HAL
open science

Stratégies de couplage de modèles discret-continu en dynamique explicite

Sylvain Gavoille

To cite this version:

Sylvain Gavoille. Stratégies de couplage de modèles discret-continu en dynamique explicite. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT : . tel-00442682

HAL Id: tel-00442682

https://theses.hal.science/tel-00442682v1

Submitted on 22 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ENSC-2009/173

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Sylvain Gavoille

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine

MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse

Stratégies de couplage de modèles discret-continu en dynamique explicite

Soutenue à Cachan le 24 septembre 2009 devant le jury composé de :

Hachmi Ben Dhia	Professeur, Ecole Centrale Paris	Président
Laurent Daudeville	Professeur, Université Joseph Fourier	Rapporteur
Anthony Gravouil	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
Christian Rey	Professeur, ENS de Cachan	Directeur de thèse
Arnaud Delaplace	Chargé de recherche, LMT de Cachan	Co-encadrant
Christian Mariotti	Ingénieur de recherche, CEA DAM Ile de France	Co-encadrant

LMT-Cachan
ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Christian Rey. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir accueilli au sein du LMT dès mon stage de Master. Ses talents de persuasion auprès du CEA m'ont permis d'obtenir une bourse et, ainsi de poursuivre mes travaux de recherche avec lui en thèse. Son excellence scientifique, ainsi que son exigence m'ont permis de progresser tout au long de ces années.

Mes remerciements s'adressent aussi à Arnaud Delaplace. Ses qualités humaines, scientifiques et pédagogiques exceptionnelles ont énormément contribué au bon déroulement de cette thèse.

Christian Mariotti a quant à lui dirigé ma thèse au sein du CEA. Je lui adresse tout mes remerciements pour l'intérêt qu'il a manifesté tout au long de mon travail. Son approche pragmatique m'a beaucoup appris. Et j'ai apprécié son aide, ainsi que son soutien tout au long de cette thèse.

Je tiens à remercier Hachmi Ben Dhia d'avoir accepté d'être président de mon jury. Ce fut un honneur que l'instigateur de la stratégie de couplage introduite dans ce manuscrit puisse faire partie de mon jury. Ma reconnaissance s'adresse aussi à mes deux rapporteurs Anthony Gravouil et Laurent Daudeville. Leurs remarques, ainsi que l'attention qu'ils ont portée à mon travail m'ont beaucoup apporté. Je suis très heureux que Anthony Gravouil ait fait partie de mon jury du fait qu'il est à l'origine de la stratégie de sous-cyclage temporel étudiée dans mes travaux. Enfin, ce fut un plaisir que Laurent Daudeville apporte son expertise du couplage entre des modèles discret et continu.

Enfin, mes remerciements s'adresse à ma famille et mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant ces années.

Table des matières

Table des matières i

Table des figures iii

Notations v

Introduction 1

1 Etat de l'art 5
1 Introduction 6
2 Les géomatériaux 6
2.1 Introduction 6
2.2 Description du comportement des géomatériaux 7
3 Une modélisation discrète : La méthode des éléments discrets 10
3.1 Les différents modèles éléments discrets 10
3.2 Choix de la forme et de la taille des particules 16
3.3 Sur la détection du contact 17
4 La modélisation continue : une approche éléments spectraux 17
4.1 Position du problème continu 17
4.2 Approximation par la méthode des éléments spectraux 19
5 Quelques méthodes de couplage 21
5.1 Les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel 21
5.2 Les méthodes de décomposition de domaine 24
6 Les méthodes multiéchelles en temps 26
6.1 Méthode de décomposition de domaine temporel 27
6.2 Méthode multi-pas de temps ou sous-cyclage 28
7 Bilan 31

2 Formulation de couplage continu-continu 33
1 Introduction 34
2 Une formulation de couplage continu-continu 35
2.1 Préliminaires 35
2.2 Position du problème de couplage 36
2.3 Ecriture de la formulation faible 38

2.4 Ecriture du problème couplé sous forme discrète 40
2.5 Ecriture du problème couplé sous forme lagrangienne 40
3 Discrétisation des opérateurs de couplage 41
3.1 Interfaces discrétisées avec des éléments spectraux d'ordre 1 . . . 42
3.2 Interfaces discrétisées avec des éléments spectraux d'ordre 5 . . . 44
3.3 Bilan 45
4 La résolution 45
5 Illustration numérique sur un problème 1-D 48
5.1 Position du problème poutre 48
5.2 Etude paramétrique de la méthode développée 52
5.3 Etude numérique de la méthode Arlequin 55
6 Etude 2D des différents raccords de couplage 57
6.1 Position du problème 58
6.2 Analyse des résultats 59
6.3 Résultats numériques 60
7 Résolution par une approche multi-pas de temps 61
7.1 Introduction 62
7.2 Position du cas test 65
7.3 Résultats numériques 67
8 Conclusion 73

3 Une stratégie de couplage continu-discret 75
1 Introduction 76
2 Description des modèles 76
2.1 Le modèle discret 77
2.2 Le modèle continu 79
3 La méthode de couplage 79
3.1 Mise en place du problème couplé 79
3.2 Détails sur la construction des opérateurs de couplage 80
4 Résultats numériques 83
4.1 Position du cas test 83
4.2 Identification des paramètres matériaux du modèle discret 85
4.3 Analyse du problème couplé 89
5 Conclusion 92

Conclusion 93

Bibliographie 95

A Annexe A : Cas test de Lamb 101
1 Présentation du problème 101
2 Formulation forte du problème 102
3 Résolution analytique 103

Table des figures

1 Phénomène de liquéfaction (Niigata,1976) 1

1.1 Représentation des différentes échelles [Peyrot 06] 6
1.2 Comportement uniaxial type d'un béton ou d'une roche [Ramtani 90] . . 8
1.3 Représentation de la mise en équation du modèle discret 11
1.4 Représentation *Distinct Element Model* 12
1.5 Représentation *Lattice model* 14
1.6 Cas test de double-fissuration 14
1.7 Résultats sur le cas test de double-fissuration 15
1.8 Les différentes formes d'éléments discrets 17
1.9 Représentation du modèle continu 18
1.10 Représentation de la solution numérique au problème de Lamb 20
1.11 Représentation de la Bridging Scale Method [Tang 06] 22
1.12 Position du problème Arlequin 25
1.13 Représentation de la discrétisation pour la méthode « pararéel » 27
1.14 Problème décomposé en sous-domaines 28
1.15 Répartition de la discrétisation temporelle sur chaque sous-domaine . . . 29

2.1 Problème préliminaire 35
2.2 Problème de référence 37
2.3 Sommation des formulations 38
2.4 Illustration d'un problème discrétisé 42
2.5 Illustration de la discrétisation à l'interface pour l'ordre 1 43
2.6 Illustration de la discrétisation à l'interface pour l'ordre 5 44
2.7 Algorithme de résolution mono-pas de temps 47
2.8 Problème poutre décomposé en sous-domaines 48
2.9 Solution du problème poutre 49
2.10 Fonctions de forme sur l'élément de référence 51
2.11 Etude paramétrique de la longueur de couplage 52
2.12 Etude de l'influence du paramètre α 55
2.13 Etude de la longueur de couplage sur la méthode Arlequin 57
2.14 Cas test 2-D 58
2.15 Maillage du cas test 2-D 58
2.16 Etude paramétrique du raccord en 2-D 60

2.17 Représentation de la discrétisation temporelle à l'interface 63
2.18 Algorithme de résolution multi-pas de temps 64
2.19 Problème à un seul degré de liberté 65
2.20 $m = 1$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 1$ et $\Delta t = 0.5\Delta t_c$ 67
2.21 $m = 1$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 1$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$ 68
2.22 $m = 1$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$ 69
2.23 $m = 2$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.5\Delta t_c$ 70
2.24 $m = 2$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$ 71
2.25 $m = 10$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$ 72

3.1 Problème couplé discrétisé 77
3.2 Représentation du modèle discret 77
3.3 Zoom sur la zone de recouvrement du problème couplé discrétisé 81
3.4 Interpolation sur l'interface 82
3.5 Problème de référence 83
3.6 Pression appliquée sur le bord du domaine 84
3.7 Carte d'écart local 85
3.8 Identification du modèle discret 86
3.9 Convergence du modèle discret 87
3.10 Convergence du modèle discret 88
3.11 Problème de couplage discrétisé 89
3.12 Etude paramétrique sur α et h 90
3.13 Etude comparative des modèles 91

A.1 Domaine d'étude 101
A.2 Spectrogramme 102

Notations

Sauf précision contraire, on retrouvera dans ce mémoire les notations ci-dessous.

■ **Calcul tensoriel et différentiel**

Tenseur d'ordre 0 en caractère fin : Coefficient de Poisson ν, module d'Young E, ...
Tenseur d'ordre 1 en caractère gras minuscule latin : champ de déplacement $\mathbf{u}$, position $\mathbf{x}$, ...
Tenseur d'ordre 2 en caractère gras minuscule grec : champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, la déformation $\boldsymbol{\epsilon}$, ...
Tenseur d'ordre supérieur en gras majuscule : la compliance $\mathbf{A}$, ...

$\wedge$	produit vectoriel
$\cdot$	produit simplement contracté
$:$	produit doublement contracté
∇	gradient
∇^s	partie symétrique du gradient
div	divergence
$\dot{\mathbf{u}}$	dérivée première de $\mathbf{u}$ par rapport au temps t
$\ddot{\mathbf{u}}$	dérivée seconde de $\mathbf{u}$ par rapport au temps t

S'il n'y a pas d'ambiguïté, les produits contractés sont omis.

■ **Notations algébrique**

Vecteur en minuscule gras et composantes entre crochets : vecteur effort

$$[\mathbf{f}^{\mathbf{j}\to\mathbf{i}}] = \begin{bmatrix} f_x^{j\to i} \\ f_y^{j\to i} \end{bmatrix}$$

Matrice en majuscule gras entre crochet et composantes entre crochets : matrice de masse

$$[\mathbf{M}_i] = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{f}^{j\to i}]^T$	transposé de $[\mathbf{f}^{j\to i}]$
$[\mathbf{M}_i]^T$	transposé de $[\mathbf{M}_i]$
$[\mathbf{M}_i]^{-1}$	inverse de $[\mathbf{M}_i]$
Tr $[\mathbf{M}_i]$	trace de $[\mathbf{M}_i]$
$[\mathbf{I}]$	matrice identité

Dans le cas où il est précisé que les expressions sont discrètes, on omettra les crochets pour alléger l'écriture.

Notations topologiques

∂A	frontière de A
$A \setminus B$	A privé de B
dA ou mes A	mesure de A

Notations sur les ensembles

$\Re$	ensemble des réels
$\{x \in \mathcal{X}; P\}$	sous ensemble des $x \in \mathcal{X}$ vérifiant la propriété P
$\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$	union de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$
$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$	intersection de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$
$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$	produit cartésien des ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$
$\mathcal{X} + \mathcal{Y}$	somme des ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$
$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$	somme directe des ensembles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$

Notations sur les fonctions

$f_{\mid \mathcal{X}}$	trace de f sur $\mathcal{X}$
f_i	$i^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\mathbf{f}$

Notations des espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert de $\Re^n$, Γ une partie de $\partial\Omega$, I un ouvert de $\Re$ et $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert.

$\| \ \|_{\mathcal{X}}$	norme naturelle sur $\mathcal{X}$
$(\ , \ )_{\mathcal{X}}$	produit scalaire naturel sur $\mathcal{X}$
$\mathcal{C}^k(I)$	espace des fonctions k fois continument différentiables sur I
$\mathcal{C}_0^k(I)$	espace $\mathcal{C}^k(I)$ avec k conditions initiales nulles
$L^2(\Omega)$	espace de Lebesgue
$H^1(\Omega)$	espace de Sobolev d'ordre 1
$H_u^1(\Omega, \Gamma)$	$\{x \in H^1(\Omega); x_{\mid \Gamma} = u\}$

Introduction

Au sein du CEA, dans le cadre des projets « SISPRO », « QSHA » et « CASHIMA », on s'intéresse à la tenue de structure génie civile sollicitée par un séisme. Les dégâts engendrés par un séisme peuvent être de différentes natures : éboulements, glissements de terrain, liquéfaction et tassements différentiels du sol. On peut voir par exemple sur la figure (1) un dégât de type liquéfaction qui a eu lieu en 1976 à Niigata (Japon) lors d'un séisme d'amplitude 7.5 sur l'échelle de Richter.

FIG. 1: Phénomène de liquéfaction (Niigata,1976)

La modélisation d'un problème de sismique à l'échelle régionale reste encore aujourd'hui un défi en dépit des performances numériques actuelles. En effet, une telle modélisation doit prendre en compte une topographie complexe due par exemple à la présence d'un massif montagneux et l'hétérogénéité du sol. En outre, des non-linéarités apparaissent dans le sol ou au niveau de la structure. Toutes ces difficultés mènent à l'élaboration de méthodes numériques sophistiquées.

Parmi ces méthodes, l'approche probablement la plus utilisée reste la méthode des différences finies [Kelly 76, Virieux 86]. Cette approche a été utilisée pour simuler des séismes à l'échelle régionale. Toutefois, des difficultés significatives surviennent dès qu'il s'agit de modéliser une topographie complexe ou un milieu hétérogène. La méthode des éléments de frontière reste une approche intéressante pour incorporer des variations to-

pographiques importantes [Sànchez-Sesma 79, Bonnet 95]. Cependant, cette approche devient vite inabordable d'un point de vue numérique dès que l'on introduit plusieurs domaines avec un matériau différent. Quant aux méthodes éléments finis, plus particulièrement la méthode des éléments spectraux [Komatitsch 98], elles surmontent avec succès les difficultés mentionnées précédemment. Toutefois ces méthodes ne sont pas adaptées à la modélisation de la rupture dans les géomatériaux. Il existe bien évidemment plusieurs stratégies concernant les méthodes éléments finis pour introduire une fissure. Les plus notables sont la méthode des éléments cohésifs [Molinari 06] et la méthode XFEM [Moës 99]. Ces méthodes ne sont pas adaptées dans notre cas du fait qu'elles ne modélisent pas l'aléa microstructurel des géomatériaux. Pour ce faire, des méthodes à l'échelle microscopique sont adaptées à la modélisation de l'hétérogénéité à l'échelle du grain dans les géomatériaux. L'ensemble de ces méthodes se nomme **Méthode des Elements Discrets**. Jusqu'à lors, ces méthodes n'étaient pas utilisées pour le dimensionnement de structure du fait que leur utilisation à cette échelle nécessite la résolution d'un problème à grand nombre de libertés dont le coût de calcul est prohibitif avec les moyens de calcul actuel. Mais avec l'arrivée des méthodes multiéchelles, on peut désormais envisager l'utilisation, du moins localement, de ces méthodes à l'échelle structurale.

Sans l'utilisation de méthodes multiéchelles, on considère à l'échelle de la structure des matériaux homogénéisés. Quant aux nonlinéarités, elles sont considérées de façon continue via des modèles d'endommagement [Kachanov 58], de plasticité [Halphen 87] ou autres... Cependant, ce type de modélisation n'est pas assez précis pour prédire la tenue de la structure pour des matériaux à forte hétérogénéité au niveau microscopique tels que les géomatériaux ou encore les composites. En observant que les effets microstructurels n'ont seulement qu'un effet local sur la structure complète, on peut par conséquent envisager de décrire l'ensemble du problème en utilisant deux échelles de représentation. D'une part, une première échelle dite grossière ou macroscopique considère un matériau homogène élastique sur l'ensemble du domaine. D'autre part, une seconde échelle dite fine ou microscopique prend en compte localement les hétérogénéités microstructurelles ainsi que les mécanismes nonlinéaires.

Parmi l'ensemble des stratégies multiéchelles, il existe plusieurs méthodes pour enrichir localement le champs solution. Nous pouvons les répertorier en deux catégories : les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel et les méthodes de décomposition de domaine. Parmi les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel se démarque la **Variational Multiscale Method** (VMM) [Hughes 95] et la **Bridging Scale Method** (BSM) [Wagner 03]. L'idée de base de ces stratégies est de décomposer le champ solution en une partie macro ($\mathbf{u}_M$) et micro ($\mathbf{u}_\mu$), ce qui nous donne un champ global $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M + \mathbf{u}_\mu$. La VMM permet d'enrichir localement le champ solution dans chaque élément fini par l'intermédiaire d'une solution analytique ou d'une solution semi-analytique. Cette méthode est généralement utilisée pour des problèmes continus. Quant à la BSM, elle reprend l'idée de base de la VMM en l'adaptant pour un couplage continu-atomistique. L'inconvénient majeur de ces stratégies est qu'elles engendrent un surcoût numérique

important ce qui limite l'intérêt du couplage. Par conséquent, nous ne nous sommes pas orientés vers ce type de stratégie. L'autre catégorie de stratégie multiéchelle se base sur des méthodes de décomposition de domaine avec ou sans recouvrement [Farhat 91, Ben Dhia 98]. Les méthodes de décomposition de domaine séparent les échelles par sous-domaine. Elles sont intéressantes car elles permettent de mettre en place une résolution parallèle. De plus, l'introduction d'une interface à la jonction des sous-domaines [Maday 89] permet de gérer des maillages incompatibles. De ces deux types de stratégies, nous préférerons les méthodes avec recouvrement ou plutôt **méthode Arlequin** qui par l'introduction d'une zone de transition permettent d'obtenir une meilleure précision numérique [Xiao 04].

Toutefois, l'aspect multiéchelle ne se réduit pas au niveau spatial. Il existe plusieurs stratégies qui permettent d'introduire plusieurs échelles au niveau temporel. Entre autres, la méthode de décomposition de domaine temporel permet de paralléliser un calcul par paquets de pas de temps [Lions 01, Farhat 03]. Cette méthode permet de répartir la charge de calcul sur plusieurs processeurs. Une autre approche applicable sur des problèmes décomposés spatialement est la méthode multipas de temps de [Combescure 01]. Elle permet d'affecter un pas de temps différent sur chacun des sous-domaines.

La première partie de ce travail réside à mettre en place une stratégie de couplage continu-continu en partant des concepts de base de la méthode Arlequin sur des problèmes d'élastodynamique. L'originalité du travail proposé consiste à limiter le raccord des champs sur le bord de la zone de recouvrement. Cela permet de résoudre à moindre coût le problème d'interface vis-à-vis des méthodes existantes [Ben Dhia 98, Xiao 04]. La suite de notre étude repose essentiellement à montrer numériquement que ce type de raccord n'a pas d'influence notable sur l'erreur numérique pour le type de problèmes traités. Pour ce faire, nous avons du mettre en place un indicateur d'erreur fiable qui se base sur une problématique bien connue pour les problèmes de couplage : l'apparition d'ondes fantômes. La suite de ce travail a consisté à déterminer les paramètres de la méthode de couplage qui permettent de limiter l'apparition de ce phénomène.

Une autre part de ce travail de thèse est d'étendre l'aspect multiéchelle à la composante temporelle. Pour ce faire, nous avons mis en place un schéma de résolution multi-pas de temps en se basant sur les travaux réalisés par [Combescure 01]. Sur cette thématique, nous observons que ce schéma est dissipatif. Cela nous a amené à développer un nouveau prédicteur sur les champs d'interface permettant de limiter l'apparition de ce phénomène.

La troisième partie de ce travail a consisté à étendre la stratégie de couplage développée dans le cadre continu-continu au cadre continu-discret. Sur ce point, nous avons utilisé le fait que l'on peut associer un maillage élément fini constitué de triangles au pavage de Voronoi du maillage élément discret pour construire de façon simple le problème d'interface. Nous proposons une approche de couplage qui consiste à minimiser la partie microscopique du modèle discret vis-à-vis du modèle continu. Cela permet de limiter l'écart entre les modèles ce qui a pour conséquence de minimiser l'apparition des ondes fantômes. Par la suite, nous validons numériquement cette approche.

Ce document s'organise en trois chapitres :

- Le premier chapitre constitue l'étude bibliographique de ce mémoire. Tout d'abord, on s'intéresse à la modélisation des géomatériaux ainsi qu'aux différentes méthodes numériques associées. Puis, on dresse un état de l'art non exhaustif des stratégies multiéchelles en espace et en temps.
- Le second chapitre traite du couplage entre modèles continus dans un cadre élasto-dynamique. On s'intéresse à l'écriture sous forme variationnelle du couplage, puis à sa discrétisation. Enfin, on développe une stratégie de résolution permettant un sous-cyclage temporel.
- Le troisième chapitre étend la stratégie de couplage écrite dans un cadre continu au couplage entre modèles discret et continu.

Chapitre 1

Etat de l'art

Sommaire

1 Introduction 6

2 Les géomatériaux 6

2.1 Introduction 6

2.2 Description du comportement des géomatériaux 7

3 Une modélisation discrète : La méthode des éléments discrets 10

3.1 Les différents modèles éléments discrets 10

3.2 Choix de la forme et de la taille des particules 16

3.3 Sur la détection du contact 17

4 La modélisation continue : une approche éléments spectraux 17

4.1 Position du problème continu 17

4.2 Approximation par la méthode des éléments spectraux 19

5 Quelques méthodes de couplage 21

5.1 Les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel 21

5.2 Les méthodes de décomposition de domaine 24

6 Les méthodes multiéchelles en temps 26

6.1 Méthode de décomposition de domaine temporel 27

6.2 Méthode multi-pas de temps ou sous-cyclage 28

7 Bilan 31

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de mettre en avant les choix stratégiques effectués pour simuler la propagation d'onde dans un milieu constitué de géomatériaux. Dans un premier temps, on dresse une analyse des principales classes de géomatériaux. A partir de cette analyse, nous avons retenu deux approches numériques appropriées. La première méthode décrite est la méthode des éléments discrets. Elle se base sur une approche mésoscopique du problème d'élastodynamique. La seconde est la méthode des éléments spectraux et correspond plutôt à une approche macroscopique. L'approche élément discret décrit bien le comportement. Toutefois, elle coûte cher d'un point de vue numérique. Une revue des stratégies multiéchelles en temps et en espace est donc proposée. En ce qui concerne l'aspect spatial, nous décrivons quelques stratégies de couplage que nous avons regroupées en deux catégories : les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel et les méthodes de décomposition de domaine. En ce qui concerne l'aspect temporel, nous décrivons deux approches : les méthodes de décomposition de domaine temporel et les méthodes de sous-cyclage.

2 Les géomatériaux

2.1 Introduction

Les géomatériaux désignent l'ensemble des matériaux d'origine naturelle tels que les sols et les roches ou d'origine artificielle tels que les bétons et les enrobés bitumeux. Les géomatériaux sont constitués de grains qui interagissent entre eux. Le comportement de ces matériaux est très divers. La complexité de celui-ci est essentiellement liée à sa forte hétérogénéité.

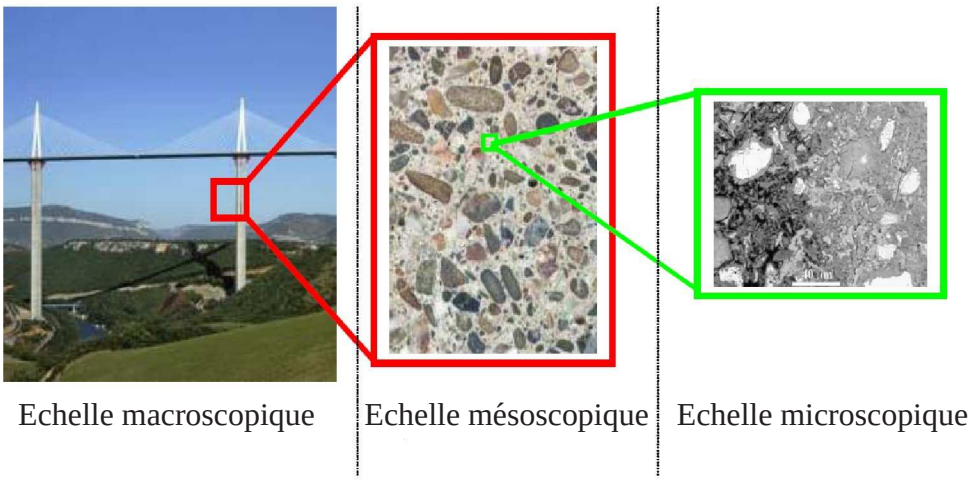


FIG. 1.1: Représentation des différentes échelles [Peyrot 06]

Parmi les méthodes numériques permettant la simulation du comportement mécanique des géomatériaux émergent deux approches de modélisation. D'une part, les modèles microscopiques modélisent la physique des micro-fissurations, des inclusions, des pores, des frottements entre grains. D'autre part, les modèles macroscopiques traduisent les modifications microscopiques par un comportement macroscopique homogénéisé via des lois de comportement pouvant inclure par exemple de la plasticité, de l'endommagement ou de la viscosité. Il est intéressant de se situer à l'échelle macroscopique (figure 1.1) parce que cela permet d'utiliser une modélisation continue.

Une autre approche consiste à utiliser une modélisation discrète. La modélisation discrète se situe généralement à l'échelle mésoscopique. Cette modélisation se dit discrète car elle s'intéresse aux mouvements de chaque grain ou d'un ensemble de grains considéré comme une entité indépendante.

2.2 Description du comportement des géomatériaux

Afin de mieux différentier l'échelle macroscopique de l'échelle microscopique, nous décrivons le comportement des géomatériaux sous ces deux angles.

2.2.1 Le béton et les roches

Ici, nous rassemblons dans une seule classe les bétons et les roches étant donné que ces matériaux ont sensiblement le même comportement. Tout d'abord, nous centrons notre analyse sur le comportement découlant d'un chargement en compression, puis en traction d'un béton ou d'une roche. Dans le cas d'un chargement en compression, on retrouve les principaux mécanismes suivants comme illustré sur la figure 1.2 :

- Phase de serrage (0) : Cette phase a lieu à de faibles niveaux de contraintes. L'application de la charge provoque une fermeture progressive des pores et microfissures préexistantes du matériau.
- Phase linéaire (1) : Cette phase correspond à la phase élastique. Celle-ci s'avère plus rigide que la phase de serrage.
- Phase d'endommagement (2) : Cette phase traduit l'apparition d'un endommagement diffu du matériau. Elle se caractérise par un amorçage ou une ouverture des microfissures.
- Phase de propagation de la microfissuration (3) : Le début de cette phase constitue le véritable point de départ de la rupture. A partir de cet état de contrainte, il y a développement du réseau fissural. Les microfissures se joignent pour donner des macrofissures.
- Comportement post-pic (4) : Il est régit essentiellement par le frottement entre les fragments.

Dans le cas d'un chargement en traction, le comportement se distingue en deux phases comme illustré sur la figure 1.2 :

– Phase (0') : On observe un comportement linéaire avec perte possible de raideur pré-pic dû à la décohésion de la matrice avec le granulat et l'apparition de microfissures.
– Phase (1') : Les microfissures en se reliant font apparaître une macrofissure qui donne lieu à un perte de rigidité structurale.

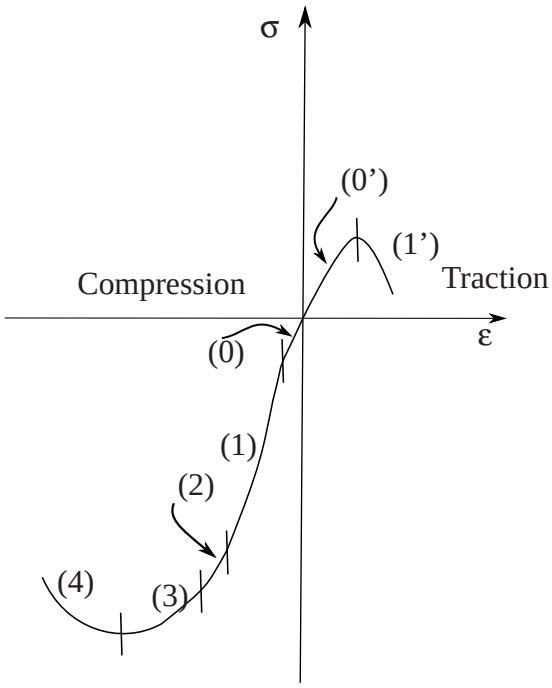


FIG. 1.2: Comportement uniaxial type d'un béton ou d'une roche [Ramtani 90]

Les modèles émanant de ces observations au niveau macroscopique sont élastoplastiques (ou viscoélastoplastiques) en compression et fragiles en traction. Pour être plus précis, on peut de surcroît prendre en compte un modèle d'endommagement [Mazars 84]. Les modèles de plasticité permettent d'avoir une description des déformations irréversibles. Les modèles d'endommagement permettent, quant à eux, de prendre en compte les pertes de rigidité liées à l'apparition d'un réseau de microfissurations.
Au niveau microscopique ces phénomènes se représenteront par un modèle de rupture fragile. Au niveau mésoscopique, on peut choisir de façon quasi-équivalente un modèle élastoplastique ou de rupture fragile.

2.2.2 Phénoménologie du comportement des sols

Les sols se définissent comme un matériau constitué de grains interagissant avec une faible cohésion. Ils se caractérisent souvent par une forte porosité qui provoque chez ces matériaux des déformations irréversibles sous chargement hydrostatique correspondant à une réduction importante de la porosité. Ils se caractérisent aussi sous chargement

déviatorique par une phase contractante suivie d'une phase où le matériau se déforme à volume plastique constant ou se dilate. Pour ces deux types de chargement, l'énergie dissipée dans le matériau évolue en fonction de la surface de contact entre les grains. Pour un chargement hydrostatique, la surface de contact augmente, ainsi que l'énergie dissipée, on a donc un écrouissage positif. Pour un chargement déviatorique, au delà d'une certaine déformation, le sol finit par se déformer sans variation de volume avec une surface de contact intergranulaire constante. Au delà du chargement déviatorique, on peut observer dans les essais des localisations de déformations accompagnées d'une forte dilatance. Dans ces zones, la surface de contact entre grains diminuant, il y a diminution de l'énergie dissipée et donc adoucissement. Un des premiers modèles qui permet de prendre en compte les comportements des sols est le modèle Cam-Clay modifié [Burland 68] qui est un modèle poroplastique à cinq paramètres. Le nombre de paramètres est peu élevé, cela permet de caractérier ce modèle comme simple. La contractance ou la dilatance sont des moteurs macroscopiques reliées à la fermeture des pores ou le roulement des grains entre eux qui correspondent à des notions microscopiques.

2.2.3 Conclusions sur les modèles

Les modèles de plasticité ont été développés à l'origine pour les métaux [Halphen 87], pour représenter des déformations irréversibles importantes devant les déformations élastiques. Ces modèles homogénéisent des phénomènes microscopiques dissipatifs à l'échelle macroscopique.

On observe aussi l'apparition de modèles d'endommagement pour prendre en compte les pertes de rigidité. La notion d'endommagement a été introduite par [Kachanov 58] afin de modéliser la rupture par fluage dans des métaux en prenant en compte la détoriation progressive du matériau. Par la suite, [Lemaitre 74] ont étendu cette notion à la rupture ductile. Enfin, [Mazars 84] étendit l'application de ces modèles aux bétons. La mécanique de l'endommagement est fondée sur l'introduction d'une nouvelle variable interne représentative de l'état de dégradation. L'état de l'endommagement modifie les caractéristiques élastiques.

La prise en compte des phénomènes de compaction nécessite l'ajout d'une variable interne : l'indice de porosité [Burland 68].

On peut remarquer aussi que le comportement en dynamique des géomatériaux varie. On observe que la résistance de ceux-ci augmente pour des vitesses de déformation importantes [Schatz 73, Mariotti 94] .

L'utilisation de ces modèles engendre numériquement des phénomènes dits de « localisation » dans le cas d'un adoucissement ($\frac{d\sigma}{d\epsilon} < 0$). Dans ce cas, la rigidité apparente est négative ce qui donne un problème mal posé. La conséquence numérique est une concentration de contrainte locale qui doit être reliée à une caractéristique physique telle qu'une longueur interne correspondant à une zone endommagée. Il existe différentes méthodes pour prendre en compte cette longueur interne tels que des modèles d'endommagement non local [Pijaudier-Cabot 87] ou l'introduction d'un paramètre de viscosité [Needleman 88] qui permettent d'étendre à une zone caractéristique le phénomène.

Une autre approche, la méthode du gradient par [de Borst 95], consiste à effectuer un développement de Taylor sur le modèle d'endommagement non local [Pijaudier-Cabot 87].

La prise en compte de discontinuités telles que des fissures ou des inclusions nécessite la mise en place de méthodes dédiées telles que la méthode XFEM [Moës 99] ou encore la GFEM [Strouboulis 00]. Ces méthodes combinent une approche élément fini standard avec la méthode de partition de l'unité [Babuska 97]. Cela permet d'enrichir localement le champ de solution avec des termes moins réguliers. Enfin, la méthode des éléments cohésifs [Molinari 06] permet de restituer l'énergie dissipée par fragmentation via une description fine du milieu. Une autre approche consiste à considérer des champs discrets qui autorisent de ce fait naturellement l'apparition des fissures.

3 Une modélisation discrète : La méthode des éléments discrets

3.1 Les différents modèles éléments discrets

La méthode des éléments discrets est une famille de méthodes numériques souvent utilisées pour l'étude des géomatériaux. Elle fut introduite par [Cundall 71]. Cette méthode se dit discrète dans le sens où on considère que chaque particule constitue une entité à part entière. On s'intéresse au mouvement de chaque particule interagissant avec ces voisines. Chaque particule représente physiquement le mouvement d'un grain ou d'un ensemble de grains.

Historiquement, on peut remarquer que parmi les méthodes éléments discrets existantes, l'évolution de ces méthodes est étroitement liée à la représentation cinématique de celles-ci. Par la suite, nous allons décrire la méthode des éléments discrets en les classant selon la richesse de leur description cinématique. Dans un premier temps, nous décrirons les modèles n'incluant que des translations que nous appellerons *Distinct Element Method* puisque celui-ci s'avère la genèse de l'ensemble des ces méthodes, puis les *Lattice models* parce qu'ils incluent en plus des translations des rotations. Et enfin, les modèles à particules déformables qui incluent en plus une description de la déformation locale des particules. Bien entendu, la classification que nous offrons ci-dessous n'est pas limitative car certains modèles seront à la charnière de ces trois classes.

Afin de décrire chaque modèle, on considère une collection de particules $\{O_i, i = 1 \cdots N\}$, où O_i désigne le centre de masse du domaine Δ_i associé à la particule et $\mathbf{x}_i$ sa position dans le repère $\mathcal{R}$ choisi au préalable. On décrit le mouvement des particules avec les équations de la dynamique. Pour des raisons de commodité d'écriture, on se situe dans le cas bidimensionel, comme illustré à la figure 1.3.

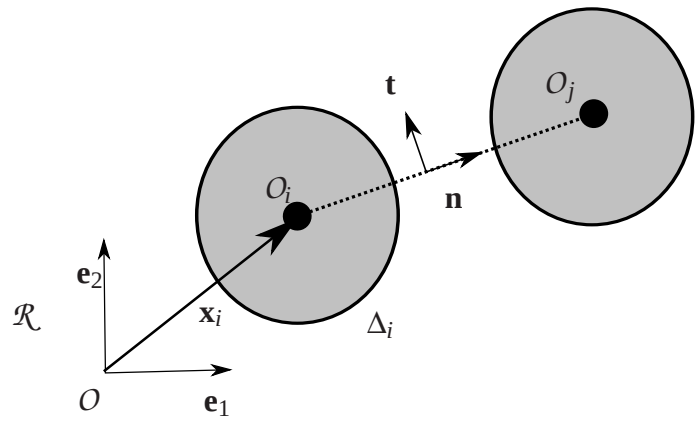


FIG. 1.3: Représentation de la mise en équation du modèle discret

En ce qui concerne les modèles discrets, l'interaction entre particules s'effectue par l'intermédiaire d'un lien entre les particules O_i et O_j modélisé en pointillé à la figure 1.3. Afin d'introduire simplement les lois relatives à ces liens, on introduit le vecteur $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x_j}-\mathbf{x_i}}{\|\mathbf{x_j}-\mathbf{x_i}\|}$ et $\mathbf{t}$ son vecteur associé orthogonal direct. Par la suite, on annote $\bullet^n$ les grandeurs projetées sur $\mathbf{n}$ et $\bullet^t$ celles sur $\mathbf{t}$. Il est aussi nécessaire d'introduire des grandeurs géométriques tels que l la distance initiale $\|\mathbf{x_j} - \mathbf{x_i}\|$.

3.1.1 *Distinct Element Model* (DEM)

Initialement, la *Distinct Element Method* [Cundall 71, Cundall 79] permet d'obtenir pour chaque particule le déplacement en translation que l'on note $\mathbf{u}_i$ pour la particule i. Son utilisation est adaptée pour des milieux granulaires sans liant. Généralement, les lois d'interaction sont des ressorts en parallèle avec des amortisseurs. La description du modèle se fait par l'intermédiaire des lois suivantes :

$$[\mathbf{M}]_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \sum_j \mathbf{F}^{\text{int}}_{j\to i} + \mathbf{F}^{\text{ext}}_i \tag{1.1}$$

où :

- $[\mathbf{M}]_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix}$ est la matrice élémentaire de masse associée à la particule O_i avec $m_i = \int_{\Delta_i} \rho dx$ et ρ la densité.
- $\mathbf{F}^{\text{int}}_{j\to i}$ est l'effort d'interaction de la particule O_j avec la particule O_i.
  Par la suite, on note g_{ij} l'interstice entre la particule O_i et la particule O_j. Celui-ci est la distance entre les particules selon $\mathbf{n}$. Dans le cas de particules circulaires, on a $g_{ij} = x^n_j - x^n_i - r_i - r_j$ où r_i et r_j sont respectivement les rayons des particules O_i et O_j. Pour des formes de particules plus complexes, le calcul de l'interstice g_{ij} devient plus coûteux.

