



HAL
open science

Théorèmes limites fonctionnels et estimation de la densité spectrale pour des suites stationnaires.

Sophie Dede

► **To cite this version:**

Sophie Dede. Théorèmes limites fonctionnels et estimation de la densité spectrale pour des suites stationnaires.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT: . tel-00440850

HAL Id: tel-00440850

<https://theses.hal.science/tel-00440850>

Submitted on 12 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie - Paris VI

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité : **Mathématiques**

soutenue par

Sophie Dede

**Théorèmes limites fonctionnels et estimation
de la densité spectrale pour des suites stationnaires**

Directeurs de Thèse :

Jérôme **DEDECKER** et Florence **MERLEVÈDE**

Rapporteurs : M. Charles **SUQUET** Université Lille 1.
M. Liming **WU** Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand).

Soutenue publiquement le **26 Novembre 2009** devant le jury composé de

M. Gérard	BIAU	Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)	Examineur
M. Jérôme	DEDECKER	Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)	Directeur
Mme. Sana	LOUHICHI	Université Paris-Sud 11	Examineur
Mme. Florence	MERLEVEDE	Université Paris-Est Marne-La-Vallée	Directrice
M. Emmanuel	RIO	Université de Versailles	Examineur
M. Charles	SUQUET	Université Lille 1	Rapporteur
M. Liming	WU	Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand)	Rapporteur

Remerciements

Bien qu'agréable, rédiger les "*Remerciements*" n'est pas une tâche aussi aisée qu'elle n'y paraît. Elle est pour moi l'occasion d'exprimer ma gratitude, au moins par un petit mot, même si cela n'est pas grand chose à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ma thèse, en m'apportant leur soutien ou/et leur amitié durant ces trois années. En effet, au delà d'être une grande aventure scientifique, la thèse est aussi une grande aventure humaine.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Jérôme Dedecker et Florence Merlevède, pour m'avoir encadrée. Sous leur direction, j'ai eu le privilège de bénéficier d'un excellent encadrement scientifique et d'un suivi régulier, ce qui a très largement contribué à la réussite de cette thèse. Je les remercie très sincèrement pour leur disponibilité, leur écoute, leur patience et leurs précieux conseils tant scientifiques qu'humains.

Je suis très honorée et heureuse que Charles Suquet et Liming Wu aient aimablement accepté de rapporter ma thèse, et de faire le déplacement afin d'assister à ma soutenance. Je vous remercie de l'intérêt que vous avez manifesté pour mon travail, et pour les précieuses remarques qui m'ont permis d'améliorer mon manuscrit.

Mes remerciements vont aussi à Gérard Biau, Sana Louhichi et Emmanuel Rio, qui me font l'honneur d'être parmi les membres du jury.

Je remercie très chaleureusement Alexandre Tsybakov, avec qui j'ai découvert les statistiques en DEA. Il a toujours pris le temps de me conseiller et de m'écouter avec beaucoup de bienveillance. Un grand Merci, car sans vous, je n'aurais pu rencontrer mes futurs directeurs de thèse.

Je tiens à remercier également chaque membre des Laboratoires de Probabilités et de Statistiques de Paris 6 et Paris 7. Rencontrer au hasard des couloirs, à la salle à café, ou lors des séminaires, ils ont toujours eu la gentillesse de s'inquiéter de l'avancement de mon travail, ou tout simplement de prendre de mes nouvelles : pour n'en citer que quelques uns Stéphane Boucheron, Erwann Lepennec (merci pour ta gentillesse et pour ta précieuse aide en simulations informatiques), Gilles Pagès, Frédérique Petit (ce fut un plaisir de travailler avec toi, j'ai appris beaucoup sur l'enseignement à tes côtés), Michèle Thieullen, Zhan Shi et sans oublier Marc Yor. Je me souviendrai de votre humilité, de votre extrême gentillesse et de nos nombreuses discussions. Mes remerciements vont également à Jacques Portès, toujours prêt à rendre service et avec qui j'ai échangé de très nombreuses discussions philosophiques, littéraires et sans oublier les multiples petites taquineries. Sincères remerciements à toute l'équipe administrative, pour leur disponibi-

lité et leur gentillesse, ce fut un atout indispensable ; Valérie Juvé, Philippe Macé, Isabelle Mariage, Yves Petit, Maria Pochot, et mon amie Josette Saman, dont le soutien ne s'est jamais démenti.

La thèse est faite de rencontres humaines souvent extraordinaires. Ils ont souvent partagé mon quotidien, autant mes rires que mes angoisses. Ce ne sont que quelques mots, mais je vous fais confiance pour savoir que derrière ces derniers, il y a plus que des remerciements. Votre présence, votre amitié, vos taquineries, vos rires, votre écoute, votre soutien, ont été de véritables petites pépites d'or dans tous les moments de ma thèse. Abass S., un véritable grand frère, son soutien indéfectible et son écoute, en font un très précieux ami. Aurélie F., merci de m'avoir supportée les veilles de mes exposés, lors des conférences. Camille I., merci de ta bonne humeur. Clément F., un cinéphile averti d'une grande sympathie. Eric L., 3 ans de thèse = 234kg de gâteaux, 140 tablettes de chocolats, 4380L de thé ou café. C'est forcé il y a une erreur ! Fernando C., ah ces pas de salsa..., salsero ! et pour Alexander W. ... de Bachata :-) Guanying W., une bouffée de culture chinoise. Jean-Baptiste M., mais bien sûr les Centraliens peuvent être d'une très grande élégance ! Joachim L., un véritable épicurien et quelle curiosité ! Joseph S., un très agréable collègue ! Joseph N., le si gentil helvétte, merci de ton amitié qui ne s'est jamais démentie. Katia M., un vrai et adorable coach ! Kilian R. et Emmanuel J., merci pour votre gentillesse, votre générosité, toujours prêt à participer aux sorties. Mathieu R., que de taquineries ! mais toujours présent pour m'aider, ou m'écouter ! Mohamed H., merci de ton soutien constant, même prêt à sauver ma page de garde contre Latex ! Nathalie K., meilleurs souvenirs de l'atelier mosaïques du Louvre. Nikos K. et Stavros V., mes chers compatriotes, rassurez-vous dans la langue d'Homère, je ne vous ai pas toujours compris ! Noufel F., beaucoup de rires aux côtés de ce grand comédien ! Olivier B., merci de m'avoir supportée, quand je venais attendre mon directeur. Omar E., à quand ces voyages de rêves en Egypte ! Paul B., un grand spécialiste new-yorkais du TCL. Pascal M., un allemand prêt à nous faire partager toutes ses spécialités ! Pierre-Henri C., promis cette année, je viens te voir sur scène ! Raoul N., ah ces sacrés élèves, ne sois pas désespéré, et bravo pour tes muffins et cookies ! Sophie L., que dire..., un coeur sur la main, une très précieuse amie, une cuisinière émérite, n'oublie pas notre pacte "les Sophie's". Thanh Mai P.N., une collègue et amie, à quand notre prochaine sortie dans un salon de thé parisien ? Thomas L. et Idris K., les deux inséparables financiers, adorant la cuisine de notre chère amie Giorgia C. Vincent B., que de taquineries et de blagues depuis toutes ces années ! Merci de ton soutien.

Mes remerciements vont à Adrien J., Adrien L., Andreea M., Arno J.,

Assane D., Chi T.V., David B., François C., Guillaume L., Karim B., Nizar D., Olivier Z., Sylvain C., à mes amis sénégalais et maghrébins du L.S.T.A. Certains n'aimaient pas les formations CIES, pour moi, elles m'ont permis de rencontrer de futurs amis, ouverts sur tout, avec qui j'ai partagé de nombreux moments très sympathiques, Luis B., Rachel D., en particulier, ... Ils étaient à quelques portes, au JLL, Benjamin A., Paul C., Joanna D., et bien sur ma très adorable amie d'un soutien infaillible et d'une immense gentillesse Mouna D.

Je tiens à remercier, tous ceux qui depuis mes années à l'ENS de Cachan, m'ont toujours soutenue, m'ont fait rire, même dans des moments difficiles.

Egalement, je tiens à saluer mes futurs collègues, mais déjà amis, avec qui j'ai partagé les temps libres lors des congrès, et que je continue volontiers à voir, autour de jeux de cartes, Aurélie C., Benjamin A., Guillem R., Mahendra M., Malika K., Marianne C. et Tabea R.

Un grand merci à tous mes amis, pas forcément matheux, mais dont le soutien et l'amitié ont été indispensables dans tous les domaines et à tout moment. Nos sorties, nos dîners ont été des bouffées d'oxygène. Mes complices d'Orsay, Adeline A., Marie D., Aurélie M., de prépas Anne B., Sophie C., Julian P. et Benoist V., de Californie Claire L., d'Ottawa Robin D., de voyage aussi Adrien N. Mathieu G, merci pour tout, ton soutien, ton écoute, tes conseils... A quand une après-midi, macarons ou tarte au citron? Je ne peux oublier Adrien E., toujours présent, depuis 25 ans, un très précieux ami, merci pour tout ainsi qu'à ses parents. Mes remerciements dépassent cette thèse.

Ma dernière pensée va à ma famille, surtout à mes parents et ma tante. Vous m'avez toujours aidée, soutenue dans tous les moments. Merci pour votre amour indéfectible. Sabine, ma tata, ma thèse a débuté quelques semaines avant qu'on diagnostique ta terrible maladie. Trois ans après, ma thèse s'achève malheureusement quelques semaines après ta disparition. Sache que ton combat acharné et ton dynamisme m'a donné tout le courage nécessaire pour la suite, et m'a prouvé qu'il n'y avait rien de plus important que la vie!

Contents

1	Introduction et présentation des résultats	9
1.1	Motivations.	11
1.2	Principe de Déviations Modérées dans un Hilbert.	12
1.3	Le TLC empirique dans $\mathbf{L}^1(\mu)$	16
1.4	Applications aux distances.	16
1.4.1	Coefficients de mélange fort.	17
1.4.2	Le mélange faible.	18
1.5	Estimation de la densité spectrale	21
2	Moderate deviations for \mathbb{H}-valued stationary sequences	25
2.1	Introduction	25
2.2	Main Results	27
2.2.1	A Hoeffding inequality	28
2.2.2	The Moderate Deviation Principle	28
2.2.3	Functional law of the iterated logarithm	30
2.3	Applications	30
2.3.1	ϕ -mixing sequences	30
2.3.2	Functions of linear processes	31
2.3.3	Stable Markov chains	33
2.3.4	Moderate Deviation Principle for the empirical distribution function in \mathbf{L}^2	34
2.4	Proofs	36
2.4.1	Hoeffding inequality's proof	36
2.4.2	MDP for martingale differences	43
2.4.3	MDP for stationary sequences	46
2.4.4	Proof of Corollary 2.2	49
2.4.5	Proof of Proposition 2.3	55
2.4.6	Proof of Proposition 2.4	56
2.4.7	Proof of Proposition 2.5	57

2.5	Appendix	58
3	An Empirical Central Limit Theorem in L^1	61
3.1	Introduction	61
3.2	Central Limit Theorem for stationary sequences in $L^1(\mu)$. .	63
3.3	Applications to the empirical distribution function	64
3.3.1	Dependent sequences	65
3.3.2	Causal linear processes	68
3.4	Proofs	70
3.4.1	Central Limit Theorem for $L^1(\mu)$ -valued martingale differences	70
3.4.2	Proof of Theorem 3.1	71
3.4.3	Proof of Corollary 3.1	79
3.4.4	Proof of Proposition 3.1	80
3.4.5	Proof of Proposition 3.2	81
3.4.6	Proof of Corollary 3.2	82
3.4.7	Proof of Corollary 3.3	83
3.4.8	Proof of Remark 3.4	83
3.4.9	Proof of Corollary 3.4	84
3.4.10	Proof of Corollary 3.5	85
4	Estimation de la densité spectrale	87
4.1	Introduction et Notations	87
4.2	Résultats principaux	89
4.3	Estimation des paramètres dans un modèle de régression pour des séries temporelles	91
4.4	Simulations	94
4.4.1	Les modèles	94
4.4.2	Illustrations	96
4.5	Preuves	110
4.5.1	Preuve du Théorème 4.1	110
4.5.2	Preuve de la Proposition 4.1	120
4.6	Annexe : Simulations à l'aide de Matlab	124

Chapter 1

Introduction et présentation des résultats

L'objet de ma thèse encadrée par Jérôme Dedecker et Florence Merlevède, est consacré au comportement de certaines distances entre la mesure empirique d'un processus stationnaire et sa loi marginale (distance type Cramér-Von Mises ou type Wasserstein) dans le cas de variables aléatoires dépendantes au sens large, incluant par exemple, certains systèmes dynamiques.

Dans ce chapitre, je reprends les principaux résultats obtenus dans les chapitres 2, 3 et 4.

Dans un premier temps, je donne un Principe de Déviations Modérées, sous des conditions projectives, pour une suite stationnaire de variables aléatoires centrées à valeurs dans un Hilbert, que ce soit pour un processus adapté ou non.

Puis, je m'intéresse au Théorème Limite Central (TLC) pour des suites stationnaires ergodiques de variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{L}^1 , toujours sous des conditions projectives.

L'étude de ces théorèmes limites pour des suites stationnaires de variables aléatoires à valeurs dans des espaces fonctionnels me permet d'aboutir à des conditions suffisantes pour obtenir des résultats sur le comportement asymptotique de statistiques du type Cramér-Von Mises ou distance de Wasserstein pour certaines classes de suites dépendantes. En particulier, les résultats sont appliqués à l'étude de systèmes dynamiques, ainsi qu'à celle des processus linéaires.

Enfin, dans une dernière partie, afin de construire des intervalles de con-

fiance asymptotiques pour la moyenne d'une suite stationnaire à partir du Théorème Limite Central, je propose un estimateur lissé de la densité spectrale, et j'étudie sous des critères projectifs, la consistance de cet estimateur.

Voici quelques notations et définitions très utiles pour la suite de cette synthèse:

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
- \mathbb{H} est un espace de Hilbert séparable, muni de sa norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ issue du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ et $(e_l)_{l \geq 1}$, est la base orthonormale de \mathbb{H} .
- Pour tout réel $p \geq 1$, $\mathbf{L}^p(\mu) = \mathbf{L}^p(\mathbf{T}, \mu)$ est l'espace des fonctions réelles μ -intégrables sur \mathbf{T} , où μ est une mesure σ -finie et \mathbf{T} un intervalle de \mathbb{R} , avec pour norme $\|\cdot\|_{p,\mu} = \left(\int_{\mathbf{T}} |x(t)|^p \mu(dt) \right)^{1/p}$. $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ désigne le dual de $\mathbf{L}^1(\mu)$.
- Pour tout réel $p \geq 1$, on note $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^p$ l'espace des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{H} tel que $\|X\|_{\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^p}^p = \mathbb{E}(\|X\|_{\mathbb{H}}^p)$ soit finie. Par exemple, $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^1([0, 1])$ est l'espace des fonctions Bochner intégrables à valeurs dans \mathbb{H} . De plus, $\| \|X\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}$ désignera la $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^\infty$ -norme, c'est-à-dire le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(\|X\|_{\mathbb{H}} > u) = 0$.
- Pour tout p entier, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ désignent respectivement la \mathbf{L}^p -norme et la \mathbf{L}^∞ -norme, c'est-à-dire, pour toute variable aléatoire réelle X , $\|X\|_p = \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}$ et $\|X\|_{\infty}$ est le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(|X| > u) = 0$.
- Une suite stationnaire de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est formalisée par $X_i = X_0 \circ \mathbb{T}^i$, où $\mathbb{T} : \Omega \rightarrow \Omega$ est une transformation bijective bimesurable préservant la mesure de probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{A}) . Pour une sous-tribu \mathcal{F}_0 vérifiant $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathbb{T}^{-1}(\mathcal{F}_0)$, posons $\mathcal{F}_i = \mathbb{T}^{-i}(\mathcal{F}_0)$, $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_{-n}$ et $\mathcal{F}_{\infty} = \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_k$.
- S_n est la somme partielle et $\{Z_n(t) : t \in [0, 1]\}$ est le processus normalisé définis respectivement par:

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \text{ et } Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i + \frac{1}{\sqrt{n}}(nt - [nt])X_{[nt]+1},$$

où $[.]$ désigne la partie entière.

Le processus $Z_n(\cdot)$ sera vu comme un élément de $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$, ensemble

des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{H} . C'est un espace de Banach, muni de la norme sup, $\|x\|_\infty = \sup \{\|x(t)\|_{\mathbb{H}} : t \in [0, 1]\}$.

1.1 Motivations.

Considérons une suite stationnaire de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Introduisons la fonction de répartition empirique,

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}},$$

et notons F_X la fonction de répartition de X .

On est intéressé par le comportement asymptotique d'une quantité du type

$$D_{p,n}(\mu) = \left(\int |F_n(t) - F_X(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p}, \quad (1.1)$$

pour $p \geq 1$ et μ une mesure σ -finie telle que

$$\int_{\mathbb{R}_-} (F_X(t))^p \mu(dt) + \int_{\mathbb{R}_+} (1 - F_X(t))^p \mu(dt) < \infty.$$

Cette quantité est d'un intérêt particulier. Lorsque $p = 2$ et $\mu = dF$, c'est la statistique de Cramér-Von Mises. Si $\mu = \lambda_{[0,1]}$ où $\lambda_{[0,1]}$ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, c'est la distance de Kantorovitch.

Notons également (cf Dedecker et Merlevède [24]) que $D_{p,n}(\mu)$ peut s'écrire comme le supremum du processus empirique sur une certaine classe de fonctions,

$$D_{p,n}(\mu) = \sup_{f \in \mathbf{W}_{q,1}(\mu)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i)) \right|,$$

avec q le conjugué de p , et $\mathbf{W}_{q,1}(\mu)$ est l'ensemble des fonctions vérifiant:

$$\left\{ f : f(t) = f(0) + \left(\int_{[0,t[} f'(x) \mu(dx) \right) \mathbf{1}_{t>0} - \left(\int_{[t,0[} f'(x) \mu(dx) \right) \mathbf{1}_{t \leq 0} \right. \\ \left. \text{et } \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^q \mu(dx) \right)^{1/q} \leq 1 \right\}.$$

Pour $p \geq 2$, sous certaines conditions de faible dépendance sur le processus $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, Dedecker et Merlevède ont étudié le comportement en loi de

$D_{p,n}(\mu)$ (cf Théorème 2 [24]). Par ailleurs, ils ont établi une inégalité de déviations (cf Théorème 1 [24]) faisant intervenir des coefficients de faible dépendance sur $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Une des motivations du second chapitre est de compléter leurs résultats lorsque $p = 2$, en utilisant un Principe de Déviations Modérées.

Le Chapitre 3 est consacré quant à lui au comportement en loi de $D_{1,n}(\mu)$.

Le point commun de ces deux chapitres est le fait que $D_{p,n}(\mu)$ peut se réécrire comme la norme d'une somme de variables aléatoires à valeurs dans un espace fonctionnel, à savoir un espace de Hilbert ($\mathbf{L}^2(\mu)$) lorsque $p = 2$, et un espace de Banach ($\mathbf{L}^1(\mu)$) lorsque $p = 1$. Ainsi, le Chapitre 2 est consacré à l'étude du Principe de Déviations Modérées pour des variables aléatoires à valeurs dans un Hilbert, et le Chapitre 3, à l'étude du comportement asymptotique en loi des sommes partielles de variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathbf{L}^1(\mu)$.

Le Chapitre 4 a une motivation différente. Beaucoup de résultats ont été obtenus depuis les travaux de Heyde [39] concernant l'étude du comportement asymptotique en loi des sommes partielles de variables aléatoires réelles faiblement dépendantes, cependant la variance asymptotique étant une quantité inconnue, je me suis intéressée à établir un estimateur de cette variance et à étudier sa consistance sous des conditions de faible dépendance.

La suite de cette introduction présente les résultats principaux que j'ai obtenus.

1.2 Principe de Déviations Modérées dans un Hilbert.

Rappelons tout d'abord la définition du Principe de Déviations Modérées,

Définition 1.1. (Dembo et Zeitouni [29])

Si $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace topologique E , muni de sa tribu borélienne \mathcal{E} , nous dirons que $(T_n)_{n \geq 1}$ satisfait le Principe de Déviations Modérées dans E , avec une fonction de taux I ($I : E \rightarrow [0, \infty[$, fonction semi-continue inférieurement), si pour toute suite de réels positifs telle que $a_n \downarrow 0$ et $na_n \rightarrow +\infty$, quand $n \rightarrow +\infty$, $(T_n)_{n \geq 1}$ vérifie: pour tout borélien A de \mathcal{E} ,

$$\begin{aligned} -\inf\{I(x); x \in \overset{\circ}{A}\} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P}\left(\sqrt{a_n}T_n \in A\right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P}\left(\sqrt{a_n}T_n \in A\right) \end{aligned}$$

$$\leq -\inf\{I(x), x \in \bar{A}\},$$

où $\overset{\circ}{A}$ (respectivement \bar{A}) est l'intérieur (respectivement la fermeture) de A .

Ainsi, si $T_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i$, le Principe de Déviations Modérées est un résultat intermédiaire entre le Théorème Limite Central, et le Principe de Grandes Déviations. De plus, remarquons que la connaissance de la variance présente dans le Théorème Limite Central nous donne directement la fonction de taux du Principe de Déviations Modérées. Pour un processus à valeurs dans un Hilbert, des résultats sur le Théorème Limite Central ont déjà été démontrés par Dedecker et Merlevède [23], poursuivant ainsi le travail sur les différences de martingales triangulaires de Jakubowski [43].

Concernant les variables aléatoires i.i.d. ou des tableaux triangulaires de variables aléatoires i.i.d., à valeurs dans un Hilbert ou dans un Banach, des résultats sur le Principe des Déviations Modérées ont été établis, en particulier par de Acosta [1], Borovkov et Mogulskii [10] [11] et Ledoux [45]. Citons à titre d'exemple, le résultat suivant dû à Ledoux [45],

Théorème 1.1. (Ledoux [45])

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace de Banach réel séparable \mathbb{B} , muni de sa norme $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$. Supposons que $\mathbb{E}(f(X)) = 0$ et $\mathbb{E}(f^2(X)) < \infty$, pour tout f de \mathbb{B}' , et notons $(H, |\cdot|_H)$ l'espace de Hilbert autoreproduisant associé à la covariance de X . Désignons en outre par I la fonctionnelle sur \mathbb{B} définie par $I(x) = \frac{|x|_H^2}{2}$ ou $+\infty$, selon que x appartient ou non à H . Supposons que la famille $\{f^2(X); f \in \mathbb{B}', \|f\|_{\text{sup}} \leq 1\}$ est uniformément intégrable, où $\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{B}} \leq 1} |f(x)|$. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $a_n \rightarrow 0$, $na_n \rightarrow \infty$, quand n tend vers l'infini et vérifiant l'assertion suivante: il existe $\delta \in]0, 1[$ et $A \geq 1$ tels que pour tous entiers $n, k \geq 1$,

$$\sqrt{\frac{nk}{a_{nk}}} \leq Ak^{1-\delta} \sqrt{\frac{n}{a_n}}.$$

Alors, pour que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{a_n}{n}} S_n \in F\right) \leq -\inf_{x \in F} I(x),$$

pour tout fermé F de \mathbb{B} , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées:

i) $\sqrt{\frac{a_n}{n}} S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ en probabilité,

ii) il existe $M > 0$ tel que, quelque soit $u > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \left(n \mathbb{P} \left(\|X\|_{\mathbb{B}} > u \sqrt{\frac{n}{a_n}} \right) \right) \leq -\frac{u^2}{M}.$$

Pour des différences de martingales triangulaires à valeurs dans \mathbb{R}^d , Puhalskii [56] établit le Principe de Déviations Modérées. Des extensions aux variables aléatoires ϕ -mélangeantes ont été obtenues par Djellout [31] et Gao [33]. Plus récemment, Dedecker, Merlevède, Peligrad et Utev [25] ont établi le Principe de Déviations Modérées sous des conditions de faibles dépendances pour des suites stationnaires de variables aléatoires réelles. Citons leur résultat,

Théorème 1.2. (Dedecker, Merlevède, Peligrad et Utev [25])

Supposons que $\|X_0\|_{\infty} < \infty$ et que X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable. De plus, supposons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}}{n^{3/2}} < \infty, \quad (1.2)$$

et qu'il existe $\sigma^2 \geq 0$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathbb{E} \left(\frac{S_n^2}{n} \middle| \mathcal{F}_0 \right) - \sigma^2 \right\|_{\infty} = 0.$$

Alors, pour toute suite de réels positifs $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que $a_n \rightarrow 0$ et $na_n \rightarrow \infty$, le processus normalisé $Z_n(\cdot)$ satisfait le Principe de Déviations Modérées dans $C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ avec la fonction de taux $I_{\sigma}(\cdot)$ définie par

$$I_{\sigma}(h) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^1 (h'(u))^2 du,$$

avec $\sigma > 0$, $h(0) = 0$ et h est absolument continue sinon $I_{\sigma}(h) = \infty$.

L'objectif du second chapitre est double. Est-il possible d'étendre aux cas de variables aléatoires non adaptées le Théorème 1.2? Est-il possible de l'établir dans le cadre de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert?

Avant de donner le résultat obtenu, rappelons une définition

Définition 1.2. Un opérateur positif, auto-adjoint Γ sur \mathbb{H} , sera appelé un $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ -opérateur, s'il est de trace finie, i.e, pour toute base orthonormale $(e_l)_{l \geq 1}$ de \mathbb{H} , $\sum_{l \geq 1} \langle \Gamma e_l, e_l \rangle_{\mathbb{H}} < \infty$.
Posons également

$$\mathcal{AC}_0([0, 1], \mathbb{H}) = \{ \phi \in C_{\mathbb{H}}([0, 1]) : \text{il existe } g \in \mathbf{L}_{\mathbb{H}}^1([0, 1]) \\ \text{tel que } \phi(t) = \int_0^t g(s) ds \text{ pour } t \in [0, 1] \}.$$

Voici le résultat obtenu,

Théorème 1.3. (Dede [17])

Supposons que $\| \|X_0\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} < \infty$. De plus, supposons que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \| \| \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} < \infty \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \| \| S_n - \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_n) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} < \infty,$$

et qu'il existe $Q \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$ telle que

i) pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\langle S_n, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle S_n, e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \langle Q e_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty} = 0,$$

ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\|S_n\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \text{Tr}(Q) \right\|_{\infty} = 0.$$

Alors, pour toute suite positive a_n telle que $a_n \rightarrow 0$ et $na_n \rightarrow \infty$, le processus $Z_n(\cdot)$ satisfait le Principe de Déviations Modérées fonctionnel dans $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$ avec la bonne fonction de taux,

$$I(\phi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\phi'(t)) dt & \text{si } \phi \in \mathcal{AC}_0([0, 1], \mathbb{H}) \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où Λ^* est donnée, pour tout $x \in \mathbb{H}$, par

$$\Lambda^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{H}} \left(\langle y, x \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \langle y, Qy \rangle_{\mathbb{H}} \right).$$

Un des outils principaux pour la démonstration de ce Théorème est une nouvelle inégalité de type Hoeffding pour des variables aléatoires non nécessairement adaptées à valeurs dans un espace de Hilbert (voir Théorème 2.2 Chapitre 2).

1.3 Le TLC empirique dans $\mathbf{L}^1(\mu)$

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement asymptotique en loi de $D_{1,n}(\mu)$ définie par (1.1), lorsque $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite strictement stationnaire de variables aléatoires réelles.

Dans le cas de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{L}^1(\mu)$, nous pouvons déduire du Corollaire 1 de Jain [42]

Théorème 1.4. (Jain [42])

Si la suite de variables aléatoires centrées i.i.d. $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, est à valeurs dans $\mathbf{L}^1(\mu)$, alors le Théorème Limite Central a lieu si et seulement si $\int_{\mathbf{T}} \|X_1(t)\|_2 dt < \infty$.

Le résultat principal du Chapitre 3 est le suivant:

Théorème 1.5. (Dede [18])

Supposons, que pour tout réel t , $\mathbb{E}(X_0(t)|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ presque sûrement, $X_0(t)$ est $\mathcal{F}_{-\infty}$ -mesurable et

$$\int_{\mathbf{T}} \|X_0(t)\|_2 \mu(dt) < \infty.$$

Posons $P_0(X(t)) = \mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_{-1})$ et supposons que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_k(t))\|_2 \mu(dt) < \infty.$$

Alors

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_0 \circ \mathbb{T}^i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G \text{ en loi dans } \mathbf{L}^1(\mu),$$

où G est une variable aléatoire gaussienne centrée à valeurs dans $\mathbf{L}^1(\mu)$, et de fonction de covariance: pour tout $(f, g) \in \mathbf{L}^\infty(\mu) \times \mathbf{L}^\infty(\mu)$,

$$\Phi_G(f, g) = \mathbb{E} \left(f \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_0(X_k) \right) g \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_0(X_k) \right) \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(f(X_0), g(X_k)).$$

1.4 Applications aux distances.

Considérons une suite strictement stationnaire de variables aléatoires réelles $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et de fonction de répartition commune F_Y . Posons

$\mathcal{F}_0 = \sigma(Y_i, i \leq 0)$. Nous notons F_n , la fonction de répartition empirique de Y :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{Y_i \leq t}.$$

Pour toute mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} , la variable aléatoire $X_i = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ sera vue comme une variable aléatoire à valeurs soit dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$, si nous souhaitons travailler sur la distance de Cramér-Von Mises en particulier, soit dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}, \mu)$, pour une étude de la distance de Wasserstein d'ordre 1, avec $\mu = \lambda$ mesure de Lebesgue. Nous donnons par la suite, des conditions suffisantes pour le Principe de Déviations Modérées dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$, ou pour la convergence en loi dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$ du processus $\sqrt{n}(F_n - F_Y)$ dès que Y satisfait des conditions de mélange faible.

1.4.1 Coefficients de mélange fort.

Nous ne décrivons ici que les coefficients de mélange utilisés dans la thèse, à savoir le α -mélange et le ϕ -mélange. Ainsi, Rosenblatt [58] définit le mélange fort, encore appelé α -mélange.

Définition 1.3. (Rosenblatt [58]) *Pour deux sous σ -tribus \mathcal{B} et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, est définie la mesure de dépendance suivante*

$$\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := \sup_{B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}} |\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)|.$$

Puis, Ibragimov [41] définit le mélange uniforme ou ϕ -mélange.

Définition 1.4. (Ibragimov [41]) *Soient deux sous σ -tribus \mathcal{B} et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, on a*

$$\phi(\mathcal{B}, \mathcal{C}) := \sup_{B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}, \mathbb{P}(B) > 0} |\mathbb{P}(C|B) - \mathbb{P}(C)|.$$

En pratique, dans le cas du ϕ -mélange (respectivement du α -mélange), si Y est une variable aléatoire à valeurs dans un espace Polonais \mathcal{Y} et si \mathcal{F} est une σ -algèbre, le coefficient de ϕ -mélange entre \mathcal{F} et $\sigma(Y)$ est défini par

$$\phi(\mathcal{F}, \sigma(Y)) = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y \in A} | \mathcal{F}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y \in A})\|_\infty,$$

et respectivement

$$\alpha(\mathcal{F}, \sigma(Y)) = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y \in A} | \mathcal{F}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y \in A})\|_1.$$

Ainsi, à la suite strictement stationnaire de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, on peut lui associer les suites suivantes de coefficients de dépendance;

$$\phi(n) = \phi(\mathcal{F}_0, \sigma(X_n)) \text{ et } \alpha(n) = \alpha(\mathcal{F}_0, \sigma(X_n)),$$

où $\mathcal{F}_0 = \sigma(X_j, j \leq 0)$.

Les propriétés de ces coefficients ont été largement étudiées par Doukhan [32] et Bradley [13] [14].

Le problème de ces coefficients fortement mélangeants est qu'il est difficile de les calculer, et qu'ils ne prennent pas en compte certains processus. Ainsi, le processus d'Andrews [4] défini ainsi

Exemple 1.1. Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telle que $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = 1/2$, alors la solution stationnaire $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de l'équation

$$X_i = \frac{1}{2}(X_{i-1} + \xi_i), \text{ pour tout entier naturel } i \in \mathbb{Z},$$

n'est pas mélangeante au sens de Rosenblatt [58].

En effet, le calcul donne $\alpha(n) = \alpha(\sigma(X_0), \sigma(X_n)) = 1/4$ pour tout entier relatif n . Pour cette raison, Dedecker et Prieur [27] ont introduit des notions de dépendance moins restrictives, et couvrant plus de modèles.

1.4.2 Le mélange faible.

Avant de donner les définitions des coefficients faiblement mélangeants, rappelons que si x et y sont deux éléments de \mathbb{R}^d , alors $x \leq y$ si et seulement si $x_i \leq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Dedecker et Prieur [28] définissent ainsi $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\alpha}$,

Définition 1.5. Soit $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^k . Pour tout $1 \leq i \leq k$ et $t \in \mathbb{R}$, soit $g_{t,i}(x) = \mathbf{1}_{x \leq t} - \mathbb{P}(Y_i \leq t)$. Définissons la variable aléatoire

$$b(\mathcal{F}, Y_1, \dots, Y_k) = \sup_{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k} \left| \int \prod_{i=1}^k g_{t_i, i}(x_i) \mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}(dx) - \int \prod_{i=1}^k g_{t_i, i}(x_i) \mathbb{P}_Y(dx) \right|,$$

où $\mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}(dx) = \mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}(dx_1, \dots, dx_k)$ et $\mathbb{P}_Y(dx) = \mathbb{P}_Y(dx_1, \dots, dx_k)$, avec $\mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}$ la distribution de Y conditionnée par \mathcal{F} .

Pour une suite stationnaire $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, définissons les coefficients $\tilde{\phi}_k$ et $\tilde{\alpha}_k$, pour tout entier $k \geq 1$, par

$$\tilde{\phi}_k(n) = \max_{1 \leq l \leq k} \sup_{i_l > \dots > i_1 \geq n} \|b(\mathcal{F}_0, Y_{i_1}, \dots, Y_{i_l})\|_\infty,$$

et

$$\tilde{\alpha}_k(n) = \max_{1 \leq l \leq k} \sup_{i_l > \dots > i_1 \geq n} \|b(\mathcal{F}_0, Y_{i_1}, \dots, Y_{i_l})\|_1.$$

Pour simplifier, nous noterons par la suite indifféremment $\tilde{\phi}$ pour $\tilde{\phi}_1$ et $\tilde{\alpha}$ pour $\tilde{\alpha}_1$. Avec ces définitions, étudions le Principe de Déviations Modérées pour le processus $\sqrt{n}(F_n - F_Y)$, puisque les variables aléatoires $X_i = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t) : t \in \mathbb{R}\}$ peuvent être vues comme des variables aléatoires à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H} := \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ avec μ mesure de probabilité sur \mathbb{R} .

