laisser pénétrer les ondes. Ainsi, lors de la propagation, il existe des pertes d'énergie dans les sédiments.

Dans ce type de guide d'ondes, l'énergie n'est plus conservée au cours de la propagation et la notion classique de mode guidé ne suffit plus. Aussi la notion de mode fuyant ("leaky mode") a-t-elle été introduite dans les années 50 initialement pour décrire la propagation des micro-ondes guidées [50, 3, 4]. Ces modes sont associés à des grandeurs complexes pour traduire les pertes radiatives. Leur utilisation pour former une base modale sur laquelle le champ pourra être développé induit des difficultés. Par exemple, une base de modes complexes n'est pas orthogonale et sa complétude n'est plus garantie. Par ailleurs, le calcul (analytique ou numérique) de ces modes fuyants est souvent délicat de part leur comportement particulier : alors que ces modes décroissent exponentiellement dans la direction longitudinale de propagation, ils peuvent aussi être exponentiellement croissants dans les directions transverses.

Par conséquent, avant de se pencher sur les problématiques de physique appliquée liées à l'acoustique urbaine, un certain nombre de questions théoriques et numériques, d'aspect plus fondamental, liées à l'utilisation des modes fuyants doivent être abordées. Dans ce travail, un grand effort est donc fourni pour comprendre et caractériser le comportement des modes fuyants avant d'envisager leur utilisation dans une approche modale adaptée au milieu urbain.

Ce document est organisé en 6 chapitres. Dans le premier chapitre, une revue bibliographique de la littérature en acoustique urbaine est proposée. Les méthodes proposées dans la littérature sont classées en deux grandes familles, les approches énergétiques et les approches ondulatoires. La synthèse de cette revue bibliographique permet de positionner les axes de travail de cette thèse dans le contexte de l'acoustique urbaine.

Le deuxième chapitre permet d'introduire et de définir les éléments théoriques de l'approche multimodale qui sont classiquement utilisés pour la description du champ acoustique dans les guides d'ondes.

Des simulations numériques, dans le cas de guides bidimensionnels fermés sont ensuite présentées dans le troisième chapitre. Ces simulations numériques constituent une étude préliminaire ayant deux objectifs. D'une part, cette étude permet d'appréhender les possibilités de l'approche

modale dans ces cas simples où les modes sont connus analytiquement, d'autre part, elle permet d'étudier certains effets de parois irrégulières sur le champ acoustique.

Le quatrième chapitre présente une approche modale de la propagation dans un guide tridimensionnel, ouvert et uniforme. Dans cette approche, les modes propres de la section transverse vue comme une cavité rectangulaire ouverte sont calculés numériquement. Ils sont ensuite utilisés pour reconstruire le champ acoustique produit par une source à l'entrée du guide. L'approche présentée dans ce chapitre permet notamment une étude approfondie du comportement et des propriétés des modes fuyants.

Le cinquième chapitre présente une approche couplée Modal - Éléments Finis (appelée Modal-FE dans la suite du document) de la propagation dans un guide tridimensionnel, ouvert et non-uniforme. Dans cette approche, les travaux montrent comment un nouveau problème de propagation dans un guide fermé peut être substitué au problème original de propagation dans un guide ouvert en utilisant des PML (Perfectly Matched Layers). Les modes sont alors calculés par la méthode des éléments finis (FEM) et la propagation le long du guide est résolue analytiquement.

A partir de l'implémentation de cette méthode Modal-FE, le sixième chapitre présente trois études menées indépendamment et inspirées de problématiques liées à l'acoustique urbaine. Sans être exhaustives, ces études permettent d'une part d'illustrer les potentialités de l'approche Modal-FE pour des applications en acoustique urbaine, d'autre part, de mettre en évidence certains phénomènes physiques intéressants.

Une conclusion générale du document dressera un bilan des travaux réalisés et proposera certaines perspectives de recherche.



# Chapitre 1

---

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE EN ACOUSTIQUE URBAINE

---

La revue bibliographique proposée dans ce chapitre concerne uniquement les méthodes théoriques et numériques pour la description de la propagation acoustique en milieu urbain. Les approches expérimentales ne sont pas ici répertoriées.

Depuis les années 1960 et plus intensément ces quinze dernières années, de nombreux auteurs ont contribué à la description de la propagation acoustique en milieu urbain soit en adaptant les approches issues de l'acoustique des salles, soit en développant de nouvelles méthodes appropriées à l'acoustique urbaine. La littérature sur le sujet permet de distinguer deux familles d'approches, les approches énergétiques et les approches ondulatoires. Même si cette classification est très usuelle en acoustique urbaine, elle permet de dresser un spectre détaillé des principes, intérêts et limitations des méthodes retrouvées dans la littérature. Une synthèse de cette revue bibliographique permet en fin de chapitre de positionner dans le contexte de l'acoustique urbaine les motivations des travaux présentés de ce document.

### 1.1 Les modèles énergétiques

#### 1.1.1 Théorie classique de la réverbération

Cette approche énergétique provient des tous premiers travaux réalisés en acoustique des salles par Sabine [69] au début du *XX<sup>eme</sup>* siècle. Le principe fondamental de la théorie est de décomposer le champ sonore total comme la somme d'un champ direct et d'un champ réverbéré.

Au voisinage de la source, le champ direct est dominant. Cette composante du champ décroît ensuite avec la distance à la source (6dB par doublement de distance pour une source ponctuelle en espace libre). Au delà d'une certaine distance à la source appelée rayon de réverbération, les multiples réflexions dans l'enceinte forment un champ diffus dont le niveau est indépendant de la distance à la source.

Cette théorie permet notamment la description temporelle du champ sonore. En régime impulsionnel ou après l’extinction d’une source de bruit, le niveau montre une décroissance logarithmique linéaire dépendant du rapport entre le volume de l’enceinte et son absorption aux parois. Le temps de réverbération peut ainsi être défini pour caractériser le comportement acoustique de la salle. Il existe plusieurs définitions du temps de réverbération, le plus connu étant le  $Tr_{60}$  correspondant au temps de décroissance de l’énergie sonore de 60dB.

Les limitations de cette approche classique restreignent son utilisation à des enceintes de géométrie proche d’une géométrie parallélépipédique, pour des milieux de propagation uniformes et faiblement absorbants. Par ailleurs, l’hypothèse de champ diffus reste souvent non vérifiée.

L’application de la théorie classique de la réverbération au milieu urbain est délicate dans la mesure où les multiples ouvertures du domaine de propagation empêchent la définition du volume de l’enceinte. Toutefois, les multiples réflexions aux façades et l’encombrement provoqué par le mobilier urbain créent un phénomène de réverbération. Pour contourner ce problème, le domaine semi-clos peut éventuellement être approximé par un domaine clos en délimitant artificiellement le domaine de propagation à hauteur des bâtiments [80] formant la rue.

### 1.1.2 Méthode des sources images

Dans cette méthode basée sur les concepts de l’acoustique géométrique [1, 41, 47, 72], la réflexion sur une paroi d’une onde incidente provenant de la source est simulée par une source secondaire image de la source primaire par rapport à la surface de réflexion. La source image est construite par symétrie de la source primaire par rapport à la paroi où la réflexion a lieu. La prise en compte des réflexions successives aux parois donne lieu à la construction de sources images d’ordres supérieurs. Ainsi, l’ordre des sources images correspond au nombre maximal de réflexions subies par une onde prise en compte. Ce paramètre choisi est donc déterminant pour la précision des résultats. Les effets d’absorption des parois sont traduits par une diminution de l’amplitude des sources images proportionnelle au coefficient d’absorption. L’énergie sonore totale en un point du domaine est obtenue en sommant les contributions de toutes les sources images.

La méthode des sources images a été utilisée dès les années 60 dans une rue en “U” pour distinguer le champ direct rayonné par une source du champ réverbéré occasionné par les réflexions aux façades [78]. La méthode a été ensuite étendue quelques années plus tard à l’étude d’un réseau de rues [70, 43, 19](un quartier). Les sources images traitant uniquement les réflexions spéculaires, une approche couplée associant un modèle de champ diffus à la méthode des sources images [14] a été proposée puis étendue au cas de surfaces rugueuses [11, 79]. Un modèle cohérent de sources images a également été proposé [46] pour prendre en compte les relations de phases entre les sources images.

Cette méthode des sources images a donc été beaucoup utilisée dans le cadre de l’acoustique urbaine. Néanmoins, elle reste applicable pour des géométries relativement simples pour

lesquelles la détermination de la position des sources images est aisée. Dans le cas de géométries plus complexes, les sources images doivent être déterminées numériquement et des tests de visibilité évaluant la pertinence de la prise en compte de ces sources images doivent être opérés. Finalement, les temps de calcul pouvant devenir très longs, l'ordre maximal des sources images prises en compte reste faible devant le nombre réel de réflexions subies par les ondes.

### 1.1.3 Méthode du tir de rayons

La méthode du tir de rayons provient de l'acoustique des salles [40], et a été largement utilisée en acoustique urbaine, notamment dans les années 70 [12, 8]. Elle est implémentée dans de nombreux logiciels commerciaux de prévision des champs sonores comme par exemple Mithra ou CATT Acoustics. Cette méthode, qualifiée d'approximation haute fréquence repose sur les mêmes hypothèses que la méthode des sources images. Ainsi, la longueur d'onde doit être petite devant les dimensions du domaine et les rayons sont incohérents (interférences non prises en compte). L'énergie acoustique d'une source est distribuée sur un nombre fini de rayons se propageant de manière rectiligne dans le milieu et se réfléchissant de manière spéculaire aux parois. En un point récepteur du domaine, le niveau sonore est estimé à partir du comptage du nombre de rayons traversant un volume défini autour de ce point. La détermination de ce volume récepteur est donc d'une grande importance [26] : pour un calcul réaliste, le volume doit être comparable au volume réel du récepteur tout en permettant de compter suffisamment de rayons pour assurer une bonne résolution. Dans ces conditions, le volume récepteur est généralement une sphère centrée au point récepteur considéré. Pour approximer les réflexions diffuses aux parois du domaine, la direction d'un certain nombre de rayons réfléchis peut être déterminée de manière statistique (selon la loi de Lambert ou une loi de réflexion uniforme en général).

Notons que des méthodes hybrides associant les tirs de rayons et les sources images [76] permettent d'améliorer les temps de calcul en fonction des problèmes posés.

### 1.1.4 Méthode de radiosité

Dans la méthode de radiosité [41], les parois du domaine sont maillées et l'énergie sonore reçue par chaque élément de surface est restituée au domaine selon le principe du rayonnement de la chaleur. Les échanges d'énergie entre les éléments de surface dépendent d'un facteur de forme caractérisant la fraction d'énergie diffusée par l'élément émetteur et reçue par l'élément récepteur par propagation directe entre les deux. A l'échelle d'une salle, le bilan énergétique s'écrit par une équation intégrale dont la solution est recherchée numériquement (il n'existe pas de solution analytique) à l'aide du maillage des surfaces. Par hypothèse, la méthode de radiosité est également une approximation haute fréquence. Cette méthode a notamment été utilisée en acoustique urbaine pour étudier de nombreux effets liés à la nature diffusante du milieu urbain [34, 35, 36].

L'application de cette technique se limite à des géométries relativement simples. Les temps de calcul deviennent très longs dans le cas de parois irrégulières où la discrétisation des surfaces et

le calcul des facteurs de forme sont lourds. A l'inverse des méthodes précédentes, cette technique est appropriée pour traiter la diffusion du son mais ne prend pas en compte la réflexion spéculaire indispensable à la description de l'énergie précoce. Il peut donc être approprié de la coupler avec des tirs de rayons ou des sources images.

### 1.1.5 Approche particulière

Dans les approches particulières le champ acoustique peut être assimilé à un gaz de particules sonores appelées phonons. Le problème d'acoustique est alors ramené à un problème de dynamique de particules. Ainsi, la répartition de l'énergie sonore est directement reliée à la répartition des phonons : la densité locale d'énergie sonore est équivalente à la densité locale de phonons. Il en ressort que la principale difficulté dans la méthode est la recherche de cette densité locale de phonons.

Pour ce faire, une première méthode, numérique, dite du suivi de particules est basée sur les mêmes principes que la méthode du tir de rayon [72, 42]. Elle consiste à suivre individuellement les déplacements des particules sonores, émises depuis une source et voyageant dans le domaine étudié. Au bout d'un certain temps de calcul, la répartition spatiale des particules permet de remonter au niveau sonore par comptage des particules dans chaque maille de l'espace discrétisé.

Une deuxième méthode, analytique, consiste à calculer la répartition des particules en résolvant une équation de diffusion [58, 59] ou de transport [60, 62].

Les modèles issus de l'approche particulière permettent la description de la diffusion due à des objets encombrant le domaine d'étude de manière macroscopique. Cependant, l'influence de la géométrie et de la localisation des diffuseurs n'est pas prise en compte. Pour être appropriés, ces modèles doivent être utilisés dans le cas de domaines fortement difusants. Par ailleurs, par définition du concept de particule sonore, ces modèles sont des approximations haute fréquence et ne prennent pas en compte de la phase de l'onde.

## 1.2 Les modèles ondulatoires

### 1.2.1 Méthodes numériques de discrétisation de l'espace et du temps

Les méthodes des éléments finis (FEM) et des éléments de frontière (BEM) permettent la résolution de l'équation de propagation dans un domaine délimité dont le volume et/ou les parois sont discrétisés. En théorie, un très grand nombre de problèmes peuvent être résolus par ces méthodes. En pratique, leur utilisation pour des gammes fréquentielles étendues ou pour des géométries complexes induisent la génération de maillages très raffinés pour lesquels de très grands nombres de degrés de liberté sont nécessaires, les coûts de calculs devenant alors excessifs. Ainsi, même si ces méthodes peuvent être rencontrées dans des problèmes de propagation en espace libre [15], elles ne sont que très peu retrouvées en acoustique urbaine. En revanche, ces méthodes

peuvent être utilisées pour produire des solutions de référence permettant de valider d'autres approches.

La méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) est utilisée pour résoudre l'équation d'ondes en approximant les dérivées spatiales et temporelles par des différences finies [7]. Par nature, cette méthode peut a priori prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques participant à l'établissement d'un champ acoustique. Ainsi, des problèmes de propagation peuvent être traités dans le cas de milieux inhomogènes dans des domaines de géométrie complexe avec des conditions aux frontières particulières [29, 64]. En revanche, cette méthode nécessitant de discrétiser les dimensions spatiales et temporelle, les coûts de calcul peuvent devenir très élevés. Pour palier à ce problème, plusieurs schémas numériques d'implémentation de la méthode ont été étudiés [63]. Pour traiter des problèmes de propagation sur de longues distances, l'association de la méthode FDTD avec la méthode de l'équation parabolique [65] permet aussi de réduire ces temps de calcul et de caractériser l'influence des phénomènes météorologiques [65] pouvant être importants sur de longues distances.

Récemment, la méthode de la Transmission Line Matrix (TLM) a été adaptée à l'acoustique urbaine [27]. La TLM est une méthode numérique temporelle alternative à la FDTD. Elle provient de l'électromagnétisme et est basée sur le principe de Huyguens<sup>1</sup>. La TLM semble adaptée à la prise en compte de la plupart des phénomènes rencontrés dans la propagation acoustique en milieu extérieur. Toutefois, d'après ces récents travaux, les coûts de calcul semblent être la principale limitation.

### 1.2.2 Méthode des sources équivalentes

La méthode des sources équivalentes est une approche numérique permettant de modéliser le rayonnement acoustique d'une rue vers le ciel [24, 53]. En considérant une coupe transversale 2D d'une rue, deux domaines sont définis : l'intérieur de la rue (délimitée par le sol et les façades jusqu'à hauteur des bâtiments) et le ciel (espace semi-infini au dessus de la rue). Le problème se décompose alors en deux sous-problèmes couplés. Le champ dans la rue est obtenu par une décomposition modale et le rayonnement dans le ciel est obtenu par une intégrale de Rayleigh. Un ensemble de sources équivalentes positionnées à l'interface entre les deux sous domaines permet d'assurer la continuité du champ. Le poids de chacune des sources équivalentes est ensuite calculé en résolvant un système d'équations. Seule l'interface entre les deux sous-domaines étant maillée, les temps de calcul sont plus courts que pour les méthodes de discrétisation classiques (FEM,BEM,FDTD).

Cette méthode a notamment été utilisée pour prendre en compte des phénomènes météorologiques [52], et plus récemment pour étudier l'atténuation sonore provoquée par des matériaux absorbants placés aux façades des rues [32]. A l'heure actuelle, cette méthode est formulée uniquement dans le cas 2D (coupe transversale d'une rue). Néanmoins, en considérant la troisième

---

<sup>1</sup>Le principe de Huyguens consiste à considérer qu'un front d'ondes peut être décomposé en un ensemble de sources secondaires émettant des ondelettes sphériques elles mêmes à nouveau décomposées en un nouvel ensemble de sources du même type.



dimension invariante, cette méthode a pu être étendue au cas 3D [31] en utilisant une approche dite 2,5D [20].

### 1.2.3 Approche modale

L'approche modale est utilisée dans ce travail de thèse pour décrire la propagation acoustique dans une rue. Dans cette application, l'approche modale présente des difficultés de mise en oeuvre, notamment pour la prise en compte de l'ouverture de la rue sur le ciel mais elle présente l'avantage de pouvoir considérer le caractère ondulatoire du son et ainsi décrire les relations de phase à l'origine des phénomènes d'interférence. Après quelques généralités sur l'approche modale et quelques précisions sur son utilisation en acoustique urbaine dans ce paragraphe, les principales notions et le formalisme général de cette approche seront définis au chapitre qui suit.

La décomposition du champ acoustique sur les modes de l'enceinte étudiée est une méthode couramment utilisée pour la recherche de solutions à l'équation d'ondes dans les espaces clos. Cette approche est applicable pour des géométries simples de l'espace étudié (de type rectangulaire) pour permettre le calcul de la base modale. Par ailleurs, les longueurs d'ondes doivent être de l'ordre de grandeur des dimensions caractéristiques du domaine pour limiter le nombre de modes à prendre en compte. Appliquée dans les guides d'ondes, cette approche est en revanche adaptée à la prise en compte d'irrégularités géométriques [55] ou physiques [6] des parois et à la prise en compte de conditions de continuité ou de rayonnement aux extrémités du guide. Une des difficultés majeures pour l'utilisation de l'approche modale en acoustique urbaine est la prise en compte de l'ouverture de la rue sur le ciel. Pour s'affranchir de ce problème Bullen et Fricke [10] ont proposé un modèle 2D de la propagation acoustique dans une rue de section transversale variable définie par deux plans infinis parfaitement rigides. Ils ont ensuite étendu leur modèle pour traiter le cas d'une jonction entre deux rues [9].

La complexité des géométries rencontrées en milieu urbain rend l'implémentation de l'approche modale peu évidente. Ainsi, très peu de travaux basés sur l'approche modale ont été publiés en acoustique urbaine.

## 1.3 Synthèse de la littérature

Les approches théoriques et numériques de modélisation des champs acoustiques en milieu urbain ont été rappelées dans ce chapitre. Le bilan de cette littérature révèle certaines limitations retrouvées couramment dans l'ensemble des méthodes.

Tout d'abord, les approches disponibles ne sont valides individuellement que dans une bande fréquentielle donnée. Typiquement, les approches énergétiques sont valides en haute fréquence alors que les approches ondulatoires sont restreintes aux basses fréquences définies usuellement pour  $f < 500Hz$  en acoustique urbaine. Ensuite, pour des raisons pratiques de coût de calcul, les méthodes sont très souvent utilisées dans le cas de problèmes 2D ce qui restreint le réalisme des situations traitées. Peu d'études ont porté sur des problèmes 3D.

Finalement, il en ressort que les approches disponibles sont souvent spécifiques à des problèmes particuliers d'acoustique urbaine. Il apparaît donc qu'il est très difficile, à l'heure actuelle, d'obtenir une approche suffisamment générale pour traiter un problème d'acoustique urbaine quelconque, quelle que soit la géométrie du lieu, la bande fréquentielle choisie et qui puisse intégrer l'ensemble des phénomènes physiques participant à l'établissement d'un champ acoustique.

Par ailleurs, au travers du développement de toutes ces méthodes, les auteurs ont pu déterminer les caractéristiques essentielles du milieu urbain dont la prise en compte est indispensable pour modéliser correctement les champs acoustiques. Ces caractéristiques sont la diffusion par l'encombrement et les parois des domaines d'étude, l'absorption acoustique des matériaux de construction, l'atténuation atmosphérique, les phénomènes météorologiques (vent, turbulence, gradient de température) et la présence d'ouvertures (ouverture des rues sur le ciel, jonction de rues). Souvent, l'influence de ces paramètres est étudiée indépendamment et il apparaît encore très difficile de hiérarchiser leur importance (ce qui ne permet pas de négliger tel ou tel de ces paramètres devant un autre). Les phénomènes d'absorption, de diffusion et d'atténuation ont été les phénomènes les plus étudiés. Les effets météorologiques ont été étudiés plus récemment et sont aujourd'hui l'objet de recherches actuelles. Les ouvertures dans le tissu urbain et notamment l'ouverture des rues sur le ciel ont paradoxalement suscité très peu d'études spécifiques, et des solutions simplifiées, incomplètes, sont généralement employées.

### 1.3.1 Axes de travail dégagés

Devant ce bilan de la littérature, il apparaît que de nombreux travaux sont encore à entreprendre pour approfondir la compréhension des champs acoustiques en milieu urbain.

Nous distinguons notamment l'intérêt d'améliorer les connaissances liées à l'influence de l'ouverture des rues sur le ciel. Cette caractéristique géométrique forte du milieu urbain, milieu partiellement borné et ouvert sur un domaine semi infini, entraîne une concurrence entre les effets de confinement des ondes dans les rues et les effets de rayonnement des ondes vers le ciel.

Pour traiter ces deux aspects concurrents lors de la propagation, il sera indispensable de considérer d'une part la largeur finie des rues entre les façades des bâtiments et la hauteur finie des rues au delà de laquelle les ondes ne sont plus guidées. Les domaines d'étude devront donc nécessairement être tridimensionnels. Ainsi, pour modéliser la forme typiquement allongée des rues, des géométries de type guides d'ondes seront choisies. L'approche modale étant classiquement utilisée pour l'étude des guides d'ondes, elle est ici retenue et adaptée au cas des guides d'ondes ouverts.

Les enjeux de ces travaux sont donc d'une part de développer des modèles ondulatoires permettant de décrire la propagation acoustique dans les guides ouverts et d'autre part d'utiliser ces modèles dans le cas urbain pour mieux appréhender l'influence de l'ouverture des rues sur le ciel. Pour aborder ce problème, les travaux se focalisent sur le cas d'une seule rue. Aussi, la description fine des phénomènes ondes guidées / ondes rayonnées sera privilégiée au détriment

d'une description détaillée des géométries rencontrées en milieu urbain.

# Chapitre 2

---

## APPROCHE MULTIMODALE DE LA PROPAGATION EN MILIEU GUIDÉ

---

Ce chapitre a pour vocation d'introduire et de définir les éléments théoriques de l'approche multimodale classiquement utilisés pour la description du champ acoustique dans les guides d'ondes. L'attention sera notamment portée sur la notion de mode guidé.

Des rappels sur la formulation de l'approche modale sont proposés dans la première section de ce chapitre. Dans la deuxième section, un formalisme vectoriel est défini en vue d'être utilisé dans la suite de ce document. Les troisième et quatrième sections présentent l'étude de la propagation dans les guides de section variable à partir de la méthode de l'impédance ramenée [55, 2] et de la matrice de diffusion.

### 2.1 Propagation multimodale dans les guides cylindriques

Les principes de base de l'approche modale dans les guides cylindriques sont ici présentés à partir des équations générales faisant intervenir les principales grandeurs utiles.

#### 2.1.1 Equations dans le cas général

Dans un guide quelconque, en considérant les hypothèses de l'acoustique linéaire, adiabatique, dans un fluide au repos non visqueux et sans conductivité thermique, la pression acoustique  $p$  et la vitesse  $\vec{v}$  satisfont aux équations de conservation de la quantité de mouvement (Euler)

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0, \quad (2.1)$$

et de conservation de la masse

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.2)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide et  $c$  la célérité du son. Les équations (2.1) et (2.2) permettent d'écrire l'équation d'ondes dans le domaine temporel et en dehors des sources :

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = 0. \quad (2.3)$$

De même, dans le domaine fréquentiel, pour une convention temporelle  $e^{-j\omega t}$  l'équation d'ondes s'écrit

$$(\Delta + k^2)p = 0, \quad (2.4)$$

avec  $k = \omega/c$  le nombre d'onde. En supposant les parois du guide rigides, les conditions aux limites s'écrivent

$$\partial_n p = 0, \quad (2.5)$$

avec  $\partial_n$  la dérivée normale à la paroi.

Dans les systèmes de coordonnées usuels (cartésien, cylindrique, sphérique), l'équation (2.4) est séparable. De plus, si dans un système de coordonnées  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  les conditions aux limites s'appliquent sur des surfaces  $\xi_n = \text{constante}$ , le problème (2.4)-(2.5) est dit séparable. Ainsi, des solutions élémentaires s'écrivent sous la forme :

$$p_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_i(\xi_1)g_i(\xi_2)h_i(\xi_3), \quad (2.6)$$

où  $\xi_2$  et  $\xi_3$  sont les coordonnées transversales.  $\phi_i(\xi_2, \xi_3) = g_i(\xi_2)h_i(\xi_3)$  vérifie alors l'équation aux valeurs propres

$$\Delta_{\perp} \phi_i = -\alpha_i^2 \phi_i. \quad (2.7)$$

La condition aux parois (2.5) impose des valeurs propres  $-\alpha_i^2$  négatives et discrètes. La résolution du problème transverse permet donc de définir une infinité de modes  $\phi_i(\xi_2, \xi_3)$  et les fonctions  $f_i(\xi_1)$  sont solutions de l'équation différentielle

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + k_i^2 \right) f_i = 0, \quad (2.8)$$

avec

$$k_i^2 = k^2 - \alpha_i^2, \quad (2.9)$$

Cette relation de dispersion (2.9) fait apparaître deux types de modes. D'une part les modes propagatifs pour lesquels  $k_i^2 > 0$ , d'autre part les modes évanescents pour lesquels  $k_i^2 < 0$ . Chaque mode est ainsi caractérisé par une fréquence de coupure (dont le nombre d'onde est  $\alpha_i$ ) et seuls les modes dont la fréquence de coupure est inférieure à la fréquence de la source sont propagatifs dans le guide. Les autres, dits évanescents, décroissent exponentiellement.

Les solutions de l'équation (2.8) s'écrivent  $f_i = e^{\pm jk_i \xi_1}$ , et les solutions élémentaires (2.6) du problème s'expriment alors sous la forme

$$p_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{\pm jk_i \xi_1} \phi_i(\xi_2, \xi_3), \quad (2.10)$$

avec  $\Re\{k_i\} > 0$  et  $\Im\{k_i\} > 0$ . Au final, la solution complète du problème (2.4)-(2.5) peut être obtenue par combinaison linéaire des solutions élémentaires :

$$p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_i \left( a_i e^{j k_i \xi_1} + b_i e^{-j k_i \xi_1} \right) \phi_i(\xi_2, \xi_3), \quad (2.11)$$

où les constantes  $a_i$  et  $b_i$  peuvent être déterminées par des conditions aux extrémités du guide (conditions de rayonnement, continuité, sources, ...).

### 2.1.2 Exemple du guide à section rectangulaire

Dans ce cas simple illustré en figure 2.1, le système cartésien est le plus adapté pour exprimer les conditions aux parois rigides en  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_2 = l_2$ ,  $\xi_3 = 0$  et  $\xi_3 = l_3$ . Les modes transversaux sont les fonctions orthogonales

$$\phi_{mn}(y, z) = \sqrt{2 - \delta_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi\xi_2}{l_2}\right) \cos\left(\frac{n\pi\xi_3}{l_3}\right) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (2.12)$$

( $\delta_{mn}$  est le symbole de kronecker) dont les valeurs propres associées sont

$$\alpha_{mn}(y, z) = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_3}\right)^2}. \quad (2.13)$$

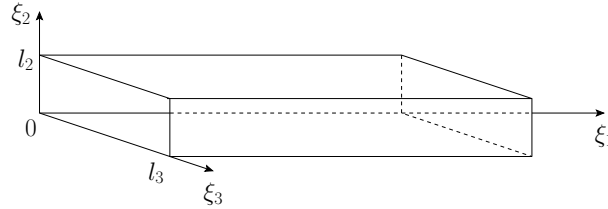


FIG. 2.1 – Guide cylindrique de section transversale rectangulaire

Le champ dans le guide est ensuite calculé en sommant tous les modes :

$$p(x, y, z) = \sum_{mn} \left( a_{mn} e^{j k_{mn} \xi_1} + b_{mn} e^{-j k_{mn} \xi_1} \right) \sqrt{2 - \delta_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi\xi_2}{l_2}\right) \cos\left(\frac{n\pi\xi_3}{l_3}\right) \quad (2.14)$$

avec  $k_{mn} = k^2 - \alpha_{mn}^2$ .

## 2.2 Le formalisme vectoriel

Sur une section du guide, les solutions  $\phi_i$  du problème transversal forment une base orthogonale complète sur laquelle la pression et la vitesse peuvent être projetées. Les équations de conservation sont alors reformulées en faisant apparaître les vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{U}$  des composantes modales de la pression et de la vitesse longitudinale.

Les développements suivants de la pression  $p$  et de la vitesse longitudinale  $u$  sur la base des fonctions propres  $\psi_i$ ,

$$p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_i P_i(\xi_1) \phi_i(\xi_2, \xi_3) = {}^t \vec{\phi} \vec{P}, \quad (2.15)$$

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_i U_i(\xi_1) \phi_i(\xi_2, \xi_3) = {}^t \vec{\phi} \vec{U}, \quad (2.16)$$

sont introduits dans les équations de conservation (2.1) et (2.2). En éliminant les composantes transverses de la vitesse il vient :

$$j\omega {}^t \vec{\phi} \vec{U} = \frac{1}{\rho} {}^t \vec{\phi} \vec{P}' \quad (2.17)$$

$$-\frac{j\omega}{\rho c^2} {}^t \vec{\phi} \vec{P} = {}^t \vec{\phi} \vec{U}' - \frac{1}{j\omega \rho} \Delta_{\perp} {}^t \vec{\phi} \vec{P}. \quad (2.18)$$

où  $\Delta_{\perp}$  est le Laplacien transverse et le symbole ' désigne la dérivée par rapport à  $\xi_1$ .

Si les fonctions propres sont choisies normées de telle sorte que la condition d'orthogonalité s'écrit

$$\int_S \phi_i \phi_j dS = S \delta_{ij}, \quad (2.19)$$

où  $S$  est l'aire de la section du guide, la projection de (2.17) et (2.18) sur les fonctions propres donne les équations

$$\vec{P}' = jk\rho c \vec{U}, \quad (2.20)$$

$$\vec{U}' = \frac{1}{jk\rho c} K \vec{P}, \quad (2.21)$$

régissant l'évolution des variables  $\vec{P}$  et  $\vec{U}$  suivant  $\xi_1$ . La matrice  $K$  traduit la relation de dispersion  $K_{ij} = (k^2 - \alpha_i^2) \delta_{ij}$ . Le guide étant cylindrique, il n'y a pas de couplage entre les modes qui vérifient chacun une équation unidimensionnelle simple

$$P_i'' + (k^2 - \alpha_i^2) P_i = 0. \quad (2.22)$$

### 2.2.1 Résolution dans le cas d'un guide de longueur finie

En se plaçant dans le cas d'un guide de longueur finie (figure 2.2), les composantes  $P_i = a_i e^{jk_i \xi_1} + b_i e^{-jk_i \xi_1}$  du vecteur  $\vec{P}$  peuvent être trouvées à partir des conditions aux extrémités du guide.

Par exemple, une condition de source peut être définie à l'entrée du guide ( $\xi_1 = 0$ ) comme une distribution de pression acoustique donnée par une fonction  $p_0$  des coordonnées d'espace telle que  $p(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) = p_0(\xi_2, \xi_3)$ . Les composantes de  $\vec{P}(0)$  peuvent alors être déterminées directement en projetant cette condition de source sur la base des  $\{\phi_i\}$ .

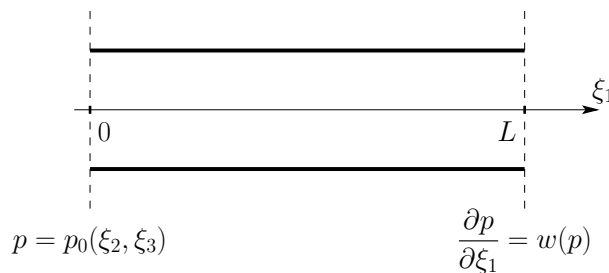


FIG. 2.2 – Guide d’ondes cylindrique de longueur finie. Des conditions aux extrémités sont définies à l’entrée et la sortie du guide.

A la sortie du guide ( $\xi_1 = L$ ), une condition de rayonnement peut être définie par une fonction  $w$  telle que  $(\partial p / \partial \xi_1)_{\xi_1=L} = w(p)$ . En introduisant la matrice impédance généralisée<sup>1</sup>  $Z$ , définie par  $\vec{P} = Z\vec{U}$  (la matrice admittance est alors  $Y = Z^{-1}$ ), cette condition de rayonnement est déterminée par la matrice  $Z(L)$  satisfaisant  $\vec{P}(L) = Z(L)\vec{U}(L)$ . L’impédance à l’entrée du guide peut être écrite en fonction de l’impédance de sortie  $Z(L)$  comme

$$Z(0) = (I - \delta)(I + \delta)^{-1}Z_c, \quad (2.23)$$

avec  $\delta = D(L)(Z_c + Z(L))^{-1}(Z_c - Z(L))D(L)$ ,  $D(x)$  une matrice diagonale donnée par  $D_i(x) = \exp(jk_i x)$ ,  $Z_c$  la matrice admittance caractéristique du guide donnée par  $Z_{ci} = \rho_0 c_0 k / k_i$ .

A partir des conditions aux deux extrémités du guide, les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  des coefficients  $\{a_i\}$  et  $\{b_i\}$  peuvent alors être calculés par

$$\vec{a} = (1 - \delta)^{-1}\vec{P}(0), \quad (2.24)$$

$$\vec{b} = -\delta(1 - \delta)^{-1}\vec{P}(0), \quad (2.25)$$

et le champ est à présent connu en tout point du guide.

## 2.3 Propagation multimodale dans les guides de section variable

Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, les irrégularités de façade des rues peuvent être prises en compte par des variations de la section transverse du guide. Dans ce document, seules les discontinuités de section seront étudiées (figure 2.3(a)). Ainsi, le cas des sections continûment variables pourra alors être approximé par une section constante par morceaux (figure 2.3(b)). Pour traiter directement le cas des sections continûment variables les équations doivent être écrites en considérant des segments droits de longueur infinitésimale [37].

