HAL open science

Description relativiste chirale de la matière nucléaire incluant des effets de confinement du nucléon

Élisabeth Fiat Massot

▶ **To cite this version:**

Élisabeth Fiat Massot. Description relativiste chirale de la matière nucléaire incluant des effets de confinement du nucléon. Autre [cond-mat.other]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. Français. NNT : 2009LYO10128 . tel-00442137v2

HAL Id: tel-00442137

https://theses.hal.science/tel-00442137v2

Submitted on 1 Feb 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre 128 - 2009

Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard Lyon 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT
Spécialité : Physique Théorique

(arrêté du 7 août 2006)

par

Élisabeth MASSOT

Description relativiste chirale de la matière nucléaire incluant des effets de confinement du nucléon

Soutenue publiquement le 11 septembre 2009
devant la Commission d'Examen

Jury :	Mme	W.	Alberico	
	M.	K.	Bennaceur	
	M.	G.	Chanfray	Directeur de thèse
	M.	D.	Davesne	Président
	M.	P.	Guichon	Rapporteur
	M.	P.	Schuck	Rapporteur

Description relativiste chirale de la matière nucléaire incluant des effets de confinement du nucléon

Sommaire

Introduction

I Introduction à la physique nucléaire relativiste

1 Généralités

2 Formalisme

3 Modèle de Walecka

II Théorie relativiste chirale de la matière nucléaire

4 Modèle σ

5 Effets du confinement

6 Corrélations

A Détails du calcul de l'énergie à l'approximation de Hartree–Fock

B Propriétés des tenseurs $T^{\mu\nu}$

C Propagateurs de polarisation

À mes parents

À Patrick

Remerciements

J'aimerais remercier en premier lieu mon directeur de thèse le professeur Guy Chanfray pour la patience dont il a fait preuve pendant plus de trois ans ainsi que pour la simplicité avec laquelle il a été - ou plutôt a essayé de ne pas être - mon chef. Je voudrais également remercier Hubert Hansen (maître de conférences à l'IPNL) pour l'enthousiasme et la vaste culture physique avec lesquels il a répondu à mes nombreuses questions.

Je tiens ensuite à souligner le travail des membres de mon jury, tout d'abord les rapporteurs Peter Schuck (directeur de recherche à l'IPNO) et Pierre Guichon (ingénieur CEA), mais également Karim Bennaceur et Dany Davesne (respectivement maître de conférences et professeur à l'IPNL), qui ont eu la patience de lire et corriger le manuscrit. Je remercie également Wanda Alberico (professeur à l'université de Turin).

L'IPNL offre un cadre de travail très convivial et scientifiquement enrichissant ; je souhaiterais noter ici le travail remarquable de notre directeur, Bernard Ille, réellement au service de la communauté. J'ai apprécié l'ambiance agréable du groupe des doctorants, Clément, Fabien, Silvia, Thomas, Émilie, Thomas, David, Federica, Thibaut... De manière générale je voudrais remercier chaleureusement tous les membres de l'IPNL pour leur gentillesse et leur disponibilité.

De nombreuses personnes ont été omises dans ces remerciements très sommaires. Quiconque se reconnaît doit se sentir libre de pallier ici à mon manque de reconnaissance en écrivant lui même, sur cet exemplaire qu'il tient en main, la preuve de mon ingratitude :

Introduction

L'émergence de la physique quantique au début du XXe siècle a offert un cadre théorique aux découvertes aux échelles atomiques et en deçà qui avaient lieu à la même époque. Après la mise en évidence expérimentale du noyau par Rutherford en 1911 et la découverte du neutron par Chadwick en 1932, la physique subatomique a rapidement pris son essor. Il est vite apparu que la force nucléaire était autrement plus complexe que celles connues jusque-là, les forces gravitationnelle et électromagnétique.

Plusieurs voies se sont alors ouvertes aux physiciens. D'une part, la physique nucléaire s'en contentée pour commencer de formuler les interactions en terme de forces phénoménologiques de plus en plus élaborées, généralement non relativistes, qui permettent aujourd'hui de décrire avec précision les éléments de la carte des noyaux et leurs propriétés : rayons, masses, niveaux d'énergie, mais également radioactivité, modes de vibrations, etc. Les expériences d'ions lourds, toujours plus sophistiquées, telles celles menées au GANIL près de Caen, ont permis de mettre en évidence des phénomènes de plus en plus exotiques : disparition de nombres magiques, halos nucléaires ou dans un registre voisin la dynamique nucléaire, de fusion ou fission par exemple. D'autre part, la physique hadronique et la physique des particules se sont intéressées aux plus petites distances, avec l'étude des nucléons ou plus généralement des hadrons, puis des quarks et de l'interaction forte décrite par la chromodynamique quantique (QCD). Grâce à des sondes électromagnétiques comme les électrons, il a été possible d'expliquer la structure du nucléon en terme de partons, assimilés aux quarks et aux gluons, vecteurs de l'interaction forte. Comprendre les contributions de ces différentes composantes à la masse, au spin, etc. du nucléon est un domaine encore très actif. La description de l'interaction entre quarks, faible aux courtes distances (liberté asymptotique) et forte au-delà du fermi (confinement), est un enjeu actuel tant des nouvelles expériences (plasma de quarks et gluons au LHC par exemple) que des modèles théoriques. Une description succincte de ces physiques est présentée dans le premier chapitre qui peut être vu comme un développement de cette introduction.

Malgré le succès des approches non relativistes pour la physique nucléaire, les nucléons sont par essence des objets relativistes (l'impulsion de Fermi dans la matière nucléaire est supérieure à un quart de la masse du nucléon).

Pour tenir compte correctement de la structure du milieu nucléaire (le spin-orbite par exemple), il est donc nécessaire de se placer dans le cadre de la théorie quantique des champs relativiste. Cette approche a débuté dès les années 70. Initiée par Walecka [1], elle consiste à décrire les interactions fortes entre nucléons par un lagrangien contenant des échanges de mésons. On peut remarquer que ces échanges sont naturels en physique hadronique dans la mesure où à ces échelles d'énergies, les degrés de liberté sont les hadrons et non les quarks et les gluons. Les mésons impliqués ont été choisis de manière à reproduire les propriétés de saturation de la matière nucléaire, c'est-à-dire de manière à obtenir une compensation entre un terme attractif dû au méson scalaire sigma et un terme répulsif dû au méson vecteur oméga. Ce modèle de Walecka a ensuite été affiné par l'ajout de nouveaux mésons, notamment isovecteurs [2]. Il a également été remarqué que la prise en compte de termes non linéaires au potentiel scalaire permettait d'améliorer les prédictions du modèle, mais sans que la valeur des paramètres introduits ne soit justifiée *a priori*.

Ces théories effectives relativistes, bien que partiellement justifiées par un mécanisme microscopique, sont toutefois largement déconnectées des propriétés sous-jacentes de QCD. Une théorie effective ne peut tenir compte des détails précis des mécanismes d'interaction entre quarks et gluons. Cependant, une théorie hadronique doit pouvoir décrire un certain nombre de phénomènes globaux qui interviennent entre basse et haute énergie. En particulier, à basses température et densité, les quarks sont confinés dans les hadrons, mais à haute température ou grande densité, la matière consiste en une phase de quarks déconfinés. L'étude de la transition constitue un domaine de recherche en soi. À température nulle, les nucléons sont généralement traités comme ponctuels, mais ils peuvent aussi être considérés comme un ensemble de trois quarks, l'interaction étant portée par un échange de mésons entre quarks : le choix du confinement va alors contraindre le modèle. On peut montrer que cela revient à prendre en compte l'effet de réarrangement des quarks confinés (réponse scalaire du nucléon) en présence du champ scalaire nucléaire. Ceci peut alors se reformuler en terme de potentiel scalaire tadpole répulsif [3]. De ce fait les paramètres du potentiel scalaire ne sont plus phénoménologiques. Par ailleurs, QCD possède une symétrie particulière, la symétrie chirale. À basses température et densité, cette symétrie est brisée à la fois spontanément et explicitement. La brisure spontanée, selon le mécanisme de Nambu–Goldstone, conduit à la présence de bosons de Goldstone, les pions, et à une valeur non nulle du condensat de quarks, relié à la constante de désintégration du pion par la relation de Gell-Mann–Oakes–Renner (voir équation 4.10). La brisure explicite est due à la masse des quarks, elle est donc petite à l'échelle hadronique. Cette symétrie est restaurée à hautes température et densité ; lorsque seule la température est grande, la restauration semble se faire en même temps que le déconfinement. Un paramètre d'ordre de la transition chirale est le conden-

sat de quarks. La compréhension de cette restauration est un enjeu aussi bien théorique qu'expérimental brûlant. Il est donc particulièrement intéressant de construire un modèle effectif qui tienne compte à la fois de la symétrie chirale et du confinement.

Cette thèse est organisée en deux parties. La première partie est consacrée à une introduction à la physique nucléaire relativiste. Après un survol du contexte dans le premier chapitre, qui constitue comme il a déjà été dit une grosse introduction, le deuxième chapitre a pour but d'introduire le formalisme nécessaire dans le reste de l'ouvrage. En particulier, on y trouvera une description du champ moyen à l'approximation de Hartree–Fock, cadre de la première moitié de ce travail de thèse. Afin de raffiner l'approche, des corrélations sont ensuite ajoutées à l'approximation des anneaux. Le troisième chapitre présente le modèle de Walecka, base de toutes les théories nucléaires construites à partir d'un lagrangien relativiste. La seconde partie est consacrée à la mise en place d'un modèle incluant les effets de la symétrie chirale et du confinement. Au chapitre 4 est développé un lagrangien chiral s'inspirant du modèle σ. On verra qu'un tel lagrangien est insuffisant pour expliquer les propriétés de la matière nucléaire, en particulier la saturation. En effet, le terme scalaire trop attractif fait s'effondrer la matière nucléaire. Ce problème sera résolu au chapitre 5 par l'ajout d'un terme de confinement via la réponse nucléonique. La valeur du paramètre de réponse nucléonique est obtenu à partir de calculs sur réseau, c'est-à-dire *ab initio*. Ce chapitre constitue la première moitié de ce travail de thèse. Après la construction du lagrangien et le calcul de l'énergie à l'approximation Hartree–Fock, on y trouvera les résultats qui reproduisent correctement les propriétés du point de saturation ainsi qu'un certain nombre de propriétés de la matière nucléaire. Cependant, quelques points restent à améliorer, en particulier la valeur trop forte de la compressibilité. Il a donc été décidé d'inclure des effets au-delà du champ moyen en ajoutant des excitations particule-trou *via* des corrélations à l'approximation des anneaux. On trouvera le développement de l'énergie de corrélation ainsi que les résultats qui en découlent au dernier chapitre, qui correspond à la seconde moitié de ce travail.

*
* *

Cette thèse est l'objet de trois publications régulières :

« Relativistic calculation of the pion loop correlation energy in nuclear matter in a theory including confinement »
É. Massot and G. Chanfray
Phys. Rev. C **80**, 015202 (2009) ;

« Relativistic chiral Hartree-Fock description of nuclear matter with constraints from nucleon structure and confinement »
É. Massot and G. Chanfray
Phys. Rev. C **78**, 015204 (2008) ;

« Chiral symmetry, confinement and nuclear matter properties »
G. Chanfray, M. Ericson and É. Massot
European Physical Journal ST **156**, 199 (2008) ;

et d'une publication dans un compte-rendu de conférence :

« Propriétés de la matière nucléaire dans une approche incluant symétrie chirale et confinement »
Journées de Rencontres Jeunes Chercheurs, Dinard, (2007).

Première partie

Introduction à la physique nucléaire relativiste

Chapitre premier

Généralités

Les sujets abordés dans cette thèse sont à mi-chemin entre la physique nucléaire et la physique hadronique. Afin de comprendre la cohérence entre les différents sujets et les conséquences qu'ils peuvent avoir pour notre étude, nous allons commencer par un bref survol de ces physiques.

1.1 Physique nucléaire

La physique subatomique a démarré avec de nombreuses expériences au début du XXe siècle. En particulier, en 1909, Geiger et Marsden bombardèrent une mince feuille d'or avec des particules α. Les résultats observés conduisirent Rutherford à postuler en 1911 l'existence de très petits noyaux atomiques (modélisation discrète) [4], contrairement au modèle de Thompson jusque-là largement employé qui proposait que la masse des atomes soit distribuée dans tout l'atome (modélisation continue). Suite à l'expérience de Chadwick en 1932 [5] mettant en évidence le neutron - prédit par Rutherford en 1920 - le noyau apparaît comme un ensemble de nucléons, c'est-à-dire un ensemble de protons et de neutrons, en interaction à des énergies de l'ordre de quelques dizaines de MeV.

Aujourd'hui, le modèle standard de la physique est basé sur un ensemble de quatre interactions dont certaines seront ignorées dans toute cette thèse. L'interaction gravitationnelle, tout d'abord, est négligeable aux échelles d'énergies que nous considérons. L'interaction électromagnétique concerne les protons et les neutrons (à travers le facteur de forme électromagnétique des neutrons) dans les noyaux finis, mais dans le contexte de la matière nucléaire on omettra cette interaction. L'interaction faible est responsable de la désintégration β des noyaux, elle n'apparaîtra pas dans la suite. Enfin, l'interaction forte, de portée courte, est cachée derrière la plupart des sujets abordés dans cette thèse. Cette dernière interaction, qui ne peut être traitée par une méthode perturbative à basse énergie, est mal connue. Dans le noyau, les échelles d'énergies sont très faibles devant celles

de l'interaction forte : l'interaction entre nucléons doit être vue comme un « résidu » de celle créant la masse des nucléons.

1.1.1 Modèle de la goutte liquide

Le modèle le plus simple de noyau est celui de la goutte liquide où, comme son nom l'indique, les noyaux sont décrits comme un fluide. En première approximation, le rayon du noyau, ou de la goutte, est proportionnel à la racine cubique du nombre de nucléons ou particules $r \simeq r_0 A^{1/3}$ (où A est le nombre de nucléons présents). Ceci est assez bien vérifié expérimentalement, sauf pour les noyaux les plus légers. Comme dans une goutte, l'énergie de liaison a_v d'un nucléon est indépendante du nombre total de nucléons. Une première contribution à l'énergie de liaison totale du noyau est donc $E_v = a_v A$. Cette énergie de liaison est valable pour une goutte de matière infinie. Dans une goutte finie, les nucléons de surface ne peuvent contribuer de la même manière que les nucléons de cœur. On introduit donc une énergie de tension de surface proportionnelle à celle-ci et contribuant négativement à l'énergie de liaison : $E_s = -a_s A^{2/3}$. Les protons étant chargés, il faut rajouter un terme coulombien répulsif, à savoir $-a_c Z^2/A^{1/3}$ où Z est le nombre de protons. L'énergie obtenue ne pourrait rendre compte de la vallée de stabilité. Or pour l'instant il n'a pas été fait de différence entre les protons et les neutrons autre que leur charge. De manière générale, leurs natures différentes conduisent tant dans le potentiel que dans l'énergie cinétique à un terme dépendant de $\delta = N - Z$, N étant le nombre de neutrons. Un terme linéaire conduirait à un noyau composé uniquement d'une des deux espèces. On postule donc une énergie proportionelle à δ^2 de la forme $E_{sym} = -a_{sym}\delta^2/A$ qui permet de reproduire les noyaux stables. Enfin, un terme d'appariement E_p doit être rajouté ou retranché suivant que le noyau est pair-pair ou impair-impair respectivement. Il est dû à la nature fermionique des nucléons. En résumé, l'énergie de liaison d'un noyau composé de A nucléons (Z protons et N neutrons) peut être résumée par la formule de Bethe–Weizsäcker :

$$E = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(Z-N)^2}{A} \pm \varepsilon_p. \tag{1.1}$$

Cette formule phénoménologique reproduit très bien les énergies de liaison des noyaux connus en prenant comme valeurs pour les paramètres [6, 7] :

$$\begin{aligned} a_v &= 15,96 \text{ MeV}, \\ a_s &= 17,23 \text{ MeV}, \\ a_c &\simeq 0,7 \text{ MeV}, \\ a_{sym} &\simeq 30 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Les théories développées dans cette thèse s'attachent à reproduire ces valeurs à partir de modèles théoriques plus proches de la théorie fondamentale des

interactions. Le traitement des noyaux finis y devient très lourd à la fois d'un point de vue analytique et d'un point de vue numérique[1].

Dans la suite nous n'évoquerons que très rapidement le cas des noyaux pour nous concentrer sur celui de la matière infinie. Celle-ci a cependant un champ d'applications important comme par exemple les étoiles à neutrons dont nous reparlerons à la fin de cette introduction. Le concept de matière nucléaire infinie est défini par les assertions suivantes :

- comme son nom l'indique, c'est un milieu infini uniforme sans surface ;
- l'interaction coulombienne entre les protons y est négligée[2] ;
- il n'est pas forcément nécessaire de tenir compte des corrélations d'appariement entre les nucléons, on les omettra ici ;
- le milieu est invariant par translation, les fonctions d'onde y sont des ondes planes ;
- sa densité à l'équilibre est extrapolée à partir de celle à l'intérieur des gros noyaux, à savoir $\rho_0 = 0,16$ fm^{-3}.

En conséquence, on s'intéressera uniquement dans la partie principale de cette thèse à l'énergie de volume a_v et à l'énergie d'asymétrie a_{sym}. En effet, les énergies de surface et d'appariement n'y ont plus de sens et l'énergie coulombienne est négligée. Lorsqu'on trace l'énergie par nucléon en fonction de la densité, la courbe obtenue présente un minimum appelé point de saturation. Ses coordonnées doivent être celles données ci-dessus, c'est-à-dire $(\rho_0, -a_v)$.

Cependant, ce modèle de la goutte liquide n'est pas adapté pour expliquer et prédire les détails des spectres d'énergie de toute la carte des noyaux puisqu'il a été construit pour décrire l'état fondamental. Une première chose qu'il n'aborde pas est la plus grande stabilité (relative) des noyaux possédant un nombre de protons ou de neutrons égal à 2, 8, 20, 50, 82, 126, dits noyaux magiques. Ce phénomène rappelle celui qu'on observe en physique atomique lorsqu'une couche d'électrons est entièrement remplie. Il en est de même en physique nucléaire : on peut introduire des couches pour les nucléons (modèle dit « en couche »), mais le potentiel est bien plus sophistiqué qu'un potentiel de Coulomb. Malgré cela, les parties à 3 (voire 4) corps sont moins bien connues ; dans tous les cas le cœur dur rend les calculs délicats. Un bon test pour un modèle nucléaire est la précision avec laquelle il prédit les couches d'un noyau donné (en particulier un noyau magique) et leurs énergies respectives.

[1] En particulier, l'approche relativiste choisie complique considérablement les calculs.

[2] En réalité, le potentiel coulombien est infini et constant dans une matière chargée infinie uniforme. Le concept de matière nucléaire s'affranchit de cette difficulté, on peut s'en convaincre en remarquant que la force dérivant d'un potentiel constant est nulle. Dans le cas des étoiles à neutrons, un gaz d'électrons libres assurant l'électroneutralité de l'étoile permet par exemple de se ramener à la notion de matière nucléaire.

1.1.2 Approche microscopique

Bien qu'on ne puisse le dériver analytiquement, le point de départ pour les approches microscopiques est toujours le potentiel d'interaction nucléon-nucléon dans le vide représenté figure 1.1. Depuis les années 50, de nom-

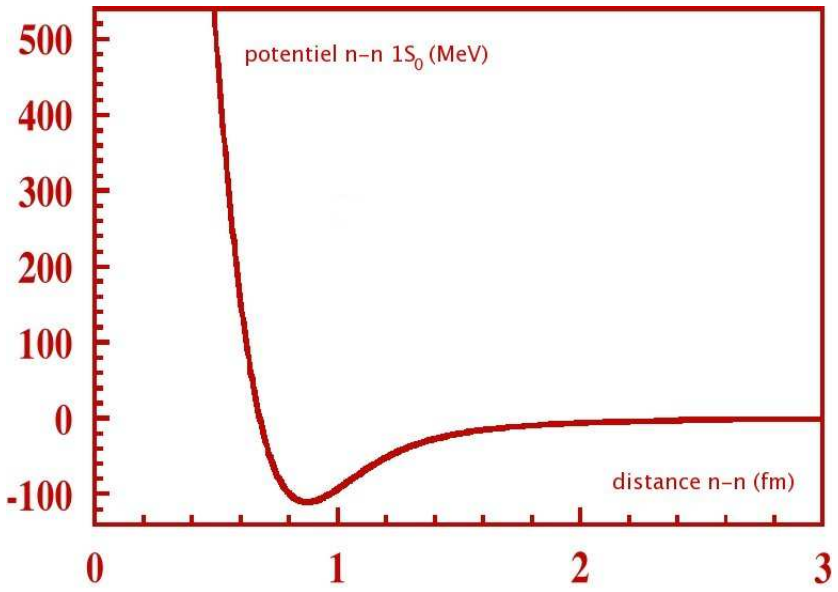

FIG. 1.1: *Potentiel d'interaction nucléon-nucléon dans le vide (figure reproduite avec l'aimable autorisation de J. Dobaczewski).*

breuses expériences de diffusion neutron-proton et proton-proton ont permis de connaître ce potentiel nucléon-nucléon de façon extrêmement précise. Divers potentiels à deux corps, qui sont en général empiriques, permettent de le décrire. Leurs paramètres sont choisis pour reproduire les données expérimentales comme par exemple celui de Paris, ou plus récemment les potentiels d'Argonne [8]. D'autres, comme celui de Bonn, reproduisent les données de diffusion mais sont construits à partir d'une interaction d'échange de mésons. Pour décrire la matière nucléaire où ont lieu des interactions entre de nombreux nucléons, les forces à trois corps ne peuvent être ignorées. Les potentiels précédents doivent donc être complétés par des forces à trois corps, ici encore choisies empiriquement ou à partir d'échange de mésons, principalement de deux pions. Cependant, ces modèles pèchent par leur manque de lien avec la théorie sous-jacente qui est la chromodynamique quantique (QCD). Une propriété essentielle de la QCD qui a une influence sur les théories effectives est la symétrie chirale (voir le chapitre 4 pour la définition de cette symétrie), spontanément brisée à basse température et basse densité. Celle-ci peut être incorporée dans les interactions entre nucléons par une

méthode proposée par Weinberg [9] et développée dans les années 90 [10], connue sous le nom de théorie des champs effective chirale. Cette dernière approche permet en plus de rendre cohérentes les descriptions des forces à deux et trois corps (voire plus), et de tronquer les calculs à un ordre donné, en général le quatrième (N^3LO)[11]. Une autre propriété essentielle de la QCD est la liberté asymptotique et le confinement. Étant donné que ce point constitue un élément essentiel de ce travail de thèse, on y reviendra de façon plus détaillée au paragraphe 1.2.7. Une interaction nue permet de décrire un système de quelques nucléons avec un calcul *ab initio* [12]. Bien que les prédictions obtenues soient très bonnes, les limites des moyens informatiques sont rapidement atteintes. Certaines techniques de calcul, comme la configuration d'interaction, sont utilisables jusqu'à un nombre de nucléons de l'ordre de 20. Au-delà, mises à part de rares exceptions (noyaux doublement magiques), le principal problème provient des forces à courte portée. En effet, si on prend la valeur moyenne du potentiel V_{NN} sur l'état fondamental choisi comme un déterminant de Slater noté $|\phi_0\rangle$ et qu'on intègre sur tout l'espace, l'énergie obtenue diverge rapidement aux petites distances. Pour s'en affranchir, il faut introduire de très fortes corrélations dans le fondamental qui annulent sa fonction d'onde aux petites distances de façon à compenser la divergence de V_{NN}. Mais les calculs effectués à partir de fonctions d'onde corrélées sont extrêmement lourds. En supposant par exemple qu'on sache obtenir la fonction d'onde du ^{56}Fe, $\Psi_{Fe}(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_{56})$, le calcul de l'énergie, $E = \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_{56} \Psi_{Fe}(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_{56}) H(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_{56}) \Psi_{Fe}(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_{56})$, prendrait avec les moyens de calcul actuels un temps supérieur à l'âge de l'univers. Il faut donc partir sur une approche différente pour les noyaux moyens et lourds.

1.1.3 Théorie effective phénoménologique

On introduit une interaction effective représentée par une matrice G dont la valeur moyenne prise sur $|\phi_0\rangle$ donne les mêmes résultats (pour l'énergie, la densité, etc.) que l'interaction nue sur le fondamental corrélé $|\psi_0\rangle$:

$$\langle \psi_0 | V_{NN} | \psi_0 \rangle = \langle \phi_0 | G | \phi_0 \rangle. \tag{1.3}$$

On calcule G en ajustant le braket de droite sur celui de gauche jusqu'à des densités de l'ordre de la densité nucléaire, ce qui est suffisant.

Les premières interactions effectives proposées, à la fin des années 60, étaient phénoménologiques et non relativistes. Le principe est de décomposer la force sur un certain nombre d'opérateurs (spin, isospin, etc.) et d'ajuster les coefficients sur des mesures expérimentales. Ces forces peuvent être de portée finie, telle la force de Gogny [13] très employée depuis les années 80. Cette approche est naturelle dans la mesure où elle modélise bien les moyenne et longue portées de l'interaction entre deux nucléons. Cependant, il est bien plus aisé de travailler avec des forces de portée nulle telles les

forces de Skyrme [14, 15]. La légitimité de cette approche est faite *a posteriori* en notant que les prédictions sont très bonnes et les calculs nettement plus faciles que dans le cas de portée non nulle [16]. Il est possible d'inclure dans ces forces différents ingrédients qui permettent de raffiner le modèle. Les premières interactions utilisées sont les forces SIII [17]. On peut citer également la force Skm* qui donne une description plus réaliste des effets de surface [18]. Mais ce sont sans conteste les forces de Saclay–Lyon qui sont les plus utilisées. Elles ont été proposées dans les années 90 par une collaboration entre Saclay et Lyon et sont notées Sly$n$ [19, 20]. Leur originalité tient au fait qu'elles utilisent l'équation d'état de la matière nucléaire de neutrons pour ajuster les paramètres. La plus courante d'entre elles (et sur laquelle sont basées les autres), la force Sly4, est obtenue à partir du potentiel

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) &= t_0(1+x_0P_\sigma)\delta(\mathbf{r}) \\ &\quad \frac{1}{2}t_1(1+x_1P_\sigma)\left[\mathbf{P}'^2\delta(\mathbf{r})+\delta(\mathbf{r})\mathbf{P}^2\right] \\ &\quad +t_2(1+x_2P_\sigma)\mathbf{P}'\cdot\delta(\mathbf{r})\mathbf{P} \\ &\quad \frac{1}{6}t_3(1+x_3P_\sigma)[\rho(\mathbf{r})]^\sigma\delta(\mathbf{r}) \\ &\quad +iW_0\sigma\cdot\left[\mathbf{P}'\times\delta(\mathbf{r})\mathbf{P}\right] \end{aligned} \tag{1.4}$$

où $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, $\mathbf{P}=(\nabla_1-\nabla_2)/2i$ et $\mathbf{P}'=\mathbf{P}^*$ agit à gauche. $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ et $P_\sigma=\frac{1}{2}(1+\sigma_1\cdot\sigma_2)$ tiennent compte de la dépendance en spin. La première ligne correspond à un terme central. Les deux lignes suivantes sont des termes non locaux qui permettent de relier cette force aux propriétés de portée non nulle de l'interaction réelle. Le terme en t_3, x_3 dépend de la densité. Enfin, la dernière ligne est un terme de spin-orbite.

À partir du hamiltonien construit grâce à ce potentiel, il est possible de construire une densité d'énergie $\varepsilon(\rho)$ à l'approximation de Hartree–Fock (voir le chapitre 2). Elle est liée à l'énergie par particule comme dans l'équation (3.22). On trouve pour l'énergie par particule dans la matière nucléaire symétrique :

$$\frac{E}{A}(\rho)=\frac{3}{10m}\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3}\rho^{2/3}+\frac{3}{8}t_0\rho+\frac{3}{80}\Theta_s\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3}\rho^{5/3}+\frac{1}{16}t_3\rho^{\sigma+1} \tag{1.5}$$

où $\Theta_s=3t_1+(5+4x_2)t_2$. On s'est placé comme dans tout le reste de cette thèse dans le système d'unités où $\hbar=c=1$. On peut également calculer la pression et le module de compressibilité, définis respectivement par

$$P(\rho) = -\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_A = \rho^2\left.\frac{\partial\frac{E}{A}(\rho)}{\partial\rho}\right|_A, \tag{1.6}$$

$$K_\infty = 9\frac{\partial P}{\partial\rho}=\frac{18P}{\rho}+9\rho^2\frac{\partial^2\frac{E}{A}}{\partial\rho^2}. \tag{1.7}$$

Ils s'écrivent donc en fonction des quatre paramètres t_0, Θ_s, t_3 et σ. On écrit les trois quantités ci-dessus au point de saturation de la matière nucléaire, ainsi que σ, avec les valeurs

$$\frac{E}{A}(\rho_0) = -16 \text{ MeV}, \tag{1.8}$$

$$K_\infty \simeq 230 \text{ MeV}, \tag{1.9}$$

$$P(\rho_0) = 0, \tag{1.10}$$

$$\sigma = \frac{1}{6}. \tag{1.11}$$

$E/A(\rho_0)$ est obtenu par les modèles de goutte liquide (voir ci-dessus), K_∞ est extrapolé à partir des données sur les modes monopolaires (ou de respiration) des noyaux et $P(\rho_0) = 0$ correspond à la définition du point de saturation. La dernière équation est une prescription habituelle permetant d'avoir un couple raisonnable (K_∞, m^*) où m^* est la masse effective. On a ainsi accès aux quatre premiers paramètres du hamiltonien.

En utilisant de plus les propriétés de la matière nucléaire asymétrique et l'énergie d'asymétrie choisie à la valeur $32,5$ MeV, on peut fixer un nouveau paramètre, $\Theta_{sym} = 3t_1x_1 - t_2(5 + 4x_2)$. L'équation d'état de la matière de neutrons est ensuite utilisée pour fixer trois nouveaux paramètres, x_0, x_3 et $\Theta_v = t_1(2 + x_1) + t_2(2 + x_2)$. Malgré tout, les paramètres t_1, x_1, t_2, x_2 ne sont pas tous connus car ils ne sont fixés que par Θ_s et Θ_v. On impose $x_2 = -1$ pour éviter les problèmes de matière de neutrons ferromagnétique.

Le reste des paramètres est fixé à l'aide des propriétés des noyaux finis, en particulier les rayons de charge et les énergies de liaison. Les noyaux sont choisis doublement magiques pour éviter les effets de corrélation compliqués. Le noyau ^{16}O n'est pas utilisé dans la mesure où il est très petit et où les corrélations au-delà du champ moyen sont trop importantes. On évite également ^{78}Ni dont la masse est estimée par extrapolation mais n'a pas été mesurée.

Au final, la paramétrisation des forces de Skyrme obtenue avec ce protocole est appelée Sly4. On pourrait citer Sly5, 6, 7 qui incorporent notamment la contribution d'un couplage tenseur entre spin et gradient (elle est nulle dans les noyaux magiques saturés en spin) et les corrections du centre de masse. Les prédictions de ces forces, ajustées sur des noyaux près de la vallée de stabilité, sont relativement robustes autour de celle-ci.

Les forces de Skyrme sont phénoménologiques dans la mesure où elles ne proviennent pas de processus d'échange clairement identifiés. *A contrario*, on peut essayer de construire des interactions à partir d'échanges de mésons ; dans le cas relativiste cette approche a été initiée par Walecka (chapitre 3). Les interactions peuvent également être contraintes par la présence de QCD sous-jacent, en particulier par la symétrie chirale et le confinement. Ce sera l'objet des chapitres développés dans la seconde partie de cette thèse ; les détails introductifs seront donnés dans la seconde section de ce chapitre.

1.1.4 Problème à N-corps

Un problème essentiel de la physique nucléaire qui n'a pas été détaillé jusqu'ici correspond au fait que l'on a affaire à un système à N corps, dont la résolution ne pourra être faite directement. L'idée développée pour le résoudre de façon approchée est de remplacer le potentiel à N corps par un potentiel moyen ressenti par chaque particule. C'est la méthode dite du « champ moyen ». On obtient ainsi un système de quasiparticules indépendantes comme expliqué dans le chapitre sur le formalisme. Le problème se ramène alors à la construction du potentiel moyen. Dans le cas d'un atome, il s'agissait du potentiel coulombien en $1/r$ dû au noyau ainsi que de l'écrantage par les autres électrons. De manière similaire, ici le potentiel est dû aux autres nucléons : ainsi sa détermination dépend-elle des autres nucléons qui eux-mêmes évoluent dans ce potentiel. Les méthodes d'approximation basées sur le champ moyen sont donc auto-cohérentes, ce qui constitue une manière de choisir le meilleur potentiel moyen de façon méthodique. Le champ moyen développé dans cette thèse est basé sur un choix de l'état fondamental sous forme d'un déterminant de Slater, c'est-à-dire de particules (ou plutôt de quasiparticules) indépendantes[(3)]. Cette description, appelée champ moyen de Hartree–Fock, est néanmoins insuffisante dans le cas des noyaux finis. Pour un noyau magique, la couche de valence est entièrement remplie : la première excitation du noyau est à un niveau d'énergie supérieure à ce qu'on peut obtenir avec l'interaction résiduelle du champ moyen. Mais dans le cas d'un noyau quelconque, le saut entre le fondamental et le premier niveau excité est généralement faible. Dans ce cas, les corrélations entre ces niveaux ne peuvent plus être ignorées. Le plus simple est de les inclure dans la définition du fondamental. Le premier type de corrélations qu'on introduit sont les corrélations à deux corps ou d'appariement qui couplent deux états de quasiparticules. On obtient ainsi la théorie de Hartree–Fock–Bogoliubov (HFB). En général, on se contente d'apparier des états qui sont inverses l'un de l'autre par renversement du temps (par analogie avec la théorie BCS de la superfluidité), ce qui simplifie grandement les équations. On peut ajouter aussi des excitations collectives. La méthode la plus simple pour ce faire est de chercher l'état d'énergie la plus basse du noyau lorsque celui-ci est placé dans des champs extérieurs, ce qui revient à ajouter des contraintes au hamiltonien. Ces champs extérieurs – ou ces contraintes – sont choisis de manière à simuler une déformation quelconque : en général quadrupolaire ou octopulaire. Ceci constitue HFB

[(3)] Les collisions entre nucléons dans le noyau atomique sont fortement inhibées par le principe d'exclusion de Pauli : pour un nucléon d'énergie cinétique de 10 MeV, le libre parcours moyen est ainsi de 15 fm [21]. De ce fait, les nucléons se heurtent bien plus souvent à la paroi nucléaire qu'à leurs condisciples. Cette particularité permet de considérer les quasiparticules comme indépendantes mais se mouvant dans le champ moyen modélisé par la paroi.

avec contraintes. On pourrait mentionner qu'il est bien sûr possible d'aller plus loin, en introduisant par exemple un couplage entre ces différentes excitations. Dans le cas de la matière nucléaire, le gap vaut environ $2,5$ MeV à densité ordinaire [22] : on se contente donc du champ moyen de Hartree–Fock dans la plus grande partie de cette thèse.

1.1.5 Au-delà du champ moyen

Les expériences à base de faisceaux d'ions radioactifs, en particulier au Ganil à Caen, permettent de connaître de nombreuses propriétés d'un large domaine de la carte des noyaux. Ces dernières années, plusieurs phénomènes exotiques ont été mis en évidence, comme par exemple (pour ne pas être exhaustif) les halos de neutrons ou la disparition de nombres magiques. De nouveaux dispositifs, tels SPIRAL 2 au Ganil ou FAIR au GSI à Darmstadt, vont bientôt permettre de repousser encore les limites d'exploration de la carte des noyaux.

Les premiers modèles effectifs de physique nucléaire ont été développés dans le cadre du champ moyen. Cependant, pour décrire par exemple les phénomènes exotiques ci-dessus, il est nécessaire d'aller au-delà et de prendre en compte les corrélations. Plusieurs pistes ont été envisagées. Citons entre autres la méthode de la coordonnée génératrice qui consiste à construire la fonction d'onde fondamentale corrélée comme une superposition linéaire de fonctions d'onde de champ moyen.

La méthode de la fonctionnelle de densité est une méthode très puissante qui permet d'accéder à une description unifiée des propriétés globales, des excitations nucléaires et des réactions. Elle s'applique à l'ensemble des noyaux moyens et lourds et est largement utilisée aujourd'hui. Elle a été développée à l'origine en physique du solide pour décrire les atomes et les molécules (typiquement les réseaux cristallins) qui constituent eux aussi des systèmes à N-corps. Un tel système est décrit de manière générale par un hamiltonien

$$H = T + W + V_{ext} \tag{1.12}$$

où T correspond à l'énergie cinétique des particules, W à l'interaction entre elles et V_{ext} à un potentiel extérieur qui peut être par exemple un champ électrique imposé dans un cristal[(4)]. D'après Hohenberg et Kohn [23], l'énergie peut être écrite comme une fonctionnelle de la densité à un corps ρ :

$$E[\rho] = F[\rho] + \int d\mathbf{r} V_{ext}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}). \tag{1.13}$$

La puissance de cette méthode tient au fait que les quantités qui nous intéressent peuvent être écrites en fonction de 3 coordonnées contre 3N coordonnées dans les problèmes à N corps en général. $F[\rho]$ ne dépend que du

[(4)] En physique nucléaire, il n'y a pas de potentiel extérieur. Ceci constitue une difficulté dans laquelle il n'est pas question de rentrer ici.

type d'interaction considérée et absolument pas du champ extérieur. C'est donc une fonctionnelle universelle qui prend la même forme quel que soit le système étudié. Elle correspond à l'énergie libre et peut être décomposée sur une partie cinétique et une partie d'interaction :

$$F[\rho] = T[\rho] + W[\rho] = \langle\psi[\rho]|T|\psi[\rho]\rangle + \langle\psi[\rho]|W|\psi[\rho]\rangle. \tag{1.14}$$

Deux autres propriétés importantes sont liées à celle-ci :

- l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ est une fonctionnelle unique de la densité de particules du fondamental : $|\psi_0(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N)\rangle = |\psi_0[\rho_0]\rangle$. En conséquence, la valeur moyenne sur le fondamental de n'importe quelle observable $\mathcal{O}$ est une fonctionnelle de ρ_0 : $\mathcal{O}_0 \equiv \langle\psi[\rho_0]|\mathcal{O}|\psi[\rho_0]\rangle = \mathcal{O}[\rho_0]$;
- l'énergie et la densité du fondamental peuvent être obtenues pour un potentiel extérieur donné en minimisant la fonctionnelle d'énergie : $E_0 = E_{V_{ext}}[\rho_0] < E_{V_{ext}}[\rho]$.

Bien que le théorème donne l'existence d'une telle fonctionnelle, il ne dit pas comment construire T ni W. On utilise en physique nucléaire le schéma de Kohn et Sham [24]. Celui-ci part d'un système auxiliaire constitué des N particules sans interaction soumises à un potentiel V_s :

$$H = T + V_s. \tag{1.15}$$

Le schéma stipule qu'il existe un unique potentiel V_s tel que la densité du fondamental du système auxiliaire soit la même que la densité du fondamental du système en interaction. Dans ce cas, les fonctions d'onde à une particule ϕ_i sont solutions de l'équation de Kohn-Sham

$$[T_i(\mathbf{r}) + V_s(\mathbf{r}]\phi_i = \varepsilon_i\phi_i, \tag{1.16}$$

où l'opérateur d'énergie cinétique à une particule est par exemple $T_i = -\nabla^2/2m$. En physique nucléaire relativiste, on retrouve l'équation de Hartree–Fock (2.17).

La fonctionnelle d'énergie, outre le terme cinétique, est généralement décomposée sur un terme direct, ou de Hartree, et un terme d'échange qui contient *a priori* toutes les corrélations :

$$F[\rho] = E_{kin}[\rho] + E_H[\rho] + E_{xc}[\rho]. \tag{1.17}$$

Les quantités ci-dessus peuvent être construites à partir des interactions, par exemple de Skyrme. Si on utilise plutôt les interactions présentées dans cette thèse, on obtient par exemple pour le modèle de Walecka à l'approximation Hartree (avec les notations utilisées dans la suite) :

$$E_{kin}[\rho] = \int d\mathbf{r}\langle\phi_0|\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + M_N)\psi|\phi_0\rangle, \tag{1.18}$$

$$E_H[\rho] = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\langle\phi_0|G_\sigma^{(0)}(\bar{\psi}\psi)^2|\phi_0\rangle + \langle\phi_0|G_\omega^{(0)}(\bar{\psi}\psi^\mu\psi)^2|\phi_0\rangle, \tag{1.19}$$

où les constantes sont déduites du modèle de Walecka : $G_\sigma^{(0)} = -(g_\sigma/m_\sigma)^2$ et $G_\omega^{(0)} = (g_\omega/m_\omega)^2$.

Toute la spécificité d'une approche particulière consiste à choisir un niveau d'approximation pour E_{xc}. Le plus simple consiste à ne garder que le premier ordre, correspondant au système homogène, ou terme de Fock. Cela revient alors au champ moyen de la section précédente. On peut citer l'approximation de densité locale (LDA) où E_{xc} est choisi comme :

$$E_{xc}^{LDA} = \int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})e_{xc}^{unif}(\rho(\mathbf{r})) \tag{1.20}$$

où $e_{xc}^{unif}(\rho)$ est l'énergie de corrélation d'un système uniforme infini de densité ρ.

Lorsqu'on se limite dans la développement de E_{xc} aux diagrammes en anneaux présentés au chapitre suivant, on peut les resommer en fonction du terme de Fock. On obtient alors l'approximation dite de la phase aléatoire (pour des raisons historiques) ou RPA. On y reviendra plus longuement à la section 2.2.

*

* *

Le champ de la physique nucléaire est bien sûr plus étendu que l'esquisse qui en a été faite ici. On pourrait citer par exemple les approches dépendant du temps et la dynamique des réactions nucléaires. Cependant, ces sujets ne sont pas du tout abordés dans cette thèse consacrée à la matière nucléaire à l'équilibre.

1.1.6 Étoiles à neutrons

Les étoiles à neutrons constituent un bon exemple d'application, ou un bon test observationnel, pour les modèles de matière nucléaire.

Les étoiles à neutrons sont formées à partir de l'effondrement de supernovæ. Ce sont donc des objets très denses, dont la densité varie de celle du fer (à l'extérieur) à plusieurs fois la densité nucléaire (au centre). Les forces de gravitation vont donc jouer un rôle prépondérant ; les étoiles à neutrons sont d'ailleurs les objets les plus compacts que l'on connaisse si on excepte les trous noirs. Il a été mesuré expérimentalement que la plupart d'entre elles ont une masse voisine de $1,4M_\odot$ [25]. Leurs rayons sont typiquement de l'ordre de la dizaine de kilomètres. Elles sont composées à l'extérieur d'une écorce consistant en un réseau cristallin d'agrégats nucléaires baignant dans un gaz de neutrons de basse densité et d'électrons ultrarelativistes. L'intérieur serait composé de matière nucléaire en équilibre β, contenant une majorité de neutrons avec des protons et des leptons (électrons, muons). Les neutrinos et antineutrinos produits lors de désintégrations β s'échappent vers l'extérieur

de l'étoile. Cependant, les densités étant très élevées vers le centre de l'étoile (plusieurs fois la densité de la matière nucléaire), on peut supposer que des hadrons plus lourds sont présents, voire une phase de quarks déconfinés en supraconductivité de couleur (voir le paragraphe 1.2.2 pour plus de détails). En revanche, malgré ces propriétés extrêmes, les étoiles à neutrons sont des objets qui peuvent être traités à l'approximation de température nulle (elle est en effet inférieure à la température de Fermi).

Une étoile à neutrons est donc un système en équilibre entre les forces gravitationnelles qui tendent à la faire s'effondrer et les forces de pression de la matière nucléaire. Pour la décrire, il est nécessaire de préciser les points suivants [26] :

- la matière nucléaire est supposée être un fluide à l'équilibre chimique et à l'équilibre hydrostatique ;
- on choisit pour la loi de gravitation la relativité générale ;
- il faut donner une équation d'état, c'est-à-dire la variation de la pression en fonction de la densité nucléaire.

Étant donné que les champs gravitationnels sont très intenses, la relativité générale s'impose. On peut mesurer le caractère relativiste d'un objet à partir de son rayon de Schwarzschild R_{sch}. À partir du moment où il représente une fraction non négligeable de son rayon R, l'objet doit être traité à l'aide de la relativité générale. Les trous noirs, pour lesquels $R_{sch}/R = 1$, sont complètement relativistes. Pour les étoiles à neutrons, $R_{sch}/R \sim 0.2$, ce qui est conséquent. En comparaison, ce rapport est d'environ 10^{-6} pour le soleil. Le modèle le plus simple est donné par une étoile statique à symétrie sphérique. La métrique engendrée par l'étoile est de la forme (avec des notations évidentes)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -e^{2\Phi}dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.21}$$

où Φ est le potentiel gravitationnel et $m(r)$ est la masse contenue dans une sphère de rayon r autour du centre de l'étoile. L'équation d'état de la matière nucléaire est obtenue par des modèles de physique nucléaire. Celui de Skyrme a été largement utilisé, et on propose dans cette thèse une équation d'état déduite de notre modèle (voir le paragraphe 5.4.5). Les prédictions qu'elle apporterait concernant les étoiles à neutrons constitueraient un bon test du modèle. Pour l'écorce en revanche, il faut inclure des descriptions spécifiques, on peut utiliser par exemple le travail proposé dans [27].

Une première propriété des étoiles à neutrons qui peut être étudiée est la variation de la masse de l'étoile en fonction du rayon. La courbe obtenue à partir d'une équation d'état donnée a typiquement l'allure présentée figure 1.2. Ces courbes sont paramétrées par un paramètre qui n'apparaît pas sur le courbe et qui peut être par exemple la densité au centre de l'étoile. La partie située à gauche du maximum corespond à un domaine de solutions

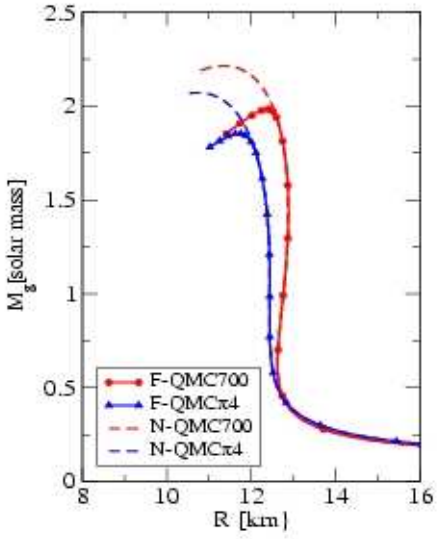

FIG. 1.2: *Allure de la variation de la masse gravitationnelle d'une étoile à neutrons en fonction de son rayon pour différentes équations d'état [28].*

où l'étoile est instable. Toutes les valeurs du couple (rayon, masse) situées à droite du maximum sont *a priori* des valeurs acceptables qui sont fixées par l'histoire de l'étoile. Le maximum doit être supérieur à la valeur des plus grandes masses connues pour les étoiles à neutrons.

Le profil de la fraction de protons permet de discuter un deuxième point important, le refroidissement, qui peut constituer lui aussi une contrainte sur les modèles d'étoiles à neutrons et donc sur les équations d'état. Les mécanismes de refroidissement sont associés à l'émission de neutrinos comme c'est le cas pour le mécanisme de URCA, généralement discuté. Celui-ci prédit une émission de neutrinos à partir de la chaîne de réaction suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p + e^- & \rightarrow & n + \nu \\ n & \rightarrow & p + e^- + \bar{\nu}. \end{array} \right. \tag{1.22}$$

La signature typique de cette réaction est l'émission de neutrinos et d'antineutrinos non corrélés d'environ 10 à 20 MeV. Les étoiles à neutrons au centre desquelles a lieu le processus URCA se refroidissent sur des échelles de temps de l'ordre de 10 à 100 ans ; en l'absence de ce mécanisme l'échelle de temps augmente de plusieurs ordres de grandeur (typiquement 6 ordres). Ce mécanisme est bloqué pour des raisons cinématiques si la fraction en protons (par rapport à la densité baryonique) est inférieure à $0,11$ (0.148 si l'étoile contient également des muons). Il est possible d'estimer la densité à partir de laquelle la fraction en protons est suffisante ; elle dépend grande-

ment de l'énergie d'asymétrie [29]. On note des différences très importantes entre les modèles non relativistes (Skyrme, Gogny) et les modèles basés sur des lagrangiens relativistes, comme dans cette thèse. Cependant, les mesures expérimentales ne permettent pas à l'heure actuelle de discriminer entre la présence ou non de ce phénomène dans les étoiles à neutrons.

Enfin, il faut signaler que les équations d'état prédites au paragraphe 5.4.5 sont peut-être insuffisantes pour décrire la matière très dense au centre des étoiles à neutrons (bien que les observations actuelles ne permettent pas d'infirmer que les étoiles à neutrons sont composées uniquement de matière ordinaire). En effet, les densités en jeu sont plusieurs fois celles de la saturation de la matière nucléaire. Dans ce cas, on pourrait inclure comme première modification des équations d'état la contribution de baryons étranges, par exemple comme dans [28]. On pourrait aussi se poser la question d'une transition de phase vers un état où les quarks sont déconfinés.

1.2 Physique hadronique

1.2.1 Des quarks à QCD

Suite à la découverte de Chadwick, une foule de particules de la famille des protons et des neutrons a été découverte expérimentalement dans les années 50. Ils seront appelés hadrons, d'un mot grec signifiant « fort », car soumis à l'interaction forte. En 1932, Heisenberg avait rangé le proton et le neutron dans un multiplet d'isospin, représentation du groupe $SU(2)$. Au début des années 60, Ne'eman et Gell-Mann généralisèrent indépendamment le travail de Heisenberg en rangeant les hadrons dans des multiplets représentations de $SU(3)$. Le succès de cette démarche a trouvé une explication en 1964 lorsque Gell-Mann et Zweig proposèrent le modèle des quarks. Avec trois saveurs de quarks, notées u (pour up), d (pour down) et s (pour strange), on reconstruit la classification issue de $SU_f(3)$. Par la suite, les expériences ont mis en évidence (seulement en 1994 pour le quark le plus lourd) un total de six quarks. Les trois quarks les plus lourds ayant une masse supérieure au Gev, ils n'ont que peu d'influence en physique hadronique de basse énergie : on les négligera dans la suite. Il a été décidé ici d'ignorer également l'effet du quark étrange, de masse voisine de 150 MeV.