Proposition 1.1. (Dede [17])

Si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\phi}_2(n) < \infty,$$

alors $\{\sqrt{n}(F_n(t) - F_Y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ satisfait le Principe de Déviations Modérées dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ avec la fonction de taux,

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu), I(f) = \sup_{g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} (\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} - \frac{1}{2} \langle g, Qg \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)}),$$

où Q est définie ainsi, pour tout $(f, g) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu) \times \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$Q(f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s)g(t)C(s, t) \mu(dt)\mu(ds),$$

avec

$$C(s, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(Y_0 \leq s, Y_k \leq t) - F_Y(s)F_Y(t)).$$

Ainsi, nous en déduisons en appliquant le principe de contraction de Dembo et Zeitouni [29], que la statistique de Cramér-Von Mises

$$\sqrt{n} \left(\int_{\mathbb{R}} (F_n(t) - F_Y(t))^2 \mu(dt) \right)^{1/2},$$

satisfait le Principe de Déviations Modérées dans \mathbb{R} avec la fonction de taux,

$$\forall y \geq 0, I^*(y) = \frac{1}{2} \frac{y^2}{\nu},$$

où $\nu = \max_k(\lambda_k)$, et les λ_k sont les valeurs propres de l'opérateur de covariance Q .

Si $Y_i \in [0, 1]$ et $\mu(dt) = dt$, alors toujours par le principe de contraction de Dembo et Zeitouni [29], nous en déduisons que la distance de Wasserstein d'ordre 1, $\sqrt{n}\|F_n - F_Y\|_{\mathbf{L}^1([0,1],\mu)}$ satisfait le Principe de Déviations Modérées dans \mathbb{R}_+ avec la fonction de taux,

$$\forall y \geq 0, J(y) = \frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma(Z)}$$

où Z est une variable aléatoire d'opérateur de covariance Q définie dans la Proposition 1.1 et

$$\sigma(Z) = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left(\mathbb{E} \left(\int_0^1 g(t) Z(t) dt \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Maintenant, intéressons nous à la convergence dans $\mathbf{L}^1(\lambda)$, avec λ , mesure de Lebesgue. Si $\mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$, la variable aléatoire $X_i(\cdot) = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ peut-être vue comme une variable aléatoire centrée à valeurs dans $\mathbf{L}^1(\lambda)$.

Dans le cas indépendant, del Barrio, Giné et Matrán [6] ont établi le théorème suivant

Théorème 1.6. *(del Barrio, Giné et Matrán [6])*

Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, des variables aléatoires i.i.d. de distribution commune F_Y . Posons

$$X(t) := \mathbf{1}_{Y > t} - \mathbb{P}(Y > t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.3)$$

et soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, le processus obtenu en remplaçant Y par Y_i dans (1.3). Alors le processus $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_i = \sqrt{n}(F_n - F_Y)$ converge en loi dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$ (avec λ la mesure de Lebesgue) vers le processus $B(F_Y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, où B est un pont brownien, si et seulement si

$$\Lambda_{2,1}(Y) := \int_0^\infty \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)} dt < \infty. \quad (1.4)$$

Notons que (1.4) est équivalente à

$$\int_{-\infty}^\infty \sqrt{F_Y(t)(1 - F_Y(t))} dt < \infty.$$

Maintenant, si la suite stationnaire Y est $\tilde{\phi}$ -dépendante, alors on a:

Proposition 1.2. (Dede [18])

Supposons que

$$\sum_{k \geq 1} \sqrt{\frac{\tilde{\phi}(k)}{k}} < \infty \text{ et } \int_0^\infty \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)} dt < \infty,$$

alors $\{t \mapsto \sqrt{n}(F_n(t) - F_Y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ converge dans $\mathbf{L}^1(\lambda)$ vers une variable aléatoire gaussienne centrée de fonction de covariance: pour tout $(f, g) \in \mathbf{L}^\infty(\lambda) \times \mathbf{L}^\infty(\lambda)$,

$$\Phi_G(f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s)g(t)C(s, t) dt ds,$$

où

$$C(s, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(Y_0 \leq s, Y_k \leq t) - F_Y(s)F_Y(t)).$$

Avant de donner des conditions suffisantes quand la suite Y est $\tilde{\alpha}$ -dépendante, nous rappelons que

Définition 1.6. Pour toute variable aléatoire positive, intégrable, définissons la fonction quantile Q_Y de Y , i.e. la fonction càdlàg inverse de la queue de distribution $x \mapsto \mathbb{P}(Y > x)$.

Proposition 1.3. (Dede [18])

Supposons que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^{\tilde{\alpha}(k)} \frac{Q_{|Y|}(u)}{\sqrt{u}} du < \infty, \quad (1.5)$$

alors la conclusion de la Proposition 1.2 reste vraie.

Remarquons que la Proposition 1.2 (respectivement la Proposition 1.3) est encore vraie en mélange fort, i.e. en ϕ -mélange (respectivement en α -mélange).

Dans les chapitres 2 et 3, nous verrons comment appliquer notamment ces résultats aux systèmes dynamiques et aux processus linéaires.

1.5 Estimation de la densité spectrale

Supposons que nous disposons d'une suite stationnaire de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans \mathbf{L}^2 , de moyenne μ . Cette suite est construite

de la manière suivante, $X_i = X_0 \circ \mathbb{T}^i$, où $\mathbb{T} : \Omega \rightarrow \Omega$ est une transformation bijective bimesurable conservant la mesure de probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{A}) . Un élément A de \mathcal{A} est dit invariant par \mathbb{T} si $\mathbb{T}(A) = A$. En notant \mathcal{I} la tribu des éléments invariants par \mathbb{T} , nous supposons que la probabilité \mathbb{P} est ergodique, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{I}$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1 . Une variable aléatoire X_0 sera dite régulière si $\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ presque sûrement, et X_0 est \mathcal{F}_{∞} -mesurable.

Rappelons que nous définissons, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'opérateur de projection P_i sur \mathbf{L}^2 par,

$$P_i(X) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{i-1}).$$

Concernant le comportement asymptotique de la suite des sommes partielles, Heyde [39] (Hannan [37] pour le cas adapté) a montré que si X_0 est régulière et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_k)\|_2 < \infty, \quad (1.6)$$

alors

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_0, X_k)\right) \text{ en loi.}$$

Pour obtenir des intervalles de confiance asymptotiques pour la moyenne, en utilisant le Théorème Limite Central, il nous faut donc un estimateur de la série des covariances.

Définissons la densité spectrale,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_0, X_k) e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

En effet, la densité spectrale en zéro est égale (au facteur 2π près) à la série des covariances. Nous étudions ainsi, plus généralement, l'estimation de la densité spectrale, qui existe et est continue sous (1.6). En pratique, seules les données X_1, X_2, \dots, X_n sont connues, on utilise donc un estimateur naturel de la covariance $\text{Cov}(X_0, X_k)$ donné par

$$\hat{\gamma}_k := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (X_j - \bar{X}_n)(X_{j+|k|} - \bar{X}_n), \quad 0 \leq |k| \leq (n-1),$$

avec $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$.

Pour estimer la densité spectrale, on utilisera l'estimateur lissé, introduit

par Bartlett [7], et défini par

$$f_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad (1.7)$$

avec c_n une suite d'entiers positifs telle que $c_n \rightarrow \infty$ et $c_n/n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Nous supposons que K vérifie $K(x) = 1$ pour tout réel $|x| \leq 1$, et $K(x) = 2 - |x|$ pour tout réel $1 \leq |x| \leq 2$, sinon $K(x) = 0$.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous pouvons citer Anderson [3], Brillinger [15], Brockwell et Davis [16], Hannan [36] [37], Priestley [55]... Ils ont traité des propriétés de cet estimateur, mais sous des conditions plus ou moins restrictives sur le processus X . Anderson [3] suppose ainsi que les $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ont des moments d'ordre 4, et que la somme des cumulants d'ordre au plus 4 est finie. En rajoutant des hypothèses sur le noyau de convergence, il obtient une estimation de l'erreur quadratique entre l'estimateur lissé et la densité spectrale, ainsi qu'une vitesse de convergence. Rosenblatt [59] considère des processus α -mélangeants et ayant des moments d'ordre 2 finis. Blanke et Merlevède [9] modifient l'estimateur lissé en travaillant sur un estimateur lissé tronqué, toujours dans le cas d'un processus α -mélangeant et ayant des moments d'ordre 2. Elles donnent sous ces hypothèses, l'erreur quadratique ainsi qu'une vitesse de convergence. Hannan [37], quant à lui, travaille sur des processus linéaires et suppose que $\mathcal{F}_{-\infty}$ est triviale, ce qui entraîne des conditions de dépendance faible. Ses conditions sont très bien adaptées pour l'analyse des séries temporelles et permettent de considérer aussi bien des suites mélangeantes que des différences de martingales.

Nous montrons sous des conditions adéquates sur c_n , que l'estimateur lissé (1.7) converge vers $f(\theta)$ sous les mêmes hypothèses que celles données par Heyde [39] pour que le Théorème Limite Central ait lieu.

Un premier résultat fondamental est sur la consistance de l'estimateur lissé $f_n(\theta)$ dans \mathbf{L}^1 :

Théorème 1.7. *Supposons que X_0 est régulière et que (1.6) est vérifiée. Supposons de plus que*

$$c_n \mathbb{E} \left(|X_0|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |X_0|^2 \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.8)$$

Alors

$$f_n(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\theta) \text{ dans } \mathbf{L}^1. \quad (1.9)$$

Par exemple, si la variable aléatoire X_0 admet un moment d'ordre 4, la condition (1.8) est vérifiée si $\frac{c_n^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dans la Section 4.3 du Chapitre 4, nous verrons comment appliquer ce résultat via un Théorème Limite Central pour obtenir des régions de confiance pour les paramètres dans un modèle de régression paramétrique. Enfin, nous illustrerons ces résultats par des simulations.

Chapter 2

Moderate deviations for stationary sequences of Hilbert-valued bounded random variables

In this chapter, we derive the Moderate Deviation Principle for stationary sequences of bounded random variables with values in a Hilbert space. The conditions obtained are expressed in terms of martingale-type conditions. The main tools are martingale approximations and a new Hoeffding inequality for non-adapted sequences of Hilbert-valued random variables. Applications to Cramér-Von Mises statistics, functions of linear processes and stable Markov chains are given. The content of this part is based on a paper, published in *Journal of Mathematical Analysis and Applications* [17].

2.1 Introduction

Let \mathbb{H} be a separable Hilbert space with norm $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ generated by an inner product, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$, and $(e_l)_{l \geq 1}$ be an orthonormal basis of \mathbb{H} .

For the stationary sequence $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, of centered random variables with values in \mathbb{H} , define the partial sums and the normalized process $\{Z_n(t) : t \in$

$[0, 1]$ by

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad \text{and} \quad Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i + \frac{1}{\sqrt{n}}(nt - [nt])X_{[nt]+1},$$

$[\cdot]$ denoting the integer part.

In this chapter, we are concerned with the Moderate Deviation Principle, for the process $Z_n(\cdot)$, considered as an element of $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$, the set of all continuous functions from $[0, 1]$ to \mathbb{H} . This is a separable Banach space under the sup-norm $\|x\|_{\infty} = \sup\{\|x(t)\|_{\mathbb{H}} : t \in [0, 1]\}$. More generally, we say that a family of random variables $\{Z_n, n > 0\}$ satisfies the Moderate Deviation Principle (MDP) in E , a separable metric space, with speed $a_n \rightarrow \infty$, and good rate function $I(\cdot)$, if the level sets $\{x, I(x) \leq \alpha\}$ are compact for all $\alpha < \infty$, and for all Borel sets Γ of E ,

$$\begin{aligned} -\inf\{I(x); x \in \overset{\circ}{\Gamma}\} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P}(\sqrt{a_n}Z_n \in \Gamma) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P}(\sqrt{a_n}Z_n \in \Gamma) \leq -\inf\{I(x); x \in \bar{\Gamma}\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

From now, we assume that the stationary sequence $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is given by $X_i = X_0 \circ \mathbb{T}^i$, where $\mathbb{T} : \Omega \rightarrow \Omega$ is a bijective bimeasurable transformation preserving the probability \mathbb{P} on (Ω, \mathcal{A}) . For a subfield \mathcal{F}_0 satisfying $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathbb{T}^{-1}(\mathcal{F}_0)$, let $\mathcal{F}_i = \mathbb{T}^{-i}(\mathcal{F}_0)$. By $\|X\|_{\mathbb{H}}$, we denote the $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^{\infty}$ -norm, that is the smallest u such that $\mathbb{P}(\|X\|_{\mathbb{H}} > u) = 0$.

When $\mathbb{H} = \mathbb{R}$, Dedecker, Merlevède, Peligrad and Utev [25] have recently proved (see their Theorem 1), by using a martingale approximation approach, that:

Theorem 2.1. *Assume that $\|X_0\|_{\infty} < \infty$, and that X_0 is \mathcal{F}_0 -measurable. In addition, assume that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}}{n^{3/2}} < \infty,$$

and that there exists $\sigma^2 \geq 0$ with

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathbb{E}\left(\frac{S_n^2}{n} \middle| \mathcal{F}_0\right) - \sigma^2 \right\|_{\infty} = 0.$$

Then, for all positive sequences $a_n \rightarrow \infty$ and $na_n \rightarrow \infty$, the normalized process $Z_n(\cdot)$ satisfies the MDP in $C_{\mathbb{R}}([0, 1])$, with the good rate function

$I_\sigma(\cdot)$ defined by

$$I_\sigma(h) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^1 (h'(u))^2 du$$

if simultaneously $\sigma > 0$, $h(0) = 0$ and h is absolutely continuous, and $I_\sigma(h) = \infty$ otherwise.

The first aim of this chapter is to extend the above result to random variables taking their values in a real and separable Hilbert space \mathbb{H} . Indeed, having asymptotic results concerning dependent random variables with values in \mathbb{H} allows for instance, to derive the corresponding asymptotic results for statistics of the type $\int_0^1 |F_n(t) - F_Y(t)|^2 \mu(dt)$ where $F_Y(\cdot)$ is the cumulative distribution function of a strictly stationary sequence of real-valued random variables $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ and $F_n(\cdot)$ is the corresponding empirical distribution function (see Section 2.3.4).

On an other hand, since Theorem 2.1 is stated for adapted sequences, the second aim of this chapter is to extend this result to non-adapted sequences.

To extend Theorem 2.1 to non-adapted sequences of Hilbert-valued random variables, we use a similar martingale approach as done for instance in Volný [62] for the Central Limit Theorem. In infinite dimensional cases, the authors have essentially considered i.i.d. or triangular arrays of i.i.d. random variables (see for instance de Acosta [1], Borovkov and Mogulskii [10] [11], Ledoux [45], ...). However for dependent sequences with values in functional spaces, there are few results available in the literature. Since our approach is based on martingale approximation, we first extend Puhalskii [56] results for \mathbb{R}^d -valued martingale differences sequences to the \mathbb{H} -valued case (see Section 2.4.2). In Section 2.2.1, we derive a Hoeffding inequality for a sequence of non-adapted Hilbert-valued random variables. Section 2.4 is dedicated to the proofs.

2.2 Main Results

We begin with some notations,

Notation 2.1. For any real $p \geq 1$, denote by $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^p$ the space of \mathbb{H} -valued random variables X such that $\|X\|_{\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^p}^p = \mathbb{E}(\|X\|_{\mathbb{H}}^p)$ is finite. For example, $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^1([0, 1])$ is the space of \mathbb{H} -valued Bochner integrable functions on $[0, 1]$.

2.2.1 A Hoeffding inequality

Firstly, we start by establishing a maximal inequality, which is obtained through a generalization of the ideas in Peligrad, Utev and Wu [52].

Theorem 2.2. *Assume that $\|X_0\|_{\mathbb{H}} < \infty$. For any $x > 0$, we have*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}} \geq x\right) \leq 2\sqrt{e} \exp\left(-\frac{x^2}{4n(\|X_0\|_{\mathbb{H}} + C\Delta)^2}\right), \quad (2.2)$$

for some constant $C > 0$ and

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{3/2}} (\|\mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} + \|S_j - \mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_j)\|_{\mathbb{H}}).$$

2.2.2 The Moderate Deviation Principle

Before establishing our main result, we need more definitions.

Definition 2.1. *A nonnegative self-adjoint operator Γ on \mathbb{H} will be called an $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ -operator, if it has finite trace, i.e., for some (and therefore every) orthonormal basis $(e_l)_{l \geq 1}$ of \mathbb{H} , $\sum_{l \geq 1} \langle \Gamma e_l, e_l \rangle < \infty$.*

Let

$$\begin{aligned} \mathcal{AC}_0([0, 1]) &= \{\phi \in C_{\mathbb{H}}([0, 1]) : \text{there exists } g \in \mathbf{L}_{\mathbb{H}}^1([0, 1]) \\ &\quad \text{such that } \phi(t) = \int_0^t g(s) ds \text{ for } t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Now, we give the extension of Theorem 2.1.

Theorem 2.3. *Assume that $\|X_0\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Moreover, assume that*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \|\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \|S_n - \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_n)\|_{\mathbb{H}} < \infty, \quad (2.3)$$

and that there exists $Q \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$ such that

i. for all k, l in \mathbb{N}^* ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\langle S_n, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle S_n, e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \langle Q e_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty} = 0, \quad (2.4)$$

ii.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\|S_n\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_0) - \text{Tr}(Q) \right\|_{\infty} = 0. \quad (2.5)$$

Then, for all positive sequences a_n with $a_n \rightarrow 0$ and $na_n \rightarrow \infty$, the process $Z_n(\cdot)$ satisfies the functional MDP in $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$ with the good rate function,

$$I(\phi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\phi'(t)) dt & \text{if } \phi \in \mathcal{AC}_0([0, 1]) \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2.6)$$

where Λ^* is given by:

$$\Lambda^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{H}} \left(\langle y, x \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \langle y, Qy \rangle_{\mathbb{H}} \right). \quad (2.7)$$

As an immediate consequence, we have:

Corollary 2.1. *Under the same notations and assumptions of Theorem 2.3, we have that, for all positive sequences a_n with $a_n \rightarrow 0$ and $na_n \rightarrow \infty$, $n^{-1/2}S_n$ satisfies the MDP in \mathbb{H} with the good rate function, Λ^* defined in (2.7).*

Since $\text{Tr}(Q) < \infty$, Q is a compact operator. If $x \in Q(\mathbb{H})$, then there is $z \in \mathbb{H}$, such that $x = Qz$. Hence, the rate function is

$$\forall x \in Q(\mathbb{H}), \quad \Lambda^*(x) = \frac{1}{2} \langle z, Qz \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{2} \langle z, x \rangle_{\mathbb{H}}.$$

If $x \notin Q(\mathbb{H})$, we have $\Lambda^*(x) = +\infty$. In particular, if Q is injective, $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ are its eigenvalues, and $(f_i)_{i \geq 0}$ the associated eigenvectors, we can simplify the rate function,

$$\forall x \in Q(\mathbb{H}), \quad \Lambda^*(x) = \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} \langle x, f_i \rangle_{\mathbb{H}}^2.$$

The following corollary gives simplified conditions for the MDP.

Corollary 2.2. *Assume that $\| \|X_0\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} < \infty$. Moreover, assume that*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \| \| \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \| \| X_{-n} - \mathbb{E}(X_{-n} \mid \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} < \infty, \quad (2.8)$$

and that for all i, j in \mathbb{N}^* ,

1. for all k, l in \mathbb{N}^* ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{E}(\langle X_i, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle X_j, e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle X_i, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle X_j, e_l \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} = 0, \quad (2.9)$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{E}(\langle X_i, X_j \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle X_i, X_j \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} = 0. \quad (2.10)$$

Then, the conclusion of Theorem 2.3 holds, with Q defined by

$$\text{for all } k, l \geq 1, \quad \langle e_k, Qe_l \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\langle X_0, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle X_p, e_l \rangle_{\mathbb{H}}).$$

2.2.3 Functional law of the iterated logarithm

Throughout this section, let $\beta(n) = \sqrt{2n \log \log n}$, $n \geq 3$. Let $\tilde{S}_n(\cdot)$ be the process $\{\tilde{S}_n(t) = \sum_{i=1}^{[nt]} X_i + (nt - [nt])X_{[nt]+1} : t \in [0, 1]\}$.

Theorem 2.4. *Assume that $\|X_0\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Assume in addition that (2.3), (2.4) and (2.5) hold. Then, with probability 1, the following sequence*

$$\left\{ \xi_n(\cdot) = \frac{\tilde{S}_n(\cdot)}{\beta(n)} \right\}_{n \geq 1}$$

is relatively compact in $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$ and the set of its limit points is precisely the compact set

$$\mathcal{K} = \{\phi \in C_{\mathbb{H}}([0, 1]), \text{ such that } 2I(\phi) \leq 1\}.$$

Proof of Theorem 2.4. It can be proved by the arguments of the proof of Theorem 3.1 in Hu and Lee [40] (see also Deuschel and Stroock [30]). \square

2.3 Applications

2.3.1 ϕ -mixing sequences

Recall that if Y is a random variable with values in a Polish space \mathcal{Y} and if \mathcal{F} is a σ -field, the ϕ -mixing coefficient between \mathcal{F} and $\sigma(Y)$ is defined by

$$\phi(\mathcal{F}, \sigma(Y)) = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y \in A} | \mathcal{F}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y \in A})\|_{\infty}.$$

For the sequence $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, let

$$\phi_1(n) = \phi(\mathcal{F}_0, \sigma(X_n)) \text{ and } \phi_2(n) = \sup_{i > j \geq n} \phi(\mathcal{F}_0, \sigma(X_i, X_j)).$$

Proposition 2.1. *Assume that $\|X_0\|_{\mathbb{H}} < \infty$ and X_0 is \mathcal{F}_0 -measurable. Then, for all $x \geq 0$, we have*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}} \geq x\right) \leq 2\sqrt{e} \exp\left(-\frac{x^2}{4n\|X_0\|_{\mathbb{H}}^2(1 + 6C \sum_{j \geq 1} j^{-1/2} \phi_1(j))^2}\right), \quad (2.11)$$

for the same positive constant C defined in Theorem 2.2.

Proof of Proposition 2.1. Applying triangle inequality and changing the order of summation, observe that

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \|\mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} \leq 3 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}.$$

Since $\mathbb{E}(X_0) = 0$, we have

$$\|\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} \leq 2\|X_0\|_{\mathbb{H}} \phi_1(n).$$

□

Next, we have a Moderate Deviation Principle.

Proposition 2.2. *Assume that $\|X_0\|_{\mathbb{H}} < \infty$ and X_0 is \mathcal{F}_0 -measurable. If*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_1(n) < \infty \text{ and } \phi_2(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

then the conclusion of Theorem 2.3 holds.

2.3.2 Functions of linear processes

In this section, we shall focus on functions of \mathbb{H} -valued linear processes,

$$X_k = f\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(\varepsilon_{k-i})\right) - \mathbb{E}\left(f\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(\varepsilon_{k-i})\right)\right), \quad (2.12)$$

where $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ are linear operators from \mathbb{H} to \mathbb{H} and $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of i.i.d. \mathbb{H} -valued random variables such that $\|\varepsilon_0\|_{\mathbb{H}} < \infty$.

The sequence $(X_k)_{k \geq 1}$ defined by (2.12) is a natural extension of the

multivariate linear processes. These types of processes with values in functional spaces also facilitate the study of estimating and forecasting problems for several classes of continuous time processes (see Bosq [12]).

We denote by $\|\cdot\|_{L(\mathbb{H})}$, the operator norm. We shall give sufficient conditions for the Moderate Deviation Principle in terms of the regularity of the function f .

Let $\delta(\varepsilon_0) = 2 \inf\{\|\varepsilon_0 - x\|_{\mathbb{H}}, x \in \mathbb{H}\}$ and define the modulus of continuity of f by

$$w_f(h) = \sup_{\|t\|_{\mathbb{H}} \leq h, x \in \mathbb{H}} \|f(x+t) - f(x)\|_{\mathbb{H}}.$$

Proposition 2.3. *Assume that*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \|a_i\|_{L(\mathbb{H})} < \infty,$$

and that X_k is defined as in (2.12). If moreover

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} w_f\left(\delta(\varepsilon_0) \sum_{k \geq n} \|a_k\|_{L(\mathbb{H})}\right) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} w_f\left(\delta(\varepsilon_0) \sum_{k \leq -n} \|a_k\|_{L(\mathbb{H})}\right) < \infty, \quad (2.13)$$

then the conclusion of Theorem 2.3 holds.

In particular, if $\|a_i\|_{L(\mathbb{H})} = O(\rho^{|i|})$, $0 < \rho < 1$, the condition (2.13) is equivalent to

$$\int_0^1 \frac{w_f(t)}{t\sqrt{|\log t|}} dt < \infty. \quad (2.14)$$

For example, if $w_f(t) \leq D|\log t|^{-\gamma}$ for some $D > 0$ and some $\gamma > 1/2$, then (2.14) holds.

Remark: Under a Cramér type condition, Mas and Menneteau [49] were interested in the MDP for the asymptotic behavior of the empirical mean of $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, where for all $n \geq 1$, X_n is an autoregressive process: $X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j (\varepsilon_{n-j})$. Here, $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of i.i.d. Hilbert-valued centered random variables satisfying a Cramér type condition and ρ is a bounded Hilbert linear operator, satisfying $\sum_{j=0}^{\infty} \|\rho^j\|_{L(\mathbb{H})} < \infty$. They gave also the MDP for the difference between the empirical and theoretical covariance operators.

2.3.3 Stable Markov chains

Let $(Y_n)_{n \geq 0}$ be a stationary Markov chain of \mathbb{H} -valued bounded random variables. Denote by μ the law of Y_0 and by K its transition kernel.

Let

$$X_k = f(Y_k) - \mathbb{E}(f(Y_k)). \quad (2.15)$$

For all Lipschitz functions $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, let

$$\text{Lip}(g) = \sup_{x, y \in \mathbb{H}} \frac{\|g(x) - g(y)\|_{\mathbb{H}}}{\|x - y\|_{\mathbb{H}}}.$$

We write $K(g)$ and $K^n(g)$ respectively for the functions $y \mapsto \int g(z)K(y, dz)$ and $y \mapsto \int g(z)K^n(y, dz) = \mathbb{E}(g(Y_n) \mid Y_0 = y)$.

Proposition 2.4. *Assume that the transition kernel K satisfies $\text{Lip}(K^n(g)) \leq C\rho^n \text{Lip}(g)$ for some $\rho < 1$ and any Lipschitz function g . If f is Lipschitz and X_i is defined by (2.15), then the normalized process $Z_n(\cdot)$ satisfies the MDP in $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$.*

Let $(Y_n)_{n \geq 0}$ satisfying the equation $Y_n = F(Y_{n-1}, \xi_n)$ for some measurable map F and some sequence $(\xi_i)_{i \geq 0}$ of i.i.d. random variables independent of Y_0 .

Corollary 2.3. *Assume that for all $x, y \in \mathbb{H}$, $\|F(x, \xi_1) - F(y, \xi_1)\|_{\mathbb{H}} \leq \rho \|x - y\|_{\mathbb{H}}$ with $\rho < 1$. If f is Lipschitz and X_i is defined by (2.15), then the normalized process $Z_n(\cdot)$ satisfies the MDP in $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$.*

Proof of Corollary 2.3. The condition: for all $x, y \in \mathbb{H}$, $\|F(x, \xi_1) - F(y, \xi_1)\|_{\mathbb{H}} \leq \rho \|x - y\|_{\mathbb{H}}$ with $\rho < 1$, implies that, for all f Lipschitz function,

$$\text{Lip}(K(f)) \leq \rho \text{Lip}(f).$$

Indeed, for all y in \mathbb{H} , we get

$$K(f)(y) = \mathbb{E}(f(Y_1) \mid Y_0 = y) = \mathbb{E}(f(F(y, \xi_1)) \mid Y_0 = y) = \int f(F(y, z)) \mathbb{P}_{\xi_1}(dz).$$

Hence, for all $x, y \in \mathbb{H}$, we derive

$$\begin{aligned} \|K(f)(x) - K(f)(y)\|_{\mathbb{H}} &\leq \int \|f(F(x, z)) - f(F(y, z))\|_{\mathbb{H}} \mathbb{P}_{\xi_1}(dz) \\ &\leq \text{Lip}(f) \|F(x, \xi_1) - F(y, \xi_1)\|_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

$$\leq \rho \text{Lip}(f) \|x - y\|_{\mathbb{H}}.$$

It follows that

$$\text{Lip}(K(f)) \leq \rho \text{Lip}(f),$$

so that

$$\text{Lip}(K^n(f)) \leq \rho^n \text{Lip}(f).$$

We conclude by applying Proposition 2.4. \square

2.3.4 Moderate Deviation Principle for the empirical distribution function in L^2

Let $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ be a strictly stationary sequence of real-valued random variables with common distribution function F_Y . Set $\mathcal{F}_0 = \sigma(Y_i, i \leq 0)$. We denote F_n , the empirical distribution function of Y :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{Y_i \leq t}.$$

Note that for any probability measure μ on \mathbb{R} , the random variable $X_i = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t) : t \in \mathbb{R}\}$ may be viewed as a random variable with values in the Hilbert space $\mathbb{H} := \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$. Hence to derive the MDP for $n(F_n - F_Y)$ we shall apply Corollary 2.2 to the random variables $(X_i)_{i \geq 1}$. With this aim, we first recall the following dependance coefficients from Dedecker and Prieur [28].

Definition 2.2. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space, let \mathcal{F} be a σ -algebra of \mathcal{A} . Let $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ be a random variable with values in \mathbb{R}^k . Let \mathbb{P}_Y be the distribution of Y and let $\mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}$ be a conditional distribution of Y given \mathcal{F} . For $1 \leq i \leq k$ and t in \mathbb{R} , let $g_{t,i}(x) = \mathbf{1}_{x \leq t} - \mathbb{P}(Y_i \leq t)$. Define the random variable*

$$b(\mathcal{F}, Y_1, \dots, Y_k) = \sup_{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k} \left| \int \prod_{i=1}^k g_{t_i, i}(x_i) \mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}(dx) - \int \prod_{i=1}^k g_{t_i, i}(x_i) \mathbb{P}_Y(dx) \right|$$

with $\mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}(dx) = \mathbb{P}_{Y|\mathcal{F}}(dx_1, \dots, dx_k)$ and $\mathbb{P}_Y(dx) = \mathbb{P}_Y(dx_1, \dots, dx_k)$.

For the stationary sequence $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, define the coefficient $\tilde{\phi}_k$, for any integer $k \geq 1$, by

$$\tilde{\phi}_k(n) = \max_{1 \leq l \leq k} \sup_{i_1 > \dots > i_l \geq n} \|b(\mathcal{F}_0, Y_{i_1}, \dots, Y_{i_l})\|_{\infty}.$$

Proposition 2.5. *If*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\phi}_2(n) < \infty, \quad (2.16)$$

then $\{\sqrt{n}(F_n(t) - F_Y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ satisfies the MDP in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ with the good rate function,

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu), I(f) = \sup_{g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} \left(\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} - \frac{1}{2} \langle g, Qg \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} \right), \quad (2.17)$$

where Q is defined as follows, for all (f, g) in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu) \times \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$Q(f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s)g(t)C(s, t) \mu(dt)\mu(ds)$$

with

$$C(s, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(Y_0 \leq s, Y_k \leq t) - F_Y(s)F_Y(t)).$$

If we use the contraction principle in Dembo and Zeitouni [29], with the continuous function $f : x \mapsto \|x\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)}$, the Cramér-Von Mises statistics,

$$\sqrt{n} \left(\int_{\mathbb{R}} (F_n(t) - F_Y(t))^2 \mu(dt) \right)^{1/2}$$

satisfies the MDP in \mathbb{R} with the good rate function,

$$\forall y \geq 0, I^*(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} y^2,$$

where $\nu = \max_k (\lambda_k)$, the λ_k 's are the eigenvalues of the covariance function Q .

Now we suppose that $Y_i \in [0, 1]$ and $\mu(dt) = dt$. Always, by the contraction principle in Dembo and Zeitouni [29] with the continuous function,

$$\begin{aligned} u : \mathbf{L}^2([0, 1], \mu) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ g &\longmapsto \|g\|_{\mathbf{L}^1([0, 1], \mu)}, \end{aligned}$$

we prove that the Kantorovitch distance $\sqrt{n}\|F_n - F_Y\|_{\mathbf{L}^1([0, 1], \mu)}$ satisfies the MDP in \mathbb{R}_+ , with the good rate function,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, J(y) = \inf \{ I(f), f \in \mathbf{L}^2([0, 1], \mu), y = \|f\|_{\mathbf{L}^1([0, 1], \mu)} \}.$$

We deduce from the proof of Theorem in Ledoux [45] page 274, that

$$\forall y \geq 0, J(y) = \frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma(Z)^2},$$

where Z is a random variable with covariance function Q defined in Proposition 2.5 and $\sigma(Z) = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \left(\mathbb{E} \left(\int_0^1 g(t) Z(t) dt \right)^2 \right)^{1/2}$.

By using a remark (8.22) in Ledoux and Talagrand [46] page 216, we also have

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \|F_n - F_Y\|_{\mathbf{L}^1([0,1], \mu)}}{\sqrt{2n \log \log n}} = \sigma(Z).$$

Remark: (2.16) is satisfied for a large class of dependent sequences. For instance, it is verified for the class of expanding maps as considered in Dedecker and Prieur [28].

2.4 Proofs

2.4.1 Hoeffding inequality's proof

2.4.1.1 Technical propositions

The proofs of the following lemma and propositions use the same ideas as in the proof of Theorem 1 in Peligrad, Utev and Wu [52] (see also Mackey and Tyran-Kamińska [48]).

Lemma 2.1. *Let $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ be a stationary sequence of \mathbb{H} -valued martingale differences. For all integer $n \geq 1$ and real $p \geq 1$, we have*

$$\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|Z_1 + \dots + Z_i\|_{\mathbb{H}}^{2p} \right) \leq 2^{p+1} \Gamma(p+1) n^p \| \|Z_1\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}^{2p}. \quad (2.18)$$

Proof of Lemma 2.1. We note here, $S_i = \sum_{k=1}^i Z_k$. Applying an inequality given in Pinelis [53] (Theorem 3.5) and using stationarity, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}}^{2p} \right) &= \int_0^\infty (2p) z^{2p-1} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}} \geq z \right) dz \\ &\leq 2 \int_0^\infty (2p) z^{2p-1} \exp \left(- \frac{z^2}{2n \| \|Z_1\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}^2} \right) dz. \end{aligned}$$

By the change of variable $u = \frac{z}{\sqrt{n} \| \|Z_1\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}}$,

$$\int_0^\infty z^{2p-1} \exp \left(- \frac{z^2}{2(\sqrt{n} \| \|Z_1\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty})^2} \right) dz = n^p \| \|Z_1\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}^{2p} \int_0^\infty u^{2p-1} \exp \left(- \frac{u^2}{2} \right) du.$$

Next

$$\int_0^\infty u^{2p-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 2^{p-1} \Gamma(p).$$

Therefore, we conclude that

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}}^{2p}\right) \leq 2^{p+1} \Gamma(p+1) n^p \| \|Z_1\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}^{2p}.$$

□

The next proposition is a generalization of Lemma 2.1 to an adapted stationary sequence.

