



**HAL**  
open science

# Chaos Ondulatoire en milieux ouverts : Approche Statistique par la Théorie des Matrices Aléatoires non-hermitiennes

Charles Poli

► **To cite this version:**

Charles Poli. Chaos Ondulatoire en milieux ouverts : Approche Statistique par la Théorie des Matrices Aléatoires non-hermitiennes. Physique [physics]. Université Nice Sophia Antipolis, 2009. Français. NNT: . tel-00440506

**HAL Id: tel-00440506**

**<https://theses.hal.science/tel-00440506>**

Submitted on 11 Dec 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NICE–SOPHIA ANTIPOLIS

École Doctorale : Sciences Fondamentales et Appliquées

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

dans la spécialité : **PHYSIQUE**

par

**Charles POLI**

**CHAOS ONDULATOIRE EN MILIEUX OUVERTS :  
APPROCHE STATISTIQUE PAR LA THÉORIE DES MATRICES  
ALÉATOIRES NON-HERMITIENNES**

Soutenue le 23 Octobre 2009 devant la commission composée de :

Oriol Bohigas	Directeur de Recherche, Université Paris XI	<i>Président</i>
Dominique Delande	Directeur de Recherche, Université Paris VI	<i>Rapporteur</i>
Benoît Douçot	Directeur de Recherche, Université Paris VI	
Olivier Legrand	Professeur, Université de Nice	<i>Co-directeur de Thèse</i>
Fabrice Mortessagne	Professeur, Université de Nice	<i>Directeur de Thèse</i>
Dmitry Savin	Enseignant chercheur, Brunel University	
Richard Weaver	Professeur, University of Illinois	<i>Rapporteur</i>

à 11 heures au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée



*A mes parents.*

« *Il existe un Dieu pour les ivrognes et les amoureux.* »  
Alexandre Dumas, *Les trois mousquetaires.*



# Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit a été effectué d'octobre 2006 à novembre 2009 au Laboratoire de Physique de la Matière Condensée de l'Université de Nice - Sophia Antipolis, dans l'équipe de Propagation des Ondes en Milieux Complexes sous la direction de Fabrice Mortessagne et de Olivier Legrand. Je tiens tout d'abord à remercier le directeur du laboratoire, Gérard Monnom, pour m'avoir ouvert les portes du LPMC et à qui je suis fier d'apprendre que j'ai, enfin, lu le fameux article de Petermann...

Je tiens à remercier Dominique Delande et Richard Weaver pour avoir accepté d'être mes rapporteurs, du grand intérêt qu'ils ont porté à mon manuscrit et de leurs nombreux commentaires. Je me rends bien sûr compte que Richard Weaver, en plus de lire le manuscrit dans une langue étrangère, a fait un aller-retour des Etats-Unis pour assister à ma soutenance! Un grand merci aussi au président du Jury : Oriol Bohigas, ainsi qu'aux examinateurs : Benoît Douçot, Dima Savin, Fabrice Mortessagne et Olivier Legrand. Vous avez tous contribué, de près ou de loin, à me faire découvrir de la très belle Physique! Ça a été pour moi avec beaucoup d'émotion, peut-être un peu trop d'ailleurs, de vous avoir face à moi le jour de ma soutenance. Vous avez tous fait en sorte que cette soutenance soit mémorable et croyez moi, elle l'a été! Merci!

J'ai eu la chance, tout au long de ces trois années de thèse, d'évoluer dans des conditions de travail excellentes. Je le dois pour beaucoup à mes directeurs de thèse Fabrice et Olivier. Vous n'avez pas hésité à m'envoyer à de nombreuses conférences internationales (je ne parlerai pas de la Pologne... enfin pas maintenant) et vous m'avez très rapidement ouvert votre formidable réseau. Mais pas seulement, pour ces innombrables discussions qui m'ont permis de faire des bonds en avant dans mon travail (discussions pendant lesquelles, d'ailleurs, vous décryptiez si facilement ce que j'essayais, tant bien que mal, d'exposer),

pour votre aide précieuse lors de la rédaction de ce manuscrit et finalement, pour m'avoir accordé toute votre confiance, Merci !

J'ai eu aussi la chance de collaborer avec de nombreuses personnes, qui de part leur intelligence, leur sens Physique et leur passion pour la recherche, m'ont profondément marqué. A Christian Vanneste pour avoir lu avec tant de rigueur ma thèse et pour m'avoir fait bénéficier de ses programmes qui sont, parmi tous ceux que j'ai vu passer, les seuls à avoir été commentés avec clarté et précision, bref, avec amour... A Laurent, le spécialiste des *boîtes noires en tout genre* mais plus particulièrement de ComSol, qui, après avoir succombé à mes maintes supplications a accepté de simuler... Des billards chaotiques ouverts ! Pas mal pour un limougeaud ! A Patrick et Olivier X, pour cette belle collaboration, c'était mon premier article ! A Barbara Dietz, pour m'avoir fourni ses données expérimentales et pour avoir suivi avec beaucoup d'attention mes pérégrinations sur ces modèles à 2 niveaux : modèle à la Müller ou modèle à la Savin ? Modèle à la Savin bien sûr ! Avec qui (Dima Savin, pas le modèle) j'ai eu le bonheur de discuter, de travailler et de boire *quelques* bières : c'est sûr, les allemandes sont les meilleures ! Merci de m'avoir accueilli à Londres plus d'une fois et de m'avoir aidé, de temps à autre, à résoudre en quelques heures (par orgueil, je n'oserai pas dire minutes, *some unfaisible integrals*, sur lesquelles je pouvais buter plusieurs jours (bon d'accord... plusieurs semaines). A Fabrice et Olivier (décidément, vous êtes partout !), pour votre rigueur et votre grande culture scientifique, mais surtout, pour vous être efforcés de me les transmettre.

Outre la recherche, j'ai eu la chance de pouvoir enseigner à la fac, j'ai donc dû faire preuve de retenue et de pédagogie ce qui, à la base, n'était pas gagné. Merci à Nicole pour ces nombreux conseils sur l'enseignement et qui m'a fait réaliser, qu'introduire les solutions générales d'une équation différentielle du deuxième degré n'est pas, au premier TD de Mécanique de 1ère année, nécessaire... A Jean-Pierre Romagnan, pour m'avoir fait participer à l'enseignement de Mécanique et de Dynamique non-linéaire, mais qui m'a aussi montré que pour comprendre une matière il faut être capable de l'enseigner. A Richard Kofman pour m'avoir permis d'encadrer les TP de Mécanique Quantique (mais qu'est-ce qu'ils sont compliqués...). A Bab pour m'avoir donnée la chance de prendre part aux TD d'Info Quantique. Et finalement, aux étudiants, qui ont, à leurs manières, contribué à faire de ce monitorat une expérience incroyable.

Ce labo n'a pas été qu'un simple lieu de travail, il a aussi été l'endroit où j'ai passé le plus clair de mon temps et où j'ai eu l'opportunité de rencontrer de nombreuses personnes qui ont su rendre ce labo au combien vivant et je sais de quoi je parle, parce qu'à l'heure

où j'écris ces lignes je suis au 5ème étage du Department of Mathematical Sciences of Brunel University, seul dans un grand bureau, la porte ouverte et personne dans les couloirs, avec vu sur un ciel gris et des échafaudages...

A Jean-Pierre pour ses nombreuses visites dans le bureau, non pas pour nous dire de nous calmer un peu (pourtant il y avait de quoi), mais pour nous expliquer de la belle Physique. Jean-Pierre qui, d'ailleurs, est venu à bout en quelques secondes du fameux mystère de la salle Claude Brot...

A Fabrice qui m'a fait découvrir les plaisirs du vélo de course et à qui j'ai pu montrer que, dans certaines conditions, un faux plat pouvait très bien être assimilé à un col hors catégorie.

A Olivier pour n'avoir jamais décliné les 37 discussions (je les ai compté) qui commençait toujours par : "Et si on parlait un peu de la matrice  $S$  ?". Si ça ce n'est pas de la patience...

A Seb, grand spécialiste des phrases chocs : "En trente cinq ans de carrière... " (tu connais la suite). Pour m'avoir aidé à tenir dès que je commençais à péter les plombs. Pour ces nombreux débats (Anthony, toi, t'es d'accord avec moi, non ?) si enrichissants et pour ton franc parlé (je m'en souviendrai longtemps)! Merci!

A Xavier et à Franck pour toutes ces petites discussions, rarement scientifiques, mais toujours agréables. Xavier qui a d'ailleurs eu le courage de boire ce liquide noirâtre préparé par mes soins à l'aide d'une cafetière italienne (le débat sur le nom exact de cette cafetière infernale n'est pas clos mon YéYé). Franck, tu sais ce qu'il te reste à faire...

A Wilfried pour ses blagues hautes en couleurs... A Bernard, parce que dès que ça ne marche pas, on sait que le problème va très vite être résolu! Le plus dur étant de réussir à attraper Gayp. A Pierre et Valérie, ça c'était un beau mariage et quelle entrée en scène!

A Médéric, pour m'avoir proposé de participer à ses écoles d'hiver et d'été (ou de printemps, je sais plus) dont les soirées valent le détour... A Elisabeth, attention, tu risques de te retrouver avec un post-doc sur les bras! A Franck M, fan de Joe Dassin. A Angélique pour s'être toujours occupée, dans la joie et la bonne humeur, de mes multiples missions. A Jérôme M, le pompier, pour ses "YouYouYou" quotidiens et à Greg pour ses commentaires, toujours pesés et mesurés, des matchs de foot, d'ailleurs Greg ce France-Irlande?

A David, avec qui je suis allé à ma première conférence internationale : "Good Morning Warsaw"! Je ne parlerai pas ici de ce fameux poster déposé par *complète inadvertance* dans la soute et qui n'est jamais arrivé à destination, bien que de repenser au flot continu d'insultes qui a suivi l'annonce de cette nouvelle à mon Chef me fait encore froid dans le dos. Mais *ce n'est pas mon propos aujourd'hui*, il est maintenant temps pour moi de faire



tomber un mystère : l'oreiller que tu as reçu aux alentours de 3h du matin alors que tu dormais comme un gros bébé : c'était moi, et oui... Il vaut dire qu'après avoir tout tenté pour faire taire tes ronflements, la manière forte s'est révélée gagnante !

A Mathieu, pour ces *runs* effrénés le long de la prom' et pour ces soirées dans le vieux à oublier je ne sais quoi... A croire que ça a marché. A Mounim, qui, après quelques bières et une bonne dizaine de clopes, devient complètement déchaîné ! Tu confirmes mon YéYé ? A Nadir : "Alors frère, bien ou bien ?".

A Nico, pour ces quelques bières niçoises et cette petite balade parisienne... D'ailleurs, en parlant de Paris, j'en profite pour saluer le joyeux petit groupe d'Orsay, dont les membres se reconnaîtront sans peine. A JP qui a malheureusement arrêté de faire de la vraie Physique, non JP, l'Astro ça ne compte pas ! Au Partenaire (Mathias), fan de ACDC (surtout le matin, très tôt, juste avant que je parte...), pour ce petit séjour corrézien, pour ses cours sur les *boost* et pour m'avoir accueilli à quelques reprises à Orsay, Au collègue (Vincent), que de souvenirs de ce bon vieux DEA : "Les deux chevelus du fond vous arrêtez de vous marrer oui!". Et pour m'avoir laissé squatter chez toi et ta charmante petite femme un nombre incalculable de jours.

A Claire, pour avoir donné une touche de féminité aux pauses cafés, pour avoir partagé avec moi les grands moments de solitudes intrinsèques aux conférences : "Pourtant on travaille dans le même domaine... On devrait comprendre..." et à qui je souhaite le meilleur des avens (doit bien y avoir moyen de *moyenner*).

A Anthony pour ses sites à caractère hautement scientifique. Et bien tu vois, il fallait juste un peu de patience... Mais arrête de publier s'il te plaît, ça devient vexant !

A Choup', la fameuse sardine marseillaise, expert en cocotte minute dès lors qu'il s'agit de patates, co-équipier, co-bureau, co-voiturier et même co-locataire, d'ailleurs quelle soirée ! Mais si, souvient-en : la soirée de la Chips, avec toujours au bout du fil l'incontournable YéYé : qui, à 1h du mat, est resté inerte face à nos "YouYouYou" à répétition. Au bureau 2.22, "*2.2.2 représente*, si un jour j'deviens vieux ce dont j'doute avec la vie que j'mène, j'écrirai un book sur ce bureau", paroles empruntées à l'*artiste* (l'italique prend ici tout son sens) Bouga. En parlant du bureau, j'en profite pour remercier Anne-Marie, qui a supporté, avec stoïcisme et abnégation, l'état catastrophique de ce bureau, quelle jeunesse...

A YéYé dont les caractéristiques principales sont certainement sa coupe de cheveux sans cesse changeante (mais malheureusement plus pour très longtemps) et son standing de *dandy anglais*. Pour avoir partagé avec moi les bons moments, mais aussi les moins bons... Pour ton soutien permanent, parce que voir ta drôle de tête au moins 12h par jour pendant la période de rédaction, bizarrement, ça m'a aidé ! Pour toutes ces soirées à

bossier comme des dingues dans l'espoir que, peut-être, ça allé bien finir par commencer à marcher. Pour ces instants précieux avec, de temps à autre, un petit verre de pastis dans les mains, histoire de se réchauffer... Merci mon YéYé! Juste une petite chose : change ton répondeur!

Aux Morizot, parents et rejetons, ma seconde famille... A Baptiste, pour cette amitié vieille d'une bonne dizaine d'années, d'ailleurs je me souviens, la K7 dans la voiture c'était John Lee Hooker! A Fanny, pour ce match de rugby parsemé de quelques bières. A Olivier, pour ces nombreuses soirées parisiennes en compagnie de Micky Mike, pour ce dernier nouvel an (Mais c'est qui Fifi brin d'acier!!!) et pour ce café au Negresco quelques heures après ma soutenance, Dieu que c'était bon! A la tienne vieille branche!

A Morgane, pour avoir préparé avec un soin tout particulier la soirée qui a suivi ma soutenance et pour avoir usé de tous ses talents pour concevoir LE T-shirt souvenir de cette Thèse. Merci!

A la famille, corse, provençale et marocaine (tu es inclus dedans Papa), pour vos encouragements. A la tantine, à Evelyne et à Maman pour vous être occupé d'un aspect extrêmement important de cette soutenance : le pot! Je n'oublie d'ailleurs pas Choup' et YéYé qui sont allés chercher du *carburant* à 1h de la soutenance.

MERCI!



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>12</b>
<b>1 Description d'un système ondulatoire chaotique ouvert</b>	<b>17</b>
1.1 Théorie des Matrices Aléatoires <i>à la</i> Wigner . . . . .	18
1.1.1 Description des spectres de noyaux lourds . . . . .	18
1.1.2 De la Physique Nucléaire au Chaos Ondulatoire . . . . .	23
1.2 La matrice $S$ . . . . .	27
1.2.1 Modélisation du processus de diffusion . . . . .	28
1.2.2 Le formalisme de la matrice $S$ . . . . .	31
1.2.3 Approche statistique . . . . .	34
1.3 Etat de l'art des propriétés statistiques des systèmes chaotiques ouverts . .	35
1.3.1 Propriétés statistiques des largeurs des résonances . . . . .	36
1.3.2 Propriétés statistiques de la matrice $S$ . . . . .	39
1.3.3 Propriétés statistiques du champ dans la zone d'interaction . . . . .	43
1.4 Conclusion . . . . .	53
<b>2 Statistiques des écarts et des croisements évités</b>	<b>55</b>
2.1 Ecart et croisements évités dans un système fermé . . . . .	56
2.1.1 La distribution des écarts . . . . .	56
2.1.2 La distribution des croisements évités . . . . .	59
2.1.3 Expérience avec une cavité micro-onde paramétrique . . . . .	62
2.2 Hamiltonien effectif et modèles à 2 niveaux . . . . .	63
2.2.1 Phénomène d'attraction des résonances . . . . .	63
2.2.2 Modèle à 2 niveaux <i>à la</i> Savin : cas d'un grand nombre de canaux .	66
2.3 Distribution des écarts pour un système ouvert . . . . .	67

2.3.1	Expressions analytiques . . . . .	67
2.3.2	Etude numérique . . . . .	69
2.4	Distribution des croisements évités pour un système ouvert . . . . .	73
2.4.1	Expressions analytiques . . . . .	73
2.4.2	Simulations numériques de matrices aléatoires . . . . .	75
2.4.3	Retour à la cavité micro-onde paramétrique . . . . .	78
2.5	Conclusion . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Statistiques des fonctions propres</b>	<b>81</b>
3.1	Non-orthogonalité des fonctions propres . . . . .	82
3.1.1	Vecteurs propres à gauche et vecteurs propres à droite . . . . .	83
3.1.2	Mesures de la non-orthogonalité . . . . .	83
3.2	Le régime perturbatif . . . . .	89
3.2.1	Expression du paramètre de non-orthogonalité $q^2$ . . . . .	89
3.2.2	Echelle naturelle des paramètres . . . . .	92
3.2.3	Relation entre le paramètre de non-orthogonalité et les fluctuations des largeurs . . . . .	97
3.3	Distribution du paramètre de non-orthogonalité . . . . .	99
3.3.1	Distribution de $X$ pour GOE . . . . .	100
3.3.2	Distribution de $X$ pour picket-fence . . . . .	107
3.3.3	Distribution de $Y$ pour GUE . . . . .	112
3.3.4	Distribution de $Y$ pour picket-fence . . . . .	113
3.3.5	Distributions de $X$ et $Y$ dans la limite $M \gg 1$ . . . . .	115
3.4	Conclusion . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Mesures du paramètre de non-orthogonalité : Simulations numériques et expérience</b>	<b>121</b>
4.1	Les simulations numériques . . . . .	122
4.1.1	La cavité électromagnétique ouverte . . . . .	122
4.1.2	Les distributions des largeurs et des paramètres de non-orthogonalité	124
4.2	L'expérience acoustique . . . . .	128
4.2.1	Modèle analytique . . . . .	128
4.2.2	L'expérience acoustique . . . . .	129
4.3	Conclusion . . . . .	135
	<b>Conclusion générale</b>	<b>137</b>

# Introduction générale

En 1917, dans un article intitulé "Zum quantensatz von Sommerfeld und Epstein" [1], A. Einstein relève l'impossibilité d'appliquer le principe de correspondance lorsque la dynamique classique du système ne possède pas une régularité suffisante. Invoquant H. Poincaré, il précise que l'absence de régularité est malheureusement générique dans les systèmes dynamiques. A. Einstein n'évoque pas le *chaos* – pas plus, d'ailleurs, que H. Poincaré – et, moins encore, le *chaos quantique*, mais c'est pourtant bien de cela qu'il s'agit. Il faudra cependant attendre plus de 50 ans pour que naisse une communauté de physiciens et mathématiciens s'efforçant de répondre à la question : comment se comporte un système quantique dont la limite classique exhibe une dynamique chaotique ? La nature chaotique sous-jacente de ces *systèmes quantiques chaotiques* rend impossible la résolution analytique de l'équation de Schrödinger, il est alors apparu nécessaire de les décrire par d'autres méthodes. De ces considérations, deux théories complémentaires ont émergé : la Théorie des Orbites Périodiques [2] et la Théorie des Matrices Aléatoires [3,4]. Alors que la première caractérise le système, dans la limite semi-classique  $\hbar \rightarrow 0$ , en termes de ses orbites périodiques, c'est-à-dire de ses caractéristiques propres, la seconde s'intéresse aux propriétés statistiques universelles de ces systèmes en fonction de leurs symétries globales.

En s'appuyant sur l'analogie formelle entre l'équation de Schrödinger stationnaire et l'équation d'Helmholtz, omniprésente en Physique des Ondes, le domaine du Chaos Quantique s'est étendu au Chaos Ondulatoire, qui regroupe l'ensemble des systèmes dont la limite géométrique est chaotique. Cette extension aux ondes classiques a permis l'émergence, dans les années 90, de nombreuses expériences : en Acoustique [5], en Electromagnétisme [6], puis dans les autres domaines de la Physique des Ondes [7]. Le but de ces premières expériences étaient alors d'infirmier ou de confirmer la Théorie des Matrices Aléatoires et la Théorie des Orbites Périodiques. Ces théories ne s'appliquant qu'aux systèmes isolés, les expériences devaient présenter un couplage avec l'extérieur le plus faible

possible. D'énormes efforts expérimentaux ont ainsi été fournis pour assurer cette condition : des cavités électromagnétiques plongées dans un cryostat à très basse température pour rendre négligeable les pertes ohmiques, des blocs d'aluminium à fort facteur de qualité etc. Les nombreuses expériences réalisées n'ont pu mettre en défaut les prédictions théoriques et, à l'heure actuelle, il est certain que la Théorie des Matrices Aléatoires et la Théorie des Orbites Périodiques décrivent très bien les systèmes ondulatoires chaotiques très faiblement couplés à l'extérieur. Néanmoins, un système ondulatoire n'est, en pratique, jamais fermé, celui-ci est toujours couplé à son environnement. Outre le processus de mesure, il existe différents mécanismes de couplage, telles les pertes par absorption, les fuites par rayonnement, la dissipation etc. Ces différents types de couplage provoquent de grandes modifications sur les propriétés des systèmes ondulatoires par rapport au cas fermé. Ainsi, depuis les années 2000, la communauté se concentre sur la description des systèmes ondulatoires chaotiques couplés à l'extérieur. Indépendamment d'un intérêt purement fondamental, ces études rentrent pleinement dans le cadre des nouvelles avancées technologiques, tels les points quantiques [8] ou les cavités microlasers [9] qui nécessitent d'être traités comme des systèmes ouverts.

C'est dans cette démarche que s'inscrit mon travail de thèse : la description des propriétés statistiques spectrales et spatiales de systèmes ondulatoires chaotiques ouverts. Alors que les effets du couplage sur les propriétés spectrales ont déjà été beaucoup analysés, les statistiques du champ associées aux résonances ont fait l'objet de peu d'études, ce travail prétend donc, en partie, combler ce vide.

## Contenu du manuscrit

### I - Description d'un système ondulatoire chaotique ouvert

Ce chapitre présente tout d'abord la Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner qui caractérise les propriétés statistiques de systèmes ondulatoires chaotiques fermés. Ensuite, nous verrons que les systèmes ouverts peuvent toujours être vus comme donnant lieu à des processus de diffusion, et pourront donc être décrits par la Théorie de la Diffusion. Je montrerai alors que les propriétés statistiques des énergies propres, des largeurs, et du champ associé aux résonances sont reliées aux valeurs propres et aux fonctions propres d'un opérateur non-hermitien : l'*hamiltonien effectif*. Enfin, ce chapitre se termine par une présentation succincte de quelques résultats théoriques et expérimentaux marquants sur les propriétés statistiques de systèmes chaotiques ouverts.

## II - Statistiques des écarts entre niveaux et des croisements évités

Le deuxième chapitre utilise un modèle à 2 niveaux, introduit par D. Savin, O. Legrand et F. Mortessagne [10], pour obtenir les distributions de probabilité de écarts entre niveaux et des croisements évités d'un système chaotique ouvert couplé à l'environnement par un grand nombre de *canaux de couplage*. Dans le cas des croisements évités, les prédictions théoriques permettront d'interpréter les résultats expérimentaux récemment obtenus par B. Dietz *et al.* [11].

## III - Statistiques des fonctions propres dans le régime perturbatif

Le troisième chapitre s'intéresse aux propriétés statistiques des fonctions propres de l'*hamiltonien effectif*. En se limitant au régime de faible recouvrement modal, les distributions de probabilité d'un paramètre, mesurant la non-orthogonalité, seront calculées pour des systèmes chaotiques dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps, et lorsque celle-ci est brisée. De plus, la valeur moyenne de ce paramètre de non-orthogonalité sera liée aux fluctuations des largeurs des résonances, et fournira une interprétation claire de la notion abstraite de non-orthogonalité.

## IV - Mesures du paramètre de non-orthogonalité : Simulations numériques et expérience

Ce dernier chapitre présente des résultats numériques et expérimentaux réalisés sur des systèmes physiques chaotiques ouverts. Tout d'abord, via la méthode numérique des éléments finis, nous calculerons le champ des résonances d'une cavité électromagnétique 2D ouverte, et ce dans une large gamme en fréquence. En introduisant un *mélangeur* dans la cavité, nous pourrions acquérir un nombre suffisant de données pour comparer les statistiques du paramètre de non-orthogonalité aux prédictions théoriques du chapitre III. Ensuite, nous révélerons la proportionnalité entre le paramètre de non-orthogonalité et la largeur spectrale *inhomogène* dans une expérience acoustique. Plus précisément, nous analyserons les ondes acoustiques à la surface d'une plaque de silicium dont le taux de pertes *inhomogènes* est contrôlé.





# Chapitre 1

## Description d'un système ondulatoire chaotique ouvert

La Théorie des Matrices Aléatoires, introduite par E. Wigner dans les années 50 pour décrire les propriétés statistiques des spectres de noyaux lourds [12], s'est révélée être un puissant outil pour caractériser les statistiques des systèmes ondulatoires chaotiques fermés [13]. Cependant, lorsque l'on prend en compte le couplage avec l'extérieur, omniprésent dans les systèmes physiques, la Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner n'est, en général, plus applicable. Il apparaît alors nécessaire de traiter ces systèmes comme des systèmes ouverts et d'employer la Théorie de la Diffusion (au sens de Scattering), dont l'élément fondamental est la matrice de diffusion  $S$ .

Même si plusieurs approches, toutes articulées autour de la matrice  $S$ , ont été développées [14], je décrirai plus particulièrement le formalisme de l'*hamiltonien effectif*, qui sera intensivement utilisé dans la suite de ce manuscrit. Le principal intérêt de ce formalisme, apparu en Physique Nucléaire dans les années 70 [15], est qu'il permet d'incorporer directement les idées de la Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner [16] et de décrire les propriétés statistiques des énergies propres, des largeurs des résonances et des fonctions d'ondes propres<sup>1</sup> de systèmes chaotiques ouverts. Depuis le milieu des années 1980, l'approche de l'*hamiltonien effectif* a été appliquée avec un grand succès à de nombreux systèmes ondulatoires chaotiques tels que les noyaux lourds [17], les billards électromagnétiques [18], les systèmes acoustiques [19] et les points quantiques [8]. Par conséquent, ce formalisme s'est imposé comme l'outil par excellence pour comprendre et analyser les

---

<sup>1</sup>Nous verrons au chapitre III le sens précis que prend la notion de fonction d'onde propre d'un système ouvert.

propriétés statistiques des systèmes chaotiques ouverts.

Comme le formalisme de l'*hamiltonien effectif* nécessite la connaissance des propriétés statistiques du système fermé, je présenterai tout d'abord la Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner (§1.1). Je montrerai ensuite que le couplage avec l'extérieur peut être modélisé d'une manière unifiée, indépendamment des phénomènes physiques responsables de l'ouverture du système. Puis, en écrivant la matrice  $S$  en fonction de l'*hamiltonien effectif*, nous verrons que les propriétés statistiques des systèmes chaotiques ouverts peuvent être décrites en y incorporant la Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner (§1.2). Pour finir, j'effectuerai un tour d'horizon des résultats théoriques obtenus par la communauté, en m'efforçant de me concentrer sur ceux qui ont été vérifiés expérimentalement (§1.3).

## 1.1 Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner

Cette première section présente succinctement la Théorie de Matrices Aléatoires Gaussiennes. Initialement introduite en Physique Nucléaire pour décrire les propriétés statistiques de spectres de noyaux lourds à haute énergie, son domaine d'application s'est par la suite étendu à l'ensemble des systèmes ondulatoires chaotiques *i.e.* dont la limite géométrique est chaotique (au sens du Chaos Hamiltonien).

### 1.1.1 Description des spectres de noyaux lourds

Au début des années 30, les physiciens ont commencé à explorer le noyau atomique, dont la structure restait largement inconnue. Pour sonder la structure des noyaux, la seule méthode expérimentale possible consiste à les bombarder de particules. En étudiant comment les particules incidentes sont diffusées, on extrait de nombreuses informations sur le noyau cible, et notamment son spectre. Selon le type de particules envoyées et leur énergie, un état lié de grande durée de vie peut être créé. Au bout d'un certain temps, cet état lié se désintègre en dégageant de l'énergie sous forme de particules : c'est le phénomène de radioactivité artificielle.

La radioactivité artificielle a été découverte par F. Joliot et I. Curie en bombardant des noyaux légers de particules  $\alpha^2$ . Dans le cas de noyaux lourds, la forte barrière coulombienne, créée par le grand nombre de protons du noyau, est trop élevée pour que la particule  $\alpha$  pénètre dans le noyau. Pour contourner ce problème, les expériences de diffusion de neutrons, initiées par le groupe de E. Fermi, se sont rapidement imposées pour sonder la structure des noyaux lourds. Comme le montre la Fig 1.1, les spectres révèlent la

---

<sup>2</sup>Les particules  $\alpha$  sont des noyaux d'Hélium constitués de 2 protons et de 2 neutrons.

présence de fines résonances, associées à la formation d'états liés de longue durée de vie. Ces résonances ont été interprétées en 1936 par N. Bohr [20] en introduisant le concept de composé nucléaire. Lors de la création d'un composé nucléaire, un neutron incident entre en collision avec le noyau et distribue son énergie à l'ensemble des nucléons, créant ainsi un composé dont les constituants interagissent fortement entre eux. L'énergie se distribue alors à l'ensemble des nucléons et ne permet plus à l'un d'eux de sortir du composé : un état lié est créé. Seule une redistribution particulière de l'énergie, où la plupart de l'énergie est concentrée dans un neutron, permettra à celui-ci de sortir du composé nucléaire. Ce cas étant extrêmement rare, les composés nucléaires se désintègrent généralement par d'autres mécanismes, tels que la radioactivité  $\alpha^3$  ou la fission<sup>4</sup>.

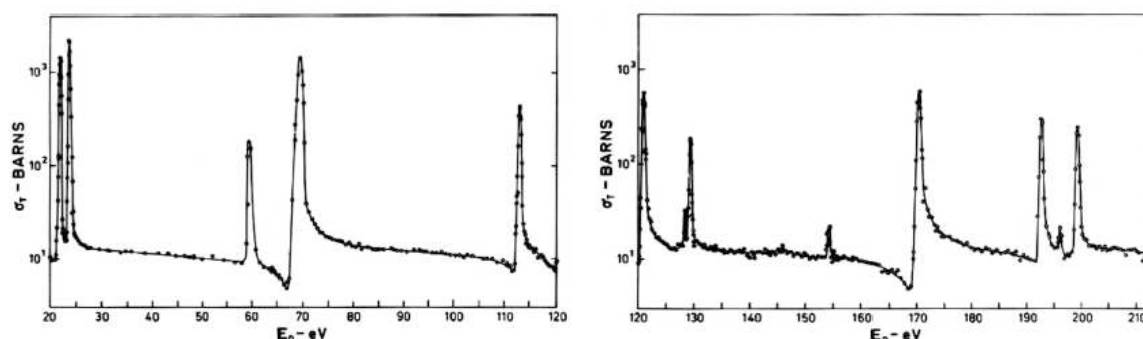


FIG. 1.1 – Le spectre du Thorium  $^{232}\text{Th}$  en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident. Les pics indiquent la présence d'états liés de longue durée de vie. Les figures sont extraites de la référence [21].

La Fig 1.2 illustre une vision purement *classique* d'un composé nucléaire due à N. Bohr, où l'interaction entre nucléons est vue comme des collisions de boules de billards *i.e.* de sphères dures. Bien que cette image du phénomène représentant les interactions fortes entre nucléons comme des chocs entre boules de billard soit réductrice, elle nous fait deviner le caractère complexe d'un composé nucléaire lourd.

Bien que les premiers états excités du noyau lourd puissent être décrits individuellement par des modèles standards de Physique Nucléaire, tel le modèle en couches, une description individuelle de tous les états excités n'est pas réalisable. En effet, la densité moyenne des résonances croît, à haute énergie, exponentiellement :  $\langle \rho(E) \rangle \propto e^{a\sqrt{E}}$ , où  $a$  est une constante positive dépendant du noyau considéré. Une description individuelle de chaque résonance d'un spectre en comptant des milliers, n'est donc pas, en pratique, envisageable. Une approche statistique paraît bien plus pertinente ( [13] pages 108-111).

<sup>3</sup>Emission d'un noyau d'Hélium.

<sup>4</sup>Le noyau lourd est cassé en deux noyaux plus légers

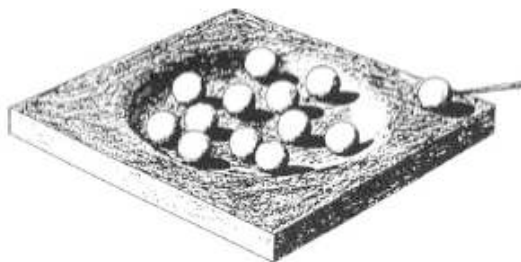


FIG. 1.2 – Représentation *classique* de la diffusion de neutron sur un noyau lourd. Le noyau est représenté par des boules de billard piégées dans un renforcement, le neutron incident arrive avec une certaine énergie cinétique fournie par une queue de billard.

En introduisant la Théorie des Matrices Aléatoires, E. Wigner a posé les bases d'un formalisme qui s'avérera extrêmement fructueux pour décrire les statistiques spectrales des noyaux lourds à haute énergie. Cette théorie repose sur le postulat que les propriétés statistiques de ces noyaux correspondent aux statistiques d'ensembles de matrices aléatoires *i.e.* de matrices dont les éléments sont des variables aléatoires. Le principe revient donc à *remplacer* l'hamiltonien du système physique contenant un grand nombre de niveaux  $N \rightarrow \infty$ , par une matrice aléatoire hermitienne  $H$ , de taille  $N \times N$ , définie par une distribution de probabilité  $P(H)$ . La connaissance de  $P(H)$  permettra d'aborder les statistiques spectrales.

Fort de la vision *classique* de N. Bohr représentant la capture de neutron d'un noyau lourd par un système désordonné contenant un grand nombre de degrés de liberté en interaction (Fig. 1.2), on peut intuitivement considérer que le système quantique conserve la propriété de *désordre maximum*. Plus précisément, en construisant un ensemble de matrices aléatoires hermitiennes présentant une entropie maximale, on aboutit à des ensembles de matrices hermitiennes dont les éléments de matrices sont des variables aléatoires gaussiennes [22]. En imposant de plus, que ces ensembles soient invariants par rapport aux transformations associées aux symétries globales du système considéré, trois ensembles gaussiens, appelés les ensembles de Wigner, peuvent être déduits ([7] pages 76-77).

L'ensemble gaussien orthogonal GOE, constitué de matrices réelles symétriques et diagonalisables par une transformation orthogonale, décrit les systèmes invariants par renversement du sens du temps.

L'ensemble gaussien unitaire GUE, constitué de matrices complexes hermitiennes et diagonalisables par une transformation unitaire, décrit les systèmes dont l'invariance par renversement du sens du temps est brisée.

L'ensemble gaussien symplectique GSE, constitué de matrices réelles quaternions ([7] pages 70-73) et diagonalisables par une transformation symplectique, décrit les systèmes invariants par renversement du sens du temps avec interactions de spins 1/2.

La distribution des éléments de matrices de ces ensembles se met sous la forme générale :

$$P_\beta(H) \propto \exp \left[ - N\beta \operatorname{Tr} H^2 \right], \quad (1.1)$$

où  $N$  comptabilise le nombre de niveaux et l'indice de Wigner  $\beta$  caractérise l'ensemble gaussien :  $\beta = 1$  pour GOE,  $\beta = 2$  pour GUE et  $\beta = 4$  pour GSE. Alors que les éléments de matrices sont, par construction, indépendants, les spectres associés sont corrélés, comme le montre clairement la distribution des énergies propres associée à la distribution (1.1) :

$$P_\beta(\{E_n\}) \propto \prod_{n>m}^N |E_m - E_n|^\beta \exp \left( - N\beta \sum_n E_n^2 \right), \quad (1.2)$$

Pendant de nombreuses d'années, la communauté s'est principalement intéressée à décrire les propriétés statistiques associées aux ensembles de Wigner. Plusieurs grandeurs statistiques ont ainsi été introduites, caractérisant aussi bien les propriétés locales du spectre, telle la distribution des écarts entre plus proches niveaux, que les propriétés non-locales du spectre, telles les fonctions de corrélation à  $n$  points, la rigidité du spectre, etc. Pour illustrer l'applicabilité de la Théorie des Matrices aux statistiques des noyaux lourds, je m'intéresserai uniquement à deux quantités : la distribution des écarts et la rigidité spectrale. Le lecteur intéressé pourra consulter les références [21, 23] pour une présentation générale de la Théorie des Matrices Aléatoires en Physique Nucléaire.

**La statistique des écarts.** L'écart entre deux niveaux consécutifs  $s_n = E_{n+1} - E_n$ , après s'être affranchi de la densité d'état variable ([24] pages 58-60), apparaît comme la quantité la plus simple et la plus naturelle pour mesurer les fluctuations locales du spectre. La distribution des écarts pour les ensembles gaussiens (1.1) a tout d'abord été obtenue analytiquement par E. Wigner en 1957 dans un modèle à 2 niveaux, justifié par le caractère local de cette quantité. L'expression du  $P(s)$  dans le cas exact, correspondant à  $N \rightarrow \infty$ , a ensuite été résolu en 1961 par M. Gaudin [25]. Comme les deux distributions sont très proches l'une de l'autre ([24] page 55), je me limiterai aux distributions de Wigner :

$$P_\beta^W(s) = a_\beta s^\beta e^{-b_\beta s^2} \quad (1.3)$$

où les constantes  $a_\beta$  et  $b_\beta$  sont liées à la normalisation de la distribution et de l'écart moyen. Une répulsion aux petits écarts de la forme  $s^\beta$ , fortement dépendante de l'ensemble,

interdit la dégénérescence de niveaux. Cette propriété de répulsion aux petits écarts, déjà contenue dans la distribution des énergies propres (1.2), diffère grandement de celle du  $P(s)$  d'un spectre décorréolé. Dans ce cas, la distribution suit la loi de Poisson :  $P^P(s) = e^{-s}$ , pour laquelle la densité des petits écarts est maximale pour  $s \rightarrow 0$ . La Fig. 1.3 montre que la distribution des écarts construite à partir de spectres expérimentaux de noyaux lourds, possédant l'invariance par renversement du temps, est bien représentée par la distribution de Wigner correspondant à GOE.

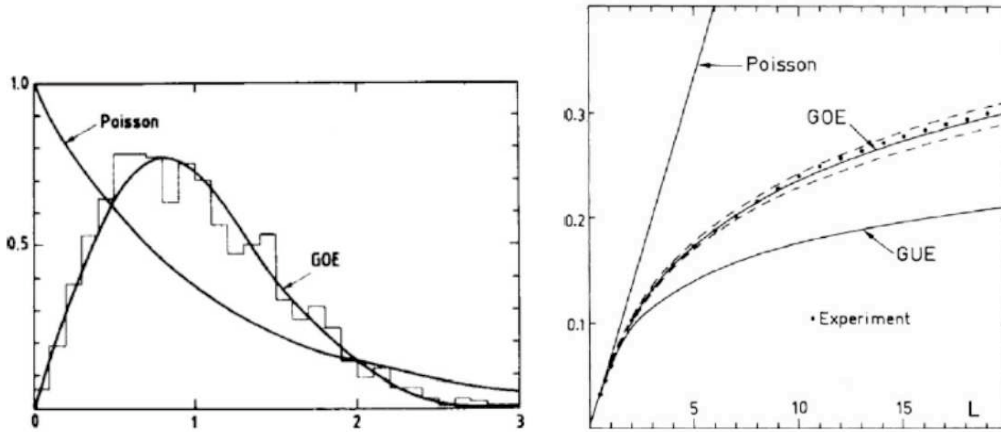


FIG. 1.3 – Les statistiques de spectres de noyaux lourds sont comparées aux prédictions de la Théorie des Matrices Aléatoires. A gauche, la distribution des écarts entre plus proches niveaux  $P(s)$  [26]. A droite, la rigidité spectrale  $\Delta_3(L)$  [27].

**La statistique de la rigidité spectrale.** Cette grandeur statistique, noté  $\Delta_3$ , a été introduite par F. Dyson pour caractériser les corrélations à longue distance dans le spectre. Le  $\Delta_3$  mesure la déviation du nombre cumulé de mode  $N(E)$  par rapport à une fonction linéaire de  $E$ , dans un intervalle du spectre où la valeur moyenne de l'écart entre niveaux est supposée constante :

$$\Delta_3(L) = \left\langle \min_{a,b} \int_E^{E+L} dE (N(E) - bE - a)^2 \right\rangle, \quad (1.4)$$

Si les énergies propres sont des variables indépendantes, c'est-à-dire un spectre de type Poisson, le  $\Delta_3$  est une fonction linéaire en  $L$  :

$$\Delta_3^P(L) = \frac{L}{15}. \quad (1.5)$$

Pour les ensembles gaussiens, une répulsion à grande distance induit un comportement logarithmique :

$$\Delta_{3,\beta}^W(L) = \frac{1}{\beta\pi^2} \log(L) + c_\beta + O(1/L), \quad (1.6)$$

où la constante  $c_\beta$  dépend de l'ensemble considéré. La Fig. 1.3 démontre, là encore, que la Théorie des Matrices Aléatoires à la Wigner décrit correctement les statistiques spectrales de noyaux lourds.

### 1.1.2 De la Physique Nucléaire au Chaos Ondulatoire

Nous verrons que la Théorie des Matrices Aléatoires à la Wigner ne décrit pas seulement les statistiques spectrales de noyaux lourds, mais s'étend aussi aux systèmes ondulatoires dont la limite, classique pour les systèmes quantiques, ou géométrique pour les systèmes ondulatoires, est chaotique.

#### Le Chaos Quantique

Comme nous venons de le voir, les propriétés statistiques des noyaux lourds peuvent être décrites par la Théorie des Matrices Aléatoires. La caractéristique principale de ces systèmes est qu'ils sont *complexes*, dans le sens où ils possèdent un grand nombre de degrés de liberté en interaction, comme le suggère l'image due N. Bohr représenté en Fig. 1.2. Cependant, nous allons nous rendre compte que l'approche introduite par E. Wigner est aussi pertinente pour caractériser les propriétés statistiques de systèmes quantiques contenant peu de degrés de liberté et dont la *complexité* est introduite par la géométrie du système.

**Les billards en mécanique classique.** Pour les systèmes conservatifs, le plus simple système pouvant exhiber un comportement chaotique est un système à deux degrés de liberté dont seule l'énergie est conservée. Parmi l'ensemble des systèmes chaotiques bi-dimensionnels, une particule évoluant librement dans un domaine fermé, en d'autres termes un billard sans trou, est de loin la situation la plus analysée. Plus précisément, un billard est un système dans lequel une particule ponctuelle se meut librement et se réfléchit sur les parois selon la loi de Snell-Descartes.

La distinction entre un comportement intégrable ou chaotique peut être simplement prédite en comparant le nombre de degrés de liberté au nombre de constantes du mouvement. Si le nombre de degré de liberté est égal au nombre de constantes du mouvement, le billard est intégrable et la trajectoire d'une particule est régulière (Fig. 1.4). Lorsque le nombre de constantes du mouvement devient inférieur au nombre de degrés de liberté, le



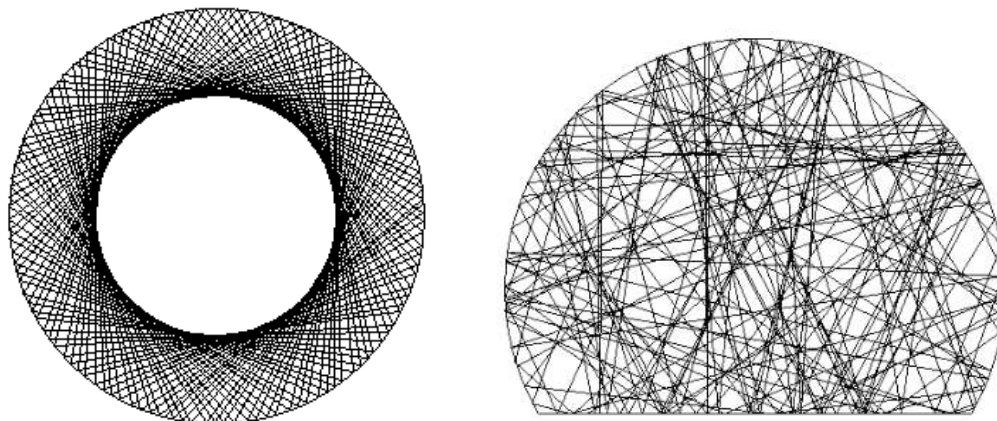


FIG. 1.4 – A gauche, trajectoire d'une particule ponctuelle dans un billard intégrable de forme circulaire, où les deux constantes du mouvements sont l'énergie et l'angle de réflexion sur les parois. A droite, trajectoire d'une particule ponctuelle dans un billard chaotique en forme de cercle tronqué, la trajectoire irrégulière de la particule est due à la troncature, qui brise la conservation de l'angle de réflexion.

système est chaotique (Fig. 1.4), et sa dynamique exhibe la fameuse propriété d'extrême sensibilité aux conditions initiales.

A partir des années 70, les billards sont rapidement devenus des systèmes modèles pour l'étude des systèmes dynamiques chaotiques. Les nombreux travaux, notamment réalisés par Y. Sinaï et L. Bunimovich, ont certainement fourni une motivation supplémentaire à la communauté pour visiter l'aspect quantique de ces systèmes.

**Les billards en Chaos Quantique.** L'analogue quantique du billard est un système bi-dimensionnel fermé dans lequel une particule quantique, de masse  $m$ , est piégée par un puits de potentiel infini. En régime stationnaire, la particule est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) + E \right] \Psi(x, y) = 0, \quad \Psi(x, y)|_{\partial D} = 0 \quad (1.7)$$

où  $E$  est l'énergie de la particule et la condition  $\Psi(x, y)|_{\partial D} = 0$  impose l'annulation de la fonction d'onde sur les bords du puits *i.e.* correspond aux conditions aux limites de Dirichlet. La résolution de l'équation (1.7) conduit à définir un ensemble discret d'énergies propres<sup>5</sup>  $\{E_n\}$  auxquelles sont associées les fonctions d'onde propres<sup>6</sup>  $\{\Psi_n\}$  de la particule quantique. Alors que l'équation d'onde (1.7) se résout analytiquement pour les systèmes

<sup>5</sup>Les énergies accessibles de la particule.

<sup>6</sup> $|\Psi_n(x, y)|^2$  est la densité de probabilité de la particule quantique associées à l'énergie propre  $n$ .

dont la limite classique est intégrable, une géométrie chaotique entraîne l'absence de solution analytique. Seules des études numérique ou expérimentale permettent donc d'accéder au spectre et aux fonctions propres du système quantique considéré.

### Propriétés statistiques des système chaotiques quantiques : la conjecture Bohigas-Giannoni-Schmit

Le lien entre les systèmes quantiques dont la limite classique est chaotique et la Théorie des Matrices Aléatoires à la Wigner est apparue autour des années 80, suite à des travaux numériques s'intéressant aux statistiques spectrales de billards quantiques chaotiques.

En 1977, M. Berry et M. Tabor [28] démontrent que la distribution des écarts de systèmes quantiques intégrables satisfait la loi de Poisson. L'oscillateur harmonique, dont les énergies propres sont équidistantes, étant l'unique exception à cette règle. Sans préciser la distribution des écarts pour les systèmes chaotiques, M. Berry et M. Tabor indiquent qu'elle diffère de la distribution de Poisson. Toujours en utilisant la notion de billard quantique, S. MacDonald et A. Kaufman [29], M. Berry [30] et G. Casati *et al.* [31, 32] montrent, par des études numériques permettant d'obtenir le spectre du billard, que la distribution des écarts de billards quantiques chaotiques et invariants par renversement du sens du temps, obéit à la loi de Poisson lorsque la limite classique est intégrable, et suit la loi de Wigner (1.3) avec  $\beta = 1$ , lorsque la limite classique est chaotique.

Une avancée majeure est accomplie en 1984 par O. Bohigas, M.-J. Giannoni et C. Schmit [3], qui, en réalisant des simulations numériques d'un billard chaotique, prouvent que les statistiques réalisées sur la distribution des écarts et sur la rigidité spectrale suivent parfaitement les prédictions des Matrices Aléatoires Gaussiennes (Fig. 1.5). Forts de ces résultats et des précédents travaux, ils conjecturent que les fluctuations spectrales de systèmes quantiques dont la limite classique est chaotique suivent aussi les prédictions théoriques des Matrices Aléatoires à la Wigner. Bien que cette conjecture ne concerne, à l'origine, que les systèmes chaotiques invariants par renversement du sens du temps, il est néanmoins admis par la communauté qu'elle s'applique aux trois ensembles de Wigner.

### Vers une preuve de la conjecture BGS

Depuis l'énoncé de cette conjecture, la communauté s'est efforcée de la prouver. La démarche adoptée consiste à démontrer que les résultats obtenus par la Théorie des Matrices Aléatoires sont retrouvés en utilisant d'autres approches.

