

# Etude de deux problèmes quasilineaires elliptiques avec terme de source relatif à la fonction ou à son gradient

**ABDEL HAMID Haydar**

**Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique  
(LMPT-TOURS)**

Thèse dirigée par :

**M.F. BIDAUT-VÉRON**

## Introduction

- ▶ On considère l'opérateur  $p$  – Laplacien :

$$\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad 1 < p \leq N$$

## Introduction

- ▶ On considère l'opérateur  $p$  – Laplacien :

$$\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad 1 < p \leq N$$

- ▶ On étudie les solutions  $u \geq 0$  du problème :

$$(P_{u,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un domaine régulier borné de  $\mathbb{R}^N$ .

## Introduction

- ▶ On considère l'opérateur  $p$  – Laplacien :

$$\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad 1 < p \leq N$$

- ▶ On étudie les solutions  $u \geq 0$  du problème :

$$(P_{u,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un domaine régulier borné de  $\mathbb{R}^N$ .

- ▶  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .  $\beta$  et  $f$  sont deux fonctions vérifiant

$$\beta \in C^0([0, L]), \quad L \leq \infty, \quad \text{et } \beta \text{ est positive, } \beta \not\equiv 0. \quad (\text{Beta})$$

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } f \geq 0 \quad \text{p. p. dans } \Omega. \quad (f)$$

## Introduction

- ▶ On considère l'opérateur  $p$  – Laplacien :

$$\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad 1 < p \leq N$$

- ▶ On étudie les solutions  $u \geq 0$  du problème :

$$(P_{u,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un domaine régulier borné de  $\mathbb{R}^N$ .

- ▶  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .  $\beta$  et  $f$  sont deux fonctions vérifiant

$$\beta \in C^0([0, L]), \quad L \leq \infty, \quad \text{et } \beta \text{ est positive, } \beta \not\equiv 0. \quad (\text{Beta})$$

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } f \geq 0 \quad \text{p. p. dans } \Omega. \quad (f)$$

- ▶ Boccardo L., Murat F., Peral I., Porretta A.,...

## Introduction

**Exemple :** Un exemple type est le cas  $\beta = c > 0$ . Fixons  $c = p - 1$  et supposons que  $u$  est une solution positive de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (p-1) |\nabla u|^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

## Introduction

**Exemple :** Un exemple type est le cas  $\beta = c > 0$ . Fixons  $c = p - 1$  et supposons que  $u$  est une solution positive de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (p-1)|\nabla u|^p + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Posons  $v = e^u - 1$ . Formellement  $v$  est une solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{p-1} & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- [Kazdan-Kramer] en 1978.

## Introduction

► Dans le cas  $L = \infty$ ,  $v = \Psi(u)$

$$\begin{aligned} -\Delta_p v &= -\operatorname{div} \left[ (\Psi'(u))^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \\ &= (\Psi'(u))^{p-1} (-\Delta_p u) - (p-1) (\Psi'(u))^{p-2} \Psi''(u) |\nabla u|^p \end{aligned}$$



## Introduction

► Dans le cas  $L = \infty$ ,  $v = \Psi(u)$

$$\begin{aligned} -\Delta_p v &= -\operatorname{div} \left[ (\Psi'(u))^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \\ &= (\Psi'(u))^{p-1} (-\Delta_p u) - (p-1) (\Psi'(u))^{p-2} \Psi''(u) |\nabla u|^p \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta_p v}{(\Psi'(u))^{p-1}} &= (-\Delta_p u) - (p-1) \frac{\Psi''(u)}{\Psi'(u)} |\nabla u|^p \\ &= \left[ \beta(u) - (p-1) \frac{\Psi''(u)}{\Psi'(u)} \right] |\nabla u|^p + \lambda f \end{aligned}$$

## Introduction

- Dans le cas  $L = \infty$ ,  $v = \Psi(u)$

$$\begin{aligned} -\Delta_p v &= -\operatorname{div} \left[ (\Psi'(u))^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \\ &= (\Psi'(u))^{p-1} (-\Delta_p u) - (p-1) (\Psi'(u))^{p-2} \Psi''(u) |\nabla u|^p \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{-\Delta_p v}{(\Psi'(u))^{p-1}} &= (-\Delta_p u) - (p-1) \frac{\Psi''(u)}{\Psi'(u)} |\nabla u|^p \\ &= \left[ \beta(u) - (p-1) \frac{\Psi''(u)}{\Psi'(u)} \right] |\nabla u|^p + \lambda f \end{aligned}$$

- On cherche  $\Psi$

$$(p-1) \frac{\Psi''(u)}{\Psi'(u)} = \beta(u)$$

D'où

$$v = \Psi(u) = \int_0^u \exp\left(\frac{1}{p-1} \int_0^t \beta(s) ds\right) dt$$

►  $v$  vérifie formellement le problème :

$$(P_{v,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1 + g(v))^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

►  $v$  vérifie formellement le problème :

$$(P_{v,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1 + g(v))^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

► où  $g(v) = \Psi'(u) - 1$  satisfait

$$g \in C^1([0, \infty)), \quad g(0) = 0 \text{ et } g \text{ est croissante, } g \not\equiv 0. \quad (g)$$

- ▶  $v$  vérifie formellement le problème :

$$(P_{v,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1 + g(v))^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- ▶ où  $g(v) = \Psi'(u) - 1$  satisfait

$$g \in C^1([0, \infty)), \quad g(0) = 0 \text{ et } g \text{ est croissante, } g \not\equiv 0. \quad (g)$$

- ▶ Brezis H., Cabré X., Garcia Azorero J., Peral I., Puel J.P.,...

# Introduction

- ▶ Donner un sens à ce changement d'inconnue

$u$  est "solution" de  $(P_{u,\lambda}) \leftrightarrow v$  est "solution" de  $(P_{v,\lambda})$

- ▶ Etudier les problèmes  $(P_{u,\lambda})$  et  $(P_{v,\lambda})$ .