Dans le cas d'un modèle de Cundall [Cundall 71, Cundall 79], les efforts d'interaction sont (figure 1.4) :

$$\begin{cases} \text{si } g_{ij} \leq c : \begin{bmatrix} F^{\text{int n}}_{j\to i} \\ F^{\text{int t}}_{j\to i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n_i - u^n_j \\ u^t_i - u^t_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}^n_i - \dot{u}^n_j \\ \dot{u}^t_i - \dot{u}^t_j \end{bmatrix} \\ \\ \text{si } g_{ij} > c : \begin{bmatrix} F^{\text{int n}}_{j\to i} \\ F^{\text{int t}}_{j\to i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

où les paramètres k_n, k_t, c_n et c_t sont obtenus empiriquement. Quant au paramètre c, il définit la cohésion entre les particules. Dans le cas où $c > 0$, la loi est cohésive et c définit le seuil de rupture. Dans le cas où $c = 0$, on retrouve une loi de contact.

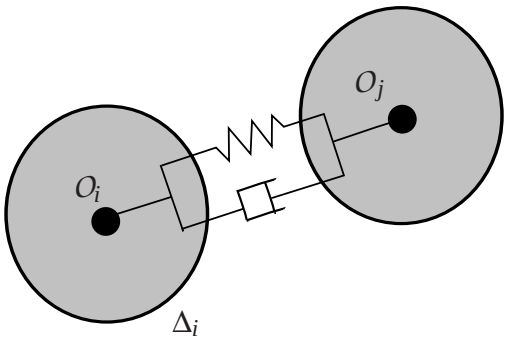


FIG. 1.4: Représentation *Distinct Element Model*

Il existe bien entendu d'autres modèles concernant les lois d'interaction entre particules comme les méthodes *Molecular Dynamics* où les lois d'interaction sont représentées par des forces normales dérivant de potentiels [Rapaport 04] ou encore la méthode NSCD (*Non Smooth Contact Dynamics*) [Jean 01, Moreau 94] où on minimise l'interpénétration des particules avec des lois discontinues. Pour des raisons de stabilité numérique, ces méthodes exigent des schémas d'intégration implicites.

– $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ est l'effort extérieur imposé à la particule O_i.

■ Bilan et limitations

L'utilisation de cette méthode reste adaptée à des milieux sans matrice. Cette méthode est aussi utilisée pour d'autres types de matériaux que les géomatériaux. Par exemple, on peut simuler à l'aide de celle-ci l'écoulement de granulés dans un silot. Par contre, ce type d'approche ne permet pas de modéliser assez précisément des milieux cohésifs comme des roches.

3.1.2 Les *"Lattice models"*

Les modèles décrits ici [Herrmann 90, Schlangen 97, van Mier 97, Delaplace 06a, Delaplace 07] sont plus riches puisqu'ils permettent de prendre en compte le déplacement en translation **u** et en rotation θ. Généralement, les lois d'interaction entre particules sont des ressorts ou des poutres. La description du modèle se fait par l'intermédiaire des lois suivantes :

$$[\mathbf{M}]_i \ddot{\mathbf{u}}_i = \sum_j \mathbf{F}^{\text{int}}_{j\to i} + \mathbf{F}^{\text{ext}}_i \tag{1.2}$$

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum_j M^{\text{int}}_{j\to i} + M^{\text{ext}}_i \tag{1.3}$$

où :

- $[\mathbf{M}]_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_i \end{bmatrix}$ est la matrice élémentaire de masse associée à la particule O_i avec $m_i = \int_{\Delta_i} \rho dx$ et ρ la densité.
- I_i est le moment d'inertie quadratique avec : $I_i = \int_{\Delta_i} \rho \|\mathbf{x} - \mathbf{x_i}\|^2 dx$
- $\mathbf{F}^{\text{int}}_{j\to i}$ et $M^{\text{int}}_{j\to i}$ sont respectivement l'effort et le moment d'interaction de la particule O_j avec la particule O_i.
  On retrouve généralement ces types de loi :
  - Ressort / Amortisseur (figure 1.5(a)) :

$$\begin{bmatrix} F^{\text{int n}}_{j\to i} \\ F^{\text{int t}}_{j\to i} \\ M^{\text{int}}_{j\to i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_t & \frac{k_t l}{2} & \frac{k_t l}{2} \\ 0 & \frac{k_t l}{2} & \frac{k_t l^2}{4} + g_t & \frac{k_t l^2}{4} - g_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n_i - u^n_j \\ u^t_i - u^t_j \\ \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_t & -r_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}^n_i - \dot{u}^n_j \\ \dot{u}^t_i - \dot{u}^t_j \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_j \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

  où les paramètres k_n,k_t,g_t,c_n,c_t et r_t sont obtenus empiriquement.
  - Poutre (figure 1.5(b)) :

$$\begin{bmatrix} F^{\text{int n}}_{j\to i} \\ F^{\text{int t}}_{j\to i} \\ M^{\text{int}}_{j\to i} \end{bmatrix} = \frac{E_p A}{a l^3} \begin{bmatrix} a l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n_i - u^n_j \\ u^t_i - u^t_j \\ \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

  où E_p est le module de poutre et a le ratio entre la section et le moment quadratique de la poutre ($a = \frac{A}{I}$). La section A est obtenue à partir de la surface de contact entre les particules i et j. Ces paramètres matériaux peuvent être obtenus de façon empirique. On rappelle ici que A correspond à la surface de contact entre les particules i et j. Quant à l, il s'agit de la distance entre les centres de masse de ces deux particules.

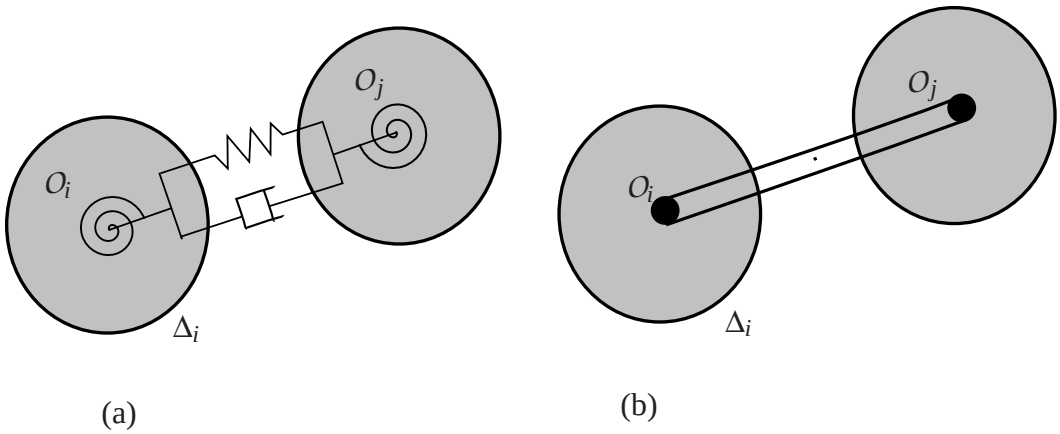


FIG. 1.5: Représentation *Lattice model*

On remarque que le comportement local est identique entre un modèle poutre et un modèle ressort [Chang 01], en choisissant : $k_n = \frac{E_p A}{l}$, $k_t = \frac{12 E_p I}{l}$ et $g_t = \frac{E_p I}{l}$.

– $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ et M^{ext} sont respectivement les efforts et moments extérieurs imposés à la particule O_i.

Illustration numérique

Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé un *Lattice model* [Delaplace 06b] constitué de poutres comme présenté précédemment. Nous avons éprouvé cette méthode sur le cas test de double fissuration présenté à la figure 1.6 [Nooru-Mohamed 92] pour un cas test en statique. A cette occasion, un solveur optimal a été proposé [Delaplace 09]. Il s'agit de solliciter un échantillon de béton comportant au préalable deux fentes. De cette façon, on observe à l'échelle macroscopique l'apparition de deux fissures. Le résultat numérique est illustré à la figure 1.7(b).

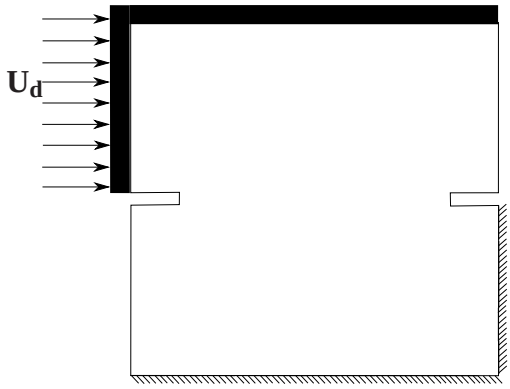
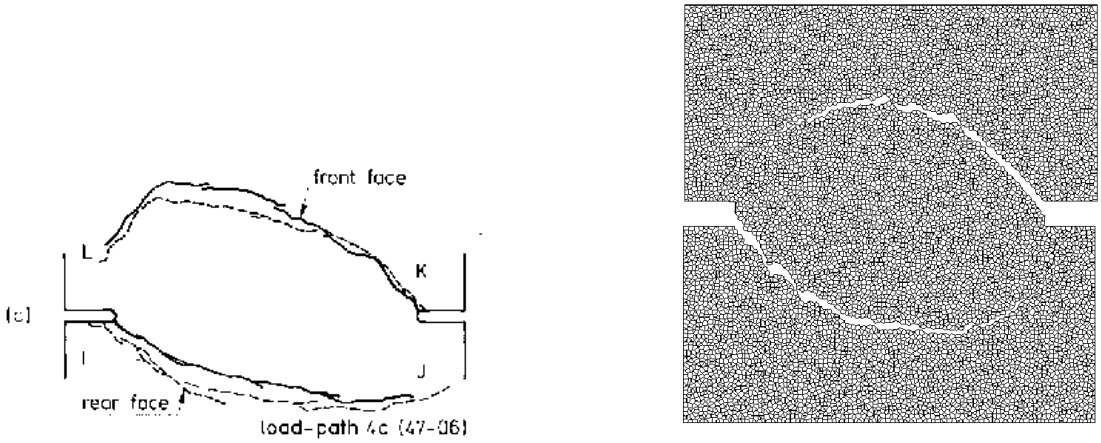


FIG. 1.6: Cas test de double-fissuration



(a) Faciès expérimental (b) Résultat DEM

FIG. 1.7: Résultats sur le cas test de double-fissuration

A partir des essais expérimentaux effectués par Nooru-Mohamed [Nooru-Mohamed 92] sur ce cas test 1.6, nous observons une bonne corrélation entre l'expérience et le résultat obtenu numériquement avec la méthode élément discret de type *Lattice model* [Delaplace 06a].

■ **Bilan et limitations**

L'utilisation d'une méthode élément discret de type *Lattice model* est adaptée pour les géomatériaux avec ou sans liant. Pour ce type de modèle, on peut prendre en compte des phénomènes de rupture en supprimant un lien entre deux particules selon une loi seuil correspondant le mieux au matériau traité.

3.1.3 Les modèles à particules déformables

Il existe des éléments discrets plus riches que les *Lattice model*. On rajoute des composantes en déformation au niveau de chaque particule [Mariotti 07]. Cette déformation peut être prise en compte soit par un champ modal (*Modal method* [Williams 85]) ou soit par un champ élément fini (*Finite-Discrete element method* [Munjiza 04a])

■ la *modal method* [Williams 85] est la première méthode à prendre en considération la déformation des particules. Elle s'écrit de cette façon :

$$m_j\ddot{u}_j + m_j\omega_j^2 u_j = \int_{\partial\Delta_j} \mathbf{t}\phi_\mathbf{j} d\Gamma + \int_{\Delta_j} \mathbf{R}\phi_\mathbf{j} d\Omega \tag{1.6}$$

où : $m_j = \int_{\Delta_j} \rho\phi_\mathbf{j}^\mathbf{T}\phi_\mathbf{j} d\Omega$ tels que $\int_\Omega \rho\phi_\mathbf{j}^\mathbf{T}\phi_\mathbf{i} d\Omega = m_j\delta_{ij}$ et ω_j correspond à la pulsation du mode caractérisé par ϕ_j. Les modes à fréquence nulle correspondent aux modes de

corps rigide de la particule. En se restreignant seulement à ces modes, on obtient un *Lattice model*. **t** et **R** correspondent respectivement aux efforts surfaciques et volumiques extérieurs.

- la *Finite-Discrete element method* [Munjiza 04a, Munjiza 04b] est une méthode éléments discrets où chaque particule est déformable et modélisée par une discrétisation éléments finis comme illustré à la figure 1.8(d). Le contact entre particules est géré soit par un Lagrangien, soit par pénalité. Les éléments finis utilisés pour décrire les particules sont simples, triangle en 2D et tétrahèdre en 3D. De cette manière, on réduit le coût numérique de détection du contact. Le principal inconvénient de cette méthode est son coût numérique. D'après [Munjiza 04a], si on respecte l'évolution de la courbe de Moore en terme de développement informatique, cette méthode pourra être utilisée pour des problèmes de structure dans 25 ans. Ici, un élément discret peut être aussi simple qu'un élément fini ou une structure complète. Cette méthode revient donc à utiliser une méthode élément fini avec une sous-structuration gérant le contact.

- **Bilan**

On remarque que la méthode des éléments discrets a évolué d'une méthode dédiée aux matériaux granulaires (sables, enrochement) vers des méthodes de type *Modal method* qui prennent en compte la cohésion du milieu ainsi que la déformation de chaque particule. Les modèles à particules déformables permettent de par leur richesse cinématique de modéliser une large gamme de géomatériaux.

3.2 Choix de la forme et de la taille des particules

La forme et la taille des particules dépend évidemment de l'application en vue. Le gabarit des particules peut varier de l'ordre du mètre pour un enrochement au millimètre pour les grains de sable ou gravier dans les bétons. Bien entendu, rien n'interdit d'utiliser des particules de forme quelconque. Cependant, la détection du contact entre ces particules risque d'être plus coûteux. C'est d'ailleurs pour cette raison que certains approximent géométriquement leur forme avec des disques 1.8(a) ou des superquadiques [Williams 89] 1.8(b). L'utilisation de disques pose un problème générique pour définir la porosité car un assemblage de disque laisse un grand espace de vides. Les superquadriques permettent de réduire cette difficulté. Pour un matériau plus compact, on utilise généralement une représentation polygonale de Voronoi 1.8(c). Pour une modélisation concave de la forme des particules, la *Finite-Discrete element method* [Munjiza 04a] illustré à la figure 1.8(d) semble appropriée.

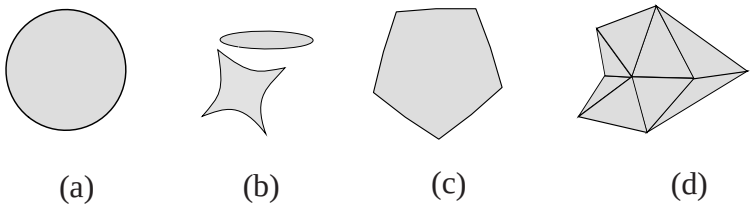


FIG. 1.8: Les différentes formes d'éléments discrets

3.3 Sur la détection du contact

Toute la difficulté dans ce type de méthode est de vérifier les conditions d'interstice entre chaque particule. Le coût de calcul dépend de la forme des particules. A la figure 1.8, les formes possibles des particules sont classées par ordre croissant du coût de calcul de vérification des conditions d'interstice.

Il existe toute une batterie d'algorithmes sur la recherche de contact dont un des plus efficace est en $O(N)$ [Munjiza 04a, Muller 96], où N est le nombre de particules. Il consiste à utiliser une grille de supports qui constituent des cellules. La première étape consiste à ranger les particules dans les cellules. La seconde étape consiste à détecter les contacts entre les particules d'une cellule et des cellules voisines.

4 La modélisation continue : une approche éléments spectraux

Le modèle continu est le modèle le plus couramment utilisé en mécanique des milieux continus. Il permet de traduire le comportement physique dans un cadre mathématique clairement identifié.

4.1 Position du problème continu

Dans notre cas, la description du modèle continu est constituée des équations de base de l'élastodynamique appliquées au domaine d'étude $\Omega \times [0,T]$ représenté à la figure (1.9).

Le domaine d'étude Ω est borné, connexe et Lipschitz de $\Re^d$ (d=1,2 ou 3 : dimension du problème). Les inconnues du problème sont le déplacement $\mathbf{u}$ et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Ce domaine répond à un équilibre dynamique et à une loi de comportement matériau caractérisée par le tenseur de compliance $\mathbf{A}$. Par la suite, la compliance $\mathbf{A}$ est associé à la loi de Hooke ($\mathbf{A}(\nabla\mathbf{u}) = \lambda \mathrm{Tr}\, \nabla\mathbf{u} + \mu\nabla^s\mathbf{u}$) où λ et μ sont les paramètres matériau de Lamé. Les conditions limites sont imposées de façon complémentaire ($\partial\Omega = \Gamma_U \bigoplus \Gamma_F$), soit par un déplacement imposé $\mathbf{u}_d$ sur Γ_U, soit par un effort imposé $\mathbf{g}_d$ sur Γ_F.

Quant aux forces volumiques, elles sont prises en compte par le terme $\mathbf{f}_d$. Des conditions initiales en déplacement $\mathbf{u}_0$ et en vitesse $\mathbf{v}_0$ sont imposées afin que le probleme soit bien posé au sens de Cauchy.

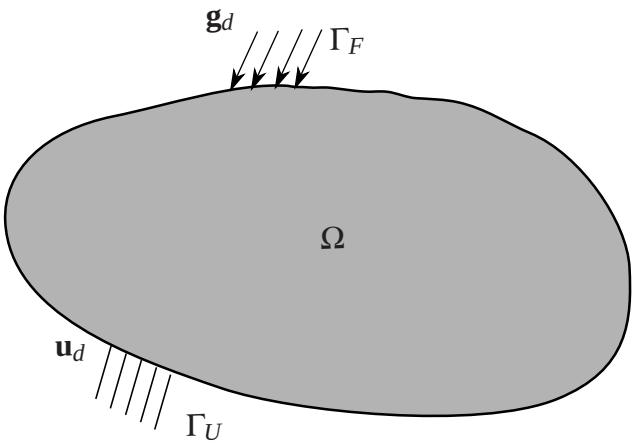


FIG. 1.9: Représentation du modèle continu

Le problème mécanique sous forme continue est alors régit par l'ensemble des équations suivantes avec $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ et $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{T}$.

– Conditions limites :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_U \times [0,T] \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{g}_d \text{ sur } \Gamma_F \times [0,T] \tag{1.8}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal extérieur au bord du domaine Ω.

– Equation d'équilibre dynamique :

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = \rho\ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \times [0,T] \tag{1.9}$$

– Loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(\nabla\mathbf{u}) \text{ dans } \Omega \times [0,T] \tag{1.10}$$

où $\mathbf{A}$ est un tenseur d'ordre 4 borné, symétrique et défini positif.

– Espaces fonctionnels :

$$\text{où : } \begin{cases} \mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2([0,T]; H^1(\Omega)^d) | \mathbf{u}_{|\Gamma_U \times [0,T]} = \mathbf{u}_d, \mathbf{u}_{|t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ et } \dot{\mathbf{u}}_{|t=0} = \mathbf{v}_0\} \\ \mathcal{T} = \{\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^{\frac{d(d+1)}{2}} | \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}\} \end{cases}$$

4.2 Approximation par la méthode des éléments spectraux

La méthode des éléments spectraux a été développée par A.T. Patera dans le domaine de la mécanique des fluides [Patera 84]. Elle allie à la fois la convergence des méthodes spectrales et la flexibilité des méthodes éléments finis. D. Komatitsch a repris cette méthode pour l'appliquer à des problèmes de sismique [Komatitsch 98]. Bien que la méthode des éléments spectraux peut être appliquée à un large panel de problèmes, nous allons nous intéresser plus particulièrement à son application dans le domaine de l'élastodynamique. La méthode des éléments spectraux est une méthode élément fini [Zienkiewicz 05, Hughes 87] avec quelques particularités. A partir du problème continu énoncé précédemment, on obtient la formulation variationnelle en déplacement (1.11).

On cherche $\mathbf{u} \in \mathcal{U}; \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_0$:

$$\int_\Omega \rho \ddot{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \mathbf{A}(\nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Gamma_F} \mathbf{g}_d \mathbf{v} d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{f}_d \mathbf{v} d\Omega \tag{1.11}$$

où : $\mathcal{U}_0 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2([0,T]; H^1(\Omega)^d) / \mathbf{u}_{|\Gamma_U \times [0,T]} = 0\}$

Afin d'effectuer la discrétisation élément fini, on introduit la partition $\cup_e \Omega_e$ sur Ω. Sur cette partition, on approxime le champ $\mathbf{u}$ à l'aide des fonctions de forme $\phi_\mathbf{i}^\mathbf{e}$. La fonction de forme $\phi_\mathbf{i}^\mathbf{e}$ est le polynôme de Lagrange d'ordre p associé au nœud $(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{e})$ de l'élément Ω_e. Afin de pouvoir effectuer l'intégration sur chaque élément Ω_e, on introduit le schéma d'intégration en dimension d caractérisé par l'ensemble des doublons $(\omega_k^{e(d)}, \mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e})$. $\omega_k^{e(d)}$ correspond au poid d'intégration au point de quadrature $\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e}$ dans l'élément Ω_e.

La discrétisation élément fini donne le problème discret suivant :

On cherche $[\mathbf{u}] \in \Re^{dN}$ qui vérifie :

$$\mathbf{M}_{ij} \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_i \tag{1.12}$$

où :

- $\mathbf{M}_{ij} = \sum_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{(p+1)^d} \rho(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e}) \omega_k^{e(d)} \phi_\mathbf{i}^\mathbf{e}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e}) \phi_\mathbf{j}^\mathbf{e}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e})$ est la matrice de masse.
- $\mathbf{K}_{ij} = \sum_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{(p+1)^d} \omega_k^{e(d)} \mathbf{A}(\nabla \phi_\mathbf{i}^\mathbf{e}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e})) : \nabla \phi_\mathbf{j}^\mathbf{e}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e})$ est la matrice de raideur.
- $\mathbf{f}_i = \sum_{\partial\Omega_e \cap \partial\Omega_F} \sum_{k=1}^{(p+1)^{(d-1)}} \omega_k^{e(d-1)} \mathbf{g}_d(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e}) \phi_\mathbf{i}^\mathbf{e}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e}) + \sum_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{(p+1)^d} \omega_k^{e(d)} \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e}) \phi_\mathbf{i}^\mathbf{e}(\mathbf{x}_\mathbf{k}^\mathbf{e})$ est le vecteur des efforts.

La particularité de la méthode des éléments spectraux par rapport aux méthodes des éléments finis standard réside dans le choix de fonctions de forme d'ordre élevé lesquelles sont centrées via des polynômes de Lagrange aux points de quadrature du schéma

d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre ($\phi_i^e(\mathbf{x_k^e}) = [\mathbf{I}]$). Cela permet d'obtenir une matrice de masse diagonale étant donné que :

$$\sum_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{(p+1)^d} \phi_\mathbf{i}^\mathbf{e}(\mathbf{x_k^e})\phi_\mathbf{j}^\mathbf{e}(\mathbf{x_k^e}) = [\mathbf{I}] \tag{1.13}$$

Le schéma de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre est un schéma d'ordre $2p-1$. On remarque que la mise sous forme diagonale de la matrice de masse nécessite une légère sous intégration. Cela n'engendre pas de déficience de rang ou autrement dit de mode à énergie nulle sur les éléments.

■ Illustration numérique

Dans le cadre de cette thèse, nous avons implémenté la méthode des éléments spectraux à l'aide de l'architecture « LMTpp » [Leclerc 08] qui permet d'allier le langage « CPP » et « PYTHON ». Nous comparons ici la performance numérique des méthodes SEM avec les méthodes éléments finis standards à travers le cas test de Lamb [Lamb 03] présenté en Annexe A et où la solution numérique est illustrée à la figure (1.10).

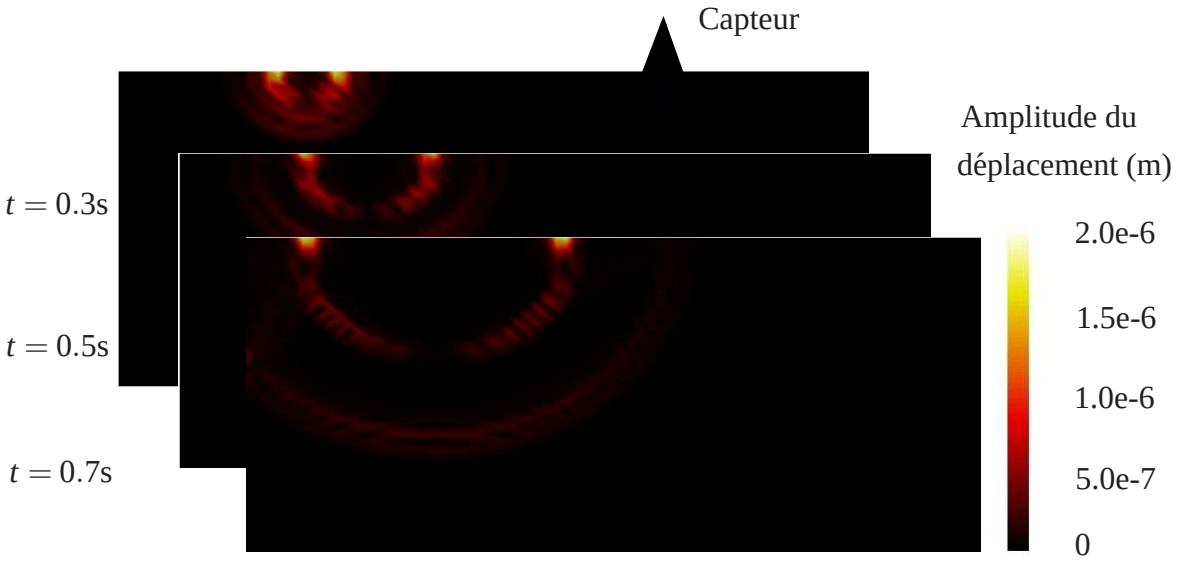


FIG. 1.10: Représentation de la solution numérique au problème de Lamb

Afin de comparer les méthodes, on prend comme critère l'erreur en solution au capteur (figure 1.10).

$$\text{erreur} = \frac{\sup_t |\mathbf{u} - \mathbf{u}^h|}{\sup_t |\mathbf{u}|} \tag{1.14}$$

avec $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}^h$ qui sont respectivement la solution analytique et numérique du problème.

On compare ici le temps de calcul pour un temps de propagation des ondes dans le milieu de 2 secondes, pour une même erreur numérique inférieure à 1%. Cela nous donne :

Type d'éléments	Q1	Q2	S3	S4	S5
Taille des mailles (m)	2	12	25	40	60
Nombre de degrés de liberté	4.0e6	3.3e6	2.3e5	1.6e5	1.1e5
Temps de calcul (min)	2973	148	65	64	59

TAB. 1.1: Comparaison des méthodes éléments finis

avec pour le détail de la discrétisation :
- Q1 : élément fini standard à forme rectangulaire et interpolation d'ordre 1.
- Q2 : élément fini standard à forme rectangulaire et interpolation d'ordre 2.
- S3 : élément spectral d'ordre 3 à forme rectangulaire.
- S4 : élément spectral d'ordre 4 à forme rectangulaire.
- S5 : élément spectral d'ordre 5 à forme rectangulaire.

De cette étude, on en déduit qu'il est intéressant d'utiliser un élément spectral d'ordre élevé de façon à résoudre notre problème à moindre coût. Toutefois, on remarque qu'à partir de l'ordre 3 le gain temporel n'est plus significatif.

■ Bilans et limitations

En terme de convergence, la méthode des éléments spectraux est intéressante vis à vis des méthodes éléments finis standards puisque l'on sait d'après [Hughes 87] que l'estimation d'erreur donne $\|\mathbf{u} - \sum_i \phi_i u_i\|_{L^2(\Omega)} = O(h^p \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)})$ avec h le diamètre maximal sur la partition $\cup_e \Omega_e$ et p l'ordre polynomial. En outre, l'obtention de façon naturelle d'une matrice de masse diagonale permet de mettre en place un schéma de résolution temporelle explicite ce qui est intéressant au niveau coût numérique. Notons aussi que cette méthode se prête bien à la parallélisation [Fisher 90].

5 Quelques méthodes de couplage

Cette partie dresse un état de l'art non exhaustif des stratégies de couplage. Les stratégies présentées ici sont regroupées en deux catégories : les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel et les méthodes de décomposition de domaine. Celles-ci sont dites multiéchelles du fait qu'elle permettent toutes deux de séparer les échelles.

5.1 Les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel

Les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel cherchent à déterminer la solution d'un problème $\mathbf{u}$ sous la forme d'une somme $\mathbf{u} = \mathbf{u}^M + \mathbf{u}^m$. En procédant de cette

façon, on cherche $\mathbf{u}^M$ et $\mathbf{u}^m$ dans des espaces fonctionnels différents. On associe respectivement ces espaces solutions à l'espace macroscopique et l'espace microscopique.

5.1.1 The bridging scale method

The bridging scale method [Wagner 03, Tang 06] fut proposé pour coupler des simulations continues avec des simulations atomistiques. Cette méthode s'applique en particulier à des problèmes localement nonlinéaires. Le problème se décompose en trois sous domaines (voir figure 1.11) :

- Ω_C : domaine du continuum discrétisé avec la méthode des éléments finis (EF) qui caractérise l'échelle grossière du problème.
- Ω_D : domaine du discret discrétisé avec la méthode de dynamique moléculaire (DM) qui caractérise l'échelle fine. Ce domaine est un patch recouvrant Ω_C dans la zone où on veut avoir une approche nonlinéaire.
- Ω_G : zone volumique à la jonction de Ω_C et de Ω_D, discrétisée avec des particules de DM. Celle-ci comprend une couche de une ou deux particules appelées atomes fantômes.

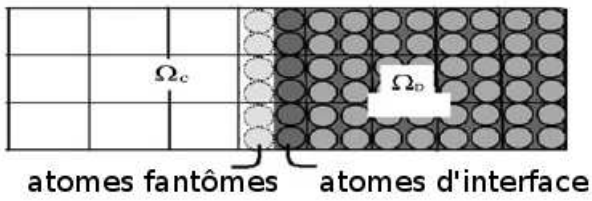


FIG. 1.11: Représentation de la Bridging Scale Method [Tang 06]

Le premier outil nécessaire pour mettre en place cette méthode est un projecteur $\mathcal{P}$ qui permet de projeter les champs exprimés dans une base DM dans la base EF. On a alors $\mathbf{u}^{EF} = \mathcal{P}(\mathbf{u}^{MD})$

où $\mathcal{P}$ est défini par :
$\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \text{Argmin}_w(\mathbf{u} - \mathbf{N}\mathbf{w})^{\mathbf{T}}\mathbf{M_A}(\mathbf{u} - \mathbf{N}\mathbf{w}) = \mathbf{N}(\mathbf{N^T}\mathbf{M_A}\mathbf{N})^{-1}\mathbf{N^T}\mathbf{M_A}\mathbf{u}$ avec $\mathbf{M_A}$ la matrice de masse DM et $\mathbf{N}$ la matrice des fonctions de forme EF exprimé aux lieux des particules DM. La projection $\mathcal{P}$ permet de passer à l'échelle élément fini le champ de dynamique moléculaire par une homogénéisation au moindre carré pondérée par la masse des particules.

Le second ingrédient de cette méthode est le *time history kernel* qui permet de régulariser temporellement le champ $\mathbf{u}$ au niveau de la zone Ω_G [Dreher 08]. Le *time history kernel* Θ est une approximation de la fonction de Green associée à la partie temporelle du

problème.

En ce qui concerne la résolution du problème mécanique. Dans $\Omega_C \setminus \Omega_D$, on résout normalement avec la méthode élément fini. Dans Ω_D, on impose $\mathbf{u}^{EF}_{|\Omega_D} = \mathcal{P}(\mathbf{u}^{DM}_{|\Omega_D})$. Dans Ω_G, on impose $\mathbf{u}^{DM}_{|\Omega_G} = \mathcal{P}^T(\mathbf{u}^{EF}_{|\Omega_G}) + c_{|\Omega_G}$. La correction $c_{|\Omega_G}$ est obtenue en utilisant le *time history kernel*. Son expression est la suivante :

$$c_{|\Omega_G} = \Theta * \mathbf{M_A}^{-1}\mathbf{f}^{EF}_{|\Omega_G} + \dot{\Theta}\mathbf{u}^{MD}_{|\Omega_G}(0) + \Theta\dot{\mathbf{u}}^{MD}_{|\Omega_G}(0) \tag{1.15}$$

■ **Bilan et limitations**

La Bridging scale method permet de coupler la DM avec les EF. Elle répond à une problématique usuelle sur les stratégies de couplage, *i.e.* l'atténuation des ondes fantômes. Toutefois, l'utilisation du *time history kernel* reste une opération relativement coûteuse puisque que l'on doit effectuer un produit de convolution (1.15). Dans cette méthode, le problème est généralement supposé linéaire au niveau de l'interface.

5.1.2 The variational multiscale method

Cette méthode introduite par Hughes [Hughes 95] est un paradigme permettant de modéliser un problème en sous-grilles chacune représentant une échelle et d'estimer *a posteriori* l'erreur du problème. La structure de la méthode reste simple, elle consiste à décomposer sous forme d'une somme le champ recherché ($\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$) où ici $\overline{\mathbf{u}}$ est résolu numériquement par la méthode des éléments finis (EF), et $\mathbf{u}'$ est obtenu analytiquement. Généralement, $\overline{\mathbf{u}}$ représente l'échelle grossière, tandis que $\mathbf{u}'$ représente l'échelle fine mais aussi l'erreur de l'échelle grossière. Afin de fixer les idées sur la méthode, nous allons illustrer celle-ci sur un problème aux conditions limites. Soit un domaine $\Omega \in \Re^d$ borné par Γ lequel est suffisament régulier répondant au problème suivant :

Trouver $u : \Omega \mapsto \Re$ tel que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{1.16}$$

où $f : \Omega \mapsto \Re$ et $g : \Gamma \mapsto \Re$ sont des fonctions données. On considérera $\mathcal{L}$ comme un opérateur différentiel. La mise en place de cette méthode nous amène à résoudre le problème variationnel suivant :

$$B(\overline{w}, \overline{u}, g') = L(\overline{w}, g') \quad \forall \overline{w} \tag{1.17}$$

où

$$\begin{cases} B(\overline{w}, \overline{u}, g') = (\mathcal{L}\overline{u}, \overline{w}) + (\mathcal{L}^*\overline{w}, g' * \overline{u}) \\ L(\overline{w}, g') = (f, \overline{w}) + (\mathcal{L}^*\overline{w}, g' * f) \end{cases} \tag{1.18}$$

$\mathcal{L}^*$ est l'opérateur différentiel adjoint associé à $\mathcal{L}$ et g' est une approximation de la fonction de Green associé au problème (1.16). L'approximation de g' peut se faire soit par projection sur un ensemble de fonctions bulles sur chaque élément fini ou l'utilisation de la fonction de Green exacte sur chaque élément fini [Hughes 95].

■ **Bilan et limitations**

La méthode variationnelle multiéchelle permet d'améliorer la qualité de la solution d'un problème de mécanique et d'estimer l'erreur *a posteriori* sachant que le calcul du produit de convolution avec les fonctions de Green entraine un cout numérique supplémentaire. Le cadre d'application de cette méthode est difficilement applicable aux problèmes non-linéaires.

5.2 Les méthodes de décomposition de domaine

La décomposition du problème se fait dans ce cas au niveau du domaine. On peut associer à chaque domaine une échelle différente. Le principe de l'ensemble de ces méthodes est d'assurer la continuité des champs à l'interface entre chaque sous-domaine.

5.2.1 Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement

Les approches de couplage présentées dans cette section s'inspirent des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement établies dans le cadre de la mécanique des milieux continus. On fait référence ici aux méthodes développées dans un cadre continu comme FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting) mise en place par [Farhat 91], ou encore la BDD (Balancing Domain Decomposition) développé par [Mandel 96]. L'intérêt de ces méthodes de décomposition de domaine est de rendre parallélisable le calcul, ce qui rend possible de gros calculs. Quant aux incompatibilités de discrétisation au niveau de l'interface, elles sont gérées par l'utilisation de la méthode des mortiers [Maday 89, Bernardi 93].
L'ensemble de ces méthodes utilise un solveur itératif se basant sur le gradient conjugué. L'introduction de l'échelle grossière se fait au niveau de l'interface par une approximation moins fine du problème d'interface que la discrétisation de départ. On se contente généralement des mouvements de corps rigides. Cela a pour effet de propager l'information principale dans l'ensemble de la structure et d'améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme de résolution.
Ce type de stratégie a été appliqué pour des problèmes de couplage dynamique moléculaire / élément fini par [Xiao 04]. L'auteur identifie l'apparition d'ondes fantômes au niveau de l'interface. Il explique que les fréquences du modèle discret non représentables par le modèle continu sont réfléchies au niveau de l'interface.

■ **Bilan et limitations**

Ce type de méthode est particulièrement efficace dans le cadre de la statique. Pour le problème de couplage qui nous intéresse (couplage continu/discret), il a été montré que ces méthodes étaient moins performantes que les méthodes avec recouvrement [Xiao 04].

5.2.2 La méthode Arlequin

La méthode Arlequin, proposée par Ben Dhia [Ben Dhia 98, Xiao 04], permet d'avoir une analyse plus fine dans une zone d'intérêt. En restant dans le cadre d'un problème d'élastodynamique comme présenté à la section 4.1, il est effectué une décomposition de domaine avec recouvrement tel que cela est illustré à la figure 1.12.