Proposition 2.6. *Let n, q be integers such that $n \geq 1, 2^{q-1} \leq n < 2^q$. Assume that $\| \|Z_0\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} < \infty$, and Z_0 is \mathcal{F}_0 -measurable. Let $Z_i = (Z_0 \circ \mathbb{T}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Then, for all real $p \geq 1$,*

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{j=1}^i Z_j \right\|_{\mathbb{H}}^{2p}\right)^{1/2p} \leq (2^{p+1} \Gamma(p+1))^{1/2p} \sqrt{n} \left\{ \| \|Z_1 - \mathbb{E}(Z_1 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + \frac{5}{\sqrt{2}} \Delta_q \right\} \quad (2.19)$$

where

$$\Delta_q = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{2^{j/2}} \| \| \mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}.$$

Proof of Proposition 2.6. The proof is almost identical to the proof of the corresponding facts in Theorem 1 of Peligrad, Utev and Wu [52] if we replace everywhere the absolute value $|\cdot|$ by $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$, and C_p is here, $C_p = 2^{p+1} \Gamma(p+1)$. Also, we work with the $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^{2p}$ -norm. Consequently, we give here, only the crucial inequalities. We note $K = 5/\sqrt{2}$. By triangle inequality, notice that

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i (Z_k - \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_{k-1})) \right\|_{\mathbb{H}} + \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) \right\|_{\mathbb{H}}. \quad (2.20)$$

By the inequality for martingale differences (2.18), we get

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i (Z_k - \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_{k-1})) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq C_p^{1/2p} \sqrt{n} \| \|Z_1 - \mathbb{E}(Z_1 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}. \quad (2.21)$$

Moreover, if we start by writing, $n = 2m$ or $n = 2m + 1$, we have

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq \left\| \max_{1 \leq l \leq m} \left\| \sum_{k=1}^{2l} \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p}$$

$$+ \left\| \max_{0 \leq l \leq m} \|\mathbb{E}(Z_{2l+1} | \mathcal{F}_{2l})\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p}, \quad (2.22)$$

and

$$\left\| \max_{0 \leq l \leq m} \|\mathbb{E}(Z_{2l+1} | \mathcal{F}_{2l})\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq (m+1)^{1/2p} \|\mathbb{E}(Z_1 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{2p}. \quad (2.23)$$

For the first term of (2.22), we proceed as in the proof of Peligrad, Utev and Wu [52], to get:

$$\begin{aligned} \left\| \max_{1 \leq l \leq m} \left\| \sum_{k=1}^{2l} \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_{k-1}) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} &\leq C_p^{1/2p} \sqrt{m} \{4 \|\mathbb{E}(Z_1 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &\quad + K \sqrt{2} (\Delta_q - \|\mathbb{E}(Z_1 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty})\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Consequently, combining (2.20)-(2.24), we obtain the bound (2.19). \square

The next proposition is the main tool allowing us to extend Proposition 2.6 to non-adapted stationary sequences of \mathbb{H} -valued random variables.

Proposition 2.7. *Let n, q be integers such that $n \geq 1$, $2^{q-1} \leq n < 2^q$. Assume that $\|\|Z_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} < \infty$, and $\mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_{-1}) = 0$. Then, for all real $p \geq 1$,*

$$\mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i Z_k \right\|_{\mathbb{H}}^{2p} \right)^{1/2p} \leq (2^{p+1} \Gamma(p+1))^{1/2p} \sqrt{n} \left\{ \|\|Z_0 | \mathcal{F}_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + \frac{2}{\sqrt{2}} \Delta'_q \right\} \quad (2.25)$$

where

$$\Delta'_q = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{1}{2^{j/2}} \|\|S_{2^j} - \mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_{2^j})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}.$$

Proof of Proposition 2.7. Here also, the proof is widely inspired by the proof of Theorem 1 in Peligrad, Utev and Wu [52] and we note always $C_p = 2^{p+1} \Gamma(p+1)$. We prove (2.25) by induction on n . For $n = 1$, $q = 1$, we clearly have

$$\|\|Z_1\|_{\mathbb{H}}\|_{2p} \leq \|\|Z_1 | \mathcal{F}_1\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + \Delta'_1.$$

Then, assume that the inequality holds for all $n < 2^{q-1}$. Fix n such that, $2^{q-1} \leq n < 2^q$. By triangle inequality, we obtain that

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i Z_k \right\|_{\mathbb{H}} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_k) \right\|_{\mathbb{H}} + \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i (Z_k - \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_k)) \right\|_{\mathbb{H}}. \quad (2.26)$$

Since $\mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_{-1}) = 0$, we can use the inequality (2.18) for martingale differences,

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_k) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq C_p^{1/2p} \sqrt{n} \|\mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} \|\infty. \quad (2.27)$$

Now, as in Peligrad, Utev and Wu [52], we write $n = 2m$ or $n = 2m + 1$, for the second term in the right-hand side in (2.26),

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i (Z_k - \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_k)) \right\|_{\mathbb{H}} &\leq \max_{1 \leq l \leq m} \left\| \sum_{k=1}^{2l} (Z_k - \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_k)) \right\|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \max_{0 \leq l \leq m} \|Z_{2l+1} - \mathbb{E}(Z_{2l+1} | \mathcal{F}_{2l+1})\|_{\mathbb{H}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

and

$$\max_{0 \leq l \leq m} \|Z_{2l+1} - \mathbb{E}(Z_{2l+1} | \mathcal{F}_{2l+1})\|_{\mathbb{H}}^{2p} \leq \sum_{l=0}^m \|Z_{2l+1} - \mathbb{E}(Z_{2l+1} | \mathcal{F}_{2l+1})\|_{\mathbb{H}}^{2p}. \quad (2.29)$$

For the first term in the right-hand side in (2.28), we apply the induction hypothesis to the stationary sequence, $Y_0 = Z_0 - \mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0) + Z_{-1} - \mathbb{E}(Z_{-1} | \mathcal{F}_{-1})$, for all j in \mathbb{Z} , $Y_j = Y_0 \circ \mathbb{T}^{2j}$, the σ -algebra $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_0$, and the operator \mathbb{T}^2 . Notice that the new filtration becomes $\{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{Z}\}$ where $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_{2i}$. Whence, we have

$$\left\| \max_{1 \leq l \leq m} \left\| \sum_{k=1}^{2l} (Z_k - \mathbb{E}(Z_k | \mathcal{F}_k)) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} = \left\| \max_{1 \leq l \leq m} \left\| \sum_{k=1}^l Y_0 \circ \mathbb{T}^{2k} \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p}.$$

Since $m < 2^{q-1}$ and $\mathbb{E}(Y_0 | \mathcal{G}_{-1}) = 0$, we obtain by the induction hypothesis,

$$\left\| \max_{1 \leq l \leq m} \left\| \sum_{k=1}^l Y_0 \circ \mathbb{T}^{2k} \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq C_p^{1/2p} \sqrt{m} (\|\mathbb{E}(Y_0 | \mathcal{G}_0)\|_{\mathbb{H}} \|\infty + \frac{2}{\sqrt{2}} \Delta'_{q-1}(Y)). \quad (2.30)$$

But, $\|\|\mathbb{E}(Y_0 | \mathcal{G}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \leq \|\|Z_0 - \mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}$ and rewriting,

$$\begin{aligned} \Delta'_{q-1}(Y) &= \sum_{j=0}^{q-2} \frac{1}{2^{j/2}} \|\|\sum_{k=1}^{2^j} Y_k - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{2^j} Y_k | \mathcal{G}_{2^j}\right)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &= \sum_{j=0}^{q-2} \frac{1}{2^{j/2}} \|\|S_{2^{j+1}} - \mathbb{E}(S_{2^{j+1}} | \mathcal{F}_{2^{j+1}})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &= \sqrt{2}(\Delta'_q - \|\|Z_0 - \mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

we derive that

$$\begin{aligned} \left\| \max_{1 \leq l \leq m} \left\| \sum_{k=1}^l Y_0 \circ \mathbb{T}^{2k} \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} &\leq C_p^{1/2p} \sqrt{m} (\|\|Z_0 - \mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + 2\Delta'_q \\ &\quad - 2\|\|Z_0 - \mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}). \end{aligned}$$

Consequently, we conclude that

$$\begin{aligned} \left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i Z_k \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} &\leq C_p^{1/2p} (\sqrt{n} \|\|\mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + \sqrt{2m} \frac{2}{\sqrt{2}} \Delta'_q) \\ &\leq C_p^{1/2p} \sqrt{n} (\|\|\mathbb{E}(Z_0 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + \frac{2}{\sqrt{2}} \Delta'_q). \end{aligned}$$

□

Now we give, the main proposition.

Proposition 2.8. *Assume that $\|\|X_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} < \infty$, then, for all $p \geq 1$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}}^{2p}\right) &\leq 2^{p+1} \Gamma(p+1) n^p \left(\|\|X_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + D \sum_{j=1}^n j^{-3/2} \|\|\mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \right. \\ &\quad \left. + D' \sum_{j=1}^n j^{-3/2} \|\|S_j - \mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_j)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \right)^{2p} \end{aligned} \quad (2.32)$$

where

$$7D = 40\sqrt{2} + 27 \quad \text{and} \quad 7D' = 24\sqrt{2} + 12.$$

Proof of Proposition 2.8. We set $K = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $K' = \frac{2}{\sqrt{2}}$ and $C_p = 2^{p+1} \Gamma(p+1)$.

Let n and q be integers such that $n \geq 1$ and $2^{q-1} \leq n < 2^q$. Let

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sum_{j=1}^n j^{-3/2} \|\|\mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}, & \delta'_n &= \sum_{j=1}^n j^{-3/2} \|\|S_j - \mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_j)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}, \\ \Delta_q &= \sum_{j=0}^{q-1} 2^{-j/2} \|\|\mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}, & \Delta'_q &= \sum_{j=0}^{q-1} 2^{-j/2} \|\|S_{2^j} - \mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_{2^j})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

We shall prove a slightly stronger inequality,

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq C_p^{1/2p} \sqrt{n} (\| \|X_1 - \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + K \Delta_q + K' \Delta'_q). \quad (2.33)$$

Note first that $V_n = \| \| \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}$ is a sub-additive sequence as proved by Peligrad and Utev [50] in Lemma 2.6 (replace the \mathbf{L}^2 -norm by the $\mathbf{L}_{\mathbb{H}}^{\infty}$ -norm). The sequence $(V_n)_{n \geq 0}$ verifies for all i, j in \mathbb{N}^* ,

$$V_{i+j} \leq V_i + V_j.$$

Whence, using Lemma 2.5 in Appendix with $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 1$, we get

$$\Delta_q \leq \left(\frac{4\sqrt{2}}{7} + \frac{16}{7} \right) \delta_n.$$

On an other hand, the sequence $V'_n = \| \| S_n - \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_n) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty}$ verifies for all i, j in \mathbb{N}^* ,

$$\begin{aligned} V'_{i+j} &\leq \| \| S_{i+j} - \mathbb{E}(S_{i+j} | \mathcal{F}_{i+j}) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} \\ &\leq \| \| S_i - \mathbb{E}(S_i | \mathcal{F}_i) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + \| \| S_{i+j} - S_i - \mathbb{E}(S_{i+j} - S_i | \mathcal{F}_{i+j}) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} \\ &\quad + \| \| \mathbb{E}(S_i | \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(S_i | \mathcal{F}_{i+j}) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} \\ &\leq \| \| S_i - \mathbb{E}(S_i | \mathcal{F}_i) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + \| \| S_j - \mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_j) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} \\ &\quad + \| \| \mathbb{E}(S_i - \mathbb{E}(S_i | \mathcal{F}_i) | \mathcal{F}_{i+j}) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} \\ &\leq 2V'_i + V'_j. \end{aligned}$$

Whence, using Lemma 2.5 in Appendix with $\tilde{C}_1 = 2$ and $\tilde{C}_2 = 1$, we have

$$\Delta'_q \leq \left(\frac{6\sqrt{2}}{7} + \frac{24}{7} \right) \delta'_n.$$

Setting $k_1 = \frac{4\sqrt{2}}{7} + \frac{16}{7}$ and $k_2 = \frac{6\sqrt{2}}{7} + \frac{24}{7}$, we get

$$\| \| X_1 - \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + K \Delta_q + K' \Delta'_q \leq \| \| X_1 \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + (K k_1 + 1) \delta_n + K' k_2 \delta'_n.$$

Since (2.33) implies (2.32), it remains to prove (2.33).

By triangle inequality, we obtain that

$$\begin{aligned} \left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i X_k \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} &\leq \left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i (X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_k)) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \\ &\quad + \left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_k) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Applying Proposition 2.6, we derive

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_k) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq C_p^{1/2p} \sqrt{n} (\| \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_1) - \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + K \Delta_q^*) \quad (2.35)$$

where

$$\Delta_q^* = \sum_{j=0}^{q-1} 2^{-j/2} \left\| \left\| \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{2^j} \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_k) \middle| \mathcal{F}_0 \right) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty} = \Delta_q.$$

On the other hand, Proposition 2.7 gives

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{k=1}^i (X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_k)) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{2p} \leq C_p^{1/2p} \sqrt{n} \{ \| \mathbb{E}(X_0 - \mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_0) | \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + K' \Delta_q'^* \} \quad (2.36)$$

where

$$\Delta_q'^* = \sum_{j=0}^{q-1} 2^{-j/2} \left\| \left\| \sum_{k=1}^{2^j} (\{X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_k)\} - \mathbb{E}(X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_k) | \mathcal{F}_{2^j})) \right\|_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty} = \Delta_q'.$$

Combining (2.35) and (2.36) in (2.34), (2.33) follows. \square

2.4.1.2 Proof of Theorem 2.2

Now, assume that p is an integer, and $p \geq 1$.

Let

$$B = \| \| X_0 \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + \left(D \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{3/2}} \| \| \mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_0) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} + D' \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{3/2}} \| \| S_j - \mathbb{E}(S_j | \mathcal{F}_j) \|_{\mathbb{H}} \|_{\infty} \right)$$

for some constants $D > 0$ and $D' > 0$ defined in Proposition 2.8. We can use the approach of the proof of Theorem 2.4 in Rio [57], because

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \| S_i \|_{\mathbb{H}}^{2p} \right) &\leq 2^{p+1} p! B^{2p} n^p \\ &\leq 2(2p-1)!! (2nB^2)^p. \end{aligned}$$

Consequently, if we use the notation of the proof of Theorem 2.4 in Rio [57], the constant A is here,

$$A = \frac{x^2}{4nB^2},$$

and with the estimation given in Rio [57] (page 42),

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|S_i\|_{\mathbb{H}} \geq x\right) \leq 2\sqrt{e} \exp(-A).$$

Taking $C = \max\{D, D'\}$, we obtain exactly Theorem 2.2. \square

2.4.2 MDP for martingale differences

Our main proposition is a generalization of a result of Theorem 3.1 in Puhalskii [56] to \mathbb{H} -valued random variables.

Proposition 2.9. *Let a_n be a sequence of positive numbers satisfying $a_n \rightarrow 0$ and $na_n \rightarrow +\infty$. Let k_n be an increasing sequence of integers going to infinity and $(d_{j,n})_{1 \leq j \leq k_n}$ be a triangular array of martingale differences, with values in \mathbb{H} , such that*

$$\forall 1 \leq j \leq k_n, \quad \|\|d_{j,n}\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \leq \beta_n \sqrt{na_n} \quad \text{with } \beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.37)$$

Assume that, there exists $Q \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$ such that:

i. for all k, l in \mathbb{N}^* and $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(\langle d_{j,n}, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle d_{j,n}, e_l \rangle_{\mathbb{H}} \mid \mathcal{F}_{j-1,n}) - \langle Qe_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}} \right| > \delta\right) = -\infty, \quad (2.38)$$

ii. for all $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|d_{j,n}\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}) - \text{Tr}(Q)\right| > \delta\right) = -\infty. \quad (2.39)$$

Then $\{W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[k_n t]} d_{j,n} + \frac{1}{\sqrt{n}}(k_n t - [k_n t])d_{[k_n t]+1,n} : t \in [0, 1]\}$ satisfies the MDP in $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$ with speed a_n and the good rate function,

$$I(\phi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\phi'(t)) dt & \text{if } \phi \in \mathcal{AC}_0([0, 1]) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.40)$$

where Λ^* is defined by

$$\Lambda^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{H}} \left(\langle y, x \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \langle y, Qy \rangle_{\mathbb{H}} \right). \quad (2.41)$$

Proof of Proposition 2.9. Firstly, we need some notations.

Notation 2.2. For all integer $m \geq 1$, let P^m be the projection on the first m components of the orthonormal basis, $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$, in \mathbb{H} then

$$d_{j,n}^m = P^m(d_{j,n}), \quad r_{j,n}^m = (I - P^m)d_{j,n}.$$

where I is the identity operator.

Let $(d_{j,n})_{1 \leq j \leq k_n}$ be a \mathbb{H} -valued triangular array of martingale differences. We start by proving that $(d_{j,n}^m)_{1 \leq j \leq k_n}$, which is a \mathbb{R}^m -valued triangular array of martingale differences, satisfies the conditions of Theorem 3.1 of Pulhalskii [56] (see also Djellout [31], Proposition 1).

The conditions (2.37) and (2.38) imply conditions *i*) and *ii*) of Proposition 1 in Djellout [31].

Consequently, $\{W_n^m(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[k_n t]} d_{j,n}^m + \frac{1}{\sqrt{n}}(k_n t - [k_n t])d_{[k_n t]+1,n}^m : t \in [0, 1]\}$ satisfies the MDP, with the good rate function, $I_m(\cdot)$,

$$I_m(\phi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda_m^*(\phi'(t)) dt & \text{if } \phi \in \mathcal{AC}_0([0, 1]) \\ \infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where Λ_m^* is:

$$\forall x \in \mathbb{H}, \quad \Lambda_m^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{H}} \left(\langle P^m y, P^m x \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \langle P^m y, QP^m y \rangle_{\mathbb{H}} \right).$$

By using Theorem 4.2.13 in Dembo and Zeitouni [29], it remains to prove, that for any $\eta > 0$,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq k_n} \sqrt{\frac{a_n}{n}} \left\| \sum_{k=1}^j r_{k,n}^m \right\|_{\mathbb{H}} > \eta \right) = -\infty.$$

Notice that, for all $\eta > 0$,

$$a_n \log \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq k_n} \sqrt{\frac{a_n}{n}} \left\| \sum_{k=1}^j r_{k,n}^m \right\|_{\mathbb{H}} > \eta \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq a_n \log \left(\mathbb{P} \left(\left\{ \max_{1 \leq j \leq k_n} \sqrt{\frac{a_n}{n}} \left\| \sum_{k=1}^j r_{k,n}^m \right\|_{\mathbb{H}} > \eta \right\} \cap \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|r_{k,n}^m\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,n}) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} \right| \leq \varepsilon \right\} \right) + \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|r_{k,n}^m\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,n}) - \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} \right| > \varepsilon \right) \right), \end{aligned}$$

where $\varepsilon > 0$.

With the notations

$$\begin{aligned} A(n, m, \eta, \varepsilon) &:= \mathbb{P} \left(\left\{ \max_{1 \leq j \leq k_n} \sqrt{\frac{a_n}{n}} \left\| \sum_{k=1}^j r_{k,n}^m \right\|_{\mathbb{H}} > \eta \right\} \right. \\ &\quad \left. \cap \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|r_{k,n}^m\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{k-1,n}) - \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} \right| \leq \varepsilon \right\} \right), \end{aligned}$$

and

$$B(n, m, \varepsilon) := \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|r_{j,n}^m\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}) - \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} \right| > \varepsilon \right),$$

we derive

$$a_n \log \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq k_n} \sqrt{\frac{a_n}{n}} \left\| \sum_{k=1}^j r_{k,n}^m \right\|_{\mathbb{H}} > \eta \right) \leq a_n \log \{ A(n, m, \eta, \varepsilon) + B(n, m, \varepsilon) \}.$$

Now notice

$$\begin{aligned} &a_n \log(B(n, m, \varepsilon)) \\ &\leq a_n \log \left\{ \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|d_{j,n}\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}) - \text{Tr}(Q) \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|d_{j,n}^m\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}) - \sum_{p=1}^m \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Using (2.38) and (2.39), it follows

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log(B(n, m, \varepsilon)) = -\infty.$$

With the notations

$$C(n, m, \eta) := \left\{ \max_{1 \leq j \leq k_n} \sqrt{\frac{a_n}{n}} \left\| \sum_{k=1}^j r_{k,n}^m \right\|_{\mathbb{H}} > \eta \right\},$$

and

$$D(n, m, \varepsilon) := \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}(\|r_{j,n}^m\|_{\mathbb{H}}^2 \mid \mathcal{F}_{j-1,n}) - \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} \right| \leq \varepsilon \right\},$$

applying Theorem 5.1 (inequality (5.2)), in Kallenberg and Sztencel [44] or Theorem 3.4 in Pinelis [53] to the martingale difference,

$$U_i = r_{i,n}^m \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^i \mathbb{E}(\|r_{j,n}^m\|_{\mathbb{H}} \mid \mathcal{F}_{j-1,n}) \leq n(\varepsilon + \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}})\}},$$

we obtain that

$$\begin{aligned} & a_n \log \mathbb{P}(C(n, m, \eta) \cap D(n, m, \varepsilon)) \\ & \leq a_n \log(2) + a_n \log \left(\exp \left(- \frac{\eta^2 n}{2a_n(n\varepsilon + n \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}}) + \frac{2}{3} a_n \beta_n \sqrt{n a_n} \sqrt{n} \frac{\eta}{\sqrt{a_n}}} \right) \right) \\ & \leq a_n \log(2) - \frac{\eta^2}{2\varepsilon + 2 \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} + \frac{2}{3} \beta_n \eta}. \end{aligned}$$

Since Q has a finite trace, it follows

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\eta^2}{2\varepsilon + 2 \sum_{p=m+1}^{\infty} \langle Q e_p, e_p \rangle_{\mathbb{H}} + \frac{2}{3} \beta_n \eta} = -\infty.$$

Consequently, we conclude by Theorem 4.2.13, in Dembo and Zeitouni [29] that $\{n^{-1/2} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} d_{j,n} + \frac{1}{\sqrt{n}}(k_n t - \lfloor k_n t \rfloor) d_{\lfloor k_n t \rfloor + 1, n} : t \in [0, 1]\}$ satisfies the MDP in $C_{\mathbb{H}}([0, 1])$. The rate function is the same that the i.i.d. Gaussian random variable with mean 0 and covariance Q , therefore equal to

$$\forall x \in \mathbb{H}, \Lambda^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{H}} \left(\langle y, x \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \langle y, Qy \rangle_{\mathbb{H}} \right).$$

□

2.4.3 MDP for stationary sequences

2.4.3.1 Proof of Theorem 2.3

The proof of Theorem 2.3 uses the same arguments as in the proof of Theorem 1 in Dedecker, Merlevède, Peligrad and Utev [25], but for a \mathbb{H} -valued non-adapted sequences.

Let $m_n = o(\sqrt{na_n})$, and $k_n = [n/m_n]$ (where, as before, $[x]$ denotes the integer part of x).

We divide the variables in blocks of size m_n and make the sums in each block,

$$X_{i,m_n} = \sum_{j=(i-1)m_n+1}^{im_n} X_j, \quad i \geq 1.$$

Then, we construct the martingales,

$$\begin{aligned} M_{k_n}^{(m_n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} (\mathbb{E}(X_{i,m_n} | \mathcal{F}_{im_n}) - \mathbb{E}(X_{i,m_n} | \mathcal{F}_{(i-1)m_n})) \\ &:= \sum_{i=1}^{k_n} D_{i,m_n}, \end{aligned}$$

and we define the process $\{M_{k_n}^{(m_n)}(t) : t \in [0, 1]\}$ by

$$M_{k_n}^{(m_n)}(t) := M_{[k_n t]}^{(m_n)} + \frac{1}{\sqrt{n}}(k_n t - [k_n t])D_{[k_n t]+1,m_n}.$$

Now, we shall use Proposition 2.9, applied with $d_{j,n} = D_{j,m_n}$, and verify the conditions (2.38) and (2.39).

We start by proving (2.38). By stationarity, it is enough to prove that, for all $k, l \geq 1$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{m_n} \mathbb{E}(\langle D_{1,m_n}, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle D_{1,m_n}, e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \langle Qe_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty} = 0. \quad (2.42)$$

But, we notice

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\langle D_{1,m_n}, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle D_{1,m_n}, e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) \\ &= \mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(X_{1,m_n} | \mathcal{F}_{m_n}), e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle \mathbb{E}(X_{1,m_n} | \mathcal{F}_{m_n}), e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) \\ &\quad - \langle \mathbb{E}(X_{1,m_n} | \mathcal{F}_0), e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle \mathbb{E}(X_{1,m_n} | \mathcal{F}_0), e_l \rangle_{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

thus

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{E}(\langle D_{1,m_n}, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle D_{1,m_n}, e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \langle Qe_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &\leq \|\mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_{m_n}), e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_{m_n}), e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \langle Qe_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &\quad + \|\langle \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_0), e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_0), e_l \rangle_{\mathbb{H}}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

By triangle inequality and Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\left\| \frac{1}{m_n} \mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_{m_n}), e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_{m_n}), e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \langle Qe_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{m_n} \left\| \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_{m_n}) - S_{m_n} \right\|_{\mathbb{H}}^2 \\
 &\quad + \frac{2}{m_n} \left\| \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_{m_n}) - S_{m_n} \right\|_{\mathbb{H}} \left\| \sqrt{\mathbb{E}(\|S_{m_n}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)} \right\|_{\infty} \\
 &\quad + \left\| \frac{1}{m_n} \mathbb{E}(\langle S_{m_n}, e_k \rangle_{\mathbb{H}} \langle S_{m_n}, e_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \langle Q e_k, e_l \rangle_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

By using Lemma 2.5 in Appendix, and the hypothesis (2.4), we deduce (2.42).

Now, to prove (2.39), by stationarity, we have to verify

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{m_n} \mathbb{E}(\|D_{1,m_n}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \text{Tr}(Q) \right\|_{\infty} = 0. \quad (2.43)$$

Notice that

$$\mathbb{E}(\|D_{1,m_n}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}(\|S_{m_n}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \|\mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}^2,$$

thus

$$\left\| \frac{1}{m_n} \mathbb{E}(\|D_{1,m_n}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \text{Tr}(Q) \right\|_{\infty} \leq \left\| \frac{1}{m_n} \mathbb{E}(\|S_{m_n}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \text{Tr}(Q) \right\|_{\infty} + \frac{1}{m_n} \left\| \mathbb{E}(S_{m_n} | \mathcal{F}_0) \right\|_{\mathbb{H}}^2.$$

By using Lemma 2.5 in Appendix, and the hypothesis (2.5), we deduce (2.43).

To finish the proof, it remains to prove, that for all $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{a_n}{n}} \sup_{t \in [0,1]} \|S_{[nt]} - M_{[k_n t]}^{(m_n)}\|_{\mathbb{H}} \geq \delta \right) = -\infty \quad (2.44)$$

and

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \log \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{a_n}{n}} \sup_{t \in [0,1]} \|(k_n t - [k_n t])D_{[k_n t]+1, m_n} - (nt - [nt])X_{[nt]+1}\|_{\mathbb{H}} \geq \delta \right) = -\infty. \quad (2.45)$$

(2.45) holds since $m_n = o(\sqrt{a_n n})$ and the random variables are bounded. We turn now to the proof of (2.44). Notice that

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [0,1]} \|S_{[nt]} - M_{[k_n t]}^{(m_n)}\|_{\mathbb{H}} &\leq \sup_{t \in [0,1]} \left\| \sum_{i=[k_n t]m_n+1}^{[nt]} X_i \right\|_{\mathbb{H}} \\
 &\quad + \sup_{t \in [0,1]} \left\| \sum_{i=1}^{[k_n t]} (X_{i, m_n} - \mathbb{E}(X_{i, m_n} | \mathcal{F}_{i m_n})) \right\|_{\mathbb{H}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sup_{t \in [0,1]} \left\| \sum_{i=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \mathbb{E}(X_{i,m_n} \mid \mathcal{F}_{(i-1)m_n}) \right\|_{\mathbb{H}} \\
 \leq & o(\sqrt{na_n}) + \max_{1 \leq j \leq k_n} \left\| \sum_{i=1}^j (X_{i,m_n} - \mathbb{E}(X_{i,m_n} \mid \mathcal{F}_{im_n})) \right\|_{\mathbb{H}} \\
 & + \max_{1 \leq j \leq k_n} \left\| \sum_{i=1}^j \mathbb{E}(X_{i,m_n} \mid \mathcal{F}_{(i-1)m_n}) \right\|_{\mathbb{H}}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

For the last term of the right-hand side in (2.46), we use the same arguments as in the proof of Theorem 1 in Dedecker, Merlevède, Peligrad and Utev [25], so we give only the proof of the non-adapted term, i.e. the second term of the right-hand side of Inequality (2.46).

We apply Theorem 2.2 to the stationary sequence, $Y_{0,m_n} = X_{0,m_n} - \mathbb{E}(X_{0,m_n} \mid \mathcal{F}_0)$, and $Y_{i,m_n} = Y_{0,m_n} \circ \mathbb{T}^{im_n}$. Notice that the new filtration becomes $\{\mathcal{G}_i, i \in \mathbb{Z}\}$ where $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_0$, and $\mathcal{G}_i = \mathbb{T}^{-(im_n)}(\mathcal{G}_0)$.

Consequently, we have

$$\begin{aligned}
 & a_n \log \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{a_n}{n}} \max_{1 \leq j \leq k_n} \left\| \sum_{i=1}^j (X_{i,m_n} - \mathbb{E}(X_{i,m_n} \mid \mathcal{F}_{im_n})) \right\|_{\mathbb{H}} \geq \delta \right) \\
 & = a_n \log \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{a_n}{n}} \max_{1 \leq j \leq k_n} \left\| \sum_{i=1}^j Y_{i,m_n} \right\|_{\mathbb{H}} \geq \delta \right) \\
 & \leq a_n \log(2\sqrt{e}) - \frac{\delta^2}{4 \frac{1}{m_n} E(n, \delta)^2},
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

where

$$E(n, \delta) := \left\| \|S_{m_n} - \mathbb{E}(S_{m_n} \mid \mathcal{F}_{m_n})\|_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty} + C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{3/2}} \left\| \|S_{jm_n} - \mathbb{E}(S_{jm_n} \mid \mathcal{F}_{jm_n})\|_{\mathbb{H}} \right\|_{\infty},$$

with C is the positive constant defined in Theorem 2.2.

We conclude by using Lemma 2.5 in Appendix, and the inequality (2.47) converges to 0, when $n \rightarrow \infty$. \square

2.4.4 Proof of Corollary 2.2

The proof of Corollary 2.2 uses the same arguments as in the proof of

Corollary 2 in Dedecker, Merlevède, Peligrad and Utev [25] but for a non-adapted stationary \mathbb{H} -valued sequence.

By triangle inequality and changing the order of summation, (2.8) implies (2.3).

2.4.4.1 A technical lemma

Lemma 2.2. *Assume that $\|X_0\|_{\mathbb{H}} < \infty$. Let n be a diadic integer, $n = 2^q$. Then*

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(\|S_n\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} &\leq n(\|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \frac{1}{2}\Delta_q + \frac{1}{2}\Delta'_q)^2 \quad (2.48) \\ &\leq n\Delta_{\infty}^2 \end{aligned}$$

where Δ_q, Δ'_q are, respectively, defined as in Proposition 2.6 and in Proposition 2.7 and

$$\Delta_{\infty} = \|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \frac{1}{2}\Delta_q + \frac{1}{2}\Delta'_q.$$

Proof of Lemma 2.2. As in the proof of Proposition 2.1 in Peligrad and Utev [50], we prove Lemma 2.2 by induction on q .

Obviously, (2.48) is true for $q = 0$. Assume now, that (2.48) holds for all diadic integers $n \leq 2^{q-1}$.

Writing $S_{2^q} = S_{2^{q-1}} + S_{2^q} - S_{2^{q-1}}$, notice that

$$\|S_{2^q}\|_{\mathbb{H}}^2 = \|S_{2^{q-1}}\|_{\mathbb{H}}^2 + \|S_{2^q} - S_{2^{q-1}}\|_{\mathbb{H}}^2 + 2 \langle S_{2^{q-1}}, S_{2^q} - S_{2^{q-1}} \rangle_{\mathbb{H}}.$$

By stationarity, we have

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{E}(\|S_{2^q}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\ &\leq 2\|\mathbb{E}(\|S_{2^{q-1}}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + 2\|\mathbb{E}(\langle S_{2^{q-1}} - \mathbb{E}(S_{2^{q-1}} | \mathcal{F}_{2^{q-1}}), S_{2^q} - S_{2^{q-1}} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\ &\quad + 2\|\mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(S_{2^{q-1}} | \mathcal{F}_{2^{q-1}}), S_{2^q} - S_{2^{q-1}} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}. \quad (2.49) \end{aligned}$$

The last term in (2.49) can be treated as in the proof of the corresponding facts in Proposition 2.1 of Peligrad and Utev [50], if we replace everywhere the product in \mathbb{R} by $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$, and the \mathbf{L}^2 -norm $\|x\|_2$ by the infinite norm. Consequently, we derive

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(S_{2^{q-1}} | \mathcal{F}_{2^{q-1}}), S_{2^q} - S_{2^{q-1}} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\ &\leq \sqrt{\|\mathbb{E}(\|S_{2^{q-1}}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}} 2^{(q-1)/2}(\Delta_q - \Delta_{q-1}). \quad (2.50) \end{aligned}$$

In the same way, since $\|S_{2^{q-1}} - \mathbb{E}(S_{2^{q-1}} | \mathcal{F}_{2^{q-1}})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} = 2^{(q-1)/2}(\Delta'_q - \Delta'_{q-1})$, we have

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{E}(\langle S_{2^{q-1}} - \mathbb{E}(S_{2^{q-1}} | \mathcal{F}_{2^{q-1}}), S_{2^q} - S_{2^{q-1}} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\
& \leq \sqrt{\|\mathbb{E}(\|S_{2^{q-1}} - \mathbb{E}(S_{2^{q-1}} | \mathcal{F}_{2^{q-1}})\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}} \sqrt{\|\mathbb{E}(\|S_{2^q} - S_{2^{q-1}}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}} \\
& \leq \|S_{2^{q-1}} - \mathbb{E}(S_{2^{q-1}} | \mathcal{F}_{2^{q-1}})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \sqrt{\|\mathbb{E}(\|S_{2^{q-1}}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}} \\
& \leq \sqrt{\|\mathbb{E}(\|S_{2^{q-1}}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}} 2^{(q-1)/2}(\Delta'_q - \Delta'_{q-1}). \tag{2.51}
\end{aligned}$$

By induction and combining (2.50) and (2.51), we conclude that

$$\begin{aligned}
& \|\mathbb{E}(\|S_{2^q}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\
& \leq 2 \times 2^{q-1}(\|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \frac{1}{2}\Delta_{q-1} + \frac{1}{2}\Delta'_{q-1})^2 \\
& \quad + 2 \times 2^{(q-1)/2}(\|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \frac{1}{2}\Delta_{q-1} + \frac{1}{2}\Delta'_{q-1}) \times 2^{(q-1)/2}(\Delta_q - \Delta_{q-1}) \\
& \quad + 2 \times 2^{(q-1)/2}(\|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \frac{1}{2}\Delta_{q-1} + \frac{1}{2}\Delta'_{q-1}) \times 2^{(q-1)/2}(\Delta'_q - \Delta'_{q-1}) \\
& \leq 2^q(\|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \frac{1}{2}\Delta_q + \frac{1}{2}\Delta'_q)^2 \\
& \leq n(\|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \frac{1}{2}\Delta_q + \frac{1}{2}\Delta'_q)^2.
\end{aligned}$$

□

2.4.4.2 Proof of Corollary 2.2

The proof splits in two parts, and uses the same arguments as in the proof of Lemma 28 in Dedecker, Merlevède, Peligrad and Utev [25].

