



HAL
open science

Systemes quantiques d'interactions répétées: l'approche perturbative

Rodrigo Vargas Le-Bert

► **To cite this version:**

Rodrigo Vargas Le-Bert. Systemes quantiques d'interactions répétées: l'approche perturbative. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2009. Français. NNT: . tel-00441518

HAL Id: tel-00441518

<https://theses.hal.science/tel-00441518>

Submitted on 16 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Systemes Quantiques d'Interactions Répétées: l'Approche Perturbative

Rodrigo Vargas Le-Bert

17 décembre 2009

Remerciements

Je regrette que les expressions suivantes perdent leur profondeur à force d'être répétées, mais je veux remercier ici le travail diligent de mes rapporteurs Claude-Alain et Stéphane. Je remercie aussi tout le jury, et je profite pour exprimer l'honneur et bonheur qui me donne le fait que Dominique, qui a été présent pour moi dans des circonstances très dures avant, en fasse partie maintenant. Merci, Dominique.

Mon histoire pendant ces années n'a pas facilité l'approfondissement de mes relations avec les membres de la communauté de l'Institut Fourier, mais il y a sans doute plusieurs personnes auxquels je pense avec affection quand je récapitule mon temps ici. J'espère que vous allez m'excuser pour ne pas écrire vos prénoms ici, mais vous savez qui vous êtes. Je remercie dès les sourires amicaux au couloirs jusqu'au temps partagé aux bureaux et pauses café, en passant, certes, par le travail de l'administration.

Alain, tu figures dans mes remerciements en espagnol, mais je vais traduire ici ton paragraphe pour le reste. Merci pour donner forme au chemin parcouru, comme résultat duquel je sens que je comprends, de façon certes générale mais personnellement très gratifiante, la problématique des systèmes ouverts quantiques. Merci pour la patience, le respect et l'ouverture, qui se sont manifestement exprimés dans plusieurs occasions que je ne vais pas oublier. Et merci, aussi, pour tous tes conseils pratiques à l'heure de m'apprendre le métier. M'arrêter pour te remercier ces choses m'a fait saisir la profondeur de ton influence dans ce travail.

Cette thèse a profité du soutien de CONICYT et l'ambassade de France au Chili, et je profite pour remercier à tous les gens de ces deux organismes avec lesquelles j'ai traité. Ils ont toujours fait son mieux pour faciliter l'aboutissement de ce travail.

Agradecimientos

*Le debo una canción, una, a la muerte,
una a la muerte voraz que se comerá tanto:
le debo una canción en que hunda el diente
y luego esparza con la explosión fuegos del canto.*

*Le debo una canción a lo imposible,
a la mujer, a la estrella, al sueño que nos lanza:
le debo una canción indescriptible
como una vela inflamada en vientos de esperanza.*

–Silvio Rodríguez

Gracias, Alain, por dar forma al camino recorrido, como resultado del cual siento que comprendo, de manera por cierto general pero personalmente muy gratificante, la problemática de los sistemas abiertos cuánticos. Gracias por la paciencia, el respeto y la apertura, que se expresaron muy patentemente en más de una ocasión que no olvidaré. Y gracias, también, por tus múltiples consejos prácticos a la hora ayudarme a aprender el oficio. Detenerme a agradecer estas cosas me ha hecho aprehender cuán profundamente has influido en mi trabajo de tesis.

Hay muchas personas más con quienes estoy profundamente agradecido y que, de una manera u otra, han contribuido a que este proyecto haya podido ser llevado a buen puerto. Pues estos años de mi vida han quedado marcados no sólo por el inicio de mi aventura como investigador, sino sobre todo por el amor maravilloso que me unió a Mariana y que fue truncado tras un accidente de montaña en que murieron ella y sus tres compañeros, Jane, Mark y Morgane. Así, mis agradecimientos más profundos van a Mariana, por todo lo que significó y significa en mi vida, y que me es imposible resumir en palabras. En esta página quiero recordarla, particularmente, como la compañera de inquietudes científicas que tuvo tanta fe en mis capacidades. En segundo lugar, agradezco a todos los que me brindaron generosamente el apoyo que estuvo a su alcance, permitiendo mi reconciliación con la vida y haciendo de paso posible la finalización de mi doctorado. Son muchas las personas e incluso instituciones que tendría que mencionar, de modo que espero me perdonen porque no lo haré. Muchos de ustedes saben quienes son : gracias, una vez más. Y a los que quizás no lo saben, por dudar que el gesto más simple puede hacer a veces una diferencia, espero haberles demostrado o poderles demostrar mi agradecimiento de un modo más concreto que haciendo figurar su nombre sobre este papel.

Causas y azares hacen que esta página se vuelva el hito del fin de un ciclo, inextricablemente dependiente del comienzo de otro. Por eso, y aunque tu influencia no se vea reflejada en las páginas que vienen, escribo aquí tu nombre para dar gracias a la vida por ti, Daniela.

*À la mémoire de Mariana
et de Jane, Mark et Morgane*

Table des matières

1	Introduction	1
2	Préliminaires	9
2.1	Rappel sur les algèbres de von Neumann	9
2.1.1	Définition et propriétés élémentaires	9
2.1.2	Le prédual	11
2.1.3	La construction GNS	13
2.2	Dynamique quantique	15
2.2.1	Formulation dans un espace de Hilbert	15
2.2.2	Formulation dans une algèbre d'opérateurs	18
2.3	Introduction aux systèmes ouverts	21
3	Processus de Markov quantiques	25
3.1	Probabilités quantiques	25
3.1.1	Distributions de probabilité et non-commutativité	26
3.1.2	Produits tensoriels	27
3.2	Canaux quantiques	28
3.2.1	Complète positivité	28
3.2.2	Espérances conditionnelles	29
3.3	Processus de Markov classiques	31
3.4	Semigroupes markoviens quantiques	32
3.4.1	Propriétés de continuité	32
3.4.2	Générateur de Lindblad	33
3.4.3	Convergence à la stationnarité	34
3.4.4	Dilatations	35
4	Étude asymptotique de semigroupes	37
4.1	Série de Dyson	37
4.2	Perturbation analytique d'une matrice	39
4.3	Dynamique effective en régime perturbatif	41
4.4	Comportement en temps long	43

5	Systèmes quantiques ouverts	47
5.1	Le cas autonome	47
5.1.1	Modèle et équation maîtresse	47
5.1.2	Sur la structure du terme d'interaction	50
5.1.3	Production d'entropie	52
5.1.4	Limite de van Hove	52
5.2	L'équation de Hudson-Parthasaraty	54
5.3	Systèmes d'interactions répétées	57
5.3.1	Le modèle	58
5.3.2	Version hamiltonienne	59
6	Approche perturbative des SIRs	67
6.1	Régimes d'interaction faible	68
6.1.1	Le régime τ constant et $\lambda \rightarrow 0$	69
6.1.2	Le régime $\tau \rightarrow 0$ et $\lambda^2\tau \rightarrow 0$	71
6.2	Cycle limite	73
6.2.1	Approche perturbative de l'existence	73
6.2.2	Production d'entropie	77
6.3	Une famille d'exemples	78
6.3.1	Existence de dynamique effective quand $\lambda \rightarrow 0$	79
6.3.2	Le cas spin-spin	81
A	Produits tensoriels algébriques	85
B	La notation bra-ket de Dirac	89

Chapitre 1

Introduction

*Soy aria, endecha, tonada,
soy Mahoma, soy Lao-Tsé,
soy Jesucristo y Yahvéh,
soy la serpiente emplumada,
soy la pupila asombrada
que descubre como apunta,
soy todo lo que se junta
para vivir y soñar:
soy el destino del mar:
soy un niño que pregunta.*

–Silvio Rodríguez (¡otra vez!)

La deuxième loi de la thermodynamique soutient que l'entropie des systèmes physiques isolés augmente toujours au cours du temps. Ainsi, l'état statistique d'un système isolé et composé d'un grand nombre de particules devrait converger, pour des temps grands, vers un certain état d'entropie maximale. Cet état doit être forcément un état d'équilibre thermodynamique, et il est typiquement caractérisé par un seul paramètre, à savoir, sa *température*.¹ Cependant, on est entouré de plein de systèmes physiques qui s'auto-organisent, dont notamment les êtres vivants. Alors, si l'on ne veut pas mettre en question la deuxième loi, ces systèmes ne doivent pas être isolés, et leur comportement doit dépendre de façon cruciale de ce fait. Les systèmes qui tombent dans cette catégorie reçoivent le nom de *systèmes ouverts* et, de manière attendue, leur étude est très important dans presque tous les domaines de la science et la technologie modernes.

L'étude des systèmes ouverts présente des difficultés conceptuelles et techniques. D'abord, au moins en principe, on peut considérer de façon conjointe

1. Dans cet introduction on ne rentre pas dans les détails de ces états qui, mathématiquement, reçoivent le nom d'*états KMS*, mais on fait une exposition concise dans la Section 2.2. Il faut préciser qu'il y a aussi des situations où d'autres paramètres sont nécessaires, tels que les potentiels chimiques.

le système en étude et son environnement, en retrouvant un système complet qui est isolé et devrait converger, donc, vers un état d'équilibre thermodynamique.² Ainsi, le comportement potentiellement spectaculaire que peut exhiber un système ouvert est, en principe, un phénomène transient, dont l'étude mathématique directe n'est pas évidente à réaliser. En conséquence, au lieu d'étudier des régimes transients, on considère des systèmes physiques idéaux qui peuvent agir comme des sources ou puits infinis d'énergie, en transformant ces régimes transients en régimes stationnaires. Ceci nous mène aux concepts de réservoir et d'état stationnaire hors équilibre, les deux concepts centraux dans l'approche adoptée des problèmes de la mécanique quantique loin de l'équilibre.

Alors, par *système ouvert* on comprend la donnée d'un petit système, ou système de référence, et son environnement. On suppose que l'environnement est tellement "grand" par rapport au petit système, que le fait d'être en contact avec lui ne modifie pas son comportement : il ne perd pas, et ne gagne pas non plus, énergie. Il peut être dans un état d'équilibre, mais il est fort intéressant, comme on le verra par la suite, de considérer le cas où il se compose de plusieurs sous-systèmes dits *réservoirs*, tous aussi "grands", qui se trouvent initialement dans un état d'équilibre, mais chacun à sa propre température. L'idée est d'étudier les configurations stationnaires du système complet qui, par construction, ne sont plus nécessairement à l'équilibre thermodynamique.

Dans cette introduction on fera un résumé du développement de ces idées, en exposant certains résultats connus, et conduisant au sujet central de cette thèse : l'étude perturbative des systèmes d'interactions répétées.

Réservoirs et retour à l'équilibre

Un réservoir est un système physique infiniment grand, en équilibre thermodynamique. Cette définition, en toute sa généralité, n'est pas mathématiquement rigoureuse, mais la notion de réservoir est plutôt physique, et on se contente, donc, d'avoir des exemples concrets. Toutefois, on demande d'un réservoir la propriété de, suite à une perturbation locale de son état, se relaxer au cours du temps en convergent à nouveau vers l'état d'équilibre du départ. Ce comportement, connu comme *retour à l'équilibre*, semble être incompatible avec le caractère réversible des lois microscopiques, et on s'attend à l'observer seulement lorsque la limite thermodynamique a été prise. En fait, quand le volume et le nombre de particules d'un système divergent tout en laissant la densité constante, l'information peut "échapper vers l'infini", en expliquant l'irréversibilité du système à la limite.

Soyons plus précis, en utilisant le cas concret de la chaîne XY. Dans cet exemple, on suppose que sur chaque point de \mathbb{Z} il y a un atome à deux niveaux ou spin, dont l'état est décrit par un vecteur dans \mathbb{C}^2 . La construction mathématique du réservoir résultant est comme suit (voir [16, Chapter 6.2]) :

2. Le destin thermodynamique de l'univers tout entier fait encore l'objet de débats et, dans cette thèse, on prends un point de vue pragmatique en choisissant d'ignorer ce genre de questions.

1. À chaque ensemble fini $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ on associe une algèbre matricielle d'observables A_Λ . La famille $\{A_\Lambda\}$ est naturellement un système dirigé, et la complétion de sa limite inductive par rapport à la norme induite est une C^* -algèbre, qu'on désigne par A .
2. Pour construire la dynamique de A on spécifie l'hamiltonien de chaque spin et leur interaction, dont la forme précise n'est pas pertinente ici, sauf par le fait qu'on met en interaction seulement les spins qui sont sur des sites voisins. Ainsi, l'évolution pour des temps courts d'une observable local ne dépend pas de l'algèbre A_Λ dans laquelle on fait les calculs, pourvu que Λ contienne tous les sites pertinents. Ce fait permet de définir l'évolution complète sur A , qui est un groupe fortement continu d'automorphismes $\{\alpha^t\}$.
3. Finalement, on démontre l'existence, pour tout $\beta > 0$, d'un unique état KMS ω_β pour $\{\alpha^t\}$, qui représente l'équilibre thermique de la chaîne à température inverse β . La preuve de ce fait n'est absolument pas triviale.

Alors, ayant une construction précise du système, on peut énoncer la propriété de retour à l'équilibre, démontré par Araki [4] : si ω est un état normal par rapport à ω_β , alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\alpha^t(a)) = \omega_\beta(a)$, pour tout $a \in A$. La condition de normalité exprime mathématiquement le fait que ω doit être un état "proche" de ω_β .

NESS et production d'entropie

L'étude mathématique des états stationnaires hors équilibre ou NESS, pour "non-equilibrium steady states", a été commencé en 1999, quand Ruelle [42] a proposé une définition exploitable pour des systèmes dynamiques classiques, qui a été ensuite généralisée par lui même au cas quantique [43]. Moralement, pour construire des NESS on met ensemble plusieurs réservoirs à différente température, on les fait interagir au moyen d'un petit système, et on attend un temps infini jusqu'à obtenir un état stationnaire; il faut dire, cependant, que l'exécution de cet algorithme n'est absolument pas une démarche mathématique simple. Ce genre de construction entre dans le cadre de l'étude perturbative d'un système dynamique quantique, en considérant le couplage entre réservoirs et petit système comme une perturbation du produit de leurs dynamiques libres (voir la Sous-section 5.1.3). Ainsi, l'existence de NESS peut s'attaquer au moyen de la théorie de la diffusion. Une exposition complète de ces idées se trouve dans [5].

Pour illustrer la construction décrite ci-dessus, reprenons l'exemple de la chaîne XY. On prend comme système de référence l'ensemble des spins dans l'intervalle $\Lambda_N = \{-N, \dots, N\} \subseteq \mathbb{Z}$, et on le découple du reste de la chaîne en obtenant trois sous-systèmes indépendants : les chaînes semi-infinies aux bouts, et le système de référence. La construction décrite dans la section précédente s'applique aussi aux chaînes semi-infinies, ce qui donne les systèmes dynamiques quantiques $(A_L, \{\alpha_L^t\}, \omega_L)$ et $(A_R, \{\alpha_R^t\}, \omega_R)$, où ω_L et ω_R sont des états

KMS pour les dynamiques correspondantes, disons à températures inverses β_L et β_R , respectivement. On remarque que la propriété du retour à l'équilibre est établie aussi pour ces chaînes semi-infinies [16, Chapter 6.2]. Ainsi, on obtient le système dynamique quantique

$$(A, \{\alpha_0^t\}, \omega_0) = (A_L \otimes A_N \otimes A_R, \{\alpha_L^t \otimes \alpha_N^t \otimes \alpha_R^t\}, \omega_L \otimes \omega_N \otimes \omega_R),$$

où $(A_N, \{\alpha_N^t\}, \omega_N)$ est le système dynamique qui décrit les spins dans Λ_N , l'état initial ω_N étant donnée par la trace (A_N est une algèbre matricielle). Finalement, soit $V \in A$ l'hamiltonien d'interaction entre les sites $-N-1$ et $-N$, plus celui entre les sites N et $N+1$, de façon telle que la dynamique $\{\alpha^t\}$ obtenue en perturbant le générateur de $\{\alpha_0^t\}$ par $i[V, \cdot]$ est la dynamique originale de la chaîne XY. Dans ces conditions, Aschbacher et Pillet [6] ont démontré qu'il existe un unique NESS $\omega_{\beta_L, \beta_R}$ associé à l'état initial ω_0 , qui est indépendant de N et invariant par translations, et qui satisfait, de plus, $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_0(\alpha^t(a)) = \omega_{\beta_L, \beta_R}(a)$, pour tout $a \in A$. Si $\beta_L = \beta_R$, alors $\omega_{\beta_L, \beta_R}$ est l'unique état KMS à température inverse β_L de la chaîne entière, en accord avec le résultat d'Araki sur le retour à l'équilibre de ce système. Quand $\omega_L \neq \omega_R$ l'état obtenu n'est plus KMS.

Physiquement, ce qui distingue les états stationnaires hors équilibre de l'état d'équilibre thermique est la production d'entropie. Ainsi, ce concept est central en mécanique statistique hors équilibre, et pourtant on ne dispose pas encore d'une définition physique complètement générale. Néanmoins, pour les NESS Jakšić et Pillet [33] ont proposé une définition mathématique satisfaisante, qui exploite l'existence d'un état de référence "naturel". Elle est basée sur la notion d'entropie relative d'Araki entre le NESS et l'état de référence, et a été utilisé dans plusieurs exemples concrets pour établir la stricte positivité de la production d'entropie des NESS (particulièrement, pour l'état $\omega_{\beta_L, \beta_R}$ décrit dans le paragraphe précédent quand $\beta_L \neq \beta_R$ [6]).

Dynamiques effectives markoviennes

En théorie des systèmes ouverts on s'intéresse souvent seulement au comportement du petit système, et un des problèmes fondamentaux est celui de trouver des descriptions de la dynamique qui ne fassent pas référence à l'environnement. Pour le faire en partant de premiers principes, on suppose que l'état de l'environnement est connu et on prend une trace partielle par rapport à lui, en obtenant une matrice densité restreinte au système de référence. Ensuite, on peut dériver une équation maîtresse généralisée pour cette matrice densité restreinte, dans le cas où le couplage entre système de référence et environnement est une perturbation locale de la dynamique libre. Cette dérivation, due à Nakajima, Prigogine, Résibois et Zwanzig, donne lieu à une équation intégral-différentielle. Or, l'expérience avec des situations physiques concrètes montre que, souvent, les modèles markoviens sont les plus adaptés, du fait de combiner la simplicité inhérente à une évolution donnée par un semigroupe d'applications complètement positives avec des prédictions suffisamment réalistes. Ces

modèles doivent, donc, émerger comme des dynamiques effectives sous certains régimes particuliers de paramètres. Un régime pour lequel ceci est le cas est celui où le couplage λ entre petit système et environnement tend vers zéro, comme van Hove [47] l'a montré en 1955. Il se trouve que cette limite donne, après une certaine renormalisation, un semigroupe de contractions. Dans le cas de dimension finie, ce semigroupe est, en fait, un semigroupe markovien quantique [30]. La preuve repose sur la caractérisation de Lindblad [38] des générateurs de semigroupes continus en norme d'applications complètement positives. Malheureusement, on ne dispose pas encore d'une généralisation de ceci aux semigroupes markoviens quantiques arbitraires.

Introduisons le régime de couplage faible de façon plus précise. Quand le couplage $\lambda \rightarrow 0$, la dynamique du petit système converge vers la dynamique libre et les effets de l'interaction avec l'environnement ne sont négligeables que pour des temps longs. Pour étudier ces effets, on note, en utilisant la série de Dyson, que les changements dans la dynamique du petit système attribuables à l'environnement sont d'ordre λ^2 , et l'échelle de temps intéressante est $s = t/\lambda^2$. À cette échelle, la dynamique restreinte se décompose en deux parties : une première partie rapide, avec temps caractéristique d'ordre λ^2 , qui provient de la dynamique libre ; et une deuxième partie lente, avec temps caractéristique d'ordre 1, qui contient les effets de l'interaction. Dans la limite $\lambda \rightarrow 0$, ces deux dynamiques se découplent. La partie lente, dite *limite de van Hove*, est un semigroupe de contractions agissant sur l'algèbre d'observables du petit système ; la partie rapide devient du bruit, raison pour laquelle ce régime est aussi appelé *limite stochastique* [2]. L'étude mathématique de la limite de van Hove a été commencé par Davies [24, 25] en 1974. Puis, Accardi, Frigerio et Lu [1] ont montré, en 1990, que dans le même régime il est possible d'obtenir une dynamique effective qui tient compte des réservoirs aussi, ce qui a été repris sous un point de vue différent en 2007 par Dereziński et de Roeck [28, 29].

La limite de van Hove fournit une approche exploitable à la thermodynamique hors équilibre ; la théorie ainsi obtenue est appelée parfois *thermodynamique FGR*, pour "Fermi golden rule" (voir, par exemple, [30]). Elle a été explorée par Lebowitz et Spohn [37] en 1978, qui ont récupéré notamment les relations d'Onsager en théorie de réponse linéaire et ont obtenu aussi des expressions pour la production d'entropie. Néanmoins, la validité physique de l'approche repose sur la supposition que l'état asymptotique ω_λ du petit système converge, quand $\lambda \rightarrow 0$, vers l'état asymptotique de la limite de van Hove. Un exemple où ceci est connu est celui d'une chaîne finie d'oscillateurs harmoniques *classiques*, couplée aux deux bouts à des chaînes semi-infinies initialement dans des états d'équilibre à températures inverses β_L et β_R , respectivement. Dans ce cas, la convergence du système complet vers un état stationnaire ω_λ a été établie dans [45], ainsi que le fait que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega_\lambda = \omega_{\beta_L} \otimes \omega_{VH} \otimes \omega_{\beta_R}$, où ω_{β_L} et ω_{β_R} sont les états d'équilibre des chaînes semi-infinies et ω_{VH} est l'état stationnaire de la limite de van Hove.

Systèmes d'interactions répétées

La caractéristique fondamentale d'un système de référence ouvert, celle qui est à la base de tous les phénomènes thermodynamiques intéressants qu'il peut exhiber, est le fait d'être en contact avec un système externe qui induit un flot stationnaire d'énergie à travers lui. Les systèmes d'interactions répétées, ou SIRs dorénavant, sont le modèle le plus simple qu'on puisse concevoir à avoir cette propriété (ils ont un caractère markovien par construction), tout en gardant une grande flexibilité (en fait, tout lindbladien peut être obtenu comme générateur de la dynamique d'un SIR dans une certaine limite de temps continu, voir [8]). Dans ces modèles, le flot stationnaire d'énergie est induit tout simplement en faisant interagir le petit système avec les éléments d'une chaîne de systèmes externes, un par un et pendant une durée de temps finie, en les laissant partir après vers l'infini. Des SIRs apparaissent de façon naturelle dans plusieurs situations concrètes, dont notamment en optique quantique [39] où ils servent à modéliser le MASER à un atome [50]. Dans cette expérience on fait interagir le champ électromagnétique dans une cavité avec une succession d'atomes qui se trouvent dans un état connu, ce qui permet, par exemple, de tester les aspects les plus fins de l'interaction entre matière et lumière. Dans un esprit plus concret, ils servent à préparer des états de Fock bosoniques [17], auquel cas il est important de savoir quel pourrait être le comportement asymptotique du petit système [52]. Et, troisièmement, on peut mentionner qu'ils fournissent une façon de construire des dilatations de semigroupes complètement positifs (page 35), au moyen de la théorie des *bruits quantiques* [7, 31, 13]. Dans cette théorie le réservoir est un modèle effectif avec la propriété de donner lieu à des semigroupes markoviens quantiques pour l'évolution restreinte au système de référence, ce qui fournit une justification à l'utilisation d'équations de Langevin comme modèle des systèmes ouverts ; on parlera brièvement du sujet dans la Section 5.2.

Dans le contexte des SIRs il y a plusieurs régimes perturbatifs. En fait, le paramètre qui contrôle la nature perturbative d'un régime est la combinaison $\lambda^2\tau$, où λ est la constante de couplage entre système de référence et réservoir et τ est le temps que chaque élément de chaîne individuel passe en interaction avec le système de référence. Alors, il y a trois régimes perturbatifs, classifiés par le comportement de τ : soit il reste fini, soit il converge vers 0, soit il diverge vers l'infini. Ce troisième régime à un comportement oscillatoire en τ , comme on peut le voir dans des exemples concrets (voir la Sous-section 6.3.2). Les deux premiers régimes ont été étudiés par Attal et Joye [8], qui démontrent l'existence de limite de van Hove pour tous les deux, sous l'hypothèse que les espaces de Hilbert tant du petit système que de l'élément de chaîne sont de dimension finie. Ils étudient aussi le régime $\tau \rightarrow 0$ avec $\lambda^2\tau$ constant, qui a la propriété intéressante suivante : les données du modèle peuvent être ajustées de façon telle que la dynamique effective limite soit celle générée par n'importe quel lindbladien prédéterminé. Quant au comportement asymptotique en temps, Bruneau, Joye et Merkli [20] ont démontré, quand l'espace de Hilbert du petit système est de dimension finie et sous certain hypothèse d'ergodicité, que n'im-

porte quel état initial d'un SIR converge vers un état τ -périodique, déterminé de façon unique par les données du modèle. En vue de cette périodicité, on a décidé de l'appeler *cycle limite* au lieu d'état asymptotique, en conformité avec l'usage en théorie des systèmes dynamiques.

Résultats de cette thèse

Les résultats en passe d'être exposés ont été publiés dans [49]. Le premier objectif de ce travail était de généraliser les théorèmes dans [8] sur l'existence de limite de van Hove pour les SIRs. On a formulé le problème dans le cadre des algèbres de von Neumann. Pour le régime $\tau = \text{constant}$ et $\lambda \rightarrow 0$, on a utilisé l'approche d'extrapoler à tout $t \in \mathbb{R}_+$ le semigroupe discret qui donne l'évolution restreinte au petit système et aux temps $t = 0, \tau, 2\tau, \dots$. Une fois ceci fait, il suffit d'appliquer les théorèmes de Davies pour obtenir des conditions suffisantes pour l'existence de limite de van Hove. L'extrapolation est faite par moyen du calcul fonctionnel holomorphe, qui peut être utilisé quand le spectre de l'opérateur qui fait évoluer le petit système de $t = 0$ jusqu'à $t = \tau$ n'est pas dense dans le cercle unité $S^1 \subseteq \mathbb{C}$. Le résultat obtenu est énoncé au Théorème 6.1. Cette approche a l'avantage d'être conceptuellement propre, mais ne donne pas un résultat optimal, comme on l'argumente dans la Sous-section 6.3.1. En outre, il n'est pas pratique dans le régime $\tau \rightarrow 0$ et $\lambda^2\tau \rightarrow 0$, car le semigroupe résultant dépendrait de τ . Toutefois, on est capable de démontrer l'existence de limite de van Hove pour ce régime et calculer explicitement son générateur, sous certaines hypothèses de continuité du couplage par rapport à l'évolution libre du système de référence plus un élément de chaîne. La méthode n'est pas une généralisation directe de celle dans [8], qui est adaptée seulement au cas de dimension finie et repose sur une analyse perturbative à deux paramètres; elle consiste, en fait, à réduire le problème encore à une application des théorèmes de Davies en regroupant les termes d'erreur judicieusement (Lemme 6.5). Le résultat obtenu est énoncé au Théorème 6.6.

Ensuite, on s'est intéressé à relier les éventuels états asymptotiques de la dynamique réduite et sa limite de van Hove. Ce problème peut être étudié de façon abstraite dans le cadre de la théorie de perturbations de semigroupes, ce qu'on fait dans la Section 4.4. Dans ce contexte, l'égalité à ordre zéro dans le paramètre de perturbation des états asymptotiques impliqués se réduit à la continuité d'un projecteur spectral que l'on peut toujours assurer en dimension finie (Lemme 4.8) grâce à la structure supplémentaire d'un semigroupe complètement positif. Dans ce cadre général on peut énoncer un résultat d'un intérêt indépendant : l'existence d'un état asymptotique unique pour la dynamique effective en régime perturbatif implique la même propriété pour la dynamique perturbée, pourvu que le paramètre de perturbation soit suffisamment petit (Théorème 4.10). L'extension de ces résultats au cas de dimension quelconque est un problème intéressant, dont la solution doit faire appel à la machinerie de théorie de perturbation analytique en dimension infinie.

À ce moment, un certain point technique attire notre attention. Les résultats

décrits dans le paragraphe précédent appartiennent à la théorie de perturbation analytique de matrices. L'exemple qu'on a utilisé pour explorer ces questions était celui d'un couplage linéaire par des opérateurs de création et annihilation au niveau de l'élément de chaîne, tel que dans [8]. Ce couplage donne lieu à une dynamique restreinte analytique en λ^2 et la théorie développée s'applique, mais le cas général ne tombe pas dans ce cadre. Alors, dans la littérature il est habituel de supposer que le terme d'ordre 1 dans le développement en puissances de λ de la dynamique restreinte s'annule. L'interprétation de cette supposition est que la dynamique du petit système est modifiée par la perturbation seulement par un couplage avec l'environnement et non pas par une altération de sa dynamique libre. Dans la Sous-section 5.1.2 on argumente qu'une perturbation qui ne modifie pas non plus la dynamique libre de l'environnement donne lieu à un développement en puissances de λ sans *aucun* terme impair. Quand ceci est le cas on dit que le couplage est *d'interaction pure*, et dans la même sous-section on donne une condition suffisante, physiquement significative, pour l'avoir.

L'application des résultats décrits aux SIRs est faite dans la Section 6.2. Notons que, à l'échelle de temps de la limite de van Hove, la périodicité d'un éventuel cycle limite ne se voit pas et l'état asymptotique, s'il existe, est constant. Ce qu'on démontre est que l'existence d'état asymptotique pour cette dynamique implique l'existence de cycle limite pour la dynamique originale, et, sauf pour la dépendance en temps qui doit être réincorporée, quand ces états existent ils coïncident à ordre zéro dans le paramètre de perturbation. Ces résultats sont énoncés aux Théorème 6.8 et Théorème 6.11. On remarque que le régime $\tau \rightarrow 0$ et $\lambda^2\tau \rightarrow 0$ demande plus de travail, car il exige l'analyticité de la dynamique restreinte comme fonction de $\lambda^2\tau$.

Autres résultats

On finit cette introduction en mentionnant quelques autres résultats obtenus récemment pour les SIRs. D'abord, le modèle peut évoluer vers des versions probabilistes, où l'interaction entre petit système et élément de chaîne est aléatoire et de même pour l'état initial des éléments de chaîne [21], ce qui conduit à l'étude de produits infinis de matrices aléatoires [18]. En outre, un aspect trop restrictif de notre modèle pour plusieurs applications physiques est la supposition que le couplage entre petit système et élément de chaîne est donné par un opérateur borné. Quelques résultats ont été obtenus pour le modèle de Jaynes-Cummings [22], pour lequel le système de référence est de dimension infinie et le couplage est non-borné. Finalement, on mentionne que la modélisation du MASER à un atome peut être rendue plus réaliste par l'ajout du réservoir où le petit système vit. Une étude du modèle mathématique résultant est fait dans [19].

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Rappel sur les algèbres de von Neumann

Les contenus de cette section sont standards. On renvoie le lecteur à l'ouvrage [15] pour les preuves des résultats énoncés.

2.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. On désigne par $B(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés $x : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Mise à part la topologie induite par la norme, on a plusieurs autres topologies d'intérêt dans $B(\mathcal{H})$.

Définition 2.1. Si $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq B(\mathcal{H})$ est une suite généralisée, on dit qu'elle converge :

1. Fortement si $\|x_i \xi\|$ converge, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.
2. Faiblement si $\langle \eta, x_i \xi \rangle$ converge, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.
3. Ultrafaiblement si $\sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \eta_k, x_i \xi_k \rangle$ converge, pour tout paire de familles $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ telles que $\sum_{k \in \mathbb{N}} (\|\xi_k\|^2 + \|\eta_k\|^2) < \infty$.

Remarque 2.2. Notons qu'on peut faire agir $B(\mathcal{H})$ sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ pour n'importe quel autre espace de Hilbert \mathcal{K} , en utilisant le morphisme d'algèbres involutives $\pi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ donnée par

$$\pi(x)(\xi \otimes \eta) = (x\xi) \otimes \eta.$$

Prenons le cas $\mathcal{K} = \ell^2(\mathbb{N})$. Une famille $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ telle que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|\xi_k\|^2 < \infty$ donne lieu à un vecteur

$$\Phi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k \otimes \epsilon_k \in \mathcal{H} \otimes \ell^2(\mathbb{N}),$$

ou $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. Si $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ est aussi telle que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|\eta_k\|^2 < \infty$ et $\Psi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \otimes \epsilon_k$, alors

$$\langle \Psi, (x \otimes 1_{\mathcal{K}})\Phi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \eta_k, x\xi_k \rangle.$$

Ainsi, on voit que la topologie ultrafaible de $B(\mathcal{H})$ n'est rien d'autre que la restriction à $B(\mathcal{H}) \otimes 1$ de la topologie faible dans $B(\mathcal{H} \otimes \ell^2(\mathbb{N}))$. On peut vérifier, par contre, que la topologie ultrafaible est stable sous cette construction, ce qui insinue qu'elle est une topologie plus naturelle que la topologie faible dans le contexte des algèbres d'opérateurs. On accumulera, au parcours de ce chapitre et le suivant, des raisons qui soutiennent ce point de vue.