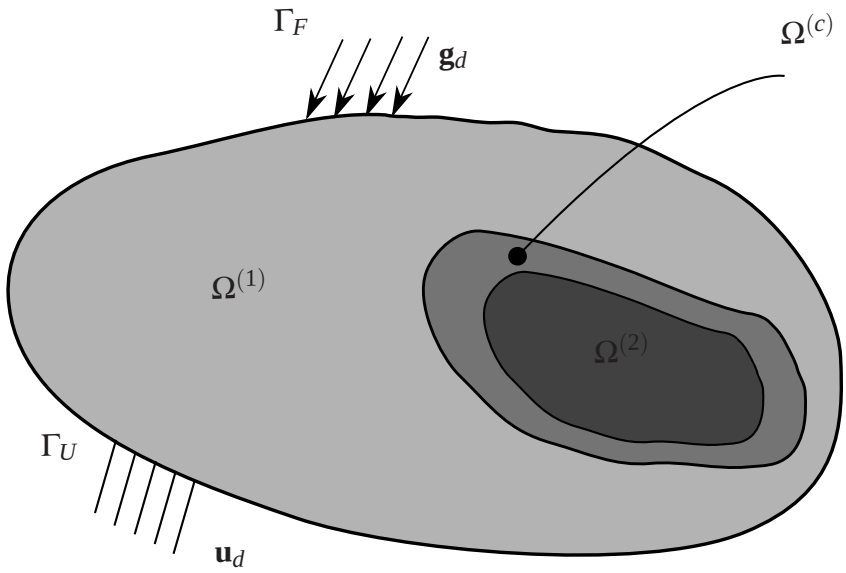


FIG. 1.12: Position du problème Arlequin

L'idée est alors de chercher un couple $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$ constitué d'une solution grossière sur $\Omega^{(1)}$ et d'une solution fine sur $\Omega^{(2)}$ obtenue par raffinement du maillage ou amélioration du modèle de comportement.

Le problème est défini par :

On (cherche $(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}^{(c)})$ tel que : $\forall(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \boldsymbol{\mu}^{(c)})$

$$\begin{cases} m^{(1)}(\ddot{\mathbf{u}}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}) + k^{(1)}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}) + b(\boldsymbol{\lambda}^{(c)}, \mathbf{v}^{(1)}) & = & l^{(1)}(\mathbf{v}^{(1)}) \\ m^{(2)}(\ddot{\mathbf{u}}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}) + k^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)}) - b(\boldsymbol{\lambda}^{(c)}), \mathbf{v}^{(2)}) & = & l^{(2)}(\mathbf{v}^{(2)}) \\ b(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\mu}^{(c)}) & = & 0 \end{cases}$$

avec :

$$m^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)}) = \int_{\Omega^{(i)}} \alpha^{(i)} \rho \mathbf{u}^{(\mathbf{i})} \mathbf{v}^{(\mathbf{i})} d\Omega$$

$$k^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)}) = \int_{\Omega^{(i)}} \beta^{(i)} \mathbf{K}(\nabla^s \mathbf{u}^{(\mathbf{i})}) : \nabla^s \mathbf{v}^{(\mathbf{i})} d\Omega$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{(c)}} \mathbf{u}\mathbf{v} + \ell^2 \nabla^s \mathbf{u} : \nabla^s \mathbf{v}$$

$$l^{(i)}(\mathbf{v}^{(i)}) = \int_{\Gamma_F} \beta^{(i)} \mathbf{g}_d \mathbf{v}^{(\mathbf{i})} d\Gamma + \int_{\Omega^{(i)}} \beta^{(i)} \mathbf{f}_d \mathbf{v}^{(\mathbf{i})} d\Omega$$

où :

$$\begin{cases} \ell \text{ est un paramètre homogène à une longueur pénalisant les termes en gradient.} \\ \{\alpha_i\}_{i=1,2} \text{ et } \{\beta_i\}_{i=1,2} \text{ sont des partitions de l'unité relatant le mélange de modèle.} \end{cases}$$

■ **Bilan et limitations**

Dans l'analyse mathématique de la méthode Arlequin que l'on retrouve dans la thèse de G. Rateau [Rateau 03], il est montré que ce problème admet une solution unique puisqu'il vérifie le théorème de Brezzi [Brezzi 74]. La pertinence des résultats de cette méthode se base sur le choix de la zone de collage Ω_c, du paramètre ℓ, de $\{\alpha_i\}_{i=1,2}$ et de $\{\beta_i\}_{i=1,2}$ les fonctions de pondération. Cette méthode est intéressante dans le sens où elle autorise le recouvrement. Cela permet de prendre en compte des maillages géométriquement incompatibles. Elle permet de surcroit de coupler des modèles continus très différents tels que des poutres avec des plaques. Par ailleurs, dans le cadre d'une couplage continu / discret, l'introduction d'une zone de transition permet d'améliorer les performances numériques en terme d'erreur [Xiao 04, Rousseau 09].

6 Les méthodes multiéchelles en temps

Dans un problème de mécanique, la description des phénomènes peut être considérée avec différentes échelles temporelles.

6.1 Méthode de décomposition de domaine temporel

Ce type de méthode, introduite par [Lions 01] sous le nom de schéma en temps « pararéel » puis reprise par [Farhat 03], permet de profiter d'une architecture parallèle pour la discrétisation en temps d'une équation d'évolution. On considère une équation d'évolution du premier ordre (1.19) avec une condition initiale.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{sur } [0,T] \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{C.I.} \end{cases} \tag{1.19}$$

où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{f}$ peuvent être des scalaires ou des vecteurs et $\mathbf{A}$ est une application linéaire. $\mathbf{u}_0$ est la condition initiale associée au problème.
Tout d'abord, on introduit une grille grossière $\cup \mathcal{S}_i = [0,T]$ avec $\mathcal{S}_i = [t^i, t^{i+1}]$ sur chaque intervalle $\mathcal{S}_i$ comme illustré à la figure 1.13. Puis, on introduit une grille fine sur chaque intervalle.

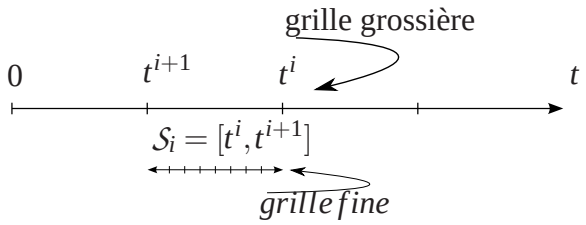


FIG. 1.13: Représentation de la discrétisation pour la méthode « pararéel »

L'algorithme de résolution est itératif d'indicateur k. On note les variables se rapportant à la grille grossière $\overline{\mathbf{y}}$ et celle se rapportant à la grille fine $\mathbf{y}$. L'algorithme prend la forme suivante :

Initialisation :
Résolution de (1.19) sur la grille grossière qui nous donne $\overline{\mathbf{y}}^i_{k=0}$ pour approximation de $\mathbf{u}(t^i)$.
Boucle itérative : $k = 0, 1, \ldots$

Etape 1 :
Résolution sur chaque grille fine $\mathcal{S}_i$ du problème (1.20) avec pour condition initiale $\overline{\mathbf{y}}^i_k$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}^i_k + \mathbf{A}\mathbf{y}^i_k = \mathbf{f} & \text{sur } [0,T] \\ \mathbf{y}^i_k(t^i) = \overline{\mathbf{y}}^i_k & \text{C.I.} \end{cases} \tag{1.20}$$

Etape 2 :
Détermination des sauts :

$$\Delta^i_k = \mathbf{y}^{i-1}_k(t^{i-}) - \mathbf{y}^i_k(t^i) \tag{1.21}$$

Etape 3 :
Détermination de la correction $\overline{\mathbf{c}}_k^i$ sur la grille grossière en résolvant le problème :

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{c}}}_k + \mathbf{A}\overline{\mathbf{c}}_k = 0 & \text{sur } [0,T] \\ \overline{\mathbf{c}}_k(t^0) = \overline{\mathbf{c}}_k & \text{C.I.} \\ \overline{\mathbf{c}}_k(T^i) = \overline{\mathbf{c}}_k(t^{i-}) + \Delta_k^i & \text{Conditions de raccord} \end{cases} \tag{1.22}$$

On remarque que $\overline{\mathbf{c}}_k(t)$ a une régularité définie au sens des distributions.
Etape 4 :
Mise à jour de la solution sur la grille grossière :

$$\overline{\mathbf{y}}_{k+1}^i = \mathbf{y}_k^{i-1}(t^{i-}) + \overline{\mathbf{c}}_k(t^i) \tag{1.23}$$

■ **Bilan et limitations**

Cette méthode permet de mettre en place une stratégie de résolution parallèle en temps. Cette approche est applicable à des problèmes paraboliques. Pour des problèmes hyperboliques, il a été montré par [Farhat 03] que des phénomènes parasites apparaissent et rendent inconsistante la méthode.

6.2 Méthode multi-pas de temps ou sous-cyclage

L' approche multi-pas de temps, présentée ici, a été introduite par A. Combescure dans [Combescure 01]. Cette méthode s'applique à un problème de mécanique décomposé en sous-domaines par une approche duale. Elle permet de choisir le schéma temporel adéquat pour un sous-domaine avec son pas de temps propre.

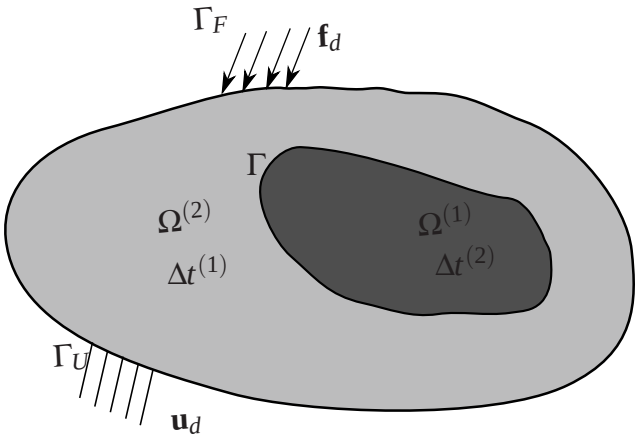


FIG. 1.14: Problème décomposé en sous-domaines

Considérons un problème décomposé en deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ séparé par l'interface Γ (voir figure 1.14). Au domaine $\Omega^{(i)}$, on associe le pas de temps $\Delta t^{(i)}$ tel que

$\Delta t^{(1)} = m\Delta t^{(2)}$ avec m entier.

La décomposition de domaine par une approche duale nous amène à résoudre le problème discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{C}^{(1)^T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{M}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)} + \mathbf{C}^{(2)^T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{C}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{0} \end{cases}$$

où $\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$ et $\mathbf{u}^{(i)}$ sont le vecteur accélération et le vecteur déplacement sur le sous-domaine $\Omega^{(i)}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des efforts d'interface sur Γ. $\mathbf{M}^{(i)}$, $\mathbf{K}^{(i)}$, $\mathbf{C}^{(i)}$ et $\mathbf{f}^{(i)}$ sont respectivement la matrice de masse, la matrice de raideur, les matrices de projection et les efforts extérieurs sur le sous-domaine $\Omega^{(i)}$.

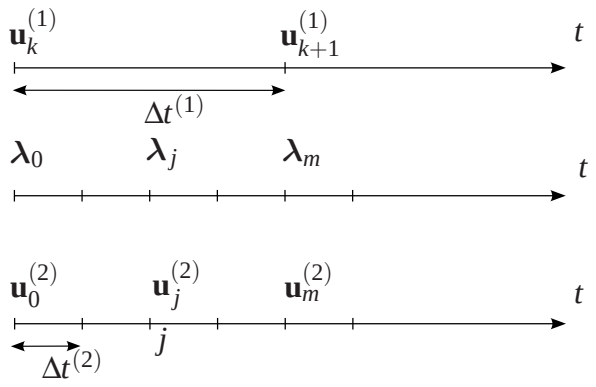


FIG. 1.15: Répartition de la discrétisation temporelle sur chaque sous-domaine

La résolution temporelle s'effectue à l'aide d'un schéma de Newmark caractérisé par les paramètres $\gamma^{(i)}$ et $\beta^{(i)}$ [Hughes 87] associés au sous-domaine $\Omega^{(i)}$. On introduit la notation $\mathbf{u}_j^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)}(j\Delta t^{(i)})$ comme illustré sur la figure (1.15). Par soucis de simplicité, l'intervalle de temps utilisé est $[0, \Delta t^{(1)}]$. L'effort d'interface $\boldsymbol{\lambda}$ est discrétisé sur la grille temporelle la plus fine, *i.e.* en $\Delta t^{(2)}$. Le schéma de Newmark s'écrit ainsi :

$$\mathbf{u}_{j+1}^{(i)} =^P \mathbf{u}_j^{(i)} + \beta^{(i)}\Delta t^{(i)2}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i)}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i)} =^P \dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \gamma^{(i)}\Delta t^{(i)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i)}$$

avec les prédicteurs

$$^P\mathbf{u}_j^{(i)} = \mathbf{u}_j^{(i)} + \Delta t^{(i)}\dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \Delta t^{(i)2}(\frac{1}{2} - \beta^{(i)})\ddot{\mathbf{u}}_j^{(i)} \tag{1.24}$$

$$^P\dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} = \dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \Delta t^{(i)}(1 - \gamma^{(i)})\ddot{\mathbf{u}}_j^{(i)}$$

Afin de séparer les difficultés dans le calcul multi-pas de temps, on effectue la décomposition $\mathbf{u}_j^{(i)} = \mathbf{u}_j^{(i),f} + \mathbf{u}_j^{(i),l}$. La notation $\bullet^{,f}$ désigne la partie libre du champ. Quant à la notation $\bullet^{,l}$, elle désigne la partie liée du champ. Cela nous amène à résoudre sur chaque sous-domaine de façon indépendante :

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} = \mathbf{f}_{j+1}^{(i)} - \mathbf{K}^{(i)}\mathbf{u}_{j+1}^{(i)} \tag{1.25}$$

avec : $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)} + \beta^{(i)}\Delta t^{(i)2}\mathbf{K}^{(i)}$.
Puis, on détermine $\boldsymbol{\lambda}_{j+1}$:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_j = -[(1-\frac{j}{m})\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{w}_k^{(1),f} + \frac{j}{m}\mathbf{C}^{(1),f}\mathbf{w}_{k+1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{w}_j^{(2),f}] \tag{1.26}$$

avec $\mathbf{H}$ et $\mathbf{w}_j^{(i),f}$ qui sont définis selon le choix de la condition de continuité au niveau de l'interface :

– en déplacement :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_j^{(i),f} =^P \mathbf{u}_j^{(i)} + \beta^{(i)}\Delta t^{(i)2}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} \\ \mathbf{H} = \sum_i \beta^{(i)}\Delta t^{(i)2}\mathbf{C}^{(i)}\tilde{\mathbf{M}}^{(i)-1}\mathbf{C}^{(i)T} \end{cases} \tag{1.27}$$

– en vitesse :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_j^{(i),f} =^P \dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \gamma^{(i)}\Delta t^{(i)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} \\ \mathbf{H} = \sum_i \gamma^{(i)}\Delta t^{(i)}\mathbf{C}^{(i)}\tilde{\mathbf{M}}^{(i)-1}\mathbf{C}^{(i)T} \end{cases} \tag{1.28}$$

– en accélération :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_j^{(i),f} = \ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} \\ \mathbf{H} = \sum_i \mathbf{C}^{(i)}\tilde{\mathbf{M}}^{(i)-1}\mathbf{C}^{(i)T} \end{cases} \tag{1.29}$$

On note que [Combescure 01] préconise un raccord en vitesse pour assurer la stabilité du schéma pour n'importe quel schéma de Newmark.

Ensuite, on détermine $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),l}$ en résolvant :

$$\mathbf{M}^{(i)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),l} = \mathbf{C}^{(i)}\boldsymbol{\lambda}_{j+1} \tag{1.30}$$

Et enfin, on assemble :

$$\ddot{\mathbf{u}}_j^{(i)} = \ddot{\mathbf{u}}_j^{(i),f} + \ddot{\mathbf{u}}_j^{(i),l} \tag{1.31}$$

■ **Bilan**

Cette méthode multi-pas de temps permet de coupler plusieurs sous-domaines avec des schémas de résolution temporelle appropriés. La stabilité de ce schéma a été démontrée rigoureusement dans [Gravouil 01]. Les mêmes auteurs proposent une extension de cette méthode à des problèmes nonlinéaires dans [Combescure 01]. Il est même possible de mettre en place une stratégie de réduction de modèle localement [Faucher 04a, Faucher 04b].

7 Bilan

A travers la présentation des géomatériaux, nous avons mis en avant la complexité de leurs comportements. Les modèles utilisés à l'échelle macroscopique sont obtenus à partir de l'homogénéisation du comportement mésoscopique. Nous préfèrons utiliser un modèle mésoscopique qui permet de prendre en compte les hétérogénéités matériaux ainsi que les discontinuités dues à l'apparition de fissures.

Le choix que nous avons effectué est d'utiliser la méthode des éléments discrets parce qu'elle traduit directement le comportement des géomatériaux à l'échelle mésoscopique, ce qui permet d'obtenir un comportement plus précis. Toutefois, comme nous l'avons vu, cette méthode reste inabordable d'un point de vue numérique sur un calcul de structure. Une stratégie usuelle dans ce cas de figure est d'utiliser une méthode de résolution multiéchelle. En effet, l'utilisation d'un modèle microscopique sur l'ensemble de la structure est rarement nécessaire. C'est pour cette raison que l'on souhaite partitionner notre problème en discrétisant d'une part la zone d'intérêt avec la méthode des éléments discrets et le reste de la structure avec un modèle continu. De cette façon, on réduit considérablement le coût numérique.

Parmi l'ensemble des méthodes de couplage décrites dans ce chapitre, une stratégie se basant sur une méthode de décomposition de domaine semble la plus judicieuse. En effet, les méthodes de décomposition de l'espace fonctionnel semblent inadaptées pour deux raisons. Tout d'abord, les deux modèles coexistent dans une zone d'intérêt. Dans ce cas, le modèle grossier au niveau du patch perturbe la solution globale et engendre un surcoût numérique. Ensuite, afin d'obtenir une bonne consistance, ces méthodes nécessitent la résolution de problèmes annexes coûteux via la détermination d'une fonction de Green. Finalement, on s'intéressera plutôt à une méthode de décomposition de domaine de type Arlequin du fait qu'elle autorise le recouvrement et permet par conséquent le traitement de maillages géométriquement incompatibles.

De la même façon, *i.e.* afin de réduire le coût de calcul, nous nous sommes orientés vers des stratégies multiéchelles en temps. En ce qui concerne la méthode pararéel, nous l'avons écartée de nos choix car elle pose des problèmes d'inconsistance pour les problèmes d'élastodynamique qui nous intéressent. Du fait que l'on ait choisi auparavant une approche par décomposition de domaine, il paraît naturel que notre approche multiéchelle se base sur une méthode de sous-cyclage.

Dans la suite du document, nous présentons nos travaux suivant deux axes donnant lieu à deux chapitres distincts :

– Le chapitre 2 décrit l'approche de couplage entre deux modèles continus. Les aspects concernant la mise en place de la décomposition de domaine avec recouvrement sont présentés. L'originalité du travail proposé consiste à limiter le raccord des champs seulement sur le bord de la zone de recouvrement. En outre, une évolution du schéma de résolution multi-pas de temps est présentée.

– Le chapitre 3 présente quant à lui l'extension de la méthode de couplage continu-continu présentée dans le chapitre 2 à un couplage discret-continu. Les aspects concernant son implantation sont présentés.

Chapitre 2

Formulation de couplage continu-continu

Sommaire

1 Introduction 34

2 Une formulation de couplage continu-continu 35

2.1 Préliminaires 35

2.2 Position du problème de couplage 36

2.3 Ecriture de la formulation faible 38

2.4 Ecriture du problème couplé sous forme discrète 40

2.5 Ecriture du problème couplé sous forme lagrangienne 40

3 Discrétisation des opérateurs de couplage 41

3.1 Interfaces discrétisées avec des éléments spectraux d'ordre 1 42

3.2 Interfaces discrétisées avec des éléments spectraux d'ordre 5 44

3.3 Bilan 45

4 La résolution 45

5 Illustration numérique sur un problème 1-D 48

5.1 Position du problème poutre 48

5.2 Etude paramétrique de la méthode développée 52

5.3 Etude numérique de la méthode Arlequin 55

6 Etude 2D des différents raccords de couplage 57

6.1 Position du problème 58

6.2 Analyse des résultats 59

6.3 Résultats numériques 60

7 Résolution par une approche multi-pas de temps 61

7.1 Introduction 62

7.2 Position du cas test 65

7.3 Résultats numériques 67

8 Conclusion 73

1 Introduction

Dans la plupart des problèmes de mécanique, plusieurs phénomènes physiques non-linéaires (fissuration, endommagement, plasticité ...) doivent être pris en considération. La nécessité de prendre en compte ces phénomènes dépend de la finesse de résolution désirée. En dépit des performances numériques actuelles, traiter un problème mécanique de grande envergure entièrement nonlinéaire reste utopique d'un point de vue numérique. Après avoir observé que les phénomènes nonlinéaires restent localisés, plusieurs stratégies multiéchelles ont été mises en place afin de faire face à cette difficulté. Plusieurs d'entre elles ont été décrites dans le chapitre précédent.

L'objectif du travail présenté dans ce chapitre est d'introduire une formulation de couplage efficace entre deux approches continues ayant une méthode de discrétisation différente. Nous nous limiterons dans le cadre de ce chapitre à des problèmes linéaires. Ce travail constitue un point de départ pour le couplage continu / discret exposé au chapitre 3. L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de travailler en mécanique des milieux continus où le cadre mathématique est clairement défini. L'approche que nous proposons ici s'inspire de la méthode Arlequin appliquée aux équations de l'élastodynamique [Ben Dhia 98, Xiao 04]. Cette stratégie permet de coupler des modèles en introduisant une zone de transition aussi appellée zone de couplage. L'introduction de cette zone permet notamment de gérer des maillages incompatibles en terme d'espaces d'approximations et de géométrie.

Notre travail a consisté à étendre la stratégie Arlequin [Ben Dhia 98] au cadre dynamique, couplant deux modèles continus de discrétisations différentes. Le premier enjeu réside dans l'amélioration des performances en terme de coût de calcul numérique. En effet, le coût de calcul des opérateurs de couplage ainsi que la résolution du problème couplé s'avère prohibitif pour un problème de dynamique transitoire qui nécessite la résolution d'un problème d'interface à chaque pas de temps. Pour ce faire, nous avons mis en place un couplage se limitant au bord de la zone de couplage au lieu du couplage volumique habituel [Ben Dhia 98]. Néanmoins, il s'agit de s'assurer que ce type de couplage ne déteriore pas la précision numérique. Le second enjeu de notre travail a été de mettre en place une stratégie de résolution multi-pas de temps en se basant sur les travaux réalisés par [Combescure 01]. Sur ce point, nous proposons un schéma d'ordre plus élevé permettant d'améliorer la consistance du schéma de résolution temporelle.

La première section de ce chapitre se consacre à l'écriture de la formulation variationnelle du problème couplé en partant des équations de base de la mécanique. Dans une seconde section, nous nous intéressons au choix des espaces d'approximation des quantités d'interface du problème de couplage. Puis, une section est consacrée à l'extension de l'aspect multiéchelle sur la composante temporelle. Enfin, nous illustrons la stratégie numérique sur un cas test 1D, ainsi que sur un cas test 2D.

2 Une formulation de couplage continu-continu

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'écriture de la formulation de couplage sous forme variationnelle en partant des équations de l'élastodynamique. Par la suite, on considère un problème de mécanique soumis aux hypothèses des petites perturbations.

2.1 Préliminaires

Afin de pouvoir mettre en place la formulation de couplage sous forme variationnelle, on s'intéresse tout d'abord à la mise en place d'une formulation variationnelle générique pour un problème de dynamique.

On considère un domaine d'étude Ω borné par $\partial\Omega$, connexe et Lipschitz de $\Re^d$ répondant aux lois de l'élastodynamique. Le bord $\partial\Omega$ est partitionné par Γ_u,Γ_g et Γ_a tels que $\partial\Omega = \Gamma_u \oplus \Gamma_g \oplus \Gamma_a$. Γ_u et Γ_g correspondent respectivement au bord du domaine $\partial\Omega$ où sont imposées les conditions de Dirichlet et de Neumann. Enfin sur Γ_c, on considère qu'il y a une indétermination à la fois sur le chargement et la cinématique. Cette frontière nous permettra par la suite de mettre en place le problème couplé. Le problème est représenté à la figure 2.1 et se déroule sur l'intervalle de temps $I = [0,T]$.

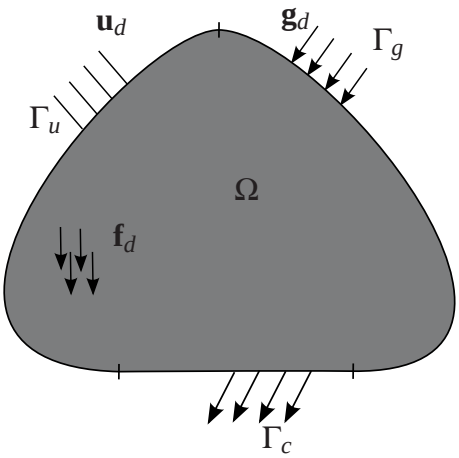


FIG. 2.1: Problème préliminaire

La formulation forte du problème nous amène à déterminer le déplacement $\mathbf{u}$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, lesquels sont suffisament réguliers et vérifient les équation suivantes :

– Conditions limites :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_u \times I \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{g}_d \text{ sur } \Gamma_g \times I \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda} \text{ sur } \Gamma_c \times I \tag{2.1}$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$.

– Equation d'équilibre dynamique :

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d = \rho\ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \times I \tag{2.2}$$

– Loi de comportement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(\nabla^s \mathbf{u}) \text{ dans } \Omega \times I \tag{2.3}$$

– Conditions initiales :

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \text{ dans } \Omega \tag{2.4}$$

où $\mathbf{u}_d$ correspond aux déplacements imposés sur le bord Γ_u, $\mathbf{f_d}$ est la force volumique dans Ω, $\mathbf{g}_d$ est l'effort surfacique imposé sur Γ_g. Ici, on introduit sur Γ_a le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ qui est une inconnue et assimilable à un effort surfacique. La masse volumique du milieu est noté ρ. Le comportement du matériau est caractérisé par une compliance $\mathbf{A}$ qui traduit un comportement linéaire de celui-ci.

A partir de la formulation forte précédemment écrite, on obtient une formulation variationnelle de ces équations.

Trouver $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{C}_0^2(I; H^1_{\mathbf{u_d}}(\Omega, \Gamma_u)^d) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_a)^d$ tel que :

$$m_\Omega(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b_{\Gamma_c}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = f_\Omega(\mathbf{v}) + g_{\Gamma_g}(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_0 \tag{2.5}$$

avec

$$m_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \rho \mathbf{u}.\mathbf{v} d\Omega \quad , \quad k_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{A}(\nabla^s \mathbf{u}) : \nabla^s \mathbf{v} d\Omega \quad , \quad b_{\Gamma_c}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda}.\mathbf{v} d\Gamma$$

$$f_\Omega(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f_d}.\mathbf{v} d\Omega \quad , \quad g_{\Gamma_g}(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_g} \mathbf{g_d}.\mathbf{v} d\Gamma$$

$\mathcal{U}_0 = H^1_{\mathbf{0}}(\Omega, \Gamma_u)^d$ est un espace vectoriel.

On remarque que m_Ω, k_Ω et b_{Γ_c} sont bilinéaires continues et que f_Ω et g_{Γ_g} sont linéaires continues. En outre, ce problème est mal posé au sens d'Hadamard étant donné qu'il existe une indétermination sur $\boldsymbol{\lambda}$.

2.2 Position du problème de couplage

Dans cette section, on s'intéresse à la mise en place de la formulation de couplage dans un cadre dynamique.

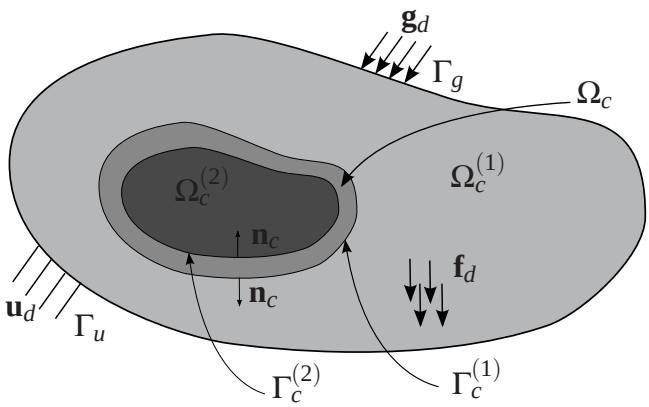


FIG. 2.2: Problème de référence

On reprend le problème de référence continu énoncé dans le premier chapitre à la section 4.1 auquel on applique une décomposition de domaine avec recouvrement.

On considère alors un domaine d'étude Ω borné par $\partial\Omega$, connexe et Lipschitz de $\Re^d$ décomposé en deux sous-domaines $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$. On note $\Omega_c = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)}$ la zone de recouvrement, $\Omega_c^{(i)} = \Omega^{(i)} \setminus \Omega_c$, $\Gamma_c^e = \partial\Omega_c \cap \partial\Omega$ le bord extérieur de la zone de recouvrement, $\Gamma_c^i = \partial\Omega_c \setminus \Gamma_c^e$ son bord intérieur. On introduit les interfaces $\Gamma_c^{(i)} = \partial\Omega_c^{(i)} \cap \Gamma_c^i$ entre $\Omega_c^{(i)}$ et Ω_c et l'interface complète $\Gamma_c = \Gamma_c^{(1)} \cup \Gamma_c^{(2)}$ (voir figure 2.2). L'intervalle de temps est noté $I = [0, T]$.

Le problème mécanique est gouverné par l'ensemble des équations suivantes :

– Conditions limites ($i \in \{1,2\}$) :

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_u \times I \quad \boldsymbol{\sigma}^{(i)}\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{g}_d \text{ sur } \Gamma_g \times I \tag{2.6}$$

– Equation d'équilibre dynamique ($i \in \{1,2\}$) :

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \mathbf{f}_d = \rho\ddot{\mathbf{u}}^{(i)} \text{ dans } \Omega^{(i)} \times I \tag{2.7}$$

– Loi de comportement ($i \in \{1,2\}$) :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{A}(\nabla^s\mathbf{u}^{(i)}) \text{ dans } \Omega^{(i)} \times I \tag{2.8}$$

– Conditions initiales ($i \in \{1,2\}$) :

$$\mathbf{u}^{(i)}|_{t=0} = \mathbf{u}_0^{(i)} \text{ dans } \Omega^{(i)} \quad \dot{\mathbf{u}}^{(i)}|_{t=0} = \mathbf{v}_0^{(i)} \text{ dans } \Omega^{(i)} \tag{2.9}$$

– Conditions de continuité :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} \text{ sur } \Gamma_c \tag{2.10}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)})\mathbf{n}^{(c)} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_c \tag{2.11}$$

où ρ est la masse volumique, $\mathbf{f}_d$ est l'effort volumique, $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ et $\mathbf{u}^{(i)}$ sont respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy et le déplacement associé au domaine $\Omega^{(i)}$. $\mathbf{K}$ est le tenseur de Hooke, $\mathbf{g}_d$ est l'effort surfacique imposé sur $\Gamma_g(\Gamma_g^{(i)} = \Gamma_g \cap \partial\Omega_c^{(i)}$ et $\Gamma_{gc}^{(i)} = \Gamma_g \cap \Gamma_c^e$) , $\mathbf{u}_d$ est le déplacement imposé sur Γ_u tel que $\Gamma_u \cap \Gamma_g = \emptyset$. Afin que le problème soit bien posé temporellement, on a introduit les conditions initiales $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{v}_0$. $\mathbf{n_c}$ est le vecteur normal unitaire orienté de $\Omega_c^{(1)}$ vers Ω_c pour l'interface $\Gamma_c^{(1)}$ et orienté de Ω_c vers $\Omega_c^{(2)}$ pour l'interface $\Gamma_c^{(2)}$.

2.3 Ecriture de la formulation faible

Dans un premier temps, on introduit une partition de l'unité sur $\bar{\Omega}_c$:

$$(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) = (\alpha, 1-\alpha)$$

où $\alpha \in]0,1[$ est une constante défini sur $\bar{\Omega}_c$.

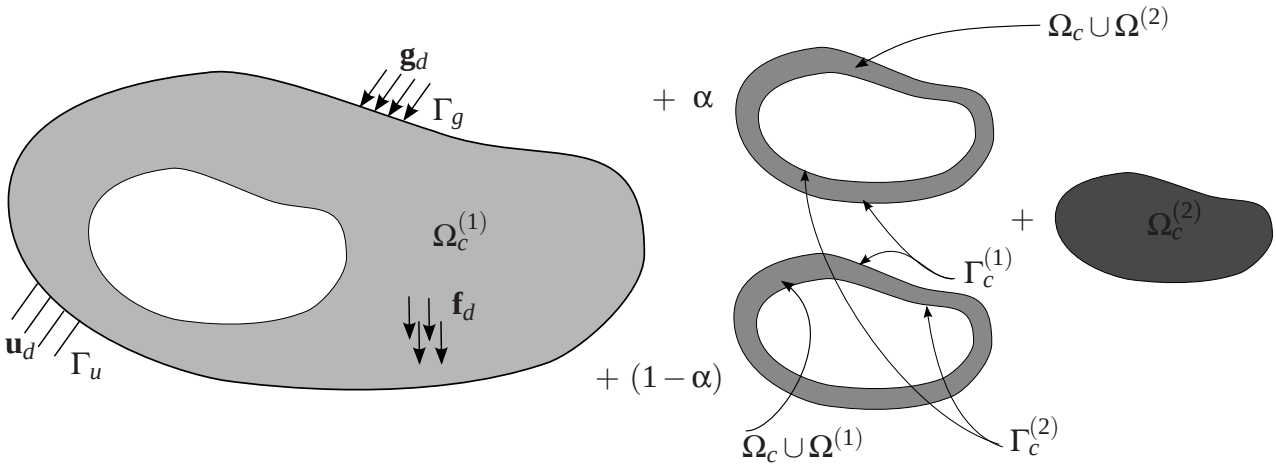


FIG. 2.3: Sommation des formulations

Après sommation de la formulation (2.5) obtenue dans le problème préliminaire écrite sur $\Omega_c^{(i)}$ et la partition $\alpha^{(i)} \in]0,1[$ de celle-ci sur $\bar{\Omega}_c$ (illustration figure 2.3), on obtient la formulation variationnelle suivante :

Trouver $u^{(i)} \in \mathcal{U}^{(i)} = \mathcal{C}_0^2(I; H^1_{\mathbf{u_d}}(\Omega^{(i)}, \Gamma_u)^d)$ tel que :

$$m^{(i)}(\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}, \mathbf{v}) + a^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{v}) = l^{(i)}(\mathbf{v}) + \varepsilon^{(i)} b^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\mathbf{n_c}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_0^{(i)} = H^1_{\mathbf{0}}(\Omega^{(i)}, \Gamma_u)^d \tag{2.12}$$

avec $\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon^{(2)} = 1$:

$$m^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)},\mathbf{v}) = m_{\Omega_c^{(i)}}(\mathbf{u}^{(i)},\mathbf{v}) + \alpha^{(i)} m_{\Omega_c}(\mathbf{u}^{(i)},\mathbf{v})$$

$$a^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)},\mathbf{v}) = a_{\Omega_c^{(i)}}(\mathbf{u}^{(i)},\mathbf{v}) + \alpha^{(i)} a_{\Omega_c}(\mathbf{u}^{(i)},\mathbf{v})$$

$$l^{(i)}(\mathbf{v}) = f_{\Omega^{(i)}}(\mathbf{v}) + g_{\Gamma_g^{(i)}}(\mathbf{v}) + \alpha^{(i)}(f_{\Omega_c}(\mathbf{v}) + g_{\Gamma_{gc}^{(i)}}(\mathbf{v}))$$

$$b^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{n_c},\mathbf{v}) = \alpha^{(1)} \int_{\Gamma_c^{(2)}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{n_c}.\mathbf{v} d\Gamma + \alpha^{(2)} \int_{\Gamma_c^{(1)}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{n_c}.\mathbf{v} d\Gamma$$

$$b^{(2)}(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{n_c},\mathbf{v}) = \alpha^{(2)} \int_{\Gamma_c^{(1)}} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{n_c}.\mathbf{v} d\Gamma + \alpha^{(1)} \int_{\Gamma_c^{(2)}} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{n_c}.\mathbf{v} d\Gamma$$

Puis, on introduit l'effort d'interface $\boldsymbol{\lambda}$ sur Γ_c défini comme suit :

$$\boldsymbol{\lambda}_{|\Gamma_c^{(1)}} = \alpha^{(2)} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{n_c}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{|\Gamma_c^{(2)}} = \alpha^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \mathbf{n_c}$$

Grâce à la condition de continuité en effort (2.11), on peut écrire $b^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\mathbf{n_c},\mathbf{v}) = b_c(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{v})$. En outre, la contrainte de continuité cinématique peut être écrite sous forme faible en introduisant un espace de multiplicateurs de Lagrange sur l'interface Γ_c.

$$\int_{\Gamma_c} (\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}) \boldsymbol{\mu}\, d\Gamma = 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$$

Le problème couplé que nous considérerons par la suite consiste à trouver le déplacement $\mathbf{u}^{(1)}$ dans le sous-domaine $\Omega^{(1)}$, le déplacement $\mathbf{u}^{(2)}$ dans le sous-domaine $\Omega^{(2)}$ et les efforts d'interface $\boldsymbol{\lambda}$ solution de la formulation de couplage suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } \left(\mathbf{u}^{(1)},\mathbf{u}^{(2)},\boldsymbol{\lambda}\right) \in \mathcal{U}^{(1)} \times \mathcal{U}^{(2)} \times \mathcal{W} \text{ tels que} \\ m^{(1)}(\ddot{\mathbf{u}}^{(1)},\mathbf{v}) + a^{(1)}(\mathbf{u}^{(1)},\mathbf{v}) = l^{(1)}(\mathbf{v}) + b_c(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_0^{(1)} \\ m^{(2)}(\ddot{\mathbf{u}}^{(2)},\mathbf{v}) + a^{(2)}(\mathbf{u}^{(2)},\mathbf{v}) = l^{(2)}(\mathbf{v}) - b_c(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_0^{(2)} \\ b_c(\boldsymbol{\mu},\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}) = 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{W} \end{array} \tag{2.13}$$

où $\mathcal{W} = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.