Le modèle des quarks doit être complété par l'ajout de particules correspondant à l'interaction entre eux. Les champs de quarks sont des spineurs contenant trois champs de Dirac pour les trois couleurs possibles, ce sont donc des représentations du groupe de Lie $SU_c(3)$. Les vecteurs de la force forte, liée à la couleur, sont alors les générateurs de $SU_c(3)$, au nombre de huit. On les appelle les gluons.

Les quarks étant liés dans les hadrons, il faut pour les observer et les étudier disposer de sondes dont la résolution spatiale est inférieure au fermi, l'échelle du nucléon. L'expérience fondamentale pour ces études est la diffu-

sion profondément inélastique réalisée au SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) au début des années 1970 [30, 31]. Le principe est le même que celui de l'expérience de Rutherford : on envoie un électron sur un nucléon, et on observe la diffusion de celui-là. La figure obtenue dépend de la structure du nucléon, décrite en terme de partons (introduits par Feynman). Ce sont eux qui interagissent avec l'électron *via* l'échange d'un photon virtuel. Ces partons sont des objets sans structure qui portent une partie de l'impulsion du nucléon. Leurs nombres quantiques (spin, charge, ...) seront *a posteriori* identifiés avec ceux des quarks. Les partons sont donc identifiables en partie aux quarks, en partie aux gluons [32]. Les résultats de l'expérience au SLAC sont invariants d'échelle dans une large gamme d'énergie, les partons peuvent donc être vus comme des particules quasi-libres à l'intérieur des hadrons. Lors des expériences de diffusion hadronique (à haute résolution c'est-à-dire à grand moment de transfert) par exemple, ce sont plutôt les partons qui interagissent. Cependant, l'invariance d'échelle n'est pas toujours vérifiée. En particulier, le fait que les quarks ne puissent être isolés montre bien qu'une certaine interaction existe entre eux même au sein des hadrons.

Les interactions entre quarks et gluons peuvent être décrites en termes d'un lagrangien construit de manière à être invariant de jauge locale $SU_c(3)$. Le lagrangien de Dirac pour les quarks s'écrit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{1.23}$$

où m désigne la masse des quarks et ψ un champ de quarks écrit comme un spineur de couleur. Les transformations de jauge correspondent à une rotation dans l'espace de jauge, c'est-à-dire ici dans l'espace des couleurs. Cela revient à multiplier les spineurs de couleur par une matrice g appartenant à $SU_c(3)$. Lorsque la jauge est locale, la matrice dépend de la position, et les quantités présentes dans le lagrangien se transforment selon

$$\psi(x) \longrightarrow g(x)\psi(x) \tag{1.24}$$

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow g(x)\partial_\mu\psi(x) + (\partial_\mu g(x))\psi(x). \tag{1.25}$$

Le terme de masse est donc invariant de jauge locale, mais pas le terme dérivatif. On le rend invariant en remplaçant la dérivée simple ∂_μ par une dérivée dite covariante D_μ qui peut s'écrire de manière générale en fonction de vecteurs $\mathcal{A}^a_\mu$ quelconques :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\mathcal{A}^a_\mu\lambda^a \tag{1.26}$$

où les λ^a sont les générateurs du groupe de couleur. Les $\mathcal{A}^a_\mu$ correspondent aux champs de gluons. Imposer l'invariance de jauge au terme $\bar{\psi}D_\mu\psi$ revient transformer $\mathcal{A}_\mu$ selon

$$\mathcal{A}_\mu \longrightarrow g(x)\left(\mathcal{A}_\mu - \frac{i}{g}\partial_\mu\right)g^{-1}(x). \tag{1.27}$$

Finalement, lorsqu'on ajoute un contenu dynamique aux gluons, on obtient le lagrangien de QCD :

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2} Tr \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \tag{1.28}$$

avec $\mathcal{F}_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$[5]. À partir de ce lagrangien, on peut calculer [32] une constante de couplage mobile α_S qui dépend de l'échelle d'énergie μ^2 selon

$$\alpha_S(\mu^2) = \frac{1}{\frac{(11N_C - 2N_F)}{12\pi} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}}} \tag{1.29}$$

Le nombre de couleurs est $N_C = 3$ et le nombre de saveurs est au plus $N_F = 6$ si bien que $11N_C - 2N_F > 0$. Le paramètre d'échelle de la QCD est $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV. Le comportement de α_S est très différent si on se place dans un domaine d'énergie supérieure ou inférieure à 1 Gev ; cette limite correspond à une distance de l'ordre du fermi. Aux petites échelles d'énergie, c'est à dire aux distances supérieures au fermi qui sont celles de la physique nucléaire, la constante de couplage diverge : les quarks sont confinés dans les hadrons. α_S tend vers zéro pour les grandes impulsions, c'est-à-dire aux distances très inférieures au fermi : les quarks sont libres, ce phénomène est appelé « liberté asymptotique » et a fait l'objet du Prix Nobel 2004[6]. Ces propriétés ont été mises en évidence expérimentalement comme on peut le voir sur la figure 1.3. On peut noter que la masse des quarks dépend elle aussi de l'échelle à laquelle on se place. Pour les masses données ci-dessus, qui sont pertinentes dans le cadre de la physique hadronique et de la physique nucléaire, on a donné la valeur pour une échelle de l'ordre de 1 GeV.

Dans le secteur des quarks, la QCD possède une symétrie appelée chirale dont les propriétés sont détaillées au chapitre 4. Le terme de masse présent dans le lagrangien brise explicitement la symétrie chirale car il n'est pas invariant sous ses transformations. La masse des quarks étant négligeable devant les échelles hadroniques, cette brisure explicite est très petite. Dans le vide cependant, la symétrie est spontanément brisée. Ceci conduit entre autres à l'existence d'un condensat de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$ non nul. Lorsqu'on augmente la température ou la densité, la valeur absolue du condensat diminue, lorsqu'il devient nul la symétrie chirale est restaurée : le condensat de quarks peut donc être choisi comme paramètre d'ordre de la restauration de la symétrie chirale. L'étude de cette restauration donne lieu à de nombreuses recherches tant expérimentales que théoriques, nous y reviendrons dans les sections suivantes. Tout modèle effectif de QCD se doit d'incorporer cette propriété essentielle, ce sera en particulier le cas dans le corps de cette thèse.

[5] On peut également écrire $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ sous une forme moins compacte : $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + g f_{abc}[\mathcal{A}^b_\mu, \mathcal{A}_\nu]^c$ où f_{abc} sont les constantes de structure du groupe de couleur.

[6] Le Prix Nobel a été attribué à D. Gross, D. Politzer et F. Wilczeck.

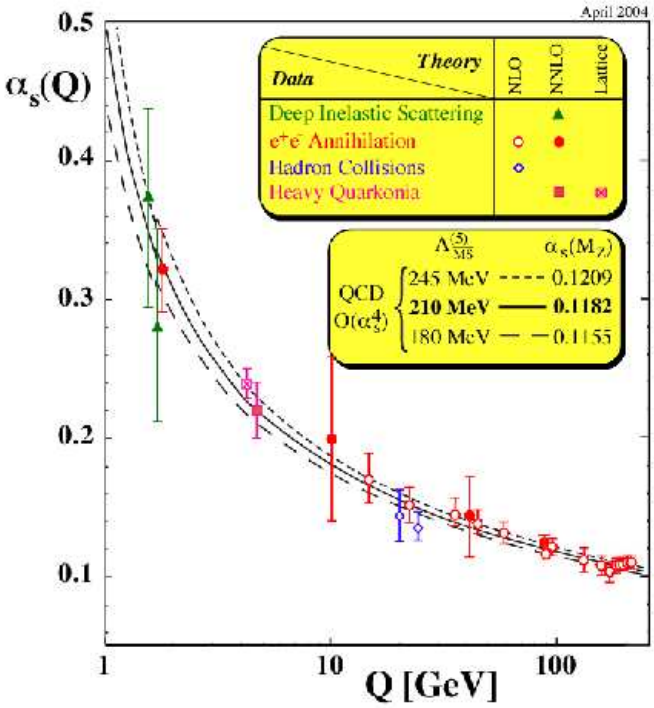

FIG. 1.3: *Variation de la constante de couplage de QCD en fonction de l'échelle d'énergie [33].*

1.2.2 Diagramme de phases de QCD

De manière générale, les propriétés de la matière composée de quarks peuvent être présentées dans le diagramme de phases représenté figure 1.4. Les différentes parties de la figure correspondent à des domaines de physique et des expériences extrêmement variés que nous allons brièvement commenter.

À basse densité mais haute température, la matière se trouve sous forme d'un plasma de quarks et de gluons (QGP) supposé avoir existé dans l'univers primordial après le big-bang. Lorsqu'on la refroidit, elle se condense sous forme d'un gaz de hadrons. On suppose qu'entre les deux a lieu non pas une transition de phase mais plutôt un cross-over. Cette transition douce est encore mal comprise et donne lieu à de nombreuses recherches tant du point de vue théorique qu'expérimental. Les expériences, qu'elles soient sur cible fixe ou frontales, consistent toutes en des collisions proton-proton (pp), proton-noyau (pA), noyau-noyau (AA) qui permettent de chauffer la matière ou de la rendre très dense. L'expérience NA60 qui a eu lieu au CERN et celles qui ont eu lieu à RHIC à Brookhaven ont permis de commencer à étudier la

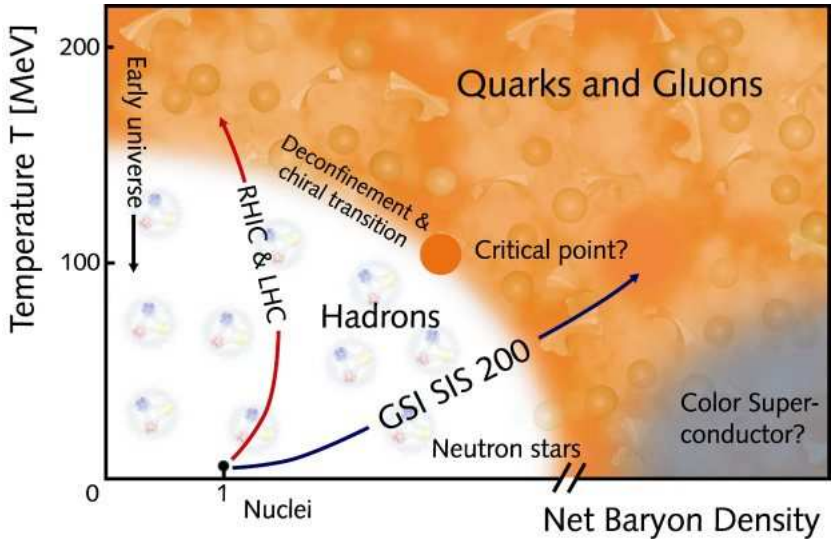

FIG. 1.4: *Diagramme de phases de la matière nucléaire [34].*

transition, mais les expériences du LHC et en particulier ALICE (A Large Hadron Collider Experiment), figure 1.5, devraient permettre de mieux comprendre les mécanismes de la transition ainsi que le plasma de quarks et de gluons. En particulier, la température de déconfinement semble coïncider avec la restauration de la symétrie chirale dans les simulations sur réseau. Les sondes expérimentales sont de plusieurs natures. Tout d'abord, les photons à grand moment transverse, peu sensibles aux interactions fortes, permettent d'obtenir des images du système expérimental aux différents moments de la réaction. Ils interviennent en général dans des processus de QCD perturbative et sont très utiles pour comparer les différents systèmes de réaction (pp, pA, AA). Ils servent également de référence pour les autres sondes [35]. Ensuite, les di-jets, particules émises en deux gerbes jaillissant dos à dos, sont issus de l'interaction de deux quarks ce qui permet d'étudier celle-ci. À l'opposé de ces processus durs, l'étude des dileptons a été l'une des premières pistes explorées pour mettre en évidence l'existence d'un QGP au cours de la réaction. Le profil du spectre dans la région de masse du rho permet d'étudier la restauration de la symétrie chirale [36] tandis que dans la région des quarks lourds, la suppression du méson J/ψ (composé d'un quark et d'un anti-quark charmés) peuvent également permettre de mettre en évidence la présence de QGP [37]. D'un point de vue théorique, les réactions de dileptons peuvent être décrites en termes de corrélateurs de courants électromagnétiques. Une façon simple de décrire ces courants est donnée par le modèle de dominance vectorielle (VDM) qui consiste à écrire le courant électromagnétique comme une somme de courants dominés chacun

FIG. 1.5*: Photo du détecteur ALICE.*

par un méson particulier (oméga, rho, etc.) [38]. L'hypothèse VDM conduit à une phénoménologie remarquable [39, 40] et ses prédictions serviront à fixer une partie des paramètres de cette thèse (voir la section 5.4).

À haute densité mais basse température, on suppose que la matière se trouve sous une phase dite supraconductrice de couleur. On suppose également que la matière présente au coeur des étoiles à neutrons (voir section 1.1.6) se situe dans cette zone du diagramme. Entre la matière à basse énergie et la phase de déconfinement se trouve une transition de phase qui semble être du premier ordre. Au bout de cette ligne de transition de phase, la séparant du cross-over, il y a probablement un point critique. L'étude expérimentale de la ligne de transition de phase sera menée au GSI à Darmstadt dans l'expérience FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research) qui démarrera vers 2015. Le point critique pourrait également être étudié en poussant les expériences de RHIC à basse énergie [41].

Enfin, à basse densité et à température nulle, la matière se trouve sous forme de noyaux. Dans la section précédente, nous avons développé la notion de matière nucléaire. C'est bien dans cette partie du diagramme de phases que se situe le cadre de cette thèse et les propriétés importantes présentes sur le diagramme influeront sur la physique : le lagrangien sera construit au chapitre 4 de manière à respecter la symétrie chirale et nous verrons qu'il

faudra également adjoindre un terme décrivant le confinement.

1.2.3 QCD perturbative

La QCD perturbative, une approximation qui correspond en particulier aux petites distances, aux grandes densités ou aux hautes températures, constitue un domaine de physique à part entière dont il ne sera pas question dans cette thèse. Cependant, les prédictions et expériences de cette physique peuvent mettre des contraintes à plus basse énergie comme c'est le cas par exemple pour les diffusions profondément inélastiques qui permettent d'accéder aux distributions de partons. Dans les expériences de physique hadronique, de nombreux phénomènes correspondent à la physique de QCD perturbative et leur connaissance est nécessaire à la compréhension des expériences comme on l'a vu au paragraphe précédent.

1.2.4 QCD sur réseau

Lorsque la constante de couplage de QCD devient de l'ordre de 1 ou qu'elle est supérieure à 1, les méthodes de QCD perturbative ne peuvent plus s'appliquer. Une méthode de calcul *ab initio* a été développée numériquement. Elle consiste à discrétiser l'espace-temps et à calculer à l'aide de supercalculateurs les intégrales présentes dans les quantités physiques sur le réseau obtenu, d'où le nom de QCD sur réseau.

La mécanique quantique et la théorie quantique des champs peuvent être écrites dans un formalisme d'intégrales de chemin [42], formalisme sophistiqué dans les détails duquel nous n'entrerons pas ici. Les valeurs moyennes d'observables, qui sont les quantités physiquement intéressantes, peuvent être écrites selon

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\mathcal{A}_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \mathcal{O} e^{iS(\mathcal{A}_\mu,\bar{\psi},\psi)}}{\int \mathcal{D}\mathcal{A}_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{iS(\mathcal{A}_\mu,\bar{\psi},\psi)}} \tag{1.30}$$

où $S(\mathcal{A}_\mu, \bar{\psi}, \psi)$ est l'action. L'intégrale est fonctionnelle, c'est-à-dire que les variables d'intégration ne sont pas des points de l'espace-temps mais des fonctions (définies sur l'espace-temps) correspondant aux chemins pouvant être empruntés par les « particules » $\mathcal{A}_\mu$, $\bar{\psi}$ et ψ. Ces chemins sont les chemins permis par la cinématique du problème. L'exponentielle de l'action donne un « poids statistique » à chacun de ces chemins, le chemin le plus probable correspondant à un minimum de l'action[7]. Le dénominateur est une normalisation.

[7] On peut de manière équivalente travailler en temps imaginaire, l'intégrale (1.30) dépend alors de $\exp(-S(\mathcal{A}_\mu, \bar{\psi}, \psi))$. C'est dans ce sens qu'il faut comprendre l'interprétation en terme de « poids statistique » ; dans ce cas le chemin le plus probable est bien celui qui correspond à un minimum de l'action.

Si on discrétise l'espace-temps, on peut considérer tous les chemins qui passent par les noeuds du réseau, calculer la valeur de l'exponentielle en chaque noeud et obtenir l'intégrale. Cependant, la discrétisation du réseau entraîne une brisure de la symétrie de jauge. On va donc introduire une nouvelle manière de réaliser cette symétrie au niveau du lagrangien qui sera plus adaptée à la description sur réseau. On note traditionnellement a le pas du réseau qui est petit. Le terme de dérivée écrit sur réseau devient

$$\bar{\psi}(x)\partial_\mu\psi(x) \longleftrightarrow \bar{\psi}(x)\frac{\psi(x+\hat{\mu})-\psi(x)}{a} \tag{1.31}$$

où $\hat{\mu}$ est le vecteur unitaire (d'un pas de réseau) dans la direction μ. Le terme $\bar{\psi}(x)\psi(x)$, comme le terme de masse, est automatiquement invariant de jauge locale. De même qu'on avait remplacé la dérivée ronde par une dérivée covariante assurant l'invariance de jauge, on va remplacer $\bar{\psi}(x)\psi(x+\hat{\mu})$ par un terme qui sera invariant :

$$\bar{\psi}(x)\psi(x+\hat{\mu}) \longrightarrow \bar{\psi}(x)U(x,x+\hat{\mu})\psi(x+\hat{\mu}) \tag{1.32}$$

où $U(x,x+\hat{\mu})$ est une matrice se transformant correctement pour que le terme obtenu soit bien invariant :

$$U(x,x+\hat{\mu}) \longrightarrow g(x)U(x,x+\hat{\mu})g^{-1}(x+\hat{\mu}). \tag{1.33}$$

On appelle $U(x,x+\hat{\mu})$ un *lien* car si $\bar{\psi}(x)$ et $\psi(x+\hat{\mu})$ vivent sur les noeuds du réseau, $U(x,x+\hat{\mu})$ vit sur les liens comme représenté à gauche de la figure 1.6.

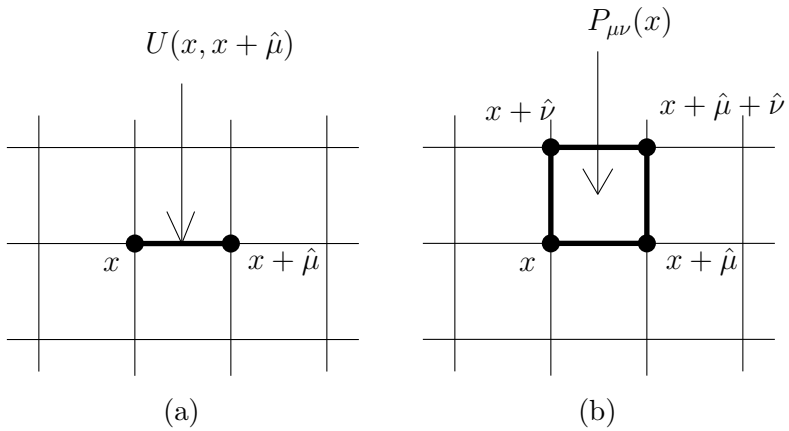

FIG. 1.6: *Illustration d'un lien du réseau (a) et d'une plaquette (b).*

On peut alors établir que U est relié au champ $\mathcal{A}_\mu$ suivant [43]

$$U(x,y) = \mathcal{P}e^{ig\int_x^y dx_\mu \mathcal{A}_\mu^a(x)\lambda^a}. \tag{1.34}$$

On écrit à présent l'action en fonction des nouvelles variables, U, $\bar{\psi}$ et ψ :

$$S_Q = \sum_x \bar{\psi}(x) Q_{xy}[U] \psi(y). \tag{1.35}$$

La partie quarkionique entre les sites m et n peut être donnée par exemple par l'action de Wilson (il en existe d'autres)

$$Q_{m,n} = m\delta_{m,n} + \frac{1}{2a} \sum_{\hat{\mu}} (\gamma_\mu U(m, m+\hat{\mu}) \delta_{m,n-\hat{\mu}} - \gamma_\mu U(m, m-\hat{\mu}) \delta_{m,n+\hat{\mu}}). \tag{1.36}$$

La partie de pure jauge est exprimée en fonction d'une quantité $P_{\mu\nu}$ appelée plaquette, représentée sur la partie droite de la figure 1.6 et définie par : $P_{\mu\nu}(x) = U(x, x+\hat{\mu}) U(x\hat{\mu}, x+\hat{\mu}+\hat{\nu}) U(x+\hat{\mu}+\hat{\nu}, x+\hat{\nu}) U(x+\hat{\nu}, x)$. L'action de pure jauge est

$$S_j = \frac{6}{g^2} \sum_x \sum_{\mu\langle\nu} ReTr \frac{1}{3} (1 - P_{\mu\nu}(x)). \tag{1.37}$$

On peut redéfinir les valeurs moyennes d'opérateurs avec une intégrale de chemin dépendant des nouvelles variables de manière analogue à l'équation (1.30). Par exemple si on veut obtenir le propagateur d'un nucléon, on calculera [44, 45, 46]

$$\langle N_a(x) \bar{N}_a(y) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi N_a(x) \bar{N}_a(y) e^{i\beta S_{QCD}[U]} \tag{1.38}$$

où $S_{QCD} = S_Q + S_j$ et $\beta = 6/g^2$. Le nucléon N_a est écrit en fonction des champs de quarks de manière à avoir les bons nombres quantiques. Par exemple pour le proton

$$N_a = \varepsilon^{ijk} (\psi_u^i C \gamma^5 \psi_d^j)(\psi_u)_a^k. \tag{1.39}$$

Le calcul de ce propagateur permet après beaucoup de difficultés[8] de remonter à la fonction spectrale et à la masse du nucléon.

Les calculs sur réseaux se font en métrique euclidienne, ce qui revient à prendre un temps imaginaire. L'intégrale de chemin est équivalente formellement aux équations de la physique statistique, la normalisation, notée Z, étant l'analogue d'une fonction de partition. β est reliée à la constante de couplage g. Elle est proportionnelle au temps imaginaire $\beta = i\tau$, mais elle peut également être vue comme l'inverse de la température. Dans le cas où la dimension temporelle est égale ou supérieure aux dimensions spatiales, on peut considérer que β est grand et que la température est nulle. Pour travailler à température finie, il faudra que la dimension temporelle soit petite

[8] Il n'est pas question ici d'entrer dans ces difficultés qui constituent un domaine de recherche à part entière.

devant les dimensions spatiales, en pratique on se contente d'un rapport 4 pour le nombre de pas du réseau entre les deux dimensions.

Le pas du réseau doit être suffisamment petit pour décrire la physique à l'intérieur d'un nucléon, il est typiquement choisi autour de $0,1$ fm. Ceci permet de supprimer les divergences ultraviolettes en coupant les énergies supérieures à $1/a$. Les réseaux doivent également avoir une taille supérieure à celle des hadrons soit quelques fermis. Les tailles de réseaux typiques sont alors en pratique autour de 24 ou 32 pas dans chaque direction. Par exemple, pour calculer le propagateur (1.38), la collaboration [45] a utilisé des réseaux de taille $12^3 \times 24$, $16^3 \times 32$ et $24^3 \times 48$, ce qui fait plus d'un demi million de noeuds pour le troisième réseau. Les calculs nécessitent des machines très puissantes qui ne sont disponibles qu'au sein de grandes collaborations internationales.

Les simulations dépendent toutefois de deux paramètres, la masse des quarks (on prend pour simplifier les masses dégénérées) et la constante de couplage. Cependant, on préfère en général prendre comme référence la masse des pions déduite de la simulation. Il est numériquement très difficile de descendre à des masses de quarks (et donc de pions) physiques. Les ressources informatiques actuelles permettent de descendre à des masses du pion de l'ordre de 250 MeV [47]. On extrapole pour finir les résultats à une masse du pion physique pour connaître les résultats physiques cherchés.

Les réseaux permettent également d'étudier la restauration de la symétrie chirale. Cependant, il peut être profitable d'étudier ce phénomène à l'aide d'un modèle effectif qui ne tient pas compte des processus hautement non perturbatifs d'échanges de gluons. C'est le cas en particulier du modèle de Nambu–Jona-Lasinio qui permet d'illustrer la restauration de la symétrie chirale.

1.2.5 Modèle de Nambu–Jona-Lasinio

La stratégie pour construire une théorie effective est basée sur les deux remarques suivantes [48]. Premièrement, la théorie doit contenir des propriétés d'analyticité, d'unitarité, de causalité, etc. et respecter les symétries de la physique, en particulier ici la covariance de Lorentz et la symétrie chirale. Deuxièmement, on peut remarquer que la plupart des problèmes de physique se cantonnent à un intervalle de longueur (ou d'énergie) spécifique ; il n'est pas nécessaire d'inclure les effets dynamiques des échelles plus petites. Les degrés de liberté correspondant aux distances inférieures seront « absorbés » dans les constantes de couplage de la théorie effective. Ces constantes peuvent ensuite être ajustées par exemple sur les données expérimentales.

Un modèle simple de nucléon est celui d'un nucléon composé naïvement de trois quarks dits constituants ayant chacun une masse M d'environ un tiers de celle du nucléon. Un tel quark constituant peut être engendré par le

modèle de Nambu et Jona-Lasinio (modèle NJL). Un mécanisme de brisure spontannée permet aux quarks constituants d'acquerir leur masse importante. Proposé pour le nucléon à l'origine, ce modèle peut être écrit pour les quarks en partant d'un lagrangien non renormalisable

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)q + G_S\left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}iq^5\vec{\tau}q)^2\right]. \tag{1.40}$$

Le terme dépendant de la masse m des quarks brise explicitement la symétrie chirale, il est cependant petit. Les interactions avec les gluons sont simplifiées en une interaction de contact et sont contenues dans la constante de couplage G_S. Le terme d'interaction est choisi de manière à être invariant chiral. De plus, pour simuler que seules les configurations de quarks de faible impulsion sont concernées par cette interaction (les grandes impulsions « vivant » dans le domaine de la liberté asymptotique), on introduit une coupure Λ de l'ordre de Λ_{QCD}. De ce fait, la théorie est automatiquement régularisée dans l'ultraviolet.

La masse présente dans le lagrangien de NJL (1.40) est la masse nue des quarks. Dans la perspective de décrire le nucléon en terme de quarks constituants, on va habiller cette masse nue par un terme de self-énergie type Hartree–Fock ce qui donnera une masse habillée notée M. À température et densité baryonique finies, cette masse, qui est le paramètre variationnel, doit minimiser le grand potentiel. Ceci conduit à une équation dite du « gap » par analogie avec la supra-conductivité :

$$M = m + 4N_C G_S \int_{p<\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{M}{E_p}\left(1 - n(E_p) - \bar{n}(E_p)\right). \tag{1.41}$$

N_C est le nombre de couleurs égal à trois. $E_p = \sqrt{M^2 + p^2}$ est l'énergie des quarks d'énergie positive qui sont présents avec le nombre d'occupation $n(E_p)$. Les états à énergie négative sont présents avec le nombre d'occupation $n(-E_p) = \bar{n}(E_p) - 1$. Cette équation est formellement équivalente à une équation de Hartree–Fock telle la première du système d'équations (2.20).

Dans la limite chirale où la masse nue des quarks est nulle, une solution triviale de cette équation est $M = 0$. Cependant, si la constante de couplage G_1 est suffisamment grande, cette équation admet une deuxième solution non nulle qui correspond au minimum de l'énergie : la symétrie est spontanément brisée. Ce phénomène a été introduit par J. Goldstone et Y. Nambu ; on en reparlera à la section 4.2. On choisi G_S pour que la valeur non nulle de la masse des quarks constituants se situe autour de 350 MeV soit environ le tiers de la masse du nucléon. À température nulle et densité finie, l'effet des nombres d'occupation est de réduire l'intégrale aux impulsions supérieures à l'impulsion de fermi p_F : il devient évident sur l'expression (1.41) que pour l'impulsion de Fermi proche de la coupure Λ, la seule solution pour M est zéro (on montre que c'est également le cas lorsque la température augmente). La symétrie chirale est alors restaurée. On peut

suivre cette restauration à l'aide du condensat de quarks qui est simplement en fonction de la densité baryonique :

$$\ll \bar{q}q \gg (\rho_B) = -2N_C \int_{p_F}^{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left(1 - n(E_p) - \bar{n}(E_p)\right). \tag{1.42}$$

On pourrait raffiner ce modèle en introduisant les pions. Ceci a été fait dans le dernier chapitre de cette thèse, mais à température nulle : on pourra néanmoins s'y référer pour les méthodes de calcul.

1.2.6 Théorie hadronique effective

Pour des densités ordinaires et des températures basses, les degrés de liberté naturels sont plutôt les hadrons que les quarks. On essaie donc de construire une théorie hadronique effective avec des nucléons comme degrés de liberté et des interactions portées par des mésons. La phénoménologie doit nous aider sur ce point à choisir les interactions ; en pratique dans cette thèse on se contentera des mésons non étranges les plus légers (soit de masse inférieure à 1 GeV) qui sont le pion, le sigma, le oméga et le rho (plus le delta qui ne jouera pas un grand rôle). Un modèle purement phénoménologique, proposé par Walecka, est présenté au chapitre 3 de cette thèse. Il ne constitue cependant pas vraiment un modèle effectif dans la mesure où il n'est pas relié à des propriétés sous-jacentes de QCD.

Un premier modèle effectif pourrait être construit à partir de NJL en intégrant les quarks dans la mer de Dirac. Ceci peut être fait à l'aide du formalisme de l'intégrale de chemin en introduisant dans la fonction de partition les degrés de liberté effectifs que sont le pion et le sigma :

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{NJL}} \left[\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\vec{\varphi}_\pi \delta(\sigma - \bar{q}q)\delta(\vec{\varphi}_\pi - \bar{q}i\gamma^5\vec{\tau}q)\right] \\ &= \int \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\vec{\pi} e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{eff}(\sigma,\vec{\pi})} \end{aligned} \tag{1.43}$$

où $\mathcal{L}_{eff}$ se trouve être semblable au lagrangien du modèle σ-linéaire donné à la section 4.2 [36].

Les champs sigma et pionique présents dans le modèle σ-linéaire ne sont toutefois pas les degrés de liberté hadroniques pertinents dans le cadre d'une théorie effective de QCD dans la mesure où ils ne sont pas le plus directement associés aux fluctuations du condensat autour du minimum du potentiel effectif. On choisit donc de reparamétrer le lagrangien en fonction d'un champ $S = f_\pi + s$ et d'un champ $\vec{\pi}$ définis par (voir le système d'équations (4.20))

$$\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi} = SU = (f_\pi + s)e^{i\vec{\tau}\cdot\frac{\vec{\pi}}{f_\pi}}. \tag{1.44}$$

Nous venons d'illustrer la méthode de constructiond'un lagrangien effectif à partir d'un modèle particulier simulant QCD. Cela étant, il est toujours

possible de produire une copie de QCD à basse énergie formulée en terme de degrés de liberté de pions [49]. Ainsi, les théories des perturbations chirales consistent à écrire le lagrangien effectif en fonction de U et de ses dérivées et à le développer à un ordre de perturbations donné, le développement se faisant en p_π/Λ et m_π/Λ où $\Lambda \sim 4\pi f_\pi$ représente le fossé en masse séparant les bosons de Goldstone des autres hadrons. Cependant, le mode radial S est gelé à sa valeur moyenne dans le vide. Or c'est justement ce mode radial qui est relié au condensat de quarks qui permet de décrire la restauration de la symétrie chirale : c'est une des limitations des théories des perturbations chirales. On choisira comme on l'a fait au chapitre 4 de laisser varier le mode radial.

1.2.7 Effets du confinement

Bien que les théories de phénoménologie hadronique constituent un excellent outil pour traiter de vastes domaines de physique nucléaire, il est dommage, dans une théorie effective de QCD, d'oublier complètement le fait que les nucléons sont composés de quarks. P. Guichon a donc proposé un modèle simple de couplage des mésons aux quarks (QMC) [50]. Dans ce modèle de matière nucléaire, les nucléons sont vus comme une assemblée (ou sac) de trois quarks et les interactions de la matière nucléaire sont portées par des mésons sigma et oméga échangés entre les quarks de différents nucléons. Avec ce modèle, il est possible de retrouver les propriétés de saturation de la matière nucléaire. Ce modèle a ensuite été étendu avec notamment l'ajout du méson rho [51] et l'application aux noyaux finis [52, 53]. En ce qui concerne le domaine d'étude de cette thèse, nous nous bornons comme il a déjà été dit à la matière nucléaire. Dans ce cas, l'effet de structure interne du nucléon peut se résumer à modifier la constante de couplage du champ scalaire au nucléon par des effets de milieu. La masse du nucléon dans le milieu est alors de la forme

$$M_N^*(\sigma) = M_N + g_\sigma \sigma + \frac{1}{2}\kappa_{NS}\sigma^2 + \cdots \tag{1.45}$$

Les ordres supérieurs en σ ont peu d'effet dans le cadre des théories QMC. Cependant, on tiendra compte d'un terme cubique afin de raffiner un peu le modèle, ce terme est donné équation (5.4). Ce développement revient bien à modifier la constante de couplage selon

$$g_\sigma \to g_\sigma^*(\sigma) = \frac{\partial M_\sigma^*}{\partial \sigma} = g_\sigma + \kappa_{NS}\sigma. \tag{1.46}$$

La susceptibilité scalaire, notée ici κ_{NS}, dépend de la façon dont on confine les quarks dans le nucléon. Dans les modèles QMC, on choisit généralement le modèle du sac. Cette susceptibilité dépend alors du rayon du sac. Dans cette thèse, on choisit plutôt une valeur estimée à partir de calculs sur réseau [54].

La détermination de κ_{NS} est toutefois indirecte. On a vu au paragraphe 1.2.4 que les prédictions sur réseau ne peuvent se faire à une masse des quarks

(ou une masse des pions) physique. L'extrapolation chirale, c'est-à-dire vers une masse de quarks nulle où la symétrie chirale est réalisée, constitue donc un enjeu important. En particulier, la masse des nucléons ne dépend pas analytiquement de la masse des quarks (ou de façon équivalente de la masse des pions). L'idée de Thomas *et al* [55] a été de séparer la contribution du nuage de pions, correspondant à l'énergie propre du pion et notée $\Sigma_\pi(m_\pi, \Lambda)$, du reste de la masse du nucléon. La contribution des pions peut être calculée dans un modèle chiral avec le paramètre de coupure ajustable Λ. Le reste est développé suivant des puissances de m_π^2 :

$$M_N(m_\pi^2) = a_0 + a_2 m_\pi^2 + a_4 m_\pi^4 + \Sigma_\pi(m_\pi, \Lambda). \tag{1.47}$$

Comme suggéré par Thomas *et al*, on régularise les divergences ultraviolettes de l'équation précédente par un cut-off dans l'espace des moments, choisi ici gaussien. Ce sera également le choix fait dans le dernier chapitre pour régulariser les boucles de pions. Avec cette prescription, les réseaux prédisent $a_2 \simeq 1,5$ GeV^{-1} et $a_4 \simeq -0,5$ GeV^{-3} [55]. On peut remarquer que la faible valeur de a_4 suggère que la partie non pionique de la masse des nucléons est presque linéaire avec m_π^2, c'est-à-dire avec la masse des quarks si on utilise la relation de Gell-Mann–Oakes–Renner (GOR)[(9)]. L'équation (1.47) permet également d'obtenir d'importantes propriétés chirales du nucléon, en particulier le terme sigma pion-nucléon et la susceptibilité scalaire du nucléon. Les parties non pioniques de ces deux quantités sont respectivement

$$\sigma_N^{nonpion} = m_q \frac{\partial M_N^{nonpion}}{\partial m_q} \simeq m_\pi^2 \frac{\partial M_N^{nonpion}}{\partial m_\pi^2} = a_2 m_\pi^2 + 2a_4 m_\pi^4 \simeq 29 \text{ MeV} \tag{1.49}$$

et

$$\chi_{NS}^{nonpion} = \frac{\partial(\sigma_N^{nonpion}/2m_q)}{\partial m_q} \simeq 2\frac{\langle\bar{q}q\rangle_{vac}^2}{f_\pi^4}\frac{\partial}{\partial m_\pi^2}\left(\frac{\sigma_N^{nonpion}}{m_\pi^2}\right) \simeq \frac{\langle\bar{q}q\rangle_{vac}^2}{f_\pi^4} 4a_4. \tag{1.50}$$

Les premières égalités correspondent aux définitions, les deuxièmes à l'utilisation de la relation GOR et les dernières proviennent des analyses sur réseau.

Les résultats sur réseau ci-dessus peuvent être comparés aux prédictions données par un modèle chiral construit à partir de l'équation (1.45). La

(9) Cette relation s'écrit avec des notations évidentes

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m_q\langle\bar{q}q\rangle. \tag{1.48}$$

Elle peut être établie à partir des propriétés de la charge liée au courant axial [38].

susceptibilité scalaire a pour expression [56]

$$\begin{aligned}\chi_{NS}^{(\sigma)} &= -2\frac{\langle\bar{q}q\rangle_{vac}^2}{f_\pi^2}\left(\frac{1}{m_\sigma^{*2}}-\frac{1}{m_\sigma^2}\right)\frac{1}{\rho} \\ &= -2\frac{\langle\bar{q}q\rangle_{vac}^2}{f_\pi^2}\frac{1}{m_\sigma^4}\left(\frac{3g_S}{f_\pi}-\kappa_{NS}\right). \end{aligned} \tag{1.51}$$

On peut donc écrire simplement a_4 :

$$a_4 = -\frac{a_2^2}{2M_N}(3-2C) \tag{1.52}$$

où $C = (f_\pi^2/2M_N)\kappa_{NS}$ est un paramètre sans dimension. En l'absence de réponse scalaire, un modèle sigma prédit $a_4 = -3,4$ GeV^{-3}, ce qui est bien trop grand : l'analyse sur réseau, bien que présentant des incertitudes, semble en effet conduire à une valeur de a_4 faible. Pour retrouver la valeur de a_4 donnée dans [55], il faut prendre $C \simeq 1,25$ qui est une des valeurs qu'on cherchera à conserver dans les résultats (sections 5.4 et 6.6). L'effet du confinement est donc de compenser le terme purement scalaire. Une autre conséquence des effets du confinement est de limiter l'effondrement de la masse du champ scalaire (écrite avec des notations évidentes dont la définition peut être retrouvée dans le corps de l'ouvrage) [57] :

$$m_\sigma^{*2} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\bar{s}^2} \simeq m_\sigma^2 - \left(\frac{3g_S}{f_\pi}-\kappa_{NS}\right)\rho_S. \tag{1.53}$$

Sans la réponse nucléonique, le terme scalaire diminue considérablement la masse du sigma.

Chapitre 2

Formalisme

Ce chapitre a pour but de mettre en place les outils nécessaires à la résolution des problèmes de physique nucléaire évoqués dans la suite de cette thèse. Nous nous contenterons d'abord d'expliquer la méthode d'approximation sur laquelle se base toute l'étude, à savoir la méthode de Hartree–Fock. La notion de propagateur, présente de façon sous-jacente dans les problèmes de Hartree–Fock, sera ensuite introduite. Elle permettra de développer le formalisme au-delà du champ moyen provenant de Hartree–Fock. Une telle partie est évidemment assez dense ; aussi le lecteur novice est-il invité à commencer par lire la partie sur le modèle de Walecka qui constitue un bon exemple d'illustration de la méthode de Hartree–Fock.

2.1 Champ moyen à l'approximation de Hartree–Fock

La quantité fondamentale à calculer est, comme indiqué déjà dans l'introduction générale, l'énergie de liaison des nucléons. C'est elle en effet – ou, plus précisément, le point de saturation – qui fixe les paramètres et permet d'en déduire les autres grandeurs. Les méthodes développées dans ce chapitre, à travers les outils et les approximations proposés, permettent d'accéder à cette énergie de liaison.

2.1.1 Lagrangien d'un système de nucléons relativistes

Le cadre de notre étude est la matière nucléaire à température nulle. Celle-ci peut être décrite en termes de degrés de liberté fermioniques, par exemple des quarks ou des nucléons. Ces « fermions » seront décrits par un spineur noté

$$\psi = \psi_\alpha(p)$$

qui contient tous les indices nécessaires : impulsion p, spin, isospin, saveur, (contenus dans l'indice α) etc. La plupart du temps, ψ désignera un champ

de protons ou de neutrons. Ces champs correspondent à une représentation possible du multiplet fondamental de $SU(2)$. Une autre représentation est constituée par les quarks u et d, elle ne sera utilisée qu'au début du chapitre 4. La matière nucléaire étant, à l'instar de la mer de Dirac, une mer de particules remplie jusqu'à une certaine énergie dite de Fermi, le spineur pourra aussi représenter un trou dans cette mer de Fermi. Si l'on se contente d'un système composé uniquement de nucléons (ou de quarks) indépendants, on obtient un gaz de fermions libres dont la théorie est amplement développée dans les ouvrages de base [58]. Les propriétés des gaz de fermions à température nulle permettent de définir l'énergie de Fermi ε_F. À température nulle en effet, les fermions sont dans un état d'énergie minimale. En l'absence du principe d'exclusion de Pauli (comme ce serait le cas pour des bosons), ils seraient tous dans l'état d'énergie minimale. Cependant, un seul fermion (au spin voire à l'isospin près) peut se trouver dans un état donné, en particulier l'état de plus basse énergie pour une particule. La multiplicité de celui-ci dépend du spin et éventuellement de l'isospin. Une fois que le fondamental est occupé, on remplit le premier niveau et ainsi de suite jusqu'à une énergie qui dépend de la densité. Si on sépare les neutrons des protons, on peut introduire deux énergies de Fermi, une pour chaque saveur. À chacune correspond une impulsion de Fermi p_{FN} (telle que $\varepsilon_{FN} = \sqrt{m^2 + p_{FN}^2}$) reliée à la densité par :

$$\rho_N = \int_0^{p_{FN}} \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{p_{FN}^3}{3\pi^2} \tag{2.1}$$

où le facteur 2 correspond au spin et l'indice N désigne un proton ou un neutron. Le d^3p correspond à l'intégration sur une boule dans l'espace des impulsions. La densité totale est $\rho = \rho_p + \rho_n$.

Le lagrangien correspondant au gaz de fermions libres dans une théorie relativiste est un lagrangien de type Dirac libre :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - M\right)\psi \tag{2.2}$$

où M est la masse des fermions.

Pour aller plus loin, il faut considérer des interactions entre ces « particules ». Pour tout système de nucléons, il existe forcément une répulsion de cœur dur. Si les forces de répulsion sont de portée nulle et étant donné que les particules sont ponctuelles, les termes d'énergie correspondant seront appelés termes de contact. En réalité les interactions sont portées par des particules. Dans le cadre de QCD, l'interaction est portée par les gluons. Dans les théories effectives développées ici, il sera plus pertinent de parler d'échange de mésons, comme par exemple le pion, le ω, le ρ ou le controversé méson sigma. Les vertex d'interaction les plus simples sont de type Yukawa comme présenté sur la figure 2.1. Enfin, il faut ajouter un contenu dyna-

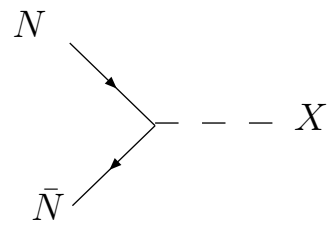

FIG. 2.1*: Vertex de type Yukawa.*

mique aux particules d'interaction. La forme exacte du lagrangien dépend donc du modèle choisi, dont les chapitres 3 à 5 de cette thèse constitueront des exemples.

2.1.2 Énergie de Hartree–Fock

Du lagrangien on calcule le hamiltonien. L'énergie de liaison des nucléons n'est autre que la différence entre la valeur moyenne du hamiltonien et la masse des nucléons libres :

$$E - MA = \frac{\langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} - MA \tag{2.3}$$

où A est le nombre de nucléons présents dans le système. La valeur moyenne est prise sur l'état fondamental à N corps qui sera souvent appelé vide par abus de langage. Un premier problème réside dans le choix de l'état fondamental. Celui-ci doit être suffisamment complexe pour rendre compte de la physique, mais suffisamment simple pour permettre de mener les calculs à bien. Dans le gaz de fermions libres par exemple, on peut définir le fondamental par un déterminant de Slater tel que

$$|\phi_0\rangle = \prod_\alpha b_\alpha^\dagger |-\rangle \tag{2.4}$$

où $|-\rangle$ est l'état de vide vrai et les $b_\alpha^\dagger$ créent les particules présentes. Bien évidemment, cette description est mal adaptée à un système en interaction. Cependant, la méthode dite de Hartree–Fock, développée dans les pages suivantes, permet de s'y ramener.

L'énergie dépend également du hamiltonien, qui est un hamiltonien à N corps. Ceci constitue en général un problème non soluble. La méthode, inspirée par exemple de la physique statistique [58], consiste à remplacer les interactions subies par chaque « particule » en un potentiel appelé champ

moyen :

$$\begin{aligned} H &= \sum_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} v_{ij} \\ &\simeq \sum_i t_i + \frac{1}{2}\sum_i (v_{moy})_i \end{aligned}$$

où t_i est l'opérateur d'énergie cinétique ($t_i = p_i^2/2m$ à l'approximation non relativiste). On obtient N hamiltoniens à un corps, correspondant à N quasiparticules. On peut alors décomposer l'équation de Schrödinger globale en N équations à une particule chacune :

$$h_i\phi_i = \epsilon_i\phi_i \tag{2.5}$$

où

$$h_i = t_i + (v_{moy})_i.$$

ϕ_i désigne la fonction d'onde d'une particule, ou plus généralement celle d'une quasiparticule. ϵ_i, valeur propre du hamiltonien h_i, est l'énergie de la quasiparticule. On transforme ainsi un problème à N corps en N problèmes à un corps, ce qui donne un système de quasiparticules indépendantes. L'équation (2.5) est obtenue en minimisant l'énergie (2.3), c'est-à-dire en prenant un état fondamental d'essai et en faisant varier cet état : la solution est celle qui donne l'énergie minimale. Comme on le verra, ce type de méthode donne des équations auto-cohérentes.

L'approximation de champ moyen choisie dans cette thèse est comme déjà dit celle de Hartree–Fock qui consiste à choisir le vide comme un déterminant de Slater où cette fois-ci les opérateurs de création $b_\alpha^\dagger$ correspondent aux quasiparticules :

$$|\varphi_0\rangle = \prod_\alpha b_\alpha^\dagger|-\rangle \tag{2.6}$$

Cette définition permet d'obtenir directement la normalisation $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$. Comme pour le cas des particules libres, on peut introduire une énergie de Fermi. À température nulle, les états de quasiparticule d'énergie inférieure à celle de Fermi sont occupés, ceux d'énergie supérieure sont vides. On peut également introduire la densité comme dans l'équation (2.1). Dans la suite, par abus de langage, les quasiparticules pourront être appelées particules. Étant donné qu'on s'intéresse aux propriétés du fondamental, on travaillera uniquement avec des nucléons, les excitations de ceux-ci (par exemple le Δ) ou les antinucléons seront ignorés jusqu'au dernier chapitre.

Un spineur de fermion se décompose sur la base des b_α et des $d_\alpha^\dagger$:

$$\psi(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x)b_\alpha + g_\alpha(x)d_\alpha^\dagger. \tag{2.7}$$

Les d_α et $d_\alpha^\dagger$ sont les opérateurs d'annihilation et de création pour les antiparticules. Les coefficients de ce développement, ou fonctions d'onde, constituent les paramètres variationnels de la méthode. À l'approximation de champ moyen, on négligera dans la suite la contribution des antifermions [2]. Pour fixer les idées, on écrit un hamiltonien d'interaction à deux corps :

$$H = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | T | \beta \rangle b_\alpha^\dagger b_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \delta\gamma \rangle b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger b_\gamma b_\delta. \tag{2.8}$$

Les calculs sont écrits ici en seconde quantification, ce qui les rend plus lisibles. Dans les exemples développés plus tard, le formalisme pourra sembler différent, mettant de nouveaux points de vue en valeur. Cependant, les calculs sous-jacents seront souvent effectués en seconde quantification. Dans les équations Hartree–Fock, il y a bien sûr d'abord la contribution du terme cinétique qui peut être obtenue à partir du lagrangien cinétique (2.2). Le potentiel contient également les termes d'interaction dûs aux mésons ainsi que leurs termes cinétiques. Ceux-ci seront donnés explicitement ultérieurement ; cependant ils ne sont pas directement utiles pour le propos de ce chapitre et on ne les indique donc pas pour l'instant. Lorsqu'on contracte le hamiltonien ci-dessus sur le vide, les règles d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation, résumées par le théorème de Wick [22], permettent d'écrire la partie cinétique sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0 | b_\alpha^\dagger b_\beta | \varphi_0 \rangle &= \langle - | \prod_{i \in F} b_i b_\alpha^\dagger b_\beta \prod_{j \in F} b_j^\dagger | - \rangle & (2.9) \\ &= \langle - | \prod_{i \in F} b_i (\delta_{\alpha\beta} - b_\beta b_\alpha^\dagger) \prod_{j \in F} b_j^\dagger | - \rangle. & (2.10) \end{aligned}$$

où F désigne la mer de Fermi. Le $\delta_{\alpha\beta}$ porte sur toutes les valeurs possibles de α et β. En revanche, dans la deuxième partie, l'opérateur de création $b_\alpha^\dagger$ ne peut créer un fermion que dans un état inoccupé, c'est-à-dire hors de la mer de Fermi. b_β doit ensuite détruire ce fermion, c'est-à-dire qu'il faut $\alpha = \beta$. La différence entre les deux termes se réduit alors à :

$$\langle \varphi_0 | b_\alpha^\dagger b_\beta | \varphi_0 \rangle = \delta_{(\alpha,\beta) \in F}. \tag{2.11}$$

On aurait pu faire directement remarquer que b_β détruit un fermion de la mer de Fermi et que par conséquent $b_\alpha^\dagger$ le reconstruit. Le terme d'interaction, quand à lui, doit être traité de la même manière. En utilisant à nouveau les règles d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation, on obtient :

$$\langle \varphi_0 | b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger b_\gamma b_\delta | \varphi_0 \rangle = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \tag{2.12}$$

où les états sont limités à la mer de Fermi. On peut là encore voir le résultat dans le membre de gauche de (2.12) : les opérateurs de destruction b_γ et b_δ

détruisent deux particules différentes de la mer de Fermi, les deux opérateurs de création les recréent avec deux combinaisons possibles, $\alpha = \delta$ et $\beta = \gamma$ ou $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$. Les signes respectifs sont obtenus par les relations d'anticommutation. Finalement, l'énergie se met sous la forme :

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_0 | H | \varphi_0 \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in F} \langle \alpha | T | \alpha \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta \in F} \langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta \in F} \langle \alpha\beta | V | \beta\alpha \rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Le terme contenant $\langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle$ est appelé terme de Hartree et celui contenant $\langle \alpha\beta | V | \beta\alpha \rangle$ est appelé terme de Fock.