Definition 2.3. On dit qu'une sous-algèbre de $B(\mathcal{H})$ est involutive si elle est fermée par l'involution $x \in B(\mathcal{H}) \mapsto x^* \in B(\mathcal{H})$. Alors :

1. Une C*-algèbre (concrète) A sur \mathcal{H} est une sous-algèbre involutive de $B(\mathcal{H})$ qui est fermée en norme.
2. Une algèbre de von Neumann M sur \mathcal{H} est une sous-algèbre involutive de $B(\mathcal{H})$, qui contient l'opérateur identité, et qui est fermée par rapport à la topologie ultrafaible.

L'utilisation de la topologie ultrafaible dans la définition des algèbres de von Neumann a un certain degré d'arbitrarité, car une sous-algèbre involutive $M \subseteq B(\mathcal{H})$ qui contient l'identité satisfait

$$M \text{ fortement fermé} \Leftrightarrow M \text{ faiblement fermé} \Leftrightarrow M \text{ ultrafaiblement fermé.}$$

Notons aussi qu'une algèbre de von Neumann est une C*-algèbre, mais l'affirmation réciproque n'est pas valable.

Definition 2.4. Le commutant d'une algèbre de von Neumann $M \subseteq B(\mathcal{H})$ est l'ensemble

$$M' = \{a \in B(\mathcal{H}) : ab = ba, \forall b \in M\}.$$

Soit M une algèbre de von Neumann. Il se trouve que son commutant M' est aussi une algèbre de von Neumann. En plus, $M = M''$ et, en fait, une sous-algèbre quelconque de $B(\mathcal{H})$ est une algèbre de von Neumann si, et seulement si, elle est égale à son double commutant.

Sur l'ensemble d'opérateurs autoadjoints de M , qu'on désigne par $M_h \subseteq M$, on peut définir la relation d'ordre

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \exists a \in M : x = a^*a.$$

La propriété d'être positif est équivalente à avoir un spectre contenu dans $[0, +\infty[$. Maintenant, prenons une suite généralisée $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M_h$, croissante et bornée par rapport à cette relation d'ordre. La complétude ultrafaible permet de conclure qu'une telle suite converge et admet, donc, un supremum dans M .

Definition 2.5. Soient M et N des algèbres de von Neumann, et prenons une fonction linéaire $f : M \rightarrow N$, pas forcément bornée. Elle est dite :

1. *Positive* si $f(x) \geq 0$, pour tout $x \geq 0$.
2. *Normale* si elle est positive et respecte les supremums, dans le sens que

$$f\left(\sup_{i \in I} x_i\right) = \sup_{i \in I} f(x_i),$$

pour toute suite généralisée croissante et bornée $\{x_i\}_{i \in I}$.

L'existence de supremum pour les suites généralisées croissantes et bornées caractérise la topologie de M de façon intrinsèque, c'est-à-dire, sans faire appel à l'espace de Hilbert sur lequel M agit. En particulier, une fonction positive est normale si, et seulement si, elle est ultrafaiblement continue.

Il existe un calcul fonctionnel borélien sur M , expression par laquelle on veut dire qu'il est possible de donner un sens à $f(x) \in M$, pour $x \in M$ normal et $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, tout en respectant les structures d'algèbre involutive et du spectre. Plus explicitement, pour tout $f, g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in M$ normal, on a que :

1. $(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)$.
2. $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
3. $\bar{f}(x) = f(x)^*$, où $\bar{f} = \overline{f(\cdot)}$.
4. $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$, où $\sigma(\cdot)$ désigne le spectre de son argument.

Pour construire ce calcul fonctionnel, on commence avec le calcul fonctionnel holomorphe

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma d\zeta f(\zeta)(x - \zeta)^{-1},$$

défini pour toute fonction f , holomorphe sur un ouvert simplement connexe $U \subseteq \mathbb{C}$ contenant le spectre de x . Pour appliquer la formule, il faut choisir une courbe $\gamma \subseteq U$ qui entoure $\sigma(x)$, mais le résultat est indépendante du choix. Ce calcul fonctionnel peut être étendu à des fonctions continues sur $\sigma(x)$, par densité par rapport à la norme $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |f(\lambda)|$. À son tour, on étend le calcul continu à des fonctions mesurables et bornées en les écrivant comme supremum de suites croissantes et bornées de fonctions continues. Une des applications de cette construction est le théorème spectral pour opérateurs normaux bornés : la mesure spectrale associée à $x \in M$ est $P_x(\Lambda) = \chi_\Lambda(x)$, où χ_Λ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$.

2.1.2 Le préduel

Considérons l'algèbre $L^\infty(\mathbb{R})$. Elle agit sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ par multiplication, ce qui nous permet de la voir comme sous-algèbre de $B(\mathcal{H})$. Alors, la topologie faible de $L^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow B(\mathcal{H})$ est, par définition, la topologie $*$ -faible de $L^\infty(\mathbb{R}) \cong L^1(\mathbb{R})^*$, ce qui montre que $L^\infty(\mathbb{R})$ est une algèbre de von Neumann. Comme on le rappelle ici, le fait d'être isomorphe au dual d'un espace de Banach n'est pas une particularité de cette algèbre de von Neumann.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, et considérons l'espace de matrices à trace

$$L^1(\mathcal{H}) = \{\rho \in B(\mathcal{H}) : \text{Tr}|\rho| < \infty\}.$$

Celui-ci est un espace de Banach par rapport à la norme $\|\rho\|_1 = \text{Tr}|\rho|$, et ses éléments induisent des fonctions linéaires et bornées $B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$x \in B(\mathcal{H}) \mapsto \text{Tr}(\rho x) \in \mathbb{C}, \quad |\text{Tr}(\rho x)| \leq \|\rho\|_1 \|x\|.$$

Maintenant, on veut voir que $B(\mathcal{H}) \cong L^1(\mathcal{H})^*$. En fait, si $f \in (L^1(\mathcal{H}))^*$, on considère la forme sesquilinéaire

$$(\xi, \eta) = f(|\xi\rangle\langle\eta|), \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe un opérateur $a \in B(\mathcal{H})$ tel que $(\xi, \eta) = \langle \xi, a\eta \rangle$, et on peut vérifier que, par continuité, $f(\rho) = \text{Tr}(\rho a)$ pour tout $\rho \in L^1(\mathcal{H})$.

L'isomorphisme $B(\mathcal{H}) \cong L^1(\mathcal{H})^*$ nous donne, à priori, une n -ème topologie dans $B(\mathcal{H})$: la topologie $*$ -faible par rapport à cette dualité. Une suite généralisée $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq B(\mathcal{H})$ converge $*$ -faiblement si et seulement si

$$\text{Tr}(\rho x_i) \text{ converge, } \forall \rho \in L^1(\mathcal{H}).$$

Mais toute paire de familles $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ tels que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|\xi_k\|^2 + \|\eta_k\|^2 < \infty$ donne lieu à une matrice à trace

$$\rho = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k\rangle\langle\eta_k|,$$

et $\text{Tr}(\rho x_i) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \eta_k, x_i \xi_k \rangle$. Inversement, toute matrice à trace peut s'écrire sous cette forme en diagonalisant les opérateurs autoadjoints $\rho + \rho^*$ et $\rho - i\rho^*$. Ainsi, la topologie $*$ -faible n'est rien d'autre que la topologie ultrafaible, et on peut montrer en plus que les formes linéaires ultrafaiblement continues sont exactement celles de la forme $x \mapsto \text{Tr}(\rho x)$, avec $\rho \in L^1(\mathcal{H})$.

Maintenant, soit M une sous-algèbre involutive de $B(\mathcal{H})$. On définit M_\perp comme l'ensemble des $\rho \in L^1(\mathcal{H})$ tels que

$$\text{Tr}(\rho x) = 0, \quad \forall x \in M.$$

Il se trouve que M_\perp est un sous-espace fermé en norme de $L^1(\mathcal{H})$ et

$$(L^1(\mathcal{H})/M_\perp)^* \cong (M_\perp)^\perp := \{x \in B(\mathcal{H}) : \text{Tr}(\rho x) = 0, \forall \rho \in M_\perp\}.$$

Mais $(M_\perp)^\perp$ est la fermeture $*$ -faible de M dans $L^1(\mathcal{H})^*$. On conclut que, si M est une algèbre de von Neumann, alors elle est isomorphe, comme espace de Banach, au dual de $L^1(\mathcal{H})/M_\perp$. Ce résultat peut être exprimé de façon intrinsèque (sans faire appel à \mathcal{H}), en observant que l'espace

$$M_* = \{\omega \in M^* : \omega \text{ est ultrafaiblement continue}\} \quad (2.1)$$

est isomorphe à $L^1(\mathcal{H})/M_\perp$. Ainsi, $M \cong (M_*)^*$.

Definition 2.6. Soit M une algèbre de von Neumann. Le *predual* de M est l'espace défini dans (2.1).

2.1.3 La construction GNS

La construction GNS établit une correspondance entre une certaine classe de représentations (modulo conjugaison par unitaire) et l'ensemble des états d'une algèbre involutive. Ici, on l'introduira dans le cadre d'algèbres de von Neumann. Pour l'établir, on rappelle d'abord certains concepts dont on a besoin.

Definition 2.7. Une représentation d'une algèbre de von Neumann M est un morphisme d'algèbres involutives $\pi : M \rightarrow B(\mathcal{H})$, qui est normal, et tel que $\pi(1) = 1$.

Remarque 2.8. Soit $\pi : M \rightarrow B(\mathcal{H})$ une représentation d'une algèbre de von Neumann M . Comme l'existence de supremum pour toute suite généralisée croissante caractérise les sous-algèbres ultrafaiblement fermées de $B(\mathcal{H})$, on voit que l'image $\pi(M)$ est automatiquement une algèbre de von Neumann.

Definition 2.9. Soit $M \subseteq B(\mathcal{H})$ une algèbre de von Neumann.

1. Un vecteur $\Omega \in \mathcal{H}$ est dit *cyclique* si $M\Omega = \mathcal{H}$, et il est dit *séparant* si

$$a\Omega = 0 \text{ implique } a = 0,$$

pour tout $a \in M$.

2. S'il existe un vecteur $\Omega \in \mathcal{H}$ cyclique et séparant pour M , alors on dit que M est *standard* sur \mathcal{H} .

Remarque 2.10. Un vecteur $\Omega \in \mathcal{H}$ est cyclique/séparant pour M si, et seulement si, il est séparant/cyclique pour M' . Ainsi, M est standard sur \mathcal{H} si, et seulement si, M' est standard sur \mathcal{H} .

Soit $\pi : M \rightarrow B(\mathcal{H})$ une représentation d'une algèbre de von Neumann M , et supposons qu'il existe un vecteur $\Omega \in \mathcal{H}$ cyclique pour $\pi(M)$. Dans ce cas on dit, avec un petit abus de notation, que la représentation π est cyclique. Sans perte de généralité, on peut supposer que Ω est unitaire et définir, donc, l'état

$$\omega(a) = \langle \Omega, \pi(a)\Omega \rangle,$$

qui est ultrafaiblement continu car π et $\langle \Omega, (\cdot)\Omega \rangle$ le sont. La construction GNS, due à Gelfand, Naïmark et Segal, va dans l'autre sens : elle associe à chaque état normal ω , une représentation $\pi : M \rightarrow B(\mathcal{H})$, unique à conjugation par unitaire près, et un vecteur unitaire $\Omega \in \mathcal{H}$ tel que :

1. Ω est cyclique pour $\pi(M)$.
2. $\omega(a) = \langle \Omega, \pi(a)\Omega \rangle$, pour tout $a \in M$.

Ainsi, les concepts d'état et de représentation cyclique sont équivalents.

L'idée de la construction est très simple : faire agir M sur elle-même par multiplication à gauche. Alors, la forme linéaire positive $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$ induit une forme sesquilineaire et semi-définie positive sur M par

$$\langle a, b \rangle = \omega(a^*b).$$

On obtient l'espace de Hilbert \mathcal{H} en séparant et complétant M par rapport à cette forme, c'est-à-dire qu'on prends le quotient $\mathcal{H}_0 = M/\{a \in M : \omega(a^*a) = 0\}$ et on le complète par rapport à la norme $\| [a] \|^2 = \langle a, a \rangle$, où $[a] \in \mathcal{H}_0$ désigne la classe d'équivalence de $a \in M$. Il se trouve que les opérateurs

$$\pi(a)[b] = [ab],$$

définis sur le domaine dense \mathcal{H}_0 , sont bornés et admettent des extensions uniques à tout \mathcal{H} , qu'on désigne encore par $\pi(a)$. Ceci donne la représentation voulue. Le vecteur $\Omega = [1] \in \mathcal{H}$ est cyclique et satisfait $\omega(a) = \langle \Omega, \pi(a)\Omega \rangle$. La normalité de π suit de celle de ω (voir [15, théorème 2.4.24]).

Pour améliorer l'intuition voyons qu'est-ce que la construction GNS donne quand $M = M_n(\mathbb{C})$. Soit $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ la base canonique de \mathbb{C}^n , et supposons que $\omega(a) = \text{Tr}(\rho a)$, avec $\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i |e_i\rangle \langle e_i|$ (voir l'annexe B pour un rappel de cette notation, utilisé librement le long de la thèse). Les opérateurs

$$|e_i\rangle \langle e_j| \in M, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

forment une base de M , et l'action gauche de M sur lui-même peut s'écrire

$$\pi(a) | \xi \rangle \langle \eta | = | a \xi \rangle \langle \eta |.$$

Comme toutes les topologies sont équivalentes en dimension finie, on voit que l'espace \mathcal{H} est générée par $\{|e_i\rangle \langle e_j| : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$. Il est, donc, isomorphe à $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ et on l'identifiera avec lui dorénavant. Sous cette identification, le produit scalaire de \mathcal{H} correspond à la trace sur M :

$$\langle e_i \otimes e_j, e_k \otimes e_l \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} = \text{Tr} \left((|e_i\rangle \langle e_j|)^* (|e_k\rangle \langle e_l|) \right).$$

La représentation GNS consiste à faire agir M sur le premier facteur de $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Le commutant de $\pi(M)$ est tout simplement M , mais agissant sur le deuxième facteur de $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. En termes des matrices $| \xi \rangle \langle \eta | \in M$, celle-ci est l'action droite

$$\pi'(a) | \xi \rangle \langle \eta | = | \xi \rangle \langle \eta | a^* = | \xi \rangle \langle a \eta |.$$

L'état $\text{Tr}(\rho a)$ correspond au vecteur $\Omega = \sum_{i=1}^n \sqrt{\rho_i} e_i \otimes e_i \in \mathcal{H}$, car

$$\begin{aligned} \langle \Omega, \pi(a)\Omega \rangle &= \text{Tr} \left(\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\rho_i} |e_i\rangle \langle e_i| \right)^* \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\rho_j} |a e_j\rangle \langle e_j| \right) \right) = \sum_{i=1}^n \rho_i \langle e_i, a e_i \rangle \\ &= \text{Tr}(\rho a). \end{aligned}$$

Remarque 2.11. Cet exemple montre que $| \Omega \rangle \langle \Omega | \in B(\mathcal{H})$ n'appartient pas à l'algèbre $\pi(M) \subseteq B(\mathcal{H})$. En fait, si $v \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} | \Omega \rangle \langle \Omega | (v \otimes e_1) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{\rho_i \rho_j} \langle e_j \otimes e_j, v \otimes e_1 \rangle e_i \otimes e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\rho_i \rho_1} \langle e_i, v \rangle e_i \otimes e_i, \end{aligned}$$

qui n'est pas un élément de $\mathbb{C}^n \otimes e_1$.

Remarque 2.12. Il est possible de définir les C^* -algèbres de façon abstraite, comme étant les algèbres involutives A qui sont aussi des espaces de Banach dont la norme satisfait

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A.$$

La construction GNS, qui marche mutatis mutandis pour ces objets, montre que cette catégorie d'objets n'est pas plus générale que celle introduite dans la définition 2.3. Il est, néanmoins, convenable d'avoir une description intrinsèque, au sens d'être indépendante de l'espace de Hilbert où A agit. Puis, on pourrait définir aussi les algèbres de von Neumann comme étant ces C^* -algèbres qui admettent un prédual. Ce point de vue donne lieu à la notion des W^* -algèbres. Pour une exposition de ce sujet, voir [44].

La représentation GNS associée à un état sur une C^* -algèbre permet de définir une notion importante de proximité dans l'ensemble d'états.

Definition 2.13. Soient A une C^* -algèbre et $\pi : A \rightarrow B(\mathcal{H})$ une représentation de A sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On dit qu'un état η sur A est *normal par rapport à π* s'il existe une matrice densité $\rho \in L^1(\mathcal{H})$ telle que $\eta(a) = \text{Tr}(\rho\pi(a))$, pour tout $a \in A$. De même, on dit que η est normal par rapport à un autre état ω s'il est normal par rapport à la représentation GNS correspondante.

2.2 Dynamique quantique

On commencera par rappeler la formulation de Schrödinger de la mécanique quantique, dans laquelle l'état d'un système est un vecteur dans un espace de Hilbert, et on profitera pour introduire les matrices densité et l'équilibre thermodynamique. Après, on généralisera cette formulation au cadre des algèbres de von Neumann, ce qui permet de travailler avec des systèmes à un nombre infini de degrés de liberté.¹ Pour une introduction complète à la mécanique quantique dirigée vers les mathématiciens voir [46]. Quant à la mécanique quantique statistique, une introduction des concepts physiques se trouve dans [34] et, pour le côté mathématique, on renvoie le lecteur vers [16]. Dans les trois volumes [9, 10, 11] on trouve un traitement complet du sujet des systèmes ouverts, avec introductions concises aux outils mathématiques nécessaires.

2.2.1 Formulation dans un espace de Hilbert

Mécanique quantique élémentaire

La formulation de la mécanique quantique la moins disruptive avec l'intuition classique est celle donnée en termes des *fonctions d'onde*. Sous ce point de vue, dû à Schrödinger, l'état d'un système quantique est un vecteur unitaire ξ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Une observable est représentée par un opérateur

1. Ceci est relié au théorème de Stone, dont on ne parlera pas dans cet ouvrage.

autoadjoint $T : \text{dom } T \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dont le spectre $\sigma(T)$ est l'ensemble de valeurs possibles après mesure. La mesure de probabilité des valeurs de l'observable T quand le système est dans l'état ξ est

$$\rho_T(d\lambda) = \|P_T(d\lambda)\xi\|^2, \quad (2.2)$$

ou P_T est la mesure à valeurs projecteurs associée à T par le théorème spectral. Ainsi, on peut écrire l'espérance de T dans l'état ξ comme

$$\mathbb{E}_\xi(T) = \int_{\sigma(T)} \lambda \langle \xi, P_T(d\lambda)\xi \rangle = \langle \xi, T\xi \rangle.$$

Alors, l'énergie du système est représenté par un opérateur autoadjoint $H : \text{dom } H \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, qui reçoit le nom de *hamiltonien*. Dans cette situation, l'état du système évolue selon l'équation de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \xi(t) = H\xi, \quad \xi(0) = \xi. \quad (2.3)$$

Exemple 2.14. Pour une particule classique décrite par les coordonnées généralisées $q \in \mathbb{R}^n$ et le hamiltonien classique $\mathcal{H}(q, p)$, on prends

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n), \quad H = \mathcal{H}(Q, P),$$

où les vecteurs d'opérateurs Q et P sont définis par

$$(Q_i \xi)(q) = q_i \xi(q), \quad (P_i \xi)(q) = -i \frac{\partial}{\partial q_i} \xi(q).$$

Notons que $[P, Q] = -i$. Le problème survenant quand l'expression $\mathcal{H}(Q, P)$ est ambiguë à cause de la non-commutativité des opérateurs Q_i et P_i fait partie du problème de quantification, dont on ne s'occupera pas dans cette thèse.

La solution de l'équation de Schrödinger (2.3) est $\xi(t) = e^{-itH} \xi$. Ainsi, la valeur espérée au temps t d'une observable représentée par l'opérateur A est donnée par

$$\langle \xi(t), A\xi(t) \rangle = \langle e^{-itH} \xi, A e^{-itH} \xi \rangle = \langle \xi, e^{itH} A e^{-itH} \xi \rangle,$$

et on voit qu'il est possible de prendre aussi le *point de vue de Heisenberg*, selon lequel l'opérateur A évolue au cours du temps tandis que l'état ξ reste immuable. Formellement, l'équation différentielle pour l'évolution d'une observable est

$$\frac{d}{dt} A(t) = i[H, A], \quad A(0) = A, \quad (2.4)$$

et la solution est $A(t) = e^{itH} A e^{-itH}$.

Matrices densité

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert qui décrit la configuration d'un certain système physique, et supposons que, en fait, on n'a qu'une distribution de probabilité pour son état $\xi \in \mathcal{H}$. Disons, par clarté, qu'avec probabilité ρ_i le système se trouve dans l'état ξ_i , où $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i = 1$ et $\|\xi_i\| = 1$. Comme la mécanique quantique est, de toute façon, une théorie probabilistique, on dit toujours que le système est dans un état, mais cette fois un *état statistique*. Maintenant, l'espérance d'une observable, représentée par un opérateur T sur \mathcal{H} , est

$$\mathbb{E}_{\{\rho_i, \xi_i\}}(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i \mathbb{E}_{\xi_i}(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i \langle \xi_i, T \xi_i \rangle.$$

Remarque 2.15. Une superposition statistique d'états n'est pas la même chose qu'une superposition "cohérente" $\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i / \|\sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i\|$, où l'information sur les phases relatives des fonctions d'onde est conservée.

On peut traiter les états statistiques et les états vecteurs de façon unifiée, en considérant l'opérateur connu comme *matrice densité*

$$\rho = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i |\xi_i\rangle \langle \xi_i| \in L^1(\mathcal{H}),$$

où $L^1(\mathcal{H})$ désigne l'espace de Banach d'opérateurs à trace sur \mathcal{H} . En fait,

$$\mathbb{E}_{\{\rho_i, \xi_i\}}(T) = \text{Tr}(\rho T),$$

puisque $\langle \xi_i, T \xi_i \rangle = \text{Tr}(|\xi_i\rangle \langle \xi_i| T)$. Ainsi, on identifie l'ensemble d'états statistiques avec l'ensemble d'opérateurs à trace *positifs*, c'est-à-dire ceux dont le spectre est contenu dans $[0, +\infty[$.

Si l'état initial du système est une matrice densité $\rho \in L^1(\mathcal{H})$, alors l'espérance d'une observable T évolue au cours du temps selon

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i |\xi_i(t)\rangle \langle \xi_i(t)| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i e^{-itH} |\xi_i\rangle \langle \xi_i| e^{itH} \\ &= e^{-itH} \rho(0) e^{itH}. \end{aligned}$$

L'équation différentielle que satisfait $\rho(t)$ est donc $\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H, \rho(0)]$.

Équilibre thermodynamique

D'après l'étude physique du comportement des systèmes dans la limite thermodynamique, l'état d'équilibre d'un système quantique est la matrice densité qui maximise son entropie, soumise à des restrictions physiques qui dépendent du problème en considération. Pour l'introduire il nous faut, d'abord, la notion mathématique de l'entropie d'un état, due à von Neumann.

Definition 2.16. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $\rho \in L^1(\mathcal{H})$ un opérateur positif. L'entropie (de von Neumann) de ρ est le nombre réel

$$S(\rho) = \text{Tr}(\rho \log \rho),$$

où $\rho \log \rho \in L^1(\mathcal{H})$ est défini par calcul fonctionnel.

Remarque 2.17. Cette définition garde une relation proche avec celle de l'entropie de Shannon, utilisée en théorie de l'information. Ceci motive à interpréter l'entropie comme mesure de l'ignorance sur l'état vecteur du système, ne connaissant que la matrice densité ρ .

Maintenant, considérons un système physique décrit par l'espace de Hilbert \mathcal{H} et l'hamiltonien $H : \text{dom } H \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Pour emmener le système à son état d'équilibre, on le laisse échanger de l'énergie avec un réservoir à température inverse β . Quand le système a atteint l'état d'équilibre, la valeur espérée de l'énergie $\text{Tr}(\rho H)$ est une constante. Pour trouver cet état on résout le problème

$$\max\{S(\rho) : \rho \in L^1(\mathcal{H}) \text{ et } \text{Tr}(\rho H) = \text{constant}\},$$

en obtenant la matrice densité de Gibbs

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}}. \quad (2.5)$$

Ici, la constante β s'identifie avec la température inverse du système et doit coïncider, évidemment, avec la température inverse du réservoir. Cette dérivation dépend de plusieurs suppositions physiques ; mathématiquement, on considère le fait que l'état d'équilibre thermique à température inverse β soit donné par (2.5) comme un postulat de la thermodynamique.

Remarque 2.18. Il y a d'autres quantités physiques, mise à part l'énergie, qui peuvent varier du fait que le système est en contact avec un réservoir : par exemple, le nombre de particules d'une certaine espèce. La procédure décrite en haut pour obtenir l'état d'équilibre se généralise aisément à cette situation, cas auquel il faut rajouter un paramètre analogue à β qui s'interprète comme étant le potentiel chimique, voir [34].

2.2.2 Formulation dans une algèbre d'opérateurs

Dans la section précédente on a introduit la mécanique quantique à la Schrödinger, en utilisant le concept de fonction d'onde et, conséquemment, en partant d'un espace de Hilbert et un hamiltonien. Pour les systèmes physiques avec un nombre fini de degrés de liberté on sait comment choisir ces objets, et l'approche est complètement satisfaisante. Mais quand on considère une théorie de champs, le choix d'espace de Hilbert n'est pas si évident a priori et on doit s'en remettre à l'approche de Heisenberg, qui souligne dès le début la structure algébrique de l'ensemble des observables et non pas une représentation préférée de

celui-ci, arbitrairement choisie.² Ceci nous mène à commencer avec une algèbre d'observables, qui peut être une algèbre de von Neumann ou, plus généralement, une C^* -algèbre, puis définir là dessus l'évolution temporelle comme étant un groupe d'automorphismes avec les propriétés de continuité adéquates, et finalement représenter les états physiques par des états sur l'algèbre choisie.

Notons que, une fois choisi l'état, la construction GNS permet d'obtenir une représentation sur un espace de Hilbert. Dans le cas d'une théorie de champs libre, on obtient ainsi un espace de Fock, mais les états stationnaires d'une théorie avec interactions ne donnent pas lieu à des représentations de Fock, et on ne dispose pas d'un moyen de construire la théorie en partant d'un espace de Hilbert. Ceci est aussi vrai pour les systèmes de spins, dont les degrés de liberté sont infinis mais discrets. Ainsi, l'approche algébrique n'est pas seulement une question de convenance ou de choix esthétique, mais un aspect fondamental dans l'étude des systèmes physiques quantiques.

Groupes à un paramètre d'automorphismes

Definition 2.19. Soit A une algèbre involutive. Un groupe à un paramètre d'automorphismes $\{\alpha^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est une fonction $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(A)$, où $\text{Aut}(A)$ est le groupe d'automorphismes de A , telle que

1. $\alpha^0 = \text{Id}_A$.
2. $\alpha^s \alpha^t = \alpha^{s+t}$, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

Soit A une algèbre d'opérateurs et $\{\alpha^t\}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A . Typiquement, on aura une topologie préférée dans A : la topologie de la norme si A est une C^* -algèbre, et la topologie ultrafaible si A est une algèbre de von Neumann. Il est naturel, donc, de demander que les trajectoires

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha^t(a) \in A$$

soient continues, pour tout $a \in A$. Quand cette propriété est vraie, on dit que $\{\alpha^t\}$ est fortement continu, ou ultrafaiblement continu, selon le cas. Cette propriété de continuité permet d'établir l'existence d'un *générateur*, c'est-à-dire une application linéaire $\delta : \text{dom } \delta \subseteq A \rightarrow A$, fermée et avec domaine dense, telle que

$$\delta(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\alpha^t(a) - a),$$

pour tout $a \in \text{dom } \delta$. Ici, la limite existe par rapport à la topologie choisie, selon le cas. L'existence de ce générateur est une propriété de A vue comme espace de Banach et ne dépend pas de sa structure algébrique, mais dans ce cas on peut dire aussi que δ est une *dérivation*, au sens que :

1. $\text{dom } \delta$ est une sous-algèbre involutive de A .

2. Pour les systèmes avec un nombre infini de degrés de liberté il y a plusieurs représentations inéquivalentes de l'algèbre d'observables.

2. Pour tout $a, b \in \text{dom } \delta$,

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \quad \delta(a^*) = \delta(a)^*.$$

Notons, en particulier, que $\delta(1) = 0$.

Exemple 2.20. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $H \text{ dom } H \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur autoadjoint. Le groupe à un paramètre défini par

$$\alpha^t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$$

est ultrafaiblement continu, et son générateur est, formellement, la dérivation

$$\delta(x) = i[H, x].$$

États KMS

La généralisation des états de Gibbs à l'approche algébrique est due à Kubo, Martin et Schwinger. Pour l'introduire, soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et H un opérateur autodajoint sur \mathcal{H} tel que $e^{-\beta H}$, avec $\beta > 0$, est à trace. Le groupe d'automorphismes de ce système est donné par $\alpha^t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$, et il admet une prolongement analytique à des temps imaginaires. En utilisant ceci, on note que, grâce à la cyclicité de la trace, la matrice densité $\rho_\beta = e^{-\beta H} / \text{Tr } e^{-\beta H}$ a la propriété

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_\beta x y) &= \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \text{Tr}(e^{-\beta H} x y) = \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \text{Tr}(\alpha^{i\beta}(x) e^{-\beta H} y) \\ &= \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \text{Tr}(e^{-\beta H} y \alpha^{i\beta}(x)) = \text{Tr}(\rho_\beta y \alpha^{i\beta}(x)). \end{aligned}$$

Definition 2.21. Soient M une algèbre de von Neumann et $\{\alpha^t\}$ un groupe à un paramètre, ultrafaiblement continu, d'automorphismes de M . Alors, on dit qu'un état $\omega \in M_*$ est β -KMS pour $\{\alpha^t\}$ si, pour tout $x, y \in M$, il existe une fonction analytique $F_{x,y}(\zeta)$, définie sur la bande $\{0 < \text{Im } \zeta < \beta\} \subseteq \mathbb{C}$, qui satisfait les conditions au bords

$$\lim_{s \searrow 0} F_{x,y}(t + is) = \omega(y \alpha^t(x)), \quad \lim_{s \nearrow \beta} F_{x,y}(t + is) = \omega(\alpha^t(x) y),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.22. Quand un état ω est β -KMS, on écrit $\omega(y \alpha^\zeta(x))$ au lieu de $F_{x,y}(\zeta)$, et on a l'égalité $\omega(xy) = \omega(y \alpha^{i\beta}(x))$.

Théorème 2.23. Soient M une algèbre de von Neumann et $\omega \in M_*$ un état cyclique et séparant. Alors, il existe un unique groupe ultrafaiblement continu d'automorphismes de M , dit groupe modulaire et désigné par $\{\Delta^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, tel que ω est un état KMS pour lui, avec $\beta = -1$.

Definition 2.24. Soit M une algèbre de von Neumann et $\{\alpha^t\}$ un groupe ultrafaiblement continu d'automorphismes de M . On dit qu'un état $\omega \in M_*$ est modulaire s'il est KMS pour $\{\alpha^t\}$, avec $\beta = -1$. Quand M n'est pas munie d'un groupe d'automorphismes préféré, alors on dit que ω est modulaire simplement s'il est cyclique et séparant.

2.3 Introduction aux systèmes ouverts

On profite à ce moment d'introduire de façon informelle les systèmes ouverts dans le cadre des espaces de Hilbert (pour une discussion précise voir la sous-section 5.1.1, où l'on adopte l'approche algébrique). Un système ouvert est défini par son petit système, son réservoir, et leur interaction. Les états du petit système et du réservoir sont des vecteurs dans des espaces de Hilbert qu'on désignera par \mathcal{H}_S et \mathcal{H}_R , respectivement. On suppose que ces systèmes, lorsqu'ils sont isolés l'un par rapport à l'autre, évoluent selon des dynamiques dites *libres*, générées respectivement par des hamiltoniens H_S et H_R . L'espace de Hilbert du système composé est le produit tensoriel $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ (voir l'annexe A et la page 27); il est naturellement équipé d'une évolution libre qui est le produit des évolutions libres des composantes, c'est-à-dire qu'elle est générée par $H_S + H_R$.

Remarque 2.25. En toute rigueur, l'opérateur H_S agit sur \mathcal{H}_S et non pas sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. Une affirmation analogue est valable pour H_R et, donc, la somme $H_S + H_R$ n'a pas de sens—même s'il s'agissait d'opérateurs bornés, mais dans cette introduction le niveau de rigueur sera assez bas. Néanmoins, dès qu'on a un opérateur H sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , on le fait agir sur les produits tensoriels $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ et $\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$, pour n'importe quel autre espace de Hilbert \mathcal{K} , par $H \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}$ et $\text{Id}_{\mathcal{K}} \otimes H$, respectivement. Cette licence rend la notation beaucoup plus simple sans produire de confusion.

On suppose que l'interaction entre petit système et réservoir est donnée par un opérateur V sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$; donc, l'évolution de Schrödinger du système complet est donnée par le groupe d'opérateurs unitaires

$$\xi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R \mapsto e^{-it(H_S+H_R+V)}\xi \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R.$$

L'évolution de Heisenberg, à son tour, est donnée par le groupe d'automorphismes de $B(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$

$$x \in B(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R) \mapsto e^{it(H_S+H_R+V)}x e^{-it(H_S+H_R+V)} \in B(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R),$$

dont le générateur est $i[H_S + H_R + V, \cdot]$.