- $p = 2$  : [Abdellaoui-Dall'Aglio-Peral] en 2006.

# Plan de l'exposé

- ① Connexion entre  $(P_{u,\lambda})$  et  $(P_{v,\lambda})$ 
  - ▶ Le changement d'inconnue ponctuel
  - ▶ Apparition des mesures de Radon et résultat
- ② Existence et non-existence
  - ▶ Condition de croissance lente sur  $g$
  - ▶ Non-existence
- ③ Etude des problèmes avec hypothèses de convexité et sur-linéarité sur  $g$ 
  - ▶ Solution minimale
  - ▶ Solution extrémale et sa régularité
  - ▶ Deuxième solution variationnelle bornée
- ④ Commentaires et extension des applications

# Plan de l'exposé

- 1 Connexion entre  $(P_{u,\lambda})$  et  $(P_{v,\lambda})$ 
  - ▶ Le changement d'inconnue ponctuel
  - ▶ Apparition des mesures de Radon et résultat
- 2 Existence et non-existence
  - ▶ Condition de croissance lente sur  $g$
  - ▶ Non-existence
- 3 Etude des problèmes avec hypothèses de convexité et sur-linéarité sur  $g$ 
  - ▶ Solution minimale
  - ▶ Solution extrémale et sa régularité
  - ▶ Deuxième solution variationnelle bornée
- 4 Commentaires et extension des applications



# Le changement d'inconnue ponctuel

Soit  $\beta \in (Beta)$ . Introduisons

$$\gamma(t) = \int_0^t \beta(s) ds, \quad \Psi(t) = \int_0^t e^{\gamma(s)/(p-1)} ds \quad (1)$$

pour tout  $t \in [0, L)$ .

# Le changement d'inconnue ponctuel

Soit  $\beta \in (Beta)$ . Introduisons

$$\gamma(t) = \int_0^t \beta(s) ds, \quad \Psi(t) = \int_0^t e^{\gamma(s)/(p-1)} ds \quad (1)$$

pour tout  $t \in [0, L)$ .

Notons  $\Lambda = \Psi(L)$ , on peut définir la fonction suivante

$$g(\tau) = e^{\gamma(\Psi^{-1}(\tau))/(p-1)} - 1$$

pour tout  $\tau \in [0, \Lambda)$ . Alors  $g$  satisfait  $(g)$ .

- Réciproquement, soit  $g \in (g)$ . On définit

$$H(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{1 + g(s)} \quad (2)$$

pour tout  $\tau \in [0, \Lambda)$ .

- On a  $H = \Psi^{-1}$

- Donc

$$\beta \in (\text{Beta}) \xleftrightarrow{T} g \in (g)$$

$\beta$ croissante	$\iff$	$g$ convexe
$L = \infty$	$\implies$	$\Lambda = \infty$
$L < \infty$	$\iff$	$(1 + g)^{-1} \in L^1((0, \Lambda))$
$e^{\gamma(t)/(p-1)} \in L^1((0, L))$	$\iff$	$\Lambda < \infty$
$\gamma(L) < \infty \iff \beta \in L^1((0, L))$	$\iff$	$g$ bornée
$\liminf_{t \rightarrow L} \beta(t) > 0$	$\implies$	$\liminf_{t \rightarrow \Lambda} \frac{g(s)}{s} > 0$
$\lim_{t \rightarrow L} \beta(t) = \infty$	$\implies$	$\lim_{s \rightarrow \Lambda} \frac{g(s)}{s} = \infty$

①  $\alpha > 1$

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1 - (\alpha-1)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{(p-1)\alpha}$$

①  $\alpha > 1$

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha-1)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{(p-1)\alpha}$$

②  $-\Delta_p u = c_p(e^u + 1) |\nabla u|^p + \lambda f \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f((1+v)(1+\ln(1+v)))^{p-1}$

①  $\alpha > 1$

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha-1)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{(p-1)\alpha}$$

②  $-\Delta_p u = c_p(e^u + 1) |\nabla u|^p + \lambda f \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f((1+v)(1+\ln(1+v)))^{p-1}$

③  $-\Delta_p u = \frac{p-1}{1-u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)e^{(p-1)v}$

①  $\alpha > 1$

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha-1)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{(p-1)\alpha}$$

②  $-\Delta_p u = c_p(e^u + 1) |\nabla u|^p + \lambda f \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f((1+v)(1+\ln(1+v)))^{p-1}$

③  $-\Delta_p u = \frac{p-1}{1-u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)e^{(p-1)v}$

④  $\alpha > 0$

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha+1)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \frac{\lambda f(x)}{(1-v)^{(p-1)\alpha}}$$



$$\textcircled{1} \alpha > 1$$

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha-1)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{(p-1)\alpha}$$

$$\textcircled{2} -\Delta_p u = c_p(e^u + 1) |\nabla u|^p + \lambda f \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f((1+v)(1+\ln(1+v)))^{p-1}$$

$$\textcircled{3} -\Delta_p u = \frac{p-1}{1-u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)e^{(p-1)v}$$

$$\textcircled{4} \alpha > 0$$

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha+1)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \frac{\lambda f(x)}{(1-v)^{(p-1)\alpha}}$$

$$\textcircled{5} -\Delta_p u = \frac{(p-1)h(u)}{1-u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \leftrightarrow -\Delta_p v = \lambda f(x)e^{(p-1)(e^v - v - 1)}$$

$$\text{où } h(u) = 1 - \left(\ln \frac{e}{1-u}\right)^{-1}.$$

# Apparition des mesures de Radon

► *Ferone V.* et *Murat F.* en 2000.

Soient  $m \in (0, 1)$ ,  $1 < p < N$ . Pour tout  $x \in B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| < 1\}$  :

$$u_m(x) = \ln \left( (1 - m)^{-1} (|x|^{-(N-p)/(p-1)} - m) \right),$$

On a  $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$  et elle est solution de

$$-\Delta_p u = (p - 1) |\nabla u|^p \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B(0, 1)).$$

# Apparition des mesures de Radon

► *Ferone V.* et *Murat F.* en 2000.

