



HAL
open science

Constante systolique et variétés plates

Chady Elmir

► **To cite this version:**

Chady Elmir. Constante systolique et variétés plates. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2009. Français. NNT : . tel-00439914

HAL Id: tel-00439914

<https://theses.hal.science/tel-00439914v1>

Submitted on 8 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER
II

Discipline : Mathématiques

École Doctorale : Information, Structures et
Systèmes

présentée et soutenue publiquement par

Chady EL MIR

le 13 mai 2009

Géométrie systolique des variétés de Bieberbach

JURY

I. Babenko	Examineur
C. Bavard	Rapporteur
G. Besson	Président
J. Lafontaine	Directeur de thèse
N. Mokaddem	Examineur
S. Sabourau	Rapporteur

RAPPORTEURS

Christophe Bavard
Stéphane Sabourau

Remerciements

S'il est une personne que je dois remercier en premier, c'est Jacques Lafontaine. J'ai appris beaucoup de math à ses côtés. Ses connaissances, ses commentaires et ses questions m'ont été très utiles et ont donné une grande source d'inspiration. Sur le plan humain, également, il a été toujours présent pour me soutenir et me motiver, surtout dans les moments de doute (non négligeables) au cours de ces années de thèse. Je le remercie chaleureusement, c'est un honneur d'être son dernier thésard, et je lui souhaite plein de bonheur pour l'avenir.

Mes deux co-directeurs, Mustapha Jazar et Nazih Mokaddem, m'ont insufflé le goût des mathématiques dès la première année à l'Université Libanaise. De cela et de leur accueil continu à la faculté des sciences à Tripoli, lors de mes retours au Liban, je leur suis très reconnaissant.

Je remercie vivement Christophe Bavard et Stéphane Sabourau pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail et leur promptitude à avoir écrit un rapport précis et synthétique.

A Gérard Besson, qui a guidé mes premiers pas en géométrie riemannienne et qui me fait l'honneur de participer au jury, je présente mes sincères remerciements.

C'est un plaisir également de remercier Ivan Babenko pour sa participation au jury et ses remarques constructives.

Je tiens à remercier l'ensemble du département de mathématiques à Montpellier dont j'ai beaucoup apprécié l'accueil chaleureux. Je remercie en particulier Marc Herzlich, Daniel Massart, Etienne Mann et Bernadette Lacan pour l'aide qu'ils m'ont apportée. J'ai une pensée particulière à Ioan Badulescu, son amitié m'est précieuse.

Cette thèse ne serait pas aussi bien déroulée sans l'ambiance presque familiale qui régnait parmi les doctorants et ATER de mathématiques. Les moments magnifiques qu'on a passés ensemble resteront gravés dans ma mémoire. J'apprécie surtout le sourire de Clément, la bonté de Valéry, la sagesse et la patience d'Olivier, la vivacité de Nadia, la puissance de Chloé, la serviabilité d'Alex, la droiture de Guillaume, la bonne humeur de Rémy, la joie de Gwladys, le dynamisme de Thomas, le hard rock de Florence, la sérénité de Romain, le bon coeur de Hilde, la foi d' Afaf, la jovialité de Soffana, la gentillesse d'Elamine et la modestie de Benoît.

Je remercie Guillaume Bulteau pour les conversations systoliques qu'on a eues au cours de ces quatre années, et je fais un petit clin d'oeil à son fils philippe.

Je n'oublie pas l'appui que m'ont apporté les ex-doctorants de mathématiques surtout Jérôme Petit, Nathaël Alibaud, Yashonidhi Pandey et Nicolas Templier, je les en remercie.

Je veux témoigner aussi ma reconnaissance à mes amis du Liban qui m'ont soutenu parfois de loin. Merci Mazen, Ali, Nisrine et Karine. Merci aussi au restaurant Al Manara de Montpellier.

Pour conclure par ce qui me tient le plus à coeur, je sais que ça a fait un grand plaisir à mes parents de voir leur garçon atteindre ce niveau scientifique, mais c'est grâce à eux et à ma soeur Ghina, à leur amour, leur confiance et leurs conseils que j'ai toujours eu la force d'aller de l'avant. Je tiens à ce qu'ils sachent ma sincère gratitude pour tout ce qu'ils ont fait. Un grand remerciement également à toute ma famille, tout spécialement à la petite Mira et au petit Nay, pour leur affection et leur encouragement.

Table des matières

Introduction	5
1 Rappels et compléments sur les variétés plates	11
1.1 Rappels sur les variétés plates	11
1.2 Classification des variétés plates compactes et connexes de dimension 3	17
1.3 Les variétés plates à bord géodésique	20
1.4 Cas des variétés de dimension 3	21
2 Les métriques singulières	23
2.1 Définition des métriques singulières	23
2.2 Métriques singulières sur des variétés de Bieberbach non orientables	24
2.3 Métriques singulières sur les variétés de Bieberbach orientables	27
2.4 Des métriques singulières aux métriques lisses	28
3 Les variétés de Bieberbach orientables	31
3.1 Deux tores singuliers et leur systole	31
3.2 Quotient systolique de C_2	33
3.3 Type C_4	37
3.4 Type C_6	39
3.5 Type $C_{2,2}$	41
3.6 Type C_3	41
4 Les variétés de Bieberbach non-orientables	47
4.1 Quelques propriétés géométriques de la bouteille singulière . .	47
4.2 Calcul des systoles dans le cas plat et dans le cas singulier . .	52
Conclusion	57

Introduction

Préliminaires et motivations

Une métrique riemannienne g sur une variété M^n permet de définir la notion de longueur de courbe et de volume sur M . Elle munit la variété naturellement d'une structure d'espace de longueur, et d'espace métrique.

Les invariants les plus simples d'une variété riemannienne sont son diamètre et son volume. Un autre invariant naturel d'une variété riemannienne compacte (non simplement connexe) (M^n, g) est sa *systole*, notée $\text{sys}(g)$. C'est la plus petite longueur d'une courbe fermée non contractile. Pour avoir un invariant homogène, on introduit le *quotient systolique* $\frac{\text{sys}(g)^n}{\text{vol}(g)}$. Il est important de remarquer que ces invariants sont bien définis si g est seulement continue, c'est à dire une section continue du fibré S^2T^*M des formes symétriques.

En 1949, dans un travail non publié, C. Loewner a montré le résultat suivant. Pour toute métrique h sur le tore \mathbb{T}^2 on a

$$\frac{\text{sys}^2(\mathbb{T}^2, h)}{\text{Aire}(\mathbb{T}^2, h)} \leq 2/\sqrt{3}$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si (\mathbb{T}^2, h) est isométrique à un tore plat équilatéral (pour une preuve, voir [27], ch. 6, [24] ou [22] p.95–96).

Cette inégalité est l'acte de naissance de ce qu'on a appelé beaucoup plus tard la géométrie systolique. Une inégalité isosystolique sur une variété M est une inégalité de la forme

$$\frac{\text{sys}(g)^n}{\text{vol}(g)} \leq C$$

qui reste vraie pour toute métrique riemannienne g sur M : la constante C ne dépend que de la structure différentielle de M . Si cette constante est

optimale on l'appelle la *constante systolique* de M . Attention : deux conventions coexistent dans la littérature. La notre est la même que celle de [27], mais [3] prend l'inverse.

En 1952, P.M. Pu a démontré une inégalité isosystolique pour le plan projectif réel (cf [29]). La métrique optimale est aussi à courbure constante. Dans le même article, il démontre une variante de l'inégalité isosystolique pour les rubans de Möbius à bord, valable non pas pour toutes les métriques, mais pour chaque classe conforme.

Il existe un troisième cas, élucidé par C. Bavard dans [6] puis par T. Sakai dans [31] où la borne supérieure du quotient systolique est connue, et réalisée, celui de la bouteille de Klein. Mais la métrique optimale est singulière, plus précisément C^1 par morceaux. Voir 2.2.1 ci-dessous. En plus, elle est à courbure $+1$ là où elle est lisse. Cet exemple joue ici un rôle décisif.

C. Blatter a montré dans [15] que les surfaces de genre supérieur à 1 satisfont aussi une inégalité isosystolique. Ses résultats ont été améliorés par J.J. Hebda dans [25] (et indépendamment par Yu. Burago), puis par M. Gromov (voir le paragraphe 5 de [23]). Mais on ne connaît pas leurs constantes systoliques. La question est actuellement un objet de recherche très actif. On sait par exemple que les métriques extrémales, pour le problème isosystolique, des surfaces fermées orientables, à l'exception du tore, ne sont pas lisses et que, en genre deux, les métriques plates à singularités coniques ne sont pas extrémales (voir [30] et [18]).

En dimension supérieure, il existe des variétés non simplement connexes pour lesquelles aucune inégalité isosystolique n'est possible. L'exemple le plus simple est $S^2 \times S^1$, ou plus généralement le produit d'une variété simplement connexe par une autre qui ne l'est pas. Il suffit de faire tendre le volume du facteur simplement connexe vers zéro pour que le quotient systolique explose.

Mais un résultat fondamental de M. Gromov (cf. [23]), faisant suite à une propagande inlassable de M. Berger (voir [10]), assure que les variétés *essentielles* vérifient une inégalité isosystolique. Une variété compacte M est dite *essentielle* s'il existe une application continue de M dans un $K(\pi, 1)$ qui envoie la classe fondamentale sur une classe non triviale. Les variétés essentielles comprennent notamment les variétés asphériques et les projectifs réels. De plus, I. Babenko a démontré dans [1] une réciproque du théorème de M. Gromov : les variétés essentielles sont les seules à admettre des inégalités isosystoliques.

Concernant la géométrie systolique, deux références incontournables sont le rapport [11] de M. Berger et la monographie [27] de M. Katz. Voir aussi [13] 7.2.

Pour les variétés essentielles de dimension supérieure à deux, on ne connaît que très peu de choses. L'argument de Gromov, puissant mais très général, ne donne qu'une majoration très grossière de la constante systolique. A fortiori, on a très peu d'informations sur les métriques qui pourraient réaliser sa borne supérieure. Ivan Babenko a dégagé dans [3] des conditions topologiques qui

assurent que deux variétés ont la même constante systolique.

Mais on ignore par exemple, pour des variétés apparemment aussi simples que les tores et les projectifs réels, si les métriques à courbure constante sont optimales.

Ivan Babenko nous a communiqué le résultat suivant :

si g est une métrique optimale (éventuellement singulière) sur M , les courbes systoliques (c'est-à-dire les courbes fermées non contractiles de longueur $\text{sys}(g)$) recouvrent M (voir [18]).

Cette propriété est satisfaite par les tores plats, et par les projectifs réels munis de leur métrique à courbure constante. Sur les variétés compactes de dimension 3 qui portent une métrique plate, les métriques qui optimisent le quotient systolique *parmi les métriques plates* vérifient aussi cette propriété, à l'exception de l'une d'entre elles. Il s'agit de la variété (que nous notons $C_{2,2}$) dont le groupe fondamental est le groupe appelé G_6 par J.A. Wolf, cf. [33] p.117-118, et le dessin très suggestif de [32], p.236 ; ce groupe est engendré par trois symétries glissées par rapport à trois droites deux à deux orthogonales).

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux *variétés de Bieberbach*, c'est-à-dire aux variétés compactes qui portent une métrique riemannienne plate. Ces variétés sont asphériques, donc le théorème de Gromov s'applique. L'exemple de la bouteille de Klein, et celui de la variété de dimension 3 ($C_{2,2}$) que nous venons d'évoquer, conduisent à penser que, au moins pour celles de ces variétés qui ne sont pas des tores, il ne faut pas s'attendre à ce que les métriques plates soient optimales. Nous confirmons cette impression pour les variétés de Bieberbach de dimension 3. Comme dans le cas de la bouteille de Klein, nous utilisons pour cela des métriques non lisses.

Résumé de la thèse

Le premier chapitre débute par un rappel sur des résultats bien connus sur la structure des variétés plates. Ils résultent du théorème de Bieberbach pour les groupes cristallographiques (voir [33] et [20]). Nous reprenons ensuite, d'un point de vue plus géométrique que dans [33], la classification des variétés plates, compactes et connexes de dimension 3. Nous montrons que les métriques plates sur les variétés non orientables, s'obtiennent par des suspensions de la bouteille de Klein.

A la fin du chapitre nous démontrons un théorème de classification des variétés plates à bord géodésique.

Théorème 0.1. *Le revêtement universel riemannien d'une variété compacte plate de dimension n à bord géodésique est un $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, où I est un segment.*

Ce théorème nous permet de donner tous les types de variétés plates à bord géodésique en dimension 3. Il y en a cinq au total, deux orientables et trois non orientables.

Dans le second chapitre nous définirons dans un cadre général, celui des polyèdres riemanniens, des espaces riemanniens singuliers. La bouteille de Klein extrémale pour l'inégalité isosystolique rentre dans ce cadre.

Nous introduisons ensuite des métriques riemanniennes singulières (au sens précédent) sur toutes les variétés de Bieberbach non orientables de dimension 3. Le modèle local de ces métriques est $S^2 \times \mathbb{R}$ là où elles sont lisses. Mais nous démontrons que ces métriques ne sont pas conformément plates au voisinage d'une singularité.

Nous construisons ensuite des métriques riemanniennes singulières sur les 3-variétés de Bieberbach orientables autres que les tores (types C_2, C_3, C_4 et C_6). Dans leur partie régulière, ces métriques sont des produits tordus d'une métrique euclidienne de dimension 2 par une droite ; elles admettent les mêmes isométries que les métriques plates.

Le chapitre trois met en évidence le calcul de la systole des variétés de Bieberbach orientables de dimension 3 munis de ces métriques singulières. On obtient le résultat suivant

Théorème 0.2. *Soit M une variété de Bieberbach orientable de dimension 3 qui n'est pas un tore, alors il existe sur M une métrique riemannienne g telle que, pour toute métrique plate h ,*

$$\frac{(\text{sys}(h))^3}{\text{vol}(h)} < \frac{(\text{sys}(g))^3}{\text{vol}(g)}$$

La preuve s'appuie essentiellement sur le fait que ces variétés contiennent "beaucoup" de surfaces totalement géodésiques (singulières) à courbure 1.

Enfin dans le chapitre quatre, en se servant de nos métriques singulières, on démontre le même résultat pour les variétés non orientables.

Théorème 0.3. *Soit M une variété de Bieberbach de dimension 3 non orientable. Alors il existe sur M une métrique riemannienne g telle que, pour toute métrique plate h ,*

$$\frac{(\text{sys}(h))^3}{\text{vol}(h)} < \frac{(\text{sys}(g))^3}{\text{vol}(g)}$$

Pour le voir, on utilise le fait que nos métriques s'obtiennent elles-aussi par suspension de la bouteille de Klein, munie cette fois de la métrique de C. Bavard.

Les métriques obtenues sont singulières, mais il existe aussi dans tous les cas étudiés des métriques lisses dont le quotient systolique est supérieur à celui de toute métrique plate : il suffit d'approcher la métrique singulière obtenue par une métrique lisse, et d'utiliser la continuité de la systole pour la topologie C^0 . Les détails sont donnés dans 2.4

En conclusion, nous soulevons quelques questions pouvant ouvrir de futures pistes de recherche.

Notations

Si V est un sous-espace affine d'un espace affine euclidien E , et a un vecteur parallèle à V , on note $\sigma_{V,a}$ la symétrie glissée produit de la réflexion orthogonale par rapport à V et de la translation de vecteur a .

Si b est un vecteur orthogonal à V , on note $r_{b,\alpha}$ la rotation d'angle α autour de l'axe b . On appelle déplacement hélicoïdal autour de b une transformation de la forme $t_b \circ r_{b,\alpha}$.

Quand une isométrie de \mathbb{R}^n passe au quotient, nous la noterons par le même symbole.

On appelle *déplacement* d'une isométrie γ d'un espace métrique (qui sera ici une variété riemannienne, éventuellement singulière), le nombre

$$\mathbf{d}(\gamma) = \inf_{p \in M} \text{dist}(p, \gamma(p)).$$

Rappelons que si (M, g) est une variété riemannienne compacte, de revêtement universel riemannien (\tilde{M}, \tilde{g}) , le groupe fondamental opère sur (\tilde{M}, \tilde{g}) par isométries, et

$$\text{sys}(M, g) = \inf_{\gamma \in \pi_1(M)} \mathbf{d}(\gamma)$$

Ce résultat s'étend immédiatement aux métriques singulières considérées ci-dessous.

Chapitre 1

Rappels et compléments sur les variétés plates

1.1 Rappels sur les variétés plates

1.1.1 La structure des variétés plates

Une variété riemannienne plate est une variété riemannienne localement isométrique à l'espace euclidien E^n . Si une telle variété est complète, l'application exponentielle est un revêtement riemannien : les variétés plates complètes sont les quotients de l'espace euclidien par un sous-groupe d'isométries affines opérant proprement et librement.