Lemma 2.3. *Assume that $\|X_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} < \infty$.*

i. Under (2.3) and (2.9), (2.4) holds.

ii. Under (2.3) and (2.10), (2.5) holds.

Proof of Lemma 2.3. The proofs of (i) and (ii) are quite similarly, so here we prove only (ii).

Firstly, as in the proof of Lemma 28 in Dedecker, Merlevède, Peligrad

and Utev [25], we prove by diadic recurrence (2.5). Let $S_{a,b} = S_b - S_a$. Denote, for any t integer,

$$A_{t,k} = \|\mathbb{E}(\|S_t\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_{-k}) - \mathbb{E}(\|S_t\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty}.$$

By stationarity, we have

$$\begin{aligned} A_{2t,k} &= \|\mathbb{E}(\|S_{2t}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_{-k}) - \mathbb{E}(\|S_{2t}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} \\ &\leq 2\|\mathbb{E}(\|S_t\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_{-k}) - \mathbb{E}(\|S_t\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} \\ &\quad + 2\|\mathbb{E}(\langle S_t, S_{t,2t} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-k})\|_{\infty} + 2\|\mathbb{E}(\langle S_t, S_{t,2t} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Moreover by Cauchy-Schwarz inequality and Lemma 2.2, we get that

$$\begin{aligned} A_{2t,k} &\leq 2A_{t,k} + 4\sqrt{\|\mathbb{E}(\|S_t\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}} \|\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &\quad + 4\|S_t - \mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_t)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \sqrt{\|\mathbb{E}(\|S_t\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}} \\ &\leq 2A_{t,k} + 4t^{1/2} \Delta_{\infty} \{ \|\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + \|S_t - \mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_t)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \}. \end{aligned}$$

With the notation

$$B_{r,k} = 2^{-r} \|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_{-k}) - \mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} = 2^{-r} A_{2^r,k},$$

by recurrence, for all $r \geq m$ and all $k > 0$, we derive

$$\begin{aligned} B_{r,k} &\leq B_{r-1,k} + 2^{-\frac{r+3}{2}} \Delta_{\infty} \{ \|\|S_{2^{r-1}} - \mathbb{E}(S_{2^{r-1}} | \mathcal{F}_{2^{r-1}})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + \|\mathbb{E}(S_{2^{r-1}} | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \} \\ &\leq B_{m,k} + 2\Delta_{\infty} \left\{ \sum_{j=m}^r 2^{-j/2} \|\|S_{2^j} - \mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_{2^j})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} + \sum_{j=m}^r 2^{-j/2} \|\mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \right\} \\ &\leq B_{m,k} + 2\Delta_{\infty} \{ \Delta_{m,\infty} + \Delta'_{m,\infty} \}, \end{aligned}$$

where

$$\Delta_{m,\infty} = \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j/2} \|\mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \text{ and } \Delta'_{m,\infty} = \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j/2} \|\|S_{2^j} - \mathbb{E}(S_{2^j} | \mathcal{F}_{2^j})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}.$$

By stationarity and triangle inequality,

$$\begin{aligned} &\|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} \\ &\leq \|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 - \|S_{k,k+2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} + \|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_{-k}) - \mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty}, \end{aligned}$$

we have, for all integer $r \geq m + 1$,

$$\begin{aligned} & 2^{-r} \|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} \\ & \leq B_{m,k} + 2\Delta_{\infty}(\Delta_{m,\infty} + \Delta'_{m,\infty}) + 2^{-r/2+2}k\|\mathbb{E}(\|X_1\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}^{1/2}\Delta_{\infty}. \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow \infty} 2^{-r} \|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} \\ & \leq B_{m,k} + 2\Delta_{\infty}(\Delta_{m,\infty} + \Delta'_{m,\infty}). \end{aligned}$$

Letting $k \rightarrow \infty$, and using condition (2.10), it follows that $\lim_{k \rightarrow \infty} B_{m,k} = 0$. Next letting $m \rightarrow \infty$, and using condition (2.3), we then derive that

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2^{-r} \|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} = 0. \quad (2.52)$$

To finish the proof, we use the diadic expansion $n = \sum_{k=0}^{r-1} 2^k a_k$, where $a_{r-1} = 1$ and $a_k \in \{0, 1\}$, as the proof of Proposition 2.1 in Peligrad and Utev [50] in order to treat the whole sequence S_n , for $2^{r-1} \leq n < 2^r$. We then use the following representation,

$$S_n = \sum_{j=0}^{r-1} T_{2^j} a_j \text{ where } T_{2^j} = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} X_i, \quad n_j = \sum_{k=0}^j 2^k a_k, \quad n_{-1} = 0.$$

Notice that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \|\mathbb{E}(\|S_n\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\|S_n\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{r-1} a_j \|\mathbb{E}(\|S_{2^j}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\|S_{2^j}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j=0}^{r-1} a_i a_j \|\mathbb{E}(\langle T_{2^i}, T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle T_{2^i}, T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty}. \quad (2.53) \end{aligned}$$

For the first term of the right-hand side in (2.53), we treat it as a diadic integer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{r-1} a_j \|\mathbb{E}(\|S_{2^j}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\|S_{2^j}\|_{\mathbb{H}}^2)\|_{\infty} = 0.$$

Suppose that $i < j < r$, we then have

$$\|\mathbb{E}(\langle T_{2^j}, T_{2^i} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle T_{2^j}, T_{2^i} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\mathbb{E}(\langle T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ &\quad + \|\mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

For the first term in the right-hand side in (2.54), we have by Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{r-2} \sum_{j=i+1}^{r-1} \|\mathbb{E}(\langle T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\ &\leq \sum_{i=0}^{r-2} \sum_{j=i+1}^{r-1} \|\|T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \|\mathbb{E}(\|T_{2^j}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}^{1/2}. \end{aligned}$$

By (2.52),

$$\|\mathbb{E}(\|S_{2^r}\|_{\mathbb{H}}^2 | \mathcal{F}_0)\|_{\infty}^{1/2} = O(2^{r/2}).$$

Hence, we get

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{r-2} \sum_{j=i+1}^{r-1} \|\mathbb{E}(\langle T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\ &\leq C_1 \sum_{i=0}^{r-2} \|\|T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \sum_{j=i+1}^{r-1} 2^{j/2} \\ &\leq C_2 \sum_{i=0}^{r-2} \|\|T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} 2^{r/2}, \end{aligned}$$

where C_1 and C_2 are positive constants.

Therefore, for all $2^{r-1} \leq n < 2^r$, we obtain

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{r-2} \sum_{j=i+1}^{r-1} \|\mathbb{E}(\langle T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} \\ &\leq C_2 2^{-r/2+1} \sum_{i=0}^{r-2} 2^{i/2} \frac{\|\|S_{2^i} - \mathbb{E}(S_{2^i} | \mathcal{F}_{2^i})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}}{2^{i/2}}. \end{aligned}$$

As

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|\|S_{2^i} - \mathbb{E}(S_{2^i} | \mathcal{F}_{2^i})\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}}{2^{i/2}} < \infty,$$

we conclude by Kronecker lemma that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{r-2} \sum_{j=i+1}^{r-1} \|\mathbb{E}(\langle T_{2^i} - \mathbb{E}(T_{2^i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2^j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0)\|_{\infty} = 0. \quad (2.55)$$

For the second term of the right-hand side in (2.54), we use the same arguments as in the proof of Proposition 2.1 in Peligrad and Utev [50] by replacing the product in \mathbb{R} , by $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ and the \mathbf{L}^2 -norm by the infinite norm. Consequently, we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i < j \leq r-1} \|\mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(T_{2i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(T_{2i} | \mathcal{F}_{n_i}), T_{2j} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} = 0. \quad (2.56)$$

Combining (2.55) and (2.56), we conclude

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i \neq j=0}^{r-1} a_i a_j \|\mathbb{E}(\langle T_{2i}, T_{2j} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle T_{2i}, T_{2j} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} = 0.$$

This proves (2.5). \square

2.4.5 Proof of Proposition 2.3

Let ε' be an independent copy of ε , and denote by $\mathbb{E}_{\varepsilon}(\cdot)$ the conditional expectation with respect to ε . Define

$$Y_n = \sum_{i < n} a_i(\varepsilon_{n-i}), Y'_n = \sum_{i < n} a_i(\varepsilon'_{n-i}), Z_n = \sum_{i \geq n} a_i(\varepsilon_{n-i}), Z'_n = \sum_{i \geq n} a_i(\varepsilon'_{n-i}).$$

Then, taking $\mathcal{F}_l = \sigma(\varepsilon_i, i \leq l)$, we have

$$\begin{aligned} \|\|\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} &= \|\|\mathbb{E}_{\varepsilon}[f(Y'_n + Z_n) - f(Y'_n + Z'_n)]\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &\leq w_f(\|\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \sum_{k \geq n} \|a_k\|_{L(\mathbb{H})}) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|\|X_{-n} - \mathbb{E}(X_{-n} | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} &= \|\|\mathbb{E}_{\varepsilon}(f(Y_{-n} + Z_{-n}) - f(Z_{-n} + Y'_{-n}))\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \\ &\leq w_f(\|\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \sum_{k \leq -n} \|a_k\|_{L(\mathbb{H})}). \end{aligned}$$

Then the condition (2.8) is satisfied as soon as (2.13) holds.

As the proof of (2.9) is quite similar of the proof of (2.10), we only prove (2.10).

We have for all integer $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(\langle X_i, X_{i+p} \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle X_i, X_{i+p} \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ \leq C \left\{ w_f \left(\|\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \sum_{k \geq i} \|a_k\|_{L(\mathbb{H})} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$+w_f\left(\|\|\varepsilon_0 - \varepsilon'_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \sum_{k \geq i+p} \|a_k\|_{L(\mathbb{H})}\right)\}, \quad (2.57)$$

where C is a constant.

By (2.13) and Corollary 2.2, Proposition 2.3 holds. \square

2.4.6 Proof of Proposition 2.4

Firstly, we give a technical lemma,

Lemma 2.4. *If $\text{Lip}(K^n(f)) \leq C\rho^n \text{Lip}(f)$, then*

$$\|\|\mathbb{E}(f(Y_k) | Y_0) - \mathbb{E}(f(Y_k))\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \leq 2\|\|Y_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} C\rho^k \text{Lip}(f). \quad (2.58)$$

Proof of Lemma 2.4. As

$$\mathbb{E}(f(Y_k) | Y_0 = y) - \mathbb{E}(f(Y_k)) = \int (K^k(f)(y) - K^k(f)(z))\mu(dz),$$

we deduce

$$\begin{aligned} \|\|\mathbb{E}(f(Y_k) | Y_0 = y) - \mathbb{E}(f(Y_k))\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} &\leq \left\| \int \|K^k(f)(y) - K^k(f)(z)\|_{\mathbb{H}}\mu(dz) \right\|_{\infty} \\ &\leq \text{Lip}(K^k(f)) \left\| \int \|y - z\|_{\mathbb{H}}\mu(dz) \right\|_{\infty} \\ &\leq C\rho^k \text{Lip}(f) \left\| \int \|y - z\|_{\mathbb{H}}\mu(dz) \right\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Observe that

$$\left\| \int \|y - z\|_{\mathbb{H}}\mu(dz) \right\|_{\infty} \leq \left\| \int (\|y\|_{\mathbb{H}} + \|z\|_{\mathbb{H}})\mu(dz) \right\|_{\infty} \leq 2\|\|Y_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty}. \quad (2.60)$$

Consequently, combining (2.59) and (2.60), we have

$$\|\|\mathbb{E}(f(Y_k) | Y_0 = y) - \mathbb{E}(f(Y_k))\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} \leq 2\|\|Y_0\|_{\mathbb{H}}\|_{\infty} C\rho^k \text{Lip}(f).$$

\square

Proof of Proposition 2.4. We apply Corollary 2.2 to the following random variables,

$$X_k = f(Y_k) - \mathbb{E}(f(Y_k)), \quad \forall k \geq 0.$$

Since $(Y_n)_{n \geq 0}$ is a Markov chain, we have to prove that

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \|\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} < \infty.$$

By Lemma 2.4, we derive

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \|\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_0)\|_{\mathbb{H}} \leq 2 \|Y_0\|_{\mathbb{H}} C \text{Lip}(f) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \rho^k < \infty.$$

The proof of (2.9) is quite similar of the proof of (2.10), so we only detail (2.10). If $k > l$, by triangle inequality

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{E}(\langle X_k, X_l \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle X_k, X_l \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ & \leq \|\mathbb{E}(\langle f(Y_k), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle f(Y_k), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ & \quad + \|\mathbb{E}(\langle f(Y_k), \mathbb{E}(f(Y_l)) \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle f(Y_k), \mathbb{E}(f(Y_l)) \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ & \quad + \|\mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(f(Y_k)), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(f(Y_k)), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Using Lemma 2.4, we get

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{E}(\langle f(Y_k), \mathbb{E}(f(Y_l)) \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle f(Y_k), \mathbb{E}(f(Y_l)) \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ & \leq \|\mathbb{E}(f(Y_l))\|_{\mathbb{H}} \|\mathbb{E}(f(Y_k) | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(f(Y_k))\|_{\infty} \\ & \leq 2C \|\mathbb{E}(f(Y_0))\|_{\mathbb{H}} \|Y_0\|_{\mathbb{H}} \text{Lip}(f) \rho^{k+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

and for $k > l$,

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{E}(\langle f(Y_k), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle f(Y_k), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ & = \|\mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(f(Y_k) | \mathcal{F}_l), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle \mathbb{E}(f(Y_k) | \mathcal{F}_l), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ & = \|\mathbb{E}(\langle K^{k-l}(f)(Y_l), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}} | \mathcal{F}_{-n}) - \mathbb{E}(\langle K^{k-l}(f)(Y_l), f(Y_l) \rangle_{\mathbb{H}})\|_{\infty} \\ & = \|K^{l+n}(\langle K^{k-l}(f)(\cdot), f(\cdot) \rangle_{\mathbb{H}})(Y_{-n}) - \mu(K^{l+n}(\langle K^{k-l}(f)(\cdot), f(\cdot) \rangle_{\mathbb{H}})(Y_{-n}))\|_{\infty} \\ & \leq 2C \|Y_0\|_{\mathbb{H}} \text{Lip}(\langle K^{k-l}(f)(\cdot), f(\cdot) \rangle_{\mathbb{H}}) \rho^{l+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Hence (2.10) holds. \square

2.4.7 Proof of Proposition 2.5

We apply Corollary 2.2 to the random variables $X_i = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Since

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\phi}_2(n) < \infty \implies \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\phi}_1(n) < \infty,$$

the condition (2.8) holds.

As the proofs of (2.9) and (2.10) are quite similar, we only detail the proof of (2.10).

By Fubini, we have, for any $i < j$,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathbb{E}(\langle X_i, X_j \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} \mid \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\langle X_i, X_j \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)}) \right\|_{\infty} \\
 &= \left\| \mathbb{E} \left(\int (\mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t)) (\mathbf{1}_{Y_j \leq t} - F_Y(t)) \mu(dt) \mid \mathcal{F}_0 \right) \right. \\
 & \quad \left. - \mathbb{E} \left(\int (\mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t)) (\mathbf{1}_{Y_j \leq t} - F_Y(t)) \mu(dt) \right) \right\|_{\infty} \\
 & \leq \int \left\| \mathbb{E}((\mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t)) (\mathbf{1}_{Y_j \leq t} - F_Y(t)) \mid \mathcal{F}_0) \right. \\
 & \quad \left. - \mathbb{E}((\mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t)) (\mathbf{1}_{Y_j \leq t} - F_Y(t))) \right\|_{\infty} \mu(dt) \\
 & \leq \|b(\mathcal{F}_0, Y_i, Y_j)\|_{\infty} \leq \tilde{\phi}_2(i).
 \end{aligned}$$

Since $\sum_{n \geq 1} n^{-1/2} \tilde{\phi}_2(i) < \infty$, $\tilde{\phi}_2(i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, all the conditions of Corollary 2.2 are true.

From Dedecker and Merlevède [23], the $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ -valued random variable $\sqrt{n}(F_n - F_Y)$ converges stably to a zero mean $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ -valued Gaussian random variable \mathbb{G} , with covariance function Q , given in Proposition 2.5.

We deduce that $\sqrt{n}(F_n - F_Y)$ satisfies the MDP in $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$, with the good rate function

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu), \quad I(f) = \sup_{g \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} (\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)} - \frac{1}{2} \langle g, Qg \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}, \mu)}).$$

□

2.5 Appendix

Lemma 2.5. *Let $(U_j)_{j \geq 0}$ be a sequence of positive reals such that $U_0 = 0$ and $U_{i+j} \leq \tilde{C}_1 U_i + \tilde{C}_2 U_j$. Let $C = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$. Then,*

1. *For n , and r integers such that $n \geq 1$, $2^{r-1} \leq n < 2^r$, and $p \geq 1$,*

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{2^{j(p-1)}} U_{2^j} \leq \frac{C}{(1-2^{-p})} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} U_k. \quad (2.61)$$

2. If $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}U_k < \infty$ for a $p > 1$, then

$$\frac{1}{m^{p-1}} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^p} U_{jm} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (2.62)$$

In particular,

$$\frac{U_m}{m^{p-1}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Proof of Lemma 2.5. Firstly, we prove (2.61). With this aim, we note that

$$U_T \leq \tilde{C}_1 U_k + \tilde{C}_2 U_{T-k},$$

so

$$(T+1)U_T \leq C \sum_{k=0}^T U_k.$$

Thus, for $n \geq 2^{r-1}$, we get

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{U_{2^j}}{2^{j(p-1)}} \leq C \sum_{k=1}^{2^{r-1}} U_k \sum_{j:2^j \geq k} \frac{1}{(2j+1)2^{j(p-1)}} \leq \frac{C}{(1-2^{-p})} \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{k^p}.$$

To prove (2.62), we write

$$\frac{1}{m^{p-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_{jm}}{j^p} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sum_{j:jm \geq k} \frac{1}{j^p(jm+1)m^{p-1}} \leq C c_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k}{(k+m)^p} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

by the Fatou lemma since $U_k(k+m)^{-p} \downarrow 0$ as $m \rightarrow \infty$. Here, c_p is a positive constant depending on p . \square

Chapter 3

An Empirical Central Limit Theorem in \mathbf{L}^1 for stationary sequences

In this chapter, we derive asymptotic results for the \mathbf{L}^1 -Wasserstein distance between the distribution function and the corresponding empirical distribution function of a stationary sequence. Next, we give some applications to dynamical systems and causal linear processes. To prove our main result, we give a Central Limit Theorem for ergodic stationary sequences of random variables with values in \mathbf{L}^1 . The conditions obtained are expressed in terms of projective-type conditions. The main tools are martingale approximations. The content of this part is based on a paper, published in *Stochastic Processes and their Applications* [18].

3.1 Introduction

The Kantorovich or \mathbf{L}^1 -Wasserstein distance between two probability measures P_1 and P_2 on \mathbb{R} with finite mean, is defined by

$$d_1(P_1, P_2) := \inf \left\{ \int |x - y| d\nu(x, y) : \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \text{ with marginals } P_1, P_2 \right\},$$

where $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ is the space of probability measures on \mathbb{R}^2 .

Let Λ_1 be the space of 1-Lipschitz functions. It is well known that d_1

can also be written as follows:

$$d_1(P_1, P_2) = \int |F_2(t) - F_1(t)| dt = \sup_{f \in \Lambda_1} \left| \int f dP_1 - \int f dP_2 \right|,$$

where F_1 (respectively F_2) is the distribution function of P_1 (respectively of P_2).

Let $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ be a stationary sequence of real-valued random variables. In this chapter, we are concerned with the Central Limit Theorem (CLT) for the \mathbf{L}^1 -Wasserstein distance, defined by

$$\int_{\mathbb{R}} |F_n(t) - F_X(t)| dt, \tag{3.1}$$

where F_X is the common distribution function of the variables X_i , and F_n is the corresponding empirical distribution function (see Section 3.3).

In the literature, several previous works on the Kantorovich or \mathbf{L}^1 -Wasserstein distance, have already been done, for a sequence of i.i.d. random variables $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (see for instance del Barrio, Giné and Matrán [6]). Recall that if X has the distribution function F_X , then the condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{F_X(t)(1 - F_X(t))} dt < \infty,$$

is equivalent to

$$\Lambda_{2,1}(X) := \int_0^{\infty} \sqrt{\mathbb{P}(|X| > t)} dt < \infty.$$

In their Theorem 2.1, del Barrio, Giné and Matrán [6] prove that if $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is i.i.d., then the processes $\sqrt{n}(F_n - F_X)$ converge in law in \mathbf{L}^1 to the process $\{B(F_X(t)), t \in \mathbb{R}\}$, where B is a Brownian bridge, if and only if $\Lambda_{2,1}(X) < \infty$. Our main result extends Theorem 2.1 in del Barrio, Giné and Matrán [6] to the case of stationary sequences, satisfying some appropriate dependence conditions.

Before giving the idea of the proof, let us introduce $\mathbf{L}^1(\mu) = \mathbf{L}^1(\mathbf{T}, \mu)$, where μ is a σ -finite measure and \mathbf{T} is a real interval, the Banach space of μ -integrable real functions on \mathbf{T} , with the norm $\|\cdot\|_{1,\mu}$, defined by $\|x\|_{1,\mu} = \int_{\mathbf{T}} |x(t)| \mu(dt)$. Let $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ be its dual space.

First, we give the Central Limit Theorem (CLT) for ergodic stationary sequences of martingale differences in $\mathbf{L}^1(\mu)$ (see Section 3.4.1). Then, by martingale approximation (see for instance Volný [61]), we derive a Central

Limit Theorem for some ergodic stationary sequences of $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued random variables satisfying some projective criteria. This result allows us to get sufficient conditions to derive the asymptotic behavior of (3.1).

The chapter is organized as follows. In Section 3.2, we state our main result. In Section 3.3, we derive the empirical Central Limit Theorem for statistics of the type (3.1) for a large class of dependent sequences. In particular, the results apply to unbounded functions of expanding maps of the interval, and to causal linear processes.

3.2 Central Limit Theorem for stationary sequences in $\mathbf{L}^1(\mu)$

From now, we assume that the ergodic stationary sequence $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ of centered random variables with values in $\mathbf{L}^1(\mu)$, is given by $X_i = X_0 \circ \mathbb{T}^i$, where $\mathbb{T} : \Omega \rightarrow \Omega$ is a bijective bimeasurable transformation preserving the probability \mathbb{P} on (Ω, \mathcal{A}) . Let $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, be the partial sums. For a σ -algebra \mathcal{F}_0 of \mathcal{A} , satisfying $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathbb{T}^{-1}(\mathcal{F}_0)$, let $\mathcal{F}_i = \mathbb{T}^{-i}(\mathcal{F}_0)$, $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_{-n}$ and $\mathcal{F}_{\infty} = \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_k$.

Notation 3.1. For any integer $p \geq 1$ and for any real-valued random variable Y , we denote $\|\cdot\|_p$, the \mathbf{L}^p -norm defined by $\|Y\|_p = \mathbb{E}(|Y|^p)^{1/p}$, and $\|\cdot\|_{\infty}$ denotes the \mathbf{L}^{∞} -norm, that is the smallest u such that $\mathbb{P}(|Y| > u) = 0$.

In the sequel, we identify the dual of $\mathbf{L}^1(\mu)$ with $\mathbf{L}^{\infty}(\mu)$. More precisely,

Definition 3.1. If Z is an $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued random variable, then, for any $f \in \mathbf{L}^{\infty}(\mu)$, we denote $f(Z) = \int_{\mathbf{T}} f(t)Z(t)\mu(dt)$.

Moreover,

Definition 3.2. G is said to be an $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued Gaussian random variable if for any $f \in \mathbf{L}^{\infty}(\mu)$, $f(G)$ is a real-valued Gaussian random variable, and its covariance function, noted by Φ_G , is defined by: for any (f, g) in $\mathbf{L}^{\infty}(\mu) \times \mathbf{L}^{\infty}(\mu)$, $\Phi_G(f, g) = \mathbb{E}(f(G - \mathbb{E}(G))g(G - \mathbb{E}(G)))$ (see for instance Araujo and Giné [5]).

Here is our main result:

Theorem 3.1. Assume that, for any real t , $\mathbb{E}(X_0(t)|\mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ almost surely, $X_0(t)$ is \mathcal{F}_{∞} -measurable and

$$\int_{\mathbf{T}} \|X_0(t)\|_2 \mu(dt) < \infty. \tag{3.2}$$

Let $P_0(X(t)) = \mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_{-1})$ and assume that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_k(t))\|_2 \mu(dt) < \infty. \quad (3.3)$$

Then

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n X_0 \circ \mathbb{T}^i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G \text{ in law in } \mathbf{L}^1(\mu), \quad (3.4)$$

where G is an $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued centered Gaussian random variable with covariance function: for any (f, g) in $\mathbf{L}^\infty(\mu) \times \mathbf{L}^\infty(\mu)$,

$$\Phi_G(f, g) = \mathbb{E} \left(f \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_0(X_k) \right) g \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_0(X_k) \right) \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(f(X_0), g(X_k)). \quad (3.5)$$

As a consequence, we have

Corollary 3.1. *Assume that (3.2) holds. Moreover, suppose that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \|\mathbb{E}(X_n(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 \mu(dt) < \infty, \quad (3.6)$$

and that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \|X_{-n} - \mathbb{E}(X_{-n}(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 \mu(dt) < \infty. \quad (3.7)$$

Then, the conclusion of Theorem 3.1 holds.

3.3 Applications to the empirical distribution function

Let $Y = (Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of real-valued random variables. We denote their common distribution function by F_Y and by F_n the corresponding empirical distribution function of Y :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{Y_i \leq t}.$$

Let λ be the Lebesgue measure on \mathbb{R} . If $\mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$, the random variable $X_i(\cdot) = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ may be viewed as a centered random variable with values in $\mathbf{L}^1(\lambda)$.

Notation 3.2. Let Z be a real-valued random variable and \mathcal{F} a σ -algebra of \mathcal{A} . Let $F_{Z|\mathcal{F}}$ be the conditional distribution function of Z given \mathcal{F} .

With these notations, the following equalities are valid: for every k in \mathbb{Z} ,

$$\int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_k(t))\|_2 dt = \int_{\mathbf{T}} \|F_{Y_k|\mathcal{F}_0}(t) - F_{Y_k|\mathcal{F}_{-1}}(t)\|_2 dt, \quad (3.8)$$

$$\text{and } \int_{\mathbf{T}} \|\mathbb{E}(X_k(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 dt = \int_{\mathbf{T}} \|F_{Y_k|\mathcal{F}_0}(t) - F_Y(t)\|_2 dt. \quad (3.9)$$

3.3.1 Dependent sequences

As we shall see in this section, applying Corollary 3.1, we can derive sufficient conditions for the convergence in $\mathbf{L}^1(\lambda)$ of the process $\sqrt{n}(F_n - F_Y)$, as soon as the sequence Y satisfies some weak dependence conditions. Set $\mathcal{F}_0 = \sigma(Y_i, i \leq 0)$. We first recall the following dependence coefficients as defined in Dedecker and Prieur [27]: for any integer $k \geq 0$,

$$\tilde{\phi}(k) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbb{P}(Y_k \leq t | \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(Y_k \leq t)\|_\infty,$$

and

$$\tilde{\alpha}(k) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbb{P}(Y_k \leq t | \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(Y_k \leq t)\|_1.$$

When the sequence Y is $\tilde{\phi}$ -dependent, the following result holds:

Proposition 3.1. Assume that

$$\sum_{k \geq 1} \sqrt{\frac{\tilde{\phi}(k)}{k}} < \infty \text{ and } \int_0^\infty \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)} dt < \infty, \quad (3.10)$$

then $\{t \mapsto \sqrt{n}(F_n(t) - F_Y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ converges in $\mathbf{L}^1(\lambda)$, to an $\mathbf{L}^1(\lambda)$ -valued centered Gaussian random variable G , with covariance function: for any (f, g) in $\mathbf{L}^\infty(\lambda) \times \mathbf{L}^\infty(\lambda)$,

$$\Phi_G(f, g) = \int_{\mathbb{R}^2} f(s)g(t)C(s, t) dt ds \quad (3.11)$$

with

$$C(s, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(Y_0 \leq s, Y_k \leq t) - F_Y(s)F_Y(t)).$$

Remark 3.1. *Proposition 3.1 is also true with the ϕ -mixing coefficient of Ibragimov [41], defined by*

$$\phi(k) := \phi(\mathcal{F}_0, \sigma(X_k)) = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_k \in A} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_k \in A})\|_\infty.$$

$\tilde{\phi}$ is weaker than ϕ because we consider only the coarser set $\{]-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$, instead of $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Notice that this result contains the i.i.d. case, developed in del Barrio, Giné and Matrán [6].

Before giving sufficient conditions when the sequence Y is $\tilde{\alpha}$ -dependent, we first recall the following definition:

Definition 3.3. *For any nonnegative and integrable random variable Y , define the quantile function Q_Y of Y , that is the cadlag inverse of the tail function $x \rightarrow \mathbb{P}(Y > x)$.*

Proposition 3.2. *Assume that*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^{\tilde{\alpha}(k)} \frac{Q_{|Y|}(u)}{\sqrt{u}} du < \infty, \quad (3.12)$$

then the conclusion of Proposition 3.1 holds.

Remark 3.2. *Notice that Proposition 3.2 is also true with strong α -mixing coefficients of Rosenblatt [58], defined by*

$$\alpha(k) := \alpha(\mathcal{F}_0, \sigma(X_k)) = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_k \in A} | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_k \in A})\|_1.$$

$\tilde{\alpha}$ is weaker than α because we consider only the coarser set $\{]-\infty, t], t \in \mathbb{R}\}$, instead of $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Notice also that (3.12) is equivalent to

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)} dt < \infty. \quad (3.13)$$

3.3.1.1 Application to expanding maps.

Let T be a map from $[0, 1]$ to $[0, 1]$ preserving a probability μ on $[0, 1]$.

Recall that the Perron-Frobenius operator K from $\mathbf{L}^1(\mu)$ to $\mathbf{L}^1(\mu)$ is defined via the equality: for any $h \in \mathbf{L}^1(\mu)$ and $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$,

$$\int_0^1 (Kh)(x)f(x)\mu(dx) = \int_0^1 h(x)(f \circ T)(x)\mu(dx).$$

Here we are interested by giving sufficient conditions for the convergence in $\mathbf{L}^1(\lambda)$ of the empirical distribution function associated to F_Y , where λ is the Lebesgue measure, and the random variables $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ are defined as follows: for a given measurable function f , let

$$Y_k = f \circ T^k. \tag{3.14}$$

In fact since on the probability space $([0, 1], \mu)$, the random variable (T, T^2, \dots, T^n) is distributed as $(Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_1)$, where $(Z_i)_{i \geq 0}$ is a stationary Markov chain with invariant measure μ and transition kernel K (see Lemma XI.3 in Hennion and Hervé [38]), the convergence in $\mathbf{L}^1(\lambda)$ of the empirical distribution function associated to F_Y is reduced to the convergence of the empirical distribution function associated to $F_{f(Z)}$.

In this section we consider two cases: first the case of a class of BV-contracting maps and secondly the case of a class of intermittent maps.

a) The case of BV-contracting maps. Let BV be the class of bounded variation functions from $[0, 1]$ to \mathbb{R} . For any $h \in BV$, denote by $\|dh\|$ the variation norm of the measure dh . A Markov kernel K is said to be *BV-contracting* if there exist $C > 0$ and $\rho \in [0, 1[$ such that

$$\|dK^n(h)\| \leq C\rho^n \|dh\|. \tag{3.15}$$

A map T is then said to be *BV-contracting* if its Perron-Frobenius operator K is BV-contracting (see for instance Dedecker and Prieur [27], for more details and examples of maps which are BV-contracting).

In this case, the following result holds:

Corollary 3.2. *If T is BV-contracting and f is piecewise monotonic (with a finite number of branches) from $]0, 1[$ to \mathbb{R} satisfying $\int_0^\infty \sqrt{\lambda(|f| > t)} dt < \infty$, then the conclusion of Proposition 3.1 holds for the sequence $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where Y_k is defined by (3.14).*

Remark 3.3. *In the particular case when f is positive and non-increasing on $]0, 1[$, with $f(x) \leq Dx^{-a}$ for some $a > 0$ and D a constant, we get that*

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda(|f| > t)} dt \leq C_2 \int_1^\infty \frac{1}{t^{1/(2a)}} dt,$$

where C_2 is a constant. Consequently, Corollary 3.2 holds as soon as $a < \frac{1}{2}$ holds.

b) *Application to intermittent maps.* For γ in $]0, 1[$, we consider the intermittent map T_γ from $[0, 1]$ to $[0, 1]$, studied for instance by Liverani, Saussol and Vaienti [47], which is a modification of the Pomeau-Manneville map [54]:

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} x(1 + 2^\gamma x^\gamma) & \text{if } x \in [0, 1/2[\\ 2x - 1 & \text{if } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

We denote by ν_γ the unique T_γ -invariant probability measure on $[0, 1]$ and by K_γ the Perron-Frobenius operator of T_γ with respect to ν_γ . For these maps, we obtain the following result:

Corollary 3.3. *For γ in $]0, 1[$, let T_γ be the intermittent map defined above and f is piecewise monotonic (with a finite number of branches) from $]0, 1[$ to \mathbb{R} , satisfying*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty \frac{1}{k^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}} \wedge \sqrt{\nu_\gamma(|f| > t)} dt < \infty, \quad (3.16)$$

then the conclusion of Proposition 3.1 holds for the sequence $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where Y_k is defined by (3.14).