2.1.3 Principe variationnel

L'énergie est minimale lorsque sa variation par rapport aux paramètres variationnels, c'est-à-dire aux coefficients f_α de (2.7), s'annule :

$$\frac{\delta}{\delta \bar{f}_\alpha} \left(\langle \varphi_0 | H | \varphi_0 \rangle - \sum_\beta \varepsilon_\beta \bar{f}_\beta f_\beta \right) = 0. \tag{2.14}$$

Le terme en ε_β a été rajouté afin de conserver la norme des fonctions f_α, il joue le rôle d'un paramètre de Lagrange. Si on se limite au lagrangien libre, cette minimisation revient à établir l'équation de Dirac libre. En effet, l'énergie cinétique est :

$$E_{kin} = \sum_\alpha \langle \alpha | T | \alpha \rangle = \sum_\alpha \bar{f}_\alpha \left(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + M \right) f_\alpha. \tag{2.15}$$

$\bar{f}_\alpha$ « disparaît » lors de la minimisation, et on retrouve bien l'équation de Dirac grâce au terme de normalisation :

$$\left(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + M \right) f_\alpha(x) = \varepsilon_\alpha \gamma^0 f_\alpha(x). \tag{2.16}$$

Ce dernier paramètre ε_α peut être *a posteriori* identifié avec l'énergie à une particule. Lorsqu'on tient compte en revanche des termes d'interaction, on obtient (en omettant les indices par simplicité) :

$$(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + M + \Sigma) f(x) = \varepsilon \gamma^0 f(x). \tag{2.17}$$

Σ contient tout ce qui vient des interactions. On l'appelle l'énergie propre des fermions. Sa présence modifie profondément les propriétés de la matière nucléaire. Par exemple, la partie scalaire de Σ modifie la masse des nucléons dans le milieu.

Dans le cas général, cette équation est très compliquée. Pour les noyaux finis par exemple, on peut se limiter aux noyaux sphériques comme dans

[2]. Dans cette thèse, il a été choisi de ne travailler que dans la matière nucléaire infinie et non polarisée ; l'équation de Hartree–Fock peut alors être grandement simplifiée. Les f_α étant des ondes planes, on réécrit l'équation de Hartree–Fock en représentation d'impulsion. L'invariance par renversement du temps et par rotation de l'espace conduisent une à énergie propre telle que :

$$\Sigma = \Sigma_S + \gamma^0 \Sigma_0 + \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}}{p} \Sigma_V. \tag{2.18}$$

L'équation de Dirac devient :

$$(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}^* + M^*(\mathbf{p}))\, u(\mathbf{p}, s) = \beta E^*(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}, s). \tag{2.19}$$

Les $u(\mathbf{p}, s)$ ne sont autres que les transformées de Fourier des $f(x)$. Les grandeurs étoilées contiennent l'information présente dans Σ :

$$\begin{aligned} M^*(\mathbf{p}) &= M + \Sigma_S(\mathbf{p}) \\ \mathbf{p}^* &= \mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}}{p} \Sigma_V(\mathbf{p}) \\ E^*(\mathbf{p}) &= \varepsilon(\mathbf{p}) - \Sigma_0(\mathbf{p}) = \sqrt{M^{*2} + p^{*2}}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

L'équation (2.20) étant formellement identique à une équation de Dirac libre, on peut immédiatement en déduire $u(\mathbf{p}, s)$:

$$u(\mathbf{p}, s) = \sqrt{\frac{E^* + M^*}{2E^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}^*}{E^* + M^*} \end{pmatrix} \chi_s. \tag{2.21}$$

On peut également remarquer que $E^{*2} = M^{*2} + \mathbf{p}^{*2}$. Les quasiparticules se propagent dans le milieu avec une masse qui n'est plus la masse nue des nucléons mais la masse effective M^* et avec l'impulsion $\mathbf{p}^*$.

2.2 Propagateurs

Il est intéressant de revoir les calculs précédents sous forme diagrammatique : celle-ci permet d'en comprendre les étapes sous un angle nouveau qui sera particulièrement utile dans les développements au-delà du champ moyen.

2.2.1 Propagateur de fermion

On associe au lagrangien cinétique le diagramme (a) de la figure 2.2. $G^0_{ab}(x, x')$ est solution de l'équation différentielle :

$$(i\partial\!\!\!/ - M) \circ G^0_{ab}(x, x') = \delta(x - x')\delta_{ab}. \tag{2.22}$$

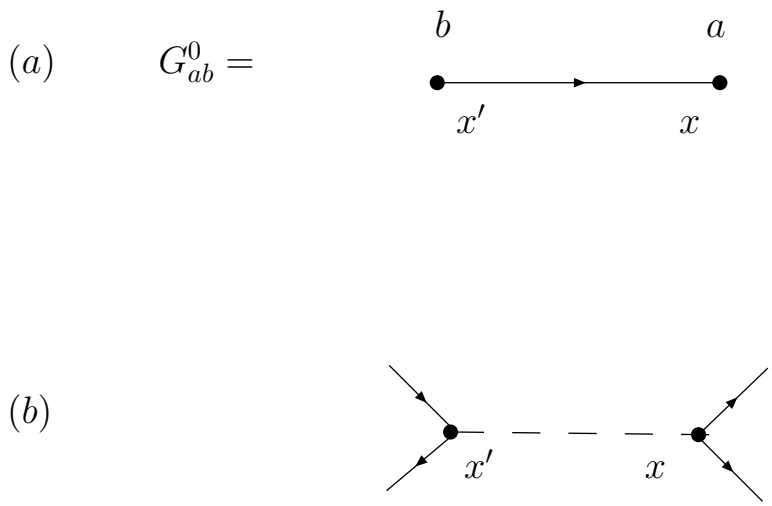

FIG. 2.2: *Diagrammes associés au lagrangien : (a) propagateur libre, (b) vertex d'interaction.*

G^0 est la fonction de Green de l'équation de Dirac. Les indices a et b désignent les indices des matrices de Dirac. On peut montrer que la quantité définie ci-dessous est solution de (2.22) [59] :

$$iG^0_{ab}(x, x') = \langle\varphi_0|T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(x')]|\varphi_0\rangle. \tag{2.23}$$

Dans le cas où le vide est un déterminant de Slater comme proposé dans l'équation (2.6), $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle$ est égal à un. On l'omettra donc dans la suite des formules. T désigne le T-produit qui, rappelons-le, est défini par la façon dont il agit sur deux fonctions du temps : $T[\psi_1(t)\psi_2(t')] = \theta(t - t')\psi_1(t)\psi_2(t') - \theta(t' - t)\psi_2(t')\psi_1(t)$ où ψ_1 et ψ_2 représentent des fermions. Le T-produit apparaît naturellement en représentation d'interaction [22]. G^0 crée une particule en x' et la détruit en x, d'où son nom de propagateur et la façon de le représenter diagrammatiquement. On peut aussi écrire tout cela en représentation d'impulsion. La transformée de Fourier de $G^0(x, x')$ est solution de l'équation :

$$(\not{p} - M)G^0(p) = 1 \tag{2.24}$$

c'est-à-dire :

$$G^0(p) = \frac{1}{\not{p} - M} = \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\eta}. \tag{2.25}$$

La forme du pôle en $p^2 - M^2 + i\eta$ provient directement de l'introduction du T-produit. Ce choix permet au propagateur d'être causal, qu'il corresponde à une particule ou une antiparticule. C'est le propagateur de Feynman.

On peut remarquer que le terme d'énergie cinétique (donné équation (2.13)) est tel que $\alpha = \beta$; on le représente par le diagramme en boucle de la partie (a) de la figure 2.3. Effectuer la minimisation comme dans l'équation (2.15) supprime un des deux fermions, donc la moitié de la boucle. Le propagateur, quand à lui, « rétablit » le fermion manquant, mais en oubliant la prescription $\alpha = \beta$. Passer d'un diagramme d'énergie à un diagramme de propagateur revient à « ouvrir » une ligne de fermion et l'ouverture est notée par la croix. Si on ajoute à présent les interactions, on définit un nouveau

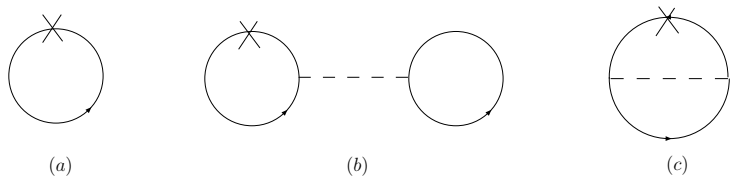

FIG. 2.3*: Diagrammes d'énergie : (a) libre, (b) de Hartree, (c) de Fock.*

propagateur par l'équation de Dirac contenant l'énergie propre :

$$(i\partial\!\!\!/ - M - \Sigma)_{ac} G_{cb}(x, x') = \delta(x - x')\delta_{ab}, \tag{2.26}$$

soit en représentation d'impulsion :

$$G^{-1}(p) = p\!\!\!/ - M - \Sigma. \tag{2.27}$$

Pour représenter cette équation diagrammatiquement, il faut préciser un peu la forme de Σ. Le lagrangien d'interaction, de type Yukawa, est représenté dans la partie (b) de la figure 2.2. Calculer l'énergie revient à imposer $\alpha = \delta$ et $\beta = \gamma$ pour le terme de Hartree ou $\alpha = \delta$ et $\beta = \gamma$ pour celui de Fock. On obtient les diagrammes présentés respectivement dans les parties (b) et (c) de la figure 2.3. Comme dans le cas cinétique, l'équation de minimisation « ouvre » les diagrammes au niveau d'une croix, on obtient schématiquement la figure 2.4 pour le propagateur contenant les premiers termes de perturbation. On représente traditionnellement en gras le propagateur habillé afin de

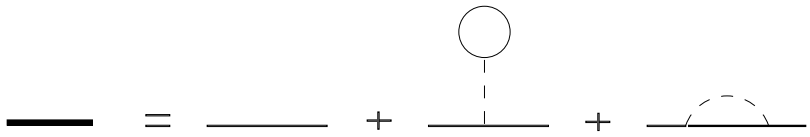

FIG. 2.4*: Propagateur de fermion au premier ordre des perturbations.*

le différencier du propagateur libre G^0. Celui-ci est représenté par une ligne fine comme dans le terme de droite. Une question se pose alors : dans les deux

termes de droite, les lignes fermioniques doivent-elles être fines ou épaisses, a-t-on le propagateur libre ou total ? Le propagateur de Hartree-Fock est celui représenté figure 2.5. On peut le comprendre à l'aide du raisonnement naïf suivant. À l'approximation Hartree–Fock, les quantités $\langle\alpha\beta|V|\alpha\beta\rangle$ et $\langle\alpha\beta|V|\beta\alpha\rangle$ sont construites à partir de fermions solutions de l'équation de Dirac avec interaction. Les lignes fermioniques présentes dans l'énergie figure 2.3 doivent donc être épaisses. La minimisation laisse des lignes épaisses. Le calcul du propagateur en revanche contracte $\langle\varphi_0|\bar{\psi}$ avec le résultat de la minimisation, la ligne fermionique ainsi rajoutée est fine. Pour une théorie

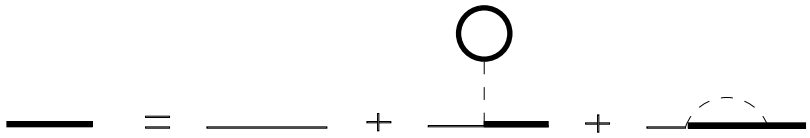

FIG. 2.5*: Propagateur de Hartree–Fock.*

générale, on ne se limiterait pas aux deux diagrammes Hartree–Fock. Le propagateur s'écrit de manière générale comme sur la figure 2.6. Le $\tilde{\Sigma}$ contient tous les diagrammes possibles en plus de ceux de Hartree–Fock. On peut aussi ne factoriser que les diagrammes une particule irréductibles (noté 1PI) comme sur la deuxième ligne de la figure. Cette dernière équation, appelée

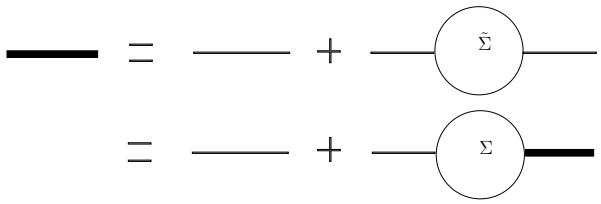

FIG. 2.6*: Propagateur total factorisé. Sur la première ligne, $\tilde{\Sigma}$ contient tous les diagrammes, Σ contient tous les diagrammes 1PI.*

équation de Dyson, reviendra souvent dans la suite de cette thèse.

2.2.2 Excitations particule-trou

Pour aller au-delà du champ moyen, on considère des excitations des particules de la mer de Fermi (c'est-à-dire les états d'énergie inférieure à celle de Fermi). Celle-ci étant remplie, la seule possibilité pour une particule d'être excitée est d'avoir une énergie supérieure à celle de Fermi. Ce faisant, elle « crée » un trou dans la mer, de la même manière qu'une antiparticule peut être vue naïvement comme un trou de la mer de Dirac. On parle ainsi d'excitation particule-trou. Ces excitations sont créées par un méson se

propageant dans le milieu, elles modifient donc le propagateur des mésons. Comme on vient de le faire pour le propagateur des nucléons, on écrit le propagateur d'un méson sous forme diagrammatique, il est ainsi plus aisé de visualiser les différentes excitations pouvant modifier le propagateur du méson. La première partie (a) de la figure 2.7 propose de telles excitations. Là encore, on peut factoriser les diagrammes une particule irréductibles et obtenir une équation de Dyson pour le propagateur de méson. Dans la deuxième partie (b) de la figure, on propose de limiter les diagrammes à ceux contenant uniquement des boucles de fermions indépendantes, cette approximation s'appelle l'approximation des anneaux (ou RPA pour random phase approximation) pour des raisons graphiques évidentes. Dans la

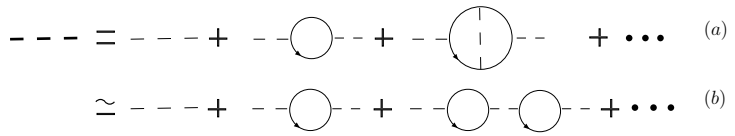

FIG. 2.7: *Propagateur des mésons. L'approximation des anneaux, sur la deuxième ligne, ne contient que les diagrammes composés uniquement de boucles des fermions indépendantes.*

partie de cette thèse sur les corrélations, on se limitera à cette approximation. La quantité fondamentale présente dans ces anneaux est justement la boucle de fermions qui est calculée en écrivant le corrélateur à deux corps particule-trou :

$$i\Pi^0(x,x') = \langle\varphi_0|T[\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(x')\psi_b(x')|\varphi_0\rangle \tag{2.28}$$

$$i\Pi(x,x') = \langle\psi_0|T[\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(x')\psi_b(x')|\psi_0\rangle. \tag{2.29}$$

Le corrélateur libre Π^0 est pris sur l'état fondamental Hartree–Fock $|\varphi_0\rangle$ tandis que le corrélateur total Π est pris sur un état noté $|\psi_0\rangle$ contenant les boucles. Ce dernier corrélateur peut être déduit du premier de nouveau grâce à une équation de Dyson. Le propagateur de méson présent entre deux boucles n'étant autre que l'interaction entre nucléons, notée V, on en

déduit[1] :

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi^0 + \Pi^0 V \Pi^0 + \Pi^0 V \Pi^0 V \Pi^0 + \cdots \\ &= \frac{\Pi^0}{1 - V\Pi^0}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Les diagrammes d'énergie sont une généralisation de celui de Fock (figure 2.3). Ils peuvent être vus comme ceux de la partie (b) de la figure 2.7 qu'on aurait refermés sur eux-mêmes, ils sont donc égaux à $V\Pi$. L'énergie associée n'est autre que la somme de ces diagrammes sur toutes les impulsions possibles :

$$\langle H_{int} \rangle = 3V \int \frac{id\omega}{(2\pi)} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V\Pi = 3V \int \frac{id\omega}{(2\pi)} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{V\Pi^0}{1 - V\Pi^0}. \tag{2.31}$$

$(\omega, \mathbf{q})$ est l'énergie-impulsion portée par la boucle formée en refermant les diagrammes de la figure 2.7. Cette énergie est la valeur moyenne du hamiltonien d'interaction (en RPA) sur le vide modifié $|\psi_0\rangle$.

Dans cette thèse, on se limite la plupart du temps à des échanges de mésons isovecteurs (les contributions des mésons isoscalaires sigma et oméga se compensent à peu près, on les néglige donc : voir le paragraphe 6.5.2 pour plus de détails). Le facteur trois tient compte des trois degrés de polarisation (états) d'isospin des mésons. Or celle-ci est conservée tout au long de la chaîne d'anneaux, le corrélateur n'en dépend donc pas. Pour cette raison, il est aussi appelé propagateur de polarisation, et c'est ce nom plus habituel qu'on lui donnera souvent. La multiplicité de la polarisation est donc en facteur global de l'énergie, elle est de trois pour les mésons isovecteurs. Graphiquement, on peut associer à chaque ensemble de diagramme de la figure 2.7 (b) une polarisation, et l'énergie est la somme des trois ensembles de diagrammes, qui contribuent chacun de façon identique.

2.2.3 Calcul de l'énergie de corrélation

L'énergie totale dépend du vide corrélé. On simplifie le problème à l'aide de la charging formula qui permet d'exprimer l'énergie totale en fonction de quantités calculées en champ moyen. Pour cela, on commence par rappeler le théorème de Feynman–Hellmann [38]. On introduit le hamiltonien $H(\lambda) = H_0 + \lambda H_{int}$, un état propre $|\phi(\lambda)\rangle$ et l'énergie propre associée $E(\lambda)$. Alors,

$$\langle \phi(\lambda) | \lambda H_{int} | \phi(\lambda) \rangle = \lambda \frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda}. \tag{2.32}$$

Il faut préciser dans notre cas ce que sont H_0 et H_{int}. On multiplie chaque vertex d'interaction par le paramètre λ. Les termes d'interaction de type

[1] Le résultat ci-dessous est donné lorsqu'un canal unique intervient dans les équations. Comme on le verra dans le dernier chapitre, il faut en réalité compliquer ce résultat lorsque plusieurs canaux sont présents.

Yukawa pour un méson X s'écrivent de façon générique $\bar{\psi}\Gamma_X\psi X$. Ces termes sont donc multipliés par λ dans la procédure de calcul. H_0 correspond à la partie de champ moyen, il permet d'écrire l'équation de champ moyen qui définit le spineur de fermion et son propagateur. Il est commode de le choisir de manière à ce que le champ moyen soit le plus précis possible, c'est-à-dire de prendre pour H_0 le hamiltonien de Hartree. Ainsi, $E(0)$ est l'énergie de Hartree (contenant l'énergie cinétique) et $E(1)$ est l'énergie totale. $E(1) - E(0)$ est l'énergie d'interaction qui contient les termes de Fock et les termes de corrélation[(2)]. La quantité

$$\int_0^1 d\lambda \frac{\langle\phi(\lambda)|\lambda H_{int}|\phi(\lambda)\rangle}{\lambda} = \int_0^1 d\lambda \frac{\partial E(\lambda)}{\partial\lambda} = E - E_0 \tag{2.33}$$

donne alors l'énergie de Fock plus celle de corrélation. On peut remarquer en quoi la charging formula a facilité le calcul : l'énergie donnée à l'équation (2.31) correspond à la valeur moyenne du hamiltonien sur le vide corrélé, soit $\langle\psi_0|H_0|\psi_0\rangle + \langle\psi_0|H_{int}|\psi_0\rangle$. De manière générale, ces termes sont difficiles à calculer. Ici, le premier a été remplacé par le calcul de $E(0)$, soit $\langle\varphi_0|H_0|\varphi_0\rangle$. Comme on le voit paragraphe suivant, le deuxième va également être remplacé par un calcul de champ moyen.

$\langle\psi_0(\lambda)|H_{int}|\psi_0(\lambda)\rangle$ est l'intégrale sur $(\omega, \vec{q})$ de $V\Pi$. Les constantes de couplage étant multipliées par λ, $V\Pi$ est multiplié par λ^2 (on introduit indifféremment les constantes de couplage du vertex dans l'interaction V ou dans le corrélateur Π : étant donné que le résultat ne dépend que de $V\Pi$, ce choix est purement pratique). L'intégrant de l'énergie est alors simplement :

$$\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2 V\Pi^0}{1-\lambda^2 V\Pi^0} = -\frac{1}{2}\ln(1 - V\Pi^0). \tag{2.34}$$

On peut remarquer que le seul diagramme à connaître pour calculer tous les anneaux est le plus simple que l'on puisse former lorsque les seuls ingrédients sont une boucle de nucléons et un propagateur de méson, c'est-à-dire ici le terme de Fock : il correspond bien au premier terme du développement du logarithme. Le terme dominant de l'énergie de corrélation est alors du deuxième ordre et est négatif, conformément à la théorie des perturbations au deuxième ordre. Cette remarque, valable ici pour le cas le plus simple, est bien entendu valable également dans les cas plus compliqués rencontrés dans la suite de cette thèse. L'énergie de corrélation totale est obtenue après soustraction du terme de Fock [56] :

$$E^{corr} = -\frac{3}{2}V \int \frac{id\omega}{(2\pi)} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(\ln(1 - V\Pi^0) + V\Pi^0\right). \tag{2.35}$$

La seule quantité à connaître pour calculer l'énergie de corrélation est donc (outre l'interaction V) le propagateur Π^0. Grâce au théorème de Wick, ce

[(2)] Le choix du vide $|\psi_0\rangle$ implique que l'énergie est calculée à l'approximation ring. Un choix de vide plus complexe permettrait d'inclure plus de termes dans $E(1)$.

propagateur de polarisation peut s'écrire en fonction du propagateur d'un nucléon :

$$\begin{aligned} i\Pi^0(x,x') &= \langle\varphi_0|T[\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(x')\psi_b(x')]|\varphi_0\rangle \\ &= -\langle\varphi_0|T[\psi_a(x)\bar{\psi}_b(x')]|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|T[\psi_b(x')\bar{\psi}_a(x)]|\varphi_0\rangle \\ &= -iG^0_{ab}(x,x')iG^0_{ba}(x',x) \\ &= Tr(G^0(x,x')G^0(x',x)). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Cette expression était prévisible : la trace provient du fait que la boucle est refermée, et elle est constituée de deux fermions, une particule qui se propage de x en x' et une antiparticule (ou plutôt un trou) qui se propage de x' en x.

Avant de conclure, on peut noter que les boucles particule-trou sont couplées à des propagateurs de mésons comme le suggère la figure 2.7. Dans ce cas, on introduit les vertex d'interaction dans la définition des propagateurs de polarisation Π et Π^0. Pour un couplage vecteur Γ^μ par exemple, Π^0 est

$$i\Pi^{0\mu\nu}(x,x') = \langle\varphi_0|T[\bar{\psi}_a(x)(\Gamma^\mu)^{ab}\psi_b(x)\bar{\psi}_c(x')(\Gamma^\nu)^{cd}\psi_d(x')]|\varphi_0\rangle. \tag{2.37}$$

*

* *

Tous les outils nécessaires à la compréhension de cette thèse ont été mis en place. Différents modèles relativistes vont maintenant être décrits. Le premier, important d'un point de vue historique, est le modèle de Walecka. Bien qu'il ait été le premier à expliquer la saturation de la matière nucléaire, il est purement phénoménologique. Des modèles incluant des propriétés de QCD comme la symétrie chirale et le confinement seront ensuite développés, constituant l'essentiel du travail de cette thèse.

Chapitre 3

Modèle de Walecka

Le premier modèle relativiste permettant de rendre compte de la saturation de la matière nucléaire est celui proposé par Walecka en 1974 [1, 48]. Cette saturation est obtenue grâce à la combinaison d'un potentiel attractif dû au champ scalaire de la physique nucléaire et d'un potentiel répulsif dû au champ vectoriel du méson ω se comportant différemment avec la densité. Ce modèle peut être complété par la contribution d'autres mésons qui permettent d'affiner les résultats [2]. Historiquement, Walecka a expliqué la saturation à partir de l'approximation Hartree uniquement, mais en anticipant sur la suite de ce travail, on se placera dans cette partie à l'approximation de Hartree–Fock. On trouvera des détails à l'annexe A.

3.1 Lagrangien

On considère deux saveurs de nucléon, le proton et le neutron. Un nucléon est décrit par un isospineur à deux composantes : $\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$. Pour simplifier, on considère que les masses du proton et du neutron sont égales. Le lagrangien du champ de nucléons libres est, rappelons-le :

$$\mathcal{L}_{kin}^{fermions} = \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - M\right)\mathbb{1}_2\psi. \tag{3.1}$$

La matrice identité ajoutée par rapport à l'équation (2.2) agit dans l'espace d'isospin. Elle ne joue aucun rôle dans le modèle de Walecka et on l'omet dans la suite des expressions. En revanche, les couplages isovectoriels des chapitres suivants contiendront un terme dépendant des matrices d'isospin $\vec{\tau}$ qui permettra de différencier protons et neutrons. Les nucléons interagissent avec les mésons via des couplages de type Yukawa. Le lagrangien d'interaction est alors :

$$\mathcal{L}_{int} = -g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\omega^\mu\psi \tag{3.2}$$

où les g_i sont les constantes de couplage des mésons i échangés par les nucléons. Enfin, le lagrangien contient une partie dynamique pour les mésons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{kin}^{mésons} &= +\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 \\ &\quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$. Les m_i sont les masses des mésons i.

3.2 Énergie à l'approximation de Hartree–Fock

Le hamiltonien est obtenu en calculant la transformée de Legendre du lagrangien :

$$\begin{aligned} H &= \int_{t=0} d\mathbf{x}\left(\Sigma_i\pi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} - \mathcal{L}\right) \\ &= \int_{t=0} d\mathbf{x}\left(\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\psi\right) + \int d\mathbf{x}\left[\bar{\psi}(M+g_\sigma\sigma)\psi + \frac{1}{2}\left(\pi_\sigma^2 + (\vec{\nabla}\sigma)^2\right)\right] \\ &\quad + \int d\mathbf{x}\Big[g_\omega\,\omega_\mu\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &\quad + \frac{1}{2}\left((\vec{\pi}_\omega)^2 - m_\omega^2\,\omega^\mu\omega_\mu + \vec{\nabla}\omega^j\cdot\vec{\nabla}\omega^j - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})^2\right) - \vec{\pi}_\omega\cdot\vec{\nabla}\omega_0\Big] \end{aligned} \tag{3.4}$$

où les moments conjugués des champs de mésons sont donnés par :

$$\pi_\sigma = \partial_0\sigma, \qquad \pi_{j\omega} = F^{0j}. \tag{3.5}$$

Pour des raisons qui apparaîtront dans la section suivante, la partie d'interaction du sigma est rattachée à l'énergie de masse des nucléons. À l'approximation statique, permise car les effets de retard sont petits [60], les champs de mésons deviennent :

$$\pi_\sigma = 0, \qquad \vec{\pi}_\omega = \vec{\nabla}\omega^0 \tag{3.6}$$

et le hamiltonien :

$$\begin{aligned} H &= \int_{t=0} d\mathbf{x}\bar{\psi}\left(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\psi \\ &\quad + \int d\mathbf{x},\left[\bar{\psi}(M+g_\sigma\sigma)\psi + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\sigma)^2\right] \\ &\quad + \int d\mathbf{x}\Big[g_\omega\,\omega_\mu\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(m_\omega^2\,\omega^\mu\omega_\mu + \vec{\nabla}\omega^\mu\cdot\vec{\nabla}\omega_\mu + (\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega})^2\right)\Big]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Afin de différentier l'énergie par rapport aux degrés de liberté fermioniques, il faut connaître la dépendance des champs de mésons en ces degrés de liberté. Pour cela, on écrit l'équation du mouvement des mésons. Les équations d'Euler–Lagrange appliquées au lagrangien total (équations 3.1, 3.2 et 3.3) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\left(\Box + m_\sigma^2\right)\sigma &= -g_\sigma \bar{\psi}\psi \\ \left(\Box + m_\omega^2\right)\omega^\mu &= g_\omega \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\end{aligned} \tag{3.8}$$

qui deviennent à l'approximation statique :

$$\left(-\Delta + m_\sigma^2\right)\sigma = -g_\sigma \bar{\psi}\psi \tag{3.9}$$

$$\left(-\Delta + m_\omega^2\right)\omega^\mu = g_\omega \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{3.10}$$

Les champs de mésons peuvent alors être simplement exprimés en fonction des champs de nucléons :

$$\sigma(x) = -g_\sigma \int d^4x' D_\sigma(x-x')\bar{\psi}\psi(x') \tag{3.11}$$

$$\omega^\mu(x) = g_\omega \int d^4x' D_\omega(x-x')\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x') \tag{3.12}$$

où le propagateur d'un méson X est solution d'une équation du type :

$$\left(-\Delta + m_X^2\right) D_X(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{3.13}$$

et dans le cas où la masse du méson ne dépend pas de la position comme c'est le cas ici, il a pour simple expression :

$$D_X(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\mathbf{q}^2+m_\sigma^2}. \tag{3.14}$$

On exprime alors le hamiltonien en fonction des seuls degrés de liberté fermioniques :

$$\begin{aligned}H &= \int_{t=0} d\mathbf{x}\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+M)\psi \\ &\quad -\frac{g_\sigma^2}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{\psi}(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}')D_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) \\ &\quad +\frac{g_\omega^2}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{\psi}(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}')D_\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\gamma_\mu(1)\gamma^\mu(2)\psi(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\alpha\beta}\int_{t=0} d\mathbf{x}\left(\bar{f}_\alpha(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+M)f_\beta\right)b_\alpha^\dagger b_\beta \\ &\quad -\frac{g_\sigma^2}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{f}_\alpha(\mathbf{x})\bar{f}_\beta(\mathbf{x}')D_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')f_\gamma(\mathbf{x}')f_\delta(\mathbf{x})b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger b_\gamma b_\delta \\ &\quad +\frac{g_\omega^2}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{f}_\alpha(\mathbf{x})\bar{f}_\beta(\mathbf{x}')D_\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\gamma_\mu(1)\gamma^\mu(2)f_\gamma(\mathbf{x}')f_\delta(\mathbf{x})b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger b_\gamma b_\delta.\end{aligned} \tag{3.15}$$

On a décomposé les fermions sur une base de spineurs comme proposé dans l'équation (2.7). Les indices α, β, γ et δ tiennent compte du spin ($\pm 1/2$) et de l'isospin (proton ou neutron) des quasiparticules. Les indices (1) et (2) dans le terme du oméga sont là pour rappeler que chaque matrice γ^μ est contractée entre deux spineurs, le premier jeu de spineurs dépendant de x, le deuxième de x'. L'expression proposée ici est écrite dans l'ordre normal qui intervient naturellement lorsqu'on contracte le hamiltonien sur le vide et qu'on applique le théorème de Wick. Ce hamiltonien, formellement identique à celui de l'équation (2.8), conduit à l'énergie :

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= \sum_{\alpha\in F}\int_{t=0} d\mathbf{x}\left(\bar{f}_\alpha(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+M)f_\alpha\right), \\
E_{Hartree} &= -\frac{g_\sigma^2}{2}\sum_{\alpha,\beta\in F}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\,\bar{f}_\alpha(\mathbf{x})f_\alpha(\mathbf{x})D_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\bar{f}_\beta(\mathbf{x}')f_\beta(\mathbf{x}') \\
&\quad +\frac{g_\omega^2}{2}\sum_{\alpha,\beta\in F}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\,\bar{f}_\alpha(\mathbf{x})\gamma_\mu f_\alpha(\mathbf{x})D_\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\bar{f}_\beta(\mathbf{x}')\gamma^\mu f_\beta(\mathbf{x}'), \\
E_{Fock} &= \frac{g_\sigma^2}{2}\sum_{\alpha,\beta\in F}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\,\bar{f}_\alpha(\mathbf{x})f_\beta(\mathbf{x})D_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\bar{f}_\beta(\mathbf{x}')f_\alpha(\mathbf{x}') \\
&\quad -\frac{g_\omega^2}{2}\sum_{\alpha,\beta\in F}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\,\bar{f}_\alpha(\mathbf{x})\gamma_\mu f_\beta(\mathbf{x})D_\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\bar{f}_\beta(\mathbf{x}')\gamma^\mu f_\alpha(\mathbf{x}').
\end{aligned} \tag{3.16}$$

3.3 Modèle de Walecka dans la matière nucléaire

La méthode Hartree–Fock peut être appliquée comme dans le chapitre 2. Ici encore, on se place dans la matière infinie où les spineurs f_α sont des ondes planes :

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{p_\alpha}\frac{u_\alpha(p_\alpha)}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{p}_\alpha\mathbf{x}}. \tag{3.17}$$

Toutes les quantités sont alors exprimées simplement en représentation d'impulsion. L'indice α tient compte du spin et de l'isospin tandis que les opérateurs de création et d'annihilation créent et détruisent des quasiparticules d'impulsion, de spin et d'isospin donnés. Les intégrations sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont très simples. Pour les termes cinétique, de Hartree et de Fock, elles s'écrivent

respectivement

$$\int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{x}} = V \tag{3.18}$$

$$\int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{p}_\beta\cdot\mathbf{x}'} e^{i\mathbf{p}_\beta\cdot\mathbf{x}'} = V^2 \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} \tag{3.19}$$

$$\int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}_\beta\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{p}_\beta\cdot\mathbf{x}'} e^{i\mathbf{p}_\alpha\cdot\mathbf{x}'} = V^2 \delta_{\mathbf{q},\mathbf{p}_\alpha-\mathbf{p}_\beta} \tag{3.20}$$

en notation discrète. Pour passer de la notation discrète utilisée ci-dessus à la notation continue, on remplace la somme comme suit :

$$\sum_{\mathbf{p}} \longrightarrow V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \tag{3.21}$$

V est le volume de matière occupé, dans la matière nucléaire ce volume tend vers l'infini. La densité d'énergie est de manière générale reliée à l'énergie par particule :

$$\frac{E}{A} = \frac{E}{V}\frac{V}{A} = \frac{\varepsilon}{\rho}, \tag{3.22}$$

ce qui permet d'exprimer les différentes densités d'énergie simplement :

$$\varepsilon_{kin} = \int \frac{2d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_N \left(p\frac{P^*(p)}{E^*(p)} + M\frac{M^*(p)}{E^*(p)} \right)_N N_{\mathbf{p}} \tag{3.23}$$

$$\varepsilon_{Hartree} = -\frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \rho_S^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 \rho^2 \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Fock} = {} & \frac{g_\sigma^2}{2}\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\sigma^2} \\ & \sum_N \left(1 + \frac{M^*}{E^*}\frac{M'^*}{E'^*} - \frac{\mathbf{p}^*}{E^*}\cdot\frac{\mathbf{p}'^*}{E'^*}\right)_N N_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}'} \\ & + \frac{g_\omega^2}{2}\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\omega^2} \\ & \sum_N \left(2 - 4\frac{M^*}{E^*}\frac{M'^*}{E'^*} - 2\frac{\mathbf{p}^*}{E^*}\cdot\frac{\mathbf{p}'^*}{E'^*}\right)_N N_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}'}\end{aligned} \tag{3.25}$$

où l'on a introduit la densité scalaire ρ_S égale à :

$$\rho_S = \int \frac{2d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_N \left(\frac{M^*}{E^*}\right)_N N_{\mathbf{p}} \tag{3.26}$$

La densité ρ baryonique est celle de (2.1). Les nombres d'occupation $N_{\mathbf{p}}$ correspondent aux distributions de Fermi–Dirac des nucléons. À température

nulle, celles-ci se réduisent à des marches de Heaviside données explicitement aux équations (2.11) et (2.12). Cela revient à réduire les intégrales sur les normes des impulsions au segment $[0, p_F]$. Les sommes sur α et β dans les termes cinétique et de Hartree se décomposent en un facteur 2 (présent dans les éléments d'intégration) correspondant à la somme sur le spin et en la somme sur l'isospin notée N. Pour le terme de Fock, les sommes ne sont pas indépendantes d'où un facteur 4 en moins. Les quantités étoilées, définies par l'équation (2.20), proviennent de l'équation de Hartree–Fock obtenue en différenciant l'énergie par rapport aux $u_\alpha(\mathbf{p}_\alpha)$, les degrés de liberté fermioniques. L'énergie propre se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
\Sigma_S(\mathbf{p}) &= -\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \rho_S \\
&\quad +2\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\left(\frac{g_\sigma^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\sigma^2} - 4\frac{g_\omega^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\omega^2}\right)\sum_N \left(\frac{M^*(p')}{E^*(p')}\right)_N \\
\Sigma_0(\mathbf{p}) &= \left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 + 2\int \frac{2d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\left(\frac{g_\sigma^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\sigma^2} + 2\frac{g_\omega^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\omega^2}\right) \\
\Sigma_V(\mathbf{p}) &= 2\int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\left(-2\frac{g_\sigma^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\sigma^2} - 4\frac{g_\omega^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\omega^2}\right)\sum_N \left(\frac{P^*(p')}{E^*(p')}\right)_N .
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ce qui permet d'en déduire les quantités étoilées. Afin de simplifier les calculs numériques, les intégrales angulaires entre les vecteurs $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ peuvent être calculées analytiquement. Le résultat, identique à celui de [2], est donné dans l'annexe A.

Nous sommes à présent en mesure d'expliquer le mécanisme de saturation proposé par Walecka. Les deux termes de densité présents dans l'énergie de Hartree sont représentés sur la figure 3.1. La saturation, mettant en jeu une énergie de l'ordre de la dizaine de MeV, est obtenue par la compensation de deux potentiels d'énergie de l'ordre de la centaine de MeV. Le terme scalaire, attractif, l'emporte sur le terme vectoriel à basse densité. Mais la densité scalaire croissant moins vite que linéairement avec la densité baryonique, le terme vectoriel répulsif l'emporte à haute densité. La description relativiste est ici indispensable : à l'approximation non relativiste, la densité scalaire devient égale à la densité baryonique et la saturation ne se produit plus. Ce phénomène est extrêmement fin : une modification de quelques pour-cent des potentiels déplace complètement la saturation. Par exemple, les termes de Fock (qui sont numériquement égaux à environ moins un quart du terme Hartree correspondant) modifient le point de saturation. La figure 3.1 a été tracée avec des paramètres similaires à ceux proposés proposés initialement par Walecka de manière à reproduire le point de saturation ($\rho_0 = 0,16$ fm$^{-3}, a_v = 15,96$ MeV) (respectivement ($\rho_0 = 0,148$ fm$^{-3}, a_v = 15,75$ MeV) pour le modèle de Walecka). Dans l'approximation de Hartree, les

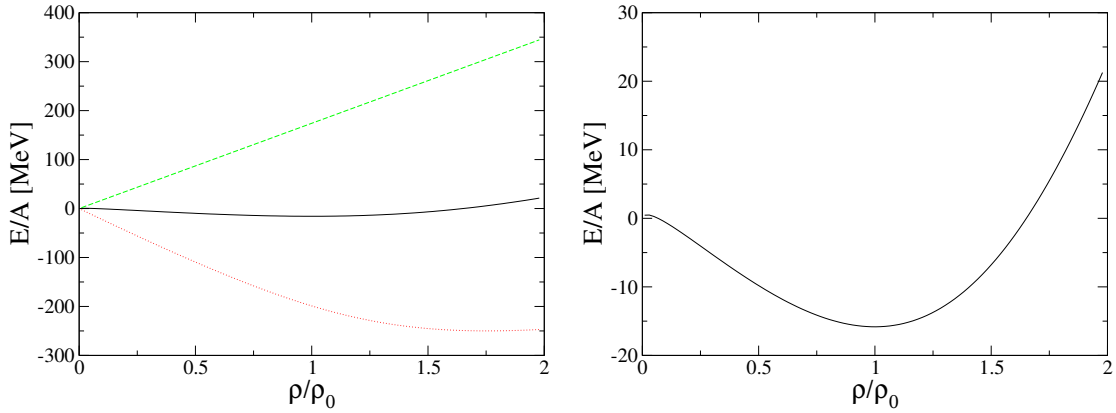

FIG. 3.1: *Saturation dans le modèle de Walecka (champ moyen à l'approximation de Hartree). À gauche, on a représenté les deux termes de l'énergie de Hartree donnés dans l'équation (3.24) et la courbe de saturation. Pour plus de clarté, la partie droite présente un zoom sur la courbe de saturation. Le terme d'attraction scalaire est représenté en pointillés et le terme de répulsion vectorielle en tiretés. Dans les deux figures, l'énergie de saturation est en trait plein. La discussion des paramètres est donnée dans le texte.*

résultats ne dépendant que des rapports

$$C_\sigma^2 \equiv g_s^2 \left(\frac{M_N^2}{m_\sigma^2}\right) = 329,9 \text{ et } C_\omega^2 \equiv g_\omega^2 \left(\frac{M_N^2}{m_\omega^2}\right) = 249,8 \tag{3.28}$$

(respectivement $C_\sigma = 357,4$ et $C_\omega = 273,8$). En prenant $M_N = 939$ MeV, $g_S = 10$ et $m_\omega = 783$ MeV (voir section 5.4 pour la discussion de ces valeurs), on obtient $m_\sigma = 517$ MeV et $g_\omega = 13,18$, à comparer aux résultats de la section 5.4 : $m_\sigma \sim 800$ à 850 MeV et $g_\omega \sim 6,5$ à 8 MeV. La compressibilité définie par l'équation (1.7) est de 544 MeV (respectivement 545 MeV), valeur deux fois plus grande que celle attendue. Ce modèle peut également être complété par l'ajout d'autres mésons tels que le rho ou le pion [2].

Le modèle de Walecka, bien que permettant d'expliquer la saturation de façon élégante, reste un modèle très phénoménologique. De plus, les détails des prédictions sont parfois éloignés de la réalité expérimentale, comme par exemple ici la trop grande compressibilité. Comme il a été expliqué dans les généralités, le but de cette thèse est de construire un modèle effectif relativiste basé sur un lien plus explicite avec les propriétés fondamentales de QCD, à savoir la symétrie chirale et les propriétés de confinement liées à la structure du nucléon.

Deuxième partie

Théorie relativiste chirale de la matière nucléaire

Chapitre 4

Modèle σ

Ce chapitre introduit la symétrie chirale dans les théories relativistes. Cette symétrie est d'abord présentée dans le cadre de QCD puis définie au niveau hadronique. Un modèle purement chiral ne reproduit cependant pas correctement les propriétés de la matière nucléaire, il sera donc complété dans la suite par un terme de confinement (équation 5.2).

4.1 Symétrie chirale

Une propriété essentielle de QCD est la symétrie chirale que l'on peut lire sur la partie quarkionique du lagrangien de QCD :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=u,d} \left(i\bar{\psi}_i \partial\!\!\!/ \psi_i - m\bar{\psi}_i\psi_i \right) \tag{4.1}$$

$$= i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - \frac{m_u + m_d}{2}\bar{\psi}\psi - \frac{m_u - m_d}{2}\bar{\psi}\tau_3\psi \tag{4.2}$$

où τ_3 n'est autre que la troisième matrice de Pauli ; elle agit dans l'espace d'isospin. Dans la deuxième ligne, le spineur est identique à l'isospineur nucléaire si ce n'est qu'il est écrit dans la représentation des quarks et non celle des nucléons. Il contient donc les spineurs des quarks u et d et non ceux du proton et du neutron.

Expérimentalement, il a été mis en évidence dans les années 50 et 60 l'existence de deux courants presque conservés intervenant dans les interactions électrofaibles, un courant vectoriel ou d'isospin et un courant axial. On peut retrouver ces courants en considérant les symétries du lagrangien ci-dessus. Lorsqu'on effectue la rotation d'isospin de $SU(2)$,

$$\psi \to e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2}}\psi, \tag{4.3}$$

où les τ_k (agissant ici aussi dans l'espace d'isospin) sont les matrices de Pauli, seul le dernier terme du lagrangien est modifié. Dans la limite où les

masses des quarks u et d sont égales, c'est-à-dire que la différence de masse $m_u - m_d$ est négligeable devant les masses des hadrons, le lagrangien est invariant sous cette transformation avec une excellente approximation et le courant presque conservé associé à cette symétrie est :

$$\mathcal{V}_k^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\tau_k}{2}\psi. \tag{4.4}$$

Ce courant vectoriel associé à une symétrie presque exacte de QCD apparaît explicitement dans les interactions électrofaibles des hadrons. Cette symétrie induit une dégénérescence d'isospin au niveau du spectre des hadrons ; par exemple le proton et le neutron sont partenaires et ont une masse quasiment égale.

On peut aussi considérer une « pseudo » rotation d'isospin de $SU(2)$:

$$\psi \to e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2}\gamma^5}\psi \tag{4.5}$$

qui ne diffère de la précédente que par un facteur γ^5. Le lagrangien est invariant sous cette transformation dans la limite où les masses des quarks sont nulles, ce qui est un peu mieux vérifié que leur égalité. Le courant associé,

$$\mathcal{A}_k^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5 \frac{\tau_k}{2}\psi, \tag{4.6}$$

est de divergence petite mais non nulle : $\partial_\mu \mathcal{A}_k^\mu = im\bar{\psi}\gamma^5\tau_k\psi$. Il dépend de la masse moyenne $m = (m_u + m_d)/2 \simeq 8\text{MeV}$ des quarks légers.

Ces deux symétries peuvent être réunies avec profit en une seule, appelée symétrie chirale. Pour cela, on introduit des champs droit et gauche (d'où le terme de chiralité) construits à partir des isospineurs :

$$\psi_{R,L} = \frac{(1 \pm \gamma^5)}{2}\psi. \tag{4.7}$$

Le lagrangien, réécrit en fonction de ces champs, est :

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}_L\psi_\mu\partial^\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R - m\left(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L\right). \tag{4.8}$$

Les transformations vectorielle et axiale reviennent à une rotation de $SU(2)_L \times SU(2)_R$ agissant de manière indépendante sur les parties droite et gauche du champ :

$$\begin{aligned} \psi_R &\to e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2}}\psi_R, \qquad \psi_L \to \psi_L \\ \psi_L &\to e^{i\alpha_k \frac{\tau_k}{2}}\psi_L, \qquad \psi_R \to \psi_R. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Par abus de langage, on dit que la première transformation est une rotation du champ droit ; on la note g_R. De même, on dit que la deuxième correspond à une rotation du champ gauche ; elle est notée g_L. Seul le terme de masse du lagrangien n'est pas invariant sous cette transformation, et la brisure qu'il

induit est précisément la brisure axiale. Cependant, cette brisure explicite étant de l'ordre de grandeur des masses des quarks u et d, la symétrie axiale est en fait presque aussi bien réalisée que que la symétrie vectorielle au niveau hadronique. On devrait donc observer un doublement du spectre comme pour la symétrie d'isospin, ce qui n'est pas le cas expérimentalement. Il se trouve en réalité que cette symétrie est spontanément brisée par le mécanisme de Goldstone. En effet, l'action sur le vide de la charge axiale, associée au courant axial, n'est pas nulle. La symétrie présente au niveau du lagrangien ne se retrouve pas sur l'état fondamental et par suite elle ne se trouve pas non plus sur le spectre de hadrons. Les bosons de Goldstone associés à la brisure spontanée sont au nombre de trois car il y a en réalité trois charges axiales, une pour chaque valeur de l'indice k. Ce sont les trois états de charge du pion. Dans le cas où la brisure explicite serait nulle, la charge axiale commuterait avec le hamiltonien, et son action sur le vide donnerait un état d'énergie égale à celle du vide. Les pions auraient alors une masse nulle. La légère brisure explicite donne aux pions leur masse petite mais finie. On peut montrer facilement [38] que la masse m_π des pions est liée à la masse m des quarks par la relation de Gell-Mann–Oakes–Renner (GOR), valable au plus bas ordre en m :

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -2m\langle\bar{q}q\rangle \tag{4.10}$$

où f_π est la constante de désintégration du pion et on reconnaît le condensat de quarks $\langle\bar{q}q\rangle$.

4.2 Modèle σ-linéaire

Lorsqu'on passe au monde des hadrons, un lagrangien directement inspiré des symétries de QCD est simplement :

$$\mathcal{L}_{hadrons} = i\bar{\psi}_L\partial\!\!\!/\psi_L + i\bar{\psi}_R\partial\!\!\!/\psi_R - M\left(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L\right). \tag{4.11}$$

Cette fois-ci, c'est la masse du nucléon qui est en jeu. La brisure due au dernier terme du lagrangien n'est plus du tout négligeable. Ce problème peut être résolu en s'inspirant du modèle σ-linéaire où apparaît une matrice $W(x)$ qui se transforme de façon appropriée sous la symétrie chirale en compensant les rotations des champs droit et gauche de manière à ce que le terme de masse soit globalement invariant :

$$M\left(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L\right) \to g\left(\bar{\psi}_L W(x)\psi_R + \bar{\psi}_R W^+(x)\psi_L\right), \tag{4.12}$$

c'est-à-dire que W se transforme suivant $W \to g_L W g_R^+$. On peut la décomposer sur les matrices d'isospin à l'aide de quatre champs réels notés $\sigma(x)$ et $\vec{\varphi}(x)$:

$$W(x) = \sigma(x) + i\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}(x). \tag{4.13}$$

Les propriétés d'invariance du nouveau lagrangien sous la symétrie chirale et sous les transformations de Lorentz imposent au champ σ d'être un scalaire isoscalaire et au champ $\vec{\varphi}$ d'être un pseudo-scalaire isovecteur. Afin de donner à ces champs un contenu dynamique, on ajoute au lagrangien un terme d'énergie cinétique et un terme de potentiel :

$$\mathcal{L}_{mésons} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\varphi}\partial^\mu\vec{\varphi} - V(\sigma,\vec{\varphi}). \tag{4.14}$$

Le terme potentiel est composé d'une partie invariante chirale construite à partir de la grandeur $tr(WW^+) = \sigma^2 + \vec{\varphi}^2$ invariante et d'un terme brisant explicitement la symétrie, $c\sigma$. Une forme simple est :

$$V(\sigma,\vec{\varphi}) = \frac{\lambda}{4}\left(\sigma^2 + \vec{\varphi}^2 - v^2\right)^2 - c\sigma. \tag{4.15}$$

On peut montrer [3], en considérant la désintégration faible du pion, que $\langle\sigma\rangle$ s'identifie avec f_π. En imposant alors que la valeur moyenne du terme brisant explicitement la symétrie chirale soit la même que dans QCD, on trouve :

$$c = m_\pi^2 f_\pi. \tag{4.16}$$

Il est heureux qu'il soit proportionnel à la masse du pion : il doit s'annuler lorsque la symétrie est exacte, de même que la masse du pion s'annule à ce moment-là.