La méthode de la matrice impédance permet de résoudre des problèmes de propagation dans des guides complexes (variations de section [55, 2] ou d’impédance des parois [6], guides courbes [21]). Cette méthode est ici rappelée dans le cas d’une discontinuité de section pour être ensuite appliquée dans le cas des guides de section constante par morceaux.

<sup>1</sup>Pour une onde plane, l’impédance est une grandeur scalaire classiquement définie comme le rapport entre pression et vitesse acoustiques. Dans l’approche modale, la matrice impédance  $Z$  est la généralisation pour chaque mode de l’impédance en ondes planes.



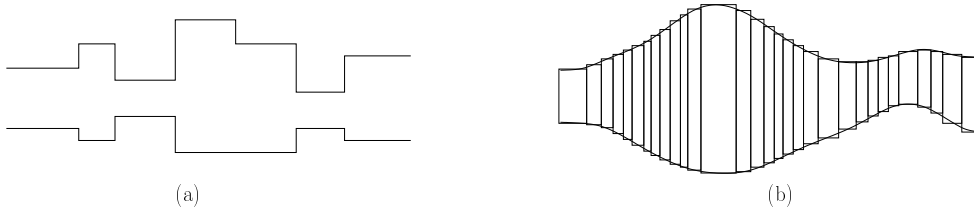


FIG. 2.3 – Guides de section variable : (a) discontinuités de section ; (b) section continûment variable approximée par une section constante par morceaux

### 2.3.1 Étude d'une discontinuité

Lorsqu'un guide de section variable peut être modélisé par une succession de segments droits comme sur la figure 2.3, l'approche exposée précédemment peut être appliquée à chaque segment élémentaire composant le guide d'ondes. Les solutions trouvées sont raccordées aux discontinuités en appliquant les lois de conservation fondamentales. La méthode proposée par Roure [68] est ici donnée.

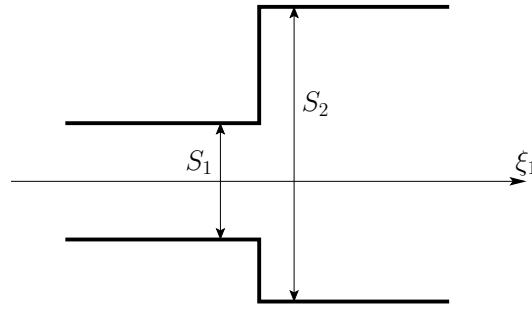


FIG. 2.4 – Deux segments de section différente raccordés forment ici une expansion

Au raccordement entre deux éléments de section différente comme l'expansion brusque de la figure 2.4, l'écriture de la continuité de la pression et de la vitesse sur la section  $S_1$  ainsi que la nullité de la vitesse longitudinale sur l'expansion  $S_2 \setminus S_1$  est traduite par

$$\vec{P}^{(1)} = F\vec{P}^{(2)}, \quad (2.26)$$

$$a {}^tF\vec{U}^{(1)} = \vec{U}^{(2)}, \quad (2.27)$$

où  $a = S_1/S_2$  et  $F$  est définie par

$$F_{ij} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \phi_i^{(1)} \phi_j^{(2)} dS. \quad (2.28)$$

Les fonctions  $\phi_i^{(p)}$  avec  $p = 1, 2$  sont les fonctions propres du segment droit de section  $S_p$  de la figure 2.4. En combinant les équations (2.26) et (2.27), l'impédance est raccordée par la relation

$$Z^{(1)} = aFZ^{(2)} {}^tF. \quad (2.29)$$

### 2.3.2 Généralisation au cas du guide irrégulier

Dans le cas d'un guide dont la section est constante par morceaux, la méthode de résolution par impédance ramenée, représentée en figure 2.5, se déroule en deux phases successives. Dans un premier temps, L'impédance déterminée en aval du guide est ramenée jusqu'en amont du guide en utilisant alternativement l'équation (2.23) dans les segments droits et l'équation (2.29) aux discontinuités. A chaque segment droit d'indice  $p$  sont alors associées une impédance d'entrée  $Z_e^{(p)}$  et de sortie  $Z_s^{(p)}$ .

La deuxième phase de la méthode de résolution consiste à reconstruire le champ dans le guide. A partir de la condition de source donnée à l'amont du guide, les valeurs des composantes modales de  $\vec{P}$  peuvent à leur tour être calculées le long du guide en utilisant alternativement les équations (2.24) et (2.25) dans les segments droits et l'équation (2.26) aux discontinuités. Connaissant l'impédance tout au long du guide le champ de vitesse longitudinale peut également être calculé à partir de la définition de la matrice impédance.

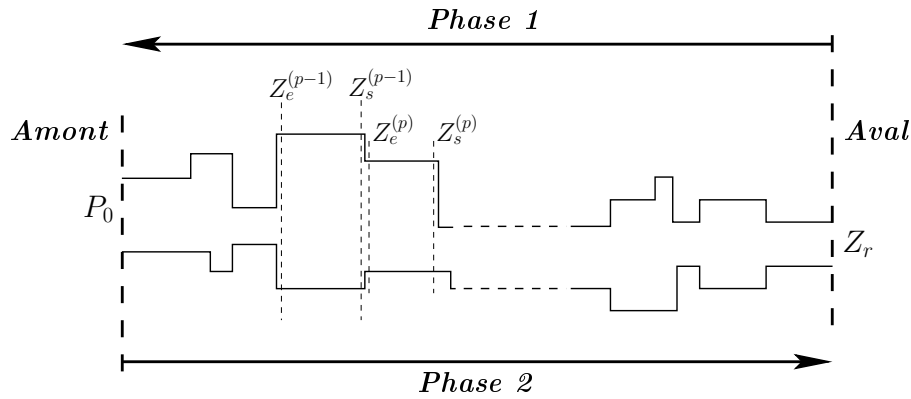


FIG. 2.5 – Représentation de la méthode impédance ramenée. Lors de la première phase, l'impédance de rayonnement  $Z_r$  est ramenée d'aval en amont. A chaque segment d'indice ( $p$ ) sont associées une impédance d'entrée  $Z_e^{(p)}$  et de sortie  $Z_s^{(p)}$ . Lors de la deuxième phase, le champ est calculé d'amont en aval à partir de la condition de source  $\vec{P}_0$  et des impédances le long du guide.

## 2.4 Matrice de diffusion

Sans reconstruire le champ acoustique en tout point, la matrice de diffusion permet de caractériser complètement la diffusion des ondes dans le guide. Sur le principe, la matrice de diffusion peut être définie pour tout type d'irrégularités physiques ou géométriques dans le domaine de propagation et à ses frontières. Elle permet de quantifier les couplages entre les modes au passage de ces irrégularités.

Dans les parties de ce document liées à l'utilisation de l'approche modale pour l'acoustique urbaine, seule la diffusion par les irrégularités de façade sera abordée. Le calcul de la matrice de diffusion est donc ici présenté pour traiter des irrégularités géométriques aux parois du guide

(figure 2.6). Après l'avoir définie, la matrice de diffusion sera calculée dans le cas d'un guide de section constante par morceaux. Ce calcul nécessitera la détermination de la matrice de diffusion dans les cas simples d'un segment droit et d'une expansion (ou d'un rétrécissement) brusque.

### 2.4.1 Définition de la matrice de diffusion

Le guide d'ondes de la figure 2.6 présente des parois irrégulières sur une certaine longueur. Des ondes entrantes et sortantes peuvent être définies en amont (Région I) et en aval (Région II) de cet objet diffusant.

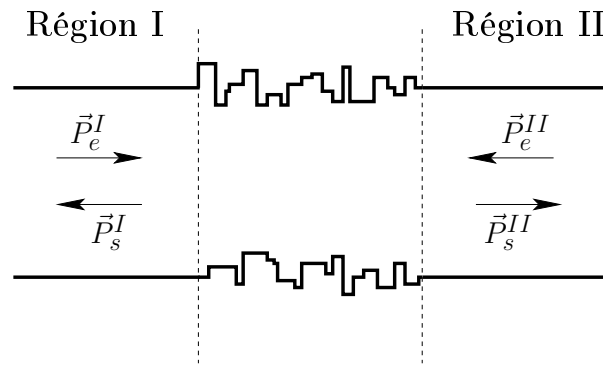


FIG. 2.6 – Irrégularités géométriques aux parois d'un guide et représentation des ondes entrantes et sortantes.

Pour décrire la diffusion par cette portion de guide irrégulière, la matrice de diffusion  $S$  relie entre elles ces ondes entrantes et sortantes par

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_s^I \\ \vec{P}_s^{II} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \vec{P}_e^I \\ \vec{P}_e^{II} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} R^I & T^{II} \\ T^I & R^{II} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

où  $R^I$ ,  $T^I$ ,  $R^{II}$  et  $T^{II}$  sont les matrices réflexion et transmission respectivement vues de l'amont et de l'aval de l'objet diffusant.  $\vec{P}_e^I$ ,  $\vec{P}_s^I$ ,  $\vec{P}_e^{II}$  et  $\vec{P}_s^{II}$  sont les vecteurs des composantes modales des ondes entrantes et sortantes respectivement en amont et en aval de l'objet.

Pour tout profil d'irrégularités de parois, la matrice de diffusion contient donc toute l'information sur la redistribution modale de l'énergie acoustique se propageant dans le guide.

### 2.4.2 Calcul de $S$ pour un guide de section constante par morceaux

Dans le cas d'un guide de section constante par morceaux, les parois peuvent être décomposées en une distribution de segments droits et de discontinuités (figure 2.7). Or, la matrice de diffusion de ces "formes élémentaires" peut être obtenue analytiquement très simplement et la

matrice  $S_{tot}$  du guide peut être calculée à partir de ces matrices élémentaires.

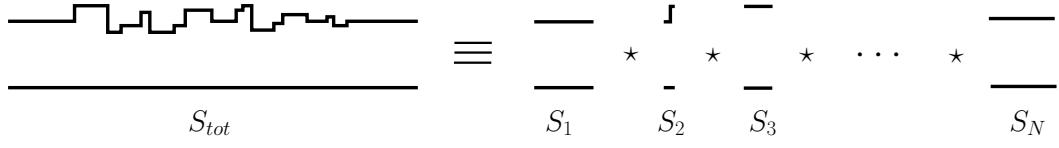


FIG. 2.7 – Dans le cas d'un guide de section constante par morceaux, la paroi irrégulière est une distribution de segments droits et de discontinuités.

La matrice de diffusion  $S_{tot}$  de la distribution montrée en figure 2.7 contenant  $N$  formes élémentaires s'obtient par  $N - 1$  itérations d'une opération matricielle  $\star$  :

$$S_{tot} = S_1 \star S_2 \star S_3 \star \dots \star S_N, \quad (2.32)$$

où les matrices  $S_n$  avec  $n \in [1, N]$  sont alternativement les matrices  $S_e$  d'une expansion (ou  $S_r$  d'un rétrécissement) et  $S_d$  d'un segment droit (ces matrices sont données plus bas).

Pour définir l'opérateur  $\star$ , considérons l'association de deux objets diffusants A et B (figure 2.8) dont les matrices de diffusion sont  $S_A$  et  $S_B$ .

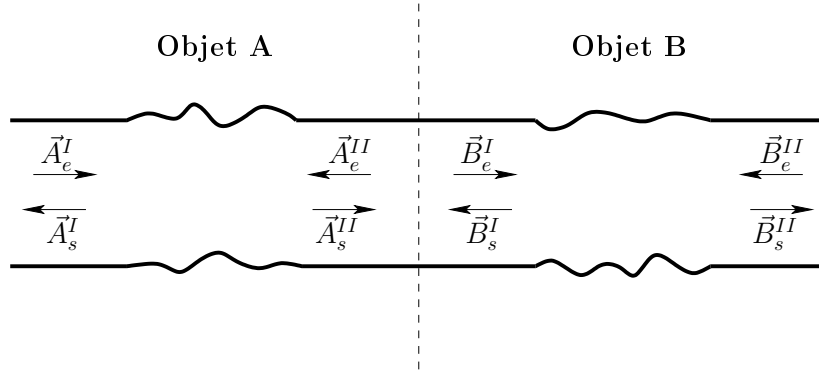


FIG. 2.8 – Description d'une paroi irrégulière par deux objets diffusants.

La matrice de diffusion  $S_{AB}$  de l'association des objets A et B se définit comme

$$\begin{pmatrix} \vec{A}_s^I \\ \vec{B}_s^{II} \end{pmatrix} = S_{AB} \begin{pmatrix} \vec{A}_e^I \\ \vec{B}_e^{II} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

et peut se calculer comme

$$S_{AB} = \begin{bmatrix} R_{AB}^I & T_{AB}^{II} \\ T_{AB}^I & R_{AB}^{II} \end{bmatrix} = S_A \star S_B, \quad (2.34)$$

où l'opérateur  $\star$  désigne une opération matricielle, obtenue en considérant  $A_s^{II} = B_e^I$  et  $A_e^{II} = B_s^I$  :

$$\begin{aligned} R_{AB}^I &= R_A^I + T_A^{II} (I_d - R_B^I R_A^{II})^{-1} R_B^I T_A^I \\ T_{AB}^I &= T_B^I (I_d - R_A^{II} R_B^I)^{-1} T_A^I \\ R_{AB}^{II} &= R_B^{II} + T_B^I (I_d - R_A^{II} R_B^I)^{-1} R_A^{II} T_B^{II} \\ T_{AB}^{II} &= T_A^{II} (I_d - R_B^I R_A^{II})^{-1} T_B^{II}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pour compléter ce calcul de la matrice de diffusion d'un guide de section constante par morceaux, la matrice de diffusion dans les cas élémentaires d'un segment droit et d'une expansion brusque sont données dans les deux paragraphes suivants.

### Cas du segment droit

Même si un segment droit n'est pas un objet diffusant au sens où il ne provoque pas de redistribution modale, il est possible de lui associer une matrice de diffusion  $S_d$  très simple. En effet, pour ce cas élémentaire, tous les termes des matrices de réflexion  $R^I$  et  $R^{II}$  sont nuls et les termes des matrices de transmission  $T^I$  et  $T^{II}$  sont des termes propagateurs. La matrice  $S_d$  d'un segment droit de longueur  $l$  s'écrit donc

$$S_d = \begin{bmatrix} R_d^I & T_d^{II} \\ T_d^I & R_d^{II} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_{di}^I & = R_{di}^I = 0 \\ T_{di}^I & = e^{+jk_i l} \\ T_{di}^{II} & = e^{-jk_i l} \end{cases} \quad (2.36)$$

### Cas de l'expansion brusque

Considérons l'expansion brusque de la figure 2.4 vers laquelle se propage une onde incidente  $p_i$  donnant lieu à une onde réfléchie  $p_r$  et une onde transmise  $p_t$ . Les équations de continuité du champ sur  $S_1$ ,  $p_i = p_r + p_t$  et  $\partial_x(p_i + p_r) = \partial_x p_t$  ainsi que la condition de Neuman sur  $S_2 - S_1$ ,  $\partial_x p_t = 0$ , donnent :

$$\vec{P}_i + \vec{P}_r = F\vec{P}_t, \quad (2.37)$$

$${}^tFY^{(1)}(\vec{P}_i - \vec{P}_r) = Y^{(2)}\vec{P}_t, \quad (2.38)$$

où la matrice  $F$  est définie par l'équation (2.28). Sachant que  $\vec{P}_r = R^I\vec{P}_i$  et  $\vec{P}_t = T^I\vec{P}_i$ , ces équations permettent d'exprimer les matrices de réflexion et de transmission pour une onde se propageant dans les  $x$  croissants comme

$$\begin{aligned} R_e^I &= -({}^tFY^{(1)})^{-1}(Y^{(2)} - {}^tFY^{(1)}F)(Y^{(2)} + {}^tFY^{(1)}F)^{-1} {}^tFY^{(1)}, \\ T_e^I &= 2(Y^{(2)} + {}^tFY^{(1)}F)^{-1} {}^tFY^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pour une onde se propageant dans les  $x$  décroissants, les équations de continuité donnent

$$F(\vec{P}_i + \vec{P}_r) = \vec{P}_t, \quad (2.40)$$

$$Y^{(2)}(\vec{P}_i - \vec{P}_r) = {}^tFY^{(1)}\vec{P}_t, \quad (2.41)$$

et de la même manière les matrices de réflexion et de transmission pour une onde se propageant dans les  $x$  décroissants s'écrivent

$$\begin{aligned} R_e^{II} &= (Y^{(2)} + {}^tFY^{(1)}F)^{-1}(Y^{(2)} - {}^tFY^{(1)}F), \\ T_e^{II} &= 2F(Y^{(2)} + {}^tFY^{(1)}F)^{-1}Y^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

La matrice de diffusion  $S_r$  d'un rétrécissement brusque se déduit du cas de l'expansion brusque :

$$S_r = \begin{bmatrix} R_e^{II} & T_e^I \\ T_e^{II} & R_e^I \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Les matrices  $S_e$ ,  $S_r$  et  $S_d$  étant connues analytiquement, la matrice  $S_{tot}$  sera obtenue pour des temps de calculs très faibles même pour un grand nombre  $N$  de formes élémentaires.

## 2.5 Conclusion

Ces rappels concernant l'approche multimodale en guide d'ondes ont permis de mettre en évidence ses principales propriétés. D'une part, l'approche modale est particulièrement adaptée pour la prise en compte des inhomogénéités physiques ou géométriques aux parois du guide considéré. D'autre part, elle est également appropriée pour modéliser les conditions aux extrémités du guide comme les conditions de source en amont ou les conditions de rayonnement en aval du guide. Ces deux aspects permettent de relier explicitement les champs acoustiques calculés aux propriétés géométriques et physiques du guide d'ondes. Ainsi, comme nous l'avons vu au travers du calcul de la matrice de diffusion, l'approche modale permet une caractérisation intrinsèque des guides étudiés, sans tenir compte de la présence de sources. Par ailleurs, l'approche modale étant une méthode ondulatoire, les effets de relation de phase comme les phénomènes interférentiels sont finement décrits. Enfin, l'approche modale permettant la résolution analytique de l'équation d'ondes, les temps de calculs occasionnés restent très faibles.

Le principal point clé de l'approche modale est le calcul de la base de modes sur laquelle le champ peut être développé. Dans certains cas simples de guides fermés comme celui du guide à section rectangulaire, les modes peuvent être aisément obtenus analytiquement. Dans d'autres cas, comme celui des guides ouverts, ce calcul doit être résolu numériquement. Ces aspects seront notamment présentés dans les chapitres 4 et 5.



## Chapitre 3

---

# ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DE LA PROPAGATION DANS DES GUIDES IRRÉGULIERS 2D

---

Pour décrire le champ acoustique en milieu urbain par une méthode modale, la rue est considérée comme un guide d'ondes ouvert 3D. Ce problème pose deux difficultés essentielles : d'une part la prise en compte des irrégularités de façade par des variations de section, d'autre part la prise en compte de l'ouverture de la rue sur le ciel par l'utilisation de modes fuyants (leaky modes). Avant de traiter ce problème dans son ensemble, il est d'abord préférable de traiter séparément chacun de ces deux aspects. Dans ce chapitre, les effets des variations de section du guide sont étudiés. Cette étude préliminaire est réalisée dans le cas de guides bidimensionnels fermés de manière à obtenir très facilement les modes par résolution analytique du problème transverse. En revanche, cette approximation à deux dimensions (volontaire dans ce chapitre) est trop restrictive pour refléter la réalité. En effet, les phénomènes de pertes par rayonnement dus à l'ouverture de la rue sur le ciel provoquent une diminution progressive de l'amplitude du champ le long de la rue. Ces phénomènes d'atténuation sont illustrés par les champs expérimentaux de la figure 3.1 mesurés dans une maquette de rue à échelle réduite. Or, dans un modèle de guide 2D fermé, il y a conservation de l'énergie le long du guide. L'approche modale telle qu'elle est présentée jusqu'ici ne permet pas de prendre en compte ces pertes.

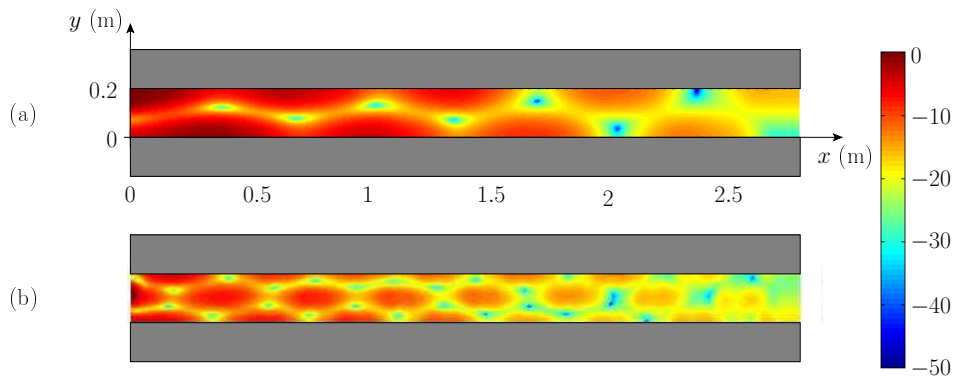


FIG. 3.1 – (a) Champ de pression porté en dB mesuré sur un plan horizontal à une hauteur  $z = 0.7$  m du sol, la source est placée au point  $(y_s, z_s) = (0.175, 0.07)$  m et la fréquence est  $f = 1000$  Hz. (b) Même mesure pour un fréquence  $f = 2000$  Hz ([67]).



Basées sur l'implémentation numérique des outils présentés dans le chapitre précédent, les simulations de ce chapitre n'ont donc pas pour but de reproduire la réalité mais d'appréhender les possibilités de l'approche modale pour étudier les effets des variations de section. Ces travaux ont été effectués lors de la première année de thèse et ont fait l'objet d'une communication [56] en septembre 2007 à l'ISRA<sup>1</sup>.

Par simplicité, une terminaison anéchoïque sera considérée en bout de guide. A l'entrée du guide, différents types de condition de source en pression seront pris en compte. Deux types de profils d'irrégularités sont traités. D'une part les distributions régulières de créneaux, d'autre part pour des distributions stochastiques de discontinuités. Les résultats sont présentés et discutés à partir de cartographies du champ de pression et de matrices de transmission.

### 3.1 Distribution régulière de créneaux

Une façade d'immeuble bordant une rue peut présenter typiquement une succession de motifs (fenêtres ou balcons par exemple) régulièrement espacés. Pour modéliser la diffusion d'une telle façade, les parois du guide peuvent alors être considérées comme une distribution régulière de créneaux de longueur  $l$ , de profondeur  $e$  et espacés d'une longueur  $l_{ic}$  (figure 3.2).

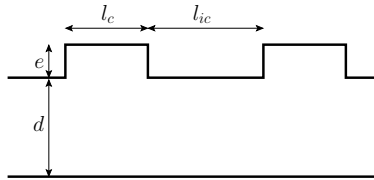


FIG. 3.2 – Dans la distribution régulière, les créneaux ont une longueur  $l_c$ , une profondeur  $e$  et sont espacés d'une longueur  $l_{ic}$  constantes.

La figure 3.3 illustre certains effets d'une distribution de 8 créneaux sur le champ de pression acoustique. Dans ces exemples, le guide a une largeur  $d = 10$  m et une longueur totale  $L_{tot} = 100$  m, les créneaux ont une longueur  $l_c = 2$  m, une profondeur  $e = 0.5$  m et sont espacés de  $l_{ic} = 3$  m. La fréquence de la source  $f = 100$  Hz correspond à 6 modes propagatifs.

Dans les figures 3.3(a) et 3.3(b), une source ponctuelle de fréquence  $f = 100$  Hz est placée en  $(x_s, y_s) = (0, -2.5)$  m. Le champ dans le guide est alors calculé avec

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^N \frac{\phi_n(y)\phi_n(y_s)}{2jk_n} e^{jk_n x}, \quad (3.1)$$

où

$$\phi_n(y) = \sqrt{(2 - \delta_{mn})} \cos\left(\frac{n\pi(y - 5)}{d}\right), \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>ISRA : International Symposium on Room Acoustics, Sevilla, congrès satellite du 19<sup>th</sup> International Congress on Acoustics (ICA), Madrid.

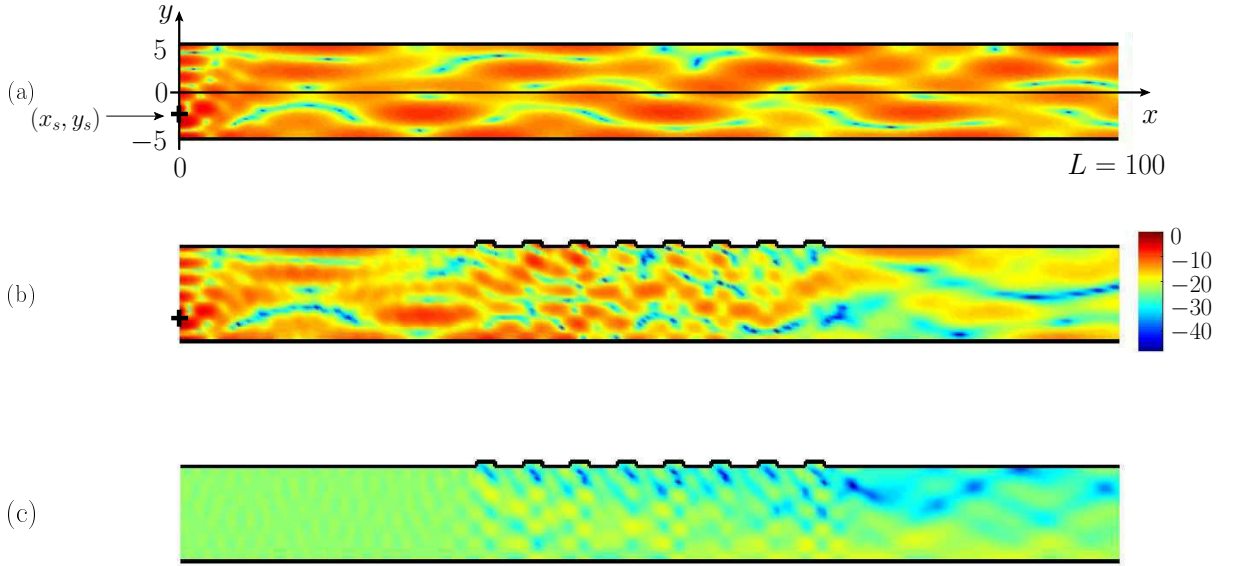


FIG. 3.3 – Module du champ de pression porté en dB pour une fréquence source  $f = 100$  Hz dans un guide 2D infini en amont et en aval. (a) Parois lisses et point source placé à  $(x_s, y_s) = (0, -2.5)$ . (b) Distribution régulière de 8 créneaux de dimensions  $l_c = 2$  m,  $e = 0.5$  m,  $l_{ic} = 3$  m et point source placé à  $(x_s, y_s) = (0, -2.5)$ . (c) Distribution régulière de 8 créneaux et mode plan incident

avec  $\delta_{mn}$  le symbole de Kronecker,  $k_n^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2$ .  $N = 30$  modes (dont 6 propagatifs) sont considérés dans le calcul. En aval de la source, la combinaison des modes conduit à un champ de structure interférentielle typique. Lorsque des créneaux sont rajoutés sur une des deux parois (figures 3.3(b)), les redistributions modales d'énergie opérées à chaque discontinuité conduisent à une structure du champ plus complexe. Ces redistributions modales sont mis en évidence en figure 3.3(c) où à l'entrée du guide, le mode plan incident est choisi comme source. Ainsi, en amont des discontinuités, le champ a une forme très simple (la profondeur des créneaux restant petite devant la largeur du guide, la réflexion qu'ils induisent est très faible). Au passage des discontinuités, l'énergie portée par le mode plan est redistribuée sur les modes supérieurs, ainsi se forme un champ de structure plus complexe où plusieurs modes ont une contribution significative.

Les champs de pression de la figure 3.3 ne permettent que des interprétations et des analyses qualitatives des effets des créneaux. Pour aller vers des interprétations quantitatives, il devient nécessaire de s'intéresser plus en détail à la répartition modale de l'énergie acoustique propagée dans le guide. Ces informations sont contenues dans la matrice de diffusion du guide. Pour une distribution régulière de créneaux, ce calcul s'effectue à partir de l'équation (2.32) où chaque matrice  $S_n$  est la matrice de diffusion  $S_{1\text{ cell}}$  d'un créneau, facilement obtenue à partir des matrices de diffusion d'une expansion brusque  $S_e$  et d'un segment droit  $S_d$  (voir Annexe A3 en fin de chapitre).

L'intérêt est ici porté sur la matrice de transmission  $T^I$  (contenue dans la matrice de diffusion) qui relie le champ de pression incident en amont du guide avec le champ de pression transmis en

aval

$$\vec{P}_{trans} = T^I \vec{P}_{inc}, \quad (3.3)$$

où  $\vec{P}_{inc}$  et  $\vec{P}_{trans}$  sont respectivement les ondes incidente et transmise. Chaque terme  $T_{ij}^I$  quantifie la contribution d'un mode incident  $j$  à un mode transmis  $i$ . La figure 3.4(b) présente deux exemples de matrice de transmission d'un guide de dimensions  $d = 10$  m et  $L_{tot} = 100$  m, comprenant une distribution régulière de 8 créneaux (même distribution qu'en figure 3.3(b) et (c)). En figure 3.4(a), les créneaux ont des dimensions  $l_c = 2$  m,  $e = 0.5$  m et sont espacés de  $l_{ic} = 3$  m, en figure 3.4(b), les créneaux ont des dimensions  $l_c = 3$  m,  $e = 0.5$  m et sont espacés de  $l_{ic} = 5$  m.

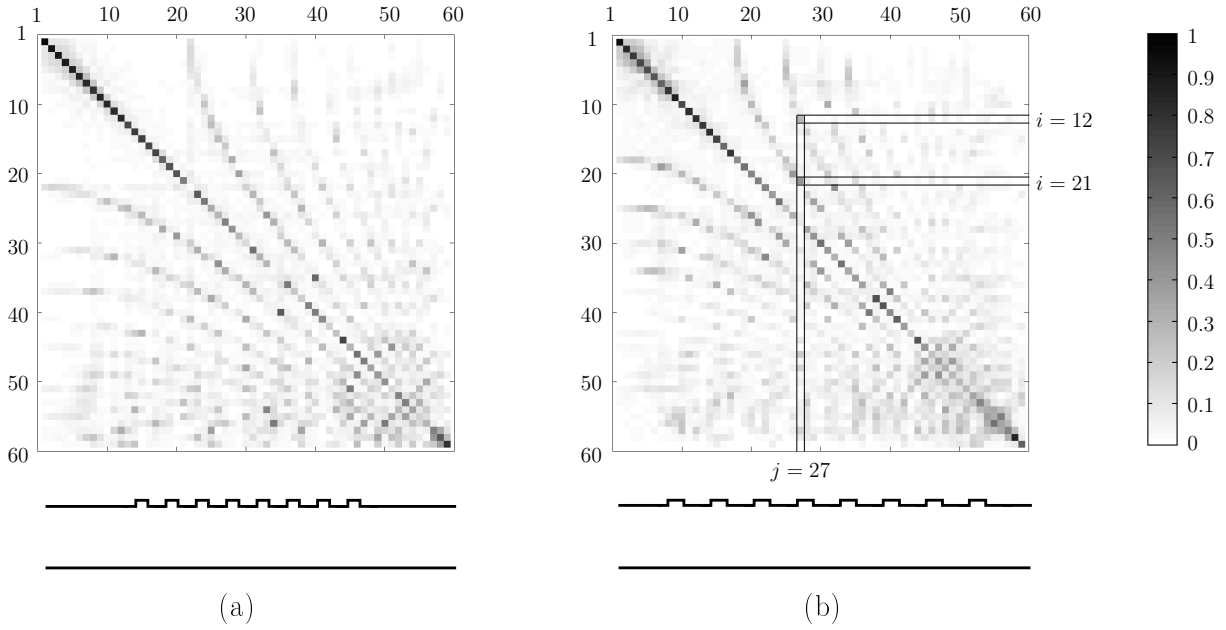


FIG. 3.4 – Module de la matrice de transmission d'un guide comprenant une distribution régulière de créneaux. (a) Créniaux de dimensions  $l_c = 2$  m,  $e = 0.5$  m, espacés de  $l_{ic} = 3$  m. (b) Créniaux de dimensions  $l_c = 3$  m,  $e = 0.5$  m, espacés de  $l_{ic} = 5$  m.

Les matrices de la figure 3.4 sont calculées avec  $N = 80$  modes dont 59 sont propagatifs (la fréquence source est  $f = 1000$  Hz). D'une part, les forts termes diagonaux indiquent qu'un mode incident est principalement transmis sur lui même. En effet, la profondeur des créneaux étant faible devant la largeur du guide ( $e/d = 5\%$ ), la redistribution reste limitée. D'autre part, l'arrangement en lignes courbes de termes extra-diagonaux émergents montre qu'un mode se transmet également de manière privilégiée sur certains autres modes. Par exemple, la matrice de la figure 3.4(b) fait apparaître un fort couplage entre le mode incident  $j = 27$  et les modes transmis  $i = 21$  et  $i = 12$ . Les différences entre les figures 3.4(a) et 3.4(b) indiquent que ces couplages modaux dépendent des dimensions du motif de base de la distribution régulière. Notons également que si le nombre de créneaux augmentait, l'allure des matrices ne changerait pas et les termes de couplage extradiagonaux seraient renforcés.