Soient  $m \in (0, 1)$ ,  $1 < p < N$ . Pour tout  $x \in B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| < 1\}$  :

$$u_m(x) = \ln \left( (1 - m)^{-1} (|x|^{-(N-p)/(p-1)} - m) \right),$$

On a  $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$  et elle est solution de

$$-\Delta_p u = (p - 1) |\nabla u|^p \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B(0, 1)).$$

Posons

$$v_m = e^{u_m} - 1.$$

On a  $v_m \notin W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $v_m$  est solution de

$$-\Delta_p v_m = \mu_m = C_{m,N} \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(B(0, 1)),$$

où  $\delta_0$  est la masse de Dirac en 0, et  $C_{m,N} > 0$ .

# Notions de solutions

Dal Maso G., Murat F., Orsina L., et Prignet A.,

*Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, (1999).

# Notions de solutions

Dal Maso G., Murat F., Orsina L., et Prignet A.,

*Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, (1999).

## Définition 1.1

Soit  $F \in L^1(\Omega)$ ,  $F \geq 0$  et  $\eta_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ . Une fonction  $U \geq 0$  mesurable et finie presque partout dans  $\Omega$  est dite *solution renormalisée* du problème

$$-\Delta_p U = F + \eta_s \quad \text{dans } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

# Notions de solutions

Dal Maso G., Murat F., Orsina L., et Prignet A.,

*Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, (1999).

## Définition 1.1

Soit  $F \in L^1(\Omega)$ ,  $F \geq 0$  et  $\eta_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ . Une fonction  $U \geq 0$  mesurable et finie presque partout dans  $\Omega$  est dite *solution renormalisée* du problème

$$-\Delta_p U = F + \eta_s \quad \text{dans } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i)  $T_k(U) = \min(U, k) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  pour tout  $k > 0$  ;

## Notions de solutions

Dal Maso G., Murat F., Orsina L., et Prignet A.,

*Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, (1999).

### Définition 1.1

Soit  $F \in L^1(\Omega)$ ,  $F \geq 0$  et  $\eta_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ . Une fonction  $U \geq 0$  mesurable et finie presque partout dans  $\Omega$  est dite *solution renormalisée* du problème

$$-\Delta_p U = F + \eta_s \quad \text{dans } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $T_k(U) = \min(U, k) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  pour tout  $k > 0$  ;
- (ii)  $|\nabla U|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ , pour tout  $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$  ;

## Notions de solutions

Dal Maso G., Murat F., Orsina L., et Prignet A.,

*Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, (1999).

### Définition 1.1

Soit  $F \in L^1(\Omega)$ ,  $F \geq 0$  et  $\eta_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ . Une fonction  $U \geq 0$  mesurable et finie presque partout dans  $\Omega$  est dite *solution renormalisée* du problème

$$-\Delta_p U = F + \eta_s \quad \text{dans } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i)  $T_k(U) = \min(U, k) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  pour tout  $k > 0$  ;

(ii)  $|\nabla U|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ , pour tout  $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$  ;

(iii) Pour tout  $k > 0$  il existe  $\alpha_k \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$ , concentrée sur l'ensemble  $\{U = k\}$ , telles que  $\alpha_k \rightarrow \eta_s$  *étroitement* lorsque  $k \rightarrow \infty$  et telle que pour tout  $k > 0$

$$-\Delta_p(T_k(U)) = F\chi_{\{U < k\}} + \alpha_k \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$



# Notions de solutions

Dal Maso G., Malusa A.

*Some properties of Reachable Solutions of Nonlinear Elliptic...*(1997)

# Notions de solutions

Dal Maso G., Malusa A.

*Some properties of Reachable Solutions of Nonlinear Elliptic...*(1997)

## Définition 1.2

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ . Une fonction  $U$  mesurable et finie presque partout dans  $\Omega$  est dite *solution atteignable* du problème

$$-\Delta_p U = \mu \quad \text{dans } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

# Notions de solutions

Dal Maso G., Malusa A.

*Some properties of Reachable Solutions of Nonlinear Elliptic...*(1997)

## Définition 1.2

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ . Une fonction  $U$  mesurable et finie presque partout dans  $\Omega$  est dite *solution atteignable* du problème

$$-\Delta_p U = \mu \quad \text{dans } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a)  $T_k(U) = \max(-k, \min(U, k)) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  pour tout  $k > 0$  et il existe  $M > 0$  tel que

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(U)|^p dx \leq M(1 + k) \quad \text{pour tout } k > 0$$

# Notions de solutions

Dal Maso G., Malusa A.

*Some properties of Reachable Solutions of Nonlinear Elliptic...*(1997)

## Définition 1.2

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ . Une fonction  $U$  mesurable et finie presque partout dans  $\Omega$  est dite *solution atteignable* du problème

$$-\Delta_p U = \mu \quad \text{dans } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a)  $T_k(U) = \max(-k, \min(U, k)) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  pour tout  $k > 0$  et il existe  $M > 0$  tel que

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(U)|^p dx \leq M(1 + k) \quad \text{pour tout } k > 0$$

(b)  $|\nabla U|^{p-1} \in L^1(\Omega)$ , et

$$-\Delta_p U = \mu \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

# Résultat principal

## Théorème 1.1

Soient  $\beta \in (\text{Beta})$ ,  $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$  et  $g = T(\beta)$ . Supposons que  $u$  est une *solution renormalisée* du problème

$$(P_{u,\lambda,\alpha_s}) \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f(x) + \alpha_s & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

telle que  $0 \leq u(x) < L$  presque partout dans  $\Omega$ .

# Résultat principal

## Théorème 1.1

Soient  $\beta \in (\text{Beta})$ ,  $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$  et  $g=T(\beta)$ . Supposons que  $u$  est une *solution renormalisée* du problème

$$(P_{u,\lambda,\alpha_s}) \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f(x) + \alpha_s & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

telle que  $0 \leq u(x) < L$  presque partout dans  $\Omega$ .