■ **Remarque**

Cette formulation comporte deux points clés. Le premier consiste à effectuer une partition sur la zone de recouvrement Ω_c sur l'ensemble des opérateurs. Le second point concerne l'introduction d'un opérateur de couplage b_c qui conduit à un couplage sur l'interface Γ_c par l'intermédiaire de l'effort d'interface $\boldsymbol{\lambda}$.

2.4 Ecriture du problème couplé sous forme discrète

Soit $\mathcal{U}_h^{(i)}$ et $\mathcal{W}_h$ les espaces éléments finis appropriés et $\Omega_h^{(i)}$ la discrétisation élément fini correspondante sur $\Omega^{(i)}$. Cette discrétisation mène au problème discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{C}^{(1)^T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{M}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{C}^{(2)^T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{C}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.14}$$

où $\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$ et $\mathbf{u}^{(i)}$ sont respectivement les champs discrets d'accélération et de déplacement sur le sous-domaine $\Omega^{(i)}$, $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des efforts associé à l'interface $\Gamma_{c,h}$. $\mathbf{M}^{(i)}$, $\mathbf{K}^{(i)}$, $\mathbf{C}^{(i)}$ et $\mathbf{f}^{(i)}$ sont respectivement la matrice de masse, la matrice de raideur, les matrices de projection et les efforts extérieurs sur le sous-domaine $\Omega_h^{(i)}$. Ils s'écrivent, en omettant l'indice h qui précise l'approximation géométrique et en conservant la notation en gras afin de prendre en compte les différentes directions du champ dans l'espace :

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_{kl}^{(i)} = \mathbf{M}_{kl}^{(i),\Omega_c^{(i)}} + \alpha^{(i)}\mathbf{M}_{kl}^{(i),\Omega_c} \quad ; \quad \mathbf{K}_{kl}^{(i)} = \mathbf{K}_{kl}^{(i),\Omega_c^{(i)}} + \alpha^{(i)}\mathbf{K}_{kl}^{(i),\Omega_c} \\ &\mathbf{f}_k^{(i)} = \mathbf{f}_k^{\Omega_c^{(i)},\Gamma_g^{(i)}} + \alpha^{(i)}\mathbf{f}_k^{\Omega_c,\Gamma_{gc}^{(i)}} \quad ; \quad \mathbf{C}_{kl}^{(i)} = \int_{\Gamma_c} \phi_k^c \phi_l^{(i)} d\Gamma \end{aligned} \tag{2.15}$$

avec

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_{kl}^{(i),\omega} = \int_\omega \rho\phi_k^{(i)}\phi_l^{(i)} d\omega \quad ; \quad \mathbf{K}_{kl}^{(i),\omega} = \int_\omega \mathbf{A}(\nabla\phi_k^{(i)}) : \nabla\phi_l^{(i)} d\omega \\ &\mathbf{f}_k^{\omega,\gamma} = \int_\omega \rho\mathbf{f}_d\phi_k^{(i)} d\omega + \int_\gamma \mathbf{g}_d\phi_k^{(i)} d\gamma \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $\phi_k^{(i)}$, ϕ_k^c sont respectivement la $k^{\text{ème}}$ fonction de forme de la base élément fini des espaces $\mathcal{U}_h^{(i)}$ et $\mathcal{W}_h$.

2.5 Ecriture du problème couplé sous forme lagrangienne

A partir du problème discret (2.14), nous allons déterminer la forme lagrangienne associée. L'écriture sous cette forme nous permet d'identifier les différents termes énergétiques.
Le problème discret précédemment écrit revient à réaliser un développement d'Euler-Lagrange sur l'expression suivante du lagrangien L :

$$L = \sum_{i=1,2} [\underbrace{\frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^{(i)T}\mathbf{M}^{(i)}\dot{\mathbf{u}}^{(i)}}_{T^{(i)}} - \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{u}^{(i)T}\mathbf{K}^{(i)}\mathbf{u}^{(i)}}_{V^{(i)}} + \underbrace{\mathbf{u}^{(i)T}\mathbf{f}^{(i)}}_{W^{(i)}}] + \underbrace{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)})}_{E_{int}} \tag{2.17}$$

On identifie bien ici dans ce lagrangien les termes en énergie suivants :

– $T^{(i)} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^{(i)T}\mathbf{M}^{(i)}\dot{\mathbf{u}}^{(i)}$, terme associé à l'énergie cinétique du domaine $\Omega^{(i)}$.
– $V^{(i)} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(i)T}\mathbf{K}^{(i)}\mathbf{u}^{(i)}$, terme associé à l'énergie interne du domaine $\Omega^{(i)}$.
– $W^{(i)} = \mathbf{u}^{(i)T}\mathbf{f}^{(i)}$, terme associé aux efforts extérieurs sur $\Omega^{(i)}$.
– $E_{int} = \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)})$, terme associé à l'énergie d'interface Γ_c.

On remarque qu'en faisant apparaître la partition $\alpha^{(i)}$, on obtient :

$$L = \sum_{i=1,2} [L^{(i),\Omega_c^{(i)}} + \alpha^{(i)} L^{(i),\Omega_c}] + E_{int} \tag{2.18}$$

avec : $L^{(i),\omega} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^{(i)T}\mathbf{M}^{(i),\omega}\dot{\mathbf{u}}^{(i)} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{(i)T}\mathbf{K}^{(i),\omega}\mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{u}^{(i)T}\mathbf{f}^{\omega,\Gamma_g\cup\partial\omega}$.

$L^{(i),\omega}$ est le lagrangien associé au sous-domaine ω dans l'espace test $\mathcal{U}_h^{(i)}$. L'écriture sous cette forme fait apparaître une partition en énergie associée à une discrétisation se rapportant aux sous-domaines $\Omega_c^{(i)}$ et Ω_c.

3 Discrétisation des opérateurs de couplage

La formulation du problème discret telle qu'elle est écrite en (2.14) permet naturellement de prendre en compte des incompatibilités maillage par l'intermédiaire du multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. L'introduction de celui-ci permet d'assurer la continuité des champs à l'interface sous forme faible. L'approche utilisée ici s'appelle **mortar method** et fut introduite par [Maday 89].

Dans l'étude qui suit, on porte notre intérêt sur la discrétisation du raccord qui permet de coupler la description grossière que l'on associe au sous-domaine $\Omega^{(1)}$ et la description fine que l'on associe au sous-domaine $\Omega^{(2)}$ sur des problèmes de dimension 2. On utilise une discrétisation éléments spectraux d'ordre 5 pour le sous-domaine $\Omega^{(1)}$ et une discrétisation avec des éléments triangulaires linéaires pour le sous-domaine $\Omega^{(2)}$ comme illustré à la figure 2.4.

Du fait que la discrétisation du problème est fixée sur chaque sous domaine, nous nous intéressons plutôt ici à la discrétisation des interfaces. Le choix de l'espace d'approximation des multiplicateurs de Lagrange $\mathcal{W}_h$ est primordial puisqu'il conditionne *a priori* l'erreur numérique associée au recollage des champs. En effet, nous devons garantir que le saut de déplacement à l'interface s'annule. Un choix naturel, en ce qui concerne l'approximation des opérateurs de couplage ($\mathbf{C}^{(1)}$ et $\mathbf{C}^{(2)}$), est d'utiliser une approximation par éléments linéaires ou une approche par éléments spectraux d'ordre 5 au niveau de l'interface. Ce choix nous permet d'avoir au moins la compatibilité du maillage d'interface avec un des deux maillages.

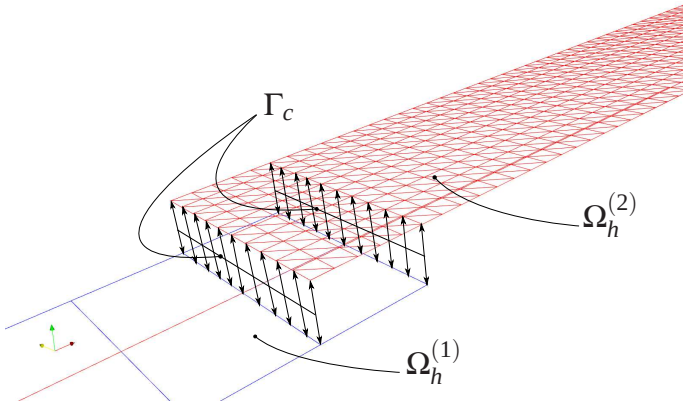


FIG. 2.4: Illustration d'un problème discrétisé

3.1 Interfaces discrétisées avec des éléments spectraux d'ordre 1

La première approche que nous proposons ici consiste à utiliser des fonctions de forme linéaire pour l'interface avec une intégration de Gauss-Lobatto-Legendre d'ordre 0 [Patera 84]. Comme nous l'avons dit précédemment, l'intérêt de cette approche est qu'elle permet d'avoir compatibilité du maillage d'interface avec la restriction du maillage $\Omega_h^{(2)}$. Autrement dit : $\phi^{(c)} = Tr_{\Gamma_c}\phi^{(2)}$ comme nous pouvons voir sur la figure 2.5. Par la suite, nous verrons que cette approche est intéressante parce qu'elle permet de réduire le coût de calcul des opérateurs de couplage.

On rappelle que dans ce cas les opérateurs de couplage ont la forme suivante :

$$\mathbf{C}_{kl}^{(1)} = \int_{\Gamma_c} \phi_l^{(1)} \phi_k^{(2)} d\Gamma \text{ et } \mathbf{C}_{kl}^{(2)} = \int_{\Gamma_c} \phi_l^{(2)} \phi_k^{(2)} d\Gamma \text{ et} \tag{2.19}$$

Après application du schéma d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre, on obtient en utilisant la notation indicielle l'expression suivante des opérateurs de couplage :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})}{}_{kl} = \phi_l^{(1)}(x_k)\omega_k \text{ et } \mathbf{C}^{(\mathbf{2})}{}_{kl} = \boldsymbol{\delta}_{kl}\omega_k \tag{2.20}$$

où x_k est l'ensemble des nœuds du maillage d'interface et ω_k les poids associés au schéma d'intégration. En d'autres termes, x_k correspond aux points d'intégration et ω_k est la somme en ce point du produit du poids du schéma de quadrature par le jacobien des éléments adjacents.

En injectant les expressions précédemment obtenues dans le système discret (2.14), cela nous amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{kl}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}_l^{(1)} + \mathbf{K}_{kl}^{(1)}\mathbf{u}_l^{(1)} = \mathbf{f}_l^{(1)} + \phi_k^{(1)}(x_l)\omega_l\boldsymbol{\lambda}_l \\ \mathbf{M}_{kl}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}_l^{(2)} + \mathbf{K}_{kl}^{(2)}\mathbf{u}_l^{(2)} = \mathbf{f}_l^{(2)} - \boldsymbol{\delta}_{lk}\omega_l\boldsymbol{\lambda}_l \\ \phi_l^{(1)}(x_k)\omega_k\mathbf{u}_k^{(1)} - \boldsymbol{\delta}_{kl}\omega_k\mathbf{u}_k^{(2)} = \mathbf{0} \end{cases}$$

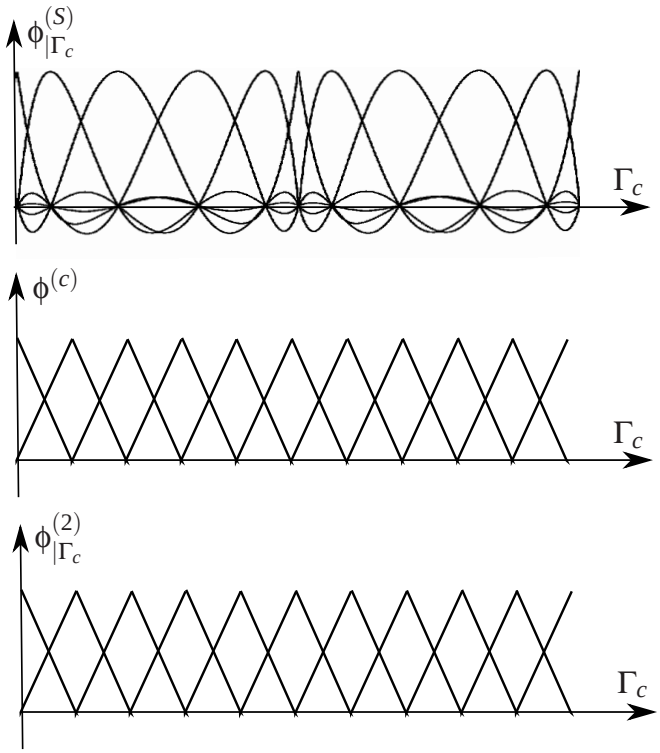


FIG. 2.5: Illustration de la discrétisation à l'interface pour l'ordre 1

On remarque que :

$$\phi_l^{(1)}(x_k)\omega_k\mathbf{u}_k^{(1)} - \boldsymbol{\delta}_{kl}\omega_k\mathbf{u}_k^{(2)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \phi_l^{(1)}(x_k)\mathbf{u}_k^{(1)} - \boldsymbol{\delta}_{kl}\mathbf{u}_k^{(2)} = \mathbf{0}$$

On peut alors effectuer le changement d'inconnue $\omega_l\boldsymbol{\lambda}_l = \boldsymbol{\mu}_l$, ce qui nous permet d'obtenir le système suivant équivalent sur les quantités cinématiques :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{kl}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}_l^{(1)} + \mathbf{K}_{kl}^{(1)}\mathbf{u}_l^{(1)} = \mathbf{f}_l^{(1)} + \phi_k^{(1)}(x_l)\boldsymbol{\mu}_l \\ \mathbf{M}_{kl}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}_l^{(2)} + \mathbf{K}_{kl}^{(2)}\mathbf{u}_l^{(2)} = \mathbf{f}_l^{(2)} - \boldsymbol{\delta}_{lk}\boldsymbol{\mu}_l \\ \phi_l^{(1)}(x_k)\mathbf{u}_k^{(1)} - \boldsymbol{\delta}_{kl}\mathbf{u}_k^{(2)} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.21}$$

Cette simplification du sytème à résoudre permet de supprimer les opérations d'intégration dans le calcul des opérateurs de couplage, ce qui allège considérablement le coût de calcul puisque désormais on a :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})}{}_{kl} = \phi_l^{(1)}(x_k) \text{ et } \mathbf{C}^{(\mathbf{2})}{}_{kl} = \boldsymbol{\delta}_{kl} \tag{2.22}$$

Notons que de cette façon, on ne calcule pas le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, mais cela n'a pas vraiment d'importance puisque les inconnues qui nous intéressent sont les quantités cinématiques.

3.2 Interfaces discrétisées avec des éléments spectraux d'ordre 5

La seconde approche que nous proposons ici consiste à discrétiser l'interface avec des éléments spectraux d'ordre 5 en respectant la compatibilité du maillage comme cela est illustré à la figure 2.6. Danc ce cas, $\phi^{(c)} = Tr_{\Gamma_c}\phi^{(1)}$. On rappelle que dans ce cas les opérateurs de couplage ont la forme suivante :

$$\mathbf{C}^{(1)}_{kl} = \int_{\Gamma_c} \phi^{(1)}_l \phi^{(1)}_k d\Gamma \text{ et } \mathbf{C}^{(2)}_{kl} = \int_{\Gamma_c} \phi^{(2)}_l \phi^{(1)}_k d\Gamma \tag{2.23}$$

Après application du schéma d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre, l'expression des opérateurs de couplage devient en utilisant la notation indicielle :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})}{}_{kl} = \boldsymbol{\delta}_{kl}\omega_k \text{ et } \mathbf{C}^{(\mathbf{2})}{}_{kl} = \phi^{(2)}_l(x_k)\omega_k \tag{2.24}$$

où x_k est l'ensemble des nœuds du maillage d'interface et ω_k les poids associés au schéma d'intégration.

En effectuant la même démarche que dans le cas linéaire, on obtient :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})}{}_{kl} = \boldsymbol{\delta}_{kl} \text{ et } \mathbf{C}^{(\mathbf{2})}{}_{kl} = \phi^{(2)}_l(x_k) \tag{2.25}$$

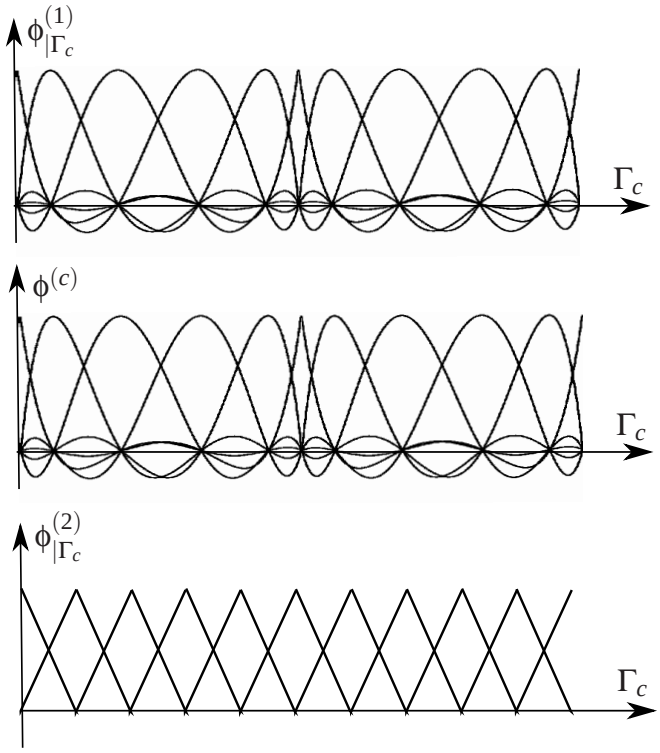


FIG. 2.6: Illustration de la discrétisation à l'interface pour l'ordre 5

Cette approche permet, tout comme dans le cas de l'interpolation linéaire, de réduire le coût de calcul des opérateurs de couplage.

3.3 Bilan

Dans cette partie, nous avons proposé deux approches de discrétisation de l'interface. Pour ces deux approches, nous proposons une réduction du coût de calcul des opérateurs de couplage en se ramenant à un problème discrétisé équivalent (2.21). Notons que les opérateurs de couplage dans le cas où l'interface et le sous-domaine ont des maillages conformes sont diagonaux et garantissent par conséquent la localité du couplage.

Pour nos deux configurations de discrétisation de l'interface, la condition de stabilité est vérifiée. Ceci garantit que le problème est bien posé et que par conséquent il n'y a pas d'indétermination sur $\boldsymbol{\lambda}$. On peut se référer aux travaux de [Maday 89, Bernardi 93] pour s'en assurer.

Finalement, nous avons proposé deux approches de discrétisation de l'interface qui permettent de réduire le coût de calcul et garantit la stabilité de la projection de Mortier. Il nous reste à étudier l'erreur numérique associée à chacune des approximations du champs d'interface. Cela fait l'objet de la section 6.

4 La résolution

Jusqu'à lors, nous nous sommes intéressés à l'aspect spatial du couplage, de sa mise en place sous forme variationnelle à sa discrétisation. Désormais, on s'intéresse à la discrétisation de la composante temporelle, ainsi qu'à sa mise en place dans une architecture multi-modèle. On rappelle qu'un modèle se définit par une formulation mécanique ainsi que par sa discrétisation qu'elle soit spatiale ou temporelle. Dans notre cas, nous avons deux modèles. L'un a pour support géométrique le domaine $\Omega^{(1)}$, l'autre le domaine $\Omega^{(2)}$. Par la suite, on présente par ordre chronologique des travaux la mise en place de la résolution parallèle entre les modèles. Dans ce cas, la discrétisation temporelle est la même pour chaque modèle. Puis, afin d'étendre l'aspect multiéchelle au domaine temporel, on se propose de discrétiser la composante temporelle avec une approche multi-pas de temps.

Assez souvent, chaque modèle utilisé dans la résolution d'un problème couplé est associé à un code indépendant. L'objectif de l'algorithme de résolution globale est de préserver au maximum cette indépendance. Pour ce faire, nous mettons en place une stratégie de résolution parallèle entre les modèles. En outre, on rappelle que chacun des codes, du fait que l'on utilise une discrétisation par éléments spectraux, permet une résolution explicite. La réalisation de cet algorithme doit garder cet avantage.

Tout d'abord, rappellons que la décomposition de domaine que nous avons mis en place précédemment nous amène à résoudre le problème discrétisé suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}^{(1)} + \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{C}^{(1)^T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{M}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{C}^{(2)^T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{C}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.26}$$

où $\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$ et $\mathbf{u}^{(i)}$ sont le vecteur accélération et le vecteur déplacement sur le sous-domaine $\Omega^{(i)}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des efforts d'interface sur Γ. $\mathbf{M}^{(i)}$, $\mathbf{K}^{(i)}$, $\mathbf{C}^{(i)}$ et $\mathbf{f}^{(i)}$ sont respectivement la matrice de masse, la matrice de raideur, les matrices de projection et les efforts extérieurs sur le sous-domaine $\Omega^{(i)}$.

Afin de mettre en place un cadre de résolution explicite, nous choisissons un schéma d'intégration temporelle aux différences centrées dans chacun des sous-domaines. Le pas de temps associé à cette discrétisation temporelle est noté Δt. Aussi, le champ de déplacement approximé $\mathbf{u}^{(i)}$ pris au pas de temps $j\Delta t$ est noté $\mathbf{u}_j^{(i)} \sim \mathbf{u}^{(i)}(j\Delta t)$. Le schéma nous donne les approximations temporelles suivantes [Hughes 87] :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{j+1}^{(i)} = \mathbf{u}_j^{(i)} + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{u}}_j^{(i)} \\ \dot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i)} = \dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i)}) \end{cases} \tag{2.27}$$

En considérant que les conditions initiales imposées dans chaque modèle vérifient :

$$\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{u}_0^{(2)} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}^{(1)}\dot{\mathbf{u}}_0^{(1)} = \mathbf{C}^{(2)}\dot{\mathbf{u}}_0^{(2)} \tag{2.28}$$

Il s'en suit que le système (2.26) en utilisant les équations (2.27) , sous la condition (2.28) est équivalent à :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(1)} + \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{u}_{j+1}^{(1)} = \mathbf{f}_{j+1}^{(1)} + \mathbf{C}^{(1)^T}\boldsymbol{\lambda}_{j+1} \\ \mathbf{M}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{u}_{j+1}^{(2)} = \mathbf{f}_{j+1}^{(2)} - \mathbf{C}^{(2)^T}\boldsymbol{\lambda}_{j+1} \\ \mathbf{C}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(2)} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.29}$$

Après condensation de ce système sur l'interface Γ_c, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(1)} - \mathbf{C}^{(1)^T}\boldsymbol{\lambda}_{j+1} = \mathbf{f}_{j+1}^{(1)} - \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{u}_{j+1}^{(1)} \\ \mathbf{M}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(2)} + \mathbf{C}^{(2)^T}\boldsymbol{\lambda}_{j+1} = \mathbf{f}_{j+1}^{(2)} - \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{u}_{j+1}^{(2)} \\ \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_{j+1} = \mathbf{C}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(1),f} - \mathbf{C}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(2),f} \end{cases} \tag{2.30}$$

avec :

- l'opérateur condensé : $\mathbf{H} = \mathbf{C}^{(1)}\mathbf{M}^{(1)-1}\mathbf{C}^{(1)^T} + \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{M}^{(2)-1}\mathbf{C}^{(2)^T}$.
- les accélérations obtenues en considérant l'interface libre d'efforts : $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} = \mathbf{M}^{(i)-1}(\mathbf{f}_{j+1}^{(i)} - \mathbf{K}^{(i)}\mathbf{u}_{j+1}^{(i)})$.

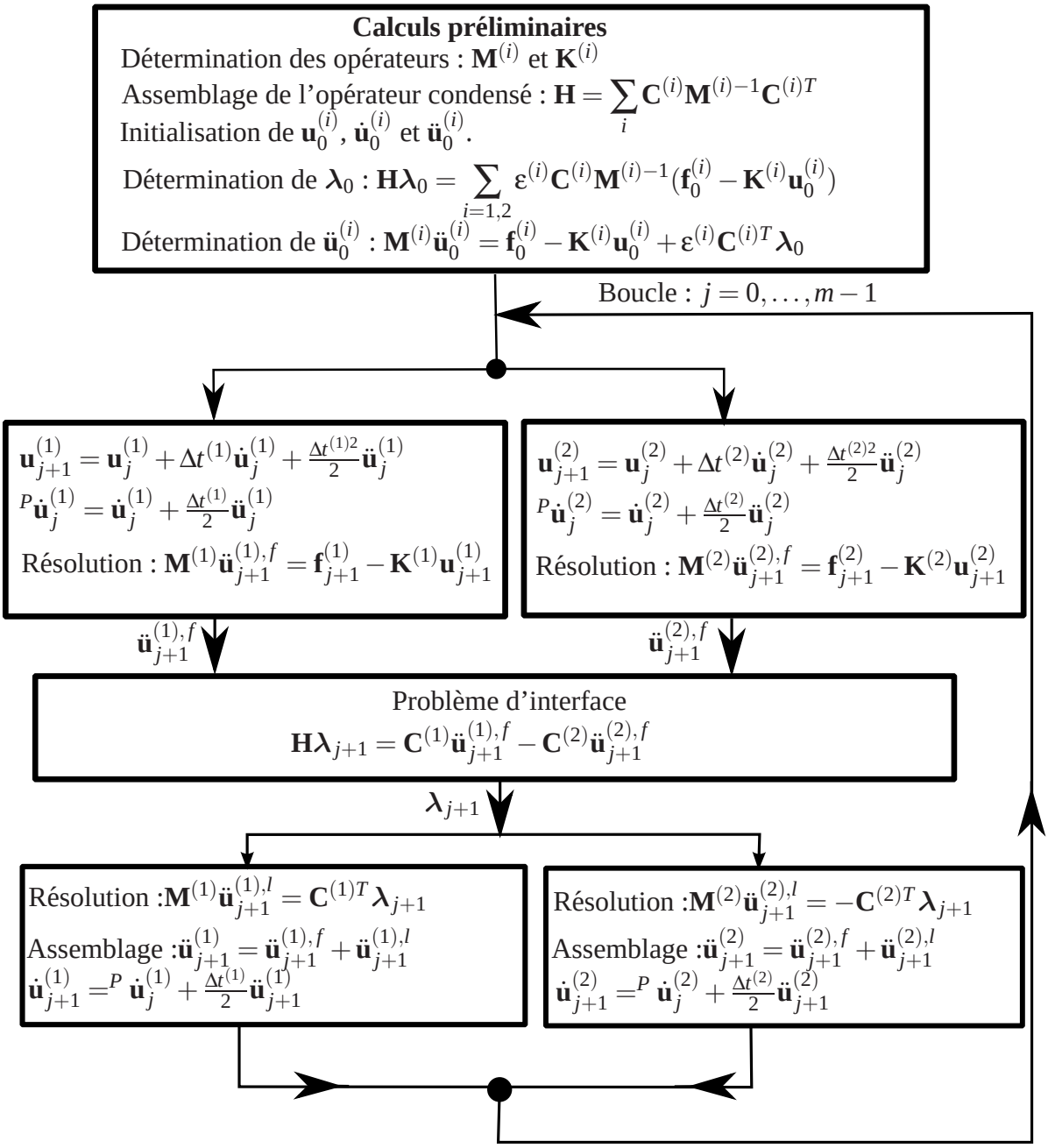


FIG. 2.7: Algorithme de résolution mono-pas de temps

La troisième équation de (2.30) définit le problème d'interface. Concernant la résolution du problème complet, on procède par étape :

1. On calcule tout d'abord $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(1),f}$ et $\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(2),f}$. Pour cela, on résoud les deux premières équations de (2.30) en considérant $\boldsymbol{\lambda}_{j+1} = 0$. La notation $\bullet^{,f}$ signifie que l'interface est considérée libre d'efforts.
2. On résoud : $\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_{j+1} = \mathbf{C}^{(1)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(1),f} - \mathbf{C}^{(2)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(2),f}$. Cela nous donne $\boldsymbol{\lambda}_{j+1}$.

3. On injecte $\boldsymbol{\lambda}_{j+1}$ dans les deux premières équations de (2.30). Cela nous donne finalement les solutions pour $\ddot{\mathbf{u}}^{(1)}_{j+1}$ et $\ddot{\mathbf{u}}^{(2)}_{j+1}$.

L'algorithme de résolution tel qu'il est exposé ici nécessite une inversion sur chaque modèle. Dans ce cas de figure, ce type d'opérations est rentable d'un point de vue temporel du fait que les matrices de masse sont diagonales. Enfin, l'algorithme de résolution est présenté à la figure 2.7.

5 Illustration numérique sur un problème 1-D

Désormais, on étudie la pertinence des méthodes présentées précédemment sur un cas test simple : la propagation d'ondes de traction-compression dans une poutre. Il nous a paru intéressant d'étudier les méthodes présentées précédemment sur ce cas test pour deux raisons. D'une part, ce problème a une solution analytique. D'autre part, le problème ne comportant qu'une dimension spatiale, l'atténuation géométrique des ondes fantômes n'a pas lieu. En effet, en dimension 2 la propagation des ondes se réalise sur un support circulaire ce qui donne une décroissance en $\frac{1}{r}$ de l'amplitude des ondes.

L'étude se déroule de la façon suivante. Avant tout, on positionne le problème que nous allons étudier. Puis, on effectue une étude paramétrique de la méthode de couplage développée. Il s'en suit une comparaison de nos développements avec la méthode Arlequin [Ben Dhia 98].

5.1 Position du problème poutre

On s'intéresse à la résolution d'un problème de propagation d'ondes de traction-compression dans une poutre sur laquelle a été effectuée une décomposition de domaine avec recouvrement comme illustré à la figure (2.8). La poutre considérée a une longueur $L = 20$m. On associe au sous-domaine $\Omega^{(i)}$ la longueur $L^{(i)}$ et au recouvrement $\Omega^{(c)}$ la longueur $L^{(c)}$. La longueur $L^{(1)}$ est fixé à $10m$ pour l'ensemble des études.

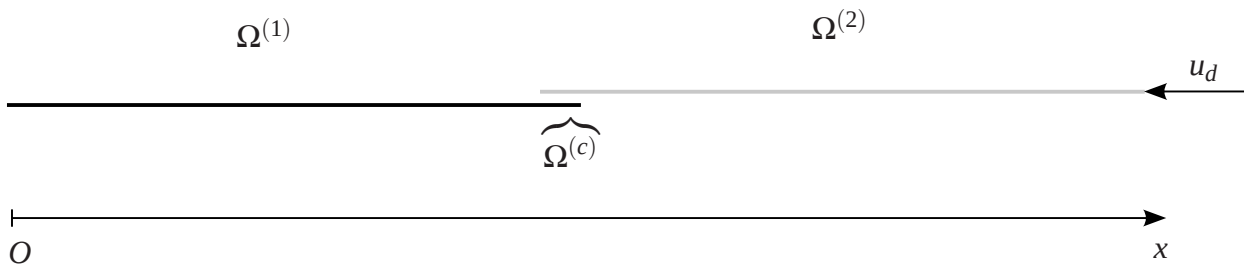


FIG. 2.8: Problème poutre décomposé en sous-domaines

La poutre répond alors aux équations du problème d'onde exposées ci-dessous :

$$\forall x,t : \begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2u}{dt^2} = 0 \\ u(L,t) = u_d(t) \\ \frac{du}{dx}(0,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \frac{du}{dt}(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

où u est le champ scalaire de déplacement le long de la poutre et c est la célérité des ondes. La solution à ce problème est connue : $\forall t \in]0, \frac{L}{c}[$, on a $u(x,t) = u_d(t + \frac{x-L}{c})$. Elle est représentée à l'instant $t = 20s$ sur la figure 2.9 pour un déplacement imposé u_d en demi-sinus de demi-période $T = 2s$ dont l'expression est la suivante :

$$\begin{cases} \forall t < 0 & u_d(t) = 0 \\ \forall 0 \leq t \leq T & u_d(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{2\Pi t}{T})) \\ \forall t > T & u_d(t) = 0 \end{cases} \tag{2.32}$$

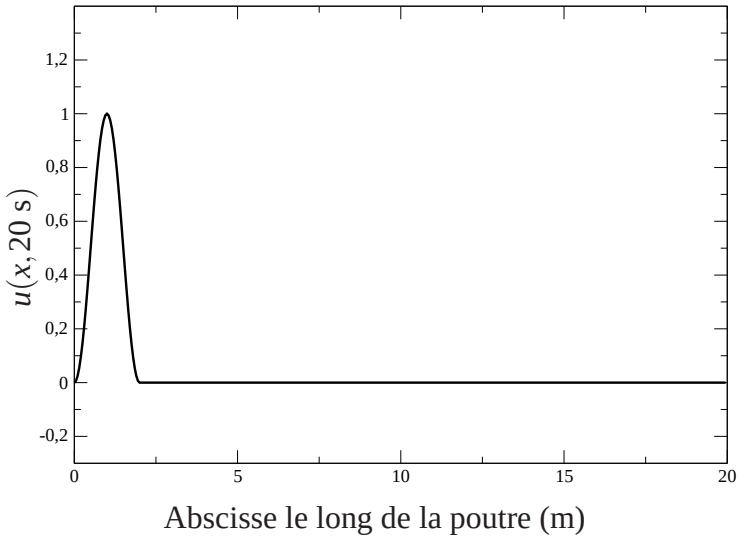


FIG. 2.9: Solution du problème poutre

Après application de la méthode de couplage au problème poutre, la résolution de ce problème revient à chercher les champs scalaires $u^{(1)}$ ($\in \mathcal{U}^{(1)} = \mathcal{C}_0^2(I;H^1(\Omega^{(1)}))$) et $u^{(2)}$ ($\in \mathcal{U}^{(2)} = \mathcal{C}_0^2(I;H^1_{U_d}(\Omega^{(1)},x=L))$) solution de la formulation variationelle suivante :

$$\text{Trouver } \left(u^{(1)},u^{(2)},\lambda\right) \in \mathcal{U}^{(1)} \times \mathcal{U}^{(2)} \times \mathcal{W} \text{ tels que } \quad \forall \left(v^{(1)},v^{(2)},\mu\right) \in \mathcal{U}_0^{(1)} \times \mathcal{U}_0^{(2)} \times \mathcal{W}$$
$$\left\{\begin{array}{c} m^{(1)}(\ddot{u}^{(1)},v^{(1)}) + k^{(1)}(u^{(1)},v^{(1)}) = b_c(\lambda,v^{(1)}) \\ m^{(2)}(\ddot{u}^{(2)},v^{(2)}) + k^{(2)}(u^{(2)},v^{(2)}) = -b_c(\lambda,v^{(2)}) \\ b_c(\mu,\ddot{u}^{(1)}-\ddot{u}^{(2)}) = 0 \end{array}\right. \tag{2.33}$$

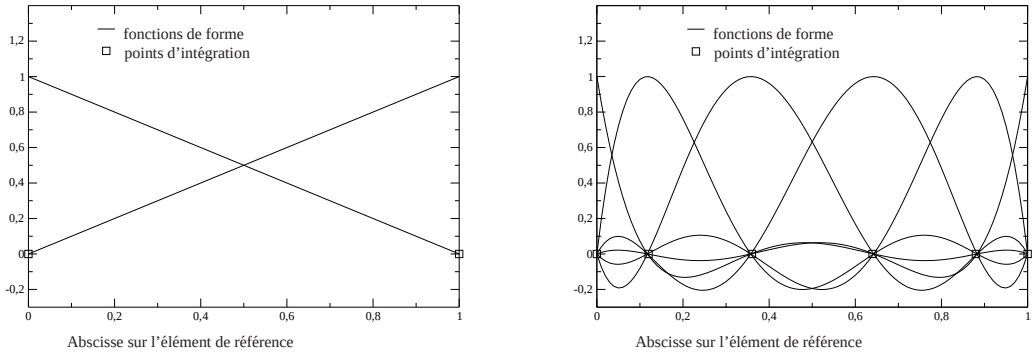
où :

$$\begin{array}{l} m^{(i)}(\ddot{u}^{(i)},v^{(i)}) = \int_{\Omega^{(i)}\setminus\Omega_c} \rho\ddot{u}^{(i)}v^{(i)}d\Omega + \int_{\Omega^{(c)}} \alpha^{(i)}\rho\ddot{u}^{(i)}v^{(i)}d\Omega \\ k^{(i)}(u^{(i)},v^{(i)}) = \int_{\Omega^{(i)}\setminus\Omega^{(c)}} E\frac{du^{(i)}}{dx}\frac{dv^{(i)}}{dx}d\Omega + \int_{\Omega^{(c)}} \alpha^{(i)}E\frac{du^{(i)}}{dx}\frac{dv^{(i)}}{dx}d\Omega \\ b_c(\lambda,v^{(i)}) = \lambda_1 v^{(i)}(L^{(1)}-L^{(c)}) + \lambda_2 v^{(i)}(L^{(1)}) \\ \alpha^{(1)} = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha^{(2)} = 1-\alpha \end{array} \tag{2.34}$$

On définit les espaces $\mathcal{U}_0^{(1)}$ et $\mathcal{U}_0^{(2)}$ comme les espaces vectoriels associés respectivement aux espaces $\mathcal{U}^{(1)}$ et $\mathcal{U}^{(2)}$. L'interface est définie par deux point situés en $x = L^{(1)} - L^{(c)}$ et $x = L^{(1)}$. $L^{(1)}$ est fixé pour l'ensemble des études à $10m$. Le multiplicateur de Lagrange est alors défini discrètement : $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$. La densité linéique ρ ainsi que la rigidité E sont fixées à l'unité. De ce fait, on obtient une célérité $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ égale à l'unité.