En effet, Nayfeh [51] a montré que dans un guide dont les parois ont un profil rugueux

périodique, il existe des interactions entre les modes propagatifs et la périodicité spatiale du profil rugueux. Ces couplages modaux interviennent lorsque la différence des nombres d'onde de deux modes propagatifs est proche du nombre d'onde d'un harmonique de la périodicité spatiale. Ceci se traduit par l'équation

$$pk_r \approx k_i \pm k_j \quad (3.4)$$

où  $p$  est un entier positif,  $k_r = 2\pi/\Lambda$  est le nombre d'onde du réseau périodique ( $\Lambda$  est la période spatiale),  $k_i$  ou  $k_j$  sont les nombres d'onde des modes propagatifs s'exprimant comme

$$k_i = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left(\frac{i\pi}{d}\right)^2}. \quad (3.5)$$

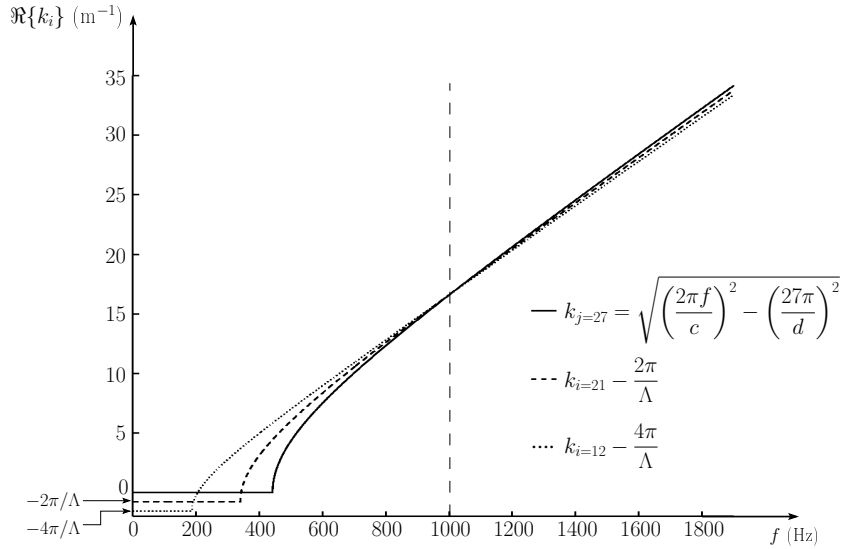


FIG. 3.5 – Représentation graphique de l'équation (3.4) entre le mode incident  $j = 27$  ('—') avec le mode transmis  $i = 21$  ('- - -') pour le premier harmonique de réseau puis avec le mode transmis  $i = 12$  ('...') pour le deuxième harmonique de réseau.

La figure 3.5 est une représentation graphique de l'équation (3.4) dans le plan fréquence-nombre d'onde obtenue pour la géométrie du guide de la figure 3.4(b). Dans une telle représentation, l'intersection entre l'évolution de  $k_j$  et  $k_i - pk_r$  correspond à la fréquence pour laquelle il existe un couplage entre les modes  $j$  et  $i$  dû à l'harmonique  $p$  de la périodicité spatiale. La figure 3.4(b) fait apparaître un couplage entre le mode incident  $j = 27$  et le mode transmis  $i = 21$ . D'après l'intersection en figure 3.5 entre l'évolution de  $k_{j=27}$  (trait plein) et  $k_{i=21} - 1k_r$  (tirés), ce couplage est dû à l'harmonique  $p = 1$  (fondamental) de la périodicité spatiale. De même, l'intersection entre l'évolution de  $k_{j=27}$  (trait plein) et  $k_{i=12} - 2k_r$  (pointillés) montre que le couplage entre le mode incident  $j = 27$  et le mode transmis  $i = 12$  est dû à l'harmonique  $p = 2$  de la périodicité spatiale. Ces résultats montrent que dans les matrices de transmission de la figure 3.4, chaque ligne courbe de termes extra diagonaux émergents correspond à des couplages modaux dûs à un multiple de la période spatiale.

### 3.2 Distribution stochastique de discontinuités

En considérant les nombreux et divers éléments architecturaux pouvant être disposés sur les façades des rues, la morphologie de ces façades peut devenir bien plus complexe qu'une distribution régulière d'un motif donné. Des irrégularités de tailles caractéristiques et de formes géométriques assez différentes participent ainsi à la diffusion des ondes acoustiques. Pour modéliser cette diffusion par les façades, la parois irrégulière peut alors être modélisée comme une distribution stochastique de discontinuités de section (figure 3.6(a)). Ainsi, la longueur  $l$  de chaque segment droit et la valeur  $e$  de chaque expansion (ou rétrécissement) suivent chacune une loi de probabilité uniforme représentée en figure 3.6(b).

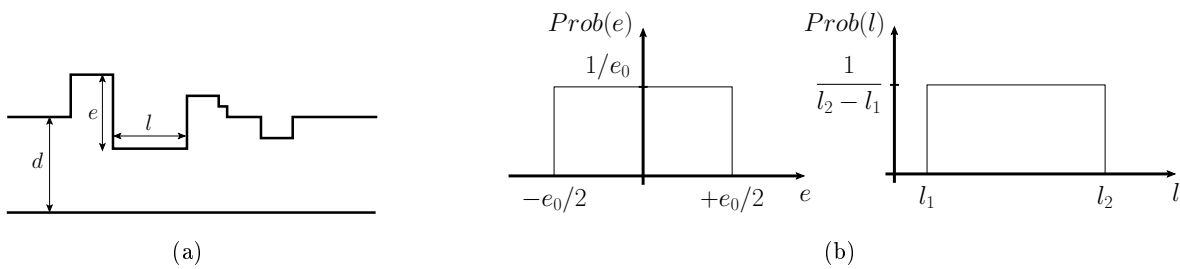


FIG. 3.6 – (a) La distribution stochastique est définie comme une succession de segments droits de longueur  $l$  et d'expansions (ou rétrécissements) de taille  $e$ . (b) Les valeurs de  $l$  et  $e$  suivent une loi de probabilité uniforme et sont telles que  $-e_0/2 \leq e \leq +e_0/2$  et  $l_1 \leq l \leq l_2$ .

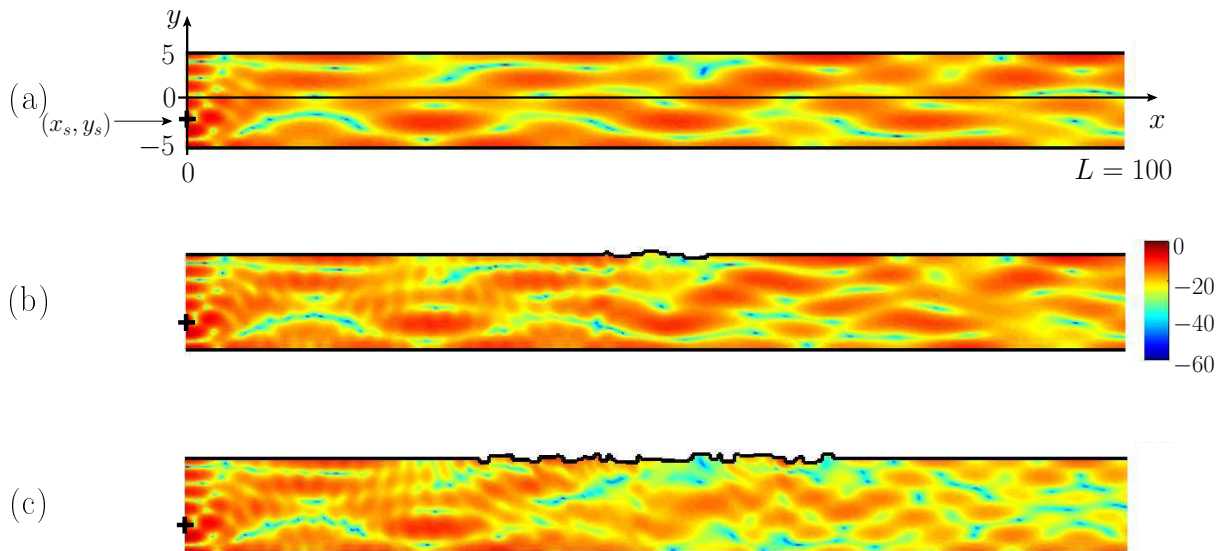


FIG. 3.7 – Module du champ de pression porté en dB à la fréquence source  $f = 100$  Hz dans un guide 2D infini en amont et en aval. (a) Parois lisses et point source placé à  $(x_s, y_s) = (0, 2)$ ; (b) Distribution stochastique de 10 segments droits et point source placé à  $(x_s, y_s) = (0, -2.5)$ ; (c) Distribution stochastique de 40 segments droits et point source placé à  $(x_s, y_s) = (0, -2.5)$

La figure 3.7 illustre l'effet d'une distribution stochastique de discontinuités. La longueur  $l$

des segments droits suit une loi uniforme telle que  $l_1 \leq l \leq l_2$  avec  $l_1 = 0$  m et  $l_2 = 2$  m. La valeur des expansions (ou rétrécissements) brusques  $e$  suit également une loi uniforme telle que  $-e_0/2 \leq e \leq +e_0/2$  avec  $e_0 = 1$  m. Une source ponctuelle de fréquence  $f = 100$  Hz est placée en  $(x_s, y_s) = (0, -2.5)$  m.  $N = 30$  modes (dont 6 propagatifs) sont considérés dans le calcul. De manière qualitative, l'allure du champ de la figure 3.7(b) (10 segments) comparativement à celle du champ de la figure 3.7(a) indique qu'une distribution stochastique relativement courte perturbe peu le champ acoustique. En revanche, même pour des expansions petites devant la largeur du guide, quand la longueur de la distribution stochastique augmente comme en figure 3.7(c) (40 segments) les multiples redistributions modales conduisent à modifier significativement le champ notamment en aval de la distribution.

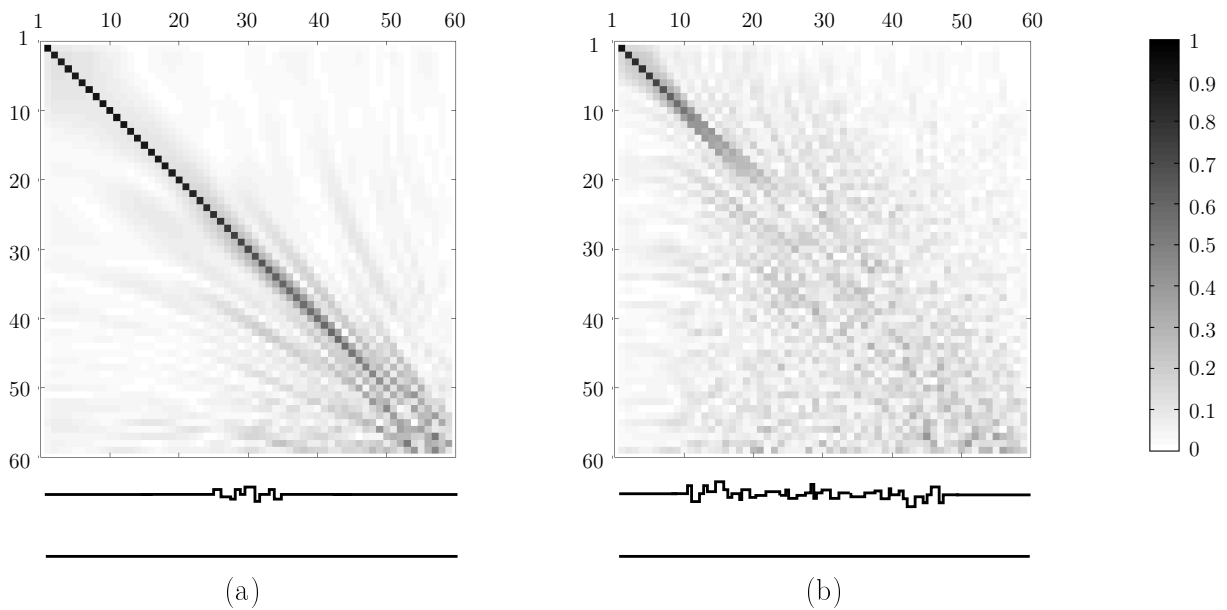


FIG. 3.8 – Module de la matrice de transmission d'un guide comprenant une distribution stochastique de discontinuités dont les dimensions suivent une loi de probabilité uniforme. La longueur  $l$  de chaque segment droit est telle que  $l_1 \leq l \leq l_2$  avec  $l_1 = 0$  m et  $l_2 = 2$  m. La valeur  $e$  des expansions (ou rétrécissements) brusques entre chaque segment suit également une loi uniforme telle que  $-e_0/2 \leq e \leq +e_0/2$  avec  $e_0 = 1$  m. (a) Distribution stochastique "courte" avec 10 segments droits ; (b) Distribution stochastique "longue" avec 40 segments droits.

Les observations de la figure 3.7 peuvent être précisées avec les matrices de transmission de la figure 3.8 calculées pour les mêmes géométries en utilisant  $N = 80$  modes dans le calcul dont 59 sont propagatifs (la fréquence source est  $f = 1000$  Hz). Comme dans le cas des distributions régulières de créneaux où les variations de section sont faibles devant la largeur du guide, un mode incident se transmet principalement sur lui-même. D'un autre côté, la distribution stochastique ne favorise plus de couplage modal en particulier, au contraire elle a pour effet de distribuer de manière stochastique l'énergie d'un mode incident sur l'ensemble des autres modes propagatifs. Dans le cas de petites discontinuités, cette diffusion modale dépend essentiellement de la longueur de la distribution stochastique. En effet, pour une courte distribution, seuls les

modes d'ordre les plus élevés sont diffusés (figure 3.8(a)) alors que pour une longue distribution, seuls les premiers modes ne sont que très peu diffusés (figure 3.8(b)).

### 3.3 Conclusion

A partir des outils théoriques présentés dans le chapitre précédent, des simulations numériques ont permis d'effectuer une étude préliminaire des effets des irrégularités aux parois de guides bidimensionnels fermés. Dans les cas d'irrégularités régulières et stochastiques, les multiples redistributions modales occasionnées aux discontinuités de section ont notamment pu être étudiées de manière détaillée à l'aide de la matrice de transmission du guide.

En revanche, pour traiter le cas de la propagation acoustique dans une rue, considérée comme un guide d'ondes ouvert, l'approximation bidimensionnelle est une hypothèse trop restrictive. En effet, dans un tel modèle 2D, le rayonnement des ondes depuis l'intérieur de la rue vers le ciel ne peut être pris en compte. Or, cette particularité est une caractéristique essentielle des rues.

L'étude des guides bidimensionnels n'étant donc pas l'objet principal de cette thèse, cette étude préliminaire reste volontairement incomplète. Elle pourrait notamment être étendue au cas de parois "multipériodiques" (parois contenant plusieurs distributions régulières de créneaux). Des études paramétriques portant par exemple sur les dimensions des irrégularités pourraient également être intéressantes.

Par ailleurs, dans une étude très récente, Richoux *et coll.* [67] ont proposé un modèle basé sur l'association d'une approche modale 2D avec une méthode de sources images. Dans ce modèle, le champ dans un plan horizontal contenant un point source est décomposé sur une base de modes. Dans le plan vertical contenant la source, un ensemble de sources images est ensuite construit par symétrie d'une part avec le sol (considéré rigide), d'autre part avec le plan horizontal défini à hauteur de la rue. Chaque mode est ensuite propagé à l'aide des fonctions de Hankel définies pour chaque source image. Les travaux montrent qu'en ajustant le coefficient de réflexion du haut de la rue, cette approche permet d'évaluer l'atténuation le long de la rue due à son ouverture sur le ciel. Ce modèle ne reste cependant valide qu'aux basses fréquences ( $f < 100Hz$ ) et à de plus hautes fréquences, la notion de "modes fuyants" doit être introduite. Le calcul et l'utilisation de ces modes fuyants dans une approche modale font l'objet du prochain chapitre.

### A3 Matrice de diffusion d'un créneau

La matrice de diffusion d'un créneau  $S_{1\ cell}$  est facilement obtenue à partir des matrices de diffusion d'une expansion brusque  $S_e$  et d'un segment droit  $S_d$  selon la démarche représentée en figure 3.9. En utilisant les propriétés de symétrie, le calcul de la matrice diffusion d'un créneau est un cas particulier du calcul de la matrice de diffusion dans le cas général de l'association de plusieurs objets diffusants.

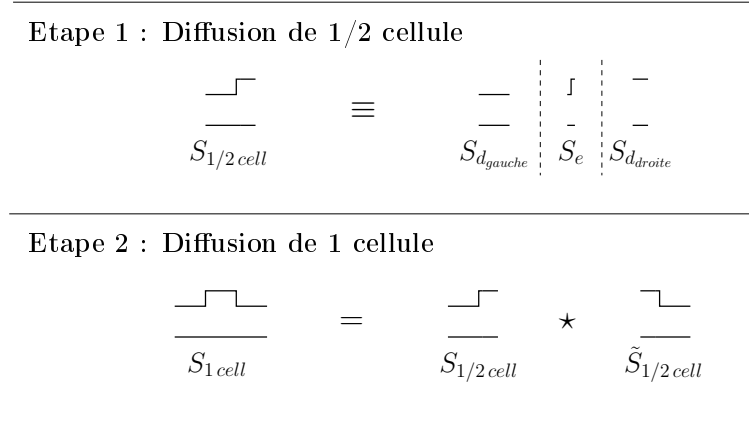


FIG. 3.9 – Représentation de la démarche de calcul de la matrice de diffusion d'un créneau.

Par symétrie, la construction de la matrice de diffusion  $S_{1\ cell}$  d'un créneau se ramène au calcul de la matrice de diffusion  $S_{1/2\ cell}$  d'un demi-créneau (étape 1 de la figure 3.9). Pour cette étape de calcul, une onde incidente depuis la gauche du demi-créneau est par exemple considérée. Les termes de la matrice de réflexion s'obtiennent en écrivant que l'onde est d'abord transmise par le segment droit en amont de l'expansion, ensuite réfléchi par l'expansion puis transmise à nouveau par le segment droit en amont mais dans le sens inverse. Ce raisonnement physique se traduit par

$$R_{1/2\ cell}^I = T_{d\ gauche}^{II} R_e^I T_{d\ gauche}^I. \quad (3.6)$$

Par le même genre de raisonnements, les autres composantes de la matrice de diffusion d'une demi-cellule s'écrivent

$$T_{1/2\ cell}^I = T_{d\ droite}^I T_e^I T_{d\ gauche}^I, \quad (3.7)$$

$$R_{1/2\ cell}^{II} = T_{d\ droite}^I R_e^{II} T_{d\ droite}^{II}, \quad (3.8)$$

$$T_{1/2\ cell}^{II} = T_{d\ gauche}^{II} T_e^{II} T_{d\ droite}^{II}. \quad (3.9)$$

La matrice  $S_{1\ cell}$  d'un créneau est obtenue par la combinaison  $S_{1\ cell} = S_{1/2\ cell} \star \tilde{S}_{1/2\ cell}$  où l'opérateur  $\star$  est définie par les équations (2.34) et (2.35) et la matrice  $\tilde{S}_{1/2\ cell}$  est obtenue par analogie avec l'équation (2.43). Notons que les équations (3.6) à (3.9) s'obtiennent également à partir de l'équation (2.35).





## Chapitre 4

---

# ON THE USE OF LEAKY MODES IN OPEN WAVEGUIDES FOR THE SOUND PROPAGATION MODELING IN STREET CANYONS

---

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, est un article à paraître dans le *Journal of the Acoustical Society of America* [57]. Il présente les résultats d'un premier travail réalisé à partir du concept de modes fuyants pour modéliser la propagation acoustique dans un guide ouvert tridimensionnel uniforme. A l'inverse du chapitre précédent, dans lequel l'attention portait sur les effets des variations de sections, l'intérêt est dans ce chapitre porté sur les effets de l'ouverture du guide. Le but de ce travail est notamment d'appréhender le comportement des modes fuyants et leur utilisation pour une approche modale en guide d'ondes. Ce travail fait suite à une étude préliminaire (non présentée dans ce document) portant sur les résonances complexes d'une cavité rectangulaire couplée à un guide de fuite [23].

### Abstract

An urban, U-shaped, street canyon being considered as an open waveguide in which the sound may propagate, one is interested in a multimodal approach to describe the sound propagation within. The key point in such a multimodal formalism is the choice of the basis of local transversal modes on which the acoustic field is decomposed. For a classical waveguide, with a simple and bounded cross-section, a complete orthogonal basis can be analytically obtained. The case of an open waveguide is more difficult, since no such a basis can be exhibited. However, an open resonator, as displays for example the U-shaped cross-section of a street, presents resonant modes with complex eigen frequencies, owing to radiative losses. This work first presents how to numerically obtain these modes. Results of the transverse problem are also compared with solutions obtained by the Finite Elements Method (FEM) with Perfectly Matched Layers (PML). Then, examples are treated to show how these leaky modes can be used as a basis for the modal decomposition of the sound field in a street canyon.

## 4.1 Introduction

The aim of the present work is to solve the wave equation in a long open rectangular enclosure (Fig. 4.1). This open waveguide is an idealized domain of propagation modeling a street canyon. This idealized domain being a very simple representation of a real street canyon, competitive effects between guided waves (between street façades) and leaky waves (through the opening on the sky) occurring along the propagation can be more easily apprehended. In this paper, a modal based method is proposed to describe acoustic propagation in rectangular straight open waveguides with a particular attention paid to wave radiation in the free space above. Then, in other future studies in the field of urban acoustics, one could extend the principles of this method to treat more realistic street geometries.

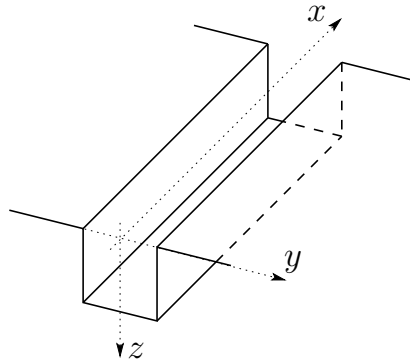


FIG. 4.1 – A straight open waveguide as model of a street canyon.

The investigation of sound propagation in urban environments and streets has been the subject of extensive researches in the past four decades, as the response to a growing social demand.

After experimental observations in the 60's (Weiner [78], Schlatter [70], Donovan [19]), the earliest theoretical works on this topic were conducted in the 70's. Davies [13], Lee [44], Stenackers [71], Lyon [47] used image sources to study multiple sound reflections in a street considered as a channel between two infinite walls. Later, image source method has been improved considering scattering at façade irregularities (Oldham [54]), diffusely reflecting façades Kang [34] or coherent image sources (Lu [46]). Other energetic approaches were also used in urban acoustics. Kang [35] developed a radiosity based model, Bradley [8] used ray tracing method, Picaut [59] proposed a method based on a diffusion equation governing sound particles propagation. These energetic approaches give statistical description of sound fields in urban environment and are able to model more or less accurately numerous phenomena occurring in streets. Since these approaches assume high frequency hypothesis, they cannot describe sound fields when the wavelength is in the range of street width. Furthermore, computation costs strongly increase for complex geometries or for 3D problems.

As pointed out by Lu [46] and Walerian [77], interference effects are significant for relatively narrow street canyons. Hence, wave methods present real interests for sound propagation mode-

ling. Bullen and Fricke [10, 9], thirty years ago studied the wave propagation in 2D street using a modal approach, notably to model junctions of streets. To solve the wave equation in a 2D street canyon, Finite Elements or Boundary Elements methods (Defrance [15]) could as well give solutions to the wave equation for realistic geometries, but the high computation costs restrict their use at low frequencies or for 2D problems. The equivalent sources approach (Forssén [24], Ögren [53], Hornikx [32]) is field-based rather than ray-based, and apprehends the resonant behaviour of a city canyon. In this approach, a set of equivalent sources are used to couple the free half space above the canyon to the cavity inside the canyon. The finite differences in time domain (FDTD) method describes the sound field in 2D even 3D problems (Heimann [29]) and can model *a priori* a very large number of phenomena. The parabolic equation coupled with FDTD method can also be useful to take into account meteorological effects (Van Renterghem [66]). So, even if these wave methods can model sound propagation in realistic situations, the necessary numerical resolution of the wave equation does not provide explicitly links between solution behaviours and domain geometry of the studied problem.

The aim of the present paper is the establishment of a multimodal description of the wave propagation in a 3D street canyon, regarded as a straight open waveguide.

In the classical case of closed waveguides having simple and bounded cross-section, a complete orthogonal modal basis  $\{\phi_i\}$  can be analytically obtained. The case of open waveguides, as the one shown in Fig. 4.1, with a partially bounded cross-section, is more difficult, since no such a basis can be exhibited. However, such a cross-section being regarded as an open resonator also displays eigenmodes with complex eigenfrequencies, owing to the radiation losses [39, 48, 49, 73].

In this paper we propose to describe how the resonant modes of the open cross-section of an open waveguide (Fig. 4.1) can be used to give a multimodal formulation of the sound propagation in long open enclosures. A general method to compute the resonant frequencies and mode shapes in the transversal open cross-section of the duct is described. Results of the transverse problem are also compared with FEM computations using PML. Then, the multimodal propagation in a straight open waveguide is formulated and numerical examples are given and discussed.

## 4.2 Eigenmodes of the transverse problem

### 4.2.1 Theory and formulation

The wave equation to solve is

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p = 0, \quad (4.1)$$

with  $\vec{\nabla}^2$  the Laplacian operator,  $c_0$  the wave speed and  $p$  the pressure. In a modal approach within a uniform waveguide, elementary solutions for the pressure are written as

$$p_i(x, y, z) = e^{j(\pm k_i x - \omega t)} \phi_i(y, z), \quad (4.2)$$

where  $k_i^2 = k^2 - \alpha_i^2$ ,  $\Re\{k_i\} > 0$ ,  $\Im\{k_i\} > 0$ ,  $k = \omega/c_0$ , and  $(\alpha_i, \phi_i)$  are the eigensolutions of the transverse eigenproblem

$$\vec{\nabla}_\perp^2 \phi = -\alpha^2 \phi, \quad (4.3)$$

with proper boundary conditions, in the cross-section of the waveguide.

Then, a solution in the waveguide can be built as a sum on these elementary solutions (the time dependence  $\exp(-j\omega t)$  is omitted) :

$$p(x, y, z, \omega) = \sum_{i \geq 1} (a_i e^{jk_i x} + b_i e^{-jk_i x}) \phi_i(y, z), \quad (4.4)$$

with  $i \geq 1$  an integer number and the coefficients  $a_i$  and  $b_i$  are found as functions of the boundary conditions defined at the waveguide extremities. The transverse modes of the open waveguide shown in Fig. 4.1 are written as the solutions  $(\alpha, \phi)$  of the eigenproblem (4.3) with boundary conditions

$$\partial_z \phi = 0 \quad \text{if } z = 0 \text{ and } |y| > L/2, \quad (4.5a)$$

$$\partial_z \phi = 0 \quad \text{if } z = d \text{ and } |y| < L/2, \quad (4.5b)$$

$$\partial_y \phi = 0 \quad \text{if } y = \pm L/2 \text{ and } 0 < z < d \quad (4.5c)$$

in the cross-section of the waveguide, regarded as a 2D rectangular cavity  $\Omega_1$  of width  $L$  and depth  $d$ , open on the semi-infinite space  $\Omega_2$  (Fig. 4.2).

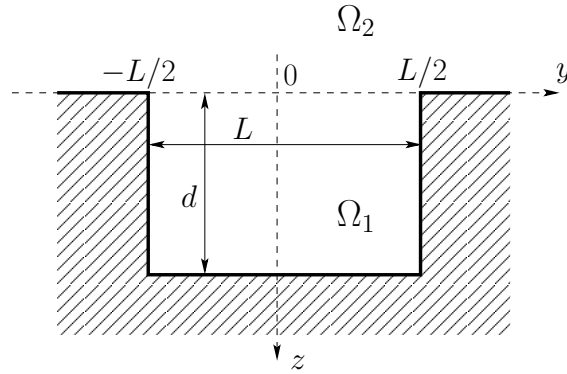


FIG. 4.2 – The cross-section of a street canyon seen as a 2D open rectangular cavity.

As we present below, the modes  $\phi_i(y, z)$  can be found by solving the continuity equation at the interface between  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ . A similar problem, with elastic waves, has been treated by Maradudin and Ryan [48]. In their work, authors have calculated the discrete frequencies of the elastic vibration modes of a 2D rectangular ridge fabricated from one material that is bonded on the planar surface of a substrate of a second material. In the following of this section, part of the equations are derived from this work to be adapted in the case of a fluid resonant open cavity.

In the cavity ( $z \geq 0$ ), the general solution satisfying boundary conditions can be written as a discrete sum of functions,

$$\phi(y, z \geq 0) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos(\beta_n(z - d)) \psi_n(y) \quad (4.6)$$

with  $d$  the depth of the cavity,  $\beta_n^2 = \alpha^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  with  $n \geq 0$  an integer number and

$$\psi_n(y) = \sqrt{2 - \delta_{n0}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\left(y - \frac{L}{2}\right)\right), \quad (4.7)$$

where  $\delta_{mn}$  is the Kronecker symbol. Note that a finite impedance at the walls (absorbing material) could be considered by, *e.g.*, modifying expression (4.7), although it could result in a less straightforward formulation. An alternative, then, would be to solve the transverse problem using a Finite Element Method (FEM). This would be also particularly adapted in the case of more complex cavity shapes, modeling façades irregularities.

Above the cavity ( $z \leq 0$ ), the general solution is written as the spatial Fourier transform

$$\phi(y, z \leq 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B e^{j(\alpha_y y - \alpha_z z)} d\alpha_y, \quad (4.8)$$

where  $\alpha_z^2 = \alpha^2 - \alpha_y^2$  with  $\Re\{\alpha_z\} \geq 0$  and  $\Im\{\alpha_z\} \geq 0$ .

Continuity equations in the interface plane  $z = 0$ ,  $|y| < L/2$  are

$$\phi(y, z = 0^+) = \phi(y, z = 0^-), \quad (4.9)$$

and

$$\partial_z \phi(y, z = 0^+) = \partial_z \phi(y, z = 0^-). \quad (4.10)$$

A first relation between the  $\{A_n\}$  and  $B$  is found by substituting Eqs. (4.6) and (4.8) for  $\phi$  in combined Eqs. (4.5a) and (4.10) :

$$\sum_{n \geq 0} A_n \beta_n \sin(\beta_n d) \psi_n(y) = -j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B \alpha_z e^{j\alpha_y y} d\alpha_y, \quad (4.11)$$

to find

$$B = j \sum_{n \geq 0} A_n \beta_n \sin(\beta_n d) \frac{S_n(\alpha_y)}{\alpha_z}, \quad (4.12)$$

where

$$S_n(\alpha_y) = \int_{-L/2}^{L/2} \psi_n(y) e^{-j\alpha_y y} dy. \quad (4.13)$$

A second relation is found by using the continuity equation (4.9) :

$$\sum_{n \geq 0} A_n \cos(\beta_n d) \psi_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B e^{j\alpha_y y} d\alpha_y, \quad (4.14)$$

whence it follows that

$$A_m \cos(\beta_m d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B S_m^*(\alpha_y) d\alpha_y, \quad (4.15)$$

where  $m \geq 0$  is an integer. Then, Eqs. (4.12) and (4.15) leads to the set of linear, homogenous equations (4.16) for the  $\{A_n\} : \forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$A_m \cos(\beta_m d) = j \sum_{n \geq 0} \Pi_{mn}(\alpha) \beta_n A_n \sin(\beta_n d), \quad (4.16)$$

where

$$\Pi_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_m^* S_n}{\alpha_z} d\alpha_y. \quad (4.17)$$

It is easily shown that, for real values of  $\alpha_y$ ,  $\Pi_{mn}$  vanishes unless  $m$  and  $n$  have the same parity. [48] Then, Eq. (4.16) breaks up into two sets of linear equations, one governing the symmetrical eigenmodes (even functions of  $y$  with even values of  $m$  and  $n$ ), the other governing antisymmetrical eigenmodes (odd functions of  $y$  with odd values of  $m$  and  $n$ ). The following equation gives a general expression of  $\Pi_{mn}$  for both even or odd indices  $m$  and  $n$  :

$$\Pi_{mn}(\alpha) = (-1)^{\frac{3m+n}{2}} \frac{\sqrt{2 - \delta_{m0}} \sqrt{2 - \delta_{n0}}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha_y^2}{\alpha_z (\alpha_y + \frac{m\pi}{L}) (\alpha_y + \frac{n\pi}{L})} \text{sinc} \left( \frac{\alpha_y - \frac{m\pi}{L}}{2} \right) \text{sinc} \left( \frac{\alpha_y - \frac{n\pi}{L}}{2} \right) d\alpha_y. \quad (4.18)$$

Finally, Eq. (4.16) can be written in the matricial form

$$D \vec{\mathcal{A}} = \vec{0}, \quad (4.19)$$

where the components of vector  $\vec{\mathcal{A}}$  are  $\mathcal{A}_n = A_n \sin(\beta_n d)$  and terms of matrix  $D$  are

$$D_{mn}(\alpha) = \cot(\beta_m d) \delta_{mn} - j \Pi_{mn} \beta_n. \quad (4.20)$$

Then, the eigenvalues of the transverse eigenproblem are the values  $\alpha_i$  of  $\alpha$  for which  $\det(D) = 0$ , and the eigenfunctions  $\phi_i$  are given by the corresponding set of coefficients  $A_n^{(i)}$ , satisfying Eq. (4.19) with  $D = D(\alpha_i)$ .

### 4.2.2 Numerical resolution

After truncation of Eq. (4.19) at a finite-size matrix problem, zeros of the determinant of  $D$  are numerically located in the complex  $\alpha$ -plane to compute eigenvalues  $\alpha_i$  of the transverse problem (Fig. 4.3).

Owing to the radiation losses in the infinite space  $\Omega_2$  (above the waveguide), eigenvalues are complex, lying in the lower half-plane. [39, 48, 49, 73] The spectrum displays families of eigenvalues corresponding to either symmetric (blue circles 'o') or antisymmetric modes (red crosses 'x').

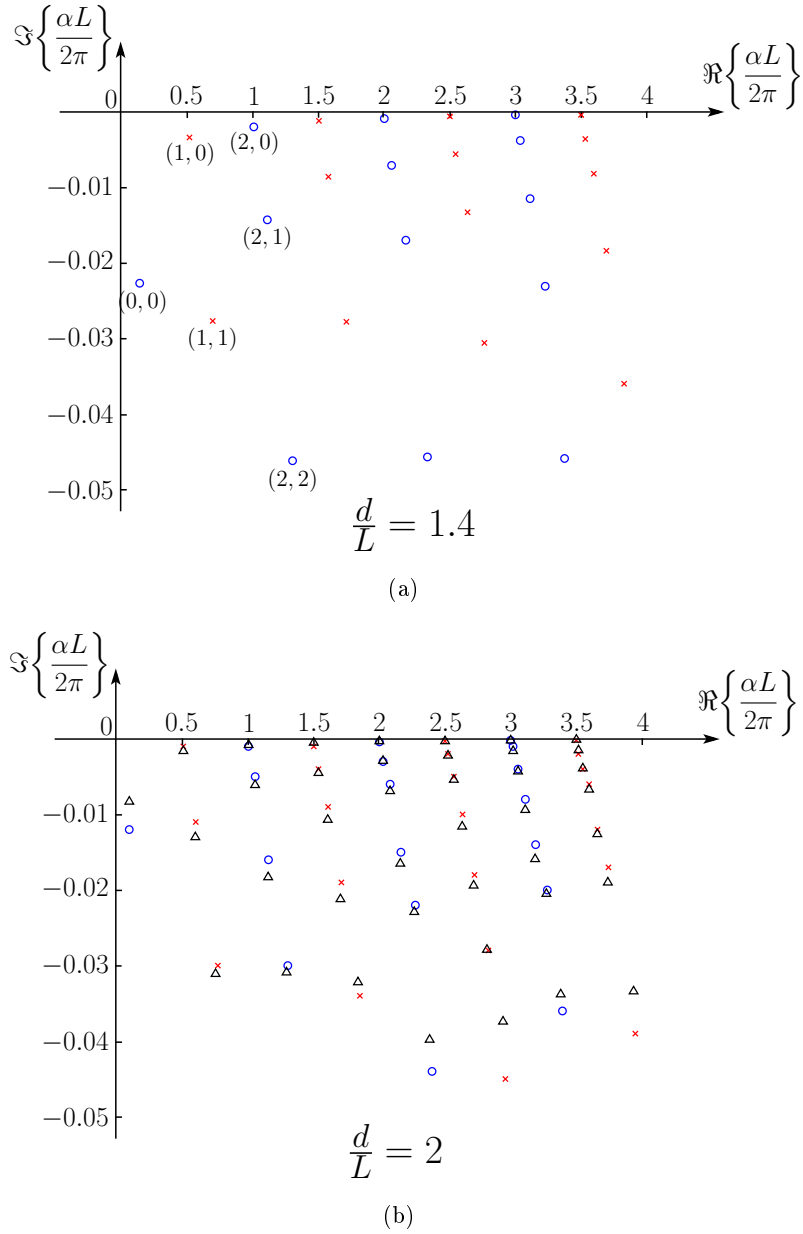


FIG. 4.3 – Spectrums of complex eigenvalues of the transverse problem for two different values of the aspect ratio : (a)  $d/L = 1.4$ , (b)  $d/L = 2$ . 'o' : symmetric modes, 'x' : antisymmetric modes, 'Δ' : eigenvalues computed with FEM (color online).