A cette fin, plusieurs études, basées sur la Théorie des Orbites Périodiques [33, 34], la Théorie des Champs [35, 36], et la Théorie des Groupes [37], ont été réalisées. Je me

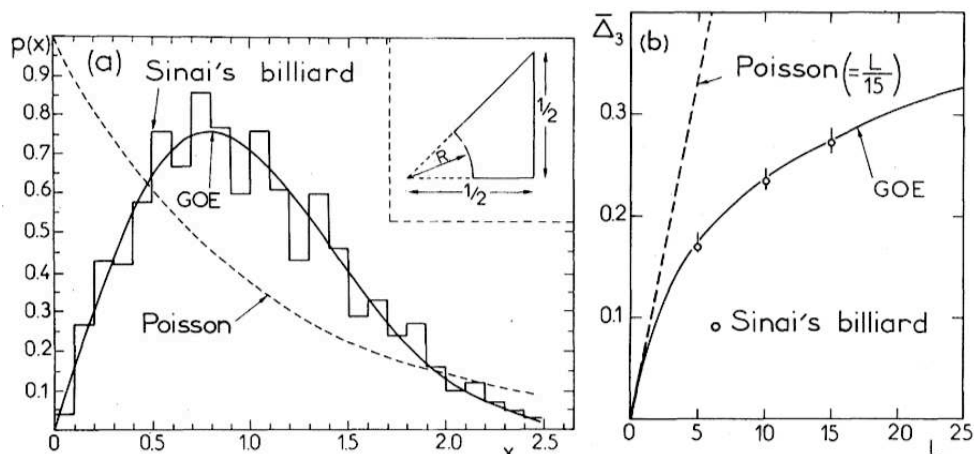


FIG. 1.5 – Propriétés statistiques d'un spectre d'un billard quantique chaotique dont la forme est donnée en insert. A gauche la distribution des écarts entre plus proches niveaux  $P(s)$ . A droite la rigidité spectrale  $\Delta_3$ , montrant les corrélations à longue distance dans le spectre. Les figures sont extraites de la référence [3].

concentrerai cependant sur les résultats obtenus par M. Berry [33], au travers de la Théorie des Orbites Périodiques. Cette théorie, introduite principalement par M. Gutzwiller [2], R. Balian et C. Bloch [38], est construite sur la formulation en intégrales de chemins de la Mécanique Quantique. En considérant la limite semiclassique *i.e.*  $\hbar \rightarrow 0$ , les quantités du système peuvent être exprimées en terme de sommes sur les orbites périodiques du système. Comme les orbites périodiques sont caractéristiques du système considéré, la Théorie des Orbites Périodiques permet donc d'obtenir des informations propres au système. En un sens, cette approche est complémentaire de la Théorie des Matrices Aléatoires qui, elle, ne décrit le système qu'en fonction de ses symétries globales.

En employant la Théorie des Orbites Périodiques, M. Berry [33] obtient l'expression du  $\Delta_3$  correspondant à un spectre décorréolé (1.5), ainsi que le comportement logarithmique du  $\Delta_3$  de la Théorie des Matrices Aléatoires (1.6). De plus, M. Berry retrouve le coefficient  $c_2$  pour GUE, mais, les approximations réalisées pour dériver l'expression du  $\Delta_3$  ne lui permettent pas d'obtenir le bon coefficient  $c_1$  pour GOE.

Malgré les nombreuses évidences justifiant l'applicabilité de la Théorie des Matrices Aléatoires à *la* Wigner aux systèmes chaotiques ([39] pages 314-320), une preuve complète est toujours recherchée.

## L'explosion des expériences analogues

Bien que les billards quantiques aient été intensivement utilisés lors des travaux numériques et théoriques tout au long des années 80, aucune expérience n'est apparue sur ces systèmes pendant cette période. Les seules expériences dans le domaine provenaient de la Physique Nucléaire [40], nécessitant une lourde instrumentation. Par la suite, guidées par des études théoriques et numériques sur l'atome d'hydrogène en champ électrique ou magnétique intense [41, 42], des expériences en Physique Atomique ont commencé à se développer [43]. C'est seulement à la fin des années 80 que de nombreuses expériences modélisant des billards quantiques ont commencé à émerger. En utilisant l'analogie formelle entre l'équation de Schrödinger stationnaire (1.7) et l'équation d'Helmholtz, omniprésente en Physique Ondulatoire, le domaine du Chaos Quantique a pu s'étendre au Chaos Ondulatoire<sup>7</sup>. Les prédictions théoriques sur les statistiques spectrales et les fonctions propres ont alors pu être testées à partir de systèmes acoustiques [5], électromagnétiques [6], dans des fluides [44] et en optique guidée [45]. Mais, pour confronter les prédictions théoriques des systèmes ondulatoires à la Théorie des Matrices Aléatoires, il est nécessaire que le système expérimental étudié soit très faiblement couplé à l'extérieur, pour être considéré comme fermé. Les nombreux résultats expérimentaux, obtenus dans le régime de couplage faible, ont tous contribué à prouver que la Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner décrit très bien les propriétés statistiques des systèmes ondulatoires chaotiques fermés.

Il est tout à fait remarquable de constater que les Matrices Aléatoires, qui ont beaucoup apporté au domaine du Chaos Ondulatoire, sont des objets mathématiques qui apparaissent aussi dans d'autres domaines de la Physique Théorique, tels que la Chromodynamique Quantique, la Gravité Quantique bi-dimensionnelle, la Théorie des Cordes, etc. (voir [46] et références incluses). Ces quelques exemples illustrent le fait que les Matrices Aléatoires se sont rapidement développées depuis leur apparition et sont maintenant devenues un objet mathématique quasiment incontournable en Physique.

## 1.2 La matrice $S$

Comme nous l'avons déjà laissé entendre, le couplage avec l'extérieur, omniprésent dans les systèmes physiques, doit être pris en compte pour décrire précisément un système ondulatoire. En effet, que ce soit dans le domaine spectral ou dans le domaine spatial, le couplage va induire de profondes modifications par rapport au cas idéal d'un système fermé. Comme la Théorie des Matrices Aléatoires *à la* Wigner est construite en considérant

---

<sup>7</sup>Le lecteur intéressé par une présentation détaillée du Chaos Ondulatoire pourra, par exemple, consulter l'ouvrage de H.-J. Stöckmann [7].

le système comme isolé, celle n'est donc plus adaptée pour caractériser les statistiques de systèmes chaotiques ouverts : une nouvelle approche est nécessaire. La communauté s'est alors efforcée de développer un formalisme théorique décrivant les systèmes ouverts et permettant l'étude de leurs propriétés statistiques. D'un point de vue expérimental, la manière de sonder la structure interne du système est générique : on envoie des ondes dans le système, elles interagissent avec le milieu et excitent des états liés, puis, au bout d'un certain temps, les ondes sortent du système et sont alors analysées : c'est un *simple* processus de diffusion (Fig. 1.6). Il paraît donc naturel de décrire les systèmes ouverts par la Théorie de la Diffusion ([47] pages 893-949), dont un élément clef est la matrice de diffusion  $S$ .

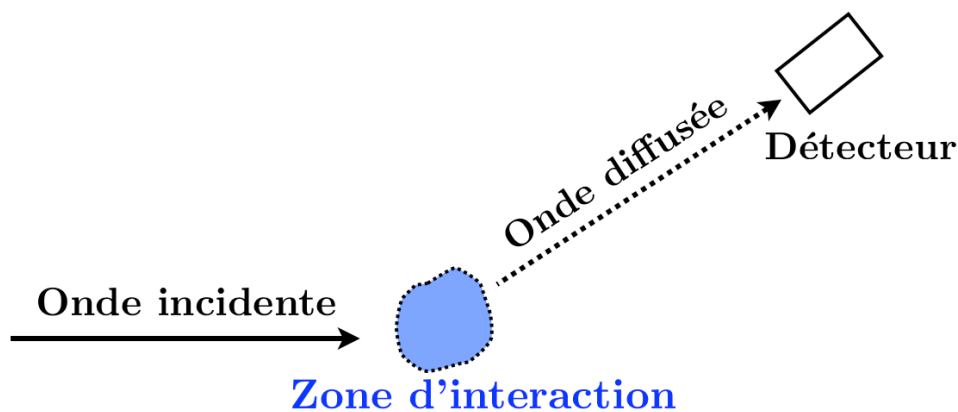


FIG. 1.6 – Schéma d'un processus de diffusion.

A partir de quelques exemples, nous verrons tout d'abord que les systèmes ouverts peuvent toujours être vus comme donnant lieu à des processus de diffusion et que les différents mécanismes de couplage avec l'environnement peuvent être modélisés de manière unifiée, par l'intermédiaire de canaux *fictifs*. Puis, nous montrerons que la matrice  $S$  donne accès aux énergies propres, aux largeurs et aux champs associés aux résonances des systèmes ondulatoires ouverts. Enfin, ce formalisme permettra de décrire les propriétés statistiques des systèmes ondulatoires chaotiques en y incorporant les concepts de la Théorie des Matrices Aléatoires.

### 1.2.1 Modélisation du processus de diffusion

Dans le formalisme de la matrice  $S$ , le couplage du système avec l'extérieur est modélisé sous la forme de canaux fictifs, par lesquels les ondes rentrent et sortent de la zone d'interaction. Hors de cette zone, les ondes se propagent librement et sont donc unique-

ment caractérisées par leur énergie<sup>8</sup>, et leur état interne<sup>9</sup> telle que leur polarisation, leur moment angulaire, leur spin etc. Dans ce formalisme, à chaque structure interne possible correspond un canal fictif, ils forment donc une base sur laquelle peuvent se décomposer les ondes entrantes et sortantes. Pour illustrer les notions de canaux et de zone d'interaction, nous allons considérer quelques exemples de systèmes physiques ouverts appartenant au domaine du Chaos Ondulatoire.

**Les cavités électromagnétiques.** Ces cavités constituent des systèmes expérimentaux modèles pour l'étude du Chaos Ondulatoire [7]. Dans ces expériences, le processus de mesure est réalisé en connectant la cavité à un analyseur de réseaux par l'intermédiaire d'antennes coaxiales *quasi* ponctuelles. L'ensemble de ce dispositif permet, d'une part, d'envoyer un champ électromagnétique dans la cavité à l'aide d'une antenne émettrice, et, d'autre part, de mesurer le champ sortant de la cavité par l'intermédiaire d'antennes réceptrices. Quand les ondes rentrent dans la cavité, elles peuvent, selon leur fréquence, interagir fortement avec le milieu et exciter des résonances : c'est la zone d'interaction. De la même manière que les ondes rentrent dans le système par l'antenne émettrice, elles en sortent par les antennes reliées à la cavité. Cependant, les antennes ne sont pas les seules responsables du couplage avec l'environnement. En effet, même si le matériau constituant les parois de la cavité est généralement un bon conducteur, la conductivité du matériau reste finie et l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la cavité est dissipée par les pertes ohmiques. Ainsi, la cavité est couplée à l'extérieur par le processus de mesure et par l'absorption (Fig. 1.7). Comme les antennes sont *quasi* ponctuelles *i.e.* monomodes, les ondes s'y propageant ne possèdent pas de structure interne et sont uniquement définies par leur fréquence, à chaque antenne correspond donc un canal, qui peut s'identifier à un canal physique. L'absorption est, quant à elle, modélisée par des canaux fictifs, dont le nombre sera explicité un peu plus loin.

**Les points quantiques.** Dans ces systèmes, des électrons sont confinés dans une petite région de l'espace, de l'ordre du micromètre (Fig. 1.8). Le point quantique, qui s'assimile à la zone d'interaction, est couplé à des réservoirs à électrons par des *points de contacts*. En appliquant une différence de potentiel aux réservoirs, un électron est injecté dans le système par l'intermédiaire d'un point de contact, puis, après un certain temps, en sort. Les points de contact peuvent être vus comme des *guides d'ondes* de largeur finie possédant un certain nombre de modes transverses, caractérisés par un nombre quantique.

---

<sup>8</sup>Par leur fréquence, pour les ondes classiques.

<sup>9</sup>En Mécanique Quantique, l'état interne est caractérisé par un jeu de nombres quantiques.

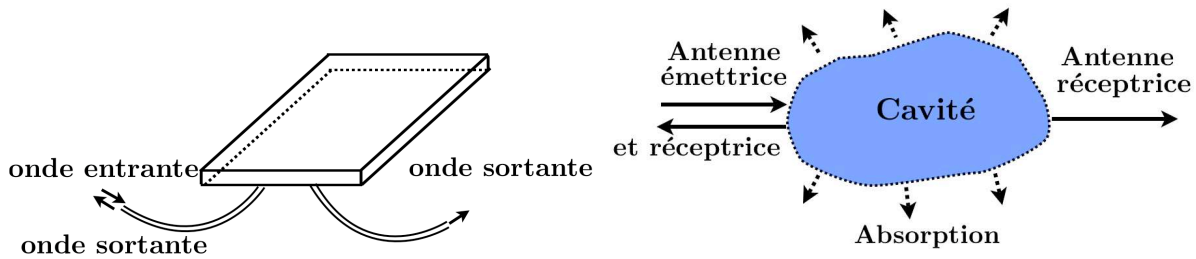


FIG. 1.7 – A gauche, une cavité électromagnétique connectée à deux antennes (une antenne émettrice et deux réceptrices) par lesquelles les ondes entrent et sortent de la la cavité. A droite, la représentation d'une cavité électromagnétique dans le formalisme de la matrice  $S$  : la cavité s'assimile à la zone d'interaction, les antennes et les pertes par absorption sont modélisées sous forme de canaux. A chaque antenne *quasi* ponctuelle est associée un canal de couplage, les pertes par absorptions sont, elles, représentées par des canaux fictifs.

A chaque mode transverse sera associé un canal fictif.

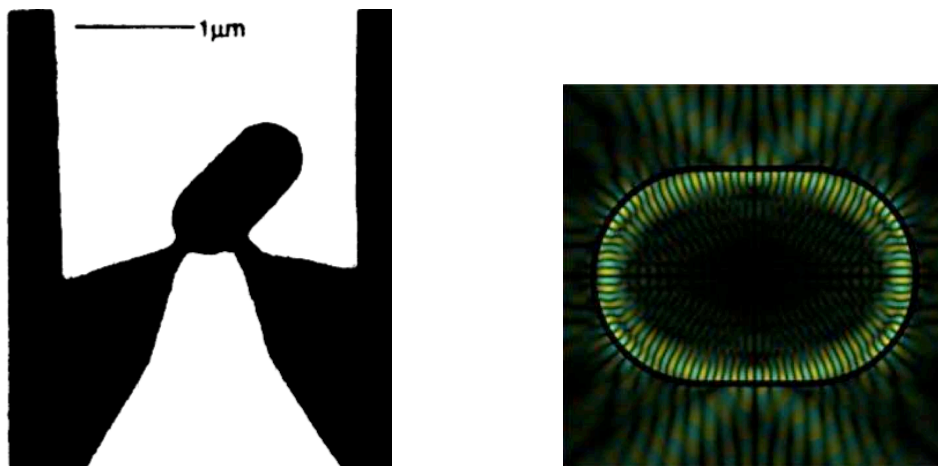


FIG. 1.8 – A gauche, un point quantique bi-dimensionnel de forme chaotique connecté à deux points de contact [48], les points de contact sont vus comme des guides d'ondes dans lesquels plusieurs modes transverse apparaissent. A droite, le champ associé à une résonance d'une cavité microlaser de forme chaotique, le rayonnement fortement anisotrope est caractéristique du comportement chaotique.

**Les cavités microlasers.** Ce type de laser exploite la réflexion totale interne de sorte que les ondes arrivant aux frontières intérieures de la cavité avec un grand angle de réflexion sont complètement réfléchies et restent donc confinées dans la cavité. La forme

du champ subsistant a ainsi une forme particulière : l'intensité est concentrée sur les bords de la cavité, on parle alors de modes de galeries (Fig. 1.8). Depuis une dizaine d'années, ces systèmes sont étudiés par la communauté du Chaos Ondulatoire aussi bien d'un point de vue fondamental que du point de vue des applications [49, 50] : la forme du champ induit une direction d'émission fortement anisotrope, comme le montre la Fig. 1.8. Les cavités microlasers sont couplées à l'environnement par la pompe, assimilée à un unique canal de couplage dans le cas d'un faisceau *quasi* ponctuel, et les pertes liées aux conditions radiatives sur les bords sont modélisées par des canaux fictifs.

**Résumé.** Comme nous l'avons vu à partir de quelques exemples, un système n'est, en toute rigueur, jamais fermé. Que ce soit par le processus d'injection des ondes dans le système, par le processus de mesure, où encore par l'absorption inhérente au milieu, le système est inévitablement couplé à l'extérieur et ce couplage doit être pris en compte pour décrire finement un système ondulatoire confinant. De plus, nous avons illustré le fait que les systèmes ouverts peuvent toujours être abordés via un problème de diffusion.

### 1.2.2 Le formalisme de la matrice $S$

La représentation du couplage avec l'extérieur en termes de canaux fictifs va permettre d'obtenir une expression de la matrice  $S$  dont les pôles donneront accès aux énergies propres, aux largeurs et aux champs des résonances.

#### Définition de la matrice $S$

De manière générale, il est clair que les états liés du système, excités par une onde entrante, vont fortement dépendre de l'énergie et de l'état interne de celle-ci. De même, l'énergie et l'état interne de l'onde sortante dépendent évidemment des états liés qui se sont désexcités. En analysant les caractéristiques des ondes entrantes et sortantes, on obtient donc des informations sur le système sondé. C'est dans cet esprit qu'a été introduite la matrice  $S$ , qui relie linéairement les amplitudes des ondes entrantes et sortantes. Ainsi, pour un système connecté à  $M$  canaux de couplage, on définit les vecteurs de dimension  $M$  :  $\mathbf{A}(E)$  et  $\mathbf{B}(E)$ , contenant respectivement les amplitudes des ondes entrantes et sortantes à une énergie  $E$ , décomposées dans la base des canaux :

$$\mathbf{A}(E) = (A_{c=1}(E), \dots, A_{c=M}(E))^T, \quad \mathbf{B}(E) = (B_{c=1}(E), \dots, B_{c=M}(E))^T, \quad (1.8)$$



La matrice de diffusion  $S(E)$ , de taille  $M \times M$ , se définit alors comme :

$$\mathbf{B}(E) = S(E)\mathbf{A}(E). \quad (1.9)$$

Nous allons maintenant obtenir l'expression de la matrice  $S$  associée à un système ondulatoire ouvert. Partons d'un système fermé possédant  $N$  niveaux et décrit par un hamiltonien<sup>10</sup>  $H$ . En ouvrant le système par l'intermédiaire de  $M$  canaux de couplage, l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  du système ouvert complet, c'est-à-dire l'hamiltonien décrivant le système et le couplage avec l'extérieur, s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{n,p=1}^N |n\rangle H_{np} \langle p| + \sum_{c=1}^M \int dE |\omega_c(E)\rangle E \langle \omega_c(E)| \\ & + \sum_{c=1}^M \sum_{n=1}^N \int dE \left[ |n\rangle V_n^c \langle \omega_c(E)| + |\omega_c(E)\rangle (V_n^c)^* \langle n| \right] \quad (1.10) \end{aligned}$$

Le premier terme représente l'hamiltonien du système fermé, dont les valeurs sont quantifiées et les vecteurs propres  $\{|n\rangle\}$  sont normalisés par la condition :  $\langle n|p\rangle = \delta_{np}$ . Le deuxième terme représente l'hamiltonien des canaux dans lesquels les ondes entrante et sortante se décomposent sur les vecteurs  $\{|\omega_c(E)\rangle\}$  avec  $c = 1, \dots, M$  et normalisés par la condition :  $\langle \omega_c(E)|\omega_{c'}(E')\rangle = \delta_{cc'}\delta(E - E')$ . Le dernier terme représente le couplage entre la zone d'interaction et les canaux, qui autorise les états liés à se désexciter dans les canaux de couplage et inversement, aux états libres à former des états liés. Ce couplage entre les états liés et les canaux est quantifié par la matrice de couplage  $V \equiv \{V_n^c\}$ , où l'amplitude de couplage  $V_n^c$  relie l'état  $n$  au canal  $c$ . La valeur des amplitudes de couplage dépend évidemment du système et de la nature du couplage. Il est important de noter que l'hamiltonien du système complet (1.10) est défini en effectuant deux approximations. D'une part, les éléments de couplage sont considérés comme indépendants de l'énergie [16]. D'autre part, les couplages directs entre les canaux ne sont pas pris en compte.

### L'hamiltonien effectif

Nous allons maintenant introduire l'expression de la matrice  $S(E)$  obtenue à partir de l'hamiltonien du système complet (1.10). La dérivation étant un peu longue, elle n'est pas présentée ici, le lecteur intéressé par les détails pourra, par exemple, consulter la

---

<sup>10</sup>Nous adoptons par commodité un langage de Mécanique Quantique.

référence [18] aux pages 226-230. La matrice  $S(E)$  se met sous la forme :

$$S(E) = 1 - iV^\dagger \frac{1}{E - H + iVV^\dagger/2} V. \quad (1.11)$$

La matrice de diffusion s'exprime donc en fonction de l'hamiltonien du système fermé  $H$  et de la matrice de couplage  $V$ . En étendant le domaine de définition de l'énergie au plan complexe, la  $n$ ième résonance est caractérisée par l'énergie  $\mathcal{E}_n = E_n - i\Gamma_n/2$ , où  $E_n$  et  $\Gamma_n$  sont respectivement l'énergie propre et la largeur spectrale. Ces résonances sont, par définition, données par les pôles de la matrice de diffusion :  $S(\mathcal{E}_n) \rightarrow \infty$ . A partir de l'expression (1.11), on voit qu'ils correspondent aux valeurs propres d'un opérateur non-hermitien, appelé hamiltonien effectif :

$$\mathcal{H}_{eff} = H - iVV^\dagger/2. \quad (1.12)$$

Cette opérateur est diagonalisable par deux bases distinctes<sup>11</sup>, notées  $\{|L_n\rangle\}$  et  $\{|R_n\rangle\}$  :

$$\langle L_n | \mathcal{H}_{eff} = \mathcal{E}_n \langle L_n |, \quad \mathcal{H}_{eff} | R_n \rangle = \mathcal{E}_n | R_n \rangle. \quad (1.13)$$

L'hamiltonien effectif se met donc sous la forme :  $\mathcal{H}_{eff} = \Omega_R \mathcal{E} \tilde{\Omega}_L$  avec  $\mathcal{E} = \text{diag}(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N)$ ,  $\Omega_R = (|R_1\rangle, \dots, |R_N\rangle)$  et  $\tilde{\Omega}_L = (\langle L_1|, \dots, \langle L_N|)$ . En injectant la relation de fermeture  $\sum_n |R_n\rangle \langle L_n| = \mathbb{I}$  dans l'expression (1.11), les éléments de la matrice  $S$ , données par  $S_{ba}(E) = \langle \omega_b | S(E) | \omega_a \rangle$ , s'écrivent ([51] pages 884-886) :

$$S_{ba}(E) = \delta_{ba} - i \sum_{n=1}^N \frac{\varphi_n^b \phi_n^a}{E - \mathcal{E}_n}, \quad (1.14)$$

avec

$$\phi_n^a = \langle L_n | V | \omega_a \rangle \quad \text{et} \quad \varphi_n^b = \langle \omega_b | V^\dagger | R_n \rangle, \quad (1.15)$$

où  $\phi_n^a$  et  $\varphi_n^b$  représentent les amplitudes du champ de la  $n$ ième résonance entrante par le canal  $a$  et sortante par le canal  $b$  respectivement.

Ainsi, les énergies propres, les largeurs spectrales et le champ associé aux résonances sont décrites par l'opérateur non-hermitien  $\mathcal{H}_{eff}$ . Comme nous le verrons par la suite, cette propriété de non-hermiticité introduira d'importants changements par rapport au cas fermé aussi bien dans le domaine spectral que dans le domaine spatial.

---

<sup>11</sup>La non-hermiticité de l'opérateur  $\mathcal{H}_{eff}$  introduit des relations différentes entre les vecteurs propres et les valeurs propres par rapport à la situation bien connu des opérateurs hermitiens, ce point sera détaillé au chapitre III.

### Pertes homogènes et inhomogènes

Comme l'ont montré J. Barthélémy, O. Legrand et F. Mortessagne [52] dans le cas particulier d'une cavité électromagnétique bi-dimensionnelle, mais généralement applicable à l'ensemble des systèmes ouverts, les différents types de couplage peuvent être séparés en deux catégories, selon leur impact sur les largeurs. Alors que les pertes localisées spatialement, dites inhomogènes, induisent des contributions fluctuantes sur les largeurs selon la résonance considérée, les pertes uniformément réparties sur l'ensemble du système donnent, à haute fréquence et dans une grande gamme de fréquence, une contribution unique aux largeurs des résonances. Ainsi, la largeur totale associée à la  $n$ ième résonance s'écrit  $\Gamma_n = \Gamma^{hom} + \Gamma_n^{inh}$ , où  $\Gamma^{hom}$  et  $\Gamma_n^{inh}$  sont respectivement associées aux pertes homogènes et inhomogènes. Dans la suite de ce chapitre et dans le chapitre III, nous verrons que les deux catégories de pertes affectent les propriétés spatiales du champ de manière complètement différente.

Les pertes homogènes sont définies par nombre de canaux de couplage tendant vers l'infini :  $M_{hom} \rightarrow \infty$  [10]. Dans le cas des pertes inhomogènes, le nombre de canaux associé dépend fortement du mécanisme de perte. Le tableau suivant donne le nombre de canaux associé à différents types de pertes inhomogènes.

Type de couplage	Nombre de canaux associé	Type de canal
Antenne ponctuelle	$M_a = 1$	canal physique
guide d'onde de largeur finie $L$	$M_g = L/(\lambda/2)$	canaux fictifs
guide d'onde de section finie $S$	$M_g = S/(\lambda/2)^2$	canaux fictifs
absorption ponctuelle	$M_p = 1$	canal physique
absorption linéique de longueur $L$	$M_l \propto L/(\lambda/2)$	canaux fictifs
absorption surfacique de surface $S$	$M_s \propto S/(\lambda/2)^2$	canaux fictifs
absorption volumique de volume $V$	$M_v \propto V/(\lambda/2)^3$	canaux fictifs

où  $\lambda$  est la longueur d'onde associée au champ présent dans la zone d'interaction. Notons que dans le cas d'absorption linéique, surfacique, ou volumique, seul l'ordre de grandeur du nombre de canaux est connu [10].

### 1.2.3 Approche statistique

Comme nous venons de le voir, les résonances du système sont décrites par les valeurs propres et les fonctions propres de l'hamiltonien effectif (1.12). En appliquant les idées de E. Wigner, les propriétés statistiques des résonances sont obtenues en considérant  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$

comme une matrice aléatoire non-hermitienne. Comme les statistiques du système fermé sont décrites par la Théorie des Matrices Aléatoires à *la* Wigner, les propriétés statistiques des résonances peuvent être abordées en remplaçant  $H$  par une matrice aléatoire gaussienne appartenant à l'ensemble désiré.

Les éléments de couplage  $V_n^c$  peuvent être considérés comme des variables fixes [16] ou comme des variables aléatoires gaussiennes centrées [53]. Il a été montré que lorsque  $M \ll N$ , ce qui est généralement le cas dans les situations physiques évoquées plus haut, ces deux approches sont équivalentes [54].

Dans la suite de ce manuscrit les éléments de couplage seront choisis, par commodité, comme des variables aléatoires gaussiennes. Ils sont donc uniquement définis par leur covariance :

$$\langle V_n^a V_m^b \rangle = 2\kappa \frac{\Delta}{\pi} \delta_{nm} \delta^{ab}, \quad (1.16)$$

où  $\Delta$  est l'écart moyen entre niveaux, les indices  $n$  et  $m$  correspondent aux résonances et les indices  $a$  et  $b$  aux canaux. La constante de couplage  $\kappa$  détermine le facteur de transmission moyen  $T = 4\kappa/(1 + \kappa)^2$  des canaux ( [55] pages 1933-1934).  $T \ll 1$  correspond à couplage faible et  $T = 1$  à un couplage parfait. A chaque type de couplage sera donc associé un nombre de canaux de perte ainsi qu'un facteur de transmission moyen.

Lorsque les amplitudes de couplage sont des variables aléatoires gaussiennes, la partie non-hermitienne de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  appartient aux ensembles de Wishart. Ces ensembles ont été introduits en 1928 [56], soit bien avant les ensembles de Wigner. Ils sont initialement apparus dans le domaine de l'analyse statistique multivariée. En effet, en considérant  $N$  échantillons constitués chacun de  $M$  variables aléatoires scalaires, l'ensemble de ces données peut être regroupé dans une matrice rectangulaire, noté  $V$ , de taille  $N \times M$ . La matrice de covariance se définit alors par  $\mathcal{W} = VV^\dagger$ ; elle correspond à la partie anti-hermitienne de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ . Non seulement les ensembles de Wishart continuent d'être étudiés d'un point de vue fondamental [57], mais ils apparaissent aussi dans de nombreux domaines, comme la Finance [58], la Matière Condensée [59] et la Chromodynamique Quantique [60–62].

### 1.3 Etat de l'art des propriétés statistiques des systèmes chaotiques ouverts

Le but de cette section est de présenter brièvement les résultats les plus marquants concernant l'hamiltonien effectif et la matrice  $S$ . Comme la bibliographie associée est imposante, j'ai préféré me concentrer sur des résultats ayant été vérifiés expérimentalement. Tout d'abord je considérerai les propriétés statistiques des largeurs des résonances. Puis,

je présenterai brièvement les résultats obtenus sur la matrice  $S$ . Enfin, je m'intéresserai aux propriétés du champ dans la zone d'interaction.

### 1.3.1 Propriétés statistiques des largeurs des résonances

Selon la force du couplage avec l'extérieur, on peut distinguer deux régimes distincts, possédant chacun des caractéristiques propres. Ces régimes s'identifient simplement en comparant la largeur moyenne  $\langle \Gamma \rangle$  avec l'écart moyen entre niveaux  $\Delta$ .

#### Le régime de faible recouvrement modal : $\langle \Gamma \rangle \ll \Delta$

Dans ce régime, les modifications engendrées par le couplage sur le spectre sont si faibles (nulles au premier ordre) que considérer le système comme fermé constitue une bonne approximation : les résonances peuvent, ainsi, être considérées comme isolées. Ce régime a donc souvent été recherché pour vérifier les prédictions théoriques des matrices aléatoires à la Wigner [63, 64] (voir Fig. 1.9). En appliquant la théorie des perturbations au premier ordre à l'hamiltonien effectif, on trouve que les largeurs sont distribuées selon la loi de  $\chi^2$ . Cette prédiction théorique a été vérifiée expérimentalement par H. Alt *et al.* sur une cavité électromagnétique supraconductrice [64]. Dans ce type de cavité, les pertes ohmiques sont complètement négligeables, de sorte que les pertes sont uniquement induites par les antennes (voir Fig. 1.9).

#### Le régime de fort recouvrement modal : $\langle \Gamma \rangle \sim \Delta$ et $\langle \Gamma \rangle \gg \Delta$

**Statistique des largeurs spectrales.** Lorsque la valeur moyenne du couplage devient comparable à l'écart moyen, les résonances commencent à se recouvrir. D'un point de vue un peu plus technique, la théorie des perturbations ne s'applique plus, la diagonalisation de l'hamiltonien effectif devient alors extrêmement compliquée, du fait, qu'en général,  $H$  et  $iVV^\dagger/2$  ne commutent pas. L'obtention de la distribution des largeurs, dérivée en utilisant la Super-symétrie, introduite par K. Efetov [65], s'est révélée être un véritable tour de force mathématique.

La distribution des largeurs a tout d'abord été obtenue théoriquement en 1997 dans le cas de systèmes dont la limite fermée est décrite par GUE par Y. Fyodorov et H.-J. Sommers [55]. Puis, en 1999, H.-J. Sommers, Y. Fyodorov et M. Titov aboutissent à la distribution des largeurs pour GOE [66]. Cette dernière prédiction a été vérifiée récemment dans une cavité électromagnétique à température ambiante par U. Kuhl *et al.* [67], Fig. 1.10. Comme la largeur  $\Gamma$  associée aux pertes ohmiques augmente comme la racine carrée de la fréquence, l'exploration du régime haute fréquence permet d'explorer

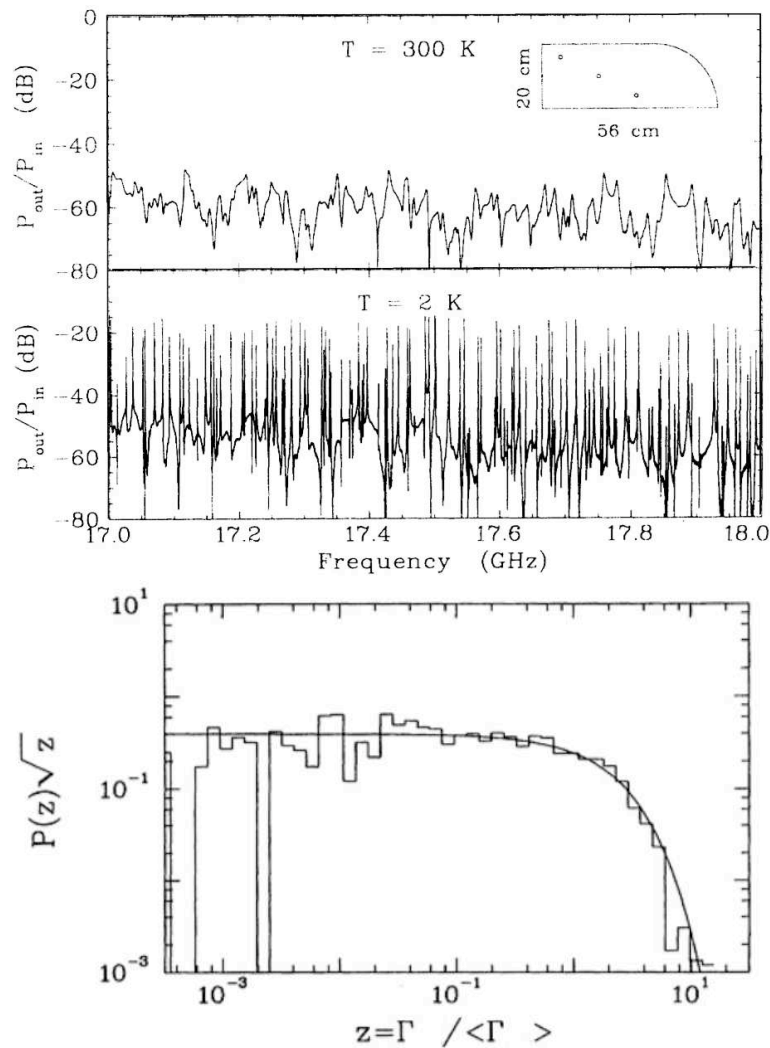


FIG. 1.9 – La première figure montre le spectre de la cavité électromagnétique en forme de quart de stade (voir insert), en haut à température ambiante en bas à  $T = 2.17$ K [63]. La seconde figure montre la distribution des largeurs  $z$  normalisées  $\langle z \rangle = 1$  dans le cas d'un seul canal de couplage [64]. En histogramme, les résultats expérimentaux obtenues avec une cavité électromagnétique supraconductrice, en trait plein la prédiction théorique.

celui du fort recouvrement modal. Il est important de noter que ce travail expérimental, qui confirme pleinement les prédictions théoriques de H.-J. Sommers *et al.*, a été le premier à explorer les statistiques associées aux pôles de la matrice  $S$  dans le régime de couplage fort.

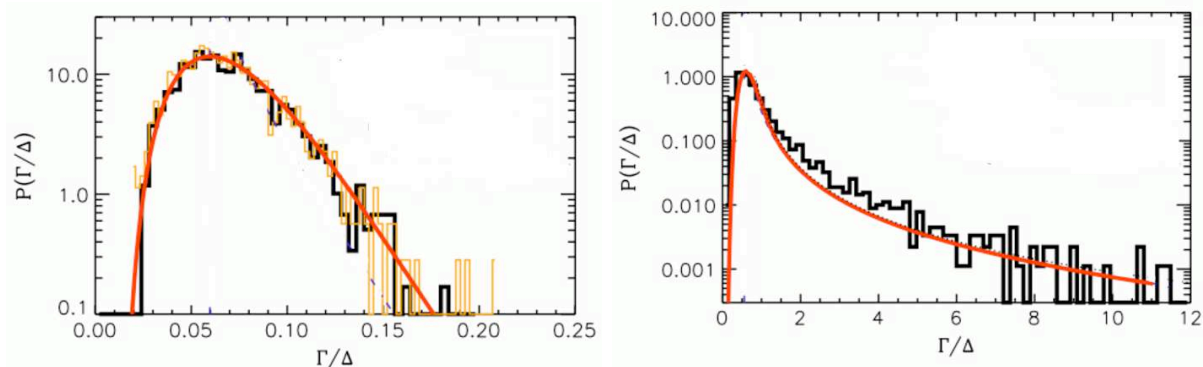


FIG. 1.10 – Distributions des largeurs normalisées par l'écart moyen, en noir les résultats expérimentaux, en rouge les prédictions théoriques. Les distributions ont été obtenues dans deux gammes de fréquence différentes. A gauche pour une gamme de fréquence de 4 à 5 GHz, à droite pour une gamme de fréquence de 14.7 à 15.7 GHz.

**Le phénomène de piégeage des résonances.** Dans le régime de couplage fort, un changement radical se produit : les résonances se séparent en deux groupes dans le plan complexe (Fig. 1.11). Cette séparation peut se comprendre aisément à partir de l'hamiltonien effectif (1.12) : en couplage fort, c'est l'hamiltonien du système fermé qui peut être vu comme de la partie anti-hermitienne. Comme la partie anti-hermitienne est un opérateur de rang égal à  $M$ , seules  $M$  largeurs auront une valeur non nulle. Ainsi,  $M$  résonances vont devenir instables *i.e.* acquérir de grandes largeurs et  $N - M$  résonances vont voir leur largeur fortement diminuer, allant jusqu'à tendre vers 0. Ce phénomène, connu sous le nom de piégeage des résonances, a été abondamment étudié [53, 54, 68–73].

Un cas particulier, que je ne ferai que mentionner, mais qui a été étudié intensivement expérimentalement correspond aux *résonances de Fano*, pour lesquelles seules deux résonances interagissent fortement. Initialement introduit en Physique Nucléaire [74], les résonances de Fano sont apparues en Physique Mésoscopique [75, 76], en Physique Atomique [77], et en Electromagnétisme [78].

**Résumé.** L'influence du couplage avec l'extérieur sur les largeurs spectrales et les propriétés statistiques de celles-ci sont parfaitement décrits du régime de couplage faible au régime de couplage fort.

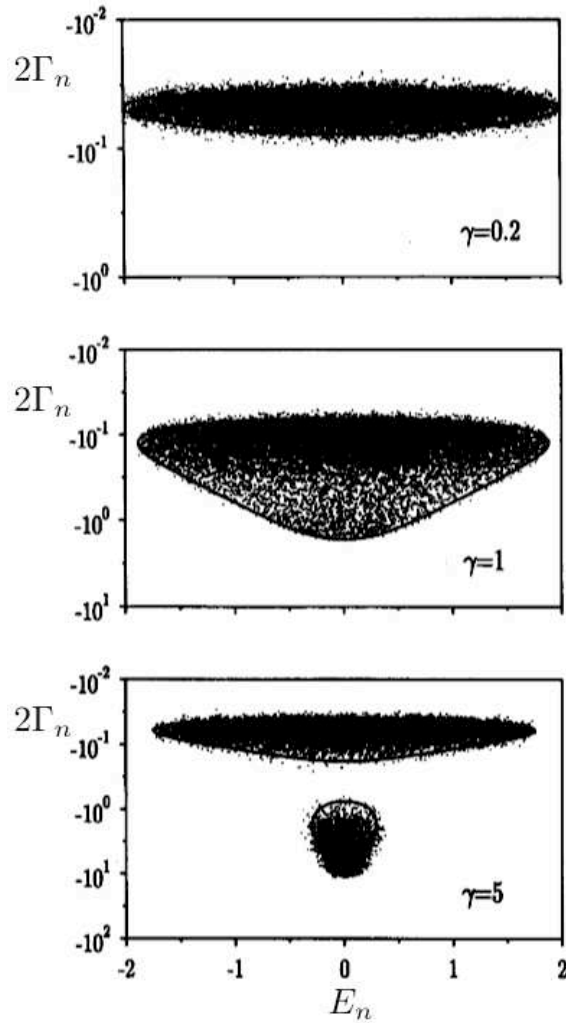


FIG. 1.11 – Répartition des valeurs propres de l'hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = H - i\gamma VV^\dagger$  pour trois différentes forces de couplage  $\gamma$  avec  $m = M/N = 0.25$  fixé. La séparation des résonances en deux échelles de temps caractéristiques est visible pour  $\gamma = 5$ .

### 1.3.2 Propriétés statistiques de la matrice $S$

La matrice  $S$  peut aussi être considérée comme un objet à part entière et la communauté s'est, notamment, fortement intéressée à décrire ses propriétés statistiques. Comme les résultats expérimentaux sont restreints au cas de systèmes dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps ( $\beta = 1$ ) et à un seul canal de perte, nous présenterons uniquement les résultats théoriques associés à ces situations. Rappelons que pour un unique canal la matrice  $S$  se réduit à un scalaire, simplifiant grandement son étude.



Statistique de la matrice  $S$  de systèmes chaotiques ouverts sans absorption

Lorsqu'il n'y a pas d'absorption, l'énergie est conservée, les courants entrant et sortant dans la zone d'interaction sont égaux. La matrice  $S$  est alors unitaire  $SS^\dagger = \mathbb{I}$  ([7] page 213), et ses valeurs propres, notées  $e^{i\theta}$ , sont réparties dans le plan complexe sur un cercle de rayon unité. Deux cas différents doivent être distingués, selon la valeur de la transmission  $T$  du canal (1.12).

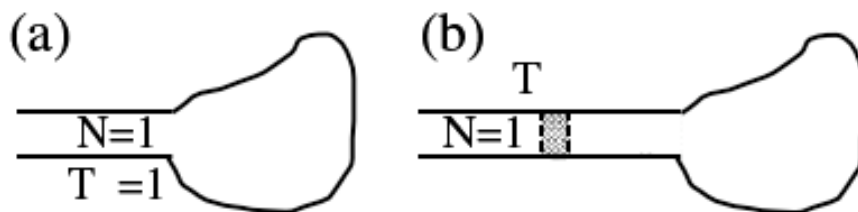


FIG. 1.12 – A gauche, une cavité attachée à un canal idéal ( $T = 1$ ). A droite, une cavité attachée à un canal non idéal ( $T < 1$ ), l'onde a une probabilité  $1 - T$  d'être directement réfléchi sans pénétrer dans la cavité.

**Couplage idéal :  $T = 1$ .** En appliquant les mêmes méthodes que pour la construction des ensembles gaussiens, F. Dyson a introduit les ensembles circulaires décrivant les propriétés statistiques de la matrice  $S$  dans le cas de systèmes chaotiques couplés à l'extérieur par des canaux parfaits ([7] pages 139-144). Dans le cas d'un canal de perte, les valeurs propres de  $S$  sont uniformément réparties sur le cercle de rayon unité :  $P(\theta) = 1/(2\pi)$  et la moyenne d'ensemble de  $S$  est nulle :  $\langle S \rangle = 0$ .

**Couplage non idéal :  $T < 1$ .** Dans ce cas, la valeur moyenne de  $S$ , qui est directement reliée à la transmission du canal  $T = 1 - |\langle S \rangle|^2$ , est non nulle [79]. Ainsi, l'onde provenant du canal a une probabilité  $|\langle S \rangle|^2$  d'être directement réfléchi sans rentrer dans la cavité. La distribution de l'angle  $\theta$  est connue pour être décrite par le *Poisson kernel* qui, pour  $M = 1$  [80], s'écrit :

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |\langle S \rangle|^2}{|S - \langle S \rangle|^2}, \quad S = e^{i\theta}. \quad (1.17)$$

Cette expression montre que la distribution de l'angle est uniquement caractérisée par la moyenne d'ensemble de  $S$ .

### Statistique de la matrice $S$ de systèmes chaotiques ouverts avec absorption

En présence d'absorption  $\gamma$ , une partie de l'énergie est irrémédiablement perdue dans les canaux fictifs (Fig. 1.13). La non conservation de l'énergie rend la matrice  $S$  sous unitaire : les valeurs propres de  $S$  se mettent donc sous la forme  $R_n e^{i\theta_n}$  où les coefficients de réflexion  $R_n$  sont compris entre 0 et 1. Ces coefficients sont reliés à la probabilité de non retour du champ dans le canal  $\tau_n = 1 - R_n^2$ , donnant la probabilité que le champ fuie dans les canaux fictifs [81] (Fig. 1.13).

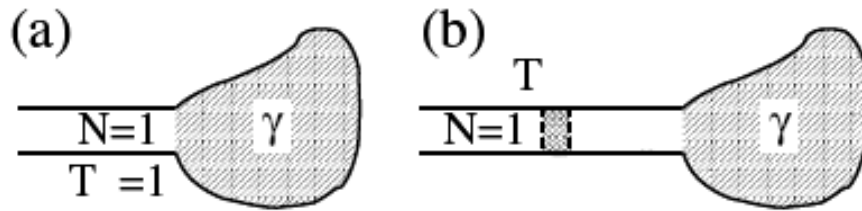


FIG. 1.13 – Cavity contenant une absorption uniforme  $\gamma$  et attachée à un canal. A gauche, pour un canal idéal ( $T = 1$ ), à droite pour un canal non idéal ( $T < 1$ ).

La distribution des  $R_n$ , dans le cas d'un canal unique, a d'abord été obtenue dans le régime de couplage fort par E. Kogan *et al.*, en utilisant un modèle basé sur l'entropie extrême [82]. Puis, C. Beenakker et P. Brouwer ainsi que D. Savin et H.-J. Sommers se sont intéressés à la distribution des  $R_n$  pour une faible absorption [83, 84].

Les prédictions analytiques ont ensuite été vérifiées dans le cas d'une forte absorption, en 2003, par R. Méndez-Sanchez *et al.* dans une cavité électromagnétique [85]. Puis, en 2005, toujours dans le cas particulier d'un seul canal de perte, U. Kuhl *et al.* [86] obtiennent la distribution de probabilité de la matrice  $S$  et des angles dans tous les régimes de couplage :

$$P(\theta) \propto \frac{e^{-\alpha/(1-|S|^2)}}{(1-|S|^2)^{5/2}} \left( \frac{1 - \langle S \rangle^2}{|1 - S \langle S \rangle|^2} \right)^2 \left[ A\alpha^{-1/2} + B(1-|S|^2)^{1/2} \right], \quad S = \sqrt{R}e^{i\theta}. \quad (1.18)$$

avec  $\alpha = \gamma/2$ ,  $A = \alpha(e^\alpha - 1)$  et  $B = (1/\alpha - e^\alpha)$ . La prédiction théorique (1.18) est confrontée, à des simulations numériques de matrices aléatoires non-hermitiennes, ainsi qu'à des résultats expérimentaux obtenus avec une cavité électromagnétique connectée à une antenne (Fig. 1.14).

Les résultats numériques et expérimentaux sont en parfait accord avec les prédictions théoriques, sauf dans le cas d'un couplage quasi parfait. Cette déviation est expliquée par

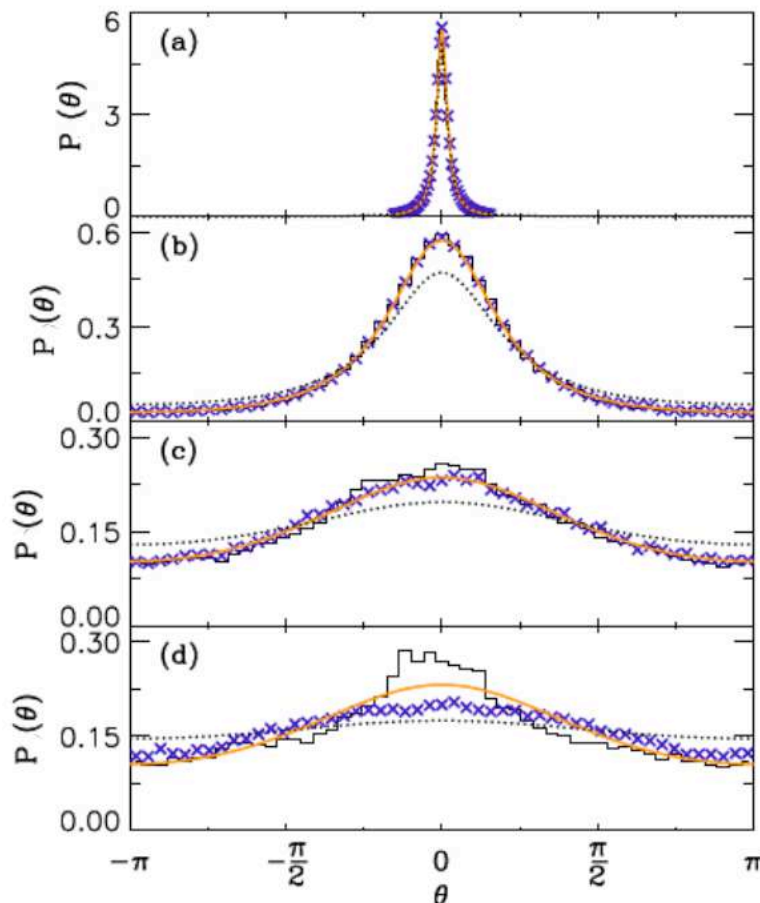


FIG. 1.14 – Distribution de l'angle  $P(\theta)$  pour quatre différents régimes de couplage et d'absorption à  $R$  fixé. (a)  $\gamma = 0.56$ ,  $T = 0.116$  (faible absorption, faible couplage), (b)  $\gamma = 2.42$ ,  $T = 0.754$ , (c)  $\gamma = 8.4$ ,  $T = 0.989$  et (d)  $\gamma = 0.48$ ,  $T = 0.998$  (forte absorption, couplage quasi parfait). En trait plein la forme théorique prenant en compte l'absorption (1.18), en pointillé la distribution associée au *Poisson kernel* (1.17), en croix les simulations numériques et en histogramme les résultats expérimentaux. La figure est extraite de la référence [86].

l'extrême sensibilité de la distribution  $P(\theta)$  pour de très faibles modifications du facteur de transmission quand celui-ci est quasiment égal à un 1.