■ Discrétisation du problème

On effectue une partition avec des éléments spectraux sur chacun des sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$. On a choisi d'utiliser, pour illustrer la méthode, des éléments spectraux d'ordre 5 sur $\Omega^{(1)}$ et des éléments spectraux d'ordre 1 sur $\Omega^{(2)}$ dont les fonctions de formes sont représentés à la figure (2.10).



(a) Ordre 1 (b) Ordre 5

FIG. 2.10: Fonctions de forme sur l'élément de référence

Afin de seulement s'intéresser à l'aspect spatial de la discrétisation, nous allons utiliser pour l'ensemble des calculs un schéma mono-pas de temps avec $\Delta t = 5.0e^{-3}s$. En effet, le pas de temps critique est évalué à $\Delta t^c = 7.9e^{-3}s$ pour la discrétisation la plus fine $h = 0.025m$. Quant au temps d'étude, il est de $20s$. Il correspond au temps de propagation de l'onde le long de la poutre.

■ Analyse des résultats

Le fait d'imposer un condition limite en demi-sinus comme nous pouvons voir sur la figure 2.9 permet de localiser l'énergie. De cette façon, on peut observer si le transfert de l'énergie entre les deux sous-domaines s'effectue correctement. En se basant sur les expressions discrètes de l'énergie obtenue à la section 2.5, on propose le critère d'erreur en énergie suivant :

$$\text{erreur} = \frac{E^{(2),\Omega_c^{(2)}}_{|t=20s}}{E_{\text{ref}}} \tag{2.35}$$

Ici, E_{ref} est l'énergie totale contenue dans la poutre à l'instant $t = 20s$. Son expression est obtenue analytiquement :

$$E_{\text{ref}} = \frac{1}{2}\int_0^L \dot{u}(x,20s)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{du}{dx}(x,20s)^2 dx = \int_0^2 u_d(t)^2 dt \tag{2.36}$$

Quant à $E^{(2),\Omega_c^{(2)}}_{|t=20s}$, il correspond à la valeur numérique de l'énergie contenue dans le domaine $\Omega^{(2)}$ à l'instant $t = 20s$. Ce critère d'erreur nous permet de visualiser l'énergie non transmise par l'interface de couplage à l'instant $t = 20s$, *i.e.* à un instant où l'énergie est censée être totalement localisée dans le sous-domaine $\Omega^{(1)}$. Ainsi, ce critère mesure l'énergie associée aux ondes fantômes.

Dans l'étude numérique de cette méthode de couplage, il nous a paru intéressant d'étudier l'influence de la longueur de couplage $L^{(c)}$, ainsi que l'influence du paramètre α en fonction de la discrétisation dans chaque sous-domaine. Par la suite, on note respectivement h_1 et h_2 les paramètres de discrétisation spatiale associés aux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$.

5.2 Etude paramétrique de la méthode développée

■ Sur l'influence de la longueur de couplage

Dans cette étude, nous nous intéressons à l'influence de la longueur de couplage pour différents types de discrétisation. Ici, nous fixons pour l'ensemble de l'étude la discrétisation $h_1 = 0.5m$ sur $\Omega^{(1)}$ et faisons varier la discrétisation h_2 sur $\Omega^{(2)}$. En outre, nous avons fait le choix arbitraire de fixer la valeur de α à $\frac{1}{2}$. L'influence de ce paramètre fait l'objet de la prochaine étude.

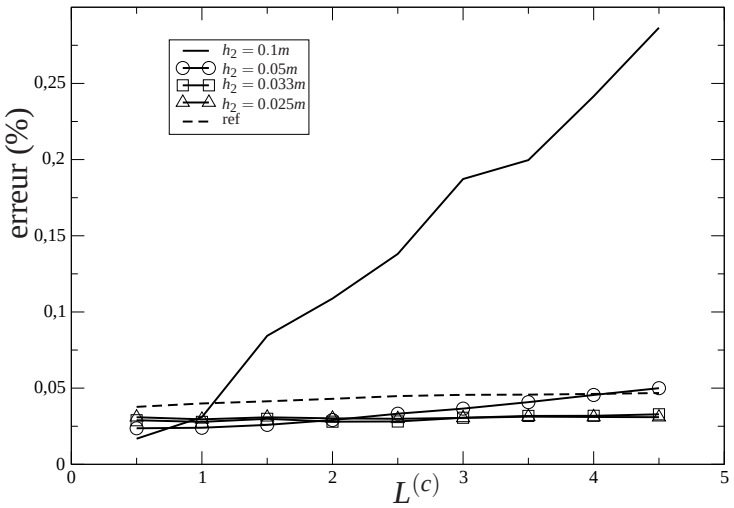


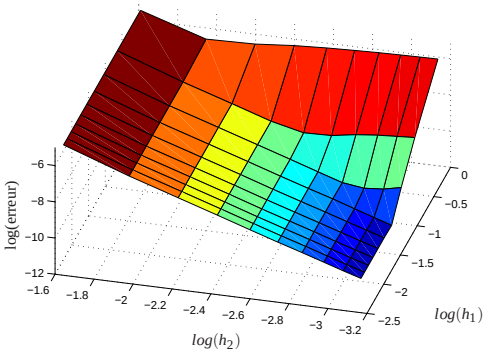
FIG. 2.11: Etude paramétrique de la longueur de couplage

Les résultats obtenus pour cette étude sont exposés à la figure 2.11. La courbe **ref** illustre l'erreur pour un couplage entre deux modèles éléments spectraux d'ordre 5. Elle traduit l'erreur d'approximation du modèle sans erreur de couplage puisque les deux modèles sont identiques. Dans un premier temps, on remarque que pour une discrétisation très grossière dans $\Omega^{(2)}$ (ici $h_2 = 0.1$) augmenter la longueur de couplage $L^{(c)}$ génère plus d'erreur. Toutefois, on observe que pour une discrétisation raisonnable h_2 la longueur de couplage ne génère pas d'erreur. En effet, l'erreur est inférieure à la courbe **ref** qui relate

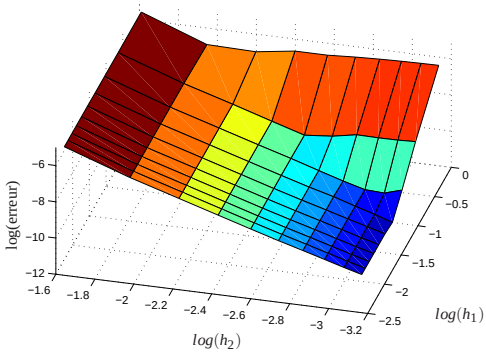
l'erreur d'approximation pour le modèle grossier (éléments spectraux d'ordre 5). Cela implique tout simplement que la discrétisation sur $\Omega^{(2)}$ est meilleure que la discrétisation **ref**.
Finalement, on peut considérer que pour une plage usuelle de discrétisation la longueur de couplage n'a pas d'influence notable.

■ Sur l'influence du paramètre α

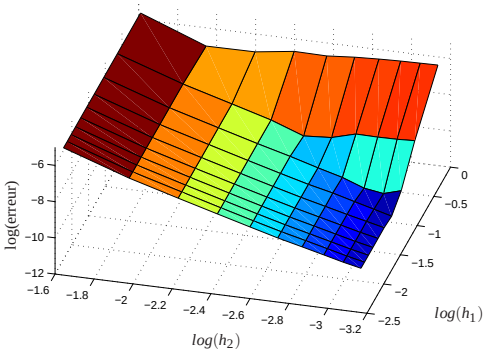
Un autre paramètre susceptible de modifier l'erreur de couplage est le paramètre α. Ici, nous avons effectué une étude paramétrique pour un large panel de discrétisation sur $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ pour différentes valeurs de α. L'ensemble des résultats obtenus est illustré sur les figures (a) à (k). A partir de ces résultats, il nous est possible de déterminer pour chaque champ de discrétisation (h_1, h_2) l'écart type en erreur sur α. Cela fait l'objet du graphe exposé à la figure (l).



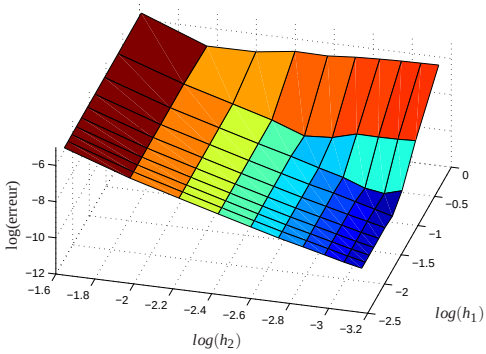
(a) $\alpha = 0.0001$



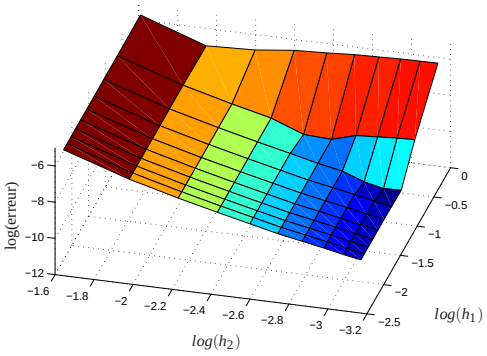
(b) $\alpha = 0.1$



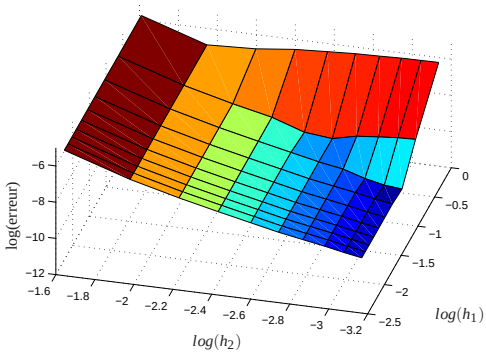
(c) $\alpha = 0.2$



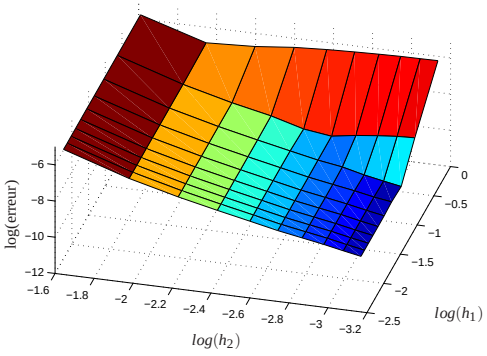
(d) $\alpha = 0.3$



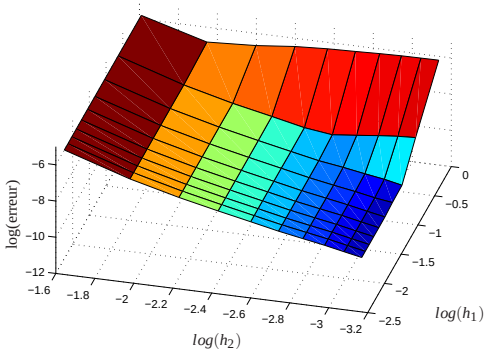
(e) $\alpha = 0.4$



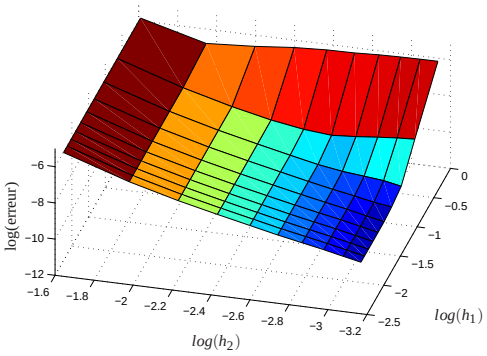
(f) $\alpha = 0.5$



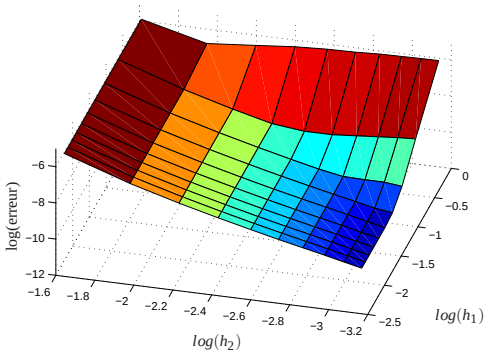
(g) $\alpha = 0.6$



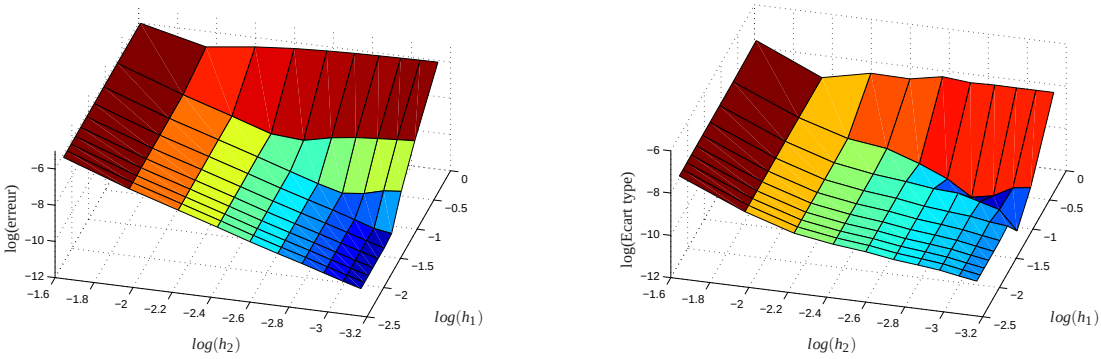
(h) $\alpha = 0.7$



(i) $\alpha = 0.8$



(j) $\alpha = 0.9$



(k) $\alpha = 0.999$ (l) Ecart type

FIG. 2.12: Etude de l'influence du paramètre α

De cette étude, on observe évidemment que l'apparition des ondes fantômes diminue si on discrétise finement sur chaque sous-domaine. A partir du graphe exposé à la figure (l), on observe que la dispersion est faible. Finalement, le choix de α n'implique pas de différence notable au niveau de la convergence.

5.3 Etude numérique de la méthode Arlequin

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution de notre problème poutre exposé à la section 5.1 avec la méthode Arlequin. D'après les travaux effectués par [Zammali 05], la formulation variationnelle s'exprime dans le cas présent de la façon suivante :

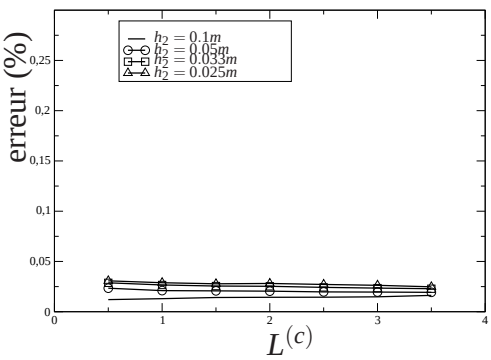
$$\text{Trouver } \left(u^{(1)}, u^{(2)}, \lambda\right) \in \mathcal{U}^{(1)} \times \mathcal{U}^{(2)} \times \mathcal{W} \text{ tels que } \quad \forall \left(v^{(1)}, v^{(2)}, \mu\right) \in \mathcal{U}_0^{(1)} \times \mathcal{U}_0^{(2)} \times \mathcal{W}$$
$$\left\{ \begin{array}{c} m^{(1)}(\ddot{u}^{(1)}, v^{(1)}) + k^{(1)}(u^{(1)}, v^{(1)}) = b_c(\lambda, v^{(1)}) \\ m^{(2)}(\ddot{u}^{(2)}, v^{(2)}) + k^{(2)}(u^{(2)}, v^{(2)}) = -b_c(\lambda, v^{(2)}) \\ b_c(\mu, u^{(1)} - u^{(2)}) = 0 \end{array} \right. \tag{2.37}$$

où :

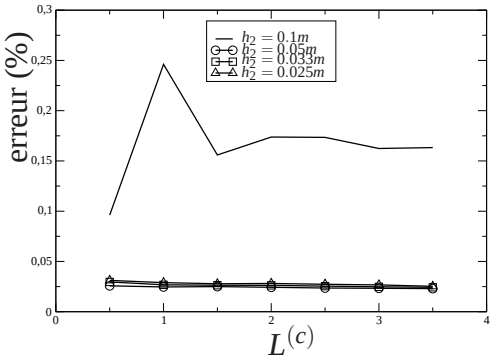
$$\begin{array}{l} m^{(i)}(\ddot{u}^{(i)}, v^{(i)}) = \int_{\Omega^{(i)} \setminus \Omega^{(c)}} \rho \ddot{u}^{(i)} v^{(i)} d\Omega + \int_{\Omega^{(c)}} \alpha^{(i)} \rho \ddot{u}^{(i)} v^{(i)} d\Omega \\ k^{(i)}(u^{(i)}, v^{(i)}) = \int_{\Omega^{(i)} \setminus \Omega^{(c)}} E \frac{du^{(i)}}{dx} \frac{dv^{(i)}}{dx} d\Omega + \int_{\Omega^{(c)}} \alpha^{(i)} E \frac{du^{(i)}}{dx} \frac{dv^{(i)}}{dx} d\Omega \\ b_c(\lambda, v^{(i)}) = \int_{\Omega^{(c)}} (\lambda v^{(i)} + \ell^2 \frac{d\lambda}{dx} \frac{dv^{(i)}}{dx}) d\Omega \\ \alpha^{(1)} = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha^{(2)} = 1 - \alpha \end{array} \tag{2.38}$$

La particularité de cette approche vis-à-vis de la nôtre réside dans le choix d'une interface volumique pour le couplage entre les deux modèles. Afin de vérifier la condition de stabilité du théorème de Brezzi, la régularité du champ d'interface doit être prise telle que $\mathcal{W} = H^1(\Omega^{(c)})$.

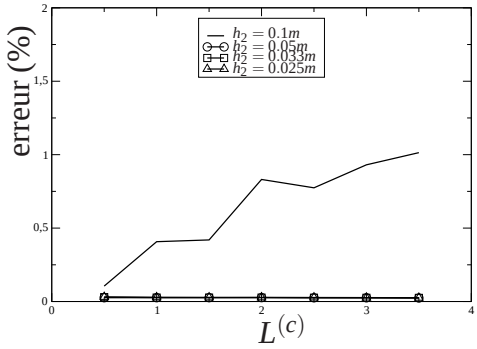
Avant tout, on observe que le fait de choisir une interface volumique implique, vis à vis de notre approche, un surcoût dans le calcul des opérateurs de couplage et dans la résolution du problème d'interface. Les paramètres régissant cette méthode sont tout comme nous la longueur de couplage $L^{(c)}$ ainsi que la partition α. Par ailleurs, cette méthode introduit un paramètre ℓ pour adimensionner les termes en gradient dans le calcul des opérateurs de couplage. Nous nous intéressons ici à l'étude de l'influence des paramètres ℓ et $L^{(c)}$.



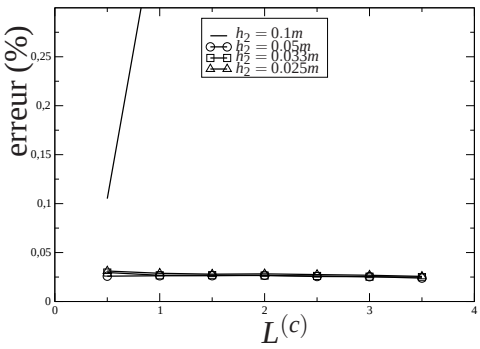
(a) $\ell = 0m$



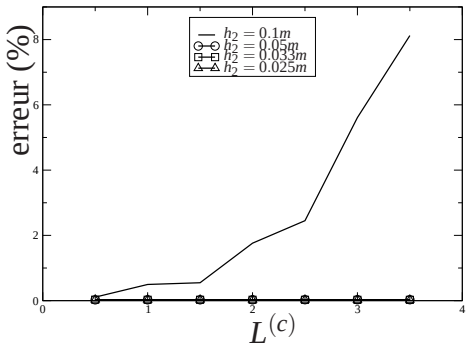
(b) $\ell = 0.5m$



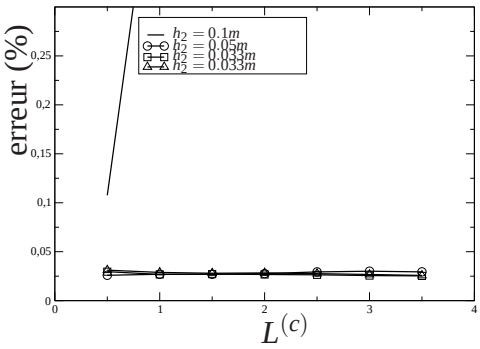
(c) $\ell = 1m$



(d) $\ell = 1m$ (zoom)



(e) $\ell = 2m$



(f) $\ell = 2m$ (zoom)

FIG. 2.13: Etude de la longueur de couplage sur la méthode Arlequin

A partir des courbes (a) à (f), on observe que le raccord Arlequin est meilleur si ℓ est petit. Cela revient à dire que le raccord de type $L^2(\Omega_c)$, *i.e.* sans pénalisation sur les termes en gradient, est un meilleur raccord volumique pour un problème de dynamique explicite. Enfin, on observe une meilleure convergence du raccord Arlequin de type $L^2(\Omega_c)$ vis à vis du raccord sur le bord que nous proposons pour des discrétisations grossières. Toutefois, en ce qui concerne les niveaux d'erreur, ils sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus avec notre stratégie.

Finalement, on peut dire que la méthode Arlequin permet de coupler les deux modèles avec une erreur admissible qui s'avère être identique à la nôtre. Tout bien considéré, il est préférable d'utiliser notre stratégie puisqu'elle permet de limiter le coût numérique. En effet, dans notre approche la résolution du problème d'interface n'admet que deux degrés de libertés. Tandis que pour l'approche Arlequin, le problème d'interface comprend autant d'inconnues que de degrés de liberté compris sur la zone de recouvrement.

Toutefois, il semble important de rappeler que la stratégie Arlequin a été conçue pour coupler des modèles de dimensions différentes (ex : poutre-plaque, modèle contrainte plane - poutre ...) et que les résultats que nous avançons ici ne se prononcent absolument pas pour ce cadre d'application.

6 Etude 2D des différents raccords de couplage

A présent, on s'intéresse à l'influence dans le choix du raccord entre les modèles sur l'erreur numérique et le temps de calcul. De cette étude, on en déduira l'approche la plus performante pour raccorder les deux modèles. Pour ce faire, on dresse une étude comparative selon deux axes. Tout d'abord, on déterminera l'erreur de couplage associée à l'amplitude en énergie des ondes fantômes. Ensuite, on s'intéresse au temps de calcul.

6.1 Position du problème

On s'intéresse à la résolution d'un problème bidimensionnel lequel est décomposé en deux sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$, comme illustré à la figure 2.14. Le domaine considéré a une forme rectangulaire de longueur 20 m et de largeur 2 m. La zone de recouvrement Ω_c entre les sous-domaines $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ se situe entre les abscisses de 9 m et 10 m. L'ensemble du domaine répond aux équations de l'élastodynamique soumis aux hypothèses de déformation plane.

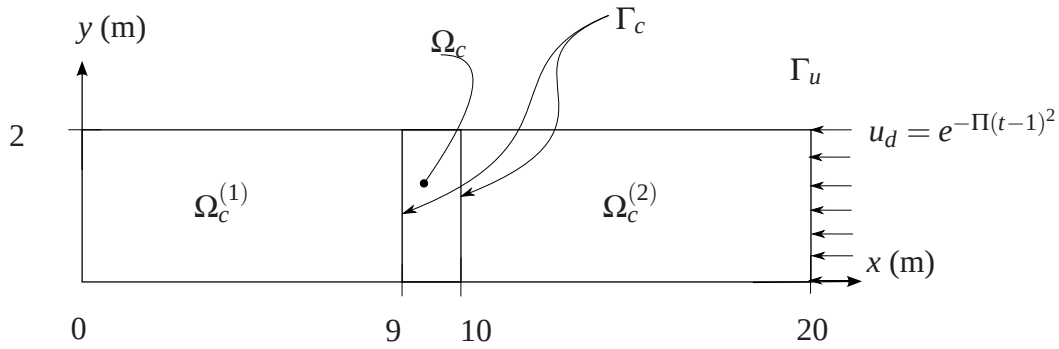


FIG. 2.14: Cas test 2-D

Concernant la discrétisation du problème, on discrétise le domaine $\Omega^{(1)}$ avec des éléments spectraux quadrangulaires d'ordre 5 caractérisé par le diamètre h_1. Quant au domaine $\Omega^{(2)}$, il est discrétisé avec des éléments spectraux à forme triangulaire d'ordre 1 de diamètre h_2. Pour le choix $h_1 = 1$ m et $h_2 = 0.2$ m, la figure 2.15 illustre le maillage.

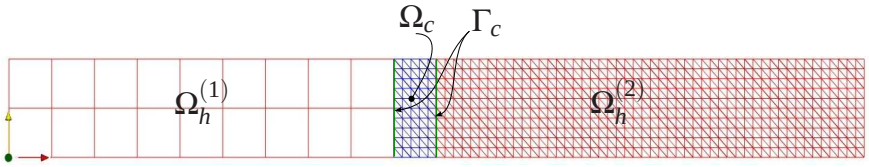


FIG. 2.15: Maillage du cas test 2-D

Dans cette étude, nous envisageons le raccord au niveau de la zone de recouvrement Ω_c sous deux angles. D'une part, nous étudions le raccord comme il a pu être exposé dans ce chapitre. Nous le caractérisons par la suite de raccord sur le bord. Ensuite, nous le comparons au raccord Arlequin lequel est exposé à la section 5.2.2.

L'étude proposée ici ne peut être exhaustive, mais il nous paraît suffisant d'étudier ces quatres types de couplage pour dresser une étude complète :

- Cas 1 : Le raccord est effectué sur le bord. Dans ce cas, on réalise deux types de discrétisation :

– Type 1 : L'interface utilise une discrétisation linéaire sous-intégrée (section 3.1). Rappelons que les opérateurs de couplage sont les suivants :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})}{}_{kl} = \phi_l^{(1)}(x_k) \text{ et } \mathbf{C}^{(\mathbf{2})}{}_{kl} = \delta_{kl} \tag{2.39}$$

– Type 2 : L'interface utilise une discrétisation éléments spectraux d'ordre 5 (section 3.1). Rappelons que les opérateurs de couplage sont les suivants :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})}{}_{kl} = \delta_{kl} \text{ et } \mathbf{C}^{(\mathbf{2})}{}_{kl} = \phi_l^{(2)}(x_k) \tag{2.40}$$

■ Cas 2 : Le raccord est Arlequin (cf 5.2.2). L'interface de collage est l'ensemble de la zone de recouvrement Ω_c et se base sur le maillage associée à $\Omega_h^{(2)}$. L'étude du raccord s'articule autour du choix de ℓ.

– Type 3 : On choisit $\ell = 0$ m. Dans ce cas, les opérateurs de couplage s'expriment :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})} = \int_{\Omega^{(c)}} \phi^{(1)}\phi^{(2)} d\Omega \text{ et } \mathbf{C}^{(\mathbf{2})} = \int_{\Omega^{(c)}} \phi^{(2)}\phi^{(2)} d\Omega \tag{2.41}$$

– Type 4 : On choisit $\ell = 1$ m. Dans ce cas, les opérateurs de couplage s'expriment :

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{1})} = \int_{\Omega^{(c)}} \phi^{(1)}\phi^{(2)} + \ell^2 \nabla^s\phi^{(1)} : \nabla^s\phi^{(2)} d\Omega$$

et

$$\mathbf{C}^{(\mathbf{2})} = \int_{\Omega^{(c)}} \phi^{(2)}\phi^{(2)} + \ell^2 \nabla^s\phi^{(2)} : \nabla^s\phi^{(2)} d\Omega \tag{2.42}$$

6.2 Analyse des résultats

Afin de pouvoir dresser une analyse pertinente des résultats numériques, on souhaite discerner facilement les ondes fantômes. Pour ce faire, on cherche à obtenir une solution analytique à notre problème sous forme d'ondes planes se propageant dans la longueur du domaine. Cela nous impose le choix d'un coefficient de poisson nul et des conditions limites sur le bord gauche ou droit du domaine.

Par soucis de simplicité, on fixe à l'unité la densité ρ, ainsi que le module d'Young E. Cela nous donne une vitesse des ondes longitudinales $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1m/s$. Finalement, on a comme solution analytique sur l'ensemble du domaine en choisissant $u_d = e^{-\Pi(t-1)^2}$:

$$u_x = e^{-\Pi(x-ct-1)^2} \quad \text{et} \quad u_y = 0 \tag{2.43}$$

où u_x et u_y sont respectivement la solution en déplacement selon l'axe des x et des y.

Pour les mêmes raisons que dans le cas test 1-D (cf section 5.1), on propose le critère d'erreur en énergie suivant :

$$\text{erreur} = \frac{E^{(2),\Omega_c^{(2)}}_{|t=20s}}{E_{\text{ref}}} \tag{2.44}$$

Ici, E_{ref} est l'énergie totale contenue dans le domaine Ω. Son expression est obtenue analytiquement. Quant à $E^{(2),\Omega_c^{(2)}}_{|t=20s}$, il correspond à la valeur numérique de l'énergie contenue dans le domaine $\Omega_c^{(2)}$ à l'instant $t = 20s$. Cette expression permet de mesurer l'énergie associée aux ondes fantômes.

6.3 Résultats numériques

Sur le cas test précédemment présenté, nous avons réalisé une étude paramétrique sur quatre types de couplage en fonction de la discrétisation. Celle-ci s'intéresse à leur influence sur l'erreur d'une part et d'autre part au temps de calcul. L'ensemble des résultats sont rassemblés dans les tableaux qui suivent. Enfin, une synthèse de ces résultats est réalisé à la figure (2.16).

Discrétisations	$h_1 = 1.0$ m et $h_2 = 2.010^{-1}$ m			
Type	1	2	3	4
Erreur (%)	6.21	26.4	3.78	77.8
Temps de Calcul (s)	13	13	17	19

Discrétisations	$h_1 = 1.0$ m et $h_2 = 1.010^{-1}$ m			
Type	1	2	3	4
Erreur (%)	3.31	23.3	3.57	87.1
Temps de Calcul (s)	23	21	74	89

Discrétisations	$h_1 = 1.0$m et $h_2 = 5.010^{-2}$ m			
Type	1	2	3	4
Erreur (%)	3.59	23.8	3.94	89.58
Temps de Calcul (s)	63	55	1342	1642

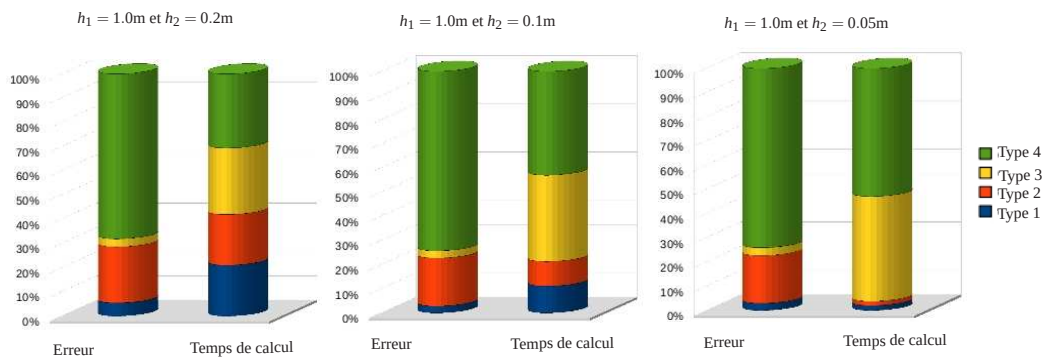


FIG. 2.16: Etude paramétrique du raccord en 2-D

De cette étude, on remarque que l'erreur est minimale pour un couplage de Type 1 et 3. Le couplage Arlequin de type 3, *i.e.* basé sur un produit scalaire de $L^2(\Omega_c)$, est même

meilleur pour une faible discrétisation. En outre, et contre toute attente, le couplage Arlequin de Type 4 réalisé à partir d'un produit scalaire $H^1(\Omega_c)$ ne remplit pas correctement sa fonction de recollement des champs. En effet, du fait que les termes en gradient sur le champs sont pris en compte via cet opérateur, on s'attendait à de meilleurs résultats. Mais les opérateurs de couplage ne sont pas calculés exactement étant donné que la quadrature est obtenue à partir du maillage triangulaire. On pourrait améliorer significativement les performances du collage de type 4 en augmentant l'ordre de quadrature du schéma d'intégration. Toutefois, cela engendre un coût de calcul supplémentaire. De ce fait, nous nous contentons des collages de type 1 et 3 qui donnent des résultats satisfaisants en terme d'erreur.

On s'intéresse désormais à l'influence de ces quatre types de couplage sur le temps de calcul. On observe naturellement que le raccord des champs sur le bord permet de réduire considérablement le temps de calcul. Le gain en temps de calcul est dû au faible nombre de degrés de liberté au niveau de l'interface de couplage. En effet, le temps de calcul dû au calcul des opérateurs de couplage et l'inversion du problème d'interface en est considérablement réduit. Pour conclure à partir de cette étude numérique sur les différents raccords de couplage, nous préconisons l'utilisation d'un raccord sur le bord de type 1 du fait que cela permet d'obtenir dans un premier temps une erreur de couplage sensiblement équivalente au couplage Arlequin de Type 3 et dans un second temps de limiter le temps de calcul global.

7 Résolution par une approche multi-pas de temps

Du fait que l'on ait choisi auparavant une approche par décomposition de domaine duale, il paraît naturel que notre approche multiéchelle en temps se base sur une méthode de sous-cyclage. Les travaux de recherche effectués par [Combescure 01] présenté au chapitre 1 constituent notre point de départ. On rappelle que le problème d'interface est le suivant :

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_j = -[(1-\frac{j}{m})\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{w}_k^{(1),f} + \frac{j}{m}\mathbf{C}^{(1),f}\mathbf{w}_{k+1}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{w}_j^{(2),f}] \tag{2.45}$$

avec $\mathbf{H}$ et $\mathbf{w}_j^{(i),f}$ qui sont définis selon le choix de la condition de continuité au niveau de l'interface :

– en déplacement :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_j^{(i),f} =^P \mathbf{u}_j^{(i)} + \beta^{(i)}\Delta t^{(i)2}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} \\ \mathbf{H} = \sum_i \beta^{(i)}\Delta t^{(i)2}\mathbf{C}^{(i)}\tilde{\mathbf{M}}^{(i)-1}\mathbf{C}^{(i)T} \end{cases} \tag{2.46}$$

– en vitesse :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_j^{(i),f} =^P \dot{\mathbf{u}}_j^{(i)} + \gamma^{(i)}\Delta t^{(i)}\ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} \\ \mathbf{H} = \sum_i \gamma^{(i)}\Delta t^{(i)}\mathbf{C}^{(i)}\tilde{\mathbf{M}}^{(i)-1}\mathbf{C}^{(i)T} \end{cases} \tag{2.47}$$

– en accélération :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_j^{(i),f} = \ddot{\mathbf{u}}_{j+1}^{(i),f} \\ \mathbf{H} = \sum_i \mathbf{C}^{(i)} \tilde{\mathbf{M}}^{(i)-1} \mathbf{C}^{(i)T} \end{cases} \tag{2.48}$$

Quant à m, il définit le nombre de sous-cyclage effectué dans un grand pas de temps. Ici, on choisit $\Delta t^{(1)}$ pour le pas de temps grossier tel que $\Delta t^{(1)} = m\Delta t^{(2)}$. On remarque que cette approche permet de prédire le second membre du problème d'interface en interpolant linéairement. Combescure et Gravouil démontrèrent dans [Combescure 02] la stabilité de cet algorithme dans le cas d'une condition de continuité en vitesse au niveau de l'interface, tant que chaque sous-domaine vérifie sa propre condition de stabilité.

7.1 Introduction

La méthode proposé par [Combescure 01] permet d'être conservative en énergie quelque soit la condition de continuité choisie au niveau de l'interface pour un schéma mono-pas de temps. Cependant, dans le cas d'un schéma multi-pas de temps, cette méthode est dissipative.

■ **Proposition**

Nous pensons que cette dissipation est due à une inconsistance du prédicteur du problème d'interface. L'objectif du travail qui suit est d'améliorer la consistance du schéma multi-pas de temps afin de limiter la perte d'énergie. Pour ce faire, on propose d'enrichir l'interpolation du second membre en l'interpolant dans une base temporelle du second ordre. Cette opération nécessite dans notre cas le stockage d'un vecteur supplémentaire $\ddot{\mathbf{u}}_{k-1}^{(1),f}$ vis à vis de l'approche proposée par [Combescure 01]. Cela n'engendre pas un surcoût numérique conséquent et nous amène au problème d'interface suivant :

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}_j = -\mathbf{C}^{(1)} \left(\frac{j^2}{m^2} \left(\frac{\mathbf{w}_k^{(1),f} + \mathbf{w}_{k+1}^{(1),f}}{2} - \mathbf{w}_{k-1}^{(1),f} \right) + \frac{j}{m} \left(\frac{\mathbf{w}_k^{(1),f} - \mathbf{w}_{k+1}^{(1),f}}{2} \right) + \mathbf{w}_{k-1}^{(1),f} \right) + \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{w}_j^{(2),f} \tag{2.49}$$

où $\mathbf{H}$ et $\mathbf{w}_j^{(i),f}$ sont définis selon le choix de la condition de continuité au niveau de l'interface (2.46,2.47,2.48).