An analogy with the classical, real, modes of the simple problem with a Dirichlet condition ( $\phi = 0$ ) at  $z = 0$  instead of the exact radiating condition written in Sec. 4.2.1, allows us to label the complex modes  $\phi_i$  - at least the modes which eigenvalue is located close enough to the real axis in the complex  $\alpha$ -plane - with a couple of integers denoting the number of vertical and horizontal nodal lines (Fig. 4.4). Following this terminology, the families displayed in Fig. 4.3 are the  $\phi_{(p,q)}$  with  $p$  constant.

Fig. 4.3 shows the spectrum of eigenvalues for two different values of the aspect ratio of the cavity : (a)  $d/L = 1.4$ , and (b)  $d/L = 2$ . The pattern in both plots is similar, exhibiting the families of modes  $\phi_{(p,q)}$  with  $p$  constant. However, in the “deeper” cavity, with the aspect ratio



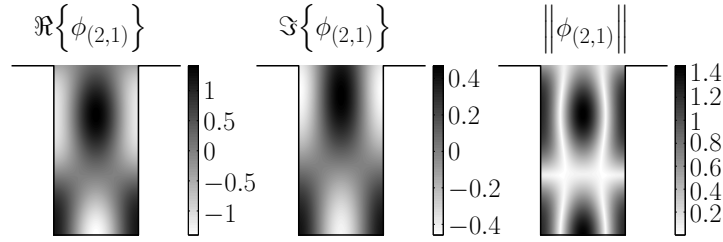


FIG. 4.4 – Symmetric mode  $\phi_{(2,1)}$  (real part, imaginary part and modulus). The indices (2, 1) are chosen following an analogy with the classical eigenmodes in a closed cavity with a Dirichlet condition  $\phi = 0$  on the upper boundary : these indices denote the number of vertical and horizontal nodal lines.

$d/L = 2$ , the confinement of the modes is more important, thus, eigenvalues  $\alpha_i$  have a smaller imaginary part than in the cavity with aspect ratio 1.4.

For comparison, a finite element method is used to solve the transverse eigenproblem (4.3). The semi-infinite space above the cavity is bounded with Perfectly Matched Layers (PML), as used by Hein [30] and Koch [39] in a similar problem (Fig. 4.5).

The results shown in this paper (Figs. 4.3-b and 4.6) have been obtained with parameters  $d' = L/2$ ,  $l' = L$ ,  $d_{\text{PML}} = L/2$ , and  $\tau_y = \tau_z = 1 + j$  (see Appendix A4). A Dirichlet condition  $\phi = 0$  is imposed on the outer boundaries of the PML. Moreover, as the geometry of the cross-section is symmetric about the  $z$  axis, one half of the domain only is meshed, with the appropriate symmetry or antisymmetry condition imposed at  $y = 0$ . Computations have been performed using The Partial Differential Equation toolbox from Matlab<sup>®</sup>.

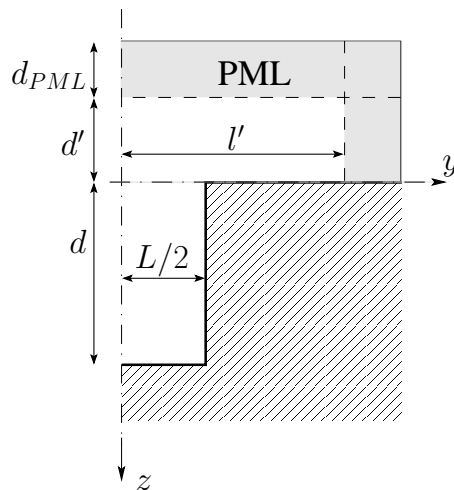


FIG. 4.5 – Geometry of the domain with PML in the FEM computations.

The results of the two compared methods - the resolution of Eq. (4.19) and the FE Method - are in good agreement (Fig. 4.3-b). The discrepancy between the results increases for larger values of the imaginary part  $\Im\{\alpha_i\}$ . However, eigenvalues that are less well-estimated are asso-

ciated to modes that will be strongly attenuated when propagated in the waveguide. They are, then of secondary importance when considering the transport of energy on a sufficiently long distance. Moreover, it will be shown in the following that the contribution of these modes in the determination of the sets of coefficients  $\{a_i\}$  and  $\{b_i\}$  is almost negligible.

A comparison between the eigenfunctions  $\phi_i$  deduced from the method detailed in § 4.2.1 and from the FEM computation shows also a good agreement (Fig. 4.6). Both methods give very similar results, even when the error on the imaginary part of  $\alpha_i$  becomes more significant (Fig. 4.6, bottom). The figure also clearly shows that low order modes weakly “radiate” in the infinite space  $\Omega_2$  : the effect of the opening of the waveguide appears as a small perturbation on the classical, non radiating, solutions that would be obtained by applying an homogeneous Dirichlet condition at the top of the waveguide ( $z = 0$ ).

For higher order modes, however, eigenfunctions  $\phi_i$  differ more and more from the real, “Dirichlet”, solutions. Patterns of nodal lines are more complex - consequently, the indexation with indices  $(p, q)$  become less relevant - and the confinement, that was strong for low order modes, becomes weaker, with the energy increasing near the interface  $z = 0$ .

Now that the transverse eigenmodes are determined, they can be used to write a multimodal formulation of the sound propagation within the open waveguide that displays a street canyon.

### 4.3 Propagation along the street

As explained in Sec. 4.1, the transverse modes  $\phi_i$  are used, for given source and radiation conditions at the ends of the waveguide, to built a solution of the wave equation, as written in Eq. (4.4).

Because the transverse eigenvalues  $\alpha_i$  are complex with  $\Im\{\alpha_i\} < 0$ , the propagation constants  $k_i$  are also complex, with  $\Im\{k_i\} > 0$ , even for real source frequency  $\omega$ . Then, all the modes  $\phi_i \exp(\pm jk_i x)$  in the waveguide decrease exponentially while propagating, reflecting the radiation losses during the propagation along the open waveguide. This correspond to leaky modes.

Then, the two sets of coefficients  $\{a_i\}$  and  $\{b_i\}$  must be found, as functions of the end conditions in the waveguide. At the input end of the waveguide, a source condition is defined as a given acoustic pressure distribution in a plane  $x = \text{constant}$ , with frequency  $\omega$ . For example, at  $x = 0$  :  $p(0, y, z, \omega) = p_0(y, z) \exp(-j\omega t)$ . At the output end of the waveguide is given a radiation condition.

#### 4.3.1 Input condition

Let call  $P_i(x) = a_i \exp(jk_i x) + b_i \exp(-jk_i x)$  the coefficients in the development in series (4.4). Since the modes  $\phi_i$  are not orthogonal, the initial field  $p_0(y, z, \omega)$  can not be projected on the  $\{\phi_i\}$  as it is classically made to find the  $\{P_i(0)\}$ . Thus, after truncation at a finite number  $\mathcal{N}$  of

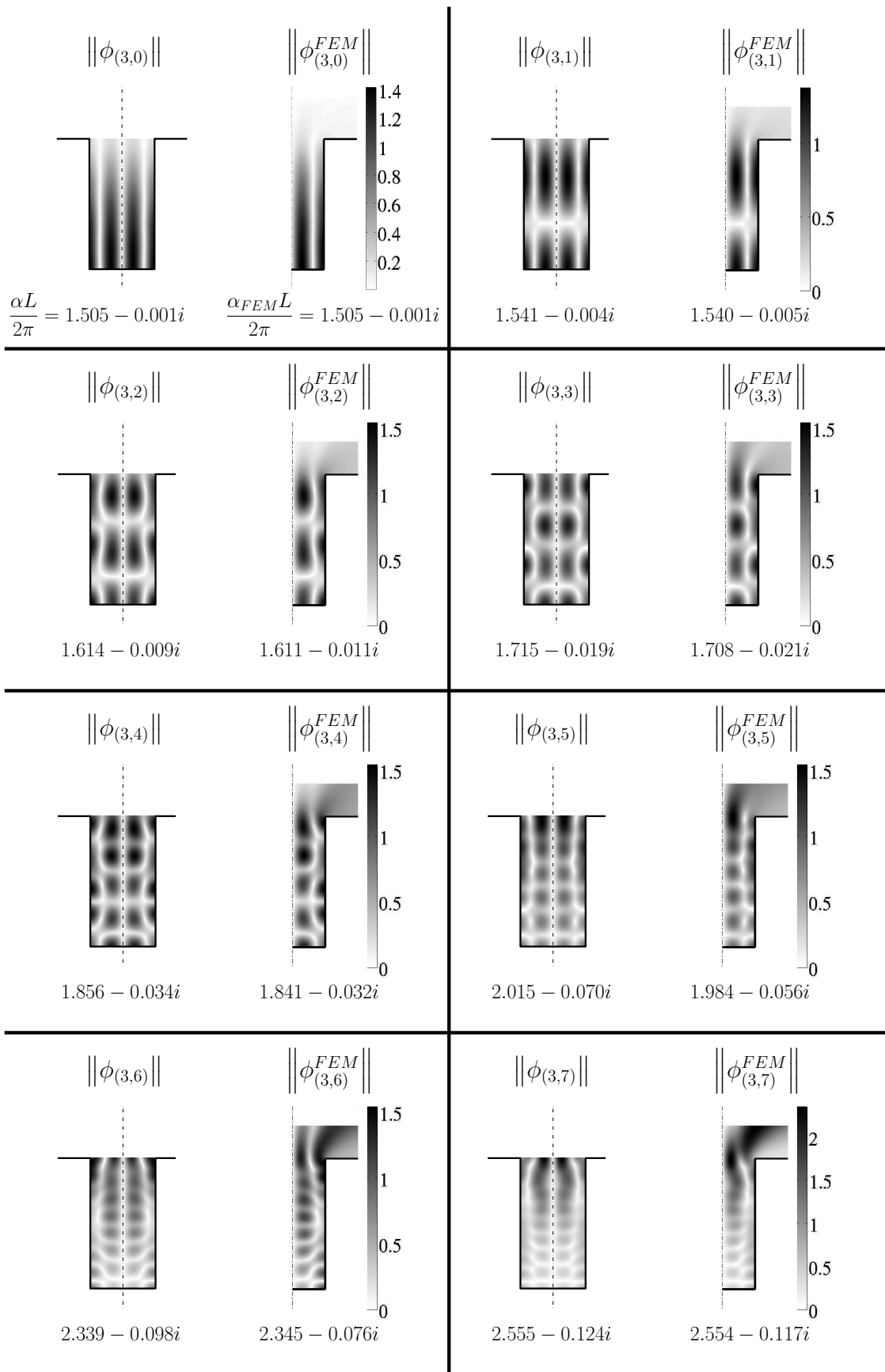


FIG. 4.6 – Antisymmetric eigenfunctions  $\phi_{(3,q)}$ ,  $q > 0$ , and comparison with FEM computations. The PML domain is not shown in the FEM results.

terms in the development (4.4), a least square method is thus used to find these coefficients [23] :

$$\vec{P}(0) = \left( \Lambda^{(\phi)} \right)^{-1} \vec{p}_0^{(\phi)}, \quad (4.21)$$

where the  $i$ -th component of  $\vec{P}(0)$  is  $P_i(0)$  and

$$\Lambda_{ij}^{(\phi)} = \langle \phi_i | \phi_j \rangle, \quad (4.22a)$$

$$p_{0i}^{(\phi)} = \langle \phi_i | p_0 \rangle, \quad (4.22b)$$

with the product

$$\langle f | g \rangle = \iint \bar{f} g \, d\Omega. \quad (4.23)$$

Practically, we consider source conditions  $p_0(y, z, \omega)$  with a compact support, included in  $\Omega_1$ , *i.e.*, inside the street canyon. Thus, for convenience when determining  $\vec{P}(0)$ , we consider, as the eigenfunctions  $\phi_i$ , their restriction to the domain  $\Omega_1$ , that is,

$$\begin{aligned} \forall (y, z) &\in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \times [0, d], \\ \phi_i(y, z) &= \sum_{n \geq 0} A_n^{(i)} \cos\left(\beta_n^{(i)}(d-z)\right) \psi_n(y), \end{aligned} \quad (4.24)$$

and the product  $\langle | \rangle$  above is :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^d \int_{-L/2}^{L/2} \bar{f} g \, dy dz. \quad (4.25)$$

Note that in the case of real orthogonal modes, as in classical closed waveguides, the least square method gives the usual projection coefficients  $P_m = \langle \phi_m | p \rangle$ .

### 4.3.2 Output condition

Let  $Q_i(x) = jk_i(a_i \exp(jk_i x) - b_i \exp(-jk_i x))$  be the coefficients in the development of the  $x$ -component of  $\vec{\nabla} p$ . One assumes that at the output end of the waveguide, say, at  $x = x_{\text{end}}$ , the condition is given as an admittance matrix  $Y_{\text{end}}$  fulfilling  $\vec{Q}(x_{\text{end}}) = Y_{\text{end}} \vec{P}(x_{\text{end}})$ .

Again, as for the formulation at the input end, and due to the non-orthogonality of the eigenmodes, the matrix  $Y_{\text{end}}$ , for some complex end conditions, may not be straightforwardly calculated. However, usual end conditions - rigid end, non radiating open end, anechoic termination - can be easily formulated with this type of admittance matrix, generalization for all modes of the usual admittance for the plane wave [55].

### 4.3.3 Solutions for $\{a_i\}$ and $\{b_i\}$

Now that an input condition  $\vec{P}(0)$  and an output condition  $Y_{\text{end}}$  are known, the vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  of the  $\{a_i\}$  and  $\{b_i\}$  in Eq. (4.4) can be calculated [55, 22] :

$$\vec{a} = (1 - \delta)^{-1} \vec{P}(0), \quad (4.26)$$

$$\vec{b} = -\delta(1 - \delta)^{-1} \vec{P}(0), \quad (4.27)$$

where  $\delta = D_1(Y_{\text{end}} + Y_c)^{-1}(Y_{\text{end}} - Y_c)D_1$ ,  $D_1$  is diagonal with terms  $D_{1i} = \exp(jk_i x_{\text{end}})$ ,  $Y_c$  is diagonal with terms  $Y_{ci} = jk_i$ . Thus, with these solutions for  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ , the pressure field in the open waveguide can be calculated. However, terms  $\exp(-jk_i x)$  can be the source of numerical problems of convergence. Then, defining  $\vec{\tilde{b}} = D_1^{-1} \vec{b}$ , the pressure field is written

$$p^{(N)}(x, y, z, \omega) = \sum_{i \geq 1} (a_i e^{jk_i x} + \tilde{b}_i e^{jk_i(x_{\text{end}} - x)}) \phi_i(y, z). \quad (4.28)$$

This new formulation depends only on  $D_1$ , not on  $D_1^{-1}$ , and on exponentials with positive arguments  $x$  or  $L - x$ .

## 4.4 Results

In the following, for simplicity, we will consider the wave field downstream from a source in an infinite waveguide. Then, there are no back propagated waves :  $b_i = 0$ .

### 4.4.1 Input condition

The initial condition at  $x = 0$  is the pressure distribution shown in Fig.4.7 (left part) and given by

$$p_0(y, z) = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - y_k)^2 - (z - z_k)^2}{2\sigma_k^2}}, \quad (4.29)$$

where  $\sigma_k \in \mathbb{R}^+$  and  $(y_k, z_k) \in [-L/2, L/2] \times [0, d]$ . The associated dimensionless frequency is  $kL/2\pi = 1.2$ . This input condition is chosen as a non trivial solution for the modal formulation. Moreover, it can be seen as a simple and general way to describe several, spatially distributed, sources.

Then, the  $\{a_i\}$  are found by substituting Eq. (4.29) for  $p_0(y, z)$  in Eqs. (4.21-4.22). The modal reconstruction is shown in Fig. 4.7. Using a basis of  $N = \mathcal{N} = 30$  modes (we recall that  $N$  is the number of terms in the series (4.28) and  $\mathcal{N}$  is the size of the linear problem (4.21) in the least square estimation of the  $\{a_i\}$ , so that  $N \leq \mathcal{N}$ ), the input pressure condition is well reproduced with a residual error of 3.6%. This error is due to the high order depth modes of the first families that have deliberately not been considered in the modal basis because of their weak of relevance in the propagation. Furthermore, it will be shown in the following that omitting these modes does not affect significantly the estimation of the  $\{a_i\}$  for the modes taken into account.

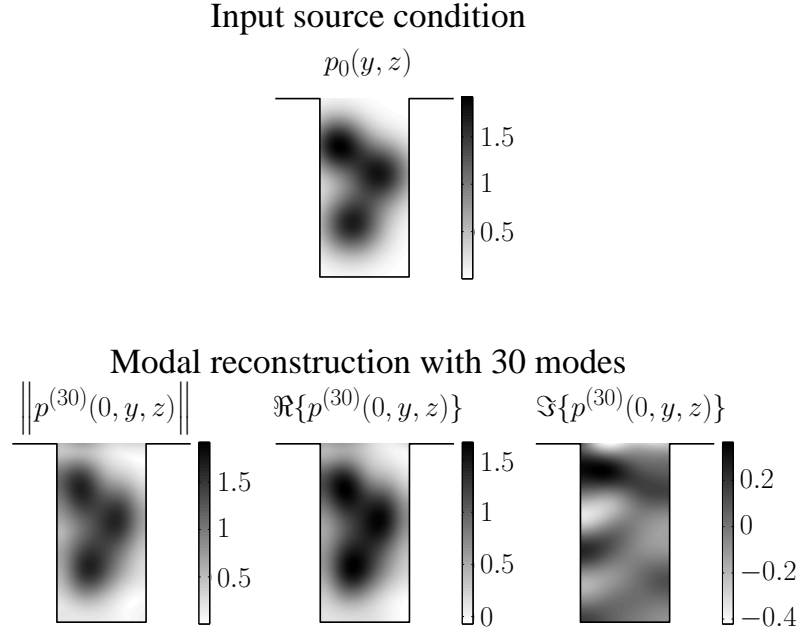


FIG. 4.7 – Top : Initial condition at abscissa  $x = 0$ ; The parameters of the three Gaussian functions in Eq. (4.29) are  $(y_1, z_1, \sigma_1) = (0.18L, 0.42d, 0.24)$ ,  $(y_2, z_2, \sigma_2) = (-0.30L, 0.26d, 0.22)$ ,  $(y_3, z_3, \sigma_3) = (-0.14L, 0.70d, 0.24)$ . Bottom : Modal reconstruction of the initial condition  $p_0(y, z)$ , using  $N = \mathcal{N} = 30$  modes.

TAB. 4.1 – Classification of the modes by increasing value of  $\Im\{k_i\}$  at frequency  $kL/2\pi = 1.2$ .

Classification	Couple $(m, n)$	Classification	Couple $(m, n)$
1 <sup>st</sup>	(1,0)	6 <sup>th</sup>	(0,1)
2 <sup>nd</sup>	(0,0)	7 <sup>th</sup>	(1,2)
3 <sup>rd</sup>	(2,0)	8 <sup>th</sup>	(2,2)
4 <sup>th</sup>	(1,1)	9 <sup>th</sup>	(0,2)
5 <sup>th</sup>	(2,1)	10 <sup>th</sup>	(1,3)

To evaluate the convergence of the method when increasing the number  $N$  of modes taken into account in Eq. (4.28), from a  $\mathcal{N} = 30$  modes basis, an error  $\epsilon$  is defined as

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\int_0^d \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \|p^{(N)} - p_0\|^2 dydz}{\int_0^d \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \|p_0\|^2 dydz}}, \quad (4.30)$$

where  $p^{(N)}$  is the modal solution obtained with  $N$  modes (Eq. 4.28), and  $p_0$  the reference field. The modes are sorted by increasing value of the imaginary part of their propagation constant  $k_i$ , that is, from the least damped to the most damped leaky mode propagating along the canyon (Tab. 4.1). This type of classification depends directly on each eigenvalue and the source frequency.

The convergence of the reconstruction of the initial condition  $p_0(y, z)$  is shown in Fig. 4.8 (circles 'o'). Naturally in such a modal approach, depending on the source distribution, each

mode introduced in the computation contributes differently to the reconstruction of  $p_0(y, z)$ .

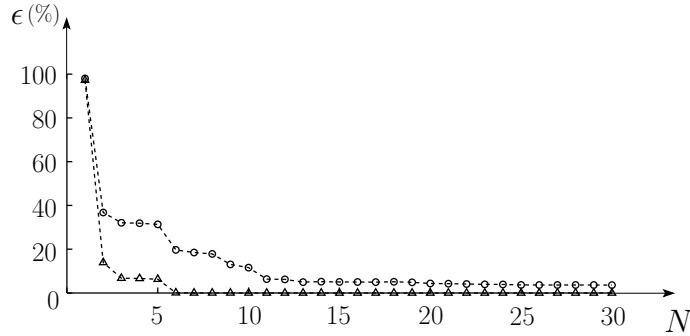


FIG. 4.8 – Evolution of the error indicator  $\epsilon$  with the the number of modes  $N$  taken into account in the computation of the solution. 'o' : the error is computed at  $x = 0$ , with  $\epsilon$  given in Eq. (4.30). 'Δ' : the error is computed at  $x = 10L$ , with  $p^{(30)}(10L, y, z, \omega)$  as the reference field.

#### 4.4.2 Propagation within the waveguide

Assuming that the convergence is reached for  $N = 30$ , the field  $p^{(30)}(x, y, z, \omega)$  is now taken as the reference field to compute an estimation error at abscissa  $x = 10L$  (triangles 'Δ' in Fig. 4.8). The variability, depending on the initial condition  $p_0(y, z)$ , of the contributions of the modes to the convergence is still visible, but, moreover, it clearly appears that only a few modes - the less damped modes - still contribute to the transport of energy at that distance from the “source”. Practically, sorting the modes as done in Tab. 4.1 is thus a good choice to increase the convergence, as soon as one is interested by the wave field in the street canyon at a sufficient distance from the source.

Fig. 4.9 shows the field in the cross-section of the waveguide at abscissa  $x = 10L$ ,  $L$  the width of the waveguide. The left plot is obtained using Eq. (4.28) and  $N = 30$  - the total number of modes used to perform the least square estimation -, while the right plot is obtained using only the first six modes, with the ordering defined above. Both results are very close : the relative error between them, defined as in Eq. (4.30), is less than 0.35%.

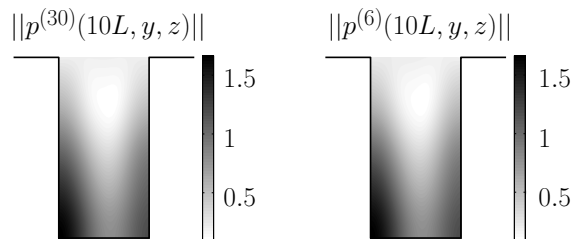


FIG. 4.9 – Modal field at  $x = 10L$  using  $N = 30$  modes (left) and  $N = 6$  modes (right).

Since only a few modes are necessary to describe the field at certain distance from the source, it would be advantageous to use a reduced modal basis in the computation. Since modes are not

orthogonal, the value of each modal coefficient  $a_i$  depends on the size of the “basis” used in the least square estimation. One shows, however, that this dependency is rapidly weak, in particular for the first modes, that is, the less damped (Fig. 4.10). The notation  $a_i^{(\mathcal{N})}$  is used to denote the number of modes  $\mathcal{N}$  taken into account for the least square estimation of  $a_i$ .

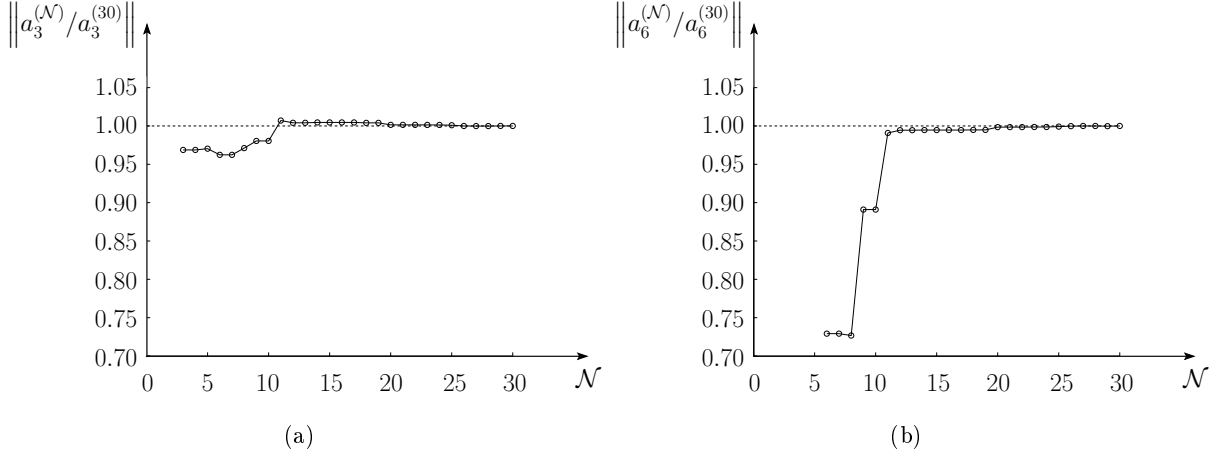


FIG. 4.10 – Evolution of the modal coefficients  $a_3$  (a) and  $a_6$  (b) with the number of modes  $\mathcal{N}$  used for the least square estimation.

To evaluate the relevance of using a reduced modal basis, two modal solutions of the wave equation in the infinite street canyon with the initial condition (4.29) at  $x = 0$  are compared : the solution with  $N = \mathcal{N} = 10$ , and the solution with  $N = \mathcal{N} = 30$ . The relative error between these two solutions, as defined in Eq. (4.30), is plotted in Fig. 4.11 as function of the distance from the source plane.

Naturally, the source condition  $p_0(y, z)$  is badly reconstructed with a limited number of modes, and the relative error near the plane  $x = 0$  is thus significant. But it decreases rapidly, to be under 1% after less than two widths. It follows that the acoustic field, rapidly, is “carried” by a small number of modes, the less damped modes, that are therefore well confined and guided in the open geometry of the street canyon. This points out a double interest of the modal formulation using leaky modes in a street canyon. First, as a physically relevant approach, describing the competitive effects of confinement and radiation in such an open geometry. Second, as an efficient numerical method, since a few modes only is used to accurately model the wave propagation in the waveguide.

## 4.5 Conclusions

The problem of sound propagation in an idealized urban street canyon is solved using a multimodal formulation that gives the acoustic field as a sum on the leaky modes of the open waveguide that displays the canyon. The leaky modes, that naturally reflects the competitive effects of confinement and radiation of the wave in such partially bounded geometries, can be



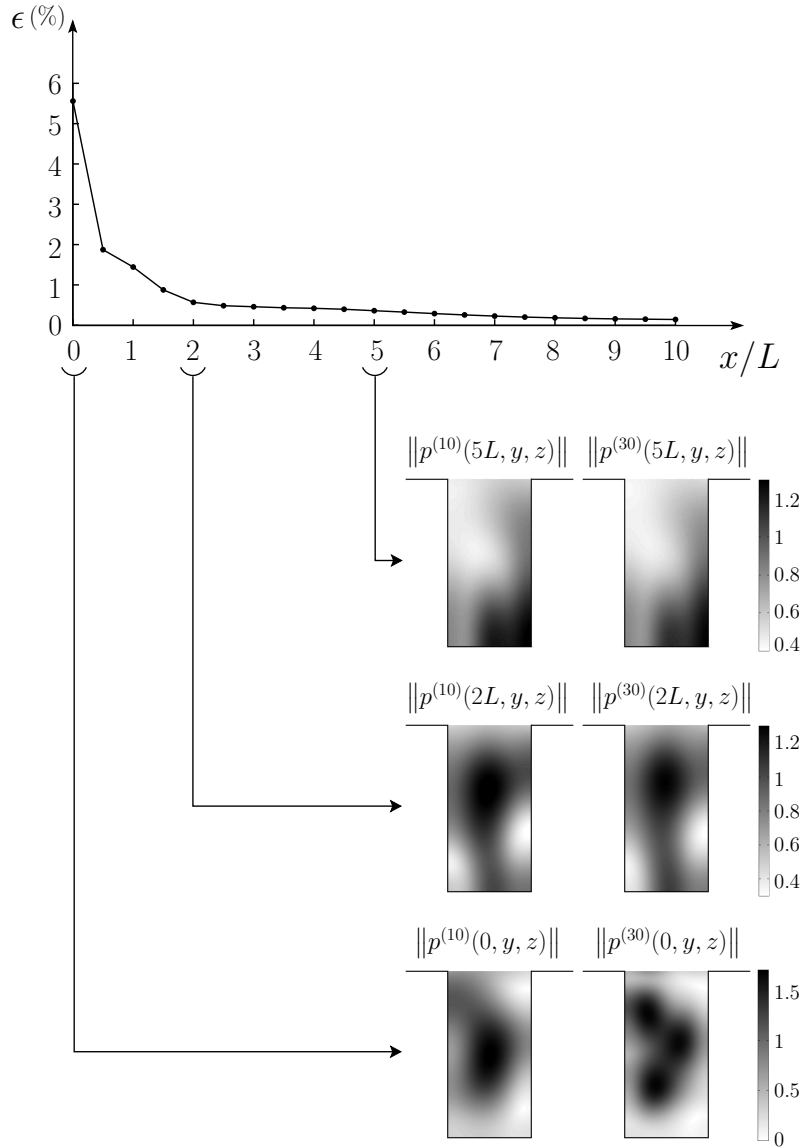


FIG. 4.11 – Relative error (as defined by Eq. 4.30) between the modal solution (4.28) with  $N = \mathcal{N} = 10$  and the same modal solution with  $N = \mathcal{N} = 30$ , as function of the distance from the source plane.

numerically determined. As these are complex modes that decay exponentially while propagating, the number of modes that effectively carry the wave field (emitted by some source in the waveguide) decreases rapidly, so that only a few modes, at a sufficiently large distance from the source, is necessary to accurately model the wave propagation. This gives this approach a real interest for numerical computations, in addition to its interest as a physically meaningful description of the street as a partially confining and guiding medium for the acoustic waves. As a first step and to clearly point out the principles and interests of our approach, only a uniform open waveguide was considered in this paper. Following, cross-section discontinuities, as model of the junctions between buildings, can be considered by using mode matching techniques.

## A4 Formulation in the Perfectly Matched Layers

PML are used as a to avoid non-physical reflections at the boundaries of a necessarily finite domain in a numerical computation. The method works as follows : the solution  $\phi(y, z)$  of the eigenproblem (4.3) above the cavity is analytically continued in the PML with respect to variables  $(y, z)$  to complex variables  $(\hat{y}, \hat{z})$ . The extended solution  $\hat{\phi}$  satisfies

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} \right) \hat{\phi} = 0 \quad (4.31)$$

Complex variables  $(\hat{y}, \hat{z})$  are now written

$$\hat{y}(y) = \int_0^y \tau_y(y') dy', \quad \hat{z}(z) = \int_0^z \tau_z(z') dz' \quad (4.32)$$

with  $\Re\{\tau_{y,z}\} > 0$ ,  $\Im\{\tau_{y,z}\} > 0$ , and  $\tau_y(y \leq l') = 1$ ,  $\tau_z(z \leq d') = 1$  (Fig. 4.5). The results in this paper have been obtained with  $\tau_y(y > l') = \tau_z(z > d') = 1 + j$ .



## Chapitre 5

---

# A COUPLED MODAL-FE METHOD FOR THE WAVE PROPAGATION MODELING IN IRREGULAR OPEN WAVEGUIDES

---

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, est présenté sous la forme d'un article qui sera prochainement soumis au Journal of the Acoustical Society of America. A la suite des travaux présentés au chapitre précédent, il apparaît que la méthode de résolution du problème transverse est trop contraignante pour envisager des applications en acoustique urbaine. En effet, la technique de recherche des valeurs propres dans le plan complexe est assez fastidieuse et peut poser des problèmes de coût numérique. Or, dans le cas de guides de section constante par morceaux, le problème transverse doit être résolu pour chaque section. De plus, par cette technique, l'introduction d'une impédance finie dans les équations peut complexifier significativement la résolution du problème transverse. Cependant, ces travaux ont permis d'étudier le comportement des modes fuyants et de mettre en évidence leurs caractéristiques essentielles. A la lumière de ces travaux, un modèle plus adapté pour traiter la propagation dans des guides d'ondes ouverts non uniformes a été développé et est présenté dans ce chapitre.

### Abstract

In modeling the wave propagation within an urban, U-shaped, street canyon, a particular attention must be paid to the description of the radiation of the wave in the free space above the street, and to its multiple reflections on the building façades, due to their irregularity. The street canyon being considered as an open waveguide with a discontinuously varying cross-section, a coupled modal-FE formulation is proposed to solve the three-dimensional wave equation within. The originally open configuration - the street canyon open in the sky above - is first turned into a close waveguiding structure by using perfectly matched layers. Then the eigenmodes of the resulting waveguide are determined by a FEM computation of the transverse problem. The eigensolutions can finally be used in a multimodal formulation of the wave propagation within the canyon, given its geometry and the end conditions at its extremities.