Ensuite, on voudrait étudier l'évolution du petit système sans faire aucune référence au réservoir. Pour ce faire, l'espace de Hilbert \mathcal{H}_S ne sert pas : dans le cadre étudié, les affirmations du genre

supposons que l'état du petit système est $\xi_S \in \mathcal{H}_S$

n'ont pas de sens, car le système complet est, en général, dans un état intriqué

$$\xi = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \xi_S^i \otimes \xi_R^i \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R,$$

où les constantes λ_i sont normalisées de façon telle que $\|\xi\| = 1$. En utilisant une procédure à la Gram-Schmidt sur le deuxième facteur, sans perte de généralité

on peut supposer que

$$\xi = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \xi_S^i \otimes \epsilon_R^i,$$

où $\{\epsilon_R^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormal de \mathcal{H}_R , les $\xi_S^i \in \mathcal{H}_S$ sont des vecteurs unitaires (en générale *pas orthogonaux*), et $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|^2 = 1$. Mais il n'existe pas de bon moyen d'associer un vecteur $\xi_S \in \mathcal{H}_S$ à cette superposition. On pourrait espérer que la situation serait différente si l'état initial était factorisable, mais on montre que l'unitaire $e^{-it(H_S+H_R+V)}$ transforme des états factorisables en des états intriqués quand V n'est pas trivial, et donc le problème est incontournable. La solution consiste à considérer la matrice densité

$$\rho_S = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|^2 |\xi_S^i\rangle \langle \xi_S^i|$$

(voir l'annexe B pour une introduction à cette notation), qui a la propriété de reproduire les valeurs moyennes correctes pour les observables du petit système :

$$\text{Tr}(\rho_S x_S) = \langle \xi, x_S \xi \rangle, \quad \forall x_S \in B(\mathcal{H}_S).$$

Considérons le cas plus général où le système complet est dans un état statistique, c'est-à-dire une matrice densité $\rho \in L^1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Par définition, ces matrices ont la forme

$$\rho = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_{ij} \xi_S^j \otimes \epsilon_R^j \right\rangle \left\langle \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_{ij} \xi_S^j \otimes \epsilon_R^j \right| = \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}} \rho_i \lambda_{ij} \bar{\lambda}_{ik} |\xi_S^j\rangle \langle \xi_S^k| \otimes |\epsilon_R^j\rangle \langle \epsilon_R^k|,$$

où $\rho_i \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i = 1$, $\|\xi_S^j\| = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, et $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_{ij}|^2 = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Maintenant, la matrice densité

$$\rho_S = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \rho_i |\lambda_{ij}|^2 |\xi_S^j\rangle \langle \xi_S^j| \in L^1(\mathcal{H}_S)$$

produit encore les mêmes valeurs moyennes que l'état original pour les observables du petit système. On dit que ρ_S est la *trace partielle* $\text{Tr}_R(\rho)$, et ses éléments de matrice peuvent être calculés selon la formule

$$\langle \xi_S^1, \text{Tr}_R(\rho) \xi_S^2 \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle (\xi_S^1 \otimes \epsilon_R^k), \rho (\xi_S^2 \otimes \epsilon_R^k) \rangle, \quad \forall \xi_S^1, \xi_S^2 \in \mathcal{H}_S.$$

On définit, de façon analogue, une trace partielle Tr_S par rapport à \mathcal{H}_S , et on trouve que

$$\text{Tr}_{SR} = \text{Tr}_S \text{Tr}_R = \text{Tr}_R \text{Tr}_S,$$

ce qui peut s'interpréter comme un théorème type Fubini (par clarté, on a noté par Tr_{SR} la trace sur $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$). L'analogie avec les intégrales s'étend plus loin ; par exemple, on a que

$$\text{Tr}_R(x_S y) = x_S \text{Tr}_R(y)$$

quand $x_S \in B(\mathcal{H}_S)$ et $y \in B(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$.

Maintenant, on peut écrire l'évolution restreinte au petit système : la matrice densité à l'instant t est

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_R\left(e^{-it(H_S+H_R+V)} \rho e^{it(H_S+H_R+V)}\right), \quad (2.6)$$

ou $\rho \in L^1(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$ est la condition initiale. Sous le point de vue de Heisenberg, pour $x_S \in B(\mathcal{H}_S)$ on a

$$\text{Tr}_S(\rho_S(t)x_S) = \text{Tr}_{SR}\left(\rho e^{it(H_S+H_R+V)} x_S e^{-it(H_S+H_R+V)}\right)$$

et en supposant, par simplicité, que $\rho = \rho_S \rho_R$ avec $\rho_S \in L^1(\mathcal{H}_S)$ et $\rho_R \in L^1(\mathcal{H}_R)$ (en général elle est, en fait, une combinaison convexe de termes comme celui-ci), alors

$$\text{Tr}_S(\rho_S(t)x_S) = \text{Tr}_S\left(\rho_S \text{Tr}_R\left(\rho_R e^{it(H_S+H_R+V)} x_S e^{-it(H_S+H_R+V)}\right)\right).$$

Ainsi, on voit que

$$x_S(t) = \text{Tr}_R(\rho_R e^{it(H_S+H_R+V)} x_S e^{-it(H_S+H_R+V)}).$$

Remarque 2.26. En général, il n'est pas possible d'obtenir $\rho_S(t)$ comme solution d'une équation différentielle, car il s'agit d'une évolution avec mémoire. On verra dans la sous-section 5.1.1 que $\rho_S(t)$ résout, en fait, une équation intégral-différentielle.

Chapitre 3

Processus de Markov quantiques

D'un point de vue abstrait, la théorie quantique est basée sur une généralisation dite *non-commutative* ou, naturellement, quantique, de la théorie des probabilités. Dans cette section on rappelle le langage mathématique nécessaire pour prendre ce point de vue, en mettant l'accent sur la généralisation des processus de Markov, qui est particulièrement important en théorie des systèmes ouverts quantiques. Une introduction à ce point de vue algébrique sur la théorie de probabilités, ainsi qu'aux processus de Markov quantiques, se trouve dans [41]. Pour la théorie de l'information quantique on renvoie le lecteur vers [40].

3.1 Probabilités quantiques

En théorie des probabilités "classiques" on étudie des espaces mesurés (E, \mathcal{B}, μ) , où E est un ensemble, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ une tribu et $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une mesure avec $\mu(E) = 1$. Une variable aléatoire est une fonction mesurable $X : E \rightarrow \mathbb{R}$, et l'ensemble de variables aléatoires bornées $L^\infty(E)$ est une algèbre de Banach. Maintenant, si l'on regarde $L^\infty(E)$ comme ensemble d'opérateurs agissant sur $\mathcal{H} = L^2(E)$ par multiplication, on obtient une algèbre de von Neumann commutative ; ce point de vue permet de penser à la théorie des algèbres de von Neumann comme étant une généralisation non-commutative de la théorie des probabilités. Dans le cas commutatif, la mesure de probabilité μ donne l'état $\omega : L^\infty(E) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\omega(X) = \int_E \mu(de) X(e),$$

et on voit qu'un état de référence est l'analogue de μ dans cette généralisation. Notons que, grâce au Théorème de convergence monotone, cet état est normal.

3.1.1 Distributions de probabilité et non-commutativité

Classiquement, la distribution de probabilité d'une variable aléatoire X définie sur l'espace mesuré (E, \mathcal{B}, μ) est la mesure

$$\rho_X = \mu \circ X^{-1}, \quad (3.1)$$

définie pour les sous-ensembles mesurables de \mathbb{R} . Dans le cas $X \in M \subseteq B(\mathcal{H})$, cette distribution est construite de la façon suivante :

$$\rho_X(dx) = \omega(P_X(dx)), \quad (3.2)$$

ou P_X est la mesure à valeurs projecteurs associée à X par calcul fonctionnel (on suppose que $X = X^*$, ce qui généralise la condition $X : E \rightarrow \mathbb{R}$).¹ Quand $M = L^\infty(E)$, (3.2) se réduit à (3.1) car $P_X([s, t]) = \chi_{[s, t]}(X) = \chi_{X^{-1}([s, t])}$ et

$$\mu \circ X^{-1}([s, t]) = \int_E \mu(de) \chi_{X^{-1}([s, t])}(e) = \omega(P_X([s, t])).$$

Notons que (3.2) est bien la distribution utilisée en mécanique quantique pour l'observable X .

Prenons deux variables aléatoires classiques X et Y ; elles ont une distribution conjointe, donnée par la mesure de probabilité sur \mathbb{R}^2

$$\rho_{X,Y} = \mu \circ (X, Y)^{-1}, \quad (X, Y)(e) = (X(e), Y(e)). \quad (3.3)$$

Cette construction n'a pas d'analogue non-commutatif. Pour obtenir une distribution conjointe il faudrait construire à la main une mesure à valeurs projecteurs $P_{X,Y}$ sur \mathbb{R}^2 telle que

$$P_X = \int_{\mathbb{R}} P_{X,Y}(\cdot, dy), \quad P_Y = \int_{\mathbb{R}} P_{X,Y}(dx, \cdot).$$

Quand X et Y commutent, on a le choix évident $P_{X,Y}(dx, dy) = P_X(dx)P_Y(dy)$ qui donne la distribution conjointe (3.3), mais autrement $P_X(dx)P_Y(dy)$ n'est pas un projecteur. Ceci permet de comprendre ce qu'on a perdu en passant du commutatif au non-commutatif.

Remarque 3.1. Il est possible de définir la distribution conjointe de deux variables aléatoires qui ne commutent pas si l'on se permet de considérer des mesures à valeurs opérateurs positifs et non pas seulement projecteurs [26].

1. Rappelons que P_X peut être construite en utilisant le calcul fonctionnel borelien, par

$$P_X(A) = \chi_A(X), \quad A \subseteq \mathbb{R}.$$

3.1.2 Produits tensoriels

La généralisation de la notion d'espace de probabilité produit est le produit tensoriel d'algèbres de von Neumann. Pour convenance, on a inclus une exposition courte des aspects purement algébriques de cette construction dans l'annexe A. Rappelons, d'abord, que le produit tensoriel de deux espaces de Hilbert \mathcal{H} et \mathcal{K} est défini comme la complétion du produit algébrique $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ par rapport à son produit scalaire naturel, obtenu par bilinéarité à partir de

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

Ensuite, soient $M \subseteq B(\mathcal{H})$ et $N \subseteq B(\mathcal{K})$ deux algèbres de von Neumann. Il existe une inclusion naturelle

$$M \otimes_{\text{alg}} N \subseteq B(\mathcal{H}) \otimes_{\text{alg}} B(\mathcal{K}) \hookrightarrow B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}),$$

ce qui permet de définir l'algèbre de von Neumann produit

$$M \otimes N = (M \otimes_{\text{alg}} N)'' ,$$

où le prime désigne, comme d'habitude, le commutant.

Exemple 3.2. Si $M = L^\infty(\mathbb{R}^m)$ et $N = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on démontre aisément, en utilisant la complétude ultrafaible, que

$$M \otimes N \cong L^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n).$$

Remarque 3.3. D'un point de vue esthétique, il est préférable de travailler avec des W^* -algèbres au lieu des algèbres de von Neumann. Dans ce cas, la question nous interpelle de savoir si le produit tensoriel dans la catégorie des W^* -algèbres est une notion bien définie, ce qui n'est pas évident parce que le produit tensoriel de deux C^* -algèbres n'est pas toujours unique. Il se trouve que la réponse à cette question est positive, et, en particulier, le produit tensoriel de deux algèbres de von Neumann est une notion indépendante des représentations choisies, pour autant qu'elles soient normales (voir la définition 2.5 et la remarque 2.8. Pour une exposition courte du sujet des produits tensoriels le lecteur peut consulter [15], et un traitement encore concis mais plus complet se trouve dans [51]).

Finalement, mentionnons le cas du produit tensoriel entre fonctions linéaires. Soient $T_i : M_i \rightarrow N_i$, $i \in \{1, 2\}$, deux applications entre algèbres de von Neumann. Alors, on peut définir

$$T_1 \otimes T_2 : M_1 \otimes_{\text{alg}} M_2 \rightarrow N_1 \otimes_{\text{alg}} N_2 \hookrightarrow N_1 \otimes N_2,$$

et le problème est celui d'étendre cette application à tout $M_1 \otimes M_2$. Quand T_1 et T_2 sont continus par rapport aux topologies ultrafaibles respectives, ceci peut toujours se faire et, en plus, de façon unique.

3.2 Canaux quantiques

Considérons un processus dynamique classique non-déterministe ; pour le modéliser, on utilise certaines applications naturelles entre espaces de probabilité dites *canaux*, pour leur usage en théorie de l'information. Un cas typique est le suivant : on a un espace mesuré de départ (E, \mathcal{B}_E, de) et un espace mesuré d'arrivée (F, \mathcal{B}_F, df) , et chaque point $e \in E$ est envoyé vers un point de F selon une probabilité de transition $P(e, df)$ telle que :

1. $e \in E \mapsto P(e, B_F) \in \mathbb{R}_+$ est mesurable, pour tout $B_F \in \mathcal{B}_F$.
2. $\int P(e, df) = 1$, pour tout $e \in E$.

Remarque 3.4. En théorie de l'information, on suppose que les points de E sont des messages envoyés à travers un canal. Chaque fois qu'on envoie un message $e \in E$, le message reçu est un point $f \in F$, distribué selon la probabilité $P(e, df)$.

Soient (E, \mathcal{B}_E, de) et (F, \mathcal{B}_F, df) deux espaces mesurés et $P(e, df)$ une probabilité de transition avec densité $p(e, f)$, c'est-à-dire que $P(e, df) = p(e, f)df$. En passant à travers le canal décrit par $P(e, df)$, une densité de probabilité $\rho \in L^1(E)$ subit la transformation

$$\rho \mapsto S(\rho) = \int_E de \rho(e)p(e, \cdot).$$

Notons que $S : L^1(E) \rightarrow L^1(F)$ préserve la positivité et la norme L^1 des fonctions positives. Son adjoint $T = S^* : L^\infty(F) \rightarrow L^\infty(E)$, qui transforme variables aléatoires au lieu de densités, est une application normale et positive avec $T(1) = 1$. Ce point de vue est celui qui convient pour faire la généralisation au cas non-commutatif.

3.2.1 Complète positivité

En passant au cas non-commutatif, une subtilité sans analogue classique a lieu : il existe des transformations positives et normales $T : M \rightarrow N$ entre algèbres de von Neumann M et N telles que

$$T \otimes \text{Id}_{B(\mathcal{H})} : M \otimes B(\mathcal{H}) \rightarrow N \otimes B(\mathcal{H})$$

n'est pas positive, même avec $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Ceci est problématique du point de vue de l'interprétation : la positivité est essentielle pour l'interprétation probabiliste, et le produit tensoriel sert à décrire plusieurs systèmes simultanément. Si l'on se trouve avec ce genre de transformations comme modèles physiques, alors on ne pourrait pas accepter que le système étudié soit dans un état intriqué avec un autre système externe. Ceci n'est pas admissible dans le cadre des systèmes ouverts. On définit, donc, la notion de *complète positivité*.

Definition 3.5. Soient M et N des algèbres de von Neumann. Une application $T : M \rightarrow N$ est dite *complètement positive* si

$$T \otimes \text{Id}_{M_n(\mathbb{C})} : M \otimes M_n(\mathbb{C}) \rightarrow N \otimes M_n(\mathbb{C})$$

est positive, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si, de plus, elle est normale et $T(1) = 1$, on dit qu'elle est un *canal quantique*.

Théorème 3.6 (Stinespring). *Soient M une algèbre de von Neumann, \mathcal{K} un espace de Hilbert, et $T : M \rightarrow B(\mathcal{K})$ une application complètement positive telle que $T(1) = 1$. Alors, à conjugation unitaire près, il existe un unique espace de Hilbert \mathcal{H} , une représentation $\pi : M \rightarrow B(\mathcal{H})$ pas forcément normale, et une isométrie $V : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ telles que*

$$T(x) = V^* \pi(x) V, \quad \overline{\pi(M) V \mathcal{K}} = \mathcal{H}.$$

Si T est normale, alors, a fortiori, π est normale aussi.

La Définition 3.5 s'applique sans modification aux C^* -algèbres ; quant au Théorème de Stinespring, il reste valable si M est une C^* -algèbre avec unité et, de plus, le morphisme π dont l'existence est assurée dans l'énoncé respecte les unités.

Remarque 3.7. Comme conséquence de la représentation de Stinespring on voit que la norme de T est toujours 1. En général, si l'on ne suppose pas que $T(1) = 1$, alors $\|T\| = \|T(1)\|$ (voir [36, lemma 5.3]).

La proposition suivante est un critère qui établit la complète positivité dans les cas le plus simples.

Proposition 3.8 (Arveson). *Si $T : M \rightarrow N$ est positive et N est commutative, alors T est complètement positive (voir [41]).*

Remarque 3.9. En particulier, les états sont complètement positifs, ce qui met en évidence que le Théorème de Stinespring est une généralisation de la construction GNS. En effet, considérons un état quelconque $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$; l'isométrie $V : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}$, dont l'existence est assurée par le théorème, est l'inclusion $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda \Omega \in \mathcal{H}$, où Ω est le vecteur cyclique correspondant à ω . La représentation résultante est normale si, et seulement si, ω est normal.

Une propriété fondamentale, du point de vue de la modélisation physique, est le fait que les canaux quantiques sont stables sous les opérations de produit tensoriel et composition.

Proposition 3.10. *Si $T_i : M_i \rightarrow N_i$, avec $i \in \{1, 2\}$, sont complètement positives et normales, alors $T_1 \otimes T_2 : M_1 \otimes M_2 \rightarrow N_1 \otimes N_2$ est complètement positive et normale. Si $N_1 = M_2$, alors $T_2 T_1 : M_1 \rightarrow N_2$ est aussi complètement positive et normale.*

Démonstration. L'assertion pour la composition de canaux suit directement des définitions. Pour le produit tensoriel, on renvoie le lecteur à [14, Corollary II.9.7.3] et [14, Paragraphe III.2.2.5]. \square

3.2.2 Espérances conditionnelles

La classe certainement la plus importante d'applications complètement positives, est celle des *espérances conditionnelles*. Rappelons d'abord le cas classique : soit (E, \mathcal{B}, μ) un espace de probabilité et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ une sous-tribu. À chaque

variable aléatoire $X : E \rightarrow \mathbb{R}$ on peut associer, de façon unique modulo équivalence presque partout, une fonction $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ est mesurable par rapport à \mathcal{A} .
2. Pour tout $B \in \mathcal{A}$,

$$\int_B \mu(de) X(e) = \int_B \mu(de) \mathbb{E}(X | \mathcal{A})(e).$$

L'application

$$\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{A}) : L^\infty(E, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu)$$

est positive, et satisfait $\mathbb{E}(1 | \mathcal{A}) = 1$ ainsi que

$$\mathbb{E}(fg | \mathcal{A}) = f\mathbb{E}(g | \mathcal{A}), \quad \forall f \in L^\infty(E, \mathcal{A}, \mu), g \in L^\infty(E, \mathcal{B}, \mu).$$

On prend ces trois propriétés pour faire la généralisation au cas non-commutatif.

Definition 3.11. Soient $N \subseteq M$ deux algèbres de von Neumann. Une application linéaire $\mathbb{E} : M \rightarrow N$ reçoit le nom d'*espérance conditionnelle* si elle satisfait :

1. $\mathbb{E} : M \rightarrow N$ est complètement positive.
2. $\mathbb{E}(1) = 1$.
3. $\mathbb{E}(axb) = a\mathbb{E}(x)b$, pour tout $a, b \in N$ et $x \in M$.

Exemple 3.12. Pour construire une espérance conditionnelle, on peut prendre l'analogie non-commutatif d'une intégration partielle sur un espace produit : soient $M_S \subseteq B(\mathcal{H}_S)$ et $M_R \subseteq B(\mathcal{H}_R)$ deux algèbres de von Neumann. Soit aussi $\omega_R \in (M_R)_*$ un état, et considérons l'inclusion $M_S \otimes 1 \subseteq M_S \otimes M_R$ et l'application $\mathbb{E} : M_S \otimes M_R \rightarrow M_S \otimes M_R$ donnée par

$$x_S \otimes x_R \mapsto \omega_R(x_R)(x_S \otimes 1), \quad \forall x_S \in M_S, x_R \in M_R.$$

Elle est bien définie parce qu'on peut l'écrire comme composition

$$\mathbb{E} = M_S \otimes M_R \xrightarrow{\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_R} M_S \otimes \mathbb{C} \cong M_S \xrightarrow{(\cdot) \otimes 1} M_S \otimes M_R,$$

ce qui montre aussi qu'elle est complètement positive et normale. Dans le langage plus concret des traces partielles, elle s'écrit

$$\mathbb{E}(x) = \text{Tr}_R((1 \otimes \rho_R)x), \quad x \in M_S \otimes M_R,$$

où $\rho_R \in B(\mathcal{H}_R)$ est l'opérateur positif à trace tel que $\omega_R(x_R) = \text{Tr}_R(\rho_R x_R)$.

3.3 Processus de Markov classiques

Un processus stochastique classique en temps discret est une chaîne infinie X_0, X_1, \dots de variables aléatoires dont les corrélations statistiques peuvent être arbitrairement compliquées. Il est, en principe, déterminé par sa *loi*, qui est une mesure de probabilité sur l'ensemble de réalisations possibles $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On désigne cette ensemble par E ; si les variables aléatoires X_i prennent des valeurs réelles, alors $E \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on obtient l'espace de probabilité (E, \mathcal{B}, P) , où $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ équipé avec la topologie produit.

Ce cadre est trop général et, typiquement, on suppose que le processus n'a pas de mémoire. Pour exprimer cette condition de façon mathématique, on définit les tribus

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \dots, X_n\} \subseteq \mathcal{B}$$

générées par les observables du processus jusqu'au temps n . Alors, le processus est markovien si

$$P\{X_{n+1} \in B \mid \mathcal{F}_n\} = P\{X_{n+1} \in B \mid X_n\},$$

pour tout borélien $B \subseteq \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.13. Rappelons que la tribu générée par une famille de fonctions mesurables sur un espace mesuré (E, \mathcal{B}, P) est l'intersection de toutes les sous-tribus de \mathcal{B} par rapport auxquelles les fonctions en question sont mesurables.

Pour construire un processus de Markov, on commence souvent avec une fonction de transition

$$P(x, B) = P\{X_{n+1} \in B \mid X_n = x\},$$

ce qui suffit, grâce à la propriété markovienne et le théorème de consistance de Kolmogorov (voir, par exemple, [48]), pour reconstruire complètement la loi.

Remarque 3.14. Noter que $P(x, B)$ définit un canal.

Remarque 3.15. En général, la fonction de transition $P\{X_{n+1} \in B \mid X_n = x\}$ peut dépendre de n . Quand ceci n'est pas le cas, on dit que le processus est *homogène* (en temps), ce qui est souvent une hypothèse physiquement raisonnable. Ici, on considérera seulement des processus homogènes.

Maintenant, soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ une observable (classique), c'est-à-dire une fonction mesurable qu'associe un nombre réel à chaque état initial $x \in \mathbb{R}$. On peut la faire évoluer au cours du temps, dans l'esprit du cadre de Heisenberg en mécanique quantique, par l'équation

$$f_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} P(x, dy) f_n(y) =: T(f_n)(x).$$

L'application $T : L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ est positive et préserve l'observable unité $1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $1(x) = 1$. Ainsi, si l'on se limite à étudier l'évolution des observables, on est ramené à l'étude des puissances $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ —où, dans le cas non-commutatif et en temps continu, des semigroupes à un paramètre de canaux quantiques $M \rightarrow M$, où M est une algèbre de von Neumann.

3.4 Semigroupes markoviens quantiques

Avant d'introduire les semigroupes markoviens quantiques on a besoin de certaines définitions.

Definition 3.16. Soit \mathcal{X} un espace de Banach. Un semigroupe (à un paramètre) $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une fonction $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(\mathcal{X})$ telle que :

1. $T^0 = \text{Id}_{\mathcal{X}}$.
2. $T^s T^t = T^{s+t}$, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$.

3.4.1 Propriétés de continuité

Definition 3.17. Soient \mathcal{X} un espace de Banach et $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(\mathcal{X})$ un semigroupe. On dit que $\{T^t\}$ est *fortement continu* s'il est continu pour la topologie forte de $B(\mathcal{X})$, c'est-à-dire la topologie de la convergence ponctuelle en norme. Si \mathcal{X} admet un préduel $\mathcal{X}_* \subseteq \mathcal{X}^*$, alors on dit que $\{T^t\}$ est **-faiblement continu* quand il est continu pour la topologie de la convergence ponctuelle *-faible.

Remarque 3.18. Il y a plusieurs autres choix de topologie. En particulier, il semble que la topologie faible de $B(\mathcal{X})$, c'est-à-dire la topologie de la convergence ponctuelle faible, soit une omission importante. Néanmoins, il se trouve que les semigroupes faiblement continus sont automatiquement fortement continus (voir [15, Corollaire 3.1.8]).

Soit \mathcal{X} un espace de Banach et $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(\mathcal{X})$ un semigroupe. S'il est fortement continu, alors les opérateurs

$$(T^t)^* : \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$$

définissent un semigroupe *-faiblement continu. Dans l'autre sens, supposons que $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_*)^*$ avec $\mathcal{X}_* \subseteq \mathcal{X}^*$ espace de Banach, et que chaque $(T^t)^*$ laisse \mathcal{X}_* invariant. Alors, on désigne par T_*^t la restriction de $(T^t)^*$ à \mathcal{X}_* , et on l'appelle *preadjoint* de T^t . Ainsi, on obtient le semigroupe

$$T_* : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(\mathcal{X}_*).$$

Si T est *-faiblement continu, par définition T_* est faiblement continu, et a fortiori fortement continu (voir la Remarque 3.18).

Exemple 3.19. Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert et $H : \text{dom } H \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur autoadjoint, on peut définir le groupe d'automorphismes de $B(\mathcal{H})$

$$T^t : x \in B(\mathcal{H}) \mapsto e^{itH} x e^{-itH} \in B(\mathcal{H}).$$

Il se trouve que $T : \mathbb{R} \rightarrow B(B(\mathcal{H}))$ est *-faiblement continue. De même, on peut définir

$$S^t : \rho \in L^1(\mathcal{H}) \mapsto e^{-itH} \rho e^{itH} \in L^1(\mathcal{H}).$$

Maintenant, $S : \mathbb{R} \rightarrow B(L^1(\mathcal{H}))$ est fortement continu, et on obtient que $(S^t)^* = T^t$ sous l'identification $L^1(\mathcal{H})^* \cong B(\mathcal{H})$ donné par la trace.

Exemple 3.20. Soit M une algèbre de von Neumann et $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(M)$ un semigroupe d'opérateurs ultrafaiblement continus (ce qui est le cas, en particulier, si il est un semigroupe de canaux quantiques). La forme linéaire

$$x \mapsto (T^t)^*(\rho)(x) = \rho(T^t(x))$$

est normale pour ρ normal ; ainsi, $(T^t)^*$ laisse M_* invariant et le semigroupe preadjoint $T_* : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(M_*)$ est bien défini.

Finalement, on rappelle que la continuité forte (resp. *-faible) d'un semigroupe $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(\mathcal{X})$ implique l'existence d'un *générateur*, c'est-à-dire, une application linéaire $L : \text{dom } L \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, fermée en norme (resp. *-faiblement) et avec domaine dense en norme (resp. *-faiblement), telle que la limite

$$L(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} (T^t(x) - x)$$

existe en norme (resp. *-faiblement), pour tout $x \in \text{dom } L$ (voir [15, Proposition 3.1.6]). On finit avec la définition des semigroupes markoviens quantiques.

Definition 3.21. Soit M une algèbre de von Neumann. Un *semigroupe markovien quantique* est un semigroupe ultrafaiblement continu $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(M)$ tel que T^t est un canal quantique, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3.4.2 Générateur de Lindblad

Soient M une algèbre de von Neumann et $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(M)$ un semigroupe markovien quantique avec générateur $L : \text{dom } L \subseteq M \rightarrow M$. Si $x_t = T^t(x_0)$ avec $x_0 \in \text{dom } T$, alors x_t résout l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} x_t = L(x_t),$$

(voir [27, Lemma 1.3]) qui reçoit le nom d'*équation maitresse adjointe*. Rappelons que les semigroupes markoviens quantiques ont toujours un semigroupe preadjoint, donc on peut passer au cadre de Schrödinger en trouvant que $\rho_t = T_*^t(\rho_0)$ satisfait l'équation

$$\frac{d}{dt} \rho_t = L_*(\rho_t),$$

qui est, naturellement, l'*équation maitresse*.

Remarque 3.22. Le semigroupe $\{(T^t)^*\}$ est uniquement déterminé par l'opérateur $L^*|_{\mathcal{D}}$, où

$$\mathcal{D} = \left\{ \eta \in M^* : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((T^t)^*(\eta) - \eta) \text{ existe en norme} \right\}$$

(voir [27, Theorem 1.36]). Ainsi, le générateur du semigroupe $\{T_*^t\}$ est la restriction de L^* au sous-espace $\mathcal{D} \cap M_*$.

La question qu'on se pose, et à laquelle il n'est que partiellement répondu dans le théorème suivant [38], est quel type d'opérateurs L sont ceux qui apparaissent comme générateurs des semigroupes markoviens quantiques.

Théorème 3.23 (Lindblad). *Soit $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(M)$ un semigroupe markovien quantique. S'il est continu en norme, alors son générateur a la forme*

$$L(x) = i[H, x] + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} ([V_n^* x] V_n + V_n^* [x, V_n]), \quad (3.4)$$

où la somme converge ultrafaiblement, H et les V_n sont bornés, H est autoadjoint, et $\sum_{n \in \mathbb{N}} V_n^* V_n$ converge ultrafaiblement.

Remarque 3.24. Un semigroupe est continu en norme si, et seulement si, son générateur est un opérateur borné—ce qui exclut beaucoup de cas physiquement intéressants. Le traitement en toute généralité reste encore un problème ouvert.

Un opérateur du type (3.4) est appelé *lindbladien*. Notons que le premier terme dans (3.4) est le générateur d'un groupe d'automorphismes de M et correspond, donc, à la partie conservative de la dynamique. Le deuxième terme est le responsable des effets dissipatifs.

3.4.3 Convergence à la stationnarité

Definition 3.25. On dit qu'un semigroupe markovien quantique $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur une algèbre de von Neumann M est *relaxant* ou *converge à la stationnarité* s'il existe un unique état stationnaire $\omega_0 \in M_*$ tel que

$$T^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \omega_0(x)1, \quad \forall x \in M.$$

Remarque 3.26. Pour motiver cette définition il faut passer à la représentation de Schrödinger $\{T_*^t\}$ où, évidemment, la convergence vers un état asymptotique unique signifie que $T_*^t(\omega)(x) = \omega(T^t(x)) \rightarrow \omega_0(x)$, pour tout $\omega \in M_*$ et $x \in M$. En particulier, $T^t(x)$ converge faiblement vers une limite $P(x)$ qui définit un projecteur $P : M \rightarrow M$. On note que $P(x)$ doit être un multiple de l'identité, car autrement $\omega(P(x))$ ne serait pas indépendant de ω ; ainsi, $T^t(x) \rightarrow \omega_0(x)1$. Réciproquement, la convergence de T^t vers un projecteur de rang 1 (dont l'image doit être $\mathbb{C}1$ car $T^t(1) = 1$) implique que $T_*^t(\omega)$ converge $*$ -faiblement vers un unique état asymptotique.

Remarque 3.27. La convergence à la stationnarité est une notion plus forte que celle du *retour à l'équilibre*, définie pour les systèmes dynamiques quantiques $(M, \{\alpha^t\}, \omega_0)$ où M est une algèbre de von Neumann, $\{\alpha^t\}$ un groupe ultrafaiblement continu d'automorphismes et ω_0 un état normal et invariant pour $\{\alpha^t\}$. On dit qu'un tel système retourne à l'équilibre si, pour tout état ω normal par rapport à ω_0 et tout $a \in M$, on a que $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(\alpha^t(a)) = \omega_0(a)$.

Évidemment, si le semigroupe n'est pas dissipatif, il ne peut pas être relaxant; maintenant, rappelons que $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un semigroupe d'automorphismes si, et seulement si, son générateur L est une dérivation. Motivé par

ce fait, on définit la *dissipation* d'un semigroupe markovien quantique avec générateur L par

$$D_L(x) = L(x^*x) - x^*L(x) - L(x^*)x.$$

Notons que $D_L(1) = 0$, car $T^t(1) = 1$. Le résultat suivant est dû à Frigerio [32].

Théorème 3.28. *Soit $L : \text{dom } L \subseteq M \rightarrow M$ le générateur d'un semigroupe markovien quantique $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et supposons que $D_L(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \lambda 1$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est relaxant.*

Remarque 3.29. Si L est un lindbladien, alors l'hypothèse sur D_L est équivalente à la condition $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}' = \mathbb{C}1$ (voir [37]).