En particulier, les variétés compactes et plates sont les quotients E^n/Γ où Γ est un sous groupe discret, cocompact et sans points fixes d'isométries affines de E^n . Suite à [20], nous appellerons *groupes de Bieberbach* de tels groupes.

Une variété de Bieberbach sera pour nous une variété compacte qui porte une métrique plate, c'est à dire une variété difféomorphe à E^n/Γ . Le théorème de Bieberbach assure plus généralement qu'un *groupe cristallographique*, c'est-à-dire un sous-groupe discret et cocompact Γ , est une extension d'un groupe fini G par un réseau Λ de E^n . Ce réseau est le sous-groupe des éléments de Γ qui sont des translations. Nous l'appellerons dans la suite le *réseau associé* à Γ . Notons qu'un groupe cristallographique est un groupe de Bieberbach si et seulement si il est sans torsion (voir [33], p.99).

Théorème 1.1. (*Bieberbach*) *i) Soit Γ un sous groupe discret et cocompact*

d'isométries affines de E^n , alors le sous groupe Λ des éléments de Γ qui sont des translations est un sous groupe distingué d'indice fini dans Γ et un réseau de E^n .

ii) Le nombre de groupes cristallographiques en dimension n est fini à isomorphisme près. Deux groupes cristallographiques sur E^n sont isomorphes si et seulement si, ils sont conjugués par un élément du groupe affine.

Quand on passe aux groupes de Bieberbach, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1.1. *Si $M = E^n/\Gamma$ est une variété riemannienne compacte connexe et plate de dimension n , alors le tore plat E^n/Λ est un revêtement riemannien fini de M .*

Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalences affines de variétés riemanniennes plates, compactes et connexes de dimension donnée.

Deux variétés compactes plates E^n/Γ et E^n/Γ' sont homéomorphes si et seulement si les groupes Γ et Γ' sont isomorphes. Ces groupes sont alors conjugués par un isomorphisme affine de \mathbb{R}^n , ce qui montre que deux variétés compactes plates homéomorphes sont affinement difféomorphes. Ces variétés seront isométriques si et seulement si Γ et Γ' sont conjugués par une isométrie affine.

Enfin, on a une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow e$$

où G est fini.

Remarque 1.1. L'ensemble $E(n)$ des isométries de \mathbb{R}^n est égal au produit semi-direct $O(n) \rtimes \mathbb{R}^n$. Mais un groupe de Bieberbach ne s'écrit jamais comme un produit semi direct $G \rtimes \Lambda$: sinon il existerait un morphisme injectif de G dans Γ , ce qui est impossible puisque G est fini et Γ sans torsion.

Remarque 1.2. Il est important de noter que le groupe G est en fait le groupe d'holonomie de M (voir [20], p.65). Cela est à rapprocher du fait qu'une variété riemannienne compacte et connexe est plate si et seulement si son groupe d'holonomie est fini. De plus, la représentation d'holonomie s'identifie à la représentation naturelle de G sur l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

D'après la théorie des revêtements, on a un revêtements riemannien $\mathbb{R}^n/\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma$. Le groupe des automorphismes de ce revêtement est isomorphe à G .

Ces remarques permettent de donner quelques précisions sur la géométrie et la topologie des variétés compactes plates : les 1-formes harmoniques s'identifient (par la correspondance formes-vecteurs donnée par la métrique)

aux champs de Killing, ainsi qu'au sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n laissé fixe par la représentation d'holonomie. En particulier, parmi les variétés compactes plates, les tores plats sont caractérisés par l'une des propriétés suivantes

1. le groupe d'holonomie est réduit à l'élément neutre.
2. le premier nombre de Betti est égal à la dimension
3. la dimension du groupe des isométries est égale à la dimension.
4. le groupe des isométries est transitif.

1.1.2 Isométries

Le groupe des isométries de E/Γ est le quotient $N(\Gamma)/\Gamma$, où $N(\Gamma)$ désigne le normalisateur de Γ dans $\text{Isom}(E)$ (isométries affines).

En particulier, pour un tore plat E/Λ , $N(\Lambda)$ est le sous-groupe de $\text{Isom}(E)$ qui laisse le réseau globalement invariant. C'est le produit semi direct $O_\Lambda \rtimes E$, où O_Λ est le sous groupe des isométries linéaires qui laissent Λ globalement invariant.

Finalement, $\text{Isom}(E/\Lambda) \simeq O_\Lambda \times (E/\Lambda)$: l'action de O_Λ sur E passe au quotient, et l'application de passage au quotient est un isomorphisme.

Notons que la symétrie par rapport à un point de E^n passe au quotient et possède 2^n points fixes ; c'est la symétrie géodésique par rapport à ces 2^n points fixes simultanément. Pour un réseau générique, ces isométries sont les seules isométries n'appartenant pas à la composante neutre de $\text{Isom}(E^n/\Lambda)$.

Les suspensions par des isométries

Un procédé classique de construction de variétés est la *suspension* par un difféomorphisme φ d'une variété K : il s'agit du quotient de $K \times \mathbb{R}$ par le groupe engendré par $(p, t) \mapsto (\varphi(p), t + 1)$. Si maintenant (K^n, g) est une variété riemannienne de dimension n et si $\varphi \in \text{Isom}(K^n, g)$, le quotient *riemannien* de $K \times \mathbb{R}$ par le groupe engendré par $(p, t) \mapsto (\varphi(p), t + a)$, où a est un paramètre > 0 , définit sur cette suspension une métrique riemannienne (bien sûr plate si g est plate). Cette construction sera utilisée systématiquement dans 1.2 puis dans 4.2.

1.1.3 Variétés plates en dimension 2

En dimension 2 il y a deux types de groupes de Bieberbach : les réseaux et les groupes engendrés par une translation et une symétrie glissée d'axe orthogonal à cette translation. Les variétés correspondantes sont le tore et la bouteille de Klein.

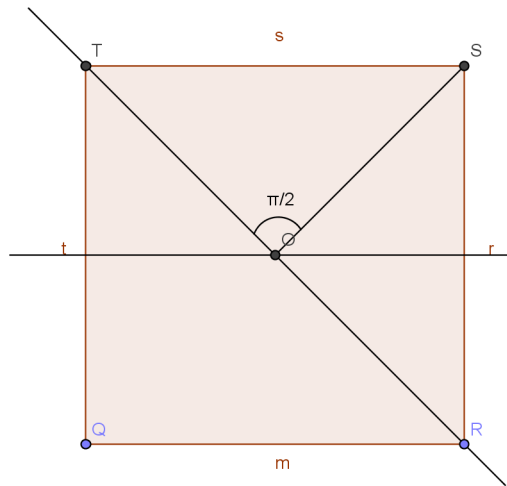


Fig. 1. Le tore carré a deux points fixes par la rotation $\pi/2$ autour de son centre: le centre même et le sommet.

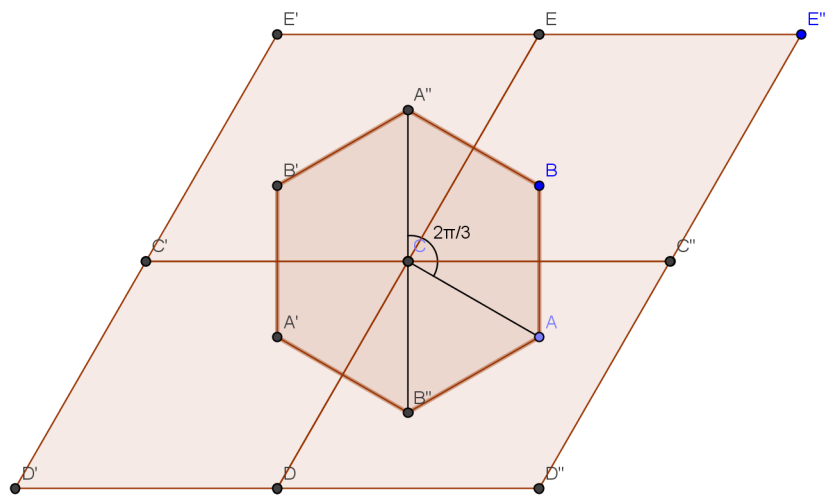


Fig. 1. Pour le tore hexagonal, les points A , B et C sont fixés par la rotation d'angle $2\pi/3$ autour du centre. Par contre, la rotation d'angle $\pi/3$ ne fixe que le centre de l'hexagone.

Les isométries des 2-tores plats

On a vu à la partie 1.1.2 que le groupe d'isométrie d'un tore plat \mathbb{R}^2/Λ , où Λ est un réseau de \mathbb{R}^2 , est égal au produit semi direct $O_\Lambda \rtimes \mathbb{R}^2$, O_Λ est le sous groupe des isométries de $O(2)$ qui laissent Λ globalement invariant.

Remarque 1.3. Pour un réseau générique, O_Λ est le groupe à 2 éléments.

Pour le tore carré, O_Λ est isomorphe au groupe diédral D_4 . Les éléments d'ordre 4 ("rotations" d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$) ont deux points fixes (voir fig. 1).

Pour le tore hexagonal, O_Λ est isomorphe au groupe diédral D_6 . Les rotations d'angle $2\pi/3$ ont trois points fixes dans le tore alors que celles d'angle $\pi/3$ n'en ont qu'un seul (voir fig.2).

Notons que pour les tores plats rectangle et losange, O_Λ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Mais ces deux tores ne nous intéressent pas pour la suite.

Les isométries de la bouteille de Klein plate

Le plan euclidien étant rapporté à une base orthonormée, les bouteilles de Klein plates sont les variétés \mathbb{R}^2/Γ , où Γ est engendré par la symétrie glissée $(x, y) \mapsto (x + \frac{a}{2}, -y)$ et la translation $(x, y) \mapsto (x, y + b)$. Nous noterons $K_{a,b}$ (ou simplement K quand la donnée de a et b est sous-entendue ou inutile), la variété riemannienne plate ainsi obtenue.

Rappelons que les géodésiques "horizontales" de $K_{a,b}$ sont fermées de longueur a , à l'exception de deux d'entre elles qui sont de longueur $\frac{a}{2}$ (cf. [22] p.82-83). Cela permet de voir $K_{a,b}$ comme le recollement de deux rubans de Möbius plats de largeur $\frac{b}{2}$ le long de leur bord. Cette identification n'est pas seulement topologique mais aussi riemannienne : la réflexion orthogonale par rapport au bord commun est une isométrie qui échange les deux rubans.

La composante neutre de $\text{Isom}(K)$ est formée des translations horizontales $r_\alpha : (x, y) \mapsto (x + \alpha, y)$ (α étant pris modulo a). A signaler : la translation $(x, y) \mapsto (x + \frac{a}{2}, y)$ qui coïncide avec $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Elle laisse fixes les deux géodésiques horizontales courtes $y = 0$ et $y = b/2$. C'est la symétrie orthogonale par rapport à ces deux géodésiques simultanément.

Le quotient $\text{Isom}(K)/\text{Isom}_0(K)$ est isomorphe au groupe du matelas, appelé aussi groupe de Klein (c'est plus qu'une coïncidence!).

Les trois éléments non triviaux de ce quotient peuvent être représentés par

1. une réflexion par rapport à une géodésique verticale, qui est aussi une symétrie par rapport à un point d'une géodésique horizontale courte. On notera par S_1 une telle transformation.
2. une symétrie par rapport à un point du bord commun des deux rubans. Nous noterons S_2 une telle symétrie.

3. la réflexion par rapport à ce bord commun, ou la transformation obtenue par passage au quotient de $(x, y) \mapsto (x, y + b/2)$. Nous noterons T cette dernière transformation.

Notons enfin qu'un difféomorphisme affine d'une bouteille de Klein plate est une isométrie.

1.2 Classification des variétés plates compactes et connexes de dimension 3

1.2.1 Les variétés orientables

La classification des variétés plates de dimension 3 résulte d'une méthode directe de classification des sous-groupes discrets et cocompacts de $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ opérant librement. Elle est évidemment beaucoup plus simple que celle des groupes cristallographiques. Elle est due à W. Hantzsche et H. Wendt (1935), et exposée dans le livre [33] de J.A. Wolf. Il y a dix types à difféomorphisme près, six orientables et quatre non orientables.

Dans le cas orientable, ces types sont caractérisés par le groupe d'holonomie G , ce qui motive notre notation.

i) $G = \{1\}$: type C_1 . C'est le tore, il est le quotient de \mathbb{R}^3 par un réseau quelconque de \mathbb{R}^3 .

ii) $G = \mathbb{Z}_2$: type C_2 . On se donne trois vecteurs (a_1, a_2, a_3) avec $a_3 \perp (a_1, a_2)$. Soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/2} \circ r_{a_3, \pi}$ (cf. Notations) et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_2 . Notons que le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 2 dans Γ .

Cette variété est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ par le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par (l'image de) $t_{a_3/2} \circ r_{a_3, \pi}$.

iii) $G = \mathbb{Z}_4$: type C_4 . On se donne une base orthogonale (a_1, a_2, a_3) de \mathbb{R}^3 avec $|a_1| = |a_2|$, soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$ et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_4 . Notons que le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 4 dans Γ .

Cette variété est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ par le groupe cyclique d'ordre 4 engendré par (l'image de) $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$. Elle est aussi le quotient de C_2 (la base (a_1, a_2, a_3) doit être choisie orthogonale avec $|a_1| = |a_2|$), par le sous groupe engendré par $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$. Cette remarque jouera un rôle important dans l'amélioration de la constante systolique de C_4 .

iv) $G = \mathbb{Z}_6$: type C_6 . On se donne trois vecteurs (a_1, a_2, a_3) avec $a_3 \perp (a_1, a_2)$, $|a_1| = |a_2|$ et $(a_1, a_2) = \pi/3$. Soit Γ le sous groupe des isométries de

\mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/6} \circ r_{a_3, \pi/3}$ et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_6 . Cette fois ci, le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 6 dans Γ .

C_6 est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ par le groupe cyclique d'ordre 6 engendré par (l'image de) $t_{a_3/6} \circ r_{a_3, \pi/3}$. Elle est aussi le quotient de C_2 par le sous groupe engendré par $t_{a_3/6} \circ r_{a_1, \pi/3}$.

v) $G = \mathbb{Z}_3$: type C_3 . On se donne trois vecteurs (a_1, a_2, a_3) avec $a_3 \perp (a_1, a_2)$, $|a_1| = |a_2|$ et $(a_1, a_2) = 2\pi/3$. Soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_3/3} \circ r_{a_3, 2\pi/3}$ et les translations t_{a_1} et t_{a_2} . Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type C_3 . Le réseau Λ engendré par t_{a_1}, t_{a_2} et t_{a_3} est d'indice 3 dans Γ . Cette variété est le quotient du tore \mathbb{R}^3/Λ mais pas un quotient de la variété C_2 .

vi) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$: type $C_{2,2}$. On se donne une base orthogonale (a_1, a_2, a_3) de \mathbb{R}^3 , soit Γ le sous groupe des isométries de \mathbb{R}^3 engendré par $t_{a_1/2} \circ r_{a_1, \pi}$, $t_{\frac{a_1+a_2}{2}} \circ r_{a_2, \pi}$ et $t_{\frac{a_1+a_2+a_3}{2}} \circ r_{a_3, \pi}$. Alors le quotient \mathbb{R}^3/Γ est une variété de type $C_{2,2}$. Cette fois ci, le groupe d'holonomie G n'est pas cyclique, il est égal à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Remarque 1.4. Que l'on soit dans C_2 , C_4 ou C_6 , tout plan contenant a_3 donne, par passage au quotient, une bouteille de Klein plate (si ce plan contient des points du réseau autres que ceux de l'axe a_3) ou un ruban de Möbius plat sans bord (dans le cas contraire).

1.2.2 Les variétés non orientables

Nous allons voir que toute variété compacte plate non orientable de dimension 3 peut s'obtenir par suspension d'une bouteille de Klein plate par une isométrie.

Cela se voit en interprétant convenablement (et plus géométriquement) la description faite par J. Wolf (voir [33], p.120-123, dont nous suivons les notations) des variétés de Bieberbach de dimension 3. Voir aussi [32], 4.2.

i) Type B_1 . On se donne un plan P , deux vecteurs indépendants a_1 et a_2 de P , et un vecteur a_3 orthogonal à P . Le groupe Γ est engendré par la symétrie glissée $\sigma_{P, a_1/2}$ et les translations de vecteurs a_2 et a_3 . Notons que le réseau Λ engendré par a_1 , a_2 et a_3 est d'indice 2 dans Γ , et que la variété est difféomorphe au produit d'une bouteille de Klein et d'un cercle. Les différents types métriques s'obtiennent en faisant varier les vecteurs a_i avec les contraintes ci-dessous.