## 5.1 Introduction

As a medium of sound propagation, the center of urban areas consists of interconnected confined spaces - the street canyons - in which the sound is both confined (the space is enclosed by buildings) and radiated into free space (the canyon is open in the sky above). In modeling the sound propagation within a street canyon, the competitive effects of confinement and radiation are rarely taken into account. The height of the canyon is either assumed as infinite [46, 61, 62] or, equivalently, the opening at the top is represented by a perfectly absorptive ceiling [45]. The effect of the finite height of streets and the radiation of sound above is considered in works dealing with the propagation between two city canyons [52, 65, 28], but are restricted to solutions of the two-dimensional wave equation in the plane of the canyons cross-sections. Hornikx and Forssén recently extended these results to solve the 3D wave equation, but, then, restricted their study to infinite, uniform, canyons [31]. It is the aim of the present study to take into account the effect of both the finite height of the street and the non-uniformities of the buildings enclosing the canyon.

We consider the sound propagation in an open waveguide as an idealized model of a street canyon. In such a geometry, and more generally when the wave is not totally confined by the guiding geometry or medium (embedded elastic waveguide [18], optical fiber [75]), the modes of the waveguide become *leaky*, owing to the radiative losses in the infinite space - the sky over the street in the context of urban noise. In a previous study, it was shown how the leaky modes can be used as a basis for a multimodal formulation of the sound propagation within the open waveguide [57]. The eigenmodes of the transverse problem were calculated by first deriving the dispersion relation for the frequencies of the resonances in a rectangular cavity open in an infinite halfspace. Then, the equation was solved numerically to give the eigenfrequencies and eigenfunctions.

Although this approach suited perfectly the aim of this preliminary study - determining the leaky modes and their properties, and showing, notably, how a limited number of these modes can be sufficient to accurately model the wave field - it might prove inadequate when considering more complex problems, as varying cross-section waveguides. Indeed, the numerical determination of the complex eigenfrequencies is a long process, that should be performed for each new cross-section, together with a non-straightforward mode matching at each cross-sectional change.

An alternative approach, then, is to use perfectly matched layers [5] (PML) to turn the originally open waveguide into a closed waveguiding geometry. Then the eigenmodes of the resulting closed waveguide can be used for a modal formulation of the wave propagation [17]. The modal-FE method, developed in the following paper, consists in deriving first the eigenmodes using a finite elements discretization of the transversal domain. Then, an impedance matrix formulation, similar to the one extensively studied in “classical” waveguides [55, 6, 22], is used to write the wave propagation along the waveguide, given the input and output conditions at the ends of the domain of interest.

## 5.2 2D preliminary study : Wave propagation in a grounded halfspace

In order to clearly describe the principles of the modal-FE method for modeling the wave propagation in partially bounded elongated domains, the 2D case of the propagation over an infinite ground is first considered and analyzed in this section. In this simple case, analytical solutions can be exhibited to validate the method. Let the ground be defined by  $z = \text{constant}$ ,  $z$  the vertical coordinate (the case of a ground with a piecewise constant, range dependent, height, is considered later in the paper). Over this boundary that is assumed to be rigid and perfectly reflecting, one wish to solve the wave equation

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2\right)p = 0, \quad (5.1)$$

with  $k = \omega/c_0$  the wavenumber and  $c_0$  the wave speed, together with end conditions at the extremities of the region of interest, say,  $x = 0$  and  $x = L$ ,  $x$  the range coordinate (the time dependence  $\exp(-j\omega t)$  is omitted).

This problem in an open domain is now substituted to the new problem of a bounded elongated domain, by introducing a PML of finite width  $h$  in the  $z$ -direction, with an homogenous Neumann condition at the output end (Fig. 5.1(a)). Eq. (5.1) becomes

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z}\right) + k^2\right]p(x, z) = 0, \quad (5.2)$$

with  $\tau(z)$  a complex scalar parameter fulfilling

$$\begin{cases} \Re\{\tau\}\Im\{\tau\} > 0 & \text{if } z > 0, \\ \tau(z) = 1 & \text{if } z \leq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

(see details in App. A5). In the sequel, it is chosen so that  $\tau(z > 0) = \text{constant} = A \exp(j\beta)$ , with  $A > 0$  and  $\beta \in ]0, \pi/2[$ .

Then, the transverse domain  $z \in [-l, h]$  is discretized on a  $N$ -nodes grid :  $-l = z_1 < z_2 < \dots < z_{n'} = 0 < \dots < z_N = h$  (Fig. 5.1(b)), and the pressure field is developed on a basis of first order interpolating polynomials  $\psi_n(z)$  :

$$p(x, z) = \sum_{n \geq 1} P_n(x) \psi_n(z) = {}^t \vec{\psi} \vec{P}, \quad (5.4)$$

where the components of  $\vec{P}$  are the values of the pressure at nodes  $z_n$  :  $P_n(x) = p(x, z_n)$ . Following, Eq. (5.2) is reformulated as

$$\vec{P}'' + (M^{-1}K + k^2) \vec{P} = 0, \quad (5.5)$$

where  $''$  denotes the second derivative with respect to  $x$ , and mass and stiffness matrices  $M$  and

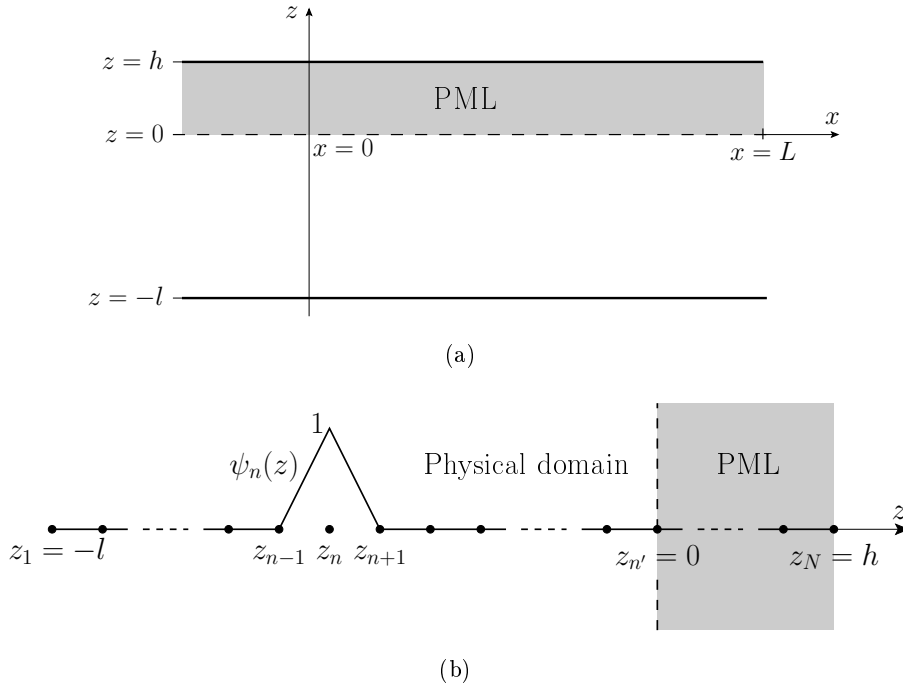


FIG. 5.1 – (a) The halfspace above a rigid and perfectly reflecting plane boundary is represented by a 2D waveguide closed by a PML. (b) The 1D cross-section is discretized on a  $N$ -nodes grid. To each element  $n$  corresponds a first order interpolating polynomial  $\psi_n(z)$ .

$K$  are given by, respectively,

$$M_{mn} = \int_{-l}^h \tau \psi_m \psi_n \, dz, \quad (5.6a)$$

$$K_{mn} = - \int_{-l}^h \frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \, dz. \quad (5.6b)$$

A general solution of Eq. (5.5) can be written as function of the eigenvalues  $\alpha_i^2$ ,  $i \geq 0$ , and eigenfunctions  $\phi_i$  of the matrix  $M^{-1}K$  :

$$\vec{P} = \Phi \left( D(x) \vec{C}_1 + D(L-x) \vec{C}_2 \right), \quad (5.7)$$

where  $\Phi = [\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots]$  and  $D(x)$  is a diagonal matrix given by

$$D_i(x) = e^{jk_i x}, \quad (5.8)$$

with  $k_i = \sqrt{k^2 - \alpha_i^2}$  ( $\Re\{k_i\} \geq 0$ ,  $\Im\{k_i\} \geq 0$ ).  $\vec{C}_1$  and  $\vec{C}_2$  are constant vectors determined by the end conditions at  $x = 0$  and  $x = L$ . Let assume that the condition at  $x = 0$  is defined as a given pressure field  $\vec{P}_0$  and the condition at  $x = L$  as an admittance matrix  $Y_L$  fulfilling  $\vec{Q}(L) = Y_L \vec{P}(L)$ , with  $\vec{Q}$  the vector of the components of  $\partial_x p$  in the basis  $\{\psi_n\}$ . Then, the constants  $\vec{C}_1$  and  $\vec{C}_2$  are

$$\vec{C}_1 = (I - \delta)^{-1} \Phi^{-1} \vec{P}_0, \quad (5.9a)$$

$$\vec{C}_2 = -D^{-1}(L) \delta \vec{C}_1, \quad (5.9b)$$

where

$$\delta = -D(L) (Y_L \Phi + \Phi \Gamma)^{-1} (Y_L \Phi - \Phi \Gamma) D(L), \quad (5.10)$$

with  $\Gamma_{ij} = jk_i \delta_{ij}$ . Note that the admittance matrix in the input plane  $x = 0$  can be written as function of the output admittance matrix  $Y_L$  :

$$Y_0 = \Phi \Gamma (I + \delta) (I - \delta)^{-1} \Phi^{-1}. \quad (5.11)$$

### 5.2.1 Validation, convergence

#### Transverse eigenmodes

In the simple case that is studied in this section, eigenmodes  $(\alpha_i, \phi_i)$  of the transverse eigenproblem

$$\left[ \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \phi = -\alpha^2 \phi \quad (5.12)$$

can be calculated analytically. Eigenvalues are

$$\alpha_i^{(\text{ana.})} = \frac{i\pi}{(\tau h + l)}, \quad i \geq 0, \quad (5.13)$$

while associated eigenfunctions are

$$\phi_i^{(\text{ana.})}(z) = \cos(\alpha_i(\tau z + l)). \quad (5.14)$$

Knockaert and De Zutter showed in 2002 the completeness of these eigenmodes in a parallel plate waveguide with PML termination [38]. Eqs. (5.13) and (5.14) provide reference solutions for a study of the validity and convergence of the finite element computation shown above..

Fig. 5.2(a) shows the spectrum of eigenvalues  $\alpha_i$ , obtained both analytically (Eq. 5.13) and numerically, that is, the eigenvalues of  $M^{-1}K$ . Parameters are  $l = 3$ ,  $h = 2$  (arbitrary units),  $A = 1$  and  $\beta = \pi/4$ , and the interval  $z \in [-l, h]$  is discretized on a regular grid of 50 nodes. Thus  $\Delta z = z_n - z_{n-1} = 0.1$ .

Analytical eigenvalues ('o') display a tilted straight line as a consequence of a rotation, due to the complex stretching (App. A5), and a discretization, due to the PML truncature at a finite width, of the continuous spectrum of the initial semi-infinite halfspace, corresponding to the real axis. From Eq. (5.13) it easily comes that the angle  $\gamma$  between the tilted straight line and the real axis is directly related to the PML parameters  $A$  and  $\beta$ ; notably,  $\gamma$  tends toward  $-\beta$  when the PML is infinitely wide.

The numerical spectrum ('x') obtained using the FEM displays three families of eigenvalues in a typical pitchfork shape [74]. From the origin in the complex  $\alpha$ -plane, the first eigenvalues



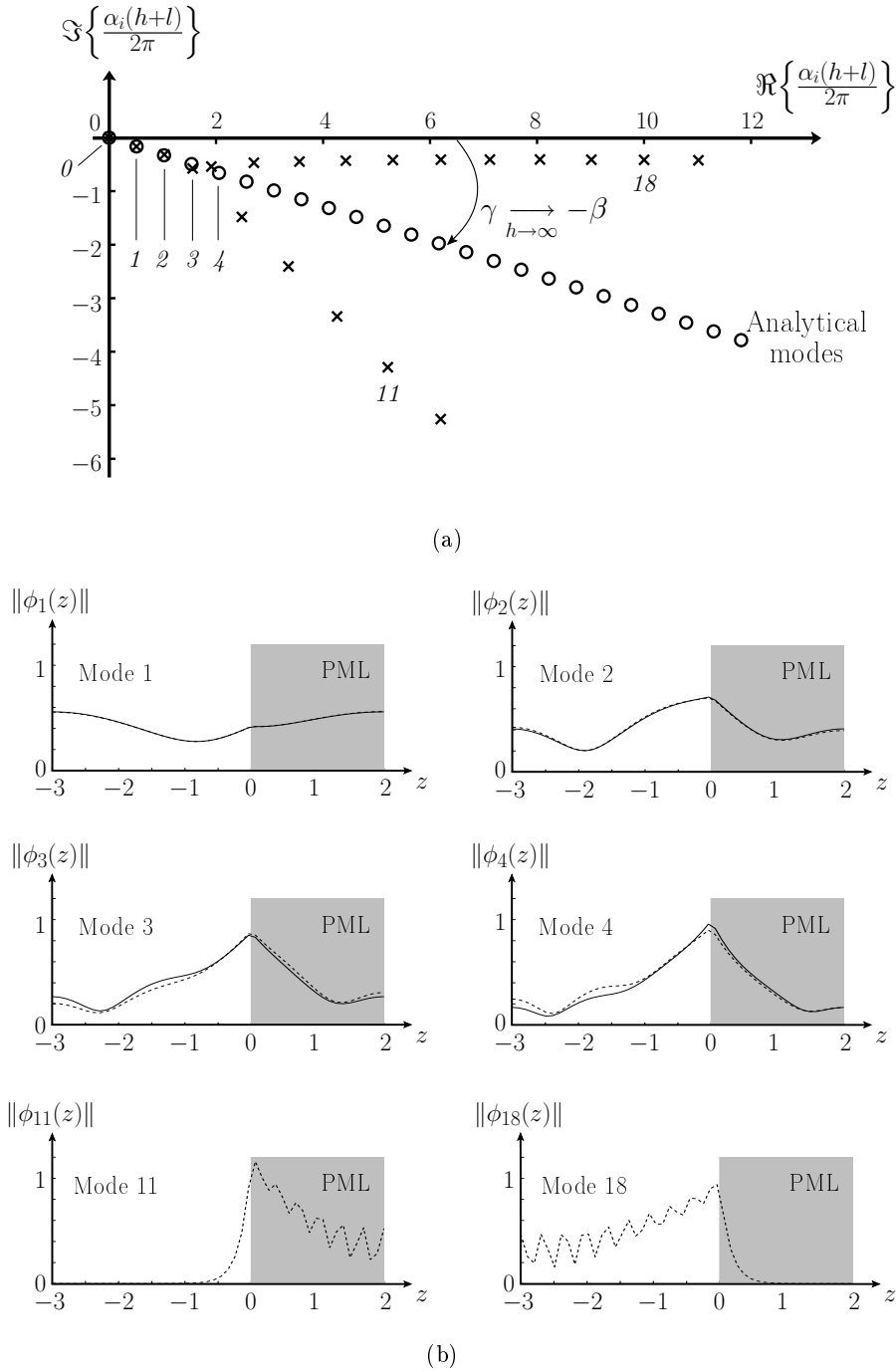
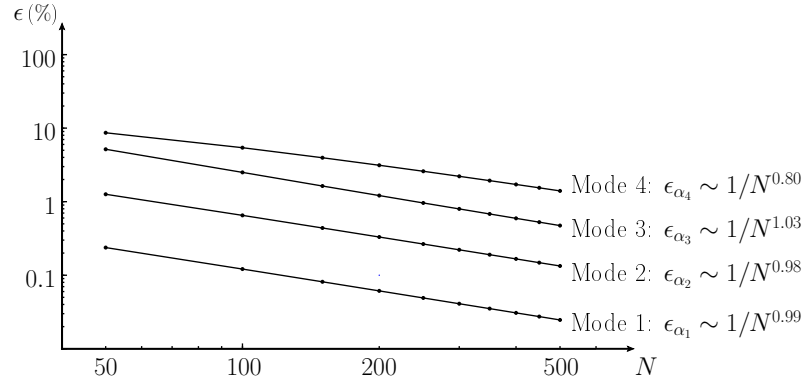


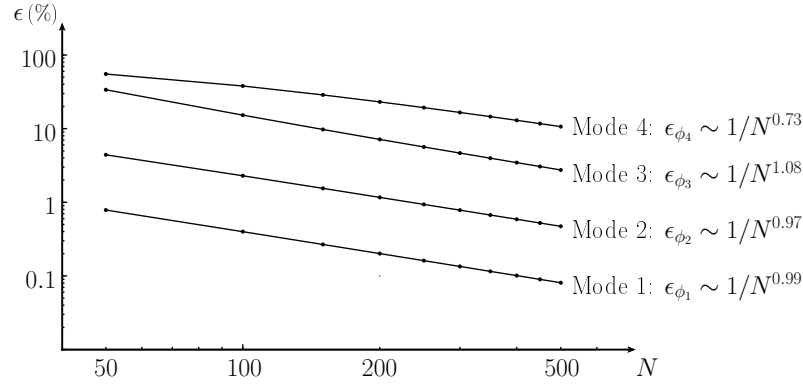
FIG. 5.2 – (a) Spectrum of the transverse eigenvalues  $\alpha_i$  : ‘o’ analytical eigenvalues, ‘x’ FEM. (b) Examples of transverse eigenfunctions, corresponding to labeled eigenvalues in the spectrum : (‘-’) analytical eigenfunctions, (‘- - -’) FEM. Parameters are  $l = 3$ ,  $h = 2$  (arbitrary units),  $A = 1$ ,  $\beta = \pi/4$ , and  $N = 50$ .

follow the path of the analytical eigenvalues and correspond to eigenfunctions located on both the “physical” domain ( $z < 0$ ) and the PML (Modes 0 to 4 of Fig. 5.2(b)). Then the spectrum splits, to display two families of eigensolutions. Eigenvalues close to the real axis correspond to eigenfunctions located mostly in the lower, “physical”, part of the computational domain (Mode 18 of Fig. 5.2(b)), while eigenvalues below the analytical spectrum correspond to eigenfunctions

located mostly in the PML (Mode 13 of Fig. 5.2(b)).



(a)



(b)

FIG. 5.3 – (a) Convergence of the four first eigenvalues when the number of nodes used in the mesh increases. (b) Convergence of the corresponding eigenfunctions.

When the number of nodes in the mesh  $N$  increases, numerical eigenvalues converge to analytical solutions. The convergence, however, is low, with a relative error

$$\epsilon_i^{(\alpha)} = \left| \frac{\alpha_i - \alpha_i^{(\text{ana.})}}{\alpha_i^{(\text{ana.})}} \right| \quad (5.15)$$

decreasing as  $\simeq 1/N$  or slower (Fig. 5.3(a)). In the same way, the convergence of the eigenfunctions, as measured by

$$\epsilon_i^{(\phi)} = \sqrt{\frac{\int_{-l}^h \|\phi_i - \phi_i^{(\text{ana.})}\|^2 dz}{\int_{-l}^h \|\phi_i^{(\text{ana.})}\|^2 dz}}, \quad (5.16)$$

is also quite slow (Fig. 5.3(b)). Thus, even with a large number of nodes in the FEM mesh, very few eigenvalues and eigenfunctions are accurately computed. However, computing the eigenmodes of the transverse problem is not an end in this study, and it is not needed that these modes are explicitly calculated to perform the above described method. Besides, at it will be shown in the following, using both the modes corresponding to analytical solutions and the modes that may first appear as “spurious”, as it is done in Eq. (5.5) and followings, gives the method a more rapid

convergence.

### Computation of a pressure field

The validity and convergence of the modal-FE method is studied in this paragraph by comparison between a reference pressure field and its computation with Eq. (5.7). The chosen reference field, shown in Fig. 5.4(a), is the solution of a “full FE” computation : the domain under study is meshed with triangular elements, with a maximum mesh size (maximum length between two nodes)  $mms = \lambda/10 = 0.05$ ,  $\lambda$  the wavelength. At the input of the waveguide, the source condition is an incident gaussian beam, written as

$$P_{0n} = \exp\left(\frac{-(z_n - z_s)^2}{2\sigma^2} + jk \sin(\theta_z)z_n\right), \quad n \geq 1, \quad (5.17)$$

with  $z_s = -1.5$  the central point of the beam,  $\sigma = 0.4$  the standard deviation (related to the beam width),  $\theta_z = -\pi/8$  the angle of incidence, and  $k = 12.56$  the wavenumber.

To compute this field using the modal-FE method, the radiation condition at the output end of the computational domain is taken as the characteristic admittance matrix  $Y_c$  that can be easily deduced from Eqs. (5.9) and (5.10) by imposing  $\vec{C}_2 = \vec{0}$  (no back travelling wave downstream from the source point) :  $Y_c = \Phi\Gamma\Phi^{-1}$ .

The convergence of the solution with the number of nodes in the  $z$ -direction, as measured by

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\int_{-l}^0 \int_0^L \|p - p_{\text{ref}}(x, z|x_s, z_s)\|^2 dx dz}{\int_{-l}^0 \int_0^L \|p_{\text{ref}}(x, z|x_s, z_s)\|^2 dx dz}}, \quad (5.18)$$

is relatively rapid, with an error decreasing as  $1/N^2$  (Fig. 5.4(b)). Besides, at  $N = 100$  (10 nodes per wavelength), the field is computed with an error  $\epsilon = 5.01\%$  while only 2 of the eigenfunctions are computed with an error of the same order. This implies that the “spurious” modes (*e.g.*, modes 11 and 18 in Fig. 5.2(b)) play a substantial role for the convergence of the method, in addition to the “physical” ones.

### 5.2.2 Propagation over a ground with a piecewise constant, range dependent, height

Now that the modal-FE approach has been formulated in a uniform case - the halfplane was grounded at  $z = -l = \text{constant}$  - the case of an abrupt change of the ground height, as shown in Fig. 5.5, is considered, so that problems with irregular boundaries can be studied in the following.

At the discontinuity, the acoustic pressure  $p$  and the longitudinal component of its gradient,  $\partial_x p$ , satisfy the continuity conditions

$$\begin{cases} p^{(u)} = p^{(d)} & z \in S^{(u)}, \\ \partial_x p^{(u)} = \partial_x p^{(d)} & z \in S^{(u)}, \\ \partial_x p^{(d)} = 0 & z \in S^{(d)} \setminus S^{(u)} \end{cases} \quad (5.19)$$

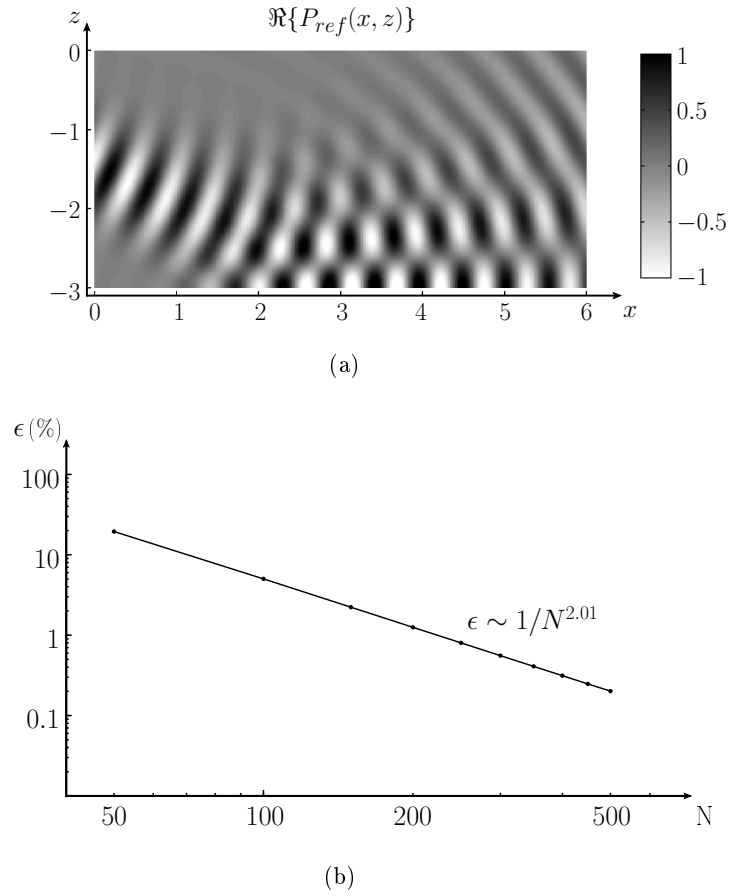


FIG. 5.4 – (a) Reference field considered to evaluate the convergence of the Modal-FE method is the “Full FE” solution of an incident gaussian beam. (b) Convergence of the modal-FE method with the number of nodes  $N$  in the transverse domain  $z \in [-l, h]$ . In these computations,  $l = 3$  (arbitrary units),  $z_s = -1.5$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $\theta_z = -\pi/8$  and  $k = 12.56$ . PML parameters are  $h = 2$ ,  $A = 1$  and  $\beta = \pi/4$ .

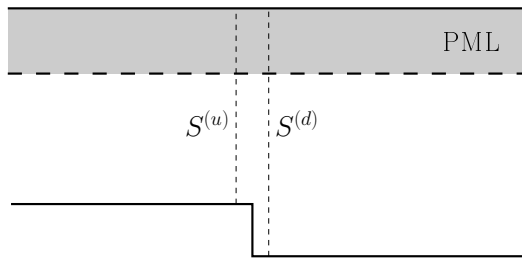


FIG. 5.5 – Cross-section discontinuity.

where superscripts  $(u)$  and  $(d)$  denote variables associated, respectively, to the section upstream and downstream from the discontinuity. Substituting developments of  $p$  and  $\partial_x p$  on the basis  $\{\psi_n\}$  in Eqs. (5.19) straightforwardly leads to the following matricial expressions of the continuity conditions

$$\vec{P}^{(u)} = F \vec{P}^{(d)} \quad (5.20a)$$

$${}^t F \vec{Q}^{(u)} = Q^{(d)} \quad (5.20b)$$

for the wave field, and

$$Z^{(u)} = FZ^{(d)} {}^t F, \quad (5.21)$$

for the impedance matrix  $Z$  ( $Z = Y^{-1}$  is the inverse of the admittance matrix defined previously). When identical FEM meshes (same node coordinates and same interpolating functions) are generated both in  $S^{(u)}$  and  $S^{(d)} \cap S^{(u)}$ , the matching matrix  $F$  is simply  $F_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  the Kronecker symbol.

Then, the wave field over this discontinuity can be computed, following three steps [55] :

- first, both the local transverse eigenproblems upstream and downstream from the discontinuity are solved as described previously in the paper ;
- second, given a radiation admittance or impedance at the output of the computational domain, the input admittance (or impedance) is computed by using alternatively Eqs. (5.11) and (5.21) ;
- third, given an input condition, the pressure field is computed down the street using alternatively Eqs. (5.7) in straight segments and Eqs. (5.20) at cross-section discontinuities.

Fig. 5.6 shows an example of such a computation, and the obtained pressure field is compared with the solution of a “full FE” computation. At the input end of the waveguide, an incident gaussian beam with  $z_s = -1.5$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $\theta_z = -\pi/10$  and  $k = 8$  (Eq. 5.17) is chosen as input condition. For the “full-FE” computation, the maximum mesh size of the triangular mesh is  $mms = \lambda/10 = 0.0785$ , and for the modal-FE computation, the discretization step in the cross-section is  $\Delta z = mms$ . Both methods give very similar results. For example, on the line A-A’ defined by  $z = \text{constant} = z_s$ , both the real part and the phase of the two solutions fit very well.

### 5.3 Case of a 3D open waveguide

In this section, the modal-FE formalism is extended to the case of 3D irregular open waveguides, as shown in (Fig. 5.7). Such a geometry may represent a street canyon with buildings of different sizes. As done before, PML are introduced to substitute the original, open, problem to the problem of a closed, irregular, waveguide.

Following the same procedure as described in the 2D case, the pressure field is developed on a basis of interpolating polynomials  $\psi_n(y, z) : p(x, y, z) = {}^t \vec{\psi} \vec{P}$ , and  $\vec{P}$  is the solution of the matricial wave equation (5.5), with

$$M_{mn} = \int_S \tau \psi_m \psi_n \, dydz, \quad (5.22a)$$

$$K_{mn} = - \int_S \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \frac{\partial \psi_n}{\partial y} + \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \frac{\partial \psi_n}{\partial z} \right) \, dydz, \quad (5.22b)$$

where  $S$  denotes the cross-section.

As in the 2D case, the modal-FE method is compared with a FEM computation performed in a 3D waveguide having a sudden width expansion (Fig. 5.8(a)). For the FEM computation,

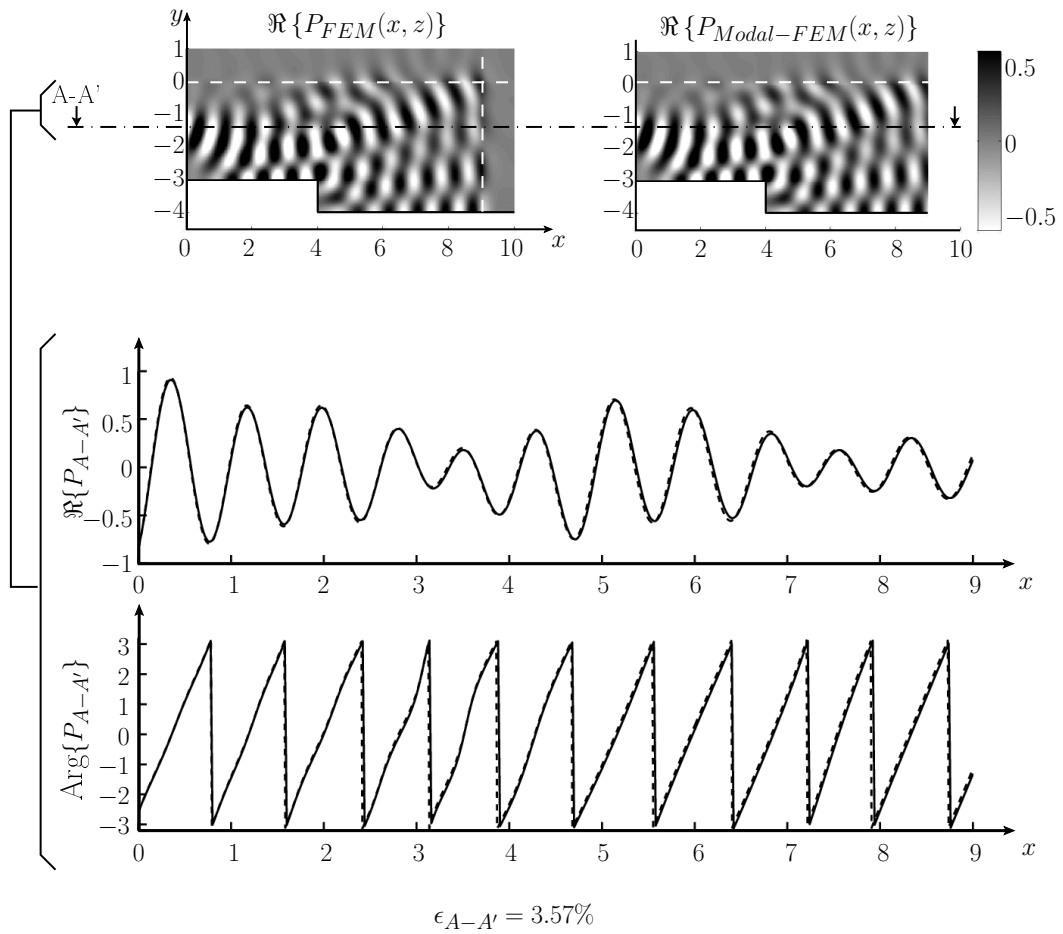


FIG. 5.6 – Validation of the modal-FE method by a 2D FEM computation in the case of cross-section expansion.