3.4.4 Dilatations

Soient M et N deux algèbres de von Neumann, $\mathbb{E} : M \rightarrow N$ une espérance conditionnelle et $\{\alpha^t\}$ un groupe d'automorphismes de M . Si \mathbb{E} et $\{\alpha^t\}$ satisfont la condition

$$\mathbb{E}\alpha^t = \mathbb{E}\alpha^t\mathbb{E}, \quad \forall t > 0,$$

alors les opérateurs

$$T^t = \mathbb{E}\alpha^t|_N : N \rightarrow N \tag{3.5}$$

définissent un semigroupe markovien quantique. Réciproquement, si l'on commence avec un semigroupe markovien quantique $\{T^t\}$, on dit qu'une espérance conditionnelle $\mathbb{E} : M \rightarrow N$ et un groupe $\{\alpha^t\}$ d'automorphismes de M tels que l'équation (3.5) est vraie, donnent une *dilatation* de $\{T^t\}$. Une question naturelle est, donc, si tout semigroupe markovien quantique admet une dilatation.

Ce problème peut être résolu par moyen de la théorie des bruits quantiques, comme on l'exposera très brièvement dans la Section 5.2 ; la solution est une construction qui donne, en plus, une interprétation probabiliste aux termes qui apparaissent dans le générateur de Lindblad de $\{T^t\}$. Elle est assez importante du point de vue de la modélisation physique, puisque la solution d'une équation de Heisenberg est toujours un groupe d'automorphismes, et la dilatation obtenue au moyen des bruits quantiques permet de regarder la perte d'information inhérente à un semigroupe markovien quantique comme provenant de l'interaction du système avec un environnement en équilibre thermique.

Chapitre 4

Étude asymptotique de semigroupes perturbés

Dans ce chapitre, on fait un rappel des éléments concernant la théorie de perturbations d'opérateurs et semigroupes dont on a besoin. D'abord, on présente la série de Dyson, qui permet d'établir l'existence d'un semigroupe perturbé quand la perturbation du générateur libre est un opérateur borné. Elle a l'avantage de démontrer, au même temps, que le semigroupe résultant est une fonction analytique du paramètre de perturbation—une propriété qui sera cruciale par la suite. Puis, pour rendre l'exposé raisonnablement auto-contenu, on fait un rappel sur la théorie des perturbations analytiques d'une matrice. Ensuite, on expose l'idée de la *limite de van Hove* [47], développée mathématiquement par Davies [24], qui porte sur l'obtention d'une dynamique effective à partir d'un groupe d'isométries perturbé, lorsqu'on se trouve dans un régime de couplage faible. Finalement, quand la perturbation est analytique et le groupe est matriciel, on montre comment relier l'éventuel état asymptotique de cette dynamique effective avec celui de la vraie dynamique. Ce résultat original (Théorème 4.10) est à la base de notre approche, développé dans la Section 6.2, à l'existence de cycles limites pour les systèmes d'interactions répétées.

4.1 Série de Dyson

La série de Dyson permet d'exprimer un groupe perturbé d'unitaires sur un espace de Hilbert en termes du groupe original et de la perturbation. Alors, même si la solution d'une équation de Schrödinger est toujours donnée par un groupe de ce type, quand on travaille avec des systèmes ouverts il devient nécessaire de passer à une description statistique, en utilisant soit le cadre de Heisenberg, soit des matrices densité. Cela signifie que l'on doit étudier le cas plus général des semigroupes de transformations complètement positives d'une algèbre de von Neumann M ou, ce qui est pratiquement équivalent,

d'isométries de son préduel M_* . Ici, on commence par dériver formellement le résultat dans le cadre d'espaces de Hilbert, et on énonce après la généralisation pour semigroupes $*$ -faiblement continus sur un espace de Banach.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $H : \text{dom } H \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur autoadjoint. On s'intéresse au groupe d'unitaires $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$. Pour travailler avec perturbations du genre $H + V$, où V est autoadjoint, il est souvent utile de se mettre dans le *cadre d'interaction*, c'est-à-dire, étudier l'évolution temporelle de

$$\xi_t = e^{itH} e^{-it(H+V)} \xi_0.$$

Dans le cadre de Heisenberg, ceci s'écrit

$$x_t = \left(e^{it(H+V)} e^{-itH} \right) x_0 \left(e^{itH} e^{-it(H+V)} \right)$$

La famille des unitaires $Y_t = e^{it(H+V)} e^{-itH}$, qui permet d'obtenir l'évolution perturbé à partir de l'évolution libre, reçoit le nom de *cocycle* ; elle a les propriétés

1. $Y_0 = 1$,
2. $Y_{s+t} = Y_s \left(e^{isH} Y_t e^{-isH} \right)$.

En dérivant, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_t &= i e^{it(H+V)} (H + V) e^{-itH} - i e^{it(H+V)} H e^{-itH} \\ &= i e^{it(H+V)} V e^{-itH} \\ &= i Y_t V_t, \end{aligned}$$

où $V_t = e^{itH} V e^{-itH}$. Ainsi,

$$Y_t = 1 + i \int_0^t ds Y_s V_s. \quad (4.1)$$

On peut réécrire cette équation de la façon suivante, qui reçoit le nom de *formule de Duhamel* : $e^{it(H+V)} - e^{itH} = i \int_0^t ds e^{is(H+V)} V e^{i(t-s)H}$. Elle s'écrit plus souvent, en remplaçant t par $-t$, comme

$$e^{-it(H+V)} - e^{-itH} = i \int_0^t ds e^{-is(H+V)} V e^{-i(t-s)H}. \quad (4.2)$$

Cette formule reste valable, mutatis mutandis, dans plusieurs cas plus généraux, dont notamment quand $-iH$ est le générateur d'un semigroupe fortement continu dans un espace de Banach et V est borné—un résultat qu'on aura l'occasion d'utiliser.

Maintenant, pour mettre en évidence la nature perturbative de l'expression qu'on va dériver, on écrit εV au lieu de V . En utilisant l'équation (4.1) de façon récursive, on arrive à la série de Dyson

$$Y_t = \sum_{n=0}^{\infty} (i\varepsilon)^n \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n V_{t_1} V_{t_2} \cdots V_{t_n}.$$

On peut démontrer la convergence de cette expression dans le cadre plus général du résultat suivant.

Théorème 4.1. Soient X un espace de Banach avec predual X_* et $A : \text{dom } A \subseteq X \rightarrow X$ le générateur d'un semigroupe $*$ -faiblement continu $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Considérons la perturbation $A(\varepsilon) = A + \varepsilon B$, où $B \in B(X)$. Alors, $A(\varepsilon)$ est aussi le générateur d'un semigroupe $*$ -faiblement continu $\{T^t(\varepsilon)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, qui satisfait

$$T^t(\varepsilon) = T^t + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n T^{t_1} B T^{t_2 - t_1} B \cdots B T^{t_n - t_{n-1}} B T^{t - t_n}.$$

Ici, les intégrales sont définies ponctuellement dans la topologie $*$ -faible et donnent une série convergente pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque 4.2. Pour les semigroupes $*$ -faiblement continus il existe toujours des constantes $M \geq 1$ et $\beta \geq 0$ tels que $\|T^t\| \leq M e^{\beta t}$ (voir [15, Proposition 3.1.3]). Ainsi, le n -ème terme

$$T_n^t = \int_0^t dt_1 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n T^{t_1} B T^{t_2 - t_1} B \cdots B T^{t_n - t_{n-1}} B T^{t - t_n}$$

dans la série de Dyson satisfait

$$\|T_n^t\| \leq \frac{t^n}{n!} M^{n+1} e^{\beta t} \|B\|^n.$$

Donc, l'erreur après sommation de $n - 1$ termes est bornée par

$$\varepsilon^n t^n e^{\beta t} \sum_{k \geq n} \frac{(\varepsilon t)^{k-n}}{k!} M^{n+1} \|B\|^n =: e^{\beta t} f_n(\varepsilon t) \varepsilon^n t^n, \quad (4.3)$$

où $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue croissante.

4.2 Perturbation analytique d'une matrice

Rappelons qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ a une décomposition spectrale unique

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i + N_i,$$

où les λ_i sont des valeurs propres toutes différentes, et les projecteurs spectraux P_i (qui ne sont pas forcément orthogonaux) et nilpotents N_i satisfont

$$P_i P_j = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^m P_i = 1, \quad N_i = P_i N_i = N_i P_i.$$

Les P_i peuvent être obtenus par calcul fonctionnel holomorphe, selon

$$P_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} d\zeta (A - \zeta)^{-1}, \quad (4.4)$$

où γ_i est une courbe régulière qui enferme la valeur propre λ_i en l'isolant du reste du spectre. Le but de cette section est d'étudier le comportement de ces valeurs propres et projecteurs spectraux quand la matrice A dépend analytiquement d'un paramètre $z \in \mathbb{C}$. La référence classique à ce sujet est [35].

Soit $A : \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, avec $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et borné, une fonction analytique. L'équation caractéristique $\det(A(z) - \lambda) = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$P(\lambda; z) = \lambda^n + a_{n-1}(z)\lambda^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0,$$

où chaque $a_i(z)$ appartient à l'anneau $\mathcal{A}(\Omega)$ de fonctions analytiques sur Ω . On supposera, d'abord, que $P(\lambda; z)$ est *irréductible* comme élément de $\mathcal{A}(\Omega)[\lambda]$. Il est bien possible que ses coefficients soient constants, et dans ce cas $A(z)$ a un nombre fixe de valeurs propres différentes, toutes indépendantes de z ; autrement, le discriminant $D(z)$, étant un élément non-nul de $\mathcal{A}(\Omega)$, ne s'annule que dans un nombre fini de points dits *exceptionnels*. Ainsi, la matrice $A(z)$ a n valeurs propres différentes—sauf aux points exceptionnels où leur nombre est strictement inférieur. Ces valeurs propres sont des fonctions analytiques à chaque point non-exceptionnel z ; autour d'un point exceptionnel, qu'on supposera égal à 0 sans perte de généralité, ils s'arrangent en groupes

$$\{\lambda_{ij}(z) : j \in \{1, \dots, p_i\}\}, \quad \sum_i p_i = n,$$

dont chaque élément peut s'écrire en série de Puiseux

$$\lambda_{ij}(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \omega^j z^{1/p_i} + \alpha_2 \omega^{2j} z^{2/p_i} \dots, \quad \omega = e^{2\pi i/p_i}. \quad (4.5)$$

Ces séries n'ont pas de puissances négatives parce que le coefficient d'ordre n dans $P(\lambda; z)$ est 1, ce qui implique la continuité de ses zéros comme fonctions de z . Si tous les p_i sont égaux à 1, tout ce qui a lieu au point exceptionnel est un croisement de valeurs propres; si, par contre, il existe des $p_i > 1$, alors il s'agit d'un *point de branchement*.

Pour passer au cas général, on rappelle que l'anneau $\mathcal{A}(\Omega)[\lambda]$ est un domaine de factorisation unique; ainsi,

$$P(\lambda; z) = \prod_{i=1}^N P_i(\lambda; z)^{n_i},$$

où les $P_i(\lambda; z) \in \mathcal{A}(\Omega)[\lambda]$ sont irréductibles. En appliquant les résultats du paragraphe précédent à chaque facteur, on trouve que, sauf dans un ensemble fini de points exceptionnels, la matrice $A(z)$ a un nombre constant $m \leq n$ de valeurs propres qui sont des fonctions analytiques de z à chaque point non-exceptionnel, et autour de chaque point exceptionnel s'arrangent en groupes $\{\lambda_{ij}(z) : j \in \{1, \dots, p_i\}\}, \sum p_i = m$, dont chaque élément s'écrit comme dans (4.5).

Maintenant, on examine la structure des projecteurs spectraux autour d'un point exceptionnel qu'on supposera égal à 0 sans perte de généralité. Grâce à (4.4), les projecteurs spectraux sont des fonctions analytiques en n'importe quel point z suffisamment proche de 0. De même que les valeurs propres, ils s'arrangent en groupes $\{P_{ij}(z) : j \in \{1, \dots, p_i\}\}$, correspondant précisément aux groupes $\{\lambda_{ij} : j \in \{1, \dots, p_i\}\}$, dont les membres s'écrivent comme série de Laurent en z^{1/p_i} . On peut démontrer, encore en utilisant (4.4) et certaines bornes élémentaires, qu'ils divergent au plus comme $z^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$; ainsi,

$$P_{ij}(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} P_{ijk}(\omega^j z^{1/p_i})^k, \quad \omega = e^{2\pi i/p_i}. \quad (4.6)$$

Théorème 4.3. *Autour d'un point de branchement, la série (4.6) contient forcément des puissances négatives.*

Une preuve de ce résultat, dû à Butler [23], peut se trouver aussi dans [35, Théorème II.1.9].

4.3 Dynamique effective en régime perturbatif

Soit A le générateur d'un groupe fortement continu d'isométries d'un espace de Banach X . Si $B \in \mathcal{B}(X)$, alors $A + \varepsilon B$ est encore le générateur d'un groupe fortement continu, et on veut étudier

$$e^{t(A+\varepsilon B)}, \quad \text{pour } \varepsilon \ll 1. \quad (4.7)$$

En fait, on aura besoin du cas un peu plus général ou $A = A(\varepsilon)$, mais il est convenable de commencer avec une dépendance linéaire. La théorie développée ici sera utile dans la Sous-section 5.1.4 où, d'après van Hove [47], on montre comment obtenir une dynamique effective markovienne à partir d'un système ouvert qui interagit faiblement avec son environnement.

On s'intéresse au groupe (4.7) à l'échelle de temps $s = \varepsilon t$; on suppose que $s = O(1)$, c'est-à-dire, $t = O(1/\varepsilon)$. À cette échelle, l'évolution libre devient oscillatoire et il faut la factoriser : on voudrait trouver un semigroupe généré par un certain opérateur B^{\natural} tel que

$$e^{s(A+\varepsilon B)/\varepsilon} = e^{sA/\varepsilon} e^{sB^{\natural}} + o(1), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (4.8)$$

ou $o(1)$ est petit pour une topologie adaptée. Tous les résultats dans cette section, sauf pour le Corollaire 4.6 qui est une généralisation triviale du Théorème 4.5, sont dus à Davies et leur démonstration peut se trouver dans [27].

On commence par un calcul formel. En passant en représentation d'interaction, la série de Dyson donne

$$e^{s(A+\varepsilon B)/\varepsilon} e^{-sA/\varepsilon} = 1 + \varepsilon \int_0^{s/\varepsilon} ds_1 e^{s_1 A} B e^{-s_1 A} + \dots,$$

et on s'attend à ce que les termes d'ordre supérieur ne contribuent pas à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. En plus, quand $\varepsilon \ll 1$ et s est plus petit qu'un certain $s_0 > 0$ arbitraire mais fixe, il est vraisemblable que

$$e^{s(A+\varepsilon B)/\varepsilon} e^{-sA/\varepsilon} = 1 + s \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{tA} B e^{-tA} + o(1).$$

Ceci nous motive à considérer l'ansatz

$$B^{\natural} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{tA} B e^{-tA}. \quad (4.9)$$

Notons que B^{\natural} est la moyenne de B par rapport à l'évolution libre e^{tA} , ce qui est intuitivement raisonnable. Quand $\dim X < \infty$ on trouve, par calcul fonctionnel, que

$$B^{\natural} = \sum_{i=1}^n P_i B P_i,$$

ou les P_i sont les projecteurs spectraux de A . Ceci montre que B^{\natural} est, en quelque sorte, la partie de B qui commute avec A —interprétation que reste valable pour autant que la limite existe au sens fort. En fait, on a le résultat suivant.

Proposition 4.4. *Si la limite (4.9) existe au sens fort, alors elle commute avec A [27, Theorem 5.11]. En plus, on peut assurer son existence si :*

1. A admet un ensemble total de vecteurs propres [27, Lemma 5.7].
2. X est un espace de Hilbert et B est compact (au cas où B^{\natural} est aussi compact) [27, Lemma 5.9].

Cette proposition nous permet de mieux comprendre l'équation (4.8) : elle se vérifie quand l'évolution libre et l'interaction découplent à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. La partie libre, dont l'échelle de temps naturelle est $t = O(1)$, devient oscillatoire ; quant à l'interaction, qui est tout ce qui reste à l'échelle $t = O(1/\varepsilon)$, elle est capturée par ce qu'on appelle la *limite de couplage faible* ou *limite de van Hove*. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 4.5. *Soient X un espace de Banach, $A : \text{dom } A \subseteq X \rightarrow X$ le générateur d'un groupe fortement continu d'isométries, et $B \in B(X)$. Supposons que*

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{tA} B e^{-tA}$$

converge fortement, quand $T \rightarrow \infty$, vers un opérateur $B^{\natural} \in B(X)$. Alors, pour tout $s_0 > 0$ et $x \in X$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{s \in [0, s_0]} \left\| \left(e^{s(A+\varepsilon B)/\varepsilon} e^{-sA/\varepsilon} - e^{sB^{\natural}} \right) x \right\| = 0.$$

Corollaire 4.6. Soient \mathcal{X} un espace de Banach, $A : \text{dom } A \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ le générateur d'un groupe fortement continu d'isométries, et $B : \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{X})$ une application continue en norme. Supposons que la limite

$$B(0)^\natural = \text{s-lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{tA} B(0) e^{-tA}$$

existe. Alors, en définissant $A(\varepsilon) = A + \varepsilon B(\varepsilon)$, on a que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{s \in [0, s_0]} \left\| \left(e^{sA(\varepsilon)/\varepsilon} e^{-sA/\varepsilon} - e^{sB(0)^\natural} \right) x \right\| = 0,$$

pour tout $s_0 > 0$ et $x \in \mathcal{X}$.

Démonstration. Il suffit, grâce à l'inégalité triangulaire, de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{s \in [0, s_0]} \left\| e^{sA(\varepsilon)/\varepsilon} - e^{s(A+\varepsilon B(0))/\varepsilon} \right\| = 0.$$

Pour ce faire, on note que la formule de Duhamel donne

$$e^{sA(\varepsilon)/\varepsilon} - e^{s(A+\varepsilon B(0))/\varepsilon} = \int_0^s ds_1 e^{s_1 A(\varepsilon)/\varepsilon} \{B(\varepsilon) - B(0)\} e^{(s-s_1)(A+\varepsilon B(0))/\varepsilon}$$

et, par continuité de $B(\varepsilon)$, il reste à voir seulement que tant $e^{s_1 A(\varepsilon)/\varepsilon}$ que $e^{(s-s_1)(A+\varepsilon B(0))/\varepsilon}$ sont bornés en norme, uniformément en $s \in [0, s_0]$ et $\varepsilon \ll 1$. Mais ceci est une conséquence directe de la Remarque 4.2, qui donne

$$\left\| e^{s_1 A(\varepsilon)/\varepsilon} \right\| = \left\| e^{s_1(A/\varepsilon + B(\varepsilon))} \right\| \leq 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{s_1^k}{k!} \|B(\varepsilon)\|^k$$

et une borne similaire pour $e^{(s-s_1)(A+\varepsilon B(0))/\varepsilon}$. \square

4.4 Comportement en temps long

Considérons le groupe $\{e^{tA(\varepsilon)}\}$ généré par une fonction régulière $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$. L'aspect peut-être le plus intéressant de la dynamique lente effective $\{e^{sA'(\varepsilon)^\natural}\}_{s \in \mathbb{R}}$ est que son générateur $A'(0)^\natural$, comme il est bien connu en théorie de perturbations, est l'opérateur qui capture, au premier ordre en ε , les changements dans le spectre de $A(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \approx 0$. Dans cette section on montre les implications de ce fait par rapport à la relation des limites $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA(\varepsilon)}$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{sA'(0)^\natural}$. Notons qu'avoir une relation, quelle qu'elle soit, n'est pas complètement trivial puisque l'approximation

$$e^{tA(\varepsilon)} \approx e^{tA} e^{\varepsilon t B(0)^\natural}$$

n'est bonne que pour $t = O(1/\varepsilon)$. La généralisation de ces résultats en dimension quelconque reste à explorer dans l'avenir.

Envisageant l'application aux SIRs, on se place d'abord dans le cadre de temps discret. On suppose, donc, qu'on a une fonction analytique $T :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow M_n(\mathbb{C})$, qui jouera le rôle de $e^{A(\varepsilon)}$, telle que $1 \in \text{spec } T(\varepsilon)$ et $\|T(\varepsilon)\| = 1$. On commence par rappeler le fait élémentaire suivant, qui caractérise la convergence de $T(\varepsilon)^n$ quand $n \rightarrow \infty$.

Proposition 4.7. *Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$. Alors, $T^n \rightarrow P \neq 0$ si et seulement si $\text{spec}(T) \subseteq D^2$, $\text{spec}(T) \cap S^1 = \{1\}$, 1 est semisimple et P est son projecteur spectral. Ici, $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ et $S^1 = \partial D^2$.*

Démonstration. Si $T^n \rightarrow P$, alors le rayon spectral de T est au plus 1, et $\text{spec}(T) \subseteq D^2$. Nécessairement P est un projecteur, et $TP = P$ d'où $1 \in \text{spec}(T)$. Si $T\xi = e^{i\theta}\xi$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $T^n\xi$ ne converge pas, et donc $\text{spec}(T) \cap S^1 = \{1\}$. Finalement, soit $PTP = P + N$ avec $N \neq 0$ nilpotent satisfaisant $NP = PN = N$. Il existe $\xi \in \mathbb{C}^n$ et $k > 0$ tels que $N^k\xi \neq 0$ mais $N^{k+1}\xi = 0$, et sans perte de généralité on peut supposer que $k = 1$ (autrement, remplacer ξ par $N^{k-1}\xi$). Alors,

$$T^n\xi = \xi + nN\xi$$

et encore T^n ne converge pas.

Dans l'autre sens, soit $U \subseteq D^2$ un ouvert tel que

$$\text{spec}(T) \cap U = \text{spec}(T) \setminus \{1\}.$$

Soit aussi $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction identité $f(z) = z$, prenons une fonction holomorphe $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $g(1) = 1$ et $g|_{\text{spec}(T) \cap U} = 0$ (par exemple un polynôme), et définissons $P = g(T)$. Comme la valeur propre 1 est semisimple, $PT = TP = P$ et $T = P + T(1 - P)$, où en utilisant des propriétés du calcul fonctionnelle holomorphe,

$$\text{spec}(T(1 - P)) = (f(1 - g))(\text{spec}(T)) = \text{spec}(T) \cap U.$$

En plus, $f^n \rightarrow 0$ uniformément sur les compacts de U , et encore par calcul fonctionnel holomorphe $T^n = P + (T(1 - P))^n = P + f^n(T(1 - P)) \rightarrow P$. \square

Maintenant on énonce le lemme sur lequel repose le résultat de la section.

Lemme 4.8. *Soit $T :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow M_n(\mathbb{C})$ une fonction analytique et, pour chaque $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, soit $P(\varepsilon)$ le projecteur spectral associé à $1 \in \text{spec } T(\varepsilon)$. Supposons que $T(\varepsilon)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\varepsilon)$ quand $\varepsilon > 0$. Alors,*

1. $0 \in \text{spec } P(0)T'(0)P(0)$. Désignons par Q au projecteur spectral associé.
2. $P(0)Q = QP(0)$, donc $P(0)Q$ est aussi un projecteur.
3. $P(0^+) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\varepsilon)$ existe et est un sous-projecteur de $P(0)Q$.

Démonstration. Soit \tilde{T} la continuation analytique de T à un voisinage complexe $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ de l'origine. On veut montrer que 0 n'est pas un point de branchement de $1 \in \text{spec } \tilde{T}(0)$ (voir la Sous-section 4.2). Comme les points exceptionnels sont isolés, on peut supposer qu'il existe m fonctions analytiques

$$\tilde{P}_i : \Omega \setminus]-\infty, 0] \rightarrow M_n(\mathbb{C}),$$

qui sont en fait les projecteurs spectraux de \tilde{T} , tels que

$$P(0) = \sum_{i=1}^m \tilde{P}_i(0).$$

Maintenant, un de ces projecteurs spectraux, disons $\tilde{P}_1 =: \tilde{P}$, doit correspondre à la valeur propre 1 et doit être, ainsi, une prolongement analytique de P . Ensuite supposons, par contradiction, que 0 est un point de ramification de 1 d'ordre $p-1 \geq 1$. Dans ce cas là, le Théorème 4.3 assure que \tilde{P} admet une série de Laurent en puissances de $z^{1/p}$ contenant, nécessairement, des puissances strictement négatives. Néanmoins, par continuité de la norme, on obtient que

$$\|P(\varepsilon)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(\varepsilon)^n\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T(\varepsilon)\|^n = 1.$$

Ceci implique, en se rapprochant à travers l'axe réel positif, que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|\tilde{P}(0)\| = 1.$$

Mais ceci est une contradiction, et on conclut que 0 n'est pas un point de ramification de 1. En particulier, \tilde{P} peut être encore étendue comme continuation analytique de $P|_{]0, \varepsilon_0[}$ définie dans un voisinage complexe de 0, et $P(0^+)$ existe. Notons que $P(0^+) = \tilde{P}(0)$ est un sous-projecteur de $P(0)$ et, en particulier, commute avec lui.

En utilisant $\tilde{P}(z)$, chaque $\xi_0 \in P(0^+)\mathbb{C}^n$ donne lieu à un choix analytique $\xi(z) = \tilde{P}(z)\xi_0$ de vecteurs propres de $\tilde{T}(z)$ avec valeur propre 1. Comme le terme d'ordre 1 en z dans l'équation $\tilde{T}(z)\xi(z) = \xi(z)$ est

$$T(0)\xi'(0) + T'(0)\xi_0 = \xi'(0),$$

en premultipliant par $P(0)$ on trouve que $P(0)T'(0)P(0)\xi_0 = 0$. Ainsi,

$$P(0^+)\mathbb{C}^n \subseteq \ker P(0)T'(0)P(0), \quad (4.10)$$

et, en particulier, $0 \in \text{spec } P(0)T'(0)P(0)$. Soit Q le projecteur spectral associé ; le fait que Q commute avec $P(0)$ suit du fait qu'il est obtenu par calcul fonctionnel à partir de $P(0)T'(0)P(0)$, qui, lui même, commute avec $P(0)$.

Pour finir, il nous reste à démontrer que $P(0^+)$ est un sous-projecteur de $P(0)Q$, c'est-à-dire que

$$P(0^+) = P(0^+)P(0)Q = QP(0)P(0^+).$$

Alors, en sachant que $P(0^+)$ est un sous-projecteur de $P(0)$, il suffit de voir que $P(0^+)$ est un sous-projecteur de Q . On commence par l'égalité

$$P(0^+) = QP(0^+).$$

Elle suit du fait que, grâce à l'inclusion (4.10), $Q\xi_0 = \xi_0$ pour tout $\xi_0 \in P(0^+)\mathbb{C}^n$. Pour obtenir l'égalité $P(0^+) = P(0^+)Q$, on applique le même raisonnement à

la fonction analytique (réelle) $T(\varepsilon)^*$. En effet : elle satisfait les hypothèses du lemme ; le projecteur spectral de $1 \in \text{spec } T(\varepsilon)^*$ est $P(\varepsilon)^*$; et on obtient que

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} T(\varepsilon)^* = T'(0)^*.$$

On peut conclure que $P(0^+)^* = Q^*P(0^+)^*$. \square

Remarque 4.9. Notons que, par analyticité de \tilde{P} , on a que $P(\varepsilon) = P(0^+) + O(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.

Théorème 4.10. Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ analytique, avec $A(0)$ anti-hermitienne, $\ker A(\varepsilon) \neq \{0\}$ et $\|e^{tA(\varepsilon)}\| = 1$. Soit $A(0) = \sum a_k P_k$ la décomposition spectrale de $A(0)$ (en particulier, les a_k sont deux-à-deux différents), et supposons que

$$e^{s \sum P_k A'(0) P_k} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} Q,$$

avec $\text{Tr } Q = 1$. Alors, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$e^{tA(\varepsilon)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} Q + O(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0].$$

Démonstration. Écrivons

$$\text{spec } A(\varepsilon) = \{a_i(\varepsilon) : i \in \{0, \dots, m\}\},$$

avec $a_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue pour tout i . Comme le noyau de $A(\varepsilon)$ est non-trivial, on peut supposer que $a_0 \equiv 0$. On a le développement

$$a_i(\varepsilon) = a_i(0) + \varepsilon^{1/p_i} \lambda_i + O(\varepsilon^{2/p_i}),$$

où λ_i est une valeur propre de $\sum P_k A'(0) P_k$ et $p_i \in \mathbb{N}$ est l'ordre de ramification de $a_i(0)$.

Rappelons que l'hypothèse $e^{s \sum P_k A'(0) P_k} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} Q$ est équivalente à

$$\text{spec} \left(\sum P_k A'(0) P_k \right) \setminus \{0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\},$$

$0 \in \text{spec } \sum P_k A'(0) P_k$ étant une valeur propre semisimple (en fait, simple car $\text{Tr } Q = 1$) et Q son projecteur spectral. Ainsi, il existe un ε_0 tel que, sauf si $i = 0$, $\text{Re } a_i(\varepsilon) < 0$, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Ceci assure que $e^{tA(\varepsilon)}$ converge vers le projecteur spectral de $0 \in \text{spec } A(\varepsilon)$, qu'on désignera $P(\varepsilon)$. Maintenant, on peut utiliser le Lemme 4.8 avec $T(\varepsilon) = e^{A(\varepsilon)}$, en obtenant que $P(\varepsilon) = P(0^+) + O(\varepsilon)$, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Finalement, notons que

$$\begin{aligned} P_0 \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} e^{A(\varepsilon)} P_0 &= P_0 \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left\{ 1 + \varepsilon \int_0^1 ds e^{sA(0)} A'(0) e^{-sA(0)} + O(\varepsilon^2) \right\} e^{A(0)} P_0 \\ &= P_0 A'(0) P_0. \end{aligned}$$

Ainsi, encore par le Lemme 4.8, $P(0^+)$ est un sous-projecteur du projecteur spectral de Q . Mais $\text{Tr } Q = 1$, donc $P(\varepsilon) = Q + O(\varepsilon)$, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. \square

Chapitre 5

Systemes quantiques ouverts

Considérons un système ouvert, composé d'un petit système \mathcal{S} et un réservoir \mathcal{R} (voir l'introduction pour une exposition des généralités au sujet des systèmes ouverts). Pour bien mettre en contexte le sujet de ce travail (les systèmes d'interactions répétées où *SIRs*), on exposera le cas autonome, c'est-à-dire, où l'interaction entre petit système et environnement est constante. On étudiera la structure de l'évolution restreinte et du terme d'interaction, puis la limite de couplage faible. Ensuite, on profitera pour parler brièvement des bruits quantiques et, finalement, on introduira les *SIRs*. Nos résultats principaux au sujet des *SIRs* seront donnés dans le chapitre suivant.

5.1 Le cas autonome

5.1.1 Modèle et équation maîtresse

Soient $M_S \subseteq B(\mathcal{H}_S)$ et $M_R \subseteq B(\mathcal{H}_R)$ deux algèbres de von Neumann, représentant les observables petit système \mathcal{S} et son réservoir \mathcal{R} , respectivement. Leur produit tensoriel $M = M_S \otimes M_R$, qui est défini comme la clôture faible du produit tensoriel algébrique $M_S \otimes_{\text{alg}} M_R \subseteq B(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$, représente les observables du système composé $\mathcal{S} + \mathcal{R}$. Quand $x_S \in M_S$ et $x_R \in M_R$, il est parfois commode d'écrire

$$x_S + x_R, x_S x_R \quad \text{au lieu de} \quad x_S \otimes 1_R + 1_S \otimes x_R, x_S \otimes x_R.$$

Cet abus de langage est inoffensif, parce qu'on peut toujours remplacer M_S et M_R par les algèbres de von Neumann isomorphes $M_S \otimes 1_R$ et $1_S \otimes M_R$, respectivement. Autrement dit, parler d'un système physique qui peut être décomposé en deux sous-systèmes veut dire, mathématiquement, que son algèbre d'observables M admet deux sous-algèbres M_S et M_R , qui commutent entre elles, et qui génèrent M au sens que $M = (M_S \cup M_R)''$.

Maintenant, soient

$$\alpha_S : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(M_S), \quad \alpha_R : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(M_R)$$

des groupes *-faiblement continûs d'automorphismes, correspondants aux dynamiques libres de \mathcal{S} et \mathcal{R} , respectivement. Ils sont générés par des dérivations qu'on désignera par $\delta_S : \text{dom } \delta_S \subseteq M_S \rightarrow M_S$ et $\delta_R : \text{dom } \delta_R \subseteq M_R \rightarrow M_R$. Rappelons que par continuité *-faible on veut dire que $t \mapsto \omega(\alpha_S^t(x))$ est continue, pour tout $x \in M_S$ et $\omega \in (M_S)_*$, et de même pour α_R . On peut étendre $\{\alpha_S^t\}$ et $\{\alpha_R^t\}$ à tout M par

$$\alpha_S^t(x_S x_R) = \alpha_S^t(x_S) x_R, \quad \alpha_R^t(x_S x_R) = x_S \alpha_R^t(x_R), \quad \forall x_S \in M_S, x_R \in M_R.$$

ou, en termes des générateurs,

$$\delta_S(x_S x_R) = \delta_S(x_S) x_R, \quad \delta_R(x_S x_R) = x_S \delta_R(x_R), \quad \forall x_S \in M_S, x_R \in M_R.$$

Ainsi, on peut définir l'évolution libre du système complet $\mathcal{S} + \mathcal{R}$ par

$$\alpha_0^t = \alpha_S^t \alpha_R^t = \alpha_R^t \alpha_S^t,$$

ce qui donne encore un groupe fortement continu, dont le générateur $\delta_0 : \text{dom } \delta_0 \subseteq M \rightarrow M$ coïncide avec $\delta_S + \delta_R$ quand la somme est bien définie. Typiquement, il existe des opérateurs autoadjoints H_S et H_R tels que

$$\delta_S(x) = i[H_S, x], \quad \delta_R(x) = i[H_R, x]$$

pour tout x dans un domaine adéquat, et donc $\delta_0(x) = i[H_S + H_R, x]$ quand x appartient à ce domaine. Ensuite, on met \mathcal{S} et \mathcal{R} en interaction en perturbant le générateur de l'évolution libre. On considérera seulement des perturbations de la forme

$$\delta_\lambda = \delta_0 + i\lambda[V, \cdot], \quad V \in M,$$

pour lesquelles la propriété de générer un groupe *-faiblement continu d'automorphismes $\{\alpha_\lambda^t\}$ est assurée par le Théorème 4.1.