Alors il existe  $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$  telle que  $v=\Psi(u)$  est une *solution atteignable* du problème

$$(P_{v,\lambda,\mu}) \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1 + g(v))^{p-1} + \mu & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

De plus

- ▶ Si  $\beta \notin L^1((0, \infty))$  alors  $\alpha_s = 0$ .

De plus

- ▶ Si  $\beta \notin L^1((0, \infty))$  alors  $\alpha_s = 0$ .
- ▶ Si  $p = 2$  ou  $p = N$ , alors  $\mu$  est **singulière** et  $v$  est une **solution renormalisée**.



## Idée de la preuve

►  $K > 0$ ,  $T_K(u) = \min(K, u)$  est solution dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  de

$$-\Delta_p T_K(u) = \beta(T_K(u)) |\nabla T_K(u)|^p + \lambda f \chi_{\{u < K\}} + \alpha_K \quad (K)$$

où  $\alpha_K$  est concentrée sur  $\{u = K\}$  et converge **étroitement** vers  $\alpha_s$ .

## Idée de la preuve

- $K > 0$ ,  $T_K(u) = \min(K, u)$  est solution dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  de

$$-\Delta_p T_K(u) = \beta(T_K(u)) |\nabla T_K(u)|^p + \lambda f \chi_{\{u < K\}} + \alpha_K \quad (K)$$

où  $\alpha_K$  est concentrée sur  $\{u = K\}$  et converge **étroitement** vers  $\alpha_s$ .

- $v = \Psi(u)$ . Pour  $k = \Psi(K)$ , on a  $\Psi(T_K(u)) = T_k(v) = \min(k, v)$  et est solution dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  de

$$-\Delta_p T_k(v) = \lambda f(1 + g(v))^{p-1} \chi_{\{v < k\}} + \mu_k \quad (k)$$

avec

$$\mu_k = e^{\gamma(K)} \alpha_K = (1 + g(k))^{p-1} \alpha_K$$

# Réciproque

## Théorème 1.2

Soient  $g \in (g)$ ,  $\mu = \mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$  et  $\beta = T^{-1}(g)$ . Supposons que  $v$  est une *solution renormalisée* du problème

$$(P_{v,\lambda,\mu_s}) \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+g(v))^{p-1} + \mu_s & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

telle que  $0 \leq v < \Lambda$  presque partout dans  $\Omega$ .

Alors il existe  $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$  telle que  $u = H(v)$  est une *solution renormalisée* du problème

$$(P_{u,\lambda,\alpha_s}) \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f(x) + \alpha_s & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\alpha_s = \frac{\mu_s}{(1+g(\Lambda))^{p-1}} \quad \text{si } g(\Lambda) \text{ est fini,} \quad 0 \quad \text{si non}$$

## Conséquence directe

Si  $\beta \notin L^1((0, L))$  alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une **infinité** de solutions renormalisées.

## Extension

Si  $f(x, u) \in L^1(\Omega)$ ,  $f(x, u) \geq 0$ , alors le théorème 1.1 connecte

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + f(x, u),$$

avec

$$-\Delta_p v = f(x, H(v))(1 + g(v))^{p-1}.$$

Inversement, si  $f(x, v) \geq 0$  alors le théorème 1.2 connecte

$$-\Delta_p v = f(x, v)(1 + g(v))^{p-1},$$

avec

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + f(x, \Psi(u)).$$

# Plan de l'exposé

- 1 Connexion entre  $(P_{u,\lambda})$  et  $(P_{v,\lambda})$ 
  - ▶ Le changement d'inconnue ponctuel
  - ▶ Apparition des mesures de Radon et résultat
- 2 Existence et non-existence
  - ▶ Condition de croissance lente sur  $g$
  - ▶ Non-existence
- 3 Etude des problèmes avec hypothèses de convexité et sur-linéarité sur  $g$ 
  - ▶ Solution minimale
  - ▶ Solution extrême et sa régularité
  - ▶ Deuxième solution variationnelle bornée
- 4 Commentaires et extension des applications

# Problème $(P_{v,\lambda})$ pour $g$ à croissance lente

## Proposition 2.1

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  vérifiant

$$M_Q = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)^{p-1}}{s^Q} < \infty \quad (CP)$$

pour un  $p-1 < Q < Q_1$  où

# Problème $(P_{v,\lambda})$ pour $g$ à croissance lente

## Proposition 2.1

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  vérifiant

$$M_Q = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)^{p-1}}{s^Q} < \infty \quad (CP)$$

pour un  $p-1 < Q < Q_1$  où

$$Q_1 = \frac{(p-1)N}{N-p} \quad (Q_1 = \infty \text{ si } p = N)$$



# Problème $(P_{v,\lambda})$ pour $g$ à croissance lente

## Proposition 2.1

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  vérifiant

$$M_Q = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)^{p-1}}{s^Q} < \infty \quad (CP)$$

pour un  $p-1 < Q < Q_1$  où

$$Q_1 = \frac{(p-1)N}{N-p} \quad (Q_1 = \infty \text{ si } p = N)$$

Si  $p < N$  et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $Qr' < Q_1$  alors  $(P_{v,\lambda})$  admet une solution  $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  pour  $\lambda$  assez petit.

## Problème $(P_{V,\lambda,\mu})$

### Théorème 2.1

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$  quelconque signée et  $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory

$$|h(x, V)| \leq f(x)(K + |V|^Q),$$

avec  $Q > 0$  et  $\lambda, K > 0$  et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $Qr' < Q_1$  avec  $f \not\equiv 0$ .

## Problème $(P_{V,\lambda,\mu})$

### Théorème 2.1

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$  quelconque signée et  $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory

$$|h(x, V)| \leq f(x)(K + |V|^Q),$$

avec  $Q > 0$  et  $\lambda, K > 0$  et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $Qr' < Q_1$  avec  $f \not\equiv 0$ .