Remark 3.4. *In the particular case when f is positive and non-increasing on $]0, 1[$, with $f(x) \leq Dx^{-a}$ for some $a > 0$ and g_{ν_γ} the density of ν_γ such that $g_{\nu_\gamma}(x) \leq V_\gamma x^{-\gamma}$ where V_γ is a constant, we can prove that (3.16) holds as soon as $a < \frac{1}{2} - \gamma$ does (see Section 3.4.8). In his comment after Theorem 3, Gouëzel [34] proved that if $f(x) = x^{-a}$, then $n^{-1/2} \sum_{k=1}^n (f \circ T_\gamma^i - \nu_\gamma(f))$ converges to a normal law if $a < 1/2 - \gamma$, and that there is a convergence to a stable law (with a different normalization) if $a > 1/2 - \gamma$. This example shows that our condition is close to optimality.*

3.3.2 Causal linear processes

We focus here on the stationary sequence

$$Y_k = \sum_{j \geq 0} a_j \varepsilon_{k-j}, \quad (3.17)$$

where $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of real-valued i.i.d. random variables in \mathbf{L}^2 and $\sum_{j \geq 0} |a_j| < +\infty$.

Corollary 3.4. *Assume that, ε_0 has a density bounded by K and that $|a_0| \neq 0$. Moreover, assume that*

$$\sum_{k \geq 0} \int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|Y_0|}(u)}{\sqrt{u}} du < \infty. \quad (3.18)$$

Then the conclusion of Proposition 3.1 holds for the sequence $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where Y_k is defined by (3.17).

Remark 3.5. *Since $\sum_{j \geq 0} |a_j| < \infty$, (3.18) is true provided that*

$$\sum_{k \geq 0} \int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|\varepsilon_0|}(u)}{\sqrt{u}} du < \infty. \quad (3.19)$$

Proof of Remark 3.5. By using Lemma 2.1 in Rio [57], page 35, we have that

$$\int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|Y_0|}(u)}{\sqrt{u}} du \leq \left(\sum_{j \geq 0} |a_j| \right) \int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|\varepsilon_0|}(u)}{\sqrt{u}} du.$$

Consequently since $\sum_{j \geq 0} |a_j| < \infty$, (3.18) is true provided that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|\varepsilon_0|}(u)}{\sqrt{u}} du < \infty. \quad (3.20)$$

□

As a consequence, we get the following result

Corollary 3.5. *Assume either Item 1 or 2 below:*

1. *for some $r > 2$, the i.i.d. random variables $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ are in \mathbf{L}^r and ε_0 has a density bounded by K . In addition $|a_0| \neq 0$ and*

$$\sum_{k \geq 0} (k+1)^{1/(r-1)} |a_k|^{(r-2)/(r-1)} < \infty. \quad (3.21)$$

2. *for some $r > 2$,*

$$\forall x > 0, \mathbb{P}(|\varepsilon_0| > x) \leq \left(\frac{c}{x}\right)^r \text{ where } c \text{ is a positive constant,}$$

and ε_0 has a density bounded by K . In addition $|a_0| \neq 0$ and

$$\sum_{k \geq 0} |a_k|^{1-2/r} < \infty. \quad (3.22)$$

Then the conclusion of Proposition 3.1 holds for the sequence $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where Y_k is defined by (3.17).

3.4 Proofs

3.4.1 Central Limit Theorem for $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued martingale differences

We extend to $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued martingale differences, a result of Jain [42], which is, for a sequence of i.i.d. centered $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued random variables $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, the Central Limit Theorem holds if and only if $\int_{\mathbf{T}} \|X_1(t)\|_2 \mu(dt) < \infty$.

Theorem 3.2. *Let $(m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of stationary ergodic martingale differences with values in $\mathbf{L}^1(\mu)$ such that, for any $i \in \mathbb{Z}$, $m_i = m_0 \circ \mathbb{T}^i$. We note $M_n = \sum_{i=1}^n m_i$. Assume that*

$$\int_{\mathbf{T}} \|m_0(t)\|_2 \mu(dt) < \infty. \quad (3.23)$$

Then

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G \text{ in law in } \mathbf{L}^1(\mu), \quad (3.24)$$

where G is an $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued centered Gaussian random variable with covariance operator: for any f in $\mathbf{L}^\infty(\mu)$, $\Phi_G(f, f) = \mathbb{E}(f^2(m_0))$.

Proof of Theorem 3.2. Before giving the proof, we recall some notations and definitions used in the proof.

Notation 3.3. *Using the notations of Jain [42], we consider for any real separable Banach space \mathbb{B} and its dual \mathbb{B}' ,*

$$WM_0^2 = \{\nu \text{ probability measures on } \mathbb{B}: \int |f|^2 d\nu < \infty, \int f d\nu = 0, \forall f \in \mathbb{B}'\}.$$

Definition 3.4. *If $\nu \in WM_0^2$, its covariance kernel Φ_ν is given by: for any (f, g) in $\mathbb{B}' \times \mathbb{B}'$,*

$$\Phi_\nu(f, g) = \int fg d\nu.$$

Definition 3.5. $\mu \in WM_0^2$ is pregaussian if there is a Gaussian measure ν , such that $\Phi_\nu = \Phi_\mu$.

By the classical Linderberg's theorem for stationary ergodic martingale differences in Billingsley [8], $n^{-1/2}f(M_n)$ converges in law to the centered Gaussian random variable Z in \mathbb{R} , with variance $\mathbb{E}(f^2(m_0))$, for each $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$. Now, we have to prove that the sequence of the distributions of $n^{-1/2}M_n$ is relatively compact. As $\mathbf{L}^1(\mu)$ is of cotype 2 (for a definition see for instance Jain [42] or Ledoux and Talagrand p. 245 [46]), we use the same approach as in the proof of Theorem 6.4 in de Acosta, Araujo and Giné [2]. By stationarity, it follows that

$$\mathbb{E}\left(\left[f\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)\right]^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}([f(m_i)]^2) = \mathbb{E}([f(m_0)]^2).$$

By Theorem 11 in Jain [42], if (3.23) holds, then m_0 is pregaussian, so there exists an $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued centered Gaussian random variable G (or a Gaussian measure γ on $\mathbf{L}^1(\mu)$), with covariance operator Φ_G , such that, for any f in $\mathbf{L}^\infty(\mu)$,

$$\mathbb{E}([f(G)]^2) = \Phi_G(f, f) = \mathbb{E}([f(m_0)]^2).$$

By Theorem 5.6 in de Acosta, Araujo and Giné [2], every centered Gaussian measure on $\mathbf{L}^1(\mu)$, is strongly Gaussian which means that there exist a Hilbert space \mathbb{H} , a continuous linear map $\mathbf{M} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{L}^1(\mu)$ and a tight centered Gaussian measure ν on \mathbb{H} such that $\gamma = \nu \circ \mathbf{M}^{-1}$. Therefore, we can apply Theorem 6.2 [2], with

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} = \{ \xi \text{ a probability measure on } \mathbf{L}^1(\mu) \text{ such that} \\ \Phi_\xi(f, f) \leq \Phi_\gamma(f, f), \text{ for all } f \in \mathbf{L}^\infty(\mu) \}, \end{aligned}$$

so \mathfrak{K} is relatively compact. We have proved that the sequence of the distributions of $n^{-1/2}M_n$ is relatively compact. \square

3.4.2 Proof of Theorem 3.1

Before giving the proof, we recall a notation used in the proof.

Notation 3.4. P_i is the projection operator from \mathbf{L}^2 to J_i where J_i is the orthogonal of H_{i-1} in H_i , where H_i is the space of \mathcal{F}_i -measurable and square integrable random variables.

We construct the martingale

$$M_n = \sum_{i=1}^n m_0 \circ \mathbb{T}^i,$$

where $m_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_0(X_k)$. Notice that $(m_0 \circ \mathbb{T}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of stationary ergodic martingale differences. By triangle inequality and by assumption (3.3),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \|m_0(t)\|_2 \mu(dt) &= \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_0(X_k(t)) \right\|_2 \mu(dt) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_k(t))\|_2 \mu(dt) < \infty. \end{aligned}$$

Applying Theorem 3.2, we infer that

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G \text{ in law in } \mathbf{L}^1(\mu),$$

where G is an $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued centered Gaussian random variable such that $\Phi_G(f, f) = \mathbb{E}([f(m_0)]^2)$, for any $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$.

To conclude the proof, it suffices to prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_0(t) \circ \mathbb{T}^i \right\|_2 \mu(dt) = 0. \quad (3.25)$$

The proof is inspired by the proof of Theorem 1 in Dedecker, Merlevède and Volný [26]. By triangle inequality,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_0(t) \circ \mathbb{T}^i \right\|_2 \mu(dt) \\ &= \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_n)}{\sqrt{n}} + \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_n)}{\sqrt{n}} + \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_0)}{\sqrt{n}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_0)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_0(t) \circ \mathbb{T}^i \right\|_2 \mu(dt) \\ &\leq \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_n)}{\sqrt{n}} \right\|_2 \mu(dt) \\ &\quad + \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_n)}{\sqrt{n}} - \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_0)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_0(t) \circ \mathbb{T}^i \right\|_2 \mu(dt) \end{aligned}$$

$$+ \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_0)}{\sqrt{n}} \right\|_2 \mu(dt). \quad (3.26)$$

It suffices to prove that each term on the right-hand side of Inequality (3.26) tends to 0, as n tends to infinity. Let us first control the second term. Since

$$\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n P_i(X_k(t)),$$

it follows that, by stationarity and orthogonality,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{\mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(S_n(t) | \mathcal{F}_0)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_0(t) \circ \mathbb{T}^i \right\|_2 \mu(dt) \\ &= \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{k=1}^n P_0(X_{k-i}(t)) - m_0(t) \right\|_2^2} \mu(dt) \\ &= \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1-i}^{n-i} P_0(X_j(t)) - m_0(t) \right\|_2^2} \mu(dt) \\ &\leq \sqrt{2} \left[\int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) + \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Splitting the sum on i of the first term on the right-hand side of Inequality (3.27), we get that, for any positive integer $N < n$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) \\ &= \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) \\ &\leq \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) + \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt). \end{aligned}$$

Since

$$\int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) \leq \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} (n-N) \left(\sum_{j \leq -N} \|P_0(X_j(t))\|_2 \right)^2} \mu(dt)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbf{T}} \left(\sum_{j \leq -N} \|P_0(X_j(t))\|_2 \right) \mu(dt) \\ &\leq \sum_{j \leq -N} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_j(t))\|_2 \mu(dt), \end{aligned}$$

we infer by (3.3) that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=N+1}^n \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) = 0.$$

Moreover, the monotone convergence theorem entails that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2 \mu(dt) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} N \sum_{j \leq -1} \|P_0(X_j(t))\|_2 \mu(dt) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} N \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_j(t))\|_2 \mu(dt). \end{aligned}$$

Hence, for any positive integer N ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) = 0.$$

Whence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j \leq -i} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) = 0.$$

In the same way, splitting the sum on i of the second term on the right-hand side of Inequality (3.27), we derive that

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) \\ &= \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-N} \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=n-N+1}^n \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-N} \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) + \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=n-N+1}^n \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt).$$

Since

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-N} \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) &\leq \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{(n-N)}{n}} \left(\sum_{j \geq N+1} \|P_0(X_j(t))\|_2 \right) \mu(dt) \\ &\leq \sum_{j \geq N+1} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_j(t))\|_2 \mu(dt), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=n-N+1}^n \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) &\leq \int_{\mathbf{T}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=n-N+1}^n \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2 \mu(dt) \\ &\leq \frac{N}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_j(t))\|_2 \mu(dt), \end{aligned}$$

we deduce by (3.3), that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j \geq n-i+1} P_0(X_j(t)) \right\|_2^2} \mu(dt) = 0.$$

Consequently, we derive that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \left\| \mathbb{E} \left(\frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \middle| \mathcal{F}_n \right) - \mathbb{E} \left(\frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \middle| \mathcal{F}_0 \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n m_0(t) \circ \mathbb{T}^i \right\|_2^2 \mu(dt) = 0. \quad (3.28)$$

To prove that the last term of Inequality (3.26) tends to 0 as n tends to infinity, we first write that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \left\| \mathbb{E} \left(\frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \middle| \mathcal{F}_0 \right) \right\|_2^2 \mu(dt) &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2 \mu(dt) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=N+1}^n \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2 \mu(dt). \end{aligned}$$

By orthogonality,

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2^2 = \sum_{k=N+1}^n \sum_{l=N+1}^n \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \mathbb{E}(X_l(t) \mid \mathcal{F}_0))$$

$$= \sum_{k=N+1}^n \sum_{l=N+1}^n \mathbb{E} \left(\sum_{m=0}^{\infty} P_{-m}(X_k(t)) P_{-m}(X_l(t)) \right).$$

Using Cauchy-Schwarz inequality and stationarity, it follows that

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=N+1}^n \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2^2 &\leq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=N+m+1}^{n+m} \sum_{l=N+1+m}^{n+m} \|P_0(X_k(t))\|_2 \|P_0(X_l(t))\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \|P_0(X_k(t))\|_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Consequently

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=N+1}^n \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2 \mu(dt) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_k(t))\|_2 \mu(dt),$$

and by (3.3), it follows that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=N+1}^n \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2 \mu(dt) = 0. \quad (3.29)$$

On the other hand, by stationarity,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2 &= \left\| \sum_{k=1}^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(P_i(X_k(t)) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2 \\ &\leq \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \|P_i(X_k(t))\|_2 \right) \\ &\leq N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_i(t))\|_2. \end{aligned}$$

Hence by (3.3), we get that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0) \right\|_2 \mu(dt) = 0. \quad (3.30)$$

Therefore, (3.29) and (3.30) imply that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \left\| \mathbb{E} \left(\frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \mid \mathcal{F}_0 \right) \right\|_2 \mu(dt) = 0. \quad (3.31)$$

To prove that the first term of Inequality (3.26) tends to 0 as n tends to infinity, we write that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \mid \mathcal{F}_n\right) \right\|_2 \mu(dt) &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=1}^{n-N} [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2 \mu(dt) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=n-N+1}^n [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2 \mu(dt). \end{aligned}$$

By orthogonality,

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^{n-N} [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-N} \sum_{l=1}^{n-N} \mathbb{E}([X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)][X_l(t) - \mathbb{E}(X_l(t) \mid \mathcal{F}_n)]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-N} \sum_{l=1}^{n-N} \mathbb{E}\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} P_m(X_k(t))P_m(X_l(t))\right). \end{aligned}$$

Consequently by using Cauchy-Schwarz inequality and stationarity,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n-N} [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2^2 &\leq \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{k=1-m}^{n-N-m} \sum_{l=1-m}^{n-N-m} \|P_0(X_k(t))\|_2 \|P_0(X_l(t))\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{-(N+1)} \|P_0(X_k(t))\|_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Hence we get

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=1}^{n-N} [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2 \mu(dt) \leq \sum_{k=-\infty}^{-(N+1)} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_k(t))\|_2 \mu(dt),$$

and by (3.3), it follows that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=1}^{n-N} [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2 \mu(dt) = 0. \quad (3.32)$$

Also by stationarity,

$$\left\| \sum_{k=n-N+1}^n [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2 = \left\| \sum_{k=n-N+1}^n \sum_{m=n+1}^{\infty} P_m(X_k(t)) \right\|_2$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=n-N+1}^n \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \|P_m(X_k(t))\|_2 \right) \\ &\leq N \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_i(t))\|_2. \end{aligned}$$

Hence

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbf{T}} \left\| \sum_{k=n-N+1}^n [X_k(t) - \mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_n)] \right\|_2 \mu(dt) \leq \frac{N}{\sqrt{n}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_i(t))\|_2 \mu(dt). \quad (3.33)$$

Therefore, (3.32) and (3.33) imply that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} \left\| \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} - \mathbb{E} \left(\frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \mid \mathcal{F}_n \right) \right\|_2 \mu(dt) = 0. \quad (3.34)$$

By (3.28), (3.31) and (3.34), it follows that (3.25) holds. Consequently, $n^{-1/2}S_n$ converges in law in $\mathbf{L}^1(\mu)$ to an $\mathbf{L}^1(\mu)$ -valued centered Gaussian random variable with covariance operator, for any $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$,

$$\Phi_G(f, f) = \mathbb{E}(f^2(m_0)) = \mathbb{E} \left(\left(f \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} P_0(X_k) \right) \right)^2 \right).$$

To conclude, we prove that, for any (f, g) in $\mathbf{L}^\infty(\mu) \times \mathbf{L}^\infty(\mu)$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\text{Cov}(f(X_0), g(X_k))| < \infty, \quad (3.35)$$

and

$$\Phi_G(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(f(X_0), g(X_k)). \quad (3.36)$$

Clearly, it suffices to prove it for $f = g$. In that case, by using Corollary 1 in Dedecker, Merlevède and Volný [26], we know that (3.35) and (3.36) hold as soon as

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(f(X_k))\|_2 < \infty. \quad (3.37)$$

As f is a linear form on $\mathbf{L}^1(\mu)$ then f belongs to $\mathbf{L}^\infty(\mu)$. It follows that

$$\begin{aligned} \|P_0(f(X_k))\|_2 = \|f(P_0(X_k))\|_2 &\leq C(f) \left\| \int_{\mathbf{T}} |P_0(X_k)(t)| \mu(dt) \right\|_2 \\ &\leq C(f) \int_{\mathbf{T}} \|P_0(X_k)(t)\|_2 \mu(dt), \end{aligned}$$

where $C(f)$ is a constant depending on f . Consequently, (3.37) holds as soon as (3.3) holds. This entails that (3.36) follows. \square

3.4.3 Proof of Corollary 3.1

We prove Corollary 3.1 with the same arguments as in the end of the proof of Corollary 2 in Peligrad and Utev [51].

By stationarity and orthogonality, for all k in \mathbb{Z} , we have

$$\|\mathbb{E}(X_k(t) | \mathcal{F}_0)\|_2^2 = \left\| \sum_{j=-\infty}^0 P_j(X_k(t)) \right\|_2^2 = \sum_{j=k}^{\infty} \|P_{-j}(X_0(t))\|_2^2$$

and

$$\|X_{-k}(t) - \mathbb{E}(X_{-k}(t) | \mathcal{F}_0)\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} P_j(X_{-k}(t)) \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j(X_{-k}(t))\|_2^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \|P_j(X_0(t))\|_2^2.$$

Now, applying Lemma A.2 in Peligrad and Utev [51], to $a_i := \|P_{-i}(X_0(t))\|_2$, it follows

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|P_{-i}(X_0(t))\|_2 &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|P_{-i}(X_0(t))\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \|\mathbb{E}(X_n(t) | \mathcal{F}_0)\|_2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

and then to $a_i := \|P_i(X_0(t))\|_2$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|P_i(X_0(t))\|_2 &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|P_i(X_0(t))\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \|X_{-(n-1)}(t) - \mathbb{E}(X_{-(n-1)}(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 \\ &\leq 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1/2} \|X_{-n}(t) - \mathbb{E}(X_{-n}(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 \\ &\leq 3 \|X_0(t) - \mathbb{E}(X_0(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \|X_{-n}(t) - \mathbb{E}(X_{-n}(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 \\ &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \|X_{-n}(t) - \mathbb{E}(X_{-n}(t) | \mathcal{F}_0)\|_2 + 6 \|X_0(t)\|_2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Therefore, by (3.38) and (3.39), we deduce that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_k(t))\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_{-k}(X_0(t))\|_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k(X_0(t))\|_2 + \|P_0(X_0(t))\|_2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|P_{-i}(X_0(t))\|_2^2 \right)^{1/2} \\
 &\quad + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|P_i(X_0(t))\|_2^2 \right)^{1/2} + \|P_0(X_0(t))\|_2 \\
 &\leq 3 \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \|\mathbb{E}(X_n(t) \mid \mathcal{F}_0)\|_2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \|X_{-n}(t) - \mathbb{E}(X_{-n}(t) \mid \mathcal{F}_0)\|_2 \right] \\
 &\quad + 8 \|X_0(t)\|_2.
 \end{aligned}$$

Consequently, (3.6) and (3.7) imply (3.3). \square

3.4.4 Proof of Proposition 3.1

We apply Corollary 3.1 to the random variables $X_i(\cdot) = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Let

$$Z(t) = \frac{F_{Y_k | \mathcal{F}_0}(t) - F_Y(t)}{\|F_{Y_k | \mathcal{F}_0}(t) - F_Y(t)\|_2}.$$

Obviously,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|\mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0)\|_2 \leq \|X_k(t)\|_2 \leq \sqrt{F_Y(t)(1 - F_Y(t))}. \quad (3.40)$$

By Proposition 2.1 in Dedecker [20] and by (3.40), for any k in \mathbb{Z} , we derive

$$\begin{aligned}
 \|F_{Y_k | \mathcal{F}_0}(t) - F_Y(t)\|_2 &= \mathbb{E} \left(\frac{F_{Y_k | \mathcal{F}_0}(t) - F_Y(t)}{\|F_{Y_k | \mathcal{F}_0}(t) - F_Y(t)\|_2} (F_{Y_k | \mathcal{F}_0}(t) - F_Y(t)) \right) \\
 &= \text{Cov}(Z(t), X_k(t)) \\
 &\leq 2 \|Z(t)\|_2 \|X_k(t)\|_2 \sqrt{\tilde{\phi}(k)} \\
 &\leq 2 \sqrt{F_Y(t)(1 - F_Y(t))} \sqrt{\tilde{\phi}(k)}.
 \end{aligned}$$

Consequently, we deduce that (3.6) holds as soon as (3.10) holds.

To end the proof, it remains to prove (3.11). Clearly, as (f, g) in $\mathbf{L}^\infty(\lambda) \times \mathbf{L}^\infty(\lambda)$, and $\int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{1}_{Y_0 \leq s} - F_Y(s)\|_2 ds < \infty$ (deduced by (3.10)), Fubini entails that for any $k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Cov}(f(X_0), g(X_k)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t)g(s) \text{Cov}(\mathbf{1}_{Y_0 \leq t} - F_Y(t), \mathbf{1}_{Y_k \leq s} - F_Y(s)) dt ds.$$

Via Cauchy-Schwarz inequality and the monotone convergence theorem,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} |f(t)| |g(s)| |\text{Cov}(\mathbf{1}_{Y_0 \leq t} - F_Y(t), \mathbf{1}_{Y_k \leq s} - F_Y(s))| dt ds \\
 & \leq C(f) C(g) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(P_i(\mathbf{1}_{Y_0 \leq t}) P_i(\mathbf{1}_{Y_k \leq s})) \right| dt ds \\
 & \leq C(f) C(g) \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|P_0(\mathbf{1}_{Y_i \leq t})\|_2 \|P_0(\mathbf{1}_{Y_{k+i} \leq s})\|_2 dt ds \\
 & \leq C(f) C(g) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \|P_0(\mathbf{1}_{Y_k \leq s})\|_2 ds \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \|P_0(\mathbf{1}_{Y_k \leq t})\|_2 dt \right) \\
 & < \infty,
 \end{aligned}$$

where $C(f)$ (respectively $C(g)$) is a constant depending on f (respectively g). Indeed, by using the proof of Corollary 3.1 and (3.10), it follows that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \|P_0(\mathbf{1}_{Y_k \leq t})\|_2 dt < \infty.$$

Therefore, we can still apply Fubini, for any (f, g) in $\mathbf{L}^\infty(\lambda) \times \mathbf{L}^\infty(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(f(X_0), g(X_k)) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^2} f(t) g(s) \text{Cov}(\mathbf{1}_{Y_0 \leq t} - F_Y(t), \mathbf{1}_{Y_k \leq s} - F_Y(s)) dt ds \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t) g(s) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(\mathbf{1}_{Y_0 \leq t} - F_Y(t), \mathbf{1}_{Y_k \leq s} - F_Y(s)) dt ds \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t) g(s) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{P}(Y_0 \leq t, Y_k \leq s) - F_Y(t) F_Y(s)) dt ds.
 \end{aligned}$$

(3.5) entails that (3.11) follows. \square

3.4.5 Proof of Proposition 3.2

We apply Corollary 3.1 to the random variables $X_i(\cdot) = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_i \leq t} - F_Y(t), t \in \mathbb{R}\}$.

By Hölder's inequality for any $k \geq 0$, we get

$$\begin{aligned}
 \|\mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0)\|_2 &= \|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_k \leq t} \mid \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(Y_k \leq t)\|_2 \\
 &\leq \sqrt{\|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_k \leq t} \mid \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(Y_k \leq t)\|_1} \sqrt{\|\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y_k \leq t} \mid \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(Y_k \leq t)\|_\infty}
 \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\tilde{\alpha}(k)}. \quad (3.41)$$

Using (3.40) and (3.41),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbb{E}(X_k(t) \mid \mathcal{F}_0)\|_2 dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{F_Y(t)(1-F_Y(t))} dt \\ &\leq \int_0^{\infty} \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{1-F_Y(t)} dt + \int_{-\infty}^0 \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{F_Y(t)} dt \\ &\leq \int_0^{\infty} \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)} dt. \end{aligned}$$

Notice that

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)} &= \int_0^1 \mathbf{1}_{u \leq \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)}} \mathbf{1}_{u \leq \sqrt{\tilde{\alpha}(k)}} du \\ &= \int_0^{\sqrt{\tilde{\alpha}(k)}} \mathbf{1}_{u^2 \leq \mathbb{P}(|Y| > t)} du \\ &= \int_0^{\sqrt{\tilde{\alpha}(k)}} \mathbf{1}_{Q_{|Y|}(u^2) \geq t} du. \end{aligned}$$

By Fubini and by a change of variable, we derive

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)} dt &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \mathbf{1}_{u \leq \sqrt{\mathbb{P}(|Y| > t)}} \mathbf{1}_{u \leq \sqrt{\tilde{\alpha}(k)}} du \right) dt \\ &= \int_0^{\sqrt{\tilde{\alpha}(k)}} \left(\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{Q_{|Y|}(u^2) \geq t} dt \right) du \\ &= \int_0^{\sqrt{\tilde{\alpha}(k)}} Q_{|Y|}(u^2) du = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\alpha}(k)} \frac{Q_{|Y|}(u)}{\sqrt{u}} du. \end{aligned}$$

We deduce that (3.12) implies (3.6). The CLT holds, by applying Corollary 3.1. \square

3.4.6 Proof of Corollary 3.2

Recall that to prove the convergence for the empirical distribution function of Y where $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ is defined by (3.14), it suffices to show the convergence in $\mathbf{L}^1(\lambda)$ of the empirical distribution function of $f(Z)$ where $(Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is the stationary Markov chain with transition kernel K . Hence we shall prove that $f(Z)$ satisfies the conditions of Proposition 3.1. Since f is piecewise

monotonic with a finite number of branches, say N , then $f^{-1}(]-\infty, t])$ is the union of N disjoint sets, which are either an interval or the complement of an interval. Consequently,

$$\tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, f(Z_k)) \leq 2N\tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, Z_k).$$

In addition, Dedecker and Prieur [27] proved that if (3.15) holds then

$$\tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, Z_k) \leq C_1\rho^k,$$

with C_1 a positive constant. This entails that (3.10) holds. \square

3.4.7 Proof of Corollary 3.3

Proceeding as the beginning of the proof of Corollary 3.2, we have this time to bound $\tilde{\alpha}(\mathcal{F}_0, f(Z_k))$. Once again, since f is piecewise monotonic with a finite number of branches, say N , then $f^{-1}(]-\infty, t])$ is the union of N disjoint sets, which are either an interval or the complement of an interval implying that

$$\tilde{\alpha}(\mathcal{F}_0, f(Z_k)) \leq 2N\tilde{\alpha}(\mathcal{F}_0, Z_k).$$

Recently, Dedecker, Gouëzel and Merlevède [22] proved in Proposition 1.12, that there exists a constant C_γ , such that, for any positive integer k ,

$$\tilde{\alpha}(\mathcal{F}_0, Z_k) \leq \frac{C_\gamma}{(k+1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}. \quad (3.42)$$

It follows that

$$\int_0^\infty \sqrt{\tilde{\alpha}(k)} \wedge \sqrt{\nu_\gamma(|f| > t)} dt \leq \sqrt{2N} \int_0^\infty \frac{\sqrt{C_\gamma}}{(k+1)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}} \wedge \sqrt{\nu_\gamma(|f| > t)} dt.$$

Consequently, (3.13) holds as soon as (3.16) holds. \square

3.4.8 Proof of Remark 3.4

Since the density g_{ν_γ} of ν_γ is such that $g_{\nu_\gamma}(x) \leq V_\gamma x^{-\gamma}$, we infer that

$$\nu_\gamma(f > t) \leq \frac{D^{\frac{1-\gamma}{a}} V_\gamma}{1-\gamma} t^{-\frac{1-\gamma}{a}}, \quad (3.43)$$

where D and V_γ are positive constants. By Fubini and (3.43), we then get that

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} k^{-\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \wedge \sqrt{\nu_\gamma(|f| > t)} dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \mathbf{1}_{u \leq \sqrt{\nu_\gamma(|f| > t)}} \mathbf{1}_{u \leq k^{-\frac{1-\gamma}{2\gamma}}} du \right) dt \\ &\leq K(\gamma, a) k^{\left(-\frac{(1-\gamma)}{2\gamma}\right) \left(-\frac{2a}{1-\gamma} + 1\right)}, \end{aligned}$$

where $K(\gamma, a)$ is a constant.

Consequently, (3.16) holds as soon as $a < \frac{1}{2} - \gamma$ does. \square

3.4.9 Proof of Corollary 3.4

We apply Theorem 3.1 to the random variables $X_k(t) = \{t \mapsto \mathbf{1}_{Y_k \leq t} - F_Y(t)\}$. Let $\mathcal{M}_i = \sigma(\varepsilon_k, k \leq i)$. By the proof of Lemma 6 in Dedecker and Merlevède [24],

$$\|F_{Y_k|\mathcal{M}_0}(t) - F_{Y_k|\mathcal{M}_{-1}}(t)\|_2 \leq K |a_0|^{-1} |a_k| \|\varepsilon_1 - \varepsilon_0\|_2. \quad (3.44)$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned} \|F_{Y_k|\mathcal{M}_0}(t) - F_{Y_k|\mathcal{M}_{-1}}(t)\|_2 &\leq \|F_{Y_k|\mathcal{M}_0}(t) - F_Y(t)\|_2 + \|F_{Y_k|\mathcal{M}_{-1}}(t) - F_Y(t)\|_2 \\ &\leq 2\sqrt{F_Y(t)(1 - F_Y(t))}. \end{aligned}$$

We deduce that (3.3) holds as soon as

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty (K |a_0|^{-1} |a_k| \|\varepsilon_1 - \varepsilon_0\|_2) \wedge (2\sqrt{\mathbb{P}(|Y_k| > t)}) dt < \infty,$$

and it may be reduced to

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty |a_k| \wedge \sqrt{\mathbb{P}(|Y_k| > t)} dt < \infty \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|Y_k|}(u)}{\sqrt{u}} du < \infty.$$

Now, from Theorem 3.1, we infer that $\sqrt{n}(F_n - F_Y)$ converges in law to an $\mathbf{L}^1(\lambda)$ -valued centered Gaussian random variable G , with covariance function Φ_G defined by (3.11). \square

3.4.10 Proof of Corollary 3.5

3.4.10.1 Proof of Item 1 of Corollary 3.5

To apply Corollary 3.4, it suffices to prove (3.19).

Firstly, recall that, if U is a uniform random variable on $[0, 1]$, $Q_{|\varepsilon_0|}^2(U)$ and $|\varepsilon_0|^2$ have the same law.

We proceed as in Rio [57] p. 15. By Hölder's inequality on $[0, 1]$, it follows that

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|\varepsilon_0|}(u)}{\sqrt{u}} du &= \int_0^1 Q_{|\varepsilon_0|}(u) \left(\frac{\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{u \leq |a_k|^2\}}}{\sqrt{u}} \right) du \\ &\leq \left(\int_0^1 Q_{|\varepsilon_0|}(u)^r du \right)^{1/r} \left(\int_0^1 \left(\frac{\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{u \leq |a_k|^2\}}}{\sqrt{u}} \right)^{r/(r-1)} du \right)^{(r-1)/r}. \end{aligned}$$

Using the same notations as in Dedecker and Doukhan [21], let

$$\delta^{-1}(u) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{u \leq |a_k|^2\}} \text{ and } f(x) = x^{r/(r-1)}.$$

We infer that

$$\begin{aligned} f(\delta^{-1}) &= \sum_{j=0}^{\infty} (f(j+1) - f(j)) \mathbf{1}_{\{u \leq |a_j|^2\}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} ((j+1)^{r/(r-1)} - j^{r/(r-1)}) \mathbf{1}_{\{u \leq |a_j|^2\}}. \end{aligned}$$

Set $C_r = \frac{r}{r-1}$. Since $(j+1)^{r/(r-1)} - j^{r/(r-1)} \leq C_r(j+1)^{1/(r-1)}$, (3.19) holds as soon as

$$\int_0^1 \sum_{j \geq 0} (j+1)^{1/(r-1)} \frac{\mathbf{1}_{\{u \leq |a_j|^2\}}}{u^{2/(r-1)}} du < \infty,$$

which is true provided that

$$\sum_{j \geq 0} (j+1)^{1/(r-1)} |a_j|^{\frac{r-2}{r-1}} < \infty.$$

□

3.4.10.2 Proof of Item 2 of Corollary 3.5

We apply Corollary 3.4, so it suffices to prove (3.19).

Notice that, the quantile function $Q_{|\varepsilon_0|}$, here, is dominated by $cu^{-1/r}$. Thus, we derive

$$\begin{aligned} \int_0^{|a_k|^2} \frac{Q_{|\varepsilon_0|}(u)}{\sqrt{u}} du &\leq \int_0^{|a_k|^2} \frac{c}{u^{1/2+1/r}} du \\ &\leq c \frac{2r}{r-2} |a_k|^{1-2/r}. \end{aligned}$$

Consequently, (3.19) holds as soon as (3.22) does. □

Chapter 4

Estimation de la densité spectrale

4.1 Introduction et Notations

Supposons que nous disposons d'une suite strictement stationnaire de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans \mathbf{L}^2 et de moyenne μ . Cette suite est construite de la manière suivante, $X_i = X_0 \circ \mathbb{T}^i$, où $\mathbb{T} : \Omega \rightarrow \Omega$ est une transformation bijective bimesurable conservant la mesure de probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{A}) . Un élément A de \mathcal{A} est dit invariant par \mathbb{T} , si $\mathbb{T}(A) = A$. En notant \mathcal{I} la tribu des éléments invariants par \mathbb{T} , nous supposons que la probabilité \mathbb{P} est ergodique, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{I}$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1 .