**Résumé.** Ces résultats montrent que les propriétés statistiques de systèmes chaotiques peuvent être considérées directement à partir de la matrice  $S$ . Cependant, bien que le cas à un canal de perte est, à l'heure actuelle, parfaitement compris, l'extension du *Poisson kernel* au cas avec absorption et pour un nombre de canaux quelconque reste un problème non résolu [87].

### 1.3.3 Propriétés statistiques du champ dans la zone d'interaction

Dans la suite, je détaillerai les principaux résultats obtenus par la communauté sur les systèmes ondulatoires chaotiques ouverts dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps. Je montrerai tout d'abord que les pertes inhomogènes induisent des courants et transforment le champ réel d'un système fermé en une grandeur complexe. Puis, les propriétés statistiques du champ complexe seront abordées en adoptant une approche semi-classique.

#### Effets des pertes homogènes et inhomogènes sur le champ

Nous avons déjà distingué ces deux catégories de pertes en soulignant qu'elles affectent les largeurs des résonances de manières différentes. Nous allons maintenant, à partir d'exemples extrêmement simples, nous intéresser à leurs effets respectifs sur le champ.

**Rappel sur la représentation complexe.** En physique ondulatoire, qu'il s'agisse d'un champ décrivant les vibrations d'une membrane, les déplacements d'un fluide, ou encore les composantes des champs électrique et magnétique, les grandeurs physiques sont réelles et sont caractérisées par un champ scalaire, noté  $\Psi(\vec{r}, t)$ . Cependant, il est souvent utile de passer en représentation complexe, le champ se mettant alors sous la forme :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] , \quad (1.19)$$

où la composante spatiale du champ  $\phi(\mathbf{r})$  est, en général, complexe. Outre un intérêt purement technique, cette représentation permet de séparer les composantes spatiale et temporelle du champ.

**Vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités.** Il est bien connu que les fonctions propres de ce système sont solutions de l'équation d'Helmholtz et s'écrivent  $\Psi_n(x, t) = \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi)$  où  $k_n$  est le nombre d'onde,  $\omega_n$  est la pulsation et  $\varphi$  est une phase liée au choix de l'origine des temps. En passant en représentation complexe (1.19), les fonctions propres se mettent sous la forme :

$$\Psi_n(x, t) = \text{Re} [\sin(k_n x)e^{-i\varphi}e^{-i\omega_n t}] , \quad \text{avec} \quad \phi(x) = \sin(k_n x)e^{-i\varphi} . \quad (1.20)$$

Bien que  $\phi(x)$  soit complexe, une rotation de phase globale appropriée :  $\phi(x) \rightarrow \phi(x)e^{i\varphi}$ , rend la composante spatiale du champ réelle. Physiquement, cette rotation de phase cor-

respond simplement à un changement de l'origine des temps.

**La vibration d'une corde amortie.** Considérons maintenant les vibrations d'une corde fixée à ses deux extrémités et soumise à une force de frottement fluide *i.e.* possédant uniquement des pertes homogènes. En résolvant l'équation d'onde du système, les fonctions propres, après la rotation de phase appropriée, se mettent sous la forme :

$$\Psi_n(x, t) = \sin(k_n x) e^{-\Gamma t/2} \operatorname{Re} [e^{-i\omega_n t}] , \quad \text{avec} \quad \phi(x) = \sin(k_n x) . \quad (1.21)$$

où  $\Gamma$  est la largeur liée aux pertes homogènes. La composante spatiale associée aux résonances est donc identique à celui du système fermé (1.20) : les pertes homogènes ne modifient pas la composante spatiale du champ.

**La vibration d'une corde semi-infinie.** Pour voir l'effet des pertes inhomogènes sur le champ, nous allons prendre l'exemple d'une corde semi-infinie où un dispositif mécanique, placé au bout de la corde, absorbe une partie de son énergie. Ainsi, une onde incidente progressive de la forme  $\cos(\omega t - kx)$  qui rencontre le bout de la corde ne sera que partiellement réfléchi. Le champ, composé de l'onde incidente et de l'onde réfléchi, s'écrit alors :  $\Psi(x, t) = \cos(\omega t - kx) + r \cos(\omega t + kx)$ , où  $r \leq 1$  est le coefficient de réflexion. En écrivant le champ en notation complexe on trouve :

$$\Psi(x, t) = \operatorname{Re} \left[ \left( (1-r)e^{ikx} + 2r \cos(kx) \right) e^{-i\omega t} \right] , \quad \phi(x) = (1-r)e^{ikx} + 2r \cos(kx) . \quad (1.22)$$

Lorsque l'onde est entièrement réfléchi à l'interface ( $r = 1$ ), il n'y a pas de pertes inhomogènes et le champ est réel. Par contre, dès que le coefficient de réflexion est plus petit que 1, la composante spatiale  $\phi(x)$  se décompose en une partie stationnaire réelle :  $2r \cos(kx)$  et une partie progressive complexe :  $(1-r)e^{ikx}$ . Il en ressort que l'introduction de pertes inhomogènes transforme la partie spatiale du champ, initialement réelle pour  $r = 1$ , en une grandeur complexe du fait de la présence de la partie progressive *i.e.* de courants.

### **De l'hypothèse de Berry à l'approche de Pnini et Shapiro**

Nous allons maintenant nous intéresser à l'effet de pertes inhomogènes sur des systèmes ondulatoires chaotiques. Je décrirai tout d'abord les propriétés statistiques du champ d'un système chaotique fermé, puis, d'un système ouvert contenant des courants de pertes.

**L'hypothèse de Berry.** Les propriétés statistiques du champ pour un système fermé invariant par renversement du sens du temps ont été obtenus par M. Berry, en 1977, à

partir d'arguments géométriques [88]. Les multiples réflexions des rayons sur les parois d'un système chaotique donnent l'intuition que le champ en un point peut se concevoir comme la superposition d'un grand nombre  $N$  d'ondes stationnaires dont les directions sont aléatoires. Le composante spatiale du champ excité à la fréquence  $\omega$  s'écrit alors :

$$\phi_{Berry}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} + \theta_n). \quad (1.23)$$

où  $\mathbf{k}_n$  et  $\theta_n$  sont des variables aléatoires, les nombres d'onde satisfaisant à la contrainte  $|\mathbf{k}_n| = \omega/c$ . En appliquant le théorème de la limite centrale à l'expression (1.23), Berry a montré que le champ d'un système fermé satisfait une statistique de type speckle, le champ peut donc être vu comme une variable aléatoire gaussienne centrée (voir [7] pages 230-233). Le comportement gaussien du champ a été vérifié tout d'abord numériquement par S. MacDonald et A. Kaufman [89] (Fig. 1.15) puis expérimentalement, sur des ondes de surface par R. Blümel *et al.* [90], sur des ondes sonores par P. Chinnery *et al.* [44], et en optique guidée par V. Doya *et al.* [45]. Il est important de noter que pour un système dont les pertes sont uniquement homogènes, la composante spatiale du champ correspond à celle du système fermé, celle-ci est donc toujours décrite par l'hypothèse de Berry.

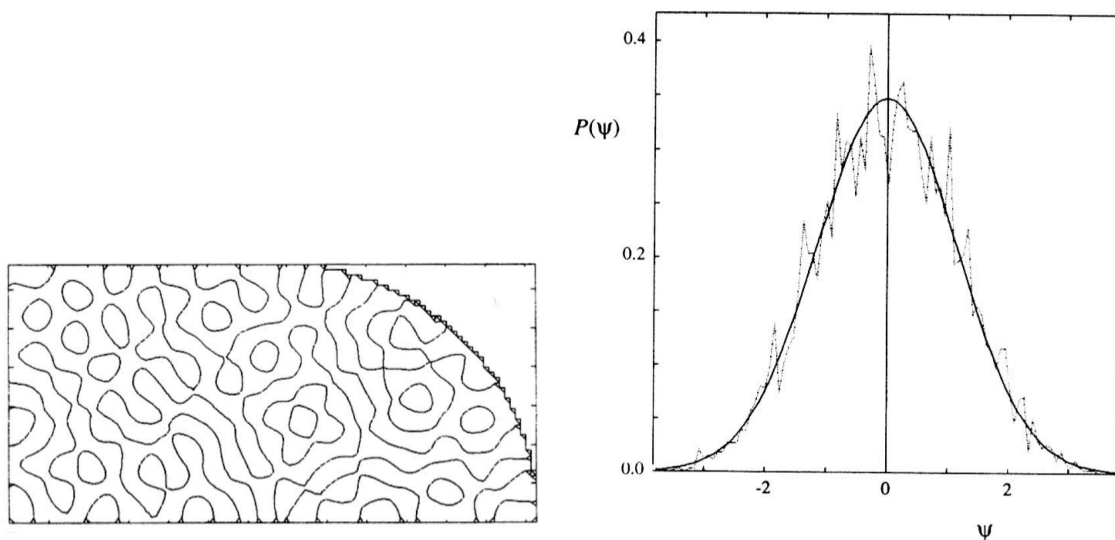


FIG. 1.15 – A gauche lignes nodales du champ d'une cavité chaotique fermée, un comportement de type speckle est clairement visible. A droite, la distribution de la partie spatiale associée, noté  $\Psi$ . Les figures sont extraites de la référence [89].

**L'approche de Pnini et Shapiro.** Dans le cas d'un système ouvert contenant des pertes inhomogènes, R. Pnini et B. Shapiro ont généralisé l'hypothèse de Berry en ajoutant à la partie stationnaire une composante progressive [91]. De manière à prendre en compte le caractère ergodique du système, la composante progressive est définie comme une superposition d'un grand nombre d'ondes planes de directions aléatoires et de nombres d'onde  $|\mathbf{k}_n|$  identiques, ainsi :

$$\phi_{PS}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N(1 + \epsilon^2)}} \sum_{n=1}^N \left( \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} + \theta_n) + \epsilon e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} + i\theta'_n} \right), \quad (1.24)$$

où  $\theta_n$  et  $\theta'_n$  sont des angles uniformément distribués entre 0 et  $2\pi$  et  $\epsilon$  paramétrise la composante progressive du champ. Un champ purement stationnaire correspond donc à  $\epsilon = 0$  et un champ purement progressif à  $\epsilon \rightarrow \infty$ .

Comme le champ est complexe :  $\phi_{PS}(\mathbf{r}) = \phi_R(\mathbf{r}) + i\phi_I(\mathbf{r})$ , il paraît utile de séparer les partie réelle et imaginaire du champ (1.24), on obtient alors directement :

$$\phi_R(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N(1 + \epsilon^2)}} \sum_{n=1}^N \left( \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} + \theta_n) + \epsilon \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} + \theta'_n) \right) \quad (1.25)$$

$$\phi_I(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{\sqrt{N(1 + \epsilon^2)}} \sum_{n=1}^N \sin(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} + \theta'_n) \quad (1.26)$$

En appliquant le théorème de la limite centrale aux expressions (1.25) et (1.26), R. Pnini et B. Shapiro ont montré que les composantes réelle et imaginaire du champ peuvent être vues comme des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle.

Il est important de noter que, numériquement ou expérimentalement, le champ mesuré, noté  $\phi' = u + iv$ , contient une phase globale arbitraire. Pour s'assurer que la partie imaginaire du champ est uniquement due à la partie progressive, il est nécessaire d'appliquer une rotation de phase globale :

$$\phi = e^{i\alpha}(u + iv) = \phi_R + i\phi_I \quad (1.27)$$

où la phase  $\alpha$  est définie en rendant les parties réelle et imaginaire du champ indépendantes ( $\langle \phi_R \phi_I \rangle = 0$ ), *i.e.* orthogonales [93]. En prenant la moyenne spatiale, notée  $\langle \dots \rangle$ , du carré de l'expression (1.27), et en identifiant les parties réelle et imaginaire, la phase s'exprime en fonction de  $\langle u^2 \rangle$ ,  $\langle v^2 \rangle$  et  $\langle uv \rangle$  :

$$\tan 2\alpha = -\frac{2 \langle uv \rangle}{\langle u^2 \rangle - \langle v^2 \rangle} \quad (1.28)$$

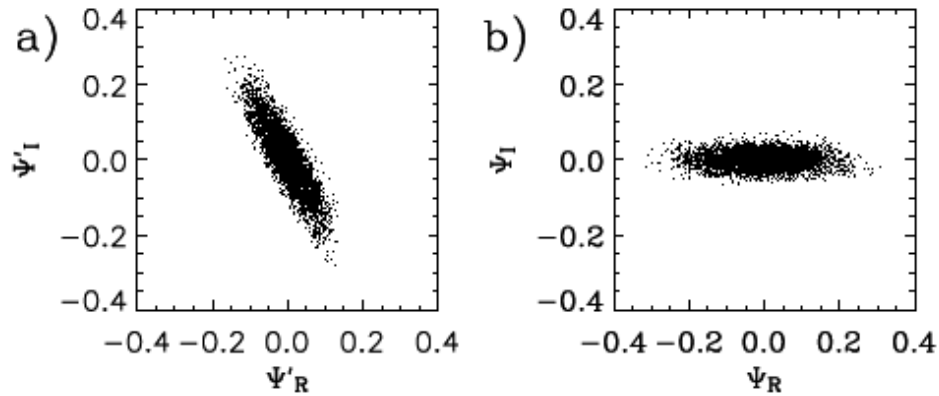


FIG. 1.16 – La répartition dans le plan complexe de la composante spatiale du champ électrique, noté  $\Psi$ , mesuré dans une cavité électromagnétique chaotique [92]. A gauche avant la rotation de phase qui rend les parties réelle et imaginaire indépendantes. A droite, après la rotation de phase.

Comme cette transformation est essentielle nous considérerons dans la suite qu'elle est systématiquement réalisée (voir Fig. 1.16).

### Mesure de la complexité du champ

Comme les pertes inhomogènes rendent le champ complexe, cette complexité permet donc de caractériser l'effet de ces pertes dans le domaine spatial. Pour mesurer la complexité du champ, deux grandeurs scalaires ont été introduites.

**Le paramètre de complexité  $q^2$ .** Cette grandeur a été introduite par O. Lobkis et R. Weaver, en 2000, pour mesurer la complexité du champ associée aux résonances d'un bloc d'aluminium de forme chaotique [94] :

$$q^2 = \frac{\langle \phi_I^2 \rangle}{\langle \phi_R^2 \rangle}, \quad (1.29)$$

où  $\langle \dots \rangle$  est une moyenne d'ensemble. Le paramètre  $q^2$  varie de 0 pour un champ réel ( $\langle \phi_I^2 \rangle = 0$ ) à 1 pour un champ purement progressif ( $\langle \psi_I^2 \rangle = \langle \psi_R^2 \rangle$ ).

O. Lobkis et R. Weaver ont extrait expérimentalement le paramètre de complexité à partir de la distribution de la phase  $\varphi$  de la composante spatiale du champ :  $\phi = |\phi|e^{i\varphi}$ .



En partant de la définition :

$$P(\varphi) = \left\langle \delta \left[ \varphi - \arctan \left( \frac{\phi_I}{\phi_R} \right) \right] \right\rangle, \quad (1.30)$$

et en appliquant le fait que les partie réelle et imaginaire du champ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, ils ont abouti à l'expression :

$$P(\varphi) = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{q^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}. \quad (1.31)$$

Cette distribution est piquée sur  $0$ ,  $\pi$  et  $2\pi$  pour le champ purement stationnaire d'un système fermé. Lorsque le système s'ouvre, la distribution de la phase s'élargit, jusqu'à devenir uniforme pour un champ purement progressif.

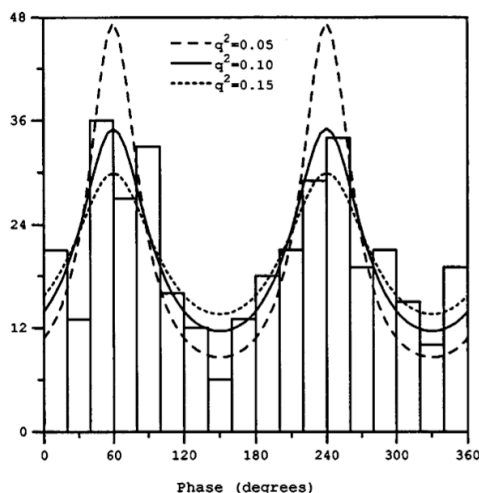


FIG. 1.17 – Distribution de la phase associée aux résonances dans une large gamme en fréquence. La distribution expérimentale est représentée sous forme d'histogramme. La distribution théorique (1.30) est représenté pour trois valeurs de paramètre de complexité. La figure est extraite de la référence [94].

La distribution de la phase, obtenue expérimentalement en réalisant des moyennes en fréquence, qui, en vertu de l'hypothèse ergodique, valable pour les systèmes ondulatoire chaotiques, équivaut à une moyenne d'ensemble. pour quatre positions différentes du couple émetteur-recepteur du signal sonore, a permis à O. Lobkis et R. Weaver d'extraire le paramètre de complexité associé aux champs des résonances (voir Fig. 1.17). Une distribution dérivée de (1.31) a ensuite été obtenue dans une expérience de cavité électromagnétique par J. Barthélémy *et al.* [95].

**La rigidité de phase**  $|\rho|^2$ . Cette quantité a tout d'abord été utilisée pour décrire la complexité des vecteurs propres lors de transitions entre ensembles tels que GOE-GUE et GSE-GUE [96, 97]. Lors de la transition GOE-GUE, c'est-à-dire pour des systèmes dont l'invariance par renversement du temps est partiellement brisée, l'hamiltonien peut se mettre sous la forme :

$$H = S - i \frac{\alpha}{\sqrt{2N}} A \quad (1.32)$$

où  $S$  et  $A$  sont deux matrices aléatoires réelles de taille  $N \times N$ , respectivement symétrique et antisymétrique, dont les éléments sont distribués selon une loi gaussienne. Le paramètre réel  $\alpha$  caractérise la brisure de symétrie,  $\alpha = 0$  correspond à l'ensemble GOE et  $\alpha = \sqrt{2N}$  correspond à l'ensemble GUE. Pour les valeurs de  $\alpha$  non nulles, les vecteurs propres deviennent complexes, et a été étudiée en introduisant la rigidité de phase  $|\rho|$ , qui s'exprime aussi en fonction du paramètre de complexité (1.29) :

$$|\rho| = \frac{\langle \psi_R^2 \rangle - \langle \psi_I^2 \rangle}{\langle \psi_R^2 \rangle + \langle \psi_I^2 \rangle} = \frac{1 - q^2}{1 + q^2}. \quad (1.33)$$

La rigidité de phase vaut 1 pour un système fermé et tend vers 0 pour un système complètement ouvert. Lors de la transition entre ensembles, de fortes fluctuations de la rigidité de phase des fonctions propres, et donc de la complexité, sont observées.

En considérant la rigidité de phase comme une fonction continue de la fréquence, P. Brouwer a, par la suite, étudié l'effet des pertes sur des systèmes chaotiques dont la limite fermée est décrite par GOE [98]. La distribution de  $\rho$  dérivée par P. Brouwer a ensuite été validée expérimentalement par Y.-H. Kim *et al.* [99] dans une cavité électromagnétique ouverte (Fig. 1.18).

### Intensité du champ, courants et vorticité

La présence de pertes inhomogènes va engendrer des changements radicaux sur les propriétés du champ par rapport au cas fermé. Ainsi, des courants et des vortex vont apparaître, les lignes nodales correspondant aux zéros du champ (Fig. 1.15) vont se transformer en points nodaux, pour lesquelles la partie réelle et imaginaire du champ s'annulent [100–102]. En utilisant l'hypothèse de Pnini et Shapiro, les propriétés statistiques de diverses quantités ont pu être dérivées analytiquement et vérifiées, numériquement ou expérimentalement, le plus souvent dans des cavités électromagnétiques.

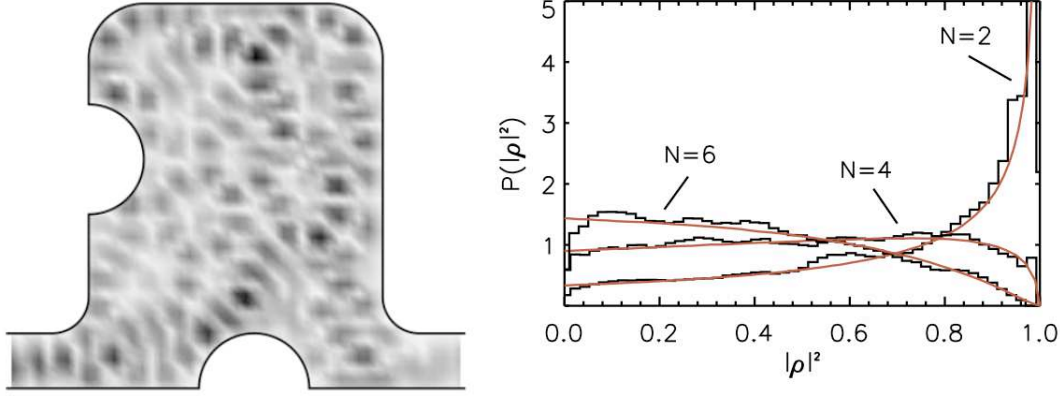


FIG. 1.18 – A gauche, l'intensité du champ électrique de la cavité ouverte par deux guides d'ondes pour une fréquence d'excitation. A droite, la distribution de la rigidité de phase pour  $N = 2, 4$  et  $6$  canaux fictifs (rappelons que le nombre de canaux correspond ici au nombre de modes transverses dans les guides et dépend donc de la fréquence d'excitation). Les figures sont extraites de la référence [99].

**Distribution de l'intensité du champ.** La distribution de l'intensité  $I = |\phi|^2$ , à une fréquence d'excitation donnée et normalisée selon  $\langle I \rangle = 1$ , s'écrit [91] :

$$P(I) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\rho|^2}} \exp \left[ - \frac{I}{1 - |\rho|^2} \right] I_0 \left[ \frac{|\rho|I}{1 - |\rho|^2} \right] \quad (1.34)$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et  $|\rho|^2$  est la rigidité de phase (1.33) caractérisant l'ouverture du système. Pour le cas fermé :  $|\rho|^2 = 1$ , on retrouve la loi de Porter-Thomas, correspondant au fait que le champ réel est distribué selon une loi gaussienne. Pour le cas complètement ouvert :  $|\rho|^2 = 0$ , on obtient la loi de Rayleigh, qui correspond au cas où les parties réelle et imaginaire ont des poids identiques. L'expression (1.34) a aussi été vérifiée expérimentalement sur des cavités électromagnétiques ouvertes [92] (Fig. 1.19).

**Distribution des courants et de la vorticité.** Les propriétés statistiques du courant [103–105] et de la vorticité [106, 107], à une fréquence donnée, ont aussi intéressé la communauté. Par analogie avec la Mécanique Quantique, ont été définies la densité de courant  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  et la vorticité  $w$  :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{Im} [\phi^*(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})] , \quad w = [\nabla_x \phi_R(\mathbf{r})][\nabla_y \phi_I(\mathbf{r})] - [\nabla_x \phi_I(\mathbf{r})][\nabla_y \phi_R(\mathbf{r})] \quad (1.35)$$

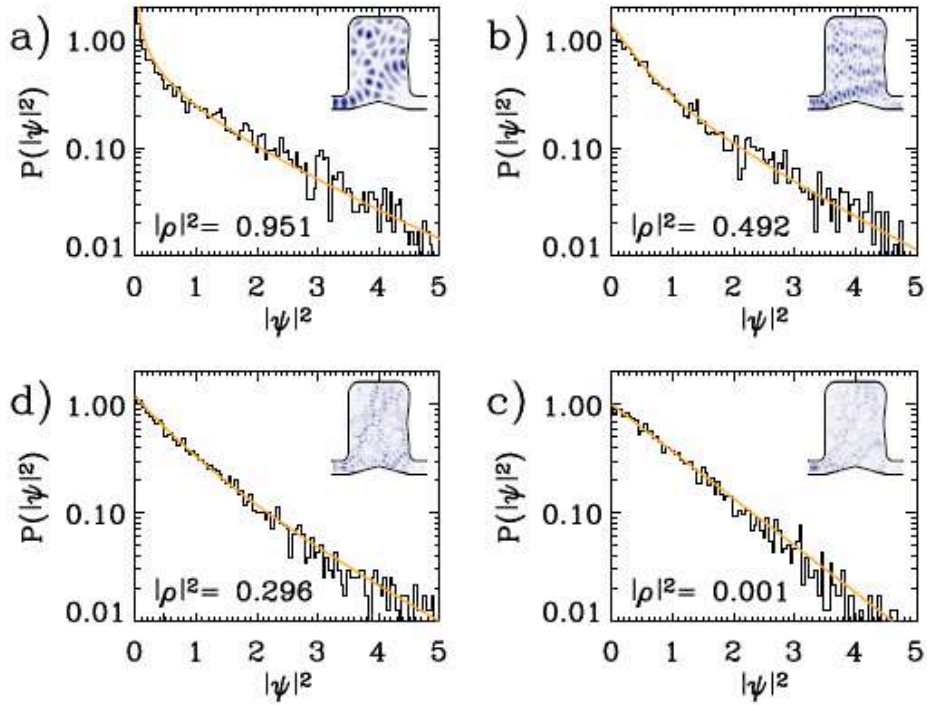


FIG. 1.19 – Distributions de l'intensité du champ électrique dans une cavité électromagnétique ouverte par deux guides d'ondes, pour quatre fréquences d'excitation différentes. En histogramme les résultats expérimentaux, en trait plein la prédiction théorique (1.34). Le couplage avec l'extérieur est ici caractérisé par la rigidité de phase. Le champ associé à la distribution est représenté en insert. Les figures sont extraites de la référence [92].

Les distributions de ces grandeurs s'obtiennent directement :

$$P(|j|) = \frac{4j}{\langle |j|^2 \rangle} K_0 \left[ -\frac{2|j|}{\sqrt{\langle |j|^2 \rangle}} \right], \quad P(w) = \frac{1}{\sqrt{2\langle w^2 \rangle}} \exp \left[ -\sqrt{\frac{2}{\langle w^2 \rangle}} |w| \right] \quad (1.36)$$

où  $K_0$  est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce et,  $\langle |j|^2 \rangle = k^2 \langle \phi_R^2 \rangle \langle \phi_I^2 \rangle$  et  $2\langle w^2 \rangle = k^4 \langle \phi_R^2 \rangle \langle \phi_I^2 \rangle$  où  $k$  est le nombre d'onde. Ces prédictions théoriques ont été aussi vérifiées expérimentalement, toujours dans une cavité électromagnétique ouverte [92] (voir Fig. 1.20).

**Relation entre la complexité du champ et les largeurs des résonances.** Comme le paramètre de complexité  $q^2$  mesure l'impact des pertes inhomogènes  $\Gamma_{inh}$  dans le domaine spatial, on peut supposer que ces deux quantités sont corrélées. En 2005, J. Barthélémy O. Legrand et F. Mortessagne sont les premiers à étudier le lien entre ces deux

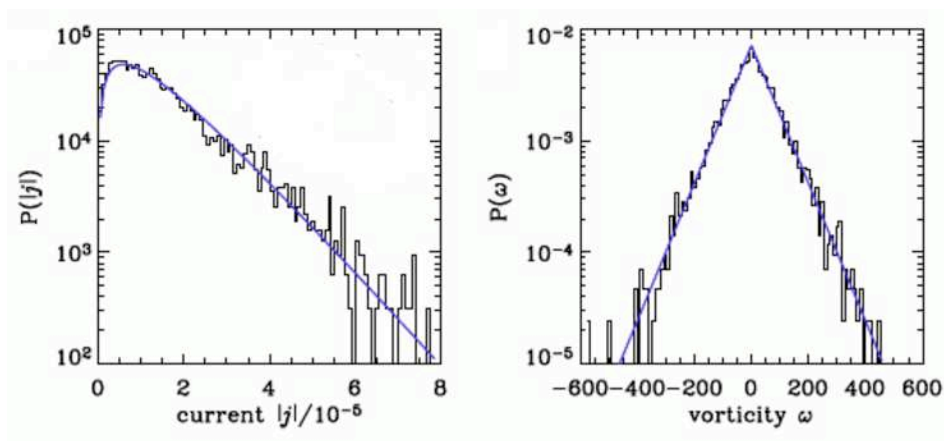


FIG. 1.20 – A gauche, distribution du module de la densité de probabilité du courant  $j$ . A droite la distribution de la vortacité. En traits pleins, les prédictions théoriques (1.36). En histogrammes, les résultats expérimentaux obtenus sur une cavité électromagnétique ouverte. Les figures sont extraites de la référence [92].

quantités [95]. En exploitant des données expérimentales obtenues à partir d'une cavité électromagnétique chaotique à température ambiante<sup>12</sup>, ils montrent, qu'en réalisant une moyenne d'ensemble, le paramètre de complexité moyen est proportionnel à la largeur spectrale inhomogène moyenne. A partir d'arguments géométriques, ils prouvent, qu'à haute fréquence, le coefficient de proportionnalité dépend uniquement des propriétés géométriques de la cavité :

$$\langle q \rangle = \frac{2\pi^2 S}{cP} \langle \Gamma_{inh} \rangle \quad (1.37)$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de la lumière,  $P$  et  $S$  étant respectivement le périmètre et la surface de la cavité. Cette relation a été vérifiée en réalisant des moyennes en fréquence sur 30 résonances adjacentes (Fig. 1.21).

**Résumé.** En utilisant l'approche de Pnini et Shapiro, où les composantes réelle et imaginaire du champ peuvent être vues comme des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, les nombreuses modifications du champ produites par les pertes inhomogènes ont pu être caractérisées. Cependant, il est important de noter que les propriétés statistiques du champ ont majoritairement été considérées à une fréquence donnée, ou comme un paramètre continu de la fréquence, seules de rares études se sont intéressées aux propriétés statistiques du champ associées aux résonances. Ce point sera abordé en détail dans le

<sup>12</sup>Les pertes inhomogènes sont essentiellement introduites par l'absorption ohmique produite par les bords de la cavité, celles produite par les plaques étant des pertes homogènes.

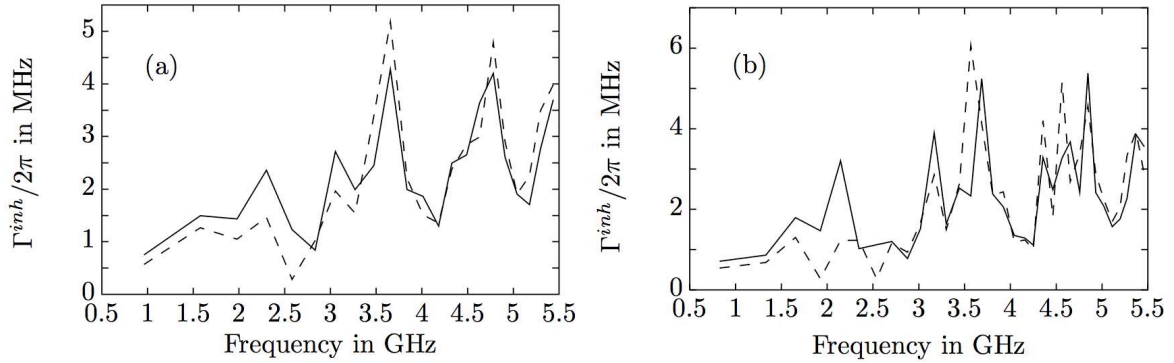


FIG. 1.21 –  $\langle \Gamma_{inh} \rangle$  en fonction de la fréquence. En trait plein,  $\langle \Gamma_{inh} \rangle$  obtenue à partir des données expérimentales. En pointillés,  $\langle \Gamma_{inh} \rangle$  obtenues à partir de l'expression 1.37,  $\langle q \rangle$  étant extrait par un ajustement de la distribution de la phase. Les figures sont extraites de la référence [95].

chapitre III.

## 1.4 Conclusion

Initialement introduit en Physique Nucléaire pour décrire les statistiques spectrales des noyaux lourds, la Théorie des Matrices Aléatoires s'est révélée être applicable aux systèmes ondulatoires chaotiques très faiblement couplés à l'extérieur. Cependant, dès lors que le couplage avec l'extérieur n'est plus négligeable, cette théorie n'est plus applicable. Pour caractériser les systèmes ondulatoires ouverts, la Théorie de la Diffusion, dont l'élément fondamental est la matrice  $S$ , s'est révélée être extrêmement puissante. L'un des intérêts de ce formalisme est qu'il permet de traiter le couplage avec l'extérieur de manière unifiée et donc de décrire l'ensemble des systèmes ouverts par une même approche. De plus, en appliquant les concepts de la Théorie des Matrices Aléatoires, les systèmes chaotiques ouverts peuvent être caractérisés à partir d'une approche statistique. Le formalisme de la matrice  $S$  a donc permis d'étendre la Théorie des Matrices Aléatoires à *la* Wigner aux systèmes chaotiques ouverts. Deux principales manières d'aborder le problème ont été présentées, l'une en considérant directement la matrice  $S$  comme un objet statistique, l'autre décrivant les statistiques des énergies propres, des largeurs et du champ associé aux résonances par l'intermédiaire d'un opérateur non-hermitien : l'hamiltonien effectif. C'est cette dernière approche qui sera exclusivement utilisée dans les chapitres II, III et IV de ce manuscrit.



# Chapitre 2

## Statistiques des écarts et des croisements évités

Parmi les nombreuses grandeurs introduites pour caractériser les propriétés spectrales des systèmes chaotiques, la distribution des écarts entre plus proches niveaux est de loin la plus réputée. En effet, la distribution des écarts permet, d'une part, de caractériser le comportement intégrable ou chaotique des systèmes ondulatoires, et, d'autre part, de classer les systèmes chaotiques suivant leurs invariances globales. Cependant, bien que les systèmes ouverts soient un domaine de recherche actif, les modifications engendrées par le couplage avec l'extérieur sur les écarts ont été peu étudiées [108–110]. Seuls H.-J. Stockmann et P. Šeba se sont intéressés aux statistiques des écarts sur des matrices de type hamiltonien effectif, et ce, dans le cas particulier d'un seul canal de perte [111].

Une autre grandeur statistique reliée aux écarts est la distribution des croisements évités, qui décrit l'évolution des niveaux lorsqu'un paramètre du système varie. Alors que les statistiques des croisements évités sont bien connus pour un système chaotique fermé [112, 113], aucun travail théorique n'a été réalisé pour les systèmes ouverts. Récemment, B. Dietz *et al.* [11] ont montré expérimentalement que la distribution des croisements évités d'un système peu couplé avec son environnement s'écarte significativement de la prédiction théorique du cas fermé. Ce flagrant désaccord entre la théorie et l'expérience prouve que le couplage avec l'extérieur doit être pris compte pour décrire complètement la statistique des croisements évités.

Dans ce chapitre, je m'intéresserai donc à l'effet du couplage avec l'extérieur sur les écarts et les croisements évités. Le caractère local de ces quantités permettra de se limiter à un simple modèle à 2 niveaux qui donne d'excellentes approximations du modèle exact



à  $N$  niveaux avec  $N \rightarrow \infty$ . Les distributions de probabilité des écarts et des croisements évités seront obtenues dans le régime de couplage faible et d'un grand nombre de canaux de pertes. Alors que la première condition assure la validité de l'approximation du modèle à 2 niveaux, la dernière condition permet d'appliquer le théorème de la limite centrale et simplifie grandement les calculs analytiques.

Je commencerai par rappeler de manière succincte les distributions de probabilité des écarts et des croisements évités pour un système chaotique fermé (§2.1). Ce paragraphe me permettra de comparer directement les modifications engendrées par le couplage avec l'extérieur sur ces quantités. Je poursuivrai par la description du mécanisme d'attraction des niveaux le long de l'axe réel, responsable des modifications par rapport au cas fermé (§2.2). Ensuite, j'introduirai le modèle à 2 niveaux utilisé pour obtenir les expressions analytiques des distributions des écarts (§2.3) et des croisements évités (§2.4) dans le cas ouvert. Les résultats théoriques obtenus seront à chaque fois confrontés à des simulations numériques de type matrices aléatoires. Dans le cas des croisements évités, une comparaison directe avec les résultats expérimentaux de B. Dietz *et al.*, obtenues dans une cavité électromagnétique supraconductrice, sera faite.

## 2.1 Ecarts et croisements évités dans un système fermé

Cette première section rappelle les résultats importants obtenus sur les distributions des écarts et des croisements évités pour un système chaotique fermé. Bien qu'il existe trois ensembles de matrices aléatoires gaussiennes, nous nous intéresserons uniquement à GOE et GUE. L'ensemble symplectique étant laissé de côté du fait de l'absence d'expériences se rapportant à cet ensemble.

### 2.1.1 La distribution des écarts

La distribution des écarts entre plus proches niveaux, le  $P(s)$ , a été intensivement utilisée dans de nombreux domaines de la Physique Ondulatoire pour caractériser l'aspect intégrable ou chaotique des systèmes étudiés. Pour la plupart des systèmes intégrables, les niveaux sont complètement décorrélés, il en résulte que la distribution des écarts suit la loi de Poisson :  $P^P(s) = e^{-s}$  (voir [7] page 66). Il est important de noter que cette loi n'est pas universelle pour les systèmes intégrables, l'oscillateur harmonique est un bon contre-exemple : les niveaux sont équidistants et la distribution se réduit à une distribution Delta.

Dans le cas de systèmes chaotiques, le  $P(s)$  suit une loi universelle extrêmement bien

approchée par les distributions de Wigner. Ce dernier a dérivé les distributions des écarts pour les trois ensembles gaussiens en se limitant à un modèle à 2 niveaux [12]. L'idée de E. Wigner consiste à se restreindre au sous-espace constitué de deux niveaux plus proches voisins, l'hamiltonien se réduit donc à une matrice hermitienne de taille  $2 \times 2$  :

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Les éléments non diagonaux étant reliés par la propriété d'hermiticité de l'hamiltonien :  $H_{12} = H_{21}^*$ , rappelons que pour GOE l'hamiltonien est réel et la relation se réduit à  $H_{12} = H_{21}$ . A partir de l'expression générale de la distribution de probabilité des éléments de matrices d'une matrice aléatoire gaussienne :  $P(H) \propto \exp(-a \operatorname{Tr} H^2)$ , où la constante  $a$  est reliée à la variance des éléments de matrices, on parvient à la distribution des éléments de (2.1), pour GOE :

$$P_{\text{GOE}}(H) \propto \exp\left(-a(H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_{12}^2)\right), \quad (2.2)$$

et pour GUE :

$$P_{\text{GUE}}(H) \propto \exp\left(-a(H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2|H_{12}|^2)\right). \quad (2.3)$$

Connaissant le  $P(H)$ , la distribution de probabilité jointe des énergies propres s'obtient en effectuant un changement de base qui diagonalise l'hamiltonien :  $H = U(\theta)\operatorname{diag}(E_1, E_2)U^{-1}(\theta)$  où  $\theta$  est l'angle de rotation de la transformation. Comme la distribution de probabilité est invariante par changement de base,  $P(E_1, E_2, \theta)$  s'exprime en fonction de la distribution des éléments de matrices de  $H$  et du Jacobien  $J$  de la transformation  $(H) \rightarrow (E_1, E_2, \theta)$  :

$$P(E_1, E_2, \theta) = P(H)|J|. \quad (2.4)$$

Un calcul rapide montre que la distribution jointe des énergies propres est indépendante de l'angle de rotation et s'écrit :

$$P_\beta(E_1, E_2) \propto |E_2 - E_1|^\beta e^{-a(E_1^2 + E_2^2)}, \quad (2.5)$$

où l'indice de Wigner  $\beta$  caractérise l'ensemble gaussien de la matrice :  $\beta = 1$  et  $\beta = 2$  pour GOE et GUE respectivement. Il est important de voir que le terme  $|E_2 - E_1|^\beta$ , qui provient du Jacobien, introduit des corrélations entre énergies propres alors que, par définition, les éléments de matrices de  $H$  sont indépendants. Ces corrélations vont se faire ressentir sur les propriétés statistiques du spectre, et notamment sur la distribution des écarts, qui, comme nous allons le voir, est très différente de la distribution de Poisson. La

distribution des écarts du modèle à 2 niveaux (2.1) est définie par :

$$P(s) = \langle \delta(s - |E_2 - E_1|) \rangle = \int dE_1 dE_2 \delta(s - |E_2 - E_1|) P(E_1, E_2). \quad (2.6)$$

En utilisant (2.5) et après intégration sur  $E_1$  et  $E_2$ , on obtient les distributions de Wigner :

$$P_{\text{GOE}}^W(s) = \frac{\pi s}{2} e^{-\pi s^2/4} \quad \text{et} \quad P_{\text{GUE}}^W(s) = \frac{32s^2}{\pi^2} e^{-4s^2/\pi}, \quad (2.7)$$

où l'écart moyen est normalisé à l'unité  $\langle s \rangle = 1$ . Une répulsion de niveaux apparaît pour les petits écarts : c'est une caractéristique des systèmes chaotiques. Cette répulsion est linéaire pour GOE et quadratique pour GUE. La Fig. 2.1 représente la comparaison entre la distribution des écarts du modèle à 2 niveaux (2.7) et la distribution des écarts obtenue numériquement par diagonalisation de matrices de grande taille. L'excellent accord confirme le caractère local des écarts.

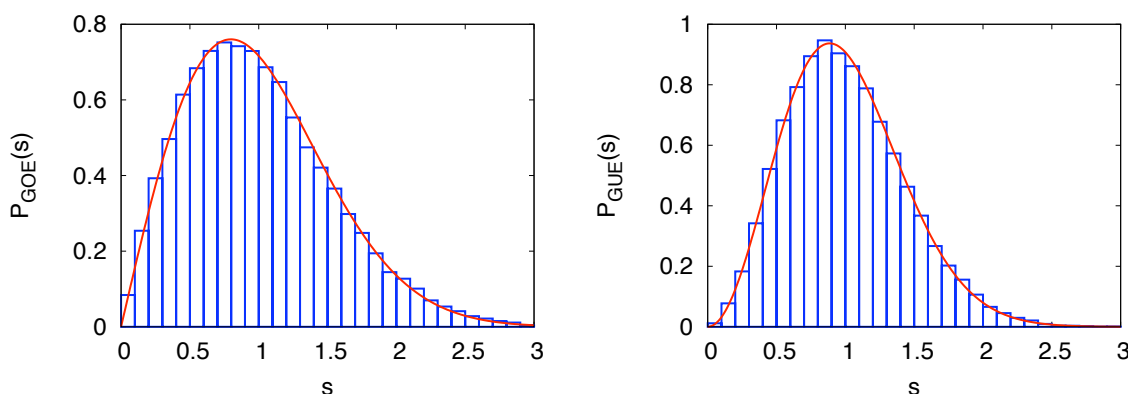


FIG. 2.1 – Distributions des écarts pour GOE à gauche et GUE à droite. En bleu, les histogrammes numériques obtenus par diagonalisation de matrices aléatoires de taille  $1000 \times 1000$ . En rouge, les expressions théoriques du modèle à 2 niveaux de E. Wigner (2.7).

La distribution des écarts a été vérifiée dans de nombreux domaines de la Physique Ondulatoire tant numériquement qu'expérimentalement. La figure 2.2 montre le  $P(s)$  obtenu pour différents systèmes chaotiques invariant par renversement du sens du temps. Ces résultats tendent à prouver que les statistiques spectrales de systèmes chaotiques sont parfaitement décrites par la Théorie des Matrices Aléatoires.

Il est important de noter que les distributions de Wigner ont été dérivées en considérant le système comme fermé. Ainsi, pour vérifier les prédictions analytiques, les simulations numériques modélisent généralement des systèmes physiques fermés (puits de potentiel

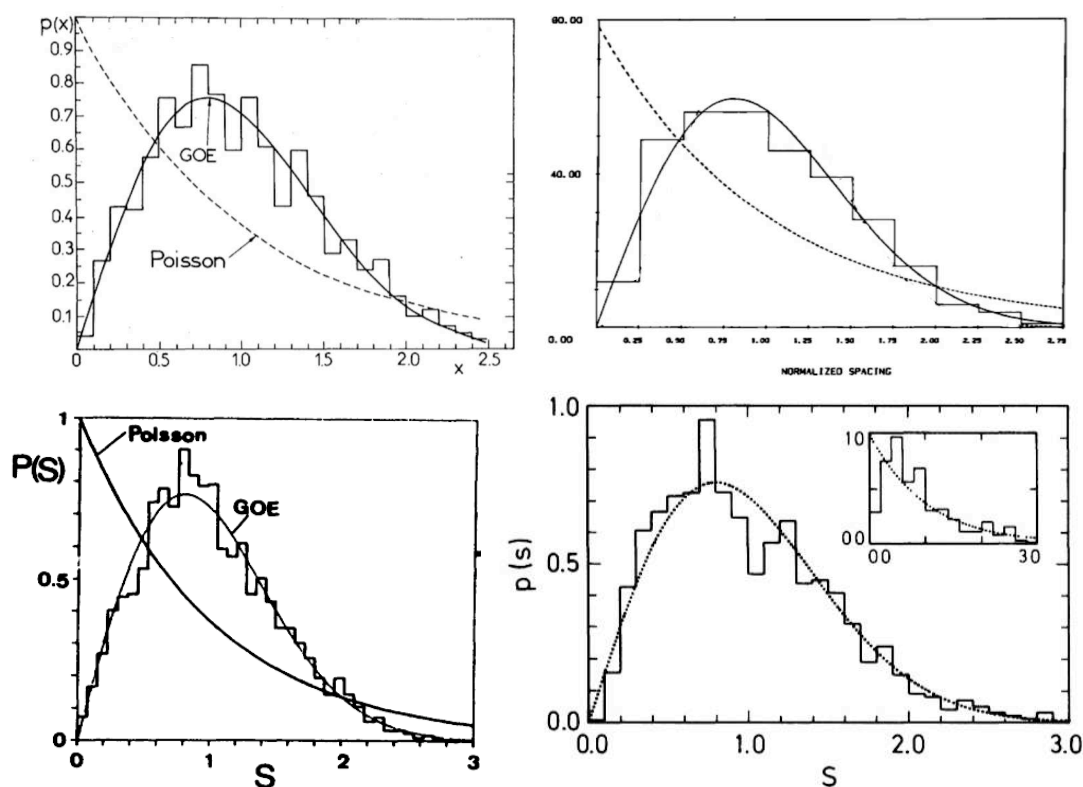


FIG. 2.2 – La distribution des écarts entre plus proches voisins. En haut à gauche, pour une particule quantique dans un billard chaotique [3]. En haut à droite, pour l'atome d'hydrogène soumis à un fort champ magnétique [114]. En bas à gauche, pour un bloc d'aluminium de forme chaotique [5]. En bas à droite, pour une cavité micro-ondes de forme chaotique (en insert pour une forme intégrable) [6].

infini [3], états stationnaires de l'atome d'hydrogène [114], etc.) et les expériences sont construites de manière à considérer les pertes comme négligeables (cavité électromagnétique plongée dans un cryostat à très basse température [63], système acoustique avec un grand facteur de qualité [5] etc.). Mais, dans la plupart des expériences, le couplage avec l'extérieur reste présent et doit être pris en compte dans l'analyse des résultats.

### 2.1.2 La distribution des croisements évités

Il est souvent intéressant d'étudier la dynamique des niveaux lorsqu'un paramètre du système varie. Là encore, une différence apparaît entre système intégrable et système chaotique. Comme nous l'avons vu, les niveaux d'un système intégrable sont complètement décorrélés. Ainsi, lors de la variation d'un paramètre du système, les niveaux évoluent sans ressentir la présence des autres; il en résulte que pour certaines valeurs du para-

mètre les niveaux peuvent devenir dégénérés. Par contre, pour un système chaotique, le  $P(s)$  indique que les niveaux se repoussent, interdisant toute dégénérescence. Cette répulsion à courte distance implique le non croisement des niveaux. Ce phénomène a été étudié sur de nombreux systèmes physiques tels que des atomes de Rydberg soumis à un champ électrique variable [115], l'atome d'hydrogène soumis à un champ magnétique variable [116], le pendule forcé quantique où la force de couplage varie [117] et les cavités électromagnétiques où la géométrie du système est modifiée [11].

Pour caractériser l'évolution des niveaux par rapport au paramètre, on va s'intéresser aux statistiques des minimums locaux, encore appelés *croisements évités*, c'est-à-dire les plus courtes distances entre deux niveaux adjacents (Fig. 2.3).