Pour réaliser ces métriques comme des suspensions, on écrit $a_2 = \lambda a_1 + v$, où v est parallèle à P et orthogonal à a_1 , et on vérifie que \mathbb{R}^3/Γ est le quotient

riemannien de $K_{|a_1|,|a_3|} \times \mathbb{R}$ par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto (r_\alpha(p), t + |v|), \quad \text{avec } \alpha = \lambda|a_1|.$$

ii) Type B_2 . On se donne deux plans parallèles P_1 et P_2 et deux vecteurs indépendants a_1 et a_2 parallèles à ces plans. Le groupe Γ est engendré par les symétries glissées $\sigma_{P_1, a_1/2}$ et $\sigma_{P_2, a_2/2}$. Soient \mathbf{k} un vecteur unitaire orthogonal à ces plans de P_1 vers P_2 , et $d\mathbf{k}$ le vecteur de la translation qui envoie P_1 sur P_2 . Alors $\sigma_{P_2, a_2/2} \circ \sigma_{P_1, a_1/2}$ est la translation de vecteur $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} + 2d\mathbf{k}$. Le réseau Λ associé à Γ est engendré par a_1 , a_2 et a_3 . Les différents types métriques s'obtiennent en faisant varier a_1 , a_2 et $d = \text{dist}(P_1, P_2)$.

Cette variété est difféomorphe à la suspension d'une bouteille de Klein par T . En effet, le sous-groupe engendré par $\sigma_{P_1, a_1/2}$ et la translation de vecteur $4d\mathbf{k}$ est distingué dans Γ ; il est isomorphe au groupe fondamental de la bouteille de Klein, et le quotient est isomorphe à \mathbb{Z} .

Pour expliciter cette identification au niveau des métriques, on écrit comme plus haut $a_2 = \lambda a_1 + v$, avec v orthogonal à a_1 , et on vérifie que \mathbb{R}^3/Γ est le quotient riemannien de $K_{|a_1|, 4d} \times \mathbb{R}$ par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto \left(r_\alpha(T(p)), t + \frac{|v|}{2} \right), \quad \text{avec } \alpha = |a_1| \frac{\lambda - 1}{2}.$$

iii) Type B_3 . On se donne un plan P , une droite D de P , et une base orthogonale (a_1, a_2, a_3) , telle que a_1 et a_2 soient parallèles à D et P respectivement. Le groupe Γ est engendré par $\sigma_{D, a_1/2}$, $\sigma_{P, a_2/2}$ et la translation de vecteur a_3 . On peut aussi obtenir cette métrique par suspension de la bouteille de Klein : c'est le quotient riemannien de $K_{|a_2|, |a_3|} \times \mathbb{R}$ par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto (S_1(p), t + |a_1|/2) \quad (\text{voir 1.1.3}).$$

iv) Type B_4 . On se donne un plan P , une droite D parallèle à P mais non incluse dans P , deux vecteurs orthogonaux a_1 et a_2 parallèles à D et P respectivement. Le groupe Γ est engendré par $\sigma_{D, a_1/2}$ et $\sigma_{P, a_2/2}$. Le réseau associé à Γ est engendré par la base orthogonale (a_1, a_2, a_3) , avec $|a_3| = 4\text{dist}(P, D)$.

Cette fois, la métrique est le quotient riemannien de $K_{|a_2|, |a_3|} \times \mathbb{R}$ par le groupe d'isométries engendré par

$$(p, t) \mapsto (S_2(p), t + |a_1|/2) \quad (\text{voir encore 1.1.3}).$$

Remarque 1.5. Cette discussion montre que chaque classe de difféomorphisme de variété plate compacte non orientable de dimension 3 est associée à un élément du groupe des difféomorphismes de K quotienté par sa composante neutre (ce groupe est isomorphe au groupe des transformations affines et au groupe des isométries de la bouteille de Klein).

1.3 Les variétés plates à bord géodésique

Le résultat ci-dessous peut sembler évident. Sa preuve demande cependant quelques précautions.

Théorème 1.2. *Le revêtement universel riemannien d'une variété compacte plate de dimension n à bord géodésique est un $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, où I est un segment.*

Preuve. Soit $(M, \partial M)$ une telle variété, $(\tilde{M}, \partial \tilde{M})$ son revêtement universel. La théorie des (G, X) structures nous dit ici (voir [32], pp. 139 pour les détails) qu'il existe une isométrie locale D (application développante) de \tilde{M} dans \mathbb{R}^n . Chaque composante connexe de $\partial \tilde{M}$ est une variété plate complète de dimension $n - 1$, qui est envoyée par D sur une sous-variété plate et géodésique de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire un ouvert d'un hyperplan. Cela montre que les géodésiques d'une composante de $\partial \tilde{M}$ ne peuvent pas être fermées : l'image par D d'une telle géodésique serait une géodésique fermée de \mathbb{R}^{n-1} , donc un point, ce qui est impossible puisque D est une isométrie locale. Nous savons maintenant que les géodésiques de $\partial \tilde{M}$ sont des droites. Pour la même raison, elles sont envoyées sur des droites, et $D(\partial \tilde{M})$ est une réunion d'hyperplans.

Ces hyperplans sont parallèles. Soit en effet un point x appartenant à l'intersection de deux d'entre eux. Ce point admet (au moins) deux pré-images y_1 et y_2 par D , appartenant à des composantes connexes distinctes de $\partial \tilde{M}$. Il y a au moins une géodésique minimisante qui joint y_1 et y_2 . Elle est orthogonale en y_i à la composante qui contient ce point. Son image par D est orthogonale en x aux deux hyperplans, qui sont nécessairement confondus.

Finalement, la frontière de $D(\tilde{M})$ est une réunion d'hyperplans parallèles. Il y en a donc au plus deux. Dans les deux cas, D , qui est une isométrie locale de \tilde{M} sur un demi-espace fermé ou sur $I \times \mathbb{R}^{n-1}$, est nécessairement une isométrie. Le premier cas est exclu : une isométrie d'un demi-espace, que l'on peut toujours identifier à $[0, \infty[\times \mathbb{R}^{n-1}$, laisse le premier facteur fixe et le second globalement invariant, ce qui interdit à $[0, \infty[\times \mathbb{R}^{n-1}$ d'avoir des quotients compacts par un groupe d'isométries. ■

Reste à étudier les variétés elles-mêmes, c'est-à-dire les quotients compacts de $I \times \mathbb{R}^{n-1}$ par un groupe discret d'isométries agissant librement. Soit Γ un tel groupe. Il laisse l'hyperplan équidistant des deux composantes connexes du bord globalement invariant, donc agit isométriquement et librement sur cet hyperplan. Pour cette action, il existe un domaine fondamental compact (prendre l'intersection avec l'hyperplan d'un domaine fondamental pour l'action sur $I \times \mathbb{R}^{n-1}$). Cela montre que Γ est isomorphe à un groupe de Bieberbach en dimension $n - 1$. Par ailleurs, les parties linéaires des éléments de Γ vivent dans $O(1) \times O(n - 1) \simeq \{\pm 1\} \times O(n - 1)$. Deux cas sont à distinguer, suivant que ces parties linéaires soient toutes dans $\{1\} \times O(n - 1)$ ou non.

a) Chaque composante connexe du bord de $I \times \mathbb{R}^{n-1}$ est laissée stable par Γ . Il en est alors de même pour tout hyperplan parallèle à ces composantes. Alors M s'identifie à $I \times \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma$.

b) Le sous-groupe de Γ qui laisse ces composantes stables est un sous-groupe Γ_0 d'indice 2. Ce sous-groupe agit isométriquement et librement sur chacune de ces composantes et admet un domaine fondamental compact pour les mêmes raisons que précédemment. C'est donc aussi un groupe de Bieberbach en dimension $n-1$. Si l'on identifie I à $[-l, l]$ et si l'on note (x, y) les éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, les actions de Γ sur \mathbb{R}^{n-1} et sur \mathbb{R}^n sont reliées par

$$\gamma \cdot (x, y) = \begin{cases} (x, \gamma \cdot y) & \text{si } \gamma \in \Gamma_0 \\ (-x, \gamma \cdot y) & \text{si } \gamma \notin \Gamma_0 \end{cases}$$

Le bord de M est connexe et isométrique à $\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma_0$, et M admet un revêtement riemannien d'ordre 2 isométrique à $I \times \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma_0$. Cette situation est l'analogie exacte de celle du ruban de Möbius.

1.4 Cas des variétés de dimension 3

Dans le cas a), M est le produit d'un tore plat ou d'une bouteille de Klein plate par un segment. Pour traiter le cas b), en reprenant les notations ci-dessous, Γ est soit un réseau du plan euclidien, soit le groupe fondamental d'une bouteille de Klein,

Si Γ est un réseau, ses sous-groupes d'indice 2 sont de la forme $\mathbb{Z}v + 2\mathbb{Z}v'$ pour une base convenable de Γ . La variété est le quotient de $[-d, d] \times \mathbb{R}^2$ par le sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ engendré par t_v et la symétrie glissée $\sigma_{P,v'}$, où l'on a désigné par P le plan $x = 0$. Cette variété n'est pas orientable; son bord est le tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}v + 2\mathbb{Z}v'$, alors que le plan P donne par passage au quotient le tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}v'$. L'analogie avec le ruban de Möbius est telle que nous proposons d'appeler cette variété le *ruban de Möbius solide*. Nous la désignerons par $M_{v,v',d}$.

Si Γ est le groupe fondamental d'une bouteille de Klein, engendré par la symétrie glissée $(y, z) \mapsto (y + \frac{a}{2}, -z)$ et la translation $(y, z) \mapsto (y, z + b)$, il y a deux type de sous-groupes d'indice 2. Tout d'abord, Γ_0 peut être le réseau associé à Γ . La variété est alors le quotient de $[-d, d] \times \mathbb{R}^2$ par le sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ engendré par

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z + b) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \mapsto (-x, y + \frac{a}{2}, -z).$$

Cette variété est orientable, et son bord est un tore.

Enfin, Γ_0 peut être engendré par une symétrie glissée de déplacement $\frac{a}{2}$ et la translation $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + 2b)$. La variété est alors le quotient de $[-d, d] \times \mathbb{R}^2$ par le sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ engendré par

$$(x, y, z) \mapsto (-x, y, z + b) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \mapsto (x, y + \frac{a}{2}, -z)$$

Cette variété n'est pas orientable, et son bord est une bouteille de Klein.

On a au total cinq types de variétés plates à bord géodésique. Le tableau ci-dessous résume cette discussion.

orientable	bord non connexe
non orientable	bord non connexe
non orientable	bord connexe orientable
orientable	bord connexe (orientable)
non orientable	bord connexe non orientable

Revenons au troisième type, le ruban de Möbius solide, qui nous semble le plus intéressant. Le double d'un ruban de Möbius solide est une variété compacte plate sans bord de type B_1 . Les variétés de type B_2 s'obtiennent en identifiant les bords de deux rubans solides $M_{v,v'/2,d}$ et $M_{v'/2,v,d}$ qui sont des tores plats isométriques.

Chapitre 2

Les métriques singulières

2.1 Définition des métriques singulières

Toutes les métriques singulières qu'on utilisera donnent des espaces de longueurs, c'est-à-dire des espaces munis d'une notion de longueur pour les courbes continues simples. Dans cette partie on va définir ces métriques dans un cadre général, celui des polyèdres riemanniens. Pour plus de détail sur cette notion voir [2].

Un polyèdre est un espace topologique muni d'une triangulation, c'est-à-dire divisé en des simplexes qu'on recolle par les faces. On notera par σ un simplexe quelconque d'un polyèdre P .

Définition 1. Une métrique riemannienne sur un polyèdre P est une famille de métriques riemanniennes $\{g_\sigma\}_{\sigma \in I}$, où I est en bijection avec l'ensemble des simplexes de P . Ces métriques doivent satisfaire aux conditions suivantes

1. Chaque g_σ est une métrique lisse à l'intérieur du simplexe σ .
2. Les métriques g_σ coïncident sur les faces ; autrement dit pour chaque paire de simplexes σ_1, σ_2 , on a l'égalité

$$g_{\sigma_1}|_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = g_{\sigma_2}|_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$$

Une telle structure riemannienne sur les polyèdres permet de calculer la longueur d'une courbe lisse par morceaux dans P , ceci rend le polyèdre (P, g) un espace de longueur. Si γ est un chemin lisse par morceaux d'un intervalle I dans P , alors la longueur de γ se définit comme pour les métriques C^∞ :

$$l(\gamma) = \int_I (g(\gamma', \gamma'))^{1/2}$$

en plus (P, g) gagne une structure d'espace métrique (et surtout une structure d'espace de longueur) de la même manière que dans le cas des variétés lisses.

$$d_g(x, y) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$$

où γ parcourt l'ensemble des chemins lisses par morceaux joignant x à y .

Il faut enfin noter que la mesure riemannienne, elle aussi, se définit exactement comme dans le cas lisse. Evidemment, la partie singulière sera de mesure nulle.

Les géodésiques d'un polyèdre riemannien sont les géodésiques de la structure de longueur associée (voir [17]). A l'intérieur d'un simplexe (σ, g_σ) , la formule de variation première montre qu'une telle géodésique est une géodésique pour g_σ au sens riemannien. Nous reviendrons sur ces géodésiques notamment dans 4.1.

2.2 Métriques singulières sur des variétés de Bieberbach non orientables

2.2.1 La bouteille de Bavard (K, b)

On part de la sphère ronde, et on repère les points par la latitude ϕ et la longitude θ . Pour $\phi_o \in]0, \pi/2[$, soit Σ_{ϕ_o} le domaine défini par $|\phi| \leq \phi_o$. Sur Σ_{ϕ_o} , la métrique ronde est donnée par $d\phi^2 + \cos^2 \phi d\theta^2$. On note que le revêtement universel de Σ_{ϕ_o} est la bande $\mathbb{R} \times [-\phi_o, \phi_o]$ munie de la même métrique ($d\phi^2 + \cos^2 \phi d\theta^2$). A partir de là, on introduit sur \mathbb{R}^2 la métrique riemannienne singulière (au sens précédent)

$$d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2, \tag{2.1}$$

où f est la fonction $2\phi_o$ -périodique qui coïncide avec $\cos \phi$ sur l'intervalle $[-\phi_o, \phi_o]$ (comparer à [6]).

Exemple 1. La métrique sur la bouteille de Klein qui donne le quotient systolique optimal $(\frac{\pi}{2\sqrt{2}})$ s'obtient pour $\phi_o = \frac{\pi}{4}$ en quotientant le plan muni de la métrique 2.1 par l'action du groupe engendré par

$$(\theta, \phi) \mapsto (\theta + \pi, -\phi) \quad \text{et} \quad (\theta, \phi) \mapsto (\theta, \phi + 4\phi_o).$$

Nous noterons (\mathbf{K}, b) la bouteille de Klein munie de cette métrique, (\mathbf{T}^2, b) son revêtement des orientations.

Remarque 2.1. Il peut paraître plus naturel de quotienter le plan muni de la métrique 2.1 par le groupe engendré par

$$(\theta, \phi) \mapsto (\theta + \pi, -\phi) \quad \text{et} \quad (\theta, \phi) \mapsto (\theta, \phi + 2\phi_0)$$

la surface obtenue est bien une bouteille de Klein mais elle n'est pas bonne pour le rapport systolique : les géodésiques fermées par la correspondance $(\theta, \phi) \mapsto (\theta, \phi + 2\phi_0)$ sont de longueur $\pi/2$ alors que celles qui sont fermées par la correspondance $(\theta, \phi) \mapsto (\theta + \pi, -\phi)$ sont de longueur π . On peut donc diminuer le volume sans raccourcir la systole.

Il se trouve que (\mathbf{K}, b) a le même groupe d'isométries que celui d'une bouteille de Klein plate (attention, la propriété analogue pour (\mathbf{T}^2, b) est fautive!). Cela peut se voir par un calcul direct, mais il sera utile de voir les choses géométriquement : le domaine sphérique à bord Σ_{ϕ_0} vu plus haut peut se voir comme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, |z| \leq \sin \phi_0\}.$$

Le cylindre obtenu en prenant tous les translatés de vecteur $2n \sin \phi_0 \vec{k}$ de Σ_{ϕ_0} , muni de la structure de longueur induite par la métrique euclidienne, est un revêtement riemannien de (\mathbf{T}^2, b) (et donc de (\mathbf{K}, b)). Nous le noterons (\mathbf{C}, b) .

On récupère (\mathbf{K}, b) en quotientant (\mathbf{C}, b) par le groupe engendré par les antipodias par rapport aux centres des sphères portant ces domaines (deux domaines contigus suffisent). On notera σ l'une quelconque de ces antipodias.