Avant de donner les motivations de notre travail, nous avons besoin de quelques notations. En considérant \mathcal{F}_0 , une sous-tribu satisfaisant $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathbb{T}^{-1}(\mathcal{F}_0)$, posons $\mathcal{F}_i = \mathbb{T}^{-i}(\mathcal{F}_0)$. Définissons également $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_k$ et $\mathcal{F}_{\infty} = \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_k$. Une variable aléatoire X_0 sera dite *régulière* si $\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-\infty}) = 0$ presque sûrement, et X_0 est \mathcal{F}_{∞} -mesurable. De plus, nous définissons, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'opérateur de projection P_i sur \mathbf{L}^2 , par

$$P_i(X) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_{i-1}).$$

Pour une variable aléatoire réelle Y , nous noterons par $\|Y\|_p$ la norme \mathbf{L}^p et $\|Y\|_{\infty}$ est la \mathbf{L}^{∞} -norme c'est-à-dire le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(|Y| > u) = 0$.

Concernant le comportement asymptotique de la suite des sommes partielles notées $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, Heyde [39] (cf Hannan [37] pour le cas adapté) a montré que si X_0 est régulière et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_k)\|_2 < \infty, \quad (4.1)$$

alors

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}\left(0, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_0, X_k)\right) \text{ en loi.} \quad (4.2)$$

Notons que (4.1) entraîne que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\text{Cov}(X_0, X_k)| < \infty$ (cf Dedecker, Merlevède et Volný [26]).

Pour obtenir des intervalles de confiance asymptotiques pour la moyenne, en utilisant le Théorème Limite Central, il nous faut donc un estimateur de la série des covariances.

Définissons la densité spectrale,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_0, X_k) e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (4.3)$$

Celle-ci en $\theta = 0$ et à un facteur 2π près, correspond exactement à la série des covariances. Nous étudierons ainsi, plus généralement, l'estimation de la densité spectrale, qui existe et est continue sous (4.1).

En pratique, seules les données X_1, X_2, \dots, X_n sont connues, on utilise donc un estimateur naturel de la covariance $\text{Cov}(X_0, X_k)$ donné par

$$\hat{\gamma}_k := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (X_j - \bar{X}_n)(X_{j+|k|} - \bar{X}_n), \quad 0 \leq |k| \leq (n-1), \quad (4.4)$$

avec $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$.

Pour estimer la densité spectrale, on utilisera l'estimateur lissé, introduit par Bartlett [7], et défini par

$$f_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad (4.5)$$

avec c_n une suite d'entiers positifs telle que $c_n \rightarrow \infty$ et $c_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Nous supposons que K vérifie $K(x) = 1$ pour tout réel $|x| \leq 1$, $K(x) = 2 - |x|$ pour tout réel $1 \leq |x| \leq 2$, sinon $K(x) = 0$.

Dans la littérature, de nombreux articles et livres ont traité des propriétés de cet estimateur sous des conditions plus ou moins restrictives sur

le processus $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (Anderson [3], Brillinger [15], Brockwell and Davis [16], Hannan [36], Priestley [55], ...). Anderson [3] suppose ainsi que les $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ont des moments d'ordre 4, et que la somme des cumulants d'ordre au plus 4 est finie. En rajoutant des hypothèses sur le noyau de convergence, il obtient une estimation de l'erreur quadratique entre l'estimateur lissé et la densité spectrale, ainsi qu'une vitesse de convergence. Rosenblatt [59] considère des processus α -mélangeants et suppose que les sommes des cumulants d'ordre 2 sont finies. Blanke et Merlevède [9] modifient l'estimateur lissé en travaillant sur un estimateur lissé tronqué, toujours dans le cas d'un processus α -mélangeant et ayant des moments d'ordre 2. Elles donnent, sous ces hypothèses, l'erreur quadratique ainsi qu'une vitesse de convergence. Hannan [36] travaille sur des processus linéaires et suppose que $\mathcal{F}_{-\infty}$ est triviale, ce qui entraîne des conditions de dépendances faibles. Shao et Wu [60] regardent des processus non linéaires, avec une condition de dépendance faible sur le processus $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ qui implique la décroissance géométrique des covariances du processus.

Notre objectif est le suivant : montrer que sous des conditions adéquates sur c_n , l'estimateur lissé (4.5) converge vers $f(\theta)$ sous les mêmes hypothèses que celles données par Heyde [39] (cf Hannan [37] pour le cas adapté) pour que le Théorème Limite Central ait lieu.

Les conditions introduites par Hannan [37] sont très bien adaptées pour l'analyse des séries temporelles et permettent de considérer aussi bien des suites mélangeantes que des différences de martingales.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la Section 4.2, nous établissons la consistance de l'estimateur lissé. En application, nous obtenons des régions de confiance pour les paramètres dans un modèle de régression paramétrique (Section 4.3) que nous illustrons dans la Section 4.4 par des simulations. La Section 4.5 est consacrée aux preuves.

4.2 Résultats principaux

Donnons notre résultat principal sur la consistance de l'estimateur lissé $f_n(\theta)$ dans \mathbf{L}^1 :

Théorème 4.1. *Supposons que X_0 est régulière et que (4.1) est vérifiée. Supposons de plus que*

$$c_n \mathbb{E} \left(|X_0|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |X_0|^2 \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.6)$$

Alors

$$f_n(\theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(\theta) \text{ dans } \mathbf{L}^1. \quad (4.7)$$

Remarques 4.1.

1. Si X_0 est dans \mathbf{L}^2 , alors il existe $c_n \rightarrow \infty$ tel que (4.6) ait lieu.
2. Supposons que la variable aléatoire X_0 est telle que $\mathbb{E}(|X_0|^{\delta+2}) < \infty$ avec $\delta \in]0, 2]$. Puisque pour tout réel x , $1 \wedge |x|^2 \leq |x|^\delta$, il vient que

$$c_n \mathbb{E}\left(|X_0|^2 (1 \wedge \frac{c_n}{n} |X_0|^2)\right) \leq c_n \mathbb{E}\left(|X_0|^2 \frac{c_n^{\delta/2}}{n^{\delta/2}} |X_0|^\delta\right) \leq \frac{c_n^{1+\delta/2}}{n^{\delta/2}} \mathbb{E}(|X_0|^{\delta+2}).$$

Donc nous devons choisir c_n tel que $\frac{c_n^{1+\delta/2}}{n^{\delta/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

En particulier, si la variable aléatoire X_0 admet un moment d'ordre 4, alors la condition sur c_n est $\frac{c_n^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

3. En utilisant le Corollaire 2 de Peligrad et Utev [51], la condition (4.1) est également satisfaite dès que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \|\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_0)\|_2 < \infty \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \|X_{-k} - \mathbb{E}(X_{-k} | \mathcal{F}_0)\|_2 < \infty. \quad (4.8)$$

Posons $\mathcal{F}_0 = \sigma(X_i, i \leq 0)$. Si X_0 est une variable aléatoire centrée \mathcal{F}_0 -mesurable, (4.8) donne des conditions intéressantes pour des suites de variables aléatoires faiblement dépendantes. Celles-ci pourront être appliquées aux systèmes dynamiques.

D'abord, rappelons les définitions des coefficients faiblement mélangeants, introduits par Dedecker et Prieur [27] : pour tout entier $k \geq 0$,

$$\tilde{\phi}(k) = \tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, X_k) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbb{P}(X_k \leq t | \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(X_k \leq t)\|_\infty,$$

et

$$\tilde{\alpha}(k) = \tilde{\alpha}(\mathcal{F}_0, X_k) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbb{P}(X_k \leq t | \mathcal{F}_0) - \mathbb{P}(X_k \leq t)\|_1.$$

Si $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est $\tilde{\phi}$ -dépendante et est dans \mathbf{L}^p avec $p \in [2, +\infty[$, alors, par l'inégalité de Hölder,

$$\|\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_0)\|_2 \leq \|\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_0)\|_p \leq \sup_{Z \in B_{\frac{p}{p-1}}(\mathcal{F}_0)} \mathbb{E}(Z X_k) \leq 2\tilde{\phi}(k)^{\frac{p-1}{p}} \|X_0\|_p,$$

où pour tout $q \in]1, 2]$, nous notons $B_q(\mathcal{F}_0)$, l'ensemble des variables aléatoires Z , \mathcal{F}_0 -mesurables telles que $\|Z\|_q \leq 1$.

Nous en déduisons que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \tilde{\phi}(k)^{\frac{p-1}{p}} < \infty, \quad (4.9)$$

alors (4.8) est vérifiée.

Notons Q_X la fonction inverse généralisée de $x \mapsto \mathbb{P}(|X| > x)$. Si $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est $\tilde{\alpha}$ -mélangeante et vérifie, il existe $r \in]2, +\infty[$, tel que $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq t^{-r}$, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivie de l'inégalité de Rio (Théorème 1.1 [57]), nous obtenons

$$\|\mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_0)\|_2 = \sup_{Z \in B_2(\mathcal{F}_0)} \mathbb{E}(ZX_k) \leq 2 \left(\int_0^{\tilde{\alpha}(k)} Q_{X_k}^2(u) du \right)^{1/2}.$$

Or

$$\int_0^{\tilde{\alpha}(k)} Q_{X_k}^2(u) du \leq \int_0^{\tilde{\alpha}(k)} \frac{1}{u^{2/r}} du \leq \tilde{\alpha}(k)^{1-2/r}.$$

D'où, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}(k)^{1/2-1/r}}{\sqrt{k}} < \infty,$$

alors (4.8) est vérifiée.

Remarquons que toute cette dernière remarque est encore vraie en mélange fort.

Le Théorème 4.1 combiné au Corollaire 1 de Dedecker, Merlevède et Volný [26] donne le résultat suivant

Corollaire 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 4.1 et si $f(0) > 0$, alors*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{2n\pi|f_n(0)|}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G \text{ en loi,} \quad (4.10)$$

où G est une variable aléatoire gaussienne standard.

4.3 Estimation des paramètres dans un modèle de régression pour des séries temporelles

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite stationnaire de variables aléatoires centrées dans

\mathbf{L}^2 . Posons $\mathcal{F}_i = \sigma(X_j, j \leq i)$.

Considérons le modèle de régression paramétrique suivant,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \alpha_i + X_i, \quad (4.11)$$

où $\beta = (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2$, et $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite déterministe.

Dans ce contexte, nous allons rappeler d'abord le Théorème Limite Central dû à Hannan [37], et vérifié par l'estimateur des moindres carrés des paramètres du modèle (4.11). Pour se faire, nous avons besoin de quelques notations :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{Y}_n = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Nous noterons également $\bar{\alpha} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\bar{Y}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$, et $(A_n)_{kl}$, le coefficient de la k -ième ligne et de la l -ième colonne de A_n .

L'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$ est

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix}, \text{ où } \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_n)(\alpha_i - \bar{\alpha})}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \text{ et } \hat{\beta}_0 = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{\alpha}.$$

Ce qui peut-être simplifié par

$$\hat{\beta} = (A_n' A_n)^{-1} A_n' \mathbb{Y}_n,$$

où le prime désigne la transposée.

En outre, nous supposons, comme dans Hannan [36] et [37], que la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfait les conditions

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \infty$,
- ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}} = 0$,
- iii. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N-p} (A_n)_{ik} (A_n)_{(i+p)l}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (A_n)_{ik}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (A_n)_{il}^2}} = \rho_{kl}$, pour $1 \leq k, l \leq 2$.

Dans notre cas, les ρ_{kl} sont des constantes indépendantes de p . R est la matrice dont les coefficients sont les ρ_{kl} . De plus, R est supposée inversible.

Sous ces conditions, Hannan [37] montre que :

Théorème 4.2. (Hannan [37], Théorème 2)

Supposons que $\mathcal{F}_{-\infty}$ triviale et que X_0 est \mathcal{F}_{∞} -mesurable. Si (4.1) est satisfaite, alors

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \end{pmatrix} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G \text{ en loi,}$$

où G est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance, définie par $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_0, X_k)\right)R^{-1}R'R^{-1}$.

Remarquons que Hannan [37] a montré ce théorème dans le cas adapté, mais que sa preuve peut-être transposée au cas non adapté.

En outre, la somme des covariances, présente dans la matrice de covariance du Théorème Limite Central (Théorème 4.2) de Hannan [37], correspond à $2\pi f(0)$, où f est définie par

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Cov}(X_0, X_k) e^{ik\theta}, \theta \in [-\pi, \pi].$$

En pratique, pour obtenir des ellipsoïdes de confiance, il nous faut un estimateur de $f(\theta)$. Pour cela, considérons l'estimateur $f_n^*(\theta)$ de $f(\theta)$ défini par

$$f_n^*(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_k^* e^{ik\theta}, \theta \in [-\pi, \pi], \quad (4.12)$$

avec

$$\hat{\gamma}_k^* := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_j - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \alpha_j)(Y_{j+|k|} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \alpha_{j+|k|}).$$

Nous allons montrer que

Proposition 4.1. *Sous les mêmes conditions que dans le Théorème 4.1,*

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \|f_n^*(\theta) - f(\theta)\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.13)$$

En combinant la Proposition 4.1 et le Lemme de Slutsky dans le Théorème 4.2, il vient

Corollaire 4.2. *Sous les mêmes conditions que dans le Théorème 4.2 et $f(0) > 0$, on a,*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi|f_n^*(0)|}} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \end{pmatrix} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G \text{ en loi,}$$

où G est une variable aléatoire gaussienne centrée et de matrice de covariance $R^{-1}R'R^{-1}$.

4.4 Simulations

4.4.1 Les modèles

Considérons le modèle suivant

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \alpha_i + X_i. \quad (4.14)$$

Afin d'illustrer nos résultats, nous allons étudier trois modèles différents modélisant la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. De plus, la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ci-dessus sera de la forme, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i = i^\gamma$ avec $\gamma > 0$, et vérifie (i) – (iii) de Hannan [37]. La matrice associée R définie dans la Section 4.3, est

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2\gamma+1}}{\gamma+1} \\ \frac{\sqrt{2\gamma+1}}{\gamma+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4.1.1 Le modèle d'Andrews [4].

Soit (ε_i) une suite stationnaire de variables aléatoires satisfaisant le modèle d'Andrews [4], $2\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \xi_{i+1}$, où ε_0 suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Ainsi, la suite stationnaire $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $X_i = \varepsilon_i - 1/2$. Posons $\mathcal{F}_j = \sigma(\xi_i, i \leq j)$.

Nous voulons appliquer le Corollaire 4.2. Pour se faire, remarquons que

$$\varepsilon_0 = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2^{i+1}} \xi_{-i}. \quad (4.15)$$

Comme les variables aléatoires $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes, nous déduisons de (4.15) que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_k)\|_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(\varepsilon_k)\|_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_{-k}(\varepsilon_0)\|_2 \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{k+1}} \|\xi_0 - \mathbb{E}(\xi_0)\|_2 < +\infty.$$

Donc (4.1) est vérifiée.

Les variables aléatoires sont bornées donc admettent un moment d'ordre 4, d'où c_n doit vérifier $\frac{c_n^2}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

4.4.1.2 Exemple des différences de martingales.

$(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire de différences de martingales construites de la manière suivante : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $X_i = (\xi_{i+1} - \frac{1}{2})\varepsilon_i$, où $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont les variables aléatoires définies et construites comme dans la Section (4.4.1.1). X_i est ainsi \mathcal{F}_{i+1} -mesurable et

$$\mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}_i) = \mathbb{E}((\xi_{i+1} - 1/2)\varepsilon_i | \mathcal{F}_i) = \varepsilon_i \mathbb{E}(\xi_{i+1} - 1/2) = 0.$$

Appliquons le Corollaire 4.2 aux variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Par l'indépendance des $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et par (4.15), il vient que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_k)\|_2 = \|X_0\|_2 < \infty.$$

Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ étant bornées, elles admettent donc un moment d'ordre 4, d'où c_n doit vérifier $\frac{c_n^2}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

4.4.1.3 Exemple sur des variables aléatoires non bornées.

Soit $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite stationnaire de variables aléatoires définie comme dans le modèle d'Andrews [4] (Section 4.4.1.1). $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est dans cette section une suite stationnaire de variables aléatoires non bornées centrées construites ainsi, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $X_i = 1/(\varepsilon_i)^{1/5} - 5/4$. Posons toujours $\mathcal{F}_j = \sigma(\xi_i, i \leq j)$.

Afin de démontrer (4.1), nous vérifions la condition de $\tilde{\phi}$ -mélange (4.9) sur les $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Dans le cas du modèle d'Andrews [4], la suite stationnaire de variables aléatoires $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est $\tilde{\phi}$ -mélangeante, avec $\tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, \varepsilon_k) = \tilde{\phi}(k) \leq 2^{-k}$. Comme $\tilde{\phi}$ est stable par toute transformation monotone, la suite stationnaire de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est $\tilde{\phi}$ -dépendante. Plus précisément, Dedecker et Prieur [27] ont montré que dans le cas d'une transformation monotone,

$$\tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, X_k) \leq \tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, \varepsilon_k).$$

Comme $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est $\tilde{\phi}$ -dépendante et à valeurs dans \mathbf{L}^p , $p \in [2, +\infty[$, nous vérifions bien que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}(\mathcal{F}_0, X_k)^{\frac{p-1}{p}}}{\sqrt{k}} \leq \infty.$$

De plus, $\mathbb{E}(|X_0|^4) < \infty$, nous en déduisons comme précédemment que c_n doit vérifier $\frac{c_n^2}{n} \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$.

4.4.2 Illustrations

D'abord, nous travaillons sur le modèle centré d'Andrews [4] (Section 4.4.1.1). La figure 4.1 représente le nuage de points pour les 50 premiers termes, $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ définis par le modèle (4.14) lorsque $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 3$ et $\alpha_i = \sqrt{i}$. Puis, la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sera prise égale à $\alpha_i = \sqrt{i}$, $\alpha_i = i$ et $\alpha_i = i^2$. Ces trois suites $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifieront bien les conditions de Hannan [37].

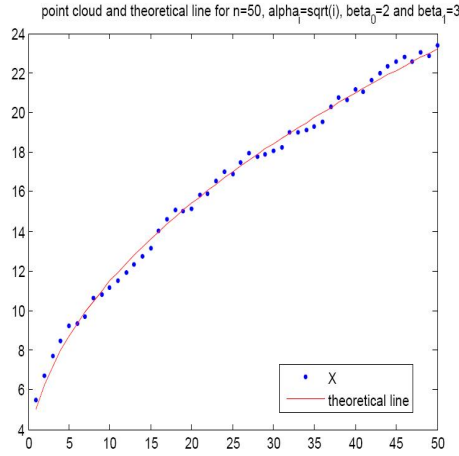


FIGURE 4.1 – Nuage de points et courbe théorique pour $\alpha_i = \sqrt{i}$ dans le cas du modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1).

Si nous souhaitons obtenir des régions de confiance pour les paramètres du modèle de régression (4.14), nous avons besoin d'estimer la somme des covariances. Pour cela, considérons l'estimateur $f_n^*(\theta)$ de la densité spectrale $f(\theta)$ définie par (4.12). Les matrices R associées respectivement à la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, sont

$$R_{\sqrt{i}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_i = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et } R_{i^2} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5}/3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Les figures Fig 4.2- Fig 4.8 représentent des régions de confiance de niveau 95%. Avant de donner la construction des régions de confiance, introduisons quelques notations. Soit

$$F_\nu = R_\nu^{-1} R'_\nu R_\nu^{-1} \quad \text{avec } \nu = \sqrt{i}, i, i^2,$$

et P_ν la matrice obtenue par la décomposition de Cholesky, i.e $P'_\nu P_\nu = F_\nu$.

Le système paramétré des équations de l'ellipsoïde se déduit de

$$\hat{\beta} + \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2\pi|f_n^*|}{n}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2\pi|f_n^*|}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}} \end{pmatrix} P'_\nu \begin{pmatrix} \sqrt{r_\delta} \cos(\theta) \\ \sqrt{r_\delta} \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

où r_δ est le δ -quantile de la fonction de répartition du χ^2 à deux degrés de liberté. Ici δ sera pris égal à 0.95.

Pour certaines figures, en particulier sur l'axe des ordonnées, nous voyons à plusieurs reprises le même nombre. En effet, Matlab ne peut traiter des données avec une précision de 10^{-5} . Pour remédier à ce défaut de précision, nous avons choisi de représenter par une croix, la vraie valeur de β , i.e (2, 3) pour vérifier qu'elle se trouve bien à l'intérieur de la région de confiance tracée.

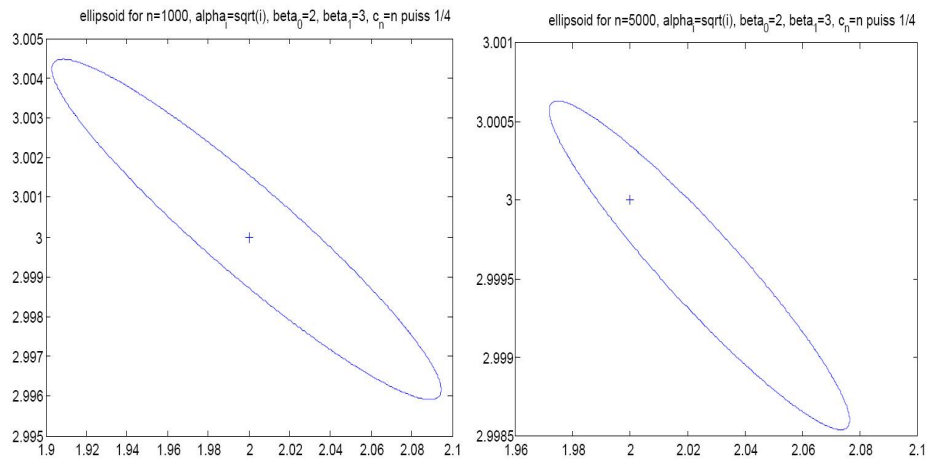


FIGURE 4.2 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1) et $\alpha_i = \sqrt{i}$.

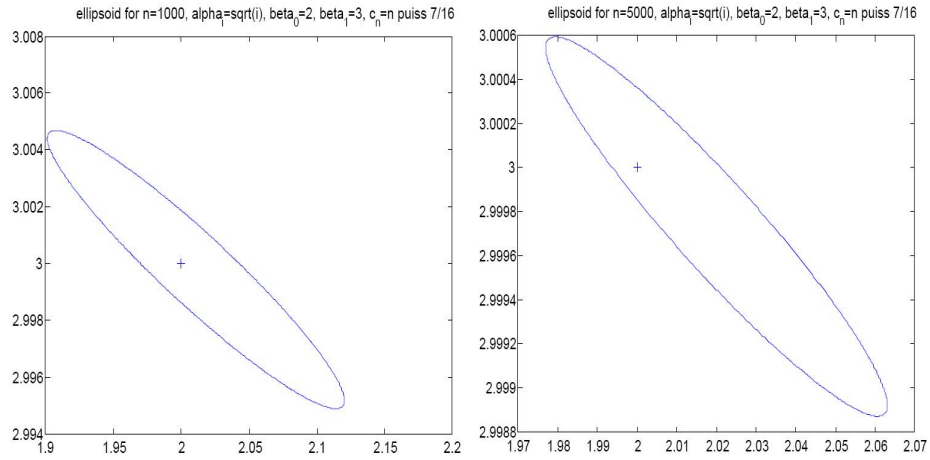


FIGURE 4.3 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1) et $\alpha_i = \sqrt{i}$.

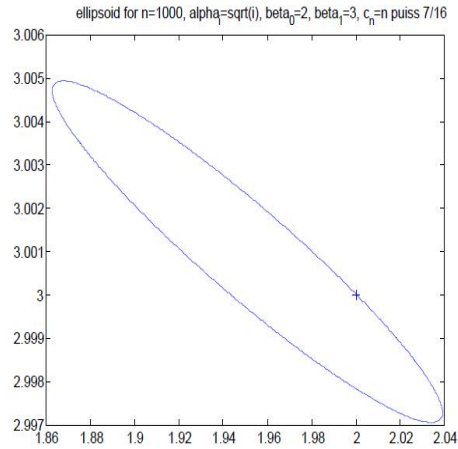


FIGURE 4.4 – Le cas limite représentant une région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$ au rang $n = 1000$ dans S_n , pour le modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1) et $\alpha_i = \sqrt{i}$.

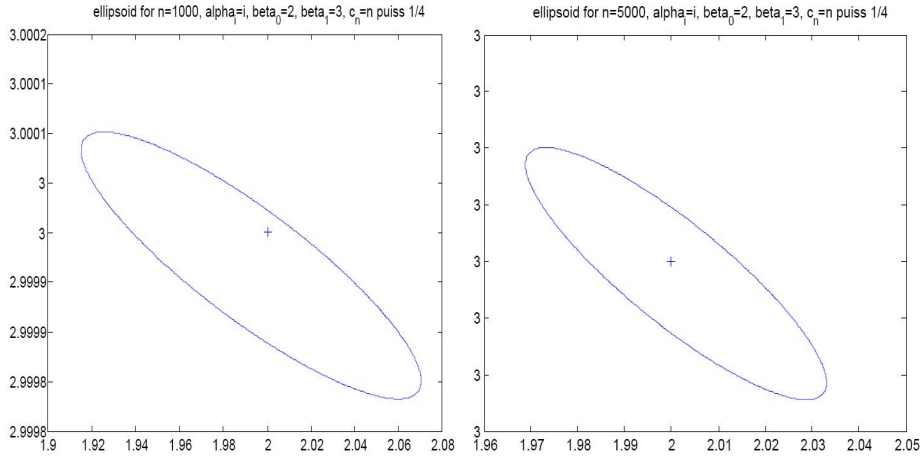


FIGURE 4.5 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1) et $\alpha_i = i$.

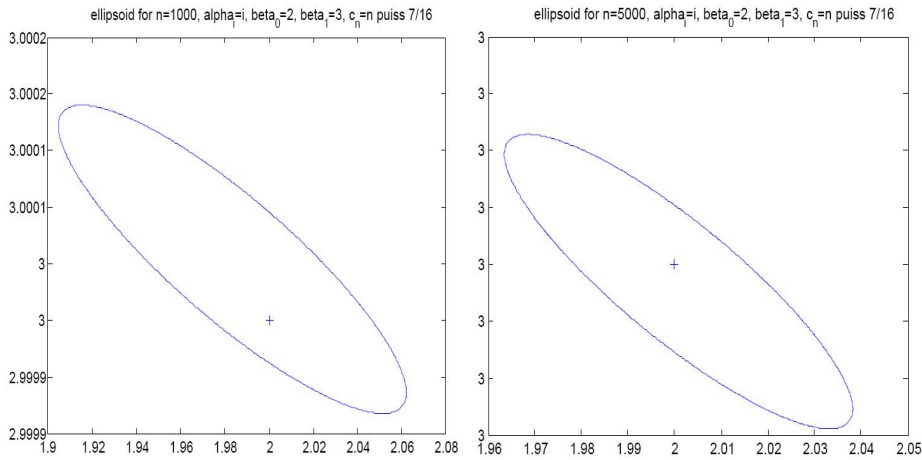


FIGURE 4.6 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1) et $\alpha_i = i$.

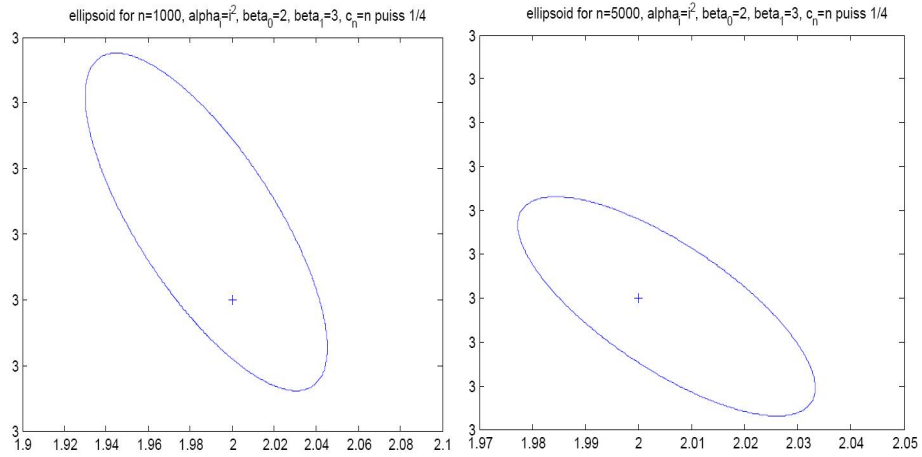


FIGURE 4.7 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1) et $\alpha_i = i^2$.

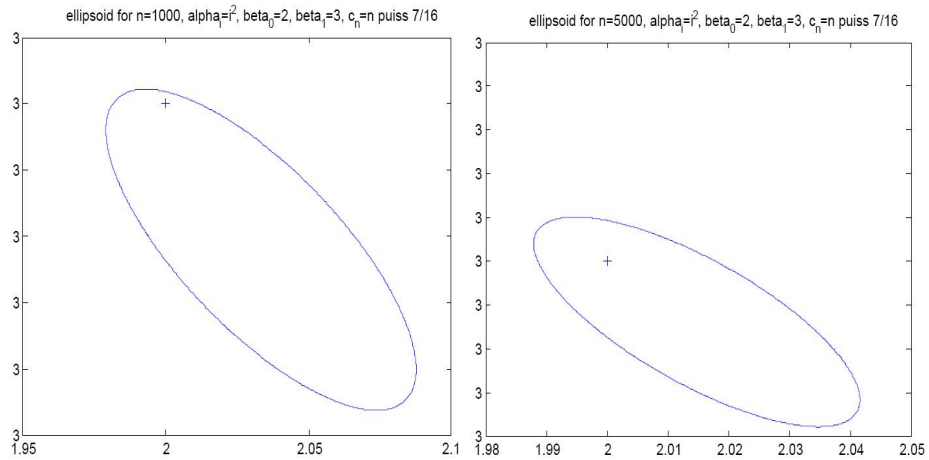


FIGURE 4.8 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle d'Andrews (Section 4.4.1.1) et $\alpha_i = i^2$.

Afin de comparer le rôle joué par la taille de la fenêtre c_n , nous déterminons combien de fois la vraie valeur de β se trouve à l'intérieur de la région de confiance pour $N = 25000$ simulations. D'après le Corollaire 4.2, le ratio devrait être proche de 95%. Pour le rang dans S_n , n sera pris égal à $n = 1000$ ou à $n = 5000$. Voici le résultat obtenu pour le ratio avec $c_n = n^{1/4}$ comme taille de fenêtre,

$n \backslash \alpha_i$	\sqrt{i}	i	i^2
1000	0.9357	0.9377	0.9363
5000	0.9437	0.9466	0.9480

et avec $c_n = n^{7/16}$,

$n \backslash \alpha_i$	\sqrt{i}	i	i^2
1000	0.8974	0.8970	0.8966
5000	0.9326	0.9322	0.9315

Nous constatons que plus le rang n de S_n dans (4.17) est important, plus le ratio est proche de 95%, ce qui est cohérent car le Théorème Limite Central est un théorème asymptotique. Les résultats avec $c_n = n^{7/16}$ sont beaucoup moins bons que pour $c_n = n^{1/4}$. Par son écriture, $f_n^*(\theta)$ est une combinaison linéaire d'environ c_n estimateurs de la covariance. Il est clair que plus n est grand, plus les coefficients d'autocovariance empiriques $\hat{\gamma}_k^*$ seront proches de $\text{Cov}(X_0, X_k)$. Mais ceci est contrebalancé par le nombre croissant de covariances à estimer puisque c_n est une fonction croissante de n . Il s'agit donc du problème classique : compromis biais-variance pour un estimateur. Regardons le biais, d'après la preuve de la Proposition 4.1, il suffit de regarder $\|f(\theta) - \mathbb{E}(f_n(\theta))\|_1$. Or

$$\|f(\theta) - \mathbb{E}(f_n(\theta))\|_1 \leq \frac{4c_n}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_k)| + 2 \sum_{c_n \leq |k|} |\mathbb{E}(X_0 X_k)|.$$

Comme $\frac{c_n}{n} \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini, le terme prépondérant dans la majoration du biais est $\sum_{c_n \leq |k|} |\mathbb{E}(X_0 X_k)|$. Ici, $|\mathbb{E}(X_0 X_k)| \leq C2^{-|k|}$, avec C une constante. Nous en déduisons que $|\mathbb{E}(X_0 X_k)|$ décroît géométriquement vers zéro. Cela implique que f est C^∞ et par conséquent le terme de biais décroît rapidement vers 0, même si c_n croît lentement. Nous pouvons donc penser que le compromis biais-variance se fait pour des suites c_n assez lentes, ce qu'il serait bon de montrer de façon théorique. Ceci explique nos résultats.

Ensuite, nous travaillons avec la suite stationnaire $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de différences de martingales définies à la Section 4.4.1.2. Notre étude est semblable à la précédente. Tout d'abord, nous donnons le nuage de points formé par les 50 premiers termes $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ définis par le modèle (4.14), lorsque $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 3$ et $\alpha_i = \sqrt{i}$. La suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est ensuite prise égale à $\alpha_i = \sqrt{i}$, $\alpha_i = i$ et $\alpha_i = i^2$. Ces trois suites vérifient bien les conditions de Hannan [37].

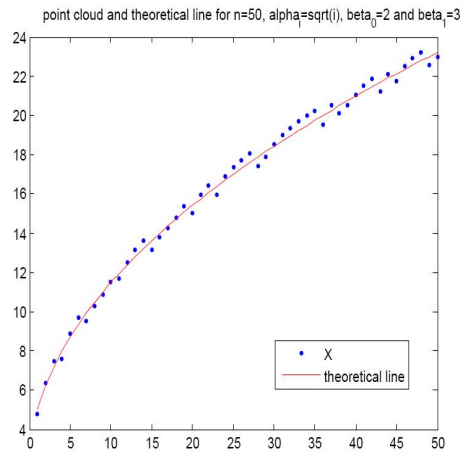


FIGURE 4.9 – Nuage de points et courbe théorique pour $\alpha_i = \sqrt{i}$ dans le modèle des différences de martingales (Section 4.4.1.2).

Si nous souhaitons obtenir des régions de confiance pour l'estimation des paramètres du modèle de régression (4.14), nous avons besoin d'estimer la somme des covariances. Pour cela, prenons l'estimateur de la densité spectrale $f_n^*(\theta)$ définie par (4.12).