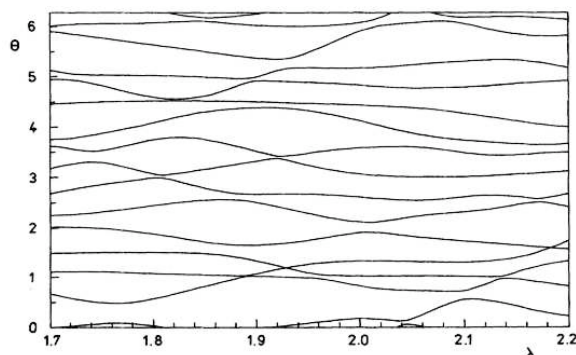


FIG. 2.3 – Quasi-énergies  $\theta$  d'un rotateur pulsé chaotique en fonction du paramètre  $\lambda$ . Les minimum locaux des écarts sont clairement identifiables. La figure est extraite de la référence [112].

La distribution des croisements évités a été dérivée analytiquement par J. Zakrzewski et M. Kuś [112] à partir d'un modèle à 2 niveaux. En considérant que l'hamiltonien du système  $H(\mu)$  dépend linéairement du paramètre, l'hamiltonien peut se mettre sous la forme

$$H(\mu) = H_1 + \mu H_2, \quad (2.8)$$

où  $\mu H_2$  représente évidemment la partie dépendant du paramètre. En écrivant  $H(\mu)$  sous forme matricielle dans la base diagonalisant  $H_2$  :

$$H(\mu) = \begin{pmatrix} a & e \\ e^* & b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

où  $a, b, c_1$  et  $c_2$  sont des nombre réels et  $e$  est un nombre réel pour GOE, complexe pour GUE. Par diagonalisation de (2.9) on trouve que l'écart s'écrit  $s = \sqrt{(a - b + \mu(c_1 - c_2))^2 + 4|e|^2}$ . A partir de cette l'expression, on voit que les minimums locaux sont attendus pour

$a - b + \mu(c_1 - c_2) = 0$ , l'expression des croisements évités  $c$  est donc donnée par  $c = 2|e|$ . La distribution de probabilité de  $c$  s'obtient alors directement pour GOE et GUE :

$$P_{\text{GOE}}(c) = \frac{2}{\pi} e^{-c^2/\pi} \quad \text{et} \quad P_{\text{GUE}}(c) = \frac{\pi c}{2} e^{-\pi c^2/4}. \quad (2.10)$$

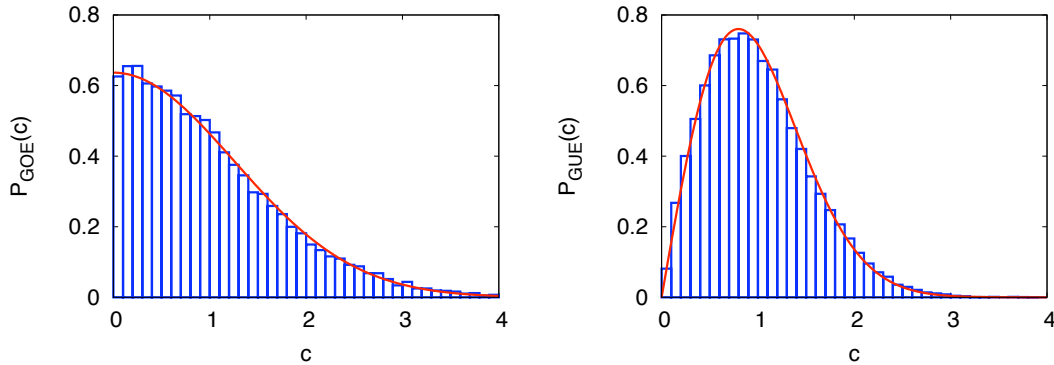


FIG. 2.4 – Distributions des croisements évités pour GOE à gauche et GUE à droite. En bleu, les histogrammes numériques obtenus par diagonalisation de matrices aléatoires de taille  $1000 \times 1000$  de la forme (2.11). En rouge, les expressions théoriques du modèle à 2 niveaux (2.10).

Ces distributions des croisements évités ont été obtenues dans le cas d'une dépendance linéaire du paramètre (2.8). La distribution des écarts a ensuite été analysée en détails par J. Zakrzewski, D. Delande et M. Kuś [113]. Toujours dans l'approximation d'un modèle à 2 niveaux, la distribution des écarts a été dérivée pour l'hamiltonien paramétrique :

$$H(\mu) = H_1 \cos \mu + H_2 \sin \mu. \quad (2.11)$$

Cette forme particulière assure que l'écart moyen entre niveaux est indépendant de  $\mu$ , et sera la seule forme considérée dans les simulations numériques. Comme les distributions des écarts obtenues pour ce modèle sont très proches de (2.10), nous n'utiliserons que ces dernières dans la suite. La validation du modèle à 2 niveaux est illustrée sur la Fig. 2.4.

Les résultats analytiques, basés sur les modèles à 2 niveaux (2.8) et (2.11), ont par la suite été validés par des simulations numériques de plusieurs systèmes chaotiques tels que le rotateur pulsé, l'atome d'hydrogène sous champ magnétique et un billard de forme chaotique (voir Fig. 2.5). Ces résultats numériques ont contribué à prouver l'universalité des propriétés statistiques des systèmes chaotiques soumis à la variation d'un paramètre.

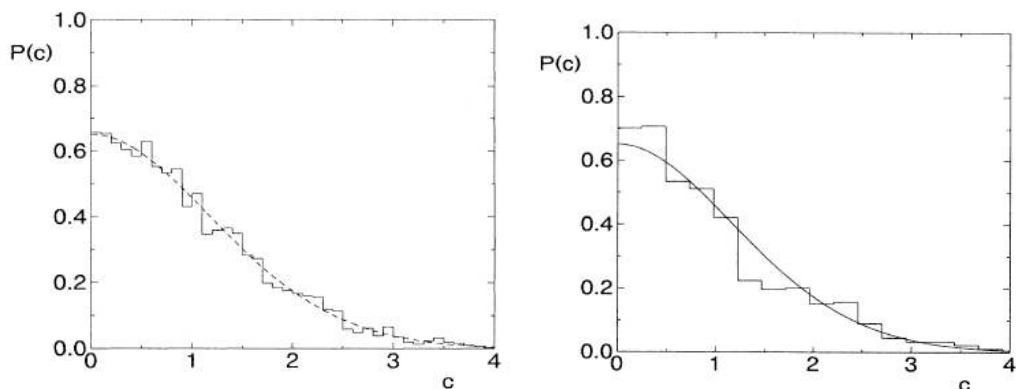


FIG. 2.5 – La distribution des croisements évités. A gauche pour l’atome d’hydrogène sous fort champ magnétique. A droite, pour un billard de forme chaotique. Les figures sont extraites de [113].

### 2.1.3 Expérience avec une cavité micro-onde paramétrique

La distribution des croisements évités a été étudiée expérimentalement par B. Dietz *et al.* [11] en utilisant une cavité électromagnétique bi-dimensionnelle. Pour rendre les pertes ohmiques complètement négligeables de manière à considérer le système comme fermé avec une très bonne approximation, la cavité, constituée d’un diélectrique, est plongée dans un cryostat à une température de 4.2K. Le champ électrique est injecté dans la cavité par une antenne émettrice et les mesures sont réalisées en transmission par deux antennes réceptrices. La géométrie de la cavité est modifiée en introduisant un *rotateur* mobile autour d’un axe fixe, qui constitue le paramètre variable du système (voir Fig. 2.6 à gauche). L’évolution des niveaux a été suivie pour 37 positions différentes du rotateur, avec un pas en angle de 2.5 degrés (voir Fig. 2.6 à droite).

Parmi toutes les grandeurs statistiques obtenues expérimentalement, notamment la distribution des écarts, seule la distribution des croisements évités est en désaccord avec les prédictions théoriques des matrices aléatoires. Comme souligné dans l’article [11], la distribution expérimentale des croisements évités est retrouvée à partir de simulations numériques de type matrices aléatoires, en prenant explicitement en compte le couplage avec l’extérieur, essentiellement introduit par les trois antennes. Nous tâcherons donc de répondre aux questions suivantes : Quels mécanismes physiques sont responsables de ce désaccord ? Est-il possible de construire un modèle analytique simple prenant en compte le couplage avec l’extérieur ? Et, pourquoi la distribution des croisements évités s’est-elle révélée être une grandeur extrêmement sensible aux pertes ? Les réponses à ces questions seront successivement fournies dans les prochaines sections de ce chapitre.

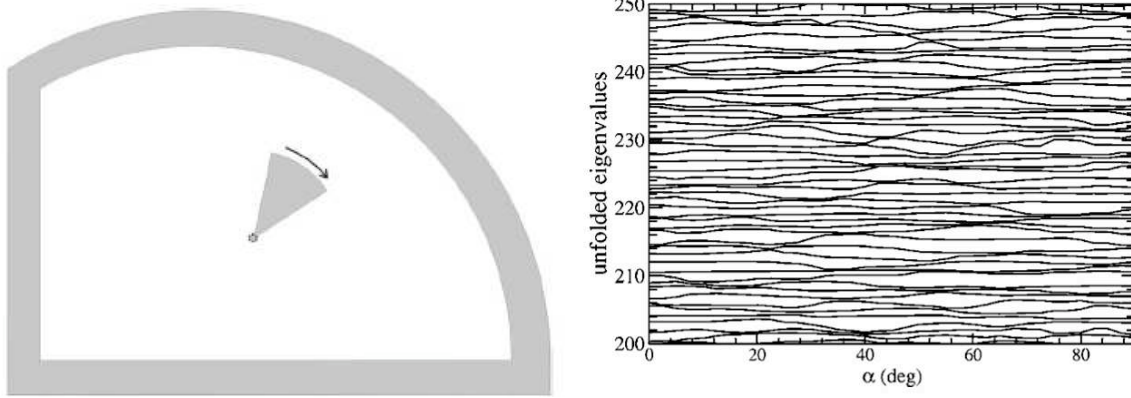


FIG. 2.6 – A gauche, la cavité électromagnétique chaotique contenant un rotateur pouvant tourner autour de son axe fixe. A droite l'évolution de 50 niveaux en fonction de l'angle du rotateur.

## 2.2 Hamiltonien effectif et modèles à 2 niveaux

Comme nous l'avons vu au chapitre I, un système ouvert est décrit par l'hamiltonien effectif, qui est un opérateur non-hermitien. Alors que sa composante hermitienne correspond à l'hamiltonien du système fermé, sa composante anti-hermitienne caractérise le couplage avec l'extérieur. Le caractère non-hermitien de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  va introduire d'importantes modifications sur les énergies propres du système par un mécanisme qui, dans le régime de couplage fort, aboutit au phénomène de piégeage des résonances. Ce phénomène a été étudié par M. Müller *et al.* en introduisant un modèle à 2 niveaux avec un canal de perte [70]. Ce modèle permettra d'illustrer le mécanisme d'attraction des niveaux le long de l'axe réel, responsable des modifications des distributions des écarts et des croisements évités par rapport au cas fermé. En reprenant le modèle introduit par D. Savin, O. Legrand et F. Mortessagne [10], les distributions des écarts et des croisements évités seront obtenues dans la limite d'un grand nombre de canaux.

### 2.2.1 Phénomène d'attraction des résonances

Dans le modèle à la Müller [70], deux niveaux sont couplés à l'extérieur par un canal de perte. La matrice de couplage  $V$  se réduit alors à un vecteur de taille  $2 \times 1$  qui peut se mettre sous la forme :

$$V = \sqrt{2\alpha} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$



où  $\alpha$  caractérise la force du couplage et  $\varphi \in [0 : \pi/4]$  mesure le degré de symétrie des amplitudes de couplage. Dans la base propre de  $H$ , l'hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = H - iVV^\dagger/2$  s'écrit :

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} - i\alpha \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

avec  $E_2 > E_1$ . Par diagonalisation, on obtient les valeurs propres de l'hamiltonien effectif :

$$\epsilon_{\pm} = \frac{E_1 + E_2 - i\alpha \pm \sqrt{D}}{2}, \quad (2.14)$$

avec

$$D = (s - i\alpha \cos 2\varphi)^2 - \alpha^2 \sin^2 2\varphi^2, \quad (2.15)$$

où  $s = E_2 - E_1$  est l'écart entre niveaux du système fermé. Pour analyser l'effet du couplage, nous allons nous intéresser à l'évolution des énergies propres  $E_{\pm} = \text{Re}[\epsilon_{\pm}]$  et des largeurs  $\Gamma_{\pm} = -2\text{Im}[\epsilon_{\pm}]$  en fonction de la force de couplage  $\alpha$ .

**Evolution des résonances en fonction du couplage : le cas symétrique  $\varphi = \pi/4$ .**

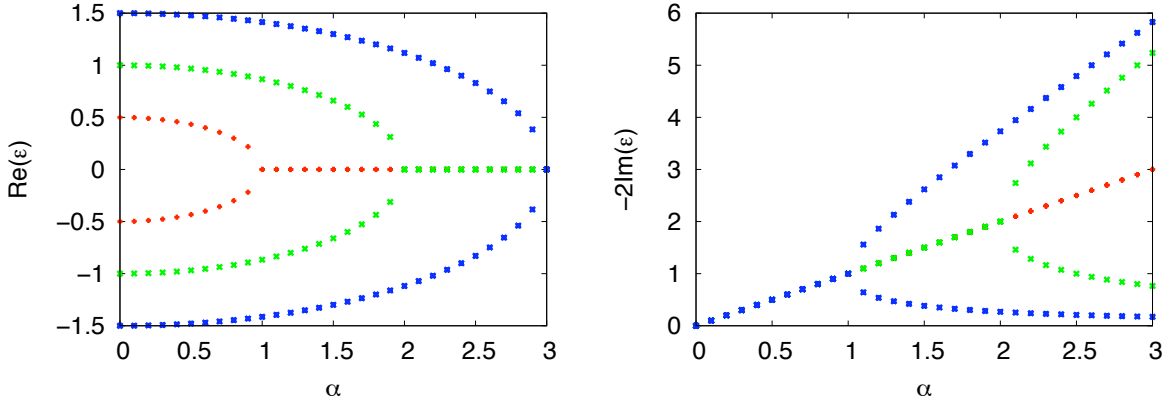


FIG. 2.7 – Evolution des énergies propres à gauche et des largeurs à droite en fonction du couplage  $\alpha$ . En rouge pour  $E_2 = -E_1 = 0.5$ , en vert pour  $E_2 = -E_1 = 1$ , en bleu pour  $E_2 = -E_1 = 1.5$ .

Comme l'illustre la Fig. 2.7, l'augmentation du couplage va conduire à une diminution de l'écart entre les deux énergies propres, et ce, jusqu'à la dégénérescence, qui se produit pour  $\alpha \geq s$ . Ce phénomène d'attraction introduit donc un changement de comportement radical par rapport au cas fermé, où la répulsion de niveaux interdit la dégénérescence

des niveaux. Ainsi, en présence de couplage, une certaine population de niveaux, pour lesquels  $s < \alpha$ , devient dégénérée.

Analysons maintenant l'effet du couplage sur les largeurs. A partir de la Fig. 2.7, on voit que, pour un couplage faible  $\alpha < s$ , les largeurs augmentent de manière symétrique puis, pour  $\alpha \geq s$ , une largeur va croître alors que l'autre va diminuer. C'est le phénomène de piégeage des résonances. Cette appellation peut se comprendre en regardant l'évolution des résonances dans le plan complexe  $(E, \Gamma)$  représenté sur la Fig. 2.8. Lorsque le couplage augmente, la largeur d'une résonance va tendre vers 0, celle-ci va donc s'écraser sur l'axe réel. De manière imagée, la résonance est piégée par l'axe réel.

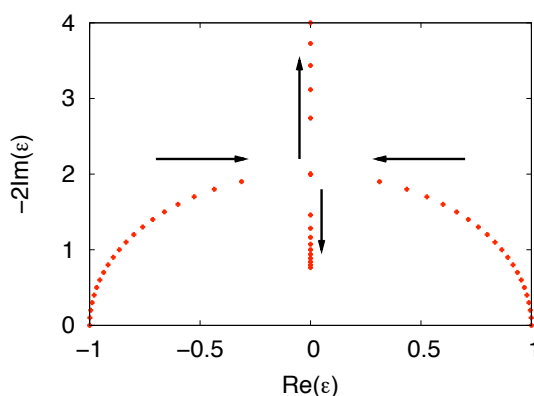


FIG. 2.8 – Evolution des résonances dans le plan complexe en fonction du couplage  $\alpha$  pour  $\varphi = \pi/4$  et  $E_2 = -E_1 = 1$ .

### Evolution des résonances en fonction du couplage : le cas asymétrique $\varphi \neq \pi/4$

Pour un couplage asymétrique l'attraction des énergies propres ne se fait plus jusqu'à la dégénérescence, un écart non nul est toujours présent, indépendamment de la valeur du couplage (Fig. 2.9). Notons que cet écart est d'autant plus grand que l'asymétrie est grande. Par contre, le phénomène de piégeage est, lui, toujours présent.

Ainsi, le couplage avec l'extérieur va modifier de manière non triviale les niveaux par rapport au cas fermé. Le modèle *à la* Müller nous a permis de comprendre qualitativement les modifications introduites par le potentiel imaginaire sur le spectre : attraction des énergies propres, et, dans le cas d'un couplage symétrique, création d'une population de niveaux dégénérés.

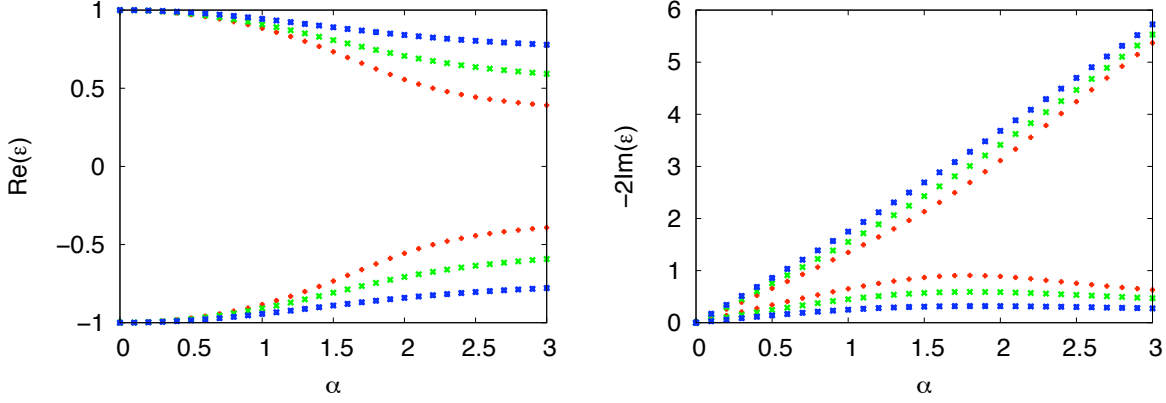


FIG. 2.9 – Evolution des énergies propres à gauche et des largeurs des résonances à droite en fonction du couplage  $\alpha$  pour  $E_2 = -E_1 = 1$ . En rouge pour  $\varphi = \pi/5$ , en vert pour  $\varphi = \pi/6$ , en bleu pour  $\varphi = \pi/8$ .

### 2.2.2 Modèle à 2 niveaux à la Savin : cas d'un grand nombre de canaux

Le modèle à 2 niveaux avec couplage gaussien, qui sera utilisé pour obtenir les distribution de probabilité des écarts et des croisements évités, est ici présenté en détail. Rappelons que la validité de ce modèle s'appuie sur le caractère local des écarts et des croisements évités et reste pertinent avant la séparation des largeurs spectrales en deux groupes [54, 69], c'est-à-dire en dehors du couplage fort. Dans ce modèle, les éléments de couplage  $V_n^c$  sont des variables aléatoires gaussiennes de valeur moyenne nulle et de covariance :

$$\langle V_n^c V_{n'}^{c'} \rangle = 2\kappa \frac{\Delta}{\pi} \delta_{nn'} \delta^{cc'} \equiv \sigma^2 \delta_{nn'} \delta^{cc'} , \quad (2.16)$$

où  $\kappa$  est la constante de couplage,  $\Delta$  l'écart moyen entre niveaux. En écrivant l'hamiltonien effectif dans la base où la partie hermitienne est diagonale :

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} , \quad (2.17)$$

où  $E_2 > E_1$  et les éléments de matrice du potentiel imaginaire sont reliés aux éléments de couplage par  $\Gamma_{np} = \sum_{j=1}^M V_n^j V_p^j$ . Les valeurs propres de  $H_{eff}$  sont données par

$$\epsilon_{\pm} = \frac{E_1 + E_2 - \frac{i}{2}(\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) \pm \sqrt{D}}{2} , \quad (2.18)$$

avec

$$D = \left( (E_1 - E_2)^2 - \frac{i}{2}(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) \right)^2 - \Gamma_{12}\Gamma_{21}. \quad (2.19)$$

Définissons maintenant l'écart entre les deux énergies propres  $\tilde{u} = \text{Re} [\epsilon_+ - \epsilon_-]$  qui s'écrit :

$$\tilde{u} = \text{Re} \left[ \sqrt{D} \right]. \quad (2.20)$$

L'écart  $\tilde{u}$  dépend de manière non triviale des éléments de couplage et de l'écart entre niveaux du système fermé. De manière à simplifier le modèle, on se place dans la limite d'un grand nombre de canaux, on peut alors appliquer le théorème de la limite centrale et remplacer les quantités par leurs valeurs moyennes :

$$\Gamma_{11} = \langle \Gamma_{11} \rangle = M\sigma^2 \quad \Gamma_{22} = \langle \Gamma_{22} \rangle = M\sigma^2 \quad \Gamma_{12}\Gamma_{21} = \langle \Gamma_{12}\Gamma_{21} \rangle = M\sigma^4. \quad (2.21)$$

On obtient alors l'expression de l'écart entre les deux énergies propres dans la limite  $M \gg 1$ , noté  $u$  :

$$u = \begin{cases} \sqrt{s^2 - M\sigma^4} & \text{si } s > \sqrt{M}\sigma^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (2.22)$$

où  $s$  est l'écart entre niveaux du système fermé. L'écart entre niveaux du système ouvert dépend de la variance de la largeur spectrale  $\text{var}(\Gamma) = M\sigma^4$ , ce qui implique que les modifications introduites par le couplage avec l'extérieur sont reliées aux fluctuations des largeurs. En effet, dans la limite des pertes homogènes (voir chapitre I), définies par  $M \rightarrow \infty$ ,  $\sigma^2 \rightarrow 0$  avec  $M\sigma^2 = \langle \Gamma \rangle$  fixé, on montre que  $\text{var}(\Gamma) \rightarrow 0$ . Donc, l'écart  $u$  entre niveaux tend vers l'écart entre niveaux du système fermé  $u \rightarrow s$  malgré la présence du couplage.

De plus, on peut montrer que l'expression (2.22), obtenue dans la limite  $M \gg 1$  du modèle *à la* Savin, correspond à l'expression de l'écart du modèle *à la* Müller pour un couplage symétrique. Cette remarque renforce le fait que pour  $s \leq \sqrt{M}\sigma^2$ , l'écart du système ouvert devient nul.

## 2.3 Distribution des écarts pour un système ouvert

### 2.3.1 Expressions analytiques

A partir de l'expression de l'écart entre 2 niveaux du modèle *à la* Savin dans la limite d'un grand nombre de canaux (2.22), on définit la distribution des écarts  $P(u)$  du système

ouvert par :

$$P(u) = \left\langle \delta(u)\theta(\sqrt{M}\sigma^2 - s) \right\rangle + \left\langle \delta\left(u - \sqrt{s^2 - M\sigma^4}\right)\theta(s - \sqrt{M}\sigma^2) \right\rangle, \quad (2.23)$$

où la moyenne s'effectue sur l'écart  $s$  du système fermé :

$$P(u) = \int_0^{\sqrt{M}\sigma^2} ds P(s)\delta(u) + \int_{\sqrt{M}\sigma^2}^{\infty} ds P(s)\delta\left(u - \sqrt{s^2 - M\sigma^4}\right), \quad (2.24)$$

le  $P(s)$  étant donné par la loi de Wigner (2.7). Après intégration, on trouve que la distributions des écarts s'écrit, pour GOE :

$$P_{\text{GOE}}(u) = (1 - e^{-M\sigma^4/(4\alpha^2)})\delta(u) + \frac{1}{2\alpha^2}ue^{-(u^2+M\sigma^4)/(4\alpha^2)}, \quad (2.25)$$

et pour GUE :

$$P_{\text{GUE}}(u) = \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{M}\sigma^2}{2\alpha}\right) - \frac{\sqrt{M}\sigma^2}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-M\sigma^4/(4\alpha^2)} \right] \delta(u) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha^3}u\sqrt{u^2 + M\sigma^4}e^{-(u^2+M\sigma^4)/(4\alpha^2)}, \quad (2.26)$$

où  $\alpha$  fixe la valeur moyenne de l'écart  $u$ . Il apparaît une faible densité d'écarts nuls correspondant à une population de niveaux dégénérés introduite par l'attraction des résonances le long de l'axe réel. Il est important de noter que la population d'écarts nuls est directement reliée à la densité des petits écarts qui est plus faible pour GUE (répulsion quadratique aux petits écarts) que pour GOE (répulsion linéaire aux petits écarts). En regardant le comportement des distributions aux petits écarts, on voit que la distribution des écarts pour GOE conserve une répulsion linéaire alors que pour GUE la répulsion quadratique s'est transformée en une répulsion linéaire dans la limite  $u \ll \sqrt{M}\sigma^2$ .

Expérimentalement, il est extrêmement difficile d'avoir accès aux très faibles écarts et aux écarts nuls. Ainsi, pour comparer avec des résultats expérimentaux, il est plus intéressant de considérer la distribution des écarts  $u'$  non nuls. On trouve, après avoir ramener l'écart moyen à l'unité, que :

$$P_{\text{GOE}}(u') = \frac{1}{2\alpha^2}u'e^{-u'^2/(4\alpha^2)}, \quad (2.27)$$

qui correspond à la distribution des écarts du système fermé (2.7) en posant  $\alpha^2 = 1/\pi$ .

Et, pour GUE :

$$P_{\text{GUE}}(u') = \frac{u' \sqrt{u'^2 + M\sigma^4} e^{-(u'^2 + M\sigma^4)/(4\alpha^2)}}{2\sqrt{\pi}\alpha^3 \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{M}\sigma^2}{2\alpha}\right) + \frac{\sqrt{M}\sigma^2}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-M\sigma^4/(4\alpha^2)} \right]}. \quad (2.28)$$

La figure Fig. 2.10 montre l'évolution de cette distribution lorsque la variance de la largeur spectrale augmente.

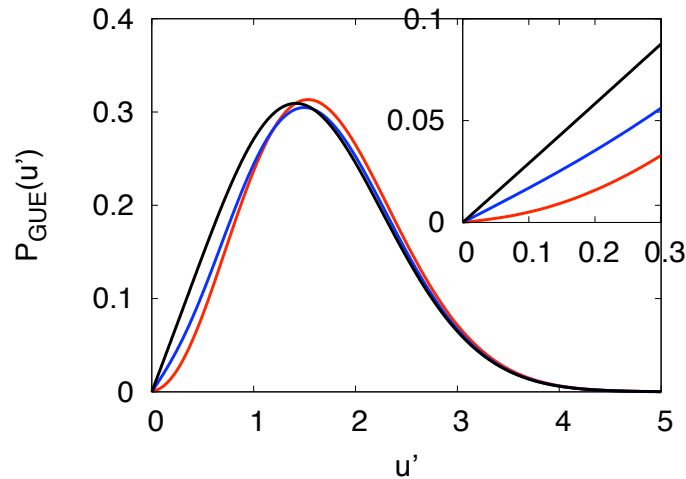


FIG. 2.10 – Expressions analytiques des distributions des écarts non nuls  $u'$  dont la partie hermitienne appartient à GUE (2.28). En rouge  $\sqrt{M}\sigma^2=0.1$ , en bleu  $\sqrt{M}\sigma^2 = 0.5$ , en noir  $\sqrt{M}\sigma^2 = 1$ . Le comportement à l'origine passe d'une dépendance quadratique à une dépendance linéaire lorsque  $\operatorname{var}(\Gamma)$  augmente.

### 2.3.2 Etude numérique

#### Le modèle

Les simulations numériques sont réalisées pour tester les prédictions analytiques précédemment obtenues (2.27) et (2.28), ainsi que pour étudier les distributions dans le cas d'un nombre réduit de canaux de pertes. Les simulations numériques consistent à diagonaliser des matrices aléatoires non-hermitiennes de la forme :

$$H_{eff} = H - \frac{i}{2} VV^T, \quad (2.29)$$

où  $H$  est une matrice aléatoire appartenant à GOE ou GUE, et  $VV^T$  est une matrice réelle appartenant à l'ensemble de Wishart [56]. Il est important de noter que les distributions

analytiques sont définies pour un écart moyen fixé, il est donc nécessaire de se placer dans les mêmes conditions pour les simulations numériques. Il est bien connu que la densité d'état moyenne des énergies propres  $\langle \rho(E) \rangle$  de matrices aléatoires gaussiennes de grande taille n'est pas constante et suit la loi semi-circulaire de Wigner ([7], page 79) :

$$\langle \rho(E) \rangle = \sqrt{1 - \pi^2 E^2 / 4}. \quad (2.30)$$

Cette expression, indépendante de l'ensemble considéré, s'obtient en définissant les variances des éléments de matrices de  $H$  de sorte que l'écart moyen entre niveaux au centre de la loi semi-circulaire soit égal à  $\Delta = 1/N$  :

$$\langle H_{ij}^2 \rangle_{\text{GOE}} = \begin{cases} 4/(\pi^2 N) & \text{si } i = j \\ 2/(\pi^2 N) & \text{sinon} \end{cases} \quad \langle H_{ij}^2 \rangle_{\text{GUE}} = \begin{cases} 2/(\pi^2 N) & \text{si } i = j \\ 1/(\pi^2 N) & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.31)$$

Comme les amplitudes de couplage (2.16) sont définies à partir d'un écart moyen fixe, seuls 400 niveaux situés au centre de la distribution, où la densité d'état varie très faiblement (Fig. 2.11), sont conservés. Cette procédure assure une variation maximale de l'écart moyen de 5%.

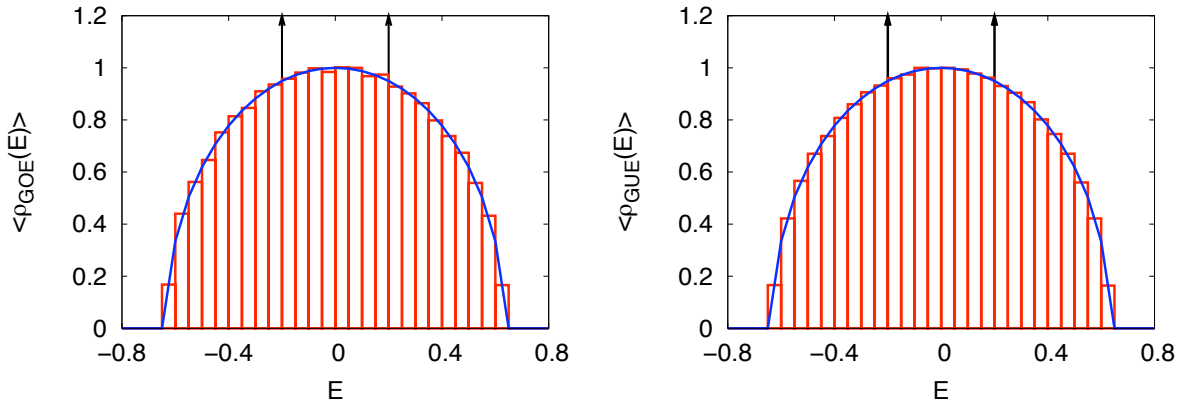


FIG. 2.11 – Densité d'états pour GOE à gauche et GUE à droite. En rouge la loi de Wigner (2.30) et en bleu l'histogramme numérique obtenue par diagonalisation de 10 matrices de taille  $1000 \times 1000$ . Les niveaux gardés pour les statistiques sont entre les deux flèches noires.

Pour la partie non-hermitienne de  $H_{eff}$ , la variance  $\sigma^2$  des amplitudes de couplage (2.16) est choisie telle que la valeur moyenne de la largeur spectrale soit fixée à  $\langle \Gamma \rangle = 0.5\Delta$ . Cette contrainte permet de rester loin du couplage fort, où les prédictions analytiques précédemment obtenues ne sont plus valables. La condition  $\langle \Gamma \rangle = 0.5\Delta$  fixe directement

la constante de couplage  $\kappa = \pi/4M$  et le paramètre  $\sqrt{M}\sigma^2 = \pi/(4\sqrt{M})$ .

### Les résultats numériques

Les histogrammes des distributions des écarts sont réalisés en diagonalisant 100 matrices de taille  $1000 \times 1000$ . Pour s'intéresser aux écarts non nuls, un paramètre de coupure  $u_0 = 0.05\Delta$  est introduit, seuls les écarts  $u > u_0$  sont conservés pour construire les histogrammes. Les résultats numériques et analytiques sont confrontés sur la Fig. 2.12. Un excellent accord est trouvé pour un nombre de canaux  $M \geq 10$ . Pour un plus petit nombre de canaux, l'hypothèse  $M \gg 1$  n'est plus valide et les fluctuations statistiques des éléments de couplage sont telles que le théorème de la limite centrale ne s'applique plus.



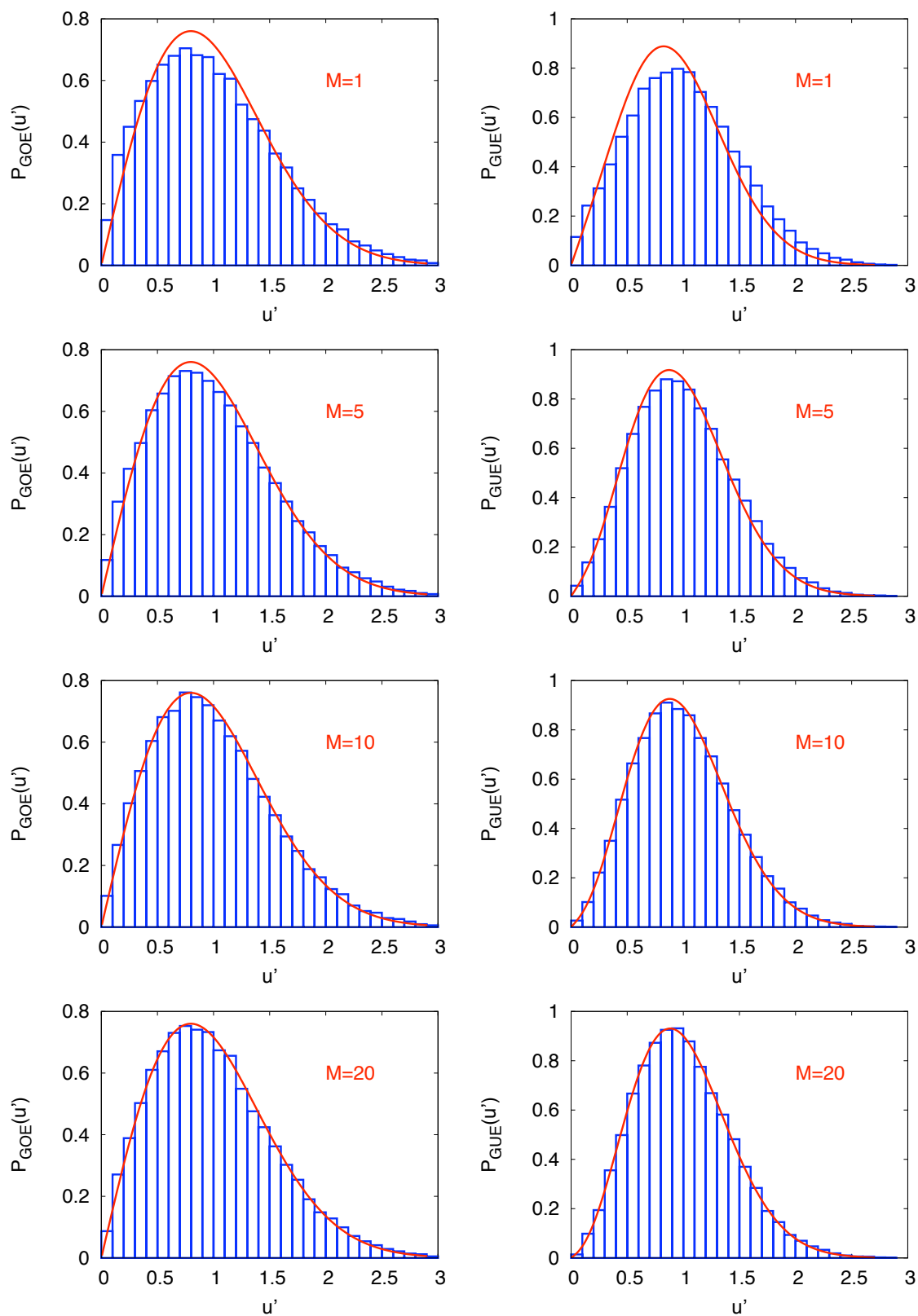


FIG. 2.12 – Distributions de probabilité des écarts non nuls  $u'$  pour GOE à gauche et pour GUE à droite, pour un nombre de canaux de pertes de  $M = 1, 5, 10$  et  $20$  de haut en bas. En bleu, les histogrammes issus des simulations numériques. En rouge sont représentées les expressions analytiques (2.27) et (2.28).

## 2.4 Distribution des croisements évités pour un système ouvert

L'expression de l'écart du système ouvert (2.22) indique que les valeurs du paramètre variable  $\mu$  pour lesquels on a un minimum local de  $u$  correspondent à celles pour lesquelles on a un minimum local du système fermé (Fig. 2.13). La distribution des croisements évités  $d$  s'obtient donc en utilisant la distribution des croisements évités du système fermé (2.10).

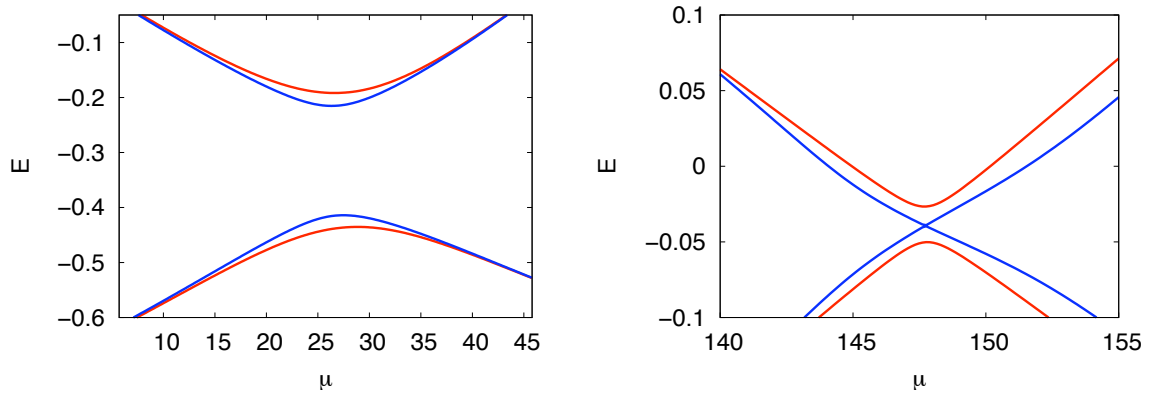


FIG. 2.13 – Evolution des écarts en fonction du paramètre  $\mu$  (en degré) dans un modèle à 2 niveaux où la partie hermitienne est de la forme (2.11). En rouge pour le système fermé, en bleu pour le système ouvert. A gauche pour un minimum local de  $u$  non nul, à droite pour un minimum local de  $u$  nul.

### 2.4.1 Expressions analytiques

La distribution des croisements évités  $P(d)$  se définit de la même manière que la distribution des écarts (2.23) :

$$P(d) = \left\langle \delta(d) \theta(\sqrt{M}\sigma^2 - c) \right\rangle + \left\langle \delta\left(d - \sqrt{c^2 - M\sigma^4}\right) \theta(c - \sqrt{M}\sigma^2) \right\rangle, \quad (2.32)$$

où la moyenne s'effectue sur l'écart évité du système fermé  $c$  qui est donné par la loi de J. Zakrzewski et M. Kuś (2.10) :

$$P(d) = \int_0^{\sqrt{M}\sigma^2} dc P(c) \delta(d) + \int_{\sqrt{M}\sigma^2}^{\infty} dc P(c) \delta\left(d - \sqrt{c^2 - M\sigma^4}\right). \quad (2.33)$$

Après intégration, la distribution des croisements évités s'écrit, pour GOE :

$$P_{\text{GOE}}(d) = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{M}\sigma^2}{\sqrt{2}\alpha}\right)\delta(d) + \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha^2}} \frac{d}{\sqrt{d^2 + M\sigma^4}} e^{-(d^2 + M\sigma^4)/(2\alpha^2)}. \quad (2.34)$$

et pour GUE :

$$P_{\text{GUE}}(d) = (1 - e^{-M\sigma^4/(4\alpha^2)})\delta(d) + \frac{1}{2\alpha^2} c e^{-(c^2 + M\sigma^4)/(4\alpha^2)}. \quad (2.35)$$

Un creux aux petits écarts, dû au comportement linéaire de la distribution dans cette zone (2.34), apparaît pour GOE. La distribution diffère donc fortement par rapport au cas fermé pour lequel la densité de probabilité est maximale (2.10).

Là encore, il est utile de se concentrer sur les croisements évités non nuls  $d'$  ; les distributions obtenues permettront une comparaison directe avec les résultats expérimentaux [11].

Pour GOE :

$$P_{\text{GOE}}(d') = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha^2}} \frac{d' e^{-(d'^2 + M\sigma^4)/(2\alpha^2)}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{M}\sigma^2}{\sqrt{\pi}\alpha}\right) \sqrt{d'^2 + M\sigma^4}}, \quad (2.36)$$

tandis que pour GUE :

$$P(d) = \frac{1}{2\alpha^2} d e^{-d^2/(4\alpha^2)}, \quad (2.37)$$

l'expression s'identifie à celle obtenue dans le cas fermé. La figure Fig. 2.14 montre l'évolution de la distribution lorsque la variance de la largeur spectrale augmente, le creux à l'origine est d'autant plus important que la variance est grande.

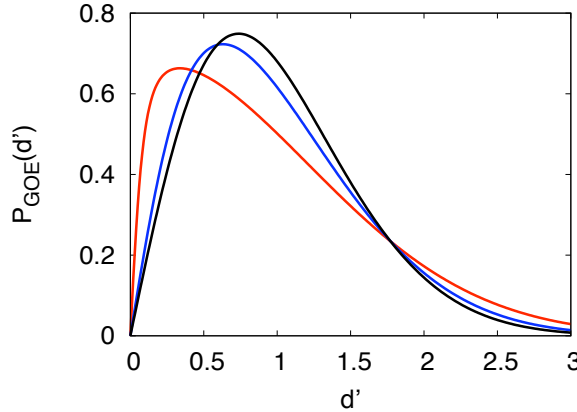


FIG. 2.14 – Expressions analytiques des distributions des croisements évités non nuls  $d'$  d'un système ouvert dont la partie hermitienne appartient à GOE à droite. En rouge  $\sqrt{M}\sigma^2=0.1$ , en bleu  $\sqrt{M}\sigma^2 = 0.5$ , en noir  $\sqrt{M}\sigma^2 = 1$ .

### 2.4.2 Simulations numériques de matrices aléatoires

#### Le modèle

Dans le cas des croisements évités, l'hamiltonien effectif paramétrique s'écrit :

$$H_{eff}(\mu) = H_1 \cos \mu + H_2 \sin \mu - \frac{i}{2} V V^T. \quad (2.38)$$

La partie hermitienne adopte cette forme afin d'assurer l'indépendance de l'écart moyen par rapport à  $\mu$  [113]. Le paramètre  $\mu \in [0, \pi[$  est discrétisé avec un pas de  $\delta\mu = \pi/1300$ . La discrétisation du paramètre est choisie suffisamment fine pour qu'une interpolation hyperbolique, du type de celle présentée dans [113], ne soit pas nécessaire. Les éléments de matrices de  $H_1$  et de  $H_2$  ainsi que les éléments de couplage sont définis de la même manière que pour les simulations numériques des écarts. Il en va de même pour les variances des éléments de matrices de  $H_1$  et de  $H_2$  ainsi que les variances des éléments de couplage.

#### Les résultats numériques

Pour obtenir la distribution des croisements évités non nuls, un paramètre de coupure  $d_0$  est introduit  $d_0 = 0.1\Delta$  tel que les écarts  $d' < d_0$  ne soient pas pris en compte. Les résultats sont représentés sur la Fig. 2.15. Un bon accord entre la théorie et les simulations numériques est obtenu pour  $M \geq 5$  dans le cas de GOE et  $M \geq 3$  dans le cas de GUE. Pour les plus petits  $M$  un désaccord notable, dû aux fluctuations des amplitudes de couplages, apparaît. Cependant, pour GOE, un meilleur accord entre les histogrammes et les distributions théoriques pour les petites valeurs de  $M$  peut être obtenu en considérant la constante de couplage  $\kappa$  (2.16) comme un paramètre d'ajustement, noté  $\kappa_{aju}$ , modélisant un couplage effectif. En effet, en réalisant une procédure d'ajustement, basée sur la méthode des moindres carrés, les histogrammes numériques peuvent être extrêmement bien approchés par l'expression analytique (2.36) valable pour  $M \gg 1$ . Les constantes de couplage  $\kappa_{aju}$  sont données dans le tableau ci-joint :

$M$	$\kappa$	$\kappa_{aju}$
1	0.7854	0.0628
3	0.2618	0.0113
5	0.1571	0.1131
10	0.0785	0.0879

La diminution de la constante de couplage  $\kappa_{aju}$  aux petits  $M$  peut se comprendre qualitativement. Dans le cas  $M \gg 1$ , tous les croisements évités pour lesquels  $s < \sqrt{M}\sigma^2$ ,

deviennent dégénérés. Par contre, quand  $M$  diminue, des fluctuations des termes contenant les amplitudes de couplage apparaissent, et induisent, dans la région  $[0; \sqrt{M}\sigma^2]$ , une population de croisements évités non dégénérés. Comme ces fluctuations sont d'autant plus importantes que le nombre de canaux est petit, la densité aux faibles croisements évités va donc augmenter quand  $M$  diminue, et faire tendre la distribution vers celle du système fermé.

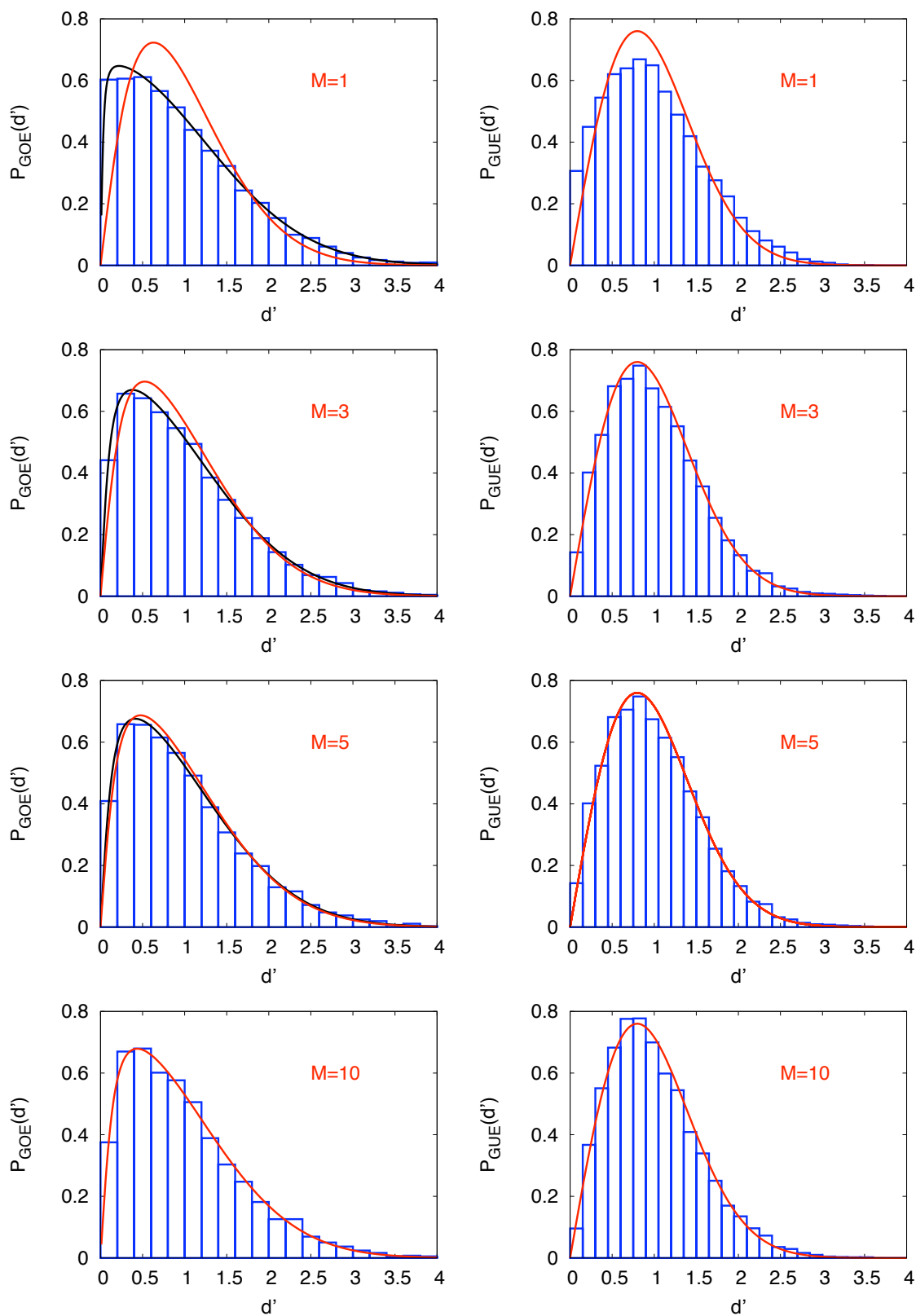


FIG. 2.15 – Distributions de probabilité des croisements évités non nuls  $d'$  pour GOE (à gauche) et pour GUE (à droite) pour un nombre de canaux de perte  $M=1, 3, 5$  et  $10$  de bas en haut. En bleu, les histogrammes issus des simulations numériques. En traits pleins, les résultats analytiques (2.36) et (2.37) (en rouge pour les valeurs de la constante de couplage  $\kappa = \pi/4M$ , en noir pour les constantes de couplages  $\kappa_{aju}$  obtenues par la méthode des moindres carrés).