Alors il existe une *solution renormalisée* de

$$(P_{V,\lambda,\mu}) \begin{cases} -\Delta_p V = \lambda h(x, V) + \mu & \text{dans } \Omega, \\ V = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

dans l'un des cas suivants :

\*  $0 < Q < p - 1$ .

## Problème $(P_{V,\lambda,\mu})$

### Théorème 2.1

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$  quelconque signée et  $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory

$$|h(x, V)| \leq f(x)(K + |V|^Q),$$

avec  $Q > 0$  et  $\lambda, K > 0$  et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $Qr' < Q_1$  avec  $f \not\equiv 0$ .

Alors il existe une *solution renormalisée* de

$$(P_{V,\lambda,\mu}) \begin{cases} -\Delta_p V = \lambda h(x, V) + \mu & \text{dans } \Omega, \\ V = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

dans l'un des cas suivants :

\*  $0 < Q < p - 1$ .

\*  $Q = p - 1$  et  $\lambda < \lambda_1(f)$  où  $\lambda_1(f) = \inf_{\substack{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w|^p dx}{\int_{\Omega} f |w|^p dx} \dots$

## Problème $(P_{V,\lambda,\mu})$

### Théorème 2.1

Soit  $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$  quelconque signée et  $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Carathéodory

$$|h(x, V)| \leq f(x)(K + |V|^Q),$$

avec  $Q > 0$  et  $\lambda, K > 0$  et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $Qr' < Q_1$  avec  $f \not\equiv 0$ .

Alors il existe une *solution renormalisée* de

$$(P_{V,\lambda,\mu}) \begin{cases} -\Delta_p V = \lambda h(x, V) + \mu & \text{dans } \Omega, \\ V = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

dans l'un des cas suivants :

\*  $0 < Q < p - 1$ .

\*  $Q = p - 1$  et  $\lambda < \lambda_1(f)$  où  $\lambda_1(f) = \inf_{\substack{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w|^p dx}{\int_{\Omega} f |w|^p dx}$ .

\*  $p - 1 < Q < Q_1$  et  $\lambda$  et  $|\mu|(\Omega)$  sont suffisamment petits.

## Problème $(P_{v,\lambda,\mu_s})$

### Corollaire 2.1

Soit  $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$  et  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  vérifiant (CP) pour un  $0 < Q < Q_1$ .  
Supposons que  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $Qr' < Q_1$ .

Alors le problème  $(P_{v,\lambda,\mu_s})$  admet une *solution renormalisée* dans l'un des cas suivants

- \*  $0 < Q < p - 1$ .
- \*  $Q = p - 1$  et  $M_{p-1}\lambda < \lambda_1(f)$
- \*  $p - 1 < Q < Q_1$  et  $\lambda$  et  $\mu_s(\Omega)$  sont suffisamment petits.

# Nonexistence

## Théorème 2.2

Soit  $\beta = p - 1$  c'est à dire  $g(s) = s$  et  $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ .

Si  $\lambda > \lambda_1(f)$  ou  $\lambda = \lambda_1(f)$  et  $f \in L^{\frac{N}{p}}(\Omega)$ ,  $p < N$ , alors  $(P_{u,\lambda})$ ,  $(P_{v,\lambda})$ ,  $(P_{v,\lambda,\mu_s})$  n'ont pas de solutions renormalisées.

# Nonexistence

## Théorème 2.2

Soit  $\beta = p - 1$  c'est à dire  $g(s) = s$  et  $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ .

Si  $\lambda > \lambda_1(f)$  ou  $\lambda = \lambda_1(f)$  et  $f \in L^{\frac{N}{p}}(\Omega)$ ,  $p < N$ , alors  $(P_{u,\lambda})$ ,  $(P_{v,\lambda})$ ,  $(P_{v,\lambda,\mu_s})$  n'ont pas de solutions renormalisées.

## Théorème 2.3

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  et  $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ . Si

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} > 0$$

alors il existe  $\lambda_r$  telle que  $(P_{v,\lambda})$ ,  $(P_{v,\lambda,\mu_s})$  n'ont pas de solutions renormalisées pour tout  $\lambda > \lambda_r$ .



# Plan de l'exposé

- 1 Connexion entre  $(P_{u,\lambda})$  et  $(P_{v,\lambda})$ 
  - ▶ Le changement d'inconnue ponctuel
  - ▶ Apparition des mesures de Radon et résultat
- 2 Existence et non-existence
  - ▶ Condition de croissance lente sur  $g$
  - ▶ Non-existence
- 3 Etude des problèmes avec hypothèses de convexité et sur-linéarité sur  $g$ 
  - ▶ Solution minimale
  - ▶ Solution extrémale et sa régularité
  - ▶ Deuxième solution variationnelle bornée
- 4 Commentaires et extension des applications

## Solution minimale

### Proposition 3.1

Soit  $g \in (g)$  et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $r > \frac{N}{p}$ . Alors pour  $\lambda$  assez petit le problème

$$(P_{v,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1 + g(v))^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

admet une *solution minimale bornée*  $\underline{v}_\lambda$  telle que  $\|\underline{v}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$ .

## Solution minimale

### Proposition 3.1

Soit  $g \in (g)$  et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $r > \frac{N}{p}$ . Alors pour  $\lambda$  assez petit le problème

$$(P_{v,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1 + g(v))^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

admet une *solution minimale bornée*  $\underline{v}_\lambda$  telle que  $\|\underline{v}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$ .

- ▶  $S_b = \{\lambda \geq 0 / (P_{v,\lambda}) \text{ a une solution dans } W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\} = [0, \lambda_b)$ .
- ▶  $S_* = \{\lambda \geq 0 / (P_{v,\lambda}) \text{ a une solution dans } W_0^{1,p}(\Omega)\} = [0, \lambda^*)$ .
- ▶  $S_r = \{\lambda \geq 0 / (P_{v,\lambda}) \text{ a une solution renormalisée}\} = [0, \lambda_r)$ .
- ▶ On a

$$\lambda_b \leq \lambda^* \leq \lambda_r \leq \infty$$

- ▶ Si  $\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} > 0$ , en particulier  $g$  convexe; alors  $\lambda_r < \infty$ .