Sur la figure 2.17, on peut visualiser de quelle façon l'approche que nous proposons diffère de celle élaborée par [Combescure 01].

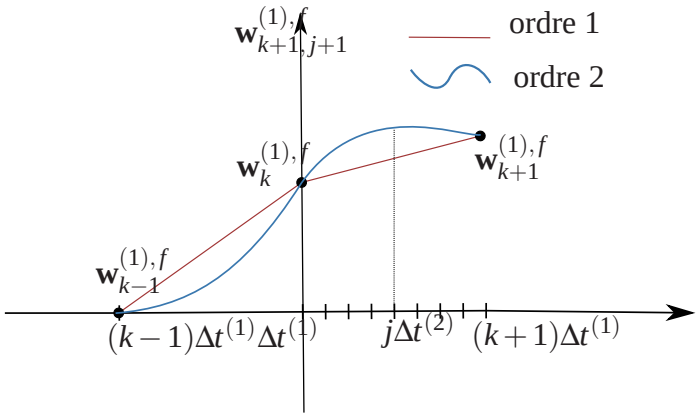


FIG. 2.17: Représentation de la discrétisation temporelle à l'interface

■ Algorithme de résolution

Les méthodes de discrétisation spatiale utilisées dans chaque sous-domaine nous donne naturellement une matrice de masse diagonale. Par conséquent, on utilise le schéma d'intégration aux différences centrées dans chaque sous-domaine ($\gamma^{(i)} = \frac{1}{2}$ et $\beta^{(i)} = 0$). Cela permet de mettre en place un cadre de résolution explicite localement dans chaque sous-domaine. Toutefois, dans ce cas, on ne peut pas choisir une condition de continuité en déplacement au niveau de l'interface car $\mathbf{H} = 0$. Il faudrait modifier le schéma initial pour pouvoir réaliser ce type de condition.

L'algorithme de résolution est présenté à la figure 2.18. On note que le problème d'interface nécessite la mise en place d'un solveur. Nous avons mis en place pour cette résolution un gradient conjugué. On introduit les notations suivantes qui diffèrent selon l'ordre d'interpolation choisi au niveau de l'interface :

– pour l'ordre 1 :

$$\begin{cases} r_j = 0 \\ s_j = 1 - \frac{j}{m} \\ t_j = \frac{j}{m} \end{cases} \tag{2.50}$$

– pour l'ordre 2 :

$$\begin{cases} r_j = \frac{j}{2m}(\frac{j}{m} - 1) \\ s_j = 1 - \frac{j^2}{m^2} \\ t_j = \frac{j}{2m}(1 + \frac{j}{m}) \end{cases} \tag{2.51}$$

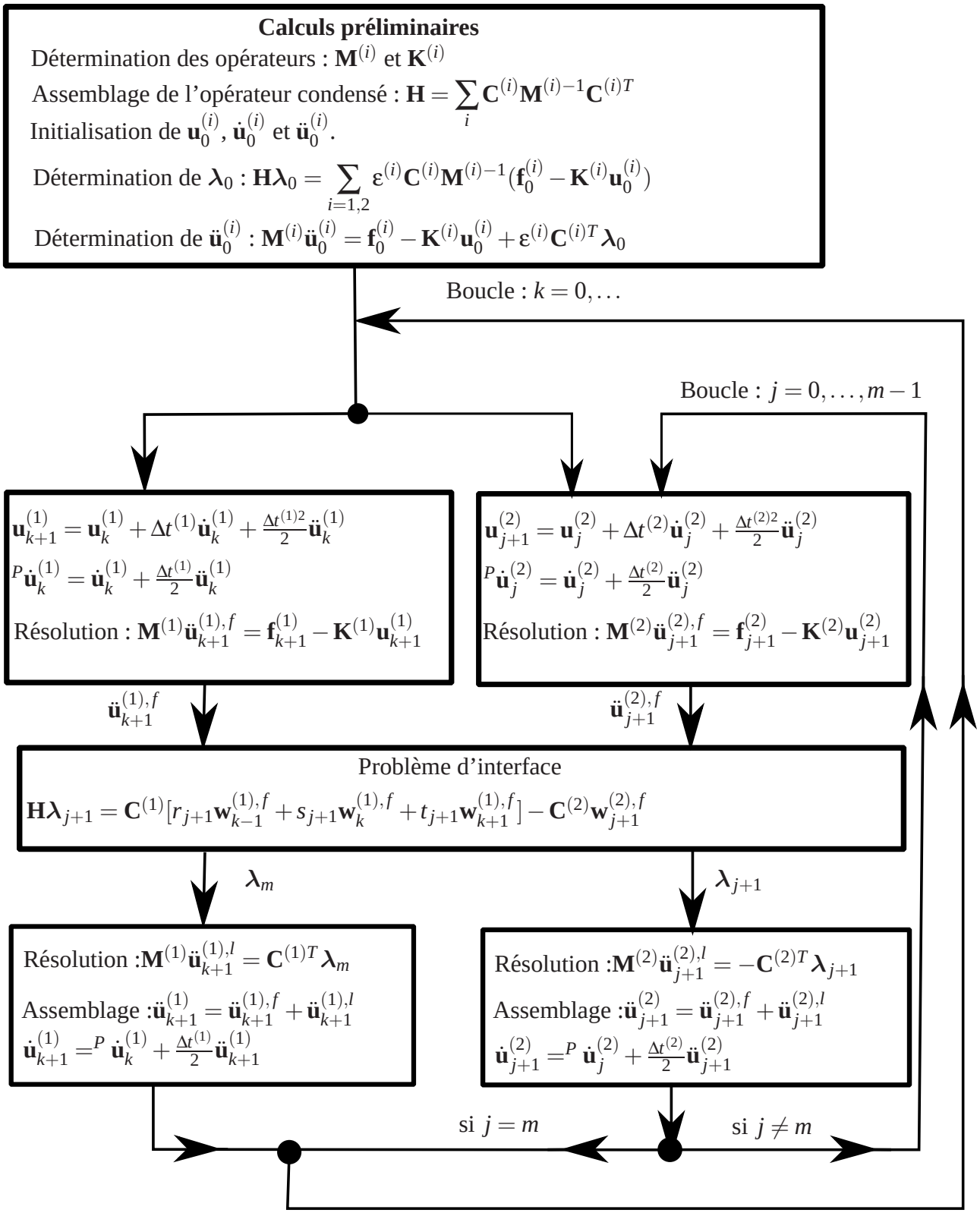


FIG. 2.18: Algorithme de résolution multi-pas de temps

7.2 Position du cas test

Afin d'analyser la pertinence de ces schémas multi-pas, on se propose de traiter un problème à un seul degré de liberté ou scalaire comme illustré à la figure 2.19.

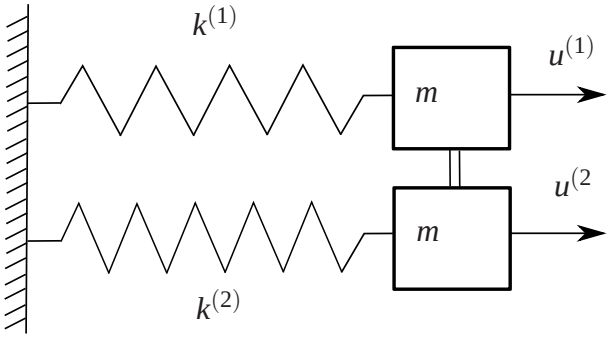


FIG. 2.19: Problème à un seul degré de liberté

■ Détermination de la solution analytique

L'application du Principe Fondamental de la Dynamique à chacun des solides (1) et (2) nous amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{u}^{(1)} = -k^{(1)}u^{(1)} + f_{2\to 1} \\ m\ddot{u}^{(2)} = -k^{(2)}u^{(2)} + f_{1\to 2} \\ u^{(1)} = u^{(2)} \\ C.I. \end{cases} \tag{2.52}$$

avec $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$ les raideurs des ressorts liant respectivement les solides (1) et (2) au bâti. Quant à $f_{1\to 2}$, il correspond à l'effort d'interaction du solide (1) sur le solide (2) résultant de l'encastrement qui mène aussi à la condition cinématique ($u^{(1)} = u^{(2)}$). Puis, $C.I.$ note les conditions initiales.

On pose $u^{(1)} = u^{(2)} = u$, $\omega^{(1)2} = \frac{k^{(1)}}{m}$, $\omega^{(2)2} = \frac{k^{(2)}}{m}$ et $\lambda = \frac{f_{2\to 1}}{m}$. Cela nous permet de ramener le système d'équation (2.52) à cette équation différentielle :

$$\ddot{u} + \omega_c u = 0$$

avec $\omega_c = \frac{\omega^{(1)2}+\omega^{(2)2}}{2}$.
En choisissant les conditions initiales (C.I.) $u(0) = 0$ et $\dot{u}(0) = \omega_c$, on obtient la solution analytique suivante :

$$u_{\text{ref}}(t) = \sin(\omega_c t)$$

■ **Discrétisation du problème scalaire**

La mise en place de la méthode de résolution multi-pas de temps, ainsi que le discrétisation à l'aide d'un schéma aux différences centrées des équations (2.52) nous permet d'obtenir l'ensemble des équations qui suivent. Dans ce cas, chaque sous-domaine correspond à un solide.

Dans le sous-domaine $\Omega^{(1)}$:

$$\begin{cases} u_{k+1}^{(1)} = u_k^{(1)} + \Delta t m \dot{u}_k^{(1)} + \frac{(\Delta t m)^2}{2} \ddot{u}_k^{(1)} \\ \dot{u}_{k+1}^{(1)} = \dot{u}_k^{(1)} + \frac{\Delta t m}{2} \ddot{u}_k^{(1)} + \frac{\Delta t m}{2} \ddot{u}_{k+1}^{(1)} \\ \ddot{u}_{k+1}^{(1)} + \omega^{(1)2} u_{k+1}^{(1)} = \lambda_m \end{cases} \tag{2.53}$$

Dans le sous-domaine $\Omega^{(2)}$:

$$\begin{cases} u_{j+1}^{(2)} = u_j^{(2)} + \Delta t \dot{u}_j^{(2)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_j^{(2)} \\ \dot{u}_{j+1}^{(2)} = \dot{u}_j^{(2)} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_j^{(2)} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{j+1}^{(2)} \\ \ddot{u}_{j+1}^{(2)} + \omega^{(2)2} u_{j+1}^{(2)} = -\lambda_{j+1} \end{cases} \tag{2.54}$$

Et le problème d'interface :

$$H\lambda_j = -r_j w_{k-1}^{(1),f} - s_j w_k^{(1),f} - t_j w_k^{(1),f} + w_j^{(2),f} \tag{2.55}$$

où on a selon le choix de la condition de continuité au niveau de l'interface en prenant $\Delta t^{(1)} = m\Delta t$ et $\Delta t^{(2)} = \Delta t$:

– condition en vitesse :

$$\begin{cases} w_j^{(i),f} =^P \dot{u}_j^{(i)} - \frac{\Delta t^{(i)} \omega^{(i)2}}{2} u_j^{(i)} \\ H = \frac{\Delta t(m+1)}{2} \end{cases} \tag{2.56}$$

– condition en accélération :

$$\begin{cases} w_j^{(i),f} = \ddot{u}_{j+1}^{(i),f} \\ H = 2 \end{cases} \tag{2.57}$$

L'écriture sous cette forme nous permet de dresser une étude paramétrique sur les différents paramètres $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, Δt et m. Nous allons étudier successivement le schéma mono-pas de temps, puis multi-pas de temps. On note que l'on peut évaluer le pas de temps critique de ce problème de façon simple $\Delta t_c = \frac{2}{\omega_c}$.

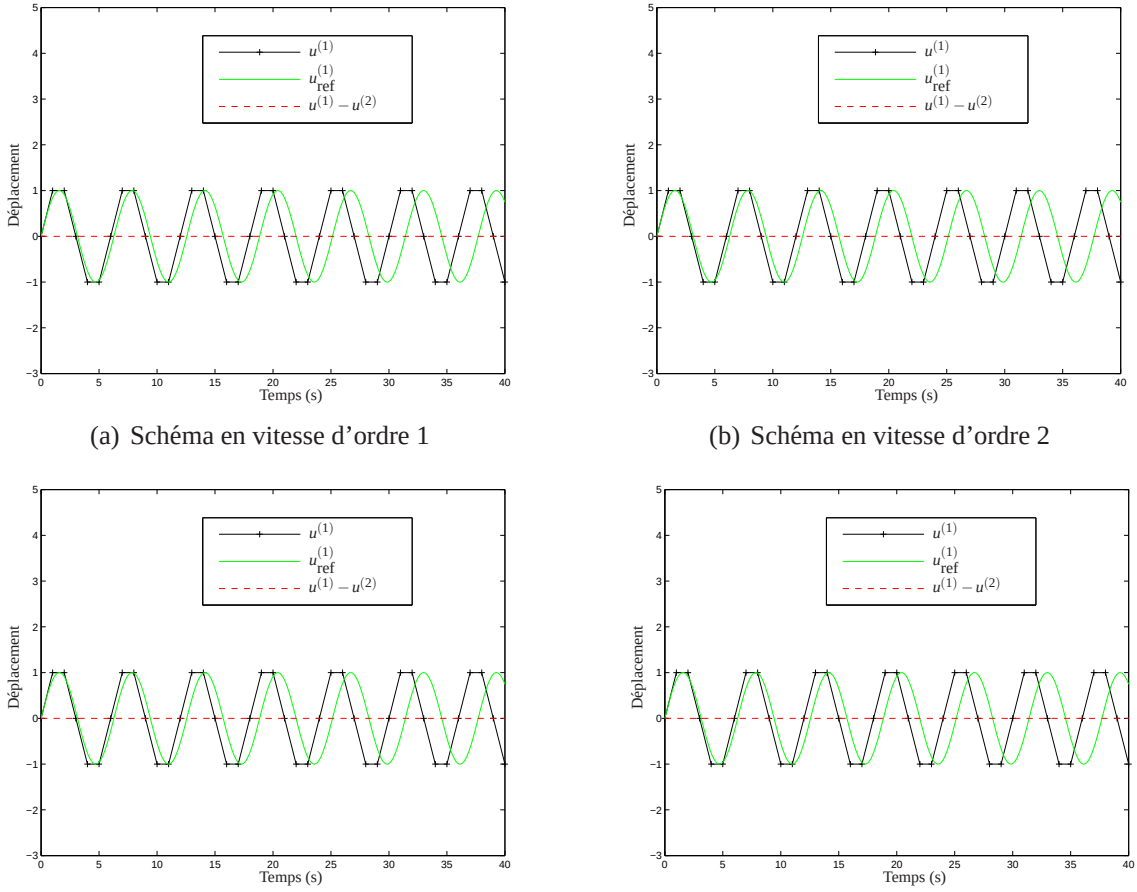
Enfin, nous imposons les conditions initiales suivantes afin que le problème soit bien posé et puisse être comparé à la solution analytique u_{ref} :

$$\begin{cases} u_0^{(1)} = 0 \quad \dot{u}_0^{(1)} = \omega_c \\ u_0^{(2)} = 0 \quad \dot{u}_0^{(2)} = \omega_c \end{cases} \tag{2.58}$$

7.3 Résultats numériques

■ Validation de l'approche mono-pas de temps

Dans cette section, nous allons tenter de valider l'approche en mono-pas de temps. L' objectif est de vérifier que l'approche d'ordre 2 que nous proposons conserve les propriétés de consistance et de stabilité. Pour ce faire, nous dressons une étude sur l'influence du pas de temps Δt et de la pulsation $\omega^{(2)}$. Pour l'ensemble des courbes qui vont suivre, on note $u^{(1)}_{\text{ref}}$ la solution analytique du problème.



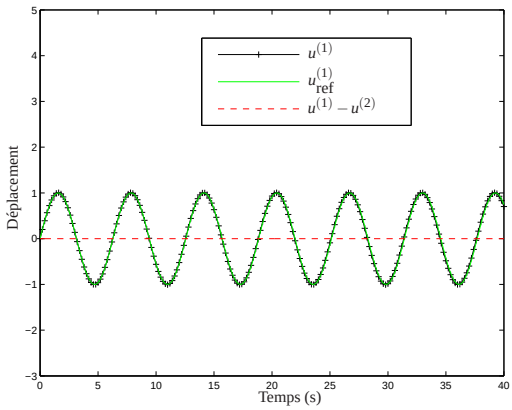
(a) Schéma en vitesse d'ordre 1

(b) Schéma en vitesse d'ordre 2

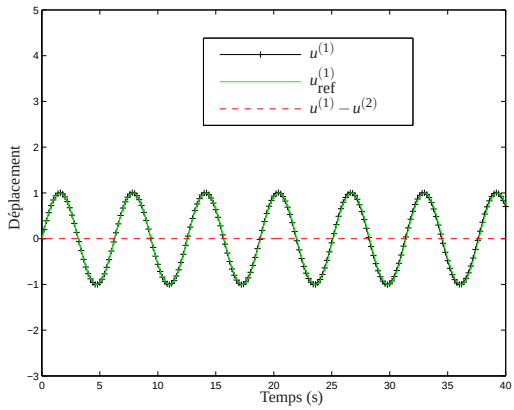
(c) Schéma en accélération d'ordre 1

(d) Schéma en accélération d'ordre 2

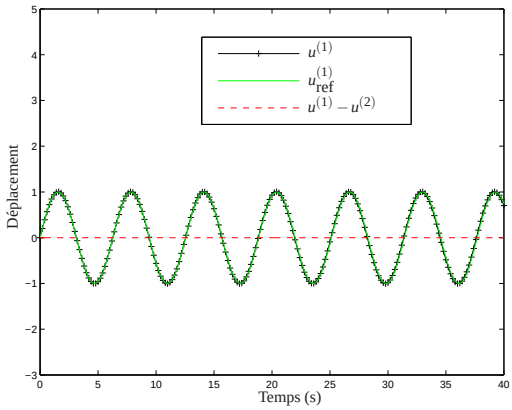
FIG. 2.20: $m = 1$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 1$ et $\Delta t = 0.5\Delta t_c$



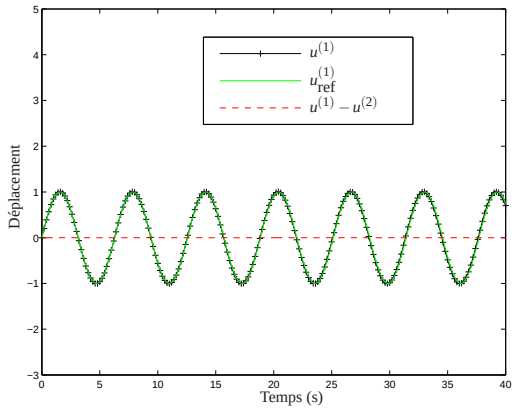
(a) Schéma en vitesse d'ordre 1



(b) Schéma en vitesse d'ordre 2

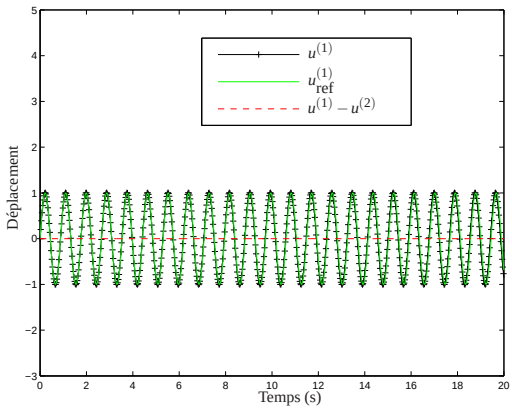


(c) Schéma en accélération d'ordre 1

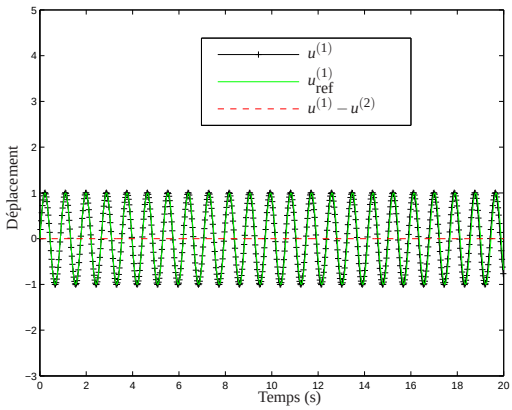


(d) Schéma en accélération d'ordre 2

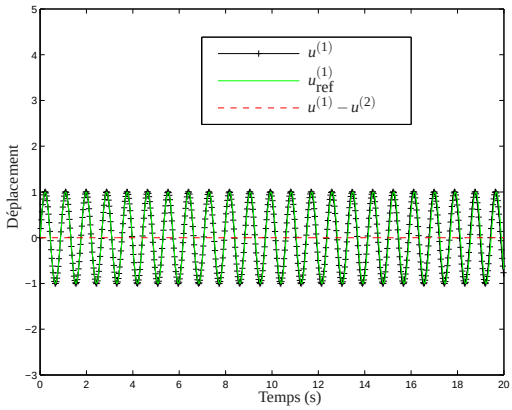
FIG. 2.21: $m = 1$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 1$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$



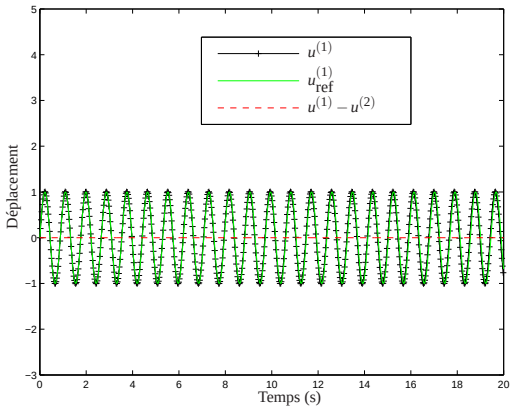
(a) Schéma en vitesse d'ordre 1



(b) Schéma en vitesse d'ordre 2



(c) Schéma en accélération d'ordre 1



(d) Schéma en accélération d'ordre 2

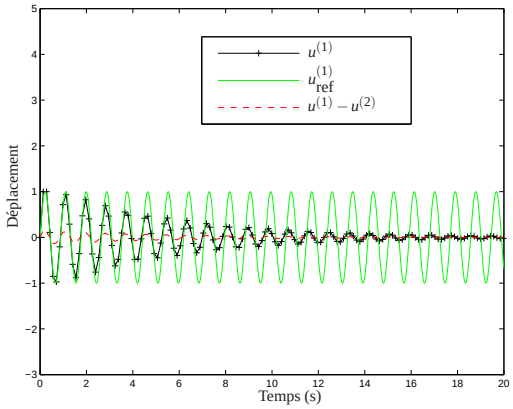
FIG. 2.22: $m = 1$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$

■ **Interprétation des résultats associés à l'approche mono-pas de temps**

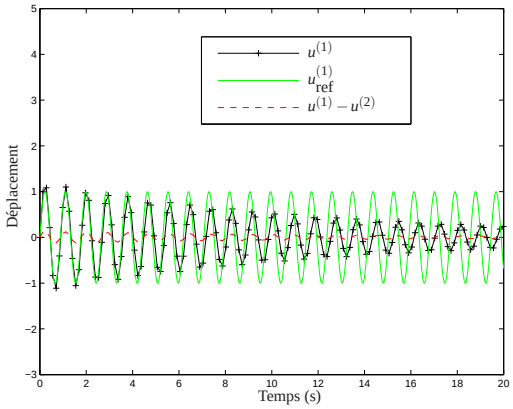
A partir des courbes (2.20,2.21 et 2.22), on vérifie que ces schémas sont strictement équivalents tant en terme de consistance que stabilité. En effet, les courbes sont absolument identiques quelque soit le jeu de paramètres Δt et $\omega^{(2)}$. Ces stratégies de couplage sont consistantes car la diminution du pas de temps Δt implique la convergence vers la solution analytique $u^{(1)}_{\text{ref}}$. Par ailleurs, on observe que le saut de déplacement à l'interface $u^{(1)} - u^{(2)}$ est nulle à tout instant quelque soit le schéma utilisé. Cela nous assure la stabilité de chacune de ces méthodes.

■ Validation de l'approche multi-pas de temps

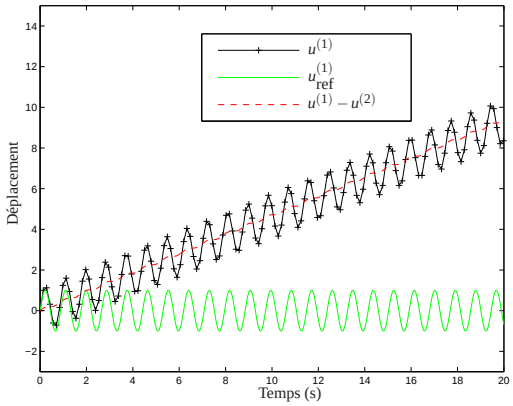
Désormais, nous nous intéressons aux stratégies multi-pas de temps. A travers l'étude qui va suivre, nous allons déterminer l'influence du jeu de paramètres Δt et $\omega^{(2)}$ sur ces schémas.



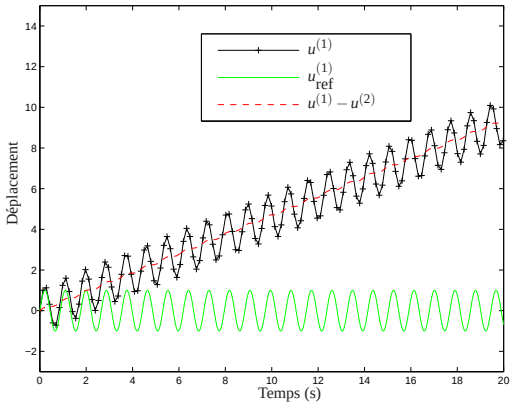
(a) Schéma en vitesse d'ordre 1



(b) Schéma en vitesse d'ordre 2

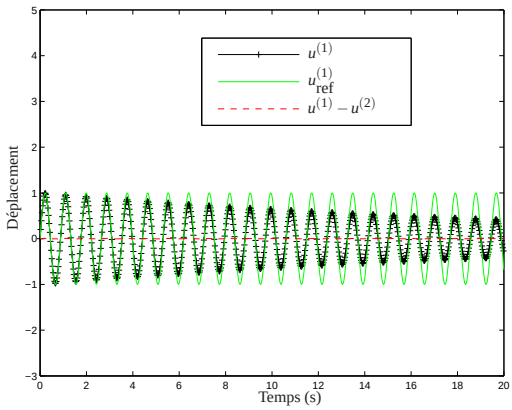


(c) Schéma en accélération d'ordre 1

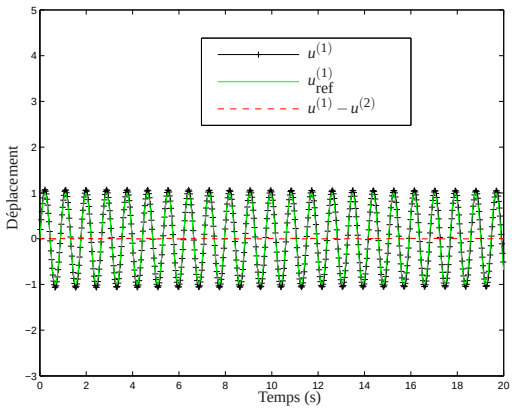


(d) Schéma en accélération d'ordre 2

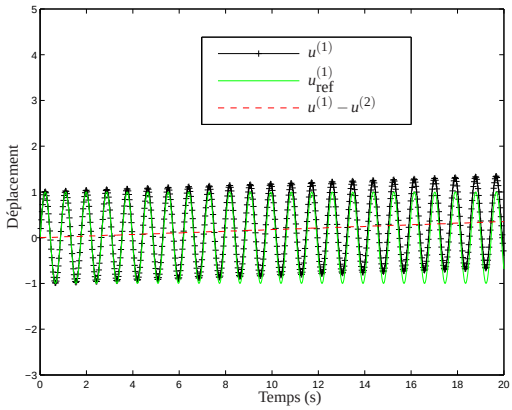
FIG. 2.23: $m = 2$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.5\Delta t_c$



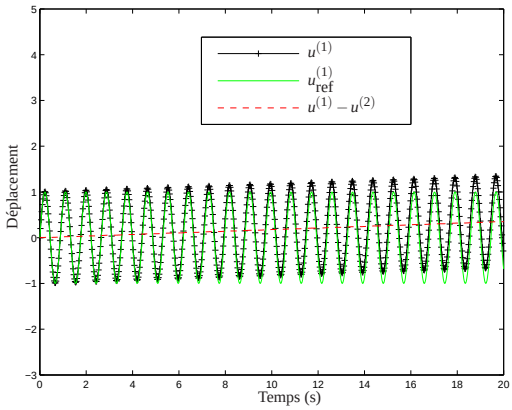
(a) Schéma en vitesse d'ordre 1



(b) Schéma en vitesse d'ordre 2

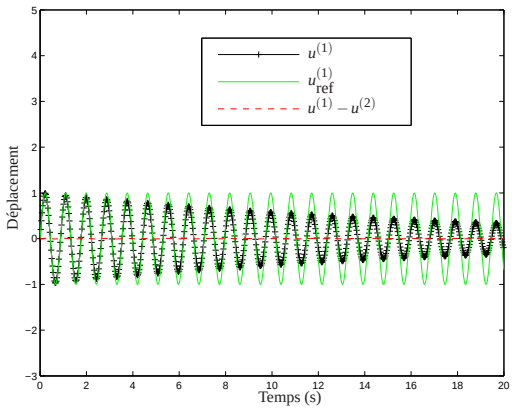


(c) Schéma en accélération d'ordre 1

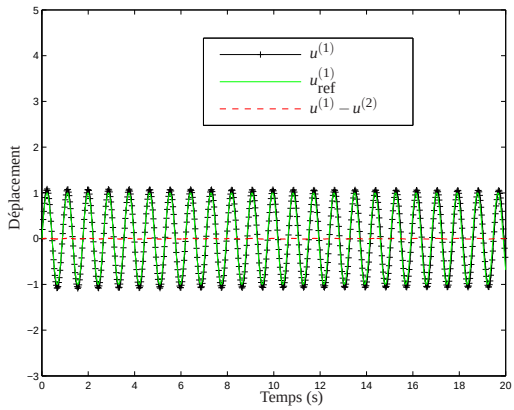


(d) Schéma en accélération d'ordre 2

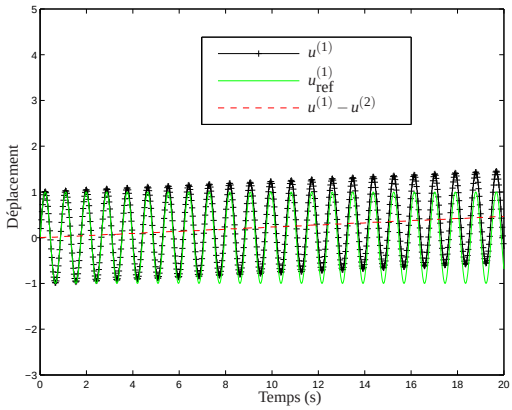
FIG. 2.24: $m = 2$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$



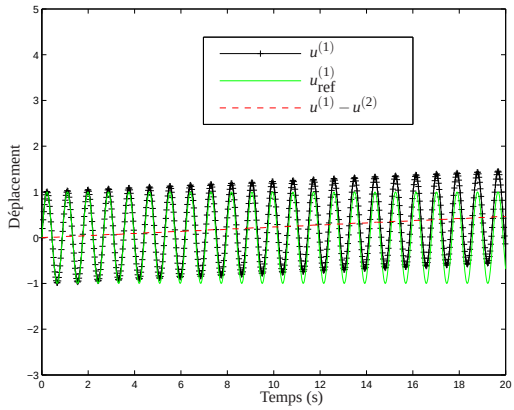
(a) Schéma en vitesse d'ordre 1



(b) Schéma en vitesse d'ordre 2



(c) Schéma en accélération d'ordre 1



(d) Schéma en accélération d'ordre 2

FIG. 2.25: $m = 10$, $\omega^{(1)} = 1$, $\omega^{(2)} = 10$ et $\Delta t = 0.1\Delta t_c$

■ **Interprétation des résultats associés à l'approche multi-pas de temps**

Tout d'abord, on dresse une étude des schémas en accélération. Les figures (2.23c, 2.24c et 2.25c) permettent de vérifier les résultats obtenus par Combescure et Gravouil sur la non-vérification de la stabilité du schéma en accélération dans un cadre multi-pas de temps. Dans cette configuration, on observe que le saut de déplacement à l'interface $u^{(1)} - u^{(2)}$ est strictement croissant en fonction du temps ce qui traduit bien l'instabilité. Bien qu'une discrétisation plus fine permet de limiter l'apparition de ce phénomène, nous ne pouvons utiliser ce schéma. En outre, à partir des figures (2.23d, 2.24d et 2.25d), nous observons que le schéma en accélération d'ordre 2 est strictement équivalent au schéma en accélération d'ordre 1. Il est par conséquent déconseillé d'utiliser ce schéma.

Désormais, nous nous intéressons aux schémas multi-pas de temps en vitesse. Nous observons sur les courbes (2.23 a b , 2.24 a b et 2.25 a b) que ces stratégies sont stables. En effet, le saut de déplacement au niveau de l'interface $u^{(1)} - u^{(2)}$ est en moyenne nul au cours du temps. Par ailleurs, on observe aux figures (2.24a b, 2.23a et 2.25a) une nette

atténuation en amplitude du déplacement. Toutefois, on remarque que (2.23b et 2.25b) illustre bien l'amélioration du à l'augmentation à l'ordre 2 du problème d'interface, pour des pas de temps assez petits.

■ **Bilan**

L'ensemble des résultats présentés dans cette étude se reistreignent au cadre d'un problème scalaire. Il faudrait pour confirmer l'ensemble de ces résultats réaliser une étude analytique, ainsi qu'une extension de ces études à des problèmes de plus grande envergure. Par ailleurs, dans le cadre de notre étude, nous utilisons la méthode des éléments spectraux laquelle est une méthode élément fini d'ordre élevé. On note qu'il existe une discordance d'ordre entre le schéma de discrétisation en espace et celui en temps car on utilise un schéma de Newmark (ordre 2 pour $\gamma = \frac{1}{2}$). Dans le cas présent, nous devrions utiliser un schéma de discrétisation temporelle plus élevé dans le domaine discrétisé avec des éléments spectraux. Cela engendre le développement d'une méthode de résolution multi-pas de temps ne se limitant pas aux schémas de Newmark.

8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une stratégie permettant de coupler deux approches continues ayant une discrétisation différente. Cette approche permet de prendre en compte des incompatibilités au niveau du maillage. L'incompatibilité est complète puisqu'elle est gérée au niveau de la géométrie et de la discrétisation. Elle est prise en compte d'un point de vue géométrique par l'autorisation du recouvrement et d'un point de vue de la discrétisation par l'utilisation d'une projection de Mortier. Concernant la projection de Mortier, nous avons proposé deux approches de discrétisation de l'interface qui permettent toutes les deux de réduire le coût de calcul du problème d'interface.

Enfin, à la suite de différents tests numériques, nous avons pu montrer la faible dépendance de la stratégie vis-à-vis des différents paramètres de couplage. Aussi, une étude comparative avec la méthode Arlequin [Ben Dhia 98] nous assure que l'on obtient le même niveau d'erreur pour une charge de calcul significativement réduite.

En ce qui concerne l'aspect temporel, nous avons développé une stratégie de résolution multi-pas de temps en se basant sur les travaux effectués par [Combescure 01]. Dans cette approche, nous proposons une régularisation du problème d'interface afin de limiter l'effet de dissipation d'énergie du au schéma multi-pas de temps.

Chapitre 3

Une stratégie de couplage continu-discret

Sommaire

1 Introduction 76

2 Description des modèles 76

2.1 Le modèle discret 77

2.2 Le modèle continu 79

3 La méthode de couplage 79

3.1 Mise en place du problème couplé 79

3.2 Détails sur la construction des opérateurs de couplage 80

4 Résultats numériques 83

4.1 Position du cas test 83

4.2 Identification des paramètres matériaux du modèle discret 85

4.3 Analyse du problème couplé 89

5 Conclusion 92

1 Introduction

Désormais, les méthodes de couplage entre modèle continu et discret sont de plus en plus utilisées pour étudier les phénomènes locaux tels que la fracture. Cette stratégie permet d'obtenir un résultat précis en utilisant le moins possible le modèle discret. En effet, le modèle continu offre une solution certes grossière mais à moindre coût vis à vis des modèles discrets. La stratégie proposée considère que le domaine associé au modèle continu permet d'imposer des conditions limites au domaine discret. De tels modèles sont appelés multiéchelle dans le sens où chacun des deux modèles a une échelle de représentation différente.

Une difficulté connue dans la mise en place de ce type de stratégie est l'apparition d'onde fantôme au niveau de la zone de collage entre les deux modèles [Doll 76, Adelman 76]. Ces ondes sont dites fantômes du fait qu'elles ont un non sens mécanique et qu'elles apparaissent pour des raisons purement numériques. Elles sont bien entendu indésirables et on peut expliquer leur apparition par le fait que les hautes fréquences du modèle discret ne peuvent pas être représentées dans le modèle continu et sont par conséquent réfléchies à l'interface. Il existe déjà plusieurs stratégies dans la littérature qui permettent de coupler ces modèles en limitant ce phénomène. On a pu voir dans le premier chapitre la Bridging Domain Method de [Xiao 04] et la Bridging Scale Method de [Wagner 03] qui sont des réponses à cette problématique.