### 2.4.3 Retour à la cavité micro-onde paramétrique

Finalement, nous pouvons comparer l'expression analytique de la distribution des croisements évités (2.36) à celle obtenue expérimentalement avec une cavité électromagnétique reliée à trois antennes, c'est-à-dire  $M = 3$ . Bien que l'on sorte du domaine de validité de l'approche théorique ( $M \gg 1$ ), les simulations numériques ont montré que les résultats analytiques peuvent être étendus pour un faible nombre de canaux en introduisant un couplage effectif. Comme le montre la Fig 2.16, le résultat du modèle à deux niveaux s'accorde parfaitement à l'histogramme expérimental et confirme que le désaccord entre les résultats expérimentaux et la prédiction théorique du système fermé est dû au couplage avec l'extérieur. Ainsi, en utilisant un simple modèle à 2 niveaux, nous avons obtenu les distributions des écarts évités qui ont permis d'expliquer les résultats expérimentaux de B. Dietz *et al.*, restés jusque là pas totalement interprétés [118].

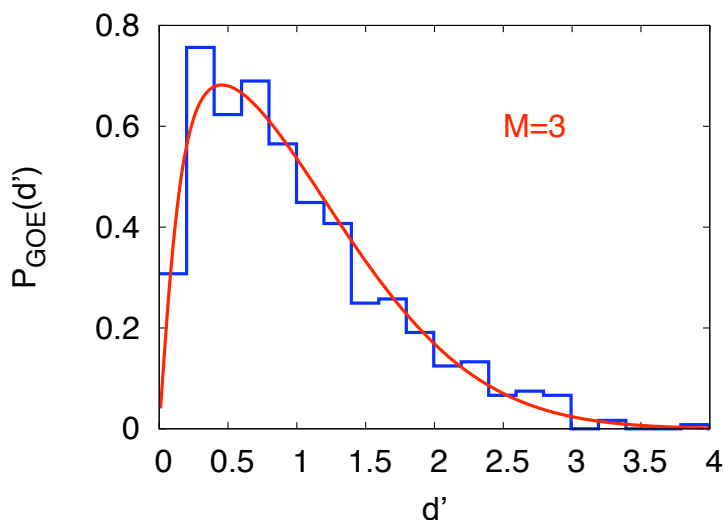


FIG. 2.16 – Distributions de probabilité des croisements évités non nuls. En bleu, l'histogramme expérimental [11]. En rouge, la distribution analytique pour un constante de couplage effective  $\kappa_{aju} = 0.182$ , obtenue par une procédure d'ajustement.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, je me suis intéressé aux propriétés statistiques des écarts et des croisement évités pour des systèmes ondulatoires chaotiques ouverts, dont le couplage avec l'extérieur est modélisé par un grand nombre de canaux de pertes. Le caractère local de ces quantités a rendu légitime l'utilisation d'un modèle à 2 niveaux, permettant

d'obtenir aisément les expressions analytiques des distributions. Les modifications des distributions par rapport au cas fermé ont été expliquées par le phénomène de piégeage des résonances, qui modifie la population des faibles écarts entre niveaux, allant jusqu'à entraîner une population de niveaux dégénérés. Les prédictions théoriques du modèle à 2 niveaux ont ensuite été vérifiées par des simulations numériques de matrices aléatoires de grandes tailles.

Alors que les distributions des écarts pour GOE et GUE, et des croisements évités pour GUE, sont très peu modifiées par rapport au cas fermé, la distribution des croisements évités pour GOE subit une profonde transformation par rapport au cas fermé : un creux aux petits écarts apparaît. La forme particulière de l'expression de croisements évités pour GOE a permis de considérer le régime d'un faible nombre de canaux en introduisant un couplage effectif. L'extension du domaine de validité de la distribution aux faibles valeurs de  $M$  a permis de décrire des résultats expérimentaux obtenus avec une cavité électromagnétique supraconductrice paramétrique possédant  $M = 3$  canaux. Cependant, une description statistique des écarts et des croisements évités à nombre quelconque de canaux restent un problème non résolu.





# Chapitre 3

## Statistiques des fonctions propres

Pour les systèmes ondulatoires chaotiques fermés, les propriétés statistiques des fonctions propres sont très bien connues [24] mais demeurent d'un intérêt limité. En effet, le caractère hermitien de l'hamiltonien entraîne, d'une part, que les vecteurs propres sont indépendants les uns des autres, *i.e.* orthogonaux, et, d'autre part, que la distribution des vecteurs propres est uniquement déterminée par la mesure de Haar du groupe laissant l'ensemble invariant. Ainsi, la distribution du module carré du champ obéit à la loi de Porter-Thomas pour GOE et à la loi de Poisson pour GUE [119]. Seuls les *scars*, c'est-à-dire les modes possédant une surintensité le long d'orbites périodiques instables [2, 120] ont attiré l'attention de la communauté, et continuent d'être étudiés théoriquement [121–123]. Ces modes *scars*, dont l'étude ne relève pas de la Théorie des Matrices Aléatoires, sont, à haute énergie, des événements rares et ne seront pas considérés dans la suite.

La situation se révèle plus complexe pour les fonctions propres de systèmes chaotiques ouverts. La différence fondamentale provient du fait que les systèmes ouverts sont décrits par un opérateur non-hermitien : l'hamiltonien effectif. La non-hermiticité de cet opérateur va rendre les fonctions propres non-orthogonales et introduire de fortes corrélations entre celles-ci, leur étude devenant alors bien plus riche et intéressante. En effet, la non hermiticité est introduite par un potentiel imaginaire modélisant le couplage avec l'extérieur, et mesurer la non-orthogonalité revient donc à quantifier l'effet du couplage sur les fonctions propres *i.e.* dans le domaine spatial. Mais, bien que les statistiques des fonctions propres intéressent la communauté depuis une bonne dizaine d'années, celles-ci restent très peu comprises dans le cas de systèmes chaotiques ouverts. Seuls quelques cas particuliers ont été considérés, généralement pour des systèmes dont la limite fermée est décrite par GUE [124].

Les premières études sur les corrélations des fonctions propres d'opérateur de type hamiltonien effectif datent du début des années 2000 [125,126]. Ces travaux se sont limités au couplage fort [54,69], pour lequel il est possible d'appliquer une méthode d'approximation basée sur des méthodes diagrammatiques [127]. Puis, en 2002, Y. Fyodorov et B. Mehlige se sont intéressés au couplage intermédiaire, pour lequel les méthodes diagrammatiques ne sont plus possibles, dans le cas particulier d'un unique canal de perte [128]. Le seul travail sur des systèmes dont la limite fermée est décrite par GOE est dû à H. Schomerus *et al.* [129], sur la non-orthogonalité de mode laser d'une cavité chaotique où seuls les cas à un et deux canaux de pertes ont été explicitement traités. Étendre la connaissance des statistiques des fonctions propres à un nombre de canaux de pertes quelconque et aux systèmes dont la limite fermée est décrite par GOE reste donc un problème ouvert.

Ce chapitre présente des résultats contribuant à combler ce vide. Je m'intéresserai ainsi aux propriétés statistiques des fonctions propres de l'hamiltonien effectif dans le régime où les pertes inhomogènes, c'est-à-dire les pertes contribuant à la non-orthogonalité [10,95], sont faibles. Ce régime sera étudié pour des systèmes dont la limite fermée est décrite par GOE ou GUE et pour un nombre de canaux de pertes quelconque. Tout d'abord, je décrirai la notion fondamentale de non-orthogonalité des matrices non-hermitiennes. Je montrerai ensuite que la non-orthogonalité peut être décrite en termes de grandeurs scalaires et je détaillerai les résultats précédemment obtenus par la communauté sur différents ensembles de matrices non-hermitiennes (§3.1). Dans le régime où les pertes inhomogènes sont faibles, je montrerai que la non-orthogonalité peut être caractérisée par un paramètre unique, que je définirai comme le *paramètre de non-orthogonalité* (§3.2). Les statistiques des fonctions propres seront alors étudiées via ce paramètre (§3.3). Pour comprendre l'effet des fluctuations spectrales de GOE et de GUE sur la non-orthogonalité, un spectre complètement rigide de type oscillateur harmonique quantique, appelé *picket-fence*, sera aussi considéré. L'étude de ces trois ensembles permettra d'obtenir une expression générale reliant le paramètre de non-orthogonalité aux fluctuations des largeurs spectrales. Enfin, j'établirai analytiquement les distributions du paramètre de non-orthogonalité pour les différents ensembles considérés.

### 3.1 Non-orthogonalité des fonctions propres

Cette première section se veut très générale. Tout d'abord, la notion de non-orthogonalité pour un opérateur non-hermitien sera présentée, puis nous verrons que cette non-orthogonalité peut être mesurée à l'aide d'une matrice de recouvrement. Enfin, les principaux résultats théoriques obtenus sur différents ensembles de matrices non hermitiennes, tels que les

ensembles de Ginibre, les ensembles de Girko et les ensembles type hamiltonien effectif, seront résumés.

### 3.1.1 Vecteurs propres à gauche et vecteurs propres à droite

Dans le cas d'un opérateur hermitien  $H$ , il est bien connu que les vecteurs propres à droite  $\{|n\rangle\}$  (les kets) et les vecteurs propres à gauche  $\langle n|$  (les bras) sont associés à un même ensemble de valeurs propres réelles  $\{a_n\}$ , et sont obtenus par l'opération de transposition complexe  $\langle n| = |n\rangle^\dagger$ . La diagonalisation d'un opérateur hermitien s'écrit donc :

$$H|n\rangle = a_n|n\rangle \quad \text{et} \quad \langle n|H = \langle n|a_n. \quad (3.1)$$

La condition d'hermiticité entraîne l'orthogonalité des vecteurs propres ( [47] pages 136-137), que l'on prendra de norme unité :  $\langle k|n\rangle = \delta_{kn}$ .

Dans le cas d'un opérateur non-hermitien  $J$ , il est nécessaire d'introduire deux bases ( $\{\langle L_n|\}, \{|R_n\rangle\}$ ) constituées des vecteurs propres à gauche  $\{\langle L_n|\}$  et à droite  $\{|R_n\rangle\}$  associés à un même ensemble de valeurs propres complexes  $\{\lambda_n\}$  ( [51] pages 884-885). La diagonalisation de  $J$  peut donc se mettre sous quatre formes différentes :

$$\begin{aligned} J|R_n\rangle &= \lambda_n|R_n\rangle, & \langle L_n|J &= \langle L_n|\lambda_n, \\ J^\dagger|L_n\rangle &= \lambda_n^*|L_n\rangle, & \langle R_n|J^\dagger &= \langle R_n|\lambda_n^*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les vecteurs propres à gauche et à droite ne s'obtiennent alors plus par l'opération de transposition complexe :  $\langle L_n| \neq |R_n\rangle^\dagger$ . A partir des relations (3.2), il est facile de montrer que les vecteurs propres à gauche et à droite ne sont pas orthogonaux. Ainsi, les produits scalaires  $\langle L_k|L_n\rangle$  et  $\langle R_k|R_n\rangle$  ne sont pas fixés mais fluctuent selon  $k$  et  $n$  et les vecteurs propres des deux bases sont orthogonaux *i.e.* bi-orthogonaux :

$$\langle L_k|R_n\rangle = \delta_{kn}. \quad (3.3)$$

Par la suite, nous verrons que la non-orthogonalité des vecteurs de base  $\{\langle L_n|\}$  et  $\{|R_n\rangle\}$  va induire de fortes corrélations entre les vecteurs propres associés à une même base.

### 3.1.2 Mesures de la non-orthogonalité

Cette section introduit les différentes quantités utilisées pour caractériser la non-orthogonalité et présente brièvement les résultats obtenus sur différents ensembles de matrices non-hermitiennes, notamment les ensembles de Ginibre et de Girko.

### Les ensembles de Ginibre et de Girko

Les ensembles de Ginibre [130] et de Girko [131], introduits respectivement en 1965 et en 1985, peuvent se voir comme une extension des ensembles de Wigner [4]. Pour les ensembles de Ginibre, les éléments de matrice sont des variables gaussiennes complètement indépendantes, la contrainte d'hermiticité est donc supprimée :  $\langle J_{kl}J_{lk}^* \rangle = 0$ . La distribution des éléments de matrices est alors donnée par :

$$P_{Gin}(J) \propto \exp\left(-N\text{Tr}JJ^\dagger\right) \quad (3.4)$$

de sorte que  $\langle J_{kl} \rangle = 0$  et  $\langle |J_{kl}|^2 \rangle = 1/N$ ,  $N$  étant la dimension de la matrice. Bien qu'introduit de manière purement formelle, les ensembles de Ginibre restent considérablement étudiés par la communauté, aussi bien du point de vue fondamental [132–134] que du point de vue des applications. Evoquons, à titre d'exemples, les réseaux de neurones [135], le chaos quantique directionnel [65], et la théorie du calcul quantique [136].

L'ensemble de Girko est lui une généralisation de l'ensemble de Ginibre, où les éléments de matrices ne sont plus indépendants mais corrélés :  $\langle J_{kl} \rangle = 0$ ,  $\langle |J_{kl}|^2 \rangle = 1/N$  mais  $\langle J_{kl}J_{lk}^* \rangle = \tau/N$ , le paramètre réel  $\tau \in [-1 : 1]$  mesurant le degré de corrélation. Ce paramètre permet de passer continûment de l'ensemble de Wigner, pour lequel  $\tau = 1$ , à l'ensemble des matrices anti-hermitiennes, pour lequel  $\tau = -1$ ,  $\tau = 0$  correspondant à l'ensemble de Ginibre. La distribution des éléments se met alors sous la forme :

$$P_{Gir}(J) \propto \exp\left(-\frac{N}{1+\tau^2}\text{Tr}(JJ^\dagger - \tau\text{Re}[JJ])\right) \quad (3.5)$$

Intéressons-nous maintenant à la répartition dans le plan complexe des valeurs propres de ces ensembles. La densité des valeurs propres  $\rho(x + iy)$  a été obtenue, dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , par H.-J.Sommers *et al.* [137] :

$$\rho(x + iy) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-\tau^2)} & \text{si } \frac{x^2}{(1+\tau)^2} + \frac{y^2}{(1-\tau)^2} \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

La densité des valeurs propres est donc répartie uniformément dans une ellipse, le petit et le grand axe dépendant du paramètre d'asymétrie  $\tau$  (Fig 3.1).

### La matrice de recouvrement $O$

J. Chalker et B. Mehlis sont les premiers, en 1998, à s'intéresser aux statistiques des vecteurs propres de matrices non hermitiennes [138], et ce, pour l'ensemble de Ginibre

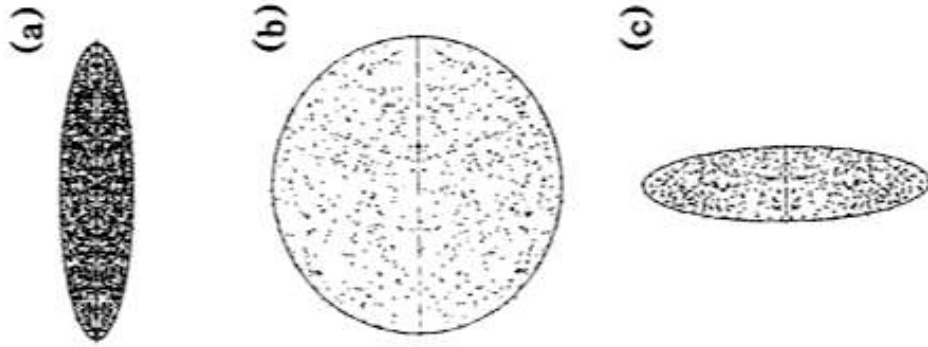


FIG. 3.1 – Densité des valeurs propres (3.6). a) pour  $\tau = -3/5$  b) pour  $\tau = 0$  correspondant à l'ensemble de Ginibre et c) pour  $\tau = 3/5$ . La figure est extraite de la référence [137].

complexe (3.4). Les corrélations entre vecteurs propres sont caractérisées à partir d'une matrice de recouvrement  $O$  définie par les produits scalaires de vecteurs propres à gauche et à droite :

$$O_{\alpha\beta} = \langle L_\alpha | L_\beta \rangle \langle R_\beta | R_\alpha \rangle \quad (3.7)$$

Notons que pour un opérateur hermitien, les éléments de matrice de  $O$  se réduisent à  $O_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . La forme de ce corrélateur est choisie pour être invariante par la transformation laissant les expressions (3.2) et (3.3) invariantes :

$$|R_n\rangle \rightarrow c_n |R_n\rangle \quad \text{et} \quad \langle L_n| \rightarrow \langle L_n| c_n^{-1} \quad (3.8)$$

où  $c_n$  est un nombre complexe.

A partir de la matrice de recouvrement (3.7), J. Chalker et B. Mehlig définissent les valeurs moyennes locales, c'est-à-dire en faisant intervenir la densité des valeurs propres, des éléments diagonaux et non diagonaux de la matrice de recouvrement :

$$\begin{aligned} O(z) &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{\alpha} O_{\alpha\alpha} \delta(z - \lambda_{\alpha}) \right\rangle \\ O(z_1, z_2) &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{\alpha \neq \beta} O_{\alpha\beta} \delta(z_1 - \lambda_{\alpha}) \delta(z_2 - \lambda_{\beta}) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

En 1999, R. Janik *et al.* [125] reprennent la définition du corrélateur diagonal et obtiennent analytiquement son expression pour différents ensembles de matrices, dont

l'ensemble de Girko (3.5) :

$$O_{Gir}(z) = \frac{N}{\pi} \frac{1}{(1 - \tau^2)^2} \left[ (1 - \tau^2)^2 - (1 - \tau^2)^2 |z|^2 + 2\tau \operatorname{Re} [z^2] \right] \quad (3.10)$$

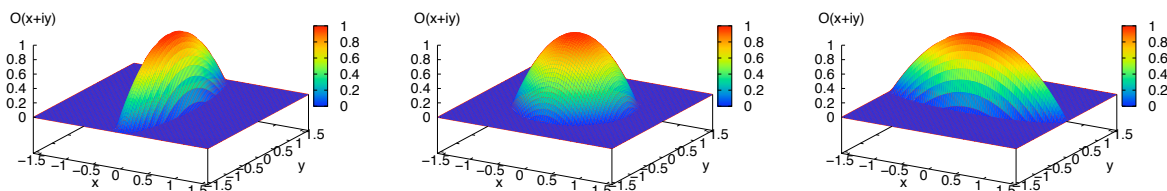


FIG. 3.2 – Le corrélateur diagonal de l'ensemble de Girko (3.10). A gauche pour  $\tau = -3/5$ , au milieu pour  $\tau = 0$  correspondant à l'ensemble de Ginibre et à droite pour  $\tau = 3/5$ .

Comme le montre l'expression (3.10) et la Fig. 3.2 le corrélateur n'est pas constant mais dépend fortement de  $z$ , alors que la densité d'état est constante (Fig. 3.1). Ce premier résultat nous laisse deviner le caractère fortement non-local de la non-orthogonalité.

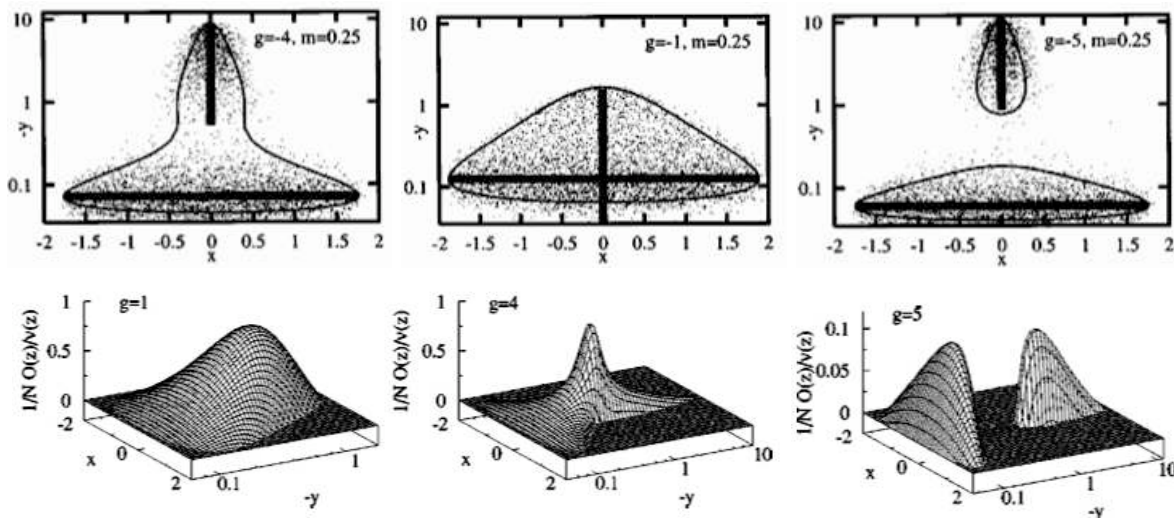


FIG. 3.3 – En haut, densité des valeurs propres pour  $m = 0.25$  et pour différentes valeurs de  $g$ . En bas, le corrélateur diagonal pour les mêmes valeurs de  $m$  et de  $g$ . Les figures sont extraites des références [139] et [125].

R. Janik *et al.* [125] ont aussi considéré des matrices non-hermitiennes de type hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = H - igVV^\dagger$ , où  $H$  appartient à GUE, les éléments de matrices de  $V$

sont des variables aléatoires gaussiennes complexes et  $g$  caractérise la force de couplage. Cet ensemble est étudié dans la limite du couplage fort ( $g \gg 1$ ), c'est-à-dire dans la limite d'un grand nombre de canaux de pertes fortement couplés :  $N \rightarrow \infty$  et  $M \rightarrow \infty$  avec  $m = N/M$  fixé. D'un point de vue technique, cette limite permet d'appliquer une méthode d'approximation auto-cohérente basée sur des méthodes diagrammatiques [127]. L'expression du corrélateur diagonal dans le régime de couplage fort s'écrit :

$$O_{\mathcal{H}_{\text{eff}}}(z) = \frac{N}{\pi} \left[ \frac{1}{1-gy} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \left( \frac{g}{1-gy} + \frac{m}{y} + \frac{1}{g} \right) \right] \quad (3.11)$$

Ce corrélateur est représenté pour différentes valeurs de la force de couplage en Fig. 3.3.

Y. Fyodorov et B. Mehlis [128] sont les premiers à s'intéresser au couplage intermédiaire, pour lequel les méthodes d'approximations ne sont plus applicables. Ils obtiennent, pour un système dont la limite fermée est décrite par GUE, et dans le cas particulier d'un unique canal de pertes, l'expression analytique du corrélateur diagonal et non-diagonal. Un parallèle est fait entre le corrélateur diagonal et la densité (voir Fig 3.4).

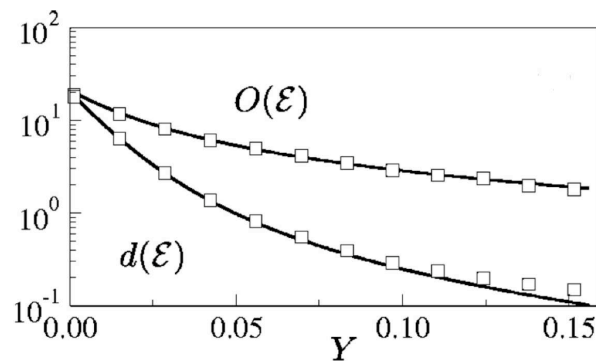


FIG. 3.4 – Corrélateur diagonal et densité des valeurs propres pour  $M = 1$  en fonction de  $\mathcal{E} = 0 - iY$ . La figure est extraite de la référence [128].

On peut noter que la décroissance de  $O(\mathcal{E})$  est bien plus lente que celle de la densité  $d(\mathcal{E})$ . Ce résultat confirme que le corrélateur est une quantité fortement non-locale indépendamment du régime de couplage. Nous verrons d'ailleurs que cette non-localité apparaît aussi en couplage faible.

### Le facteur de Petermann $K$

Cette quantité est apparue en Physique des lasers dans les années 80 [140]. Il est bien connu qu'un laser monomode près du seuil sélectionne et excite un mode par un mécanisme



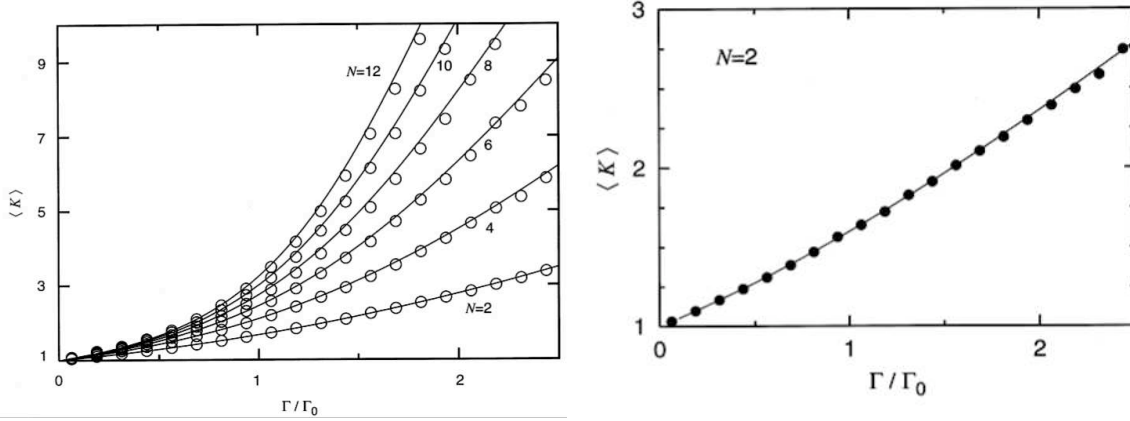


FIG. 3.5 – Valeur moyenne du facteur de Petermann en fonction de la largeur renormalisée. A gauche pour un système dont la limite fermée est décrite par GUE, le nombre de canaux est ici noté  $N$ . A droite pour un système dont la limite fermée est décrite par GOE, où seuls les cas à un et deux canaux ont été considérés. Les figures sont extraites de la référence [129].

d'amplification non-linéaire. Dans ce processus, les fluctuations du vide induisent une limite fondamentale dans le spectre d'émission. Cette largeur fondamentale  $\delta\omega$ , obtenue tout d'abord par A. Schawlow et C. Townes [141] s'écrit :  $\delta\omega_{ST} = \Gamma^2/(2I)$  où  $\Gamma$  est la largeur du mode passif et  $I$  la puissance de sortie exprimée en nombre de photons par unité de temps. En tenant compte de la non-orthogonalité des états de résonance [140], la largeur fondamentale se met sous la forme  $\delta\omega \propto K\delta\omega_{ST}$ . Celle-ci est donc augmentée d'un facteur  $K$ , appelé le facteur de Petermann, qui s'identifie aux éléments diagonaux de la matrice de recouvrement (3.7) :

$$K_n = O_{nn} = \langle L_n | L_n \rangle \langle R_n | R_n \rangle \quad (3.12)$$

Le seuil laser s'en trouve grandement modifié par rapport à la prédiction théorique initiale (on pourra consulter [142, 143] pour plus de détails). Par la suite, le facteur de Petermann a été intensivement étudié d'un point de vue statistique, notamment pour des cavités lasers de forme chaotique par H. Schomerus *et al.* [129, 144, 145]. Ces études ont prouvé, qu'en moyenne, l'augmentation due au facteur de Petermann est de l'ordre de  $\sqrt{M}$ , où  $M$  est le nombre de canaux de pertes. Il est important de noter que ces études sont les premières à avoir produit des expressions analytiques exactes dans le régime de couplage intermédiaire et pour un nombre de canaux quelconque (Fig. 3.5).

Comme les propriétés statistiques des fonctions propres sont toutes décrites par des

grandeurs reliées aux éléments de la matrice de recouvrement, nous nous intéresserons uniquement à celle-ci dans la suite.

**Résumé.** La dernière phrase de l'article de Y. Fyodorov et B. Mehlis [128], résume parfaitement l'état d'avancement des travaux sur les statistiques des fonctions propres : *Among challenging problems deserving future research we would like to mention extending our results to the case of more than one channel and to time-reversal invariant system, as well as the problem of understanding fluctuations of the nonorthogonality overlap matrix  $O_{\alpha\beta}$ .* Cette phrase met en relief deux problèmes toujours non résolus. D'une part les statistiques des fonctions propres, dans le cas général, restent un problème de Physique Théorique non résolu. D'autre part, une interprétation physique claire des fluctuations des éléments de la matrice de recouvrement (3.7) est toujours manquante.

## 3.2 Le régime perturbatif

Comme nous l'avons vu au chapitre I, les pertes peuvent être séparées en deux types : les pertes homogènes et les pertes inhomogènes. Alors que les pertes homogènes donnent une même contribution aux largeurs, les pertes inhomogènes donnent des contributions fluctuantes. De plus, nous avons constaté que dans le cas de systèmes ondulatoires dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps, seules les pertes inhomogènes modifient la composante spatiale du champ en la transformant en une grandeur complexe. Nous allons maintenant généraliser ces résultats en montrant que seules les pertes inhomogènes contribuent à la non-orthogonalité. En nous plaçant dans le régime où les pertes inhomogènes sont faibles, nous montrerons que la non-orthogonalité des fonctions propres de l'hamiltonien effectif peut être caractérisée par un unique paramètre. Les propriétés statistiques des fonctions propres de l'hamiltonien effectif seront ainsi abordées via un paramètre de non-orthogonalité<sup>1</sup>, pour des systèmes dont la limite fermée est décrite par GOE et GUE. De plus, pour comprendre l'effet des fluctuations spectrales de ces ensembles sur la non-orthogonalité, nous considérerons aussi l'ensemble picket-fence, pour lequel le spectre est complètement rigide.

### 3.2.1 Expression du paramètre de non-orthogonalité $q^2$

En séparant les contributions homogène et inhomogène des pertes [10], l'hamiltonien effectif s'écrit  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = H - iRR^\dagger/2 - iVV^\dagger/2$ , où les matrices  $R$  de taille  $M_r \times N$  et  $V$

<sup>1</sup>Pour les systèmes dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps, ce paramètre s'identifiera au paramètre de complexité (voir Chapitre I).

de taille  $M_v \times N$  contiennent les amplitudes de couplages associées respectivement aux pertes homogènes et inhomogènes et  $M_r$  et  $M_v$  correspondent aux nombres de canaux des pertes homogènes et inhomogènes. Il apparaît utile d'écrire  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  dans la base des états propres de l'hamiltonien du système fermé  $\{|n\rangle\}$ , dont les vecteurs propres sont soumis à la normalisation  $\langle k|n\rangle = \delta_{kn}$  :

$$(\mathcal{H}_{\text{eff}})_{np} = E_n \delta_{np} - i/2 \sum_{j=1}^{M_r} R_n^j (R_p^j)^* - i/2 \sum_{j=1}^{M_v} V_n^j (V_p^j)^*, \quad (3.13)$$

où les  $\{E_n\}$  sont les énergies propres du système fermé dont les propriétés statistiques seront explicitées par la suite.

**Propriétés statistiques des amplitudes de couplage** Pour les systèmes ondulatoires chaotiques, il paraît naturel de choisir les amplitudes de couplage comme étant des variables aléatoires gaussiennes ([7] pages 233-237), de moyenne nulle et de covariance :

$$\langle R_n^j (R_{n'}^{j'})^* \rangle = 2\kappa_r \frac{\Delta}{\pi} \delta^{jj'} \delta_{nn'} \quad \langle V_n^j (V_{n'}^{j'})^* \rangle = 2\kappa_v \frac{\Delta}{\pi} \delta^{jj'} \delta_{nn'}. \quad (3.14)$$

où  $\Delta$  est l'écart moyen entre niveaux et les constantes de couplage  $\kappa$  déterminent le facteur de transmission moyen  $T = \frac{4\kappa}{(1+\kappa)^2}$  des canaux,  $T = 1$  correspondant à un couplage parfait et  $T \ll 1$  à un couplage faible. Notons que les amplitudes de couplage des pertes homogènes et inhomogènes sont considérées indépendantes.

Les pertes homogènes sont définies par  $M_r \rightarrow \infty$  et  $T_r \rightarrow 0$  avec  $M_r T_r \equiv 2\pi\Gamma_{\text{hom}}/\Delta$  fixé [10]. En effet, comme le nombre de canaux associé aux pertes homogènes tend vers l'infini, on peut appliquer le théorème de la limite centrale à la composante homogène :

$$\sum_{j=1}^{M_r \rightarrow \infty} R_n^j (R_p^j)^* = \sum_{j=1}^{M_r \rightarrow \infty} \langle R_n^j (R_p^j)^* \rangle \equiv \Gamma_{\text{hom}} \delta_{np}. \quad (3.15)$$

En injectant cette nouvelle expression dans  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , on aboutit à :

$$(\mathcal{H}_{\text{eff}})_{np} = (E_n - \frac{i}{2}\Gamma_{\text{hom}})\delta_{np} - i/2 \sum_{j=1}^{M_v} V_n^j (V_p^j)^*. \quad (3.16)$$

Ce résultat important montre explicitement que les pertes homogènes ne contribuent pas à la non-orthogonalité des fonctions propres. En effet, dans le cas où les pertes inhomogènes sont nulles, il est clair que les vecteurs propres de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  correspondent aux vecteurs propres de  $H$ . Les vecteurs propres de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  sont donc orthogonaux dans ce cas particulier.

Nous allons maintenant restreindre notre étude au régime des faibles pertes inhomogènes ( $T_v \ll 1$ ). L'opérateur  $-iVV^\dagger/2$  peut alors être vu comme une perturbation de l'opérateur diagonal  $(E_n - \frac{i}{2}\Gamma_{hom})\delta_{np}$ . Comme nous nous consacrerons uniquement à des spectres non dégénérés, la théorie des perturbations des niveaux non dégénérés au premier ordre s'applique. Les valeurs propres de (3.13) sont ainsi immédiatement obtenues :

$$\mathcal{E}_n = E_n - \frac{i}{2}(\Gamma_{hom} + \Gamma_n) \quad \text{avec} \quad \Gamma_n = \sum_{j=1}^M |V_n^j|^2 \quad (3.17)$$

où les  $\{E_n\}$  correspondent aux valeurs propres du système fermé,  $\Gamma_{hom}$  est la largeur des résonances associée à la partie homogène des pertes et les  $\{\Gamma_n\}$  sont liées aux pertes inhomogènes.

En appliquant toujours la théorie des perturbations, les vecteurs propres à gauche et à droite de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , normalisés par  $\langle L_k | R_n \rangle = \delta_{kn}$ , sont donnés dans la base  $\{|n\rangle\}$  des vecteurs propres de  $H$  :

$$|R_n\rangle = \frac{|n\rangle - i \sum_{p \neq n} \alpha_{pn} |p\rangle}{\sqrt{1 - \sum_{p \neq n} |\alpha_{pn}|^2}}, \quad |L_n\rangle = \frac{|n\rangle + i \sum_{p \neq n} \alpha_{pn} |p\rangle}{\sqrt{1 - \sum_{p \neq n} |\alpha_{pn}|^2}}, \quad (3.18)$$

où

$$\alpha_{pn} = \frac{\langle p | VV^\dagger | n \rangle}{2(E_n - E_p)}. \quad (3.19)$$

A partir des expressions des vecteurs propres (3.18), on obtient directement l'expression des éléments diagonaux  $O_{nn}$  de la matrice de recouvrement (3.7). Au premier ordre en  $|\alpha_{pn}|^2$  :

$$O_{nn} = \frac{(1 + \sum_{p \neq n} |\alpha_{pn}|^2)^2}{(1 - \sum_{p \neq n} |\alpha_{pn}|^2)^2} = 1 + 4 \sum_{p \neq n} |\alpha_{pn}|^2. \quad (3.20)$$

Ainsi, les éléments diagonaux de  $O$  sont strictement supérieur à l'unité et dépendent uniquement du paramètre  $\sum_{p \neq n} |\alpha_{pn}|^2$  qui sera appelé par la suite le *paramètre de non-orthogonalité*. Ce paramètre, noté  $q_n^2$  pour les systèmes dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps, *i.e.* pour des amplitudes de couplage réelles, s'écrit :

$$q_n^2 = \sum_{p \neq n} \frac{\Gamma_{np}^2}{4(E_n - E_p)^2} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{np} = \sum_{j=1}^M V_n^j V_p^j. \quad (3.21)$$

Dans ce cas, le paramètre mesure aussi la complexité des fonctions propres [10, 94, 95, 146, 147]. En effet, en définissant le paramètre de non-orthogonalité en terme du rapport des

variances des parties réelle et imaginaire des vecteurs propres (3.18) :

$$q_n^2 = \frac{\sum_i (\text{Im}[R_n^i])^2}{\sum_i (\text{Re}[R_n^i])^2} = \frac{\sum_i (\text{Im}[L_n^i])^2}{\sum_i (\text{Re}[L_n^i])^2}, \quad (3.22)$$

où  $R_n^i$  et  $L_n^i$  correspondent à la  $i$ ème composante de  $|R_n\rangle$  et  $|L_n\rangle$ , on retrouve l'expression du paramètre de non-orthogonalité (3.21).

Dans le cas de systèmes dont l'invariance par renversement du sens du temps est brisée, le paramètre de non-orthogonalité, noté  $r_n^2$ , est donné par :

$$r_n^2 = \sum_{p \neq n} \frac{|\Gamma_{np}|^2}{4(E_n - E_p)^2} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{np} = \sum_{j=1}^M V_n^j (V_p^j)^*. \quad (3.23)$$

**Domaine de validité de l'approche perturbative.** Comme nous venons de le voir, la non-orthogonalité est uniquement introduite par les fluctuations des largeurs, naturellement quantifiées par la variance :  $\text{var}(\Gamma) = \langle \Gamma^2 \rangle - \langle \Gamma \rangle^2$ . La théorie des perturbations présentée ici est donc pertinente tant que ces fluctuations restent faibles en comparaison de l'écart moyen entre niveaux, soit :  $\sqrt{|\text{var}(\Gamma)|} \ll \Delta$ .

### 3.2.2 Echelle naturelle des paramètres

Les paramètres de non-orthogonalité  $q_n^2$  et  $r_n^2$  contiennent deux types de contributions de différentes natures. Une contribution provient du spectre du système fermé, et l'autre provient des éléments de matrices non diagonaux de  $VV^\dagger/2$ . D'un point de vue statistique, il est clair que ces deux contributions sont indépendantes. Cependant, pour GOE et GUE, les énergies propres sont corrélées ([7] pages 86-118). De plus, les  $\Gamma_{np}$  sont elles aussi corrélées, même si les amplitudes de couplages sont indépendantes. Bien que la distribution de probabilité jointe puisse être trouvée [148], l'expression analytique n'est pas facilement exploitable, et n'est pas, dans notre cas, d'un grand intérêt pratique.

Pour surmonter la difficulté d'effectuer des moyennes sur les éléments de couplage, nous allons appliquer une approche proposée par V. Sokolov et V. Zelevinsky [53]. Ceux-ci ont considéré la grandeur  $\Gamma_{np}$  comme le produit scalaire de vecteurs contenant les amplitudes de couplage.

**Expression du paramètre de non-orthogonalité pour des systèmes dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps.** L'expression  $\Gamma_{np}$  (3.21) peut être vue comme un produit scalaire de deux vecteurs de dimension  $M$  contenant les amplitudes de couplage associées aux résonances  $n$  et  $p$  :  $\mathbf{V}_n = (V_n^1, \dots, V_n^M)$

et  $\mathbf{V}_p = (V_p^1, \dots, V_p^M)$ . Ceci suggère d'écrire  $\Gamma_{np}$  en termes de la norme des vecteurs  $\mathbf{V}_n$  et  $\mathbf{V}_p$  ainsi que de l'angle  $\theta_{np}$  entre ces deux vecteurs :

$$\Gamma_{np} = \sum_{j=1}^M V_{nj} V_{pj} = (\mathbf{V}_n \cdot \mathbf{V}_p) = \sqrt{|\mathbf{V}_n| |\mathbf{V}_p|} \cos \theta_{np} = \sqrt{\Gamma_n \Gamma_p} \cos \theta_{np}, \quad (3.24)$$

La dernière relation a été obtenue en remarquant que la norme au carré du vecteur  $\mathbf{V}_n$  :  $|\mathbf{V}_n|^2 = \sum_{j=1}^M (V_n^j)^2$ , s'identifie à la largeur spectrale  $\Gamma_n$  (3.17). Notons que dans le cas d'un seul canal de perte le produit scalaire se réduit à  $\Gamma_{np} = \sqrt{\Gamma_n \Gamma_p}$ . A partir de l'expression (3.24), le paramètre de non-orthogonalité (3.21) peut se mettre sous la forme :

$$q_n^2 = \Gamma_n \sum_{p \neq n} \frac{\Gamma_p \cos^2 \theta_{np}}{4(E_n - E_p)^2}. \quad (3.25)$$

### Expression du paramètre de non-orthogonalité pour des systèmes dont la symétrie par renversement du sens du temps est brisée dans la limite fermée.

Dans ce cas, les amplitudes de couplages sont complexes  $V_n^j = \text{Re}[V_n^j] + i \text{Im}[V_n^j]$ ,  $\Gamma_{np}$  est donc un nombre complexe qui s'écrit :

$$\Gamma_{np} = \sum_{j=1}^M \left[ \left( \text{Re}[V_n^j] \text{Re}[V_p^j] + \text{Im}[V_n^j] \text{Im}[V_p^j] \right) + i \left( \text{Im}[V_n^j] \text{Re}[V_p^j] - \text{Re}[V_n^j] \text{Im}[V_p^j] \right) \right]. \quad (3.26)$$

On voit que  $\Gamma_{np}$  peut, ici, se mettre sous la forme de produits scalaires de vecteurs de dimensions  $2M$  :

$$\Gamma_{np} = (\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{W}_p) + i(\mathbf{W}_n \cdot \tilde{\mathbf{W}}_p) = \sqrt{\Gamma_n \Gamma_p} \cos \theta_{np} + i \sqrt{\Gamma_n \Gamma_p} \cos \tilde{\theta}_{np}, \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{W}_p = (\text{Re}[\mathbf{V}_p], \text{Im}[\mathbf{V}_p])$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_p = (\text{Im}[\mathbf{V}_p], -\text{Re}[\mathbf{V}_p])$ . L'expression du paramètre de non-orthogonalité  $r_n^2$  (3.23) est alors donnée par :

$$r_n^2 = \Gamma_n \sum_{p \neq n} \frac{\Gamma_p \cos^2 \theta_{np} + \Gamma_p \cos^2 \tilde{\theta}_{np}}{4(E_n - E_p)^2}. \quad (3.28)$$

**Réduction des largeurs et paramètres de non-orthogonalité réduits.** Pour s'intéresser aux propriétés statistiques du paramètre de non-orthogonalité, il est naturel de travailler avec des quantités indépendantes du couplage et de l'écart moyen entre niveaux. Les largeurs (3.17) et les paramètres de non-orthogonalité (3.21) et (3.23) sont maintenant

définis par :

$$\gamma_n \equiv \frac{\Gamma_n}{\sigma^2}, \quad X_n \equiv \frac{\Delta^2}{\sigma^4} q_n^2 \quad \text{et} \quad Y_n \equiv \frac{\Delta^2}{\sigma^4} r_n^2. \quad (3.29)$$

Alors que  $q_n^2 \in [0, 1[$  et  $r_n^2 \in [0, 1[$ , les normalisations (3.29) changent les domaines de définition des paramètres de non-orthogonalité :  $X_n \in [0 : \pi^2/(4\kappa^2)]$  et  $Y_n \in [0 : \pi^2/(4\kappa^2)]$ . Notons que dans le régime de couplage faible  $\kappa \rightarrow 0$  d'où  $X_n \in [0, \infty[$  et  $Y_n \in [0, \infty[$ . En utilisant ces nouvelles quantités, les expressions du paramètre de non-orthogonalité s'écrivent :

$$X_n = \gamma_n \sum_{p \neq n} \frac{\Delta^2 A_{np}}{4(E_n - E_p)^2}, \quad Y_n = \gamma_n \sum_{p \neq n} \frac{\Delta^2 B_{np}}{4(E_n - E_p)^2}. \quad (3.30)$$

où ont été introduites les grandeurs :

$$A_{np} = \gamma_p \cos^2 \theta_{np}, \quad B_{np} = \gamma_p \cos^2 \theta_{np} + \gamma_p \cos^2 \tilde{\theta}_{np}. \quad (3.31)$$

Ces quantités ont une interprétation géométrique simple.  $A_{np}$  peut être vu comme le carré de la projection du vecteur  $\sigma^{-1}\mathbf{V}_p$  sur la direction  $\mathbf{V}_n$  (Fig. 3.6).  $B_{np}$  peut, lui, être vu comme la somme des carrés des projections des vecteurs  $\sigma^{-1}\mathbf{W}_p$  et  $\sigma^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_p$  sur la direction  $\mathbf{W}_n$  (Fig. 3.6).

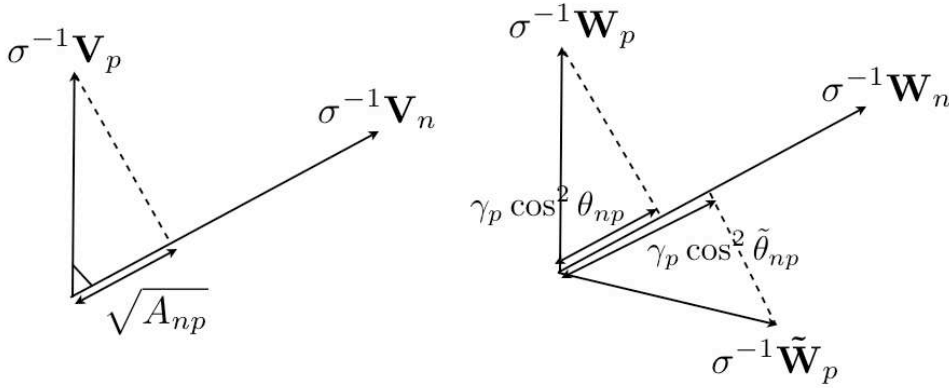


FIG. 3.6 – Représentation géométrique de  $A_{np}$  à gauche (3.31), des deux termes  $\gamma_p \cos^2 \theta_{np}$  et  $\gamma_p \cos^2 \tilde{\theta}_{np}$  associés à  $B_{np}$  à droite.

**Distribution des largeurs  $\gamma$ .** Dans le régime de couplage faible, les largeurs sont bien connues pour être indépendantes et distribuées selon la loi du  $\chi^2$  ([7] pages 233-236) :

$$P_M^\beta(\gamma) = \frac{1}{(2/\beta)^{M/2} \Gamma(\beta M/2)} \gamma^{\beta M/2 - 1} e^{-\beta \gamma/2}. \quad (3.32)$$

où l'indice de Wigner  $\beta$  vaut 1 pour GOE et 2 pour GUE. A partir de l'expression de la distribution de probabilité (3.32), on montre facilement que largeurs ont pour valeur moyenne et pour variance :

$$\langle \gamma \rangle = M, \quad \text{var}(\gamma) = 2M = \frac{2}{M} \langle \gamma \rangle^2. \quad (3.33)$$

Ces expressions indiquent clairement que les largeurs cessent de fluctuer quand le nombre de canaux de pertes augmente, la largeur moyenne  $\langle \Gamma \rangle$  étant fixée. Ce résultat peut aussi être vue à partir de la distribution des largeurs (3.32), qui tend vers la distribution de Dirac dans la limite d'un grand nombre de canaux :  $P_M^\beta(\gamma) = \delta(\gamma - M)$  pour  $M \gg 1$ .