Alors les isométries suivantes de ce cylindre passent au quotient. Si on adopte la formulation analytique de (2.1), elles sont les exactes analogues des isométries décrites en 1.1.3.

1. les rotations autour de l'axe (analogues aux translations "horizontales").
2. les réflexions par rapport à un plan méridien (analogues aux réflexions par rapport à une géodésique "verticale", c'est-à-dire aux transformations de type S_1).
3. les réflexions par rapport à un diamètre d'un cercle singulier (analogues aux symétries par rapport à un point du bord commun des deux rubans, c'est-à-dire aux transformations de type S_2).
4. la réflexion par rapport à un plan d'un cercle singulier (qui donne par passage au quotient une transformation équivalente (modulo Isom_o) à celle obtenue en faisant passer au quotient la translation de vecteur $2 \sin \phi_0 \vec{k}$. Cette dernière transformation est l'analogue de $(x, y) \mapsto (x, y + \frac{b}{2})$).

2.2.2 Les 3-variétés de Bieberbach

On a vu dans le paragraphe précédent que la bouteille de Bavard (K, b) a le même groupe d'isométries que celui d'une bouteille de Klein plate et que $\text{Isom}(K, b)/\text{Isom}_0(K, b)$ s'identifie à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

En utilisant ces isométries, on peut reprendre les constructions par suspensions (déjà faites au premier chapitre) pour obtenir sur toutes les variétés de Bieberbach non-orientables de dimension 3 des métriques riemanniennes singulières.

En dehors de la singularité, le modèle local de toutes ces métriques est

$$(S^2 \times \mathbb{R}, d\phi^2 + \cos^2 \phi d\theta^2 + dt^2)$$

Le lieu singulier est formé de tores plats de dimension 2. En prenant le bon choix des paramètres de ces métriques, on va pouvoir améliorer le rapport systolique des métriques plates sur ces variétés.

Remarque 2.2. Une métrique de la forme $d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2$ est localement conforme à une métrique plate, même si f est seulement continue : il suffit de mettre f^2 en facteur. Le même procédé montre de plus que la métrique de C. Bavard est globalement conforme à une métrique plate sur la bouteille de Klein. Cette métrique est facile à expliciter (voir [7] pour les détails).

Ici, comme nous travaillons en dimension 3, la situation est différente. Le modèle local est de la forme $d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2 + dt^2$. Il s'avère que si g est une métrique riemannienne C^3 en dimension 2, $g + dt^2$ est conformétement plate si et seulement si g est à courbure constante. Par conséquent, les métriques que nous avons introduites ci dessus sont bien conformétement plates *en dehors de la surface singulière*. Il ne faut pas s'attendre à ce qu'elles soient conformétement plates au voisinage d'un point d'une surface singulière, mais la métrique étant seulement continue, un argument spécifique est nécessaire.

Proposition 2.1. *La métrique $d\phi^2 + f^2(\phi)d\theta^2 + dt^2$, où f est la fonction donnée dans (2.1), n'est pas conformétement plate.*

Preuve. Soit p un point de l'hypersurface singulière S d'équation $\phi = \phi_0$, et $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un difféomorphisme conforme sur un ouvert de \mathbb{R}^3 . Quitte à diminuer U , on peut le supposer invariant par la transformation $s : (\phi, \theta, t) \mapsto (2\phi_0 - \phi, \theta, t)$, qui est une isométrie de U fixant S . D'après le théorème de Liouville (voir par exemple [28], p.12), la conjuguée de s par h est la restriction d'une transformation de Möbius. Mais une telle transformation ne peut exister : l'ensemble de ses points fixes contient $h(S \cap U)$, qui devrait être une portion d'une 2-sphère. Pour voir que c'est impossible, on introduit l'application conforme h_1 de $U' = U \cap \{\phi < \phi_0\}$ dans \mathbb{R}^3 donnée par

$$h_1(\phi, \theta, t) = (e^t \cos \phi \cos \theta, e^t \cos \phi \sin \theta, e^t \sin \phi)$$

(comparer à [28], p.76–77). Toujours d’après le théorème de Liouville, il existe une transformation de Möbius h_2 telle qu’en restriction à U' on ait $h = h_2 \circ h_1$. Par continuité, cette propriété reste vraie sur $S \cap U$. Ainsi, l’ensemble des points fixes de la transformation de Möbius hsh^{-1} contient $h_2(h_1(S \cap U))$. On aboutit à la contradiction cherchée, car $h_1(S)$ est une portion d’un cône de révolution. ■

Pour plus de détails sur les résultats de géométrie conforme utilisés ici, voir les contributions de R. Kulkarni et de J. Lafontaine dans [28].

2.3 Métriques singulières sur les variétés de Bieberbach orientables

Pour un réseau quelconque Δ de \mathbb{R}^2 , on introduit le pavage de Dirichlet-Voronoi associé. C’est un pavage du plan par des hexagones (ou des rectangles si le réseau Δ est rectangle) A_p centrés aux points p du réseau. Alors un réseau de \mathbb{R}^3 de la forme $\Delta \times c\mathbb{Z}$, où $c \in \mathbb{R}$, nous permet de paver \mathbb{R}^3 naturellement par des prismes hexagonaux ou rectangles que l’on note D_p .

On introduit alors sur \mathbb{R}^3 la métrique riemannienne singulière $h = dx^2 + dy^2 + \psi(m)dz^2$, où l’on a posé, pour $m(x, y, z) \in D_p$, $\psi(m) = \cos^2 \text{dist}((x, y), p)$, avec $\text{dist}((x, y), p) < \pi/2$. Si m appartient à deux domaines D_p et $D_{p'}$ alors p et p' sont à la même distance de m : la fonction ψ est bien définie. Elle est continue, mais pas C^1 . La composante neutre du groupe des isométries des (\mathbb{R}^3, h) est formée des translations verticales $(x, y, z) \mapsto (x, y, z + c')$. Les translations par les vecteurs de Δ sont aussi des isométries. Il est important de noter que la métrique h s’écrit aussi $dx^2 + dy^2 + \cos^2(d((x, y), \Delta))dz^2$, où $d((x, y), \Delta)$ est la distance du point (x, y) au réseau Δ .

Le quotient de (\mathbb{R}^3, h) par le groupe $\Delta \times c\mathbb{Z}$ (où $c > 0$) est un tore singulier de dimension 3. On note ce tore par (T, h) . Les sections de ce tore par les plans $z = \text{constante}$ sont des tores plats géodésiques de dimension 2, tous ces tores plats sont isométriques à \mathbb{R}^2/Δ . Il faut noter que l’application de (T, h) dans le tore \mathbb{R}^2/Δ , qui consiste à projeter sur le tore $z = 0$, est une submersion riemannienne.

Avec un bon choix du réseau Δ , les transformations $t_{a_3/n} \circ r_{a_3, 2\pi/n}$ ($n = 2, 3, 4, 6$), déjà décrites dans la classifications des variétés plates orientables, deviennent des isométries de (T, h) (il faut que le réseau Δ soit carré pour obtenir C_4 et hexagonal pour obtenir C_3 et C_6). On obtient de cette façon des familles de métriques riemanniennes singulières sur les variétés de type C_2, C_3, C_4 et C_6 .

Remarque 2.3. En fait cette construction marche aussi si on quotiente (\mathbb{R}^3, h) par le réseau $n\Delta \times c\mathbb{Z}$. A partir du tore obtenu, on peut réobtenir toutes les variétés C_i ($i = 2, 3, 4, 6$) exactement de la même façon que pour le tore (T, h) . On verra au chapitre suivant qu'il est plus utile, pour obtenir de "bons quotients systoliques" sur ces variétés, de prendre $n = 2$.

2.4 Des métriques singulières aux métriques lisses

Les métriques que nous venons de construire sont seulement continues. Pour les approcher par des métriques lisses, on utilise des arguments de continuité et d'approximation.

Si M est une variété compacte, l'espace des sections continues de n'importe quel fibré tensoriel sur M peut être muni de la topologie *compacte ouverte* (cf. [26], ch. 2. Pour cette topologie); le sous-espace \mathcal{M} des métriques riemanniennes est ouvert dans l'espace $C^0(S^2M)$ des 2-tenseurs symétriques. Pour la topologie induite sur \mathcal{M} , on peut vérifier que tout ouvert est une réunion d'ensembles de la forme

$$A(g, \epsilon) = \{h \in \mathcal{M}, \forall x \in M, (1 - \epsilon)g_x < h_x < (1 + \epsilon)g_x\},$$

où $g \in \mathcal{M}$ et $\epsilon \in]0, 1[$; ces inégalités étant prises au sens des formes quadratiques sur T_xM .

La propriété suivante est folklorique. Faute de pouvoir en donner une référence écrite, nous la démontrons.

Théorème 2.1. *L'application $h \mapsto \text{sys}(h)$ est continue sur \mathcal{M} muni de la topologie compacte ouverte.*

Preuve. Il suffit de travailler avec un $A(g, \epsilon)$. Pour $h \in A(g, \epsilon)$, la systole peut être réalisée par une courbe paramétrée $c : [0, 1] \rightarrow M$ prise dans l'ensemble

$$\mathcal{C} = \cup_{h \in A(g, \epsilon)} \mathcal{C}_h,$$

où \mathcal{C}_h est l'ensemble des lacets $c : [0, 1] \rightarrow M$ non contractiles, C^1 par morceaux, paramétrés proportionnellement à la longueur d'arc pour h , et de h -longueur inférieure ou égale à $2\text{diam}(M, h)$.

Dans ces conditions, l'ensemble des longueurs des courbes de \mathcal{C} , prises pour toutes les métriques de $A(g, \epsilon)$, est majoré par $2(1 + \epsilon)\text{diam}(M, g)$, et l'ensemble

$$\bigcup \{(c(t), \dot{c}^\pm(t))\} \quad \text{avec } c \in \mathcal{C}, t \in [0, 1]$$

est relativement compact dans TM . Il en résulte que la famille (indexée par \mathcal{C}) de fonctions qui à une métrique h , associe la longueur de c pour h est *équicontinue* sur $A(g, \epsilon)$. Mais la borne inférieure d'une famille de fonctions équicontinue est continue. ■

Enfin (voir encore [26]), l'espace des sections lisses de n'importe quel fibré vectoriel de base compacte est dense pour la topologie compacte ouverte dans l'espace des sections continues. Dans la situation qui nous intéresse, il suffit en fait d'approcher uniformément la fonction Sys par une fonction lisse.

Chapitre 3

Les variétés de Bieberbach orientables

3.1 Deux tores singuliers et leur systole

On quotiente l'espace riemannien singulier (\mathbb{R}^3, h) vu dans 2.3 par le réseau $2\Delta \times c\mathbb{Z}$. On obtient un tore de dimension 3 (T, g) dont le lieu singulier est connexe. Il est formé du bord de la projection canonique de quatre prismes hexagonaux (ou rectangles) formant un domaine fondamental de l'action de $2\Delta \times c\mathbb{Z}$. Si u et v sont deux vecteurs qui engendrent le réseau Δ alors les sections de (T, g) par les plans passant par un point du réseau Δ et parallèles à u (ou v) sont des tores de dimension 2 à courbure $+1$ en dehors de leur lieu singulier. Avec un bon choix de u et v ces tores sont le revêtement orientable de la bouteille de Bavard (\mathbf{K}, b) introduite dans 2.2.1. Plus généralement, les sections de (T, g) par des plans passant par l'axe d'un domaine D_p sont des surfaces à courbure $+1$ tant qu'on reste à l'intérieur de D_p . Notons par S_p ces surfaces.

Remarque 3.1. Pour conserver la systole et diminuer le volume des variétés de type C_i il est crucial de quotienter (\mathbb{R}^3, h) par le réseau $2\Delta \times c\mathbb{Z}$ et non pas par $\Delta \times c\mathbb{Z}$. Ceci empêche le raccourcissement des courbes fermées au niveau des surfaces S_p .

On suppose d'abord que le réseau Δ est carré et engendré par deux vecteurs de norme $2a > 0$, et on choisit le réseau $2\Delta \times 2\pi\mathbb{Z}$. Ce réseau est engendré par les trois translations $t_1 : (x, y, z) \longrightarrow (x + 4a, y, z)$, $t_2 :$

$(x, y, z) \longrightarrow (x, y + 4a, z)$ et $t_3 : (x, y, z) \longrightarrow (x, y, z + 2\pi)$. On note (T, g_c) le tore quotient. Son lieu singulier est formé des quatres surfaces connexes $x = a$, $x = 3a$, $y = a$ et $y = 3a$.

On note que les symétries par rapport aux surfaces $x = pa$ et $y = qa$ où $p, q \in \mathbb{Z}$ sont des isométries de (T, g_c) .

Lemme 3.1. *La systole de (T, g_c) est égale à $\inf\{4a, 2\pi \cos(a\sqrt{2})\}$.*

Preuve. Soit γ une courbe de (\mathbb{R}^3, h) , de $m(x_0, y_0, z_0)$ à $t_1(m)$, alors

$$l(\gamma) \geq \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y)z'^2} dt \geq \int x' dt \geq 4a$$

De même si γ est une courbe de $m(x_0, y_0, z_0)$ à $t_2(m)$ on a $l(\gamma) \geq 4a$, il suffit de comparer la longueur de γ à celle de sa projection sur $\{y = y_0, z = z_0\}$. Enfin pour une courbe γ de m à $t_3(m)$, on a

$$l(\gamma) = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y)z'^2} dt \geq \int \inf(\psi)z' dt = 2\pi \cos a\sqrt{2}$$

L'égalité est obtenue pour les points des arêtes des prismes carré D_p . En utilisant la même technique on démontre que la distance entre un point m et son image par la composée de plusieurs translations est supérieure à $\inf\{4a, 2\pi \cos a\sqrt{2}\}$. ■

Supposons maintenant que le réseau Δ est hexagonal et qu'il est engendré par deux vecteurs de norme $2a > 0$. Le réseau $2\Delta \times 2\pi\mathbb{Z}$ est engendré par les trois translations $T_1 : (x, y, z) \longrightarrow (x + 4a, y, z)$, $T_2 : (x, y, z) \longrightarrow (x + 2a, y + 2a\sqrt{3}, z)$ et $T_3 : (x, y, z) \longrightarrow (x, y, z + 2\pi)$. La variété obtenue est un tore singulier que nous noterons (T, g_{hex}) . Son lieu singulier est formé des bords des prismes hexagonaux D_p qui pavent \mathbb{R}^3 .

Remarque 3.2. Les symétries par rapport aux surfaces $x = pa$, $y + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}}$ et $y - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}}$ sont des isométries de (T^3, g_{hex}) .

Lemme 3.2. *La systole de (T, g_{hex}) est égale à $\inf\{4a, 2\pi \cos(2a/\sqrt{3})\}$.*

Preuve. Pour une courbe γ de m à $T_1(m)$ on a

$$l(\gamma) \geq \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y)z'^2} dt \geq \int x' dt \geq 4a$$

La même égalité est valable pour une courbe de m à $T_2(m)$ puisque la situation est invariante par la rotation $r_{a_3, \pi/3}$ d'angle $\pi/3$ autour de l'axe des z . Enfin pour une courbe γ de m à $T_3(m)$, on a

$$l(\gamma) = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y)z'^2} dt \geq \int \inf(\psi)z' dt = 2\pi \cos(2a/\sqrt{3})$$

L'égalité est obtenue pour les points des arêtes d'un prisme hexagonal D_p . La distance entre un point m et son image par la composée de plusieurs translations est supérieure à $\inf\{4a, 2\pi \cos(2a\sqrt{3})\}$. ■

3.2 Quotient systolique de C_2

3.2.1 Calcul du quotient systolique dans le cas plat

Le volume est égal à $\frac{1}{2} \det(a_2, a_1)|a_3|$ et la systole à $\inf\{|a_3|/2, s\}$, où s est la systole du tore plat de dimension 2 défini par le réseau de base a_1, a_2 . Normalisons de façon que $\frac{1}{2}|a_3| = 1$, alors le quotient systolique vaut

$$\frac{s^3}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \geq 1,$$

Compte tenu du fait que $\frac{s^2}{\det(a_1, a_2)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ (réseau de dimension 2), le quotient systolique est inférieur à $2/\sqrt{3}$.

3.2.2 Les bouteilles de Klein et les rubans de Möbius de C_2

On a déjà vu que les plans passant par a_3 donnent par passage au quotient soit des bouteilles de Klein plates soit des rubans de Möbius plats sans bord. Si le plan passe par un point du réseau Λ autre que ceux de l'axe a_3 , l'intersection est une bouteille de Klein, elle est un ruban de Möbius dans le cas contraire.

Pour améliorer le rapport systolique de $2/\sqrt{3}$ il faut diminuer le volume sans toucher à la systole. Une façon de le faire est de profiter de ces surfaces non orientables existant dans la variété plate C_2 et d'utiliser la métrique sphérique de Bavard et de Pu sur ces surfaces.