Dans ce chapitre, nous proposons une stratégie de couplage entre un modèle discret et continu en se basant sur la formulation de couplage continu-continu exposé dans le second chapitre de cette thèse. L'ensemble des travaux présentés ici consiste à adapter la stratégie écrite entre deux modèles continus dans ce cas de figure. En particulier, nous abordons la construction du problème couplant une modélisation éléments spectraux avec la méthode des éléments discrets. On tirera parti des particularités de chacune de ces méthodes afin d'obtenir un algorithme de résolution optimal.

La section qui suit présente les deux modèles discret et continu en se ramenant à une formulation discrète. Par la suite, on présentera la stratégie de couplage. Et enfin, nous illustrerons la méthode à travers différents cas test numériques.

2 Description des modèles

Le problème que l'on souhaite résoudre est discrétisé d'une part avec des éléments spectraux recouvrant le domaine $\Omega^{(S)}$ et d'autre part avec des éléments discrets recouvrant le domaine $\Omega^{(D)}$. Le couplage est réalisé à travers une zone de recouvrement entre ces deux domaines $\Omega^{(J)} = \Omega^{(S)} \cap \Omega^{(D)}$. On peut voir l'illustration d'un problème type sur la figure 3.1. On se situe pour des raisons de simplicité dans le cas bidimensionnel.

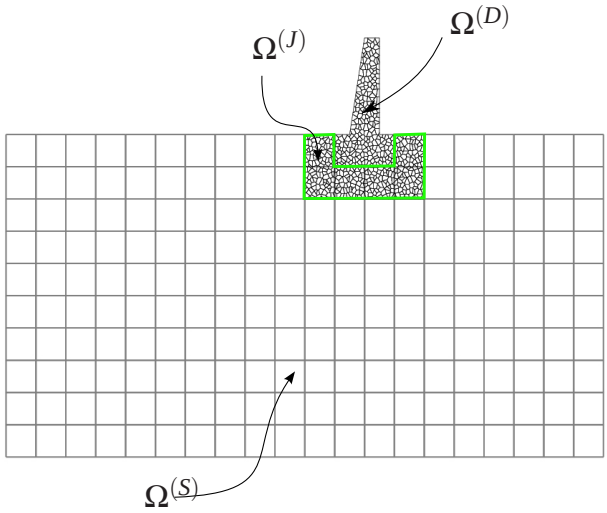


FIG. 3.1: Problème couplé discrétisé

2.1 Le modèle discret

Le modèle discret considère le mouvement de chaque particule obtenue à partir d'un pavage de Voronoi sur l'ensemble du domaine $\Omega^{(D)}$. Chacune de ces particules a une forme polygonale et est reliée à ses voisines par des liens qui traduisent la cohésion du milieu. La figure 3.2 illustre ce modèle. On note que dans le cas où les efforts d'interaction observables au niveau du lien dépassent un seuil critique défini par le matériau utilisé, la suppression du lien modélise la rupture.

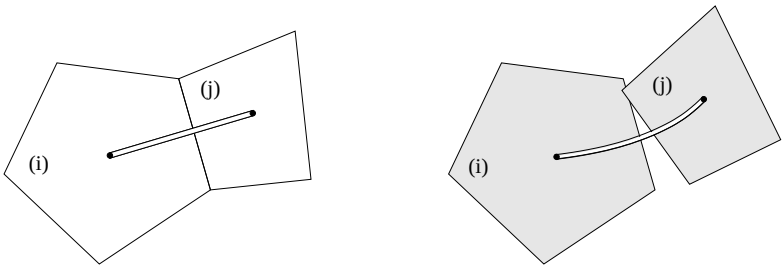


FIG. 3.2: Représentation du modèle discret

Dans ce système constitué de particules comme illustré ci-dessus, le lagrangien L^D associé au modèle discret a pour expression la forme suivante :

$$L^D_{\Omega^{(D)}} = T^D_{\Omega^{(D)}} - V^D_{\Omega^{(D)}} \tag{3.1}$$

où $T^D_{\Omega^{(D)}}$ et $V^D_{\Omega^{(D)}}$ correspondent respectivement à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle du modèle discret dans le domaine $\Omega^{(D)}$. On a pour expression de l'énergie

cinétique :

$$T^D_{\Omega^{(D)}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i ||\dot{\mathbf{u}}_i||^2 + \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 \tag{3.2}$$

avec $\mathbf{u}_i$ le déplacement en translation et θ_i la rotation dans le plan de la particule i, ainsi que m_i et I_i la masse et le moment d'inertie quadratique de la particule i.

L'expression de l'énergie potentielle a la forme suivante :

$$V^D_{\Omega^{(D)}} = V^{Dint}_{\Omega^{(D)}} - V^{Dext}_{\Omega^{(D)}} \tag{3.3}$$

où $V^{Dint}_{\Omega^{(D)}}$ correspond à l'énergie intérieur du système particulaire assimilable à une énergie de déformation ou d'interaction entre particules et $V^{Dext}_{\Omega^{(D)}}$ correspond quant à lui à l'énergie attribuée au système via des efforts ou moments extérieurs.

Nous avons choisi d'utiliser un modèle discret de type *Lattice Model*. Dans ce cas, l'interaction entre chaque particule correspond au modèle poutre d'Euler-Benoulli. Cela nous donne pour expression de $V^{Dint}_{\Omega^{(D)}}$ en se référant au chapitre 1 :

$$V^{Dint}_{\Omega^{(D)}} = \sum_i \sum_j \mathbf{F}^{\text{int}}_{j\to i} \mathbf{u}_i + M^{\text{int}}_{j\to i} \theta_i \tag{3.4}$$

où j désigne l'ensemble des particules liées à chaque particule i.

En ce qui concerne l'expression de $V^{Dext}_{\Omega^{(D)}}$, on a évidemment :

$$V^{Dext}_{\Omega^{(D)}} = \sum_i \mathbf{F}^{\text{ext}}_i \mathbf{u}_i + M^{\text{ext}}_i \theta_i \tag{3.5}$$

A partir de ces équations, on peut se ramener à l'expression suivante des énergies en utilisant une notation matricielle :

$$\begin{cases} T^D_{\Omega^{(D)}} = & \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{u}}^D]^T \mathbf{M}^D_{\Omega^{(D)}} [\dot{\mathbf{u}}^D] + \frac{1}{2}[\dot{\boldsymbol{\theta}}^D]^T \mathbf{I}^D_{\Omega^{(D)}} [\dot{\boldsymbol{\theta}}^D] \\ V^D_{\Omega^{(D)}} = & \frac{1}{2}[\mathbf{u}^D]^T \mathbf{K}^D_{\Omega^{(D)}} [\mathbf{u}^D] - [\mathbf{f}^D_{\Omega^{(D)}}]^T [\mathbf{u}^D] + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}^D]^T \mathbf{G}^D_{\Omega^{(D)}} [\boldsymbol{\theta}^D] - [\mathbf{m}^D_{\Omega^{(D)}}]^T [\boldsymbol{\theta}^D] + [\boldsymbol{\theta}^D]^T \mathbf{B}^D_{\Omega^{(D)}} [\mathbf{u}^D] \end{cases} \tag{3.6}$$

où :

- $\mathbf{u}^D$ et $\boldsymbol{\theta}^D$ sont les vecteurs rassemblant respectivement les déplacements et rotations de chaque particule.
- $\mathbf{M}^D_{\Omega^{(D)}}$ et $\mathbf{I}^D_{\Omega^{(D)}}$ sont respectivement les matrices assemblant les masses et inerties de chaque particule. Notons que ces deux matrices sont diagonales, ce qui permet de mettre en place naturellement un schéma de résolution explicite.
- $\mathbf{K}^D_{\Omega^{(D)}}$,$\mathbf{B}^D_{\Omega^{(D)}}$ et $\mathbf{G}^D_{\Omega^{(D)}}$ sont respectivement les matrices assemblant les raideurs en déplacement, le couplage en raideur des déplacements et rotations et les raideurs en rotation traduisant la cohésion du milieu.
- $\mathbf{f}^D_{\Omega^{(D)}}$ et $\mathbf{m}^D_{\Omega^{(D)}}$ sont les vecteurs traduisant respectivement les efforts et moments extérieurs.

2.2 Le modèle continu

Le modèle continu est le modèle le plus couramment utilisé en mécanique. Il permet de traduire le comportement physique dans un cadre mathématique clairement identifié. Dans notre cas, la description du modèle continu est constituée des équations de base de l'élastodynamique appliquées au domaine d'étude $\Omega^{(S)}$.

Ce domaine répond à un équilibre dynamique et à une loi de comportement matériau caractérisée par la loi de Hooke.

En se référant aux résultats du chapitre 2, on obtient pour expression du Lagrangien L^S associé au modèle continu après une discrétisation par la méthode des éléments spectraux :

$$L^S_{\Omega^{(S)}} = T^S_{\Omega^{(S)}} + V^S_{\Omega^{(S)}} \tag{3.7}$$

Ici, $L^S_{\Omega^{(S)}}$ désigne le lagrangien du modèle continu discrétisé avec des éléments spectraux sur le domaine $\Omega^{(S)}$. Quant à $T^S_{\Omega^{(S)}}$ et $V^S_{\Omega^{(S)}}$, ils correspondent respectivement à l'expression discrète de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle associé au domaine $\Omega^{(S)}$. Leur expression complète est la suivante :

$$\begin{cases} T^S_{\Omega^{(S)}} = & \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{u}}^S]^T \mathbf{M}^S_{\Omega^{(S)}} [\dot{\mathbf{u}}^S] \\ V^S_{\Omega^{(S)}} = & \frac{1}{2}[\mathbf{u}^S]^T \mathbf{K}^S_{\Omega^{(S)}} [\mathbf{u}^S] - [\mathbf{f}^S_{\Omega^{(S)}}]^T [\mathbf{u}^S] \end{cases} \tag{3.8}$$

où $\mathbf{u}^S$ est le champ de déplacement recherché. Quant à $\mathbf{M}^S_{\Omega^{(S)}}$,$\mathbf{K}^S_{\Omega^{(S)}}$ et $\mathbf{f}^S_{\Omega^{(S)}}$, ils correspondent respectivement à la matrice de masse, la matrice de raideur et au vecteur des efforts extérieurs obtenu à partir d'une discrétisation éléments spectraux du modèle continu sur le domaine $\Omega^{(S)}$. Leur expression est détaillée au chapitre 1.

3 La méthode de couplage

Dans cette partie, nous allons détailler la mise en place du couplage entre le modèle discret et continu. Celle-ci se base sur les travaux effectués dans le cadre d'un couplage continu-continu.

3.1 Mise en place du problème couplé

Dans cette méthode de couplage, on reprend l'idée de base que l'on peut retrouver dans la méthode Arlequin. Dans un premier temps, on réalise une décomposition de domaine avec recouvrement. A chaque domaine sont associés respectivement un modèle discret et continu. Puis, afin d'être conservatif en énergie au niveau de la zone de recouvrement $\Omega^{(J)}$, on introduit le paramètre α ($\in]0,1[$).

Concernant le raccordement des champs, nous préférons assurer la continuité des champs seulement sur le bord de la zone de recouvrement. En effet, nous avons vu dans le

chapitre précédent que cela permet de résoudre à moindre coût. Pour cela, on introduit un effort d'interface $\boldsymbol{\lambda}$ aussi appelé multiplicateur de Lagrange. Celui-ci permet d'imposer la condition de continuité cinématique au niveau de l'interface. Nous assurons seulement la continuité sur les champs de déplacement, sans considérer la rotation des particules.

On obtient alors l'expression suivante du Lagrangien sur l'ensemble du problème qui permet de lier les deux modèles :

$$L = L^S_{\Omega_c^{(S)}} + L^D_{\Omega_c^{(D)}} + \alpha L^S_{\Omega^{(J)}} + (1-\alpha) L^D_{\Omega^{(J)}} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{C}^{(S)}\mathbf{u}^S - \mathbf{C}^{(D)}\mathbf{u}^D) \tag{3.9}$$

où on a introduit $\Omega_c^{(S)} = \Omega^{(S)} \setminus \Omega^{(J)}$ et $\Omega_c^{(D)} = \Omega^{(D)} \setminus \Omega^{(J)}$.

Le développement d'Euler-Lagrange du lagrangien L nous donne l'ensemble des équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{(S)}\ddot{\mathbf{u}}^{(S)} + \mathbf{K}^{(S)}\mathbf{u}^{(S)} = \mathbf{f}^{(S)} + \mathbf{C}^{(S)T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{M}^{(D)}\ddot{\mathbf{u}}^{(D)} + \mathbf{K}^{(D)}\mathbf{u}^{(D)} + \mathbf{B}^{(D)T}\boldsymbol{\theta}^{(D)} = \mathbf{f}^{(D)} - \mathbf{C}^{(D)T}\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{I}^{(D)}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^{(D)} + \mathbf{B}^{(D)}\mathbf{u}^{(D)} + \mathbf{G}^{(D)}\boldsymbol{\theta}^{(D)} = \mathbf{m}^{(D)} \\ \mathbf{C}^{(S)}\mathbf{u}^{(S)} - \mathbf{C}^{(D)}\mathbf{u}^{(D)} = \mathbf{0} \end{cases}$$

où $\bullet^{(S)}$ désigne les termes correspondant au modèle continu discrétisé avec des éléments spectraux et $\bullet^{(D)}$ ceux se ramenant au modèle élément discret. La partition en α sur la zone $\Omega^{(J)}$ nous amène à construire les opérateurs de cette façon :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}^{(S)} = \mathbf{M}^S_{\Omega_c^{(S)}} + \alpha \mathbf{M}^S_{\Omega^{(J)}} && ; \quad \mathbf{K}^{(S)} = \mathbf{K}^S_{\Omega_c^{(S)}} + \alpha \mathbf{K}^S_{\Omega^{(J)}} \\
&\mathbf{f}^{(S)} = \mathbf{f}^S_{\Omega_c^{(S)}} + \alpha \mathbf{f}^S_{\Omega^{(J)}} \\
&\mathbf{M}^{(D)} = \mathbf{M}^D_{\Omega_c^{(D)}} + (1-\alpha)\mathbf{M}^D_{\Omega^{(J)}} && ; \quad \mathbf{K}^{(D)} = \mathbf{K}^D_{\Omega_c^{(D)}} + (1-\alpha)\mathbf{K}^D_{\Omega^{(J)}} \\
&\mathbf{I}^{(D)} = \mathbf{I}^D_{\Omega_c^{(D)}} + (1-\alpha)\mathbf{I}^D_{\Omega^{(J)}} && ; \quad \mathbf{G}^{(D)} = \mathbf{G}^D_{\Omega_c^{(D)}} + (1-\alpha)\mathbf{G}^D_{\Omega^{(J)}} \\
&\mathbf{B}^{(D)} = \mathbf{B}^D_{\Omega_c^{(D)}} + (1-\alpha)\mathbf{B}^D_{\Omega^{(J)}} \\
&\mathbf{f}^{(D)} = \mathbf{f}^D_{\Omega_c^{(D)}} + (1-\alpha)\mathbf{f}^D_{\Omega^{(J)}} && ; \quad \mathbf{m}^{(D)} = \mathbf{m}^D_{\Omega_c^{(D)}} + (1-\alpha)\mathbf{m}^D_{\Omega^{(J)}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2 Détails sur la construction des opérateurs de couplage

Dans cette section, nous nous intéressons à la construction des opérateurs de couplage $\mathbf{C}^{(S)}$ et $\mathbf{C}^{(D)}$. Dans un premier temps, il est nécessaire d'introduire une troisième entité à

part entière : l'interface Γ_c comme elle peut être illustrée à la figure (3.3). Pour ce faire, on note O_i le centre de masse de la particule i. Et on définit :

$$\Gamma_c = \{O_iO_j \forall i,j \in \Omega^{(J)} / \exists \mathcal{M} \in \partial\Omega^{(J)} \setminus \partial\Omega : \|\mathcal{M}O_i\| < \varepsilon, \|\mathcal{M}O_j\| < \varepsilon\} \tag{3.11}$$

où ε est définit comme le pas moyen de discrétisation dans le maillage élément discret au voisinage de $\partial\Omega^{(J)} \setminus \partial\Omega$. En d'autres termes, l'interface Γ_c est l'ensemble des segments O_iO_j dans $\Omega^{(J)}$ reliant chaque particule se situant au plus proche de $\partial\Omega^{(J)} \setminus \partial\Omega$.

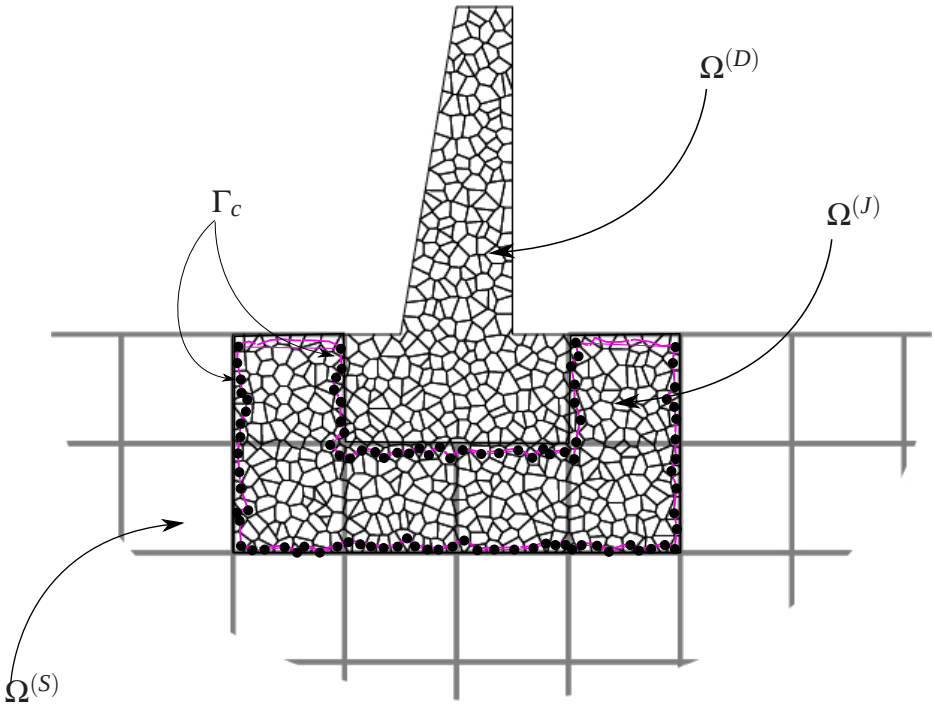


FIG. 3.3: Zoom sur la zone de recouvrement du problème couplé discrétisé

Désormais, il s'agit de définir les opérateur de couplage. Dans un cadre de couplage continu-continu, nous avons :

- la matrice de passage du modèle éléments spectraux à l'interface :
  $\mathbf{C}^{(S)}_{pq} = \int_{\Gamma_c} \phi^{(S)}_p \phi^{(c)}_q d\Gamma$
- la matrice de passage du modèle éléments discrets à l'interface :
  $\mathbf{C}^{(D)}_{pq} = \int_{\Gamma_c} \phi^{(D)}_p \phi^{(c)}_q d\Gamma$

où $\phi^{(S)}$, $\phi^{(D)}$ et $\phi^{(c)}$ sont les fonctions de formes associées respectivement à la discrétisation éléments spectraux, éléments discrets et de l'interface.
La difficulté dans la construction de ces opérateurs réside dans le fait qu'il n'existe pas à proprement dit de fonction de forme $\phi^{(D)}$ pour les éléments discrets. En remarquant

que la polygonalisation de Voronoi qui constitue le maillage élément discret dans $\Omega^{(D)}$ se base sur une triangulation de Delaunay, on peut facilement associer au maillage élément discret une discrétisation élément fini.
Dès lors, nous faisons le choix de représenter fictivement le modèle discret au niveau de l'interface par des fonctions chapeaux où les points de collocation sont les centres de masse des particules (figure 3.4). Par ailleurs, nous avons choisi de représenter les quantités au niveau de l'interface par des fonctions chapeaux sur l'ensemble des centres de masse élément discret contenus sur l'interface (figure 3.4).

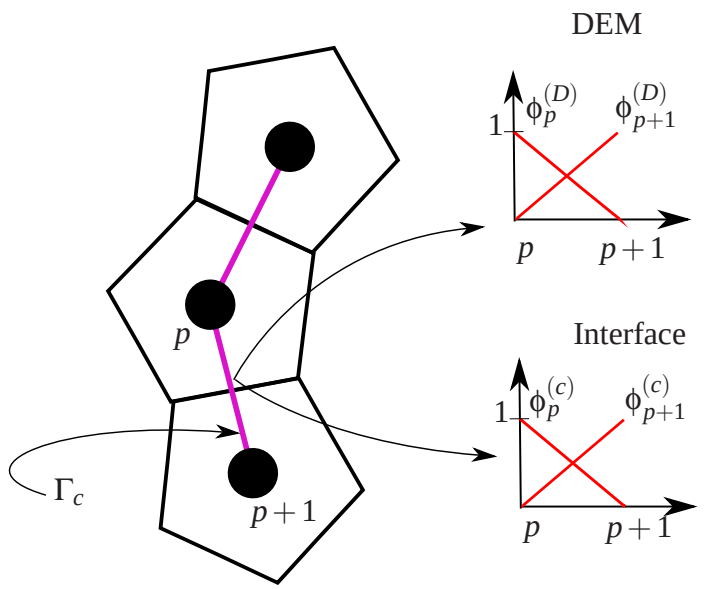


FIG. 3.4: Interpolation sur l'interface

En faisant cette hypothèse, nous sommes en mesure de calculer ces opérateurs. Puis, en utilisant les résultats obtenus à la section 3.1 du chapitre 2, on peut s'affranchir des opérations d'intégration. Finalement, on obtient l'expression suivante des opérateurs d'interface :

- la matrice de passage du modèle éléments spectraux à l'interface :
  $\mathbf{C}_{pq}^{(S)} = \phi_p^{(S)}(\mathbf{x}_q)$
  où les $\mathbf{x}_q$ sont les coordonnées des centres de masse situés sur l'interface.
- la matrice de passage du modèle éléments discrets à l'interface :
  $\mathbf{C}_{pq}^{(D)} = \delta_{pq}$
  où δ_{pq} est le symbole de Kronecker.

L'ensemble des matrices de passage sont stockées sous forme sparse dû à la présence d'un grand nombre de zéro dans chacune d'entre elles. La méthode sparse permet de limiter le coût de stockage ainsi que le coût numérique associé aux opérations matricielles.

On peut se réferrer à l'ouvrage de [Tewarson 73] pour de plus amples détails.

■ **Bilan**

La construction des opérateurs de couplage se réalisent en deux étapes :

1ère étape : Construction de l'interface

Cette étape consiste à établir une liste de nœuds situés sur l'interface $\{O_q\}$. Ces nœuds O_q correspondent aux centres de masses des particules éléments discrets appartenant à Γ_c. Leurs coordonnées sont notées $\mathbf{x}_q$.

2ème étape : Construction des opérateurs de couplage

Cette phase peut être réalisée de façon parallèle pour chacun des modèles. Concernant la construction de $\mathbf{C}^{(S)}$ associée au modèle continu, on réalise une boucle sur chaque élément spectral appartenant à $\Omega^{(J)}$. Puis, pour chaque nœud p de ces éléments, on calcule l'ensemble des $\phi_p^{(S)}(\mathbf{x}_q)$ pour chaque nœud O_q de l'interface. Quant à la construction de $\mathbf{C}^{(D)}$ associée au modèle discret, elle consiste simplement à établir la connectivité des nœuds situés sur l'interface aux particules situées dans $\Omega^{(D)}$.

4 Résultats numériques

Dans cette section, on s'intéresse à l'analyse du problème de couplage. Pour ce faire, on met en place un cas test élastodynamique permettant de mettre en exergue les performances de la méthode de couplage en terme d'erreur.

4.1 Position du cas test

Afin d'analyser la pertinence de la stratégie de couplage, on s'intéresse à la réponse élastodynamique d'un milieu ramené à un problème à deux dimensions sur l'hypothèse des déformations planes. Dans le cadre d'un modèle continu, le matériau utilisé correspond à une roche répondant à la loi de Hooke et ayant pour caractéristiques matériaux : un module d'Young E de 18.8 GPa, un cœfficient de Poisson ν de 0.25 et une densité massique ρ de 2200 kg/m^3. Le cas test a une forme rectangulaire, laquelle est illustrée à la figure 3.5. Ses dimensions sont de 1000m pour la longueur et de 50m pour la largeur.

FIG. 3.5: Problème de référence

Ce milieu est soumis à une pression surfacique uniforme notée $F_d(t)$ (figure 3.6). La pression $F_d(t)$ est un créneau de période 0.1s. Le spectre fréquenciel de cette fonction

est complet. De cette façon, cela permet d'obtenir une analyse complète en fréquence du couplage.

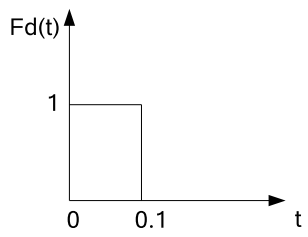


FIG. 3.6: Pression appliquée sur le bord du domaine

Ce cas test ne permet pas d'obtenir de façon simple une solution analytique. C'est pour cette raison que nous le résolvons numériquement à l'aide de la méthode des éléments spectraux. En effet, la méthode des éléments finis nous assure la convergence pour ce problème pour des pas de discrétisations spatiale et temporelle assez fins. A partir de cela, nous avons déterminé une solution de référence sur un critère de stagnation de la solution vis à vis du pas de discrétisation. Cette solution est notée $\mathbf{u}_{\text{ref}}$ et est obtenue pour un pas de discrétisation de $12.5m$. Elle permet par la suite de mesurer l'écart en solution du modèle discret, ainsi que du problème couplé, par rapport au modèle continu. Il s'agit désormais de construire une fonctionnelle d'écart pertinente nous permettant de mesurer la différence en solution des modèles à partir de cette solution de référence.

■ Construction de la fonctionnelle d'écart de modèle

Le modèle discret est un modèle pragmatique, *i.e.* il se base sur des observations expérimentales. Nous désirons raccorder ce modèle au modèle continu. Pour ce faire, il est nécessaire que ces deux modèles soient proches au sens d'une mesure. Tout l'objet du travail qui suit consiste à définir une fonctionnelle permettant de mesurer l'écart entre ces deux modèles.

La méthode des éléments discrets fournit un champ solution discret. En d'autres termes, le champ de déplacement solution n'est défini qu'en chaque centre de masse des particules. A partir de la solution continue $\mathbf{u}_{\text{ref}}$, on définit un écart de modèle local noté e_i de la particule i :

$$e_i(t) = \frac{||\mathbf{u}_i^D(t) - \mathbf{u}_{\text{ref}}(\mathbf{x}_i, t)||}{\text{Max}_{\mathbf{x}_i}||\mathbf{u}_{\text{ref}}(\mathbf{x}_i, t)||} \tag{3.12}$$

où $\mathbf{u}_i^D$ est le vecteur déplacement associé à la particule i et $\mathbf{x}_i$ la position de celle-ci. On peut d'ailleurs observer à la figure 3.7 une carte d'écart local pour un calcul élément discret pour un pas de discrétisation moyen de $6.25m$. Sur cette figure, l'échelle de couleur

correspond au module du champ local. A partir de celle-ci, on en déduit que l'écart de modèle se localise principalement au lieu d'imposition des conditions limites.

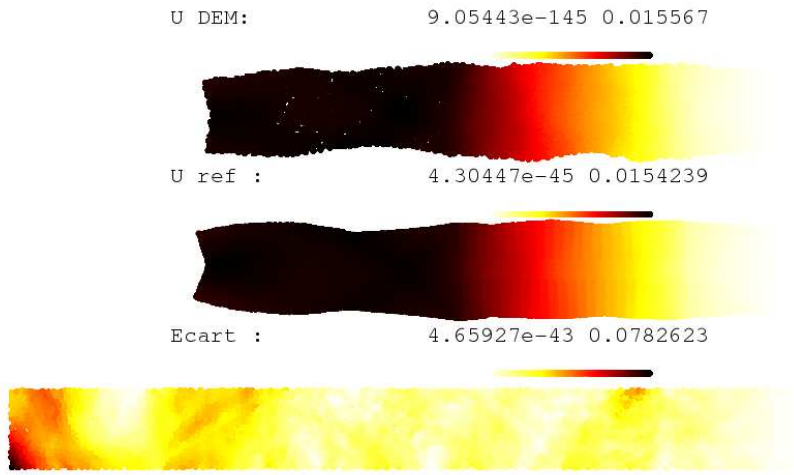


FIG. 3.7: Carte d'écart local

A partir de cela, on définit l'écart global Ψ sur l'ensemble du problème modélisé par des éléments discrets par rapport au modèle continu par :

$$\forall t \quad E(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i(t)}{N} \tag{3.13}$$

où N est le nombre de particules.

4.2 Identification des paramètres matériaux du modèle discret

Précédemment, nous avons défini une fonctionnelle permettant de mesurer l'écart en solution entre le modèle discret et continu. Nous savons que dans le cas d'un modèle continu répondant à la loi de Hooke, l'expérience nous fournit le module d'Young E, le coefficient de Poisson ν et la densité massique ρ. Concernant le modèle discret de type *Lattice Model*, le matériau est caractérisé pour le domaine élastique par le module de poutre E_p, l'inertie ramenée a et la densité massique ρ. On peut se référer au chapitre 1 pour de plus amples détails sur ces paramètres.

Afin que le modèle discret corrèle avec le modèle continu, nous allons identifier les paramètres E_p et a à partir de la fonctionnelle d'écart E. La densité massique du modèle discret est la même que celle du modèle continu. Elle ne nécessite par conséquent pas d'identification. On obtient alors le problème d'optimisation suivant :

$$\forall t \quad , \quad (E_p, a) = \underset{(E_p,a)}{\text{Argmin}} \quad E(t) \tag{3.14}$$

La résolution d'un tel problème est coûteux. En effet, il nécessite une campagne de calculs de $E(t)$ à différents instants t. Par conséquent, nous avons réalisé l'identification

seulement à l'instant $t = 150ms$ en considérant qu'à cet instant, les ondes ont parcouru une distance suffisante dans le milieu pour que l'analyse semble pertinente.

■ **Etude paramétrique**

On effectue une étude paramétrique sur l'écart de modèle en fonction de E_p et a. Pour cette étude, nous avons choisi un pas de discrétisation spatiale moyen de $3m$ et un pas de temps de $0.1ms$. Les résultats sont illustrés à la figure 3.8.

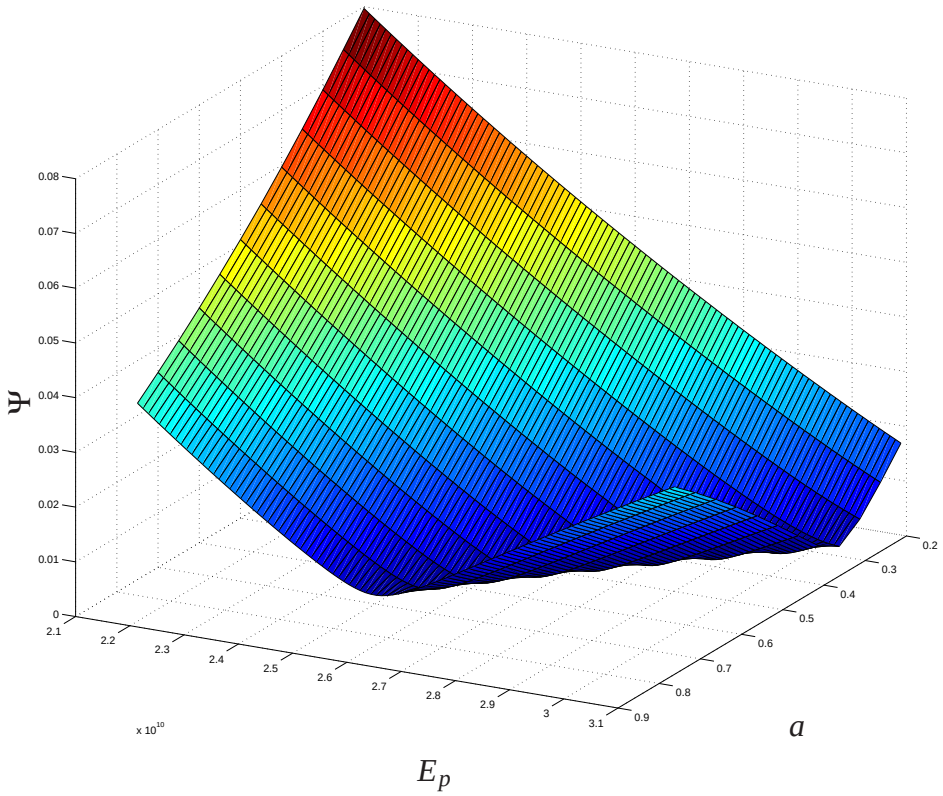


FIG. 3.8: Identification du modèle discret

A partir de cette étude, on en déduit que le choix optimal est :

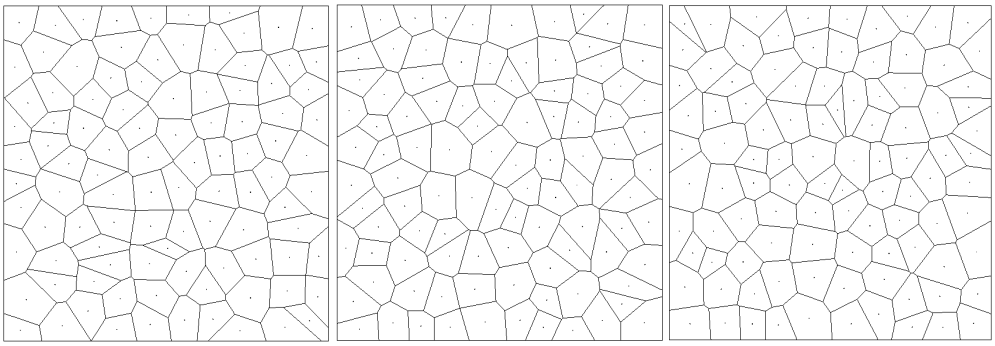
$$E_p = 29.15GPa \quad , \quad a = 0.45 \tag{3.15}$$

Il est possible d'automatiser ce processus en utilisant un algorithme d'optimisation de type Newton ou encore BFGS [Avriel 03].

■ Convergence du modèle discret

Une fois les paramètres matériaux du modèle discret déterminé, il s'agit de montrer que le modèle converge au sens de l'écart de modèle défini en (3.13). Etant donné que les deux modèles sont conceptuellement différents, cela n'assure pas une convergence au sens strict du modèle discret vers le modèle continu mais plutôt que l'écart entre les modèles est proche. Par la suite, on s'intéresse à la stabilité et à l'erreur du choix des paramètres matériaux trouvés précédemment sur l'écart de modèle défini en (3.13). Désormais, nous allons observer numériquement le comportement du modèle en terme d'erreur et de stabilité. Cela fait l'objet d'une étude paramétrique. L'étude de l'erreur consiste à étudier l'influence de la discrétisation spatiale h sur l'écart de modèle . Quant à l'étude de la stabilité, elle consiste à étudier l'influence de la forme des particules sur l'écart Ψ. On peut modifier la forme des particules pour un pas de discrétisation h donné en faisant varier la semence du générateur de nombre aléatoire du maillage que l'on note χ. Chaque position du centre de masse des particules est généré quasi-aléatoirement par la séquence de Sobol [Sobol 67]. L'intérêt de cette séquence est qu'elle permet d'avoir une équidistribution des particules.

On peut voir une illustration du maillage d'un carré ($1m * 1m$) pour un h donné ($h = 0.1m$) et différents maillages générés aléatoirement à la figure suivante :



$\chi = -55577$ $\chi = -45622$ $\chi = -7006$

FIG. 3.9: Convergence du modèle discret

Nous avons réalisé une étude paramétrique sur le pas de discrétisation h pour une famille de maillage que l'on note $\{\chi_i\}$ avec $card(\chi_i) = R$. R est le nombre de maillages générés aléatoirement. Le choix $R = 100$ nous a semblé suffisant *a posteriori* étant donné le caractère continu des résultats obtenus. L'étude de l'erreur revient à étudier l'influence de l'écart de modèle moyen :

$$\bar{\Psi}(h) = \frac{\sum_{\chi_i} \Psi_{\chi_i}(h)}{R} \tag{3.16}$$

où $\Psi_{\chi_i}(h)$ est l'écart de modèle pour le maillage χ_i avec pour pas de discrétisation moyen h. Quant à l'étude de la stabilité, nous allons regarder l'influence sur l'écart type de l'écart de modèle $\Psi_{\chi_i}(h)$ défini comme suit :

$$\hat{\Psi}(h) = \sqrt{\frac{\sum_{\chi_i}(\Psi_{\chi_i}(h) - \bar{\Psi}(h))^2}{R}} \tag{3.17}$$

Les résultats obtenus sont exposés à la figure 3.10

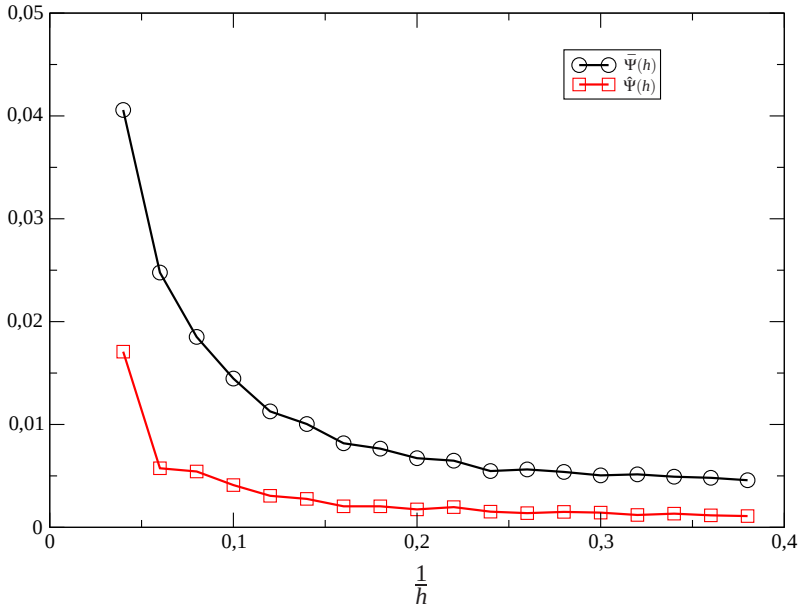


FIG. 3.10: Convergence du modèle discret

■ Interprétation

A partir de la courbe 3.10, on vérifie que l'écart de modèle diminue avec le pas de discrétisation spatial h. L'écart de modèle moyen $\bar{\Psi}(h)$ converge vers un écart constant avec le modèle continu. Cet écart constant reflète que la partie microscopique apporté par les hétérogénéités microstructurelles ne sont pas décrites par le modèle continu. Quant à l'écart type de l'écart de modèle $\hat{\Psi}(h)$, il converge vers zéro. Cela assure que pour des maillages fins la solution obtenue ne dépend pas du générateur de maillage. En d'autres termes, le modèle discret converge vers une solution unique quand le pas de discrétisation est suffisament fin indépendamment du maillage généré.