**Distribution des angles  $\theta$ .** Le principal avantage de la représentation en termes des angles  $\theta_{np}$  est qu'ils sont, d'une part, mutuellement indépendants, et, d'autre part, indépendants des largeurs. La distribution de probabilité des angles, définie pour  $M > 1$  peut être facilement trouvée et, est donnée par l'expression de l'angle solide d'un espace à  $M$  dimensions [53] :

$$P_M(\theta) = \frac{\Gamma(M/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((M-1)/2)} \sin^{M-2} \theta. \quad (3.34)$$

**Distribution des projecteurs  $A_{np}$  et  $B_{np}$ .** La distribution des largeurs (3.32) et des angles (3.34) permet d'obtenir la distribution des projections (3.31). La distribution de  $A_{np}$  est obtenue à partir de sa définition  $P(A) = \langle \delta(A - \gamma \cos^2(\theta)) \rangle$ . En explicitant les moyennes, la distribution de  $A$  s'écrit :

$$P_M(A) = \int_0^\pi d\theta P_M(\theta) \int_0^\infty d\gamma P_M(\gamma) \delta(A - \gamma \cos^2(\theta)). \quad (3.35)$$

En intégrant sur les largeurs puis sur les angles, on aboutit à l'expression :

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-A/2}. \quad (3.36)$$

Il est important de voir que la distribution de  $A$  suit la loi de Porter-Thomas, et est indépendante de  $M$ .

En appliquant la même méthode, on trouve que  $P(B)$  suit la loi de Poisson :

$$P(B) = e^{-B}. \quad (3.37)$$

qui est, là encore, indépendante de  $M$ . La seule grandeur portant une dépendance en  $M$  dans les expressions du paramètre de non-orthogonalité (3.30) est donc la largeur  $\gamma_n$ .



**Propriétés statistiques des énergies propres** Pour les systèmes chaotiques fermés, les distributions des énergies propres sont données par ([7] pages 77-79) :

$$P_\beta(\{E_n\}) \propto \prod_{n>m}^N |E_m - E_n|^\beta \exp\left(-\frac{N\beta\pi^2}{8} \sum_n E_n^2\right), \quad (3.38)$$

où  $\beta$  est l'indice de Wigner et l'écart moyen entre niveaux est fixé à l'unité :  $\Delta = 1$ . Il est bien connu que la répulsion de niveaux aux petits écarts réduit les fluctuations des énergies autour de l'écart moyen. Cette caractéristique est clairement visible à partir de la distribution  $P(s)$  des écarts entre plus proches voisins (voir le chapitre II), représentée en Fig. 3.7. Comme le laisse deviner l'expression du paramètre de non-orthogonalité, ses

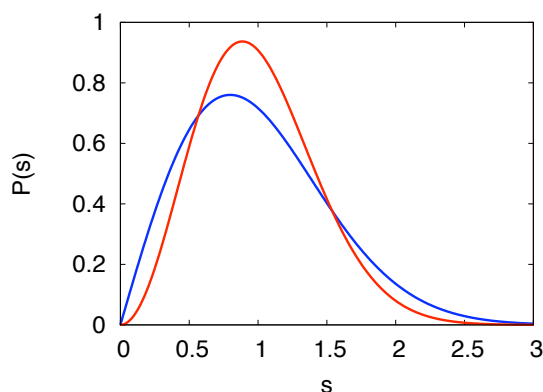


FIG. 3.7 – Distribution des écarts pour GOE en rouge et pour GUE en bleu.

propriétés statistiques sont sensibles aux fluctuations spectrales. Pour comprendre l'effet des fluctuations, nous allons aussi considérer un spectre dont les énergies propres sont équidistantes : le modèle picket-fence [149]. L'étude de cet ensemble permettra d'identifier clairement l'effet des fluctuations sur la non-orthogonalité. Pour picket-fence, la distribution des énergies est simplement donnée par :

$$P_{PF}(\{E_n\}) \propto \prod_n \delta(E_n - n\Delta), \quad (3.39)$$

et le  $P(s)$  correspondant se réduit à un pic de Dirac. L'intérêt de ce modèle réside dans sa simplicité, qui permet de traiter de nombreux phénomènes analytiquement [72, 150, 151]. Dans notre contexte, ce modèle permettra d'identifier la contribution du paramètre de non-orthogonalité due aux fluctuations, en comparant les résultats de GOE et GUE à picket-fence.

**Résumé.** A partir de l'expression du paramètre de non-orthogonalité, obtenue en appliquant la théorie des perturbations au premier ordre, nous avons récrit celle-ci de manière à la mettre sous une forme plus à même de décrire ses propriétés statistiques. De plus, nous avons explicité les distributions de probabilité des grandeurs physiques contenues dans le paramètre de non-orthogonalité. Ainsi, les largeurs des résonances sont distribuées selon la loi du  $\chi^2$ , les  $\{A_{np}\}$  sont distribués selon la loi de Porter-Thomas, les  $\{B_{np}\}$  selon la loi de Poisson, et les énergies propres sont distribuées selon l'ensemble du système fermé considéré ((3.38), (3.39)).

### 3.2.3 Relation entre le paramètre de non-orthogonalité et les fluctuations des largeurs

Une expression générale de la valeur moyenne du paramètre de non-orthogonalité (3.30) peut être obtenue directement à partir de sa définition, en utilisant l'indépendance mutuelle des largeurs  $\{\gamma_n\}$ , des projections ( $\{A_{np}\}, \{B_{np}\}$ ) et des énergies propres  $\{E_n\}$ . Comme  $\langle \gamma \rangle = M$  et, selon (3.31),  $\langle A \rangle = 1 = \langle \gamma \rangle \langle \cos^2 \theta \rangle$  et  $\langle B \rangle = 1 = \langle \gamma \rangle \langle \cos^2 \theta \rangle$ , on aboutit aux valeurs moyennes suivantes :

$$\langle X \rangle = Mf, \quad \langle Y \rangle = Mf, \quad (3.40)$$

où le facteur  $f$  dépend uniquement des propriétés statistiques des énergies du système fermé :

$$f = \left\langle \sum_{p \neq n} \frac{\Delta^2}{4(E_n - E_p)^2} \right\rangle_{\{E_n\}}. \quad (3.41)$$

Comme le montrent les expressions (3.40), on a une équivalence formelle entre la valeur moyenne de  $X$  et celle de  $Y$  ; à nombre de canaux fixé, les valeurs moyennes dépendent uniquement du spectre du système considéré, par l'intermédiaire de  $f$ . Il est important de voir que les valeurs non nulles du paramètre de non-orthogonalité sont uniquement dues aux fluctuations des largeurs. En effet, dans le cas limite où toutes les largeurs sont égales, *i.e.* les pertes inhomogènes sont nulles, la partie anti-hermitienne de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  est proportionnelle à la matrice identité et les vecteurs propres deviennent orthogonaux [10]. Il paraît donc intéressant de prendre en compte cette propriété explicitement. A partir des expressions (3.33), l'expression de la valeur moyenne du paramètre de non-orthogonalité se met alors sous la forme :

$$\langle X \rangle = \frac{f}{2} \text{var}(\gamma), \quad \langle Y \rangle = \frac{f}{2} \text{var}(\gamma). \quad (3.42)$$

Cette expression, qui dépend de l'ensemble considéré par la constante  $f$  (3.41), relie la valeur moyenne du paramètre de non-orthogonalité à la variance des largeurs, *i.e.* aux fluctuations des largeurs. Rappelons que les liens entre le paramètre de non-orthogonalité et les largeurs spectrales sont déjà connus. La proportionnalité entre  $\sqrt{\langle X \rangle}$  et la valeur moyenne des largeurs inhomogènes a été trouvée expérimentalement par J. Barthélémy *et al.* [95] dans une cavité électromagnétique chaotique à température ambiante, cette proportionnalité avait alors été expliquée heuristiquement par une approche en terme de rayons et basée sur le caractère ergodique du système ondulatoire. Ensuite, cette proportionnalité a été établie par D. Savin *et al.* en appliquant le formalisme de l'hamiltonien effectif dans un modèle à 2 niveaux en considérant la limite  $M \gg 1$ , correspondant au cas expérimental [95]. Cette proportionnalité est reformulée dans les expressions (3.42), qui montrent clairement le rôle des fluctuations des largeurs, entraînant  $\langle X \rangle \rightarrow 0$  et  $\langle Y \rangle \rightarrow 0$  dans la limite d'un grand nombre de canaux faiblement couplés.

Etudions maintenant le coefficient de proportionnalité  $f$  (3.41) pour picket-fence, GOE et GUE. Dans le cas de picket-fence, la relation entre énergies propres  $|E_n \pm E_{n+k}| = k\Delta$  permet d'identifier  $f$  à la fonction  $\zeta$  de Riemann :

$$f^{PF} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{4k^2} = \frac{\zeta(2)}{2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (3.43)$$

Pour GOE et GUE, l'expression de  $f$  peut être obtenue en passant à la limite continue, qui correspond à  $N \rightarrow \infty$  :

$$f = \int_0^\infty \frac{R_2(x)}{2x^2}. \quad (3.44)$$

où  $R_2(x)$  est la fonction de corrélation à 2 points, donnant la probabilité de trouver une énergie distante de  $x$  ( $\Delta$  étant fixé à l'unité) alors que la première est positionnée en 0. Les fonctions de corrélation pour GOE et GUE (voir [4] pour une discussion détaillée), s'écrivent :

$$R_2^{\text{GOE}}(x) = 1 - \left( \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 - \left[ \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x) - \text{Si}(\pi x) \right] \left[ \frac{\cos(\pi x)}{\pi x} - \frac{\sin(\pi x)}{(\pi x)^2} \right] \quad (3.45)$$

$$R_2^{\text{GUE}}(x) = 1 - \left( \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2 \quad (3.46)$$

où  $\text{sgn}$  est la fonction signe et  $\text{Si}$  est la fonction sinus intégrale. Les fonctions de corrélation sont représentées en Fig. 3.8. Notons qu'on retrouve, aux petites distances, la répulsion de niveaux linéaire pour GOE et quadratique pour GUE, présente dans la distribution des écarts (Fig. 2.1).

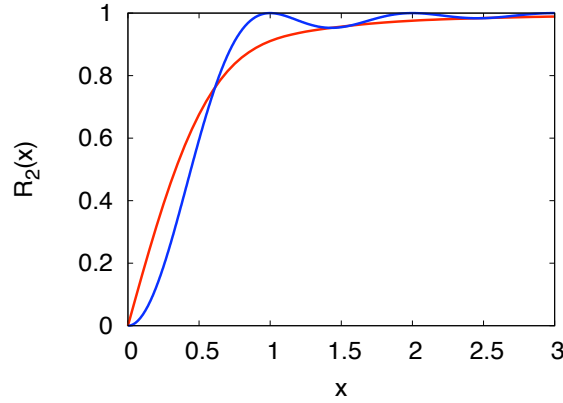


FIG. 3.8 – Fonction de corrélation à 2 points pour GOE en rouge et pour GUE en bleu.

Alors que  $f^{\text{GUE}}$  est bien définie compte tenu du comportement quadratique de  $R_2^{\text{GUE}}$  (3.46), le comportement linéaire de  $R_2^{\text{GOE}}$  aux petites distances (3.45) introduit une divergence logarithmique *infrarouge* pour  $f^{\text{GOE}}$  [10]. Cette divergence peut être régularisée en introduisant une coupure, notée  $\epsilon$ , aux petits  $x$  :

$$f_\epsilon^{\text{GOE}} = \frac{1}{2} \int_\epsilon^\infty dx \frac{R_2^{\text{GOE}}(x)}{x^2}. \quad (3.47)$$

Sans cette coupure, l'expression du paramètre de non-orthogonalité obtenue à partir de la théorie des perturbations au premier ordre ne donne pas de moments finis.

La figure 3.9 confirme les résultats analytiques par des simulations numériques de type matrices aléatoires, où l'expression reliant la variance des largeurs à la valeur moyenne du paramètre de non-orthogonalité est testée sur les modèles picket-fence et GOE. Les simulations numériques pour GOE ont déjà été décrites dans le chapitre II, les détails pour les simulations numériques de picket-fence seront donnés dans la suite du chapitre.

### 3.3 Distribution du paramètre de non-orthogonalité

Dans cette section, la distribution de probabilité du paramètre de non-orthogonalité est dérivée dans un modèle à  $N$  niveaux avec  $N \rightarrow \infty$ , pour les trois ensembles considérés : picket-fence, GOE et GUE. Les distributions sont obtenues à partir de la définition générale de la distribution de probabilité :

$$\mathcal{P}_M(X) = \langle \delta(X - X_n) \rangle, \quad \mathcal{P}_M(Y) = \langle \delta(Y - Y_n) \rangle \quad (3.48)$$

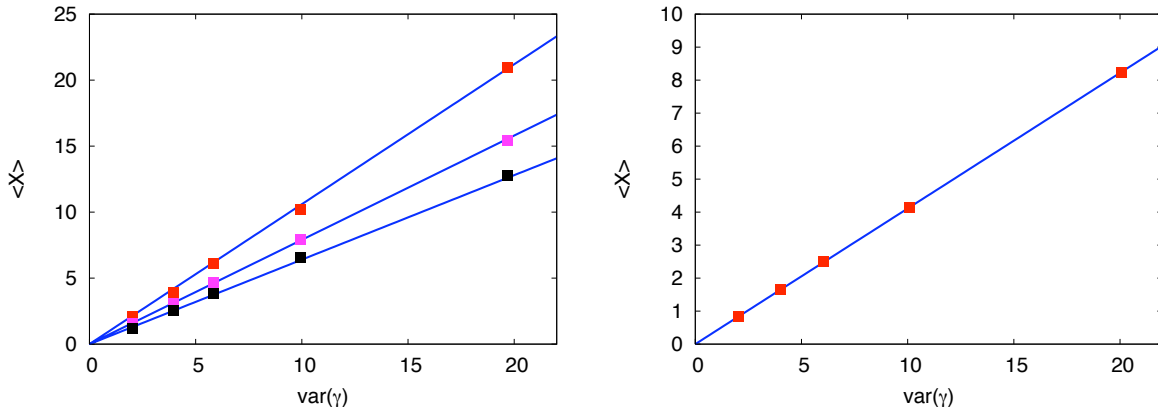


FIG. 3.9 – La valeur moyenne du paramètre de non-orthogonalité en fonction de la variance des largeurs, pour GOE à gauche et picket-fence à droite. Les carrés représentent les résultats des simulations numériques réalisées pour  $M=1, 2, 3, 5$  et  $10$ . Dans le cas de GOE, trois paramètres de coupure différents ont été considérés :  $\epsilon=0.1, 0.2$  et  $0.3$ , correspondant aux couleurs rouge, magenta et noir respectivement. La relation linéaire prédite par l'équation (3.42), est représentée en trait plein. Les valeurs de  $f_\epsilon^{\text{GOE}}$  sont obtenues par une résolution numérique de l'intégrale (3.47). Dans le cas de picket-fence  $f^{\text{PF}} = \pi^2/12$  (3.43).

$\mathcal{P}_M(X)$  et  $\mathcal{P}_M(Y)$  correspondant respectivement aux distributions du paramètre de non-orthogonalité pour des systèmes dont la limite fermée est invariante par renversement du sens du temps et pour des systèmes où cette invariance est brisée. De plus, les prédictions théoriques de GOE et de picket-fence seront confrontées à des simulations de matrices aléatoires non-hermitiennes. Enfin, pour clairement voir les effets des fluctuations spectrales sur le paramètre de non-orthogonalité, le cas d'un grand nombre de canaux de couplage sera par la suite abordé pour ces trois ensembles.

### 3.3.1 Distribution de $X$ pour GOE

La distribution du paramètre de non-orthogonalité pour GOE est dérivée en appliquant la méthode introduite par Y. Fyodorov et H.-J. Sommers [152] et détaillée dans [129]. L'idée principale consiste, comme nous le verrons plus précisément dans la suite, à écrire la distribution en faisant intervenir l'auto-corrélateur de GOE. Pour simplifier l'expression de la distribution de probabilité, il apparaît utile de poser  $E_n = 0$ , qui correspond simplement à un changement de l'origine des énergies, et de fixer l'écart moyen entre niveaux égal à

un ( $\Delta = 1$ ). Ainsi, la distribution du paramètre de non-orthogonalité s'écrit :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) = \left\langle \delta \left( X - \gamma \sum_{p \neq n} \frac{A_p}{4E_p^2} \right) \right\rangle, \quad (3.49)$$

où la moyenne porte sur la largeur  $\gamma$ , les projections  $\{A_p\}$  et les énergies propres  $\{E_p\}$  respectivement distribuées selon (3.32), (3.36) et (3.38).

**Représentation de  $\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X)$  en termes de déterminants.** En utilisant la représentation de Fourier de la fonction Delta, la distribution (3.49) se met sous la forme :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega X} \left\langle \exp \left( -i\omega\gamma \sum_{p \neq n} \frac{A_p}{4E_p^2} \right) \right\rangle. \quad (3.50)$$

L'intégration sur les  $\{A_p\}$ , distribués selon la loi de Porter-Thomas (3.36), est immédiate et fournit :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega X} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \left\langle \prod_{p \neq n} \frac{1}{\sqrt{1 + i\frac{\omega\gamma}{2E_p^2}}} \right\rangle. \quad (3.51)$$

En posant, de plus,  $E_n = E_N$ , la distribution des énergies propres (3.38) se met sous la forme :

$$P_{\text{GOE}}(E_1, \dots, E_N = 0) \propto |\det(H')| P_{\text{GOE}}(E_1, \dots, E_{N-1}) \quad (3.52)$$

où  $H'$  est une matrice de taille  $(N-1) \times (N-1)$  dont les valeurs propres correspondent à  $E_1, \dots, E_{N-1}$ . La distribution de  $X$  est alors donnée par :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega X} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \left\langle \frac{\det(H'^2)}{\sqrt{\det(H'^2 + i\frac{\omega\gamma}{2})}} \right\rangle_{H'}, \quad (3.53)$$

où la moyenne d'ensemble est réalisée sur l'ensemble gaussien des matrices  $H' : P(H') \propto e^{-\pi^2/4N \text{Tr}H'^2}$ . L'intérêt de ce changement de variables est de remplacer la moyenne sur les énergies propres, qui sont des variables fortement corrélées (3.38), par une moyenne sur les éléments de matrice de  $H'$ , qui sont des variables indépendantes. Néanmoins, la moyenne d'ensemble sur  $H'$  n'est pas réalisable à partir de cette dernière expression, il est donc nécessaire de réaliser quelques transformations.

**Représentation de  $\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X)$  en termes d'intégrales gaussiennes.** A partir de la définition de l'intégrale gaussienne, le dénominateur de (3.53) s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{\det(H'^2 + i\omega\gamma/2)}} \propto \int d\mathbf{z} \exp \left[ -\mathbf{z}^T (H'^2 + i\omega\gamma/2) \mathbf{z} \right], \quad (3.54)$$

où  $\mathbf{z}$  est un vecteur réel de dimension  $N - 1$ . La distribution se met alors sous la forme :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) \propto \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \int d\mathbf{z} \left\langle \det(H'^2) e^{-\mathbf{z}^T H'^2 \mathbf{z}} \right\rangle_{H'} e^{i\omega\gamma|\mathbf{z}|^2/2 + i\omega X}. \quad (3.55)$$

Pour alléger les expressions, le coefficient de proportionnalité est mis de côté. Il sera retrouvé à partir du résultat final par la condition de normalisation de la distribution. A partir de l'expression (3.55), on voit que l'intégration sur  $\omega$  donne une distribution de Dirac :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) \propto \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \int d\mathbf{z} \left\langle \det(H'^2) e^{-\mathbf{z}^T H'^2 \mathbf{z}} \right\rangle_{H'} \delta(X - \gamma|\mathbf{z}|^2/2), \quad (3.56)$$

Bien que de forme compacte, la moyenne d'ensemble sur  $H'$  n'est toujours pas aisée à calculer. Cependant, nous allons voir qu'en intégrant tout d'abord sur  $\mathbf{z}$ , la moyenne d'ensemble pourra être réalisée à partir de l'expression de l'auto-corrélateur.

**Intégration sur  $\mathbf{z}$ .** Comme ce vecteur, qui provient de la représentation intégrale (3.54), est arbitraire, on peut choisir qu'il soit orienté vers le dernier vecteur de base de  $H'$ . En écrivant  $H'$  sous la forme :

$$H' = \begin{pmatrix} V & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^T & g \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

où  $V$  est une matrice de taille  $(N - 2) \times (N - 2)$ ,  $\mathbf{h}$  est un vecteur de dimension  $(N - 2)$  et  $g$  est un scalaire, on trouve que :

$$\text{Tr} H'^2 = \text{Tr} V^2 + 2|\mathbf{h}|^2 + g^2, \quad \mathbf{z}^T (H')^2 \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2 (|\mathbf{h}|^2 + g^2), \quad (3.58)$$

$$\det H' = \det(Vg - \mathbf{h}^T \mathbf{h}), \quad \det H'^2 = \det(V^2)(g - \mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h})^2. \quad (3.59)$$

En injectant les précédentes relations dans l'expression (3.56), la distribution s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} dg \int dV \int d\mathbf{h} \int d\mathbf{z} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \det(V^2) (g - \mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h})^2 \\ &\times \exp \left[ -\frac{\pi^2}{4N} (\text{Tr}(V^2) + 2|\mathbf{h}|^2 + g^2) \right] \exp \left[ -|\mathbf{z}|^2 (|\mathbf{h}|^2 + g^2) \right] \delta(X - \gamma|\mathbf{z}|^2/2). \end{aligned} \quad (3.60)$$

L'intégration sur  $\mathbf{z}$  peut directement être effectuée en utilisant les coordonnées angulaires et radiale :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dg \int dV \int d\mathbf{h} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \det(V^2) (g - \mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h})^2 \frac{1}{\sqrt{\gamma X}} \left(\frac{X}{\gamma}\right)^{N/2-1} \\ \times \exp\left[-\frac{\pi^2}{4N}(\text{Tr}(V^2) + 2|\mathbf{h}|^2 + g^2)\right] \exp\left[-\frac{2X}{\gamma}(|\mathbf{h}|^2 + g^2)\right]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dans la suite nous allons nous concentrer sur les intégrations sur  $\mathbf{h}$  et sur  $V$ , les intégrations restantes, sur  $g$  et  $\gamma$ , seront effectuées en dernier. En remarquant que l'intégrale sur  $\mathbf{h}$  a un poids gaussien, on peut appliquer le Théorème de Wick pour la résoudre.

**Intégration sur  $\mathbf{h}$ .** L'intégrale sur  $\mathbf{h}$  peu être vue comme  $N - 2$  intégrations d'une variable gaussienne de variance :

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{(\pi^2/N + 4X/\gamma)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{4X} e^{-\gamma\pi^2/(4NX)}. \quad (3.62)$$

Ainsi :

$$\int d\mathbf{h} (g - \mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h})^2 e^{-|\mathbf{h}|^2/(2\sigma_h)} \propto \sigma_h^{(N-2)} \left\langle \left( g^2 - 2\mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h} + (\mathbf{z}^T V^{-1} \mathbf{h})^2 \right) \right\rangle. \quad (3.63)$$

où la moyenne gaussienne sur  $\mathbf{h}$  est réalisée en appliquant le théorème de Wick :

$$\langle 2\mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h} \rangle = 2 \sum_{i,j} \langle h_i (V^{-1})_{ij} h_j \rangle = 2\sigma_h^2 \text{Tr}(V^{-1}), \quad (3.64)$$

$$\langle (\mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h})^2 \rangle = \sum_{i,j,n,m} \langle h_i (V^{-1})_{ij} h_j h_n (V^{-1})_{nm} h_m \rangle = \sigma_h^4 \left[ \text{Tr}(V^{-1}) \right]^2 + 2\sigma_h^4 \text{Tr}(V^{-2}).$$

En réunissant les résultats précédemment obtenus, l'intégrale sur  $\mathbf{h}$  est donnée par :

$$\int d\mathbf{h} (g - \mathbf{h}^T V^{-1} \mathbf{h})^2 e^{-|\mathbf{h}|^2/(2\sigma_h)} \propto \sigma_h^{(N-2)} \left( g^2 + \sigma_h^4 \text{Tr}(V^{-1})^2 + 2\sigma_h^4 \text{Tr}(V^{-2}) \right), \quad (3.65)$$

de sorte que l'expression de la distribution s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dg \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \frac{1}{\sqrt{\gamma X}} \exp\left[-\frac{\gamma\pi^2}{8X} - \frac{2X}{\gamma} g^2\right] \\ \times \int dV \det(V^2) \left( g^2 + \sigma_h^4 \text{Tr}(V^{-1})^2 + 2\sigma_h^4 \text{Tr}(V^{-2}) \right) \exp\left[-\frac{\pi^2}{4N} \text{Tr} V^2\right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$



**Intégration sur  $V$ .** La forme particulière de l'intégrand permet, enfin, d'effectuer la moyenne d'ensemble sur  $V$ . Intéressons nous maintenant à l'intégrale sur  $V$  :

$$I_V(g, \sigma_h^4) = \left\langle \det(V^2) \left( g^2 + \sigma_h^4 \text{Tr}(V^{-1})^2 + 2\sigma_h^4 \text{Tr}(V^{-2}) \right) \right\rangle_V \quad (3.67)$$

où la moyenne est réalisée avec la mesure  $e^{-\pi^2 \text{Tr} V^2 / (4N)} dV$ . En introduisant la constante  $1 / \langle \det(V^2) \rangle$  dans l'intégrale, celle-ci se réécrit :

$$\frac{I_V(g, \sigma_h^4)}{\langle \det(V^2) \rangle} \propto g^2 + \sigma_h^4 \frac{\langle \det(V^2) \text{Tr}(V^{-1})^2 \rangle}{\langle \det(V^2) \rangle} + 2\sigma_h^4 \frac{\langle \det(V^2) \text{Tr}(V^{-2}) \rangle}{\langle \det(V^2) \rangle}. \quad (3.68)$$

Les deux derniers termes peuvent être obtenus à partir de l'auto-corrélateur de GOE [153, 154] :

$$G(\omega, \omega') = \frac{\langle \text{Det}(V + \omega)(V + \omega') \rangle}{\langle \det(V^2) \rangle} = -\frac{3}{\pi^2 x} \frac{d \sin(\pi x)}{\pi x} \Big|_{x=\omega-\omega'}. \quad (3.69)$$

En effet, les termes dans (3.68) peuvent être définis à partir des dérivées de l'auto-corrélateur :

$$\frac{\langle \det(V^2) \text{Tr}(V^{-1})^2 \rangle}{\langle \det(V^2) \rangle} = \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} G(\omega, 0) \Big|_{\omega=0} = \frac{\pi^2}{5}, \quad (3.70)$$

$$\frac{2 \langle \det(V^2) \text{Tr}(V^{-2}) \rangle}{\langle \det(V^2) \rangle} = -4 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} G(\omega, 0) \Big|_{\omega=0} = \frac{4\pi^2}{5}. \quad (3.71)$$

Soit :

$$\frac{I_V(g, \sigma_h^4)}{\langle \det(V^2) \rangle} \propto (g^2 + \pi^2 \sigma_h^4). \quad (3.72)$$

Compte tenu de (3.72) et en prenant la limite  $N \rightarrow \infty$  pour la variance  $\sigma_h^2$ , l'expression de la distribution de probabilité (3.66) s'écrit :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dg \int_0^{\infty} d\gamma \frac{\gamma^{M/2-1} e^{-\gamma/2}}{\sqrt{\gamma X}} \left( g^2 + \frac{\pi^2 \gamma^2}{16X^2} \right) e^{-\gamma \pi^2 / (8X)} e^{-2Xg^2/\gamma}. \quad (3.73)$$

Les deux dernières intégrations se font directement, on aboutit ainsi à l'expression finale :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) = \frac{M\pi^2}{24X^2} \frac{1 + \frac{\pi^2(3+M)}{4X}}{\left(1 + \frac{\pi^2}{4X}\right)^{M/2+2}} \quad (3.74)$$

où le coefficient de proportionnalité est obtenu à partir de la normalisation  $\int \mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) dX = 1$ . La distribution est représentée pour plusieurs valeurs de  $M$  sur la Fig. 3.10.

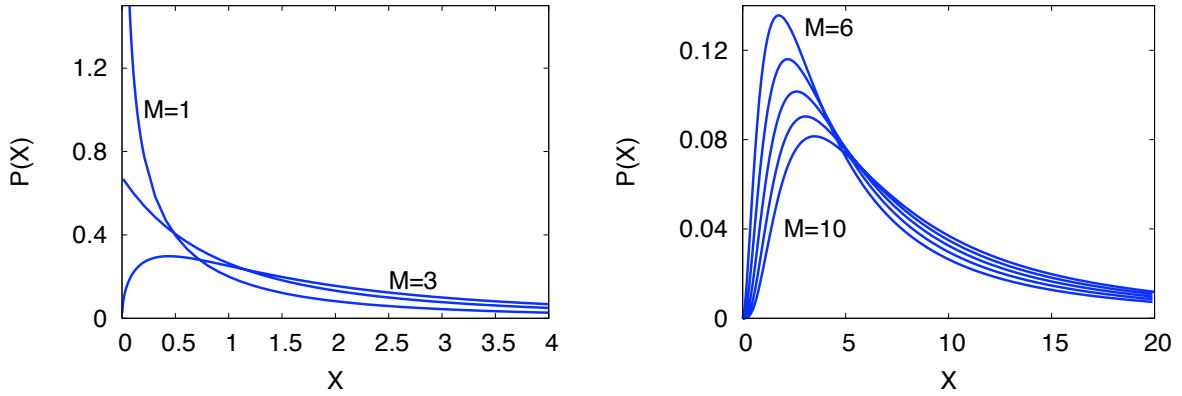


FIG. 3.10 – Distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité  $X$  pour GOE (3.74). À gauche pour  $M = 1, 2$  et  $3$ . À droite pour  $M = 6, 7, 8, 9$  et  $10$ .

On peut noter que la divergence logarithmique de la valeur moyenne de  $X$  pour GOE est retrouvée dans le comportement en loi de puissance  $\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) \sim 1/X^2$  pour  $X \gg 1$ . Comme nous l'avons déjà évoqué dans la section précédente, cette divergence logarithmique est due à la répulsion de niveaux linéaire aux faibles écarts.

### Simulations numériques de matrices aléatoires pour GOE

Les simulations numériques sont basées sur la diagonalisation d'hamiltoniens effectifs de grandes tailles (voir chapitre II), où le rapport entre la valeur moyenne des largeurs et l'écart moyen entre niveaux est fixé à  $\langle \Gamma \rangle / \Delta = 10^{-2}$ , de manière à rester dans le régime des faibles pertes inhomogènes. Comme nous l'avons souligné, pour les systèmes invariants par renversement du sens du temps, le paramètre de non-orthogonalité s'identifie au paramètre de complexité [94]. Cette propriété permet de réaliser les statistiques en ne considérant que les vecteurs propres à droite (3.22). Les résultats numériques, en complet accord avec les prédictions théoriques, prouvent que la théorie des perturbations au premier ordre permet de décrire les statistique des vecteurs de l'hamiltonien effectif dans le régime de faible recouvrement modal.

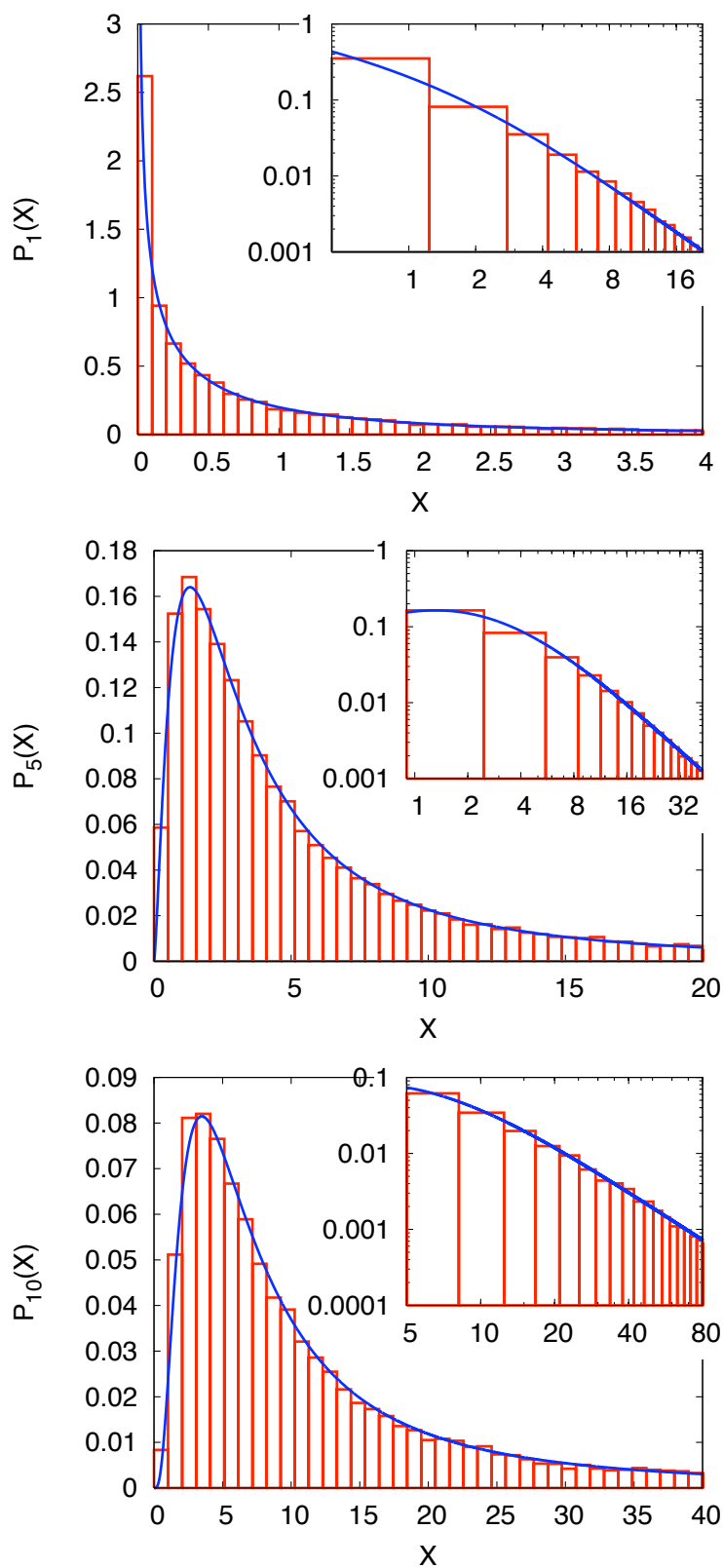


FIG. 3.11 – Distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité  $X$  pour GOE pour  $M=1, 5$  et  $10$ . Les histogrammes numériques en rouge, les expressions analytiques (3.74) en bleu, en insert est représentée la queue de la distribution en échelle log-log.

### 3.3.2 Distribution de $X$ pour picket-fence

Pour étudier précisément l'influence des fluctuations spectrales sur le paramètre de non-orthogonalité, nous allons dériver la distribution de probabilité de  $X$  pour un spectre dont les fluctuations sont nulles (3.39), décrit par picket-fence. En utilisant la relation entre énergies propres d'un spectre complètement rigide :  $|E_n \pm E_{n+k}| = k\Delta$ , le paramètre de non-orthogonalité (3.30) s'écrit :

$$X_n^{PF} = \gamma_n \sum_{k \neq 0} \frac{A_{nk}}{4k^2}. \quad (3.75)$$

En remplaçant dans la définition de la distribution de  $X$  (3.48) l'expression de  $X_n$  par (3.75), et en écrivant la distribution de Dirac sous sa représentation intégrale, on obtient :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega X} \left\langle \exp \left[ -i\omega\gamma \sum_{k \neq 0} \frac{A_k}{4k^2} \right] \right\rangle, \quad (3.76)$$

où la moyenne porte sur  $\gamma$ , distribuée selon (3.32), et les  $\{A_k\}$  distribués selon la loi de Porter-Thomas. L'intégration sur ces derniers est immédiate et donne :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega X} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + i\frac{\omega\gamma}{2k^2}}. \quad (3.77)$$

En évaluant le produit infini ([155] page 45), et en effectuant le changement de variable  $\gamma = 2|z|^2$ , l'intégrand s'écrit :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(X) = \frac{1}{\Gamma(M/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz |z|^{M-1} e^{i\omega X - z^2} \frac{\sqrt{i\omega z \pi}}{\sinh(\sqrt{i\omega z \pi})}. \quad (3.78)$$

Tout d'abord, on peut noter que l'intégrand de (3.78) est une fonction symétrique en  $z$ , ce qui permet de restreindre l'intégration de  $z$  sur  $[0 : \infty[$ . Pour résoudre cette intégrale, on déforme le contour d'intégration sur  $\omega$  en le faisant passer de l'axe réel à l'axe imaginaire en posant  $\Omega = i\omega$ . En effectuant la série de transformations :  $z \rightarrow z/\sqrt{\Omega}$  puis  $\Omega \rightarrow \Omega/X$  et en changeant l'ordre d'intégration sur  $z$  et  $\Omega$ , l'équation (3.78) devient :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(X) = \frac{2\pi X^{M/2-1}}{\Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} dz \frac{z^M}{\sinh(z\pi)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\Omega}{2\pi i} \Omega^{-M/2} e^{\Omega - Xz^2/\Omega}. \quad (3.79)$$

Pour calculer la l'intégrale sur  $\Omega$ , on développe  $e^{-Xz^2/\Omega}$  en série et on évalue les expressions terme à terme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-Xz^2)^k}{k!} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\Omega}{2\pi i} \Omega^{-(M/2+k)} e^{\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-(\sqrt{X}z)^2]^k}{k! \Gamma(\frac{M}{2} + k)}, \quad (3.80)$$

où nous avons utilisé  $\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\Omega}{2\pi i} \Omega^{-\nu} e^{\Omega} = 1/\Gamma(\nu)$ . En considérant la représentation en série de la fonction de Bessel [156], on peut immédiatement reconnaître que le terme de droite de (3.80) est égal à  $(\sqrt{X}z)^{1-M/2} J_{M/2-1}(2\sqrt{X}z)$ . En regroupant tous les résultats, on arrive finalement à l'expression :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(X) = \frac{2\pi(\sqrt{X})^{M/2-1}}{\Gamma(M/2)} \int_0^{\infty} dz \frac{z^{M/2+1}}{\sinh(z\pi)} J_{M/2-1}(2\sqrt{X}z) \quad (3.81)$$

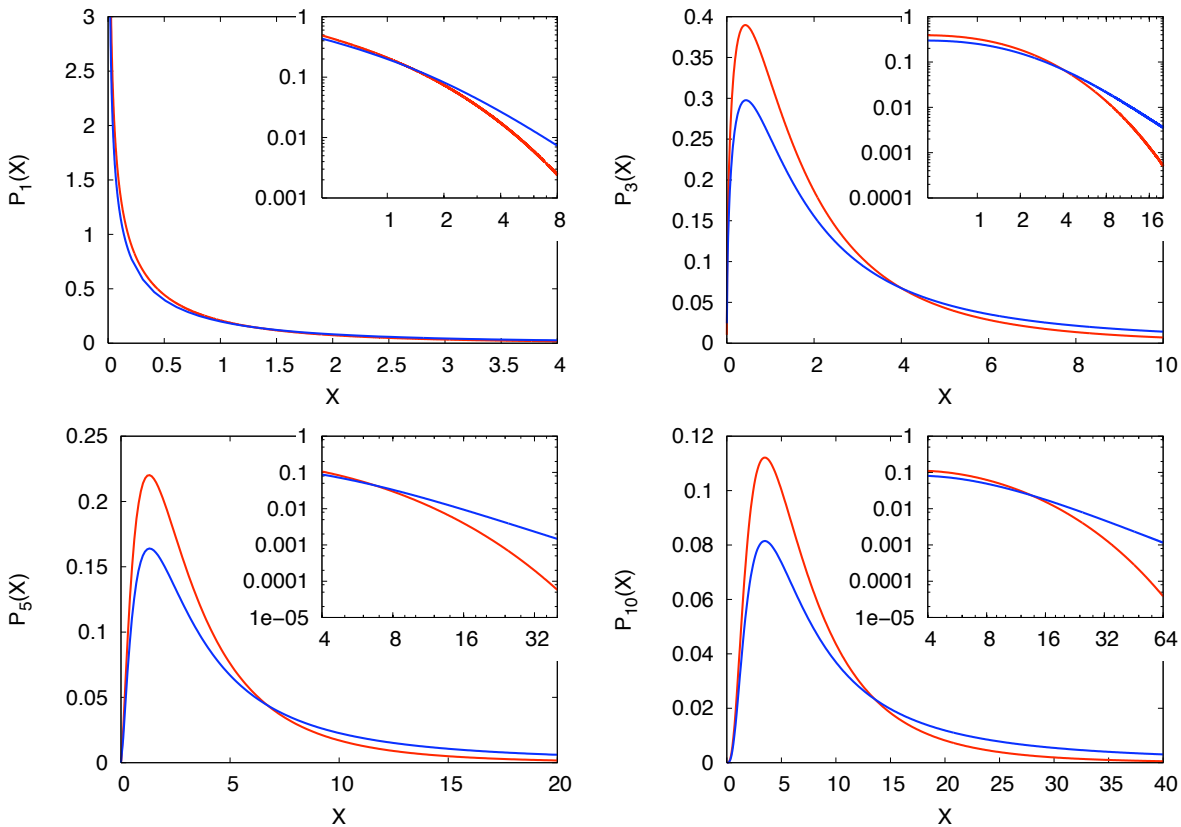


FIG. 3.12 – Distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité  $X$  pour picket-  
tence (3.81) en rouge et pour GOE en bleu (3.74) pour  $M = 1, 3, 5$  et  $10$ . En insert, les  
queues des distributions en échelle log-log.

La Fig. 3.12 représente les distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité de picket-fence et de GOE pour quelques valeurs de  $M$ . Une simple comparaison visuelle entre les distributions montre que la décroissance est bien plus lente dans le cas du spectre GOE, contenant des fluctuations spectrales. Ce résultat qualitatif sera développé par la suite en comparant les distributions des paramètre de non-orthogonalité dans la limite  $M \gg 1$ .

Dan le cas d'un nombre impair de canaux, l'expression (3.81) peut encore être simplifiée. Pour cela, il est instructif de partir du cas  $M = 1$  qui jouera un rôle central dans la suite des calculs. En utilisant (3.81) et la relation  $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{\cos(z)}{z}$ , l'équation (3.79) se réduit à :

$$\int_0^{\infty} dz \frac{z}{\sinh(z\pi)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\Omega}{2\pi i} \Omega^{-1/2} e^{\Omega - Xz^2/\Omega} = \int_0^{\infty} dz \frac{z \cos(2\sqrt{X}z)}{\sinh(z\pi)\sqrt{\pi}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{X})}. \quad (3.82)$$

En incorporant le facteur  $2\sqrt{\pi/X}$  (qui a été mis de côté), on obtient la distribution de  $X$  pour un canal :

$$\mathcal{P}_1^{\text{PF}}(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{X})}. \quad (3.83)$$

Le cas d'un nombre impair de canaux  $M = 2n + 1$  se déduit du cas  $M = 1$  si on note que le terme  $z^M/\Omega^{M/2}e^{-Xz^2/\Omega}$  dans l'intégrant (3.79) peut être généré par différentiation par rapport à  $X$  :

$$\left(\frac{z^2}{\Omega}\right)^n \frac{z}{\Omega^{1/2}} e^{-Xz^2/\Omega} = \left(-\frac{\partial}{\partial X}\right)^n \frac{z}{\Omega^{1/2}} e^{-Xz^2/\Omega}. \quad (3.84)$$

En remplaçant dans (3.79) le membre de gauche de (3.84) par le membre de droite et en changeant l'ordre d'intégration et de différentiation, on voit que l'intégrale résultante est déjà donnée par (3.82), fournissant l'expression de la distribution de  $X$  dans le cas d'un nombre impair de canaux :

$$\mathcal{P}_{2n+1}^{\text{PF}}(X) = \frac{\sqrt{\pi} X^{n-1/2}}{2\Gamma(n+1/2)} \left(-\frac{\partial}{\partial X}\right)^n \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{X})}. \quad (3.85)$$

### Simulations numériques de matrices aléatoires de picket-fence

Les simulations numériques sont basées sur la diagonalisation de matrices aléatoires non hermitiennes de la forme  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = H - iVV^T/2$ . La partie hermitienne est construite pour que les énergies propres soient équidistantes et les éléments des vecteurs propres sont des

variables aléatoires gaussiennes. L'ensemble picket-fence est donc construit en appliquant la procédure suivie par Gorin *et al.* pour générer l'ensemble POE [157], pour lequel les énergies propres sont distribuées selon la loi de Poisson et les vecteurs propres suivent une loi gaussienne. L'hamiltonien  $H$  de picket-fence est écrit dans une base arbitraire en appliquant à l'hamiltonien diagonal  $\text{diag}(E_1, \dots, E_N)$  une transformation orthogonale gaussienne :

$$H = O \text{diag}\{E_n\} O^T \quad (3.86)$$

où  $E_n = n/N$  avec  $n = -N/2, -N/2 - 1, \dots, N/2$ , assurant  $\Delta = 1/N$  et  $O$  est une transformation orthogonale dont les éléments sont des variables aléatoires gaussiennes :

$$\langle O_{ij} \rangle = 0, \quad \langle O_{ij}^2 \rangle = 1/N \quad (3.87)$$

Les statistiques sont réalisées par diagonalisation de 100 matrices de taille  $1000 \times 1000$ . Pour rendre la distribution insensible aux bords du spectre, 100 résonances à chaque bord sont éliminées des statistiques. Dans toutes les simulations, la valeur moyenne des largeurs est fixée pour être indépendante du nombre de canaux :  $\langle \Gamma \rangle / \Delta = 10^{-2}$ . Les résultats numériques, en parfait accord avec les prédictions théoriques, sont présentés en Fig. 3.13.

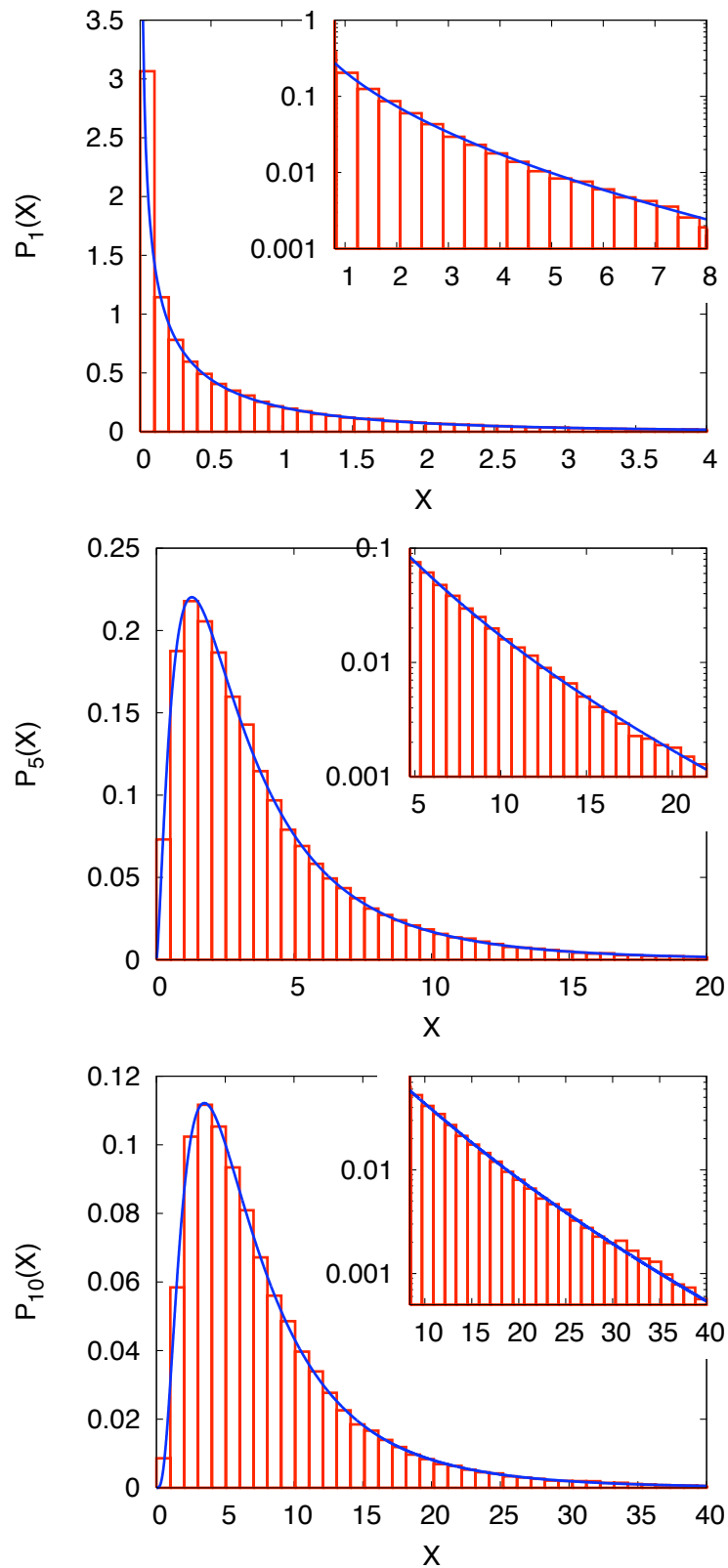


FIG. 3.13 – Distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité  $X$  pour picket-fence pour  $M=1, 5$  et  $10$ . Les histogrammes numériques en rouge, les expressions analytiques (3.81) en bleu, en insert est représentée la queue de la distribution en échelle semi-log.



### 3.3.3 Distribution de $Y$ pour GUE

La distribution du paramètre de non-orthogonalité pour GUE est dérivée en utilisant la méthode déjà employée pour GOE. Les principales étapes de calculs sont donc rappelées mais ne sont pas détaillées. On peut néanmoins noter que l'expression de  $Y$  diffère de celle  $X$  non seulement du point de vue des statistiques des énergies propres mais, aussi, dans la nature des projections.