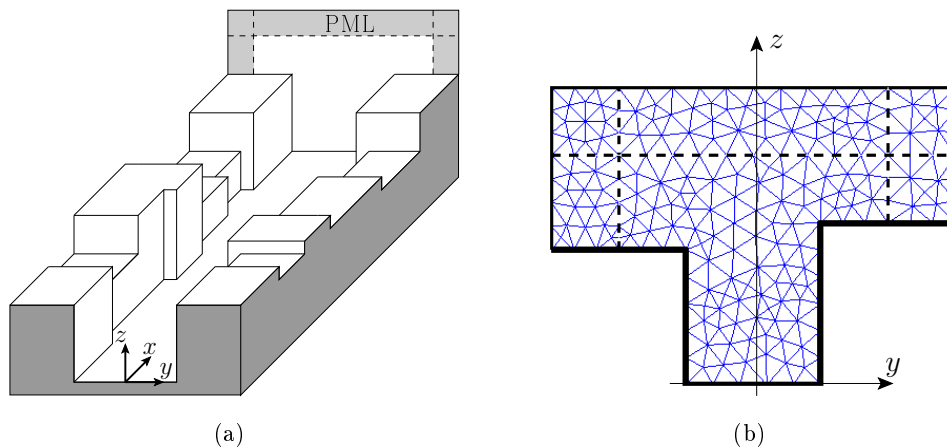


FIG. 5.7 – (a) Example of a 3D irregular open waveguide. (b) Cross-section meshed with triangular elements.

third order interpolating polynomials are used on a tetrahedric mesh with a maximum mesh size  $mms = \lambda/1.36 = 0.25$  (it leads to a  $\sim 72000$  dof discretized problem). For the modal-FE computation, the maximal mesh size of the triangular mesh in the transverse sections is  $mms = \lambda/10 = 0.034$  ( $\sim 4800$  dof). At the input of the waveguide, the source condition is an

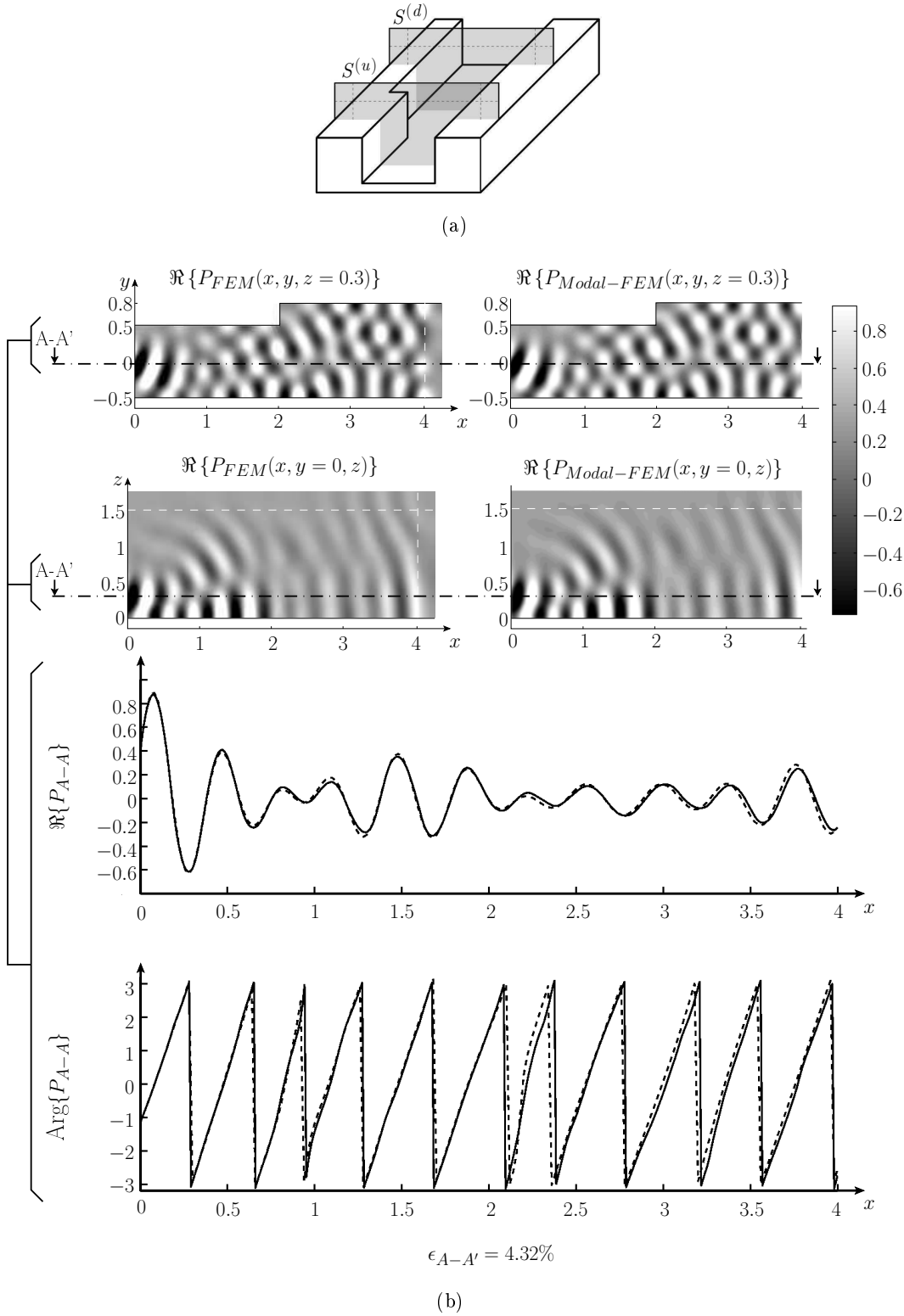


FIG. 5.8 – (a) Sudden width expansion in a 3D open waveguide. (b) Validation of the modal-FE method by a 3D FEM computation in the case of a cross-section expansion, the two plots on top show real parts of the solutions on a  $xy$ -plane with  $z = z_s$  and the two plots below show real parts of the solutions on a  $xz$ -plane with  $y = y_s$ . Then, real part and phase of FEM solution (solid line) and Modal-FE solution (dashed line) are shown along the line A-A defined by  $(y, z) = (y_s, z_s)$ .

incident gaussian beam, written as

$$P_{0n} = \exp \left( \frac{-(y_n - y_s)^2 - (z_n - z_s)^2}{2\sigma^2} + \dots \right. \\ \left. jk[\sin(\theta_y)y_n + \sin(\theta_z)z_n] \right), \quad (5.23)$$

with  $(y_s, z_s) = (0, 0.3)$  the central point of the beam,  $\sigma = 0.2$  the standard deviation (related to the beam width),  $\theta_y = -\pi/8$  the angle of incidence with the  $y$ -axis,  $\theta_z = -\pi/15$  the angle of incidence with the  $z$ -axis and  $k = 18.48$  the wavenumber. Again, the agreement between the two methods is good, with an error  $\epsilon_{A-A'} \simeq 4\%$  estimated on the line A-A' (Fig. 5.8(b)).

An example of computation of the wave field in an irregular open waveguide, displaying a street canyon, enclosed by buildings of different sizes, is shown in Fig. 5.9. The mean width of the canyon is 1 in arbitrary units, with variations up to 15%. The building heights vary from 1 to 1.9. The wavelength of the source - a gaussian beam as in previous results in the paper - is 0.3 : the half-wavelength is thus of the order of size of the wall irregularities. The results clearly shows the waveguiding effect, together with the radiative losses above the street. The scattering by the the façades irregularities results in a complex pattern of the pressure field.

## 5.4 Beat phenomenon between to parallel open waveguides

As it was shown above in the paper and in previous works [57], the modes of a canyon (the originally open waveguide) are determined as the resonances of the cross-section open in an infinite half-space. Therefore, if one consider two parallel identical canyons, one can expect the global waveguiding structure to exhibit coupled eigenmodes : a resonance of the original, single, cross-section will split into two distinct resonances when considering two parallel canyons. One of the resonances corresponds to a symmetrical eigenmode, with respect to the plane of symmetry of the structure, while the other corresponds to an antisymmetrical eigenmode. A numerical computation of the transverse eigensolutions of a “two canyons” structure shows, indeed, such a splitting (Fig. 5.10).

Consider now a source, located in one of the parallel canyons, such that the combination  $p_0 = \phi_{(1,0)}^{(s)} + \phi_{(1,0)}^{(a)}$  is generated in the *two canyons*-structure. In the input plane, say,  $x = 0$ , because of the great similarity between the eigenfunctions of both the symmetrical and antisymmetrical modes, the wave field in one canyon shows a pattern similar to  $2\phi_{(1,0)}$ , while it is almost zero in the second canyon (Fig. 5.11(a)). The propagation of this mode combination along the waveguide,

$$p(x, y, z) = \phi_{(1,0)}^{(s)} e^{jk^{(s)}x} + \phi_{(1,0)}^{(a)} e^{jk^{(a)}x}, \quad (5.24)$$

where  $k^{(s)} = \sqrt{k^2 - \alpha^{(s)2}}$  and  $k^{(a)} = \sqrt{k^2 - \alpha^{(a)2}}$ , results in a beat phenomenon occurring between the two canyons. The propagation constants of the two modes are indeed slightly different (Fig. 5.10(b)), and the modes, that originally ( $x = 0$ ) interfere so that the energy is almost confined in one of the canyons, become out of phase, until the energy is transferred in the second



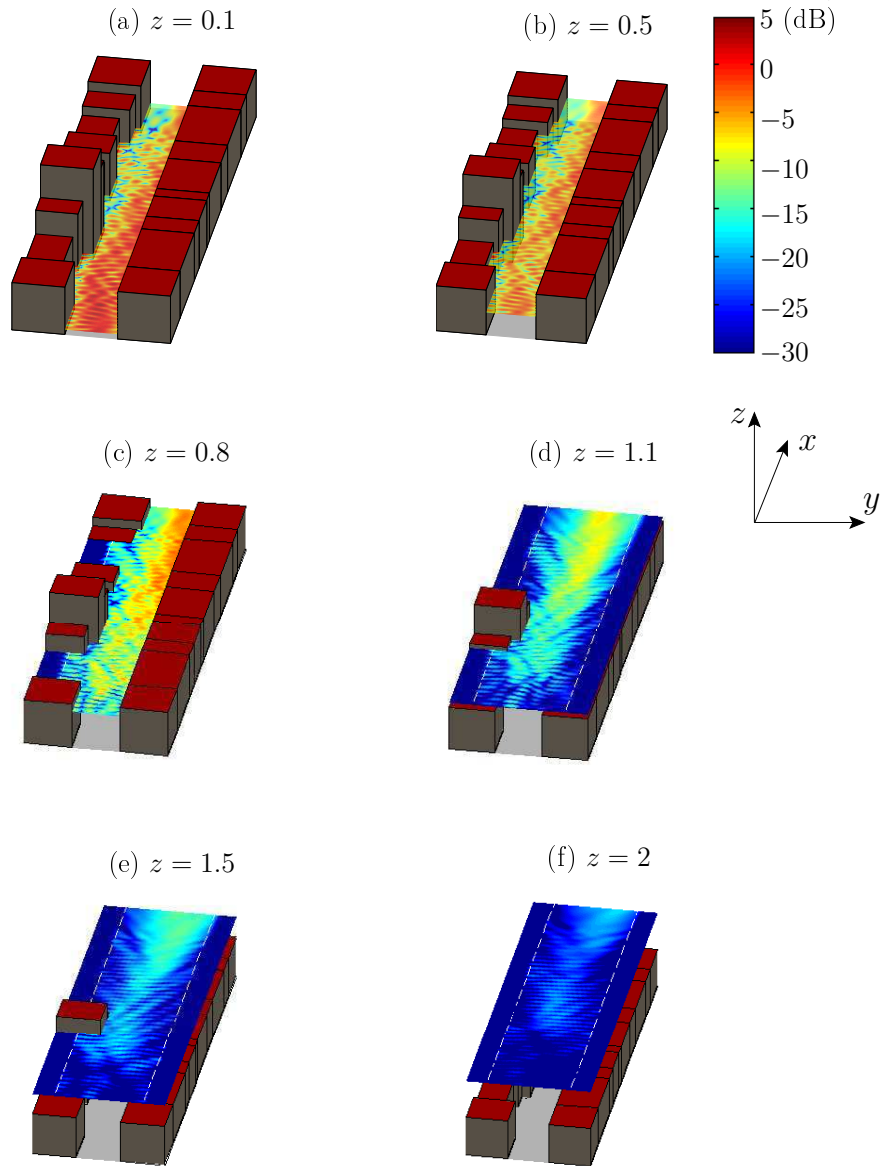


FIG. 5.9 – Example of a pressure field (modulus) in an irregular open waveguide modeling a street canyon, at six different heights. The mean width of the street is 1 (arbitrary units), with variation up to 15%, and the height of the buildings vary from 1 to 1.9. The wavelength is 0.3.

canyon, where, originally, no field was generated.

Two figures are given to illustrate the beat. In a first one, the imaginary part of the propagation constants  $k^{(s)}$  and  $k^{(a)}$  have been artificially put to zero, so that the beat is clearly shown. At a distance  $\eta = |2\pi/\Delta k|$ , where  $\Delta k = k^{(s)} - k^{(a)}$ , the field in the first canyon is almost zero, while it is maximum in the second one. The second shows the exact case, with complex propagation constants. The modes are leaky, lose energy while propagating along the canyons, and, as a consequence, there is no more a real beat, that is, a periodic variation of the amplitude in each waveguide, but only one significative energy transfer. However, a typical wave phenomenon

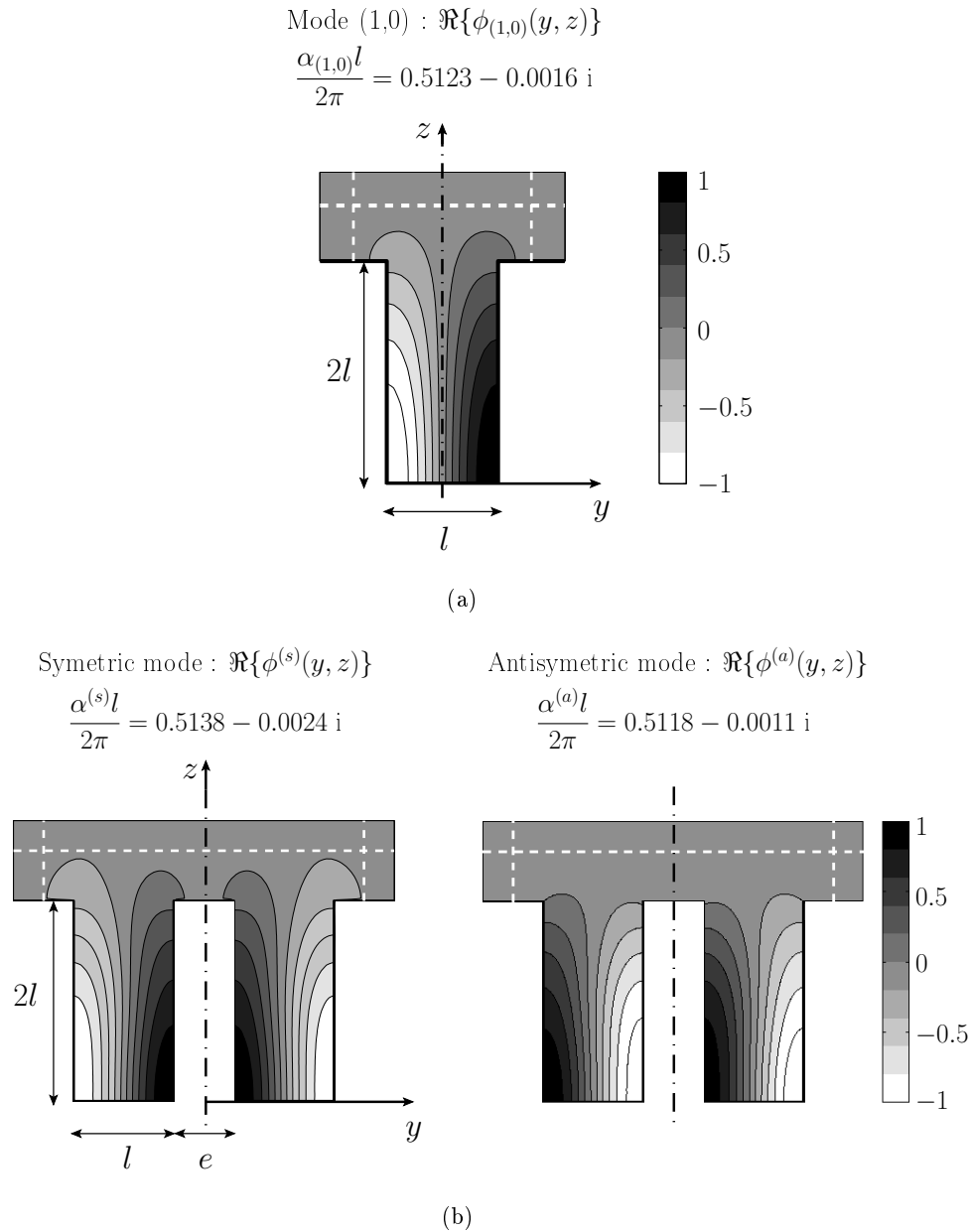


FIG. 5.10 – (a) Example of a resonance of a rectangular cavity open in an infinite halfspace. The eigenmode is labelled as (1,0), referring to the number of vertical and horizontal nodal lines [57] (b) The corresponding coupled eigenmodes, in the case where two identical open rectangular cavities are considered. One of the modes is symmetrical, while the other is antisymmetrical, with respect to the plane  $y = 0$ .

is exhibited in this configuration with two parallel canyons.

## 5.5 Conclusion

A coupled modal-FE method have been proposed in this paper to solve the three-dimensional wave equation in an open waveguide with a discontinuously varying cross-section, chosen as an idealized model for a street canyon. It was shown that, using perfectly matched layers to turn

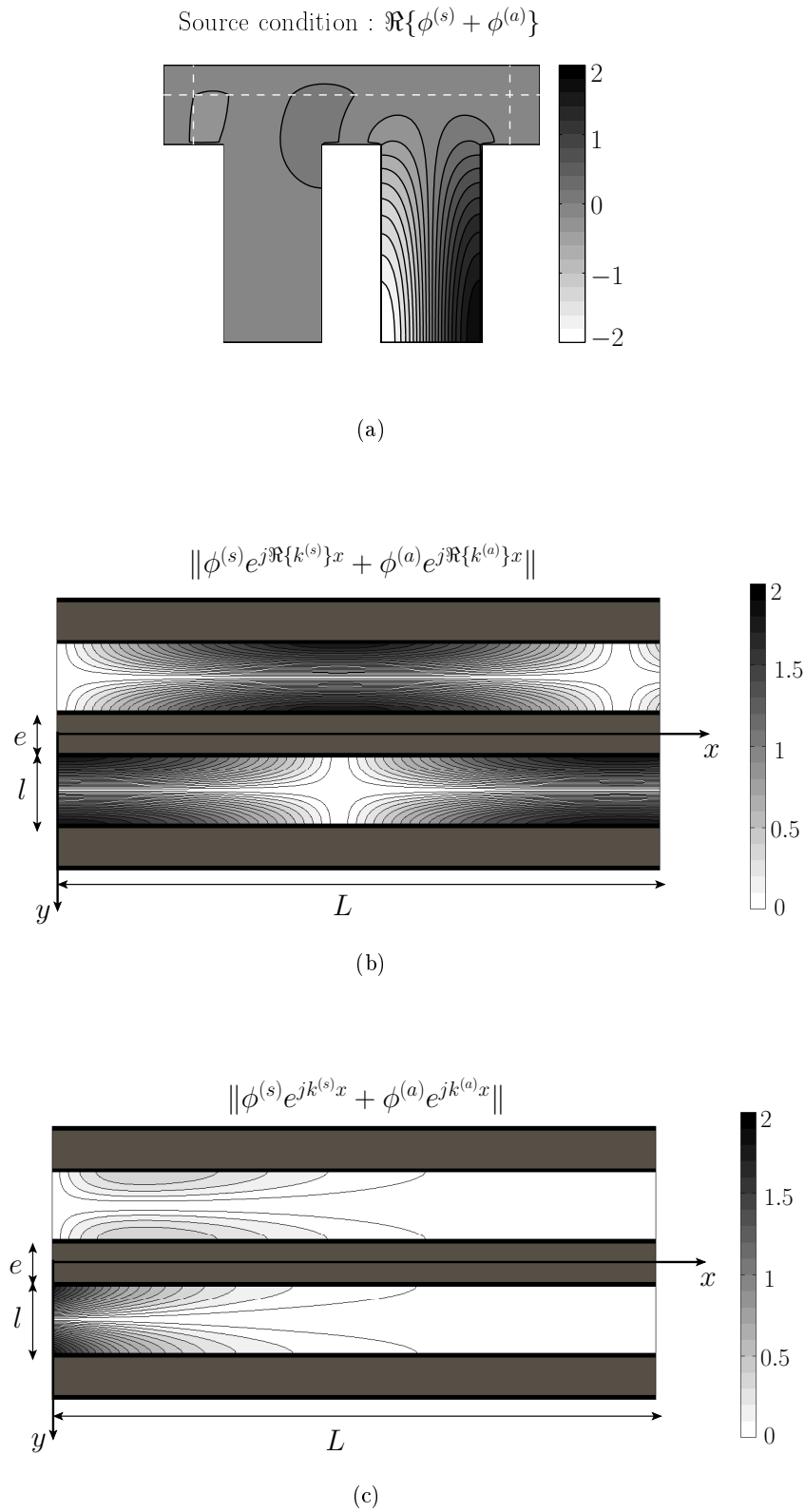


FIG. 5.11 – (a) The combination  $p_0 = \phi_{(1,0)}^{(s)} + \phi_{(1,0)}^{(a)}$  as input condition. (b) The resulting field (modulus) downstream from the source plane, when the imaginary part of the propagation constant  $k^{(s)}$  and  $k^{(a)}$  have been artificially put to zero. (c) The resulting field downstream from the source plane, with exact propagation constants.

---

the originally open configuration to a closed waveguiding structure, a multimodal formulation, similar to that extensively used in “classical” waveguides, can be developed, that allows a computation of the acoustic field in complex geometries of street canyons. As only the transverse problem is discretized and solved with FEM, while the solution in the axial direction involves only simple matrix operations, the proposed approach is not computationally expensive. Moreover, the FEM allows to easily take into account more complicated geometries of the transverse cross-section (for example with a stochastic distribution of geometrical discontinuities on vertical walls). Besides, it was shown in a previous study that, far enough from any source or scatterer, a small number of the leaky modes propagating in the open waveguide may be sufficient to accurately model the wave field; the numerical efficiency of the present method could then be improved by an appropriate reduction of the modal basis.

## A5 On Perfectly Matched Layers (PML)

Consider the propagation of acoustic waves, solutions of the Helmholtz equation

$$(\Delta + k^2)p = f(x, y) \quad (5.25)$$

in the infinite plane  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , that one want to solve numerically. Besides, one assumes that all sources or scatterers are contained in the lower halfspace  $y < 0$ . Thus, it can be useful to restrict the numerical resolution of Eq. (5.25) by imposing non-reflecting conditions on some artificial boundary above the region of interest.

A solution consists in introducing a layer with thickness  $h$  (for example, in region  $y \in [0, h]$ ), in which the wave equation is modified so that outgoing waves are damped while propagating in the layer, and are of negligible amplitude at the outer boundary of the layer. Moreover, the layer must be *perfectly matched* with the physical domain of interest, that is, no reflection of the wave should be generated at the interface ( $y = 0$ ). This is done by applying a complex coordinate stretching on the space variable  $y$  :

$$y \rightarrow \tilde{y} = \int_0^y \tau(y') dy', \quad (5.26)$$

with  $\tau$  a complex scalar function fulfilling

- $\Re\{\tau\}\Im\{\tau\} > 0$ , in the PML domain
- $\tau(y \leq 0) = 1$ , in the physical domain.

In practice,  $\tau$  can be chosen as a constant function in the PML (Fig. 5.12). In this paper, it is chosen so that  $\tau(z > 0) = A \exp(j\beta)$ , with  $A > 0$  and  $\beta \in ]0, \pi/2[$ . Then, the wave equation to be solved is

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) p = f(x, \tilde{y}). \quad (5.27)$$

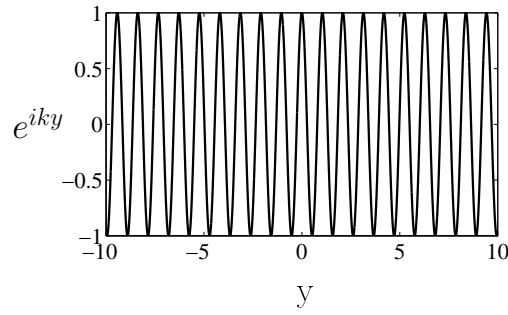
Applying the complex coordinate stretching (5.26) is equivalent to the substitution

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \rightarrow \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \quad (5.28)$$

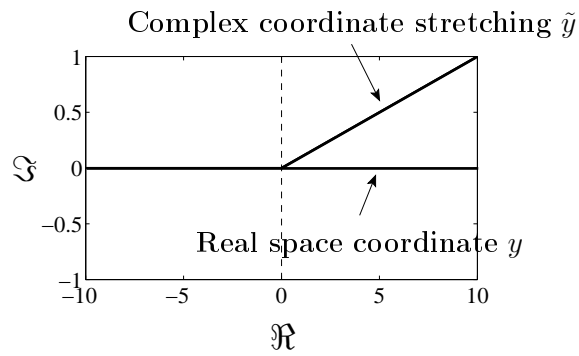
on the derivative with respect to  $y$ , so that the wave equation in the PML is written

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \right) + k^2 \right) p = 0. \quad (5.29)$$

(a) Oscillating wave in the infinite space



(b) Principle of the complex stretching



(c) Damped wave in the PML

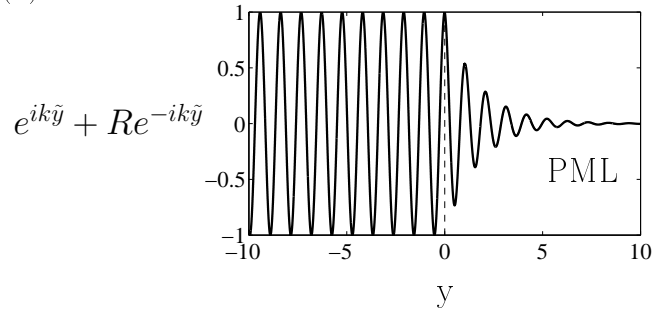


FIG. 5.12 – Complex coordinate stretching. Left : (a) example of a plane propagating wave in an infinite space, (b)  $\tilde{y}$  is a complex coordinate stretching of the space coordinate  $y$ , (c) the outgoing wave is damped with a negligible reflection at the PML truncature.



## Chapitre 6

---

# APPLICATIONS URBAINES DE LA MÉTHODE MODAL-FE

---

Dans ce chapitre, trois études indépendantes sont proposées à partir de l’implémentation numérique de l’approche couplée Modal-FE décrite au chapitre précédent. Les simulations et les résultats présentés ici proviennent de problèmes de géométrie bidimensionnelle et tridimensionnelle. Tout en étant effectuées dans des cas plus ou moins académiques, chacune de ces trois études est directement inspirée de problématiques liées à l’acoustique urbaine. En effet, les géométries choisies sont, d’une part, proches de celles pouvant être rencontrées en milieu urbain. D’autre part, l’intérêt est dans ce chapitre recentré autour de certains points clé de la modélisation des champs acoustiques en milieu urbain comme par exemple les irrégularités de façades (physiques et géométriques) ou la prise en compte de phénomènes météorologiques (vent, gradient de température).

En revanche, les études présentées ici n’ont, d’une manière générale, pas pour but premier d’être exhaustives. Toutefois, ces illustrations permettent d’entrevoir les potentialités de la méthode Modal-FE pour décrire, à l’avenir, des situations urbaines typiques et réalistes. Par ailleurs, ces derniers travaux de thèse permettent, au travers d’observations qualitatives et quantitatives des résultats présentés, de mettre en évidence et d’interpréter certains phénomènes physiques intéressants pouvant aussi ouvrir des perspectives de recherche.

### 6.1 Etude de l’influence de la largeur des bâtiments sur le champ acoustique

Dans les travaux traitant de la propagation dans une rue “canyon” présentés dans ce document (chapitres 4 et 5), la largeur des bâtiments formant la rue a été considérée comme infinie. Le but de l’étude suivante est de vérifier la validité de cette approximation à partir de comparaisons entre deux cas de figure (figure 6.1) :

- une rue, de largeur  $l$ , formée par deux bâtiments identiques de hauteur  $d$  et de largeur finie  $l_b$  (schéma de gauche de la figure 6.1),
- une rue de mêmes dimensions  $l$  et  $d$ , mais “creusée” dans un plan infini (schéma de droite



de la figure 6.1), conformément à l'hypothèse faite au cours des chapitres précédents.

Dans la suite, les dimensions de la cavité sont  $l = d = 1$  (unités arbitraires) et la largeur des bâtiments est telle que  $0.25 < l_b < 2$ . Par simplicité, toutes les parois sont supposées rigides et parfaitement réfléchissantes. L'ensemble des autres paramètres de calcul utilisés est donné dans le tableau 6.1.

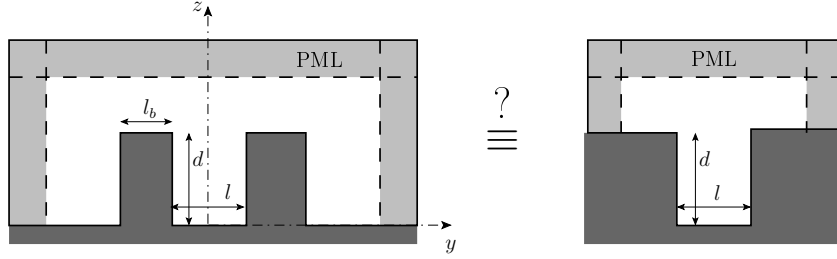


FIG. 6.1 – Deux géométries possibles pour modéliser une rue comme un guide d'ondes : une rue formée par deux bâtiments de largeur finie  $l_b$  (à gauche) et une rue représentée par un sillon dans un plan infini (à droite).

type	maillage		PML			Faisceaugaussien (figures 6.4 et 6.5)		
paramètre	mms	N	$A$	$\beta$	$h$	$(y_s, z_s)$	$\sigma$	$k$
valeur	0.0425	$\sim 1200$	1	$\pi/4$	0.3	(0, 0.5)	0.2	18.48

TAB. 6.1 – Paramètres de calcul utilisés pour les résultats des figures 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5 (unités arbitraires).

Une première comparaison entre ces deux cas de figure consiste à étudier l'évolution des solutions du problème transverse lorsque la largeur des bâtiments  $l_b$  varie. Seules sont considérées ici les solutions correspondant aux résonances de la cavité 2D ouverte de dimensions  $(l, d)$ , soit les modes fuyants du guide ouvert. Les autres modes, localisés principalement dans les PML à l'extérieur de la rue (cf. Chapitre 5), sont évidemment propres à chaque cas de figure considéré et sont, par conséquent, bien plus dépendants de la valeur de  $l_b$ , finie ou infinie. Comme cela a été vu au chapitre 4, ces résonances de la cavité, au moins les premières, peuvent être indexées par un couple d'entiers  $(p, q)$  correspondant au nombre de lignes nodales verticales et horizontales des fonctions propres. Dans la suite, les valeurs propres seront donc notées  $\alpha_{(p,q)}^{(l_b)}$  et les fonctions propres  $\phi_{(p,q)}^{(l_b)}$ .

A titre d'exemple, la figure 6.2 montre pour trois modes l'évolution, en fonction de la largeur des bâtiments  $l_b$ , des écarts relatifs

$$\epsilon_{\Re}^{(p,q)} = \left| \frac{\Re\{\alpha_{(p,q)}^{(l_b)}\} - \Re\{\alpha_{(p,q)}^{(\infty)}\}}{\Re\{\alpha_{(p,q)}^{(\infty)}\}} \right| \quad (6.1)$$

et

$$\epsilon_{\Im}^{(p,q)} = \left| \frac{\Im\{\alpha_{(p,q)}^{(l_b)}\} - \Im\{\alpha_{(p,q)}^{(\infty)}\}}{\Im\{\alpha_{(p,q)}^{(\infty)}\}} \right| \quad (6.2)$$

par rapport aux parties réelles et imaginaires des valeurs propres  $\alpha_{(p,q)}^{(\infty)}$  obtenues dans le cas de bâtiments infiniment larges.

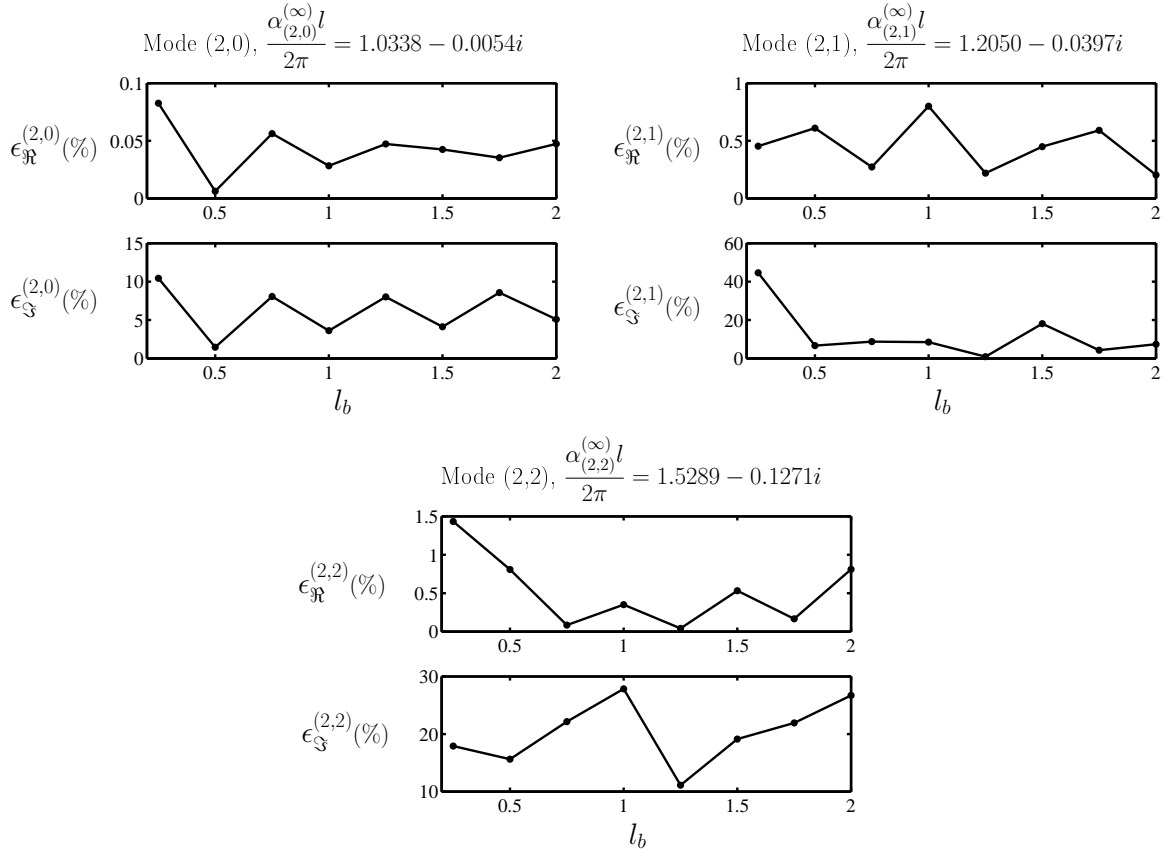


FIG. 6.2 – Evolution des écarts relatifs  $\epsilon_{\Re}^{(p,q)}$  (Eq. 6.1) et  $\epsilon_{\Im}^{(p,q)}$  (Eq. 6.2), respectivement associés à la partie réelle et à la partie imaginaire des valeurs propres  $\alpha_{(p,q)}^{(l_b)}$ , avec  $p = 2$  et  $q = [0, 1, 2]$ , en fonction de la largeur  $l_b$  des bâtiments délimitant la rue.

La partie réelle des valeurs propres  $\alpha_{(p,q)}^{(l_b)}$  varie très peu avec la largeur des bâtiments de part et d'autre de la rue et reste très proche de celle obtenue dans le cas limite  $l_b \rightarrow +\infty$  même pour de petites valeurs de  $l_b$ . Cette valeur dépend donc essentiellement des paramètres “intérieurs” de la rue,  $l$  (largeur) et  $d$  (hauteur). Il apparaît en effet que le calcul des valeurs propres dans le cas où le rayonnement n’est pas pris en compte (une condition de Dirichlet homogène est imposée en haut de la rue),

$$\alpha_{(p,q)}^{(\text{Dir.})} = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{(q + 1/2)\pi}{d}\right)^2} \quad (6.3)$$

donne une bonne estimation de la partie réelle des valeurs propres  $\alpha_{(p,q)}^{(l_b)}$ , avec une erreur relative de quelques pourcents, comparable à celle calculée précédemment et montrée en figure 6.2.

La partie imaginaire  $\Im\{\alpha_{(p,q)}^{(l_b)}\}$  montre quant à elle une dépendance plus forte à la géométrie globale du problème avec des variations de l’ordre de 10% à 20% par rapport à la valeur limite  $\Im\{\alpha_{(p,q)}^{(\infty)}\}$ . Pour ce type de modes propres où localement, dans la cavité, l’effet du rayonnement apparaît comme une petite perturbation par rapport au cas *non rayonnant* (condition de Dirichlet, cf. ci-dessus et Chapitre 4), la géométrie globale du problème influe surtout sur la partie imaginaire des valeurs propres.