3.2.3 Une métrique singulière sur C_2 meilleure que les métriques plates

On part du tore singulier (T, g_{hex}) vu dans 3.1.

La transformation $\sigma : (x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z + \pi)$ est une isométrie de la métrique g . Pour obtenir une variété homéomorphe à C_2 il suffit de quotienter (T, g_{hex}) par le sous groupe engendré par σ . On note (C_2, g_{hex}) une telle variété riemannienne.

Dans le tore (T, g_{hex}) , la transformation σ laisse 4 géodésiques globalement invariantes, ce sont les axes verticaux passant par les 4 centres des prismes qui forment un domaine fondamental de C_2 (c'est l'ensemble $\{x = 2pa, y = 2qa, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$). En fait c'est une propriété du groupe fondamental

de C_2 qui ne dépend pas de la métrique et qui reste donc vraie pour toute métrique sur C_2 . L'existence de ces géodésiques pose un danger puisque ça peut raccourcir des courbes fermées non contractiles dans la variété (C_2, g_{hex}) . De telles géodésiques sont encore plus nombreuses pour les variétés C_4 et C_6 .

Revenons à la métrique g , elle s'écrit localement (dans le domaine D) en coordonnées cylindriques (par rapport à x et y) sous la forme $g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \cos^2 r dz^2$ (r est la distance à l'axe vertical passant par le centre p du prisme D_p et θ est l'angle par rapport à l'axe des "x"). Dans la suite on considèrera tantôt la première forme tantôt l'autre suivant le besoin.

Remarque 3.3. En restriction à un prisme D_p , une surface d'équation $\theta = \theta_0$ est totalement géodésique. Pour le voir il suffit de remarquer que la longueur d'une courbe γ dans D_p joignant deux points de $\theta = \theta_0$ est toujours supérieure à celle de sa projection sur cette surface. Ceci est dû simplement à l'écriture de la métrique en coordonnées "cylindriques" :

$$l(\gamma) = \int \sqrt{r'^2 + r^2 \theta'^2 + \cos^2 r z'^2} dt \geq \int \sqrt{r'^2 + \cos^2 r z'^2}$$

Les surfaces $\theta = \text{constante}$ ne sont pas singulières tant qu'on reste à l'intérieur d'un domaine D_p , elles sont localement isométriques à S^2 et leurs géodésiques sont aussi des géodésiques de (C_2, g_{hex}) .

Lemme 3.3. Soit γ une courbe du revêtement riemannien universel de (T, g_{hex}) et γ' sa projection minimale sur un prisme hexagonal D_p , alors $l(\gamma) \geq l(\gamma')$.

Preuve. La projection minimale d'un point m est ici le point de D_p à distance (euclidienne) minimale de m . Il est unique puisque D_p est convexe.

Si la projection minimale orthogonale se fait sur la singularité $x = pa$, c'est-à-dire si γ' est incluse dans une telle hypersurface, alors

$$l(\gamma) = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y) z'^2} dt \geq \int \sqrt{y'^2 + \psi(x, y) z'^2} dt = l(\gamma')$$

Or la situation est invariante par une rotation d'angle $\pi/3$ autour de p ; ceci implique que si γ se projette sur les surfaces $y + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}}$ ou $y - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2pa}{\sqrt{3}}$ de la singularité, on a aussi $l(\gamma) \geq l(\gamma')$. Enfin, le résultat est vrai pour une courbe qui se projette sur toute la singularité. ■

Lemme 3.4. Pour tout point $m(r_0, \theta_0, z_0)$ de (T, g_{hex}) on a

$$d_{(T, g_{hex})}(m, \sigma(m)) \geq \pi$$

l'égalité étant obtenue pour une géodésique de la surface $\theta = \theta_0$.

Preuve. Soit $m(r_0, \theta_0, z_0)$ un point de D_p , et γ une courbe de (\mathbb{R}^3, h) de m à $\sigma(m)$. Si γ reste dans D_p alors d'après la remarque 3.3 on a $l(\gamma) \geq l(pr(\gamma))$ où $pr(\gamma)$ est la projection de γ sur la surface $\theta = \theta_0$. Or $l(pr(\gamma)) \geq \pi$ à cause de l'écriture de la métrique sur la surface $(dr^2 + \cos^2 r d\theta^2)$. Maintenant si γ sort du prisme D_p , soit γ' la courbe obtenue en prenant la projection (minimale) de la partie de γ extérieure à D_p sur son bord ∂D_p , et en gardant la partie à l'intérieur de D_p inchangée. Alors γ' est une courbe de D_p allant de m à $\sigma(m)$. Sa longueur est supérieure ou égale à π en utilisant le même argument de projection sur la surface $\theta = \theta_0$. Or $l(\gamma) \geq l(\gamma')$.

Ensuite il faut calculer (minorer) dans (\mathbb{R}^3, h) la distance à (un relevé de) $\sigma(m)$ des transformées de m par les translations. On note par σ_0 un relevé de σ sur (\mathbb{R}^3, h) . Si on translate m par T_3 , alors la situation sera équivalente à celle ci-dessus puisque $T_3(m)$ et $\sigma_0(m)$ sont conjugués par σ_0^{-1} . Maintenant une courbe γ dans (\mathbb{R}^3, h) de $\sigma_0(m)$ à $T_1(m)$ doit passer forcément par au moins 3 domaines D_p . Parmi ceux-ci soit D' le domaine qui ne contient ni $\sigma_0(m)$ ni $T_1(m)$.

-Si γ reste dans ces trois domaines alors on lui associe la courbe γ' obtenue en prenant les symétriques des parties de γ à l'extérieur de D' par rapport à son plan singulier du côté de la courbe (voir fig.3.1). Alors γ' est une courbe de D' qui joint deux points conjugués par σ_0 , alors $l(\gamma) \geq l(\gamma') \geq \pi$.

-si γ sort de ces trois domaines, on lui associe une courbe γ' obtenue en projetant la partie de γ extérieure à D' sur son bord $\partial D'$. On obtient une courbe continue dans D' joignant deux points conjugués par σ_0 , d'où $l(\gamma) \geq l(\gamma') \geq \pi$.

Finalement, on note que la distance à $\sigma_0(m)$ de la composée de plusieurs translations de m est trop grande par des arguments similaires à ceux-ci dessus. ■

Remarque 3.4. En fait les deux lemmes précédents sont aussi vrais pour le tore (T, g_c) et se démontrent exactement de la même façon.

Théorème 3.1. *Si le réel a est égal à $\pi/4$ alors*

$$\frac{Sys^3(C_2, g_{hex})}{Vol(C_2, g_{hex})} > \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Preuve. Le volume de (C_2, g_{hex}) est égal à

$$\int_0^\pi \int \int_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy dx dz$$

où D est un hexagone régulier de plus courte distance entre les côté opposés égale à $2a$.

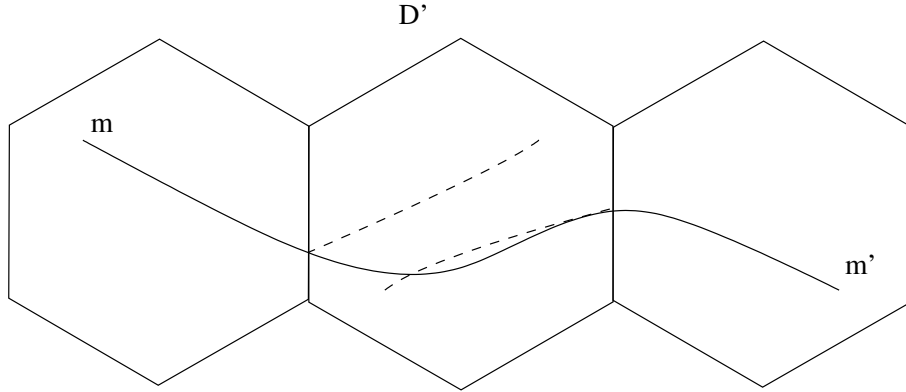


FIGURE 3.1 – Une courbe joignant m à $m' = T_1(\sigma(m))$ doit forcément passer par trois domaines D_p . Pour les parties de cette courbe à l'extérieur de D' on prend leur symétrique par rapport au bord de D' .

La systole est égale à

$$\inf \{ Sys(T, g_{hex}), \inf \{ dist_{(T, g_{hex})}(m, \sigma(m)) \} \}$$

Elle est égale alors à $\inf \{ 4a, 2\pi \cos(a\sqrt{2}), \pi \}$ d'après les lemmes 3.2 et 3.4, d'où pour $a = \pi/4$, on a $Sys(C_2, g_{hex}) = \pi$. En utilisant le logiciel "maple" on trouve une approximation du volume (2,80) à un centième près, puis un simple calcul donne le rapport $Sys^3(C_2, g_{hex})/Vol(C_2, g_{hex})$. Il est de l'ordre de 1,38. ■

3.2.4 La variété C_2 comme quotient du tore (T, g_c)

Pour obtenir une variété homéomorphe à C_2 , on peut partir d'un réseau quelconque Δ , puis quotienter par les mêmes transformations qu'auparavant. Pour diminuer le rapport systolique le plus possible il faut que Δ ait le volume le plus petit, c'est à dire il faut qu'il soit hexagonal. Il est pourtant intéressant d'obtenir cette variété en quotientant le tore (T, g_c) , c'est à dire lorsque Δ est le réseau "spécial" carré. On notera alors le quotient de (T, g_c) par le sous groupe engendré par σ , par (C_2, g_c) .

Dans le cas où $a = \pi/4$, l'intersection de (T, g_c) avec l'un des plans $x = 0$ ou $y = 0$ est le tore de revêtement de la bouteille de Bavard (cf. [6], voir aussi [21]). Dans le cas général, l'intersection avec les plans passant par l'axe z est une surface (un cylindre ou bien un tore) singulière à courbure $+1$ là où elle est lisse. Il s'avère qu'avec un bon choix du paramètre a la variété (C_2, g_c) admet un quotient systolique supérieur à $\sqrt{3}/2$ et le calcul repose comme dans le cas de (T, g_{hex}) , sur le fait que la distance dans (T, g_c) d'un point à son image par σ est supérieur à π (cf. 3.4).

Proposition 3.1. *Si le réel a vérifie $2a - \pi \cos a\sqrt{2} = 0$, alors le quotient systolique $\frac{Sys^3(C_2, g_c)}{Vol(C_2, g_c)}$ est strictement supérieur à $2/\sqrt{3}$. Il est de l'ordre de 1, 18.*

3.3 Type C_4

Dans le cas plat, on a vu que C_4 est le quotient de C_2 (la base (a_1, a_2, a_3) doit être choisie orthogonale avec $|a_1| = |a_2|$) par le sous groupe engendré par $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$. Il s'avère que cette propriété reste vraie pour la variété (C_2, g_c) , autrement dit le quotient de (C_2, g_c) par l'isométrie $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$ donne bien une variété de type C_4 .

3.3.1 Calcul du quotient systolique dans les cas plat et singulier

Le volume d'une variété plate de type C_4 est égal à $|a_1||a_2||a_3|/4$, et la systole est égale à $\inf\{|a_1|, |a_2|, |a_3|/4\}$. Le quotient systolique est inférieur ou égal à 1.

Maintenant on quotiente (T, g_c) par le sous groupe Γ des isométries de g engendré par $\tau : (x, y, z) \rightarrow (-y, x, z + \pi/2)$. On obtient alors une variété homéomorphe à une variété de type C_4 , on la note (C_4, g_c) . En fait C_4 peut se voir de 2 façons différentes à partir de l'isométrie $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$ (qui est la même que l'isométrie τ) de \mathbb{R}^3 . Cette isométrie donne par passage au quotient une isométrie sans points fixes d'ordre 4 (resp d'ordre 2) de (T, g_c) (resp de (C_2, g_c)).

Les transformations τ et τ^{-1} sont d'ordre 4 dans (T, g_c) et laissent 2 géodésiques globalement invariantes.

La transformation τ^2 est d'ordre 2 dans (T, g_c) et laisse, en plus des géodésiques fixes de la transformation τ , 2 géodésiques globalement invariantes. Ce sont les géodésiques verticales passant par les points du réseau Δ (voir fig 3.2).

Théorème 3.2. *Si $a = \pi/8$, la systole de (C_4, g_c) est égal à $\pi/2$ et le quotient systolique $\frac{Sys^3(C_4, g_c)}{Vol(C_4, g_c)}$ est strictement supérieur à 1.*

Preuve. La systole de (T, g_c) est égale à $\inf\{4a, 2\pi \cos(a\sqrt{2})\}$. D'après 3.4 on sait que $d(m, \tau^2(m)) \geq \pi$ ($\tau^2 = \sigma$), donc il reste alors à contrôler τ . En utilisant l'inégalité triangulaire dans (T, g_c) , on a

$$d(m, \tau^2(m)) \leq d(m, \tau(m)) + d(\tau(m), \tau^2(m))$$

or $d(p, \tau(p)) = d(\tau(p), \tau^2(p))$ puisque τ est une isométrie de (T, g_c) . D'où $d(m, \tau(m)) \geq \pi/2$, on a égalité pour m appartenant à un axe de rotation.

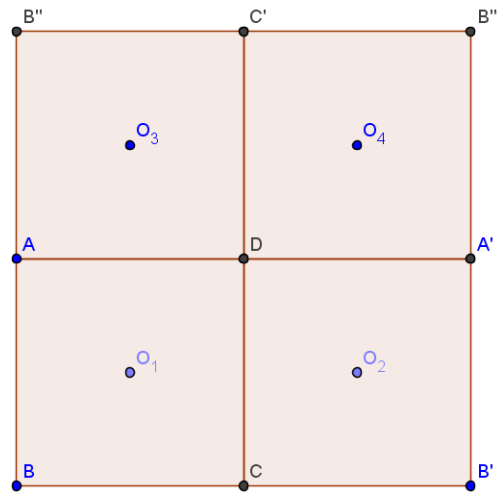


FIGURE 3.2 – Les transformations τ et τ^{-1} laissent fixes les axes verticaux passant par les points O_1 et O_4 . La transformation τ^2 laisse fixes ces mêmes axes, ainsi que les axes verticaux passant par les points O_3 et O_4 .

On note que par la même méthode on contrôle $\tau^3 = \tau^{-1}$.

Finalement pour $a = \pi/8$ la systole de (C_4, g_c) est égale à $\pi/2$. Le volume est égal à

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

En utilisant le logiciel maple, on trouve que le rapport systolique est de l'ordre de $1,05 > 1$. ■

3.4 Type C_6

3.4.1 Calcul du quotient systolique dans le cas plat

Le volume est égal à $\frac{1}{6} \det(a_1, a_2) |a_3|$ et la systole est égale à $\inf\{|a_3|/6, s\}$, où s est la systole du tore plat de dimension 2 défini par le réseau de base a_1, a_2 . En considérant la normalisation habituelle $\frac{1}{6}|a_3| = 1$, le quotient systolique vaut

$$\frac{s^3}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \geq 1,$$

Il est donc inférieur à $2/\sqrt{3}$.

3.4.2 Une bonne métrique singulière sur C_6

Il faut cette fois-ci partir du tore (T, g_{hex}) , qu'on a défini à la première section, puisque le réseau de base Δ doit être hexagonal. Pour obtenir C_6 on quotiente (T, g_{hex}) par le sous groupe engendré par l'isométrie ϕ qui à (p, z) associe $(r_{\pi/3}(p), z + \pi/3)$, le résultat est la variété (C_6, g_{hex}) .

La variété C_6 peut aussi se voir de deux façons différentes à partir de l'isométrie $t_{a_3/4} \circ r_{a_3, \pi/2}$. Cette dernière donne, par passage au quotient, une isométrie sans points fixes d'ordre 6 (resp d'ordre 3) de (T, g_{hex}) (resp de (C_2, g_{hex})).

Les transformations ϕ et ϕ^{-1} sont d'ordre 6 dans le tore (T, g_{hex}) et laissent une seule géodésique globalement invariante.

Les transformations ϕ^2 et ϕ^4 sont d'ordre 3 dans (T, g_{hex}) et laissent, en plus de celle de ϕ , 2 géodésiques verticales globalement invariantes.

La transformation ϕ^3 est d'ordre 2 et laisse, en plus de celles laissées invariantes par ϕ , 3 géodésiques verticales globalement invariantes (voir fig 3.3).