## Questions traitées

**Question 1.** Quand a-t-on  $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$  ?

## Questions traitées

**Question 1.** Quand a-t-on  $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$  ?

**Question 2.** Si  $\lambda^* < \infty$ , que se passe-t-il pour  $\lambda > \lambda^*$  ?

- $p = 2$  : [Brezis-Cazenave-Martel-Ramiandrisoa] en 1996.
- $p > 1$  : [Cabré-Sanchon] en 2007.

### Théorème 3.1

Soit  $g \in (g)$  et  $f \in (f)$ . Dans le cas  $\Lambda = \infty, L = H(\Lambda) = \infty$  nous supposons que  $f \in L^r(\Omega), r > \frac{N}{p}$ .

Alors

$$\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$$

dans l'un des cas suivants :

- \*  $g$  est *convexe* au voisinage de  $\Lambda$ .
- \*  $H \times (1 + g)$  est *convexe* sur  $[0, \Lambda)$

## Idée de la preuve

- ▶ Supposons que pour un certain  $\lambda > 0$ , il existe une solution renormalisée  $v$  de  $(P_{v,\lambda})$  telle que  $0 \leq v(x) < \Lambda$  presque partout dans  $\Omega$ .

## Idée de la preuve

- ▶ Supposons que pour un certain  $\lambda > 0$ , il existe une solution renormalisée  $v$  de  $(P_{v,\lambda})$  telle que  $0 \leq v(x) < \Lambda$  presque partout dans  $\Omega$ .
- ▶  $u = H(v)$  et  $\beta = T(g)$ . On applique le [théorème 1.2](#)

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f$$



## Idée de la preuve

- ▶ Supposons que pour un certain  $\lambda > 0$ , il existe une solution renormalisée  $v$  de  $(P_{v,\lambda})$  telle que  $0 \leq v(x) < \Lambda$  presque partout dans  $\Omega$ .
- ▶  $u = H(v)$  et  $\beta = T(g)$ . On applique le [théorème 1.2](#)

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f$$

- ▶ Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$  on écrit

$$-\Delta_p u = \varepsilon \beta(\varepsilon u) |\nabla u|^p + \underbrace{(\beta(u) - \varepsilon \beta(\varepsilon u))}_{\zeta \geq 0} |\nabla u|^p + \lambda f$$

## Idée de la preuve

- ▶ Supposons que pour un certain  $\lambda > 0$ , il existe une solution renormalisée  $v$  de  $(P_{v,\lambda})$  telle que  $0 \leq v(x) < \Lambda$  presque partout dans  $\Omega$ .
- ▶  $u = H(v)$  et  $\beta = T(g)$ . On applique le [théorème 1.2](#)

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f$$

- ▶ Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$  on écrit

$$-\Delta_p u = \varepsilon \beta(\varepsilon u) |\nabla u|^p + \underbrace{(\beta(u) - \varepsilon \beta(\varepsilon u))}_{\zeta \geq 0} |\nabla u|^p + \lambda f$$

- ▶ On pose  $u_\varepsilon = \varepsilon u$ . Alors

$$-\Delta_p u_\varepsilon = \beta(u_\varepsilon) |\nabla u_\varepsilon|^p + \varepsilon^{p-1} (\zeta + \lambda f)$$

## Idée de la preuve

- ▶ Supposons que pour un certain  $\lambda > 0$ , il existe une solution renormalisée  $v$  de  $(P_{v,\lambda})$  telle que  $0 \leq v(x) < \Lambda$  presque partout dans  $\Omega$ .
- ▶  $u = H(v)$  et  $\beta = T(g)$ . On applique le [théorème 1.2](#)

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f$$

- ▶ Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$  on écrit

$$-\Delta_p u = \varepsilon \beta(\varepsilon u) |\nabla u|^p + \underbrace{(\beta(u) - \varepsilon \beta(\varepsilon u))}_{\zeta \geq 0} |\nabla u|^p + \lambda f$$

- ▶ On pose  $u_\varepsilon = \varepsilon u$ . Alors

$$-\Delta_p u_\varepsilon = \beta(u_\varepsilon) |\nabla u_\varepsilon|^p + \varepsilon^{p-1} (\zeta + \lambda f)$$

- ▶ La fonction  $v_\varepsilon = \Psi(u_\varepsilon)$  satisfait

$$-\Delta_p v_\varepsilon = \varepsilon^{p-1} (\zeta + \lambda f) (1 + g(v_\varepsilon))^{p-1} \geq \lambda \varepsilon^{p-1} f (1 + g(v_\varepsilon))^{p-1}$$

## Idée de la preuve

► Si  $L = \int_0^\Lambda \frac{ds}{1+g(s)} < \infty$  alors  $v_\varepsilon$  est bornée.

## Idée de la preuve

- ▶ Si  $L = \int_0^\Lambda \frac{ds}{1+g(s)} < \infty$  alors  $v_\varepsilon$  est bornée.
- ▶ Si  $L = \int_0^\infty \frac{ds}{1+g(s)} = \infty$  alors pour  $n$  assez grand nous construisons une solution renormalisée bornée de

$$-\Delta_p w_n = \lambda \varepsilon^{n(p-1)} f(x) (1 + g(w_n))^{p-1}$$

par un argument itératif de *bootstrap* basé sur la concavité de  $H$  et un résultat de régularité.

## Corollaire 3.1

Soit  $\beta \in (\text{Beta})$  et  $f$  une fonction positive telle que  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ ,  $f \not\equiv 0$ .

- ▶ Alors pour  $\lambda > 0$  assez petite, il existe une *solution minimale*  $\underline{u}_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  de  $(P_{u,\lambda})$ , avec  $\|\underline{u}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < L$ .