Soit ω_R un état de référence du réservoir, qu'on suppose invariant pour $\{\alpha_R^t\}$. On considère normalement des réservoirs composés d'un ou plusieurs bains thermiques, chacun dans un état β -KMS par rapport à l'évolution libre (cas auquel ω_R est leur état produit). On construit l'espérance conditionnelle $\mathbb{E} : M \rightarrow M_S$

$$\mathbb{E}(x_S x_R) = \omega_R(x_R) x_S, \quad x_S \in M_S, x_R \in M_R$$

(voir l'Exemple 3.12). L'évolution restreinte de \mathcal{S} est donc donnée par

$$T^t(x_S) = \mathbb{E}(\alpha_\lambda^t(x_S)), \quad x_S \in M_S. \quad (5.1)$$

Notons que la famille $\{T^t\}$ ne définit pas un semigroupe; elle a des termes de mémoire, comme on va le voir ensuite.

Remarque 5.1. Grâce à la construction GNS on peut toujours supposer que $\omega_R(x_R) = \langle \Omega_R, x_R \Omega_R \rangle$, pour tout $x_R \in M_R$. Dans ce cas là, pour tout $x \in M$ on a que $\mathbb{E}(x) \otimes |\Omega_R\rangle \langle \Omega_R| = PxP$, où $P = 1 \otimes |\Omega_R\rangle \langle \Omega_R|$. Alors, on peut considérer l'évolution

$$\xi_S(t) = Pe^{-it(H+V)} \xi_S(0),$$

en identifiant $\mathcal{H}_S \cong \mathcal{H}_S \otimes \Omega_R$. Ce semigroupe n'est pas équivalent à la "vraie" évolution restreinte, écrite pour des matrices densité, et donnée par (2.6). En fait, en supposant que $\rho_S(0) = |\xi_S(0)\rangle \langle \xi_S(0)| = \text{Tr}_R(\rho_S(0) \otimes |\Omega_R\rangle \langle \Omega_R|)$, les espérances

$$\begin{aligned} \langle \xi_S(t), x_S \xi_S(t) \rangle &= \langle \xi_S(0) \otimes \Omega_R, \left(e^{-it(H+V)} (x_S \otimes |\Omega_R\rangle \langle \Omega_R|) e^{it(H+V)} \right) \xi_S(0) \otimes \Omega_R \rangle, \\ \text{Tr}_S(\rho_S(t)x_S) &= \text{Tr}_{SR}(\rho_S(0) \otimes |\Omega_R\rangle \langle \Omega_R| e^{-it(H+V)} (x_S \otimes 1_R) e^{it(H+V)}) \\ &= \langle \xi_S(0) \otimes \Omega_R, \left(e^{-it(H+V)} (x_S \otimes 1_R) e^{it(H+V)} \right) \xi_S(0) \otimes \Omega_R \rangle \end{aligned}$$

ne coïncident pas forcément.

Soit $x_t = (\mathbb{E}\alpha_\lambda^t)(x_0)$, avec $x_0 \in M_S$. Pour obtenir l'équation que x_t satisfait, on considère $\{\alpha_\lambda^t\}$ comme perturbation du semigroupe généré par

$$\tilde{\delta}_\lambda = \delta_0 + i\lambda \mathbb{E}[V, \cdot] \mathbb{E} + i\lambda (\text{Id} - \mathbb{E})[V, \cdot] (\text{Id} - \mathbb{E}), \quad (5.2)$$

qui sera dénoté $\{\tilde{\alpha}_\lambda^t\}$.

Remarque 5.2. Notons que

$$(\mathbb{E}[V, \cdot] \mathbb{E})(x) = \mathbb{E}([V, \mathbb{E}(x)]) = [\mathbb{E}(V), \mathbb{E}(x)],$$

pour tout $x \in M$. Comme $\text{Id} - \mathbb{E}$ n'est pas une espérance conditionnelle, on n'a pas une simplification analogue pour $(\text{Id} - \mathbb{E})[V, \cdot] (\text{Id} - \mathbb{E})$.

Il est important d'observer que $\{\tilde{\alpha}_\lambda^t\}$ ne mélange pas le sous-espace $M_S = \mathbb{E}(M)$ avec son complémentaire $(\text{Id} - \mathbb{E})(M)$. En utilisant la formule de Duhamel, on trouve que

$$x_t = \tilde{\alpha}_\lambda^t(x_0) - i\lambda \int_0^t dt_1 \left(\tilde{\alpha}_\lambda^{t-t_1} \mathbb{E}[V, \cdot] (\text{Id} - \mathbb{E}) \alpha_\lambda^{t_1} \right)(x_0),$$

ainsi que

$$\begin{aligned} ((\text{Id} - \mathbb{E})\alpha_\lambda^{t_1})(x_0) &= ((\text{Id} - \mathbb{E})\tilde{\alpha}_\lambda^{t_1})(x_0) - i\lambda \int_0^{t_1} dt_2 \left(\tilde{\alpha}_\lambda^{t_1-t_2} (\text{Id} - \mathbb{E})[V, \cdot] \mathbb{E}\alpha_\lambda^{t_2} \right)(x_0) \\ &= -i\lambda \int_0^{t_1} dt_2 \left(\tilde{\alpha}_\lambda^{t_1-t_2} (\text{Id} - \mathbb{E})[V, \cdot] \mathbb{E} \right)(x_{t_2}). \end{aligned}$$

En mettant ces deux équations ensemble et puis en dérivant, on obtient l'équation maîtresse généralisée (en version adjointe) de Nakajima, Prigogine, Résibois et Zwanzig :

$$\frac{d}{dt} x_t = \tilde{\delta}_\lambda(x_t) - \lambda^2 \int_0^t ds K_\lambda^{t-s}(x_s), \quad (5.3)$$

où le noyau intégral $\{K_\lambda^t\}$ est donné par

$$K_\lambda^t = \int_0^t ds \mathbb{E}[V, \cdot] (\text{Id} - \mathbb{E}) \tilde{\alpha}_\lambda^s (\text{Id} - \mathbb{E}) [V, \cdot] \mathbb{E}.$$

Il s'agit d'une équation intégro-différentielle, donc elle ne décrit pas un processus de Markov quantique.

5.1.2 Sur la structure du terme d'interaction

En identifiant une partie de l'évolution temporelle de $\mathcal{S} + \mathcal{R}$ comme étant la partie *libre*, il est sous-entendu que la perturbation V ne devrait pas contenir des termes qui ne soient pas vraiment d'interaction, au sens qu'ils modifient la dynamique de \mathcal{S} et \mathcal{R} de façon isolée, sans créer une véritable interdépendance. Par exemple, un terme qui appartient à $M_{\mathcal{S}}$ modifiera la dynamique de \mathcal{S} sans toucher \mathcal{R} . Mais, comment définir cette notion ? Pour la part du petit système, c'est assez simple grâce à l'espérance conditionnelle : il suffit de supposer que $\mathbb{E}(V) = 0$, hypothèse qui figure souvent dans la littérature. Quant au réservoir, on n'a pas de condition analogue car le projecteur $\text{Id} - \mathbb{E}$ n'est pas une espérance conditionnelle et son image n'est pas $M_{\mathcal{R}}$. La situation est essentiellement asymétrique.

Supposons que $\mathbb{E}(V) = 0$. Alors, $\mathbb{E}[V, \cdot] \mathbb{E} = 0$ et l'équation maîtresse généralisée (5.3) prends la forme

$$\frac{d}{dt} x_t = \delta_0(x_t) + \lambda^2 \int_0^t ds K_{\lambda}^{t-s}(x_s).$$

Notons, en particulier, que les premières corrections à l'évolution libre de \mathcal{S} , d'ordre λ^2 , sont dues à une propagation d'effets type

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\lambda i[V, \cdot]} \mathcal{R} \xrightarrow{\lambda i[V, \cdot]} \mathcal{S}.$$

Néanmoins, le développement de $\{K_{\lambda}^t\}$ en série de puissances contient, en général, des termes d'ordre *impair* en λ ; intuitivement, ces termes là doivent provenir d'une propagation comme, par exemple,

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\lambda i[V, \cdot]} \mathcal{R} \xrightarrow{\lambda i[V, \cdot]} \mathcal{R} \xrightarrow{\lambda i[V, \cdot]} \mathcal{S},$$

s'il s'agit d'un terme d'ordre 3. On prendra comme définition opérationnelle de *perturbation d'interaction pure* au fait de ne pas donner lieu à ce genre de termes. Mais il n'apparaît pas clairement comment assurer cette propriété, mise à part la condition

$$(\text{Id} - \mathbb{E})[V, \cdot](\text{Id} - \mathbb{E}) = 0$$

qui n'a pas d'interprétation physique évidente et dont la vérification dans des modèles concrets n'est pas directe. Dans ce travail, on utilisera la solution décrite dans le paragraphe suivant. On note qu'il ne s'agit pas d'une décision capricieuse : elle aura des conséquences au moment d'étudier la relation entre les états asymptotiques d'un SIR et sa limite de couplage faible (voir la section 6.2), du fait que dans ce cas l'évolution restreinte sera une perturbation analytique en λ^2 de l'évolution libre.

Pour commencer, supposons que

$$V = pV(1 - p) + (1 - p)Vp, \quad (5.4)$$

où $p \in M_{\mathcal{R}} \subseteq M$ est un projecteur invariant par rapport à $\{\alpha_{\mathcal{R}}^t\}$. La signification dynamique de (5.4) est que l'interaction se produit seulement par des échanges

entre états de $p\mathcal{H}_R$ et $(1-p)\mathcal{H}_R$ reliés avec une perturbation locale du système de référence. Une interaction de ce type ne devrait pas produire des termes impairs dans le développement de x_t en puissances de λ . Pour vérifier que ceci est bien le cas on note, d'abord, les deux faits suivants.

Propriété 1. *Pour tout $x \in M$, on a que*

$$\mathbb{E}(x) = \mathbb{E}(pxp) + \mathbb{E}((1-p)x(1-p)).$$

Démonstration. Rappelons qu'on suppose que ω_R est un état d'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire, un produit d'états KMS. Admettons, par simplicité, que ω_R est β -KMS par rapport à $\{\alpha_R^t\}$, le cas général de plusieurs réservoirs à températures différentes étant une généralisation immédiate. Comme $p \in M_R$ est invariant pour $\{\alpha_R^t\}$, pour tout $x_S \in M_S$ et $x_R \in M_R$ on trouve que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(px_Sx_R) &= \omega_R(px_R)x_S = \omega_R(x_R\alpha_R^{i\beta}(p))x_S \\ &= \omega_R(x_Rp)x_S = \mathbb{E}(x_Sx_Rp). \end{aligned}$$

Le résultat énoncé en découle aisément. \square

Propriété 2. *Soient*

$$M_0 = pM(1-p) \oplus (1-p)Mp, \quad M_1 = pMp \oplus (1-p)M(1-p).$$

Par rapport à la décomposition $M = M_0 \oplus M_1$, l'opérateur $[V, \cdot] : M \rightarrow M$ est hors-diagonal. Autrement dit,

$$[V, \cdot](M_0) \subseteq M_1, \quad [V, \cdot](M_1) \subseteq M_0.$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul direct. \square

Ces deux propriétés impliquent que les termes impairs dans la série de Dyson

$$\mathbb{E}\alpha_\lambda^t(x_0) = \alpha_S^t(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \mathbb{E}\alpha_0^{t_1}[V, \cdot]\alpha_0^{t_2-t_1}[V, \cdot] \cdots [V, \cdot]\alpha_0^{t-t_n}(x_0)$$

s'annulent. Notons qu'elles impliquent aussi que $\mathbb{E}(V) = 0$. Les mêmes arguments s'appliquent quand V est une somme

$$V = \sum_{i=1}^n p_i V(1-p_i) + (1-p_i)Vp_i,$$

où les $p_i \in M_R \subseteq M$ sont des projecteurs invariants pour $\{\alpha_R^t\}$, deux-à-deux orthogonaux.

Remarque 5.3. Grâce à la construction GNS, on peut toujours supposer que $\omega_R(x) = \langle \Omega_R, x\Omega_R \rangle$, avec $\Omega_R \in \mathcal{H}$. On note que le projecteur $|\Omega_R\rangle\langle\Omega_R|$ n'appartient pas à M_R , et donc ne peut pas jouer le rôle de p dans (5.4).

Remarque 5.4. Le terme d'interaction utilisé par Attal et Joye dans [8] peut être mis sous la forme (5.4).

5.1.3 Production d'entropie

Soit M une algèbre de von Neumann dotée d'un groupe d'automorphismes $\{\alpha^t\}$ généré par δ . Quand on a une décomposition

$$\delta = \delta_0 + i[V, \cdot],$$

on peut définir une notion de production d'entropie due à la perturbation V . Elle est basée sur la notion d'entropie relative des états stationnaires de la dynamique complète par rapport à un état de référence libre.

Supposons qu'on a un état de référence naturel ω_0 pour l'évolution générée par δ_0 , dite *évolution libre*. Les états stationnaires hors équilibre associés à V et ω_0 sont les points d'accumulation, pour la topologie $*$ -faible, de suites généralisées à la forme

$$\langle \omega \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t ds \omega \circ \alpha^s, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où ω est un état initial normal par rapport à ω_0 . Soit ω_+ un tel état stationnaire, disons

$$\omega_+ = w^*\text{-lim} \frac{1}{t_i} \int_0^{t_i} ds \omega \circ \alpha^s, \quad i \in I$$

avec I un ensemble dirigé. On définit la production d'entropie de ω_+ par

$$s(\omega_+) = - \lim_{t_i} \frac{1}{t_i} \left\{ S(\omega \circ \alpha^{t_i}; \omega_0) - S(\omega; \omega_0) \right\},$$

où $S(\omega; \omega_0)$ est l'entropie relative d'Araki qui, au cas où ω et ω_0 sont des matrices densité, peut être calculée par

$$S(\omega; \omega_0) = - \text{Tr}(\omega(\log \omega - \log \omega_0)).$$

Quand ω_0 est un état modulaire pour $\{\alpha_0^t\}$ et $V \in \text{dom } \delta_0$, Jakšić et Pillet [33] ont démontré la *formule de production d'entropie*

$$S(\omega \circ \alpha^t; \omega_0) = S(\omega; \omega_0) - \int_0^t dt_1 \omega(\alpha^{t_1}(\sigma_V)), \quad \sigma_V = \delta_0(V), \quad (5.5)$$

et ainsi $s(\omega_+) = \omega_+(\sigma_V)$. L'opérateur σ_V reçoit le nom d'*observable de production d'entropie*. En développant ces idées on retrouve la théorie de réponse linéaire incluant, notamment, les relations de réciprocity d'Onsager et le théorème de fluctuation-dissipation de Kubo. Une introduction complète peut se trouver dans [5].

5.1.4 Limite de van Hove

L'étude des systèmes ouverts en partant des premiers principes, dans l'esprit qu'on a montré jusqu'ici, reçoit le nom d'*approche hamiltonienne*. Néanmoins, dans plusieurs situations pratiques cette approche n'est pas la meilleure, du

fait qu'il mène à des équations trop complexes et que, au moins dans certaines situations particulières, on s'attend à ce que des modèles markoviens effectifs soient adéquats. Quand on travaille directement avec un modèle de ce type on dit qu'on suit l'*approche markovienne*. Maintenant on montre, d'après Davies, que la dynamique effective du régime de couplage faible $\lambda \rightarrow 0$ est, après une certaine renormalisation, un semigroupe de contractions.

On commence avec quelques calculs formels. On suppose que $\mathbb{E}(V) = 0$. Comme $\lambda \ll 1$, on garde seulement le premier terme en λ dans l'équation (5.3), en obtenant

$$\frac{d}{dt}x_t = \delta_0(x_t) - \lambda^2 \int_0^t ds K_0^{t-s}(x_s),$$

où

$$K_0^t = \int_0^t ds \mathbb{E}[V, \cdot](\text{Id} - \mathbb{E})\alpha_0^s(\text{Id} - \mathbb{E})[V, \cdot]\mathbb{E}.$$

Ensuite, on voudrait négliger les termes de mémoire. Sur des arguments physiques, ceci devrait être adéquat quand le noyau K_0^t décroît suffisamment vite par rapport à l'échelle caractéristique de temps de x_t , et dans ce cas on s'attend à ce que l'*approximation de Born* soit bonne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_t &\approx \delta_0(x_t) - \lambda^2 \left(\int_0^\infty ds K_0^s \right)(x_t) \\ &=: \delta_0(x_t) - \lambda^2 K(x_t). \end{aligned}$$

La façon précise dont cette approximation doit être comprise implique deux subtilités. La situation est similaire à celle traitée dans la Section 4.3 : il faut travailler à l'échelle de temps $s = \lambda^2 t$, et puis passer au cadre d'interaction parce qu'à cette échelle la dynamique libre devient oscillatoire. Il se trouve, à la fin, que la "perturbation effective" n'est pas K , mais l'opérateur L dans le Théorème qui suit [27, Theorem 5.18], voir aussi [37].

Théorème 5.5. *On utilise toutes les notations introduites dans la Sous-section 5.1.1 et on fait l'hypothèse $\mathbb{E}(V) = 0$. Soit*

$$L_\lambda^s = \int_0^{s/\lambda^2} ds_1 \alpha_s^{-s_1} \mathbb{E}[V, \cdot](\text{Id} - \mathbb{E})\tilde{\alpha}_\lambda^{s_1}(\text{Id} - \mathbb{E})[V, \cdot]\mathbb{E}.$$

Supposons que, pour chaque $s_0 < \infty$, il existe une constante C telle que

$$\sup_{s \in [0, s_0]} \|L_\lambda^s\| \leq C.$$

Supposons, en plus, qu'il existe un opérateur $L \in B(M_S)$ tel que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|L_\lambda^s - L\| = 0$, de façon indépendante de $s < \infty$. Alors, pour tout $s_0 < \infty$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup_{s \in [0, s_0]} \left\| \mathbb{E}\alpha_\lambda^{s/\lambda^2} - e^{s(\delta_s - \lambda^2 L)/\lambda^2} \right\| = 0. \quad (5.6)$$

Remarque 5.6. Pour obtenir le générateur de la dynamique effective dans le régime $\lambda \rightarrow 0$ il suffit d'appliquer, ensuite, le Théorème 4.5. Il faut dire que les hypothèses sur L_λ^s n'ont pas une signification physique apparente, mais elles sont reliés à la décroissance des autocorrélations de V . Comme exemple, considérons le cas où le réservoir est un gaz idéal en équilibre et le couplage V est *linéaire*, c'est-à-dire de la forme $V = V_S V_R$, avec $V_S \in M_S$ et $V_R \in M_R$. Alors, la condition

$$|\omega_R(\alpha_R^t(V_R)V_R)| \leq C(1+t)^{-(1+\varepsilon)},$$

pour certain $\varepsilon > 0$ et tout $t \geq 0$, est suffisante pour obtenir la conclusion (5.6), voir [37]. On note que ce cas est particulièrement simple grâce au fait que là les auto-corrélations d'ordre supérieur sont toutes déterminées par la *fonction à deux points* $\omega_R(\alpha_R^t(V_R)V_R)$, voir [16, Section 5.2.3].

5.2 L'équation de Hudson-Parthasaraty

Dans cette section, on introduit très brièvement un modèle qui peut être vu comme cas particulier de système ouvert autonome, mais qu'il est avantageux de regarder d'un point de vue assez différent, comme étant une version non-commutative d'équation différentielle stochastique dont l'inconnue est le cocycle qui relie l'évolution libre avec l'évolution couplée—voir la Section 4.1. Dans ce formalisme, le réservoir est essentiellement un champ bosonique non-relativiste ; l'interaction est un couplage linéaire avec des opérateurs de création, annihilation et conservation ; et on trouve pour le cocycle mentionné l'équation de Hudson-Parthasaraty. Cette construction garde une relation assez proche avec les systèmes d'interactions répétées et, en fait, peut être retrouvé comme limite de temps continu, dans un régime *non-perturbatif*, d'un tel système [12]. Elle a aussi la vertu de donner une interprétation dynamique aux termes qui apparaissent dans le générateur de Lindblad d'un semigroupe markovien quantique. Le sujet est assez technique et on ne rentrera pas dans ses subtilités. On utilisera librement le langage des espaces de Fock (opérateurs de création et annihilation, états cohérents et seconde quantification).

On utilise la notation de la section précédente. L'espace \mathcal{H}_R sera l'espace de Fock bosonique $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+(L^2 \otimes \mathcal{K})$, où $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ et \mathcal{K} est un espace de Hilbert. Si, par exemple, $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^3)$, alors les vecteurs de \mathcal{F} peuvent être vus comme champs bosoniques scalaires définis sur l'espace-temps non-relativiste \mathbb{R}^4 . Ainsi, il est naturel de considérer sur \mathcal{F} l'évolution libre $\{U_R^t\}$ obtenue par seconde quantification à partir du groupe de translations

$$(\sigma^t f)(s) = f(s+t), \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}.$$

Cette évolution définit, comme d'habitude, le groupe d'automorphismes $\{\alpha_R^t\}$ de $M_R \cong B(\mathcal{F})$.

Dans l'ensemble des opérateurs non-bornés sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$, toute famille $\{X_t\}$ ne définit pas un processus stochastique admissible, à cause de la structure temporelle de $\mathcal{H}_R = \mathcal{F}$. Les processus qui la respectent sont dits *processus*

adaptés. Pour définir cette notion, prenons un instant de temps quelconque $t \in \mathbb{R}$. L'espace \mathcal{F} , ses éléments étant des histoires de vecteurs dans $\mathcal{F}_+(\mathcal{K})$, admet une décomposition comme produit tensoriel dont les facteurs peuvent s'interpréter comme représentant l'histoire jusqu'à t , et à partir de t . Plus précisément, soient

$$\mathcal{F}_{[t]} = \mathcal{F}_+(L^2(-\infty, t) \otimes \mathcal{K}), \quad \mathcal{F}_{[t]} = \mathcal{F}_+(L^2(t, \infty) \otimes \mathcal{K}).$$

On a l'isomorphisme $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}_{[t]} \otimes \mathcal{F}_{[t]}$, donnée pour des vecteurs cohérents $e^{\otimes f}$, $f \in L^2 \otimes \mathcal{K}$, par

$$e^{\otimes f} \cong e^{\otimes f|_{]-\infty, t]}} \otimes e^{\otimes f|_{]t, \infty[}}.$$

Plus généralement, si $\mathcal{F}_{[s,t]} = \mathcal{F}_+(L^2(s, t) \otimes \mathcal{K})$, alors $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}_{[s]} \otimes \mathcal{F}_{[s,t]} \otimes \mathcal{F}_{[t]}$. Notons aussi que les inclusions $L^2(s, t) \hookrightarrow L^2$ obtenues en prolongeant par zéro induisent, par exponentiation, des inclusions $\mathcal{F}_{[s]}, \mathcal{F}_{[s,t]}, \mathcal{F}_{[t]} \hookrightarrow \mathcal{F}$.

Definition 5.7. On dit qu'un processus $\{X(t)\}$ est adapté si, pour tout $\xi \in \mathcal{F}$, $f \in L^2 \otimes \mathcal{K}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

1. $X(t)(\xi \otimes e^{\otimes f|_{]-\infty, t]}}) \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{F}_{[t]}$,
2. $X(t)(\xi \otimes e^{\otimes f}) = \{X(t)(\xi \otimes e^{\otimes f|_{]-\infty, t]}})\} \otimes e^{\otimes f|_{]t, \infty[}}.$

Remarque 5.8. Cette définition n'est pas rigoureuse quand les opérateurs $\{X(t)\}$ ne sont pas bornés, mais ici on ne rentrera pas dans des problèmes de domaine.

Ensuite, on définit certains processus dits *élémentaires*. Rappelons qu'à chaque $f \in L^2 \otimes \mathcal{K}$ on associe les opérateurs de création et annihilation $a^\dagger(f), a(f)$ sur l'espace de Fock bosonique \mathcal{F} . Soit $\{\kappa_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ une base orthonormale ; en physique théorique il est habituel d'utiliser les expressions formelles

$$a_i(t) = a(\delta_t \otimes \kappa_i), \quad a_i^\dagger(t) = a^\dagger(\delta_t \otimes \kappa_i),$$

où δ_t est une delta de Dirac au point $t \in \mathbb{R}$. Ces objets peuvent être vus comme distributions à valeurs opérateurs non-bornés et, toujours formellement, on a

$$a(f) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} dt f_i(t) a_i(t), \quad f_i(t) = \langle \kappa_i, f(t) \rangle, \quad (5.7)$$

ainsi qu'une expression équivalente pour $a^\dagger(f)$. Alors, on définit les *processus de création, annihilation et conservation* par

$$A_i^\dagger(t) = \int_0^t ds a_i^\dagger(s), \quad A_i(t) = \int_0^t ds a_i(s), \quad \Lambda_{ij}(t) = \int_0^t ds a_i^\dagger(s) a_j(s).$$

respectivement. On les voit comme opérateurs sur \mathcal{H} , comme d'habitude, en les faisant agir sur la deuxième composante du produit tensoriel ; on obtient, ainsi, des processus adaptés. $A_i(t)$ et $A_i^\dagger(t)$ sont donnés rigoureusement par la définition formelle (5.7) ; quant à $\Lambda_{ij}(t)$, il peut être défini en termes de générateurs des groupes de transformations de jauge

$$e^{\otimes f} \mapsto e^{\otimes Uf},$$

où $f \in L^2 \otimes \mathcal{K}$, $e^{\otimes f} \in \mathcal{F}$ est un état cohérent et $U \in B(L^2 \otimes \mathcal{K})$ est un unitaire (on renvoie le lecteur à la littérature).

À la base du calcul stochastique quantique sont les *intégrales stochastiques* par rapport aux processus élémentaires.

Definition 5.9. Soit $\{\{L_j^i(t) : i, j \in \mathbb{N}\}\}$ une famille de processus adaptés. On dit qu'elle est *stochastiquement intégrable* si

$$\int_0^t ds \sum_{i \in \mathbb{N}} \left\| L_j^i(s)(\xi \otimes e^{\otimes f}) \right\|^2 (1 + \|f(s)\|^2) < \infty,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, $\xi \in \mathcal{H}_s$ et $f \in L^2 \otimes \mathcal{K}$.

À nouveau, cette définition peut s'appliquer telle qu'elle est seulement aux processus bornés. Quoi qu'il en soit, quand la famille $\{\{L_j^i(t) : i, j \in \mathbb{N}\}\}$ est stochastiquement intégrable il est possible de donner un sens à l'intégrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left\{ L_0^0(s) ds + \sum_{i \in \mathbb{N}} L_0^i(s) dA_i^\dagger(s) + \sum_{i \in \mathbb{N}} L_i^0(s) dA_i(s) + \sum_{i, j \in \mathbb{N}} L_j^i(s) d\Lambda_{ij}(s) \right\},$$

de façon telle que $\{X(t)\}$ soit, lui aussi, un processus adapté. Comme dans le cas classique, il y a certaines règles pratiques pour manipuler ces intégrales, dont notamment une table de Ito pour les produits de processus élémentaires. Ces règles permettent, par exemple, de dériver un produit de processus adaptés (formule quantique de Ito). On omettra tous ces développements; le lecteur intéressé peut consulter [7, 31, 13].

On est en mesure d'introduire l'équation de Hudson-Parthasaraty. Soient H , V_i et W_{ij} des opérateurs sur \mathcal{H}_s , qu'on supposera bornés pour simplifier l'exposé, tels que :

1. $H = H^*$,
2. $\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i^* V_i$ converge fortement,
3. $\sum_{k \in \mathbb{N}} W_{ki}^* W_{kj} = \sum_{k \in \mathbb{N}} W_{ik} W_{jk}^* = \delta_{ij}$, où les sommes convergent fortement.

Alors, soit $K = iH - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}} V_i^* V_i$. L'équation de Hudson-Parthasaraty est

$$dY(t) = Y(t) \left\{ K dt + \sum_{i \in \mathbb{N}} V_i dA_i^\dagger(t) - \sum_{i, j \in \mathbb{N}} V_i^* W_{ij} dA_j(t) + \sum_{i, j \in \mathbb{N}} (W_{ij} - \delta_{ij}) d\Lambda_{ij}(t) \right\}. \quad (5.8)$$

Ici on identifie, comme d'habitude, $B(\mathcal{H}_s) \cong B(\mathcal{H}_s) \otimes 1_R \subset B(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_R)$. Pour donner un sens précis à cette équation on intègre des deux côtés, en admettant que $\int_0^t dY(s) = Y(t) - Y(0)$. Évidemment, une solution doit être telle que les processus à droite soient stochastiquement intégrables.

Théorème 5.10. *Il existe un unique processus adapté $\{Y(t)\}$, avec $Y(0) = 1$, qui résout l'équation (5.8). En plus, chaque $Y(t)$ est unitaire et le processus est fortement continu en t .*

À ce moment, on note la ressemblance entre la formule de Duhamel (4.1) et l'équation de Hudson-Parthasaraty (5.8). En fait, l'analogie est complète parce que, formellement, les opérateurs $dA_i^\dagger(t) = a_i^\dagger(t)$ et $dA_i(t) = a_i(t)$ sont dans le cadre d'interaction par rapport à l'évolution libre $\{\alpha_R^t\}$:

$$a_i^\dagger(t) = \alpha_R^t(a_i^\dagger(0)), \quad a_i(t) = \alpha_R^t(a_i(0)).$$

Compte tenu de ce fait, le résultat suivant n'est pas très surprenant.

Proposition 5.11. *La solution $Y(t)$ de (5.8) est un cocycle par rapport à $\{\alpha_R^t\}$, c'est-à-dire que*

$$Y(s+t) = Y(s)\alpha_R^s(Y(t)) = Y(s)U_R^{-s}Y(t)U_R^s.$$

Ainsi, la famille $\{U^t\}$, avec $U^t = U_R^t Y(t)^*$, est un groupe fortement continu d'unitaires sur \mathcal{H} .

Ainsi, l'équation de Hudson-Parthasaraty, telle qu'on l'a écrite, décrit un système quantique dont l'évolution d'observables est donnée par le groupe d'automorphismes $\alpha^t(x) = U^{-t}xU^t$. Si le réservoir est dans l'état initial $\Omega = e^{\otimes 0}$, alors l'évolution restreinte aux observables du petit système est le semigroupe markovien quantique $T^t = \mathbb{E}\alpha^t$, où $\mathbb{E} = \text{Id}_{M_S} \otimes \langle \Omega, (\cdot)\Omega \rangle$. En termes de ses éléments de matrice, elle s'écrit

$$\langle \xi, T^t(x)\eta \rangle = \langle U^t(\xi \otimes \Omega), xU^t(\eta \otimes \Omega) \rangle.$$

Si $W_{ij} = \delta_{ij}$ dans (5.8), on trouve que le générateur de Lindblad de $\{T^t\}$ est

$$L(x) = i[H, x] + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}} ([V_i^*, x]V_i + V_i^*[x, V_i]),$$

ce qui montre que tout semigroupe markovien quantique généré par un lindbladien admet une dilatation. L'équation (5.8) donne, aussi, une interprétation physique possible aux opérateurs V_i dans le lindbladien.

Remarque 5.12. Si l'état initial du réservoir n'est pas Ω mais un autre vecteur cohérent $e^{\otimes f}$, les observables du petit système évoluent encore selon une équation maîtresse, dont le générateur dépend cette fois du temps. Dans des situations encore plus générales (matrices densité) l'évolution restreinte ne satisfait pas d'équation fermée.

Remarque 5.13. On a utilisé l'équation de Hudson-Parthasaraty pour décrire le cocycle $Y(t)$, mais les observables $x_t = U^{-t}x_0U^t \in B(\mathcal{H})$ satisfont aussi une équation du même genre, qui peut être obtenue en utilisant les règles du calcul stochastique quantique.

5.3 Systèmes d'interactions répétées

Les systèmes d'interactions répétées sont, comme on l'a mentionné dans l'introduction, des modèles simples mais flexibles, pour lesquels le flot d'énergie

caractéristique des états stationnaires hors équilibre est induit par l'interaction du petit système avec une chaîne d'éléments indépendants. Ils peuvent être vus comme version généralisée, mais en temps discret, de la théorie des bruits quantiques (voir la Section 6.3). On les introduira d'abord en postulant du départ la forme qui prends leur évolution, sans autre justification que l'intuition physique, et on laissera les aspects techniques d'une dérivation hamiltonienne de cette évolution pour la sous-section 5.3.2.