Le potentiel invariant chiral est choisi de manière à briser spontanément la symétrie. Sa forme dépend néanmoins du signe de v^2. Si celui-ci est négatif, le fondamental a une seule solution : $\sigma = 0$ et $\vec{\varphi} = 0$. Les valeurs moyennes sur le vide de ces champs sont alors évidement nulles, celui-ci respecte la symétrie. On dit qu'elle est réalisée à la Wigner. Dans ce cas, le spectre devrait être dédoublé. Comme on l'a déjà dit, ce n'est pas le cas dans la réalité. v^2 est alors nécessairement positif. Dans ce cas, le potentiel a une forme dite de « chapeau mexicain » représenté sur la figure 4.1. Se déplacer au fond du potentiel ne coûte pas d'énergie : les particules associées à ce déplacement sont justement les bosons de Goldstone. Les paramètres restant sont eux aussi identifiés avec des grandeurs connues [3] :

$$g = \frac{M}{f_\pi} \tag{4.17}$$

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi^2} \tag{4.18}$$

$$v^2 = f_\pi^2\frac{m_\sigma^2 - 3m_\pi^2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} \tag{4.19}$$

Cependant, le fait que la particule sans masse soit celle qui circule au fond du puits de potentiel et non le champ pseudo-scalaire du modèle σ-linéaire nous incite à redéfinir ce champ. On obtient alors le modèle σ non linéaire.

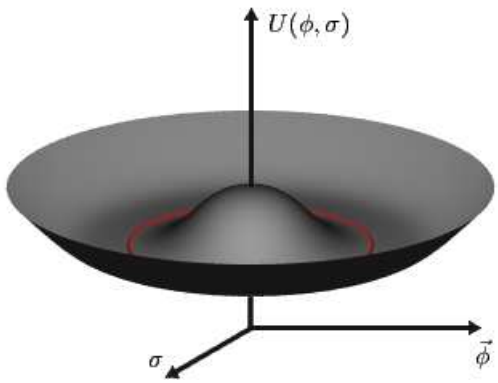

FIG. 4.1: *Potentiel chiral dit en « chapeau mexicain ».*

4.3 Modèle σ non linéaire

En suivant la méthode de [3], on commence par redéfinir les champs paramétrant la matrice W :

$$\begin{aligned} \sigma &= S\cos F\left(\frac{\pi}{f_\phi}\right) \\ \vec{\varphi} &= S\hat{\vec{\pi}}\sin F\left(\frac{\pi}{f_\pi}\right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

où F est une fonction impaire du type $F(x) = x + \alpha x^3 + \cdots$. La physique ne doit bien sûr pas dépendre du choix de α ; on se restreindra en pratique à l'ordre le plus bas où $F(x) = x$. L'interprétation des champs S et $\vec{\pi}$ est très simple, comme on peut le voir sur la figure 4.2 : $\vec{\pi}$, comme suggéré plus haut, représente la rotation au fond du puits de potentiel, S est le déplacement radial. Par construction, on a :

$$\sigma^2 + \vec{\varphi}^2 = S^2. \tag{4.21}$$

Le potentiel invariant chiral est donc une fonction de S^2 uniquement ; le terme brisant explicitement la symétrie est quand à lui :

$$c\sigma = f_\pi m_\pi^2 S cos\left(\frac{\pi}{f_\pi}\right) \simeq f_\pi m_\pi^2 S\left(1 - \frac{\vec{\pi}^2}{2f_\pi^2}\right). \tag{4.22}$$

Le fait de négliger les termes d'ordre supérieur dans le cosinus omet les interactions des pions avec eux-mêmes. On trouve les masses des mésons :

$$m_\pi^2\delta_{i,j} = \frac{\partial^2 V_{tot}}{\partial\pi_i\partial\pi_j} = m_\varphi^2, \tag{4.23}$$

$$m_S^2 = \frac{\partial^2 V_{tot}}{\partial S^2} = m_\sigma^2. \tag{4.24}$$

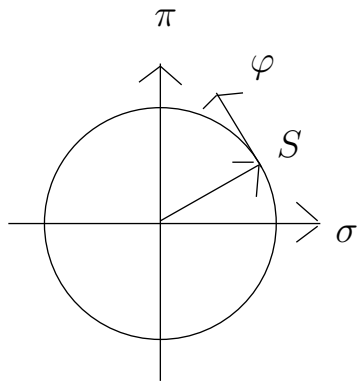

FIG. 4.2: *Rotation des champs paramétrant la matrice W : mise en évidence des champs scalaire et pionique de la physique nucléaire.*

La matrice W s'écrit alors simplement comme

$$W = SU \text{ où } U = \xi^2 = exp\left[i\frac{\vec{\tau}\cdot\hat{\vec{\pi}}}{f_\pi}\right]. \tag{4.25}$$

On définit ensuite un nouveau champ de nucléons N par la transformation :

$$N = (\xi P_R + \xi^\dagger P_L)\psi. \tag{4.26}$$

Enfin, on peut ajouter au lagrangien invariant chiral un terme qui permettra à la constante de couplage axiale d'être différente de 1 [3] :

$$\mathcal{L} = ia\bar{\psi}\gamma^\mu(W\partial_\mu W^\dagger P_L + W^\dagger\partial_\mu W P_R)\psi \tag{4.27}$$

où le choix $a = (1 - g_A)/2f_\pi$ permet justement de corriger la charge axiale du nucléon et d'avoir $g_A = 1,25$.

Par construction, le fond du puits est de rayon f_π (4.15). On introduit

$$s = S - f_\pi, \tag{4.28}$$

la fluctuation radiale (petite) autour du fond du puits. Le champ $\vec{\pi}$ est sa propre fluctuation. En tenant compte de ces approximations, le lagrangien se met sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{N}\left(i\partial\!\!\!/ - M\right)N + \frac{1}{2}\partial_\mu s\partial^\mu s - \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{8f_\pi^2}\left(s^2 + 2f_\pi s + 2f_\pi^2\frac{m_\pi^2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2}\right)^2 \\ &\quad + \bar{\psi}\gamma_\mu\mathcal{V}_c^\mu\psi + f_\pi^2 Tr\partial_\mu U\partial^\mu U^+ + g_A\bar{\psi}\gamma_\mu\mathcal{A}_c^\mu\gamma^5\psi + f_\pi^2 m_\pi^2 cosF\left(\frac{\pi}{f_\pi}\right).\end{aligned} \tag{4.29}$$

On notera dorénavant les spineurs de nucléons ψ bien qu'il s'agisse des nouvelles variables. Les courants $\mathcal{V}_c^\mu$ et $\mathcal{A}_c^\mu$ valent au plus bas ordre en s et $\vec{\pi}$:

$$\mathcal{V}_c^\mu = \frac{i}{4f_\pi^2}(\vec{\pi} \wedge \partial^\mu \hat{\vec{\pi}}) \cdot \vec{\tau} \tag{4.30}$$

$$\mathcal{A}_c^\mu = \frac{1}{2f_\pi}\vec{\tau} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}. \tag{4.31}$$

S étant invariant chiral, sa valeur moyenne joue le rôle de paramètre d'ordre chiral autour du minimum du potentiel effectif. Lorsque la densité augmente, sa fluctuation s, négative, contrôle le rétrécissement du cercle chiral et l'évolution de la masse du nucléon. Physiquement, il est proposé ici que ce champ s soit assimilé au champ scalaire de la physique nucléaire puisque les nombres quantiques correspondent. Ceci permet en outre de légitimer le choix du champ sigma dans les théories de Walecka qui acquièrent ainsi *a posteriori* un statut chiral. Le déplacement le long du fond du puits en « chapeau mexicain » ne coûtant pas d'énergie, la masse du champ $\vec{\pi}$ est nulle dans une théorie invariante chirale. Ici, à cause de la légère brisure explicite donnée équation (4.16), le fond du puits est légèrement penché et la masse acquière une valeur petite mais non nulle. Ce champ $\vec{\pi}$ est assimilé au champ pionique car il possède les mêmes nombres quantiques.

4.4 Échec d'un modèle purement chiral

Dans le modèle de Walecka, la saturation était assurée par la force répulsive due au méson oméga : on ajoute donc sa contribution au lagrangien. En outre, on le complète en incorporant le méson rho et on tient compte enfin du méson scalaire isovecteur delta [61] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu - g_\rho\bar{\psi}\left(\gamma^\mu\vec{\rho}_\mu - \frac{\kappa_\rho}{2M}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\vec{\rho}_\mu\right)\vec{\tau}\psi \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\delta}\partial^\mu\vec{\delta} - \frac{1}{2}m_\delta^2\vec{\delta}^2 - g_\delta\bar{\psi}\vec{\delta}\cdot\vec{\tau}\psi\end{aligned} \tag{4.32}$$

où $\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu$. Le méson delta, scalaire isovecteur, génère une différence entre les masses du proton et du neutron. En raison toutefois de la petite valeur de la constante de couplage choisie, $g_\delta = 1$, son effet est pratiquement négligeable. L'énergie peut être calculée par la méthode Hartree–Fock à partir du lagrangien total (équations 4.29 et 4.32). Les détails du calcul sont donnés au chapitre 5. L'énergie de liaison par nucléon en fonction de la densité est présentée figure 4.3. Le terme scalaire attractif est très fort : l'énergie de liaison décroît rapidement avec la densité, du moins pour les plus faibles valeurs de la densité. Une pseudo-saturation semble avoir lieu sur la figure, mais il faut remarquer que celle-ci intervient bien avant la

densité normale de la matière nucléaire. La remontée qui a lieu n'est pas du tout physique (ne serait-ce que la valeur anormale de la compressibilité) : la valeur moyenne du champ scalaire diverge pour des densités comprises entre $0,8$ et $0,9\rho_0$. La portion de courbe qui remonte n'est donc pas physique, et au-delà de $0,9\rho_0$, l'équation implicite (5.28) qui permet d'obtenir $\langle\sigma\rangle$ n'a plus de solution. Ceci est dû à des diagrammes s^3 dans le potentiel [57, 62] (figure 4.4) : ceux-ci sont trop attractifs. Dans un modèle type Walecka au contraire, le terme en s^3 est positif et ce genre de situation n'intervient pas. Le problème peut être résolu en introduisant un terme qui restaure le signe correct du terme scalaire cubique, c'est l'objet du chapitre suivant.

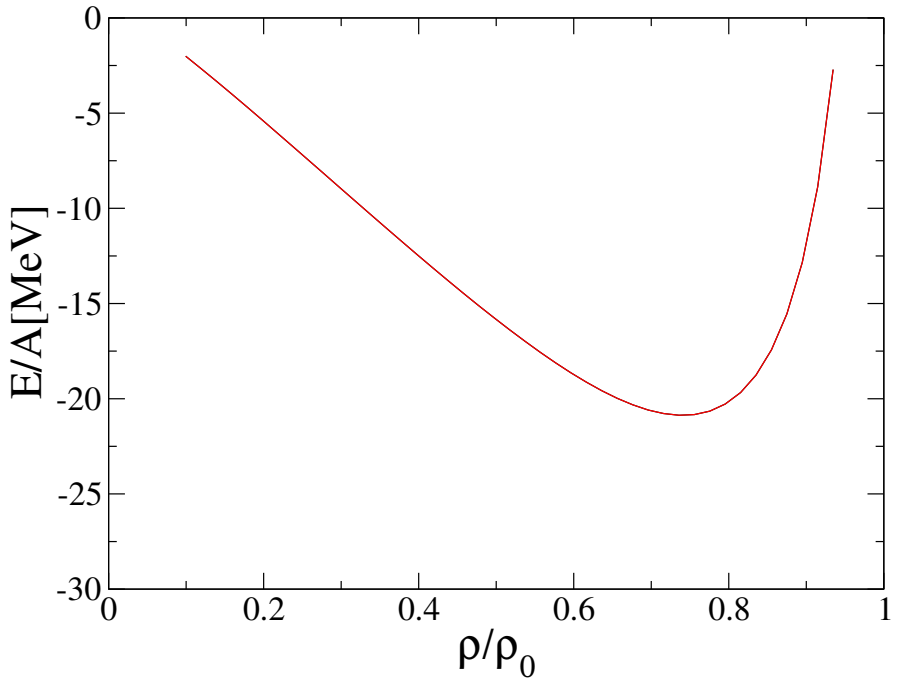

FIG. 4.3: *Tentative de courbe de saturation de la matière nucléaire dans le modèle sigma.*

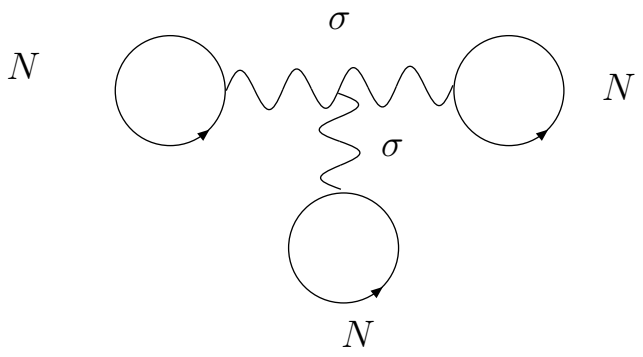

FIG. 4.4: *Diagramme du terme attractif dans le potentiel scalaire.*

Chapitre 5

Effets du confinement

Comme mentionné dans l'introduction générale, un deuxième effet de QCD doit être incorporé à notre modèle, à savoir le confinement des quarks dans les hadrons. Celui-ci intervient à travers la réponse nucléonique présentée au paragraphe 1.2.7. Les nucléons peuvent être vus non comme des particules ponctuelles, mais comme une assemblée de trois quarks. La réponse globale d'un nucléon dépend alors non seulement du couplage des quarks aux mésons mais également du modèle de confinement choisi. On peut montrer[50] que l'effet principal est de modifier l'interaction avec le champ scalaire.

5.1 Lagrangien chiral

Le lagrangien du modèle sigma est complété par un terme associé à la réponse nucléonique présentée dans l'introduction. En réunissant les différentes contributions rencontrées dans les chapitres précédents, le lagrangien total s'écrit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\, i\partial\!\!\!/\psi \,+\, \mathcal{L}_s \,+\, \mathcal{L}_\omega \,+\, \mathcal{L}_\rho \,+\, \mathcal{L}_\delta \,+\, \mathcal{L}_\pi \tag{5.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_s &= -M_N(s)\bar{\psi}\psi \,-\, V(s) \,+\, \frac{1}{2}\partial^\mu s \partial_\mu s \\
\mathcal{L}_\omega &= -g_\omega\, \omega_\mu\, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \,+\, \frac{1}{2}\, m_\omega^2\, \omega^\mu\omega_\mu \,-\, \frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_\rho &= -g_\rho\, \vec{\rho}_\mu\, \bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \,-\, g_\rho \frac{\kappa_\rho}{2\, M_N}\, \partial_\nu\vec{\rho}_\mu\, \psi\bar{\sigma}^{\mu\nu}\vec{\tau}\psi \,+\, \frac{1}{2}\, m_\rho^2\, \vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu \,-\, \frac{1}{4}\, \vec{G}^{\mu\nu}\vec{G}_{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_\delta &= -g_\delta\, \vec{\delta}\, \bar{\psi}\vec{\tau}\psi \,-\, \frac{1}{2}\, m_\delta^2\, \vec{\delta}^2 \,+\, \frac{1}{2}\partial^\mu\vec{\delta}\partial_\mu\vec{\delta} \\
\mathcal{L}_\pi &= \frac{g_A}{2\, f_\pi}\, \partial_\mu\vec{\pi}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\vec{\tau}\psi - \frac{1}{2}\, m_\pi^2\vec{\pi}^2 \,+\, \frac{1}{2}\, \partial^\mu\vec{\pi}\partial_\mu\vec{\pi}.
\end{aligned}$$

5.1.1 Contribution du méson scalaire s

L'expression de $M_N(s)$ (équation 1.45) reflète la structure interne du nucléon. Le terme quadratique tient compte de la réponse scalaire du nucléon qui est contrainte par les données sur réseau [55]. Cependant, on pourrait aussi considérer des termes d'ordre supérieur dans la dérivée de la masse du nucléon par rapport au champ scalaire. En pratique, comme dans [63, 56], on se limite au terme cubique :

$$M_N(s) = M_N + g_S\, s + \frac{1}{2}\,\kappa_{NS}\left(s^2 + \frac{s^3}{3\,f_\pi}\right). \tag{5.2}$$

La constante de couplage du champ scalaire au nucléon dépend alors de la densité (car s en dépend, voir (5.28)) :

$$g_S^*(s) = \frac{\partial M_N}{\partial s} = g_S + \kappa_{NS}\left(s + \frac{s^2}{2f_\pi}\right). \tag{5.3}$$

La susceptibilité scalaire quand à elle devient

$$\tilde{\kappa}_{NS}(s) = \frac{\partial^2 M_N}{\partial s^2} = \kappa_{NS}\left(1 + \frac{s}{f_\pi}\right) \tag{5.4}$$

et disparaît lorsque la symétrie chirale est entièrement restaurée, c'est-à-dire lorsque $\bar{s} = -f_\pi$ où $\bar{s}$ désigne la valeur moyenne du champ s. Le méson s est le seul ici à avoir une interaction avec lui-même grâce au potentiel du modèle σ

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{\lambda}{4}\left((f_\pi + s)^2 - v^2\right)^2 - f_\pi m_\pi^2 S \\ &\equiv \frac{m_\sigma^2}{2}\,s^2 + \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2\,f_\pi}\,s^3 + \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{8\,f_\pi^2}\,s^4. \end{aligned} \tag{5.5}$$

On a omis le terme constant qui peut toujours être soustrait. Le terme cubique, attractif, est compensé par l'effet de la réponse scalaire du nucléon. On peut le voir en introduisant un changement de variable simple du champ scalaire : on écrit la masse du nucléon en fonction d'un champ u défini par [64]

$$M_N(s) = M_N + g_S\, s + \frac{1}{2}\,\kappa_{NS} s^2 \equiv M_N + g_S u. \tag{5.6}$$

Le potentiel en chapeau mexicain peut être réécrit avec cete nouvelle variable (pour la simplicité des calculs, on travaille dans la limite où $m_\pi \ll m_\sigma$ et on ne garde que le terme dominant dans κ_{NS}) : si on ne garde que les termes dominant en s/f_π, soit jusqu'à l'ordre s^4/f_π^2, on obtient

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{m_\sigma^2}{2}\left(s^2 + \frac{s^3}{f_\pi} + \frac{s^4}{4f_\pi^2}\right) \\ &= \frac{m_\sigma^2}{2}\left(u^2 + \frac{u^3}{f_\pi}(1-2C) + \frac{u^4}{4f_\pi}(1 - 12C + 20C^2)\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

On a écrit le résultat en fonction de $C = \kappa_{NS} f_\pi^2/2M_N = \kappa_{NS} f_\pi/2g_S$. Le terme cubique dépend du signe de $(1-2C)$: en l'absence de confinement, $C = 0$ et le terme est attractif ; avec le confinement $C \simeq 1,25 > 1/2$ donc le terme est répulsif en accord avec les théories type Walecka et la phénoménologie [65, 53].

On rappelle également la forme du terme brisant explicitement la symétrie :

$$\mathcal{L}_{\chi SB} = c\,\sigma \simeq c\,s - \frac{c}{2f_\pi}\vec{\pi}^2 \tag{5.8}$$

où le deuxième terme, ignoré dans la suite de ce chapitre, correspond au premier terme du développement des boucles de pions.

5.1.2 Contribution des autres mésons

Le terme d'interaction du pion est pris en couplage pseudo-vecteur, comme cela émerge naturellement de notre approche. Cependant, le lecteur intéressé trouvera à l'annexe A le traitement complet du pion avec le terme pseudo-scalaire. À la limite non relativiste, les deux termes donnent un même couplage au nucléon. On peut le voir dans le cas où le spineur du nucléon est le spineur de Dirac libre. Celui-ci s'écrit en fonction de la quantité de mouvement $p \ll M_N$:

$$\begin{aligned}
-i\bar{\psi}\gamma^5\psi &\simeq -i\begin{pmatrix}1 & , & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_f}{2M_N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i}{2M_N}\end{pmatrix}\\
&\simeq i\frac{\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_f-\vec{p}_i)}{2M_N}, \qquad (5.9)\\
iq_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi &\simeq iq_0\begin{pmatrix}1 & , & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_f}{2M_N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i}{2M_N}\end{pmatrix}\\
&\quad -iq^j\begin{pmatrix}1 & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_f}{2M_N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^j\\ -\sigma^j & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i}{2M_N}\end{pmatrix}\\
&\simeq i\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}_f-\vec{p}_i). \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

On a laissé le $\vec{\tau}$ de côté car il ne joue pas de rôle particulier dans la limite non relativiste. $iq^\mu = i(p_i^\mu - p_f^\mu)$ provient de la dérivée de $\vec{\pi}$. Dans le terme pseudo-vecteur, la partie temporelle en γ^0 couple petites et grandes composantes, elle donne donc une contribution d'ordre supérieur en p/M_N. Les deux limites non relativistes sont égales lorsque les constantes de couplage vérifient $g_\pi^{ps}/2M_N = g_A/2f_\pi$. La construction chirale vue dans la partie sur le modèle sigma suggère plutôt un couplage pseudo-vecteur, c'est pourquoi on se limite à celui-ci.

Le terme d'interaction du rho contient une partie vectorielle et une partie tensorielle. On peut remarquer qu'à l'approximation non relativiste, en

prenant les spineurs de Dirac libres pour les nucléons, on trouve

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^0\psi &= 1+\mathcal{O}\left(\left(\frac{p}{2M_N}\right)^2\right), && (5.11)\\
\bar{\psi}\gamma^j\psi &\simeq \begin{pmatrix}1 & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_f}{2M_N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma^j\\ -\sigma^j & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i}{2M_N}\end{pmatrix}\\
&= \sigma^j\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_f}{2M_N}+\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_i}{2M_N}\sigma^j\\
&= \frac{p_i^j+p_f^j}{2M_N}+i\varepsilon^{jkl}\frac{\sigma^l(p_i^k-p_f^k)}{2M_N}, && (5.12)\\
\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\partial_i\rho_0\bar{\psi}\sigma^{0i}\psi &\sim \frac{\kappa_\rho}{2M_N}\partial_0\rho_i\bar{\psi}\sigma^{i0}\psi\\
&\sim \kappa'_{NS}\left(\frac{p}{2M_N}\right)^2\bar{\psi}\gamma^j\psi && (5.13)\\
\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\partial_k\bar{\psi}\sigma^{jk}\psi &\simeq \frac{\kappa_\rho}{2M_N}i(p_i^k-p_f^k)\sigma^l\varepsilon^{jkl}. && (5.14)
\end{aligned}$$

La partie temporelle du terme vecteur, de l'ordre de l'unité, donne une contribution égale à la densité baryonique une fois intégrée sur les états occupés par la mer de Fermi. Elle ne contribue pas à l'ordre en $p/2M_N$. On a ensuite utilisé le fait que $\sigma^{ij}=\frac{i}{2}\left[\gamma^i,\gamma^j\right]=\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ [66]. On retrouve bien le couplage non relativiste en $(1+\kappa_\rho)$, ce qui justifie le signe relatif entre les deux termes du lagrangien d'interaction.

Les paramètres ($g_\omega, g_\rho, \kappa_\rho, g_A$ et les masses des mésons) sont fixés autant que possible par la phénoménologie hadronique, ce qui fait que ce modèle est déjà quasiment contraint. Leur réglage fin sera largement détaillé et discuté dans la section consacrée aux résultats. On pourrait aussi calculer ou du moins contraindre ces paramètres par un modèle NJL sous-jacent. Pour le moment, on se contentera de commenter les couplages tenseurs des mésons vecteurs. Un modèle de dominance vectorielle (VDM) pur implique que κ_ρ soit identifié avec la partie anormale du moment magnétique isovectoriel du nucléon. Ceci conduit à $\kappa_\rho = 3,7$. Au contraire, des analyses de données sur les expériences de diffusion pion sur nucléon suggèrent $\kappa_\rho = 6,6$ [67]. Le méson oméga devrait également avoir un coupage tensoriel. D'après VDM, la partie anormale isoscalaire du moment magnétique est très faible : $\kappa_\omega = 0,13$. On néglige donc cette contribution.

5.2 Construction du hamiltonien

En suivant les étapes du calcul du modèle de Walecka, on utilise les moments conjugués des champs de mésons

$$\Pi_s = \partial_0 s, \qquad \Pi_{j\omega} = F^{0j}, \qquad \vec{\Pi}_\delta = \partial_0 \vec{\delta},$$
$$\vec{\Pi}_{j\rho} = \vec{G}_{0j} \,+\, g_\rho \frac{\kappa_\rho}{2\,M_N}\,\bar{\psi}\sigma^{j0}\vec{\tau}\psi, \qquad \vec{\Pi}_j = \partial_0\vec{\varphi}_\pi \,-\, \frac{g_A}{2\,f_\pi}\,\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\vec{\tau}\psi$$

afin de calculer le hamiltonien après transformation de legendre du lagrangien :

$$H = \int d\mathbf{x}\left[\bar{\psi}\,(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\psi \,+\, H_s \,+\, H_\omega \,+\, H_\rho \,+\, H_\delta \,+\, H_\pi\right] \tag{5.15}$$

avec

$$\begin{aligned}
H_s &= \int d\mathbf{x}\left[M_N(s)\,\bar{\psi}\psi \,+\, \frac{1}{2}\left(\Pi_s^2 \,+ (\boldsymbol{\nabla}s)^2\right) \,+\, V(s)\right] \\
H_\omega &= \int d\mathbf{x}\left[g_\omega\,\omega_\mu\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\left((\Pi_{j\omega})^2 \,-\, m_\omega^2\,\omega^\mu\omega_\mu \,+\, \boldsymbol{\nabla}\omega_j\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_j \,-\, (\boldsymbol{\nabla}\cdot\omega_j)^2\right) \,-\, \Pi_{j\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla}\omega_0\right] \\
H_\rho &= \int d\mathbf{x}\left[g_\rho\,\vec{\rho}_\mu\,\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \,+\, g_\rho\frac{\kappa_\rho}{2\,M_N}\left(\partial_j\vec{\rho}_i\,\bar{\psi}\sigma^{ij}\vec{\tau}\psi \,-\, \vec{\Pi}_i\,\bar{\psi}\sigma^{i0}\vec{\tau}\psi\right)\right. \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(g_\rho\frac{\kappa_\rho}{2\,M_N}\right)^2\left(\bar{\psi}\sigma^{i0}\vec{\tau}\psi\right)^2 \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\left((\vec{\Pi}_{j\rho})^2 \,-\, m_\rho^2\,\vec{\rho}^\mu\vec{\rho}_\mu \,+\, \boldsymbol{\nabla}\vec{\rho}^j\cdot\boldsymbol{\nabla}\vec{\rho}^j \,-\, (\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\rho}_j)^2\right) \,-\, \vec{\Pi}_{j\rho}\cdot\boldsymbol{\nabla}\vec{\rho}_0\right] \\
H_\delta &= \int d\mathbf{x}\left[g_\delta\,\vec{\delta}\,\bar{\psi}\vec{\tau}\psi \,+\, \frac{1}{2}\left(\vec{\Pi}_\delta^2 \,+ (\boldsymbol{\nabla}\vec{\delta})^2 \,+\, m_\delta^2\vec{\delta}^2\right)\right] \\
H_\pi &= \int d\mathbf{x}\left[\frac{g_A}{2\,f_\pi}\left(\boldsymbol{\nabla}\vec{\varphi}_\pi\cdot\bar{\psi}\gamma^5\vec{\gamma}\vec{\tau}\psi \,+\, \vec{\Pi}_{j\pi}\,\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\vec{\tau}\psi\right) \,+\, \left(\frac{g_A}{2\,f_\pi}\right)^2\left(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\vec{\tau}\psi\right)^2\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\left(\Pi_{j\pi}^2 \,+ (\boldsymbol{\nabla}\vec{\varphi}_\pi)^2 \,+\, m_\pi^2\vec{\varphi}_\pi^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

5.2.1 Approximation statique

On se place à l'approximation statique (les effets de retard seront étudiés un peu plus bas) où les moments conjugués des mésons se réduisent à

$$\Pi_s = 0, \qquad \Pi_\omega^i = \nabla^i\omega^0, \vec{\Pi}_\delta = 0,$$
$$\vec{\Pi}_{j\rho} = \nabla_j\vec{\rho}^0 \,+\, g_\rho\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\bar{\psi}\sigma^{j0}\vec{\tau}\psi,\; \Pi_{aj\pi} = -\frac{g_A}{2\,f_\pi}\,\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\vec{\tau}\psi.$$

Les différentes parties du hamiltonien se simplifient alors selon

$$
\begin{aligned}
H_s^{static} &= \int d\mathbf{x} \left[M_N(s)\, \bar{\psi}\psi \,+\, \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} s)^2 \,+\, V(s) \right] \\
H_\omega^{static} &= \int d\mathbf{x} \left[g_\omega\, \omega_\mu\, \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \,-\, \frac{1}{2}\left(m_\omega^2\, \omega^\mu\omega_\mu \,+\, \boldsymbol{\nabla}\omega^\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}\omega_\mu \,+\, (\boldsymbol{\nabla}\cdot\omega_j)^2 \right) \right] \\
H_\rho^{static} &= \int d\mathbf{x} \left[g_\rho\, \vec{\rho}_\mu\, \bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \,+\, g_\rho \frac{\kappa_\rho}{2\, M_N}\, \partial_j \vec{\rho}_\mu\, \bar{\psi}\sigma^{\mu j}\vec{\tau}\psi \right. \\
&\qquad \left. -\, \frac{1}{2}\left(m_\rho^2\, \vec{\rho}^\mu\vec{\rho}_\mu \,+\, \boldsymbol{\nabla}\vec{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}\vec{\rho}_\mu \,+\, (\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\rho}_j)^2 \right) \right] \\
H_\delta^{static} &= \int d\mathbf{x} \left[g_\delta\, \vec{\delta}\, \bar{\psi}\vec{\tau}\psi \,+\, \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\nabla}\vec{\delta})^2 \,+\, m_\delta^2 \vec{\delta}^2 \right) \right] \\
H_\pi^{static} &= \int d\mathbf{x} \left[\frac{g_A}{2\, f_\pi}\, \boldsymbol{\nabla}\vec{\varphi}_\pi \cdot \bar{\psi}\gamma^5\vec{\gamma}\vec{\tau}\psi \,+\, \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\nabla}\vec{\varphi}_\pi)^2 \,+\, m_\pi^2 \vec{\varphi}_\pi^2 \right) \right]. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Le hamiltonien peut être décomposé en deux contributions :

$$
\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left(K \quad + \quad \mathcal{H}_{mésons} \right). \qquad (5.18)
$$

La première inclut la partie purement nucléonique ainsi que les couplages de Yukawa des mésons aux nucléons :

$$
\begin{aligned}
K \;=\; \bar{\psi}\Big(& -\, i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} \,+\, M_N(s) \,+\, g_\omega\, \omega_\mu\, \gamma^\mu \,+\, g_\rho\, \vec{\rho}_\mu\, \gamma^\mu\vec{\tau} \,+ \\
& g_\rho \frac{\kappa_\rho}{2\, M_N}\, \partial_j \vec{\rho}_\mu\, \sigma^{\mu j}\vec{\tau} \,+\, g_\delta\, \vec{\delta}\, \vec{\tau} \,+\, \frac{g_A}{2\, f_\pi}\, \boldsymbol{\nabla}\vec{\varphi}_\pi \cdot \gamma^5\vec{\gamma}\vec{\tau} \Big)\psi. \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

La deuxième est purement mésonique :

$$
\begin{aligned}
H_{mésons} \;=\; & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} s)^2 \,+\, V(s) \,-\, \frac{1}{2}\left(m_\omega^2\, \omega^\mu\omega_\mu \,+\, \boldsymbol{\nabla}\omega^\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}\omega_\mu \,+\, (\boldsymbol{\nabla}\cdot\omega_j)^2 \right) \\
& -\, \frac{1}{2}\left(m_\rho^2\, \vec{\rho}^\mu\vec{\rho}_\mu \,+\, \boldsymbol{\nabla}\vec{\rho}^\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}\vec{\rho}_\mu \,+\, (\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\rho}_j)^2 \right) \\
& +\, \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\nabla}\vec{\delta})^2 \,+\, m_\delta^2 \vec{\delta}^2 \right) \,+\, \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\nabla}\vec{\varphi}_\pi)^2 \,+\, m_\pi^2 \vec{\varphi}_\pi^2 \right). \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

5.2.2 Équations du mouvement pour les champs de mésons

De nouveau, on souhaite écrire les champs des mésons en fonction de ceux des nucléons. Les équations de Lagrange permettent de faire cela. Dans l'approximation statique, les équations du mouvement peuvent être écrites aussi comme $[H, \Pi_X] = 0$, ce qui est plus correct du point de vue quantique.

Les deux approches donnent le même résultat, à savoir

$$
\begin{aligned}
&-\nabla^2 s \,+\, V'(s) = -\frac{\partial K}{\partial s} = -\,\frac{\partial M_N}{\partial s}\,\bar{\psi}\psi,\\
&-\nabla^2 \omega^\mu \,+\, m_\omega^2\,\omega^\mu \,+\, \delta_{\mu i}\partial_i(\boldsymbol{\nabla}\cdot\omega_j) = \frac{\partial K}{\partial \omega_\mu} = g_\omega\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\\
&-\nabla^2 \vec{\rho}^\mu \,+\, m_\rho^2\,\vec{\rho}^\mu \,+\, \delta_{\mu i}\partial_i(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\rho}_j)\\
&\qquad = \frac{\partial K}{\partial \vec{\rho}_\mu} = g_\rho\,\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \,-\, g_\rho\frac{\kappa_\rho}{2\,M_N}\,\partial_j\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu j}\vec{\tau}\psi\right),\\
&-\nabla^2\vec{\delta} \,+\, m_\delta^2\,\vec{\delta} = \frac{\partial K}{\partial \vec{\delta}} = g_\delta\,\bar{\psi}\vec{\tau}\psi,\\
&-\nabla^2\vec{\varphi}_\pi \,+\, m_\pi^2\vec{\varphi}_\pi = \frac{\partial K}{\partial \vec{\varphi}_\pi} = \frac{g_A}{2\,f_\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\bar{\psi}\gamma^5\vec{\gamma}\vec{\tau}\psi.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Comme on l'a mentionné plus haut pour les champs scalaire et pionique et selon la méthode proposée dans [53], on décompose chaque champ en une partie moyenne et une fluctuation supposée petite :

$$
\varphi_X = \bar{\varphi}_X \,+\, \Delta\varphi_X. \tag{5.22}
$$

$\bar{\varphi}_X = \langle\varphi_X\rangle$ est la valeur moyenne sur le vide du champ de méson φ_X. $\Delta\varphi_X$ est la petite fluctuation correspondante. Le Δ est majuscule afin de ne pas induire de confusion avec le méson delta noté δ. L'approche développée dans cette partie est légèrement différente de celle proposée dans le modèle de Walecka. En particulier, la notation de seconde quantification, non indispensable, est mise de côté. Bien évidement, les résultats sont les mêmes quelque soit la méthode employée. Les mésons autres que le s n'étant pas modifiés avec le confinement par rapport au modèle de Walecka, les formules données dans l'annexe A pourront être reprises à la fin de cette partie. La partie scalaire étant la plus délicate à traiter, on prend le temps de la détailler ci-dessous. C'est aussi la partie qui contient des ingrédients nouveaux par rapport aux théories de Walecka [2] ou même par rapport au modèle de couplage entre quarks et mésons (QMC) [50, 53], car outre l'effet de la réponse du nucléon, l'effet des termes d'auto-couplage du champ s (chapeau mexicain) sont inclus. Avec cette décomposition, l'équation de s est

$$
-\nabla^2(\bar{s} \,+\, \Delta s) \,+\, V'(\bar{s}) \,+\, \Delta s\,V''(\bar{s}) = -\frac{\partial K}{\partial s}(\bar{s}) \,-\, \Delta s\,\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}(\bar{s}). \tag{5.23}
$$

Les dérivées sont égales à

$$
\frac{\partial K}{\partial s}(\bar{s}) \;\equiv\; \frac{\partial K}{\partial \bar{s}} = g_S^*\,\bar{\psi}\psi \qquad \text{avec} \qquad g_S^* = \frac{\partial M_N(\bar{s})}{\partial \bar{s}} = g_S \,+\, \kappa_{NS}\,\bar{s} \,+\cdots \tag{5.24}
$$

et

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}(\bar{s}) \equiv \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{s}^2} = \tilde{\kappa}_{NS}\,\bar{\psi}\psi \qquad \text{avec} \qquad \tilde{\kappa}_{NS} = \frac{\partial^2 M_N(\bar{s}^2)}{\partial \bar{s}} = \kappa_{NS} + \cdots \tag{5.25}$$

À l'image des champs, le terme de source de l'équation du mouvement est développé autour de sa valeur moyenne :

$$\frac{\partial K}{\partial \bar{s}} = \left\langle \frac{\partial K}{\partial \bar{s}} \right\rangle + \Delta\left(\frac{\partial K}{\partial \bar{s}}\right) \equiv \left\langle \frac{\partial K}{\partial \bar{s}} \right\rangle + \left(\frac{\partial K}{\partial \bar{s}} - \left\langle \frac{\partial K}{\partial \bar{s}} \right\rangle\right) \tag{5.26}$$

et on considère la fluctuation $\Delta(\partial K/\partial \bar{s})$ petite et de même ordre que Δs. Dans le même esprit, la dérivée seconde de K est remplacée par sa valeur moyenne, le terme de fluctuation étant considéré du deuxième ordre :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \bar{s}^2} \approx \left\langle \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{s}^2} \right\rangle = \tilde{\kappa}_{NS}\,\left\langle \bar{\psi}\psi \right\rangle. \tag{5.27}$$

On résout l'équation du mouvement ordre par ordre, ce qui donne

$$-\nabla^2 \bar{s} + V'(\bar{s}) = -\left\langle \frac{\partial K}{\partial \bar{s}} \right\rangle = -g_S^*\,\left\langle \bar{\psi}\psi \right\rangle \tag{5.28}$$

$$\tag{5.29}$$

et

$$-\nabla^2(\Delta s) + m_\sigma^{*2}\,\Delta s = -\left(\frac{\partial K}{\partial \bar{s}} - \left\langle \frac{\partial K}{\partial \bar{s}} \right\rangle\right) = -g_S^*\,\left(\bar{\psi}\psi - \left\langle \bar{\psi}\psi \right\rangle\right). \tag{5.30}$$

La masse effective qui apparaît dans la deuxième partie de l'équation du mouvement est définie par

$$m_\sigma^{*2} = V''(\bar{s}) + \tilde{\kappa}_{NS}\,\left\langle \bar{\psi}\psi \right\rangle. \tag{5.31}$$

Elle est similaire à celle de travaux antérieurs [63, 57]. Elle correspond à la masse qui propage les fluctuations du champ scalaire (c'est-à-dire les fluctuations quantiques du condensat chiral). En particulier, c'est bien la masse qui apparaît dans le propagateur du terme de Fock que l'on verra plus bas. Dans l'équation sur la valeur moyenne, ce qui ferait office de masse est la quantité $V(\bar{s})/\bar{s}$ (voir par exemple [68]) : une masse définie par cette quantité ne serait pas cohérente.

5.2.3 Hamiltoniens cinétique, de Hartree et d'échange

Le développement des champs au premier ordre dans les fluctuations est cohérent avec le développement du hamiltonien au deuxième ordre. Le terme

d'ordre zéro, contenant uniquement des valeurs moyennes dans les champs, correspond au terme de Hartree. La partie fluctuante donne le terme de Fock. Pour commencer, on se limite au cas du champ scalaire. Les grandes lignes du calcul pour les autres mésons, bien plus aisées, seront données plus bas. Le hamiltonien correspondant au champ s est

$$\begin{aligned} H_S &= \int d\mathbf{x} \Bigg[K(\bar{s}) + \Delta s \, \frac{\partial K}{\partial \bar{s}} + \frac{1}{2} (\Delta s)^2 \, \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{s}^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\bar{s} \nabla^2 \bar{s} - 2 \, \Delta s \nabla^2 \bar{s} + (\boldsymbol{\nabla}(\Delta s))^2 \right) \\ &\quad + V(\bar{s}) + \Delta s \, V'(\bar{s}) + \frac{1}{2} (\Delta s)^2 \, V''(\bar{s}) \Bigg]. \end{aligned} \tag{5.32}$$

En utilisant les équations du mouvement (5.30) et les développements limités de K (5.26, 5.27), on obtient

$$\begin{aligned} H_S &= \int d\mathbf{x} \Bigg[\bar{\psi} \left(-i \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + M_N(\bar{s}) \right) \psi \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}(\bar{s}) \right)^2 + V(\bar{s}) + \frac{1}{2} \, g_S^* \left(\bar{\psi}\psi - \langle \bar{\psi}\psi \rangle \right) \Delta s \Bigg]. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Lorsqu'on applique cette méthode aux autres mésons, on trouve les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & -\nabla^2 \bar{\omega}^0 + m_\omega^2 \, \bar{\omega}^0 = g_\omega \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \\ & -\nabla^2 \vec{\rho}^{\,0} + m_\rho^2 \vec{\rho}^{\,0} = g_\rho \langle \psi^\dagger \vec{\tau} \psi \rangle - g_\rho \frac{\kappa_\rho}{2 \, M_N} \, \partial_j \left\langle \bar{\psi} \sigma^{0j} \vec{\tau} \psi \right\rangle, \\ & -\nabla^2 \vec{\delta} + m_\delta^2 \vec{\delta} = g_\delta \left\langle \bar{\psi} \vec{\tau} \psi \right\rangle. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Seul le delta et les parties temporelles du oméga et du rho subsistent. Pour la partie fluctuante en revanche, on obtient

$$\begin{aligned} & -\nabla^2 (\Delta \omega^\mu) + m_\omega^2 \, \Delta \omega^\mu = P^\mu_\nu \, g_\omega \left(\bar{\psi} \gamma^\nu \psi - \langle \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \rangle \right) \\ & -\nabla^2 (\Delta \vec{\rho}^{\,\mu}) + m_\rho^2 \, \Delta \rho^\mu = P^\mu_\nu \, g_\rho \Bigg(\bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi - \langle \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi \rangle \\ & \qquad - \frac{\kappa_\rho}{2 \, M_N} \, \partial_j \left(\bar{\psi} \sigma^{\nu j} \vec{\tau} \psi \right) + \frac{\kappa_\rho}{2 \, M_N} \, \partial_j \left\langle \bar{\psi} \sigma^{\nu j} \vec{\tau} \psi \right\rangle \Bigg) \\ & -\nabla^2 (\Delta \vec{\delta}) + m_\delta^2 \, \Delta \vec{\delta} = g_\delta \left(\bar{\psi} \vec{\tau} \psi - \langle \bar{\psi} \vec{\tau} \psi \rangle \right) \\ & -\nabla^2 (\Delta \vec{\varphi}_\pi) + m_\pi^2 \, \Delta \vec{\varphi}_\pi = \frac{g_A}{2 \, f_\pi} \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \bar{\psi} \gamma^5 \vec{\gamma} \vec{\tau} \psi \end{aligned} \tag{5.35}$$

avec la notation condensée

$$P^0_0 = 1, \quad P^0_i = 0, \quad P^i_0 = 0, \quad P^i_j \equiv P^i_j(x) = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{m_\rho^2}. \tag{5.36}$$

Lorsque l'on généralise le résultat de l'équation (5.33) à tous les mésons, le hamiltonien peut être écrit à l'approximation statique sous une forme qui rappelle les théories de la fonctionnelle de la densité :

$$H = H_{kin+H} + H_{xc}. \tag{5.37}$$

Le premier terme est un opérateur à un corps qui contient l'énergie cinétique des nucléons et le terme de Hartree. Sa forme explicite est

$$\begin{aligned} H_{kin+H} \;=\; & \int d\mathbf{x} \Big[\bar{\psi} \Big(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + M_N(\bar{s}) + g_\omega\, \bar{\omega}^0\, \gamma_0 + g_\rho\, \bar{\rho}_3^0\, \gamma_0 \tau_3 \\ & + g_\rho \frac{\kappa_\rho}{2\, M_N}\, \partial_j \bar{\rho}_3^0\, \sigma^{0j} \tau_3 + g_\delta\, \bar{\delta}_3\, \tau_3 \Big) \psi \\ & + V(\bar{s}) + \frac{1}{2}\, (\boldsymbol{\nabla}\bar{s})^2 - \frac{1}{2}\, m_\omega^2\, (\bar{\omega}^0)^2 - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\bar{\omega}^0\right)^2 \\ & - \frac{1}{2}\, m_\rho^2\, (\bar{\rho}_3^0)^2 - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\bar{\rho}_3^0\right)^2 + \frac{1}{2}\, m_\delta^2\, \bar{\delta}_3^2 + \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\nabla}\bar{\delta}_3\right)^2 \Big]. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Cette partie du hamiltonien suggère que la matière nucléaire (symétrique ou asymétrique) est constituée d'une assemblée de nucléons qui se déplacent dans un fond de mésons scalaires $(\bar{s}, \bar{\delta}_3)$ et vecteurs $(\bar{\omega}^0, \bar{\rho}_3^0)$ auto-consistants. En considérant un modèle NJL sous-jacent, les nucléons sont des objets composés de quarks constituants reliés entre eux par les cordes colorées en forme de Y. Leur masse provient du condensat chiral. Le champ scalaire, qui peut être vu comme un reliquat du condensat, modifie la masse du nucléon selon $M_N(\bar{s}) = M_N + g_S\, \bar{s} + \kappa_{NS}\, \bar{s}^2/2 + \cdots$. On peut remarquer que dans la matière infinie, $-\nabla^2 \bar{s}$ est nul, la formule (5.30) donne alors $\bar{s}$ forcément négatif. Le terme $g_S\, \bar{s}$ explicite la façon dont la masse du nucléon baisse à cause de son couplage au condensat. Le terme $\kappa_{NS}\, \bar{s}^2$ correspond alors à la réponse du nucléon face au champ scalaire. La valeur de κ_{NS} dépend de la structure des nucléons en quarks, elle prend en compte la modification de leurs fonctions d'onde et dépend forcément du mécanisme de confinement. Le nucléon est également soumis, de manière globale, aux champs moyens $\bar{\omega}^0$, $\bar{\rho}_3^0$ et $\bar{\delta}_3$.

La deuxième partie du hamiltonien incorpore les termes d'échange dûs à la propagation des fluctuations des champs de mésons. Rappelons en particulier que le champ scalaire se propage avec la masse modifiée $m_\sigma^{*2} = V''(\bar{s}) + \tilde{\kappa}_{NS}\, \rho_S$. Son expression explicite est

$$\begin{aligned} H_{xc} \;=\; & \int d\mathbf{x}\, \frac{1}{2} \Big[g_S^*\, \Delta s\, \Delta \left(\bar{\psi}\psi\right) + g_\omega\, \Delta\omega_\mu \left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) \\ & + g_\rho\, \Delta\rho_\mu^a \left(\Delta(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi) - \frac{\kappa_\rho}{2\, M_N}\, \partial_j \left[\Delta \left(\bar{\psi}\sigma^{\mu j}\vec{\tau}\psi\right) \right] \right) \\ & + g_\delta\, \Delta\vec{\delta}\, \Delta \left(\bar{\psi}\vec{\tau}\psi\right) + \frac{g_A}{2\, f_\pi}\, \Delta\vec{\varphi}_\pi\, \boldsymbol{\nabla}\cdot\bar{\psi}\gamma^5\vec{\gamma}\vec{\tau}\psi \Big] \end{aligned} \tag{5.39}$$

où l'on a utilisé la notation (déjà employée plus haut)

$$\Delta(\bar{\psi}\Gamma\psi) = \bar{\psi}\Gamma\psi \, - \, \langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle \, .$$

Les propagateurs des champs sont les propagateurs statiques donnés par

$$\begin{aligned} &\left(-\nabla^2_{\mathbf{x}} \, + \, m^{*2}_\sigma(\mathbf{x})\right) \, D_\sigma(\mathbf{x} \, - \, \mathbf{x}') = \delta^{(3)}(\mathbf{x} \, - \, \mathbf{x}') \\ &\left(-\nabla^2_{\mathbf{x}} \, + \, m^2_X\right) \, D_X(\mathbf{x} \, - \, \mathbf{x}') = \delta^{(3)}(\mathbf{x} \, - \, \mathbf{x}'), \qquad X = \omega, \rho, \delta, \pi \end{aligned} \tag{5.40}$$

Lorsqu'on résout formellement les équations du mouvement pour les fluctuations, on obtient le hamiltonien

$$\begin{aligned} H_{xc} \;=\; & \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}' \Big[- \, g^*_S(\mathbf{x})\, g^*_S(\mathbf{x}')\, \Delta\left(\bar{\psi}\psi\right)(\mathbf{x})\, D_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Delta\left(\bar{\psi}\psi\right)(\mathbf{x}') \\ & + g^2_\omega\, \Delta\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)(\mathbf{x})\, D_{\omega\mu\nu}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Delta\left(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\right)(\mathbf{x}') \\ & + g^2_\rho\, \Delta\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x})\, D_{\rho\mu\nu}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Delta\left(\bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x}') \\ & + 2\, g^2_\rho \frac{\kappa_\rho}{2\, M_N}\, \Delta\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu j}\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x})\, \partial_j D_{\rho\mu\nu}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Delta\left(\bar{\psi}\gamma^\nu\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x}') \\ & + g^2_\rho \left(\frac{\kappa_\rho}{2\, M_N}\right)^2 \Delta\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu i}\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x}) \partial_i\partial'_j D_{\rho\mu\nu}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Delta\left(\bar{\psi}\sigma^{\nu j}\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x}') \\ & - g^2_\delta\, \Delta\left(\bar{\psi}\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x})\, D_\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Delta\left(\bar{\psi}\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x}') \\ & + \left(\frac{g_A}{2\, f_\pi}\right)^2 \left(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^i\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x})\, \partial_i\partial'_j D_\pi(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \left(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^j\vec{\tau}\psi\right)(\mathbf{x}') \Big] \end{aligned} \tag{5.41}$$

où l'on a introduit pour le oméga le propagateur $D_{\omega\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ dont les composantes non nulles sont : $D_{\omega 00}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = D_\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ et $D_{\omega ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = (\delta_{ij} \, - \, \partial_i\partial_j/m^2_\omega)\, D_\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ ainsi qu'un propagateur similaire pour le méson rho.