## Corollaire 3.1

Soit  $\beta \in (\text{Beta})$  et  $f$  une fonction positive telle que  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ ,  $f \not\equiv 0$ .

- ▶ Alors pour  $\lambda > 0$  assez petite, il existe une *solution minimale*  $\underline{u}_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  de  $(P_{u,\lambda})$ , avec  $\|\underline{u}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < L$ .
- ▶ Si  $t\beta(t)$  est *croissante*, alors
  - pour *tout*  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  il existe une *solution minimale*  $\underline{u}_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  de  $(P_{u,\lambda})$  avec  $\|\underline{u}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < L$ .
  - pour *tout*  $\lambda > \lambda^*$  il n'existe pas de solutions  $u$  de  $(P_{u,\lambda})$  telle que  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < L$ .

## Questions traitées

**Question 3.** Que se passe-t-il pour  $\lambda^*$ ? La limite des solutions, dite fonction extrémale : est-elle une solution du problème limite  $(P_{V,\lambda^*})$ ? Quelle est sa régularité?

►  $p = 2$  :

- [Mignot-Puel] en 1980.
- [Brezis-Vazquez] en 1997.
- [Nedev] en 2000 et 2001.
- [Abdellaoui-Dall'Aglio-Peral] en 2006.

►  $p \geq 2$  : [Sanchon] en 2007.



## Solution extrême

### Théorème 3.2

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  et  $f$  une fonction positive telle que  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ ,  $f \not\equiv 0$ . Supposons que  $g$  satisfait

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$$

## Solution extrême

### Théorème 3.2

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  et  $f$  une fonction positive telle que  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ ,  $f \not\equiv 0$ . Supposons que  $g$  satisfait

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$$

► Si  $g$  est *convexe* au voisinage de  $+\infty$  alors la fonction extrême

$$v^* = \sup_{\lambda \nearrow \lambda^*} v_\lambda$$

est une *solution renormalisée* de  $(P_{v, \lambda^*})$ .

## Solution extrême

### Théorème 3.2

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  et  $f$  une fonction positive telle que  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ ,  $f \not\equiv 0$ . Supposons que  $g$  satisfait

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$$

► Si  $g$  est *convexe* au voisinage de  $+\infty$  alors la fonction extrême

$$v^* = \sup_{\lambda \nearrow \lambda^*} v_\lambda$$

est une *solution renormalisée* de  $(P_{v, \lambda^*})$ .

► La fonction

$$v_b = \sup_{\lambda \nearrow \lambda_b} v_\lambda$$

est une *solution renormalisée locale* de  $(P_{v, \lambda_b})$ .

## Théorème 3.3

Soient  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  et  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ . Supposons que

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$ , et  $g$  est *convexe* au voisinage de  $\infty$ . Alors

►  $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$  dans l'un des cas suivants

- La condition d'Ambrosetti-Rabinowitz est satisfaite.

## Théorème 3.3

Soient  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  et  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ . Supposons que

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$ , et  $g$  est *convexe* au voisinage de  $\infty$ . Alors

►  $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$  dans l'un des cas suivants

- La condition d'Ambrosetti-Rabinowitz est satisfaite.
- $N < \frac{p(1+p')}{1+r^{-1}p'}$ .

## Théorème 3.3

Soient  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$  et  $f \in L^r(\Omega)$ ,  $r > N/p$ . Supposons que

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$ , et  $g$  est *convexe* au voisinage de  $\infty$ . Alors

►  $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$  dans l'un des cas suivants

- La condition d'Ambrosetti-Rabinowitz est satisfaite.

- $N < \frac{p(1+p')}{1+r^{-1}p'}$ .

►  $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  si

- $N < \frac{pp'}{1+((p-1)r)^{-1}}$ .

## Questions traitées

Question 4. Existe-t-il une deuxième solution bornée pour  $\lambda < \lambda_b$  si  $g$  satisfait

$$M_Q = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)^{p-1}}{s^Q} < \infty \quad (CP)$$

avec  $Q < Q^* = p^* - 1$ ?

- $p = 2$  [Abdellaoui-Dall'Aglio-Peral] en 2006.
- $p > 1$  [Ferrero] en 2004.

## Deuxième solution bornée

### Théorème 3.4

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$ . Supposons que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$ , et que  $g$  satisfait (CP) avec  $Q < Q^*$ , et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $(Q+1)r' < p^*$ .



## Deuxième solution bornée

### Théorème 3.4

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$ . Supposons que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$ , et que  $g$  satisfait (CP) avec  $Q < Q^*$ , et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $(Q+1)r' < p^*$ . Alors

- ▶ Si  $g$  est *convexe* au voisinage de  $\infty$ , il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que pour tout  $\lambda < \lambda_0$ , il existe au moins **deux solutions**  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  de  $(P_{v,\lambda})$ .

## Deuxième solution bornée

### Théorème 3.4

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$ . Supposons que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$ , et que  $g$  satisfait (CP) avec  $Q < Q^*$ , et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $(Q+1)r' < p^*$ . Alors

- ▶ Si  $g$  est *convexe* au voisinage de  $\infty$ , il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que pour tout  $\lambda < \lambda_0$ , il existe au moins **deux solutions**  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  de  $(P_{v,\lambda})$ .
- ▶  $\lambda_0 = \lambda^*$  si  $p = 2$  et  $g$  est *convexe*.

## Deuxième solution bornée

### Théorème 3.4

Soit  $g \in (g)$  avec  $\Lambda = \infty$ . Supposons que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty$ , et que  $g$  satisfait (CP) avec  $Q < Q^*$ , et  $f \in L^r(\Omega)$  avec  $(Q+1)r' < p^*$ . Alors

- ▶ Si  $g$  est *convexe* au voisinage de  $\infty$ , il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que pour tout  $\lambda < \lambda_0$ , il existe au moins **deux solutions**  $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  de  $(P_{v,\lambda})$ .
- ▶  $\lambda_0 = \lambda^*$  si  $p = 2$  et  $g$  est *convexe*.
- ▶  $\lambda_0 = \lambda_b$  si  $f \in L^\infty(\Omega)$  et  $g$  satisfait la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz.