5.3.1 Le modèle

Le cas du MASER à un atome [50] est exemplaire et on l'utilise pour introduire la notation dans un cadre concret. Là, le petit système \mathcal{S} est un champ électromagnétique, décrit par une algèbre M_S et son groupe d'automorphismes $\{\alpha^t\}$, avec générateur δ_S . On suppose que \mathcal{S} est confiné dans une boîte complètement isolée de l'environnement, sauf par deux petits trous à travers desquels certains atomes du type \mathcal{E} passent un par un, en restant à l'intérieur pour une période de temps fixe $\tau > 0$. En général, chaque sous-système \mathcal{E} reçoit le nom d'*élément de chaîne*; génériquement, ils sont décrits par une algèbre M_E avec son évolution libre $\{\alpha_E^t\}$, générée par δ_E . Tous les atomes \mathcal{E} sont préparés dans le même état ω_E , et l'interaction entre champ et atome prend toujours la même forme : on suppose qu'elle est donnée par un couplage $V \in M \cong M_S \otimes M_E$. On prend le point de vue que M_S et M_E sont des sous-algèbres de M qui commutent entre elles, telles que $M = (M_S \cup M_E)''$. Comme dans la section précédente, on définit l'évolution libre du système $\mathcal{S} + \mathcal{E}$ par

$$\alpha_0^t = \alpha_S^t \alpha_E^t.$$

On désignera par $\{\alpha_\lambda^t\}$ le groupe d'automorphismes de M générée par

$$\delta_\lambda = \delta_S + \delta_E + i\lambda[V, \cdot].$$

Notons que les observables du système complet ne sont pas celles de M ; il serait plus rigoureux de construire l'algèbre d'observables de la chaîne entière et décrire l'interaction en termes d'un opérateur $V = V(t)$ qui serait, en fait, constant par morceaux. Du point de vue de la notation, ceci est compliqué à rédiger et on le fera dans la section suivante; physiquement, par contre, il est évident qu'il n'est pas nécessaire de traiter tous les éléments de la chaîne simultanément : il suffit de faire interagir le système avec un élément de chaîne générique pendant un temps τ , et puis de recommencer.

Donc, on considère les observables de M_E comme celles de l'élément de chaîne avec lequel le petit système est en train d'interagir. On suppose que le système complet démarre en $t = 0$, moment où \mathcal{S} commence à interagir avec la première copie de \mathcal{E} . L'évolution temporelle, jusqu'au moment où \mathcal{S} commence à interagir avec la copie suivante, est donnée par α_λ^t . Pour avoir plus de clarté dans la dérivation de la formule pour l'évolution restreinte, il est utile de supposer que les éléments de la chaîne sont, en fait, tous dans des

états différents, disons ω_E^k pour le k -ème élément. En définissant l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}_k : x_S x_E \in M \mapsto \omega_E^k(x_E) x_S \in M_S,$$

l'évolution restreinte à partir de $t = 0$ et jusqu'à $t \in [0, \tau]$ est donnée par

$$T^{0,t}(\lambda, \tau) = \mathbb{E}_1 \alpha_\lambda^t.$$

De même, l'évolution restreinte à partir de $t = \tau$ et jusqu'à $t \in [\tau, 2\tau]$ est donnée par $T^{\tau,t-\tau}(\lambda, \tau) = \mathbb{E}_2 \alpha_\lambda^{t-\tau}$, et pour l'obtenir en partant de $t = 0$ jusqu'à $t \in [\tau, 2\tau]$, il faut multiplier le premier morceaux à droite par le deuxième morceaux :

$$T^{0,t}(\lambda, \tau) = (\mathbb{E}_1 \alpha_\lambda^\tau) (\mathbb{E}_2 \alpha_\lambda^{t-\tau}).$$

En général, si $t = n\tau + t_1$ avec $t_1 < \tau$, alors $T^{0,t}(\lambda, \tau) = (\mathbb{E}_1 \alpha_\lambda^\tau \cdots \mathbb{E}_n \alpha_\lambda^\tau) \mathbb{E}_{n+1} \alpha_\lambda^{t_1}$ et si $\omega_E^k = \omega_E$ pour tout k , on trouve finalement

$$T^{0,t}(\lambda, \tau) = T(\lambda, \tau)^n \mathbb{E} \alpha_\lambda^{t_1}, \quad (5.9)$$

où, avec un petit abus de notation, $T(\lambda, \tau) = \mathbb{E} \alpha_\lambda^\tau$ et $\mathbb{E} = \mathbb{E}_k$. Comme on va considérer toujours l'évolution restreinte à partir de $t = 0$, on écrira souvent $T^t(\lambda, \tau)$ au lieu de $T^{0,t}(\lambda, \tau)$; aussi, parfois on omettra la dépendance en λ et τ en écrivant tout simplement T^t .

Notons le caractère essentiellement markovien de l'évolution donnée par (5.9). Dans la sous-section suivante on justifiera, avec un modèle hamiltonien non-autonome, cette évolution temporelle obtenue de façon aprioristique.

5.3.2 Version hamiltonienne

Le premier pas pour exhiber la dynamique (5.9) comme solution d'un modèle hamiltonien est de construire l'algèbre d'observables de la chaîne. Là, il s'agit de donner sens à un produit tensoriel infini d'algèbres de von Neumann.

L'algèbre de la chaîne

Rappelons que le produit tensoriel entre deux algèbres de von Neumann est bien défini comme algèbre de von Neumann, et est indépendant de la représentation choisie. Ceci permet de considérer simultanément n'importe quel nombre fini d'éléments de chaîne, mais pas la chaîne toute entière. La première approche pour résoudre ce problème est de considérer le système inductif

$$M_E \hookrightarrow M_E \otimes M_E \hookrightarrow M_E \otimes M_E \otimes M_E \hookrightarrow \cdots,$$

où l'inclusion $(M_E)^{\otimes n} \hookrightarrow (M_E)^{\otimes (n+1)}$ est donnée, pour des tenseurs simples, par

$$x_E^1 \otimes \cdots \otimes x_E^n \mapsto (x_E^1 \otimes \cdots \otimes x_E^n) \otimes 1.$$

Alors, la limite inductive $\varinjlim (M_E)^{\otimes n}$ est une algèbre, et en plus elle est naturellement dotée d'une norme parce que ces inclusions sont, en fait, des isométries. On peut vérifier qu'on obtient une C*-norme, c'est-à-dire que

$$\|x_R^* x_R\| = \|x_R\|^2, \quad \forall x_R \in \varinjlim (M_E)^{\otimes n}.$$

Ainsi, par complétion, on peut définir la C*-algèbre M_R . Le problème de cette approche est qu'il n'est pas clair que M_R soit une algèbre de von Neumann.

Remarque 5.14. En ce moment, il paraît nécessaire de justifier l'insistance à travailler avec des algèbres de von Neumann au lieu de C*-algèbres. Concernant le petit système, ceci s'explique par le fait que le couplage avec un système externe, suivi de l'application d'une espérance conditionnelle pour obtenir une évolution restreinte, forcent à considérer la complétion ultrafaible de l'algèbre d'observables.¹ Quant à l'algèbre du réservoir, elle pourrait bien être une C*-algèbre, mais si son état de référence ne donne lieu, par construction GNS, à un état normal sur l'algèbre de von Neumann enveloppante correspondante, alors l'espérance conditionnelle associée ne serait pas normale, avec la conséquence que l'évolution restreinte obtenue ne serait pas un semigroupe markovien quantique, telle qu'on les a définie dans le chapitre 3.

Le choix évident est la représentation GNS associée à ω_E , qui est fidèle et séparante car ω_E est un état KMS sur chaque sous-réservoir (rappelons que \mathcal{R} peut être composé de plusieurs sous-réservoirs, chacun dans un état KMS à sa propre température). Dorénavant, on supposera que $M_E \hookrightarrow B(\mathcal{H}_E)$ est déjà la représentation KMS associée à ω_E , c'est-à-dire qu'il existe un vecteur cyclique et séparant $\Omega_E \in \mathcal{H}_E$ tel que $\omega_E(x) = \langle \Omega_E, x \Omega_E \rangle$. Ceci nous permet de construire l'espace de Hilbert \mathcal{H}_C sur lequel M_C va agir, en prenant la limite inductive du système d'espaces de Hilbert

$$\mathcal{H}_E \hookrightarrow \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_E \hookrightarrow \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_E \otimes \mathcal{H}_E \hookrightarrow \dots,$$

où les inclusions sont données par

$$\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \mapsto \xi_1 \otimes (\dots \otimes \xi_n) \otimes \Omega_E.$$

Les produits scalaires de chaque terme $\mathcal{H}^{\otimes n}$ passent à la limite, et par complétion on obtient \mathcal{H}_R . Les produits infinis

$$\bigotimes_{k \in \mathbb{N}} \xi_k = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3 \otimes \dots,$$

où $\xi_k = \Omega_E$ sauf pour un nombre fini d'indices k , forment, par définition, un ensemble total dans \mathcal{H}_R qu'on désignera par \mathcal{D}_R . On définit, aussi, $\Omega_R = \Omega_E \otimes \Omega_E \otimes \Omega_E \dots \in \mathcal{H}_R$.

1. Tout comme le fait que la dynamique dans le cadre de Schrödinger ne peut s'exprimer qu'en termes de matrices densité.

Dans $B(\mathcal{H}_R)$ il y a une copie de M_E pour chaque $n \in \mathbb{N}$; plus précisément, on a des inclusions $j_n : M_E \hookrightarrow B(\mathcal{H}_R)$ données par

$$j_n(x_E) \bigotimes_{k \in \mathbb{N}} \xi_k = \left(\bigotimes_{k < n} \xi_k \right) \otimes x_E \xi_n \otimes \left(\bigotimes_{k > n} \xi_k \right). \quad (5.10)$$

L'algèbre d'observables de la chaîne est, donc, le double commutant

$$M_R = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} j_n(M_E) \right)'' \subseteq B(\mathcal{H}_R).$$

Elle est naturellement équipée de l'état de référence $\omega_R(x) = \langle \Omega_R, x \Omega_R \rangle$. Notons qu'un produit formel infini

$$\bigotimes_{k \in \mathbb{N}} x_k = \prod_{k \in \mathbb{N}} j_k(x_k), \quad x_k \in M_E,$$

définit bien un opérateur $\mathcal{D}_R \subseteq \mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}_R$ quand $x_k \Omega_E = \Omega_E$ sauf pour un nombre fini d'indices k .

L'évolution libre

Maintenant, on doit définir le produit formel $\alpha_R^t = \alpha_E^t \otimes \alpha_E^t \otimes \cdots$. Pour ce faire, on profite encore de la représentation $M_R \subseteq B(\mathcal{H}_R)$. Rappelons que, du fait que la représentation $M_E \subseteq B(\mathcal{H}_E)$ est standard, il existe un unique opérateur autoadjoint $L_E : \text{dom } L_E \subseteq \mathcal{H}_E \rightarrow \mathcal{H}_E$ tel que

$$\alpha_E^t(x_E) = e^{itL_E} x_E e^{-itL_E} \quad \text{et} \quad L_E \Omega_E = 0.$$

Ceci nous permet de considérer le groupe d'unitaires

$$e^{-itL_R} : \bigotimes_{k \in \mathbb{N}} \xi_k \mapsto \bigotimes_{k \in \mathbb{N}} e^{-itL_E} \xi_k,$$

qui est bien défini parce que e^{-itL_E} est unitaire et $e^{-itL_E} \Omega_E = \Omega_E$. À son tour, ceci nous donne le groupe d'automorphismes de $B(\mathcal{H}_R)$

$$\alpha_R^t(x_R) = e^{itL_R} x_R e^{-itL_R}.$$

Proposition 5.15. $\{\alpha_R^t\}$ donne, par restriction, un groupe *-faiblement continu d'automorphismes de M_R .

Démonstration. D'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixe, α_R^t laisse M_R invariante parce qu'il est ultrafaiblement continu et laisse invariant chaque $j_n(M_E)$. Quant à la continuité *-faible, pour tout $x_R \in M_R$ et tout paire de suites $\xi_k, \eta_k \in \mathcal{H}_R$ telles que $\sum_{k \in \mathbb{N}} (\|\xi_k\|^2 + \|\eta_k\|^2) < \infty$, on doit démontrer que

$$t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \xi_k, e^{itL_R} x_R e^{-itL_R} \eta_k \rangle$$

est continue. Chaque terme dans la somme est continu parce que $\{e^{-itL_R}\}$ est un groupe fortement continu, et donc il suffit de voir que la série est convergente, uniformément en t . Mais ceci est bien le cas, car

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \geq N} \langle e^{-itL_R} \xi_k, x_R e^{-itL_R} \eta_k \rangle \right| &\leq \sum_{k \geq N} \|x_R\| \|\xi_k\| \|\eta_k\| \\ &\leq \frac{\|x_R\|}{2} \sum_{k \geq N} (\|\xi_k\|^2 + \|\eta_k\|^2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Alors, on définit $M_{SR} = M_S \otimes M_R$ et le groupe $*$ -faiblement continu $\alpha_{SR,0}^t = \alpha_S^t \otimes \alpha_R^t$, dont le générateur est

$$\delta_{SR,0} = \delta_S \otimes \text{Id}_{M_R} + \text{Id}_{M_S} \otimes i[L_R, \cdot] \quad (5.11)$$

Malheureusement, on doit recharger la notation avec le sous-indexe SR , car on aura besoin des définitions analogues pour le système avec une chaîne finie, dont l'algèbre d'observables est $M_S \otimes M_E^{\otimes n}$.

L'évolution couplée restreinte

Pour perturber le générateur $\delta_{SR,0}$ de l'évolution libre, il faut définir un opérateur $V(t) \in M_{SR}$ qui agisse sur la copie correcte de $M_E \hookrightarrow M_R$, en utilisant les inclusions $j_n : M_E \hookrightarrow M_R$. Soit, d'abord, $k = k(t)$ l'unique entier qui satisfait

$$t \in [k(t)\tau, (k(t) + 1)\tau[.$$

On définit

$$V(t) = (\text{Id}_{M_S} \otimes j_{k(t)})(V) \in M_{SR}.$$

Alors, l'évolution couplée des observables dans M_{SR} est générée par la dérivation dépendante du temps

$$\delta_{SR,\lambda} = \delta_{SR,0} + i\lambda[V(t), \cdot] : \text{dom } \delta_{SR,0} \subseteq M_{SR} \rightarrow M_{SR}.$$

Le problème qui définit cette évolution ne peut pas se poser en termes d'une équation différentielle car $V(t)$ n'est pas continu ; ainsi, on le formule de façon intégrale : les observables satisfont l'équation

$$x_t - x_0 = \int_0^t ds \delta_{SR,\lambda}(x_s).$$

La solution de cette équation est donnée par la famille à deux paramètres d'automorphismes obtenue par composition de l'évolution dans chaque intervalle de la forme $[k\tau, (k+1)\tau[$. Plus précisément, étant donnés $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, soient $n, m \in \mathbb{N}$ les uniques entiers tels que $t_1 \in [(n-1)\tau, n\tau[$ et $t_2 \in [(n+m)\tau, (n+m+1)\tau[$. On définit

$$\begin{aligned} \alpha_{SR,\lambda}^{t_1, t_2} &= e^{(n\tau - t_1)(\delta_{SR,0} + i\lambda[V_{n\tau}, \cdot])} e^{\tau(\delta_{SR,0} + i\lambda[V_{n+1\tau}, \cdot])} \dots \\ &\dots e^{\tau(\delta_{SR,0} + i\lambda[V_{n+m-1\tau}, \cdot])} e^{(t_2 - (n+m)\tau)(\delta_{SR,0} + i\lambda[V_{n+m\tau}, \cdot])}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

où $V_k = (\text{Id}_{M_S} \otimes j_{k(t)})(V)$ et chaque $\{e^{t(\delta_{SR} + i\lambda[V_k, \cdot])}\}$ est le groupe *-faiblement continu d'automorphismes de M_{SR} donné par le Théorème 4.1. Notons que pour $t_1 \geq 0$ et $x \in M_{SR}$ fixes, la fonction

$$t_2 \mapsto \alpha_{SR, \lambda}^{t_1, t_2}(x)$$

est *-faiblement continue, et du même en échangeant les rôles de t_1 et t_2 .

On est, finalement, en position de définir l'évolution restreinte du petit système : elle est donnée par la famille *-faiblement continue de transformations stochastiques

$$T^{0,t}(\lambda, \tau) = \mathbb{E}_{SR} \alpha_{SR, \lambda}^{0,t} \quad (5.13)$$

où $\mathbb{E}_{SR} = \text{Id}_{M_S} \otimes \omega_R$.

Remarque 5.16. Soit $p = 1 \otimes |\Omega_R\rangle \langle \Omega_R| \in B(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$. On peut identifier $\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_R$ avec le projecteur $x \mapsto pxp$, pourvu qu'on identifie $M_S \otimes |\Omega_R\rangle \langle \Omega_R|$ avec M_S .

Caractère markovien

À ce point, on a deux définitions de $T^{0,t}(\lambda, \tau)$, données par les équations (5.9) et (5.13). Le fait qu'elles coïncident est une justification de la définition aprioristique (5.9) qui, par contre, est intuitivement correcte et a l'avantage d'être beaucoup plus simple que (5.13).

Proposition 5.17. *L'opérateur $(\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_R) \alpha_{SR, \lambda}^{0, k\tau}(\cdot \otimes 1_R)$ coïncide avec $T(\lambda, \tau)^k$, où*

$$T(\lambda, \tau) = (\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E) \alpha_{SE, \lambda}^{\tau}(\cdot \otimes 1_E).$$

Ici, $\{\alpha_{SE, \lambda}^t\}$ est le groupe d'automorphismes de $M_S \otimes M_E$ généré par $\delta_S + \delta_E + i\lambda[V, \cdot]$.

Démonstration. Cette preuve est, au moins du point de vue physique, une trivialité difficile à écrire rigoureusement. On fera de notre mieux pour mettre en évidence la structure sans se perdre dans les détails.

Il est utile de regarder seulement les premiers n éléments de chaîne, qui sont clairement les seuls à jouer un rôle si $t_1 \leq t_2 \leq n\tau$. On définit

$$j^{(n)} = j_1 \otimes \cdots \otimes j_n : M_E^{\otimes n} \rightarrow M_R,$$

$$\mathbb{E}_n : \bigotimes_{k \in \mathbb{N}} x_k \in M_R \mapsto \prod_{k > n} \omega_E(x_k) \bigotimes_{k \leq n} x_k \in M_E^{\otimes n},$$

et on note que, pour $t_1 \leq t_2 \leq n\tau$, le système complet se décompose en deux parties

$$M_S \otimes M_R = (M_S \otimes M_E^{\otimes n}) \otimes M_R$$

qui évoluent de façon indépendante :

$$\alpha_{SR, \lambda}^{t_1, t_2} = \alpha_{SE, \lambda}^{t_1, t_2} \otimes \alpha_R^{t_2 - t_1},$$

où $\alpha_{SE^n, \lambda}^{t_1, t_2}$ est générée par

$$\delta_S \otimes \text{Id}_{M_E^{\otimes n}} + \text{Id}_{M_S} \otimes (\delta_E \otimes \text{Id}_{M_E^{\otimes n}} + \cdots + \text{Id}_{M_E^{\otimes n}} \otimes \delta_E) + i[\mathbb{E}_n(V(t)), \cdot].$$

On a, ainsi, le diagramme commutatif suivant, qui n'est qu'une expression du fait que $\alpha_R^t(1) = 1$ et $\omega_R(1) = 1$:

$$\begin{array}{ccc} M_S \otimes M_R & \xrightarrow{\alpha_{SR, \lambda}^{t_1, t_2}} & M_S \otimes M_R \\ \text{Id}_{M_S} \otimes j^{(n)} \uparrow & & \downarrow \text{Id}_{M_S} \otimes \mathbb{E}_n \\ M_S \otimes M_E^{\otimes n} & \xrightarrow{\alpha_{SE^n, \lambda}^{t_1, t_2}} & M_S \otimes M_E^{\otimes n}. \end{array}$$

Ce diagramme dit, en particulier, que

$$\begin{aligned} (\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_R) \alpha_{SR, \lambda}^{0, n\tau}(x_S \otimes 1_R) &= (\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E^{\otimes n}) \alpha_{SE^n, \lambda}^{0, n\tau}(x_S \otimes 1_E^{\otimes n}) \\ &= (\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E^{\otimes n}) \alpha_{SE^n, \lambda}^{0, \tau} \cdots \alpha_{SE^n, \lambda}^{(n-1)\tau, n\tau}(x_S \otimes 1_E^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Maintenant, on note que

$$(\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E^{\otimes n}) \alpha_{SE^n, \lambda}^{0, \tau} = (\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E) \alpha_{SE, \lambda}^{0, \tau} (\text{Id}_{M_S \otimes M_E} \otimes \omega_E^{\otimes(n-1)}),$$

car $\alpha_{SE^n, \lambda}^{0, \tau} = \alpha_{SE, \lambda}^{\tau} \otimes (\alpha_E^{\tau})^{\otimes(n-1)}$ et ω_E est α_E^t -invariant, i.e. $\omega_E \alpha_E^t = \omega_E$. De même,

$$(\text{Id}_{M_S \otimes M_E} \otimes \omega_E^{\otimes(n-1)}) \alpha_{SE^n, \lambda}^{\tau, 2\tau} = (\text{Id}_{M_S \otimes M_E} \otimes \omega_E) \alpha_{SE^2, \lambda}^{\tau, 2\tau} (\text{Id}_{M_S \otimes M_E^{\otimes 2}} \otimes \omega_E^{\otimes(n-2)}),$$

et inductivement on trouve que

$$(\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_R) \alpha_{SR, \lambda}^{0, n\tau}(x_S \otimes 1_R) = \left\{ \prod_{k=1}^n (\text{Id}_{M_S \otimes M_E^{\otimes(k-1)}} \otimes \omega_E) \alpha_{SE^k, \lambda}^{(k-1)\tau, k\tau} \right\} (x_S \otimes 1_E^{\otimes n}). \quad (5.14)$$

Ensuite on évalue l'expression (5.14). Considérons d'abord

$$(\text{Id}_{M_S \otimes M_E^{\otimes(n-1)}} \otimes \omega_E) \alpha_{SE^n, \lambda}^{(n-1)\tau, n\tau}(x_S \otimes 1_E^{\otimes n}).$$

Notons que $\alpha_{SE^n, \lambda}^{(n-1)\tau, n\tau}$ est, à l'ordre des facteurs dans le produit tensoriel $M_E^{\otimes n}$ près, isomorphe à $\alpha_{SE, \lambda}^{\tau} \otimes (\alpha_E^{\tau})^{\otimes(n-1)}$. Plus précisément, si $\Sigma_{1, n} : M_E^{\otimes n} \rightarrow M_E^{\otimes n}$ est l'automorphisme qui échange les première et dernière copies de M_E , alors

$$\alpha_{SE^n, \lambda}^{(n-1)\tau, n\tau} = (\text{Id}_{M_S} \otimes \Sigma_{1, n}) (\alpha_{SE, \lambda}^{\tau} \otimes (\alpha_E^{\tau})^{\otimes(n-1)}) (\text{Id}_{M_S} \otimes \Sigma_{1, n}).$$

Ainsi, on trouve que

$$\begin{aligned}
& (\text{Id}_{M_S \otimes M_E^{\otimes(n-1)}} \otimes \omega_E) \alpha_{SE, \lambda}^{(n-1)\tau, n\tau} (x_S \otimes 1_E^{\otimes n}) \\
&= (\text{Id}_{M_S \otimes M_E^{\otimes(n-1)}} \otimes \omega_E) (\text{Id}_{M_S} \otimes \Sigma_{1, n}) (\alpha_{SE, \lambda}^\tau \otimes (\alpha_E^\tau)^{\otimes(n-1)}) (x_S \otimes 1_E^{\otimes n}) \\
&= (\text{Id}_{M_S \otimes M_E^{\otimes(n-1)}} \otimes \omega_E) (\text{Id}_{M_S} \otimes \Sigma_{1, n}) (\alpha_{SE, \lambda}^\tau (x_S \otimes 1_E) \otimes 1_E^{\otimes(n-1)}) \\
&= (\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E \otimes \text{Id}_{M_E^{\otimes(n-1)}}) (\alpha_{SE, \lambda}^\tau (x_S \otimes 1_E) \otimes 1_E^{\otimes(n-1)}) \\
&= \left((\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E) \alpha_{SE, \lambda}^\tau (x_S \otimes 1_E) \right) \otimes 1_E^{\otimes(n-1)} =: x'_S \otimes 1_E^{\otimes(n-1)}.
\end{aligned}$$

De même, l'application de $(\text{Id}_{M_S \otimes M_E^{\otimes(n-2)}} \otimes \omega_E) \alpha_{SE, \lambda}^{(n-2)\tau, (n-1)\tau}$ à $x'_S \otimes 1_E^{\otimes(n-1)}$ donne

$$\left((\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E) \alpha_{SE, \lambda}^\tau (x'_S \otimes 1_E) \right) \otimes 1_E^{\otimes(n-2)} = \left((\text{Id}_{M_S} \otimes \omega_E) \alpha_{SE, \lambda}^\tau (\cdot \otimes 1_E) \right)^2 (x_S) \otimes 1_E^{\otimes(n-2)}.$$

Inductivement, on finit avec le résultat énoncé. \square

Remarque 5.18. Cette preuve est purement algébrique et reste valable en toute généralité : la dimension des algèbres concernées ne joue aucun rôle, de même que la façon dont on couple S et E (le groupe $\{\alpha_{SE, \lambda}^t\}$ pourrait être donné par une perturbation non-bornée du générateur de la dynamique libre, par exemple).

Chapitre 6

Approche perturbative des systèmes d'interactions répétées

Ayant introduit les SIRs dans le chapitre précédent, on entreprends leur étude asymptotique. On identifiera, d'après Attal et Joye [8], deux régimes de couplage faible et on démontrera, sous certaines hypothèses, l'existence d'une limite de van Hove pour chacun de ces régimes. Ensuite, dans le cas de petit système de dimension finie, on reliera, en utilisant les résultats du Chapitre 4, l'état asymptotique de la limite de van Hove avec celui de la dynamique originale. Et, finalement, on fera quelques remarques à propos de ces résultats en se servant d'une famille d'exemples qui généralise le cas étudié dans [8].

Pour faciliter la lecture on rappelle les notations introduites dans la section précédente : les observables conjointes du petit système \mathcal{S} et un élément de chaîne abstrait \mathcal{E} forment l'algèbre de von Neumann M , qui est équipée d'une dynamique libre $\{\alpha_0^t\}$. On distingue les sous-algèbres $M_S, M_E \subseteq M$ d'observables de \mathcal{S} et \mathcal{E} , respectivement, qui commutent mutuellement et génèrent M . On suppose que la dynamique libre se factorise : $\alpha_0^t = \alpha_S^t \alpha_E^t$, où $\{\alpha_i^t\}$ est un groupe d'automorphismes de M_i généré par δ_i , $i \in \{S, E\}$. On désigne l'état de référence de \mathcal{E} par ω_E ; on suppose qu'il est un produit d'états KMS et on définit l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E} : x_S x_E \in M \mapsto \omega_S(x_E) x_S \in M_S, \quad x_S \in M_S, x_E \in M_E.$$

Finalement, on considère la perturbation $\{\alpha_\lambda^t\}$ de la dynamique libre, générée par

$$\delta_\lambda = \delta_S + \delta_E + i\lambda[V, \cdot], \quad V \in M.$$

Si chaque élément de chaîne interagit avec \mathcal{S} pendant un temps $\tau > 0$ fixe, la dynamique restreinte est la famille de transformations stochastiques $\{T^t\}$

donnée par

$$T^t = T^t(\lambda, \tau) = (\mathbb{E}\alpha_\lambda^\tau)^n \mathbb{E}\alpha_\lambda^{t_1},$$

où $t = n\tau + t_1$, avec $t_1 \in [0, \tau[$. Sur le terme d'interaction V on fait l'hypothèse cruciale suivante :

(H1) Il existe des projecteurs $p_1, \dots, p_n \in M_E$, invariants par $\{\alpha_E^t\}$, tels que

$$V = \sum_{i=1}^n p_i V(1 - p_i) + (1 - p_i) V p_i.$$

L'opérateur $T(\lambda, \tau)$ a les propriétés suivantes :

1. Pour τ fixe, la série de Dyson montre qu'il est analytique comme fonction de λ .
2. Grâce à l'Hypothèse 1 elle est, en plus, une fonction *paire* de λ —voir la sous-section 5.1.2.
3. Étant une composition de canaux quantiques, il est un canal quantique.

6.1 Régimes d'interaction faible

Schématiquement, notre problème est l'étude asymptotique d'un opérateur de la forme

$$(P e^{\tau(A+\lambda B)} P)^n \approx \left[(1 + \tau O(\lambda^2 \tau)) e^{\tau A} \right]^n, \quad (6.1)$$

où P est un projecteur, A le générateur d'un groupe d'isométries, B une perturbation et $n \in \mathbb{N}$. Notons donc que le paramètre qui détermine la nature perturbative ou non du régime est le produit $\varepsilon = \lambda^2 \tau$; ainsi, on identifie trois régimes perturbatifs différents :

1. τ reste constant, cas auquel λ doit tendre vers zéro.
2. $\tau \rightarrow 0$. Maintenant, λ peut converger vers zéro, rester borné où même diverger—pourvu que $\lambda^2 \tau \rightarrow 0$.
3. $\tau \rightarrow \infty$ et $\lambda^2 \tau \rightarrow 0$.

On traitera les deux premiers cas. Le troisième, qui est a priori hors de la portée de notre méthode, semble osciller avec τ (le cas spin-spin, qu'on traitera dans la Sous-section 6.3.2, en donne une certaine évidence).

Pour identifier l'échelle de temps adéquate dans chacun de ces régimes, on note que l'approximation (6.1) devient inutile, vraisemblablement, quand $n \approx 1/(\lambda^2 \tau^2)$ —c'est-à-dire, quand $t = n\tau \approx 1/\varepsilon$. Ainsi, l'échelle adéquate est $s = \varepsilon t$ (avec s fini), indifféremment du régime en considération.

6.1.1 Le régime τ constant et $\lambda \rightarrow 0$

Pour appliquer le Théorème 4.5 au cas des interactions répétées, on se focalise d'abord sur la dynamique aux temps multiples entiers de τ , c'est-à-dire, sur les puissances de $T(\lambda, \tau)$. Le seul problème est celui d'interpoler le semigroupe $\{T(\lambda, \tau)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à temps continu. Notez bien qu'on ne fait pas d'hypothèse sur le type des algèbres de von Neumann M_S et M_R .

Théorème 6.1. *Admettons l'Hypothèse (H1), ainsi que :*

(H2a) *Le spectre de α_S^τ n'est pas dense dans le cercle $S^1 \subseteq \mathbb{C}$.*

Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe avec $\deg(\Gamma; 0) = 0$ qui entoure le spectre de α_S^τ , prenons une branche du logarithme analytique à l'intérieur de Γ , et définissons

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz \log(z)(z - \alpha_S^\tau)^{-1}.$$

On note que A_0 est borné. Finalement, soit $\alpha_2^\tau = \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 [\alpha_0^{t_1}(V), [\alpha_0^{t_2}(V), \cdot]]$ et supposons que :

(H3a) *La limite forte*

$$(\mathbb{E}\alpha_2^\tau)^\natural = \text{s-lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{tA_0} \mathbb{E}\alpha_2^\tau e^{-tA_0}$$

existe.

Alors, $T_{\text{eff}}^s = e^{-s(\mathbb{E}\alpha_2^\tau)^\natural} : M_S \rightarrow M_S$ est un semigroupe de contractions et il satisfait

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup_{s \in [0, s_0]} \left\| \left(T^{\lfloor s/(\lambda^2 \tau) \rfloor} \alpha_S^{-\tau \lfloor s/(\lambda^2 \tau) \rfloor} - T_{\text{eff}}^s \right) x \right\| = 0,$$

pour tout $s_0 > 0$. Ici, $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière de son argument.

