



HAL
open science

Planification de trajectoires de robots mobiles non-holonomes et de robots à pattes

Sylvain Lazard

► **To cite this version:**

Sylvain Lazard. Planification de trajectoires de robots mobiles non-holonomes et de robots à pattes. Informatique [cs]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1996. Français. NNT : . tel-00442770

HAL Id: tel-00442770

<https://theses.hal.science/tel-00442770v1>

Submitted on 22 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

Année 1996

**THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ
PARIS 6**

Spécialité : informatique

préparée à l'**INRIA Sophia-Antipolis**

présentée par

Sylvain LAZARD

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

**PLANIFICATION DE TRAJECTOIRES DE
ROBOTS MOBILES NON-HOLONOMES
ET DE ROBOTS À PATTES**

Soutenue le 9 mai 1996 devant le jury composé de :

Président :	M.	Jean	BERSTEL
Directeur de thèse :	M.	Jean-Daniel	BOISSONNAT
Rapporteurs :	M.	Jean-Paul	LAUMOND
	Mme.	Sue	WHITESIDES
Examineurs :	M.	Olivier	DEVILLERS
	M.	Pierre-Jean	LAURENT
	M.	Jean-Jacques	RISLER

Remerciements

Je remercie de tout cœur Jean-Daniel Boissonnat, mon directeur de thèse, pour son encadrement idéal à mon sens et sa participation enthousiaste à mes travaux. Je le remercie également pour son accueil chaleureux au sein du projet PRISME à l'INRIA Sophia-Antipolis et pour l'atmosphère stimulante qu'il sait y entretenir.

Jean-Paul Laumond et Sue Whitesides m'ont fait l'honneur et l'amitié de bien vouloir être mes rapporteurs et je leur adresse tous mes remerciements.

Je suis très honoré que Jean Berstel ait accepté la présidence de mon jury de thèse.

Merci à Olivier Devillers, Pierre-Jean Laurent et Jean-Jacques Risler d'avoir bien voulu faire partie de mon jury. De plus, je tiens à remercier Jean-Jacques pour avoir eu la gentillesse d'accepter, durant ma thèse, la charge de responsable administratif pour l'Université de Paris 6. Je remercie également Pierre-Jean pour le regard qu'il a eu sur mes travaux et les discussions qui en ont découlé. Enfin, j'adresse une mention tout particulière à Olivier pour l'aide dévouée qu'il m'a apportée, sans relâche, tout au long de ma thèse.

Je remercie Xuân-Nam Bui ainsi que Philippe Souères pour l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de mes débuts dans le domaine de la non-holonomie et pour les rapports enrichissants que nous avons eus par la suite.

Merci à Hervé Brönnimann pour les discussions fructueuses que nous avons partagées. Je remercie également Monique Teillaud, Luc Tancredi, Mariette Yvinec, Franck Nielsen, Pascal Desnoguès, Xavier Pennec, Lucien Nocera et Bruno Vasselle pour tous les échanges intéressants que nous avons eus ainsi que pour l'aide et le soutien qu'ils m'ont apportés.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Merlet, non seulement pour l'existence du fameux logiciel de dessin xJPdraw et pour son aide interactive dans la réalisation des nombreuses figures qui égayent cette thèse, mais également pour toutes les discussions bénéfiques que nous avons pu avoir.

Je remercie, plus globalement, tous les membres (ou ex-membres) du projet PRISME et plus généralement de l'INRIA Sophia-Antipolis pour la bonne humeur et la convivialité qui y règnent.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Jean-Daniel et Monique qui ont su, avec constance, rester stoïques (quoique...?) devant la qualité orthographique de mes écrits. Sans leur dévouement, ma thèse ne serait pas ce qu'elle est. Qu'il leur en soit rendu grâce.

Je remercie mes parents pour le soutien et toute l'aide qu'ils m'ont apportés.

Enfin, je tiens à remercier l'INRIA Sophia-Antipolis pour le confort exceptionnel, dans tous les domaines sans exception, dont j'ai pu disposer tout au long de ma thèse. Merci à tout le personnel non-chercheur qui fait souvent le maximum pour nous donner de bonnes conditions de travail. Je remercie également le GDR MEDICIS (GDR CNRS 1026) pour m'avoir donné un accès aux machines, dédiées aux gros calculs, du groupe GAGE à l'école Polytechnique. Je termine en précisant que les travaux de cette thèse concernant la non-holonomie ont été effectués dans le cadre du projet européen PROMotion (ESPRIT III Basic Research Project Nr. 6546).

Table des matières

Liste des figures	iii
Introduction	1
I Les systèmes non-holonomes	5
1 Introduction	7
1.1 Présentation des robots de type voiture	11
1.1.1 Commandabilité	14
1.2 Plus courts chemins en l'absence d'obstacles	16
1.2.1 Plus courts chemins de Dubins	16
1.2.2 Plus courts chemins de Reeds et Shepp	18
1.2.3 Plus courts chemins C^2 avec une borne sur la dérivée de la courbure	20
1.2.4 Plus courts chemins de courbure bornée sur une variété	22
1.3 Plus court chemin en présence d'obstacles	22
1.3.1 Existence d'un plus court chemin pour le système de Dubins	22
1.3.2 Non existence d'un plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp	24
1.3.3 Caractérisation des plus courts chemins de courbure bornée	27
1.3.4 Complexité d'un chemin de courbure bornée pour des obstacles polygonaux quelconques	34
1.4 Algorithmes de planification de trajectoires	35
1.4.1 Algorithmes par discrétisation	36
1.4.2 Algorithmes complets	41
1.4.3 Algorithmes pour des obstacles de courbure bornée . .	43
1.5 Contributions	44
1.5.1 Enveloppe convexe de courbure bornée	45