En posant  $E_n = E_N = 0$  et  $\Delta = 1$  ; la distribution pour GUE s'écrit :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(Y) = \left\langle \delta\left(Y - \gamma \sum_{p \neq n} \frac{B_p}{4E_p^2}\right) \right\rangle. \quad (3.88)$$

En utilisant la représentation de Fourier de la fonction delta et en intégrant sur les  $\{B_p\}$ , distribués selon la loi de Poisson (3.37), on obtient :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega Y} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \left\langle \prod_{p \neq n} \frac{1}{1 + i \frac{\omega \gamma}{4E_p^2}} \right\rangle. \quad (3.89)$$

En introduisant la matrice  $H'$  (3.57) dont les éléments sont maintenant complexes, la distribution s'écrit :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega Y} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \left\langle \frac{\det(H'^4)}{\det(H'^2 + i \frac{\omega \gamma}{4})} \right\rangle. \quad (3.90)$$

A partir de l'expression de l'intégrale gaussienne d'une matrice dont les éléments sont des variables complexes :

$$\frac{1}{\det(H'^2 + i\omega\gamma/4)} \propto \int d\mathbf{z} \exp \left[ -\mathbf{z}^\dagger \left( H'^2 + i\omega\gamma/4 \right) \mathbf{z} \right], \quad (3.91)$$

où  $\mathbf{z}$  est ici un vecteur complexe, de dimension  $N - 1$  et orienté suivant le dernier vecteur de base de  $H'$ . La distribution est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(Y) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} dg \int dV \int d\mathbf{h} \int d\mathbf{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega Y} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \det(V^4) (g - \mathbf{h}^\dagger V^{-1} \mathbf{h})^4 \\ &\times \exp \left[ -\frac{\pi^2}{2N} (\text{Tr}(V^2) + 2|\mathbf{h}|^2 + g^2) \right] \exp \left[ -|\mathbf{z}|^2 (|\mathbf{h}|^2 + g^2 + i\omega\gamma/4) \right]. \end{aligned} \quad (3.92)$$

En intégrant d'une part sur  $\omega$  et d'autre part sur  $\mathbf{z}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(X) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dg \int dV \int d\mathbf{h} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \det(V^4) (g - \mathbf{h}^\dagger V^{-1} \mathbf{h})^4 \frac{1}{\sqrt{\gamma X}} \left(\frac{X}{\gamma}\right)^{N-2} \\ \times \exp\left[-\frac{\pi^2}{2N}(\text{Tr}(V^2) + 2|\mathbf{h}|^2 + g^2)\right] \exp\left[-\frac{4X}{\gamma}(|\mathbf{h}|^2 + g^2)\right]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Les intégrations sur  $\mathbf{h}$  et  $V$  sont effectuées en appliquant la même méthode que pour GOE. L'expression de la distribution de probabilité, qui en résulte, s'écrit :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(X) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dg \int_0^{\infty} d\gamma \gamma^{M-2} e^{-\gamma} \left(g^2 + \left(\frac{\pi\gamma}{4X}\right)^2\right)^2 e^{-\gamma\pi^2/(4X)} e^{-4Xg^2/\gamma}. \quad (3.94)$$

En effectuant les deux dernières intégrations sur  $g$  et  $\gamma$ , et en normalisant l'expression selon  $\int \mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(Y) dY = 1$ , on aboutit à :

$$\mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(Y) = \frac{\Gamma(M + 3/2)}{\Gamma(M)} \left(\frac{\pi}{4Y}\right)^{5/2} \frac{1 + \frac{(3+M)\pi^2}{3Y} + \frac{(2+M)(3+M)\pi^4}{12Y^2}}{\left(1 + \frac{\pi^2}{4Y}\right)^{M+7/2}}. \quad (3.95)$$

Les distributions du paramètre de non-orthogonalité pour GUE sont représentées en Fig. 3.14 pour des valeurs de  $M$  petites. En étudiant l'expression (3.95) pour  $Y \gg 1$ , on trouve une décroissance de la distribution en loi de puissance :  $\mathcal{P}_M^{\text{GUE}}(Y) \sim 1/Y^{5/2}$ . Bien que cette décroissance de la distribution soit lente, la valeur moyenne du paramètre de non-orthogonalité est finie. Ce comportement, radicalement différent du cas de GOE pour lequel  $\mathcal{P}_M^{\text{GOE}}(X) \sim 1/X^2$ , peut simplement être expliqué en notant que les fluctuations spectrales associées à un spectre GOE sont plus fortes que pour GUE.

### 3.3.4 Distribution de $Y$ pour picket-fence

Pour étudier les effets des fluctuations spectrales sur la distribution du paramètre de non-orthogonalité, nous allons encore une fois considérer un spectre complètement rigide, dont les projections sont distribuées selon la loi de Poisson. Dans les grandes lignes, les calculs sont les mêmes que pour la distribution de  $X$  pour picket-fence. Seules les principales étapes menant à la dérivation du résultat final sont donc présentées.

Le paramètre de non-orthogonalité (3.30) pour picket-fence s'écrit :

$$Y_n^{PF} = \gamma_n \sum_{k \neq 0} \frac{B_{nk}}{4k^2}. \quad (3.96)$$

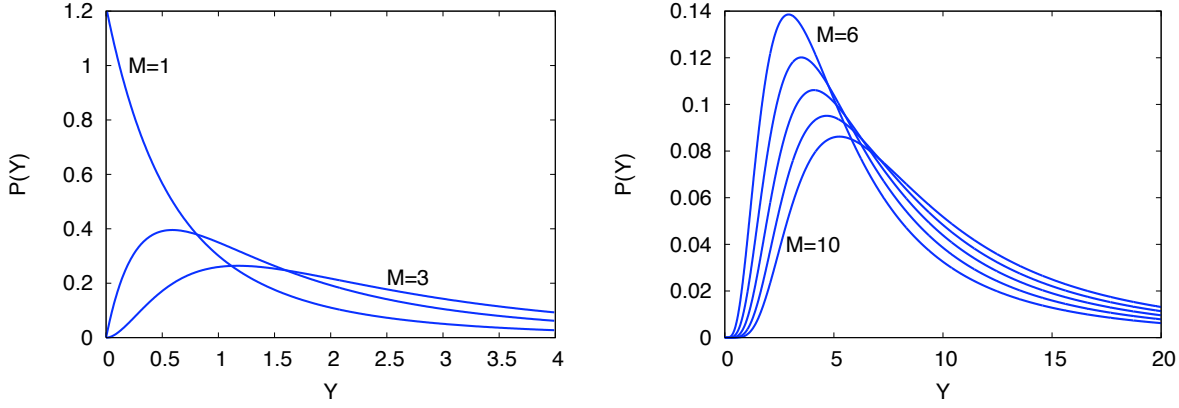


FIG. 3.14 – Distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité  $Y$  pour GUE (3.95). A gauche pour  $M = 1, 2$  et  $3$ . A droite pour  $M = 6, 7, 8, 9$  et  $10$ .

En remplaçant dans (3.48) l'expression de  $Y_n$  par (3.96) et en écrivant la distribution de Dirac sous sa représentation intégrale, on obtient :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(Y) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega Y} \left\langle \exp \left[ -i\omega \gamma \sum_{k \neq 0} \frac{B_k}{4k^2} \right] \right\rangle, \quad (3.97)$$

où la moyenne porte sur  $\gamma$  et les  $\{B_k\}$ . L'intégration sur ces derniers est immédiate compte tenu de (3.37) :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega Y} \int_0^{\infty} d\gamma P_M(\gamma) \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + i \frac{\omega \gamma}{4k^2}} \right)^2. \quad (3.98)$$

En effectuant le changement de variable  $\gamma = |z|^2$ , et en procédant de la même manière que pour  $\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(X)$ , on obtient l'expression :

$$\mathcal{P}_M^{\text{PF}}(Y) = \frac{\pi^2 \sqrt{Y}^{M-1}}{2\Gamma(M)} \int_0^{\infty} dz \frac{z^{M+2}}{\sinh^2(z\pi/2)} J_{M-1}(2\sqrt{Y}z). \quad (3.99)$$

La Fig. 3.15 représente les distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité de picket-fence et de GUE pour quelques valeurs de  $M$ . Là encore, la décroissance est bien plus lente dans le cas du spectre contenant des fluctuations spectrales.

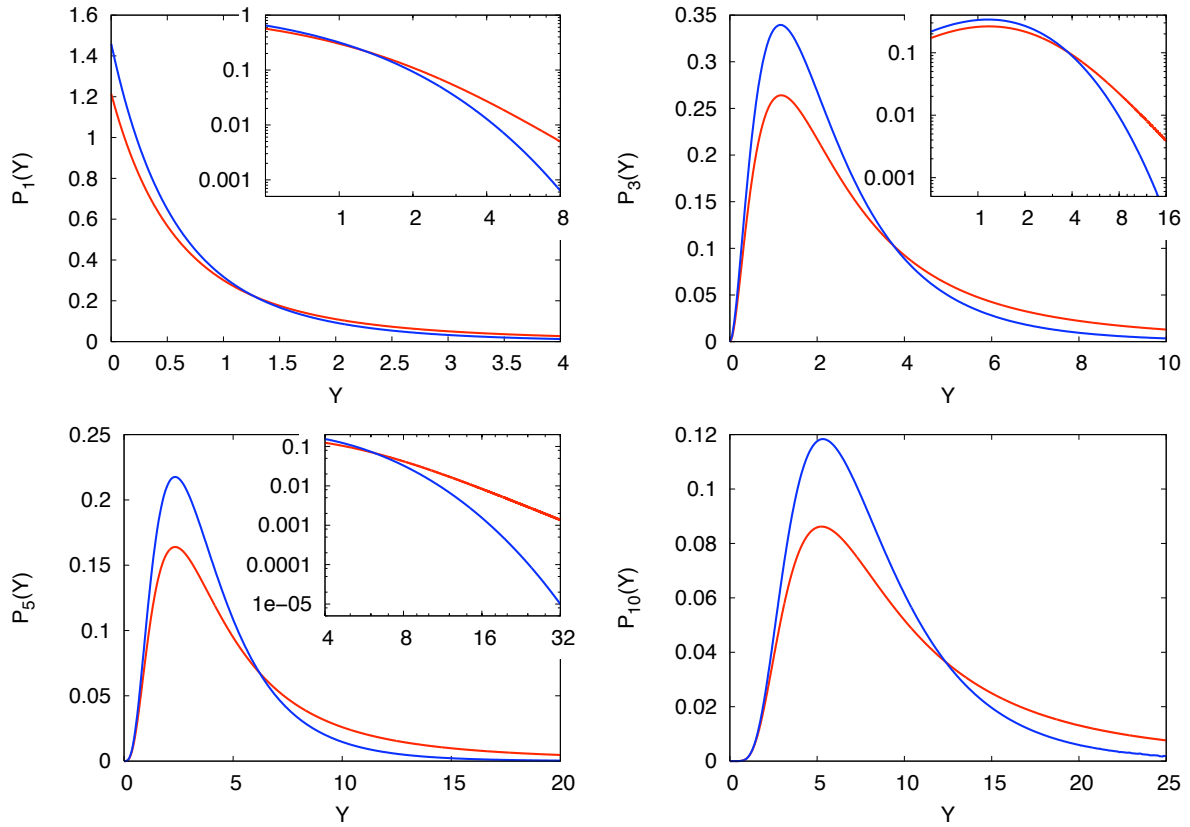


FIG. 3.15 – Distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité  $Y$  pour picket-fence (3.99) en rouge et pour GUE en bleu (3.74) pour  $M = 1, 3, 5$  et  $10$ . En insert, les queues des distributions en échelle log-log. Les méthodes numériques employées pour résoudre l'intégrale (3.99) ne permettent pas d'explorer les grands valeurs de  $Y$  lorsque  $M$  devient grand.

### 3.3.5 Distributions de $X$ et $Y$ dans la limite $M \gg 1$

Pour analyser de manière plus précise l'effet des fluctuations, nous allons considérer maintenant le cas d'un nombre grand mais fini de canaux faiblement couplés<sup>2</sup>, correspondant au cas d'une absorption quasi-homogène [95]. Dans la limite  $M \gg 1$ , il est plus intéressant de travailler avec un paramètre de non-orthogonalité indépendant de  $M$  :

$$x = X/M, \quad y = Y/M \quad (3.100)$$

<sup>2</sup>Rappelons que pour les pertes homogènes, définies par  $M \rightarrow \infty$ , les éléments non diagonaux de la partie anti-hermitienne de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  sont nuls, entraînant un paramètre de non-orthogonalité nul dont la distribution est simplement donnée par :  $P(X) = \delta(X)$  et  $P(Y) = \delta(Y)$  indépendamment du spectre considéré.

Distribution de  $x$  et  $y$  pour picket-fence

Les expressions (3.81) et (3.99) ne permettent pas de passer simplement à la limite  $M \gg 1$ . Pour obtenir une expression analytique il paraît nécessaire de partir de l'expression (3.77) en remplaçant la distribution du  $\chi^2$  par sa forme asymptotique dans la limite  $M \gg 1$  : la distribution de Dirac,  $P_M(\gamma) = \delta(\gamma - M)$ . L'intégration sur  $\gamma$  est alors immédiate et la distribution de probabilité de  $x$  s'écrit :

$$\mathcal{P}^{\text{PF}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega x} \prod_{k=1}^{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{2k^2}} \quad (3.101)$$

L'intégrand est une fonction composée de  $N$  pôles simples localisés sur l'axe imaginaire supérieur  $\omega_k = 2ik^2$  avec  $k = 1, \dots, N$ . L'intégrale peut être calculée en utilisant le théorème des résidus, ce qui donne :

$$\mathcal{P}^{\text{PF}}(x) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 e^{-2k^2 x}, \quad (3.102)$$

et finalement

$$\mathcal{P}^{\text{PF}}(x) = -2e^{-2x} \frac{d}{dx} \vartheta_4(0, e^{-2x}), \quad (3.103)$$

où  $\vartheta_4$  est la fonction theta de Jacobi [156]. Ce résultat, montre que  $\mathcal{P}^{\text{PF}}(x)$  décroît exponentiellement. En appliquant la même méthode, on trouve que  $\mathcal{P}^{\text{PF}}(y)$  est donnée par :

$$\mathcal{P}^{\text{PF}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega y} \prod_{k=1}^{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{i\omega}{2k^2})^2}. \quad (3.104)$$

Dans le cas où l'invariance par renversement du sens du temps est brisée, l'intégrand de la distribution de  $y$  est composé de  $N$  pôles doubles localisés sur l'axe imaginaire supérieur  $\omega_k = 2ik^2$  avec  $k = 1, \dots, N$ . En utilisant le théorème des résidus, on montre que la distribution  $\mathcal{P}^{\text{PF}}(y)$  s'identifie à  $\mathcal{P}^{\text{PF}}(x)$ . Ainsi, dans la limite  $M \gg 1$ , le comportement des distributions du paramètre de non-orthogonalité est essentiellement dicté par le spectre du système fermé. Ce résultat peut se comprendre en notant que les expressions de  $x$  et de  $y$  mettent en jeu une somme d'un grand nombre de termes indépendants, lié au fait que  $\gamma = M$ , suggérant l'applicabilité du théorème de la limite centrale [158].

Distribution de  $x$  et  $y$  pour GOE et GUE

La limite  $M \gg 1$  peut ici être prise directement à partir des expressions finales (3.74) et (3.95). On obtient alors, pour GOE :

$$\mathcal{P}^{\text{GOE}}(x) = \frac{\pi^2}{24x^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{4x}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{8x}\right), \quad (3.105)$$

et pour GUE :

$$\mathcal{P}^{\text{GUE}}(y) = \frac{\pi^{5/2}}{32y^{5/2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{3y} + \frac{\pi^4}{12y^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{4y}\right). \quad (3.106)$$

La comparaison des distributions du paramètre de non-orthogonalité dans la limite  $M \gg 1$  illustre clairement les effets des fluctuations du spectre (Fig 3.16).

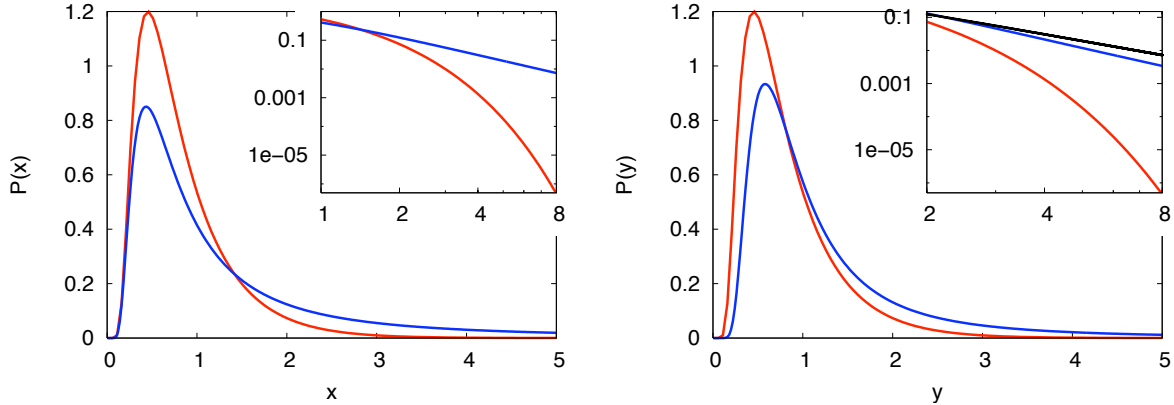


FIG. 3.16 – Distributions de probabilité du paramètre de non-orthogonalité normalisé  $x$  et  $y$ . A gauche pour picket-fence (3.103) en rouge et pour GOE (3.105). A droite pour picket-fence (3.103) en rouge, pour GUE (3.106) en bleu et pour GOE (3.106) en noir. En insert, les queues des distributions en échelle log-log.

Alors que les maximums des distributions sont proches les uns des autres pour toutes les distributions, la population des grandes valeurs du paramètre est d'autant plus importante que les fluctuations spectrales sont grandes. Ce comportement peut être simplement expliqué en remarquant que les écarts entre niveaux apparaissent au dénominateur de l'expression du paramètre de non-orthogonalité (3.30). Ainsi, de faibles écarts entraînent des grandes valeurs du paramètre. Pour un spectre dont les énergies sont équidistantes *i.e.* sans fluctuations, les queues des distributions décroissent exponentiellement :

$$\mathcal{P}^{\text{PF}}(x) \xrightarrow{x \gg 1} e^{-2x}, \quad \mathcal{P}^{\text{PF}}(y) \xrightarrow{y \gg 1} e^{-2y}. \quad (3.107)$$

Par contre, les fluctuations spectrales pour GOE (3.45) et GUE (3.46) peuvent induire de très faibles écarts, et augmentent donc la population des grandes valeurs du paramètre par rapport au cas de picket-fence. Ces fluctuations sont clairement visibles sur les queues des distributions de GOE et GUE, dont les décroissances sont en loi de puissance :

$$\mathcal{P}^{\text{GOE}}(x) \xrightarrow{x \gg 1} 1/x^2, \quad \mathcal{P}^{\text{GUE}}(y) \xrightarrow{y \gg 1} 1/x^{5/2}. \quad (3.108)$$

La différence de l'exposant s'explique en notant que la densité des faibles écarts est plus grande pour GOE (répulsion linéaire) que pour GUE (répulsion quadratique). La population des grandes valeurs de  $x$  est donc plus importante que celle des grands  $y$  ; ainsi, la décroissance est plus lente pour GOE que pour GUE. Cette étude révèle donc la grande sensibilité de la non-orthogonalité du champ par rapport au spectre du système fermé.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les statistiques des fonctions propres de l'hamiltonien effectif de systèmes chaotiques dont la limite fermée est décrite par GOE ou GUE ont été analysées dans le régime des faibles pertes inhomogènes, indépendamment de la contribution homogène aux largeurs. La non-orthogonalité des fonctions propres a été étudiée en dérivant les distributions de probabilité d'une quantité directement reliée aux éléments diagonaux de la matrice de recouvrement et au facteur de Petermann : le paramètre de non-orthogonalité. Ce travail est, à ma connaissance, le premier permettant de décrire les statistiques de la non-orthogonalité des fonctions propres associées à GOE pour un nombre de canaux quelconque [146].

L'effet des fluctuations spectrales de GOE et GUE sur la non-orthogonalité a été considéré en comparant les distributions de probabilité à celles d'un spectre complètement rigide. En étudiant le comportement des distributions dans la limite d'un grand nombre de canaux, j'ai montré que la distribution du paramètre de non-orthogonalité décroît exponentiellement pour picket-fence et à un comportement en loi de puissance pour GOE et GUE, indiquant que les fluctuations spectrales modifient grandement le comportement asymptotique des distributions. De plus, en reliant la valeur moyenne du paramètre de non-orthogonalité à la variance des largeurs des résonances, l'effet du couplage dans le domaine spatial a pu être décrit à partir du domaine spectral. Cet important résultat, valable pour les systèmes faiblement couplés, et dont le spectre est non-dégénéré, fournit une interprétation physique simple des éléments diagonaux de la matrice de recouvrement et répond en partie à la question posée dans l'article de Y. Fyodorov et B. Mehlhig [128].

---

L'étude des éléments non-diagonaux de la matrice de recouvrement, qui décrit les corrélations entre différentes fonctions propres [128], reste un problème intéressant à explorer. Concernant les éléments diagonaux de la matrice de recouvrement, l'étude de la non-orthogonalité de systèmes dont la symétrie par renversement du sens du temps est partiellement brisée *i.e.* transition GOE-GUE, demeure totalement inexplorée.





# Chapitre 4

## Mesures du paramètre de non-orthogonalité : Simulations numériques et expérience

Ce chapitre présente des résultats numériques et expérimentaux obtenus sur les propriétés du paramètre de non-orthogonalité. Tout d'abord, la distribution du paramètre de non-orthogonalité pour GOE (dérivée analytiquement au chapitre III, Eq.(3.74)), sera comparée à des simulations numériques réalisées dans une cavité électromagnétique bi-dimensionnelle dont le couplage avec l'extérieur est introduit par des pertes ohmiques sur les bords (§4.1). Ensuite, à partir d'une expérience d'acoustique permettant de mesurer les vibrations normales d'une plaque de silicium de forme chaotique, nous nous intéresserons, pour une résonance donnée, à l'évolution du paramètre de non-orthogonalité en fonction des pertes inhomogènes (§4.2). Plus précisément, nous montrerons que la racine carrée du paramètre de non-orthogonalité est proportionnelle à la largeur inhomogène, lorsque celle-ci varie de manière *uniforme*. Ces résultats expérimentaux seront interprétés à l'aide d'un simple modèle à 2 niveaux.

L'ensemble de ces travaux ont été réalisés en collaboration étroite avec différents membres du LPMC qui ont apporté leurs savoir-faire numérique ou expérimental.

## 4.1 Les simulations numériques

En utilisant la méthode des éléments finis<sup>1</sup>, nous avons calculé les fréquences, les largeurs et les champs associées aux 800 premières résonances d'une cavité électromagnétique chaotique bi-dimensionnelle, dont le couplage avec l'extérieur est introduit par des pertes ohmiques localisées sur une partie du contour de la cavité. L'analyse des résultats numériques permet de construire les distributions du paramètre de non-orthogonalité de la cavité pour différents contours absorbants et plusieurs gammes de fréquence. Ces distributions sont ensuite confrontées aux prédictions théoriques du chapitre III. Les simulations numériques ont été réalisées par L. Labonté, spécialiste des milieux électromagnétiques structurés et du logiciel d'analyse par éléments finis ComSol.

### 4.1.1 La cavité électromagnétique ouverte

Dans une cavité électromagnétique bi-dimensionnelle<sup>2</sup>, il existe deux polarisations TE (Transverse Electrique) et TM (Transverse magnétique) que l'orientation de l'antenne excitatrice permet facilement de contrôler. Pour les modes TM, les seuls modes susceptibles d'être excités sont les modes d'ordre 0. Si le plan  $(x, y)$  désigne le plan de la cavité, les composantes spatiales des champs électrique et magnétique de ce mode, notés respectivement  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  se mettent sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ E_z(x, y) \end{cases}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} B_x(x, y) \\ B_y(x, y) \\ 0 \end{cases}. \quad (4.1)$$

Ainsi, seule la composante suivant  $z$  du champ électrique est non nulle et sera assimilée à un champ scalaire, noté  $\Psi(x, y)$ . A l'intérieur de la cavité, constitué de vide, le champ scalaire vérifie l'équation d'Helmholtz :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Psi(x, y) = 0, \quad (4.2)$$

où  $\omega$  est la fréquence et  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le cas d'une cavité fermée, c'est-à-dire pour des bords de conductivité infinie, le champ vérifie les conditions aux limites de Dirichlet *i.e.* s'annule sur le contour  $\mathcal{C}$  de la cavité :  $\psi(x, y)|_{\mathcal{C}} = 0$ . Dans

<sup>1</sup>On pourra consulter [159] pour une présentation détaillée de cette méthode ou [160] pages 83-88 pour une description succincte.

<sup>2</sup>On obtient une cavité bi-dimensionnelle en limitant la plus petite longueur d'onde du champ injecté à deux fois la hauteur de la cavité.

notre étude, les pertes inhomogènes sont introduites en incorporant une conductivité finie sur une partie du contour, le reste du contour satisfaisant les conditions aux bords de Dirichlet. La conductivité du contour  $\sigma_c$  étant choisie pour rester dans le régime de couplage faible :  $\langle \Gamma \rangle / \Delta < 10^{-2}$ . Il est important de noter que les distributions théoriques du paramètre de non-orthogonalité, ont été obtenues en considérant que les largeurs des résonances fluctuent autour d'une valeur moyenne fixe. Cependant, les largeurs des résonances induites par des pertes ohmiques varient en fonction de la fréquence en  $\Gamma \sim \sqrt{\omega}$  (voir par exemple [52]). Pour s'affranchir de cette variation globale, seules les résonances à suffisamment haute fréquence sont considérées, en pratique à partir de la 300<sup>ième</sup>. De plus, les distributions sont construites dans des gammes en fréquence restreintes à 100 résonances. Ces restrictions assurent une variation de la largeur des résonances inférieure à 8% au sein de chaque échantillon.

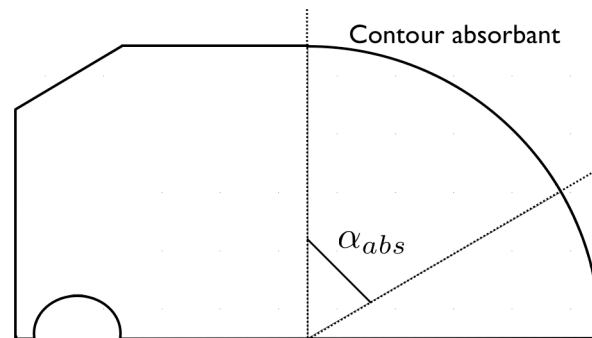


FIG. 4.1 – Schéma de la cavité électromagnétique en forme de quart de stade. Le mélangeur en forme de demi-disque est déplacé horizontalement vers la droite pour trois positions initiales différentes. Les conditions aux limites absorbantes, définies par l'angle  $\alpha_{abs}$ , sont réparties sur l'arc de cercle supérieur de la cavité. Un tronçon oblique a été rajouté de manière à diminuer la population des *scars*.

Pour obtenir un échantillonnage suffisant, des moyennes d'ensemble sont effectuées en incorporant dans la cavité chaotique en forme de quart de stade de 2m de longueur et de 1m de largeur un *mélangeur* constitué d'une demi-disque ou d'un disque de 15cm de rayon. Pour trois positions de ce mélangeur suivant l'axe  $y$ , celui-ci est déplacé suivant  $x$  avec un pas de 10cm en sept endroits différents dans la partie rectangulaire de la cavité (Fig. 4.1), notons qu'à la plus basse résonance considérée correspond une longueur d'onde de 2 cm, le pas choisi assure donc bien l'indépendance statistique des échantillons. On obtient au total 21 positions différentes, soit 2100 événements pour chaque gamme de 100 résonances. La Fig. 4.2 montre le champ associé à la 500<sup>ième</sup> résonance pour une position du mélangeur.

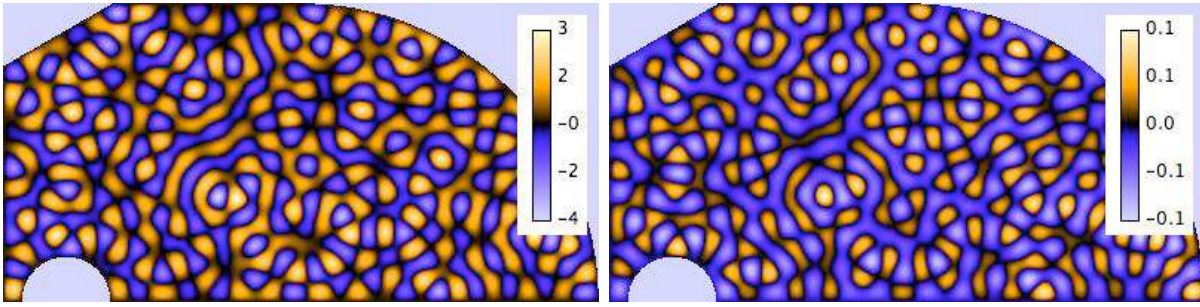


FIG. 4.2 – Champ complexe associé à la 500<sup>ième</sup> résonance pour une position du mélangeur et pour l'angle  $\alpha_{abs} = \pi/2$ . A droite la partie réelle et à gauche la partie imaginaire.

### 4.1.2 Les distributions des largeurs et des paramètres de non-orthogonalité

Les distributions des largeurs et des paramètres de non-orthogonalité ont ainsi été obtenues pour deux gammes de fréquences, la première allant de la 300<sup>ième</sup> à la 400<sup>ième</sup> résonance, la seconde allant de la 700<sup>ième</sup> à la 800<sup>ième</sup> résonance et pour les trois périmètres absorbants différents définis par les angles :  $\alpha_{abs} = \pi/18, \pi/6$  et  $\pi/2$  (Fig. 4.1).

#### Détermination des canaux fictifs

Le nombre de canaux fictifs associé aux pertes ohmiques peut être obtenu à partir des deux premiers moments de la loi du  $\chi^2$ , donnés par  $\langle \Gamma \rangle = M\sigma^2$  et  $\langle \Gamma^2 \rangle = (M^2 + 2M)\sigma^4$ . En combinant ces deux expressions on aboutit à l'expression :

$$M = E \left[ \frac{2}{\langle \Gamma^2 \rangle / \langle \Gamma \rangle^2 - 1} \right], \quad (4.3)$$

où la fonction partie entière  $E[\dots]$  est rajoutée pour obtenir un nombre de canaux entier. Le nombre de canaux peut aussi être obtenu par la loi de Sabine [10], qui relie directement le nombre de canaux au périmètre absorbant  $P_{abs}$ , ainsi :

$$M = E[P_{abs}/(\langle \lambda \rangle / 2)], \quad (4.4)$$

où  $\langle \lambda \rangle$  est la longueur d'onde moyenne associée à la gamme de fréquence considérée. La Fig. 4.3 représente les distributions des largeurs de la cavité électromagnétique ainsi que les distributions du  $\chi^2$  pour un nombre de canaux obtenus par les deux méthodes. L'excellent accord entre l'histogramme numérique et les lois du  $\chi^2$  confirme la validité de l'approche perturbative, illustre l'applicabilité de la loi de Sabine pour décrire le couplage

ohmique et montre que ce couplage peut être caractérisé par des canaux indépendants.

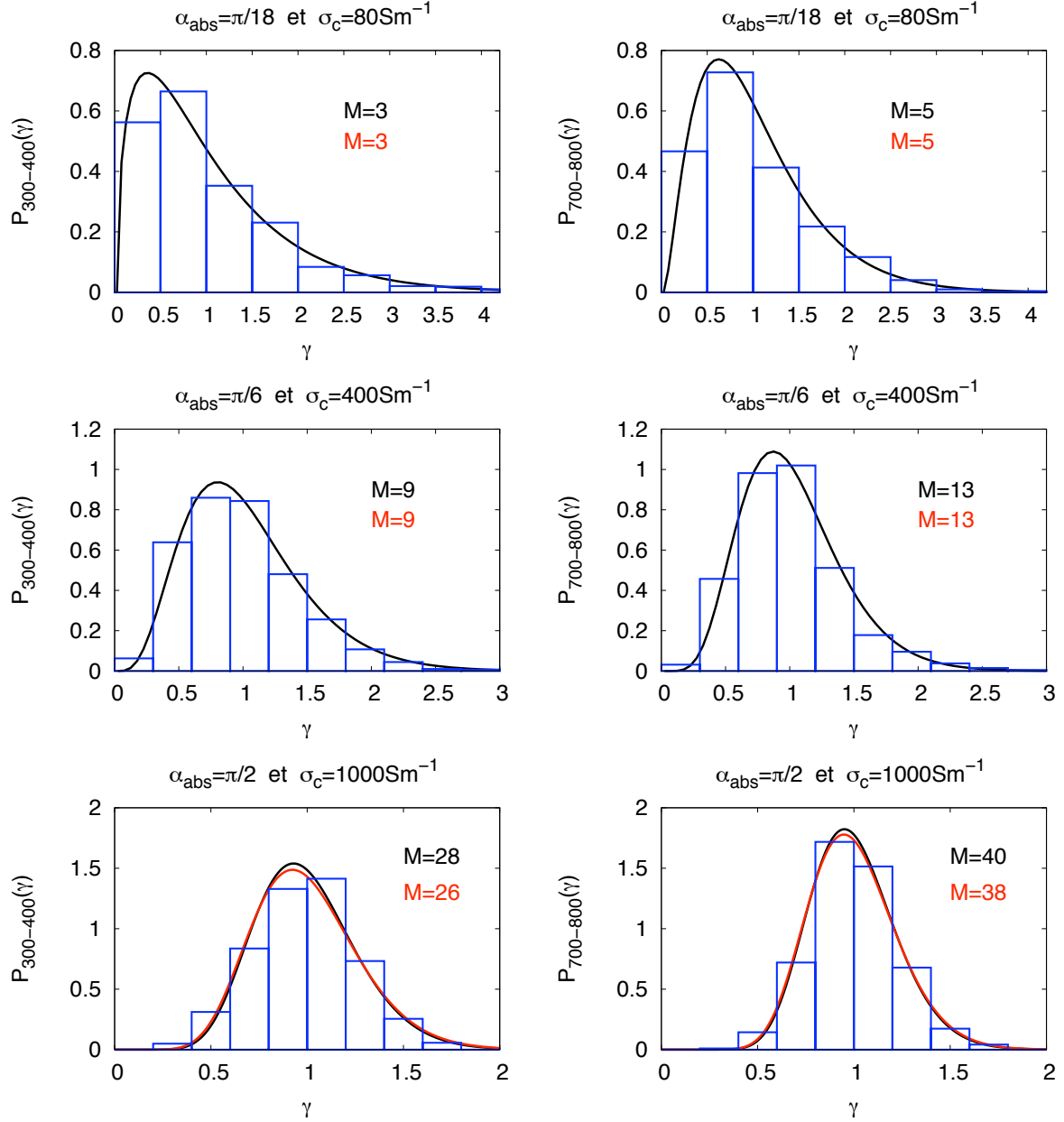


FIG. 4.3 – Distributions des largeurs  $\gamma$  normalisée par  $\langle \gamma \rangle = 1$  pour les deux gammes en fréquence et les trois différents périmètres absorbants considérés. En histogramme les distributions numériques, en trait plein la distribution du  $\chi^2$  où  $M$  est obtenu via (4.3) en rouge et (4.4) en noir.

### Distribution du paramètre de non-orthogonalité

Pour les systèmes dont la limite fermée est invariante par reversement du sens du temps, le paramètre de non-orthogonalité est donné par (voir chapitre III, Eq. (3.22)) :

$$q_n^2 = \frac{\sum_i (\text{Im}[\Psi_n^i])^2}{\sum_i (\text{Re}[\Psi_n^i])^2}. \quad (4.5)$$

On le calcule ici en réalisant des moyennes spatiales à partir des cartes du champ complexe calculés numériquement. La Fig. 4.4 compare les distributions du paramètre de non-orthogonalité obtenue numériquement à la prédiction théorique dérivée au chapitre III. On pourra noter que la distribution numérique suit aussi la prédiction théorique dans la queue de la distribution. Ce résultat prouve la validité de l'approche perturbative au premier ordre qui permet de décrire les statistiques du champ associé aux résonances pour des systèmes physiques pour lesquels les pertes inhomogènes sont faibles.

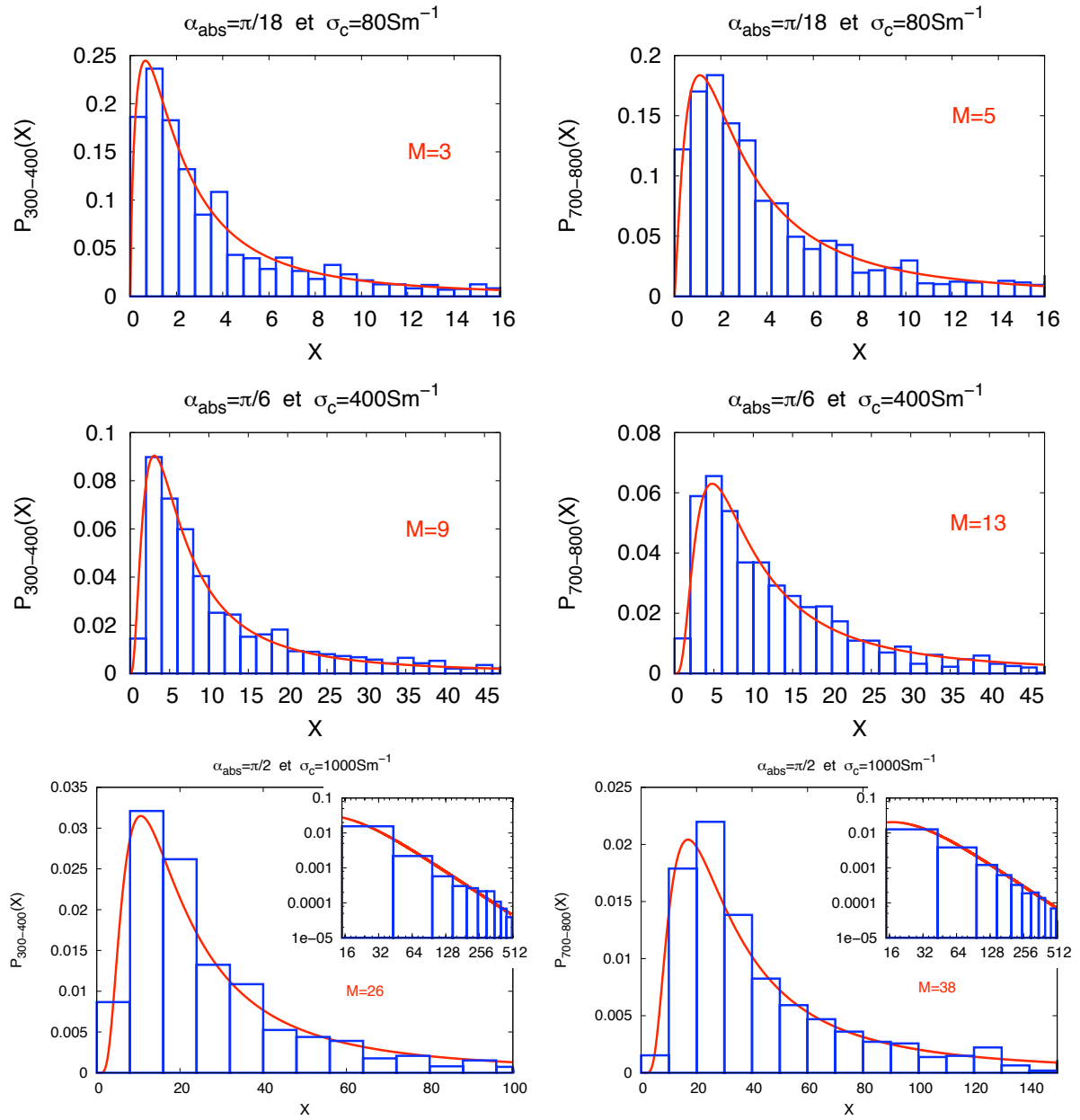


FIG. 4.4 – Distributions du paramètre de non-orthogonalité pour les deux gammes en fréquence et les trois différents périmètres absorbants considérés. En histogramme la distribution numérique, en trait plein la distribution analytique correspondant à nu nombre de canaux obtenus par (4.3).



## 4.2 L'expérience acoustique

Nous allons maintenant étudier, dans le régime de faible recouvrement modal et pour une résonance donnée, comment évolue le paramètre de non-orthogonalité en fonction de la composante inhomogène de la largeur. Pour ce faire, nous allons utiliser une expérience où le taux de pertes est contrôlé. Les résultats obtenus mettrons en évidence proportionnalité entre la racine carré du paramètre de non-orthogonalité  $q_n^2$  varie et la composante inhomogène  $\Gamma_n^{\text{inh}}$  lorsque celle-ci varie uniformément [147]. Cette proportionnalité est retrouvée analytiquement en considérant un simple modèle à 2 niveaux qui est présenté, par souci de clarté, avant les résultats expérimentaux.

### 4.2.1 Modèle analytique

Alors qu'un modèle à  $N$  niveaux avec  $N \rightarrow \infty$  est nécessaire pour décrire les statistiques du paramètre de non-orthogonalité, un modèle à 2 niveaux (déjà présenté en détails dans le chapitre II) est ici suffisant pour illustrer la proportionnalité entre  $q_n$  et  $\Gamma_n^{\text{inh}}$ . En écrivant l'hamiltonien effectif  $\mathcal{H}_{\text{eff}} = H - iVV^\dagger/2$  dans la base diagonalisant l'hamiltonien du système fermé :

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

où  $E_1$  et  $E_2$  sont les énergies propres du système fermé (avec  $E_2 > E_1$ ) et les éléments de matrice du potentiel imaginaire sont reliés aux éléments de couplage par  $\Gamma_{np} = \sum_{j=1}^M V_n^c V_p^c$ . Notons que dans ce modèle, les éléments non diagonaux du potentiel imaginaire sont égaux :  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \sum_{j=1}^M V_1^c V_2^c$ . Comme nous nous intéressons au régime de faible recouvrement modal, nous pouvons appliquer la théorie des perturbations au premier ordre pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de (4.6). Les valeurs propres de  $H_{\text{eff}}$  sont alors données par :

$$\mathcal{E}_{1,2} = E_{1,2} - \frac{i}{2} \Gamma_{1,2}, \quad \text{avec} \quad \Gamma_{1,2} = \sum_{c=1}^M (V_{1,2}^c)^2, \quad (4.7)$$

où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les largeurs associées aux pertes inhomogènes. Dans la base ( $|1\rangle, |2\rangle$ ) des vecteurs propres de  $H$ , les vecteurs propres non normalisés de  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , s'écrivent :

$$|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -if \end{pmatrix}, \quad |\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix} if \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

avec

$$f = \frac{\Gamma_{21}}{2(E_2 - E_1)} = \frac{\Gamma_{12}}{2(E_2 - E_1)}. \quad (4.9)$$

En utilisant (4.5), on trouve que le paramètre de non-orthogonalité du modèle à 2 niveaux est identique pour les deux résonances, du fait que  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ , et s'écrit :

$$q_{1,2}^2 = \frac{\Gamma_{21}^2}{4(E_2 - E_1)^2}. \quad (4.10)$$

Une augmentation *uniforme* des pertes inhomogènes modifie, par définition, chaque élément de couplage de la même manière :  $V_i^c \rightarrow \sqrt{v}V_i^c$ , où le scalaire  $v$  caractérise l'augmentation des pertes. D'après leurs expressions respectives (4.7) et (4.10), les largeurs et le paramètre de non-orthogonalité sont modifiés comme  $\Gamma \rightarrow v\Gamma$  et  $q^2 \rightarrow v^2q^2$ , impliquant une relation de proportionnalité entre  $\Gamma$  et  $q$  pour une résonance donnée :

$$q_n = \frac{\sqrt{(\sum_c V_1^c V_2^c)^2}}{\sum_c (V_n^c)^2} \frac{\Gamma_n}{2(E_2 - E_1)}. \quad (4.11)$$

Cette relation peut se mettre sous la forme générale :

$$q_n = \beta_n \Gamma_n^{inh}, \quad (4.12)$$

où le coefficient de proportionnalité  $\beta_n$ , propre à chaque résonance, dépend des amplitudes de couplage et du spectre du système fermé.

### 4.2.2 L'expérience acoustique

Cette expérience, réalisée par O. Xeridat et P. Sebbah, mesure le champ associé aux vibrations normales d'une plaque mince de silicium dans laquelle des ondes acoustiques sont excitées par effet thermoélastique. La technique expérimentale employée donne accès au spectre des résonances de la plaque ainsi qu'à une cartographie du champ en fonction de la fréquence. En contrôlant le taux de pertes inhomogènes par des bandes absorbantes positionnées sur un bord de la plaque, la prédiction théorique (4.12) obtenue précédemment sera vérifié.

#### La plaque de silicium

La plaque d'épaisseur  $h = 380\mu\text{m}$  et de forme circulaire de rayon  $R = 25,41\text{mm}$  est coupée à  $R/2$  pour obtenir un cercle tronqué, assurant une trajectoire chaotique des rayons dans la limite géométrique [161]. Un autre tronçon à  $\sqrt{3}R/2$ , perpendiculaire au

premier, est réalisé pour briser la symétrie spatiale restante (Fig. 4.5). Dans ce type de plaques minces<sup>3</sup> les ondes élastiques peuvent se propager sous deux modes : les ondes polarisées horizontalement (SH) et les ondes de Lamb qui se décomposent elles-mêmes en modes symétrique et antisymétrique [162].

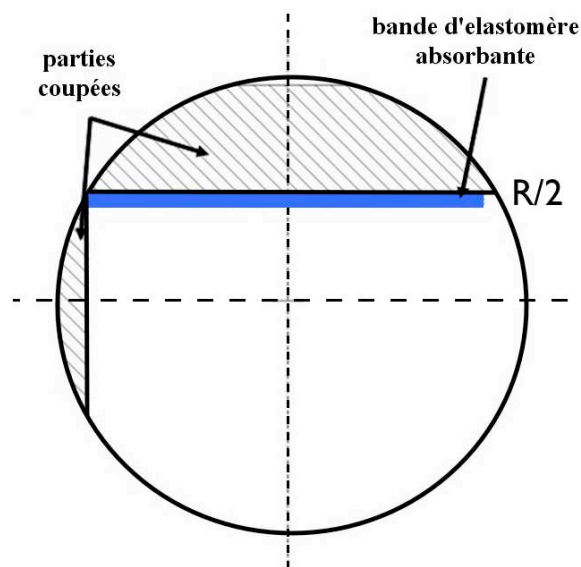


FIG. 4.5 – Forme de la plaque de silicium, les parties grisées représentent les parties enlevées. La zone où une bande absorbante est positionnée pour augmenter les pertes inhomogènes est aussi indiquée.

### Le processus d'excitation et la technique de mesure

La plaque de silicium est posée librement sur trois pointes, dont le couplage avec les ondes acoustiques est négligeable. Les ondes acoustiques sont excitées par un laser impulsif de période  $\tau = 7\text{ns}$  et de longueur d'onde  $532\text{ nm}$ . Les impulsions lasers frappent la plaque sur une zone inférieure à  $200\mu\text{m}$  de diamètre et créent des ondes acoustiques par effet thermoélastique. Une sonde optique interférométrique mesure, en un point de l'échantillon et de manière non-invasive, la réponse temporelle proportionnelle au déplacement normale de la plaque. Ce déplacement correspond essentiellement aux modes antisymétriques  $A_0$  du champ acoustique<sup>4</sup>. La réponse temporelle sur l'ensemble

<sup>3</sup>Les plaques minces sont définies par  $h < \lambda/2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde acoustique. Dans l'expérience,  $\lambda \sim \text{cm}$ .

<sup>4</sup>Dans l'expérience, les seuls modes guidés, aux fréquences considérées, sont les modes (SH) et les modes symétriques et antisymétriques d'ordre 0, respectivement notés  $S_0$  et  $A_0$ , mais seul ce dernier à un fort déplacement normal

de l'échantillon est obtenue en déplaçant la plaque selon  $x$  et  $y$  avec un pas de  $500\mu\text{m}$  via des platines de translations, de sorte que le point de mesure parcourt l'ensemble de la plaque, la zone d'excitation restant fixe. En effectuant une transformée de Fourier des réponses temporelles, le spectre et le champ associé au mode  $A_0$  est obtenu sur toute la plaque.

### L'augmentation des pertes inhomogènes

Pour faire varier de manière uniforme les pertes inhomogènes, des bandes d'élastomère de différentes épaisseurs sont placées sur le bord le plus long de la plaque (Fig. 4.5). Les mesures ont été effectuées pour cinq absorptions différentes : tout d'abord sans absorption puis en positionnant quatre bandes de dimension de plus en plus grande. Alors que le spectre représenté au bas de la Fig. 4.8 montre l'élargissement des largeurs pour une résonance isolée, en fonction de la bande absorbante, la Fig. 4.7 illustre l'augmentation du poids de la composante imaginaire du champ, provenant de l'augmentation des courants de pertes. L'augmentation de l'absorption est donc clairement visible aussi bien dans le domaine spectral (augmentation de la largeur) que dans le domaine spatial (augmentation du poids de la partie imaginaire). L'ensemble de ces données expérimentales permettront de vérifier d'une part, l'hypothèse de Pnini et Shapiro et d'autre part, la proportionnalité entre  $q_n$  et  $\Gamma_n^{inh}$  (4.12).