Démonstration. Rappelons que $T(\lambda, \tau) = \mathbb{E}\alpha_\lambda^\tau|_{M_S}$, donc $T(0, \tau) = \alpha_S^\tau$ et il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la courbe Γ entoure le spectre de $T(\lambda, \tau)$, pour tout $\lambda^2 < \varepsilon$. Définissons $A :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B(M)$ par

$$A(\lambda^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz \log(z)(z - T(\lambda, \tau))^{-1},$$

ce qui donne une fonction analytique parce que la dépendance de T en λ est quadratique. En supposant que

$$A'(0)^\natural = \text{s-lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{tA_0} A'(0) e^{-tA_0}$$

existe, le Théorème 4.5 en fournirait la conclusion avec $T_{\text{eff}}^s = e^{sA'(0)^\natural}$. Ainsi, on doit démontrer que $A'(0)^\natural$ existe et est égal à $-(\mathbb{E}\alpha_2^\tau)^\natural$. Pour ce faire, on utilise la série de Dyson, qui donne le développement

$$\begin{aligned} T(\lambda, \tau) &= \alpha_S^\tau - \lambda^2 \mathbb{E}\alpha_2^\tau \alpha_S^\tau + O(\lambda^4) \\ &=: \alpha_S^\tau + \lambda^2 T_2 + O(\lambda^4). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
A'(0) &= \text{s-lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz \log(z)(z - \alpha_S^\tau)^{-1} e^{tA_0} T_2 e^{-tA_0} (z - \alpha_S^\tau)^{-1} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz \log(z)(z - \alpha_S^\tau)^{-1} \left(\text{s-lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{tA_0} T_2 e^{-tA_0} \right) (z - \alpha_S^\tau)^{-1} \\
&= T_2^{\natural} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} dz \log(z)(z - \alpha_S^\tau)^{-2} = T_2^{\natural} \frac{d}{dz} \Big|_{z=\alpha_S^\tau} \log(z) \\
&= (-\mathbb{E} \alpha_2^\tau \alpha_S^\tau)^{\natural} \alpha_S^{-\tau} = -(\mathbb{E} \alpha_2^\tau)^{\natural}.
\end{aligned}$$

L'ordre des intégrales peut être renversé parce que l'intégrand et le domaine d'intégration sont tous les deux bornés ; le même argument justifie l'échange entre limite forte et intégrale complexe. Quant à la limite forte, elle existe par hypothèse. \square

Remarque 6.2. Les projecteurs spectraux de A_0 (qui est toujours *borné*) ne sont pas forcément ceux de δ_S , donc $\{T_{\text{eff}}^s\}$ et $\{\alpha_S^t\}$ ne commutent pas forcément. Un cas extrême serait celui d'un oscillateur harmonique avec spectre d'énergie $\{2\pi n/\tau : n \in \mathbb{N}\}$; si l'on prend $\log re^{it} = \log r + it$ avec $t \in]-\pi, \pi[$, alors on trouve $A_0 = 0$ et $(\mathbb{E} \alpha_2^\tau)^{\natural} = \mathbb{E} \alpha_2^\tau$.

Remarque 6.3. Dans [8], Attal et Joye démontrent le Théorème 6.1 quand \mathcal{H}_S et \mathcal{H}_E sont de dimension finie, en résolvant explicitement l'équation

$$T(\lambda, \tau) = e^{\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)} + O(\lambda^4), \quad (6.2)$$

où A_0 et A_1 sont les inconnues. Notre méthode est, essentiellement, la même. Notons que l'utilisation du calcul fonctionnel rend les choses simples mais ne donne pas un résultat optimal, car en dimension infinie il est bien possible que l'équation (6.2) admette une solution, même si le spectre de α_S^τ est dense dans le cercle unité (voir la Sous-section 6.3.1).

Ce théorème permet, en fait, de comprendre le comportement de $\{T^t(\lambda, \tau)\}$ pour $\lambda \ll 1$ et $t \lesssim 1/\lambda^2$ quelconque ; autrement dit, la restriction aux temps multiples entiers de τ est superflue.

Corollaire 6.4. *Avec les mêmes hypothèses et notations du Théorème 6.1, le semigroupe de contractions $T_{\text{eff}}^s : M_S \rightarrow M_S$ satisfait aussi*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup_{s \in [0, s_0]} \left\| \left(T^{s/\lambda^2} \alpha_S^{-s/\lambda^2} - T_{\text{eff}}^s \right) x \right\| = 0, \quad \forall s_0 > 0.$$

Démonstration. En fait, en écrivant $s/\lambda^2 = n\tau + t_1$ avec $n = \lfloor s/(\lambda^2\tau) \rfloor$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| T^{s/\lambda^2} \alpha_S^{-s/\lambda^2} - T_{\text{eff}}^s \right\| &= \left\| T(\lambda, \tau)^n \mathbb{E} \alpha_\lambda^{t_1} \alpha_S^{-(n\tau+t_1)} - T_{\text{eff}}^s \right\| \\
&\leq \left\| T(\lambda, \tau)^n \alpha_S^{-n\tau} - T_{\text{eff}}^s \right\| + \left\| T(\lambda, \tau)^n \mathbb{E} \left(\alpha_\lambda^{t_1} \alpha_S^{-t_1} - \text{Id}_M \right) \alpha_S^{-n\tau} \right\|.
\end{aligned}$$

Le premier terme est contrôlé par le Théorème 6.1, alors que, en utilisant la série de Dyson et la Remarque 4.2, le deuxième est borné par

$$\left\| \mathbb{E}(\alpha_\lambda^{t_1} - \alpha_0^{t_1}) \right\| \leq f_2(\lambda^2 \tau) \lambda^2 \tau. \quad \square$$

6.1.2 Le régime $\tau \rightarrow 0$ et $\lambda^2 \tau \rightarrow 0$

Ce régime est analytiquement plus délicat parce qu'il faut contrôler la dépendance de l'erreur en τ tandis que $\lambda^2 \tau \rightarrow 0$. Dans [8], Attal et Joye démontrent une adaptation de la version en dimension finie du Théorème 4.5 pour attaquer ce problème, mais il n'est pas du tout évident que cette adaptation puisse se faire aussi en dimension infinie. Nous prenons une approche différente, qui consiste essentiellement à regrouper les termes d'erreur pour pouvoir appliquer le Théorème 4.5 directement.

Lemme 6.5. *Soient $\lambda_0, \tau_0 > 0$ des constantes données. On dit que λ et τ sont admissibles si*

$$\tau \in [0, \tau_0], \quad \lambda^2 \tau \in [0, \lambda_0^2 \tau_0].$$

Supposons qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que, pour tous les λ et τ admissibles,

$$\left\| T(\lambda, \tau) - \{1 + \lambda^2 \tau^2 A_1\} \alpha_S^\tau \right\| \leq C_0 \lambda^2 \tau^3,$$

où $A_1 \in B(M_S)$ est tel que $t \mapsto \alpha_S^{-t} A_1 \alpha_S^t$ est continue en norme. Alors, encore pour tous les λ et τ admissibles,

$$\sup_{0 \leq s \leq s_0} \left\| T^{s/(\lambda^2 \tau)} - e^{s(\delta_S + \lambda^2 \tau A_1)/(\lambda^2 \tau)} \right\| = O(\tau),$$

où $s_0 > 0$ est arbitraire.

Démonstration. Grâce à la série de Dyson avec $\varepsilon = \lambda^2 \tau$,

$$T(\lambda, \tau) - e^{\tau(\delta_S + \lambda^2 \tau A_1)} = \left\{ \lambda^2 \tau^2 A_1 - \lambda^2 \tau \int_0^\tau dt \alpha_S^{-t} A_1 \alpha_S^t \right\} \alpha_S^\tau + E(\lambda, \tau),$$

où, en utilisant la fonction f_2 définie dans (4.3),

$$\|E(\lambda, \tau)\| \leq C_0 \lambda^2 \tau^3 + f_2(\lambda^2 \tau^2) (\lambda^2 \tau)^2 \tau^2 = O(\lambda^2 \tau^3).$$

De plus, comme $t \mapsto \alpha_S^{-t} A_1 \alpha_S^t$ est continue, $\int_0^\tau dt \alpha_S^{-t} A_1 \alpha_S^t = \tau A_1 + O(\tau^2)$ et on conclut que, pour tous les λ et τ admissibles,

$$\left\| T(\lambda, \tau) - e^{\tau(\delta_S + \lambda^2 \tau A_1)} \right\| \leq C_1 \lambda^2 \tau^3,$$

où la constante C_1 dépend seulement de C_0, λ_0, τ_0 et A_1 . Maintenant, un développement télescopique montre que

$$\begin{aligned} & \left\| T(\lambda, \tau)^m - \left[e^{\tau(\delta_S + \lambda^2 \tau A_1)} \right]^m \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^m T(\lambda, \tau)^{k-1} \left(T(\lambda, \tau) - e^{\tau(\delta_S + \lambda^2 \tau A_1)} \right) \left[e^{\tau(\delta_S + \lambda^2 \tau A_1)} \right]^{m-k} \right\| \\ &\leq m \left\| e^{\tau(\delta_S + \lambda^2 \tau A_1)} \right\|^m O(\lambda^2 \tau^3). \end{aligned}$$

Mais on a aussi, cette fois en utilisant la série de Dyson avec $\varepsilon = \lambda^2 \tau^2$, que

$$\|e^{\tau(\delta_s + \lambda^2 \tau A_1)}\| \leq 1 + C_2 \lambda^2 \tau^2, \quad C_2 = f_1(\lambda^2 \tau^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} \left\| T(\lambda, \tau)^m - \left[e^{\tau(\delta_s + \lambda^2 \tau A_1)} \right]^m \right\| &\leq C_1 s_0 \tau (1 + C_2 \lambda^2 \tau^2)^{s/(\lambda \tau)^2} \\ &\leq C_1 s_0 \tau e^{s_0 \log(1 + C_2 \lambda^2 \tau^2)/(\lambda \tau)^2} = O(\tau). \end{aligned}$$

Ainsi, en écrivant $s/(\lambda^2 \tau) = m\tau + t_1$ avec $m = \lfloor s/(\lambda \tau)^2 \rfloor$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left\| T^{s/(\lambda^2 \tau)} - \left[e^{\tau(\delta_s + \lambda^2 \tau A_1)} \right]^{s/(\lambda \tau)^2} \right\| \\ &= \left\| T(\lambda, \tau)^m \left(\alpha_s^{t_1} - e^{t_1(\delta_s + \lambda^2 \tau A_1)} \right) \right\| + \left\| \left(T(\lambda, \tau)^m - e^{m\tau(\delta_s + \lambda^2 \tau A_1)} \right) e^{t_1(\delta_s + \lambda^2 \tau A_1)} \right\| \\ &\leq f_1(\lambda^2 \tau^2) \lambda^2 \tau^2 + O(\tau) \left(1 + f_1(\lambda^2 \tau^2) \lambda^2 \tau^2 \right), \end{aligned}$$

qui est un $O(\tau)$ pour tous les λ et τ admissibles. \square

Théorème 6.6. *Admettons l'Hypothèse (H1), ainsi que :*

(H2b) *L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha_0^t[V, \cdot] \alpha_0^{-t} \in B(M)$ est continue en norme.*

(H3b) *La limite forte*

$$(\mathbb{E}[V, \cdot]^2)^{\natural} = \text{s-lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \alpha_s^t \mathbb{E}[V, \cdot]^2 \alpha_s^{-t}$$

existe.

Prenons une paire quelconque de suites $\tau_n, \lambda_n \geq 0$ telles que $\tau_n \rightarrow 0$ et $\lambda_n^2 \tau_n \rightarrow 0$. Alors, le semigroupe $T_{\text{eff}}^s = e^{-\frac{s}{2}(\mathbb{E}[V, \cdot]^2)^{\natural}} : M_S \rightarrow M_S$ satisfait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\substack{0 \leq s \leq s_0 \\ \|x\| \leq 1}} \left(\rho, \left(T^{s/(\lambda_n^2 \tau_n)} \alpha_s^{-s/(\lambda_n^2 \tau_n)} - T_{\text{eff}}^s \right) x \right)_{(M_S)_*, M_S} = 0,$$

pour tout $\rho \in (M_S)_*$ et $s_0 > 0$.

Démonstration. Notons d'abord que, par continuité de $t \mapsto \alpha_0^t[V, \cdot] \alpha_0^{-t}$,

$$\int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \alpha_0^{t_1}[V, \cdot] \alpha_0^{t_2 - t_1}[V, \cdot] \alpha_0^{-t_2} = \frac{\tau^2}{2} [V, \cdot]^2 + O(\tau^3),$$

car la composition d'opérateurs linéaires $B(M) \times B(M) \rightarrow B(M)$ est continue en norme. Ainsi, en utilisant la série de Dyson et la parité de $T(\lambda, \tau)$ en λ , on trouve que

$$\begin{aligned} T(\lambda, \tau) &= \mathbb{E} \left\{ 1 + (i\lambda)^2 \left(\frac{\tau^2}{2} [V, \cdot]^2 + O(\tau^3) \right) \right\} \alpha_0^\tau + O(\lambda^4 \tau^4) \\ &= \left\{ 1 - \frac{\lambda^2 \tau^2}{2} \mathbb{E}[V, \cdot]^2 \right\} \alpha_s^\tau + O(\lambda^2 \tau^3), \end{aligned}$$

où on a utilisé les faits que $\mathbb{E}\alpha_0^t = \alpha_S^t \mathbb{E}$ et que $O(\lambda^4 \tau^4)$ est, en fait, $O(\lambda^2 \tau^3)$ quand $\lambda \leq C\tau^{-1/2}$. Pour appliquer le Lemme 6.6 il reste à démontrer que

$$t \mapsto \alpha_S^t \mathbb{E}[V, \cdot]^2 \alpha_S^{-t} = \mathbb{E}(\alpha_0^t [V, \cdot] \alpha_0^{-t})^2 \mathbb{E}$$

est continue, ce qui est direct par hypothèse.

Pour conclure, il faut démontrer que le groupe $*$ -faiblement continu

$$e^{t(\delta_S - \frac{\lambda^2 \tau}{2} \mathbb{E}[V, \cdot]^2)} : M_S \rightarrow M_S$$

admet un préduel, qui serait fortement continu, et lui appliquer le Théorème 4.5. Mais on sait que δ_S admet un préduel (le générateur du groupe fortement continu $(\alpha_S^t)_*$), et donc il suffit de voir que $(\mathbb{E}[V, \cdot]^2)^* : M_S^* \rightarrow M_S^*$ laisse le sous-espace de fonctions ultrafaiblement continues invariant. Alors, pour ceci il suffit que $\mathbb{E}[V, \cdot]^2 : M_S \rightarrow M_S$ soit continue ultrafaible-ultrafaible, et comme \mathbb{E} est en fait positif et normal, tout ce qu'on doit démontrer est que les opérateurs $M_S \rightarrow M$ de multiplication à droite et à gauche par des éléments de M sont continus ultrafaible-ultrafaible. Mais rappelons que la topologie ultrafaible est générée par la famille de seminormes

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \xi_n, x \eta_n \rangle|$$

où $\xi_n, \eta_n \in \mathcal{H}$ sont tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\|\xi_n\|^2 + \|\eta_n\|^2) < \infty$, d'où on voit que les opérateurs de pre-multiplication et post-multiplication par éléments de $B(\mathcal{H})$ sont continus ultrafaible-ultrafaible. La preuve est finie. \square

Remarque 6.7. Dans le cas de petit système et élément de chaîne finis, l'hypothèse sur la continuité de $\alpha_0^t [V, \cdot] \alpha_0^{-t}$ est toujours vérifiée et donc ce théorème est bien une généralisation de celui dans [8].

6.2 Cycle limite

Dans cette section on supposera que l'algèbre de von Neumann M_S est de type finie I_n —c'est-à-dire, isomorphe à $M_n(\mathbb{C})$. Dans ce cas, tout semigroupe est automatiquement continu en norme. Rappelons, aussi, qu'un semigroupe $\{T^t\}$ a la propriété de converger à la stationnarité si, et seulement si,

$$T^t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} P, \quad P(x) = \omega_+(x)1.$$

Dans notre cas, par la structure du modèle, on s'attend plutôt à avoir convergence vers un cycle limite; ceci dit, dans le régime de van Hove la convergence vers un cycle limite ne peut se traduire que par la convergence à la stationnarité.

6.2.1 Approche perturbative de l'existence

On appliquera les résultats de la Section 4.4 pour relier l'éventuelle convergence à la stationnarité de $\{T_{\text{eff}}^t\}$ avec l'existence de cycle limite pour $\{T^t(\lambda, \tau)\}$.

Le régime $\lambda \rightarrow 0$

Théorème 6.8. *Supposons que M_S est de type fini I_n et que la dynamique effective $\{T_{\text{eff}}^s\}$ donnée par le Théorème 6.1 converge, quand $s \rightarrow \infty$, vers un projecteur $P \in B(M_S)$ de rang 1. Alors, il existe un $\lambda_0 > 0$ et, pour tout $|\lambda| < \lambda_0$, une famille τ -périodique d'états $\{\omega_\lambda^t\}$ telle que*

$$\omega(T^t(\lambda, \tau)(x)) - \omega_\lambda^t(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

pour tout état initial $\omega \in (M_S)_*$ et $x \in M_S$. De plus,

$$\omega_\lambda^t(x) = \frac{1}{n} \text{Tr}(P\alpha_S^t(x)) + O(\lambda^2\|x\|).$$

Démonstration. D'après la preuve du Théorème 6.1 (dont les hypothèses sont toujours satisfaites en dimension finie), on peut écrire $T(\lambda, \tau) = e^{\tau A(\lambda^2)}$ avec $A :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow B(M_S) \cong M_{n^2}(\mathbb{C})$ analytique. Alors, une application directe du Théorème 4.10 donne

$$T(\lambda, \tau)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P + O(\lambda^2) =: P(\lambda^2).$$

Comme $1 \in M_S$ est un point fixe de $T(\lambda, \tau)$, l'image de $P(\lambda^2)$ est $\mathbb{C}1 \subseteq M_S$. Le résultat suit avec

$$\omega_\lambda^t(x) = \frac{1}{n} \text{Tr}(P(\lambda^2)\alpha_\lambda^t(x)).$$

Notons que $\omega_\lambda^t(x)$ est τ -périodique car

$$P(\lambda^2)\alpha_\lambda^\tau(x) = P(\lambda^2)T(\lambda, \tau)x = P(\lambda^2)x. \quad \square$$

Remarque 6.9. L'état $x \mapsto \frac{1}{n} \text{Tr}(P\alpha_S^t(x))$ est aussi τ -périodique parce que P commute avec α_S^τ et $PM_S = \mathbb{C}1 \subseteq M_S$.

Le régime $\tau \rightarrow 0$ et $\lambda^2\tau \rightarrow 0$

Ce régime présente une difficulté supplémentaire, provenant des faits que :

1. $T(\lambda, \tau)$ ne peut pas être vue comme fonction de $\varepsilon = \lambda^2\tau$; ainsi, pour utiliser le Théorème 4.10, il faut d'abord paramétrer analytiquement les convergences $\tau \rightarrow 0$, $\lambda^2\tau \rightarrow 0$.
2. Une fois compris le besoin du pas précédent, on doit encore démontrer qu'on peut écrire $T(\lambda(\varepsilon), \tau(\varepsilon)) = e^{\tau(\varepsilon)A(\varepsilon)}$, avec A analytique.

Lemme 6.10. *La fonction $T : (\lambda, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{E}e^{\tau(\delta_S + i\lambda[V; \cdot])} \in B(M_S) \cong M_{n^2}(\mathbb{C})$ peut s'écrire, pour τ suffisamment petit, comme*

$$T(\lambda, \tau) = e^{\tau F(\lambda^2\tau, \tau)},$$

où $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow B(M_S)$ est analytique dans un voisinage de $(0, 0)$ et $F(0, 0) = \delta_S$.

Démonstration. En fait, on a e développement convergent

$$e^{\tau(\delta_S + i\lambda[V, \cdot])} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \sum_{k=0}^n (i\lambda\tau)^k \sum_{|\alpha|=n-k} \delta_S^{\alpha_0}[V, \cdot] \delta_S^{\alpha_1} \cdots \delta_S^{\alpha_{k-1}}[V, \cdot] \delta_S^{\alpha_k},$$

où le multi-indice α appartient à \mathbb{N}^{k+1} et $|\alpha| = \sum_{i=0}^k \alpha_i$. Après composition avec \mathbb{E} , les termes avec k impaire s'annulent et on obtient

$$\mathbb{E}e^{\tau(\delta_S + i\lambda[V, \cdot])} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n!} \tau^{n+m} (i\lambda^2\tau)^m T_{n,m},$$

$$T_{n,m} = \mathbb{E} \sum_{|\alpha|=n-2m} \delta_S^{\alpha_0}[V, \cdot] \delta_S^{\alpha_1} \cdots \delta_S^{\alpha_{2m-1}}[V, \cdot] \delta_S^{\alpha_{2m}}.$$

Maintenant, si λ et τ sont suffisamment petits, la série logarithmique

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n!} \tau^{n+m} (i\lambda^2\tau)^m T_{n,m} \right)^N$$

converge, et puis n'a pas de terme de degré 0 en τ ; ainsi, elle montre l'existence d'une fonction F qui est analytique et satisfait $e^{F(\lambda^2\tau, \tau)} = T(\lambda, \tau)$. Notons, finalement, que $T_{1,0} = \delta_S$, donc $F(0, 0) = \delta_S$. \square

Théorème 6.11. Soient $\lambda(\varepsilon)$ et $\tau(\varepsilon)$, avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$, deux paramétrisations méromorphes de λ et τ telles que

$$\lambda(\varepsilon)^2\tau(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \tau(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Supposons que M_S est de type fini I_n et que la dynamique effective $\{T_{\text{eff}}^s\}$ donnée par le Théorème 6.6 converge, quand $s \rightarrow \infty$, vers un projecteur $P \in B(M_S)$ de rang 1. Alors, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, une famille $\tau(\varepsilon)$ -périodique d'états $\{\omega_\varepsilon^t\}$ telle que

$$\omega(T^t(x)) - \omega_\varepsilon^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

pour tout état initial $\omega \in (M_S)_*$ et $x \in M_S$. De plus,

$$\omega_\varepsilon^t(x) = \frac{1}{n} \text{Tr}(P\alpha_S^t(x)) + O(\varepsilon^2\|x\|).$$

Démonstration. Soit $F(\lambda^2\tau, \tau)$ la fonction analytique donnée par le Lemme 6.10 et considérons la famille de groupes

$$t \mapsto e^{tA(\varepsilon)}, \quad A(\varepsilon) = F(\lambda(\varepsilon)^2\tau(\varepsilon), \tau(\varepsilon)).$$

Notons que $A(\varepsilon)$ est analytique. On veut démontrer que

$$T_{\text{eff}}^s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{sA(\varepsilon)/\varepsilon} e^{-sA(0)/\varepsilon}. \quad (6.3)$$

Alors, fixons $s > 0$ et soit $m(\varepsilon) = \lfloor s/(\lambda(\varepsilon)\tau(\varepsilon))^2 \rfloor$, de façon que

$$s/(\lambda(\varepsilon)^2\tau(\varepsilon)) = m(\varepsilon)\tau(\varepsilon) + t_1(\varepsilon), \quad 0 \leq t_1(\varepsilon) < \tau(\varepsilon).$$

Dorénavant, on omettra la dépendance en ε de m , λ , τ et t_1 (ce qui ne devrait pas être source de confusions). Écrivons

$$\begin{aligned} & \left\| T(\lambda, \tau)^m \alpha_S^{-m\tau} - T_{\text{eff}}^s \right\| \\ &= \left\| T^{s/(\lambda^2\tau)} \alpha_S^{-s/(\lambda^2\tau)} - T_{\text{eff}}^s \right\| + \left\| T(\lambda, \tau)^m \alpha_S^{-m\tau} - T^{s/(\lambda^2\tau)} \alpha_S^{-s/(\lambda^2\tau)} \right\|. \end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le premier terme s'annule grâce au Théorème 6.6 et par le fait qu'on travaille en dimension finie. Le deuxième est égal à

$$\left\| \alpha_S^{t_1} - \mathbb{E} \alpha_\lambda^{t_1} \right\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Ensuite, comme $T(\lambda, \tau)^m \alpha_S^{-m\tau} = e^{m\tau A(\varepsilon)} e^{-m\tau A(0)}$ et

$$\begin{aligned} & \left\| e^{sA(\varepsilon)/\varepsilon} e^{-sA(0)/\varepsilon} e^{-m\tau A(\varepsilon)} e^{-m\tau A(0)} \right\| \\ &= \left\| e^{m\tau A(\varepsilon)} (e^{t_1 A(\varepsilon)} e^{-t_1 A(0)} - 1) e^{-m\tau A(0)} \right\| \\ &\leq e^{s \sup_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_0} \|A(\varepsilon)\|} \left\| e^{t_1 A(\varepsilon)} e^{-t_1 A(0)} - 1 \right\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

on trouve que, effectivement, l'équation (6.3) est vraie. En conséquence, par unicité des deux, limites et générateurs de semigroupes, $-\frac{1}{2}(\mathbb{E}[V, \cdot]^2)^\sharp = A'(0)^\sharp$. Maintenant on peut appliquer le Théorème 4.10 pour conclure qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$T(\lambda(\varepsilon), \tau(\varepsilon))^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P + O(\varepsilon^2) =: P(\varepsilon^2),$$

pour tout $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. La preuve se termine de la même façon que celle du Théorème 6.8. \square

Remarque 6.12. Comme on demande que $\tau(\varepsilon)$ soit analytique autour de 0, on peut également supposer que $\tau(\varepsilon) = \varepsilon^n$, avec $n \geq 1$. Maintenant, la restriction $\lambda(\varepsilon)^2\tau(\varepsilon) = \varepsilon$ —qui semble être essentielle à notre approche—implique que

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{(1-n)/2}$$

(restreignant encore davantage n à être impair), ce qui montre que notre théorème ne peut s'appliquer à un régime où les deux, λ et τ , tendent vers zéro.

Remarque 6.13. Soit $\tilde{\varepsilon} \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. La convergence

$$\omega\left(T^{t+n\tau}(x)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega_{\tilde{\varepsilon}}^t(x)$$

montre que $\omega_{\tilde{\varepsilon}}$ dépend de $\lambda(\tilde{\varepsilon})$ et $\tau(\tilde{\varepsilon})$, mais ne dépend pas du choix des paramètres $\lambda(\varepsilon)$ et $\tau(\varepsilon)$.

Cette dernière remarque suggère que le Théorème 6.11 pourrait s'énoncer de meilleure façon, sans faire référence aux paramétrages. À cet effet, on pourrait considérer l'ensemble

$$\bigcup_{\substack{\text{paramétrages} \\ \text{admissibles}}} \{(\lambda(\varepsilon), \tau(\varepsilon)) : \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\},$$

où ε_0 dépend, lui même, du paramétrage. Néanmoins, il nous manque une description de cet ensemble qui ne fasse appel aux paramétrages ; c'est pourquoi on a préféré énoncer le théorème tel qu'on l'a fait.

6.2.2 Production d'entropie

On fait un détour maintenant pour parler brièvement de la production d'entropie pour les SIRs. Toutes les assertions dans cette sous-section sont démontrées dans [20].

Supposons que le système de référence \mathcal{S} converge vers la stationnarité, c'est-à-dire que $T(\lambda, \tau)^k$ converge, quand $k \rightarrow \infty$, vers un projecteur P avec $\text{Tr } P = 1$. Soit $\omega_+ \in (M_S)_*$ l'état défini par

$$\omega_+(x) = \frac{1}{n} \text{Tr}(P(x))$$

(rappelons que dans cette section \mathcal{S} est de dimension $n < \infty$). Notre objectif est calculer le taux asymptotique de production d'entropie du système complet. Pour le faire, on choisit un état de référence $\omega_S \in (M_S)_*$ et on définit $\omega_0 = \omega_S \otimes \omega_R$. Alors, on s'intéresse à

$$dS_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \{S(\omega \circ \alpha_{SR,\lambda}^{0,t}; \omega_0) - S(\omega; \omega_0)\},$$

où $S(\omega; \omega_0)$ est l'entropie relative d'Araki et $\omega \in M_*$ est un état normal par rapport à ω_0 . On supposera que ω_S est un état β -KMS pour $\{\alpha_S^t\}$, mais les calculs peuvent se faire en supposant que ω_S est β_S -KMS avec $\beta_S \neq \beta$, et les résultats sont indépendantes de β_S .

Avant de continuer, il est convenable de noter que l'énergie totale d'un SIR ne reste pas constante au cours du temps : quand $t = k\tau$ avec $k \in \mathbb{N}$, l'énergie potentielle du couplage entre \mathcal{S} et le k -ème élément de chaîne disparaît, tandis que l'énergie potentielle du couplage entre \mathcal{S} et le $(k+1)$ -ème élément de chaîne apparaît (ces changements d'énergie peuvent s'attribuer à l'agent externe qui mets et sors les éléments de chaîne en interaction avec \mathcal{S}). On définit donc

$$\Delta E(k) = \alpha_{SR,\lambda}^{0,k\tau} (V_{k+1} - V_k), \quad V_k = (\text{Id}_{M_S} \otimes j_k)(V),$$

où $\alpha_{SR,\lambda}^{0,t}$ et j_k sont donnés par les équations (5.12) et (5.10), respectivement.

On est en mesure d'énoncer le résultat. En utilisant la formule de production d'entropie (5.5), on trouve que

$$S(\omega \circ \alpha_{SR,\lambda}^{0,t}; \omega_0) - S(\omega; \omega_0) = \beta \omega \left(\Delta E(t) - \alpha_{SR,\lambda}^{0,t} (V_{m(t)+1} + V_1) \right),$$

où l'entier $m(t)$ est défini par $t = m(t)\tau + t_1$, $t_1 \in [0, \tau[$, et $\Delta E(t) = \sum_{k=1}^{m(t)} \Delta E(k)$. Ainsi, en définissant $dE_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \omega(\Delta E(t))$, on voit qu'on a la deuxième loi en moyenne

$$dE_+ = \frac{1}{\beta} dS_+.$$

Ces quantités peuvent se calculer explicitement. En fait, on peut démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\Delta E(t)) = \frac{1}{\tau} \omega_+(\Delta E_+), \quad \Delta E_+ = \int_0^\tau dt \mathbb{E} \alpha_{SR,\lambda}^{0,t}(\delta_{SR,0}(V_1)),$$

où $\delta_{SR,0}$ est donnée par l'équation (5.11).

6.3 Une famille d'exemples

Dans cette section on généralise au cas de dimension infinie la famille d'exemples considérée dans [8], qui peut être vue comme version en temps discret et dimension finie des bruits quantiques. Le régime $\tau \rightarrow 0$ avec $\lambda^2 \tau$ constante, qui n'est pas perturbatif et ne rentre pas dans le cadre de cette thèse, est assez intéressant dans ce cas particulier : tout lindbladien peut être obtenu comme générateur de la dynamique effective correspondante.

On supposera que les dynamiques de S et E sont données par des hamiltoniens H_S et H_E , respectivement, qui ont un spectre purement ponctuel. Soient

$$0 = h_i^0 \leq h_i^1 \leq \dots, \quad i \in \{S, E\}$$

ses valeurs propres ; on notera par $\{\epsilon_S^i\}$ et $\{\epsilon_E^i\}$ deux bases orthonormales de \mathcal{H}_S et \mathcal{H}_E correspondantes. Le vecteur $\epsilon_E^0 =: \omega$ sera vu comme état vide, et on supposera que l'interaction V ne donne lieu qu'à des processus de création et annihilation au nivel de l'élément de chaîne. De façon précise, soit $a_i = |\omega\rangle \langle \epsilon_E^i|$ l'opérateur d'annihilation associé à ϵ_E^i . On note, pour référence ultérieure, que pour tout $i, j \neq 0$

$$\begin{aligned} a_i a_j &= 0, & a_i^* a_j &= |\epsilon_E^i\rangle \langle \epsilon_E^j|, \\ a_i^* a_j^* &= 0, & a_i a_j^* &= \delta_{ij} |\omega\rangle \langle \omega|. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Alors, on suppose que V a la forme

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^* a_i + V_i a_i^*,$$

pour certains $V_i \in B(\mathcal{H}_S)$. Notons que, si $p = |\omega\rangle \langle \omega|$, alors

$$V = pV(1-p) + (1-p)Vp,$$

donc V satisfait l'hypothèse (H1). Pour qu'elle soit bornée, on peut supposer que $\sum_{i=1}^{\infty} \|V_i\|^2 < \infty$, car dans ce cas

$$\begin{aligned}
\|V(\xi_S \otimes \xi_E)\|^2 &= \sum_{i,j} \langle V_i^* \xi_S \otimes a_i \xi_E + V_i \xi_S \otimes a_i^* \xi_E, V_j^* \xi_S \otimes a_j \xi_E + V_j \xi_S \otimes a_j^* \xi_E \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle V_i^* \xi_S, V_j^* \xi_S \rangle \langle \xi_E, \epsilon_E^i \rangle \langle \epsilon_E^j, \xi_E \rangle + \sum_i \langle V_i \xi_S, V_i \xi_S \rangle |\langle \omega, \xi_E \rangle|^2 \\
&\leq \left(\sum_i \|V_i \xi_S\| |\langle \epsilon_E^i, \xi_E \rangle| \right)^2 + \|\xi_S\|^2 \|\xi_E\|^2 \sum_i \|V_i\|^2 \\
&\leq \|\xi_S\|^2 \left\{ \left(\sum_i \|V_i\|^2 \right) \left(\sum_i |\langle \epsilon_E^i, \xi_E \rangle|^2 \right) + \|\xi_E\|_E^2 \sum_i \|V_i\|^2 \right\} \\
&= 2\|\xi_S \otimes \xi_E\|^2 \sum \|V_i\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

6.3.1 Existence de dynamique effective quand $\lambda \rightarrow 0$

Dans cette sous-section on donne corps a la Remarque 6.3. Le lemme suivant, qui est une généralisation triviale de [8, Lemme 3.4], permet d'en tirer, dans certains cas, les conclusions du Théorème 6.1 en résolvant (6.2) directement.