Théorème 3.3. *Pour $a = \pi/12$, le quotient systolique $\frac{Sys(C_6, g_{hex})^3}{Vol(C_6, g_{hex})}$ est strictement supérieur à $\sqrt{3}/2$.*

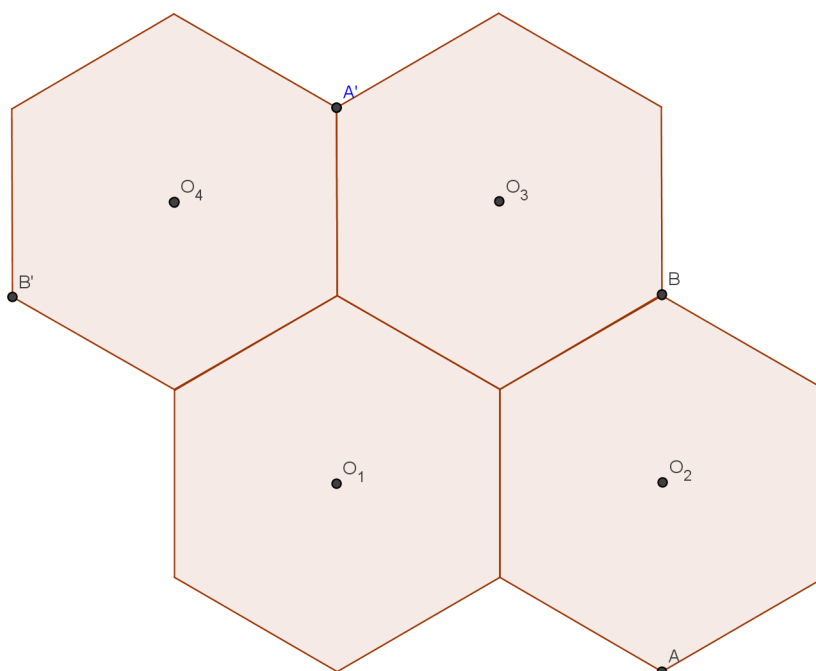


FIGURE 3.3 – Les transformations ϕ et ϕ^{-1} ne laissent fixes que l'axe vertical passant par le point O_1 . Les transformations ϕ^2 et ϕ^{-2} laissent fixes, en plus de l'axe passant par O_1 , les axes verticaux passant par les points A et B . La transformation ϕ^3 laisse fixes, en plus de ces trois axes, les axes verticaux passant par les points O_i , ($i = 2, 3, 4$)

Preuve. Pour $a = \pi/12$ on sait, d'après le lemme 3.2, que la systole de (T, g_{hex}) est égale à $\pi/3$. On sait aussi, par le lemme 3.4, que la distance dans (T, g_{hex}) entre un point m et son image par ϕ^3 est supérieure ou égale à π . En utilisant l'inégalité triangulaire sur (T, g_{hex}) on obtient

$$d(m, \phi^3(m)) \leq d(m, \phi(m)) + d(\phi(m), \phi^2(m)) + d(\phi^2(m), \phi^3(m))$$

On trouve alors que $d(m, \phi(m)) \geq \pi/3$ ($\phi^3 = \sigma$). De plus, la distance dans (T, g_{hex}) entre un point m de coordonnées (x, y, z) et un point m' de coordonnées $(x', y', z + 2\pi/3)$ est supérieure à $\pi/3$. En effet, si γ est une courbe de m à m' on a

$$l(\gamma) = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + \psi(x, y)z'^2} dt \geq \int \sqrt{\psi(x, y)z'^2} \geq \cos \frac{2a}{\sqrt{3}} 2\pi/3 \geq \pi/3$$

les courbes de $T_3(m)$ à m sont beaucoup trop longues, ainsi pour tout m on a

$$\text{dist}_{(T, g_{hex})}(m, \phi^2(m)) \geq \pi/3$$

Finalement, on conclut que $Sys(C_6, g_{hex}) = \pi/3$. Le volume est égal à

$$\int_0^{\pi/3} \int \int_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy dx dz$$

Par une approximation sur maple on calcule le quotient systolique $\frac{Sys^3(C_6, g_{hex})}{Vol(C_6, g_{hex})}$, il est de l'ordre de 1, 18. ■

3.5 Type $C_{2,2}$

Ce cas est le plus facile puisque les géodésiques systoliques de la métrique plate optimale sont isolées.

Dans le cas plat, la systole est égale à $\inf\{a_1/2, a_2/2, a_3/2\}$. Le volume est égal à $\frac{|a_1||a_2||a_3|}{4}$. Le quotient systolique est inférieur à $1/2$, avec égalité si et seulement si $|a_1| = |a_2| = |a_3|$. Dans ce cas les géodésiques systoliques sont isolées et ne recouvrent donc pas la variété $C_{2,2}$.

Le critère de Babenko vu dans l'introduction nous permet alors de déduire que les métriques plates sur $C_{2,2}$ ne sont pas les meilleures pour l'inégalité isosystolique.

3.6 Type C_3

Dans le cas plat, le volume est égal à $\frac{1}{3} \det(a_1, a_2)|a_3|$ ou encore à $\frac{\sqrt{3}}{6}|a_1||a_3|$, et la systole à $\inf\{|a_3|/3, |a_1|\}$, puisque le réseau engendré par a_1 et a_2 est

équilatéral. On en déduit facilement que le quotient systolique est inférieur ou égal à $2/\sqrt{3}$. L'égalité est obtenue pour $|a_3| = 3|a_2| = 3|a_1|$, on note par Γ_0 le groupe de Bieberbach donnant l'égalité (unique à dilatation près).

La variété C_3 n'étant pas un quotient de C_2 , elle ne contient pas des surfaces qui sont des bouteilles de Klein ou des rubans de Möbius. Par suite, nos méthodes de contrôle de la systole ne s'appliquent pas. On obtient tout de même, en quotientant le tore (T, g_{hex}) par le groupe engendré par la transformation $\varphi = t_{a_3/3} \circ r_{a_3, 2\pi/3}$, une variété singulière homéomorphe à C_3 .

La meilleure minoration de $d_{(T, g_{hex})}(m, \varphi(m))$ dont on dispose est de $\frac{2\pi}{3} \cos(2a/\sqrt{3})$. Elle n'est pas suffisante pour améliorer le meilleur rapport systolique parmi les métriques plates sur C_3 . On aimerait bien montrer que

$$d_{(T, g_{hex})}(m, \varphi(m)) \geq 2\pi/3$$

Pour démontrer que les métriques plates sur C_3 ne sont pas extrémales, on a recours à des métriques différentes de celles que nous avons utilisées pour les autres types orientables. L'existence d'une géodésique systolique isolée dans le cas plat optimal va nous permettre de diminuer le volume de la variété en utilisant la technique de "creuser" autour de la géodésique systolique. Ceci peut se faire sans raccourcir la systole.

3.6.1 Une métrique polyédrale singulière sur C_3

On part du groupe Γ_0 pour lequel on obtient le meilleur quotient systolique sur C_3 . Il y a dans Γ_0 quatre classes de conjugaison représentées par des géodésiques qui réalisent la systole, celles de t_{a_1} , t_{a_2} , $t_{a_1-a_2}$ et $\varphi = t_{a_3/3} \circ r_{a_3, 2\pi/3}$ (leurs inverses donnant les mêmes géodésiques parcourues en sens opposé, nous ne les prenons pas en compte). On a une famille à un paramètre de géodésiques dans les trois premières classes, mais 3 géodésiques pour la classe de φ (voir fig.1 chapitre 1).

On considère maintenant un prisme droit hexagonal H formant un domaine fondamental de l'action de Γ_0 . Sa base est un domaine de Dirichlet–Voronoi pour le réseau engendré par a_1 et a_2 , sa hauteur est $|a_3|/3$ et son axe, que nous noterons u , est le relèvement d'une géodésique systolique donnée par ϕ . Les géodésiques fermées et C^∞ voisines de cet axe sont trois fois plus longues. La variété C_3 peut se voir, aussi bien comme variété que comme espace métrique, comme le quotient H/\mathcal{R} , où \mathcal{R} est la trace sur H de la relation d'équivalence sur \mathbb{R}^3 définie par l'action de Γ_0 . En modifiant H tout en gardant l'identification des faces donnée par la relation d'équivalence, nous allons obtenir une métrique riemannienne (singulière) sur C_3 ayant la même systole que \mathbb{R}^3/Γ_0 et un volume plus petit.

On marque sur chacun des deux hexagones $z = 0$ et $z = |a_3|/3$ deux "petits" hexagones réguliers ayant un même centre appartenant à l'axe u (voir la figure 3.4 ci dessous). Soient D et D' les deux parties limitées par

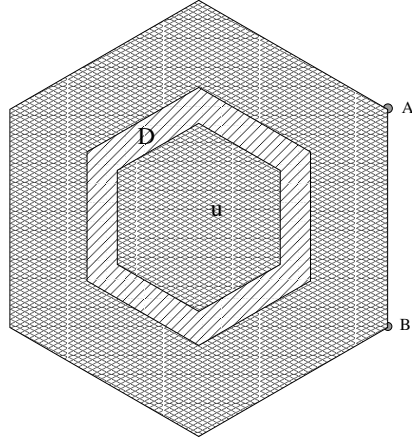


FIGURE 3.4 – Sur les hexagones horizontaux ($z = 0$ et $z = |a_3|/3$) on creuse les parties limitées par les deux petits hexagones (D et D' en hachuré) d'une profondeur égale à ϵ .

chaque couple d'hexagones marqués. On creuse d'une profondeur ϵ les deux domaines D et D' (voir la figure 3.5 ci-dessous). On obtient un polyèdre H_{sing} de volume strictement inférieur à H si $\epsilon > 0$. On essaie maintenant de réobtenir une variété homéomorphe à C_3 à partir de H_{sing} . Pour la partie non modifiée, les identifications sont les mêmes que dans le cas plat. Dans les parties modifiées, on identifie chaque point (x, y, z) de la partie "creusée" du bas avec le point $(r_{2\pi/3}(x, y), z')$ de la partie "creusée" du haut. On note H_{sing}/\mathcal{R}' l'espace de longueur obtenu. Par construction, cet espace est bien homéomorphe à une variété de type C_3 . Il est singulier (au sens déjà défini) et plat en dehors des singularités. Les trois géodésiques systoliques verticales passant par A, B et C (voir fig.1 chapitre 1) restent inchangées. Pour ϵ assez petit les courbes fermées qui sont dans la classe d'homotopie libre définie par φ sont de longueur supérieure à $|a_3|/3$, même si elles traversent l'image du creux. On note enfin que les géodésiques fermées associées aux translations horizontales sont de longueur $|a_1|$ si elles ne touchent pas la singularité. Elles sont plus longues dans le cas contraire.

Théorème 3.4. *Pour ϵ assez petit la systole de H_{sing}/\mathcal{R}' est égale à $|a_1| = |a_2| = |a_3|/3$ et le quotient $Sys^3(H_{sing})/Vol(H_{sing})$ est strictement supérieur à $2/\sqrt{3}$.*

Remarque 3.5. Les variétés C_2, C_4, C_6 et $C_{2,2}$ admettant des géodésiques systoliques isolées (dans le cas d'une métrique plate optimale), cette même technique peut être utilisée pour démontrer que les métriques plates sur ces variétés ne sont pas optimales. Son défaut provient du fait que pour les métriques singulières qu'elle donne, les géodésiques systoliques ne recouvrent

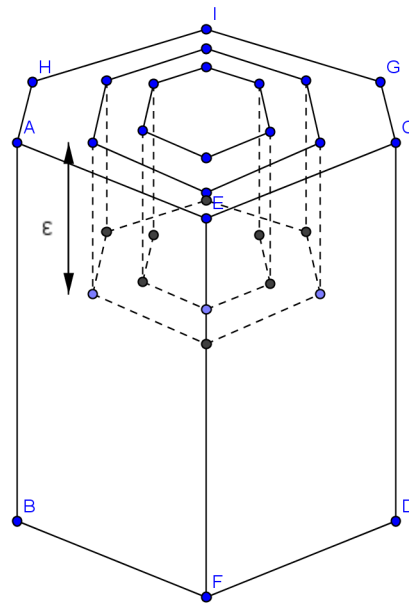


FIGURE 3.5 – Un prisme hexagonal avec un "gros" creux sur sa face supérieure.

pas la variété. Par suite, ces métriques ne peuvent pas réaliser la constante systolique de ces variétés d'après le critère de I. Babenko. (Nous ne savons pas prouver que les métriques construites précédemment réalisent la constante systolique, mais elles sont au moins des candidates naturelles).

Il y a tellement d'arbitraire dans ces constructions (nous avons pris un polyèdre localement euclidien uniquement par commodité, on pourrait aussi par exemple creuser suivant une couronne) qu'il est difficile de voir quelle est la meilleure.

Notons enfin qu'il y a certainement des situations en dimension supérieure où cette technique s'adapte. Il serait intéressant de lui donner un cadre général.

Le tableau suivant permet de faire la comparaison entre les plus grands quotients systoliques des métriques plates ($\tau(\text{plates})$) et les plus grands quotients systoliques des métriques singulières que nous venons de construire ($\tau(\text{singulières})$) sur les types C_2 , C_4 et C_6 de variétés de Bieberbach orientables de dimension 3.

type	$\tau(\text{plates})$	valeur approchée	$\tau(\text{singulières})$
C_2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\approx 1,15$	$\approx 1,38$
C_4	1	1	$\approx 1,05$
C_6	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\approx 1,15$	$\approx 1,18$
C_3	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\approx 1,15$	$> \frac{2}{\sqrt{3}}$

Chapitre 4

Les variétés de Bieberbach non-orientables

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec Jacques Lafontaine (voir [21]).

4.1 Quelques propriétés géométriques de la bouteille singulière

Proposition 4.1. *Localement, une géodésique de (\mathbf{C}, b) , (\mathbf{T}^2, b) ou (\mathbf{K}, b) est de l'un des types suivants :*

- 1) *un arc de grand cercle (éventuellement tangent à une ligne singulière).*
- 2) *la juxtaposition d'un arc de grand cercle tangent à une ligne singulière, et d'un arc de cette ligne singulière.*
- 3) *la juxtaposition de deux arcs de grand cercle ayant une extrémité commune r sur une ligne singulière, localement de part et d'autre de cette ligne, qui fait avec ces deux arcs des angles dont la somme est π .*

Preuve. Il suffit de juxtaposer les remarques suivantes :

1. Les courbes contenues dans l'intérieur d'un Σ (cf. 2.2.1) sont des géodésiques si et seulement si ce sont des arcs de grand cercle, d'après la théorie classique.
2. Une courbe contenue dans un Σ et dont les extrémités p et q sont sur la ligne singulière est plus longue que le plus court des deux arcs de la

ligne singulière qui joignent p et q . Pour le voir, il suffit d'expliciter la longueur en utilisant la formule (2.1) et de remarquer que la fonction $\cos \phi$ est décroissante.

3. Soit c une courbe C^1 par morceaux, paramétrée par longueur d'arc, qui est la juxtaposition d'une courbe c_1 contenue dans un Σ , ayant une extrémité r sur une ligne singulière, et d'une courbe c_2 partant de r et contenue dans cette ligne singulière. Si $c'_1(r) \neq c'_2(r)$, d'après la formule de variation première, c peut être raccourcie en gardant les mêmes extrémités.
4. soit enfin une courbe dont les extrémités p et q sont dans deux exemplaires contigus de Σ , et qui intersecte la ligne singulière en un point. Si elle minimise la longueur des courbes joignant p et q , elle est nécessairement du troisième type décrit dans l'énoncé en raison de la formule de variation première.

■

Remarque 4.1. A partir de là, on voit que deux points appartenant à des domaines Σ contigus sont joints, en général, par un segment géodésique unique, éventuellement par deux. Ce dernier cas n'arrive que pour des points ayant des latitudes opposées : la réflexion orthogonale par rapport au plan défini par l'axe des z et les deux points échange alors ces segments.

Désignons par T_δ le déplacement hélicoïdal obtenu en composant la translation de vecteur $2 \sin \phi_0 \vec{k}$ et la rotation d'angle δ autour de l'axe des z , *considéré comme isométrie du cylindre* (\mathbf{C}, b) . Nous avons vu que cette isométrie passe au quotient pour (\mathbf{T}, b) comme pour (\mathbf{K}, b) .