4.4. SIMULATIONS

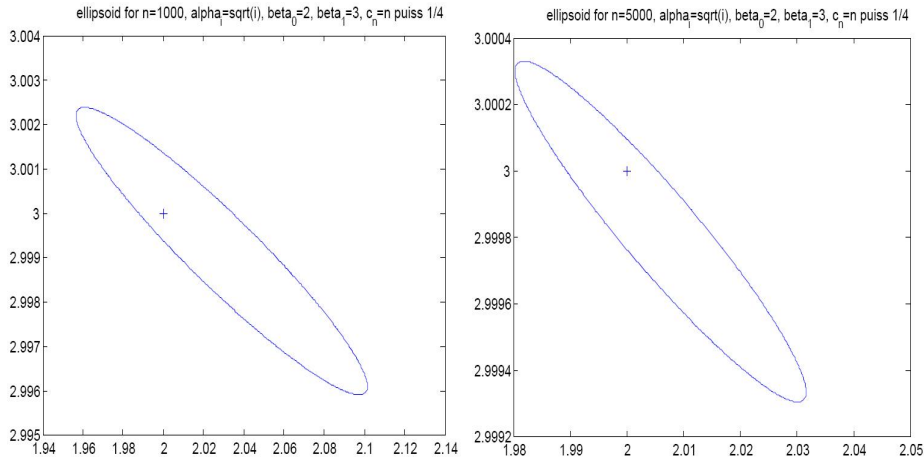


FIGURE 4.10 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle des différences de martingales et $\alpha_i = \sqrt{i}$ (Section 4.4.1.2).

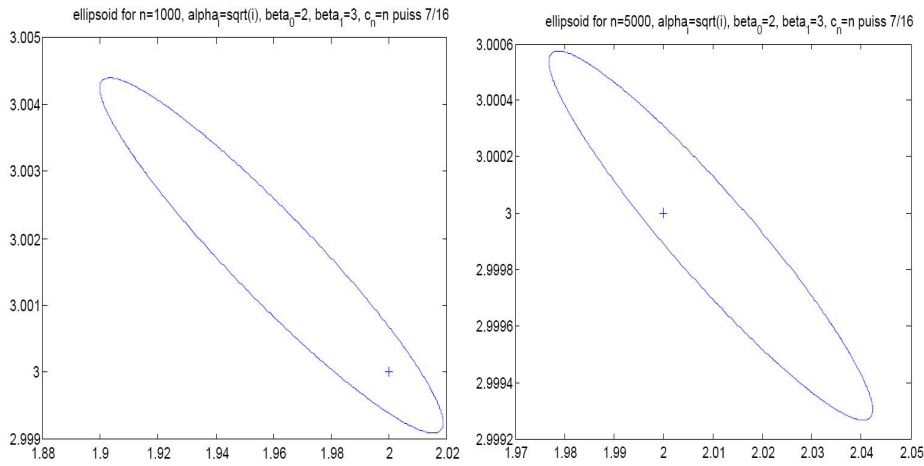


FIGURE 4.11 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle des différences de martingales et $\alpha_i = \sqrt{i}$ (Section 4.4.1.2).

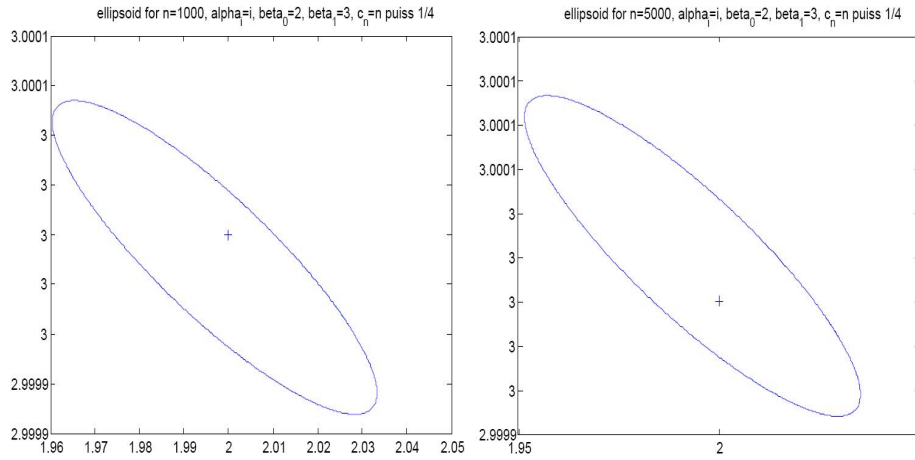


FIGURE 4.12 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle des différences de martingales et $\alpha_i = i$ (Section 4.4.1.2).

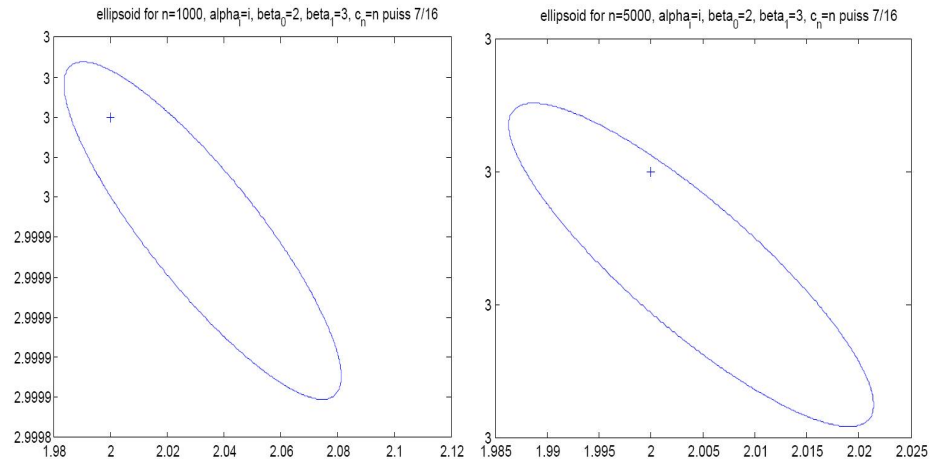


FIGURE 4.13 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle des différences de martingales et $\alpha_i = i$ (Section 4.4.1.2).

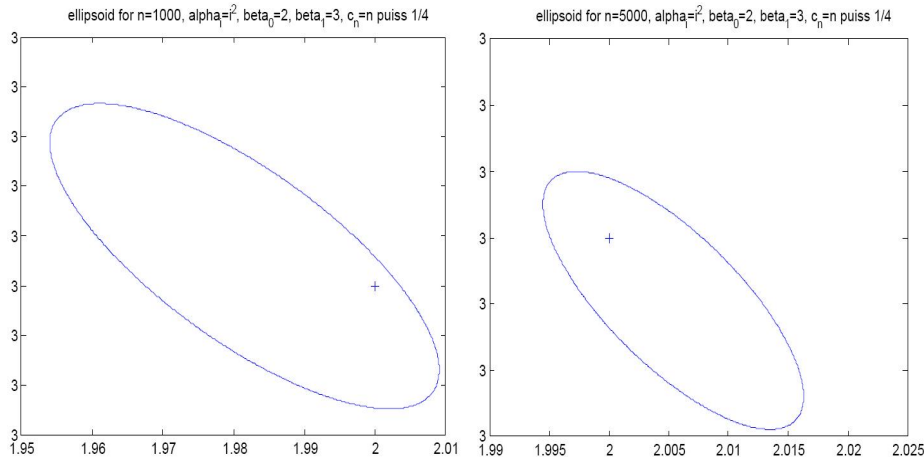


FIGURE 4.14 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle des différences de martingales et $\alpha_i = i^2$ (Section 4.4.1.2).

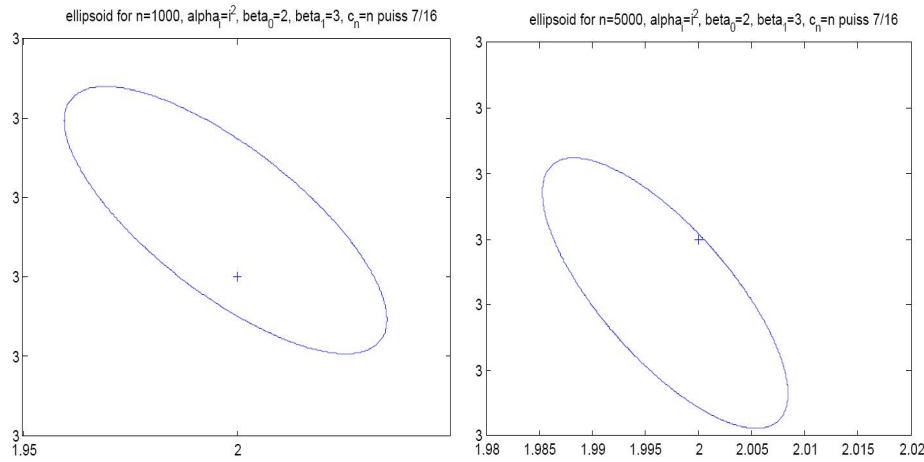


FIGURE 4.15 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle des différences de martingales et $\alpha_i = i^2$ (Section 4.4.1.2).

Pour comparer le rôle joué par les c_n , nous déterminons le nombre de fois que la vraie valeur de β est à l'intérieur de la région de confiance pour $N = 25000$ simulations. Le ratio devrait être proche de 95%. Comme précédemment, nous donnons les résultats pour un rang n dans S_n égal à $n = 1000$ ou à $n = 5000$, et pour $\alpha_i = \sqrt{i}$, $\alpha_i = i$ ou $\alpha_i = i^2$. Voici les résultats du ratio selon la taille de la fenêtre, si $c_n = n^{1/4}$,

$n \backslash \alpha_i$	\sqrt{i}	i	i^2
1000	0.9336	0.9338	0.9333
5000	0.9450	0.9457	0.9461

et si $c_n = n^{7/16}$,

$n \backslash \alpha_i$	\sqrt{i}	i	i^2
1000	0.8970	0.8906	0.8938
5000	0.9294	0.9294	0.9280

Les remarques sont celles déjà faites pour le modèle d' Andrews [4] (Section 4.4.1.1). Seulement, dans le modèle des différences de martingales, nous connaissons un autre estimateur exact de la somme des covariances obtenu par le théorème \mathbf{L}^1 -ergodique, i.e

$$f_n^\diamond = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \alpha_k)^2.$$

Nous souhaitons comparer les deux procédures liées aux deux estimateurs suivants $f_n^*(\theta)$ et $f_n^\diamond(\theta)$. Pour cela, nous déterminons le nombre de fois que la vraie valeur de β est à l'intérieur de la région de confiance pour $N = 25000$ simulations, avec la procédure liée à l'estimateur $f_n^\diamond(\theta)$. Comme précédemment, nous donnons des résultats au rang n , dans S_n , avec $n = 1000$ ou $n = 5000$, et pour $\alpha_i = \sqrt{i}$, $\alpha_i = i$ ou $\alpha_i = i^2$.

$n \backslash \alpha_i$	\sqrt{i}	i	i^2
1000	0.9474	0.9498	0.95
5000	0.9482	0.9506	0.9509

Nous pouvons remarquer que ce résultat est meilleur que le précédent puisque le ratio 95% est atteint dès $n = 1000$. Par notre méthode, nous estimons toutes les covariances, même celles qui sont nulles, donc nous rajoutons de l'erreur, ce qui n'est pas le cas par la seconde méthode puisque nous n'esti-

mons que $\mathbb{E}(X_0^2)$.

Pour finir, nous regardons le modèle de variables aléatoires non bornées $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ (Section 4.4.1.3). Comme précédemment, nous donnons le nuage de points des 50 premiers termes $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, construit selon le modèle (4.14) lorsque $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 3$ et $\alpha_i = \sqrt{i}$.

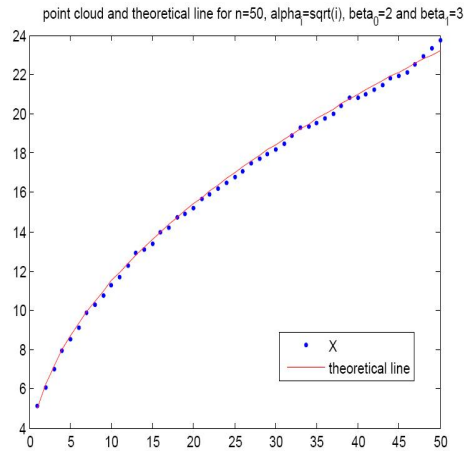


FIGURE 4.16 – Nuage de points et courbe théorique pour $\alpha_i = \sqrt{i}$ dans le modèle de variables aléatoires non bornées.

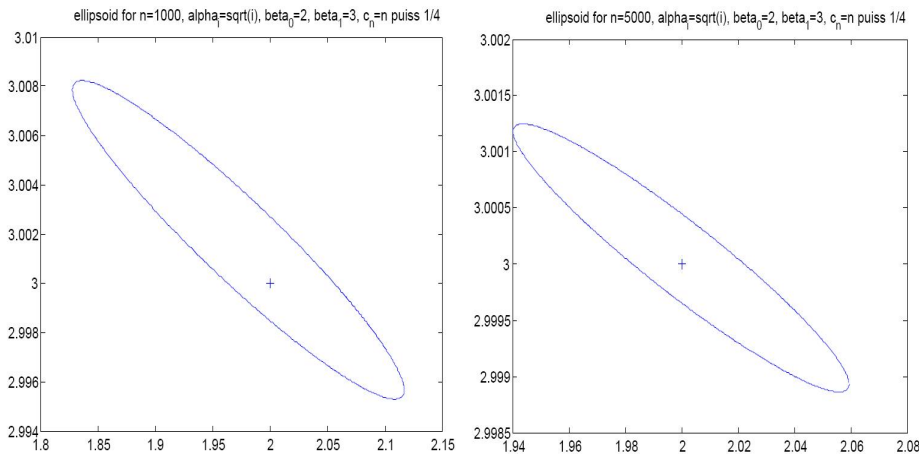


FIGURE 4.17 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle de variables aléatoires non bornées et $\alpha_i = \sqrt{i}$ (Section 4.4.1.3).

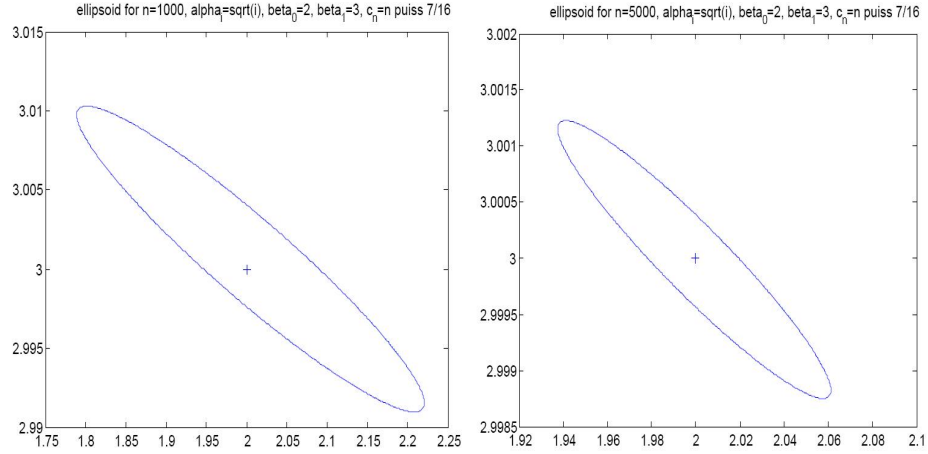


FIGURE 4.18 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle de variables aléatoires non bornées et $\alpha_i = \sqrt{i}$ (Section 4.4.1.3).

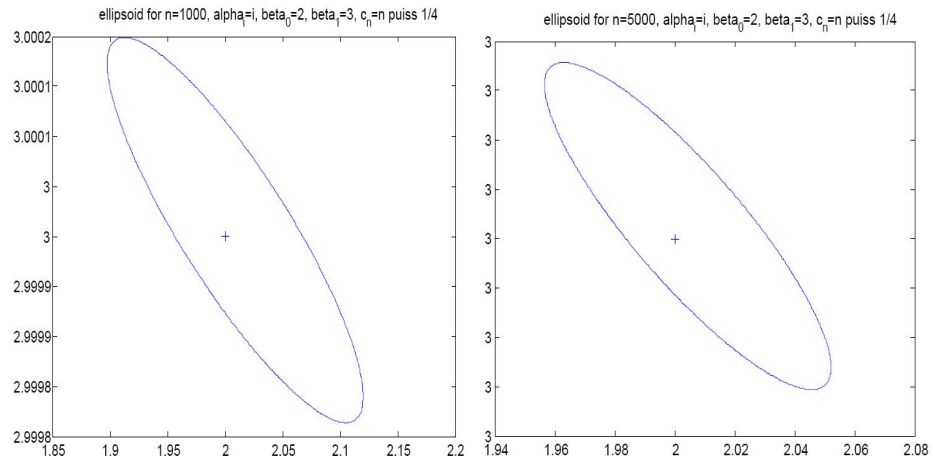


FIGURE 4.19 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{1/4}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle de variables aléatoires non bornées et $\alpha_i = i$ (Section 4.4.1.3).

Enfin, nous donnons les tableaux des ratios pour des régions de confiance de niveau 95%. Les conclusions que nous en tirons sont semblables à celles faites précédemment.

4.4. SIMULATIONS

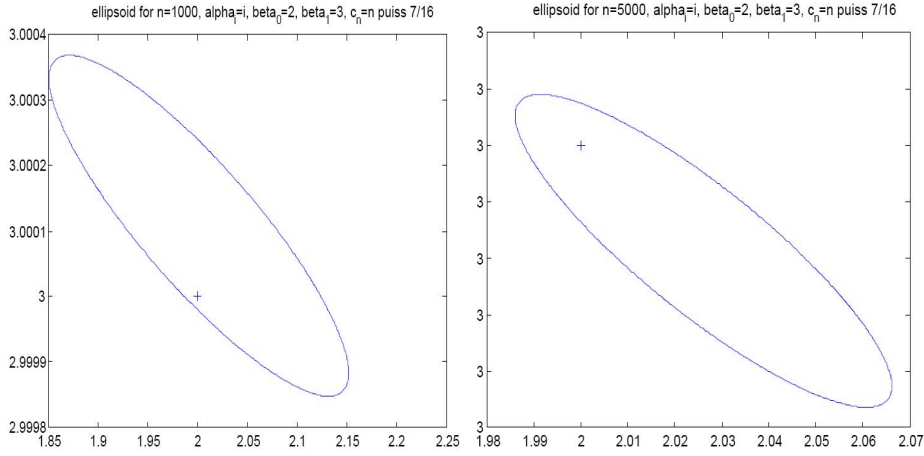


FIGURE 4.20 – Région de confiance de niveau 95% pour $c_n = n^{7/16}$, respectivement au rang $n = 1000$ et $n = 5000$ dans S_n , pour le modèle de variables aléatoires non bornées et $\alpha_i = i$ (Section 4.4.1.3).

Voici les résultat du ratio selon la taille de la fenêtre si $c_n = n^{1/4}$,

$n \backslash \alpha_i$	\sqrt{i}	i	i^2
1000	0.9377	0.9154	0.9169
5000	0.9461	0.9403	0.9400

et si $c_n = n^{7/16}$,

$n \backslash \alpha_i$	\sqrt{i}	i	i^2
1000	0.8946	0.8804	0.8800
5000	0.9316	0.9248	0.9245

4.5 Preuves

4.5.1 Preuve du Théorème 4.1

Notons, pour tout entier $|k| \leq n-1$,

$$\hat{\gamma}_k^* := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (X_j - \mu)(X_{j+|k|} - \mu), \quad (4.18)$$

où $\mu = \mathbb{E}(X_0)$, et définissons $f_n^*(\theta)$ comme suit,

$$f_n^*(\theta) := \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_k^* e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (4.19)$$

Sans perte de généralité, nous pouvons choisir $2c_n \leq n-1$.
Pour montrer (4.7), il suffit de montrer que

$$f_n^*(\theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(\theta) \text{ dans } \mathbf{L}^1. \quad (4.20)$$

En effet, puisque K est à support compact sur $[-2, 2]$ et majoré par 1, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \|f_n(\theta) - f_n^*(\theta)\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \left\| \sum_{|k| \leq 2c_n} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) [\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k^*] e^{ik\theta} \right\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_0^*\|_1 + \frac{2}{2\pi} \sum_{k=1}^{2c_n} \|\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k^*\|_1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Par (4.1), remarquons que

$$\|\hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_0^*\|_1 = \|\bar{X}_n - \mu\|_2^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\text{Cov}(X_0, X_k)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (4.22)$$

Également, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par stationnarité,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2c_n} \|\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k^*\|_1 &\leq \sum_{k=1}^{2c_n} \left\| (\bar{X}_n - \mu) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (X_{i+k} - \mu) \right\|_1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2c_n} \left\| (\bar{X}_n - \mu) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (X_i - \bar{X}_n) \right\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{2c_n} \|\bar{X}_n - \mu\|_2 \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (X_{i+k} - \mu) \right\|_2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2c_n} \|\bar{X}_n - \mu\|_2 \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (X_i - \bar{X}_n) \right\|_2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{2c_n} \|\bar{X}_n - \mu\|_2 \left\| \frac{n-k}{n} (\bar{X}_{n-k} - \mu) \right\|_2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2c_n} \|\bar{X}_n - \mu\|_2 \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (X_i - \mu) \right\|_2 \\
&\quad + \|\bar{X}_n - \mu\|_2^2 \sum_{k=1}^{2c_n} \frac{n-k}{n} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

D'où $\sum_{k=1}^{2c_n} \|\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k^*\|_1 = O\left(\frac{c_n}{n}\right)$ et donc converge vers 0.

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\theta) - f_n^*(\theta)\|_1 = 0$, il suffit bien de prouver (4.20).

Pour se faire, soit m un entier tel que $1 \leq 2m \leq 2c_n \leq n-1$. Définissons, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{X}_{i,m} := \mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}_{i+m}) - \mathbb{E}(X_i | \mathcal{F}_{i-m}).$$

Soit

$$\tilde{f}_n^m(\theta) := \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_{k,m} e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

où

$$\hat{\gamma}_{k,m} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} \tilde{X}_{j,m} \tilde{X}_{j+|k|,m}.$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n^*(\theta) - \tilde{f}_n^m(\theta)\|_1 = 0 \quad (4.24)$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{f}_n^m(\theta) - \mathbb{E}(\tilde{f}_n^m(\theta))\|_1 = 0. \quad (4.25)$$

Pour montrer (4.24), définissons

$$S_n^*(\theta) = \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) e^{ik\theta} \quad \text{et} \quad \tilde{S}_n^m(\theta) = \sum_{k=1}^n \tilde{X}_{k,m} e^{ik\theta}.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \|S_n^*(\theta) - \tilde{S}_n^m(\theta)\|_2^2 &\leq \frac{2}{n} \left\| \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k+m})) e^{ik\theta} \right\|_2^2 \\ &\quad + \frac{2}{n} \left\| \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k - \mu | \mathcal{F}_{k-m}) e^{ik\theta} \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

En utilisant la régularité de X_0 , nous obtenons par orthogonalité

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n ((X_k - \mathbb{E}(X_k | \mathcal{F}_{k+m})) e^{ik\theta}) \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+m+1}^{\infty} P_j(X_k) e^{ik\theta} \right\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=m+2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \|P_j(X_k)\|_2 \mathbf{1}_{\{k \leq j-m-1\}} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{r=-\infty}^{-(m+1)} \|P_0(X_r)\|_2 \right)^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k - \mu | \mathcal{F}_{k-m}) e^{ik\theta} \right\|_2^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=m}^{\infty} \|P_0(X_k)\|_2 \right)^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Donc (4.1) entraîne que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|S_n^*(\theta) - \tilde{S}_n^m(\theta)\|_2^2 = 0. \quad (4.29)$$

Par ailleurs, posons

$$I_n^*(\theta) = \frac{1}{2\pi n} |S_n^*(\theta)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1-n}^{n-1} \hat{\gamma}_k^* e^{ik\theta},$$

et

$$\tilde{I}_n^m(\theta) = \frac{1}{2\pi n} |\tilde{S}_n^m(\theta)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1-n}^{n-1} \hat{\gamma}_{k,m} e^{ik\theta}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} \|I_n^*(\theta) - \tilde{I}_n^m(\theta)\|_1 &= \frac{1}{2\pi n} \left\| |S_n^*(\theta)|^2 - |\tilde{S}_n^m(\theta)|^2 \right\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} \|S_n^*(\theta) - \tilde{S}_n^m(\theta)\|_2 \left(\frac{\|S_n^*(\theta)\|_2}{\sqrt{n}} + \frac{\|\tilde{S}_n^m(\theta)\|_2}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Donc en utilisant (4.29) et le fait que $\sqrt{n}^{-1} \|S_n^*(\theta)\|_2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_0(X_k)\|_2$, il vient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|I_n(\theta) - \tilde{I}_n^m(\theta)\|_1 = 0. \quad (4.31)$$

Comme

$$\begin{aligned} \|f_n^*(\theta) - \tilde{f}_n^m(\theta)\|_1 &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \hat{K}(u) \left(I_n^* \left(\frac{u}{c_n} + \theta \right) - \tilde{I}_n^m \left(\frac{u}{c_n} + \theta \right) \right) du \right\|_1 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{K}(u)| du \right) \|I_n^*(\theta) - \tilde{I}_n^m(\theta)\|_1, \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec $\hat{K}(\cdot)$ la transformée de Fourier de K , (4.31) entraîne (4.24).

Par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} \|f_n(\theta) - f(\theta)\|_1 &\leq \|f_n(\theta) - \tilde{f}_n^m(\theta)\|_1 + \|\tilde{f}_n^m(\theta) - \mathbb{E}(\tilde{f}_n^m(\theta))\|_1 \\ &\quad + \|\mathbb{E}(\tilde{f}_n^m(\theta)) - \mathbb{E}(f_n(\theta))\|_1 + \|\mathbb{E}(f_n(\theta)) - f(\theta)\|_1 \\ &\leq 2\|\tilde{f}_n^m(\theta) - f_n^*(\theta)\|_1 + 2\|f_n^*(\theta) - f_n(\theta)\|_1 \\ &\quad + \|\tilde{f}_n^m(\theta) - \mathbb{E}(\tilde{f}_n^m(\theta))\|_1 + \|\mathbb{E}(f_n(\theta)) - f(\theta)\|_1. \end{aligned}$$

Or, comme $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ et $\lim_{u \rightarrow 0} K(u) = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{E}(f_n(\theta)) - f(\theta)\|_1 = 0,$$

donc il suffit de montrer (4.25). Sans perte de généralité, nous supposons que $\theta = 0$. Réécrivons

$$\tilde{f}_n^m = \frac{2}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} K\left(\frac{k}{c_n}\right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} \tilde{X}_{j,m} \tilde{X}_{j+k,m} + \frac{1}{2\pi n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_{i,m}^2,$$

il vient

$$\|\tilde{f}_n^m - \mathbb{E}(\tilde{f}_n^m)\|_1 \leq \frac{2}{2\pi} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} K\left(\frac{k}{c_n}\right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} (\tilde{X}_{j,m} \tilde{X}_{j+k,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{j,m} \tilde{X}_{j+k,m})) \right\|_1$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_{i,m}^2 - \mathbb{E}(\tilde{X}_{0,m}^2) \right\|_1 \\
 \leq & \frac{2}{2\pi} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-1} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) (\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m})) \right\|_1 \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_{i,m}^2 - \mathbb{E}(\tilde{X}_{0,m}^2) \right\|_1. \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

Par le Théorème \mathbf{L}^1 -ergodique, nous avons

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_{i,m}^2 - \mathbb{E}(\tilde{X}_{0,m}^2) \right\|_1 = 0.$$

Ainsi, pour prouver (4.25), il suffit de démontrer que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-1} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) (\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m})) \right\|_1 = 0. \tag{4.34}$$

Comme

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) \mathbb{E}(\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m}) = 0,$$

nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-1} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) (\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m})) \right\|_1 \\
 \leq & \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{j=(i-2m+1) \vee 1}^{i-1} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) (\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m})) \right\|_1 \\
 & + \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} \right\|_1 \\
 \leq & \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=1}^{n-k} K\left(\frac{k}{c_n}\right) (\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{i+k,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{i+k,m})) \right\|_1 \\
 & + \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} \right\|_1. \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

Pour le premier terme dans le membre de droite de l'inégalité (4.35), le Théorème \mathbf{L}^1 -ergodique nous donne

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2m-1} \sum_{i=1}^{n-k} K\left(\frac{k}{c_n}\right) (\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{i+k,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{i+k,m})) \right\|_1 \\ & \leq \sum_{k=1}^{2m-1} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{i+k,m} - \mathbb{E}(\tilde{X}_{0,m} \tilde{X}_{k,m})) \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Donc, il suffit de montrer que le second terme du membre de droite de l'inégalité (4.35) satisfait

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} \right\|_1 = 0. \quad (4.37)$$

D'abord par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m} \right\|_1 \\ & \leq \sum_{l=1}^{2m} \left\| \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{[n/2m]-1} \tilde{X}_{2rm+l,m} \sum_{j=(2rm+l-2c_n) \vee 1}^{2(r-1)m+l} K\left(\frac{2rm+l-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{j,m} \right\|_1 \\ & \quad + \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2[n/2m]m+1}^n \tilde{X}_{i,m} \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{j,m} \right\|_1. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pour le second terme du membre de droite de (4.38), par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par stationnarité, nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=2[n/2m]m+1}^n \tilde{X}_{i,m} \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} K\left(\frac{i-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{j,m} \right\|_1 \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=2[n/2m]m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} \|\tilde{X}_{i,m} \tilde{X}_{j,m}\|_1 \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=2[n/2m]m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} \|\tilde{X}_{0,m}\|_2^2 \\ & \leq 4 \frac{1}{n} \sum_{i=2[n/2m]m+1}^n \sum_{j=(i-2c_n) \vee 1}^{i-2m} \|X_0\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\leq 16m \frac{c_n}{n} \|X_0\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.39)$$

En utilisant les idées développées par Dedecker [19] dans sa preuve du Théorème 1, nous traitons le premier terme du membre de droite de (4.38). Ainsi, nous introduisons quelques notations supplémentaires,

Notation 4.1. Soit la fonction φ définie par $\varphi'(0) = \varphi(0) = 0$ et $\varphi''(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{\{|t| < 1\}}$, c'est-à-dire la fonction symétrique telle que, pour $t \geq 0$, $\varphi(t) = \frac{1}{6}(1 - t)^3\mathbf{1}_{\{t < 1\}} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}$.

Posons

$$Z(r, n, m) := \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{\lfloor n/2m \rfloor - 1} \tilde{X}_{2rm+l, m} \sum_{j=(2rm+l-2c_n) \vee 1}^{2(r-1)m+l} K\left(\frac{2rm+l-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{j, m}.$$

Pour démontrer que le premier terme dans (4.38) est négligeable, il suffit de montrer que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\varphi(Z(r, n, m))) = 0. \quad (4.40)$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, par la croissance de φ , il existe une constante C telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z(r, n, m)|) &\leq C \mathbb{E}(\varphi(Z(r, n, m))\mathbf{1}_{\{|Z(r, n, m)| > \varepsilon\}}) + \mathbb{E}(|Z(r, n, m)|\mathbf{1}_{\{|Z(r, n, m)| < \varepsilon\}}) \\ &\leq C \mathbb{E}(\varphi(Z(r, n, m))) + \varepsilon \text{ par la positivité de } \varphi. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pour montrer que (4.40) est négligeable, nous utiliserons les deux lemmes élémentaires suivants.

Lemme 4.1. Nous avons l'inégalité suivante sur φ ,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x)| \leq \psi(h), \quad (4.42)$$

où

$$\psi : h \mapsto |h|^2 \mathbf{1}_{\{|h| \leq 1\}} + (2|h| - 1) \mathbf{1}_{\{|h| > 1\}}.$$

Preuve du Lemme 4.1. Puisque φ est continue et dérivable au voisinage de zéro, en appliquant la formule de Taylor, nous obtenons les majorations suivantes,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2} |h|^2 \sup_{u \in \mathbb{R}} |\varphi''(u)| \leq \frac{1}{2} |h|^2,$$

et, par l'inégalité triangulaire,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x)| \leq |\varphi(x+h) - \varphi(x)| + |h| |\varphi'(x)| \leq 2|h| \sup_{u \in \mathbb{R}} |\varphi'(u)| \leq |h|.$$

Nous obtenons bien l'inégalité (4.42). \square

Lemme 4.2. *Nous avons également, pour tout réel x ,*

$$|x|(1 \wedge |x|) \leq \psi(x) \leq 2|x|(1 \wedge |x|).$$

Preuve du Lemme 4.2. Nous avons le graphe suivant Figure 4.21.

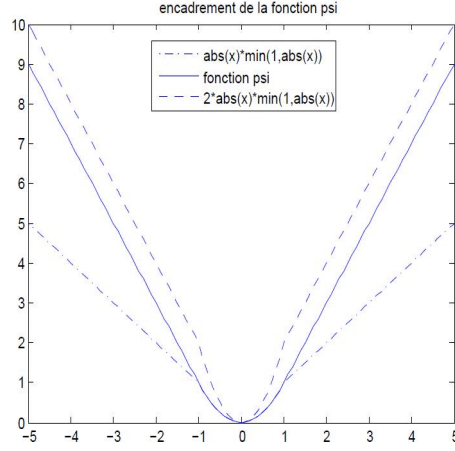


FIGURE 4.21 – Encadrement de la fonction ψ .