Lemme 6.14. *Pour $\tau > 0$ fixe, soit $\{e^{tA_0}\}$ un groupe $*$ -faiblement continu d'isométries tel que $\alpha_S^\tau = e^{\tau A_0}$. Supposons qu'il existe un certain $A_1 \in B(M_S)$ satisfaisant*

$$\mathbb{E} \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \alpha_0^{t_1} [V, \cdot] \alpha_0^{t_2 - t_1} [V, \cdot] \alpha_0^{\tau - t_2} = \int_0^\tau ds e^{(\tau-s)A_0} A_1 e^{sA_0}. \quad (6.5)$$

Alors, pour tout $t_0 > 0$ il existe une constante $C = C(t_0)$ telle que

$$\sup_{0 \leq n \leq t_0/\lambda^2} \|T(\lambda, \tau)^n - e^{n\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)}\| \leq C\lambda^2.$$

Démonstration. D'abord, les hypothèses sur A_0 et A_1 assurent, grâce a la série de Dyson, que

$$T(\lambda, \tau) - e^{\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)} = O(\lambda^4).$$

Ceci montre, en utilisant la même somme télescopique que dans le preuve du Lemme 6.5, que

$$\begin{aligned}
\|T(\lambda, \tau)^n - [e^{\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)}]^n\| &= \left\| \sum_{k=1}^n T(\lambda, \tau)^{k-1} (T(\lambda, \tau) - e^{\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)}) [e^{\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)}]^{n-k} \right\| \\
&\leq n \max\{\|T(\lambda, \tau)\|, \|e^{\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)}\|\}^n O(\lambda^4).
\end{aligned}$$

Maintenant, notons que $\max\{\|T(\lambda, \tau)\|, \|e^{\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)}\|\} \leq 1 + O(\lambda^2)$. Ainsi, en supposant que $n \leq t_0/\lambda^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|T(\lambda, \tau)^n - e^{n\tau(A_0 + \lambda^2 A_1)}\| &\leq C_1 t_0 \lambda^2 (1 + C_2 \lambda^2)^n \leq C_1 t_0 \lambda^2 e^{t_0 \log(1 + C_2 \lambda^2)/\lambda^2} \\
&\leq C_1 t_0 \lambda^2 e^{C_3 t_0}.
\end{aligned}$$

□

Pour appliquer ce lemme il faut choisir A_0 . La condition $e^{\tau A_0} = \alpha_S^\tau$ laisse beaucoup de liberté (c'est le choix du logarithme de α_S^τ). Sous nos hypothèses sur le spectre de H_S , on a que

$$\alpha_S^\tau = \sum_{\lambda \in [0, 2\pi/\tau[} e^{i\tau\lambda} P_\lambda,$$

où le projecteur P_λ est non-nul pour une quantité dénombrable de $\lambda \in [0, 2\pi/\tau[$. En fait,

$$P_\lambda(x) = \sum_{(i,j) \in D_\lambda} \text{Tr}(|\epsilon_S^j\rangle \langle \epsilon_S^i| x) |\epsilon_S^i\rangle \langle \epsilon_S^j|,$$

où l'ensemble $D_\lambda \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est donné par

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h_S^i - h_S^j = \lambda \pmod{2\pi/\tau}\}.$$

En choisissant $A_0 = \sum_\lambda i\lambda P_\lambda$, on peut exprimer A_1 formellement en termes de ses éléments de matrice par rapport à la décomposition $\mathcal{H}_S = \bigoplus_\lambda P_\lambda \mathcal{H}_S$; on trouve que $P_\lambda A_1 P_\mu = c_{\lambda\mu} P_\lambda T_2 P_\mu$, où

$$T_2 = \mathbb{E} \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 \alpha_0^{t_1}[V, \cdot] \alpha_0^{t_2-t_1}[V, \cdot] \alpha_0^{\tau-t_2},$$

$$c_{\lambda\mu} = \begin{cases} \frac{i\lambda - i\mu}{e^{i\tau\lambda} - e^{i\tau\mu}} & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ e^{-i\tau\lambda}/\tau & \text{autrement.} \end{cases}$$

Dans le cas de dimension finie, cette formule donne une solution; si, par contre, $\dim \mathcal{H}_S = \infty$, il faut assurer que la somme

$$\sum_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu} P_\lambda T_2 P_\mu$$

soit convergente au sens fort.

Remarque 6.15. Le critère de Schur-Holmgren (voir [3, Lemma C.3]) établit que, si

$$\max\left\{\sup_\lambda \sum_\mu \|P_\lambda A_1 P_\mu\|, \sup_\mu \sum_\lambda \|P_\lambda A_1 P_\mu\|\right\} \leq C < \infty,$$

alors $A_1 = \sum_{\lambda, \mu} P_\lambda A_1 P_\mu$ est une somme fortement convergente, qui définit un opérateur $A_1 \in B(\mathcal{H}_S)$, de norme $\|A_1\| \leq C$. Comme on peut estimer la norme de $P_\lambda T_2 P_\mu$ en termes de $\|[V, \cdot]P_\lambda\|$ et $\|[V, \cdot]P_\mu\|$, on peut se convaincre que, pour chaque $\tau > 0$ fixe, il est toujours possible, au moins en principe, de trouver des conditions ad-hoc sur les $V_i \in B(\mathcal{H}_S)$ pour que le critère de Schur-Holmgren soit satisfait. Ces conditions vont dépendre du degré de divergence des constantes

$$\frac{i\lambda - i\mu}{e^{i\tau\lambda} - e^{i\tau\mu}} \|[V, \cdot]P_\lambda\| \|[V, \cdot]P_\mu\|.$$

Si le spectre de H_S est equi-espacié (i.e., si S est un oscillateur harmonique), disons, par exemple, que $h_S^i = i$, alors tout dépendra des propriétés, en tant que nombre irrationnel, de $\tau/(2\pi)$. Évidemment, le problème devient assez complexe dès que le spectre de H_S n'est pas si simple.

6.3.2 Le cas spin-spin

Dans le cas le plus simple d'un système d'interactions répétées, tant le petit système comme l'élément de chaîne sont des spins, i.e. $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_E = \mathbb{C}^2$. On prend $h_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, $h_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ et $V_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. L'hamiltonien du système $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ est, donc,

$$h_S \otimes 1 + 1 \otimes h_E + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on suppose que la chaîne est initialement en équilibre thermique à temperature inverse β ; c'est-à-dire, que

$$\omega_E \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix} = \frac{x_{00} + x_{11} e^{-\beta E}}{1 + e^{-\beta E}}.$$

La dynamique effective correspondante, quand $\lambda \rightarrow 0$, a été explicitement calculée dans [8]. Quant au cycle limite, son existence est établie, sous certaines hypothèses, dans [20], où il est aussi calculé explicitement à premier ordre en λ^2 . Dans cette sous-section on montre comment récupérer ces derniers résultats à partir du Théorème 6.8.

Pour faire des calculs, soit $\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$ la base canonique de \mathbb{C}^2 et considérons la base de $M_2(\mathbb{C})$ constitué par les opérateurs $u_{kl} = |\epsilon_k\rangle\langle\epsilon_l|$, où $k, l \in \{0, 1\}$. Il se trouve que

$$\begin{aligned} \alpha_S^t(u_{00}) &= u_{00}, & \alpha_S^t(u_{01}) &= e^{itS} u_{01}, \\ \alpha_S^t(u_{10}) &= e^{-itS} u_{10}, & \alpha_S^t(u_{11}) &= u_{11}. \end{aligned}$$

En supposant que $e^{itS} \neq e^{-itS}$, les projecteurs spectraux de $\delta_S : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ sont

$$P_0 = P_{00} + P_{11}, \quad P_+ = P_{01}, \quad P_- = P_{10},$$

où $P_{kl} = \text{Tr}(u_{kl}^*(\cdot))u_{kl}$. Notons que si $S \neq 0$ et τ est assez petit, alors $e^{i\tau S} \neq e^{-i\tau S}$.

Comme on s'intéresse à l'état asymptotique de la dynamique effective quand $\lambda \rightarrow 0$, on doit calculer la projection spectrale sur le noyau de

$$\begin{aligned} \delta_{\text{eff}} &= -(\mathbb{E}\alpha_2^\tau)^\sharp \\ &= -P_0\alpha_2^\tau P_0 - P_-\alpha_2^\tau P_- - P_+\alpha_2^\tau P_+ \end{aligned}$$

où, comme avant,

$$\alpha_2^\tau = \int_0^\tau dt_1 \int_{t_1}^\tau dt_2 [\alpha_0^{t_1}(V), [\alpha_0^{t_2}(V), \cdot]].$$

Maintenant, si $\langle u_{01} | \delta_{\text{eff}} | u_{01} \rangle$ et $\langle u_{10} | \delta_{\text{eff}} | u_{10} \rangle$ ne s'annulent pas, ce projecteur spectral est essentiellement celui de $P_0 \delta_{\text{eff}} |_{P_0 M_2(\mathbb{C})}$. En identifiant $P_0 M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2$ à travers de la base $\{u_{00}, u_{11}\}$, cet opérateur est la matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} \langle u_{00} | \delta_{\text{eff}} | u_{00} \rangle & \langle u_{00} | \delta_{\text{eff}} | u_{11} \rangle \\ \langle u_{11} | \delta_{\text{eff}} | u_{00} \rangle & \langle u_{11} | \delta_{\text{eff}} | u_{11} \rangle \end{pmatrix}.$$

Mais $0 = \delta_{\text{eff}}(1) = \delta_{\text{eff}}(u_{00} + u_{11})$, et ainsi cette matrice a la forme $\begin{pmatrix} \delta_0 & -\delta_0 \\ -\delta_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$, avec $\delta_0 = \langle u_{00} | \delta_{\text{eff}} | u_{00} \rangle$ et $\delta_1 = \langle u_{11} | \delta_{\text{eff}} | u_{11} \rangle$. Le projecteur spectral sur son noyau est

$$Q = \frac{1}{\delta_0 + \delta_1} \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_0 \\ \delta_1 & \delta_0 \end{pmatrix},$$

et il se trouve que

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{-2}{1 + e^{-\beta E}} \left\{ e^{-\beta E} |b|^2 \frac{1 - \cos \tau(E - S)}{(E - S)^2} + |c|^2 \frac{1 - \cos \tau(E + S)}{(E + S)^2} \right\}, \\ \delta_1 &= \frac{-2}{1 + e^{-\beta E}} \left\{ |b|^2 \frac{1 - \cos \tau(E - S)}{(E - S)^2} + e^{-\beta E} |c|^2 \frac{1 - \cos \tau(E + S)}{(E + S)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Nous sommes en position de donner des conditions simples pour garantir l'existence d'état asymptotique pour la limite faible et de lui calculer explicitement. Ceci, en conjonction avec le Théorème 6.8, nous permet de retrouver la conclusion à propos de l'état asymptotique dans [20, Théorème 3.4].

Proposition 6.16. *Supposons que $S \neq 0$ et $|b|^2 + |c|^2 \neq 0$, et soit $\{T_{\text{eff}}^s\}$ la dynamique effective du Théorème 6.1. Alors, il existe un $\tau_0 > 0$ tel que*

$$\omega(T_{\text{eff}}^s(x)) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta_0 + \delta_1} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix} x \right),$$

pour tout état initial $\omega : M_S \rightarrow \mathbb{C}$, $x \in M_S$ et $\tau < \tau_0$.

Démonstration. Soit $x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix} \in M_S$. Les calculs ci-dessus montrent que, sous réserve d'avoir convergence,

$$e^{s \delta_{\text{eff}}}(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\delta_1 x_{00} + \delta_0 x_{11}}{\delta_0 + \delta_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à voir que, pour τ assez petit, on a en fait convergence.

Par rapport à la base $\{u_{00}, u_{11}, u_{01}, u_{10}\}$,

$$\delta_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\delta_0 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle u_{01} | \delta_{\text{eff}} | u_{01} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle u_{10} | \delta_{\text{eff}} | u_{10} \rangle \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont

$$0, \delta_0 + \delta_1, \langle u_{01} | \delta_{\text{eff}} | u_{01} \rangle \text{ et } \langle u_{10} | \delta_{\text{eff}} | u_{10} \rangle,$$

et on doit vérifier que, hormis 0, leur partie réelle est strictement négative. Comme $|b|^2 + |c|^2 \neq 0$, on a que $\delta_0 + \delta_1 = \text{Re}(\delta_0 + \delta_1) < 0$. Quant aux autres, jusqu'à l'ordre τ^2 on trouve que

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle u_{01} | \delta_{\text{eff}} | u_{01} \rangle &= \frac{-\tau^2}{2(1 + e^{-\beta E})} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\bar{b} & \bar{a}-\bar{d} \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\beta E} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\bar{b} & \bar{a}-\bar{d} \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} - e^{-\beta E} \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \right\}_{01} \\ &= \frac{-\tau^2}{2(1 + e^{-\beta E})} \{ |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - 2\bar{a}d \\ &\quad + e^{-\beta E} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - 2a\bar{d}) \} \\ &\leq \frac{-\tau^2}{2} (|b|^2 + |c|^2) < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle u_{10} | \delta_{\text{eff}} | u_{10} \rangle &= \frac{-\tau^2}{2(1 + e^{-\beta E})} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ d-a & -c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{b} & 0 \\ \bar{d}-\bar{a} & -\bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\beta E} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b} & 0 \\ \bar{d}-\bar{a} & -\bar{b} \end{pmatrix} - e^{-\beta E} \begin{pmatrix} c & 0 \\ d-a & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \right\}_{10} \\ &= \frac{-\tau^2}{2(1 + e^{-\beta E})} \{ |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - 2a\bar{d} \\ &\quad + e^{-\beta E} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 - 2\bar{a}d) \} \\ &\leq \frac{-\tau^2}{2} (|b|^2 + |c|^2) < 0. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque 6.17. Quand un petit système interagit de façon effective avec un réservoir à température $1/\beta$, on s'attend à ce qu'il y ait une thermalisation, c'est-à-dire que le système complet converge vers un état asymptotique β -KMS par rapport à la dynamique perturbée. Ainsi, il est naturel de se demander si l'état asymptotique $\omega = \omega_\tau$ de la dynamique effective $\{T_{\text{eff}}^s\}$ converge, quand $\tau \rightarrow \infty$, vers un état β -KMS par rapport à la dynamique libre. Comme on le voit immédiatement dans cet exemple, ceci n'est pas le cas : δ_0 et δ_1 ont un comportement oscillatoire avec τ . Toutefois, il serait un problème intéressant d'étudier $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \omega_\tau$.

Remarque 6.18. Dans [20], il est démontré que la production d'entropie asymptotique de ce système est strictement positive quand

$$b, c \neq 0, \quad \tau(E - S), \tau(E + S) \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Annexe A

Produits tensoriels algébriques

Soit X un ensemble quelconque. On désigne par \mathbb{C}^X l'espace vectoriel complexe de fonctions $X \rightarrow \mathbb{C}$, muni de la somme et produit scalaire ponctuelles

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad (\text{A.1})$$

où $f, g \in \mathbb{C}^X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, soit Y un autre ensemble et prenons $f \in \mathbb{C}^X$ et $g \in \mathbb{C}^Y$; une façon intuitive d'introduire les produits tensoriels consiste à considérer la fonction à deux variables

$$(x, y) \in X \times Y \mapsto f(x)g(y) \in \mathbb{C},$$

qu'on désigne par $f \otimes g$.

Remarque A.1. Quand X et Y sont des ensembles infinis, les fonctions de $\mathbb{C}^{X \times Y}$ ne peuvent pas toujours s'écrire comme combinaisons linéaires du genre $\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$, avec $f_i \in \mathbb{C}^X$ et $g_i \in \mathbb{C}^Y$.

Définition A.2. Soient X et Y deux ensembles quelconques. On définit leur *produit tensoriel algébrique* $\mathbb{C}^X \otimes_{\text{alg}} \mathbb{C}^Y$ comme étant le sous-espace de $\mathbb{C}^{X \times Y}$ généré par

$$\{f \otimes g : f \in \mathbb{C}^X, g \in \mathbb{C}^Y\}.$$

Remarque A.3. Cette définition marche aussi pour des sous-espaces de \mathbb{C}^X et \mathbb{C}^Y . Par exemple, on peut définir, de la même façon, le produit tensoriel algébrique $C(X) \otimes_{\text{alg}} C(Y) \subseteq C(X \times Y)$, où X et Y sont des espaces topologiques compacts et $C(\cdot)$ désigne l'ensemble de fonctions continues sur son argument.

La définition A.2 est complètement générale, car tout espace vectoriel est isomorphe à un espace de fonctions sur un ensemble, en utilisant une base de Hamel du même. Elle a, néanmoins, la désavantage de ne pas être "naturelle", au sens de dépendre, à priori, de la façon dont on représente un espace vectoriel

abstrait comme espace de fonctions sur un ensemble. La définition “officielle”, décrite en bas, est équivalente mais moins intuitive.

Regardons le cas de fonctions dans $\mathbb{C}^{\{1,\dots,n\}}$, c’est-à-dire, de vecteurs $v \in \mathbb{C}^n$ en identifiant v avec la fonction $i \mapsto v_i$. Par définition, le produit $v \otimes w$ de deux vecteurs $v, w \in \mathbb{C}^n$ est caractérisé par la collection de nombres

$$(v_i w_j)_{i,j \in \{1,\dots,n\}},$$

qu’on identifie comme vecteur de \mathbb{C}^{n^2} ou matrice de $M_n(\mathbb{C})$, cas par cas selon convenance. Grâce à la dimension finie, toute collection de nombres $(a_{ij})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ peut s’écrire comme combinaison linéaire (finie) de tenseurs $v \otimes w$. On peut considérer aussi le cas plus général ou $v \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^m$ et donc

$$v \otimes w \in \mathbb{C}^{nm} \simeq M_{nm}(\mathbb{C}) \simeq M_{nm}(\mathbb{C}).$$

On voit que l’objet $v \otimes w$ peut représenter plein de choses, et celle ci est une des avantages des produits tensoriels. Néanmoins, il vaut mieux de garder les distances : on considère $v \otimes w$ comme élément d’un espace vectoriel qu’on désignera par $\mathbb{C}^n \otimes_{\text{alg}} \mathbb{C}^m$, et qui est isomorphe à \mathbb{C}^{nm} . L’espace $M_{nm}(\mathbb{C})$ a beaucoup plus de structure et, même s’il est encore vrai que $\mathbb{C}^n \otimes_{\text{alg}} \mathbb{C}^m \cong M_{nm}(\mathbb{C})$ comme espaces vectoriels, l’isomorphisme

$$\mathbb{C}^n \otimes_{\text{alg}} (\mathbb{C}^m)^* \cong M_{nm}(\mathbb{C})$$

est plus précis, car il est un isomorphisme d’espaces de fonctions linéaires $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$, où l’on associe à $v \otimes w^* \in \mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^m)^*$ la fonction linéaire

$$u \in \mathbb{C}^m \mapsto vw^*(u) \in \mathbb{C}^n.$$

Maintenant on prends un point de vue plus abstrait et on donne une définition de $V \otimes_{\text{alg}} W$ pour des espaces vectoriels V et W sans représentation privilégié comme espaces de fonctions complexes. Notons que le produit tensoriel $\mathbb{C}^X \times \mathbb{C}^Y \rightarrow \mathbb{C}^{X \times Y}$, défini par (A.1), satisfait aux propriétés suivantes :

1. $(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$.
2. $f \otimes (g_1 + g_2) = f \otimes g_1 + f \otimes g_2$.
3. $(\lambda f) \otimes g = \lambda(f \otimes g) = f \otimes (\lambda g)$.

Ceci nous motive à définir, avec un abus inoffensif de notation,

$$V \otimes_{\text{alg}} W = \mathbb{C}[V \times W]/I,$$

où $\mathbb{C}[V \times W]$ est l’espace vectoriel des combinaisons linéaires finis des symboles $\{(v, w)\}_{v \in V, w \in W}$ et son sous-espace I est généré par les éléments de la forme

$$(\lambda v_1 + v_2, w) - \lambda(v_1, w) - (v_2, w), \quad (v, \lambda w_1 + w_2) - \lambda(v, w_1) - (v, w_2),$$

où $\{v, v_1, v_2\} \subseteq V, \{w, w_1, w_2\} \subseteq W$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. La composition

$$V \times W \hookrightarrow \mathbb{C}[V \times W] \rightarrow V \otimes_{\text{alg}} W$$

donne un produit bilinéaire qu'on désigne aussi par $v \otimes w$ (et qui joue, en fait, le même rôle que celui dans l'équation (A.1) mais cette fois est défini de façon canonique). Ce produit n'est pas injective mais presque :

$$v \otimes w = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ ou } w = 0.$$

Il n'est pas non plus surjective mais encore presque : son image génère $V \otimes_{\text{alg}} W$. Ces propriétés sont, en fait, tout ce qu'on peut exiger d'une fonction bilinéaire, comme la proposition suivante le montre.

Proposition A.4. *Pour toute fonction bilinéaire $f : V \times W \rightarrow E$, il existe une unique fonction linéaire $\tilde{f} : V \otimes_{\text{alg}} W \rightarrow E$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes_{\text{alg}} W \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & E. \end{array}$$

Cette propriété universelle caractérise l'objet $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes_{\text{alg}} W$, et peut être utilisé comme définition. Elle est très utile pour démontrer propriétés élémentaires, comme par exemple que

$$(U \otimes_{\text{alg}} V) \otimes_{\text{alg}} W \cong U \otimes_{\text{alg}} (V \otimes_{\text{alg}} W) =: U \otimes_{\text{alg}} V \otimes_{\text{alg}} W,$$

et que $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w) =: u \otimes v \otimes w$. Elle montre aussi que les concepts de fonction bilinéaire $V \times W \rightarrow E$ et fonction linéaire $V \otimes_{\text{alg}} W \rightarrow E$ sont équivalents.

Le produit tensoriel d'espaces vectoriels nous permet de généraliser l'idée original du produit de fonctions à valeurs complexes $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. En fait, soient $f : X \rightarrow E$ et $g : Y \rightarrow F$ deux fonctions sur des ensembles X et Y , maintenant à valeurs dans les espaces vectoriels E et F , respectivement. Alors, on peut définir

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x) \otimes g(y).$$

Si X et Y sont eux mêmes des espaces vectoriels et f et g sont linéaires, alors la propriété universelle nous dit qu'il existe une unique fonction linéaire

$$x \otimes y \mapsto (f \otimes g)(x, y) = f(x) \otimes g(y),$$

qu'on désigne encore par $f \otimes g$. Cet objet est un élément de l'ensemble de fonctions linéaires $X \otimes_{\text{alg}} Y \rightarrow E \otimes_{\text{alg}} F$, qu'on désigne $\mathcal{L}(X \otimes_{\text{alg}} Y, E \otimes_{\text{alg}} F)$. Mais les ensembles $\mathcal{L}(X, E)$ et $\mathcal{L}(Y, F)$ sont aussi des espaces vectoriels, et donc on a deux définitions de $f \otimes g$: l'une comme élément de $\mathcal{L}(X \otimes_{\text{alg}} Y, E \otimes_{\text{alg}} F)$ et l'autre comme élément de $\mathcal{L}(X, E) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{L}(Y, F)$. Heureusement, la propriété universelle nous dit qu'il existe une application linéaire (qui dans ce cas doit être injective)

$$\mathcal{L}(X, E) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{L}(Y, F) \rightarrow \mathcal{L}(X \otimes_{\text{alg}} Y, E \otimes_{\text{alg}} F)$$

qui envoie $f \otimes g \in \mathcal{L}(X, E) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{L}(Y, F)$ vers $f \otimes g \in \mathcal{L}(X \otimes_{\text{alg}} Y, E \otimes_{\text{alg}} F)$. Bref, les deux façons de regarder ce produit tensoriel sont compatibles. Écrivons-le dans un énoncé complet et concise.

Proposition A.5. Soient X, Y, E et F des espaces vectoriels. Il existe une inclusion $\mathcal{L}(X, E) \otimes_{\text{alg}} \mathcal{L}(Y, F) \hookrightarrow \mathcal{L}(X \otimes_{\text{alg}} Y, E \otimes_{\text{alg}} F)$, donnée par

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y).$$

Annexe B

La notation bra-ket de Dirac

Le long de la thèse on utilise parfois la notation bra-ket de Dirac, qu'on explique ici par convenance. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Grâce au produit scalaire de \mathcal{H} , chaque vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ induit une application linéaire et continue $\ell_\xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\eta \in \mathcal{H} \mapsto \ell_\xi(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Alors, on note cette application par $\ell_\xi = \langle \xi |$. Si l'on écrit $|\eta\rangle$ au lieu de η , on trouve la formule

$$\langle \xi | (|\eta\rangle) = \langle \xi, \eta \rangle,$$

dont habituellement le coté gauche s'écrit tout simplement $\langle \xi | \eta \rangle$. C'est à cause de ceci que les physiciens préfèrent la notation $\langle \cdot | \cdot \rangle$ pour le produit scalaire des espaces de Hilbert. Ils appellent "bras" aux vecteurs $\langle \xi | \in \mathcal{H}^*$ et "kets" aux vecteurs $|\eta\rangle \in \mathcal{H}$, de façon telle que leur "produit" donne un "braket" $\langle \xi | \eta \rangle$. Dans le cas $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ il existe une distinction similaire qui est plus familière pour les mathématiciens : on appelle "vecteurs colonne" aux éléments de \mathbb{C}^n , et "vecteurs file" aux éléments de $(\mathbb{C}^n)^*$. On a l'application anti-linéaire de transposition et conjugaison complexe

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \mapsto (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \in (\mathbb{C}^n)^*,$$

qui est l'anti-isomorphisme canonique $(\mathbb{C}^n)^* \cong \mathbb{C}^n$ induit par le produit scalaire canonique de \mathbb{C}^n . Le "bra" joue le même rôle : il est la bijection anti-linéaire

$$\langle \cdot | : \xi \in \mathcal{H} \mapsto \langle \xi | \in \mathcal{H}^*$$

induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Quant au "ket", il est plutôt juste une notation convenable, surtout quand on considère la possibilité d'écrire des formules du genre

$$A |a\rangle = a |a\rangle,$$

où A représente un opérateur, la variable a représente un élément générique de son spectre, et, en supposant en fait que a est une valeur propre, $|a\rangle$ représente le vecteur propre associé. On pourrait dire donc que $|\cdot\rangle$ est une application définie sur le spectre d'un opérateur, à valeurs dans l'ensemble de ses vecteurs propres généralisés. Pour formaliser ce point de vue il faut utiliser la théorie des "rigged Hilbert spaces", mais ceci tombe complètement en dehors du cadre de cette thèse.

Bibliographie

- [1] L. Accardi, A. Frigerio, and Y. G. Lu, *Weak coupling limit as a quantum functional central limit theorem*, Commun. Math. Phys. **131** (1990), no. 3, 537–570.
- [2] L. Accardi, Y. Lu, and I. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer–Verlag, 2002.
- [3] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Springer–Verlag, 1988.
- [4] H. Araki, *On the XY-model on two-sided infinite chain*, Publ. RIMS **20** (1984), 277–296.
- [5] W. Aschbacher, V. Jakšić, Y. Pautrat, and C. A. Pillet, *Topics in non-equilibrium quantum statistical mechanics*, Open quantum systems III (S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, eds.), Lecture notes in mathematics, vol. 1882, Springer–Verlag, 2006.
- [6] W. Aschbacher and C. A. Pillet, *Non-equilibrium steady states of the XY chain*, J. Stat. Phys. **112** (2003), no. 5–6, 1153–1175.
- [7] S. Attal, *Quantum noises*, Open quantum systems II (S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, eds.), Lecture notes in mathematics, vol. 1881, Springer–Verlag, 2006.
- [8] S. Attal and A. Joye, *Weak coupling and continuous limits for repeated quantum interactions*, J. Stat. Phys. **126** (2007), 1241–1283.
- [9] S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, *Open quantum systems I*, Springer–Verlag, 2006.
- [10] ———, *Open quantum systems II*, Springer–Verlag, 2006.
- [11] ———, *Open quantum systems III*, Springer–Verlag, 2006.
- [12] S. Attal and Y. Pautrat, *From repeated to continuous quantum interactions*, Ann. Henri Poincaré **7** (2006), no. 1, 59–104.
- [13] A. Barchielli, *Continual measurements in quantum mechanics and quantum stochastic calculus*, Open quantum systems III (S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, eds.), Lecture notes in mathematics, vol. 1882, Springer–Verlag, 2006.
- [14] B. Blackadar, *Operator algebras*, Springer–Verlag, 2006.

- [15] O. Bratteli and D. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics 1*, Springer–Verlag, 1987.
- [16] ———, *Operator algebras and quantum statistical mechanics 2*, Springer–Verlag, 1997.
- [17] S. Brattke, B. Varcoe, and H. Walther, *Preparing Fock states in the micromaser*, *Opt. Express* **8** (2001), no. 2, 131–144.
- [18] L. Bruneau, A. Joye, and M. Merkli, *Infinite products of random matrices and repeated interaction dynamics*, à paraître dans *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*
- [19] ———, *Repeated and continuous interactions in open quantum systems*, ‘à paraître dans *Ann. Henri Poincaré*.
- [20] ———, *Asymptotics of repeated interaction quantum systems*, *J. Funct. Anal.* **247** (2006), 310–344.
- [21] ———, *Random repeated interaction quantum systems*, *Commun. Math. Phys.* **284** (2008), no. 2, 553–581.
- [22] L. Bruneau and C. A. Pillet, *Thermal relaxation of a QED cavity*, *J. Stat. Phys.* **134** (2009), no. 5–6, 1071–1095.
- [23] J. B. Butler, *Perturbation series for eigenvalues of analytic non-symmetric operators*, *Arch. Math.* **10** (1959), 21–27.
- [24] E. Davies, *Markovian master equations*, *Commun. Math. Phys.* **39** (1974), no. 2, 91–110.
- [25] ———, *Markovian master equations. II*, *Math. Ann.* **219** (1976), no. 2, 147–158.
- [26] ———, *Quantum theory of open systems*, Academic press, 1976.
- [27] ———, *One-parameter semigroups*, Academic press, 1980.
- [28] J. Dereziński and W. de Roeck, *Reduced and extended weak coupling limit*, *Banach Cent.* **78** (2007), 91–119.
- [29] ———, *Extended weak coupling limit for Pauli-Fierz operators*, *Commun. Math. Phys.* **279** (2008), no. 1, 1–30.
- [30] J. Dereziński and R. Früboes, *Fermi golden rule and open quantum systems*, *Open quantum systems III* (S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, eds.), *Lecture notes in mathematics*, vol. 1882, Springer–Verlag, 2006.
- [31] F. Fagnola, *Quantum stochastic differential equations and dilation of completely positive semigroups*, *Open quantum systems II* (S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, eds.), *Lecture notes in mathematics*, vol. 1881, Springer–Verlag, 2006.
- [32] A. Frigerio, *Quantum dynamical semigroups and approach to equilibrium*, *Lett. Math. Phys.* **2** (1977), no. 2, 79–87.
- [33] V. Jakšić and C. A. Pillet, *On entropy production in quantum statistical mechanics*, *Commun. Math. Phys.* **217** (2001), no. 2, 285–293.

- [34] A. Joye, *Introduction to quantum statistical mechanics*, Open quantum systems I (S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, eds.), Lecture notes in mathematics, vol. 1880, Springer-Verlag, 2006.
- [35] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, 1966.
- [36] E. C. Lance, *Hilbert C^* -modules*, Cambridge university press, 1995.
- [37] J. Lebowitz and H. Spohn, *Irreversible thermodynamics for quantum systems weakly coupled to thermal reservoirs*, Adv. Chem. Phys. **38** (1978), 109–142.
- [38] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys. **48** (1976), 119–130.
- [39] M. Orszag, *Quantum optics*, Springer-Verlag, 1997.
- [40] D. Petz, *Quantum information theory and quantum statistics*, Springer-Verlag, 2008.
- [41] R. Rebolledo, *Complete positivity and the Markov structure of open quantum systems*, Open quantum systems II (S. Attal, A. Joye, and C. A. Pillet, eds.), Lecture notes in mathematics, vol. 1881, Springer-Verlag, 2006.
- [42] D. Ruelle, *Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics*, J. Stat. Phys. **95** (1999), no. 1–2, 393–468.
- [43] ———, *Natural nonequilibrium states in quantum statistical mechanics*, J. Stat. Phys. **98** (2000), no. 1–2, 57–75.
- [44] S. Sakai, *C^* -algebras and W^* -algebras*, Springer-Verlag, 1998.
- [45] H. Spohn and J. Lebowitz, *Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems*, Commun. Math. Phys. **54** (1977), no. 2, 97–120.
- [46] L. Takhtajan, *Quantum mechanics for mathematicians*, American Mathematical Society, 2008.
- [47] L. van Hove, *Quantum mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation*, Physica **21** (1955), 540–617.
- [48] S. R. S. Varadhan, *Probability theory*, American Mathematical Society, 2001.
- [49] R. Vargas, *Repeated interaction quantum systems : van Hove limits and asymptotic states*, J. Stat. Phys. **133** (2008), no. 3, 491–511.
- [50] H. Walther, *Atoms in cavities and traps*, Advances in atomic, molecular, and optical physics (B. Bederson and A. Dalgarno, eds.), vol. 32, Academic press, 1993.
- [51] N. Wegge-Olsen, *K -theory and C^* -algebras*, Oxford university press, 1993.
- [52] T. Wellens, A. Buchleitner, B. Kümmerer, and H. Maassen, *Quantum state preparation via asymptotic completeness*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), no. 16, 3361–3364.