5.3 Approche Hartree–Fock

5.3.1 Énergie de Hartree–Fock

Afin de calculer l'énergie, on écrit comme précédemment le hamiltonien sur une base Hartree–Fock, c'est-à-dire un déterminant de Slater. Celui-ci est, rappelons-le, constitué de quasiparticules ; on note ici encore leurs fonctions d'onde $f^N_a(\mathbf{x}) = \mathbf{f_a}(\mathbf{x})\chi_\mathbf{N}$ où N désigne un neutron ou un proton. Les valeurs moyennes apparaissant dans les équations classiques (5.30, 5.34) sont naturellement des moyennes sur des déterminants de Slater ; on obtient

pour les termes sources :

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\psi}\psi\rangle &= \sum_{a\in F} \bar{f}_a^p f_a^p + \bar{f}_a^n f_a^n \equiv \rho_{Sp} + \rho_{Sn}, \\
\left\langle\psi^\dagger\psi\right\rangle &= \sum_{a\in F} f_a^{p\dagger} f_a^p + f_a^{n\dagger} f_a^n \equiv \rho_p + \rho_n, \\
\langle\bar{\psi}\tau_3\psi\rangle &= \sum_{a\in F} \bar{f}_a^p f_a^p - \bar{f}_a^n f_a^n \equiv \rho_{Sp} - \rho_{Sn}, \\
\left\langle\psi^\dagger\tau_3\psi\right\rangle &= \sum_{a\in F} f_a^{p\dagger} f_a^p - f_a^{n\dagger} f_a^n \equiv \rho_p - \rho_n, \\
\langle\bar{\psi}\sigma^{0j}\tau_3\psi\rangle &= \sum_{a\in F} \bar{f}_a^p \sigma^{0j} f_a^p - \bar{f}_a^n \sigma^{0j} f_a^n. \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

On reconnaît dans la première équation la densité scalaire et dans la deuxième la densité baryonique. Les autres densités s'annulent dans la matière symétrique. Les parties cinétique et de Hartree de l'énergie se mettent sous la forme

$$\begin{aligned}
E_{kin+H} &= \int d\mathbf{x} \sum_N \Bigg[\sum_{a\in F} \bar{f}_a^N (-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + M_N(\bar{s}) + g_\omega\,\bar{\omega}^0\,\gamma_0 + g_\rho\,\bar{\rho}_3^0\,\gamma_0 \\
&\quad + i\,g_\rho \frac{\kappa_\rho}{2\,M_N}\,\boldsymbol{\nabla}\bar{\rho}_3^0\cdot\vec{\Sigma}\,\gamma_5 + g_\delta\,\bar{\delta}_3 \Big) f_a^N \Bigg] \\
&\quad + \int d\mathbf{x} \Bigg[V(\bar{s}) + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\nabla}\bar{s})^2 - \frac{1}{2}\,m_\omega^2\,(\bar{\omega}^0)^2 - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\bar{\omega}^0\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\,m_\rho^2\,(\bar{\rho}_3^0)^2 - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\bar{\rho}_3^0\right)^2 + \frac{1}{2}\,m_\delta^2\,\bar{\delta}_3^2 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\bar{\delta}_3\right)^2 \Bigg]. \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

Le terme de Fock quand à lui provient de la partie d'échange dans le hamiltonien. Pour cela, il est souvent appelé simplement terme d'échange. On peut le décomposer sur chaque méson :

$$E_{Fock} = E_{Fock}^{(s)} + E_{Fock}^{(\omega)} + E_{Fock}^{(\rho)} + E_{Fock}^{(\delta)} + E_{Fock}^{(\pi)}. \qquad (5.44)$$

La partie correspondant au champ scalaire est par exemple

$$\begin{aligned}
E_{Fock}^{(s)} &= \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\,d\mathbf{x}'\,Tr\big(S_p(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\,S_p(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + S_n(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\,S_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big) \\
&\qquad g_S^*(\mathbf{x})\,g_S^*(\mathbf{x}')\,D_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}'); \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

les autres contributions sont données dans l'annexe A. S_p et S_n sont des matrices de Dirac :

$$\begin{aligned}
\big(S_p(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big)_{\alpha\beta} &= \sum_{a\in F} \left(f_a^p\right)_\alpha(\mathbf{x})\,\left(\bar{f}_a^p\right)_\beta(\mathbf{x}'), \\
\big(S_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big)_{\alpha\beta} &= \sum_{a\in F} \left(f_a^n\right)_\alpha(\mathbf{x})\,\left(\bar{f}_a^n\right)_\beta(\mathbf{x}'). \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

Elles correspondent aux propagateurs introduits à la section 2.2.

Formellement, on peut écrire l'énergie sous la forme condensée :

$$\begin{aligned} E \;=\; & \sum_{a,N} \int d\mathbf{x} \left[\bar{f}_a^N \Big(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + M_N(\bar{s}) + \sum_X g_X^{(N)}\, \bar{f}_X\, \Gamma_X + i\, h_X^{(N)}\, \boldsymbol{\nabla}\bar{f}_X \cdot \vec{\Theta}_X \Big) f_a^N \right] \\ & + E_M(\bar{f}_X, \boldsymbol{\nabla}\bar{f}_X) \\ & + \sum_{X,X';N,N'} \frac{g_{XX'}^{(NN')}}{2} \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{x}'\, Tr\big(S_N(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\, \Gamma_X\, S_{N'}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Gamma_{X'} \big)\, D_{XX'}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \end{aligned} \tag{5.47}$$

La première ligne correspond à l'énergie cinétique et à l'énergie de Hartree des nucléons. La deuxième ligne est purement mésonique. La dernière ligne correspond à l'énergie d'échange. Le lecteur remplacera aisément les constantes de couplage, notées $g_X^{(N)}, h_X^{(N)}$ et $g_{XX'}^{(NN')}$, par leur valeurs données dans le lagrangien et largement explicitées dans les équations depuis. Les propagateurs de mésons correspondent à ceux donnés équation (3.14).

La constante de couplage du champ scalaire dépend de la position : elle doit donc être inclue dans l'intégrale sous la forme $g_S^*(\mathbf{x})\, g_S^*(\mathbf{x}')$ comme dans l'équation (5.45).

5.3.2 Équations de Hartree–Fock

Il ne reste plus qu'à calculer les fonctions d'onde. Comme on l'a déjà vu plus haut, celles-ci minimisent l'énergie, elles sont donc solutions de l'équation de Hartree–Fock :

$$\frac{\delta\Big(E - \sum_{N,a} \varepsilon_a^N \int d\mathbf{x}'\, f_a^{N\dagger}(\mathbf{x}') f_a^N(\mathbf{x}') \Big)}{\delta \bar{f}_a^{p,n}(\mathbf{x})} = 0. \tag{5.48}$$

Comme précédemment, le deuxième terme permet de normaliser les fonctions d'onde. Le paramètre de Lagrange ε_a^N est identifié *a posteriori* avec l'énergie des états à une particule. La dérivée des termes cinétique et de Hartree se fait simplement en calculant la dérivée explicite dans la première ligne de l'équation (5.47). La dérivée par rapport aux fonctions d'onde des termes purement mésoniques est nulle car on retrouve les équations du mouvement pour les mésons. Dans le terme d'échange enfin, une dérivée explicite provient des fonctions S_N, mais les paramètres g_s^* et m_s^{*2} dépendent également de la densité. La dérivée de ces termes donne une nouvelle contribution à l'équation de Hartree–Fock, on l'appelle de réarrangement. Sans ce terme de réarrangement, l'équation de Hartree–Fock peut être factorisée de la manière suivante :

$$\int d\mathbf{x}' \left\langle \mathbf{x} \left| h_{(ord)}^N \right| \mathbf{x}' \right\rangle f_a^N(\mathbf{x}') = \varepsilon_a^N\, f_a^N(\mathbf{x}). \tag{5.49}$$

Le hamiltonien une particule h_N contient une partie locale (correspondant au terme de Hartree) et une partie non locale correspondant au terme d'échange. On a bien écrit une équation de Schrödinger pour la quasiparticule décrite par la fonction d'onde f_a^N. Toujours sans le réarrangement, le hamiltonien à un corps est explicitement

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathbf{x} \left| \gamma^0\, h^N_{(ord)} \right| \mathbf{x}' \right\rangle \\
&= \Big(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + M_N(\bar{s}) + \sum_R g_R^{(N)}\, \bar{f}_R(\mathbf{x})\, \Gamma_R + i\, h_R^{(N)}\, \boldsymbol{\nabla}\bar{f}_R(\mathbf{x}) \cdot \vec{\Theta}_R \Big) \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
&+ \sum_{R,R';N'} \frac{g_{RR'}^{(NN')}}{2}\, D_{RR'}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \Big(\Gamma_R\, S_{N'}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Gamma_{R'} \Big) \\
&+ \sum_{R,R';N'} \frac{g_{RR'}^{(NN')}}{2}\, D_{RR'}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \Big(\Gamma_{R'}\, S_{N'}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \Gamma_R \Big).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

La partie réarrangement est donnée par la contribution

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{s}} \frac{\delta \bar{s}}{\delta \bar{f}_a^N}. \tag{5.51}$$

Pour la partie cinétique et Hartree, l'équation (5.33) implique

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial M_N(\bar{s})}{\partial \bar{s}} \rho_S - \nabla^2 \bar{s} + V'(\bar{s}) = 0 \tag{5.52}$$

puisqu'on retrouve l'équation du mouvement (5.28). Il ne reste donc que la contribution des termes d'échange qui est définie par

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{x} \left| \gamma^0\, h^N_{(rg)} \right| f_a^N \right\rangle \;=\; & \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}'\, d\mathbf{x}'' \sum_M Tr\Big(S_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')\, S_M(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \Big) \\
& \frac{\delta}{\delta \bar{f}_a^N(\mathbf{x})} \Big(g_S^*(\mathbf{x}')\, g_S^*(\mathbf{x}'')\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \Big).
\end{aligned} \tag{5.53}$$

La dérivée de la constante de couplage est

$$\frac{\delta g_S^*(\mathbf{x}')}{\delta \bar{f}_a^N(\mathbf{x})} = \tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x}')\, \frac{\delta \bar{s}(\mathbf{x}')}{\delta \bar{f}_a^N(\mathbf{x})}. \tag{5.54}$$

Pour obtenir la dérivée de $\bar{s}$, on dérive l'équation (5.28) donnant cette dernière quantité :

$$\Big(-\nabla^2_{\mathbf{x}'} + V''(\bar{s}(\mathbf{x}')) + \tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x}')\, \rho_S(\mathbf{x}') \Big) \frac{\delta \bar{s}(\mathbf{x}')}{\delta \bar{f}_a^N(\mathbf{x})} = -\, g_S^*(\mathbf{x}')\, f_a^N(\mathbf{x})\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}). \tag{5.55}$$

La masse présente dans l'équation ci-dessus est bien la masse qui se propage. La solution de cette équation est alors

$$\begin{aligned}\frac{\delta\bar{s}(\mathbf{x}')}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})} &= -\int d\mathbf{x}''\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')g_S^*(\mathbf{x}'')\, f_a^N(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) \\ &= -D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\, g_S^*(\mathbf{x})\, f_a^N(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5.56}$$

La dérivée de la constante de couplage se réduit à l'expression simple

$$\frac{\delta g_S^*(\mathbf{x}')}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})} = -\tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x}')\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\, g_S^*(\mathbf{x})\, f_a^N(\mathbf{x}). \tag{5.57}$$

De même, la dérivée fonctionnelle du propagateur du champ scalaire est obtenue en dérivant l'équation (5.40) :

$$\Big(-\nabla^2_{\mathbf{x}'} + m_\sigma^{*2}(\mathbf{x}')\Big)\frac{\delta D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})} = -\frac{\delta m_\sigma^*(\mathbf{x}')}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})}\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''). \tag{5.58}$$

On est ramené à calculer la dérivée fonctionnelle de la masse définie par $m_\sigma^{*2}(\mathbf{x}) = V''(\bar{s}(\mathbf{x})) + \tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x})\,\rho_S(\mathbf{x})$. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\delta m_\sigma^*(\mathbf{x}')}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})} &= \left(V'''(\bar{s}) + \frac{\partial\tilde{\kappa}_{NS}}{\partial\bar{s}}\rho_S\right)(\mathbf{x}')\,\frac{\delta\bar{s}(\mathbf{x}')}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})} \\ &\quad + \tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x}')\, f_a^N(\mathbf{x})\;\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ &= \left(V'''(\bar{s}) + \frac{\partial\tilde{\kappa}_{NS}}{\partial\bar{s}}\rho_S\right)(\mathbf{x}')\Big(-D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\, g_S^*(\mathbf{x})\, f_a^N(\mathbf{x})\Big) \\ &\quad + \tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x}')\, f_a^N(\mathbf{x})\;\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Finalement, la dérivée du propagateur du champ scalaire dans le milieu se met sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\delta D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})} &= -\int d\mathbf{y}\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{y})\,\frac{\delta m_\sigma^*(\mathbf{y})}{\delta\bar{f}_a^N(\mathbf{x})} D_\sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x}'') \\ &= \int d\mathbf{y}\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{y})\left(V'''(\bar{s}) + \frac{\partial\tilde{\kappa}_{NS}}{\partial\bar{s}}\rho_S\right)(\mathbf{y}) \\ &\quad D_\sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x}'')\, D_\sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x})\, g_S^*(\mathbf{x})\, f_a^N(\mathbf{x}) \\ &\qquad - D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\, D_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')\,\tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x})\, f_a^N(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5.60}$$

Pour résumer, le hamiltonien de réarrangement une particule contient deux termes : le premier provient de la dérivée de la constante de couplage :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{x}\left|\gamma^0\, h^N_{(rg\,1)}\right| f_a^N\right\rangle &= -\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'\, d\mathbf{x}''\, Tr_M\Big(S_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')S_M(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}')\Big)\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \\ &\quad \Big(\tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x}')\, g_S^*(\mathbf{x}'')\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\, g_S^*(\mathbf{x})\, f_a^N(\mathbf{x}) \\ &\quad + (\tilde{\kappa}_{NS}(\mathbf{x}'')\, g_S^*(\mathbf{x}')\, D_\sigma(\mathbf{x}'' - \mathbf{x})\, g_S^*(\mathbf{x})\, f_a^N(\mathbf{x})\Big), \end{aligned} \tag{5.61}$$

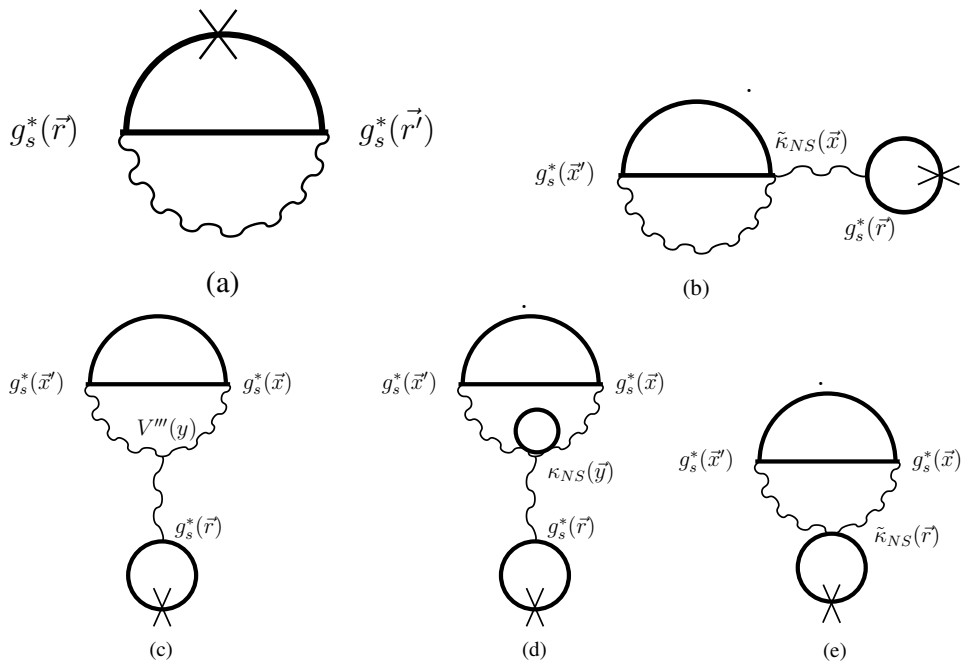

FIG. 5.1*: Termes de réarrangement : les croix indiquent les ouvertures de lignes conduisant aux termes contribuant au hamiltonien une particule et à l'énergie propre.*

tandis que le deuxième est dû à la dérivée du propagateur :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{x} \left| \gamma^0\, h^N_{(rg\,2)} \right| f^N_a \right\rangle \;=\; & \int d\mathbf{x}'\, d\mathbf{x}''\, Tr_M \Big(S_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') S_M(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \Big)\; g^*_S(\mathbf{x}')\; g^*_S(\mathbf{x}'') \\ & \Big[\int d\mathbf{y}\, D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) \left(V'''(\bar{s}) + \frac{\partial \tilde{\kappa}_{NS}}{\partial \bar{s}} \rho_S \right)(\mathbf{y}) \\ & D_\sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x}'')\, D_\sigma(\mathbf{y} - \mathbf{x})\, g^*_S(\mathbf{x}) \\ & \quad - D_\sigma(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\, D_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{x}'')\, \tilde{\kappa}_{NS}\mathbf{x}) \Big]\, f^N_a(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5.62}$$

On peut remarquer que ces contributions sont locales ; les équations de Hartree–Fock se mettent finalement sous la forme

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{x}' \;\; & \left\langle \mathbf{x} \left| h^N_{(ord)} \right| \mathbf{x}' \right\rangle f^N_a(\mathbf{x}') + \left\langle \mathbf{x} \left| \gamma^0\, h^N_{(rg\,1)} \right| f^N_a \right\rangle + \left\langle \mathbf{x} \left| \gamma^0\, h^N_{(rg\,2)} \right| f^N_a \right\rangle \\ & = \varepsilon^N_a\, f^N_a(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5.63}$$

Afin de visualiser un peu mieux ces termes de réarrangement, ils sont représentés figure 5.1. Le premier diagramme d'énergie correspond au terme de Fock. Les contributions au hamiltonien à un corps des quasiparticules sont obtenues en ouvrant les lignes fermioniques à l'endroit indiqué par les croix

comme on l'a vu dans le chapitre sur les généralités. L'ouverture du premier terme ignore les effets de milieu dans le propagateur et la constante de coupage ; on obtient alors un terme analogue aux termes de Fock des autres mésons. Le deuxième diagramme, (b), correspond au premier terme de réarrangement, celui provenant de la dérivée de la constante de couplage. Les trois derniers, (c) à (e), correspondent au terme provenant de la dérivée du propagateur : (c) donne la contribution de V''', (d) la dérivée de κ_{NS}, (e) celle de ρ_S. Bien que conduisant parfois à des calculs assez lourds, le formalisme ci-dessus peut être utilisé pour décrire des noyaux finis. Malheureusement, les calculs de noyaux finis deviennent ici assez rapidement inextricables, et il a été décidé dans cette thèse de se limiter à la matière nucléaire infinie.

5.3.3 Cas de la matière infinie

Comme on l'a fait plus haut, on décompose les fonctions d'onde sur une base d'ondes planes et on réécrit les équations en représentation d'impulsion. Comme pour le hamiltonien et l'énergie, on décompose la densité d'énergie :

$$\epsilon = \epsilon_{kin+H} + \epsilon_{Fock}. \tag{5.64}$$

avec pour la première partie :

$$\begin{aligned}\epsilon_{kin+H} &= \int \frac{2\,d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_N \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{k}^*}{E^*} + M_N(\bar{s}) \frac{M^*}{E^*} \right)_N + V(\bar{s}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{g_\delta}{m_\delta} \right)^2 (\rho_{sp} - \rho_{sn})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 (\rho_p - \rho_n)^2.\end{aligned} \tag{5.65}$$

Cette expression est similaire à celle obtenue pour le modèle de Walecka, excepté les termes dépendant de s. En effet, la masse du nucléon dans le milieu dépend de s jusqu'au troisième ordre et le potentiel scalaire n'est plus quadratique ; il correspond au potentiel en chapeau mexicain (contenant le terme de brisure explicite). La contribution de Fock est elle formellement similaire au cas Walecka (bien qu'elle soit nettement plus riche), par exemple pour le champ scalaire :

$$\begin{aligned}\epsilon_{Fock}^{(s)} = \frac{g_S^{*2}}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \quad & \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + m_\sigma^{*2}} \\ & \sum_N \left(1 + \frac{M^*}{E^*} \frac{M'^*}{E'^*} - \frac{\mathbf{k}^*}{E^*} \cdot \frac{\mathbf{k}'^*}{E'^*} \right)_N N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'}.\end{aligned} \tag{5.66}$$

g_S^* et m_σ^{*2} ne dépendent pas de la position. Dans la matière nucléaire en effet, $\bar{s}$ est uniforme et comme g_S^* et m_σ^{*2} ne dépendent que de $\bar{s}$, ils sont eux

aussi uniformes. Dans un système fini, l'énergie de Fock du champ scalaire contiendrait des termes dûs à la non localité de la masse et de la constante de couplage. Les autres termes sont ceux de l'annexe A.

Les différentes contributions à l'énergie propre sont données avec les notations génériques de l'équation (5.47). Si on ignore dans un premier temps les effets du réarrangement, la partie scalaire de l'énergie propre se met sous la forme

$$\begin{aligned}\Sigma_S^{(p)}(\mathbf{k}) &= M_N(\bar{s}) - M_N - \frac{g_\delta^2}{m_\delta^2}(\rho_{Sp} - \rho_{Sn}) \\ &+ \sum_{R,R';N'} \frac{g_{RR'}^{(pN')}}{2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + m_R^2} \frac{1}{4} Tr\left(\Gamma_R \frac{\not{k}'^* + M'^*}{2E'^*} \Gamma_{R'}\right) N_{\mathbf{k}'} \\ &+ \sum_{R,R';N'} \frac{g_{RR'}^{(pN')}}{2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + m_R^2} \frac{1}{4} Tr\left(\Gamma_{R'} \frac{\not{k}'^* + M'^*}{2E'^*} \Gamma_R\right) N_{\mathbf{k}'},\end{aligned} \tag{5.67}$$

la partie vecteur est

$$\begin{aligned}\Sigma_0^{(p)}(\mathbf{k}) &= \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}(\rho_p + \rho_n) + \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2}(\rho_p - \rho_n) \\ &+ \sum_{R,R';N'} \frac{g_{RR'}^{(pN')}}{2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + m_R^2} \frac{1}{4} Tr\left(\gamma_0 \Gamma_R \frac{\not{k}'^* + M'^*}{2E'^*} \Gamma_{R'}\right) N_{\mathbf{k}'} \\ &+ \sum_{R,R';N'} \frac{g_{RR'}^{(pN')}}{2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + m_R^2} \frac{1}{4} Tr\left(\gamma_0 \Gamma_{R'} \frac{\not{k}'^* + M'^*}{2E'^*} \Gamma_R\right) N_{\mathbf{k}'},\end{aligned} \tag{5.68}$$

et enfin la partie spatiale :

$$\begin{aligned}\Sigma_V^{(p)}(\mathbf{k}) &= \sum_{X,X';N'} \frac{g_{XX'}^{(pN')}}{2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + m_X^2} \frac{1}{4} Tr\left(\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \Gamma_X \frac{\not{k}'^* + M'^*}{2E'^*} \Gamma_{X'}\right) N_{\mathbf{k}'} \\ &+ \sum_{X,X';N'} \frac{g_{XX'}^{(pN')}}{2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 + m_X^2} \frac{1}{4} Tr\left(\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \Gamma_{X'} \frac{\not{k}'^* + M'^*}{2E'^*} \Gamma_X\right) N_{\mathbf{k}'}.\end{aligned} \tag{5.69}$$

Les quantités ci-dessus correspondent aux contributions des protons. Les contributions des neutrons peuvent être obtenues en échangeant les indices p et n dans les constantes de couplage. La contribution du méson rho est décomposée en trois termes : un vecteur, un tenseur, et un terme croisé vecteur-tenseur. Là encore, les expressions ressemblent formellement à celles du modèle de Walecka. La partie scalaire est néanmoins modifiée par la

dépendance de la masse des nucléons en $\bar{s}$, ainsi que par les termes de réarrangement comme expliqué ci-dessous. La partie vectorielle, due uniquement aux termes de Fock, est également modifiée par rapport au modèle de Walecka à cause des dépendances de la constante de couplage et de la masse du s.

La valeur moyenne du champ scalaire dans la matière nucléaire ne dépendant plus de la position, la transformée de Fourier du propagateur prend donc une forme simple comme pour les autres mésons en remplaçant simplement la masse nue par la masse dans le milieu. Les termes de réarrangement, quand à eux, contribuent uniquement à la partie scalaire de l'énergie propre, selon

$$\Sigma_{S\,(rg\,1)} = -\,2\,\frac{\tilde{\kappa}_{NS}}{m_\sigma^{*2}}\,\epsilon_{Fock}^{(s)}, \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{S\,(rg\,2)} &= -\frac{\partial m_\sigma^{*2}}{\partial \rho_S}\,\frac{g_S^{*2}}{2}\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2+m_\sigma^{*2}}\right)^2 \\ &\quad \sum_N \left(1+\frac{M^*}{E^*}\frac{M'^*}{E'^*}-\frac{\mathbf{k}^*}{E^*}\cdot\frac{\mathbf{k}'^*}{E'^*}\right)_N N_{\mathbf{k}}\,N_{\mathbf{k}'}\end{aligned} \tag{5.71}$$

où la dérivée de la masse par rapport à la densité scalaire est d'après (5.59) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_\sigma^{*2}}{\partial \rho_S} &= \left(V'''(\bar{s}) + \frac{\partial \tilde{\kappa}_{NS}}{\partial \bar{s}}\,\rho_S\right)\frac{\partial \bar{s}}{\partial \rho_S} + \tilde{\kappa}_{NS} \\ &= \tilde{\kappa}_{NS} - \frac{g_S^*}{m_\sigma^{*2}}\left(V'''(\bar{s}) + \frac{\partial \tilde{\kappa}_{NS}}{\partial \bar{s}}\,\rho_S\right).\end{aligned} \tag{5.72}$$

5.4 Résultats

Les résultats ci-dessus ont été écrits de façon générale pour la matière asymétrique. L'énergie peut tout d'abord être calculée pour des densités en protons et en neutrons égales, ce qui donne l'énergie de liaison dans la matière symétrique. Lorsqu'on fait tendre les densités en protons et en neutrons vers la même valeur, la quantité proportionnelle au carré de la différence des densités est l'énergie d'asymétrie. Enfin, on peut fixer deux valeurs différentes des densités de protons et de neutrons. Par exemple ici, on traitera des étoiles à neutrons dans lesquelles les proportions relatives entre les deux saveurs sont fixées par la thermodynamique. Comme dans la partie sur le modèle de Walecka, on effectue les intégrales angulaires dans l'expression de l'énergie et des énergies propres. Les résultats sont identiques à ceux de [2] excepté pour le champ scalaire : les termes de Hartree sont donnés par les équations (5.65) pour l'énergie et (5.67) pour l'énergie propre scalaire. Le terme de Fock est semblable à celui de [2] en tenant compte des effets de milieu dans la constante de couplage et la masse. Comme il

a déjà été dit plus haut, en particulier dans l'introduction, les propriétés de la matière nucléaire sont étudiées en contraignant le plus possible les paramètres à l'aide des données sur réseau et de la phénoménologie hadronique. Les masses sont bien connues (excepté évidement celle du σ), elles ont pour valeur $M = 938,9$ MeV, $m_\omega = 783$ MeV, $m_\delta = 984,7$ MeV, $m_\pi = 139,6$ MeV et $m_\rho = 779$ MeV. La constante de couplage du pion est $g_A/(2f_\pi)$ où la valeur de la constante de couplage axiale est $g_A = 1,25$ comme on l'a introduit dans le modèle σ non linéaire (paragraphe 4.3) et $f_\pi = 94$ MeV est la constante de désintégration du pion. Pour la constante de couplage du rho, on prend la valeur VDM $g_\rho = 2,65$. La constante de couplage du champ scalaire dans le vide est prise comme celle du modèle sigma linéaire $g_S = 10$. D'après les données sur réseau, on peut estimer un paramètre de masse du sigma dans le vide de $m_\sigma = 800$ MeV. Les seuls paramètres qui restent sont la susceptibilité scalaire κ_{NS} (on regardera plutôt la quantité sans dimension $C = (f_\pi^2/2M_N)\kappa_{NS}$) et la constante de couplage du oméga, g_ω. Ces valeurs ne sont néanmoins pas choisies au hasard, on ajuste le point de saturation en les laissant varier légèrement autour des valeurs suivantes : $C \simeq 1.25$ à partir d'une estimation des réseaux (voir la discussion du paragraphe 1.2.7 pour plus de détails) et $g_\omega \simeq 3 \times g_\rho \simeq 8$ d'après VDM et le modèle des quarks. L'énergie d'asymétrie, a_{sym}, dépend fortement de la constante de couplage tenseur du rho au nucléon. On étudiera plusieurs cas entre la valeur VDM $\kappa_\rho = 3.7$ et celle issue d'analyse d'expériences de diffusion, $\kappa_\rho = 6.6$ [67]. Dans chaque cas, les paramètres C et g_ω seront ajustés pour reproduire une bonne saturation. Il reste un point important dont nous n'avons pas parlé dans les calculs ci-dessus, à savoir le traitement des termes de contact. En suivant les articles du groupe d'Orsay [2, 68], on peut noter que l'échange de pions et la partie tensorielle de l'échange de rho entre nucléons contiennent une contribution indépendante du moment transféré. Celle-ci correspond dans l'espace des configurations à une interaction de contact. Les calculs de problème à N-corps réalistes ôtent cette contribution en $\delta(\mathbf{x})$ du fait des corrélations à courte portée. La prescription du groupe d'Orsay, utilisée aussi dans [53, 28], a été d'enlever ces termes de contact en opérant le remplacement suivant dans les termes de Fock :

$$\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} \rightarrow \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} - 1 = -\frac{m_\pi^2}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2}, \tag{5.73}$$

$$\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + m_\rho^2} \rightarrow \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2 + m_\rho^2} - 1 = -\frac{m_\rho^2}{\mathbf{q}^2 + m_\rho^2}. \tag{5.74}$$

Dans l'espace réel, ces fonctions sont de la forme $e^{-m_X x}/x$. En d'autres termes, les échanges de pion ou de rho tenseur deviennent de simples potentiels de Yukawa et contribuent positivement à l'énergie de liaison des quasiparticules. Cette prescription sera désignée dans la suite par « sans terme de contact ». On considérera également un cas plus réaliste où les

échanges de rho et de pions sont modifiés par une fonction de corrélation à deux corps $G(\mathbf{x})$ [69, 70], et nous prendrons comme exemple $G(x) = j_0(q_C\, x)$ (avec $q_C = m_\omega$ et j_0 la première fonction de Bessel). Cela revient à opérer le changement

$$\begin{aligned} -\frac{m_\pi^2}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} &\rightarrow -\frac{m_\pi^2}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2} + \frac{m_\pi^2}{\mathbf{q}_C^2 + m_\pi^2} \\ -\frac{m_\rho^2}{\mathbf{q}^2 + m_\rho^2} &\rightarrow -\frac{m_\rho^2}{\mathbf{q}^2 + m_\rho^2} + \frac{m_\rho^2}{\mathbf{q}_C^2 + m_\rho^2}. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Dans le langage du problème à N-corps, on dirait qu'on a inclus une interaction centrale de spin-isospin de Landau–Migdal caractérisée par un paramètre g' [69, 70] :

$$g' = \frac{1}{3}\,\frac{\mathbf{q}_C^2}{\mathbf{q}_C^2 + m_\pi^2} + \frac{2}{3}\,C_\rho\,\frac{\mathbf{q}_C^2}{\mathbf{q}_C^2 + m_\rho^2} \qquad \text{avec} \qquad C_\rho = \left(\frac{f_\pi\, g_\rho\, \kappa_\rho}{g_A\, M_N}\right)^2. \tag{5.76}$$

La valeur VDM pure conduit à $g' = 0,53$, tandis que le cas du rho fort, $\kappa_\rho = 6,6$, donne $g' = 0,95$. Ces valeurs sont à comparer à l'analyse récente donnant $g' \simeq 0,6$ [71]. Étant donné que dans ce cas une interaction de contact subsiste, on le désignera par « avec le terme de contact » par opposition à la prescription du groupe d'Orsay, et ce même si le terme de contact n'est pas entier. Le cas sans contact peut être retrouvé en prenant $q_C \rightarrow \infty$, on a alors $g' = 0,73$ ($\kappa_\rho = 3,7$) ou $g' = 1,7$ ($\kappa_\rho = 6,6$).

5.4.1 Saturation de la matière nucléaire symétrique

On commence par étudier la saturation dans le cas de la matière nucléaire symétrique. En effet, les données expérimentales du point de saturation sont données dans ce cas ($\rho_0 = 0,16\ \mathrm{fm}^{-3}$ et $E/A(\rho_0) = -15,96$ MeV). En réalité, la grande précision avec laquelle est donnée l'énergie de liaison est un peu illusoire : nous avons l'avons choisie à partir de [6], mais d'autre travaux donneraient une valeur différente de $15,96$ MeV, bien que toujours légèrement inférieure à 16 MeV. La précision des résultats, ajustés sur cette valeur de l'énergie de liaison, doit donc être prise avec circonspection. Ceci permet de fixer les paramètres C et g_ω, ceux-ci étant ensuite utilisés pour les cas asymétriques. Comme on va le voir, notre approche a quelques difficultés à reproduire des valeurs convenables du module de compressibilité K ; on choisit donc d'ajuster les paramètres sur les coordonnées du point de saturation uniquement et de prendre la valeur de K comme une conséquence du modèle. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.1 et les courbes de saturation correspondantes sont données figure 5.2. Pour cette discussion, le couplage tenseur du rho sera celui de VDM, c'est-à-dire $\kappa_\rho = 3,7$. Les résultats sont donnés avec ou sans l'interaction de contact et $\tilde{\kappa}_{NS}$ peut dépendre ou non de $\bar{s}$ comme discuté équation (5.2). Les deux premières

lignes du tableau correspondent aux valeurs de paramètres qui permettent de reproduire les points de saturation correspondant donnés aux troisième, quatrième et cinquième lignes du tableau. La dernière ligne, anticipant sur la discussion du paragraphe suivant, donne l'énergie d'asymétrie correspondante. Il ressort de ces résultats que la compressibilité K est trop grande,

	Avec contact		Sans contact	
	κ_{NS}	$\tilde{\kappa}_{NS}(\bar{s})$	κ_{NS}	$\tilde{\kappa}_{NS}(\bar{s})$
g_ω	7,775	7,678	6,52	6,42
C	1,33	1,46	1,49	1,62
ρ/ρ_0	1,00	1,00	1,00	1,00
E/A (MeV)	-15,96	-15,93	-15,97	-15,92
K (MeV)	316	297	298	281
a_{sym}(MeV)	29,58	29,45	26,71	26,64

TAB. 5.1: *Valeurs des paramètres et coordonnées du point de saturation pour différents cas de figure dans la matière symétrique. La dernière ligne donne l'énergie d'asymétrie. Le couplage tenseur du rho est pris comme dans VDM, $\kappa_\rho = 3,7$. Les mentions « avec contact » et « sans contact » sont expliquées dans le texte. Les colonnes avec $\tilde{\kappa}_{NS}(\bar{s})$ correspondent au cas où la susceptibilité scalaire dépend de la densité et disparaît à la restauration.*

même si sa détermination est entachée d'une incertitude numérique de plusieurs dizaines de MeV et que sa définition peut être ambiguë dans le cadre des théories relativistes [72]. Omettre comme dans la prescription d'Orsay le terme de contact présente l'avantage de réduire la valeur du paramètre C et de se rapprocher ainsi de celle donnée par les réseaux, $C \simeq 1,25$. Cela augmente malheureusement la compressibilité K de 15 à 20 MeV. Les termes de contact du pion et du rho (correspondant au deuxième terme de la partie gauche de l'équation (5.75)) donnent tous deux à l'énergie de liaison des nucléons une contribution répulsive et proportionnelle à la densité : la partie de contact du rho compte pour $11,85$ MeV et celle du pion pour $0,6$ MeV, ce qui réduit d'autant les contributions de Fock du rho ($-10,8$ MeV) et du pion (-5 MeV). Ces termes de contact se comportant comme un échange de oméga, il est naturel que la constante de couplage ωNN soit réduite comme on le voit dans le tableau 5.1. Les valeurs qu'on vient de donner correspondent à la dernière colonne du tableau, mais elles sont similaires pour les autres cas. Inclure la dépendance en densité de la susceptibilité scalaire (les colonnes avec $\tilde{\kappa}_{NS}(\bar{s})$) a approximativement le même effet que retirer le contact dans la mesure où il faut augmenter le paramètre C pour compenser la répulsion perdue.

Comme on l'a déjà dit, à la limite non relativiste les fonctions d'onde

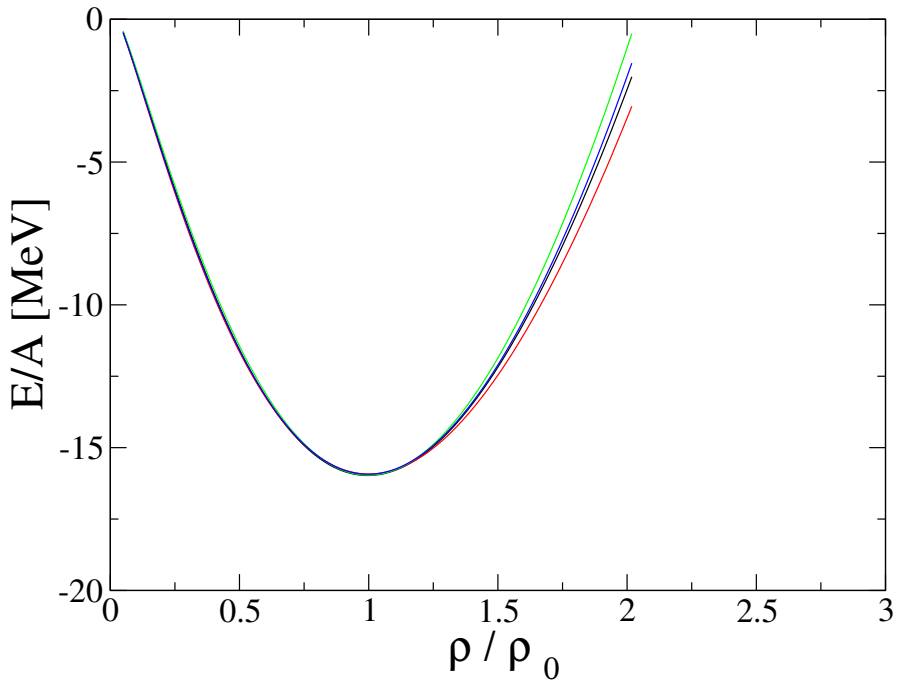

FIG. 5.2: *Courbes de saturation pour le cas avec contact pour lequel κ_{NS} dépend (trait plein) ou non (tireté-pointillé) de la densité et le cas sans contact pour lequel κ_{NS} dépend (pointillé) ou non (tireté) de la densité.*

sont imposées : ce sont les ondes planes non relativistes. Dans un système proche de la limite non relativiste, les résultats des calculs ne devraient donc pas trop dépendre du choix de la base. En d'autres termes, lorsqu'on calcule la saturation sur une autre base que Hartree–Fock auto-consistante, la différence dans les résultats ne devrait provenir que d'effets relativistes. Pour regarder cela, on introduit la base Hartree dans laquelle les termes de Fock apparaissant dans les énergies propres sont enlevés. Cette opération a au moins l'avantage de simplifier considérablement les calculs. Les résultats pour la saturation sont donnés sur le tableau 5.2. Comme on s'y attendait, ils sont similaires à ceux de la base Hartree–Fock, les valeurs de C et de l'énergie d'asymétrie étant meilleures pour cette dernière. Cependant, la compressibilité de la matière nucléaire est meilleure en base Hartree.

5.4.2 Effet du réarrangement

L'effet principal des termes de réarrangement est de réduire la masse effective des nucléons de quelques MeV mais leur influence sur le point de saturation est quasiment négligeable. On peut le comprendre facilement en

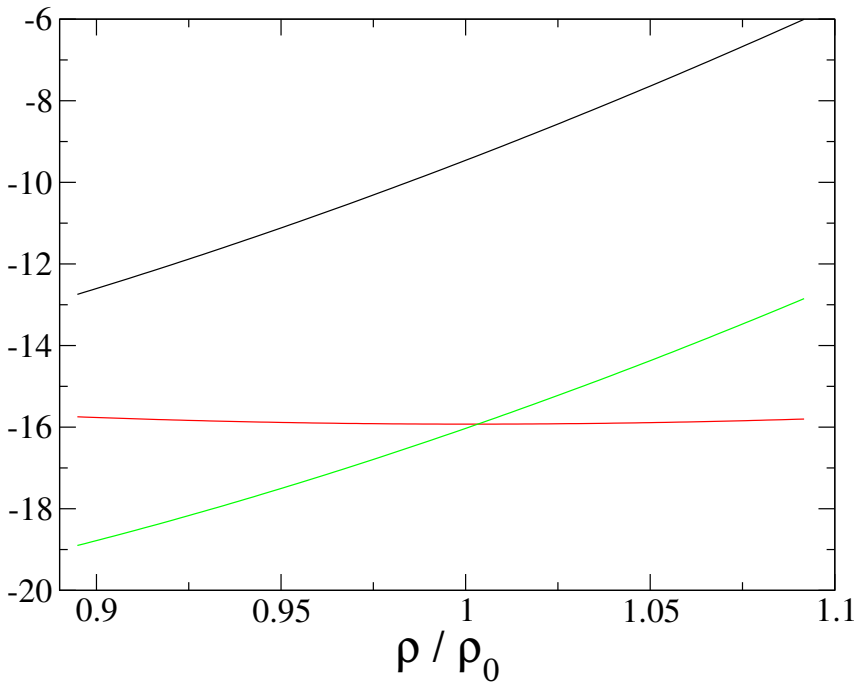

FIG. 5.3: *Potentiel chimique avec (trait plein) ou sans (tireté) les termes de réarrangement. L'énergie de liaison par particule est donnée (pointillé) afin de permettre la comparaison (elle semble plate car on « zoome » sur le fond du puits).*

	Sans contact		Avec contact	
	κ_{NS}	$\tilde{\kappa}_{NS}(\bar{s})$	κ_{NS}	$\tilde{\kappa}_{NS}(\bar{s})$
g_ω	7,725	7,61	6,49	6,33
C	1,42	1,57	1,55	1,73
ρ/ρ_0	1,00	1,00	1,00	1,00
E/A (MeV)	-15,98	-15,99	-15,96	-15,97
K (MeV)	302	284	289	270
a_{sym}(MeV)	26,15	26,13	24,10	24,11

TAB. 5.2: *Comme dans le tableau 5.1 mais pour la base Hartree.*

remarquant que les termes de réarrangement ne contribuent à l'énergie de liaison qu'au travers de la dépendance des fonctions d'onde dans la masse effective $M^* = M_N + \Sigma_{sym}$. À la limite non relativiste, cette dépendance disparaît. Néanmoins, ces termes de réarrangement ont une grande influence

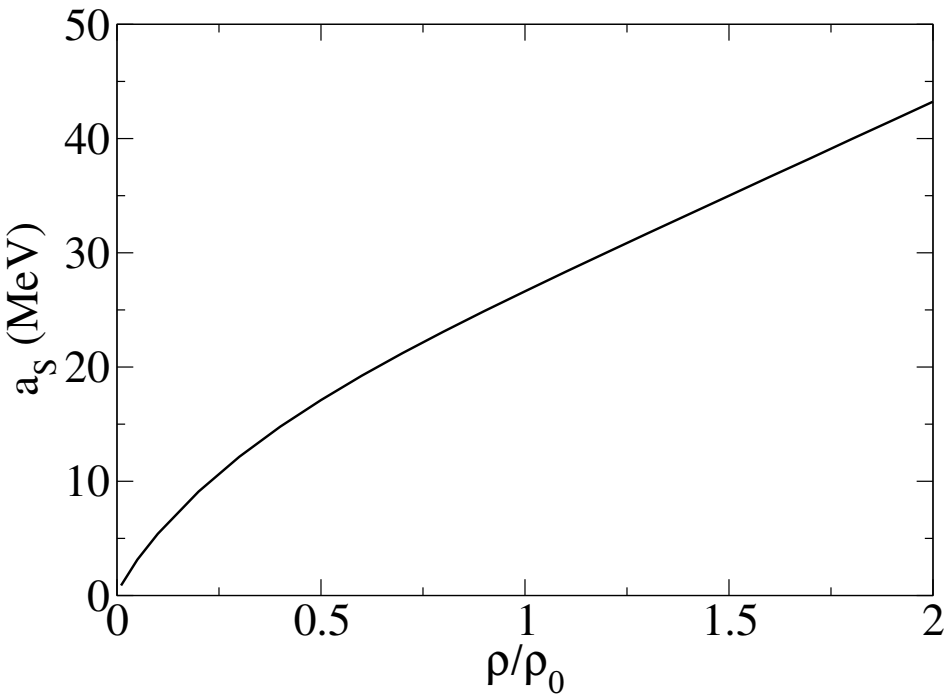

FIG. 5.4: *Énergie d'asymétrie en fonction de la densité. Le calcul a été effectué en incluant les termes de contact et en permettant à la susceptibilité scalaire de dépendre de* $\bar{s}$.

sur le potentiel chimique qui est défini par

$$\mu = \frac{d\epsilon}{d\rho} = E^*(k_F) + \Sigma^0(k_F). \tag{5.77}$$

Le théorème de Hugenholtz–Van-Hove (HVH) [73] stipule que le potentiel chimique doit être égal à l'énergie de liaison par particule au point de saturation. Sur la figure 5.3, on montre le résultat d'un calcul du potentiel chimique μ et de l'énergie de liaison par particule en fonction de la densité, encore une fois en incluant les termes de contact et la dépendance en densité de la susceptibilité scalaire. Le potentiel chimique μ est calculé avec ou sans les termes de réarrangement, il est plus petit de quelques MeV dans le premier cas à cause de l'effet du réarrangement sur l'énergie de Fermi E_F. En présence des termes de réarrangement, le théorème est exactement satisfait. Omettre les termes de réarrangement viole le théorème HVH de plusieurs MeV. Ce problème a peu de conséquences sur la courbe de saturation dans la matière nucléaire, mais il conduirait à un problème sérieux dans les noyaux finis car l'énergie de Fermi serait déplacée de plusieurs MeV (environ 5).

5.4.3 Matière asymétrique et énergie d'asymétrie

Les propriétés de la matière asymétrique constituent également un bon test pour une théorie effective. C'est particulièrement vrai pour l'étude des noyaux loin de la vallée de stabilité ou pour l'équation d'état de la matière nucléaire qui est une donnée importante en astrophysique pour l'étude des propriétés des étoiles à neutrons. Pour cela, on introduit le paramètre d'asymétrie (en isospin) : $\beta = (\rho_n - \rho_p)/\rho$.

κ_ρ	3,7	5	6,6
g_ω	6,42	7,348	8,62
C	1,62	1,32	0,93
ρ/ρ_0	1,00	1,00	1,00
E/A (MeV)	-15,92	-16,05	-15,94
K (MeV)	281	313	308
a_{sym}(MeV)	26,64	29,77	35,87

TAB. 5.3: *Évolution de l'énergie d'asymétrie en fonction de la constante de couplage tensorielle du ρ. Le calcul est fait comme précédemment dans le cas où on inclut les termes de contact et où la polarisabilité scalaire $\tilde{\kappa}_{NS}$ dépend de $\bar{s}$.*

L'énergie d'asymétrie est définie plus rigoureusement par :

$$a_{sym}(\rho) = \left[\frac{\partial(E/A)}{\partial\beta}\right]_{\beta=0} = \left[\frac{\partial(\varepsilon/\rho)}{\partial\beta}\right]_{\beta=0}. \tag{5.78}$$

La contribution des termes cinétique et de Hartree peut être calculée analytiquement (5.65). En approximation Hartree, lorsque l'on néglige la très petite contribution du δ et la très petite dépendance de la densité scalaire ρ_S par rapport à β, on obtient le résultat familier :

$$(a_{sym})_{kin+H} = \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}} + \frac{g_\rho^2}{2\,m_\rho^2}\,\rho.$$

Dans notre calcul (dernière colonne de la table 5.1), la contribution de l'énergie cinétique vaut $(a_{sym})_{kin} = 13,9$ MeV, et celle de Hartree due à l'échange de rho vaut $(a_{sym})_{\rho H} = 7,07$ MeV. En conséquence, la partie Hartree $(a_{sym})_H = 21$ MeV ne suffit pas à expliquer l'énergie d'asymétrie. Les termes de Fock sont donc absolument nécessaires pour obtenir une valeur plus grande de a_{sym} qui soit plus près de la valeur acceptée autour de 30 MeV. Comme pour l'énergie de liaison, il y a une grande compensation entre les contributions des champs scalaire et du oméga : $(a_{sym})_{s+\omega} = -0,75$ MeV. La contribution du delta est elle aussi négligeable : $(a_{sym})_\delta = -0,71$

MeV. La répulsion vient de l'échange de pion $(a_{sym})_{pion} = 2,75$ MeV et surtout de l'échange de rho $(a_{sym})_{\rho Fock} = 5,33$ MeV. Il est important de regarder la contribution spécifique de la partie tenseur du rho $(a_{sym})_{\rho tenseur} = 8,03-4,12 \simeq 4$ MeV, le premier terme correspondant à la prescription d'Orsay et le deuxième aux termes de contact. Le résultat total, $a_{sym} = 26,64$ MeV, est néanmoins un peu petit. Si on se rappelle toutefois que la partie tenseur du rho évolue comme κ_ρ^2 et que cette constante de couplage tensorielle est mal connue phénoménologiquement, il est intéressant de regarder ce que devient l'énergie d'asymétrie lorsque l'on fait varier κ_ρ. Dans la discussion ci-dessus on s'est restreint à la valeur de VDM $\kappa_\rho = 3,7$, mais des analyses de diffusion de pions suggèrent plutôt $\kappa_\rho = 6.6$ [67]. On a donc décidé de faire varier cette constante de couplage entre ces deux valeurs. Les résultats sont mentionnés dans le tableau 5.3. Pour $\kappa_\rho = 5$, on trouve $a_{sym} \simeq 30$ MeV. Le nouveau point de saturation donne une valeur de la réponse scalaire du nucléon égale à $C = 1,32$, ce qui est très proche de la valeur sur réseau. Par contre, la compressibilité passe au-dessus de 300 MeV. Indépendamment des détails de calcul, la discussion ci-dessus laisse fortement penser que le terme de Fock du rho tenseur, absent des théories RMF, est un ingrédient crucial pour avoir des propriétés globales correctes pour la matière nucléaire symétrique et asymétrique. Son importance a aussi été soulevée dans les théories Hartree–Fock dépendant de la densité (DDRHF) ou il a été montré que ce terme améliore significativement les résultats des spectres à une particule dans les noyaux finis [74].