### Validation de l'hypothèse de Pnini et Shapiro

A partir des cartes du champ, la distribution de probabilité de la phase du champ (voir chapitre I) peut être construite. Les distributions de la phase de la résonance considérée (Fig. 4.8) correspondent, avec une grande précision, à la prédiction théorique, validant ainsi le fait que les parties réelle et imaginaire peuvent être vues comme des variables aléatoires gaussiennes.

### Proportionnalité entre $q$ et $\Gamma$

Les largeurs des résonances sont obtenues en ajustant le spectre avec une fonction lorentzienne complexe  $L(\omega) = C/(\omega - \omega_0 + i\Gamma)$ , où  $\omega_0$  est la fréquence centrale,  $\Gamma$  est la largeur totale, et  $C$  est un paramètre. La Fig. 4.6 illustre la relation de proportionnalité entre  $q$  et  $\Gamma$ , la déviation par rapport à un ajustement linéaire  $q = 5.54 \cdot 10^{-4} \Gamma - 3.91 \cdot 10^{-2}$  est inférieur à 3 %. Notons que la valeur non nulle de largeur pour  $q = 0$  correspond à la contribution constante des pertes homogènes dues au couplage de la plaque avec l'air.

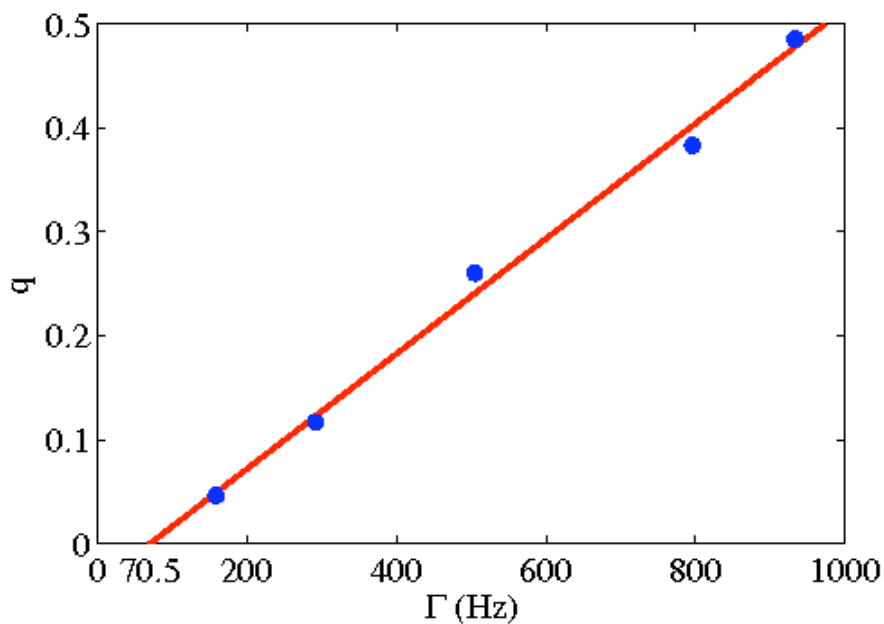


FIG. 4.6 – Racine carrée du paramètre de non-orthogonalité en fonction de la largeur totale de la résonance pour les cinq configurations représentées en Fig. 4.7, un fit linéaire est représenté en trait plein.

Nous nous sommes ici concentrés sur une seule résonance mais, à chaque résonance correspond un coefficient de proportionnalité différent dû aux fluctuations des éléments de couplage et du spectre. Une étude statistique des coefficients de proportionnalité, qui rentre dans le cadre des statistiques du paramètre de non-orthogonalité pourrait constituer une prochaine étape de ce travail.

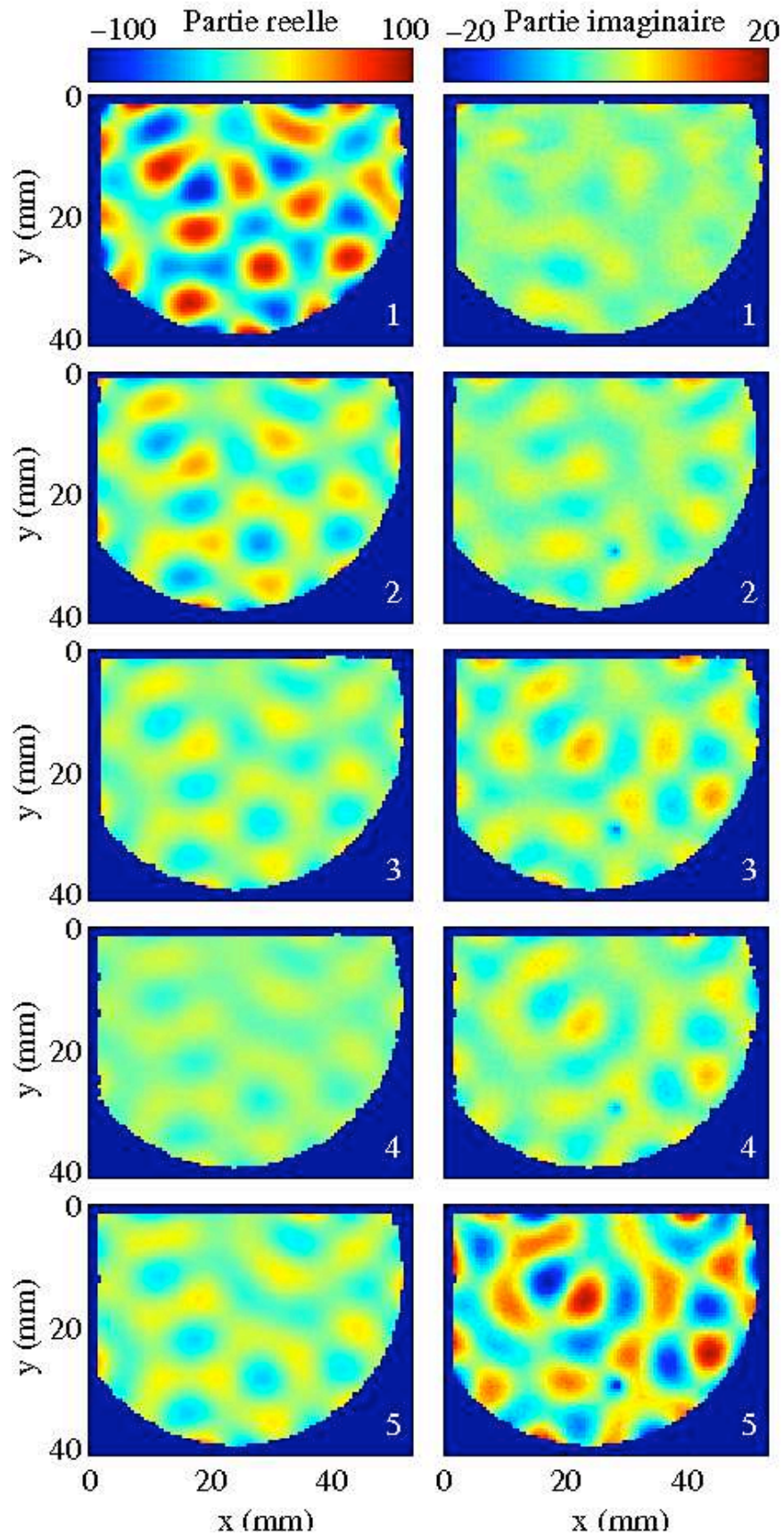


FIG. 4.7 – Cartes du champ complexe représenté pour 5 absorptions différentes. A gauche la partie réelle, à droite la partie imaginaire du champ obtenu à la fréquence centrale de la résonance.

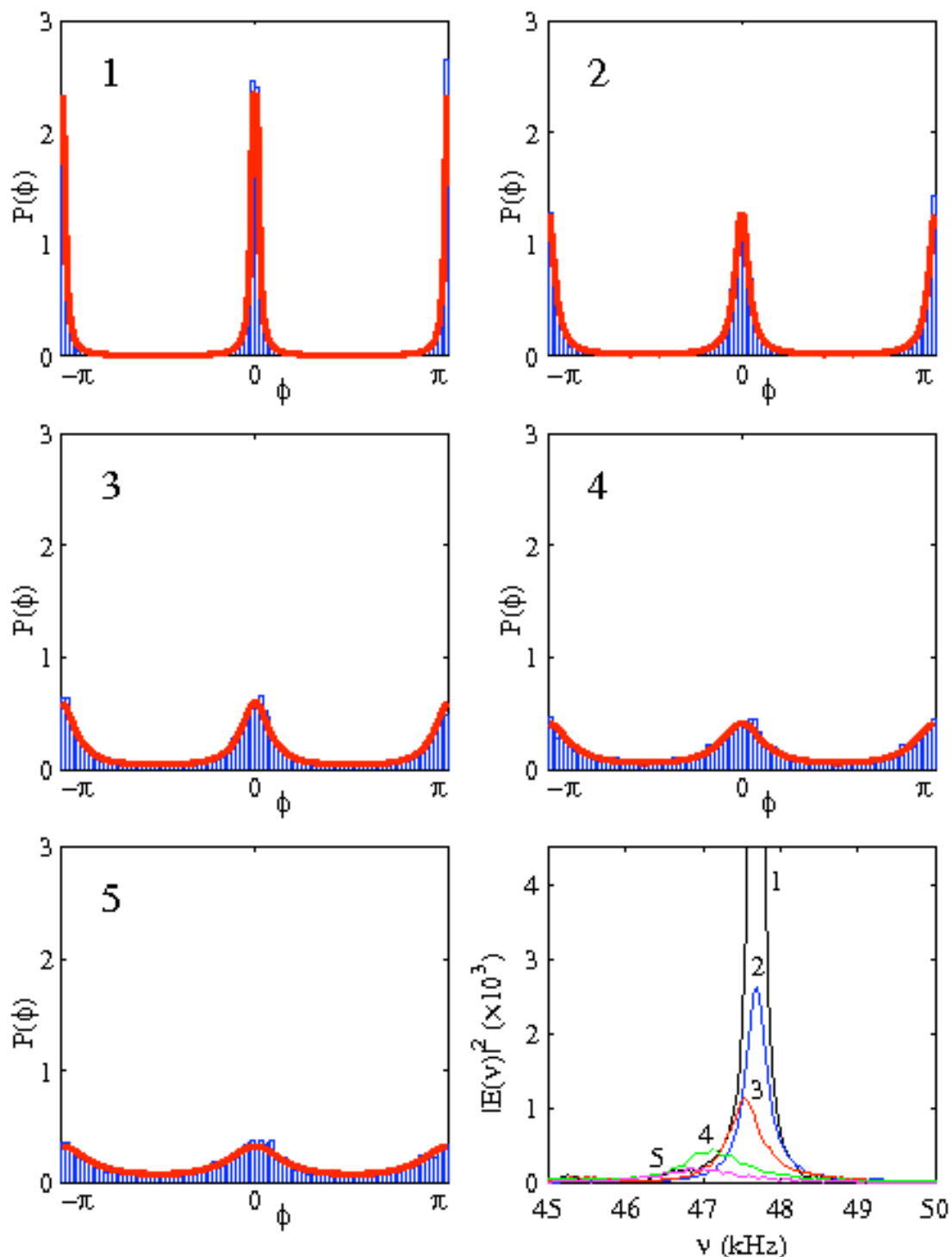


FIG. 4.8 – Distributions de probabilité de la phase  $P(\phi)$  pour les cinq configurations décrites précédemment, en haut à gauche sans absorption, en bas pour la plus grande absorption. En histogramme les résultats expérimentaux, en trait plein la distribution analytique (refPPPhase). En bas à droite est représenté les spectres correspondant aux différentes absorptions pour la résonance considérée.

## 4.3 Conclusion

L'étude numérique d'une cavité électromagnétique ouverte illustre que ce type de systèmes est adapté pour vérifier expérimentalement les prédictions théoriques du chapitre III.

Pour les systèmes dont la limite fermée est décrite par GOE, les résultats analytiques pourraient être vérifiées à l'aide d'une cavité électromagnétique supraconductrice, comme celle du groupe de A. Richter à Darmstadt [63]. Dans cette expérience, les pertes ohmiques sont complètement négligeables en comparaison du couplage introduit par les antennes, de sorte que le nombre d'antennes fixe directement le nombre de canaux de couplage associé aux pertes inhomogènes.

Les expériences du groupe de H.-J. Stöckmann à Marburg, basées sur des cavités électromagnétiques à température ambiante et dont les montages expérimentaux permettent d'obtenir la cartographie complète du champ à l'intérieur de la cavité [92], sont aussi de bons candidats. Dans ces expériences, la contribution dominante des pertes provient, comme dans les simulations numériques présentées dans ce chapitre, de la conductivité finie des parois. Comme nous l'avons vu, le nombre de canaux associé aux pertes inhomogènes *i.e.* les pertes produites par le contour de la cavité, est extrêmement bien approché par le rapport  $E[P/(\lambda/2)]$  où  $P$  est le périmètre de la cavité et peut donc être facilement déterminé. Pour obtenir le nombre de canaux associé aux pertes inhomogènes à partir des largeurs des résonances il faut, comme l'ont montré J. Barthélémy *et al.* [52,95], retrancher la composante homogène introduite par l'absorption des plaques. Enfin, il est important de noter que les résultats analytiques ont été obtenus dans le régime des faibles pertes inhomogènes, indépendamment du poids de la composante homogène, le régime de fort recouvrement modal peut donc aussi être exploré tant que la composante inhomogène des pertes reste faible.

Des expériences dans d'autres domaines sont aussi possibles, notamment en élastodynamique, comme nous l'avons vu dans ce chapitre. En effet, dans le cas particulier des plaques vibrantes, la connaissance du champ peut être obtenue par des méthodes de mesure non-invasives. Cette technique expérimentale nous a permis de révéler la proportionnalité entre le paramètre de non-orthogonalité et la largeur inhomogène lorsque celle-ci varie [147].

Les distributions du paramètre de non-orthogonalité pour GUE pourraient aussi être vérifiées. Dans le cas des cavités électromagnétiques, l'invariance par renversement du sens du temps peut être brisée en introduisant de la ferrite à l'intérieur de la cavité [163], comme cela a été réalisé par le groupe de S. Anlage.





# Conclusion générale

Au cours de ce travail de thèse, je me suis attaché à décrire les propriétés statistiques de systèmes ondulatoires chaotiques en milieux ouverts. Fort du formalisme de l'hamiltonien effectif, présenté au chapitre I, diverses grandeurs caractérisant aussi bien le domaine spectral que le domaine spatial ont pu être décrites en termes de leurs distributions de probabilité.

Dans le chapitre II, je me suis intéressé aux distributions des écarts et des croisements évités pour un système chaotique ouvert, dont la limite fermée est décrite par GOE ou GUE. Les modifications des distributions par rapport au cas fermé ont été tout d'abord expliquées qualitativement, par le phénomène de piégeage des résonances, qui modifie la population des faibles écarts entre niveaux, allant jusqu'à entraîner une population de niveaux dégénérés. Ensuite, en utilisant un simple modèle à 2 niveaux, j'ai dérivé les distributions de probabilité des écarts et des croisements évités dans le cas d'un grand nombre de canaux de pertes faiblement couplés au système. Bien que pour la plupart des distributions, les variations par rapport aux prédictions du cas fermé soient peu importantes, la distribution des croisements évités correspondant à l'ensemble GOE subit, elle, de profondes modifications : un creux aux petits écarts apparaît. Cette prédiction théorique a permis d'expliquer les résultats expérimentaux obtenus expérimentalement par B. Dietz *et al.* [11].

Tout au long du chapitre III, je me suis concentré sur les propriétés statistiques du champ associé aux résonances. En distinguant deux types de pertes : les pertes homogènes, qui apportent une même contribution aux largeurs des résonances, et les pertes inhomogènes, associées à la partie fluctuante des largeurs. Seules les pertes inhomogènes contribuent à la non-orthogonalité des fonctions propres de l'hamiltonien effectif. En me limitant au régime des faibles pertes inhomogènes, les distributions de probabilité du pa-

ramètre de non-orthogonalité ont été obtenues pour les systèmes chaotiques dont la limite fermée est décrite par GOE ou GUE. Les travaux menés dans l'ensemble GOE sont, à ma connaissance, les premiers à avoir abouti aux distributions de probabilité d'une grandeur caractérisant la non-orthogonalité, pour un nombre de canaux quelconque. Ensuite, l'effet des fluctuations spectrales a été analysé en comparant les distributions de probabilité à celle d'un spectre complètement rigide, défini par le modèle picket-fence. J'ai ainsi pu montrer que les fluctuations spectrales de GOE et de GUE entraînent une décroissance en loi de puissance de la queue de la distribution du paramètre de non-orthogonalité, en comparaison d'une décroissance exponentielle pour la distribution du modèle picket-fence. De plus, les résultats de D. Savin *et al.* [10] sur le lien entre les largeurs spectrales et le paramètre de non-orthogonalité ont été étendus en montrant que les fluctuations des largeurs sont reliées à la non-orthogonalité des fonctions d'onde propres de l'hamiltonien effectif, fournissant ainsi une interprétation physique de la non-orthogonalité des fonctions propres de l'hamiltonien effectif. Du point de vue des perspectives, l'étude du paramètre de non-orthogonalité lors de la transition GOE-GUE me paraît une étude intéressante à entreprendre. De plus, la description statistique de la non-orthogonalité au-delà du régime de faible recouvrement modal reste, toujours, un problème de Physique Théorique non résolu.

Au cours du dernier chapitre de cette thèse, j'ai présenté des résultats numériques vérifiant la distribution du paramètre de non-orthogonalité pour GOE. Puis, une expérience en acoustique a permis de révéler la proportionnalité, pour une résonance donnée, entre la racine carrée du paramètre de non-orthogonalité et les pertes inhomogènes, lorsque celles-ci varient uniformément. L'ensemble de ces résultats me permet d'espérer qu'il sera à court terme possible de vérifier les prédictions analytiques associées aux propriétés statistiques de la non-orthogonalité du champ associé aux résonances.

# Bibliographie

- [1] A. EINSTEIN, “Zum quantensatz von Sommerfeld und Epstein”. *Verh. Dt. Phys. Ges.* **19**, 82 (1917).
- [2] M. GUTZWILLER, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag (1990).
- [3] O. BOHIGAS, M. J. GIANNONI et C. SCHMIT, “Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws”. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
- [4] M. MEHTA, *Random Matrices*. Academic Press (1991).
- [5] R. WEAVER, “Spectral statistics in elastodynamics”. *J. Acous. Soc. Am.* **85**, 1005 (1989).
- [6] H.-J. STÖCKMANN et J. STEIN, “‘Quantum Chaos’ in billiards studied by microwave absorption”. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2215 (1990).
- [7] H.-J. STÖCKMANN, *Quantum Chaos : an introduction*. Cambridge University Press (1999).
- [8] Y. ALHASSID, “The statistical theory of quantum dots”. *Rev. Mod. Phys.* **72**, 895 (2000).
- [9] M. LEBENTAL, “Chaos quantique et micro-lasers organiques”. *PhD Thesis, Université Paris XI* (2007).
- [10] D. SAVIN, O. LEGRAND et F. MORTESSAGNE, “Inhomogeneous losses and complexness of wave functions in chaotic cavities”. *Europhys. Lett.* **76**, 774 (2006).
- [11] B. DIETZ, A. HEINE, A. RICHTER, O. BOHIGAS et P. LEBOEUF, “Spectral statistics in an open parametric billiard system”. *Phys. Rev. E* **73**, 035 201 (2006).
- [12] C. PORTER, *Statistical Theories of Spectra : Fluctuations*. Academic Press (1965).

- [13] O. BOHIGAS, “Random matrix theory and chaotic dynamics”. *Ecole d’été des Houches, Session LII, 1989, North Holland* (1989).
- [14] P. MELLO, “Mesoscopic quantum physics”. *Ecole d’été des Houches, Session LXI, 1994, North Holland* (1994).
- [15] C. MAHAUX et H. WEIDENMÜLLER, *Shell-Model Approach to Nuclear Reactions*. North-Holland (1969).
- [16] J. VERBAARSCHOT, H. WEIDENMÜLLER et M. ZIRNBAUER, “Grassmann integration in stochastic quantum physics : the case of compound-nucleus scattering”. *Phys. Rep.* **129**, 367 (1985).
- [17] J. OKOLOWICZ, M. PLOSZAJCZAK et I. ROTTER, “Dynamics of quantum systems embedded in a continuum”. *Phys. Rep.* **374**, 271 (2003).
- [18] F.-M. DITTES, “The decay of quantum systems with a small number of open channels”. *Phys. Rep.* **339**, 215 (2000).
- [19] G. TANNER et N. SØNDERGAARD, “Wave chaos in acoustics and elasticity”. *J. Phys. A : Math. Theo.* **40**, R443 (2007).
- [20] N. BOHR, “Neutron capture and nuclear constitution”. *Nature* **137**, 344 (1936).
- [21] H. WEIDENMÜLLER et G. MITCHELL, “Random matrices and chaos in nuclear physics, part 1 : Nuclear structure”. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 539 (2009).
- [22] R. BALIAN, “Random matrices and information theory”. *Nuo. Cim. B* **57**, 183 (1968).
- [23] T. BRODY, J. FLORES, J. FRENCH, P. MELLO, A. PANDEY et S. WONG, “Random-matrix physics : spectrum and strength fluctuations”. *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981).
- [24] F. HAAKE, *Quantum signatures of chaos*. Springer (1991).
- [25] M. GAUDIN, “Sur la loi limite de l’espacement des valeurs propres d’une matrice aleatoire”. *Nucl. Phys.* **25**, 447 (1961).
- [26] R. HAQ, A. PANDEY et O. BOHIGAS, “Fluctuation properties of nuclear energy levels : do theory and experiment agree?” *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1086 (1982).
- [27] O. BOHIGAS, R. HAQ et A. PANDEY, “Fluctuation properties of nuclear energy levels and widths : comparison of theory with experiment.” *Nuclear Data For Science And Technology* 809 (1983).
- [28] M. BERRY et M. TABOR, “Level clustering in the regular spectrum”. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **356**, 375 (1977).

- [29] S. McDONALD et A. KAUFMAN, “Spectrum and eigenfunctions for a hamiltonian with stochastic trajectories”. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1189 (1979).
- [30] M. BERRY, “Quantizing a classically ergodic system : Sinai’s billiard and the KKR method”. *Ann. Phys.* **131**, 162 (1981).
- [31] G. CASATI, F. VALZ-GRIS et I. GUARNIERI, “On the connection between quantization of nonintegrable systems and statistical theory of spectra”. *Lett. Nuov. Cim.* **28**, 279 (1980).
- [32] G. CASATI, B. V. CHIRIKOV et I. GUARNIERI, “Energy-level statistics of integrable quantum systems”. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1350 (1985).
- [33] M. BERRY, “Semiclassical theory of spectral rigidity”. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **400**, 229 (1985).
- [34] E. BOGOMOLNY et J. KEATING, “Gutzwiller’s trace formula and spectral statistics : beyond the diagonal approximation”. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1472 (1996).
- [35] A. ANDREEV et B. ALTSHULER, “Spectral statistics beyond random matrix theory”. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2304 (1995).
- [36] A. ANDREEV, O. AGAM, B. SIMONS et B. ALTSHULER, “Quantum chaos, irreversible classical dynamics, and random matrix theory”. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3947 (1996).
- [37] F. LEYVRAZ et T. SELIGMAN, “Structural invariance and the statistics of quasi-energies”. *Phys. Lett. A* **168**, 348 (1992).
- [38] R. BALIAN et C. BLOCH, “Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain. III. Eigenfrequency density oscillations”. *Ann. Phys.* **69**, 76 (1972).
- [39] T. GUHR, A. MUELLER-GROELING et H. WEIDENMÜLLER, “Random matrix theories in quantum physics : common concepts”. *Phys. Rep.* **299**, 189 (1998).
- [40] J. GARG, J. RAINWATER, J. PETERSEN et W. HAVENS, “Neutron resonance spectroscopy. III.  $Th^{232}$  and  $U^{238}$ ”. *Phys. Rev.* **134**, B985 (1964).
- [41] D. DELANDE et J. C. GAY, “Quantum chaos and statistical properties of energy levels : Numerical study of the hydrogen atom in a magnetic field”. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2006 (1986).
- [42] G. CASATI, B. CHIRIKOV, D. SHEPELYANSKY et I. GUARNIERI, “Relevance of classical chaos in quantum mechanics : the hydrogen atom in a monochromatic field”. *Phys. Rep.* **154**, 77 (1987).

- [43] G. WIEBUSCH, J. MAIN, K. KRÜGER, H. ROTTKE, A. HOLLE et K. WELGE, “Hydrogen atom in crossed magnetic and electric fields”. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2821 (1989).
- [44] P. CHINNERY et V. HUMPHREY, “Experimental visualization of acoustic resonances within a stadium-shaped cavity”. *Phys. Rev. E* **53**, 272 (1996).
- [45] V. DOYA, O. LEGRAND, C. MICHEL et F. MORTESSAGNE, “Optical scar in a chaotic fiber”. *Euro. Phys. J.-S. Topics* **145**, 49 (2007).
- [46] B. EYNARD, *Random Matrices*. disponible sur internet : [http://ipht.cea.fr/Phoceas-SPHT/ast\\_visu\\_spht.php?id\\_ast=188](http://ipht.cea.fr/Phoceas-SPHT/ast_visu_spht.php?id_ast=188) (2000).
- [47] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU et F. LALOË, *Mécanique Quantique*. Hermann (1986).
- [48] C. MARCUS, A. RIMBERG, R. WESTERVELT, P. HOPKINS et A. GOSSARD, “Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures”. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 506 (1992).
- [49] C. GMACHL, F. CAPASSO, E. NARIMANOV, J. NÖCKEL, A. STONE, J. FAIST, D. SIVCO et A. CHO, “High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators”. *Science* **280**, 1556 (1998).
- [50] M. LEBENTAL, J. LAURET, J. ZYSS, C. SCHMIT et E. BOGOMOLNY, “Directional emission of stadium-shaped microlasers”. *Phys. Rev. A* **75**, 33 806 (2007).
- [51] P. MORSE et H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill (1954).
- [52] J. BARTHÉLEMY, O. LEGRAND et F. MORTESSAGNE, “Complete  $S$  matrix in a microwave cavity at room temperature”. *Phys. Rev. E* **71**, 016 205 (2005).
- [53] V. SOKOLOV et V. ZELEVINSKY, “Dynamics and statistics of unstable quantum states”. *Nucl. Phys. A* **504**, 562 (1989).
- [54] N. LEHMANN, D. SAHER, V. SOKOLOV et H.-J. SOMMERS, “Chaotic scattering : the supersymmetry method for a large number of channels”. *Nucl. Phys. A* **582**, 223 (1995).
- [55] Y. FYODOROV et H.-J. SOMMERS, “Statistics of resonance poles, phase shifts and time delays in quantum chaotic scattering : random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance. ”. *J. Math. Phys.* **38**, 1918 (1997).
- [56] J. WISHART, “The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population”. *Biom.* **20**, 32 (1928).

- [57] P. VIVO, S. MAJUMDAR et O. BOHIGAS, “Large deviations of the maximum eigenvalue in Wishart random matrices”. *J. Phys. A : Math. Theo.* **40**, 4317 (2007).
- [58] J.-P. BOUCHAUD et M. POTTERS, *Theory of financial risk and derivative pricing : from statistical physics to risk management*. Cambridge University Press (2003).
- [59] A. STONE, P. MELLO, K. MUTTALIB et J. PICHARD, *Mesoscopic Phenomena in Solids*. Amsterdam : North-Holland (1991).
- [60] E. SHURYAK et J. VERBAARSCHOT, “High energy physics-theory title : Random matrix theory and spectral sum rules for the Dirac operator in QCD”. *Nucl. Phys. A* **560**, 320 (1993).
- [61] J. VERBAARSCHOT et I. ZAHED, “Spectral density of the QCD Dirac operator near zero virtuality”. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3852 (1993).
- [62] J. VERBAARSCHOT, “Spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory”. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2531 (1994).
- [63] H.-D. GRÄF, H. HARNEY, H. LENGELER, C. LEWENKOPF, C. RANGACHARYULU, A. RICHTER, P. SCHARDT et H. WEIDENMÜLLER, “Distribution of eigenmodes in a superconducting stadium billiard with chaotic dynamics”. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1296 (1992).
- [64] H. ALT, H. D. GRÄF, H. HARNEY, R. HOFFERBERT, H. LENGELER, A. RICHTER, P. SCHARDT et H. WEIDENMÜLLER, “Gaussian orthogonal ensemble statistics in a microwave stadium billiard with chaotic dynamics : Porter-Thomas Distribution and algebraic decay of time correlations”. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 62 (1995).
- [65] K. EFETOV, “Directed quantum chaos”. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 491 (1997).
- [66] H.-J. SOMMERS, Y. FYODOROV et M. TITOV, “*S*-matrix poles for chaotic quantum systems as eigenvalues of complex symmetric random matrices : from isolated to overlapping resonances”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **32**, L77 (1999).
- [67] U. KUHL, R. HÖHMANN, J. MAIN et H.-J. STÖCKMANN, “Resonance widths in open microwave cavities studied by harmonic inversion”. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 254 101 (2008).
- [68] P. MOLDAUER, “Statistical theory of intermediate resonances”. *Phys. Rev. Lett.* **18**, 249 (1967).
- [69] F. HAAKE, F. IZRAILEV, N. LEHMANN, D. SAHER et H.-J. SOMMERS, “Statistics of complex levels of random matrices for decaying systems”. *Z. Phys. B* **88**, 359 (1992).



- [70] M. MÜLLER, F.-M. DITTES, W. ISKRA et I. ROTTER, “Level repulsion in the complex plane”. *Phys. Rev. E* **52**, 5961 (1995).
- [71] E. PERSSON et I. ROTTER, “Doorway concept at high excitation energy”. *Phys. Rev. C* **59**, 164 (1999).
- [72] C. JUNG, M. MÜLLER et I. ROTTER, “Phase transitions in open quantum systems”. *Phys. Rev. E* **60**, 114 (1999).
- [73] E. PERSSON, I. ROTTER, H.-J. STÖCKMANN et M. BARTH, “Observation of resonance trapping in an open microwave cavity”. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2478 (2000).
- [74] U. FANO, “Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts”. *Phys. Rev.* **124**, 1866 (1961).
- [75] J. NÖCKEL et A. STONE, “Resonance line shapes in quasi-one-dimensional scattering”. *Phys. Rev. B* **50**, 17415 (1994).
- [76] J. GÖRES, D. GOLDHABER-GORDON, S. HEEMEYER, M. KASTNER, H. SHTRIKMAN, D. MAHALU et U. MEIRAV, “Fano resonances in electronic transport through a single-electron transistor”. *Phys. Rev. B* **62**, 2188 (2000).
- [77] U. EICHMANN, T. GALLAGHER et R. KONIK, “Fano line shapes reconsidered : symmetric photoionization peaks from pure continuum excitation”. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 233004 (2003).
- [78] S. ROTTER, F. LIBISCH, J. BURGDÖRFER, U. KUHL et H.-J. STÖCKMANN, “Tunable Fano resonances in transport through microwave billiards”. *Phys. Rev. E* **69**, 046208 (2004).
- [79] H. FESHBACH, C. PORTER et V. WEISSKOPF, “Model for nuclear reactions with neutrons”. *Phys. Rev.* **96**, 448 (1954).
- [80] G. LOPEZ, P. MELLO et T. SELIGMAN, “Statistical distribution of the  $S$ -matrix in the one-channel case”. *Z. Phys. A* **302**, 351 (1981).
- [81] Y. FYODOROV, “Induced vs. spontaneous breakdown of  $S$ -matrix unitarity : probability of no return in quantum chaotic and disordered systems”. *JETP Let.* **78**, 250 (2003).
- [82] E. KOGAN, P. MELLO et H. LIQUN, “Wave scattering through classically chaotic cavities in the presence of absorption : an information-theoretic model”. *Phys. Rev. E* **61**, R17 (2000).
- [83] C. BEENAKKER et P. BROUWER, “Distribution of the reflection eigenvalues of a weakly absorbing chaotic cavity”. *Physica E* **9**, 463 (2001).

- [84] D. SAVIN et H.-J. SOMMERS, “Delay times and reflection in chaotic cavities with absorption”. *Phys. Rev. E* **68**, 036 211 (2003).
- [85] R. A. MÉNDEZ-SÁNCHEZ, U. KUHL, M. BARTH, C. H. LEWENKOPF et H.-J. STÖCKMANN, “Distribution of reflection coefficients in absorbing chaotic microwave cavities”. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 174 102 (2003).
- [86] U. KUHL, M. MARTÍNEZ-MARES, R. MÉNDEZ-SÁNCHEZ et H.-J. STÖCKMANN, “Direct processes in chaotic microwave cavities in the presence of absorption”. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 144 101 (2005).
- [87] Y. FYODOROV, D. SAVIN et SOMMERS H.-J., “Scattering, reflection and impedance of waves in chaotic and disordered systems with absorptions”. *J. Math. Phys.* **38**, 10 731 (2005).
- [88] M. BERRY, “Regular and irregular semiclassical wavefunctions”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **10**, 2083 (1977).
- [89] S. McDONALD et A. KAUFMAN, “Wave chaos in the stadium : statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation”. *Phys. Rev. A* **37**, 3067 (1988).
- [90] R. BLÜMEL, I. DAVIDSON, W. REINHARDT, H. LIN et M. SHARNOFF, “Quasilinear ridge structures in water surface waves”. *Phys. Rev. A* **45**, 2641 (1992).
- [91] R. PNINI et B. SHAPIRO, “Intensity fluctuations in closed and open systems”. *Phys. Rev. E* **54**, R1032 (1996).
- [92] U. KUHL, “Wave functions, nodal domains, flow, and vortices in open microwave systems”. *Euro. Phys. J.-S. Topics* **145**, 103 (2007).
- [93] H. ISHIO, A. SAICHEV, A. SADREEV et K.-F. BERGGREN, “Wave function statistics for ballistic quantum transport through chaotic open billiards : statistical crossover and coexistence of regular and chaotic waves”. *Phys. Rev. E* **64**, 056 208 (2001).
- [94] O. LOBKIS et R. WEAVER, “Complex modal statistics in a reverberant dissipative body”. *J. Acoust. Soc. Am.* **108**, 1480 (2000).
- [95] J. BARTHÉLEMY, O. LEGRAND et F. MORTESSAGNE, “Inhomogeneous resonance broadening and statistics of complex wave functions in a chaotic microwave cavity”. *Europhys. Lett.* **70**, 162 (2005).
- [96] S. VAN LANGEN, P. BROUWER et C. BEENAKKER, “Fluctuating phase rigidity for a quantum chaotic system with partially broken time-reversal symmetry”. *Phys. Rev. E* **55**, R1 (1997).

- [97] S. ADAM, P. BROUWER, J. SETHNA et X. WAIN TAL, “Enhanced mesoscopic fluctuations in the crossover between random-matrix ensembles”. *Phys. Rev. B* **66**, 165 310 (2002).
- [98] P. BROUWER, “Wave function statistics in open chaotic billiards”. *Phys. Rev. E* **68**, 046 205 (2003).
- [99] Y.-H. KIM, U. KUHL, H.-J. STÖCKMANN et P. BROUWER, “Measurement of long-range wave-function correlations in an open microwave billiard”. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 036 804 (2005).
- [100] A. SAICHEV, K.-F. BERGGREN et A. SADREEV, “Distribution of nearest distances between nodal points for the Berry function in two dimensions”. *Phys. Rev. E* **64**, 036 222 (2001).
- [101] K.-F. BERGGREN, A. SADREEV et A. STARIKOV, “Crossover from regular to irregular behavior in current flow through open billiards”. *Phys. Rev. E* **66**, 016 218 (2002).
- [102] U. KUHL, R. HÖHMANN, H.-J. STÖCKMANN et S. GNUTZMANN, “Nodal domains in open microwave systems”. *Phys. Rev. E* **75**, 036 204 (2007).
- [103] M. BARTH et H.-J. STÖCKMANN, “Current and vortex statistics in microwave billiards”. *Phys. Rev. E* **65**, 066 208 (2002).
- [104] A. SAICHEV, H. ISHIO, A. SADREEV et K. BERGGREN, “Statistics of interior current distributions in two-dimensional open chaotic billiards”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **35**, L87 (2002).
- [105] A. SADREEV et K.-F. BERGGREN, “Signatures of quantum chaos in complex wavefunctions describing open billiards”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, 10 787 (2005).
- [106] K.-F. BERGGREN, D. MAKSIMOV, A. SADREEV, R. HÖHMANN, U. KUHL et H.-J. STÖCKMANN, “Quantum stress in chaotic billiards”. *Phys. Rev. E* **77**, 066 209 (2008).
- [107] R. HÖHMANN, U. KUHL, H.-J. STOCKMANN, J. URBINA et M. DENNIS, “Density and correlation functions of vortex and saddle points in open billiard systems”. *Phys. Rev. E* **79**, 016 203 (2009).
- [108] R. GROBE, F. HAAKE et H.-J. SOMMERS, “Quantum distinction of regular and chaotic dissipative motion”. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1899 (1988).
- [109] G. OAS, “Universal cubic eigenvalue repulsion for random normal matrices ”. *Phys. Rev. E* **55**, 205 (1997).

- [110] Y. FYODOROV, B. KHORUZHENKO et H.-J. SOMMERS, “Almost Hermitian random matrices : crossover from Wigner-Dyson to Ginibre eigenvalue statistics”. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 557 (1997).
- [111] H.-J. STOCKMANN et P. SEBA, “The joint energy distribution function for the Hamiltonian for the one-channel case”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **31**, 3439 (1998).
- [112] J. ZAKRZEWSKI et M. KUŚ, “Distributions of avoided crossings for quantum chaotic systems”. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2749 (1991).
- [113] J. ZAKRZEWSKI, D. DELANDE et M. KUŚ, “Parametric motion of energy levels in quantum chaotic systems. II. Avoided-crossing distributions”. *Phys. Rev. E* **47**, 1665 (1993).
- [114] A. HÖNIG et D. WINTGEN, “Spectral properties of strongly perturbed Coulomb systems : fluctuation properties”. *Phys. Rev. A* **39**, 5642 (1989).
- [115] J. RUBBMARK, M. KASH, M. LITTMAN et D. KLEPPNER, “Dynamical effects at avoided level crossings : A study of the Landau-Zener effect using Rydberg atoms”. *Phys. Rev. A* **23**, 3107 (1981).
- [116] J. GOLDBERG et W. SCHWEIZER, “Distribution of multiple avoided crossings : numerical evaluation”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **24**, 2785 (1991).
- [117] M. LATKA, P. GRIGOLINI et B. WEST, “Chaos-induced avoided level crossing and tunneling”. *Phys. Rev. A* **50**, 1071 (1994).
- [118] C. POLI, B. DIETZ, O. LEGRAND, F. MORTESSAGNE et A. RICHTER, “Avoided level crossing statistics in open chaotic billiards”. *Phys. Rev. E* **80**, 035 204(R) (2009).
- [119] F. HAAKE et K. ŻYCKOWSKI, “Random-matrix theory and eigenmodes of dynamical systems”. *Phys. Rev. A* **42**, 1013 (1990).
- [120] E. HELLER, “Bound-state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems : scars of periodic orbits”. *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515 (1983).
- [121] F. FAURE et S. NONNENMACHER, “On the maximal scarring for quantum cat map eigenstates”. *Comm. Math. Phys.* **245**, 201 (2004).
- [122] E. LINDENSTRAUSS, “Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity”. *Ann. Math.* **163**, 165 (2006).
- [123] N. ANANTHARAMAN et S. NONNENMACHER, “Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold”. *Ann. Inst. Four.* **57**, 2465 (2007).

- [124] Y. FYODOROV et H.-J. SOMMERS, “Random matrices close to Hermitian or unitary : overview of methods and results”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, 3303 (2003).
- [125] R. JANIK, W. NÖRENBERG, M. NOWAK, G. PAPP et I. ZAHED, “Correlations of eigenvectors for non-Hermitian random-matrix models”. *Phys. Rev. E* **60**, 2699 (1999).
- [126] B. MEHLIG et M. SANTER, “Universal eigenvector statistics in a quantum scattering ensemble”. *Phys. Rev. E* **63**, 020 105 (2001).
- [127] R. JANIK, M. NOWAK, G. PAPP et I. ZAHED, “Non-Hermitian random matrix models”. *Nucl. Phys. B* **501**, 642 (1997).
- [128] Y. FYODOROV et B. MEHLIG, “Statistics of resonances and nonorthogonal eigenfunctions in a model for single-channel chaotic scattering”. *Phys. Rev. E* **66**, 045 202 (2002).
- [129] H. SCHOMERUS, K. FRAHM, M. PATRA et C. BEENAKKER, “Quantum limit of the laser line width in chaotic cavities and statistics of residues of scattering matrix poles”. *Physica A* **278**, 469 (2000).
- [130] J. GINIBRE, “Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices”. *J. Math. Phys.* **6**, 440 (1965).
- [131] V. GIRKO, “Spectral theory of random matrices”. *Russ. Math. Surv.* **40**, 77 (1985).
- [132] E. KANZIEPER et G. AKEMANN, “Statistics of real eigenvalues in Ginibre’s ensemble of random real matrices”. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 230 201 (2005).
- [133] P. FORRESTER et T. NAGAO, “Eigenvalue statistics of the real Ginibre ensemble”. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050 603 (2007).
- [134] H.-J. SOMMERS et B. KHORUZHENKO, “Schur function averages for the real Ginibre ensemble”. *preprint arXiv :0903.5071* (2009).
- [135] H. SOMPOLINSKY, A. CRISANTI et H.-J. SOMMERS, “Chaos in random neural networks”. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 259 (1988).
- [136] W. BRUZDA, V. CAPPELLINI, H.-J. SOMMERS et K. ŻYCZKOWSKI, “Random quantum operations”. *Phys. Lett. A* **373**, 32 (2009).
- [137] H.-J. SOMMERS, A. CRISANTI, H. SOMPOLINSKY et Y. STEIN, “Spectrum of large random asymmetric matrices”. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1895 (1988).
- [138] J. CHALKER et B. MEHLIG, “Eigenvector statistics in non-Hermitian random matrix ensembles”. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3367 (1998).

- [139] R. JANIK, M. NOWAK, G. PAPP, J. WAMBACH et I. ZAHED, “Non-Hermitian random matrix models : free random variable approach ”. *Phys. Rev. E* **55**, 4100 (1997).
- [140] K. PETERMAN, “ Calculated spontaneous emission factor for double-heterostructure injection lasers with gain-induced waveguiding”. *IEEE J. Quant. Elec.* **15** (1979).
- [141] A. SCHAWLOW et C. TOWNES, “Infrared and optical masers”. *Phys. Rev.* **112**, 1940 (1958).
- [142] A. SIEGMAN, “ Excess spontaneous emission in non-Hermitian optical systems. I. Laser amplifiers”. *Phys. Rev. A* **39**, 1253 (1989).
- [143] A. SIEGMAN, “ Excess spontaneous emission in non-Hermitian optical systems. II. Laser oscillators”. *Phys. Rev. A* **39**, 1264 (1989).
- [144] H. FRAHM, K. SCHOMERUS, M. PATRA et C. BEENAKKER, “ Large Petermann factor in chaotic cavities with many scattering channels”. *Europhys. Lett.* **1**, 48 (2000).
- [145] M. PATRA, H. SCHOMERUS et C. BEENAKKER, “ Quantum-limited linewidth of a chaotic laser cavity”. *Phys. Rev. A* **61**, 023 810 (2000).
- [146] C. POLI, D. SAVIN, O. LEGRAND et F. MORTESSAGNE, “ Statistics of resonance states in open chaotic systems : a perturbative approach”. *Phys. Rev. E* **80**, 046 203 (2009).
- [147] O. XERIDAT, C. POLI, O. LEGRAND, F. MORTESSAGNE et P. SEBBAH, “ Quasimodes of a chaotic elastic cavity with increasing local losses”. *Phys. Rev. E* **80**, 035 201(R) (2009).
- [148] Y.-K. YU et Y.-C. ZANG, “ On the anti-Wishart distribution”. *Physica A* **312**, 1 (2002).
- [149] P. MOLDAUER, “ Unitary models of nuclear resonance reactions”. *Phys. Rev.* **157**, 907 (1967).
- [150] P. MOLDAUER, “ Resonance widths and spacings : Their averages and distributions”. *Phys. Rev.* **171**, 1164 (1968).
- [151] V. SOKOLOV, I. ROTTER, D. SAVIN et M. MÜLLER, “ Interfering doorway states and giant resonances. I. Resonance spectrum and multipole strengths”. *Phys. Rev. C* **56**, 1031 (1997).
- [152] Y. FYODOROV et H.-J. SOMMERS, “ Universality of “level curvature” distribution for large random matrices : systematic analytical approaches”. *Z. Phys. B* **99**, 123 (1995).

- [153] A. ANDREEV et B. SIMONS, “Correlators of spectral determinants in quantum chaos”. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2304 (1995).
- [154] S. KETTEMANN, D. KLAKOW et U. SMILANSKY, “Characterization of Quantum Chaos by the autocorrelation function of spectral determinants”. *J. Phys. A : Math. Gen.* **30**, 3662 (1997).
- [155] I. GRADSHTEYN et I. RYZHIK, *Table of integrals, series and products (7ed)*. New York : Academic Press (2007).
- [156] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover (1965).
- [157] T. GORIN, F.-M. DITTES, M. MÜLLER, I. ROTTER et T. SELIGMAN, “Correlations between resonances in a statistical scattering model”. *Phys. Rev. E* **56**, 2481 (1997).
- [158] F. VON OPPEN, “Exact distributions of eigenvalue curvatures for time-reversal-invariant chaotic systems”. *Phys. Rev. E* **51**, 2647 (1995).
- [159] J. JIN, *The finite element method in electromagnetics*. Wiley New York (1993).
- [160] J. JACKSON, *Electrodynamique Classique*. Dunod (2001).
- [161] S. REE et L. REICHL, “Classical and Quantum Chaos in a circular billiard with a straight cut”. *Phys. Rev. E* **60**, 1607 (1999).
- [162] K. GRAAF, *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover (1965).
- [163] P. SO, S. ANLAGE, E. OTT et R. OERTER, “Wave chaos experiments with and without time reversal symmetry : GUE and GOE statistics”. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2662 (1995).

## Résumé

Dans le domaine du *Chaos Ondulatoire*, les statistiques des systèmes fermés sont à l'heure actuelle bien comprises. Cependant, il en est tout autrement pour les systèmes ouverts, c'est-à-dire pour des systèmes dont le couplage avec l'environnement ne peut plus être négligé. En appliquant la Théorie des Matrices Aléatoires au formalisme de l'hamiltonien effectif, les statistiques spectrales et spatiales de systèmes chaotiques ouverts sont étudiées analytiquement. De plus, les prédictions théoriques sont systématiquement vérifiées par des simulations numériques de type matrices aléatoires. Dans le domaine spectral, les modifications engendrées par le couplage sur les écarts et les croisements évités sont illustrées par le phénomène de piégeage des résonances. Les distributions bien connues des écarts et des croisements évités sont généralisées aux systèmes chaotiques ouverts, permettant d'expliquer des résultats expérimentaux obtenus avec une cavité électromagnétique. Dans le domaine spatial, les statistiques du paramètre de non-orthogonalité, qui mesure l'effet du couplage sur les fonctions d'onde propres de l'hamiltonien effectif, sont dérivées analytiquement et sont vérifiées par des simulations numériques modélisant des cavités électromagnétiques chaotiques. Pour des systèmes dont le couplage varie, une relation entre la largeur spectrale et le paramètre de non-orthogonalité associés à une même résonance est aussi obtenue. Cette prédiction est confirmée par des expériences en élastodynamique.

**Mots clefs : Chaos Ondulatoire. Diffusion Chaotique, Théorie des Matrices Aléatoires.**

## Abstract

In the field of *Wave Chaos*, statistics of ideal closed systems are nowadays well understood. However, much less is known for open systems, namely for systems whose coupling to environment cannot be neglected anymore. Applying the Random Matrix Theory to the formalism of the effective Hamiltonian, spectral and spatial statistics of open chaotic systems are investigated analytically. Furthermore, theoretical predictions are checked systematically through numerical simulations of random matrices. In the spectral domain, the modifications induced by the openness on the spacings and the avoided crossings are illustrated using the resonance trapping effect. The well-known distributions of spacings and avoided crossings are generalized to open chaotic systems that allow to explain results based on microwave experiments. In the spatial domain, statistics of the non-orthogonal parameter, which measures the impact of the openness on the eigenfunctions of the effective Hamiltonian, are derived analytically and verified by numerical simulations modeling chaotic electromagnetic cavities. For systems whose coupling varies, a relationship between the spectral width and the complexness parameter for a given resonance is also obtained. This finding is confirmed through elastodynamics experiments.

**Key words : Wave Chaos, Chaotic Scattering, Random Matrix Theory.**