## Points essentiels

- ▶ La fonctionnelle d'énergie

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p dx - \lambda \int_\Omega f(x) \left( \int_0^{v(x)} (1 + g(s^+)^{p-1} ds) dx \right)$$

- ▶  $J_\lambda(v_\lambda) \leq 0$ .
- ▶ La solution minimale est semi-stable ; **[Cabré-Sanchon]** en 2007.
- ▶ Pour  $\lambda$  petit  $J_\lambda$  a la géométrie de Col.
- ▶ Difficulté : les suites de Palais-Smale ne sont pas nécessairement bornées dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .
- ▶ **[Jeanjean]** en 1999. On montre qu'il existe  $\lambda_n$  convergente vers  $\lambda$ , telle que  $J_{\lambda_n}$  a un point critique  $v_n$  et  $(v_n)$  est bornée dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

# Plan de l'exposé

- 1 Connexion entre  $(P_{u,\lambda})$  et  $(P_{v,\lambda})$ 
  - ▶ Le changement d'inconnue ponctuel
  - ▶ Apparition des mesures de Radon et résultat
- 2 Existence et non-existence
  - ▶ Condition de croissance lente sur  $g$
  - ▶ Non-existence
- 3 Etude des problèmes avec hypothèses de convexité et sur-linéarité sur  $g$ 
  - ▶ Solution minimale
  - ▶ Solution extrémale et sa régularité
  - ▶ Deuxième solution variationnelle bornée
- 4 Commentaires et extension des applications

## (CP) en termes de $\beta$

- ▶ La condition (CP) est équivalente à

$$\limsup_{t \rightarrow L} \frac{e^{\gamma(t)}}{(\Psi(t))^Q} < \infty \quad (\text{CPE})$$

## (CP) en termes de $\beta$

- ▶ La condition (CP) est équivalente à

$$\limsup_{t \rightarrow L} \frac{e^{\gamma(t)}}{(\Psi(t))^Q} < \infty \quad (\text{CPE})$$

- ▶ Supposons  $L = \infty$ . S'il existe un  $Q > 0$  tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{(p-1)\beta'(t)}{\beta^2(t)} \leq 1 - \frac{p-1}{Q}.$$

Alors (CPE) est satisfaite.

- ▶  $\beta(u) = u^m$ ,  $m > 0$ ,  $\beta(u) = e^u$ ,  $\beta(u) = e^{e^u+u} + e^u + 1$ , on a  $\limsup_{t \rightarrow \infty} (\beta'/\beta^2)(t) = 0$ .

# Conjecture

- ▶ Conjecture : **Toute** fonction croissante  $\beta$  définie sur  $[0, \infty)$  satisfait (CPE) pour un certain  $Q > p - 1$ ?



# Conjecture

- ▶ **Conjecture** : **Toute** fonction croissante  $\beta$  définie sur  $[0, \infty)$  satisfait (CPE) pour un certain  $Q > p - 1$ ?
- ▶ **Réponse négative** : Considérons une fonction  $F \in C^0([0, \infty))$  strictement convexe, avec

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \infty \quad (\text{par exemple } F(\tau) = e^\tau).$$

# Conjecture

- ▶ **Conjecture** : **Toute** fonction croissante  $\beta$  définie sur  $[0, \infty)$  satisfait (CPE) pour un certain  $Q > p - 1$  ?
- ▶ **Réponse négative** : Considérons une fonction  $F \in C^0([0, \infty))$  strictement convexe, avec

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \infty \quad (\text{par exemple } F(\tau) = e^\tau).$$

Alors il existe une fonction  $\beta \in C^0([0, \infty))$ , positive croissante  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \infty$  telle que  $g = T(\beta)$  satisfait

$$\limsup_{\tau \rightarrow \infty} \frac{g(\tau)}{F(\tau)} = \infty.$$

## Extensions et Recherche en cours

①  $f$  dépend de  $u$

$$-\Delta_p u = (p-1)|\nabla u|^p + \lambda f(x)(1 + \omega(u))^{p-1}$$

# Extensions et Recherche en cours

①  $f$  dépend de  $u$

$$-\Delta_p u = (p-1) |\nabla u|^p + \lambda f(x)(1 + \omega(u))^{p-1}$$

② Le problème avec  $|\nabla u|^q$  :

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^q + \lambda f$$

- [Abdellaoui] en 2008.

## Extensions et Recherche en cours

- ①  $f$  dépend de  $u$

$$-\Delta_p u = (p-1) |\nabla u|^p + \lambda f(x)(1 + \omega(u))^{p-1}$$

- ② Le problème avec  $|\nabla u|^q$  :

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^q + \lambda f$$

- [Abdellaoui] en 2008.

- ③ Opérateurs plus généraux :

$$-\operatorname{div}(A(x, u, \nabla u)) = B(x, u, \nabla u) + \lambda f$$

- [Ferone-Murat] en 2000.

## Extensions et Recherche en cours

- ①  $f$  dépend de  $u$

$$-\Delta_p u = (p-1) |\nabla u|^p + \lambda f(x)(1 + \omega(u))^{p-1}$$

- ② Le problème avec  $|\nabla u|^q$  :

$$-\Delta_p u = \beta(u) |\nabla u|^q + \lambda f$$

- [Abdellaoui] en 2008.

- ③ Opérateurs plus généraux :

$$-\operatorname{div}(A(x, u, \nabla u)) = B(x, u, \nabla u) + \lambda f$$

- [Ferone-Murat] en 2000.

- ④ Cas d'un terme d'absorption :

$$-\Delta_p u + \beta(u) |\nabla u|^p = f(x, u)$$

- [Brezis-Nirenberg] en 1997.