Pour compléter, on trace figure 5.4 l'énergie d'asymétrie en fonction de la densité. L'énergie d'asymétrie a_{sym} augmente de façon monotone, mais sa pente diminue à haute densité ; l'allure de la courbe ressemble beaucoup à celle d'un calcul Brückner–Hartree–Fock (BHF) [75]. Dans ce cas, la courbe ne passe jamais par un maximum, contrairement à ce qui avait été trouvé dans la première version des calculs de perturbations chirales dans le milieu [76].

5.4.4 Masses effectives du proton et du neutron

Une propriété essentielle pour caractériser la propagation des nucléons dans le milieu nucléaire est leur masse effective, m^*. La différence entre les masses effectives des protons, m_p^* et des neutrons, m_n^*, est due essentiellement à la différence entre leurs énergies de Fermi. Au niveau Hartree, cette différence est due au méson delta, mais sa constante de couplage étant choisie très petite, cet effet est seulement de l'ordre de 5% de la différence des masses. L'essentiel provient donc des termes de Fock. Lorsque le paramètre d'asymétrie β augmente, comme dans les systèmes très exotiques, ce phénomène doit jouer un rôle important. Jusqu'ici cependant, les données expérimentales des noyaux finis ne permettent pas de déterminer la différence des masses effectives ; des calculs *ab initio* BHF en revanche

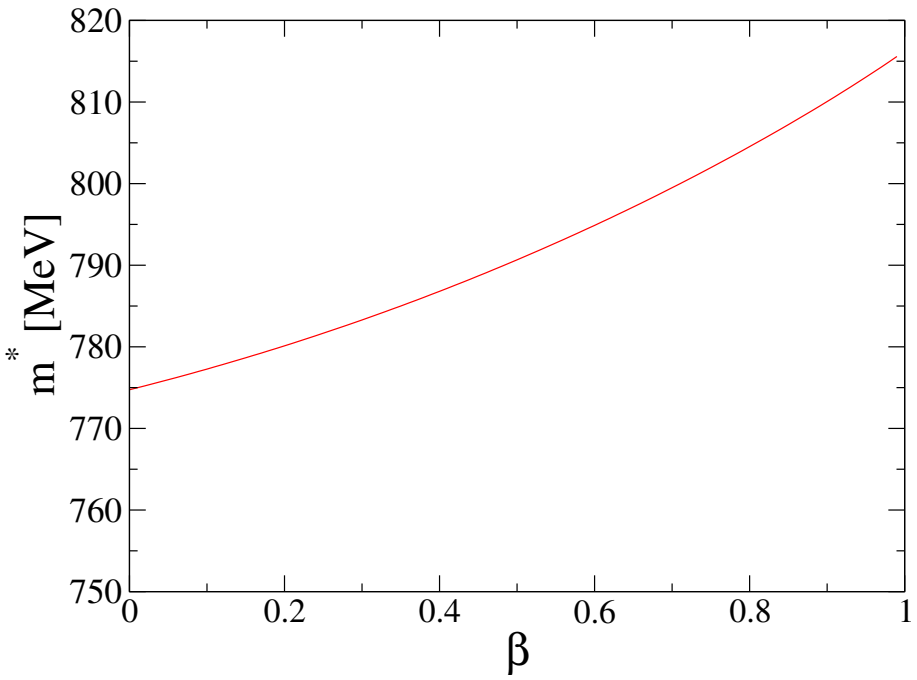

FIG. 5.5: *Masses de Landau pour les neutrons (trait plein) et les protons (tiretés) dans la matière riche en neutrons pour une densité baryonique ρ_0. On a tenu compte des termes de contact dans le calcul et la polarisabilité scalaire dépend de $\bar{s}$.*

prédisent $m_n^* < m_p^*$ dans la matière riche en neutrons [77, 75]. Ce résultat a été confirmé par des calculs dans le cadre de Dirac-BHF [78] ou en DDRHF [79] (voir aussi [80]). On peut donc affirmer que les signes relatifs de la différence de masse sont bien établis même si les amplitudes correspondantes sont encore très incertaines. Les masses effectives, qui dépendent de la densité, sont définies à partir de la densité d'états selon

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{k}\frac{de}{dk} \tag{5.79}$$

où e est l'énergie une particule dont on a retiré la masse moyenne du nucléon. Dans notre approche, cela correspond à

$$e = \varepsilon_{\mathbf{k}}^N - M_N \equiv \sqrt{(M_N + \Sigma_{sym}(\mathbf{k}))^2 + \mathbf{k}^2 (1 + \Sigma_V(\mathbf{k}))^2} + \Sigma_0(\mathbf{k}) - M_N. \tag{5.80}$$

Avec ces définitions, on trouve

$$m^* = \frac{E^*}{(1+\Sigma_V)^2} \equiv \frac{\sqrt{(M_N + \Sigma_{sym}(\mathbf{k}))^2 + \mathbf{k}^2 (1 + \Sigma_V(\mathbf{k}))^2}}{(1+\Sigma_V)^2}. \tag{5.81}$$

On trouve dans la littérature de nombreuses masses effectives. Quelques commentaires s'imposent donc.

1. Dans la suite, nous discutons de la masse effective prise au moment de Fermi. On appelle cette masse effective masse de Landau ;
2. Il ne faut pas confondre cette masse de Landau avec la masse de Dirac $M^* = M_N + \Sigma_{sym}(\mathbf{k})$ introduite ci-dessus. En général, la masse de Dirac a un comportement opposé à celui de la masse de Landau : dans la matière riche en neutrons, $M^*_{Dirac(n)} < M^*_{Dirac(p)}$.
3. La masse effective correspond à la masse de groupe dans la terminologie de [81] et à la masse relativiste dans celle de [79]. La masse non relativiste M^*_{NR} introduite par ces auteurs n'est pas pertinente dans le cadre de notre propos.

On considère ici encore la dernière colonne du tableau 5.1, mais les conclusions suivantes seraient très similaires dans les trois autres cas. Les masses effectives sont tracées figure 5.5 où le comportement caractérisé par $m^*_n > m^*_p$ est bien mis en évidence dans notre approche. Il est important de remarquer que les termes de réarrangement diminuent les deux masses en bloc d'environ 7 MeV quelle que soit la valeur du paramètre β caractérisant la quantité de neutrons.

5.4.5 Matière froide en équilibre bêta

Il nous reste encore pour terminer cette étude à déterminer l'équation d'état de la matière nucléaire froide qui permet de caractériser l'intérieur des étoiles à neutrons. Ce travail est très préliminaire et nous prendrons un modèle simple pour décrire les étoiles à neutrons : nous considérerons que celles-ci sont constituées principalement de neutrons en équilibre bêta avec des protons. Un gaz d'électrons libres permet d'assurer l'électroneutralité de l'étoile (dans un modèle plus complet, il faurait également tenir compte de la présence des muons). Les résultats ci-dessous sont donc à prendre comme de grandes lignes préparant un futur travail qui serait plus détaillé. La densité d'énergie de cette matière est alors

$$\epsilon = \epsilon_{nuclear\,matter} + \epsilon_{e^-} \tag{5.82}$$

où $\epsilon_{nuclear\,matter}$ est la densité d'énergie calculée et discutée dans ce chapitre, et ϵ_{e^-} est la densité d'énergie du gaz d'électrons qui vaut

$$\epsilon_{e^-} = \frac{2}{V} \sum_{k_e < k_{Fe}} \sqrt{k_e^2 + m_e^2} \simeq \frac{k_{Fe}^4}{4\pi^2} \tag{5.83}$$

lorsqu'on néglige la masse des électrons. En effet, cette masse est $m_{e^-} \ll p \sim$ 100 MeV. Pour assurer la neutralité de la matière, il faut imposer l'égalité des densités en protons et en électrons $\rho_p = \rho_e$, ce qui implique l'égalité des

moments de Fermi : $p_F = k_{Fe}$. Le grand potentiel et sa densité sont donnés par

$$\Omega = E - \sum_i \mu_i N_i \tag{5.84}$$

et

$$\begin{aligned} \omega &= \epsilon - \mu_B (\rho_p + \rho_n) - \mu_e (\rho_e - \rho_p) \\ &= \epsilon - \mu_p \rho_p - \mu_n \rho_n - \mu_e \rho_e \end{aligned} \tag{5.85}$$

ce qui implique pour le potentiel chimique baryonique $\mu_B = \mu_n = \mu_p + \mu_e$. Pour une densité baryonique donnée, les densités en protons et en neutrons aux moments de Fermi sont obtenues en résolvant le système d'équations

$$\begin{aligned} k_{Fe} &= p_F = \varepsilon^n(n_F) - \varepsilon^p(p_F), \\ \rho &= \rho_p + \rho_n. \end{aligned} \tag{5.86}$$

L'équation d'état de la matière nucléaire est paramétrée par la densité baryonique ρ. Pour chaque valeur de celle-ci à laquelle on veut travailler, on cherche une solution du système d'équations autour de $\rho_p \simeq 0,1\rho$ et $\rho_n \simeq 0,9\,\rho$. Avec ces valeurs de ρ_p et ρ_n, il est possible de calculer la densité d'énergie en fonction de la densité. La courbe obtenue est présentée figure 5.6 en se plaçant comme d'habitude dans le cas correspondant à la dernière ligne du tableau 5.1. On calcule également l'équation d'état, c'est-à-dire la pression en fonction de la densité d'énergie. Il y a deux définitions possibles de la pression. D'une part la définition thermodynamique est

$$P = -\omega = -\epsilon + \sum_i \mu_i \rho_i = -\epsilon + \mu_n \rho, \tag{5.87}$$

obtenue grâce à la condition de neutralité $\rho_p = \rho_e$. D'autre part, on peut définir la pression baryonique par

$$P = \rho^2 \frac{\partial(\epsilon/\rho)}{\partial\rho} = \rho \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} - \epsilon. \tag{5.88}$$

Étant donné que le potentiel chimique μ est défini par $\mu_B \equiv \partial\epsilon/\partial\rho$, les deux définitions sont équivalentes. Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on trace la pression en fonction de la densité d'énergie figure 5.7. Dans le domaine de densité considéré ($\rho < 3\,\rho_0$), l'équation d'état de la figure 5.7 est assez semblable à celle obtenue avec le modèle QMC [28]. D'après ce travail, il est évident que pour des densités plus grandes, un modèle réaliste d'étoile à neutrons devrait tenir compte d'une éventuelle contribution des hypérons [28, 82].

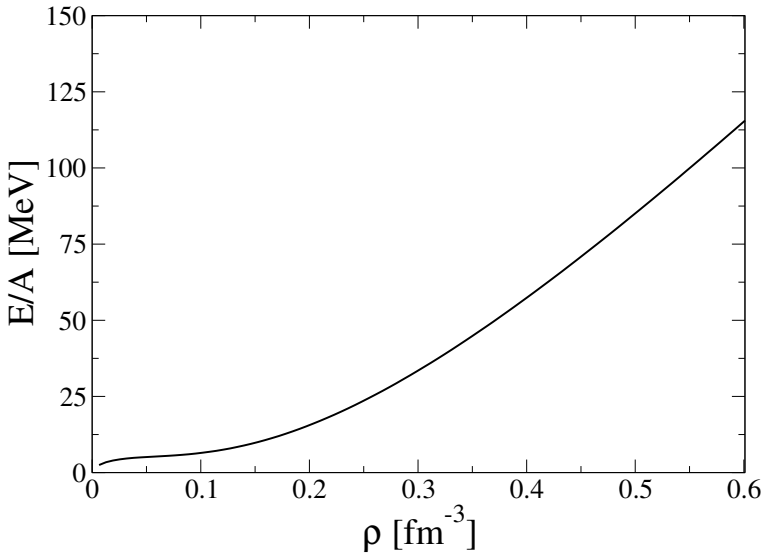

FIG. 5.6*: Énergie par nucléon en fonction de la densité baryonique dans la matière uniforme froide en équilibre bêta. Les calculs sont faits dans la version correspondant à la dernière colonne du tableau 5.1.*

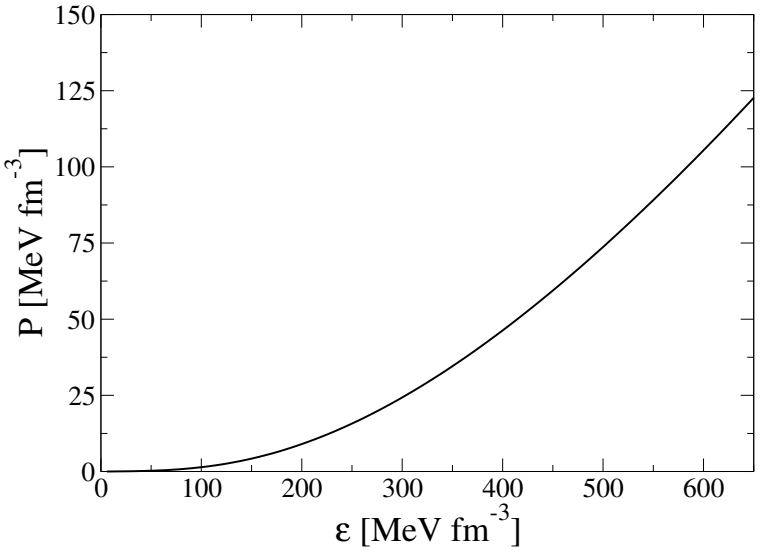

FIG. 5.7*: Équation d'état de la matière uniforme froide en équilibre bêta : pression en fonction de la densité d'énergie. Le calcul est fait comme pour la figure 5.6 dans la version de la dernière colonne du tableau 5.1.*

Chapitre 6

Corrélations

Les résultats du modèle relativiste chiral tenant compte des effets de confinement sont très bons. Cependant, quelques points sont encore à améliorer, notamment la valeur trop grande de la compressibilité et dans une moindre mesure celle de la réponse scalaire nucléonique C. Afin d'affiner les résultats, on choisit de développer, dans le cas de la matière nucléaire symétrique, l'énergie au-delà de l'approximation de Hartree–Fock, et d'inclure les excitations particule-trou. Les grandes lignes de l'inclusion de ces corrélations ont été développées dans le chapitre 2, ce qui va nous permettre ici de détailler plutôt les spécificités de l'approche relativiste et du choix des mésons impliqués.

Dans le cas relativiste, l'expression RPA de l'énergie de corrélation est un peu plus compliquée que celle donnée équation (2.35). En effet, les vertex d'interaction, de nature vectorielle (pour le méson rho) ou pseudo-vectorielle (pour le cas axial) portent des indices de Lorentz que l'on retrouve sur l'interaction V ou les corrélateurs Π et Π^0. Pour connaître l'expression exacte de l'interaction et du corrélateur, on se base sur les expressions du hamiltonien et de l'énergie obtenues à partir du lagrangien.

Dans un modèle chiral, l'échange de méson scalaire n'est pas la seule source d'attraction. La liaison nucléaire est en partie due à l'échange de pions [56, 76]. Lorsque l'on se place au-delà du champ moyen, la première excitation est due à l'échange de deux pions. On commence donc par introduire l'échange de pions, itéré sur les boucles introduites dans le chapitre 2 de formalisme général. Afin de tenir compte des forces à courte portée, on ajoutera comme dans de nombreux travaux [83, 84] une partie de contact. Enfin, par analogie avec le cas non relativiste, on considérera également l'échange de méson rho.

6.1 Énergie de corrélation dans le canal pionique

On développe la méthode sur le cas particulier du pion pour plus de simplicité.

6.1.1 Décomposition de l'interaction

Le lagrangien pionique s'écrit comme dans la partie précédente avec le couplage pseudo-vectoriel

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}\partial\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{1}{2}m_\pi^2\vec{\pi}^2 + \frac{g_A}{2f_\pi}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\vec{\tau}\psi\partial_\mu\vec{\pi}. \tag{6.1}$$

Après écriture des équations d'Euler-Lagrange, on peut mettre l'énergie d'interaction sous la forme (les détails pour obtenir ce type d'expression ont été largement développés dans le chapitre 3 et l'annexe A) :

$$\begin{aligned}\langle H_{int}(t)\rangle = \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \int \quad & d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dt'(-\partial_\mu\partial'_\nu D_\pi(x,x')) \\ & \langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\vec{\tau}\gamma^5\psi(x)\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\vec{\tau}\gamma^5\psi(x')\rangle. \end{aligned} \tag{6.2}$$

On peut remarquer que le signe devant la constante de couplage dans le lagrangien n'a aucune importance : celle-ci est au carré dans l'expression de l'énergie. En revanche, le signe relatif entre la partie cinétique et la partie d'interaction dans le lagrangien modifie le signe devant le propagateur de méson : pour le méson rho par exemple, ce signe est inversé.

Le hamiltonien et sa valeur moyenne dépendent formellement du temps. Cependant, il est facile de vérifier que ce n'est pas le cas : l'énergie de boucles est constante comme il se doit. En prenant t qui tend vers l'infini, on peut donc ajouter sans changer le résultat de l'équation (6.2) un facteur $\theta(t-t')$ devant le braket. De même, on peut ajouter la quantité $-\theta(t'-t)\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\vec{\tau}\gamma^5\psi(x)\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\vec{\tau}\gamma^5\psi(x')\rangle$ qui est nulle dans ce cas. Ainsi, l'équation (6.2) a la même valeur si on ajoute un T-produit dans le corrélateur.

De cette façon, la dernière partie n'est autre que le propagateur de polarisation, à un facteur i près. En effet, on peut reprendre la remarque à la fin du chapitre 2 (équation 2.37). On note de manière générale le couplage Γ^μ car les couplages considérés ici auront tous une nature vectorielle. Dans le cas du pion par exemple, $\Gamma_\pi^\mu = \gamma^\mu\gamma^5$. Le couplage Γ^μ étant une matrice agissant dans l'espace des spineurs, on peut considérer ses éléments $(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ qui se couplent aux nucléons du corrélateur d'après le lagrangien de la figure 2.1[1] :

$$\mathcal{L}_X = g_X\bar{\psi}^\alpha(\Gamma_X^\mu)_{\alpha\beta}\psi^\beta X_\mu.$$

[1] Pour la simplicité de la formule, le couplage n'est pas dérivatif. Dans la limite où les fonctions d'onde sont des ondes planes, la dérivée du couplage peut être remplacée par un facteur q^μ qui peut lui-même être incorporé dans la définition de Γ^μ. Pour le pion, ce genre

La constante de couplage g_X est par exemple dans le cas du pion $g_A/2f_\pi$. Le corrélateur à calculer est d'après le théorème de Wick, et de façon similaire à l'équation (2.36) :

$$\begin{aligned} i\Pi^{0\mu\nu}(x,x') &= \langle\varphi_0|T[\bar{\psi}_\alpha(\Gamma^\mu)^{\alpha\beta}\psi_\beta\bar{\psi}_\gamma(\Gamma^\mu)^{\gamma\delta}\psi_\delta]|\varphi_0\rangle \\ &= -\langle\varphi_0|T[\psi_\beta(x)\bar{\psi}_\gamma(x)]|\varphi_0\rangle(\Gamma^\mu)^{\gamma\delta}\langle\varphi_0|T[\psi_\delta(x')\bar{\psi}_\alpha(x')]|\varphi_0\rangle(\Gamma^\nu)^{\alpha\beta} \\ &= -iG^0(x,x')_{\beta\gamma}(\Gamma^\mu)^{\gamma\delta}iG^0(x,x')_{\delta\alpha}(\Gamma^\nu)^{\alpha\beta} \\ &= Tr(G^0(x,x')\Gamma^\mu G^0(x',x)\Gamma^\nu). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Si on prend la moyenne de cette quantité sur le fondamental contenant les boucles, on obtient plutôt $i\Pi^{\mu\nu}(x,x')$, soit précisément le dernier facteur (incluant le T-produit) de l'énergie (6.2).

On définit la partie d'interaction par

$$V_{\mu\nu} = -\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \partial_\mu\partial'_\nu D_\pi(x,x'), \tag{6.4}$$

ce qui, d'après l'expression (6.2), permet d'écrire la valeur moyenne du hamiltonien sous la forme

$$\langle H_{int}\rangle = 3\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dt'V_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}. \tag{6.5}$$

Dans la discussion ci-dessus, les matrices d'isospin $\vec{\tau}$ ont été volontairement omises. En effet, elles correspondent à la polarisation du pion qui contribue simplement à travers le facteur trois discuté au chapitre 2.

On réécrit l'équation de Dyson (2.30) en tenant compte de la nature vectorielle des interactions :

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= \Pi^{0\mu\nu} + \Pi^{0\mu\alpha}V_{\alpha\beta}\Pi^{0\beta\nu} + \Pi^{0\mu\alpha}V_{\alpha\beta}\Pi^{0\beta\gamma}V_{\gamma\delta}\Pi^{0\delta\nu} + \cdots \\ &= \Pi^{0\mu\nu} + \Pi^{0\mu\alpha}V_{\alpha\beta}\Pi^{\beta\nu}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

On obtient ainsi 16 équations couplées, qui ne peuvent être résolues de manière aussi simple que dans le cas de l'équation de Dyson standard. Heureusement, la structure des propagateurs de polarisation et de mésons permet en général de se ramener à des équations non couplées en projetant interactions et propagateurs sur les canaux inspirés entre autres des canaux transverse et longitudinal qu'on trouve dans l'approche non relativiste. Pour se faire, on commence par se placer en représentation d'impulsion, et l'on s'y tiendra autant que possible dans la suite. On introduit la transformée de Fourier des diverses quantités introduites ci-dessus de la même façon que

de considérations n'est pas utile car on inclue la dérivée du couplage dans le propagateur de méson et non dans le propagateur particule-trou, mais on y reviendra plus précisément dans le cas du rho.

dans le cas du champ moyen :

$$D_\pi(x,x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\cdot(x-x')} D_\pi(q), \tag{6.7}$$

$$\Pi^{\mu\nu}(x,x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-iq\cdot(x-x')} \Pi^{\mu\nu}(q). \tag{6.8}$$

La valeur moyenne du hamiltonien peut être réécrite en fonction des transformées de Fourier :

$$\begin{aligned}\langle H_{int}\rangle &= 3\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dt'(-\partial_\mu\partial'_\nu D_\pi(x,x'))i\Pi^{\mu\nu}(x,x') \\ &= 3\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dt' \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\left(-\partial_\mu\partial'_\nu\right)\frac{e^{-i\omega(t-t')}e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{q^2-m_\pi^2} \\ &\quad \int \frac{dk^0}{2\pi}\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-ik^0(t-t')} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\Pi^{\mu\nu}(k).\end{aligned} \tag{6.9}$$

On a adopté la notation $q = (\omega, \mathbf{q})$. Les intégrales sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ donnent un facteur $(2\pi)^3 V\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})$ et celle sur t' donne $2\pi\delta(k^0-\omega)$. La dépendance en t disparaît bien comme on s'y attendait puisque l'énergie des boucles ne dépend pas du temps. La valeur moyenne devient alors en représentation d'impulsion

$$\langle H_{int}\rangle = 3V \int \frac{id\omega}{(2\pi)} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V_{\mu\nu}(q)\Pi^{\mu\nu}(q) \tag{6.10}$$

où $V_{\mu\nu}(q)$ est donné équation (6.12).

La contribution à l'énergie de corrélation s'obtient en utilisant la charging formula comme expliqué au paragraphe 2.2.3 :

$$E^{corr} = 3V \int \frac{id\omega}{(2\pi)}\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda}\lambda^2 V_{\mu\nu}(q)(\Pi^{\mu\nu}(\lambda,q) - \Pi^{0\mu\nu}) \tag{6.11}$$

avec

$$V_{\mu\nu}(q) = \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \frac{q_\mu q_\nu}{\omega^2-\omega_q^2} \tag{6.12}$$

$$\Pi^{0\mu\nu}(q) = -2i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr(G(p)\Gamma^\mu G(p+q)\Gamma^\nu). \tag{6.13}$$

Comme on l'a déjà remarqué, on obtient l'énergie des corrélations en soustrayant l'énergie de Fock à l'énergie d'interaction. On définit ω_q comme dans le cas non relativiste [56] par $\omega_q^2 = \mathbf{q}^2 + m_\pi^2$. Les constantes de couplage qui apparaissent naturellement dans les vertex d'interaction peuvent être inclues dans la définition de l'interaction ou du propagateur indifféremment, cela ne change pas le résultat. Par commodité, on les place ici dans l'interaction $V^{\mu\nu}$.

6.1.2 Calcul du propagateur de polarisation

Tout tenseur covariant du problème doit dépendre de tenseurs construits eux-mêmes sur des quantités covariantes. Ici la seule dépendance explicite de $V_{\mu\nu}$ et $\Pi^{\mu\nu}$ est le quadrivecteur q^μ. Il faut toutefois ajouter un vecteur que l'on notera η^μ permettant de spécifier le référentiel de travail. Dans la matière nucléaire symétrique au repos, il se réduit à $\eta = (1,0,0,0)$ [84]. Enfin, il peut y avoir une dépendance en $g^{\mu\nu}$. À partir de ces quantités, on peut construire les tenseurs suivants [84, 85] :

$$\begin{array}{lllllll} T^1_{\mu\nu} & = & g_{\mu\nu} - \frac{\hat{\eta}_\mu \hat{\eta}_\nu}{\hat{\eta}^2} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} & , & T^4_{\mu\nu} & = & \frac{\hat{\eta}_\mu q_\nu + \hat{\eta}_\nu q_\mu}{\sqrt{\hat{\eta}^2 q^2}}, \\ T^2_{\mu\nu} & = & \frac{\hat{\eta}_\mu \hat{\eta}_\nu}{\hat{\eta}^2} & , & T^5_{\mu\nu} & = & \frac{\hat{\eta}_\mu q_\nu - \hat{\eta}_\nu q_\mu}{\sqrt{\hat{\eta}^2 q^2}}, \\ T^3_{\mu\nu} & = & \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} & , & T^6_{\mu\nu} & = & \frac{i}{|\vec{q}|} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho \hat{\eta}_\sigma, \end{array} \tag{6.14}$$

où $\hat{\eta}_\mu = \eta_\mu - (\eta \cdot q/q^2) q_\mu$. On a ainsi $\hat{\eta}_\mu q^\mu = 0$. Les propriétés des $T_i^{\mu\nu}$ sont données à l'annexe B. De manière générale, tout tenseur covariant peut se décomposer sur ces six tenseurs.

L'interaction pionique, proportionelle à $q^\mu q^\nu$, est simplement en fonction des tenseurs $T^{\mu\nu}$:

$$V^\pi_{\mu\nu} = \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \frac{q^2}{\omega^2 - \omega_q^2} T^3_{\mu\nu}. \tag{6.15}$$

Pour décomposer le propagateur de polarisation sur ces tenseurs, un peu de travail est cependant nécessaire : il faut en effet connaître l'expression explicite de la trace. Le propagateur à une particule contient soit une particule au-dessus de la mer de Fermi, soit un trou de la mer de Fermi. Comme dans le cas non relativiste, il s'écrit donc

$$G(p) = \frac{\theta(|\mathbf{p}| - p_F)}{p^0 - E_p + i\eta} + \frac{\theta(p_F - |\mathbf{p}|)}{p^0 + E_p - i\eta} \tag{6.16}$$

où $E_p = \sqrt{M_N^2 + \mathbf{p}^2}$. Bien que son interprétation soit évidente, cette expression n'est pas covariante. En particulier, cela pose des problèmes dans les calculs des propagateurs de polarisation. On va la transformer en ajoutant la contribution des anti-nucléons, conduisant à l'inclusion de boucles $\bar{N}N$. Ceci n'est pas très cohérent dans la mesure où de nombreuses autres excitations devraient être considérées avant l'inclusion des paires $\bar{N}N$. Cependant, comme de nombreux auteurs [85, 86], on introduit cette contribution car elle permet de conserver une formulation covariante du problème et les structures tensorielles (en particulier le rho transverse). L'erreur commise, une

correction relativiste, reste négligeable. Le propagateur du nucléon est alors

$$\begin{aligned} G(p) &= \Lambda_+ G_+ + \Lambda_- G_- \\ &= \frac{E_p\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + M^*}{2E_p}\left(\frac{\theta(|\mathbf{p}|-p_F)}{p^0 - E_p + i\eta} + \frac{\theta(p_F - |\mathbf{p}|)}{p^0 + E_p - i\eta}\right) \\ &\quad + \frac{E_p\gamma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\gamma} - M^*}{2E_p}\frac{1}{p^0 + E_p - i\eta} \\ &= (\not{p} + M^*)\left[\frac{1}{p_0^2 - E_p^2 + i\eta} + \frac{i\pi\delta(p_0 - E_p)}{E_p}\theta(p_F - |\mathbf{p}|)\right]. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Les quantités Λ_+ et Λ_- sont les projecteurs sur les états d'énergies respectivement positive et négative ; G_+ et G_- les propagateurs correspondant. Le premier terme correspond au propagateur du nucléon dans le vide, le deuxième au propagateur dans le milieu. Lorsqu'on calcule le propagateur de polarisation, on obtient quatre termes : le premier est celui correspondant aux choix des propagateurs libres pour les deux particules de la boucle particule-trou. Or la contribution du vide peut toujours être soustraite, on élimine donc ce premier terme. Le propagateur de polarisation est alors

$$\begin{aligned} \Pi^{0\mu\nu}(q) &= 2\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr\left((\not{p} + M^*)\Gamma^\mu(\not{p} + \not{q} + M^*)\Gamma^\nu\right) \\ &\quad \times\left[i\pi^2\frac{\delta(p_0 - E_p)}{E_p}\theta(p_F - |\mathbf{p}|)\frac{\delta(p_0 + \omega - E_{p+q})}{E_{p+q}}\theta(p_F - |\mathbf{p}+\mathbf{q}|)\right. \\ &\quad + \frac{\pi\delta(p_0 - E_p)\theta(p_F - |\mathbf{p}|)}{E_p\left((p+q)^2 - M^{*2} + i\eta\right)} \\ &\quad \left. + \frac{\pi\delta(p_0 + \omega - E_{p+q})\theta(p_F - |\mathbf{p}+\mathbf{q}|)}{E_{p+q}\left(p^2 - M^{*2} + i\eta\right)}\right]. \end{aligned} \tag{6.18}$$

La partie imaginaire du propagateur n'est pas strictement utile dans ce qui suit. On s'intéresse donc seulement à la partie réelle de ce propagateur, soit les deux dernières lignes. On peut remarquer qu'en effectuant le changement de variable $p \to p + q$ dans le dernier terme, il devient identique à l'avant-dernier moyennant de prendre $q^\mu \to -q^\mu$; finalement le propagateur qui nous intéresse est simplement

$$\Re\mathrm{e}\Pi^{0\mu\nu}(q) = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{N_p}{2E_p}\left[\frac{Tr\left((\not{p} + M^*)\Gamma^\mu(\not{p} + \not{q} + M^*)\Gamma^\nu\right)}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + (q^\mu \to -q^\mu)\right]. \tag{6.19}$$

L'intégration sur p^0 a été effectuée, le quadrivecteur p est donc désormais $p = (E_p, \mathbf{p})$.

Pour décomposer le propagateur de polarisation sur les tenseurs $T^{\mu\nu}$, on évalue la trace explicitement :

$$\begin{aligned} &Tr\left((\not{p} + M^*)\gamma^\mu\gamma^5(\not{p} + \not{q} + M^*)\gamma^\nu\gamma^5\right) \\ &= 4\left(p^\mu(p+q)^\nu + p^\nu(p+q)^\mu - p.(p+q)g^{\mu\nu} - M_N^{*2}g^{\mu\nu}\right). \end{aligned} \tag{6.20}$$

On peut remarquer que cette expression est symétrique en μ et ν : le propagateur de polarisation du pion se décompose sur les quatre tenseurs symétriques. La partie en $g^{\mu\nu}$ est simplement proportionnelle à la somme des trois premiers tenseurs. Pour la partie dépendant de p et q, on peut remarquer qu'elle ne dépend pas de T_4 si on tient compte du terme $q^\mu \to -q^\mu$:

$$\begin{aligned}&\frac{p^\mu(p+q)^\nu + p^\nu(p+q)^\mu}{(p+q)^2 - M_N^{*2}} + \frac{p^\mu(p-q)^\nu + p^\nu(p-q)^\mu}{(p-q)^2 - M_N^{*2}}\\ &\sim p^\mu p^\nu q^2 - (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) p\cdot q. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Projetée sur T_4, cette expression est nulle. Le propagateur dans le canal pionique se décompose donc simplement selon

$$\Pi_a^{0\mu\nu}(q) = \Pi_T(q) T_1^{\mu\nu} + \Pi_R(q) T_2^{\mu\nu} + \Pi_L(q) T_3^{\mu\nu}. \tag{6.22}$$

L'indice a pour *axial* a été ajouté en anticipant sur les paragraphes suivants. D'après le calcul sur la trace ci-dessus, les projections du propagateur de polarisation sont de la forme

$$\Pi_{aj}^0 \int \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\theta(p_F - |\mathbf{p}|)}{E_p} \frac{K_{aj}(q,\mathbf{p})}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + (q^\mu \to -q^\mu) \right] \tag{6.23}$$

où la structure tensorielle est contenue dans les K_j qui ont pour expression :

$$K_{aT} = -2M^{*2} - p\cdot q - \mathbf{p}_T^2, \tag{6.24}$$

$$K_{aR} = 2\mathbf{p}_T^2, \tag{6.25}$$

$$K_{aL} = -2M^{*2}. \tag{6.26}$$

On a défini $\mathbf{p}_T = \mathbf{p} - (\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{q}}$ qui est la partie transverse de l'impulsion du nucléon. Ainsi, $\mathbf{p}_T^2 = \mathbf{p}^2 - (\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{q}})^2$. L'intégration sur $\mathbf{p}$ se fait en coordonnées sphériques. On choisit comme variables la norme p du vecteur, l'angle qu'il fait avec $\mathbf{q}$ et l'angle azimutal. Ce dernier s'intègre trivialement puisque l'intégrant n'en dépend pas. On note $u = \cos(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Un travail fastidieux consiste à calculer l'intégration sur u pour accélérer les programmes numériques. On peut remarquer que $\Pi^{\mu\nu}(q)$ ne dépend que de ω et de la norme $q = |\mathbf{q}|$. Les expressions intégrées de Π_{aT}, Π_{aR} et Π_{aL} sont données en annexe C.

6.1.3 Expression de l'énergie de corrélation dans le canal pionique

Les trois premiers tenseurs étant orthogonaux entre eux lorsqu'on les contracte sur un seul indice, l'équation de Dyson (2.30) peut être décomposée sur les trois canaux de manière indépendante :

$$\Pi_i = \Pi_i^0 + \Pi_i^0 V_i \Pi_i, \qquad i = T, R, L. \tag{6.27}$$

L'interaction pionique étant purement longitudinale, l'énergie correspondante se réduit à

$$E_\pi^{corr} = -\frac{3}{2}V \int \frac{id\omega d^3q}{(2\pi)^4} \left(\ln(1 - V_{aL}\Pi_{aL}) + V_{aL}\Pi_{aL}\right). \tag{6.28}$$

6.2 Canal axial

Il ne faut pas oublier cependant que le milieu nucléaire est un milieu fortement corrélé. Le cœur dur entraîne une répulsion à courte portée que l'on introduit ici à travers des forces de contact. Celles-ci peuvent être modélisées par le lagrangien

$$\mathcal{L}_c = g' g_{\mu\nu} \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma^5\psi \tag{6.29}$$

où g' est le paramètre de Migdal déjà discuté dans les résultats de la partie champ moyen. L'énergie due à la partie contact est alors simplement

$$\langle H_c \rangle = \int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'dt'(-g' g_{\mu\nu})\Pi^{\mu\nu}(x, x') \tag{6.30}$$

où le propagateur de polarisation est le même que celui du pion. L'effet du contact est donc simplement de rajouter un terme dans le potentiel d'interaction, qui est alors

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}(q) &= \left(-g' g_{\mu\nu} + \frac{q^{\mu 2}}{\omega^2 - \omega_q^2}\frac{q^\mu q^\nu}{q^{\mu 2}}\right)\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \\ &= \left(-g' T_{1\mu\nu} - g' T_{2\mu\nu} + \left(\frac{q_\mu^2}{\omega^2 - \omega_q^2} - g'\right) T_{3\mu\nu}\right)\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.31}$$

On peut voir sur la partie longitudinale que l'effet du contact est d'écranter la contribution du pion. Comme on le verra dans les résultats, cette dernière contribution, assez importante en l'absence de contact, devient presque nulle lorsque $g' = 0,7$, la valeur de travail choisie. L'énergie des corrélations est maintenant

$$\begin{aligned} E_a^{corr} = -\frac{3}{2}V \int \frac{id\omega d^3q}{(2\pi)^4} \Big[& 2\ln(1 - V_{aT}\Pi_{aT}) + 2V_{aT}\Pi_{aT} \\ & + \ln(1 - V_{aR}\Pi_{aR}) + V_{aR}\Pi_{aR} + \ln(1 - V_{aL}\Pi_{aL}) + V_{aL}\Pi_{aL} \Big]. \end{aligned} \tag{6.32}$$

La partie transverse contient un facteur 2 par rapport aux autres. Analytiquement, ce facteur 2 provient du fait que $V_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} = 2V_T\Pi_T$ car $T_{1\mu\nu}T_1^{\mu\nu} =$

2. Physiquement, le canal transverse a une multiplicité double. Telle quelle, l'intégrale dans l'expression (2.35) n'est pas définie. Plutôt que de la renormaliser, on préfère introduire un facteur de forme qui coupe les grandes impulsions. On en reparlera en particulier dans la section sur les résultats car le facteur de forme devient indispensable pour les calculs numériques.

On appellera dorénavant canal axial le canal contenant à la fois le pion et le contact. Pour le distinguer du canal du rho auquel on s'intéresse à présent, on a indicé toutes les quantités ci-dessus par a.

6.3 Contribution du méson ρ

Par analogie avec le cas non relativiste, on complète la partie transverse de la voie de spin-isospin grâce à l'introduction du méson rho.

6.3.1 Contribution du ρ découplé

L'échange de rho est modélisé par le lagrangien déjà donné dans le modèle de Walecka :

$$\mathcal{L}_\rho = -\left(\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\nu\right) - g_\rho\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi\vec{\rho}_\mu - \frac{\kappa_\rho}{2M_N}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\vec{\rho}_\mu\tau\psi\right). \tag{6.33}$$

Contrairement à certains travaux [85], on considère que le couplage tenseur dépend de la masse nue des nucléons et non de la masse dans le milieu (c'est-à-dire ici la masse de Hartree). Cette fois-ci, le couplage dérivatif ne peut être inclus dans la partie interaction puisqu'il ne peut se mettre en facteur comme dans le cas pionique. En représentation d'impulsion, le vertex d'interaction du rho est simplement

$$\Gamma_\rho^\mu = g_\rho\left(\gamma^\mu - i\frac{\kappa_\rho}{2M_N}q_\nu\sigma^{\mu\nu}\right), \tag{6.34}$$

qui redonne bien la bonne limite non relativiste comme on l'a vérifié plus haut. Néanmoins, la formule donnée équation (6.34) ne peut être incorporée telle quelle dans un corrélateur tel que celui de l'équation (6.3). En effet, la deuxième interaction correspond à un diagramme de Feynman hermitique conjugué de celui de la première. Lorsqu'on écrit les équations du mouvement, le couplage dérivatif gagne un signe moins par rapport à un couplage normal. Or dans l'expression de $\Pi^{0\mu\nu}$, le deuxième couplage provient des équations du mouvement : le propagateur de polarisation du rho est donc

$$\Re\mathrm{e}\Pi^{0\mu\nu}(q) = \int \frac{p^2 dp du}{4\pi^2 E_p}\left[\frac{Tr\left((\not{p}+M^*)\Gamma^\mu(\not{p}+\not{q}+M^*)\Gamma'^\nu\right)}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + (q^\mu \to -q^\mu)\right] \tag{6.35}$$

où $\Gamma'^{\mu} = g_\rho\left(\gamma^\mu + i\kappa_\rho/2M_N q_\nu \sigma^{\mu\nu}\right) = \Gamma^{\mu\dagger}$. On a considéré dans toute cette thèse que le rho est couplé à un courant conservé ; en conséquence le propagateur de polarisation doit être orthogonal à l'impulsion, c'est-à-dire qu'il doit satisfaire la relation

$$q_\mu \Pi_\rho^{\mu\nu}(q) = q_\nu \Pi_\rho^{\mu\nu}(q) = 0, \tag{6.36}$$

de même pour $\Pi_\rho^{0\mu\nu}$. On le vérifie aisément en calculant la trace. Comme dans le calcul Hartree–Fock, on considère trois contributions : une première correspondant à la partie vecteur de l'interaction, une deuxième à un terme croisé vecteur-tenseur et la dernière correspondant à la partie tenseur. Pour la première, la trace est simplement

$$Tr\left((\not{p} + M^*)\gamma^\mu(\not{p} + \not{q} + M^*)\gamma^\nu\right) = 4\left(p^\mu(p+q)^\nu + p^\nu(p+q)^\mu - p\cdot q g^{\mu\nu}\right). \tag{6.37}$$

On remarque que ce terme est symétrique en μ et ν, il se décompose suivant les quatre premiers tenseurs. Lorsqu'on tient compte du terme en $q^\mu \to -q^\mu$, l'intégrant de la polarisation pour la partie vecteur est proportionnel à :

$$q^2 p^\mu p^\nu - p\cdot q(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) + (p\cdot q)^2 g^{\mu\nu} \tag{6.38}$$

qui est bien orthogonal à q_μ ou q_ν. Cette partie du propagateur ne contribue qu'aux canaux transverse (T) et purement relativiste (R). La trace du terme croisé est

$$\begin{aligned} Tr\quad & \left((\not{p} + M^*)\gamma^\mu(\not{p} + \not{q} + M^*) i\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\sigma^{\nu\beta}q_\beta\right) \\ & + Tr\left((\not{p} + M^*)\left(-i\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\sigma^{\mu\alpha}q_\alpha\right)(\not{p} + \not{q} + M^*)\gamma^\nu\right) \\ & = 4\kappa_\rho\frac{M^*}{M_N}q^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) = 4\kappa_\rho\frac{M^*}{M_N}q^2(T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{6.39}$$

Il se décompose bien lui aussi sur les deux premiers tenseurs. Enfin, la dernière trace est

$$\begin{aligned} Tr\quad & \left((\not{p} + M^*)\left(-i\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\sigma^{\mu\alpha}q_\alpha\right)(\not{p} + \not{q} + M^*)\left(i\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\sigma^{\nu\beta}q_\beta\right)\right) \\ & = \left(\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\right)^2\Big(4q^\mu q^\nu(p\cdot q - 2M^{*2}) + 8p\cdot q(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu) - 8q^2 p^\mu p^\nu \\ & + 4g^{\mu\nu}(2q^2M^{*2} - 2(p\cdot q)^2 - (p\cdot q)q^2)\Big). \end{aligned} \tag{6.40}$$

On peut vérifier que cette expression, qui est symétrique, s'annule lorsqu'on la projette sur q_μ ou q_ν. Cette dernière partie se décompose comme les deux autres et comme la totalité du propagateur de polarisation du rho sur les

deux premiers tenseurs. Les contributions sur chaque canal sont données par des K_j définis de façon similaire aux K_j axiaux de l' équation (6.23) :

$$K_{\rho T} = \left(\frac{1+\kappa_\rho^*}{2M^*}\right)^2 q^2 2M^{*2} - p\cdot q - \frac{q^2}{2} - \mathbf{p}_T^2\left(1-\left(\frac{\kappa_\rho^*}{2M^*}\right)^2\right), \tag{6.41}$$

$$K_{\rho R} = 2M^{*2} - \left(\frac{\kappa_\rho^*}{2M^*}\right)^2 q^2(p\cdot q + 2\mathbf{p}_T^2) + 2\mathbf{p}_T^2 - \kappa_\rho^* q^2. \tag{6.42}$$

La constante de couplage tenseur du rho dans le milieu est définie par $\kappa_\rho^* = \kappa_\rho M^*/M$. Ces expressions ont été volontairement mises sous une forme qui fait ressortir leur structure non relativiste, en particulier la contribution en $(1+\kappa_\rho^*)$. L'interaction quand à elle est simplement

$$V_{\rho\mu\nu}(q) = -g_\rho^2 \frac{g_{\mu\nu}}{\omega^2-\Omega_q^2} = -g_\rho^2 \frac{T_{1\mu\nu}+T_{2\mu\nu}+T_{3\mu\nu}}{\omega^2-\Omega_q^2} = V_\rho(T_{1\mu\nu}+T_{2\mu\nu}+T_{3\mu\nu}) \tag{6.43}$$

où $\Omega_q^2 = m_\rho^2 + |\mathbf{q}|^2$. Finalement, l'énergie due exclusivement à l'échange de rho est

$$E_\rho^{corr} = -\frac{3}{2}V\int \frac{id\omega d^3q}{(2\pi)^4}\left(2\ln(1-V_\rho\Pi_{\rho T}) + 2V_\rho\Pi_{\rho T} + \ln(1-V_\rho\Pi_{\rho R}) + V_\rho\Pi_{\rho R}\right), \tag{6.44}$$

formellement analogue à l'énergie dans le canal axial.

6.3.2 Couplage axial-rho

Cependant, certains diagrammes ont été jusqu'ici négligés : en effet, rien n'empêche *a priori* que dans les diagrammes en anneaux, les propagateurs de polarisation soient couplés d'un côté au canal axial et de l'autre au canal du rho. On est ainsi amené à considérer deux nouveaux propagateurs de polarisation :

$$\Pi_{a\rho}^{0\mu\nu}(q) = 2\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{Tr\left((\not p + M^*)\gamma^\mu\gamma^5(\not p + \not q + M^*)\Gamma_\rho^\nu\right)}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + q^\mu \to -q^\mu\right]; \tag{6.45}$$

$$\Pi_{\rho a}^{0\mu\nu}(q) = 2\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{Tr\left((\not p + M^*)\Gamma_\rho^\mu(\not p + \not q + M^*)\gamma_\rho^\nu\gamma^5\right)}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + q^\mu \to -q^\mu\right]. \tag{6.46}$$

L'évaluation des traces montre que ces deux propagateurs sont égaux, et que leur trace est proportionnelle à $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho p_\sigma$. Parmi les six tenseurs $T^{\mu\nu}$, seul le sixième ne donne pas zéro lorsqu'on le contracte avec cette quantité. Les propagateurs croisés se décomposent donc uniquement sur $T_6^{\mu\nu}$, et on note

$$\Pi_{a\rho}^{0\mu\nu}(q) = \Pi_{\rho a}^{0\mu\nu}(q) = \Pi_6^0(q)T_6. \tag{6.47}$$

La structure tensorielle de ce terme est donnée par

$$K_6 = -\frac{1+\kappa_\rho^*}{2M^*}(|\mathbf{q}|2M^*E_p - 2M^*\omega\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{q}}). \tag{6.48}$$

$(1+\kappa_\rho^*)$ est en facteur du terme entier, contrairement au cas du canal transverse du rho où ce facteur n'intervient que dans la limite non relativiste.

On peut remarquer que si on multiplie les polarisations croisées par q_μ (ou q_ν), elles s'annulent. Dans le cas où le canal axial ne contiendrait que des pions, le vertex d'interaction axial contiendrait un facteur q_μ et il n'y aurait pas de couplage entre le canal pionique et celui du rho, ce qui constitue un résultat bien connu. Le couplage ici se fait donc grâce à la partie de contact. Les équations de Dyson se généralisent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Pi_a^{\mu\nu} &= \Pi_a^{0\mu\nu} + \Pi_a^{0\mu\alpha}V_{a\alpha\beta}\Pi_a^{\beta\nu} + \Pi_6^{0\mu\alpha}V_{\rho\alpha\beta}\Pi_{\rho a}^{\beta\nu} \\
\Pi_{\rho a}^{\mu\nu} &= \Pi_6^{0\mu\nu} + \Pi_6^{0\mu\alpha}V_{a\alpha\beta}\Pi_a^{\beta\nu} + \Pi_a^{0\rho\alpha}V_{\rho\alpha\beta}\Pi_{\rho a}^{\beta\nu} \\
\Pi_\rho^{\mu\nu} &= \Pi_\rho^{0\mu\nu} + \Pi_6^{0\mu\alpha}V_{a\alpha\beta}\Pi_{a\rho}^{\beta\nu} + \Pi_\rho^{0\mu\alpha}V_{\rho\alpha\beta}\Pi_\rho^{\beta\nu} \\
\Pi_{a\rho}^{\mu\nu} &= \Pi_6^{0\mu\nu} + \Pi_a^{0\mu\alpha}V_{a\alpha\beta}\Pi_{a\rho}^{\beta\nu} + \Pi_6^{0\mu\alpha}V_{\rho\alpha\beta}\Pi_\rho^{\beta\nu}.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

On projette ces équations sur les six tenseurs $T^{\mu\nu}$possibles. D'après leurs propriétés développées à l'annexe B, le couplage axial-rho ne subsiste pas sur les canaux longitudinal et purement relativiste : les énergies de corrélation correspondantes ne sont pas modifiées par ce couplage. En revanche, le couplage subsiste pour la partie transverse. On projette la première et la troisième équation du système (6.49) sur le tenseur transverse, les deux autres sur $T_6^{\mu\nu}$. Les équations de Dyson se réduisent à

$$\begin{aligned}
\Pi_{aT} &= \Pi_{aT}^0 + \Pi_{aT}^0 V_{aT}\Pi_{aT} + \Pi_6^0 V_\rho \Pi_{\rho a} \\
\Pi_{\rho a} &= \Pi_6^0 + \Pi_6^0 V_{aT}\Pi_{aT} + \Pi_\rho^0 V_\rho \Pi_{\rho a}
\end{aligned}$$

pour les deux premières et deux autres équations similaires pour les dernières. La résolution de ce système conduit pour le canal transverse à des équations semblables à l'équation de Dyson (2.30), soit

$$\begin{aligned}
\Pi_a &= \frac{\Pi_a^0(1-V_\rho\Pi_\rho^0) + \Pi_6^0 V_\rho \Pi_6^0}{(1-V_a\Pi_a^0)(1-V_\rho\Pi_\rho^0) - V_aV_\rho(\Pi_6^0)^2} \\
\Pi_\rho &= \frac{\Pi_\rho^0(1-V_a\Pi_a^0) + \Pi_6^0 V_a \Pi_6^0}{(1-V_a\Pi_a^0)(1-V_\rho\Pi_\rho^0) - V_aV_\rho(\Pi_6^0)^2}.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Ce système d'équations s'intègre néanmoins aisément à l'aide de la charging formula de manière analogue à l'équation (2.34). Les diagrammes d'énergie étant obtenus en refermant ceux de la figure 2.7 (b), seuls $V_a\Pi_a$ et $V_\rho\Pi_\rho$ sont

des quantités qui ont un sens et qui interviennent dans l'énergie :

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\lambda}{\lambda} V\Pi(\lambda) &= \int \frac{d\lambda}{\lambda} V_a\Pi_a(\lambda) + V_\rho\Pi_\rho(\lambda) \\
&= \int \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^2 V_a\Pi_a^0 + \lambda^2 V_\rho\Pi_\rho^0 - 2\lambda^4 V_a\Pi_a^0 V_\rho\Pi_\rho^0 + 2\lambda^4 V_a V_\rho(\Pi_6^0)^2}{(1-\lambda^2 V_a\Pi_a^0)(1-\lambda^2 V_\rho\Pi_\rho^0) - \lambda^4 V_a V_\rho(\Pi_6^0)^2} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left((1-V_a\Pi_a^0)(1-V_\rho\Pi_\rho^0) - V_a V_\rho(\Pi_6^0)^2\right). \qquad (6.51)
\end{aligned}$$

Finalement, l'énergie de corrélation dans le canal transverse est simplement égale à

$$E_T^{corr} = -3V\int \frac{id\omega d^3q}{(2\pi)^4} \left[\ln\left((1-V_{aT}\Pi_{aT}^0)(1-V_\rho\Pi_{\rho T}^0) - V_{aT}V_\rho(\Pi_6^0)^2\right) + V_{aT}\Pi_{aT} + V_\rho\Pi_{\rho T}\right]. \qquad (6.52)$$

Diagrammatiquement, on peut remarquer que les diagrammes mis en jeu dans l'énergie de corrélation sont les plus simples que l'on puisse faire avec les ingrédients que l'on possède. Outre les deux diagrammes de Fock, on peut construire le diagramme de la figure 6.1.