Proposition 4.2. *Sur (\mathbf{T}, b) , la fonction $\text{dist}(p, (T_\delta(p)))$ est constante.*

Preuve. On vérifie facilement qu'il suffit de faire la preuve pour (\mathbf{C}, b) . On remarque que T_δ est la restriction au cylindre d'un déplacement de \mathbb{R}^3 qui est le produit de deux réflexions par rapport à des droites orthogonales à l'axe des z , faisant entre elles un angle égal à $\delta/2$, et de plus courte distance (dans l'espace euclidien) $\sin \phi_0$. Soit γ une géodésique minimisante joignant p et $T_\delta(p)$. Admettons un instant que cette géodésique rencontre une ligne singulière en un seul point r , et que l'on se trouve donc dans la troisième situation de la proposition 4.1. Cet arc est inclus dans la juxtaposition de deux arcs de grand cercle $r_1 r$ et $r r_2$, contenus dans deux domaines sphériques contigus Σ_1 et Σ_2 , et faisant le même angle β avec les lignes singulières en r , r_1 , r_2 (voir figure 1). Notons aussi que γ se prolonge en une géodésique de (\mathbf{C}, b) formée de tels arcs de grand cercle, et que $T_\delta(r_1) = r$, $T_\delta(r) = r_2$. Choisissons les réflexions dont la composée est T_δ comme suit : l'axe de la première passant par le milieu de l'arc $r_1 r$, l'axe de la seconde passant par r . Cela permet de voir que T_δ laisse la géodésique qui prolonge γ globalement

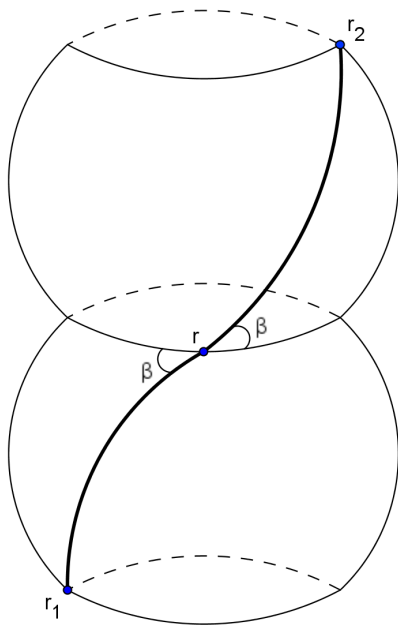


Fig. 1. Géodésique de type 3

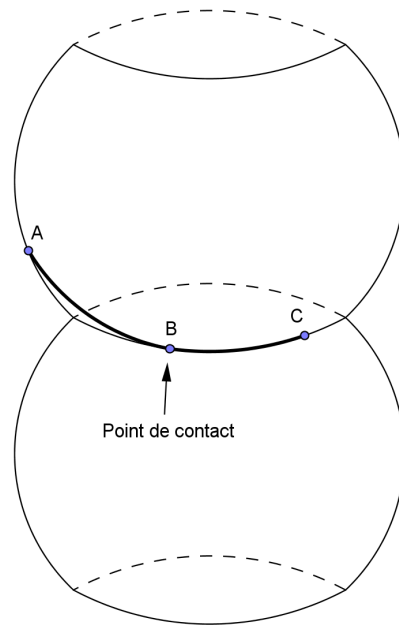


Fig. 2. Géodésique de type 2

invariante. Comme il n'y a pas de point fixe, c'est une translation le long de cette géodésique. L'assertion de l'énoncé en résulte, puisque toute la situation est invariante par rotation autour de l'axe des z .

Reste à justifier notre affirmation sur γ . Elle est clairement vraie pour $\delta = 0$ et donc pour δ assez petit. Dans ce cas, un calcul explicite que nous laissons au lecteur montre que

$$\tan \delta = \frac{-2\sqrt{2} \cot \beta}{\cot^2 \beta - 2},$$

et donc que tous les δ possibles peuvent être obtenus ainsi. On applique alors la remarque qui suit la proposition précédente. ■

Dorénavant, nous supposons que $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$.

Pour les rotations r_α on a la propriété suivante.

Proposition 4.3. *Soit p un point du tore (\mathbf{T}, b) et p_0 un point d'une ligne singulière. Alors*

$$\text{dist}_{(\mathbf{T}, b)}(p, r_\alpha(p)) \geq \text{dist}_{(\mathbf{T}, b)}(p_0, r_\alpha(p_0))$$

pour tout $\alpha \in [0, \pi]$

Ainsi, le minimum est obtenu pour les points de la ligne singulière.

Preuve. On utilise la proposition 4.1, en remarquant qu'il suffit de faire le calcul dans (\mathbf{C}, b) . Soit Σ le domaine sphérique où se trouve p (et donc $q = r_\alpha(p)$). Tant que le grand cercle passant par ces deux points est entièrement dans Σ (ce qui est le cas si leur latitude commune β est assez petite), la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne

$$\text{dist}(p, r_\alpha(p)) = \arccos(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin \alpha),$$

et cette distance est une fonction décroissante de β .

Si ce n'est pas le cas, on est dans le deuxième cas de la Proposition 4.1. Le segment géodésique qui joint p et q est formé de deux arcs de grand cercle ayant une extrémité en p (resp. q), et tangents, en leurs autres extrémités, que nous noterons p' et q' , à une ligne singulière. Si ψ est la différence de longitude entre p et p' (ou entre q et q'), on vérifie que $\cos \psi = \tan \beta$. On a alors

$$\text{dist}(p, p') = \text{dist}(q, q') = \arccos\left(\frac{\cos \beta \cos \psi}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}\right) = \arccos(\sqrt{2} \sin \beta)$$

et

$$\text{dist}(p', q') = \frac{\alpha - 2\psi}{\sqrt{2}}$$

(on vérifie au passage que l'on est dans cette situation si $\beta \geq \arctan(\cos \alpha/2)$).

Finalement on a dans ce cas,

$$\text{dist}((p, r_\alpha(p))) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \arccos(\tan \beta) + 2 \arccos(\sqrt{2} \sin \beta).$$

La fonction de β ainsi obtenue a pour dérivée

$$\frac{\sqrt{2}}{\cos \beta \sqrt{1 - 2 \sin^2 \beta}} (1 - 2 \cos^2 \beta).$$

Les expressions de $\text{dist}((p, r_\alpha(p)))$ pour $\beta \in [0, \beta_0]$, et pour $\beta \in [\beta_0, \pi/4]$ montrent que l'on a une fonction décroissante de β . Son minimum est atteint quand p est sur une ligne singulière. Il vaut $\alpha\sqrt{2}$. ■

En passant au quotient, on déduit de ce qui précède les résultats analogues pour la bouteille de Klein.

Corollaire 4.1. *Pour (\mathbf{K}, b) , on a*

$$\mathbf{d}(r_\alpha) = \inf \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \pi - \alpha \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}(T_\delta) = \inf \left\{ \frac{\pi - \delta}{\sqrt{2}}, \arccos \frac{\cos \delta - 1}{2} \right\}$$

Démonstration. En fait,

$$\mathbf{d}(r_\alpha) = \inf_{p \in \Sigma} \{ \text{dist}(p, r_\alpha(p)), \text{dist}(\sigma(p), r_\alpha(p)) \}.$$

Mais comme les points $\sigma(p)$ et $r_\alpha(p)$ sont situés de part et d'autre de l'équateur de Σ , le segment géodésique qui les joint est contenu dans Σ (premier cas de la proposition 4.1). On vérifie alors que $\text{dist}(\sigma(p), r_\alpha(p))$, est une fonction croissante de la latitude, d'où le résultat pour r_α .

Pour étudier $\mathbf{d}(T_\delta)$, il suffit de considérer deux exemplaires contigus Σ_1 et Σ_2 , et de calculer l'infimum analogue au précédent quand p parcourt Σ_1 . On sait déjà d'après la Proposition 4.2 que $\text{dist}(p, T_\delta(p))$ est constante (et égale à $\arccos \frac{\cos \delta - 1}{2}$). Passons à $\text{dist}(T_\delta(p), \sigma(p))$. Soit c le segment géodésique qui joint ces points. On est dans le deuxième ou le troisième cas de la Proposition 4.1. Dans tous les cas, soient r son premier point de rencontre avec la ligne singulière, et q le symétrique de $T_\delta(p)$ par rapport à cette ligne singulière.

Dans Σ_1 , on passe de q à $\sigma(p)$ par une rotation d'angle $\pi - \delta$. Par ailleurs, ces deux points sont reliés par la courbe \tilde{c} obtenue en prenant la symétrique de la partie de c de $T_\delta(p)$ à r , puis c elle-même de r à $\sigma(p)$. On a alors

$$\text{longueur}(c) = \text{longueur}(\tilde{c}) \geq \frac{\pi - \delta}{\sqrt{2}}$$

d'après la Proposition 4.3. ■

4.2 Calcul des systoles dans le cas plat et dans le cas singulier

Lemme 4.1. *Pour toute métrique plate g sur une variété N de type B_1 , on a*

$$\frac{(\text{sys}(N, g))^3}{\text{vol}(N, g)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

avec égalité si et seulement si le réseau associé admet une base (a_1, a_2, a_3) telle que $|a_1| = 2|a_2| = 2|a_3|$, l'angle des vecteurs a_1 et a_2 étant égal à $\pi/3$. Il existe sur N une métrique g_0 , continue sur N et lisse en dehors d'une hypersurface, localement isométrique à $S^2 \times \mathbb{R}$ là où elle est lisse, de quotient systolique strictement supérieur à $2/\sqrt{3}$.

Preuve. Dans le cas plat, le volume est égal à $\frac{1}{2} \det(a_1, a_2) |a_3|$, la systole à $\inf\{|a_3|, s\}$, où s est la systole du tore plat de dimension 2 défini par le réseau de base $\frac{a_1}{2}, a_2$. Normalisons de façon que $|a_3| = 1$. Alors le quotient systolique vaut

$$\frac{2s^3}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{\det(a_1, a_2)} \quad \text{si } s \geq 1,$$

ce qui donne la première partie d'après les résultats classiques sur les réseaux en dimension 2.

Pour la construction de g_0 , on part de la métrique sur la bouteille de Klein singulière vue en 2.2.1, dont la systole est égale à π et le volume à $2\pi\sqrt{2}$, et on procède par suspension : d'après 1.2.2 et 2.2.1 le quotient de $(\mathbf{K}, b) \times \mathbb{R}$ par $\langle (r_\alpha, t_d) \rangle$ est une variété homéomorphe à une variété de type B_1 . Son volume est égal à $2\pi\sqrt{2}d$, et sa systole à

$$\inf \left\{ \pi, \sqrt{\mathbf{d}(r_\alpha)^2 + d^2} \right\}.$$

D'après le Corollaire 4.1, $\mathbf{d}(r_\alpha)$ est égal à

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad \text{si } \alpha \leq \pi(2 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad \pi - \alpha \quad \text{si } \pi(2 - \sqrt{2}) < \alpha < \pi$$

Pour obtenir le meilleur quotient systolique en faisant cette construction, c'est-à-dire en faisant varier α et d , on fixe $\text{sys} = \pi$ et on essaie de minimiser d . Pour le faire il faut maximiser $\mathbf{d}(r_\alpha)$, donc choisir $\alpha = \pi(2 - \sqrt{2})$ et $d = \pi(2\sqrt{2} - 2)^{\frac{1}{2}}$.

Pour ces valeurs de α et d on a $\frac{\text{sys}^3}{\text{Vol}} = \frac{\pi^3}{4(\sqrt{2}-1)^{1/2}} > \frac{2}{\sqrt{3}}$ ■

Lemme 4.2. *Pour toute métrique plate (N, g) de type B_3 ou B_4 , on a*

$$\frac{\text{sys}(N, g)^3}{\text{vol}(N, g)} \leq 1,$$

avec égalité si et seulement si $|a_1| = |a_2| = 2|a_3|$. Dans les deux cas, il existe sur N une métrique g_0 continue, lisse et localement isométrique à $S^2 \times \mathbb{R}$ sur le complémentaire d'une hypersurface, de quotient systolique strictement supérieur à 1.

Preuve. Dans les deux cas, le réseau associé est orthogonal et d'indice 4 dans Γ , si bien que

$$\text{vol}(N, g) = |a_1||a_2||a_3|/4 \quad \text{et} \quad \text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, |a_2|/2, |a_3|\},$$

d'où la première partie. Pour la deuxième partie, on procède par suspension, en partant de la bouteille (K, b) comme précédemment, et en quotientant $K \times \mathbb{R}$ par le groupe $\langle (S_1, t_\pi) \rangle$ (pour le type B_3) ou $\langle (S_2, t_\pi) \rangle$ (type B_4). Comme S_1 et S_2 ont des points fixes, la systole reste égale à π . Le volume vaut $2\pi^2\sqrt{2}$, et le quotient $(\text{sys})^3/\text{vol}$ est égal à $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. ■

Lemme 4.3. *Pour toute métrique plate g sur une variété riemannienne N de type B_2 on a*

$$\frac{\text{sys}(N, g)^3}{\text{vol}(N, g)} \leq \frac{8}{\sqrt{39}}$$

L'égalité est réalisée si et seulement si

- i) $|a_1| = |a_2| = 8d$, où d est la distance entre les plans P_1 et P_2 des symétries glissées qui engendrent Γ (cf. 1.2.2);
- ii) l'angle α des vecteurs a_1 et a_2 est égal à $\arccos(-15/24)$.

Preuve. On a $(N, g) = \mathbb{R}^3/\Gamma$, où Γ est décrit dans la définition de B_2 . On note Λ le réseau associé à Γ et L le réseau 2-dimensionnel engendré par (a_1, a_2) . Le volume est égal à $\det(a_1, a_2)d$. Dans la suite on identifie un réseau Λ avec ses éléments. On sait que

$$\text{sys}(N, g) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{d}(\gamma).$$

En regroupant les éléments de Γ en trois catégories, les symétries glissées de vecteur $\frac{a_1}{2} + v$ ou $\frac{a_2}{2} + v$ ($v \in L$) et les éléments de Λ , c'est à dire les translations pures de Γ , on obtient

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1/2 + \Lambda|, |a_2/2 + \Lambda|, |\Lambda|\}.$$

En faisant intervenir le réseau L , on obtient

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1/2 + L|, |a_2/2 + L|, 4d, \sqrt{|\frac{(a_1 + a_2)}{2} + L|^2 + 4d^2}, |L|\}$$

a) si (a_1, a_2) est une base minimale du réseau L (les vecteurs a_1 et a_2 sont non colinéaires et minimaux dans L), alors

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, |a_2|/2, 4d\}, \quad \text{vol}(N, g) = |a_1||a_2|d \sin \alpha,$$

d'où $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} \leq 2/\sqrt{3}$ avec égalité si $|a_1| = |a_2| = 8d$ et $\alpha = \pi/3$

b) Si $(a_1, a_1 + a_2)$ est une base minimale de L et $|a_1| \leq |a_1 + a_2|$ alors

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, 4d\} \text{ et } \text{vol}(N, g) = |a_1||a_2|d \sin \alpha$$

et on se ramène au cas précédent.

c) Si $(a_1, a_1 + a_2)$ est une base minimale de L et $|a_1| \geq |a_1 + a_2|$ alors

$$\text{sys}(N, g) = \inf\{|a_1|/2, 4d, \sqrt{\frac{(a_1 + a_2)^2}{4} + 4d^2}, |a_1 + a_2|\}.$$

On adopte les normalisations d'usage concernant les réseaux de dimension 2, en rapportant le plan à une base orthonormée (u, v) telle que $u = a_1 + a_2$, $a_1 = xu + yv$. Ainsi, $x^2 + y^2 \geq 1$, $|x| \leq 1/2$, et

$$\text{vol}(N, g) = \frac{1}{2} \det(a_1, a_2, \frac{a_1 + a_2}{2} + 2dk) = dy.$$

On discute alors suivant les valeurs de d .

– Si $0 < d \leq 1/8$, alors la systole vaut $4d$ et

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{64d^2}{y} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

– Si $1/8 \leq d \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}$, alors $\text{sys} = \inf\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}, 4d\}$ et deux cas se présentent :

– Premier cas : $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geq 4d$. Alors $\text{sys} = 4d$ et $y \geq \frac{\sqrt{256d^2-1}}{2}$, d'où

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{64d^2}{y} \leq \frac{128d^2}{\sqrt{256d^2-1}} \leq \frac{8}{\sqrt{39}}$$

L'égalité est réalisée si $d = \frac{1}{4\sqrt{3}}$, $x = 1/2$ et $y = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

– Second cas : $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq 4d$. Alors $\text{sys} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ et le quotient systolique est égal à $\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{8yd}$. Il faut maximiser cette fonction sur le domaine

$$\{(x, y, d) : x^2 + y^2 \geq 1, x \leq 1/2, 1/8 \leq d \leq 1/4\sqrt{3}, 4d \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\}$$

Une étude directe donne le même maximum qu'auparavant (mêmes valeurs de d, x, y).

– Si $\frac{1}{4\sqrt{3}} \leq d \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$, alors $\text{sys}(N, g) = \inf\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}, \frac{\sqrt{16d^2+1}}{2}\}$

– Premier cas : $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \geq \frac{\sqrt{16d^2+1}}{2}$. Alors

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{(16d^2 + 1)^{3/2}}{8yd}.$$

Mais $y^2 \geq 16d^2 + 3/4$, d'où $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} \leq 8d \frac{(16d^2+1)^{3/2}}{\sqrt{16d^2+3/4}}$. Sur l'intervalle considéré, cette fonction atteint son maximum en $d = \frac{1}{4\sqrt{3}}$. On retombe sur $8/\sqrt{39}$.