A partir de maintenant, on cherche à établir (4.40). Il vient

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}(\varphi(Z(r, n, m))) \\
 &= \sum_{i=1}^{[n/2m]-1} \mathbb{E} \left(\left[\varphi \left(\frac{1}{n} \sum_{q=1}^i \tilde{X}_{2qm+l,m} \sum_{j=(2qm+l-2c_n) \vee 1}^{2(q-1)m+l} K \left(\frac{2qm+l-j}{c_n} \right) \tilde{X}_{j,m} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \varphi \left(\frac{1}{n} \sum_{q=1}^{i-1} \tilde{X}_{2qm+l,m} \sum_{j=(2qm+l-2c_n) \vee 1}^{2(q-1)m+l} K \left(\frac{2qm+l-j}{c_n} \right) \tilde{X}_{j,m} \right) \right] \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{[n/2m]-1} \left| \mathbb{E} \left(\varphi' \left(\frac{1}{n} \sum_{q=1}^{i-1} \tilde{X}_{2qm+l,m} \sum_{j=(2qm+l-2c_n) \vee 1}^{2(q-1)m+l} K \left(\frac{2qm+l-j}{c_n} \right) \tilde{X}_{j,m} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \times \frac{1}{n} \tilde{X}_{2im+l,m} \sum_{j=(2im+l-2c_n) \vee 1}^{2(i-1)m+l} K \left(\frac{2im+l-j}{c_n} \right) \tilde{X}_{j,m} \right) \right| \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{[n/2m]-1} \mathbb{E} (|A(i, m)|^2 \mathbf{1}_{\{|A(i, m)| \leq 1\}} + (2|A(i, m)| - 1) \mathbf{1}_{\{|A(i, m)| > 1\}}),
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

où

$$A(i, m) := \frac{1}{n} \tilde{X}_{2im+l, m} \sum_{j=(2im+l-2c_n) \vee 1}^{2(i-1)m+l} K\left(\frac{2im+l-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{j, m}.$$

Par définition, $(\tilde{X}_{i, m})_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifie

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_{2im+l, m} | \mathcal{F}_{2im+l-m}) = 0.$$

Donc, nous en déduisons

$$\mathbb{E}(\varphi(Z(r, n, m))) \leq \sum_{i=1}^{\lfloor n/2m \rfloor - 1} \mathbb{E}(|A(i, m)|^2 \mathbf{1}_{\{|A(i, m)| \leq 1\}} + (2|A(i, m)| - 1) \mathbf{1}_{\{|A(i, m)| > 1\}}).$$

Pour l'étude du second terme dans le membre de droite de (4.43), posons

$$B(i, j, m, l) := \frac{[(2(i-1)m+l) - ((2im+l-2c_n) \vee 1) + 1]}{n} K\left(\frac{2im+l-j}{c_n}\right) \tilde{X}_{2im+l, m} \tilde{X}_{j, m}.$$

En utilisant la convexité de ψ et le lemme 3 de Dedecker [19], nous avons que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\psi(A(i, m))) \\ & \leq \frac{1}{[(2(i-1)m+l) - ((2im+l-2c_n) \vee 1) + 1]} \\ & \quad \sum_{j=(2im+l-2c_n) \vee 1}^{2(i-1)m+l} \mathbb{E}(\psi(B(i, j, m, l))) \\ & \leq 2 \frac{1}{[(2(i-1)m+l) - ((2im+l-2c_n) \vee 1) + 1]} \\ & \quad \sum_{j=(2im+l-2c_n) \vee 1}^{2(i-1)m+l} \mathbb{E}\left(\frac{2c_n}{n} |\tilde{X}_{0, m}|^2 (1 \wedge 2 \frac{c_n}{n} |\tilde{X}_{0, m}|^2)\right) \\ & \leq 8 \frac{c_n}{n} \mathbb{E}\left(|\tilde{X}_{0, m}|^2 (1 \wedge \frac{c_n}{n} |\tilde{X}_{0, m}|^2)\right). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Donc (4.40) sera vraie si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \mathbb{E}\left(|\tilde{X}_{0, m}|^2 (1 \wedge \frac{c_n}{n} |\tilde{X}_{0, m}|^2)\right) = 0. \tag{4.45}$$

Pour montrer (4.45), remarquons que

$$c_n \mathbb{E}\left(|\tilde{X}_{0, m}|^2 (1 \wedge \frac{c_n}{n} |\tilde{X}_{0, m}|^2)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4c_n \mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \right) \right) \\
&\quad + 4c_n \mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \right) \right) \\
&\quad + 4c_n \mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \right) \right) \\
&\quad + 4c_n \mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \right) \right). \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Pour le premier et le dernier termes de (4.46), nous utilisons la convexité de ψ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
c_n \mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \right) \right) &\leq n \mathbb{E} \left(\psi \left(\mathbb{E} \left(\frac{c_n}{n} |X_0|^2 | \mathcal{F}_m \right) \right) \right) \\
&\leq n \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\psi \left(\frac{c_n}{n} |X_0|^2 \right) | \mathcal{F}_m \right) \right) \\
&\leq n \mathbb{E} \left(\psi \left(\frac{c_n}{n} |X_0|^2 \right) \right) \\
&\leq 2c_n \mathbb{E} \left(|X_0|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |X_0|^2 \right) \right). \quad (4.47)
\end{aligned}$$

De façon similaire,

$$c_n \mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \right) \right) \leq 2c_n \mathbb{E} \left(|X_0|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |X_0|^2 \right) \right). \quad (4.48)$$

Pour le second terme de (4.46), toujours par la convexité de ψ , nous obtenons que

$$\begin{aligned}
&n \mathbb{E} \left(\frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \right) \right) \\
&\leq n \mathbb{E} \left(\frac{c_n}{n} \mathbb{E}(|X_0|^2 | \mathcal{F}_m) \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} \mathbb{E}(|X_0|^2 | \mathcal{F}_{-m}) \right) \right) \\
&\leq n \mathbb{E} \left(\psi \left(\mathbb{E} \left(\frac{c_n}{n} |X_0|^2 | \mathcal{F}_{-m} \right) \right) \right) \\
&\leq 2c_n \mathbb{E} \left(|X_0|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |X_0|^2 \right) \right). \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Comme $g : x \mapsto 1 \wedge x$ est une fonction concave sur \mathbb{R}_+^* et ψ est une fonction convexe, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
&c_n \mathbb{E} \left(|\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_{-m})|^2 \left(1 \wedge \frac{c_n}{n} |\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{F}_m)|^2 \right) \right) \\
&\leq n \mathbb{E} \left(\frac{c_n}{n} \mathbb{E}(|X_0|^2 | \mathcal{F}_{-m}) \mathbb{E} \left(g \left(\frac{c_n}{n} \mathbb{E}(|X_0|^2 | \mathcal{F}_m) \right) | \mathcal{F}_{-m} \right) \right) \\
&\leq n \mathbb{E} \left(\frac{c_n}{n} \mathbb{E}(|X_0|^2 | \mathcal{F}_{-m}) g \left(\mathbb{E} \left(\frac{c_n}{n} \mathbb{E}(|X_0|^2 | \mathcal{F}_m) | \mathcal{F}_{-m} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq n\mathbb{E}\left(\frac{c_n}{n}\mathbb{E}(|X_0|^2|\mathcal{F}_{-m})(1 \wedge \frac{c_n}{n}\mathbb{E}(|X_0|^2|\mathcal{F}_{-m}))\right) \\
 &\leq n\mathbb{E}\left(\psi\left(\frac{c_n}{n}\mathbb{E}(|X_0|^2|\mathcal{F}_{-m})\right)\right) \\
 &\leq 2c_n\mathbb{E}\left(|X_0|^2(1 \wedge \frac{c_n}{n}|X_0|^2)\right). \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

En tenant compte des majorations précédentes, (4.45) est donc vérifiée dès que (4.6) vraie. \square

4.5.2 Preuve de la Proposition 4.1

Rappelons que si

$$f_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

avec

$$\hat{\gamma}_k := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} X_j X_{j+|k|} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_j - \beta_0 - \beta_1 \alpha_j)(Y_{j+|k|} - \beta_0 - \beta_1 \alpha_{j+|k|}).$$

Alors, le Théorème 4.1 donne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\theta) - f(\theta)\|_1 = 0.$$

Le problème ici, est que nous ne connaissons que les données $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Par conséquent, il reste à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^*(\theta) - f_n(\theta)\|_1 = 0. \tag{4.51}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \|f_n^*(\theta) - f_n(\theta)\|_1 &\leq \left\| \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_k^* e^{ik\theta} - \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n-1} K\left(\frac{|k|}{c_n}\right) \hat{\gamma}_k e^{ik\theta} \right\|_1 \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq 2c_n} \|\hat{\gamma}_k^* - \hat{\gamma}_k\|_1. \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

Puisque c_n satisfait $c_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour montrer (4.51), il suffit de prouver que

$$\|\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k^*\| = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.53}$$

Comme $\hat{\beta}_0 = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{\alpha}$, il vient que

$$\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k^* = \sum_{i=1}^8 I_{i,n}, \quad (4.54)$$

où

$$\begin{aligned} I_{1,n} &:= \frac{1}{n} (\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}) \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_{j+|k|} - \beta_0 - \beta_1 \alpha_{j+|k|}), \\ I_{2,n} &:= \frac{1}{n} (\hat{\beta}_1 - \beta_1) \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha}) (Y_{j+|k|} - \beta_0 - \beta_1 \alpha_{j+|k|}), \\ I_{3,n} &:= \frac{1}{n} (\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}) \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_j - \beta_0 - \beta_1 \alpha_j), \\ I_{4,n} &:= \frac{1}{n} (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum_{j=1}^{n-|k|} (\bar{\alpha} - \alpha_{j+|k|}) (Y_j - \beta_0 - \beta_1 \alpha_j), \\ I_{5,n} &:= \frac{1}{n} (\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha})^2 [|k| - n], \\ I_{6,n} &:= \frac{1}{n} (\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}) (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha}), \\ I_{7,n} &:= \frac{1}{n} (\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}) (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_{j+|k|} - \bar{\alpha}), \\ I_{8,n} &:= \frac{1}{n} (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha}) (\bar{\alpha} - \alpha_{j+|k|}). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons à majorer les bornes suivantes

$$\|\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}\|_2 \text{ et } \|\hat{\beta}_1 - \beta_1\|_2, \quad (4.55)$$

puis

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_{j+|k|} - \beta_0 - \beta_1 \alpha_{j+|k|}) \right\|_2 \text{ et } \left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_j - \beta_0 - \beta_1 \alpha_j) \right\|_2, \quad (4.56)$$

ainsi que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha})(Y_{j+|k|} - \beta_0 - \beta_1 \alpha_{j+|k|}) \right\|_2 \text{ et } \left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\bar{\alpha} - \alpha_{j+|k|})(Y_j - \beta_0 - \beta_1 \alpha_j) \right\|_2, \quad (4.57)$$

et enfin

$$\left| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha}) \right|, \left| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\bar{\alpha} - \alpha_{j+|k|}) \right| \text{ et } \left| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha})(\bar{\alpha} - \alpha_{j+|k|}) \right|. \quad (4.58)$$

Comme $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \alpha_i + X_i$, remarquons, par stationnarité, que

$$\|\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|}.$$

De plus, il vient

$$\begin{aligned} \|\beta_1 - \hat{\beta}_1\|_2 &= \mathbb{E} \left(\left| \beta_1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 \right]} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n [(\alpha_i - \bar{\alpha})(-\beta_0 - \bar{\alpha} \beta_1 + \bar{Y}_n) - (\alpha_i - \bar{\alpha}) X_i] \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\left| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right|}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \|\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}\|_2 + \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha}) X_i \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'un côté,

$$\left| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2},$$

nous en déduisons donc que

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right|}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \|\bar{Y}_n - \beta_0 - \beta_1 \bar{\alpha}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}} \sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|}. \quad (4.59)$$

D'un autre côté, par stationnarité et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha}) X_i \right|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \sum_{p=1-n}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-|p|} (\alpha_i - \bar{\alpha})(\alpha_{i+|p|} - \bar{\alpha}) \mathbb{E}(X_0 X_p) \\
&\leq \sum_{p=1-n}^{n-1} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-|p|} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-|p|} (\alpha_{i+|p|} - \bar{\alpha})^2}}{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} |\mathbb{E}(X_0 X_p)| \\
&\leq \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|. \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Nous concluons par (4.59) et par (4.60),

$$\|\beta_1 - \hat{\beta}_1\|_2 \leq \frac{2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}} \sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|}. \tag{4.61}$$

De plus, nous avons par stationnarité, que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_{j+|k|} - \beta_0 - \beta_1 \alpha_{j+|k|}) \right\|_2 \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|}. \tag{4.62}$$

De même,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_j - \beta_0 - \beta_1 \alpha_j) \right\|_2 \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|}. \tag{4.63}$$

En outre, par stationnarité et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha})(Y_{j+|k|} - \beta_0 - \beta_1 \alpha_{j+|k|}) \right\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|}. \tag{4.64}$$

De même,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_{j+|k|} - \bar{\alpha})(Y_j - \beta_0 - \beta_1 \alpha_j) \right\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2} \sqrt{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|}. \tag{4.65}$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que

$$\left| \sum_{j=1}^{n-|k|} (\alpha_j - \bar{\alpha})(\alpha_{j+|k|} - \bar{\alpha}) \right| \leq \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2.$$

Les majorations ci-dessus des bornes (4.55)-(4.58) apparues en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (4.54), montrent que

$$\|\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_k^*\|_1 \leq C \frac{1}{n} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\mathbb{E}(X_0 X_p)|,$$

avec C une constante. Ainsi, (4.53) et donc (4.51) sont vérifiées. \square

4.6 Annexe : Simulations à l'aide de Matlab

Construction des suites $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

Pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```
function alpha=alphasqrt(n)
alpha=zeros(1,n);
for j=1 :n
alpha(j)=sqrt(j);
end
alpha;
end
```

Pour $\alpha_i = i$

```
function alpha=alphacl(n)
alpha=zeros(1,n);
for j=1 :n
alpha(j)=j;
end
alpha;
end
```

Pour $\alpha_i = i^2$

```
function alpha=alphacarre(n)
alpha=zeros(1,n);
for j=1 :n
alpha(j)=j^2;
end
alpha;
end
```

Simulations des modèles

Pour le modèle d'Andrews

```
function P=modelemlp(n,alpha,p,mu,beta)
P=zeros(1,n);
delta=rand(1,n)<p;
X=zeros(1,n);
epsilonzero=rand(1);
X(1)=1/2*(epsilonzero+delta(1));
for j=1 :n-1
X(j+1)=1/2*(X(j)+delta(j+1));
end
X;
Xzeros=X-1/2*ones(1,n);
for j=1 :n
P(j)=mu+beta*alpha(j)+Xzeros(j);
end
end
```

Pour le modèle des différences de martingales

```
function P=modelemlpmart(n,alpha,p,mu,beta)
P=zeros(1,n);
delta=rand(1,n)<p;
X=zeros(1,n);
epsilonzero=rand(1);
X(1)=1/2*(epsilonzero+delta(1));
L=zeros(1,n);
for j=1 :n-1
X(j+1)=1/2*(X(j)+delta(j+1));
end
L(1)=(delta(1)-1/2)*epsilonzero;
for j=1 :n-1
L(j+1)=(delta(j+1)-1/2)*X(j);
end
L;
for j=1 :n
P(j)=mu+beta*alpha(j)+L(j);
end
end
```

Pour le cas de variables aléatoires non bornées

```
function P=modelemlpnonborne(n,alpha,p,mu,beta)
```

```
P=zeros(1,n);
delta=rand(1,n)<p;
X=zeros(1,n);
Z=zeros(1,n);
epsilonzero=rand(1);
X(1)=1/2*(epsilonzero+delta(1));
for j=1 :n-1
X(j+1)=1/2*(X(j)+delta(j+1));
end
X;
for j=1 :n
Z(j)=1/(X(j)^(1/5));
end
Zok=Z-5/4;
for j=1 :n
P(j)=mu+beta*alpha(j)+Zok(j);
end
end
```

Simulation de la densité spectrale

Le noyau

```
function K=noyau(x)
if (abs(x)>=2)
K=0;
elseif (abs(x)<=1)
K=1;
else
K=-abs(x)+2;
end
end
```

Estimation de la densité spectrale

```
function M=festim(n,c,X)
gamma=zeros(1,n-1);
Knoyau=zeros(1,n-1);
V=1/n *sum(X)*ones(1,n);
U=X-V;
T=transpose(U)*U;
for k=1 :n-1
gamma(k)=1/n*sum(diag(T,k));
```

```

end
GAMMA=[fliplr(gamma) 1/n*sum(diag(T,0)) gamma] ;
for k=1 :n-1
Knoyau(k)=noyau(k/c) ;
end
KNOYAU=[fliplr(Knoyau) 1 Knoyau] ;
F=KNOYAU.*GAMMA ;
M=1/(2*pi)*sum(F) ;
end

```

Estimateur des moindres carrés

```

function Z=hatbeta(X,alpha)
q=length(alpha) ;
T=ones(1,q) ;
Y=[transpose(T) transpose(alpha)] ;
Z=(transpose(Y) * Y)^(-1)*transpose(Y)*transpose(X) ;
end

```

Ellipsoïde de confiance

dans le cas du modèle d'Andrews pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```

function E=ellipseconfiancesqrt(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphasqrt(n) ;
R=[1 2*sqrt(2)/3 ; 2*sqrt(2)/3 1] ;
c=n^(7/16) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelemlp(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n) ;
M=festim(n,c,X) ;
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0 ; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))] ;
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r) ; 0] ;
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L) ; sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]] ;
end
end

```

dans le cas du modèle d'Andrews pour $\alpha_i = i$


```

function E=ellipseconfiancecl(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphacl(n);
R=[1 sqrt(3)/2; sqrt(3)/2 1];
c=n^(7/16);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlp(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n);
M=festim(n,c,X);
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))];
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r);0];
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L);sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]];
end
end

```

dans le cas du modèle d'Andrews pour $\alpha_i = i^2$

```

function E=ellipseconfiancecarre(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphacarre(n);
R=[1 sqrt(5)/3; sqrt(5)/3 1];
c=n^(7/16);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlp(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n);
M=festim(n,c,X);
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))];
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r);0];
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L);sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]];
end
end

```

dans le cas de différences de martingales pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```

function E=ellipseconfiancesqrtpmart(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphasqrt(n) ;
R=[1 2*sqrt(2)/3 ; 2*sqrt(2)/3 1] ;
c=n^(7/16) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelempmart(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n) ;
M=festim(n,c,X) ;
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0 ; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))] ;
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r) ; 0] ;
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L) ; sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]] ;
end
end

```

dans le cas de différences de martingales pour $\alpha_i = i$

```

function E=ellipseconfianceclmart(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphacl(n) ;
R=[1 sqrt(3)/2 ; sqrt(3)/2 1] ;
c=n^(7/16) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelempmart(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n) ;
M=festim(n,c,X) ;
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0 ; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))] ;
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r) ; 0] ;
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L) ; sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]] ;
end
end

```

dans le cas de différences de martingales pour $\alpha_i = i^2$

```

function E=ellipseconfiancecarremart(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphacarre(n);
R=[1 sqrt(5)/3; sqrt(5)/3 1];
c=n^(7/16);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlp mart(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n);
M=festim(n,c,X);
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))];
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r);0];
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L);sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]];
end
end

```

dans le cas de variables aléatoires non bornées pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```

function E=ellipseconfiancesqrtnonborne(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphasqrt(n);
R=[1 2*sqrt(2)/3; 2*sqrt(2)/3 1];
c=n^(7/16);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlp nonborne(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n);
M=festim(n,c,X);
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))];
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r);0];
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L);sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]];
end
end

```

dans le cas de variables aléatoires non bornées pour $\alpha_i = i$

```

function E=ellipseconfianceclnonborne(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphacl(n) ;
R=[1 sqrt(3)/2 ; sqrt(3)/2 1] ;
c=n^(7/16) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ; U=transpose(chol(F)) ;
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelempnonborne(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n) ;
M=festim(n,c,X) ;
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0 ; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))] ;
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r) ;0] ;
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L) ;sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]] ;
end
end

```

dans le cas de variables aléatoires non bornées pour $\alpha_i = i^2$

```

function E=ellipseconfiancecarrenonborne(L,n,mu,beta,p)
alpha=alphacarre(n) ;
R=[1 sqrt(5)/3 ; sqrt(5)/3 1] ;
c=n^(7/16) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelempnonborne(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1)*ones(1,n) ;
M=festim(n,c,X) ;
A=[sqrt(n)/sqrt(2*pi*abs(M)) 0 ; 0 T/sqrt(2*pi*abs(M))] ;
E=H+A^(-1)*U*[sqrt(r) ;0] ;
for t=1 :L
E=[E H+A^(-1)*U*[sqrt(r)*cos(2*pi*t/L) ;sqrt(r)*sin(2*pi*t/L)]] ;
end
end

```

Obtention des ratios

dans le cas du modèle d'Andrews pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```

function Z=regionconfiancesqrt(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphasqrt(n);
R=[1 2*sqrt(2)/3; 2*sqrt(2)/3 1];
c=n^(1/4);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlp(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1);
M=festim(n,c,X);
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1;
else B(i)=0;
end
end
Z=sum(B)/N;
end

```

dans le cas du modèle d'Andrews pour $\alpha_i = i$

```

function Z=regionconfiancecl(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphacl(n);
R=[1 sqrt(3)/2; sqrt(3)/2 1];
c=n^(7/16);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlp(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1);
M=festim(n,c,X);
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2

```

```

B(i)=1;
else B(i)=0;
end
end
Z=sum(B)/N;
end

```

dans le cas du modèle d'Andrews pour $\alpha_i = i^2$

```

function Z=regionconfiancecarre(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphacarre(n);
R=[1 sqrt(5)/3; sqrt(5)/3 1];
c=n^(1/4);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlp(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1);
M=festim(n,c,X);
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1;
else B(i)=0;
end
end
Z=sum(B)/N;
end

```

dans le cas des différences de martingales pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```

function Z=regionconfiancesqrtmart(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphasqrt(n);
R=[1 2*sqrt(2)/3; 2*sqrt(2)/3 1];
c=n^(1/4);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));

```

```

for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelemlpmart(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1) ;
M=festim(n,c,X) ;
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1 ;
else B(i)=0 ;
end
end
Z=sum(B)/N ;
end

```

dans le cas des différences de martingales pour $\alpha_i = i$

```

function Z=regionconfianceclmart(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N) ;
alpha=alphacl(n) ;
R=[1 sqrt(3)/2 ; sqrt(3)/2 1] ;
c=n^(1/4) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelemlpmart(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1) ;
M=festim(n,c,X) ;
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1 ;
else B(i)=0 ;
end
end
Z=sum(B)/N ;
end

```

dans le cas des différences de martingales pour $\alpha_i = i^2$

```

function Z=regionconfiancecarremart(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphacarre(n);
R=[1 sqrt(5)/3; sqrt(5)/3 1];
c=n^(1/4);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlpmart(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha); X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1);
M=festim(n,c,X);
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1;
else B(i)=0;
end
end
Z=sum(B)/N;
end

```

dans le cas des variables aléatoires non bornées pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```

function Z=regionconfianceclnonborne(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphacl(n);
R=[1 sqrt(3)/2; sqrt(3)/2 1];
c=n^(1/4);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlpnonborne(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1);
M=festim(n,c,X);
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1;

```



```

else B(i)=0 ;
end
end
Z=sum(B)/N ;
end

```

dans le cas des variables aléatoires non bornées pour $\alpha_i = i$
 fonction Z=regionconfianceclnonborne(N,n,mu,beta,p)

```

B=zeros(1,N) ;
alpha=alphacl(n) ;
R=[1 sqrt(3)/2 ; sqrt(3)/2 1] ;
c=n^(1/4) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelemlpnonborne(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1) ;
M=festim(n,c,X) ;
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1 ;
else B(i)=0 ;
end
end
Z=sum(B)/N ;
end

```

dans le cas des variables aléatoires non bornées pour $\alpha_i = i^2$
 fonction Z=regionconfiancecarrenonborne(N,n,mu,beta,p)

```

B=zeros(1,N) ;
alpha=alphacarre(n) ;
R=[1 sqrt(5)/3 ; sqrt(5)/3 1] ;
c=n^(1/4) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
for i=1 :N

```

```

r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelempnonborne(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1) ;
M=festim(n,c,X) ;
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=2*pi*r*abs(M)*det(U)^2
B(i)=1 ;
else B(i)=0 ;
end
end
Z=sum(B)/N ;
end

```

dans le cas des différences de martingales mais avec l'estimateur f_n^\diamond pour $\alpha_i = \sqrt{i}$

```

function Z=regionconfiancesqrtmartautreestim(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N) ;
alpha=alphasqrt(n) ;
R=[1 2*sqrt(2)/3 ; 2*sqrt(2)/3 1] ;
c=n^(1/4) ;
T=sqrt(sum(alpha.*alpha)) ;
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1) ;
U=transpose(chol(F)) ;
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2) ;
P=modelempmart(n,alpha,p,mu,beta) ;
H=hatbeta(P,alpha) ;
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1) ;
S=1/n*sum(X.^2) ;
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=r*abs(S)*det(U)^2
B(i)=1 ;
else B(i)=0 ;
end
end
Z=sum(B)/N ;
end

```

dans le cas des différences de martingales mais avec l'estimateur f_n^\diamond pour

```

 $\alpha_i = i$ 
function Z=regionconfianceclmartautreestim(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphacl(n);
R=[1 sqrt(3)/2; sqrt(3)/2 1];
c=n^(7/16);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlpmart(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1);
S=1/n*sum(X.^2);
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=r*abs(S)*det(U)^2
B(i)=1;
else B(i)=0;
end
end
Z=sum(B)/N;
end

```

dans le cas des différences de martingales mais avec l'estimateur f_n^\diamond pour $\alpha_i = i^2$

```

function Z=regionconfiancecarremartautreestim(N,n,mu,beta,p)
B=zeros(1,N);
alpha=alphacarre(n);
R=[1 sqrt(5)/3; sqrt(5)/3 1];
c=n^(1/4);
T=sqrt(sum(alpha.*alpha));
F=R^(-1)*transpose(R)*R^(-1);
U=transpose(chol(F));
for i=1 :N
r=qchisq(0.95,2);
P=modelemlpmart(n,alpha,p,mu,beta);
H=hatbeta(P,alpha);
X=P-H(2,1)*alpha-H(1,1);
S=1/n*sum(X.^2);

```

```
if [U(2,2)*(mu-H(1,1))*sqrt(n)-T*(beta-H(2,1))*U(1,2)]^2
+[T*U(1,1)*(beta-H(2,1))-sqrt(n)*U(2,1)*(mu-H(1,1))]^2<=r*abs(S)*det(U)^2
B(i)=1;
else B(i)=0;
end
end
end
Z=sum(B)/N;
end
```


Bibliography

- [1] de Acosta, A. (1992). Moderate deviations and associated Laplace approximations for sums of independent random vectors. *Trans. Amer. Math. Soc.* **329**, No. 1, 357-375.
- [2] de Acosta, A., Araujo, A. and Giné, E. (1978). On poisson measures, gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces. *Probability on Banach spaces. Adv. Probab. Related Topics.* **4**, 1-68.
- [3] Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series* . Wiley.
- [4] Andrews, D. W. K. (1984). Nonstrong mixing autoregressive processes *J. Appl. Probab.* **21**, No. 4, 930-934.
- [5] Araujo, A. and Giné, E. (1980). *The central limit theorem for real and Banach valued random variables. Wiley Series in Probability and Mathematical statistics.* John Wiley and Sons. New-York-Chichester-Brisbane.
- [6] del Barrio, E., Giné, E. and Matrán, C. (1999). Central limit theorems for the Wasserstein distance between the empirical and the true distributions. *The Annals of Probability* **27**, No. 2, 1009-1071.
- [7] Bartlett, M. S. (1950). Periodogram analysis and continuous spectra. *J. Appl. Probab.* **21**, No. 4, 930-934.
- [8] Billingsley, P. (1961). The Lindeberg-Lévy theorem for martingales. *Proc. Amer. Math. Soc* **12**, No. 5, 788-792.
- [9] Blanke, D. and Merlevède, F. (2000). Estimation of the asymptotic variance of kernel density estimators for continuous time processes. *Math. Methods Statist.* **9**, No 3, 270-296.

- [10] Borovkov, A.A. and Mogulskii, A.A. (1978). Probabilities of large deviations in topological spaces I. *Sib. Math. J.* **19**, 697-709.
- [11] Borovkov, A.A. and Mogulskii, A.A. (1980). Probabilities of large deviations in topological spaces II. *Sib. Math. J.* **21**, 12-26.
- [12] Bosq, D. (2000). Linear processes in function spaces. Theory and applications. *Lecture Notes in Statistics.* **149**.
- [13] Bradley, R.C (1986). Basic properties of strong mixing conditions, in: Eberlein, E. and Taquu, M.S (Eds.), Dependence in Probability and Statistics. A survey of recent results. Oberwolfach. *Progr. Probab. Statist.* **11**, 165-192.
- [14] Bradley, R.C. (2007). Introduction to strong mixing conditions. Volume 1 *Ken- drick Press, Heber City, UT*.
- [15] Brillinger, D.R. (1981). Time Series: Data Analysis and Theory. *Holt, Rinehart and Winston, New York*.
- [16] Brockwell, P.J and Davis, R.A. (1991). Time Series: Theory and Methods. *2nd ed. Springer, New York*.
- [17] Dede, S. (2009). Moderate deviations for stationary sequences of Hilbert-valued bounded random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **349**, No. 2, 374-394.
- [18] Dede, S. (2009). An empirical central limit theorem in \mathbf{L}^1 for stationary sequences. *Stochastic Processes and their Applications* **119**, No. 10, 3494-3515.
- [19] Dedecker, J. (1998). A central limit theorem for stationary random fields. *Probability Theory and Related Fields* **110**, 397-426.
- [20] Dedecker, J. (2004). Inégalités de covariance. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* **339**, No. 7, 503-506.
- [21] Dedecker, J. and Doukhan, P. (2003). A new covariance inequality and applications. *Stochastic Processes and their Applications* **106**, 63-80.
- [22] Dedecker, J., Gouëzel, S. and Merlevède, F. (2008). Some almost sure results for unbounded functions of intermittent maps and their associated Markov chains.

- [23] Dedecker, J. and Merlevède, F. (2003). The conditional central limit theorem in Hilbert spaces. *Stochastic Process. Appl.* **108**, No. 2, 229-262.
- [24] Dedecker, J. and Merlevède, F. (2007). The empirical distribution function for dependent variables: asymptotic and non asymptotic results in L^p . *ESAIM Probability and Statistics.* **11**, 102-114.
- [25] Dedecker, J., Merlevède, F., Peligrad, M. and Utev, S. (2007). Moderate deviations for stationary sequences of bounded random variables. *To appear in Ann. Inst. H. Poincaré*. Prépublication LPMA, No. 1183.
- [26] Dedecker, J., Merlevède, F. and Volný, D. (2007). On the weak invariance principle for non-adapted sequences under projective criteria. *J. Theoret. Probab.* **20**, No. 4, 971-1004.
- [27] Dedecker, J. and Priour, C. (2005). New dependence coefficients. Examples and applications to statistics. *Probab. Theory. Relat. Fields* **132**, 203-236.
- [28] Dedecker, J. and Priour, C. (2007). An empirical central limit theorem for dependent sequences. *Stochastic Process. Appl.* **117**, No. 1, 121-142.
- [29] Dembo, A. and Zeitouni, O. (1998). Large Deviations Techniques and Applications. 2nd edition, Springer New York.
- [30] Deuschel, J.D. and Stroock, D.W. (1989). Large deviations. Pure and Applied Mathematics, 137. Academic Press, Inc., Boston, MA.
- [31] Djellout, H. (2002). Moderate Deviations for Martingale Differences and applications to ϕ -mixing sequences. *Stoch. Stoch. Rep.* **73**, No. 1-2, 37-63.
- [32] Doukhan, P. (1994). Properties and examples. *Lecture Notes in Statistics.* **85**.
- [33] Gao, F.Q. (1996). Moderate deviations for martingales and mixing random processes. *Stoch. Proc. Appl.* **61**. 263-275.
- [34] Gouëzel, S. (2004). Central limit theorem and stable laws for intermittent maps. *Probab. Theory Relat. Fields* **128**, 82-122.
- [35] Hall, P. and Heyde, C.C. (1980). Martingale limit theory and its application. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc., New York-London.

- [36] Hannan, E.J. (1970). Multiple time series. *John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney*.
- [37] Hannan, E.J. (1973). Central limit theorems for time series regression. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **26**, 157-170.
- [38] Hennion, H. and Hervé, L. (2001). Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness. *Lecture Notes in Mathematics*. **1766**.
- [39] Heyde, C.C. (1974). On the central limit theorem for stationary processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **30**, 315-320.
- [40] Hu, Y. and Lee, T.Y. (2003). Moderate deviation principles for trajectories of sums of independent Banach space valued random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**, No. 8, 3047-3064.
- [41] Ibragimov, I.A. (1962). Some limit theorems for stationary processes. *Theory Probab. Appl.* **7**, 349-382.
- [42] Jain, N. (1977). Central limit theorem and related questions in Banach space. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXXI*. 55-65.
- [43] Jakubowski, A. (1980). On limit theorems for sums of dependent Hilbert space valued random variables. *Lecture Notes in Statistics*. **2**, 178-187.
- [44] Kallenberg, O. and Sztencel, R. (1991). Some dimension-free features of vector-valued martingales. *Probab. Theory Related Fields*. **88**, 215-247.
- [45] Ledoux, M. (1992). Sur les déviations modérées des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes de même loi. *Ann. Inst. H. Poincaré*. **28**, No. 2, 267-280.
- [46] Ledoux, M. and Talagrand, M. (1991). Probability in Banach spaces. Isoperimetry and processes. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3). Folge. Band 23*. Springer-Verlag, Berlin.
- [47] Liverani, C., Saussol, B. and Vaienti, S. (1999). A probabilistic approach to intermittency. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19**, 671-685.
- [48] Tyran-Kamińska, M. and Mackey, M. (2007). Central limit theorem for non-invertible measure preserving maps. *Colloq. Math. to appear*. **110**, No. 1, 167-191.

- [49] Mas, A. and Menneveau, L. (2003). Large and moderate deviations for infinite-dimensional autoregressive processes. *Journal of Multivariate Analysis*. **87**, 241-260.
- [50] Peligrad, M. and Utev, S. (2005). A new maximal inequality and invariance principle for stationary sequences. *Ann. Probab.* **33**, No. 2, 798-815.
- [51] Peligrad, M. and Utev, S. (2006). Central limit theorem for stationary linear processes. *Annals of Probability* **34**, No. 4, 1608-1622.
- [52] Peligrad, M. Utev, S. and Wu, W.B. (2007). A maximal L_p -inequality for stationary sequences and its applications. *Proc. Amer. Math. Soc.* **135**, 541-550.
- [53] Pinelis, I. (1994) Optimum bounds for the distributions of martingales in Banach spaces. *Ann. Probab.* **22**, 1679-1706.
- [54] Pomeau, Y., Manneville, P. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.* **74**, 189-197.
- [55] Priestley, M.B. (1981). Spectral Analysis and Time Series 1. *Academic, New York*.
- [56] Puhalskii, A. (1994). Large deviations of semimartingales via convergence of the predictable characteristics. *Stoch. Stoch. Rep.* **49**, No. 1-2, 27-85.
- [57] Rio, E. (2000). Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants. Collection Mathématiques and Applications. **31**. Springer, Berlin.
- [58] Rosenblatt, M. (1956). A central limit Theorem and a strong mixing condition. *Proc. Nat. Ac. SC. U.S.A.* **42**, 43-47.
- [59] Rosenblatt, M. (1984). Asymptotic normality, strong mixing and spectral density estimates. *Annals of Probability* **12**, 1167-1180.
- [60] Shao, X. and Wu, W.B. (2007). Asymptotic spectral theory for nonlinear time series. *Ann. Statist.* **35**, No 4, 1773-1801.
- [61] Volný, D. (1993). Approximating martingales and the central limit theorem for strictly stationary processes. *Stochastic Processes and their Applications*. **44**, 41-74.

BIBLIOGRAPHY

- [62] Volný, D. (2007). A nonadapted version of the invariance principle of Peligrad and Utev. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **345**, 167-169.