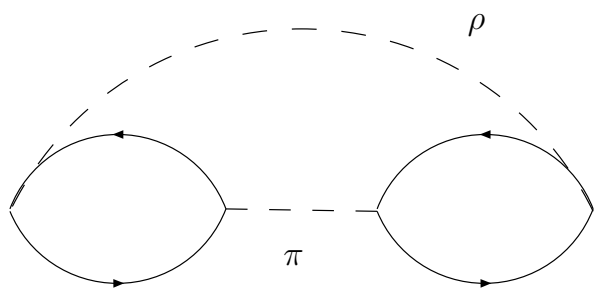

FIG. 6.1*: Diagramme d'énergie dû au couplage axial-rho.*

6.4 Résumé

Les résultats sont dispersés dans les différentes sections précédentes. On résume ici les différentes contributions à l'énergie de corrélation.

Elle est égale à

$$E^{corr} = E_T^{corr} + E_R^{corr} + E_L^{corr} \qquad (6.53)$$

où, par analogie avec les équations (6.52) et (6.32), on déduit

$$\begin{aligned} E_T^{corr} &= -3V \int \frac{id\omega d^3q}{(2\pi)^4} \Big[\ln\big((1 - V_{aT}\Pi^0_{aT})(1 - V_\rho \Pi^0_{\rho T}) - V_{aT}V_\rho(\Pi^0_6)^2\big) \\ &\quad + V_{aT}\Pi^0_{aT} + V_\rho \Pi^0_{\rho T}\Big], \qquad (6.54) \\ E_R^{corr} &= -\frac{3}{2}V \int \frac{id\omega d^3q}{(2\pi)^4} \Big[\ln(1 - V_{aR}\Pi^0_{aR}) + V_{aR}\Pi^0_{aR} \\ &\quad + \ln(1 - V_\rho \Pi^0_{\rho R}) + V_\rho \Pi^0_{\rho R}\Big], \qquad (6.55) \\ E_L^{corr} &= -\frac{3}{2}V \int \frac{id\omega d^3q}{(2\pi)^4} \ln(1 - V_{aL}\Pi^0_{aL}) + V_{aL}\Pi^0_{aL} \qquad (6.56) \end{aligned}$$

Les expressions des interactions $V_{a,\rho}$ sont d'après les équations (6.31) et (6.43)

$$V_{aT} = V_{aR} = -g' v^2(q) \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \qquad (6.57)$$

$$V_{aL} = v^2(q) \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 \left(\frac{q_\mu^2}{\omega^2 - \omega_q^2} - g'\right) \qquad (6.58)$$

$$V_\rho = -v^2(q) \frac{g_\rho^2}{\omega^2 - \Omega_q^2}. \qquad (6.59)$$

On a introduit un facteur de forme $v^2(q)$ qui permet un cut-off en impulsion. On le prend quadratique :

$$v(q) = \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + |\mathbf{q}|^2}\right)^2 \qquad (6.60)$$

avec $\Lambda = 980$ MeV. Ce choix permet de retrouver une valeur convenable pour la partie pionique du terme sigma du nucléon (équation (1.49)) [87, 88, 55].

Les propagateurs de polarisation sont quand à eux donnés par les équations (6.23), (6.26), (6.42) et (6.48). Pour la partie axiale, les trois canaux $j = T, R, L$ sont tels que

$$\Pi^0_{aj} \int \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{N_\mathbf{p}}{E_p} \frac{K_{aj}(q, \mathbf{p})}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + (q^\mu \to -q^\mu) \right] \qquad (6.61)$$

avec

$$\begin{aligned} K_{aT} &= -2M^{*2} - p \cdot q - \mathbf{p}_T^2 \\ K_{aR} &= 2\mathbf{p}_T^2 \\ K_{aL} &= -2M^{*2}. \qquad (6.62) \end{aligned}$$

Pour la partie rho seul, on obtient une structure similaire à celle du cas axial pour les canaux $j = T, R$:

$$\Pi^0_{\rho j} \int \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{N_{\mathbf{p}}}{E_p} \frac{K_{\rho j}(q,\mathbf{p})}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + (q^\mu \to -q^\mu) \right] \tag{6.63}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{\rho T} &= \left(\frac{1+\kappa^*_\rho}{2M^*}\right)^2 q^2 2M^{*2} - p\cdot q - \frac{q^2}{2} - \mathbf{p}_T^2 \left(1 - \left(\frac{\kappa^*_\rho}{2M^*}\right)^2\right) \\ K_{\rho R} &= 2M^{*2} - \left(\frac{\kappa^*_\rho}{2M^*}\right)^2 q^2 (p\cdot q + 2\mathbf{p}_T^2) + 2\mathbf{p}_T^2 - \kappa^*_\rho q^2. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Enfin, le propagateur de polarisation correspondant au couplage axial-rho est tel que

$$\Pi^0_6 \int \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{N_{\mathbf{p}}}{E_p} \frac{K_6(q,\mathbf{p})}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} + (q^\mu \to -q^\mu) \right] \tag{6.65}$$

avec

$$K_6 = -\frac{1+\kappa^*_\rho}{2M^*}(|\mathbf{q}|2M^* E_p - 2M^*\omega \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{q}}). \tag{6.66}$$

6.5 Discussion

6.5.1 Rotation de Wick

Les intégrations sur ω et $\vec{q}$ restant dans les énergies de corrélation ne peuvent être réalisées analytiquement. On les résout numériquement. Cependant, les différentes quantités ci-dessus contiennent des pôles pour $\omega = \pm\omega_q$ et $\omega = \pm\Omega_q$. On utilise l'astuce introduite dans [89]. On place ω dans le plan complexe et on effectue une rotation de Wick comme indiqué sur la figure 6.2. La fraction $1/(\omega^2 - \omega_0^2)$, qui apparaît dans les propagateurs de mésons (avec $\omega_0 = \omega_q$ pour le pion et $\omega_0 = \Omega_q$ pour le rho) mais aussi dans le propagateur de polarisation (avec $\omega_0 = E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - E_p$ à la limite non relativiste), correspond en réalité au propagateur de Feynman :

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\eta} = \frac{1}{2\omega_0}\left(\frac{1}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega + \omega_0 - i\varepsilon}\right). \tag{6.67}$$

Les pôles ne sont donc pas dans le contour d'intégration, et la rotation de Wick correspond simplement au changement de variable $\omega = iz$. L'élément d'intégration est modifié selon

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{id\omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^4} F(\omega,\mathbf{q}) \to -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz d\mathbf{q}}{(2\pi)^4} F(\omega = iz, \mathbf{q}). \tag{6.68}$$

Les propagateurs contenus dans l'intégrant sont donnés en fonction de z à l'annexe C.

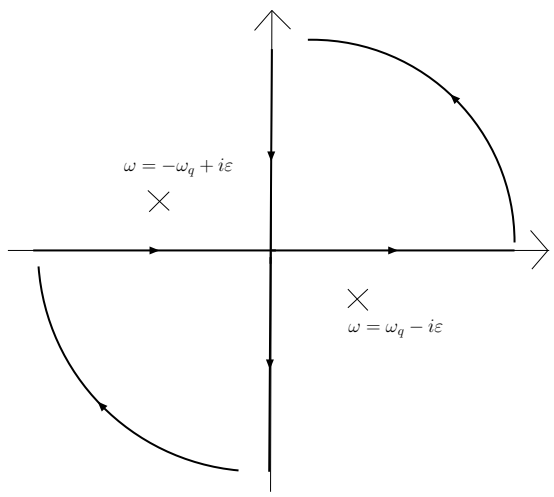

FIG. 6.2: *Rotation de Wick de la variable d'intégration ω. Les commentaires sont donné dans le texte.*

6.5.2 Limite non relativiste

Pour conclure cette étude, il est intéressant de calculer la limite non relativiste afin de comparer les résultats à ceux de travaux similaires réalisés directement dans ce cas [56].

La limite non relativiste est obtenue en faisant trois simplifications par rapport au cas relativiste donné équation (6.19). Tout d'abord, on néglige les antinucléons dans le propagateur de fermion, Ensuite on ne garde que les termes d'ordre dominant en $1/M_N$ dans la structure des vertex issue des spineurs de Dirac et donnée par les traces. Enfin, on opère la simplification cinématique $E_p \simeq M^* + p^2/2M^*$ et on ne garde que le terme d'ordre dominant.

Pour ôter les excitations contenant les antinucléons, on réécrit le dénominateur de l'équation (6.19) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{E_p}\frac{1}{(p+q)^2 - M^{*2} + i\eta} &= \frac{1}{E_p}\frac{1}{q^2 + 2p\cdot q + i\eta} \\ &= \frac{1}{2E_pE_{\mathbf{p+q}}}\left(\frac{1}{\omega - E_{\mathbf{p+q}} + E_p + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\mathbf{p+q}} + E_p - i\eta}\right).\end{aligned} \tag{6.69}$$

Le premier terme correspond à une paire particule-trou se propageant dans le sens du temps et le deuxième terme correspond à une paire nucléon-antinucléon se propageant en arrière. La fraction présente dans le terme

$(q^\mu \to -q^\mu)$ peut être à son tour réécrite :

$$\frac{1}{E_p}\frac{1}{(p-q)^2 - M^{*2} + i\eta} = -\frac{1}{2E_pE_{\mathbf{p-q}}}\left(\frac{1}{\omega + E_{\mathbf{p-q}} - E_p - i\eta} - \frac{1}{\omega - E_{\mathbf{p-q}} - E_p + i\eta}\right). \tag{6.70}$$

Cette fois-ci, le premier terme représente une paire particule-trou se propageant en arrière et le deuxième une paire $\bar{N}N$ se propageant vers l'avant. Dans la limite non relativiste, on ne garde que les termes particule-trou qui peuvent se réécrire

$$\frac{1}{E_pE_{\mathbf{p+q}}}\frac{1}{(\omega - E_{\mathbf{p+q}} + E_p + i\eta)} - \frac{1}{E_pE_{\mathbf{p-q}}}\frac{1}{(\omega + E_{\mathbf{p-q}} - E_p - i\eta)} \tag{6.71}$$

On incorpore le terme imaginaire du propagateur qui avait été négligé équation (6.18). La somme des fractions considérées alors égale à

$$\frac{1}{E_pE_{\mathbf{p+q}}}\left(\frac{1}{\omega - E_{\mathbf{p+q}} + E_p + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\mathbf{p+q}} - E_p - i\eta}\right) \tag{6.72}$$

La structure des vertex quand à elle est donnée par les K_j (équations (6.26), (6.42), (6.48)), ce qui conduit à la limite non relativiste à

$$\begin{aligned} K_{aT} &= K_{aL} = -K_{\rho R} = -2M^{*2} \\ K_6 &= -\frac{1+\kappa^*}{2M^*}|\mathbf{q}|2M^{*2} \\ K_{\rho T} &= \left(\frac{1+\kappa^*}{2M^*}\right)^2 |\mathbf{q}|^2 2M^{*2}. \end{aligned}$$

K_{aR} est négligeable. On a utilisé le fait que $E_p \simeq M^*$. Les termes tenseur du rho et croisé sont d'ordre supérieur en $|\mathbf{q}|/M$. Cependant, étant donné que $\kappa_\rho \sim 5$, on considère qu'ils ne sont pas négligeables. Si on résume les points précédents, on peut écrire les propagateurs non relativistes en fonction de la quantité

$$\Pi^0(\omega, \vec{\mathbf{q}}) = \int \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{p}} P_{\mathbf{p-q}} \left(\frac{1}{\omega - E_{\mathbf{p+q}} + E_p + i\eta} - \frac{1}{\omega + E_{\mathbf{p+q}} - E_p - i\eta}\right) \tag{6.73}$$

qui n'est autre que le propagateur non relativiste. $P_{\mathbf{p}}$ correspond aux états non occupés, il est défini par $P_{\mathbf{p}} \equiv 1 - N_{\mathbf{p}}$, soit ici dans le cas de la température nulle $P_{\mathbf{p-q}} = \theta(|\mathbf{p}-\mathbf{q}| - p_F)$. On obtient

$$\begin{aligned} -\Pi^0_{aT} &= -\Pi^0_{aL} = \Pi^0_{\rho R} = \Pi^0 \\ \Pi^0_6 &= -\frac{1+\kappa^*_\rho}{2M^*}|\mathbf{q}|\Pi^0 \\ \Pi^0_{\rho T} &= \left(\frac{1+\kappa^*_\rho}{2M^*}\right)^2 |\mathbf{q}|^2 \Pi^0. \end{aligned}$$

Les équations de Dyson donnent alors simplement

$$(V_{aT}\Pi_{aT} + V_\rho \Pi_{\rho T})^{NR} = \frac{V_T^{NR}\Pi^0}{1 - V_T^{NR}\Pi^0} \tag{6.74}$$

$$(V_{aR}\Pi_{aR} + V_\rho \Pi_{\rho R})^{NR} = \frac{V_\rho \Pi^0}{1 - V_\rho \Pi^0} \tag{6.75}$$

$$(V_{aL}\Pi_{aL})^{NR} = \frac{V_L^{NR}\Pi^0}{1 - V_L^{NR}\Pi^0} \tag{6.76}$$

avec les propagateurs de mésons non relativistes

$$V_T^{NR} = (V_{aT} + C_\rho |\mathbf{q}|^2 V_\rho)^{NR} = \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 (g' + C_\rho |\mathbf{q}^2| D_\rho) \tag{6.77}$$

$$V_L^{NR} = \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2 (g' + |\mathbf{q}|^2 D_\pi) \tag{6.78}$$

où

$$C_\rho = \left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^{-2} g_\rho^2 \left(\frac{1+\kappa_\rho^*}{2M^*}\right)^2 . \tag{6.79}$$

Finalement, l'énergie de corrélation est dans cette limite similaire à l'énergie de corrélation obtenue par un calcul non relativiste [56]. Les équations (6.74) et (6.76) correspondent respectivement aux canaux transverse et longitudinal de spin-isospin. Le terme (6.75) n'a rien à voir avec le spin-isospin. C'est un effet qui provient de la composante temporelle de la partie vecteur de l'interaction. Sa contribution est cependant faible :$-0,64$ MeV à densité normale. Étant donné que ce dernier canal contribue surtout dans cas relativiste, on indice les quantités qui en dépendent par R et on l'appelle canal « purement relativiste » par abus de langage.

Cette étude permet de faire une petite remarque. Étant donné que dans la limite non relativiste les densités scalaire et vecteur (ou baryonique) sont égales, les propagateurs particule-trou pour les mésons sigma, oméga et rho sont égaux à Π^0. L'interaction à prendre en compte si on veut réaliser la RPA pour le canal $\sigma + \omega$ est

$$V_{\sigma+\omega} = \frac{g_S^{*2}}{q^2 - m_\sigma^{*2}} - \frac{g_\omega^2}{q^2 - m_\omega^2}. \tag{6.80}$$

Compte tenu du fait que les masses des mésons sigma et oméga sont voisines (environ 800 MeV) et que le terme dominant dans l'énergie de corrélation est dû à l'échange de ces deux mésons, on peut estimer l'énergie de corrélation du canal $\sigma + \omega$ à la limite non relativiste comme étant

$$E_{\sigma+\omega}^{corr} \sim \frac{1}{3}\left(\frac{g_S^{*2} - g_\omega^2}{g_\rho^2}\right)^2 E_{\rho R}^{corr} \tag{6.81}$$

g'	0,7	0,5
g_ω	7,6	7,3
C	1,14	1,3
ρ/ρ_0	1,00	1,00
E/A (MeV)	-15,95	-15,87
K (MeV)	250	270

TAB. 6.1: *Valeurs des paramètres et coordonnées du point de saturation lorsque les interactions de contact et du rho sont incluses.*

où $E_{\rho R}^{corr}$ est obtenu en prenant la limite non relativiste de la deuxième ligne de l'équation (6.55). Le facteur 1/3 est un simple facteur d'isospin. Avec les valeurs $g_\omega = 7,6$ et $g_S^* = 6,1$ (voir plus haut), on obtient $E_{\sigma+\omega}^{corr} \sim -0,8$ MeV qui est négligeable. Ceci justifie *a posteriori* qu'on se limite à l'approximation de champ moyen pour les échanges de sigma et de oméga.

6.6 Résultats

6.6.1 Point de saturation de la matière nucléaire

Comme il a déjà été dit plus haut à l'occasion des résultats de la partie champ moyen, l'idée de ce travail est d'étudier la matière nucléaire en fixant les paramètres à l'aide de la phénoménologie hadronique et des résultats sur réseau. L'ajustement fin permettant de reproduire les propriétés de saturation de la matière nucléaire autorise la constante de couplage du oméga à varier autour de $g_\omega \simeq 3g_\rho \simeq 8$ et le paramètre de la réponse nucléonique à varier autour de $C \simeq 1,25$. Le paramètre de Landau–Migdal qui provient des forces de contact n'est pas totalement fixé, on choisit d'étudier les résultats en fonction de sa valeur, en particulier on se place à la valeur $g' = 0,7$, compatible avec les données les plus récentes [71]. Les résultats sont consignés dans le tableau 6.1. Rappelons que le champ moyen est réalisé ici dans l'approximation de Hartree avec contact. Le tableau auquel comparer les résultats est donc le tableau 5.2, et en particulier la dernière colonne. Les valeurs des paramètres g_ω et C se sont rapprochées des valeurs données respectivement par le modèle VDM et par les simulations sur réseaux. En particulier, C a fortement diminué. La compressibilité quant à elle est maintenant à la valeur attendue autour de $240 - 250$ MeV. Ces résultats peuvent être compris à la lumière de la figure 6.3. La courbe en tireté représente l'énergie de corrélation. Cette courbe n'est pas linéaire avec la densité, ce qui aide à réaliser la saturation. Il n'y a alors plus besoin d'une réponse scalaire aussi grande, ce qui permet de diminuer le paramètre de réponse nucléonique C. Ceci permet de réduire la compressibilité. La figure 6.4 est identique à la figure 6.3 avec $g' = 0,5$. Globalement, l'énergie de corrélation

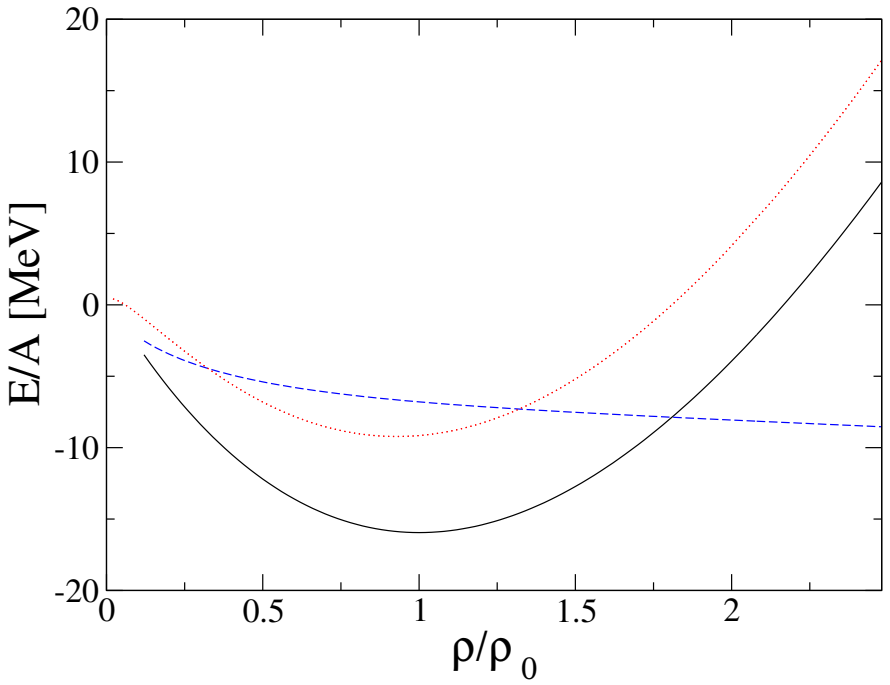

FIG. 6.3: *Énergie de liaison (trait plein) en fonction de la densité incluant l'énergie de corrélation. Celle-ci est représentée en tiretés et la contribution du champ moyen est en pointillés. Cette saturation a été ajustée pour $g' = 0,7$ et correspond à la première colonne du tableau 6.1.*

est plus petite que dans le cas $g' = 0,7$. De ce fait, le paramètre de réponse nucléonique C et la compressibilité K sont moins diminués.

6.6.2 Effets du contact

Il est également intéressant d'étudier les variations en fonction de g' des différentes contributions à l'énergie de corrélation. Les résultats sont résumés sur le tableau 6.2. Les trois premières lignes du tableau concernent le cas axial sans rho. Sans les termes de contact, seul le canal longitudinal contribue à l'énergie de corrélation puisque le pion est purement longitudinal. Lorsque le contact augmente, il écrante la contribution des pions et l'énergie de corrélation longitudinale tend à s'annuler. Au contraire, c'est le canal transverse qui contribue. La partie purement relativiste reste négligeable comme mentionné dans la partie sur la limite non relativiste. Dans le cas des perturbations chirales [76], il n'y a pas d'effet des corrélations à courte portée. L'écrantage n'ayant pas lieu, la contribution des boucles de pions est de -68 MeV, soit presque un ordre de grandeur entre les deux approches.

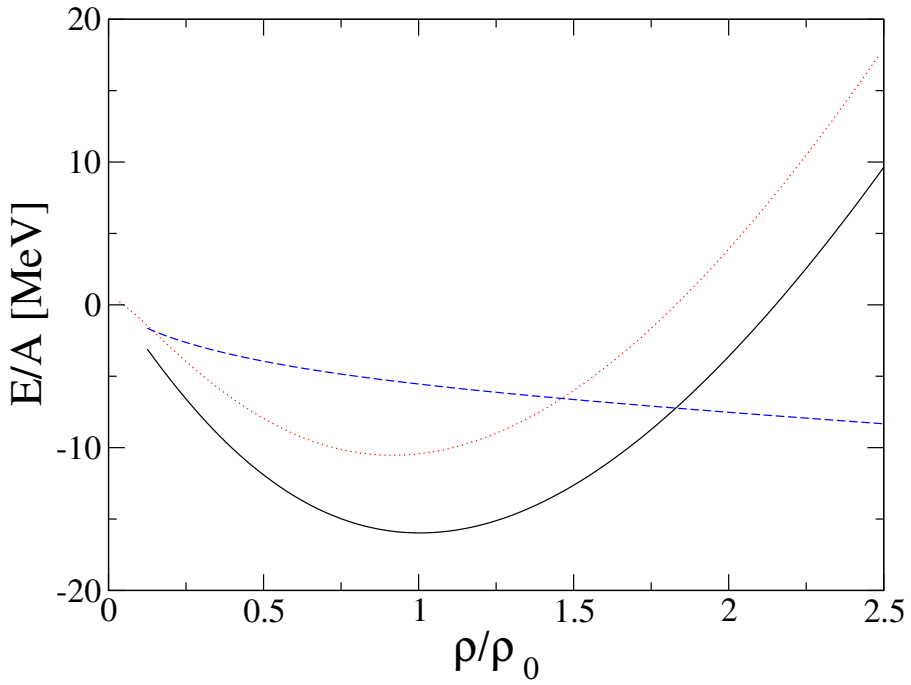

FIG. 6.4: *Énergie de liaison (trait plein) en fonction de la densité incluant l'énergie de corrélation. Celle-ci est représentée en tiretés et la contribution du champ moyen est en pointillés. Cette saturation a été ajustée pour $g' = 0,5$ et correspond à la seconde colonne du tableau 6.1.*

Les deux lignes suivantes concernent le rho sans le canal axial. La partie purement relativiste, correction à l'énergie de corrélation du rho, vaut $E_{\rho R} = -0,65$ MeV. Enfin, la dernière ligne donne la contribution au canal transverse lorsqu'on prend en compte les interactions axiale et du rho. L'effet du couplage axial/rho est de diminuer l'énergie transverse qui serait trop grande si on prenait la somme de l'axial transverse et du rho transverse. On remarque qu'elle présente un minimum vers $g' \simeq 0,2$ à $0,3$, à ce moment il y a la compensation la plus importante entre l'échange de rho attractif et le contact.

On peut aussi étudier la variation des différentes contributions avec la densité. C'est l'objet de la figure 6.5. Comme pour le tableau 6.2, seule l'énergie longitudinale diminue lorsque g' augmente. Pour g' petit, il n'est plus possible de calculer la partie longitudinale de l'énergie de corrélation. En effet, lorsque g' diminue ou que la densité augmente, $V_L \Pi_L$ augmente dans le canal longitudinal. À énergie nulle, un pôle apparaît alors dans le canal pionique pour une impulsion critique q_c telle que $(1 - V_{aL}\Pi^0_{aL})(\omega = 0, q_c) = 0$. On se trouve dans le cas de la condensation des pions [90]. Ce phénomène

g'	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Axial Transverse	0	-0,3	-1,0	-2,3	-4,0	-6,0	-8,5	-11,2
Axial Relativiste	0	-0,00	- 0,00	-0,01	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04
Axial Longitudinal	×	-12,5	-8,8	-6,0	-4,0	-2,4	-1,3	-0,6
Rho Transverse				-2,64				
Rho Relativiste				-0,65				
Axial/Rho Transverse	-2,6	-1,5	-0,9	-0,9	-1,4	-2,4	-3,7	-5,5

TAB. 6.2: *Variations des contributions à l'énergie de corrélation en fonction de g'.*

est illustré figure 6.5. Pour $g' = 0,7$, il intervient à haute densité et ne nous concerne pas. En revanche, pour $g' = 0,15$, le phénomène intervient à des densités supérieures ou égales à $1,9$. Pour $g' = 0.036$, la condensation des pions intervient à la densité ordinaire. Lorsque $V_L \Pi_L \to 1^-$, l'énergie de corrélation diverge comme on le voit sur la figure 6.5 pour $g' = 0,15$. Ceci rappelle un phénomène d'opalescence critique [91]. On peut remarquer que le calcul relativiste est moins favorable à la condensation des pions que le calcul non relativiste. Par exemple, pour $g' = 0,3$, la condensation apparaît à la densité critique $\rho = 2,2\rho_0$ pour le cas non relativiste tandis qu'elle a lieu à des densités supérieures à $3\rho_0$ pour le cas relativiste.

6.6.3 Influence du facteur de forme

Enfin, il faut remarquer que ces résultats dépendent *a priori* du cut-off choisi. Celui-ci a été introduit équation (6.60). Dans les résultats présentés jusqu'ici, le cut-off était le même pour la partie axiale et pour la partie en rho. Si on fixe un nouveau cut-off pour le rho, par exemple $\Lambda_\rho = 1500$ MeV, les différentes composantes de l'énergie de corrélation évoluent comme présenté dans le tableau 6.3. La troisième colonne correspond à un nouveau point de saturation avec $\Lambda_\rho = 1500$ MeV. Les propriétés du point de saturation sont peu modifiées par le changement de cut-off du rho. En revanche, elles le seraient considérablement si on modifiait le cut-off axial.

6.6.4 Contribution du baryon $\Delta(1232)$

Dans l'étude non relativiste [56], il a été montré que la contribution du nucléon excité $\Delta(1232)$ est importante. Cependant, cette contribution est quasiment linéaire avec la densité, ce qui est indistinguable phénoménologiquement d'un échange de oméga. En pratique, les contributions Δ-trou peuvent être simulées par une légère augmentation/diminution de g_ω.

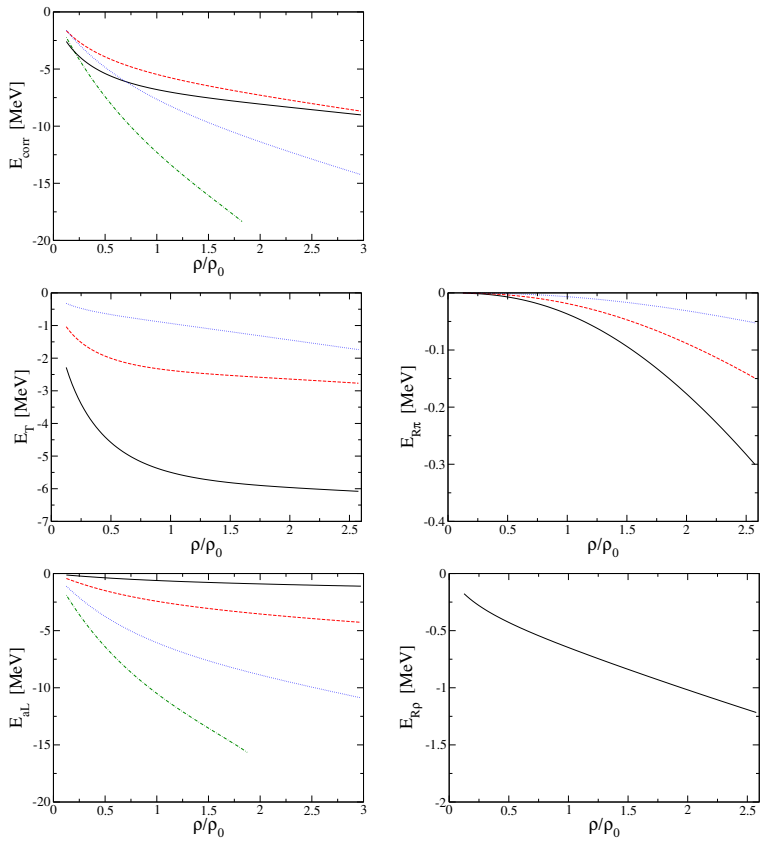

FIG. 6.5: *Évolution des différentes contribution à l'énergie de corrélation avec g'. La courbe en trait plein correspond à $g' = 0,7$, celle en tiretés à $g' = 0,5$ et celle en pointillés à $g' = 0,3$. La courbe en tiretés-pointillés correspond au cas $g' = 0,15$ discuté dans le texte.*

Λ_ρ [MeV]	980	1500	1500
g_ω	7,6	7,6	7,8
C	1,14	1,14	1,15
K [MeV]	250		250
E_{corr} [MeV]	-6,8	-9,4	-9,4
E_T [MeV]	-5,5	-7,1	-7,1
$E_{R\rho}$ [MeV]	-0,6	-1,6	-1,6

TAB. 6.3: *Évolution de l'énergie de corrélation en fonction du cut-off du rho. La dernière colonne correspond à un nouveau point de saturation tenant compte du nouveau cut-off. La tableau est calculé pour $g' = 0,7$.*

Conclusion

Ces recherches peuvent naturellement être continuées dans plusieurs directions.

Tout d'abord, il manque à cet exposé une évaluation du condensat de quarks qui permettrait d'estimer le degré de restauration de la symétrie chirale dans notre modèle. Pour cela, il faut dériver l'équation d'état par rapport à la masse m des quarks. On écrit d'abord la densité de grand potentiel $\omega(\mu) = \varepsilon - \mu\rho$. Plutôt que de dériver par rapport à la masse des quarks, on dérive par rapport au paramètre $c = f_\pi m_\pi^2$ relié à m par la relation GOR : $\partial c/\partial m = -2 < \bar{q}q >_{vac} / f_\pi$. Ce calcul, simple mais pas immédiat, a été réalisé dans le cas non relativiste [56]. Il faudrait donc le reprendre ici à partir de l'énergie relativiste en incluant les termes de Fock et de corrélation.

Il n'y aurait pas de physique nucléaire sans noyaux finis. Ce sont évidement les grand absents de ce travail. Le problème, comme on a pu s'en rendre compte, est que les calculs relativistes sont très lourds. Développer un programme optimisé pour le calcul des noyaux finis dans une approche relativiste constitue un travail de thèse en soi et il a été décidé de le laisser de côté provisoirement. Cependant, ce programme est actuellement développé de manière générale (Hartree–Fock–Bogoliubov relativiste avec couplages dépendant de la densité et en symétrie axiale pour les noyaux sphériques, déformés et proches des lignes d'instabilité proton et neutron) par Jean-Paul Ebran à l'IPN d'Orsay et il serait intéressant de pouvoir l'utiliser dans le cadre de notre étude. Cependant, les méthodes de champ moyen relativistes peuvent conduire à des fonctionnelles de la densité au même titre que celle de Skyrme ; cette approche serait à explorer.

L'équation d'état des étoiles à neutrons peut être utilisée telle quelle pour prédire des masses et des rayons d'étoiles à neutrons. Cependant, comme il a été dit dans le premier chapitre, il serait également intéressant d'étudier l'influence d'autres phénomènes sur les prédictions. En particulier, l'inclusion de saveurs étranges peut se faire naturellement dans notre modèle en remplaçant la somme sur les protons et les neutrons par une somme sur les membres de l'octet de $SU_f(3)$, N, Λ, Σ et Ξ. Ce travail a été fait dans le cadre du modèle du couplage quarks-mésons [28]. Il faudrait aussi regarder l'influence d'une phase déconfinée dans la matière très dense au centre des

étoiles à neutrons. Les théories type modèle de Walecka ne comportant pas de quarks, ce travail pourrait être fait à partir d'un modèle de quarks type NJL ou PNJL (NJL avec boucles de Polyakov).

Annexe A

Détails du calcul de l'énergie à l'approximation de Hartree–Fock

Cette annexe détaille les calculs permettant d'obtenir l'énergie de saturation de la matière nucléaire à l'approximation de Hartree-Fock. Par simplicité, on se limite à des interactions de Yukawa pour les mésons comme dans [2]. Le champ scalaire chiral, quand à lui, est largement traité dans le corps du texte, on renvoie donc le lecteur au chapitre 5.

1.1 Lagrangien d'interaction

Pour trouver le hamiltonien, il faut commencer par réécrire le lagrangien. On va transformer chaque partie du lagrangien correspondant à un méson déterminé, en commençant par exemple par le σ.

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi. \tag{1.1}$$

L'équation d'Euler–Lagrange est la même que celle donnée dans le texte (3.8) :

$$\left(-\Box + m_s^2\right)\sigma = -g_\sigma\bar{\psi}\psi. \tag{1.2}$$

Elle permet de réécrire le lagrangien en fonction uniquement du terme d'interaction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\sigma &= \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi \\
&= -\frac{1}{2}\sigma\partial_\mu\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi \\
&= -\frac{1}{2}\sigma\left(\Box + m_\sigma^2\right)\sigma - g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi \\
&= \frac{1}{2}g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi - g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi \\
&= -\frac{1}{2}g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Dans la deuxième ligne, on a utilisé le fait que implicitement, le lagrangien (et non la densité lagrangienne) est intégré sur l'espace et on a fait une intégration par parties. Pour le méson ω, l'équation d'Euler–Lagrange s'écrit :

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m_\omega^2\omega_\nu = g_\omega\bar{\psi}\gamma_\nu\psi. \qquad (1.4)$$

On suppose que le courant de nucléons est conservé, c'est-à-dire :

$$\partial^\mu\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\right) = 0. \qquad (1.5)$$

Le terme de dérivée devient donc :

$$\partial^\nu\partial^\mu F_{\mu\nu} + m_\omega^2\partial^\nu\omega_\nu = \partial^\nu\left(g_\omega\bar{\psi}\gamma_\nu\psi\right) = 0, \qquad (1.6)$$

ce qui donne $\partial^\nu\omega_\nu = 0$. Sachant que $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique, l'équation d'Euler–Lagrange statique devient :

$$\left(\Box + m_\omega^2\right)\omega_\nu = g_\omega\bar{\psi}\gamma_\nu\psi. \qquad (1.7)$$

On peut alors refaire le même raisonnement (équation (1.3)) que pour le σ et mettre le lagrangien du ω sous la forme :

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{2}g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\omega^\mu\psi. \qquad (1.8)$$

Le méson $\vec{\delta}$, isovecteur, peut être traité simplement : l'équation d'Euler–Lagrange ressemble à celle du σ :

$$(\Box + m_\delta^2)\vec{\delta} = -g_\delta\bar{\psi}\vec{\tau}\psi \qquad (1.9)$$

et le lagrangien associé se réduit à :

$$\mathcal{L}_\delta = -\frac{1}{2}g_\delta\bar{\psi}\vec{\delta}\cdot\vec{\tau}\psi. \qquad (1.10)$$

Le pion et le rho sont plus compliqués à traiter dans la mesure où ils contiennent deux termes d'interaction et où ceux-ci vont éventuellement interférer. Pour le pion, bien qu'il faille *in fine* ne garder qu'un des deux termes d'interaction, on conserve pour l'instant dans le lagrangien les termes pseudo-scalaire et pseudo-vecteur. Le lagrangien du rho quand à lui contient bien les termes vecteur et tenseur :

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}\partial^\mu\pi_a\partial_\mu\pi_a - \frac{1}{2}m_\pi^2\pi_a^2 - ig_\pi\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\psi - \frac{g_A}{2f_\pi}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}\psi \quad (1.11)$$

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_a^2 - g_\rho\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{\tau}\psi - \frac{\kappa_\rho}{2M_N}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\vec{\rho}_\mu\cdot\tau\psi\right) \quad (1.12)$$

Les équations d'Euler–Lagrange sont obtenues de manière comparable à celles des autres mésons, en particulier pour le rho on suppose comme pour le oméga que le courant mésonique est conservé :

$$(\Box + m_\pi^2)\vec{\pi} = -g_\pi\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi + \frac{g_A}{2f_\pi}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi. \quad (1.13)$$

$$(\Box + m_\rho^2)\vec{\rho}^\mu = g_\rho\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi + \frac{\kappa_\rho}{2M_N}\partial_\nu\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\vec{\tau}\psi\right). \quad (1.14)$$

Comme pour les autres mésons, les lagrangiens cinétiques sont égaux à la moitié des lagrangiens d'interaction.

1.2 Expression du hamiltonien

Le hamiltonien est ensuite écrit comme la transformée de Legendre du lagrangien. Ces calculs ont déjà été faits dans le chapitre 5. On les refait ici de manière un peu différente. Dans l'approximation statique, les dérivées temporelles de champs de mésons sont nulles et le hamiltonien se simplifie selon :

$$H = \int_{t=0} d\mathbf{x}\left(\Sigma_i\pi_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} - \mathcal{L}\right) \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} = \int_{t=0} d\mathbf{x}\Big(& i\bar{\psi}\gamma^0\partial_t\psi - \bar{\psi}\left(i\gamma_\mu\partial^\mu - M\right)\psi \\ & + \frac{1}{2}g_\sigma\bar{\psi}\sigma\psi + \frac{1}{2}g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\omega^\mu\psi + \frac{1}{2}g_\delta\bar{\psi}\vec{\delta}\cdot\vec{\tau}\psi \\ & + \frac{i}{2}g_\pi\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\psi + \frac{1}{2}\frac{g_A}{2f_\pi}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\vec{\pi}\cdot\vec{\tau}\psi \\ & + \frac{1}{2}g_\rho\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\rho}_\mu\cdot\vec{\tau}\psi - \frac{\kappa_\rho}{2M_N}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu\vec{\rho}_\mu\cdot\tau\psi\right)\Big) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Afin d'écrire le hamiltonien en fonction des champs de nucléons qui sont les degrés de liberté du système, on écrit les champs de mésons en fonction de

ceux des nucléons. Les équations d'Euler–Lagrange permettent de trouver les champs de mésons de la forme présentée équations (3.11) et (3.12) avec les propagateurs de la forme à droite de l'équation (3.14). Pour la partie cinétique et les trois mésons sigma, oméga et delta, on trouve simplement :

$$
\begin{aligned}
H &= \int_{t=0} d\mathbf{x} \left(i\bar{\psi}\gamma^0\partial_t\psi - \bar{\psi}\left(i\gamma^0\partial_t - i\gamma^i\cdot\partial_i - M\right)\psi\right) \\
&\quad + \int_{t=0} d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2}g_\sigma\bar{\psi}(\vec{x})\sigma(\vec{x})\psi(\vec{x}) + \frac{1}{2}g_\omega\bar{\psi}(\vec{x})\gamma_\mu\omega^\mu(\vec{x})\psi(\vec{x}) + \frac{1}{2}g_\delta\bar{\psi}(\vec{x})\vec{\delta}(\vec{x})\cdot\tau\psi(\vec{x})\right) \\
&= \int_{t=0} d\mathbf{x} \left(\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + M)\psi\right) \\
&\quad - \frac{g_\sigma^2}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{\psi}(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}')D_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) \\
&\quad + \frac{g_\omega^2}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{\psi}(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}')D_\omega\gamma_\mu(1)\gamma^\mu(2)(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) \\
&\quad - \frac{g_\delta^2}{2}\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{\psi}(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}')D_\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\vec{\tau}(1)\cdot\vec{\tau}(2)\psi(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}),
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

ce qui correspond bien à l'équation (3.15). Comme expliqué à cet endroit, les indices (1) et (2) font référence à la contraction entre les fermions dépendant de x ou de x'. Pour les mésons pion et rho, la situation est plus complexe. D'une part, la présence des dérivées doit être traitée avec précaution, d'autre part les expressions des mésons dépendent de deux termes à chaque fois, un pseudo-scalaire et un pseudo-vecteur pour le pion, un vecteur et un tenseur pour le rho. Lorsqu'on injecte l'équation dans le hamiltonien, il apparaît des termes croisés entre les deux types d'interaction pour chacun des mésons. On commence par réécrire l'équation donnant le pion en fonction des champs de fermions :

$$
\begin{aligned}
\pi(x) &= \int d^4x' D_\pi(x-x')\left(-g_\pi\bar{\psi}(x')\gamma^5\tau\psi(x') + \frac{g_A}{2f_\pi}\partial'_\mu\bar{\psi}(x')\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi(x)\right) \\
&= \int d^4x' \left(-g_\pi\bar{\psi}(x')D_\pi(x-x')\gamma^5\tau\psi(x') - \frac{g_A}{2f_\pi}\bar{\psi}(x')\partial'_\mu D_\pi(x-x')\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi(x)\right) \\
&= \int d^4x' \left(-g_\pi\bar{\psi}(x')D_\pi(x-x')\gamma^5\tau\psi(x') + \frac{g_A}{2f_\pi}\bar{\psi}(x')\partial_\mu D_\pi(x-x')\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau}\psi(x')\right)
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

où l'on a fait une intégration par parties dans la deuxième ligne et remarqué que $\partial' D(x-x') = -\partial D(x-x')$. Ainsi pour le pion, le hamiltonien devient :

$$\begin{aligned}
H_\pi &= \frac{1}{2}\int_{t=0} d\mathbf{x}\left(g_\pi \bar{\psi}(\vec{x})\gamma^5\vec{\pi}(\vec{x})\cdot\vec{\tau}\psi(\vec{x}) - \frac{g_A}{2f_\pi}\vec{\pi}(\vec{x})\partial_\mu\bar{\psi}(\vec{x})\gamma^5\vec{\tau}\psi(\vec{x})\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_{t=0} d\mathbf{x}\left(g_\pi \bar{\psi}(\vec{x})\gamma^5\vec{\pi}(\vec{x})\cdot\vec{\tau}\psi(\vec{x}) + \frac{g_A}{2f_\pi}\partial_\mu\vec{\pi}(\vec{x})\bar{\psi}(\vec{x})\gamma^5\vec{\tau}\psi(\vec{x})\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_{t=0} d\mathbf{x}\int_{t=0} d\mathbf{x}'\Big(- g_\pi^2\bar{\psi}(\vec{x})\bar{\psi}(x')D_\pi(x-x')(\gamma^5\vec{\tau})(1)(\gamma^5\vec{\tau})(2)\psi(x')\psi(\vec{x})\\
&\quad +g_\pi\frac{g_A}{2f_\pi}\bar{\psi}(\vec{x})\bar{\psi}(x')\partial_\mu D_\pi(x-x')(\gamma^5\vec{\tau})(1)(\gamma^5\gamma^\mu\vec{\tau})(2)\psi(x')\psi(\vec{x})\\
&\quad -g_\pi\frac{g_A}{2f_\pi}\partial_\mu D_\pi(x-x')\bar{\psi}(x')\gamma^5\tau\psi(x')\bar{\psi}(\vec{x})\gamma^5\vec{\tau}\psi(\vec{x})\\
&\quad -\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2\partial_\mu\partial^\mu D_\pi(x-x')\bar{\psi}(x')\gamma^5\tau\psi(x')\bar{\psi}(\vec{x})\gamma^5\vec{\tau}\psi(\vec{x})\Big)\\
&= \frac{1}{2}\int_{t=0} d\mathbf{x}\int_{t=0} d\mathbf{x}'\Big(- g_\pi^2\bar{\psi}(\vec{x})\bar{\psi}(x')D_\pi(x-x')\gamma^5\vec{\tau}\psi(x')\gamma^5\vec{\tau}\psi(\vec{x})\\
&\quad -\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2\partial_\mu\partial^\mu D_\pi(x-x')\bar{\psi}(x')\gamma^5\tau\psi(x')\bar{\psi}(\vec{x})\gamma^5\vec{\tau}\psi(\vec{x})\Big).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Ici encore, dans la deuxième ligne, on a effectué une intégration par parties. Les termes croisés du pion disparaissent.

Pour le rho, on peut reprendre la même méthodologie, en écrivant le champ de rho en fonction des champs de mésons :

$$\vec{\rho}(x)^\mu = g_\rho\int d^4x'\left(D_\rho(x-x')\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi + \frac{\kappa_\rho}{2M_N}\partial_\nu D_\rho(x-x')\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\vec{\tau}\psi\right). \tag{1.20}$$

Cette fois-ci, en revanche, les termes croisés ne disparaissent pas :

$$\begin{aligned}
H_\rho &= \frac{g_\rho^2}{2}\int_{t=0} d\mathbf{x}\int_{t=0} d\mathbf{x}'\Big(\bar{\psi}(\vec{x})\bar{\psi}(x')D_\rho(x-x')(\gamma^\mu\vec{\tau})(1)(\gamma_\mu\vec{\tau})(2)\psi(x')\psi(\vec{x})\\
&\quad +\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\bar{\psi}(\vec{x})\bar{\psi}(x')\partial_\alpha D_\rho(x-x')(\gamma^\mu\vec{\tau})(1)(\sigma^{\mu\alpha}\vec{\tau})(2)\psi(x')\psi(\vec{x})\\
&\quad +\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\bar{\psi}(\vec{x})\bar{\psi}(x')\partial_\alpha D_\rho(x-x')(\sigma^{\mu\alpha}\vec{\tau})(1)(\gamma^\mu\vec{\tau})(2)\psi(x')\psi(\vec{x})\\
&\quad +\left(\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\right)^2\bar{\psi}(\vec{x})\bar{\psi}(x')\partial_\alpha\partial_\beta D_\rho(x-x')(\sigma^{\mu\alpha}\vec{\tau})(1)(\sigma^{\mu\beta}\vec{\tau})(2)\psi(x')\psi(\vec{x})\Big).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

1.3 Densité d'énergie

Afin de calculer la densité d'énergie ε, on utilise les équations (2.11), (2.12) et (3.17) à (3.22). Par soucis de simplicité, il a été décidé ici de passer

directement en représentation d'impulsion. On retrouvera donc les résultats présentés dans le chapitre sur le modèle de Walecka qui sont aussi ceux qu'on utilise numériquement.

1.3.1 Énergie cinétique

On commence par le terme d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{cin} &= \frac{\langle\varphi_0|\int_{t=0} d\mathbf{x}\left(\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+\mathbf{M})\psi\right)|\varphi_0\rangle}{V} \\
&= \frac{1}{V^2}\sum_{\substack{\mathbf{p}_1,\alpha_1\\ \mathbf{p}_2,\alpha_2}}\int d\mathbf{x}\bar{u}_{\alpha_2}(\mathbf{p}_2)e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}}\left(\gamma\cdot\mathbf{p_1}+\mathbf{M}\right)e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}}u_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1) \\
&\quad \prod_{\substack{\mathbf{p}_3\in F,\alpha_3\\ \mathbf{p}_4\in F,\alpha_4}}\langle 0|b_{\mathbf{p}_4,\alpha_4}b^+_{\mathbf{p}_2,\alpha_2}b_{\mathbf{p}_1,\alpha_1}b^+_{\mathbf{p}_3,\alpha_3}|0\rangle.
\end{aligned}$$

L'intégrale sur $d\mathbf{x}$ donne comme en (3.18) un facteur $V\delta_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}$ en notations discrètes. La contraction sur le vide des opérateurs de création et d'annihilation donne un facteur $\delta_{\alpha_1,\alpha_2}$ si $p_1 < p_F$ et 0 sinon. Le terme d'énergie cinétique est donc finalement :

$$\varepsilon^{cin} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}_1\in p_F,\alpha_1}\bar{u}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\left(\gamma\cdot\mathbf{p_1}+\mathbf{M}\right)u_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1) \tag{1.22}$$

$$= \int\frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(p\frac{P^*(p)}{E^*(p)}+M\frac{M^*(p)}{E^*(p)}\right). \tag{1.23}$$

Ce terme correspond bien au terme d'énergie cinétique dans l'équation (3.23). On a utilisé pour la dernière égalité les résultats suivants :

$$\frac{1}{2}\sum_{spin}\bar{u}(\mathbf{p})\gamma\mathbf{u}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{P}^*}{E^*}(\mathbf{p}) \tag{1.24}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{spin}\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) = \frac{M^*}{E^*}(p) \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}\in F,\alpha} = \int_0^{p_F}\frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{spin} \tag{1.26}$$

avec le facteur $4 = 2\times 2$ pour le spin et l'isospin.