– Second cas : $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{16d^2+1}}{2}$. Alors

$$\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{8yd}.$$

Comme précédemment, le maximum est réalisé en un point de la frontière du domaine de définition. Il est atteint lorsque $d = 1/4\sqrt{3}$, $x = 1/2$ et $4d = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$: c'est toujours $\frac{8}{\sqrt{39}}$.

– Si $d \geq \sqrt{3}/4$, alors $\text{sys} = \inf\{1, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\}$

– Premier cas : Si $1 \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, alors $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{1}{yd} \leq \frac{2}{d\sqrt{15}} \leq \frac{8}{\sqrt{45}}$

– Second cas : Si $1 \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, alors $\frac{\text{sys}^3}{\text{vol}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{8yd} \leq \frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{2\sqrt{3}y}$.

Dans le domaine $\{4 \geq x^2 + y^2\}$, cette fonction atteint son maximum lorsque $x^2 + y^2 = 4$. Ce maximum est aussi égal à $\frac{8}{\sqrt{45}}$. ■

Lemme 4.4. *Si N est une variété de type B_2 , il existe sur N une métrique g_0 continue et lisse en dehors d'une hypersurface, localement isométrique à $S^2 \times \mathbb{R}$, dont le quotient systolique est strictement supérieur à $8/\sqrt{39}$.*

Preuve. La construction de g_0 se fait comme précédemment en partant de la bouteille de Klein singulière de Bavard. On fait le quotient de $(\mathbf{K}, b) \times \mathbb{R}$ par (T_δ, t_d) , où (T_δ, t_d) est la transformation T_δ déjà définie sur la composante (\mathbf{K}, b) et la translation de vecteur d sur \mathbb{R} . Cela donne bien une variété homéomorphe à une variété de type B_2 , munie d'une métrique singulière isométrique localement à $S^2 \times \mathbb{R}$ là où elle est lisse. On normalise en supposant que la systole vaut π . Cela impose l'inégalité $\mathbf{d}(T_\delta, t_d)^n \geq \pi$ pour tout n . Le volume est égal à $2\pi\sqrt{2}d$. Pour obtenir le plus grand quotient systolique il faut que d soit minimal. On commence par étudier l'inéquation $\mathbf{d}(T_\delta, t_d) \geq \pi$, qui est équivalente à $(\mathbf{d}(T_\delta))^2 + d^2 \geq \pi^2$. La valeur maximale de $\mathbf{d}(T_\delta)$ est obtenue lorsque δ vérifie $\frac{\cos\delta-1}{2} = \cos\frac{\pi-\delta}{\sqrt{2}}$. On note δ_0 la solution de cette équation. Le d minimal est obtenu lorsque l'égalité est réalisée dans l'inéquation précédente, on le note d_0 . on a bien $\mathbf{d}((T_{\delta_0}, t_{d_0})^n) \geq \pi$ pour tout n : comme d_0 est de l'ordre de 2,641, nd est supérieur à π pour $n \geq 2$. Ainsi, ces deux constantes donnent le plus grand quotient systolique parmi ceux de toutes les constructions similaires. Il est égal à $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}d_0} > 8/\sqrt{39}$. ■

Le tableau suivant permet de faire la comparaison entre les plus grands quotients systoliques des métriques plates ($\tau(\text{plates})$) et les plus grands quotients systoliques des métriques singulières que nous venons de construire

($\tau(\text{singulières})$) sur chaque type de variété de Bieberbach non-orientables de dimension 3. Ici, d_0 désigne la valeur de d obtenue à la fin de la preuve ci-dessus.

type	$\tau(\text{plates})$	valeur approchée	$\tau(\text{singulières})$	valeur approchée
B_1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\approx 1,154$	$\frac{\pi}{4(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}}$	$\approx 1,220$
B_2	$\frac{8}{\sqrt{39}}$	$\approx 1,281$	$\frac{\pi^2}{2d_0\sqrt{2}}$	$\approx 1,321$
B_3	1	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\approx 1,110$
B_4	1	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\approx 1,110$

Conclusion

À propos de nos métriques singulières

Sur une variété essentielle, la recherche de métriques optimales, c'est-à-dire qui réalisent la constante systolique, est un problème très difficile. (Rappelons qu'aucun exemple n'est connu en dimension supérieure ou égale à 3). D'après tous les travaux existant sur le sujet, une telle métrique, si elle existe, doit avoir "beaucoup" de géodésiques systoliques, au moins assez pour recouvrir la variété. Nous ne savons pas si nos métriques sont optimales, mais il peut être intéressant d'examiner si elles satisfont à cette exigence, et comment.

- La propriété la plus forte est la suivante : on peut recouvrir la variété par des géodésiques de toute classe systolique (nous appellerons classe systolique toute classe d'homotopie libre contenant une géodésique systolique). Cette propriété est vraie pour les tores plats optimaux et les espaces projectifs réels à courbure constante. Elle est vérifiée aussi par la métrique sur la variété C_2 que nous avons construite en 3.2, mais par aucune métrique plate sur C_2 . On a l'impression que cette métrique est un très bon candidat pour réaliser la constante systolique de ce type de variétés.
- Une propriété moins forte, souvent évoquée dans ce travail, est d'être recouverte par les géodésiques systoliques. C'est le cas des métriques que nous avons construites sur toutes les variétés non orientables, ainsi que sur C_4 et C_6 . (Cette propriété est vérifiée aussi pour les métriques plates optimales sur ces variétés). De plus, pour B_1 et B_2 , aucune géodésique systolique n'est isolée.

Les autres variétés (C_3 et $C_{2,2}$) ne sont pas recouvertes par leurs géodésiques systoliques, et ne sont donc pas optimales.

Variétés de Bieberbach de dimension supérieure

Nous avons démontré que pour les variétés de Bieberbach de dimension 3 autres que les tores, le meilleur quotient systolique n'est pas réalisé par une métrique plate.

On devrait pouvoir appliquer le même genre de techniques aux variétés qui peuvent se construire par suspension de variétés de Bieberbach de dimension inférieure. Mais attention : toutes les variétés de Bieberbach ne s'obtiennent pas par suspension. C'est déjà le cas de $C_{2,2}$ en dimension 3, mais le cas de cette dernière, qui a en tout trois géodésiques systoliques, est facilement réglé.

Une généralisation aux dimensions supérieures passe par une question géométrique sur les groupes de Bieberbach, qui présente un intérêt en elle-même : on peut distinguer deux sortes de groupes : Ceux pour lesquels \mathbb{R}^n/Γ , muni d'une métrique plate optimale, est recouvert par les géodésiques systoliques, et ceux pour lesquels ce n'est pas le cas.

Cette discrimination peut-elle être faite à l'aide d'un critère algébro-géométrique simple ?

Les groupes de la 2e catégorie ont-ils tendance à devenir de plus en plus nombreux quand la dimension augmente ?

Plus généralement, il pourrait être intéressant d'étudier les géodésiques systoliques d'une variété plate optimale, à la lumière des propriétés évoquées dans le paragraphe précédent.

Par contre, nos techniques ne s'appliquent pas aux métriques homogènes. Le problème de savoir si le meilleur rapport systolique des tores riemanniens est obtenu pour un tore plat est complètement ouvert dès que $n \geq 3$.

Notons enfin que la technique de C. Loewner et M.C. Pu s'applique telle qu'elle en dimension supérieure, et montre que pour les métriques sur un tore T^n conformes à une métrique plate g_0 , le quotient systolique maximum est obtenu pour les métriques proportionnelles à g_0 . Il serait intéressant d'étudier le cas des variétés de Bieberbach autres que les tores, pour lesquelles cette technique ne s'applique pas.

Les autres géométries de dimension 3

Soit M une variété essentielle compacte de dimension 3 qui admet une géométrie modèle au sens de W. Thurston (voir [32], **3.8**). Des techniques analogues permettent peut-être de montrer que, dans la plupart des cas, les métriques associées à une géométrie modèle de dimension 3 ne sont pas optimales pour le quotient systolique. Examinons les différents cas.

- Géométrie euclidienne
C'est le sujet de cette thèse !
- Géométrie sphérique.

Il est commode de regarder S^3 comme l'ensemble des couples (z, z') de \mathbb{C}^2 tels que $|z|^2 + |z'|^2 = 1$.

L'espace projectif $P^3\mathbb{R}$ et les espaces lenticulaires S^3/Γ , où Γ est un groupe cyclique engendré par $(z, z') \mapsto (uz, uz')$, où u est une racine primitive n -ième de l'unité, sont homogènes. Le problème de savoir si

leur métrique à courbure constante est optimale est aussi difficile que pour les tores.

Elle devient facile pour les autres espaces à courbure constante $+1$ (voir [33], ch. 7 ou [32], 4.4 pour leur description détaillée) qui ne sont pas recouverts par leurs géodésiques systoliques.

- Géométrie hyperbolique

les géodésiques systoliques sont isolées. Les métriques à courbure -1 ne sont donc jamais optimales, ce résultat est "bien connu" depuis longtemps.

- Géométrie $S^2 \times \mathbb{R}$.

Les variétés ne sont pas essentielles, la question est donc sans objet.

- Géométrie $H^2 \times \mathbb{R}$.

Si une métrique admettant ce modèle local est une métrique produit, elle n'est pas optimale puisque le facteur de dimension 2 ne l'est déjà pas. Si c'est un produit tordu, les géodésiques systoliques sont isolées.

- Géométries *Sol*, *Nil* et $\tilde{Sl}(2, \mathbb{R})$.

La situation mérite d'être étudiée.

Bibliographie

- [1] Babenko, I. ; Asymptotic invariants of smooth manifolds, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat.* 56 (1952), no. 4, 707–751.
- [2] Babenko, I. ; Souplesse intersystolique forte des variétés fermées et des polyèdres, *Ann. Inst. Fourier* 52 no. 4, 1259-1284 (2002).
- [3] Babenko, I. ; Topologie des systoles unidimensionnelles, *Enseign. Math.* (2) 52 (2006), no. 1-2, 109–142.
- [4] Babenko, I. ; Balacheff, F ; Géométrie systolique des sommes connexes et des revêtements cycliques, *Math. Annalen* 333 (2005), no. 1, 157–180.
- [5] Balacheff, F. ; Sur la systole de la sphère au voisinage de la métrique standard, *Geometriae Dedicata* 121 (2006), No 1, pp. 61–71.
- [6] Bavard, C. ; Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein, *Math. Ann.* 274, 439–441(1986)
- [7] Bavard, C. ; Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein, *Geom. Dedicata* 27, 349–355 (1988),
- [8] Bavard, C. ; L'aire systolique conforme des groupes cristallographiques du plan, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 43, 815-842 (1993).
- [9] Bavard, C. ; Une remarque sur la géométrie systolique de la bouteille de Klein, *Arch. Math. (Basel)* 87 (2006), No 1, 72-74 (1993).
- [10] Berger, M. ; Quelques problèmes de géométrie riemannienne ou deux variations sur les espaces compacts symétriques de rang 1, *L'Ens.Math.* (2) 16 73–96 (1970).
- [11] Berger, M. ; Systoles et applications selon Gromov, *Séminaire N. Bourbaki*, exposé 771, *Astérisque* 216, 279–310 (1993).
- [12] Berger, M. ; Du côté de chez Pu, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) 5 (1972), 1–44.
- [13] Berger, M. ; A l'ombre de Lowner, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) 5 (1972), 241–260.
- [14] Berger, M. ; *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, (2003).
- [15] Blatter, C. ; Über extremallängen auf geschlossenen Flächen, *Comment. Math. Helvetici* 35 (1961), 153–168.

-
- [16] Blatter, C. ; Zur Riemannschen Geometrie im Grossen auf dem Möbiusband, *Compositio Math.* 15 (1961), 88–107.
- [17] Burago, D. ; Burago, Y.D. ; Ivanov, S. ; A course in metric geometry, *Graduate studies in Mathematics* (33), Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (2001).
- [18] Calabi E. ; Extremal isosystolic metrics for compact surfaces, *Actes de la table ronde de géométrie différentielle, Semin. Congr 1, Soc.Math.France* 146–166 (1996).
- [19] Croke, C. ; Katz, M. ; Universal volume bounds in Riemannian manifolds, *Surv. Differ. Geom. VIII* (Boston, MA, 2002), 109-137, *Surv. Differ. Geom. VIII, Int. Press, Somerville, MA*, (2003).
- [20] Charlap, L.S. ; *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*, Springer Universitext, Berlin (1986).
- [21] Elmir, C. ; Lafontaine, J. ; Sur la géométrie systolique des variétés de Bieberbach, *Geom. Dedicata.* 136, 95–110 (2008)
- [22] Gallot, S. ; Hulin, D. ; Lafontaine, J. ; *Riemannian Geometry*, 3rd edition, Springer, Berlin Heidelberg (2004).
- [23] Gromov, M. ; Filling Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.* 18, 1–147(1983)
- [24] Gromov M. ; Systoles and intersystolic inequalities, in : Besse, A.L. (ed.), *Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l’honneur de Marcel Berger*, Société Mathématique de France, Séminaires et Congrès no. 1, p. 291–362.
- [25] Hebda J. ; Some lower bounds for the area of the surfaces, *Invent. Math.* 65, 485–490 (1982).
- [26] Hirsch M. ; *Differential Topology*, Springer Verlag Universitext, Berlin Heidelberg (1976).
- [27] Katz, M.G, *Systolic Geometry and Topology*, *Math. Surveys and Monographs* 137, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (2007).
- [28] Kulkarni, R.S. ; Pinkall, U. (Eds) ; *Conformal Geometry, Aspects of Mathematics* vol.12, Vieweg, Braunschweig (1988).
- [29] Pu, P.M. ; Some inequalities in certain non-orientable riemannian manifolds. *Pacific J.Math.*2, 55–71(1952).
- [30] Sabourau, S. ; Systoles des surfaces plates singulières de genre deux. *Mathematische Zeitschrift*, 247 no. 4, 693-709 (2004).
- [31] Sakai, T. ; A proof of the isosystolic inequality for the Klein bottle, *Proc. Amer. Math. Soc.* 104, 589–590 (1988).
- [32] Thurston, W.P. ; *Three-Dimensional Geometry and Topology*, edited by S. Levy, Princeton University Press, Princeton (1997).
- [33] Wolf, J.A. ; *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Boston (1974).

Résumé

Résumé : Dans cette thèse on étudie la géométrie systolique des variétés de Bieberbach. La *systole* d'une variété riemannienne compacte et non simplement connexe (M^n, g) est l'infimum des longueurs des courbes fermées non contractiles ; le *rapport systolique* est le quotient $(\text{systole})^n/\text{volume}$. Un résultat fondamental de Gromov assure que si M^n est essentielle, il existe une constante $c(M)$ strictement positive telle que, pour toute métrique g sur M^n : $\text{Vol}(M, g) \geq c(M)\text{Sys}(M, g)^n$.

Les surfaces compactes autres que S^2 sont essentielles, et le théorème de Gromov est une généralisation profonde des mêmes résultats pour le tore T^2 (C. Loewner), pour le plan projectif (M. Pu) et pour la bouteille de Klein (C. Bavard). Pour ces variétés la constante $c(M)$ est bien connu mais en dimension supérieure, on ne connaît pratiquement rien en dehors de l'existence de cette constante.

Nous nous intéressons aux variétés de Bieberbach de dimension 3, c'est à dire aux variétés compactes de dimension 3 qui portent une métrique riemannienne plate, qui ne sont pas des tores et démontrons que les métriques plates ne sont pas optimales pour le rapport systolique.

Abstract : In this thesis we study the systolic geometry of Bieberbach manifolds. The *systole* of a compact non simply connected Riemannian manifold (M^n, g) is the smallest length of a non-contractible closed curve ; the *systolic ratio* is the quotient $(\text{systole})^n/\text{volume}$. M. Gromov proved that if M^n is essential, there exists a positive constant $c(M)$ such that for any metric g on M^n we have : $\text{Vol}(M, g) \geq c(M)\text{Sys}(M, g)^n$.

All compact surfaces (except S^2) are essential, and the theorem of Gromov is a generalisation of the same results for the torus T^2 (C. Loewner), for the projective plane (M. Pu) and for the Klein bottle (C. Bavard). The constant $c(M)$ is well known in the case of these manifolds, but in higher dimension we don't have much information. We study the optimal systolic ratio of 3-dimensional Bieberbach manifolds that are not homeomorphic to a torus, and prove that it cannot be realized by a flat metric.

Discipline : Mathématiques.

Mots Clés : Géométrie riemannienne, inégalité isosystolique, métriques singulières, variété de Bieberbach.

Laboratoire : Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier

Université Montpellier 2
Case Courrier 051
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER Cedex