4.3 Analyse du problème couplé

On s'intéresse désormais à l'analyse du problème couplé. Pour ce faire, on discrétise le problème présenté précédemment (Cf figure 3.5) avec des éléments spectraux et des éléments discrets. La partie gauche du domaine est discrétisée avec des éléments spectraux. Tout au long de l'étude qui suit, le pas de discrétisation spatiale dans le domaine continu est de $25m$. Les éléments spectraux choisis sont d'ordre 5. Le domaine continu occupe les 250 premiers mètres de la structure. Quant à la discrétisation éléments discrets, elle occupe les 775 derniers mètres de la structure. De cette façon, la zone de recouvrement a une dimension de $25m$ par $50m$. On note h le pas de discrétisation dans le domaine discret. Il fait l'objet d'une étude paramétrique.

Cela nous donne dans le cas d'une discrétisation spatiale moyenne dans le domaine discret de $6.25m$ le maillage illustré à la figure 3.11.

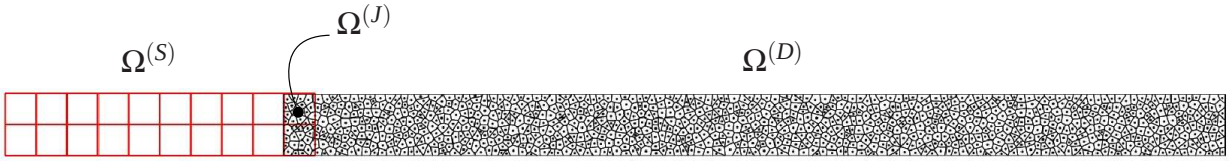


FIG. 3.11: Problème de couplage discrétisé

Concernant la résolution temporelle, elle est réalisée via une stratégie mono-pas de temps. Pour toutes les études qui vont suivre, le pas de temps utilisé est de $0.1ms$. Le fait de ne pas changer le pas de temps pour chaque étude permet de conserver la même erreur du schéma de résolution temporelle.

Dans le cadre d'un problème couplé, la zone d'intérêt correspond au domaine modélisé par des éléments discrets. En effet, le domaine continu sert seulement à imposer les bonnes conditions limites sur le bord du domaine discret. Tout l'enjeu du couplage consiste à transmettre correctement les ondes d'un domaine à l'autre.

Dans le cas d'un problème purement élastique, comme cela est le cas ici, on considère comme solution de référence la solution du problème complet avec une modélisation continue. De cela, nous en avons déduit une fonctionnelle d'écart entre ces deux modèles. Ici, la zone discrétisée seulement avec des éléments discrets correspond au domaine $\Omega_c^{(D)}$ ($\Omega^D \setminus \Omega^J$). Par conséquent, on définit l'écart de modèle dans le cas du problème couplé :

$$\Psi = \frac{\sum_{O_i \in \Omega_c^{(D)}} e_i(150 \text{ ms})}{N} \tag{3.18}$$

où O_i est le centre de masse de la particule i et N est le nombre de particules contenues dans Ω_c^D. Cette fonctionnelle correspond à l'amplitude énergétique des ondes fantômes. L'écart de modèle Ψ est calculé à l'instant $t = 150ms$. A cet instant, les ondes se sont suffisamment propagées dans le domaine discret pour que l'analyse soit pertinente.

■ Etude paramétrique

Dans un premier temps, on effectue une étude paramétrique sur le paramètre α et le pas de discrétisation spatiale moyen dans le domaine discret h. On trace alors sur la courbe 3.12 l'écart de modèle en fonction de α et h.

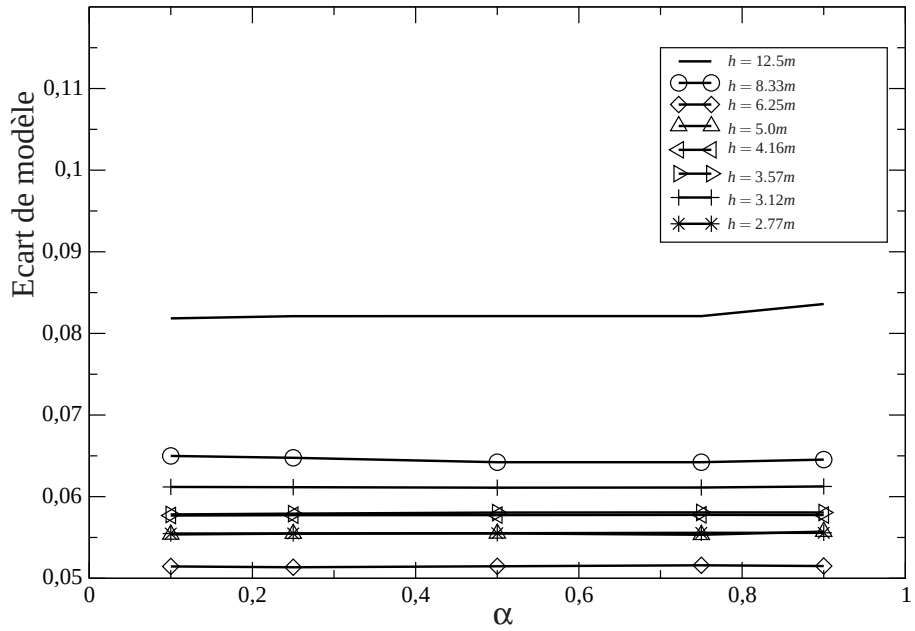


FIG. 3.12: Etude paramétrique sur α et h

De cette étude, on en déduit que le paramètre α n'a pas d'influence sur l'écart de modèle (amplitude énergétique des ondes fantômes) quelque soit la discrétisation h dans le domaine discret. Par ailleurs, on remarque que l'amplitude des ondes fantômes diminue quand l'on discrétise plus finement. Finalement, étant donné que α n'a pas d'influence sur l'apparition des ondes fantômes, on préconise d'utiliser un α proche de 0.5 afin que le conditionnement du problème d'interface soit optimal. Enfin, il est nécessaire de discrétiser finement dans le domaine discret afin que les ondes se transmettent correctement d'un domaine à l'autre. On remarque que comme dans le cas d'un problème discrétisé seulement avec des éléments discrets, l'écart Ψ fluctue en fonction du pas de discrétisation h avant de stagner.

■ Comparaison des modélisations

Désormais, nous allons déterminer comment le problème couplé corrèle avec le problème purement discret. En effet, dans un cadre idéal, nous utiliserions sur tout le problème la méthode des éléments discrets. Pour une raison de coût numérique, cela semble inapproprié. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la différence entre ces deux solutions. Pour ce faire, on détermine l'écart de modèle discret sur le problème discrétisé seulement avec des éléments discrets sur le domaine correpondant à la zone $\Omega_c^{(D)}$ du problème couplé que l'on note Ψ^D. Puis, on la compare avec l'écart que l'on note Ψ^c obtenu dans le cas du problème couplé. Comme précédemment pour le problème discret, on réalise une étude de Monte Carlo sur 100 maillages différents. Les résultats sont exposés en moyenne ($\bar{\Psi}^c$ et $\bar{\Psi}^D$) et en écart type ($\hat{\Psi}^c$ et $\hat{\Psi}^D$) à la figure 3.13. L'ensemble de l'étude a été mené en considérant $\alpha = 0.5$.

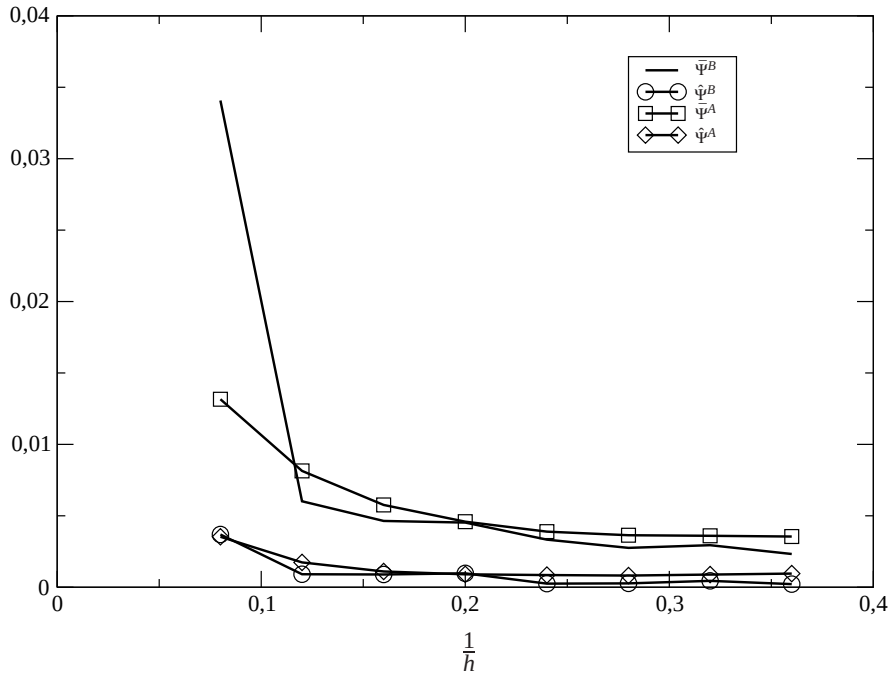


FIG. 3.13: Etude comparative des modèles

A partir de cette courbe, on en déduit que l'on obtient une solution proche en terme d'écart de modèle pour ces deux modélisations pour des discrétisation assez fine. L'écart type ($\hat{\Psi}^c$ et $\hat{\Psi}^D$) tend vers 0, cela nous assure l'unicité de la solution pour une discrétisation assez fine quelque soit le maillage. On remarque que la solution du problème couplé est plus proche du modèle continu que celle du problème discret. Cela implique que l'écart

de modèle du modèle couplé est borné par le modèle discret. On peut expliquer cette différence par l'intermédiaire de la figure 3.7. On remarque sur cette figure que l'écart local se localise aux lieux d'imposition des conditions limites. On en déduit qu'il est préférable d'utiliser un modèle couplé pour imposer correctement les conditions limites au problème discret.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en place une stratégie de couplage continu-discret. L'approche proposée ici permet vis-à-vis des méthodes existantes [Wagner 03, Xiao 04] de limiter le coût de calcul dû au couplage. En outre, l'architecture de la modélisation du couplage autorise le recouvrement des domaines associés à chaque modélisation, ainsi que la mise en place d'une résolution parallèle. A travers l'analyse numérique de la méthode de couplage, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'apparition des phénomènes indésirables tels que les ondes fantômes. Pour ce faire, nous avons établi une fonctionnelle d'écart de modèle qui permet de mesurer la pertinence du couplage. A partir des résultats numériques, on en déduit que les résultats obtenus à partir du problème couplé sont aussi pertinents que ceux obtenus à partir d'une modélisation éléments discrets complète.

Conclusion

Ce travail s'est principalement appuyé sur le couplage de modèles par décomposition de domaine avec recouvrement en introduisant une partition de l'énergie sur la zone de transition. Le premier point a consisté à étendre cette stratégie aux problèmes d'élasto-dynamique. L'originalité du travail proposé ici consiste à limiter le raccord des champs sur le bord de la zone de transition entre les modèles. Cela a pour objet de réduire le coût de calcul associé au problème d'interface. Nous avons apporté une attention toute particulière à démontrer que cette nouvelle stratégie permet de limiter le coût numérique tout en conservant une erreur numérique acceptable. Pour ce faire, nous avons établi un indicateur d'erreur se basant sur l'erreur en énergie associée aux ondes fantômes.

La suite de notre travail a consisté à étendre cette stratégie établie dans un cadre continu-continu au couplage de modèles discret et continu. Sur ce point, nous avons exploité les atouts de chacunes de ces méthodes afin de construire un problème d'interface qui nécessite un coût de calcul faible tant au niveau de la construction qu'au niveau de la résolution. Dans ce cas, nous avons proposé un approche de couplage qui consiste à minimiser la partie microscopique du modèle discret vis-à-vis du modèle continu. Cela permet de limiter l'écart entre les modèles, et donc de minimiser l'apparition des ondes fantômes. Toutefois, d'autres approches restent possibles pour limiter l'apparition de ce phénomène comme la prise en compte des rotations dans les conditions de continuité au niveau de l'interface ou encore l'introduction de la relaxation au niveau du multiplicateur de lagrange. On peut se référer aux travaux de [Rousseau 09] pour de plus amples détails.

Le dernier attrait de ce travail s'est attaché à l'extension de l'approche multiéchelle au domaine temporel. Pour ce faire, nos travaux se sont basés sur les méthodes de sous-cyclage temporel. Une attention particulière s'est portée sur la stabilité et la consistance de cette stratégie. Cela nous a amené à proposer une nouvelle interpolation sur l'interface temporelle afin d'améliorer la consistance du schéma multi-pas de temps. Sur ce point, nous pouvons envisager d'étendre ce type de stratégie à des schéma différents que ceux de Newmark. En effet, les méthodes éléments spectraux sont des méthodes éléments finis d'ordre élevé qui nécessite des schémas en temps d'ordre élevé pour limiter la disparité de l'ordre entre l'espace et le temps.

Bibliographie

[Adelman 76] S.A. Adelman & J.R. Doll. *Generalized Langevin equation approach for atomic/solid-surface scattering : general formulation for classical scattering off harmonic solids*. J. Chem. Phys., vol. 64, pages 2375–2388, 1976.

[Avriel 03] M. Avriel. Nonlinear programming : Analysis end methods. Dover Publishing, 2003.

[Babuska 97] I. Babuska & J.M. Melenk. *The Partition of Unity Method*. Int. J. Numer. Meths. Eng., vol. 40, pages 727–758, 1997.

[Ben Dhia 98] H. Ben Dhia. *Multiscale mechanical problems : the Arlequin method*. CRAS Paris Série IIb, vol. 326, pages 899–904, 1998.

[Bernardi 93] C. Bernardi, Y. Maday & A.T. Patera. *Domain decompostion by the mortar element method*. Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters, pages 269–286, 1993.

[Bonnet 95] M. Bonnet. Equations intégrales et éléments de frontière. CNRS Editions : Eyrolles, 1995.

[Brezzi 74] F. Brezzi. *On the existence, uniqueness and approximation of saddle points problems arising form Lagrangian multipliers*. RAIRO, Anal. Numer., vol. 8R2, pages 129–151, 1974.

[Burland 68] I.B. Burland & K.H. Roscoe. *On the generalized stress strain behaviour of wet clay*. Engineering plasticity Cambridge Heyman-Leckie, 1968.

[Chang 01] C.S. Chang, T.K. Wang, L.J. Sluys & J.G.M. van Mier. *Fracture modeling with a Microstructural Mechanics Approach*. Fracture Mechanics of Concrete Structures, vol. 1, pages 27–34, 2001.

[Combescure 01] A. Combescure & A. Gravouil. *A time-space multi-scale algorithm for transient structural nonlinear problems*. Mec. Ind., vol. 2, pages 43–55, 2001.

[Combescure 02] A. Combescure & A. Gravouil. *A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 191, pages 1129–1157, 2002.

[Cundall 71] P.A. Cundall. *A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems*. Proceedings of the symposium of the international society of rock mechanics, vol. 1, pages 132–150, 1971.

[Cundall 79] P.A. Cundall & O.D.L. Strack. *A discrete numerical model for granular assemblies*. Geotechnique, vol. 29, pages 47–60, 1979.

[de Borst 95] R. de Borst, J. Parmin, R.H.J. Peerlings & L.J. Sluys. *On gradient-enhanced damage and plasticity models for failure in quasi-brittle frictional materials*. Comp. Mech., vol. 17, pages 130–141, 1995.

[Delaplace 06a] A. Delaplace & A. Ibrahimbegovic. *Performance of time-stepping schemes for discrete models in fracture dynamic analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 65, pages 1527–1544, 2006.

[Delaplace 06b] A. Delaplace, C. Rey & S. Gavoille. *Improved numerical solver for discrete element methods*. WCCM7 - 7th World Congress on Computational Mechanics, 2006.

[Delaplace 07] A. Delaplace & R. Desmorat. *Discrete 3D model as complimentary numerical testing for anisotropic damage*. International Journal of Fracture, vol. 148, pages 115–128, 2007.

[Delaplace 09] A Delaplace, C. Rey & S. Gavoille. *Iterative solver for discrete modeling*. European Journal of Computational Mechanics, Submitted in 2009.

[Doll 76] J.R. Doll & D.R. Dion. *Generalized Langevin equation approach for atomic/solid-surface scattering : numerical techniques for Gaussian generalized Langevin dynamics*. J. Chem. Phys., vol. 65, pages 3762–3766, 1976.

[Dreher 08] M. Dreher & S. Tang. *Time history interfacial conditions in multiscale computations of lattice oscillations*. Comput. Mech., vol. 41, pages 683–698, 2008.

[Farhat 91] C. Farhat & F.X. Roux. *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm*. Int. J. Methods Eng., vol. 32, pages 1205–1227, 1991.

[Farhat 03] C. Farhat & M. Chandesris. *Time-decomposed parallel time-integrators : theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid structure applications*. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 58, pages 1397–1434, 2003.

[Faucher 04a] V. Faucher & A. Combescure. *Local modal reduction in explicit dynamics with domain decomposition. Part 1 : extension to subdomains undergoing finite rigid rotations*. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, pages 2531–2560, 2004.

[Faucher 04b] V. Faucher & A. Combescure. *Local modal reduction in explicit dynamics with domain decomposition. Part 2 : specific interface treatment when modal subdomains are involved*. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 61, pages 65–95, 2004.

[Fisher 90] P. Fisher. *Analysis and application of a parallel spectral element method for the solution of the Navier-Stokes equations*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 80, pages 483–491, 1990.

[Gravouil 01] A. Gravouil & A. Combescure. *Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics*. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pages 199–225, 2001.

[Halphen 87] B. Halphen & J. Salençon. Elasto-plasticité. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.

[Herrmann 90] H.J. Herrmann & S. Roux. *Statistical models for the fracture of disordered media*. Elsevier / North Holland, 1990.

[Hughes 87] T.J.R. Hughes. The finite element method.linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall, 1987.

[Hughes 95] T.J.R. Hughes. *Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 127, pages 387–401, 1995.

[Jean 01] M. Jean, V. Acary & Y. Monerie. *Non smooth contact dynamics approach of cohesive materials*. Proceedings of the Royal Society, vol. 359, pages 2497–2518, 2001.

[Kachanov 58] L.M. Kachanov. *On the creep rupture time*. Izv. AN SSSR, Otd. Tekn. Nauk., vol. 8, pages 26–31, 1958.

[Kelly 76] K.R. Kelly, R.W. Ward & S. Treitel. *Synthetic seismograms : a finite difference approach*. Geophysics, vol. 41, pages 2–27, 1976.

[Komatitsch 98] D. Komatitsch, J.P. Vilotte, R. Vai, J.M. Castillo-Covarrubias & F.J. Sanchez-Sesma. *The spectral element method for elastic wave equations application to 2-D and 3-D seismic problems*. Int. j. numer. methods eng., vol. 25, pages 1139–1164, 1998.

[Lamb 03] H. Lamb. *On the propagation of tremors over the surface on an elastic solid*. Philosophical transactions, 1903.

[Leclerc 08] H. Leclerc. *Toward higher performance FEM implementations using lazy evaluation and symbolic programming*. 8th World Congress on Computational Mechanics (ECCOMAS), 2008.

[Lemaitre 74] J. Lemaitre & J.L. Chaboche. *A non-linear model of creep fatigue damage cumulation*. ONERA, TP no 1394, 174.

[Lions 01] J-L. Lions, Y. Maday & G. Turinici. *Résolution d'EDP par un schéma en temps « pararéel »*. C.R.Acad. Sci. Paris, vol. t. 332, Série I, pages 661–668, 2001.

[Maday 89] Y. Maday, G. Anagnostou, C. Mavriplis & A.T. Patera. *On the mortar element method : Generalizations end implementation*. Domain decomposition methods for partial differential equations, Proc. 3rd Int. Symp. Houston/TX(USA), 1989.

[Mandel 96] J. Mandel & R. Tezaur. *Convergence of a substructuring method with Lagrange multipliers*. Numerische Mathematics, vol. 65(216), pages 1397–1401, 1996.

[Mariotti 94] C. Mariotti & F. Thomas. *Loi de comportement ARMOR pour géomatériaux sous chargement dynamique*. Journal de Physique, vol. 4, pages 577–582, 1994.

[Mariotti 07] C. Mariotti. *Lamb's problem with the lattice model Mka3D*. Geophys. J. Int., vol. 171, pages 857–864, 2007.

[Mazars 84] J. Mazars. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire du béton de structure*. PhD thesis, Thèse de doctorat d'état de l'université de Paris 6, 1984.

[Molinari 06] J.F. Molinari, G. Gazonas ans R. Raghupathy, A. Rusinek & F. Zhou. *The cohesive element approach to dynamic fragmentation : the question of energy convergence*. Int. J. for Num. Methds in Eng., vol. 69, pages 484–503, 2006.

[Moreau 94] J.J. Moreau. *Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials*. Eur. J. Mech. A (Solids), vol. 13, pages 93–114, 1994.

[Moës 99] N. Moës, J. Dobow & T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, vol. 46, pages 131–150, 1999.

[Muller 96] D. Muller. *Techniques informatiques efficaces pour la simulation des milieux granulaires par des méthodes d'éléments distincts*. PhD thesis, Ecole Polytechnique de Lausanne, 1996.

[Munjiza 04a] A. Munjiza. *The combined finite-discrete element method*. Engineering Fracture Mechanics, vol. 71, pages 469–483, 2004.

[Munjiza 04b] A. Munjiza, T. Bangash & N.W.M. John. The combined finite-discrete element method for structural failure and collapse. Wiley, 2004.

[Needleman 88] A. Needleman. *Material rate dependance and mesh sensitivity in localization problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 67, pages 69–85, 1988.

[Nooru-Mohamed 92] M.B. Nooru-Mohamed. *Mixed-mode fracture of concrete : an experimental approach*. PhD thesis, Thèse de doctorat, 1992.

[Patera 84] A.T. Patera. *A spectral element method for fluid dynamics, laminar flow in a channel expansion*. J. Comput. Phys., vol. 54, pages 468–488, 1984.

[Peyrot 06] I. Comby Peyrot. *Development and validation of a 3D computational tool to describe damage and fracture due to alkali silica reaction in concrete*. PhD thesis, Ecole Doctorale 364 : Sciences Fondamentales et Appliquées, 2006.

[Pijaudier-Cabot 87] G. Pijaudier-Cabot & Z. Bazant. *Nonloacal damage theory*. Journal of Engineering Mechanics ASCE, vol. 1113, pages 1512–1533, 1987.

[Ramtani 90] S. Ramtani. *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. PhD thesis, Université Paris VI, 1990.

[Rapaport 04] D.C. Rapaport. The art of molecular dynamics simulation. Cambridge University Press, 2004.

[Rateau 03] G. Rateau. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : applications à des problèmes de jonction et de fissuration des structures élancées.* PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2003.

[Rousseau 09] J. Rousseau, E. Frangin, P. Marin & L. Daudeville. *Multidomain finite and discrete element method for impact analysis of a concrete structure*. Engineering and Structures, 2009.

[Sànchez-Sesma 79] FJ Sànchez-Sesma & E. Rosenblueth. *Groud motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 7, pages 441–450, 1979.

[Schatz 73] J.F. Schatz. *The physics of SOC and TENSOR*. Lawrence Livermore Laboratory, vol. Rept UCRL 51352, 1973.

[Schlangen 97] E. Schlangen & E.J. Garbozi. *Fracture simulations of concrete using lattice models : computational aspects*. Eng. Fracture Mech., vol. 57, pages 319–332, 1997.

[Sobol 67] I.M. Sobol. *On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals*. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 7(4), pages 86–112, 1967.

[Strouboulis 00] T. Strouboulis, I. Babuska & K. Copps. *The design and analysis of the Generalized Finite Element Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 182, pages 43–71, 2000.

[Tang 06] S. Tang, T.Y. Hou & W.K. Liu. *A mathematical framework of the bridging scale method*. Int. j. numer. methods eng., vol. 65, pages 1688–1713, 2006.

[Tewarson 73] P.R. Tewarson. Sparse matrices. Academic Press Inc., 1973.

[van Mier 97] J.G.M. van Mier. *Numerical analysis of interface fracture in concrete using in lattice-type fracture model*. Int. J. of damage Mechanics, vol. 6, pages 408–432, 1997.

[Virieux 86] J. Virieux. *P-SV wave propagation in heteregeneous media : velocity-stress-finite-difference method*. Geophysics, vol. 59, pages 464–473, 1986.

[Wagner 03] G.J. Wagner & W.K. Liu. *Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition*. Journal of Compututional Physics, vol. 190, pages 249–274, 2003.

[Williams 85] J.R. Williams, G. Hocking & G.G.W. Mustoe. *The Theoretical Basis of the Discrete Element Method*. Proceedings of the NUMETA 1985, pages 897–906, 1985.

[Williams 89] J.R. Williams & A.P. Pentland. *Superquadratics and modal dynamics for discrete element methods in concurrent design*. Proceedings of the 1st U.S. Conference on Discrete Element Methods, 1989.

[Xiao 04] S.P. Xiao & T. Belytschko. *A bridging domain decomposition for coupling continua with molecular dynamics*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 193, pages 1645–1669, 2004.

[Zammali 05] C. Zammali. *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact.* PhD thesis, Ecole Doctorale de Centrale Paris, 2005.

[Zienkiewicz 05] O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor. The finite element method for solid and structural mechanics. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

Annexe A

Annexe A : Cas test de Lamb

1 Présentation du problème

Le problème de Lamb est un test classique pour mesurer la précision d'une méthode de modélisation pour la propagation des ondes mécaniques. Celui-ci considère un demi-espace homogène élastique, avec une force en un point de la surface. Il existe une solution analytique à ce problème [Lamb 03]. Naturellement, on sera amené à comparer nos solutions EF avec la solution analytique afin de valider notre modèle.

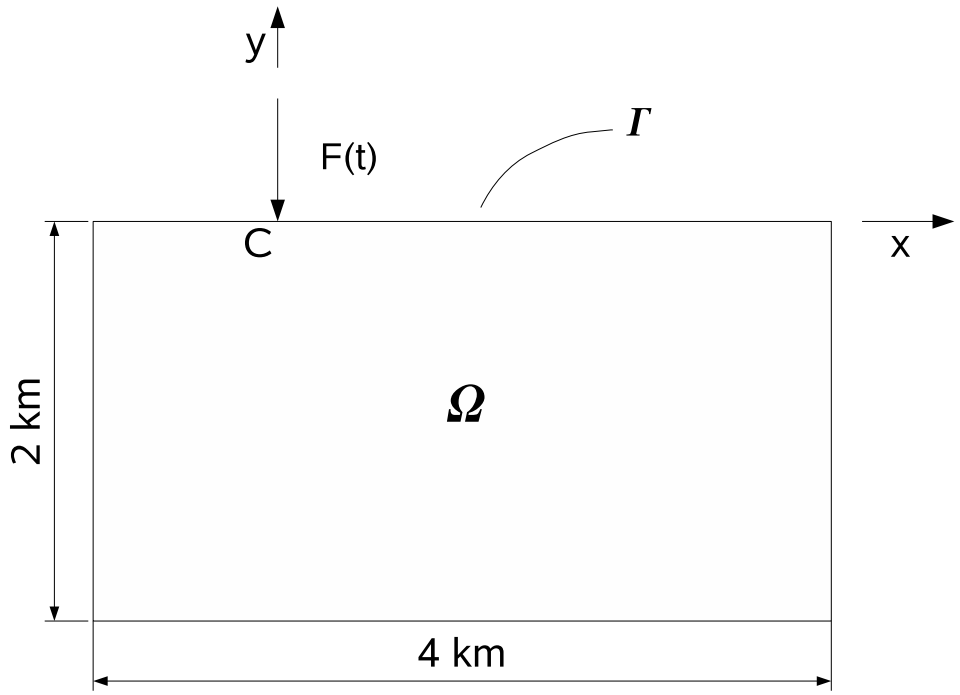


FIG. A.1: Domaine d'étude

Caractéristiques du problème :

– densité :$\rho = 2200\ kg/m^3$

– module d'Young :$E = 18.8\ GPa$

– coefficient de Poisson :$\nu = 0.25$

Par la suite, on notera λ et μ les coefficients de Lamé.

L'analyse des sismogrammes observés à San Francisco et à Nice nous montre bien que l'on retrouve lors de séismes des fréquences allant jusqu'à environ 30 Hz :

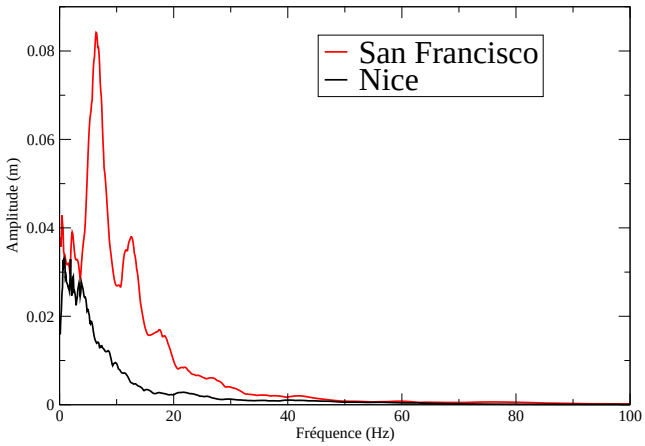


FIG. A.2: Spectrogramme

Cela justifie le fait que nous utilisons une force source de type fonction de Rickers :

$$F(t) = -A[\omega_c(t-t_0)^2 - 1]e^{-\omega_c(t-t_0)^2}$$

En effet, celle-ci nous donne l'opportunité de pouvoir sélectionner la bande de fréquence avec laquelle on veut effectuer notre calcul. Ici, ω_c représente la pulsation centrale qui est prise à 14.5 Hz et A l'amplitude de l'effort qui ici est pris à $1.0e5$ Newton.

2 Formulation forte du problème

On notera Ω le domaine élastique, Γ le bord du domaine et $I = [0,T]$ l'intervalle de temps sur lesquels se situent notre étude. Le problème s'écrit :

– Conditions initiales :

$$\forall \underline{M} \in \Omega \quad \underline{u}_{|t=0} = \underline{0} \text{ et } \frac{d\underline{u}}{dt}_{|t=0} = \underline{0} \tag{A.1}$$

– Equations d'équilibre :

$$\underline{\text{div}}\sigma = \rho \frac{d^2\underline{u}}{dt^2} \text{ dans } \Omega \tag{A.2}$$

$$\sigma \underline{n} = \underline{F}(t)\delta_C \text{ sur } \Gamma \tag{A.3}$$

– Relation de comportement :

$$\sigma = \lambda \varepsilon(\underline{u}) : \mathbb{I} + 2\mu\varepsilon(\underline{u}) \tag{A.4}$$

$$\text{avec } \varepsilon(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T) \tag{A.5}$$

3 Résolution analytique

A partir des équations (A.2), (A.4) et (A.5), on obtient l'équation de Cauchy-Navier suivante :

$$(2\mu + \lambda)\underline{\text{grad}}(\text{div}\underline{u}) - \mu\underline{\text{rot}}(\underline{\text{rot}}\ \underline{u}) = \rho \frac{d^2\underline{u}}{dt^2} \tag{A.6}$$

Pour simplifier l'écriture de ce problème, nous allons décomposer notre champ de déplacement $\underline{u}$ en la somme d'un champ isochore et d'un champ irrotationnel qui sont deux champs supplémentaires de $H_1(\Omega)^3$ et forment par conséquent une base.

$$\underline{u} = \underline{\text{grad}}\phi + \underline{\text{rot}}\underline{\psi} \tag{A.7}$$

En explicitant $\underline{u}$ avec (A.7) dans (A.6), on obtient :

$$(2\mu + \lambda)\underline{\text{grad}}(\Delta\phi) + \mu\underline{\text{rot}}(\Delta\underline{\psi}) = \rho \frac{d^2\underline{\text{grad}}\phi}{dt^2} + \rho \frac{d^2\underline{\text{rot}}\underline{\psi}}{dt^2}$$

Ce qui nous amène après identification aux équations :

$$\begin{cases} \Delta\phi = \frac{\rho}{2\mu+\lambda} \frac{d^2\phi}{dt^2} \\ \Delta\underline{\psi} = \frac{\rho}{\mu} \frac{d^2\underline{\psi}}{dt^2} \end{cases} \tag{A.8}$$

Etant donné que le massif Ω est infini dans la direction z, on considèrera dès à présent que le problème vérifie les hypothèses de déformation plane suivantes :

$$u_z = \frac{\partial \bullet}{\partial z} = 0 \tag{A.9}$$

Par la suite, nous noterons les constantes $c_L = \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ et $c_S = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ qui toutes deux, nous le verrons ultérieurement, relatent respectivement la vitesse de propagation des ondes longitudinale et transversale.

En prenant en considération que l'on est purement propagatif selon x et que l'on a une singularité en « $y = 0$ », on cherchera une solution de la forme :

$\phi = f(y)e^{i(\xi x-\omega t)}$ et $H = h(y)e^{i(\zeta x-\omega t)}$ avec H composante selon z de $\underline{\psi}$.

En explicitant ϕ et $\underline{\psi}$ dans (A.8), cela nous amène aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha f = 0 \\ \frac{d^2 h}{dy^2} + \beta h = 0 \end{cases} \tag{A.10}$$

où : $\alpha = \frac{\omega^2}{c_L^2} - \xi^2$, $\beta = \frac{\omega^2}{c_S^2} - \zeta^2$

A présent, deux situations s'imposent :

- $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a des ondes de volume *i.e.* qui se propagent dans la direction y. Celles-ci sont plus connues sous le nom d'onde de compression et d'onde de cisaillement.
  Et on obtient une solution du type :

$$\begin{cases} \phi = A_1 e^{i(\xi x-\sqrt{\alpha}y-\omega t)} + A_2 e^{i(\xi x+\sqrt{\alpha}y-\omega t)} \\ H = B_1 e^{i(\zeta x-\sqrt{\beta}y-\omega t)} + B_2 e^{i(\zeta x+\sqrt{\beta}y-\omega t)} \end{cases} \tag{A.11}$$

- $\alpha < 0$ et $\beta < 0$ on a des ondes de surface *i.e.* qui s'atténuent dans la direction y. Celles-ci sont plus connues sous le nom d'onde de Rayleigh. On effectue une petite simplification étant donné que l'on est seulement propagatif en x le long de la surface Γ, ce qui nous amène à :

$$\begin{cases} \phi = Ae^{-\sqrt{-\alpha}y} e^{i\xi(x-c_R t)} \\ H = Be^{-\sqrt{-\beta}y} e^{i\xi(x-c_R t)} \end{cases} \tag{A.12}$$

  où la constante c_R vérifie l'équation suivante qui est obtenue à partir de la condition de bord libre (A.3) :

$$(\frac{c_R}{c_S})^2\{(\frac{c_R}{c_S})^6 - 8(\frac{c_R}{c_S})^4 + (24 - 16(\frac{c_S}{c_L})^2)(\frac{c_R}{c_S})^2 - 16(1-(\frac{c_S}{c_L})^2))\} = 0 \tag{A.13}$$

  On notera que la constante c_R relate la vitesse de propagation des ondes de Rayleigh.

Remarque : La solution analytique avec second membre s'obtient par la méthode de Cagniard-de Hoop. Cette méthode permet de trouver les fonctions de Green correspondant au problème d'élastodynamique que l'on a pu voir précédemment. Il ne reste qu'à effectuer un produit de convolution, de façon purement numérique, entre ces fonctions

et le second membre et nous obtenons la solution analytique du problème. C'est celle-là même que nous utiliserons par la suite pour vérifier nos résultats numériques.

On notera que l'on pourra trouver par la suite dans le cadre plus général des problèmes de sismique différents autres types d'ondes que l'on ne retrouve pas dans le problème de Lamb telles que les ondes de Stoneley qui sont des ondes qui se propagent à la surface de l'interface de deux milieux différents et les ondes de Love que l'on peut rencontrer quand il existe une couche superficielle de propriété élastique différente.