1.3.2 Énergie de Hartree

Le terme potentiel de la densité d'énergie quant à lui s'écrit, avec les mêmes remplacements que plus haut :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{pot} &= \frac{1}{2}\frac{\langle\Phi_0|\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\bar{\psi}(\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{x}')D_X(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\Gamma_X(1)\Gamma_X(2)\psi(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x})|\Phi_0\rangle}{V} \\
&= \frac{1}{2V^4}\sum_{\substack{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_4,\mathbf{q}\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}} \bar{u}_{\alpha_4}(\mathbf{p}_4)\bar{u}_{\alpha_3}(\mathbf{p}_3)e^{-i\mathbf{p}_4\cdot\mathbf{x}}e^{-i\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{x}'}e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
&\qquad \frac{1}{\mathbf{q}^2+m_X^2}\Gamma_X(1)\Gamma_X(2)e^{i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}'}e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}} \\
&\qquad \prod_{\substack{\mathbf{p}_5\in F,\alpha_5\\ \mathbf{p}_6\in F,\alpha_6}} \langle 0|b_{\mathbf{p}_6,\alpha_4}b^+_{\mathbf{p}_4,\alpha_4}b^+_{\mathbf{p}_3,\alpha_3}b_{\mathbf{p}_2,\alpha_2}b_{\mathbf{p}_1,\alpha_1}b^+_{\mathbf{p}_5,\alpha_5}|0\rangle
\end{aligned}$$

L'intégration sur x donne un facteur $V\delta_{\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1-\mathbf{q}}$ et l'intégration sur x' donne un facteur $V\delta_{\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2+\mathbf{q}}$. La contraction sur le vide des opérateurs de création et d'annihilation impose $\mathbf{p}_1 < p_F$ et $\mathbf{p}_2 < p_F$ ainsi que le facteur :

$$\begin{aligned}
&\delta_{(\mathbf{p}_1+\mathbf{q},\alpha_4),(\mathbf{p}_1,\alpha_1)}\delta_{(\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\alpha_3),(\mathbf{p}_2,\alpha_2)} - \delta_{(\mathbf{p}_1+\mathbf{q},\alpha_4),(\mathbf{p}_2,\alpha_2)}\delta_{(\mathbf{p}_2-\mathbf{q},\alpha_3),(\mathbf{p}_1,\alpha_1)} \\
&\qquad = \delta_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}\delta_{\alpha_4,\alpha_1}\delta_{\alpha_3,\alpha_2} - \delta_{\mathbf{q}=\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1}\delta_{\alpha_3,\alpha_1}\delta_{\alpha_4,\alpha_2}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Le premier terme correspond au terme dit de Hartree (terme direct), le deuxième au terme dit de Fock (terme d'échange). On va calculer séparément la densité d'énergie de Hartree et celle de Fock.

Pour Hartree, on peut remarquer que la somme sur l'isospin est telle que :

$$\sum_\alpha \langle\chi_\alpha|\chi_\alpha\rangle = 2 \tag{1.28}$$

où α désigne juste l'isospin ici pour les termes isoscalaires et :

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha &= \langle\chi_\alpha|\tau_i|\chi_\alpha\rangle \\
&= \langle\chi_\alpha|\tau_3|\chi_\alpha\rangle \\
&= \delta_{\alpha=p} - \delta_{\alpha=n}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

pour les termes isovecteurs. En particulier, dans la matière symétrique, la contribution des termes isovecteurs à Hartree est nulle. En incluant ces

résultats, on peut écrire la densité d'énergie de Hartree :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{Hartree} &= \sum_X \frac{1}{2m_X^2 V^2} \sum_{\substack{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2 \\ \alpha_1,\alpha_2}} \bar{u}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\Gamma_X(1)u_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\bar{u}_{\alpha_2}(\mathbf{p}_2)\Gamma_X(2)u_{\alpha_2}(\mathbf{p}_2) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \left(\int_0^{p_F} \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{spin}\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p})\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 \left(\int_0^{p_F} \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{spin}u^+(\mathbf{p}u(\mathbf{p})\right)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{g_\delta}{m_\delta}\right)^2 \left(\int_0^{p_F} \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left(\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p})\right)_p - \left(\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p})\right)_n\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 \left(\int_0^{p_F} \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left(\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})\right)_p - \left(\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p})\right)_n\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \left(\int_0^{p_F} \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{M^*}{E^*}(\mathbf{p})\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 \left(\int_0^{p_F} \frac{4d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\right)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{g_\delta}{m_\delta}\right)^2 \left(\int_0^{p_F} \frac{2d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{M_p^*}{E_p^*} - \frac{M_n^*}{E_n^*})\right)^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 \left(\int_0^{p_{Fp}} \frac{2d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} - \int_0^{p_{Fn}} \frac{2d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \rho_S^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 \rho^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 (\rho_{Sp} - \rho_{Sn})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g_\rho}{m_\rho}\right)^2 (\rho_p - \rho_n)^2 \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

Ce terme correspond bien au terme de Hartree dans l'équation (3.24. Pour la deuxième égalité, on a utilisé le fait que l'intégrant oméga donné par $\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}\gamma^0 u = u^+ u$, en effet :

$$
\begin{aligned}
\bar{u}\gamma^i u &\sim (1, -\vec{\sigma}\mathbf{p})\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\sigma}\mathbf{p} \end{pmatrix} \\
&= \sigma_i\vec{\sigma}\mathbf{p} + \vec{\sigma}\mathbf{p}\sigma_i \\
&= \sigma_i, \sigma_j p_j \\
&= 2p_i \qquad (1.31)
\end{aligned}
$$

dont l'intégrale sur $d\mathbf{p}$ est nulle. Pour le rho, seul le terme vecteur donne une contribution non nulle car les termes croisé et tenseur dépendent de $\mathbf{q}$

qui est nul pour la partie Hartree. De plus, le terme Hartree du pion est toujours nul car le terme pseudo-vecteur est nul à cause de $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ et le terme pseudo-scalaire dépend de la contraction des spineurs $\bar{u}\gamma^5 u = 0$. Pour la troisième ligne, on a utilisé les équations (1.24). Enfin, la dernière ligne utilise les définitions de la densité (2.1) et de la densité scalaire (3.26).

1.3.3 Énergie de Fock

Pour les termes de Fock, les sommes sur l'isospin contribuent de la manière suivante :

$$\sum_{\alpha_1\alpha_2} \langle\chi_{\alpha_1}|\chi_{\alpha_2}\rangle\langle\chi_{\alpha_2}|\chi_{\alpha_1}\rangle = 2 \tag{1.32}$$

pour la partie isoscalaire et :

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha_1\alpha_2,i} \langle\chi_{\alpha_1}|\tau_i|\chi_{\alpha_2}\rangle\langle\chi_{\alpha_2}|\tau_i|\chi_{\alpha_1}\rangle &= \sum_{\alpha_1\alpha_2} \langle\chi_{\alpha_1}|\tau_+|\chi_{\alpha_2}\rangle\langle\chi_{\alpha_2}|\tau_-|\chi_{\alpha_1}\rangle \\
&\quad \sum_{\alpha_1\alpha_2} \langle\chi_{\alpha_1}|\tau_-|\chi_{\alpha_2}\rangle\langle\chi_{\alpha_2}|\tau_+|\chi_{\alpha_1}\rangle \\
&\quad \sum_{\alpha_1\alpha_2} \langle\chi_{\alpha_1}|\tau_3|\chi_{\alpha_2}\rangle\langle\chi_{\alpha_2}|\tau_3|\chi_{\alpha_1}\rangle \\
&= 2\delta_{\alpha_1=p,\alpha_2=n} + 2\delta_{\alpha_1=n,\alpha_2=p} + \delta_{\alpha_1=\alpha_2=p} + \delta_{\alpha_1=\alpha_2=n}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

pour la partie isovectorielle. On peut remarquer que dans la matière symétrique, le facteur d'isospin d'un méson isovecteur (3×2) est trois fois celui d'un méson isoscalaire (2). On a utilisé les propriétés des matrices définies à partir des matrices de Pauli :

$$\tau_\pm = \frac{\tau_1 \pm i\tau_2}{\sqrt{2}}. \tag{1.34}$$

Ainsi, le terme de Fock se développe suivant :

$$\varepsilon^{Fock} = \frac{1}{2V^2}\sum_X \sum_{\substack{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2 \\ \alpha_1,\alpha_2}} \bar{u}_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\Gamma_X u_{\alpha_2}(\mathbf{p}_2)\bar{u}_{\alpha_2}(\mathbf{p}_2)\Gamma_X u_{\alpha_1}(\mathbf{p}_1)\frac{1}{(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)^2+m_X^2}.$$

On utilise la relation :

$$\frac{1}{2}\sum_{spin} u(p)\bar{u}(p) = \frac{\not{p}+M}{2E}$$

en se rappelant ici que les u sont étoilés. En tenant compte de la dépendance en isospin, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{Fock} \quad = \quad & \frac{1}{2} g_\sigma^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\sigma^2} \\
& Tr \left(\frac{\not{P}^*(p) + M^*(p)}{2E^*(p)} \frac{\not{P}^*(p') + M^*(p')}{2E^*(p')} \right) \\
& - \frac{1}{2} g_\omega^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\omega^2} \\
& Tr \left(\frac{\not{P}^*(p) + M^*(p)}{2E^*(p)} \gamma^\mu \frac{\not{P}^*(p') + M^*(p')}{2E^*(p')} \gamma_\mu \right) \\
& + \frac{1}{2} g_\delta^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\delta^2} \\
& Tr \left(\frac{\not{P}^*(p) + M^*(p)}{2E^*(p)} \frac{\not{P}^*(p') + M^*(p')}{2E^*(p')} \right) \\
& - \frac{1}{2} g_\rho^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\rho^2} \\
& Tr \left(\frac{\not{P}^*(p) + M^*(p)}{2E^*(p)} \Gamma^\mu_\rho \frac{\not{P}^*(p') + M^*(p')}{2E^*(p')} \Gamma'_{\rho\mu} \right) \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{g_A}{2 f_\pi} \right)^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\pi^2} \\
& Tr \left(\frac{\not{P}^*(p) + M^*(p)}{2E^*(p)} \not{q} \gamma^5 \frac{\not{P}^*(p') + M^*(p')}{2E^*(p')} \not{q} \gamma^5 \right),
\end{aligned}
$$

soit après le calcul des traces :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{Fock} \quad = \quad & \frac{1}{2} g_\sigma^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\sigma^2} \frac{2P^* \cdot P^{*'} + 2M^* M^{*'}}{E^* E^{*'}} \\
& - \frac{1}{2} g_\omega^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\omega^2} \frac{-2P^* \cdot P^{*'} + 4M^* M^{*'}}{E^* E^{*'}} \\
& + \frac{1}{2} g_\delta^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\delta^2} \frac{2P^* \cdot P^{*'} + 2M^* M^{*'}}{E^* E^{*'}} \\
& - \frac{1}{2} g_\rho^2 \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\rho^2} \frac{-2P^* \cdot P^{*'} + 4M^* M^{*'}}{E^* E^{*'}} \\
& - \frac{1}{2} g_\rho^2 \frac{\kappa_\rho}{2M_N} \int 4 \sum_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 + m_\rho^2} \frac{12(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{P}^{*'} - pP^*) M^{*'}}{E^* E^{*'}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}g_\rho^2\left(\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\right)^2\int 4\sum_N\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\rho^2}\\
&\qquad\frac{3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2P^*\cdot P^{*'}+3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2M^*M^{*'}+6(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{P}^*(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{P}^{*'}}{E^*E^{*'}}\\
&-\frac{1}{2}g_\pi^2\int 4\sum_N\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\pi^2}\frac{-P^*\cdot P^{*'}+M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2\int 4\sum_N\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_\pi^2}\\
&\qquad\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2P^*\cdot P^{*'}+(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2M^*M^{*'2}+2(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{P}^*(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{P}^{*'}}{E^*E^{*'}}
\end{aligned}
$$

où $A\cdot B$ désigne le produit de deux quadrivecteurs mais A désigne la norme du vecteur $\mathbf{A}$. Pour les mésons isovecteurs, la somme sur N tient compte des six facteurs de l'équation (1.33). La définition des vertex d'interaction du rho est donnée équation (6.34).

Afin de simplifier cette dernière expression pour le calcul numérique, on effectue les intégration angulaires sur $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$. On développe le produit sur les quadrivecteurs : $P\cdot P'=EE'-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}'=EE'-PP'\cos(\theta)$. θ est l'angle entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$. On obtient par exemple pour le sigma :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{Fock} &= \frac{1}{2}g_\sigma^2\int 4\frac{p^2dpd\theta d\varphi}{(2\pi)^3}\frac{4p'^2dp'd\theta'd\varphi'}{(2\pi)^3}2\left(1+\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}-\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\cos\theta\right)\\
&\qquad\frac{1}{p^2+p'^2-2pp'\cos\theta+m_\sigma^2}.
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

Après intégration sur θ, ce qui donne les θ_i et les ϕ_i, sur les angles restants et après suppression des termes de contact comme expliqué section 5.4, il reste des formules analogues à l'équation (3.25) :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{Fock} &= \frac{g_\sigma^2}{(2\pi)^4}\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\left(\theta_\sigma+\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\theta_\sigma-2\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\phi_\sigma\right)\\
&\quad+\frac{g_\omega^2}{(2\pi)^4}\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\left(2\theta_\omega-4\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\theta_\omega-4\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\phi_\omega\right)\\
&\quad+\frac{g_\delta}{(2\pi)^4}\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\left(\theta_\delta+\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\theta_\delta-2\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\phi_\delta\right)\\
&\quad+\frac{g_\rho^2}{(2\pi)^4}\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\left(2\theta_\rho-4\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\theta_\rho-4\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\phi_\rho\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{g_\rho^2}{(2\pi)^4}\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\left(12(p\theta_\rho-2p'\phi_\rho)\frac{P^*}{E^*}\frac{M^{*'}}{E^{*'}}\right)\\
&+\frac{g_\rho^2}{(2\pi)^4}\left(\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\right)^2\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\Big[-m_\rho^2\theta_\rho-3m_\rho^2\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\theta_\rho\\
&\quad+4\left((p^2+p'^2-m_\rho^2/2)\phi_\rho-pp'\theta_\rho\right)\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\Big]\\
&+\frac{1}{(2\pi)^4}g_\pi^2\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\left(\theta_\pi-\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\theta_\pi-2\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\phi_\pi\right)\\
&+\frac{1}{(2\pi)^4}\left(\frac{g_A}{2f_\pi}\right)^2\int pdpp'dp'\frac{1}{2}\sum_N\Big[-m_\pi^2\theta_\pi-m_\pi^3\frac{M^*M^{*'}}{E^*E^{*'}}\theta_\pi\\
&\quad+2\left((p^2+p'^2)\phi_\pi-pp'\theta_\pi\right)\frac{P^*P^{*'}}{E^*E^{*'}}\Big].
\end{aligned}
$$

Les θ_i et les ϕ_i sont obtenus par le calcul :

$$
\begin{aligned}
\theta_i(p,p') &= 2pp'\int_{-1}^{1}\frac{du}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_i^2 i}\\
&= \ln\left(\frac{(p+p')^2+m_i^2}{(p-p')^2+m_i^2}\right)\\
\phi_i(p,p') &= pp'\int_{-1}^{1}\frac{udu}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2+m_i^2 i}\\
&\quad \frac{p^2+p'^2+m_i^2}{4pp'}\theta_i(p,p')-1. \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

Ces résultats correspondent bien à ceux de l'article [2].

Les termes pseudo-vecteurs du pion et tenseur du rho contiennent des morceaux dépendant de $\mathbf{q}^2$. On les décompose suivant un terme de Yukawa et un terme de contact :

$$
\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2+m_i^2}=1-\frac{m_i^2}{\mathbf{q}^2+m_i^2}. \qquad (1.37)
$$

La contribution des termes de contact est donc simplement obtenue en remplaçant par 1 les termes compliqués dépendant de $\mathbf{q}^2$ (attention, il est aussi caché dans certains produits de P^* et P'^*). Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\pi^c &= \frac{3}{16}\left(\frac{m_\pi g_A}{2f_\pi}\right)^2(\rho^2+\rho_S^2)\\
\varepsilon_\rho^c &= \frac{3}{16}\left(\frac{g_\rho\kappa_\rho}{2M_N}\right)^2(\rho^2+3\pi_S^2). \qquad (1.38)
\end{aligned}
$$

Comme expliqué avec l'équation (5.74), ces termes doivent être multipliés par un coefficient rendant compte des corrélations à deux corps et donnés équation (5.76).

Annexe B

Propriétés des tenseurs $T^{\mu\nu}$

Les $T_{\mu\nu}$ sont donnés équation (6.14).

Leurs normes sont les suivantes :

$$\begin{array}{lllllll} T^1_{\mu\nu}T_1^{\mu\nu} & = & 2 & , & T^4_{\mu\nu}T_4^{\mu\nu} & = & 2 \\ T^2_{\mu\nu}T_2^{\mu\nu} & = & 1 & , & T^5_{\mu\nu}T_5^{\mu\nu} & = & 2 \\ T^3_{\mu\nu}T_3^{\mu\nu} & = & 1 & , & T^6_{\mu\nu}T_6^{\mu\nu} & = & -2 \end{array} \tag{2.1}$$

Ces tenseurs, contractés entièrement avec un autre, donnent zéro :

$$i \neq j, \qquad T^i_{\mu\nu}T_j^{\mu\nu} = 0 \tag{2.2}$$

Il faut faire attention lorsqu'on décompose un corrélateur sur ces tenseurs : souvent pour connaître la composante Π_i de $\Pi^{\mu\nu}$ sur $T_i^{\mu\nu}$, on calcule de produit $T^i_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}$. Ce résultat doit être divisé par la norme de T_i pour obtenir Π_i.

Dans les équations de Dyson (6.6), des produits de plusieurs T_i interviennent. On ne donne ici que ceux qui sont utiles dans cette thèse. En particulier, les contractions avec T_5 n'interviennent jamais car les composantes des corrélateurs et des propagateurs de mésons sur ce tenseur sont toutes nulles. On donne néanmoins les contractions avec T_4 qui seraient utiles dans le cas où on chercherait à inclure la contribution du baryon Δ. Dans les équations ci-dessous (2.3 à 2.8), on donne les contractions non nulles entre les T_i, c'est à dire telles que $T_{i\mu\alpha}T_j^{\alpha\nu} \neq 0$:

$$T_{1\mu\alpha}T_1^{\alpha\nu} = T^\nu_{1\mu} \tag{2.3}$$

$$T_{2\mu\alpha}T_2^{\alpha\nu} = T^\nu_{2\mu} \tag{2.4}$$

$$T_{3\mu\alpha}T_3^{\alpha\nu} = T^\nu_{3\mu} \tag{2.5}$$

$$T_{4\mu\alpha}T_4^{\alpha\nu} = T^\nu_{2\mu} + T^\nu_{3\mu} \tag{2.6}$$

$$T_{6\mu\alpha}T_6^{\alpha\nu} = (2\delta^\nu_\mu - 2q_\mu q^\nu)_{espace} \tag{2.7}$$

$$T_{1\mu\alpha}T_6^{\alpha\nu} = T_{6\mu\alpha}T_1^{\alpha\nu} = T^\nu_{1\mu} \tag{2.8}$$

Il est évident sur ces équations que les trois premiers tenseurs sont orthogonaux entre eux. Ceci permet de séparer les équations de Dyson dans le cas purement axial comme il a été fait équation (6.27). De même, le propagateur de polarisation du rho conduit à deux équations découplées sur les canaux transverse et relativiste. Enfin, le propagateur de couplage axial-rho est selon T_6. Les équations de Dyson (6.49) contiennent des termes du type $\Pi_6^0 V \Pi_6$ qui peuvent se factoriser de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Pi_6^{0\mu\alpha} V_{\alpha\beta} \Pi_6^{\beta\nu} &= \Pi_6^0 T_6^{\mu\alpha} (V_T T_{1\alpha\beta} + V_R T_{2\alpha\beta} + V_L T_{3\alpha\beta}) \Pi_6^{\beta\nu} \\
&= \Pi_6^0 T_6^{\mu\alpha} V_T T_{1\alpha\beta} \Pi_6^{\beta\nu} \\
&= \Pi_6^0 V_T \Pi_6 T_1^{\mu\nu}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Lorsqu'on projette la deuxième et la troisième équation du système (6.49) sur les trois premiers tenseurs pour obtenir les équations de Dyson dans les trois premiers canaux, on voit bien que le couplage axial/rho n'intervient que pour la partie transverse. De même, les termes en $\Pi_6^0 V \Pi$ et $\Pi^0 V \Pi_6$ se décomposent selon T_6 uniquement.

Afin de justifier la terminologie de canal transverse et canal longitudinal, on regarde la limite non relativiste des trois premiers tenseurs :

$$T_1^{\mu\nu} \longrightarrow -\delta^{ij} + \frac{q^i q^j}{\mathbf{q}^2} \qquad (2.10)$$

$$T_2^{\mu\nu} \longrightarrow \mathcal{O}\left(\frac{q}{2M_N}\right) \qquad (2.11)$$

$$T_3^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{q^i q^j}{\mathbf{q}^2}. \qquad (2.12)$$

On reconnaît pour T_1 le projecteur sur le canal transverse et pour T_3 celui sur le canal longitudinal. T_2 disparaît, d'où le nom « purement relativiste » pour le canal correspondant.

Annexe C

Propagateurs de polarisation

Dans cette annexe, on donne l'expression des propagateurs de polarisation intégrés sur les angles et utilisée dans les calculs numériques. On note u l'angle entre les vecteurs $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$.

D'après l'expression des K_j, quatre types d'intégrales sont à considérer. La plus simple est lorsque le numérateur de l'intégrand ne dépend pas de u :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{du}{q^2+2p\cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) &= \frac{-1}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \ln\left(\frac{q^2-2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|+2\varepsilon\omega}{q^2+2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|+2\varepsilon\omega}\right) + (q^\mu \to -q^\mu) \\
&= \frac{-1}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \ln\left(\frac{(q^2-2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|)^2-4\varepsilon^2\omega^2}{(q^2+2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|)^2-4\varepsilon^2\omega^2}\right) \\
&= \ln_1 \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

où $\ln_1$ est une notation utilisée par la suite. Il y a ensuite les termes dont le numérateur dépend linéairement de u :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{p\cdot q du}{q^2+2p\cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(q^2+2p\cdot q)du}{q^2+2p\cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{q^2 du}{q^2+2p\cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) \\
&= 2 + \frac{q^2}{4|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}\ln_1 \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} du}{q^2+2p\cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) &= \int_{-1}^{1} \frac{(\varepsilon\omega - p\cdot q)du}{q^2+2p\cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) \\
&= \frac{-\varepsilon\omega}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \ln\left(\frac{q^2-2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|+2\varepsilon\omega}{q^2+2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|+2\varepsilon\omega}\right) + (q^\mu \to -q^\mu) - 2 - \frac{q^2}{4|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}\ln_1 \\
&= \frac{-\varepsilon\omega}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \ln\left(\frac{(q^2)^2-4(|\mathbf{p}||\mathbf{q}|-\varepsilon\omega)^2}{(q^2)^2-4(|\mathbf{p}||\mathbf{q}|+\varepsilon\omega)^2}\right) - 2 - \frac{q^2}{4|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}\ln_1 \\
&= \frac{-\varepsilon\omega}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}\ln_2 - 2 - \frac{q^2}{4|\mathbf{p}||\mathbf{q}|}\ln_1 \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

avec ici aussi une nouvelle notation $\ln_2$, facteur dû au fait que ω change de signe dans le dernier terme. Enfin, il reste des termes dépendant de u^2 :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{p}_T^2 du}{q^2 + 2p \cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) &= \int_{-1}^{1} \frac{(\mathbf{p}^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2) du}{q^2 + 2p \cdot q} + (q^\mu \to -q^\mu) \\
&= \int_{-1}^{1} \Bigg[\frac{\mathbf{p}^2 - \left(\frac{(q^2)^2}{4} + \varepsilon^2 \omega^2 + q^2 \varepsilon \omega \right)}{q^2 + 2p \cdot q} \\
&\quad -2(q^2 + 2\varepsilon\omega - \frac{1}{4}(q^2 + 2\varepsilon\omega + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \Bigg] du + (q^\mu \to -q^\mu) \\
&= -\frac{\mathbf{p}^2 - \frac{(q^2)^2}{4} - \varepsilon^2 \omega^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \ln_1 - q^2 - \frac{q^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|} \varepsilon \omega \ln_2 . \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Avant de passer à l'expression des propagateurs intégrée sur u, on effectue la rotation de Wick. Pour $\ln_1$ il n'y a pas de soucis :

$$\ln_1(z, |\mathbf{q}|) = \ln \left(\frac{(q^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{q})^2 + 4z^2\varepsilon^2}{(q^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|)^2 + 4z^2\varepsilon^2} \right) . \qquad (3.5)$$

En revanche, $\ln_2$, comme ω, devient imaginaire. On effectuera la transformation :

$$\omega \ln_2 = z \ln_2(z, |\mathbf{q}|) = -2z \mathrm{atan} \left(\frac{8|\mathbf{p}||\mathbf{q}| z\varepsilon}{(q^2)^2 - 4\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2 + 4z^2\varepsilon^2} \right) . \qquad (3.6)$$

Enfin, les expressions des propagateurs de polarisation sont :

$$\begin{aligned}
\Pi^0_{aT} &= -\frac{1}{8\pi^2}\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^3}\int\frac{pdp}{\varepsilon}\Bigg[\left(4\varepsilon^4 - z^2 + |\mathbf{q}|^2 - 4\frac{|\mathbf{q}|^2}{q^2}M^{*2}\right)\ln_1(z,|\mathbf{q}|) \\
&\quad +8|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\frac{-z^2+|\mathbf{q}|^2}{q^2} + 4\varepsilon z\ln_2(z,|\mathbf{q}|)\Bigg] \qquad (3.7)\\
\Pi^0_{aR} &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|\mathbf{q}|^3}\int\frac{pdp}{\varepsilon}\Bigg[\left(-4M^{*2}z^2 + 4|\mathbf{p}|^2q^2 + (q^2)^2\right)\ln_1(z,|\mathbf{q}|) \\
&\quad +8|\mathbf{p}||\mathbf{q}|q^2 + 4\varepsilon z\ln_2(z,|\mathbf{q}|)\Bigg] \qquad (3.8)\\
\Pi^0_{aL} &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{|\mathbf{q}|}\int\frac{pdp}{\varepsilon}4M^{*2}\ln_1(z,|\mathbf{q}|) \qquad (3.9)\\
\Pi^0_{\rho T} &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^3}\int\frac{pdp}{\varepsilon} \\
&\quad \Bigg[-\frac{1}{2}\left\{\left(4\varepsilon^2 - z^2 + |\mathbf{q}|^2 + 4\frac{|\mathbf{q}|^2}{q^2}M^{*2}\right)\ln_1(z,|\mathbf{q}|) + 8|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\frac{-z^2+|\mathbf{q}|^2}{q^2} + 4\varepsilon z\ln_2(z,|\mathbf{q}|)\right\} \\
&\quad -\kappa^*_\rho|\mathbf{q}|^2\ln_1(z,|\mathbf{q}|) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\right)^2\left\{\left(-4M^{*2}|\mathbf{q}|^2 + 4\varepsilon^2q^2 + (q^2)^2\right)\ln_1(z,|\mathbf{q}|) + 8|\mathbf{p}||\mathbf{q}|q^2 + 4\varepsilon z\ln_2(z,|\mathbf{q}|)\right\}\Bigg] \qquad (3.10)\\
\Pi^0_{\rho R} &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^3}\int\frac{pdp}{\varepsilon} \\
&\quad \Bigg[\left\{\left(4\varepsilon^2 + q^2\right)\ln_1(z,|\mathbf{q}|) + 8|\mathbf{p}||\mathbf{q}| + 4\varepsilon z\ln_2(z,|\mathbf{q}|)\right\} \\
&\quad -2\kappa^*_\rho|\mathbf{q}|^2\ln_1(z,|\mathbf{q}|) \\
&\quad +\left(\frac{\kappa_\rho}{2M_N}\right)^2\left\{\left(z^2|\mathbf{q}|^2 + 4\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2 + 4\varepsilon^2z^2\right)\ln_1(z,|\mathbf{q}|) + 8|\mathbf{p}||\mathbf{q}|z^2 - 4q^2\varepsilon z\ln_2(z,|\mathbf{q}|)\right\}\Bigg] \qquad (3.11)\\
\Pi^0_6 &= \frac{\kappa^*_\rho}{4\pi^2}\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\int\frac{pdp}{\varepsilon}\left\{2\varepsilon\ln_1(z,|\mathbf{q}|) + z\ln_2(z,|\mathbf{q}|)\right\}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] J. D. Walecka. A Theory of highly condensed matter. *Annals Phys.*, 83 :491–529, 1974.

[2] A. Bouyssy, J. F. Mathiot, Van Giai Nguyen, and S. Marcos. Relativistic Description of Nuclear Systems in the Hartree–Fock Approximation. *Phys. Rev.*, C36 :380–401, 1987.

[3] M. Ericson G. Chanfray and P. A. M. Guichon. Chiral symmetry and quantum hadro-dynamics. *Phys. Rev.*, C63 :055202, 2001.

[4] E. Rutherford. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *Phil. Mag.*, 21 :669–688, 1911.

[5] J. Chadwick. Possible existence of a neutron. *Nature*, 129 :312, 1932.

[6] B. Friedman and V. R. Pandharipande. Hot and cold, nuclear and neutron matter. *Nucl. Phys.*, A361 :502–520, 1981.

[7] L. Valentin. *Physique Subatomique, Noyaux et Particules.* Hermann, 1982.

[8] V. G. J. Stoks R. B. Wiringa and R. Schiavilla. An Accurate nucleon-nucleon potential with charge independence breaking. *Phys. Rev.*, C51 :38–51, 1995.

[9] S. Weinberg. Nuclear forces from chiral Lagrangians. *Phys. Lett.*, B251 :288–292, 1990.

[10] L. Ray C. Ordonez and U. van Kolck. The Two-Nucleon Potential from Chiral Lagrangians. *Phys. Rev.*, C53 :2086–2105, 1996.

[11] W.E. Ormand. Microscopic approches in nuclear structure : Configuration interaction. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 156 :13–36, 2008.

[12] V. Rotival. Fonctionnelles microscopiques pour les noyaux moyens et lourds. In *Journées de Rencontre Jeunes Chercheurs*, pages 57–60, 2007.

[13] J. Decharge and D. Gogny. Hartree-Fock-Bogolyubov calculations with the D1 effective interactions on spherical nuclei. *Phys. Rev.*, C21 :1568–1593, 1980.

[14] T. H. R. Skyrme. CVII. The nuclear surface. *Phil. Mag.*, 1 :1043–1054, 1956.

[15] T. Skyrme. The effective nuclear potential. *Nucl. Phys.*, 9 :615–634, 1959.

[16] J. Meyer. *Interactions effectives, théories de champ moyen, masses et rayons nucléaires.* EDP Sciences, 2003.

[17] N. van Giai M. Beiner, H. Flocard and P. Quentin. Nuclear ground state properties and selfconsistent calculations with the Skyrme interactions : 1. Spherical description. *Nucl. Phys.*, A238 :29–69, 1975.

[18] M. Brack C. Guet J. Bartel, P. Quentin and H.-B. Hakansson. Towards a better parametrisation of Skyrme-like effective forces : A Critical study of the SkM force. *Nucl. Phys.*, A386 :79–100, 1982.

[19] P. Bonche R. Schaeffer E. Chabanat, J. Meyer and P. Haensel. A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities. *Nucl. Phys.*, A627 :710–746, 1997.

[20] P. Bonche R. Schaeffer E. Chabanat, J. Meyer and P. Haensel. A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities. 2. Nuclei far from stablities. *Nucl. Phys.*, A635 :231–256, 1998.

[21] J.-F. Berger. Approches de champ moyen et au-delà. In *École Jolio-Curie de Physique Nucléaire*, 1991.

[22] A.L. Fetter and J.D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems.* McGraw-Hill, 1971.

[23] P. Hohenberg and W. Kohn. Inhomogeneous Electron Gas. *Phys. Rev.*, 136 :B864–B871, 1964.

[24] W. Kohn and L. J. Sham. Self-Consistent Equations Including Exchange and Correlation Effects. *Phys. Rev.*, 140 :A1133–A1138, 1965.

[25] S. E. Thorsett and D. Chakrabarty. Neutron Star Mass Measurements. I. Radio Pulsars. *Astrophys. J.*, 512 :288, 1999.

[26] J. Novak. Neutron stars and pulsars. *Eur. Phys. J*, ST156.

[27] J. W. Negele and D. Vautherin. Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nucl. Phys.*, A207 :298–320, 1973.

[28] H. H. Matevosyan J. Rikovska-Stone, P. A. M. Guichon and A. W. Thomas. Cold uniform matter and neutron stars in the quark-meson-coupling model. *Nucl. Phys.*, A792 :341–369, 2007.

[29] C. J. Pethick J. M. Lattimer, M. Prakash and P. Haensel. Direct URCA process in neutron stars. *Phys. Rev. Lett.*, 66 :2701–2704, 1991.

[30] E. D. Bloom et al. High-Energy Inelastic e p Scattering at 6-Degrees and 10- Degrees. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :930–934, 1969.

[31] M. Breidenbach et al. Observed Behavior of Highly Inelastic electron-Proton Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :935–939, 1969.

[32] P. Aurenche. La qcd et son histoire : partons d'un bon pied ! In *Cours présenté à l'école prédoctorale d'Annecy*, 2006.

[33] S. Bethke. α_s at Zinnowitz 2004. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 135 :345–352, 2004.

[34] http ://solid13.tphys.physik.uni tuebingen.de/faessler/Fuchs/VI/hadro.html.

[35] F. Arleo. Photon production in heavy ion collisions. In *International School of Quark-Gluon Plasma*, 2007.

[36] G. Chanfray. Medium modifications of hadrons in dense nuclear and hadronic matter. In *International School of Quark-Gluon Plasma*, 2007.

[37] G. Usai. Dilepton production in heavy ion collisions. In *International School of Quark-Gluon Plasma*, 2007.

[38] G. Chanfray. Mésons dans la matière hadronique dense et chaude. In *École Jolio-Curie de Physique Nucléaire*, 1998.

[39] N. Kaiser F. Klingl and W. Weise. Current correlation functions, QCD sum rules and vector mesons in baryonic matter. *Nucl. Phys.*, A624 :527–563, 1997.

[40] N. Kaiser F. Klingl and W Weise. Effective Lagrangian approach to vector mesons, their structure and decays. *Z. Phys.*, A356 :193–206, 1996.

[41] J. Velkovska. The quest for quark-gluon plasma global observables at rhic with an outlook to lhc. In *International School of Quark-Gluon Plasma*, 2007.

[42] J. Zinn-Justin. *Intégrale de chemin en mécanique quantique : Introduction.* Edp Sciences, 2003.

[43] R. Gupta. Introduction to lattice QCD. 1997.

[44] O. Pène. La qcd sans peine. In *École internationale Joliot-Curie de physique nucléaire*, 2005.

[45] A. Ali Khan et al. Light Hadron Spectroscopy with Two Flavors of Dynamical Quarks on the Lattice. *Phys. Rev.*, D65 :054505, 2002.

[46] S. Aoki et al. Light hadron spectroscopy with two flavors of $O(a)$-improved dynamical quarks. *Phys. Rev.*, D68 :054502, 2003.

[47] P.-A. Harraud et V. Drach. Méthodes de calcul en chromodynamique quantique sur réseau. In *Journées de Rencontre Jeunes chercheurs*, 2007.

[48] B. D. Serot and J. D. Walecka. Recent progress in quantum hadrodynamics. *Int. J. Mod. Phys.*, E6 :515–631, 1997.

[49] D. Vretenar. Nuclear energy density functionals constrained by low-energy qcd. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 156 :37–68, 2008.

[50] P. A. M. Guichon. A Possible Quark Mechanism for the Saturation of Nuclear Matter. *Phys. Lett.*, B200 :235, 1988.

[51] K. Saito and A. W. Thomas. A Quark - meson coupling model for nuclear and neutron matter. *Phys. Lett.*, B327 :9–16, 1994.

[52] E. N. Rodionov P. A. M. Guichon, K. Saito and A. W. Thomas. The role of nucleon structure in finite nuclei. *Nucl. Phys.*, A601 :349–379, 1996.

[53] N. Sandulescu P. A. M. Guichon, H. H. Matevosyan and A. W. Thomas. Physical Origin of Density Dependent Force of the Skyrme Type within the Quark Meson Coupling Model. *Nucl. Phys.*, A772 :1–19, 2006.

[54] A. W. Thomas D. B. Leinweber and R. D. Young. Physical nucleon properties from lattice QCD. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :242002, 2004.

[55] D. B. Leinweber A. W. Thomas, P. A. M. Guichon and R. D. Young. Towards a connection between nuclear structure and QCD. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 156 :124–136, 2004.

[56] G. Chanfray and M. Ericson. QCD susceptibilities and nuclear matter saturation in a chiral theory : inclusion of pion loops. *Phys. Rev.*, C75 :015206, 2007.

[57] W. Bentz and A. W. Thomas. The stability of nuclear matter in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Nucl. Phys.*, A696 :138–172, 2001.

[58] D. Lederer et B. Roulet B. Diu, C. Guthmann. *Physique Statistique*. Hermann, 1995.

[59] J.-P. Derendinger. *Théorie Quantique des Champs*. Presses Polytechniques Universitaires Romandes, 2001.

[60] R. Brockmann and R. Machleidt. Relativistic nuclear structure. 1 : Nuclear matter. *Phys. Rev.*, C42 :1965–1980, 1990.

[61] V. Baran M. Colonna B. Liu, V. Greco and M. Di Toro. Asymmetric nuclear matter : The role of the isovector scalar channel. *Phys. Rev.*, C65 :045201, 2002.

[62] A. K. Kerman and L. D. Miller. Field Theory Methods for Finite Nuclear Systems and the Possibility of Density Isomerism. (Talk). In *Berkeley 1974, Proceedings, Lawrence Berkeley Lab Lbl- 3675*, Berkely 1974, 73-107.

[63] G. Chanfray and M. Ericson. QCD susceptibilities and nuclear-matter saturation in a relativistic chiral theory. *Eur. Phys. J.*, A25 :151–157, 2005.

[64] M. Ericson and G. Chanfray. Constraints on nuclear matter properties from QCD susceptibilities. *Eur. Phys. J.*, A34 :215–222, 2007.

[65] G. A. Lalazissis, J. Konig, and P. Ring. A New Parameterization for the Lagrangian Density of Relativistic Mean Field Theory. *Phys. Rev.*, C55 :540–543, 1997.

[66] G. Chanfray et G. Smadja. *Les particules et leurs symétries*. Masson, 1997.

[67] G. Hohler and E. Pietarinen. The rho N N Vertex in Vector Dominance Models. *Nucl. Phys.*, B95 :210, 1975.

[68] P. Bernardos et al. Relativistic Hartree-Fock approximation in a nonlinear model for nuclear matter and finite nuclei. *Phys. Rev.*, C48 :2665–2672, 1993.

[69] W. Weise. Delta Isobar Dynamics in Finite Nuclei : Pion Elastic Scattering. *Nucl. Phys.*, A278 :402–444, 1977.

[70] J. Delorme G. Chanfray and M. Ericson. Extension of the Beg-Agassi-Gal theorem to virtual particles. *Phys. Rev.*, C31 :1582–1585, 1985.

[71] H. Sakai M. Ichimura and T. Wakasa. Spin-isospin responses via (p, n) and (n, p) reactions. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 56 :446–531, 2006.

[72] G. Colo and N. Van Giai. *Nucl. Phys.*, A731 :15, 2004.

[73] N. M. Hugenholtz and L. Van Hove. *Physica (Amsterdam)*, 24 :363, 1958.

[74] N. Van Giai W. H. Long, H. Sagawa and J. Meng. Shell Structure and ρ-Tensor Correlations in Density- Dependent Relativistic Hartree-Fock theory. *Phys. Rev.*, C76 :034314, 2007.

[75] I. Bombaci W. Zuo and U. Lombardo. *Phys. Rev.*, C60 :024605, 1999.

[76] S. Fritsch N. Kaiser and W. Weise. Chiral dynamics and nuclear matter. *Nucl. Phys.*, A697 :255–276, 2002.

[77] I. Bombaci and U. Lombardo. Asymmetric nuclear matter equation of state. *Phys. Rev.*, C44 :1892–1900, 1991.

[78] W. Barredo F. Sammarruca and P. Krastev. Predicting the single-proton/neutron potentials in asymmetric nuclear matter. *Phys. Rev.*, C71 :064306, 2005.

[79] N. Van Giai W.-H. Long and J. Meng. *Phys. Lett.*, B640 :150, 2006.

[80] C. Fuchs E. N. E. van Dalen and A. Faessler. Effective Nucleon Masses in Symmetric and Asymmetric Nuclear Matter. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :022302, 2005.

[81] M. Jaminon and C. Mahaux. Effective masses in relativistic approaches to the nucleon nucleus mean field. *Phys. Rev.*, C40 :354–367, 1989.

[82] A. W. Thomas P. A. M. Guichon and K. Tsushima. Binding of hypernuclei in the latest quark-meson coupling model. *Nucl. Phys.*, A814 :66–73, 2008.

[83] L. B. Leinson A. and Perez. Relativistic short-range correlation effects on the pion dynamics in nuclear matter. 2003.

[84] M. F. M. Lutz. Migdal's short range correlations in a covariant model. *Phys. Lett.*, B552 :159–164, 2003.

[85] A. L. S. Celenza, Pantziris, and C. M. Shakin. Covariant description of dynamical processes in relativistic nuclear matter. *Phys. Rev.*, C45 :205–220, 1992.

[86] J. C. Caillon and J. Labarsouque. In-medium meson propagators in a relativistic model with a quadratic scalar coupling. *Phys. Rev.*, C59 :1090–1094, 1999.

[87] A. W. Thomas I. Jameson and G. Chanfray. The Pion - nucleon sigma term. *J. Phys.*, G18 :L159–L165, 1992.

[88] M.C. Birse and J.E. McGovern. *Phys. Lett.*, B292 :242, 1992.

[89] P. Schuck C. Chanfray and W. Norenberg. In *Proceedings of the International Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear excitations*, 1990.

[90] A. B. Migdal. Pion Fields in Nuclear Matter. *Rev. Mod. Phys.*, 50 :107–172, 1978.

[91] M. Ericson and J. Delorme. Nuclear critical opalescence, a precursor to pion condensation. *Phys. Lett.*, B76 :107, 1978. LYCEN/7808.

[92] G. Chanfray and M. Ericson. Nuclear matter saturation in a relativistic chiral theory and QCD susceptibilities. 2004.

Table des matières

Sommaire **v**

Remerciements **xi**

Introduction **1**

I Introduction à la physique nucléaire relativiste **5**

1 Généralités **7**
1.1 Physique nucléaire 7
1.1.1 Modèle de la goutte liquide 8
1.1.2 Approche microscopique 10
1.1.3 Théorie effective phénoménologique 11
1.1.4 Problème à N-corps 14
1.1.5 Au-delà du champ moyen 15
1.1.6 Étoiles à neutrons 17
1.2 Physique hadronique 20
1.2.1 Des quarks à QCD 20
1.2.2 Diagramme de phases de QCD 23
1.2.3 QCD perturbative 25
1.2.4 QCD sur réseau 26
1.2.5 Modèle de Nambu–Jona-Lasinio 29
1.2.6 Théorie hadronique effective 30
1.2.7 Effets du confinement 31

2 Formalisme **35**
2.1 Champ moyen à l'approximation de Hartre–Fock 35
2.1.1 Lagrangien d'un système de nucléons relativistes . . . 35
2.1.2 Énergie de Hartree–Fock 37
2.1.3 Principe variationnel 40
2.2 Propagateurs 41
2.2.1 Propagateur de fermion 41
2.2.2 Excitations particule-trou 44

2.2.3 Calcul de l'énergie de corrélation 46

3 Modèle de Walecka 49
3.1 Lagrangien 49
3.2 Énergie à l'approximation de Hartree–Fock 50
3.3 Modèle de Walecka dans la matière nucléaire 52

II Théorie relativiste chirale de la matière nucléaire 57

4 Modèle σ 59
4.1 Symétrie chirale 59
4.2 Modèle σ-linéaire 61
4.3 Modèle σ non linéaire 63
4.4 Échec d'un modèle purement chiral 65

5 Effets du confinement 69
5.1 Lagrangien chiral 69
5.1.1 Contribution du méson scalaire s 70
5.1.2 Contribution des autres mésons 70
5.2 Construction du hamiltonien 72
5.2.1 Approximation statique 73
5.2.2 Équations du mouvement pour les champs de mésons 74
5.2.3 Hamiltoniens cinétique, de Hartree et d'échange . . . 76
5.3 Approche Hartree–Fock 79
5.3.1 Énergie de Hartree–Fock 79
5.3.2 Équations de Hartree–Fock 81
5.3.3 Cas de la matière infinie 85
5.4 Résultats 87
5.4.1 Saturation de la matière nucléaire symétrique 89
5.4.2 Effet du réarrangement 91
5.4.3 Matière asymétrique et énergie d'asymétrie 93
5.4.4 Masses effectives du proton et du neutron 95
5.4.5 Matière froide en équilibre bêta 97

6 Corrélations 101
6.1 Énergie de corrélation dans le canal pionique 101
6.1.1 Décomposition de l'interaction 102
6.1.2 Calcul du propagateur de polarisation 104
6.1.3 Expression de l'énergie de corrélation dans le canal pionique 107
6.2 Canal axial 107
6.3 Contribution du méson ρ 108
6.3.1 Contribution du ρ découplé 109

6.3.2 Couplage axial-rho 111
6.4 Résumé 113
6.5 Discussion 115
6.5.1 Rotation de Wick 115
6.5.2 Limite non relativiste 116
6.6 Résultats 118
6.6.1 Point de saturation de la matière nucléaire 118
6.6.2 Effets du contact 119
6.6.3 Influence du facteur de forme 121
6.6.4 Contribution de $\Delta(1232)$ 123

A Détails du calcul de l'énergie à l'approximation de Hartree–Fock 127
A.1 Lagrangien d'interaction 127
A.2 Expression du hamiltonien 129
A.3 Densité d'énergie 131
A.3.1 Énergie cinétique 132
A.3.2 Énergie de Hartree 133
A.3.3 Énergie de Fock 135

B Propriétés des tenseurs $T^{\mu\nu}$ 139

C Propagateurs de polarisation 141

Bibliographie 145

Table des matières 151
Résumé 155
Summary 156

Résumé

Le but de cette thèse est de construire un modèle décrivant la matière nucléaire symétrique et asymétrique dans une approche relativiste incluant des effets de la chromodynamique quantique, en particulier la symétrie chirale et le confinement. Le système considéré est une assemblée de nucléons en interaction *via* l'échange de mésons. L'attraction est assurée par la présence d'un champ scalaire invariant chiral lié aux fluctuations du condensat de quarks. La saturation est obtenue après ajout de la réponse scalaire nucléonique liée à la sous-structure en quarks du nucléon. Les paramètres liés au secteur scalaire de l'interaction et au confinement des quarks dans le nucléon sont estimés à partir de données sur réseau. Le reste des paramètres est contraint autant que possible par la phénoménologie hadronique. Le modèle n'est ainsi quasiment pas ajustable, le fait qu'il donne de si bons résultats constitue l'originalité de ce travail de thèse.

Dans un premier temps, nous avons choisi de travailler à l'approximation de champ moyen dans le schéma Hartree–Fock. La propagation du champ scalaire dans les termes de Fock conduit à des effets de réarrangement qui permettent de satisfaire le théorème de Hugenhotz–Van Hove. Nous soulignons également le rôle du terme tenseur du ρ dans l'énergie d'asymétrie ainsi que dans la dépendance en isospin de la masse effective de Landau. Enfin, nous donnons l'équation d'état des étoiles à neutrons prédite par ce modèle. Dans un deuxième temps, nous avons décidé d'inclure des effets au-delà du champ moyen en incluant l'énergie de corrélation due aux boucles de pions. Un ingrédient important est l'introduction d'un paramètre de Landau–Migdal contrôlant les interactions à courte portée. L'énergie de corrélation améliore la description des propriétés de la matière nucléaire au niveau du point de saturation.

Summary

This work aims at constructing a model for symmetric and asymmetric nuclear matter in a relativistic approach including effects from quantum chromodynamics, in particular chiral symmetry and confinement. We consider an assembly of nucleons interacting via meson exchange. The attraction is due to a chiral invariant scalar field associated with the fluctuations of the chiral condensate. The inclusion of scalar nucleonic effects due to the quark substructure of the nucleon ensures the saturation to occur. The parameters corresponding to the scalar sector of the interaction and to the quarks confinement in the nucleon are obtained from lattice calculations. The rest of the parameters are obtained as much as possible by hadron phenomenology. With such constrained inputs, the results are nevertheless very good : this constitutes the originality of this work.

In one part, we chood to work at the mean-field level in the Hartree–Fock scheme. The propagation of the scalar field in the Hartree-Fock terms induce some rearrangement effects which play an essential role in the Hugenhotz–Van hove theorem. We discuss also the role of the tensor part of the ρ interaction in the symmetry energy and the isospin dependance of the Landau effective mass. Then, in the idea to enlarge this work to neutron stars, we give the equation of state predicted by our model. The last step corresponds to the introduction of effects after the mean-field including the correlation energy due to pion loops. An important ingredient is the Landau-Migdal parameter controling short range interactions. The correlation energy enhances the description of the saturation point of nuclear matter.