Une deuxième comparaison est effectuée et concerne les fonctions propres  $\phi_{(p,q)}^{(l_b)}$  associées aux valeurs propres étudiées précédemment. La figure 6.3 montre le module de ces fonctions propres pour les différentes valeurs de  $l_b$  considérées.

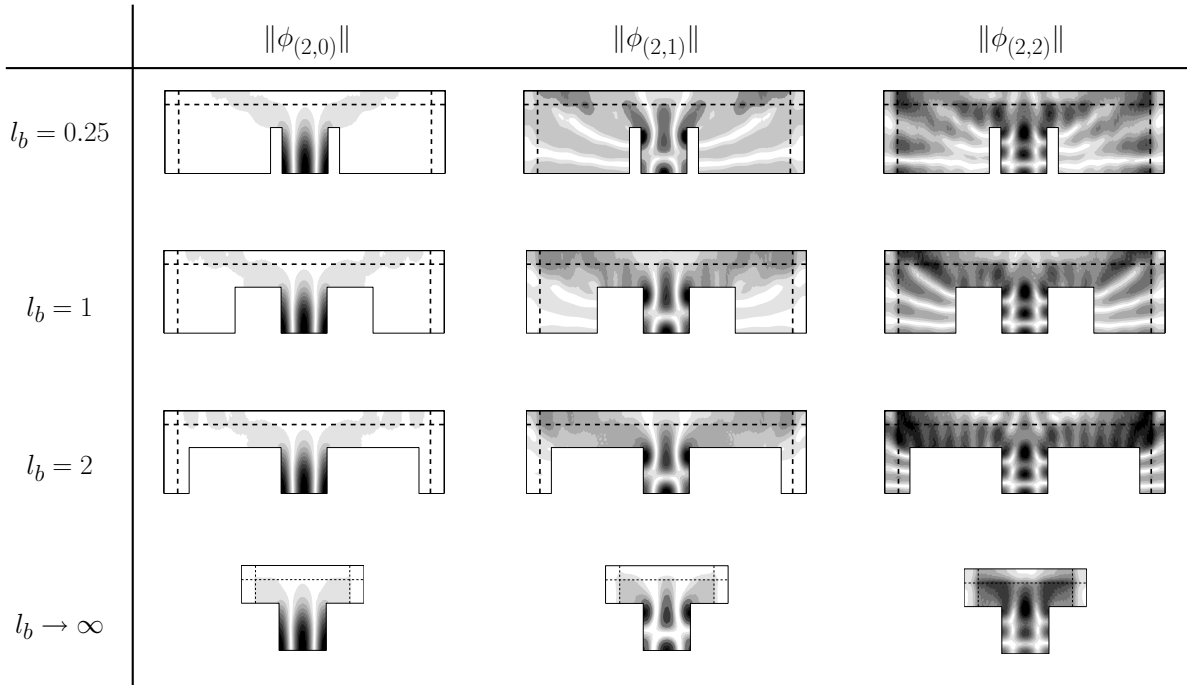


FIG. 6.3 – Exemples de fonctions propres  $\phi_{(p,q)}^{(l_b)}$  (module), pour 4 valeurs de la largeur  $l_b$  des bâtiments délimitant la rue *canyon*.

Il apparaît, d'emblée, que les fonctions  $\phi_{(p,q)}^{(l_b)}$  à l'intérieur de la rue sont très semblables quelle que soit la valeur de  $l_b$ . Ceci peut être lié à la faible dépendance de la partie réelle des valeurs propres à ce paramètre : les modes propres étudiés ici, les résonances localisées dans la rue, dépendent essentiellement des dimensions intérieures  $l$  et  $d$  de la rue.

A l'extérieur de la rue, bien sûr, les fonctions propres varient plus significativement lorsque la valeur de  $l_b$  est modifiée.

Les comparaisons précédentes, sur les valeurs propres ou les fonctions propres transverses, n'ont concerné qu'une partie des solutions de ce problème. Or, comme nous l'avons vu précédemment (Chapitre 5) les contributions des autres solutions du problème transverse sont significatives. Aussi une étude de l'influence du paramètre  $l_b$  sur un exemple de champ de pression global, dans et en dehors de la rue, permettra-t-elle de compléter l'étude menée.

On considère pour cela le champ généré par un faisceau gaussien incident (les paramètres sont donnés dans le tableau 6.1) dans une rue infinie. Pour chaque valeur de  $l_b$ , le champ dans les sections transversales pour différentes valeurs de  $x$  (distance au plan source) est représenté sur la figure 6.4.

Conséquence de la faible dépendance à la largeur  $l_b$  des fonctions propres à l'intérieur de la rue, le champ acoustique dans cette région est très similaire d'une configuration à l'autre (ici,  $l_b = 0.25, 1, +\infty$ ). La répartition spatiale et l'amplitude du champ de pression acoustique restent

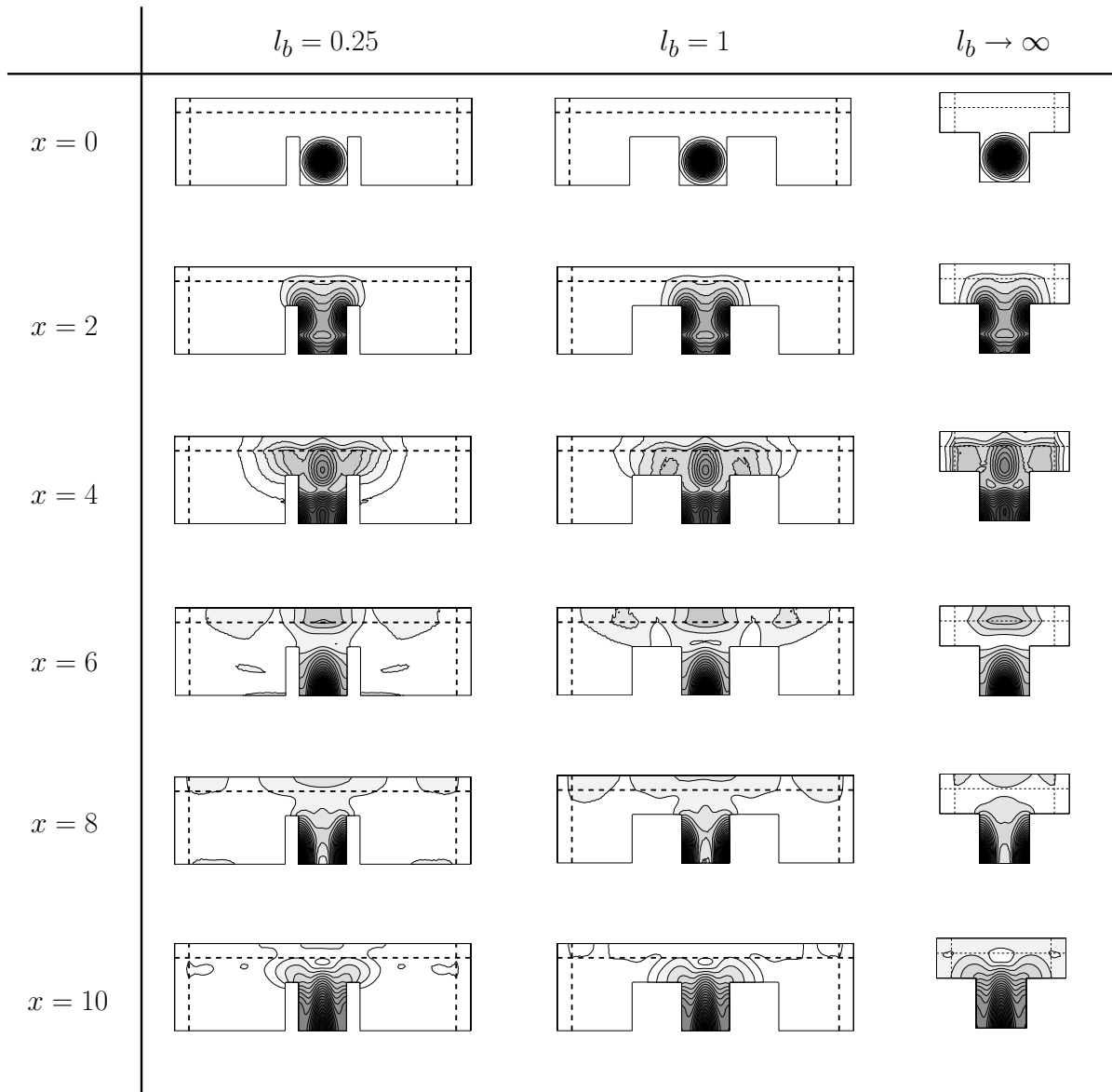


FIG. 6.4 – Coupes transversales du champ de pression (module) généré par un faisceau gaussien incident, pour trois valeurs de la largeur  $l_b$  des bâtiments ( $l_b = 0.25, 1, +\infty$ ). Les géométries considérées sont invariantes dans la direction longitudinale.

quasiment identiques.

Il résulte de cette première observation que l'énergie rayonnée - la quantité d'énergie qui "sort" de la rue - dépend, elle aussi, très peu de la largeur des bâtiments formant la rue. Une mesure simple de la décroissance d'énergie dans la rue en fonction de la distance  $x$  au plan source (abscisse à laquelle la condition initiale est imposée pour le calcul du champ, cf. Chapitre 5), pour les différentes valeurs de  $l_b$ , confirme cette observation (figure 6.5). La quantité représentée sur cette figure est le rapport

$$E(x) = \frac{\int_0^d \int_{-l/2}^{l/2} \|p(x, y, z)\|^2 dy dz}{\int_0^d \int_{-l/2}^{l/2} \|p(0, y, z)\|^2 dy dz} \quad (6.4)$$

entre le champ  $\|p(x, y, z)\|^2$  intégré dans la section de la rue à l'abscisse  $x$  et à l'abscisse  $x = 0$  (dans le plan source).

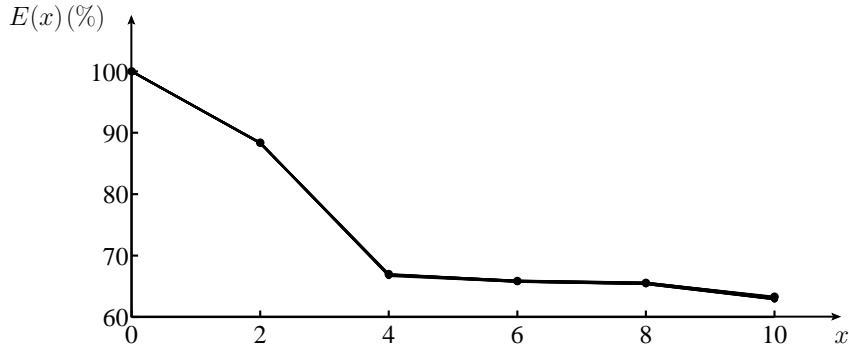


FIG. 6.5 – Décroissance de l'énergie acoustique à l'intérieur de la rue (équation (6.4)) en fonction de la distance au plan source  $x = 0$ , pour trois valeurs de la largeur  $l_b$  des bâtiments ( $l_b = 0.2, 1, +\infty$ ). Les trois courbes sont superposées, avec des écarts relatifs inférieurs à 1%.

Si la quantité globale d'énergie rayonnée au cours de la propagation est peu dépendante de  $l_b$ , la répartition du champ rayonné est bien sûr plus étroitement liée à la géométrie globale du problème étudié. Les champs représentés sur la figure 6.5, notamment au-dessus de la rue, montrent en effet des variations significatives.

Ainsi, dans l'étude du champ acoustique à l'intérieur d'une rue générée par une source elle-même localisée dans cette rue, l'approximation  $l_b \rightarrow +\infty$  correspondant à des bâtiments formant la rue infiniment large est raisonnable. Les solutions obtenues sont très proches des solutions du problème réaliste où  $l_b$  est finie. L'approximation a l'avantage de simplifier tant l'approche théorique du problème (voir notamment le chapitre 4) que la simulation numérique et le coût des calculs (le domaine à discrétiser peut être alors réduit autour du domaine d'intérêt : la rue).

Toutefois, la validité de cette approximation reste liée principalement à deux hypothèses :

- la source (le champ source) est ici localisée à l'intérieur de la rue. Cette configuration confère aux modes localisés dans la rue, peu dépendants de  $l_b$ , un rôle dominant dans la construction du champ. On peut supposer que l'influence de la géométrie globale sur le champ généré par une source placée à l'extérieur de la rue sera plus importante.
- De part et d'autre de la rue formée par des bâtiments de largeur finie, le demi-espace  $z > 0$  est ici supposé infini et libre (figure 6.1) : il n'y a pas d'autre rue ou bâtiment. Lorsque l'environnement au voisinage de la rue est plus complexe, la largeur  $l_b$  des bâtiments peut jouer un rôle plus important.

## 6.2 Prise en compte d'une impédance finie aux façades

Dans l'ensemble des travaux présentés dans ce document, les parois des domaines étudiés ont été, par simplicité, supposées rigides et parfaitement réfléchissantes, et des conditions de Neumann homogènes ont alors été écrites à ces frontières. Or, dans la réalité, les façades et les toits des bâtiments, ou les différents types de sol rencontrés en milieu urbain peuvent absorber

de l'énergie sonore. Les propriétés d'absorption de telles surfaces sont par exemple utilisées en acoustique des salles ou en acoustique urbaine pour atténuer les niveaux sonores d'environnements trop bruyants. Le dimensionnement de ces traitements acoustiques peut être alors réalisé par des simulations numériques.

La prise en compte, dans l'approche Modal-FE, de surfaces absorbantes est présentée dans cette section. Leur influence est également étudiée au travers de plusieurs configurations d'absorption sur les façades de la rue. Sans vouloir décrire une situation urbaine typique et réaliste, l'étude proposée ici a pour principal objectif de mettre en évidence certains effets dus à la présence d'hétérogénéités aux frontières du domaine d'étude.

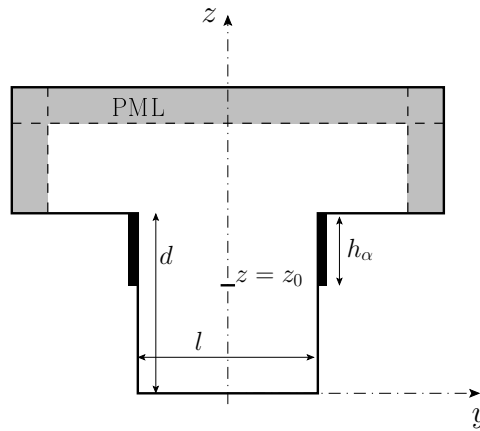


FIG. 6.6 – Les parois verticales de la cavité représentant la section transverse de la rue admettent deux types de conditions aux limites : pour  $0 < z < z_0$ , les parois sont supposées rigides et parfaitement réfléchissantes (condition de Neumann homogène) et, sur une hauteur  $h_\alpha$  (pour  $z_0 < z < d$ ), les parois sont supposées absorbantes (équation. 6.5).

Pour prendre en compte des surfaces non parfaitement réfléchissantes, la condition de Neumann imposée jusqu'à présent est remplacée par une condition mixte

$$\partial_n p = qp, \quad (6.5)$$

où  $\partial_n$  désigne la dérivée normale à la paroi, et  $q = jk/\zeta$ , avec  $\zeta$  l'impédance de surface, supposée localisée, du matériau constituant la surface absorbante. L'équation d'ondes, sous sa forme discrétisée admet alors un terme supplémentaire, et s'écrit

$$\vec{P}'' + (M^{-1}(K + Q) + k^2) \vec{P} = \vec{0}, \quad (6.6)$$

où les matrices  $M$  et  $K$  sont les matrices de masse et raideur définies par les équations (5.6). La matrice  $Q$  est définie par

$$Q_{mn} = \int_{\Gamma} q \psi_m \psi_n \, d\Gamma, \quad (6.7)$$

où  $\Gamma$  désigne la frontière du domaine. Dans le cas de conditions de Neumann homogènes, où  $q = 0$ , la matrice  $Q$  est nulle et la forme classique de l'équation d'ondes discrétisée (5.5) est retrouvée. Dans le cas où des conditions mixtes sont écrites pour certaines parties de  $\Gamma$ , la matrice  $Q$  est

alors calculée, et une solution générale de (6.6) peut être écrite en fonction des valeurs propres  $\alpha_i^2$ ,  $i \geq 0$ , et des fonctions propres  $\phi_i$  de la matrice  $M^{-1}(K+Q)$ , sous la forme de l'équation (5.7).

Par simplicité, l'impédance  $\zeta$  est ici calculée à partir du modèle de Delany-Bazley [16], comme cela peut être rencontré pour décrire les matériaux usuels en acoustique environnementale et urbaine [32]. La résistivité au passage de l'air  $\sigma_m$  du matériau est le seul paramètre utilisé dans ce modèle. Dans cette étude, la résistivité choisie est  $\sigma_m = 10000$  (kPa.s.m<sup>-2</sup>), ce qui correspond à des matériaux peu absorbants comme par exemple le bois. L'impédance  $\zeta$  étant dépendante de la fréquence, tous les résultats présentés dans cette section sont obtenus à une fréquence fixe telle que  $l \approx 3\lambda$ . Tous les paramètres de calcul sont donnés dans le tableau 6.2.

type	maillage		PML			Faisceau gaussien		
paramètre	mms	N	$A$	$\beta$	$h$	$(y_s, z_s)$	$\sigma$	$k$
valeur	0.05	~1400	1	$\pi/4$	0.25	(0, 0.5)	0.2	18.48

TAB. 6.2 – Paramètres de calcul utilisés pour les résultats des figures 6.7 et 6.8 (unités arbitraires).

Dans l'étude proposée dans cette section, les façades des deux bâtiments formant la rue comprennent deux parties distinctes (figure 6.6). La partie inférieure ( $0 < z < z_0$ ) est supposée parfaitement réfléchissante et la partie supérieure ( $z_0 < z < d$ ) admet une impédance  $\zeta$  finie. Par commodité, dans la suite de cette section,  $h_\alpha$  désigne la hauteur de la zone absorbante. L'étude consiste alors à observer l'influence de  $h_\alpha$  sur les solutions du problème. Les dimensions de la cavité sont  $d = l = 1$  (unités arbitraires) et la valeur de  $h_\alpha$  est telle que  $0 \leq h_\alpha \leq d$ . Un premier cas limite pour lequel  $h_\alpha = 0$  correspond au cas où les façades sont parfaitement réfléchissantes sur toute leur hauteur, le deuxième cas limite ( $h_\alpha = d$ ) correspondant au cas inverse où les façades sont absorbantes sur toute leur hauteur.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au comportement des solutions du problème transverse. De la même manière que dans la section 6.1, l'étude est à ce niveau restreinte aux solutions correspondant aux résonances de la cavité ouverte. Les observations sont effectuées sur les fonctions propres indexées  $\phi_{(3,q)}$  avec  $q = 1, 2, 3$ . Lorsque  $h_\alpha$  évolue, chacune de ses trois solutions du problème transverse est suivie par continuité de déplacement des valeurs propres dans le plan complexe. La figure 6.7 montre l'évolution du module de chacune de ces trois fonctions propres quand  $h_\alpha$  augmente.

Lorsque la hauteur  $h_\alpha$  des zones absorbantes est petite devant la hauteur  $d$  de la rue (voir par exemple le cas  $h_\alpha = 0.2d$  sur la figure 6.7), la présence de cette zone absorbante en haut de la rue a pour effet d'accroître le confinement des modes dans la cavité : les fonctions propres représentées, déjà localisées dans la rue lorsque  $h_\alpha = 0$  du fait de la discontinuité géométrique en  $z = d$ , gardent globalement la même allure spatiale, mais sur une hauteur plus faible, réduite par la discontinuité physique sur la condition aux frontières induite par les zones absorbantes.

Lorsque  $h_\alpha$  augmente, cet effet de confinement des modes dans la rue s'accroît, puis s'estompe au profit d'une "redistribution" spatiale des modes : les modes  $\phi_{(p,q)}$  choisis initialement,

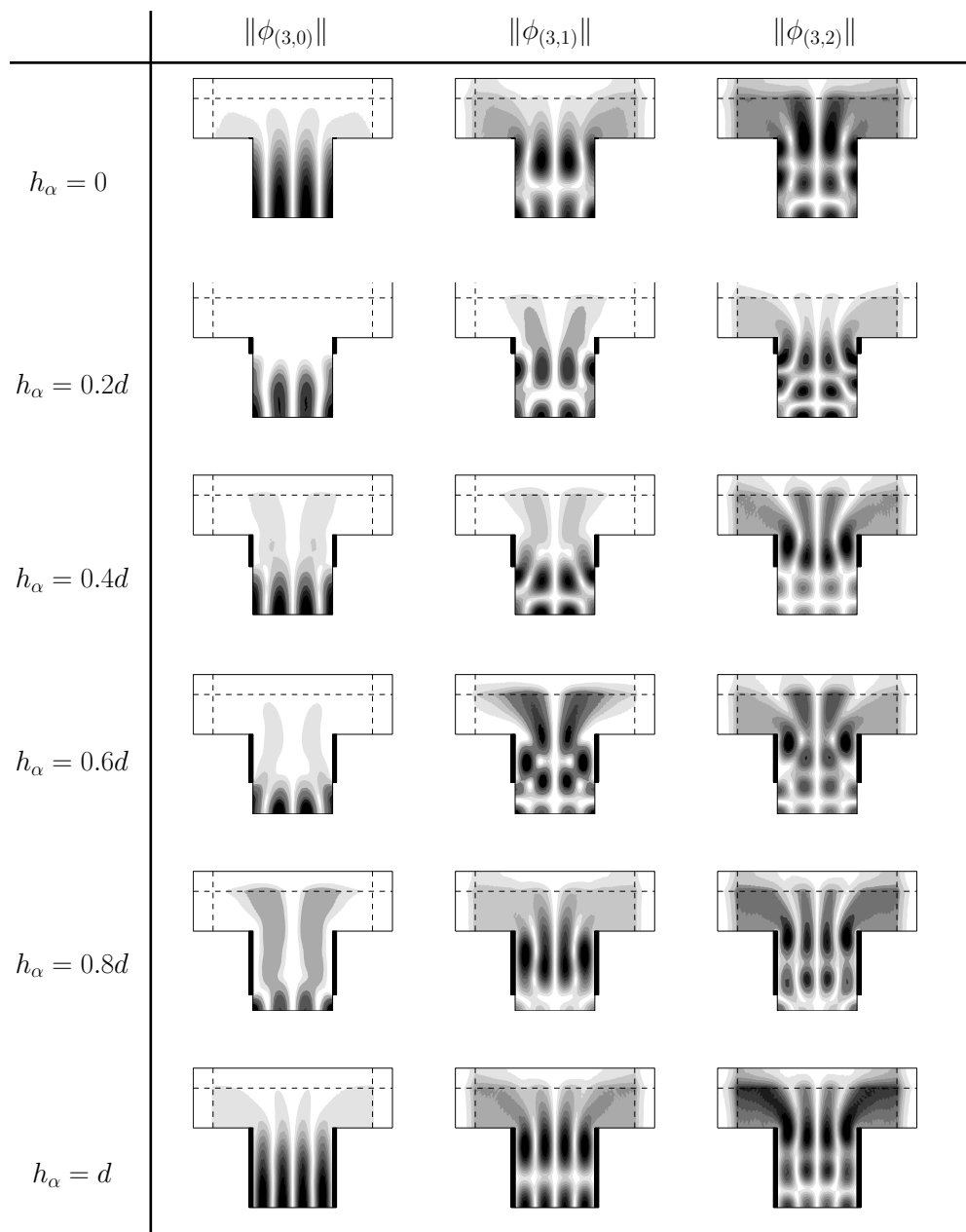


FIG. 6.7 – Comparaison de l'allure (module) des fonctions propres  $\|\phi_{(p,q)}\|$  telles que  $p = 3$  et  $q = [1, 2, 3]$  pour différentes hauteurs  $h_\alpha$  des parois absorbantes sur les façades.

d'abord perturbés par une petite zone absorbante, évoluent progressivement vers des modes du problème entièrement traité, perturbés par une petite zone réfléchissante. Apparaissent enfin, lorsque  $h_\alpha$  se rapproche de  $d$ , ces modes *limites*, vers lesquels les modes initiaux ont bifurqués, du fait du choix de suivre leurs valeurs propres par continuité dans le plan complexe. Le confinement de ces nouveaux modes, semble, qualitativement, comparable à celui des modes *rigides* ; il n'y a en tout cas plus d'effet de confinement visible.

Deux remarques peuvent être ajoutées à ces observations. D'une part, l'effet de confinement dû à l'ajout d'une petite zone absorbante semble d'autant plus marqué que l'ordre du mode dans la direction verticale - l'indice  $q$  - est faible. A l'état initial ( $h_\alpha = 0$ ), la localisation du mode



dans la rue est elle-même plus grande lorsque  $q$  est petit (cf. chapitre 4). D'autre part, la phase transitoire, au cours de laquelle les solutions du problème "rigide" perturbé évoluent vers les solutions du problème entièrement "traité" intervient pour des valeurs de  $h_\alpha$  plus faibles lorsque l'indice  $q$  est plus grand : vers  $h_\alpha = 0.8d$  pour  $\phi_{(3,0)}$ ,  $h_\alpha = 0.6d$  pour  $\phi_{(3,1)}$ , et  $h_\alpha = 0.4d$  pour  $\phi_{(3,2)}$ .

Pour approfondir ces observations qualitatives réalisées sur les solutions du problème transverse, une étude de l'influence de  $h_\alpha$  sur l'évolution du champ de pression au cours de la propagation dans la rue est à présent proposée. Le champ produit par un faisceau gaussien incident dans une rue infinie et uniforme est ici calculé (paramètres du faisceau donnés dans le tableau 6.2). Pour comparer ces différentes situations, la décroissance d'énergie dans la rue en fonction de la distance  $x$  au plan source est mesurée à l'aide de l'indicateur  $E(x)$  défini par l'équation (6.4). La figure 6.8 montre l'évolution de  $E(x)$  pour  $h_\alpha = 0, 0.1d, 0.2d, 0.4d, 0.6d, 0.8d$  et  $d$ .

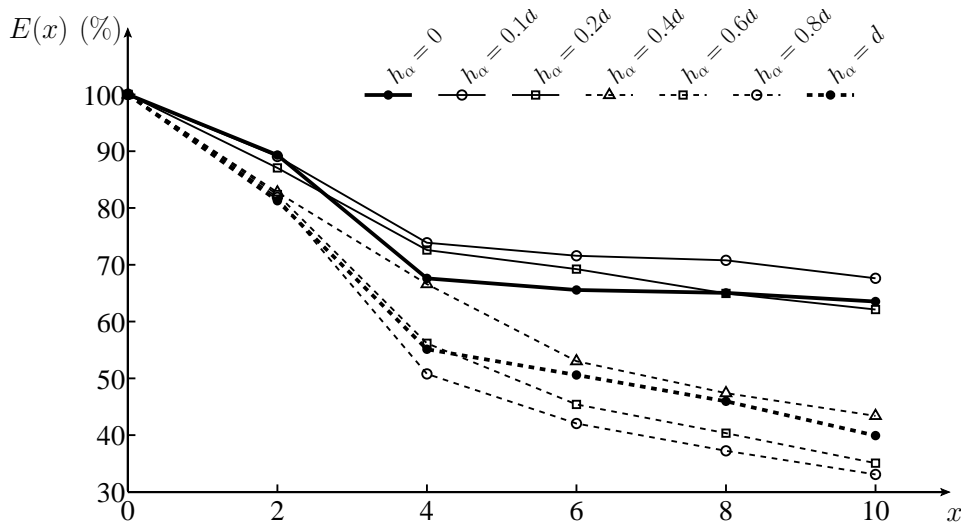


FIG. 6.8 – Evolution de l'estimateur  $E(x)$  le long du guide pour différentes hauteurs  $h_\alpha$  des parois absorbantes sur les façades.

La diminution monotone de  $E(x)$  traduit les pertes d'énergie au cours de la propagation. Lorsque les façades sont parfaitement réfléchissantes sur toute leur hauteur, deux zones principales, de pente différente, peuvent être discernées dans l'évolution de l'estimateur  $E$ . En  $x = 0$ , la condition de source est développée sur la totalité des fonctions propres obtenues par résolution du problème transverse. Or, lors de la propagation, la plupart de ces modes perdent pratiquement toute leur énergie sur une très courte distance (section 4.4.2 du chapitre 4). Dans la zone  $0 < x < 4$ , la pente, relativement forte, correspond aux pertes d'énergie liées à l'extinction rapide de ces modes. Au bout d'une certaine distance ( $x \geq 4$  dans la figure 6.8), seuls les modes les moins fuyants, dont l'amortissement est plus lent, ont une contribution significative. Ainsi, dans la zone  $4 < x < 10$ , la pente est beaucoup plus faible.

Comme nous l'avons vu, l'ajout de matériau absorbant sur une hauteur  $h_\alpha$  en haut des façades peut entraîner un plus grand confinement des fonctions propres du problème transverse. Lors de la propagation, cet effet de confinement contribuant à réduire les pertes par rayonnement est

en concurrence avec un effet opposé d'absorption de l'énergie par le matériau d'impédance finie. Lorsque  $h_\alpha$  est petite devant  $d$ , les effets de confinement sont assez forts (voir la discussion de la figure 6.7) et ont tendance à dominer sur les effets d'absorption par le matériau. Ainsi, la décroissance de l'énergie à l'intérieur de la rue est plus lente (courbe de la figure 6.8 correspondante à  $h_\alpha = 0.1d$ ). Lorsque  $h_\alpha$  augmente, les effets d'absorption dominent à leur tour et les pertes d'énergie sont d'autant plus importantes que  $h_\alpha$  est grande. Notamment, pour  $h_\alpha = 0.8d$ , en  $x = 10$ , un écart de l'ordre de 30% avec le cas initial  $h_\alpha = 0$  est observé. Le cas limite  $h_\alpha = d$  correspondant à un spectre de modes très différent du cas initial, sans effet apparent de confinement, la courbe obtenue ne suit plus la tendance décrite précédemment, et son interprétation est moins aisée, les effets de localisation par la géométrie et d'atténuation par les parois interagissant de manière complexe.

Cette étude a donc permis, d'une part, d'exposer comment des conditions de parois absorbantes peuvent être implémentées dans la méthode Modal-FE, et d'autre part, de mettre en évidence certains effets liés à la présence d'hétérogénéités de condition aux parois d'une cavité ouverte. D'un point de vue académique, ces effets liés aux hétérogénéités physiques des frontières pourraient être étudiés de manière plus approfondie en simplifiant le problème au cas des résonances d'une cavité non rayonnante. Dans une application liée à l'acoustique urbaine, il conviendrait de prendre en compte des "traitements" acoustiques plus réalistes en considérant différents types de matériaux dont les impédances seraient calculées plus précisément et pour des répartitions différentes sur les bâtiments, comme par exemple dans une récente étude proposée par Hornikx et Forssén [32].

### 6.3 Applications de l'approche Modal-FE : deux exemples à deux dimensions

Dans cette section, deux exemples d'application de l'approche Modal-FE sont proposés et illustrés par des résultats dans le cas simple bidimensionnel :

- la diffusion d'une onde par une surface irrégulière,
- le phénomène d'"ombre acoustique" provoquée par un écran.

Dans ce deuxième exemple, une prise en compte d'effets micro-météorologiques dans l'approche Modal-FE est notamment proposée.

#### 6.3.1 Diffusion d'une onde par une surface irrégulière

Il a été montré, au chapitre précédent, comment la propagation d'une onde au-dessus d'un plan présentant des variations discontinues de hauteur peut être modélisé par l'approche Modal-FE. Il est donc possible, à deux ou trois dimensions, d'utiliser cet outil pour étudier la diffusion par une surface irrégulière et d'en caractériser les propriétés (loi de diffusion. . .).

Dans les exemples qui suivent, l'onde incidente est un faisceau gaussien, réfléchi sur un plan infini, uniforme (Fig. 6.9 à gauche) ou localement irrégulier (figure 6.9 à droite). Par simplicité, la surface, rigide, est choisie parfaitement réfléchissante, mais une condition d'admittance finie

peut tout à fait être prise en compte (cf. section 6.2). Les paramètres de calcul utilisés dans ces simulations sont donnés dans le tableau 6.3. Notons que la taille des irrégularités de la surface irrégulière est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde ( $\lambda = 0.34$ , unité arbitraire, cf. figure 6.9).

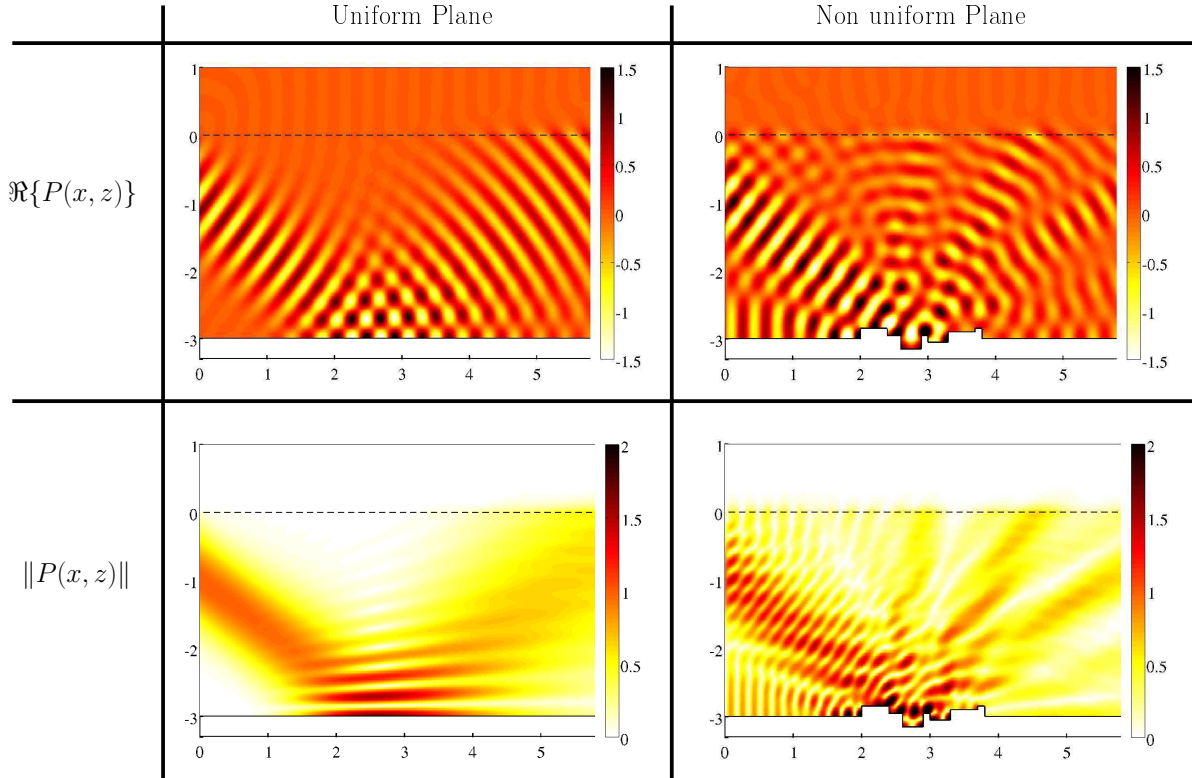


FIG. 6.9 – Réflexion d'un faisceau gaussien incident sur un plan infini. Les champs sont représentés en partie réelle et en module. Dans la colonne de gauche, le plan infini est uniforme et dans la colonne de droite, une partie du plan infini est irrégulière.

type	maillage		PML			faisceau gaussien			
paramètre	mms	N	$A$	$\beta$	$h$	$(x_s, z_s)$	$\sigma$	$\theta$	$k$
valeur	0.02	200	1	$\pi/4$	1	$(0, -1)$	0.5	$-\pi/5$	18.48

TAB. 6.3 – Paramètres de calcul utilisés pour les résultats de la figure 6.9 (unités arbitraires).

Dans le cas du plan uniforme, le faisceau gaussien incident est réfléchi uniquement dans la direction spéculaire en respectant les lois de Snell-Descartes. En revanche, dans le cas du plan localement irrégulier, le faisceau est réfléchi dans la direction spéculaire, mais également diffusé dans d'autres directions.

Même si, dans cette illustration de la méthode, l'interprétation des résultats demeure qualitative, les champs représentés sur la figure 6.9 contiennent toute l'information nécessaire pour étudier quantitativement la diffusion par cette surface irrégulière. En effet, en utilisant des algorithmes usuels de traitement de signal sur ce type de champs diffusés (Transformée de Fourier spatiale par exemple), il pourrait être envisagé de caractériser précisément les lois de réflexion

de ce type de diffuseurs. La diffusion par les façades étant un des points clé de la description des champs acoustiques en milieu urbain (l'utilisation de *diffuseurs urbains* est par ailleurs un sujet d'étude, actuellement), l'approche développée peut-être un moyen efficace de caractérisation de ces objets.

### 6.3.2 Ombre acoustique et effets micro-météorologiques

Dans cette section, la prise en compte d'effets micro-météorologiques est proposée au travers d'une application courante en acoustique urbaine : l'étude de "l'ombre acoustique" produite à l'arrière d'un écran acoustique placé au voisinage d'une source. Le demi-espace au dessus d'un plan infini défini par  $z = -5$  (figures 6.10(a) et (b)) est ici considéré. Le domaine est tronqué par une PML d'épaisseur  $h = 0.5$  dans le domaine  $z > 0$ . Toutes les parois (sol et écran) sont supposées rigides et parfaitement réfléchissantes. Un faisceau gaussien incident est généré en amont du domaine d'étude. L'ensemble des paramètres de calculs est donné dans le tableau 6.4.

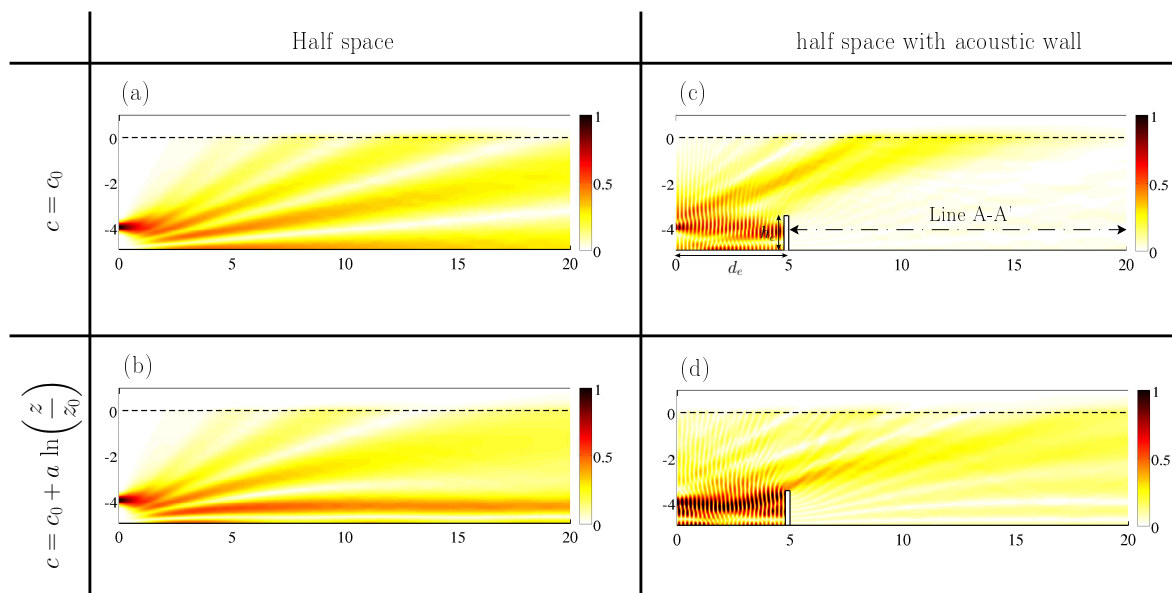


FIG. 6.10 – Champ acoustique produit par un faisceau gaussien incident. (a) Demi espace infini dans lequel la célérité des ondes  $c_0$  est constante (milieu homogène). (b) Demi espace infini dans lequel la célérité des ondes  $c(z)$  est une fonction de la coordonnée transverse (milieu hétérogène). (c) Le milieu est homogène et un écran acoustique de hauteur  $h_e = 1.5$  est placé à une distance  $d_e = 5$  de la source. (d) Même situation que (c) en considérant le milieu hétérogène.

type	maillage		PML			faisceau gaussien				Profil de célérité		
paramètre	$mms$	N	$A$	$\beta$	$h$	$(x_s, z_s)$	$\sigma$	$\theta$	$k$	$c_0$	$z_0$	$a$
valeur	0.02	275	1	$\pi/4$	0.5	(0, -4)	0.15	0	18.48	340	-4.9	10

TAB. 6.4 – Paramètres de calcul utilisés pour les résultats des figures 6.10, 6.11 (unités arbitraires).

En premier lieu, le milieu de propagation - l'air - est supposé homogène et la célérité des ondes acoustiques  $c_0$  est constante. La figure 6.10(a) montre le champ obtenu dans les conditions décrites ci-dessus, avec les zones d'interférences destructives et constructives classiques de ce type de champs. Un écran acoustique, de hauteur  $h_e = 1.5$ , est maintenant placé à une distance  $d_e = 5$  du plan source (figure 6.10(c)). L'écran produit naturellement un phénomène d'ombre acoustique (ce phénomène est couramment exploité dans les aménagements urbains pour protéger des habitations de zones bruyantes). Cet effet d'ombre acoustique est mis en évidence dans la figure 6.11 : sur une ligne A-A' définie par  $x \in [5, 20]$  et  $z = -4.25$  (derrière l'écran, à mi-hauteur), le champ montre une atténuation importante. Par ailleurs, l'écran acoustique crée également des ondes réfléchies et des ondes diffractées, traduites par une structure interférentielle plus complexe.

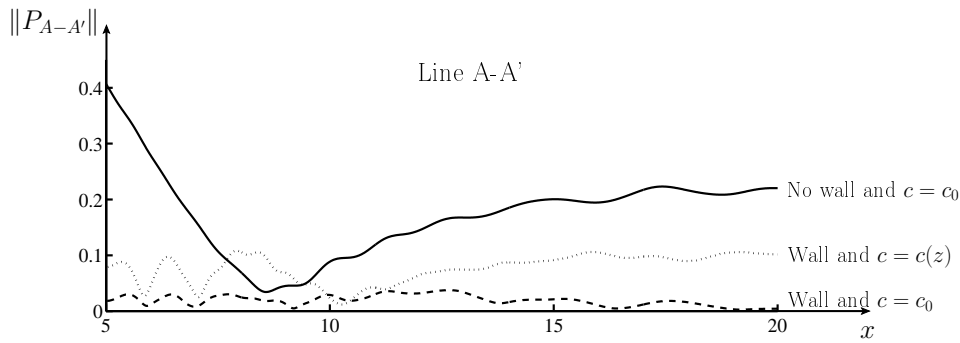


FIG. 6.11 – Comparaison des niveaux acoustiques (module) sur la ligne A-A' représentée en figure 6.10(b).

A présent, le milieu de propagation est supposé hétérogène, conséquence de phénomènes micro-météorologiques comme le vent ou un gradient de température. Un moyen simple et courant pour prendre en compte ces phénomènes consiste en l'introduction d'une célérité effective, variant, par exemple, avec l'altitude  $z$  :

$$c(z) = \begin{cases} c_0 & \text{si } z \leq z_0, \\ c_0 + a \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) & \text{si } z \geq z_0, \end{cases} \quad (6.8)$$

où  $c_0$  est la célérité du milieu homogène,  $a$  le paramètre de réfraction, et  $z_0$  l'altitude à partir de laquelle le profil de célérité devient logarithmique. Ce type de profil de célérité effective a été initialement proposé par Gilbert et White [25] et est couramment utilisé en acoustique environnementale pour prendre en compte les effets météorologiques. Pour les valeurs de  $c_0$ ,  $a$  et  $z_0$  données au tableau 6.4, le profil de célérité présente une dynamique de variations de l'ordre de 10% de la valeur initiale  $c_0$  (figure 6.12). Cette variation est ici volontairement importante (le paramètre  $a$  est généralement choisi entre  $-2$  à  $2$ ) de manière à montrer l'effet du gradient d'indice sur une courte distance.

En considérant le profil de célérité défini par l'équation (6.8), l'équation d'ondes s'écrit

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2 n^2\right) p = 0 \quad (6.9)$$

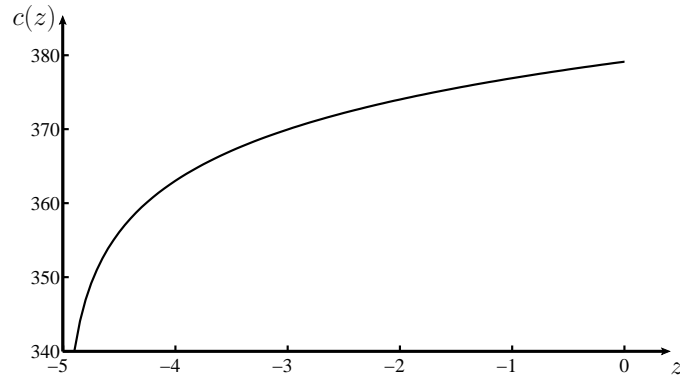


FIG. 6.12 – Profil de célérité logarithmique choisi pour la prise en compte de phénomènes micro-météorologiques comme un vent non uniforme selon  $z$  ou un gradient de température selon  $z$ .

où  $n = c_0/c(z)$  est l'indice de réfraction. Lorsque le plan transverse est discrétisé par des éléments finis, le développement (5.4) de  $p$  sur les polynômes d'interpolation conduit à l'expression discrétisée de l'équation (6.9) :

$$\vec{P}'' + M^{-1} \left( K + M^{(c)} k^2 \right) \vec{P} = \vec{0}, \quad (6.10)$$

où les matrices  $M$  et  $K$  sont les matrices de masse et raideur définies par les équations (5.6) et la matrice  $M^{(c)}$  est définie par

$$M_{mn}^{(c)} = \int_{-l}^h \tau n^2 \psi_m \psi_n dz. \quad (6.11)$$

Dans le cas d'un milieu homogène, alors  $n = 1$  et l'équation d'ondes discrétisée classique (5.5) est retrouvée. Lorsque  $n \neq 1$ , une solution générale de (6.10) peut alors être écrite en fonction des valeurs propres  $k_i^2$ ,  $i \geq 0$ , et des fonctions propres  $\phi_i$  de la matrice  $M^{-1}(K + M^{(c)}k^2)$  sous la forme de l'équation (5.7).

Le champ calculé en prenant en compte le profil de célérité de la figure 6.8 est représenté sur la figure 6.10(b) :  $a$  étant choisi positif, une courbure typique des trajectoires des ondes acoustiques vers le sol est observée. Lorsque l'écran acoustique est placé au voisinage de la source, un phénomène d'ombre acoustique est toujours créé. Toutefois, l'atténuation engendrée à l'arrière de l'écran est significativement moindre (figure 6.11). En effet, la courbure des ondes entraîne un contournement de l'écran. Cette baisse d'atténuation est par ailleurs plus importante en s'éloignant de l'écran.

Cette étude a permis de montrer comment, de manière simple, il peut être possible de prendre en compte des phénomènes micro-météorologiques. Cependant, les valeurs des paramètres définissant le profil de célérité effective ont été choisies arbitrairement, et, pour entreprendre une étude plus détaillée il conviendrait de considérer des valeurs de ces paramètres plus réalistes. Par ailleurs, alors qu'un gradient de température peut se traduire directement par un profil de célérité selon une (ou plusieurs) des dimensions du domaine, il n'en va pas de même pour le vent qui, en toute rigueur, doit être pris en compte dans les équations de conservations fondamentales.

Néanmoins, l'utilisation d'une célérité effective pour prendre en compte l'effet de ces deux types de phénomènes météorologiques est une première approximation courante dans les modèles de propagation en milieu extérieur.

# Conclusion Générale

---

Ces travaux ont porté sur la modélisation de la propagation acoustique dans les guides d'ondes ouverts par approche modale. Dans le domaine de l'acoustique urbaine, motivation initiale de ces travaux, un guide ouvert représente une rue. Deux des principales caractéristiques de ce type de guides ont été étudiées. D'une part, l'ouverture de ces guides sur un domaine infini (le ciel) a été prise en compte en utilisant la notion de modes fuyants. D'autre part, les irrégularités des façades des rues, ont été prises en compte en considérant des guides de section constante par morceaux.

Après avoir introduit et défini les fondamentaux de l'approche modale, une étude préliminaire réalisée en deux dimensions a porté sur les effets des variations de section de guides fermés. Bien que volontairement éloigné du cas urbain, ce choix des guides bidimensionnels fermés a permis dans cette étude préliminaire d'appréhender les potentialités de l'approche modale. Les cas de distributions régulières puis stochastiques de discontinuités de section ont été traités. Ces travaux ont notamment montré comment le champ acoustique dans un guide d'ondes peut être explicitement relié à la géométrie considérée.

Un premier modèle basé sur la décomposition modale a été proposé pour décrire la propagation dans un guide cylindrique tridimensionnel de section transverse rectangulaire ouverte. Ce travail a, en particulier, permis d'étudier le comportement des modes fuyants et de mettre en évidence leurs caractéristiques essentielles lorsqu'ils sont utilisés pour le développement modal d'un champ acoustique. Notamment, ces travaux ont montré que la base modale sur laquelle le champ est développé peut être réduite à un petit nombre de modes. En effet, les modes fuyants étant exponentiellement décroissants au cours de leur propagation, seuls les moins atténués d'entre eux participent significativement au transport de l'énergie. Néanmoins, il est apparu que dans ce premier modèle, la méthode semi-analytique choisie pour obtenir les modes fuyants était trop contraignante pour envisager des applications à l'acoustique urbaine. Notamment, la prise en compte de discontinuités de section ou de parois absorbantes semblait délicate.

Face à ce constat, un deuxième modèle basé sur l'association entre l'approche modale et la méthode des éléments finis a été proposé. Dans ce modèle, les fonctions propres du problème transverse sont calculées numériquement par la méthode des éléments finis et la propagation le long du guide est résolue analytiquement. Ces travaux ont montré comment en utilisant des PML (Perfectly Matched Layers), le problème initial de propagation dans un guide d'ondes ou-



vert pouvait être substitué par un nouveau problème de guide d'ondes fermé. Dans un premier temps, la convergence et la validité de cette approche ont été étudiées dans le cas 2D. Appliquée ensuite au cas des guides d'ondes ouverts 3D, elle a permis d'étudier le couplage entre deux guides ouverts parallèles.

Enfin, pour valoriser ce deuxième modèle et entrevoir ses potentialités pour des applications en acoustique urbaine, plusieurs études provenant de l'implémentation numérique de l'approche Modal-FE ont été proposées. Les résultats présentés ont permis d'illustrer la prise en compte de certains points clé de la modélisation des champs acoustiques en milieu urbain comme l'absorption aux façades des rues ou les effets micro-météorologiques. Tout en étant inspirées par les problématiques liées l'acoustique urbaine, ces études n'ont par porté sur des cas réels et concrets. En revanche, elles ont permis de mettre en évidence certains phénomènes physiques, d'aspect plus académique, liés aux résonances d'une cavité ouverte.

D'une manière générale, ces travaux ont donc permis de mieux comprendre les phénomènes de propagation acoustique dans les guides d'ondes ouverts et permettent, en l'état, d'envisager des études intéressantes dans le contexte de l'acoustique urbaine. Quelques unes de ces perspectives ainsi que des évolutions possibles, du point de vue du formalisme et de l'implémentation numérique de l'approche Modal-FE sont proposées pour clore ce document.

Comme il a été vu au chapitre 6, la diffusion de surfaces irrégulières est facilement envisageable. En effet, l'utilisation de la méthode des éléments finis dans la section transverse permet de pouvoir effectuer des calculs pour des géométries de diffuseurs variées (par exemple une fenêtre ou un diffuseur quelconque, figure 6.13(a)). Il serait alors possible d'étudier finement les effets de diffusion lorsque ces diffuseurs "urbains" sont disposés selon une distribution régulière ou irrégulière sur une façade de rue (figure 6.13(b) à gauche). L'étude de l'influence sur le champ acoustique d'irrégularités géométriques dans la section de la rue est également une perspective intéressante (figure 6.13(b) à droite). Par ailleurs, la prise en compte d'effets micro-météorologiques comme le vent ou des gradients de température étant possible en considérant un profil de célérité effective, l'étude pour différents profils réalistes, dans des rues canyons peut être réalisée (figure 6.13(c)). Enfin, l'extension de la méthode à la prise en compte de jonctions de rues (figure 6.13(d)) permettrait de pouvoir observer et étudier des phénomènes de propagation acoustique à l'échelle macroscopique du milieu urbain (réseau de rues ou quartier). Ces derniers aspects sont notamment abordés par Miguel Moleron dans le cadre de sa thèse débutée récemment.

Le chapitre 4 a montré que la base modale peut être réduite à un petit nombre de modes. Cet aspect peut être très intéressant d'un point de vue numérique. En effet, dans l'approche couplée Modal-FE, la base modale contient autant de modes que de degrés de libertés définissant le maillage de la section transverse. Ainsi, dans le cas de maillages relativement fins, une grande partie des nombreux modes doit pouvoir être négligée de manière à optimiser les coûts de calculs. Cette optimisation nécessite d'une part de définir des critères de sélection permettant de trier ces modes numériques, d'autre part d'adapter le formalisme et l'implémentation numérique de la méthode à la prise en compte d'une base modale réduite.

En acoustique urbaine, de nombreux indicateurs comme le temps de réverbération sont utilisés pour décrire les champs acoustiques. La résolution d'un problème de propagation dans le domaine temporel peut être alors d'un grand intérêt. Même si l'approche modale est, comme ici, très souvent utilisée pour résoudre l'équation d'ondes dans le domaine fréquentiel, des travaux pourraient être entrepris pour étendre le formalisme à la résolution d'un problème de propagation dans le domaine temporel pour reconstruire par exemple la réponse impulsionnelle d'une rue.

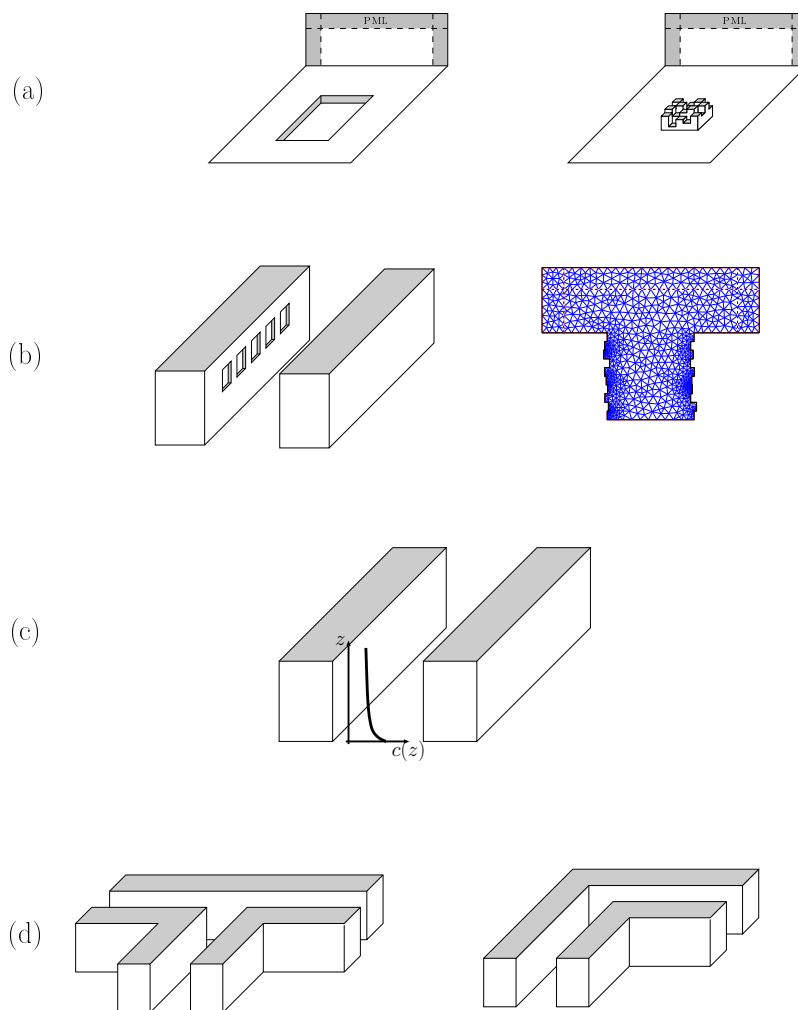


FIG. 6.13 – (a) Modélisation de la géométrie d'une fenêtre pour l'étude de sa diffusion. (b) Prise en compte d'un profil de célérité selon l'axe  $z$  pour traduire des effets météorologiques (gradient de température). (c) Jonction entre deux rues de type "T" et "L".



# Références

---

- [1] J.B. Allen and D.A. Berkley. Image method for efficiently simulating small-room acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(4) :943–950, 1979.
- [2] N. Amir, V. Pagneux, and J. Kergomard. A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition - part II : Results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(5) :2504–2517, 1997.
- [3] S. Barone. Leaky wave contributions to the field of a line source above a dielectric slab : part I (report report r-532-546, pib-462). Technical report, Microwave Research Institute, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1956.
- [4] S. Barone and A. Hessel. Leaky wave contributions to the field of a line source above a dielectric slab : part II (report r-698-58, pib-626). Technical report, Microwave Research Institute, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1958.
- [5] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *J. Comp. Phys.*, 114(2) :185–200, 1994.
- [6] W.P. Bi, V. Pagneux, D. Lafarge, and Y. Auregan. Modelling of sound propagation in a non-uniform lined duct using a multi-modal propagation method. *J. Sound Vib.*, 289 :1091–1111, 2006.
- [7] D. Botteldooren. Numerical mode for mode nonlinear sound propagation in three-dimensional structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(3) :1357–1367, 1996.
- [8] J.S. Bradley. A study of traffic noise around buildings. *Acustica*, 38 :247–252, 1977.
- [9] R. Bullen and F. Fricke. Sound propagation at a street intersection in an urban environment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 54(2) :1565–1570, 1973.
- [10] R. Bullen and F. Fricke. Sound propagation in a street. *J. Sound Vib.*, 46(1) :33–42, 1976.
- [11] C.F. Chien and M.M. Carroll. Sound source above a rough absorbent plane. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(3) :827–829, 1980.
- [12] A.D. Clayden, R.W.D. Culley, and P.S. Marsh. Modelling traffic noise mathematically. *Appl. Acoust.*, 8 :1–12, 1975.
- [13] H. G. Davies. Noise propagation in corridors. *J. Acoust. Soc. Am.*, 53(5) :1253–1262, 1971.
- [14] H.G. Davies. Multiple reflection diffuse-scattering mode for noise propagation in streets. *J. Acoust. Soc. Am.*, 64(2) :517–521, 1978.
- [15] J. Defrance and Y. Gabillet. A new analytical method for the calculation of outdoor noise propagation. *Appl. Acoust.*, 57 :109–127, 1999.

- [16] M.E. Delany and E.N. Bazley. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Appl. Acoust.*, 3(2) :105–116, 1970.
- [17] H. Derudder and F. Olyslager. An efficient series expansion for the 2-D Green’s function of a microstrip substrate using perfectly matched layers. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 9(12) :505–507, 1999.
- [18] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, B. Goursaud, C. Hazard, and A. Prieto. Finite element computation of leaky modes in stratified waveguides. In A. Léger and Deschamps M., editors, *Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media*, pages 1–2. Springer, 2008.
- [19] P.R. Donovan. *Sound propagation in urban spaces*. PhD thesis, MIT, Cambridge, 1976.
- [20] D. Duhamel. Efficient calculation of the three-dimensional sound pressure field around a noise barrier. *J. Sound Vib.*, 197(5) :547–571, 1996.
- [21] S. Félix and V. Pagneux. Sound propagation in rigid bends : A multimodal approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(3) :1329–1337, 2001.
- [22] S. Félix and V. Pagneux. Sound attenuation in lined bends. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116 :1921–1931, 2004.
- [23] S. Félix, A. Pelat, and V. Pagneux. Waveguide modes of a long open enclosure. In *Proc. International Symposium on Room Acoustics*, 2007.
- [24] J. Forssén. Calculation of noise barrier performance in a turbulent atmosphere by using substitute sources above the barrier. *Acta Acustica united with Acustica*, 86 :269–275, 2000.
- [25] K.E. Gilbert and M.J. White. Application of the parabolic equation to sound propagation in a refracting atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(6) :630–637, 1989.
- [26] J. Giner. Ascertaining confidence within the ray-tracing method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(2) :816–822, August 1999.
- [27] G. Guillaume. *Application de la méthode TLM à la modélisation de la propagation acoustique en milieu urbain*. PhD thesis, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), 2009.
- [28] G. Guillaume and J. Picaut. A simple absorbing layer implementation for transmission line matrix modeling. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2009, submitted.
- [29] D. Heimann. Three-dimensional linearised Euler mode simulations of sound propagation in idealised situations with wind effects. *Appl. Acoust.*, 68 :217–237, 2007.
- [30] S. Hein, T. Hohage, and W. Koch. On resonances in open systems. *J. Fluid Mech.*, 506 :255–284, 2004.
- [31] M. Hornikx and J. Forssén. The 2.5-dimensional equivalent sources method for directly exposed and shielded urban canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(5) :2532–2541, 2007.
- [32] M. Hornikx and J. Forssén. Noise abatement schemes for shielded canyons. *Appl. Acoust.*, 70 :267–283, 2009.
- [33] J. Hu and C.R. Menyuk. Understanding leaky modes : slab waveguide revisited. *Advances in Optics and Photonics*, 1(1) :58–106, 2009.
- [34] J. Kang. Sound propagation in street canyons : Comparison between diffusely and geometrically reflecting boundaries. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(3) :1394, March 2000.

- [35] J. Kang. Numerical modelling of the sound fields in urban streets with diffusely reflecting boundaries. *J. sound Vib.*, 258(5) :793–813, 2002.
- [36] J. Kang. Numerical modeling of the sound field in urban squares. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(6) :3695–3706, 2005.
- [37] J. Kergomard. une équation matricielle des pavillons. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. II*, 316 :1691–1694, 1993.
- [38] Luc Knockaert and Daniel De Zutter. On the completeness of eigenmodes in a parallel plate waveguide with a perfectly matched layer termination. *IEEE Transactions on microwaves theory and techniques*, 50 :1650–1653, Nov. 2002.
- [39] W. Koch. Acoustic resonances in rectangular open cavities. *AIAA Journal*, 43(11) :2342–2349, 2005.
- [40] A. Krokstad, S. Strom, and S. Sorsdal. Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *J. Sound Vib.*, 8(1) :118–125, 1968.
- [41] H. Kuttruff. *Room acoustics*. Applied Science Publishers, 1973.
- [42] H. Kuttruff. A mathematical model for noise propagation between buildings. *J. Sound Vib.*, 85(1) :115–128, 1982.
- [43] K.P. Lee. Prediction of propagation in a network of sound channels, with application to noise transmission in city streets. Master’s thesis, MIT, Cambridge, 1974.
- [44] K.P. Lee and H.G. Davies. Monogram for estimating noise propagation in urban areas. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57 :1477–1480, 1975.
- [45] K. M. Li and C. Y. C. Lai. A note on noise propagation in street canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(2) :644–655, 2009.
- [46] K. K. Lu and K.M. Li. The propagation of sound in narrow street canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(2) :537, August 2002.
- [47] R. H. Lyon. Role of multiple reflections and reverberation in urban noise propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 55(3) :493–503, 1974.
- [48] A.A. Maradudin and P. Ryan. Shear horizontal acoustic surface resonances. *Physical Review B*, 38(5) :3068–3074, 1988.
- [49] S. Marburg. Normal modes in external acoustics. part I : investigation of the one-dimensional duct problem. *Acta Acustica united with Acustica*, 91 :1063–1078, 2005.
- [50] N. Marcuvitz. On field representations in terms of leaky modes or eigenmodes. *IRE Trans. Antennas Propag.*, 4 :192–194, 1956.
- [51] A.H. Nayfeh. Acoustic waves in ducts with sinusoidally perturbed walls and mean flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(5) :1036–1039, 1975.
- [52] M. Ögren and Forssén. Modelling of a city canyon problem in a turbulent atmosphere using an equivalent sources approach. *Appl. Acoust.*, 65(6) :629–642, 2004.
- [53] M. Ögren and W. Kropp. Road traffic noise propagation between two dimensional city canyons using an equivalent sources approach. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 :293–300, 2004.

- [54] D.J. Oldham and M.M. Radwan. Sound propagation in streets. *Building Acoustics*, 1 :65–87, 1994.
- [55] V. Pagneux, N. Amir, and J. Kergomard. A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. part I. theory and validation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(4) :2034–2048, 1996.
- [56] A. Pelat, S. Félix, C. Ayrault, and O. Richoux. Multimodal propagation of sound in streets. In *Proceedings of International Symposium on Room Acoustics*, 10-12 September 2007.
- [57] A. Pelat, S. Félix, and V. Pagneux. On the use of leaky modes in open waveguides for the sound propagation in street canyons. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2009, in press.
- [58] J. Picaut. *Modélisation des champs diffus par une équation de diffusion*. PhD thesis, Université du Maine, 1998.
- [59] J. Picaut, L. Simon, and J. Hardy. Field modelling in a street with a diffusion equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(5) :2638–2645, 1999.
- [60] T. Le Pollès. *Modélisation des champs diffus en acoustique architecturale par la théorie des transports : application au milieu urbain*. PhD thesis, Université du Maine, 2003.
- [61] T. Le Pollès, J. Picaut, M. Bérengier, and C. Bardos. Sound field modeling in a street canyon with partially diffusely reflecting boundaries by the transport theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(5) :2969–2970, 2004.
- [62] T. Le Pollès, J. Picaut, S. Colle, and M Bérengier. Sound-field modeling in architectural acoustics by a transport theory : Application to street canyons. *Physical review E*, 72(4) :46609, 2005.
- [63] T. Van Renterghem and D. Botteldooren. Prediction-step staggered-in-time FDTD : an efficient numerical scheme to solve the linearised equations of fluid dynamics in outdoor sound propagation. *Appl. Acoust.*, 68 :201–216, 2007.
- [64] T. Van Renterghem and D. Botteldooren. Numerical evaluation of sound propagating over green roofs. *J. Sound Vib.*, 317 :781–799, 2008.
- [65] T. Van Renterghem, E. Salomons, and D. Botteldooren. Parameter study of sound propagation between city canyons with a coupled fdtd-pe model. *Appl. Acoust.*, 67 :487–510, 2006.
- [66] T. Van Renterghem, E.M. Salomons, and D. Botteldooren. Efficient FDTD-PE mode for sound propagation in situations with complex obstacles and wind profiles. *Acta Acustica united with Acustica*, 91 :671–679, 2005.
- [67] O. Richoux, C. Ayrault, A. Pelat, S. Félix, and B. Lihoreau. Effect of the open roof on low frequency acoustic propagation in street canyons. *Appl. Acoust.*, 2009, submitted end revised.
- [68] A. Roure. *Propagation guidée, étude des discontinuités*. PhD thesis, Université d’Aix Marseille, 1976.
- [69] W. C. Sabine. *Collected papers on acoustics*. Dover, 1964 (première publication en 1922).
- [70] W.R. Schlatter. Sound power measurements in a semi-confined space. Technical report, MIT Dept. Mech. Eng, 1971. M. Sc. thesis , MIT, Cambridge, MA.

- 
- [71] P. Stenackers, H. Myncke, and A. Cops. Reverberation in town streets. *Acustica*, 40 :115–119, 1978.
- [72] U. Stephenson. Comparison of the mirror image source method and the sound particle simulation method. *Appl. Acoust.*, 29 :35–72, 1990.
- [73] C.K.W. Tam. The acoustic modes of a two-dimensional rectangular cavity. *J. Sound Vib.*, 49(3) :353–364, 1976.
- [74] W. Vanroose and B. Reps. Preconditioning the Helmholtz equation with complex rotated domains. In *Proceedings of Waves, Pau, France*, 2009.
- [75] C. Vassallo. *Optical waveguide concepts*. Elsevier, 1991.
- [76] M. Vorländer. Simulation of the transient and steady-state sound propagation in rooms using combined ray-tracing/image-source algorithm. *J. Acoust. Soc. Am.*, 86(1) :172–178, 1989.
- [77] E. Walerian, R. Janczur, and M. Czechowicz. Sound level forecasting for city centers. part I : Sound level due to a road within an urban canyon. *Appl. Acoust.*, 62 :359–380, 2001.
- [78] F.M. Wiener, C.I. Malme, and C.M. Gogos. Sound propagation in urban areas. *J. Acoust. Soc. Am.*, 37 :738–747, 1965.
- [79] S. Wu and E. Kittinger. On the relevance of sound scattering to the prediction of traffic noise in urban streets. *Acustica*, 81 :36–42, 1995.
- [80] K.W. Yeow, N. Popplewell, and J.F.W. Mackay. Shielding of noise from statistically stationary traffic flows by simple obstacles. *J. Sound Vib.*, 57(2) :203–224, 1978.