1.5.2	Algorithme polynomial pour le calcul d'un plus court chemin de courbure bornée en présence d'obstacles modérés	46
2	Enveloppe convexe de courbure bornée	49
2.1	Introduction	49
2.2	Caractérisation de \mathcal{T}	51
2.3	Caractérisation de \mathcal{Q}	53
2.4	Unicité de \mathcal{Q} et de \mathcal{T}	58
2.5	Résultats et algorithmes	66
2.6	Conclusion	69
3	A polynomial-time algorithm for computing a shortest path of bounded curvature amidst moderate obstacles	71
3.1	Introduction	71
3.2	Preliminaries	73
3.3	Characterization of the C -segments	76
3.4	Characterization of the subpaths of type $\bar{C}\bar{C}$	80
3.5	Bounding the number of subpaths of type $\bar{C}\bar{C}$	85
3.6	The algorithm	101
3.7	Final remarks and open questions	109
4	Conclusion et problèmes ouverts	111
II	Les robots à pattes	115
1	Planification de trajectoires de robots à pattes	117
1.1	Introduction	117
1.2	Contribution	119
1.3	Déplacement des pattes	121
1.4	Robots polygonaux à pattes	123
2	Motion Planning of Legged Robots	127
2.1	Introduction	128
2.2	Notations and previous results	129
2.3	From spider robots to half-disk robots	131
2.4	Computation of \mathcal{F}	134
2.4.1	Computation of $\delta(\mathcal{F}) \cap \mathcal{A}$	135
2.4.2	Properties of the \mathcal{Z}_i	137
2.4.3	Construction of $\delta(\mathcal{F}) \cap C_{i_0}$	142
2.4.4	Computation of the arcs of $\delta(\mathcal{F})$ issued from a foothold	144

2.4.5	Construction of \mathcal{F}	144
2.5	Generalization to polygonal foothold regions	145
2.5.1	Introduction and preliminaries	145
2.5.2	Computation of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e$	146
2.5.3	Arcs of $\delta(\mathcal{F}_e)$ corresponding to the placements where the spider robot is at the limit of stability	147
2.5.4	Construction of \mathcal{F}_e and \mathcal{F}	160
2.6	Conclusion	161
2.7	Appendix A : Proof of Theorem 2.20	162
2.7.1	Properties of the \mathcal{Z}_{e_i}	162
2.7.2	Properties of the regions $int(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$	171
2.7.3	Construction of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$	172
2.7.4	Contribution of the straight line segments of \mathcal{C}_{e_i} to $\delta(\mathcal{F}_e)$	172
2.8	Appendix B : Conchoids	177
2.9	Appendix C : Circular conchoids	180

Table des figures

1.1	Un robot de type voiture	11
1.2	Domaines de commande correspondant aux différents systèmes	13
1.3	Non commandabilité en temps du système de Dubins	15
1.4	Le système de Dubins ne vérifie pas la propriété d'accessibilité en présence d'obstacles	15
1.5	Exemples où la propriété d'accessibilité n'est pas vérifiée lorsque \mathcal{L} est fermé et que son bord présente des singularités	17
1.6	Exemples de plus courts chemins de Dubins	18
1.7	Exemples de plus courts chemins de Reeds et Shepp	19
1.8	Configurations pour lesquelles il n'existe pas de plus court che- min pour le système de Reeds et Shepp	26
1.9	Configurations pour lesquelles il n'existe pas de plus court che- min pour le système de Reeds et Shepp	27
1.10	Trajectoire de longueur supérieure à 2π	29
1.11	Pour le cas 1 de la preuve du théorème 1.5	32
1.12	Pour le cas 1 de la preuve du théorème 1.5	32
1.13	Trajectoire constituée d'un nombre infini d'arcs joignant deux points du bord de l'obstacle	34
1.14	Trajectoire de complexité arbitrairement grande	35
1.15	Trajectoire de complexité $\Theta(L/\delta^2)$	43
2.1	Exemple où tous les sommets de \mathcal{P} n'appartiennent pas à $\partial\mathcal{T}$	52
2.2	Pour la preuve du lemme 2.5	54
2.3	Pour la preuve de la proposition 2.7	55
2.4	Pour la preuve de la proposition 2.7	55
2.5	Pour la preuve de la proposition 2.7	56
2.6	Contre exemple à la proposition 2.7 lorsque \mathcal{P} n'est pas convexe	57
2.7	$P_i M_i^*$ est la bissectrice des deux droites $M_{i-1}^* M_i^*$ et $M_i^* M_{i+1}^*$ qui sépare M_{i-1}^* et M_{i+1}^*	58
2.8	Pour la preuve du lemme 2.12	61
2.9	Pour la preuve de la proposition 2.14	64

2.10	Exemple pour lequel M_3^* ne peut appartenir au bord du disque D_3	69
3.1	Regions \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T	74
3.2	Dubins length-reducing perturbations	77
3.3	Shortcut of a subpath of type CCC (Lemma 3.6)	78
3.4	Length reducing perturbations for $CCCS$ paths	79
3.5	Study of the perturbation (b) of Figure 3.4	79
3.6	Shortcuts used in Lemma 3.11	82
3.7	Shortcut used in Lemma 3.13 if \mathcal{C}_1 does not intersect \mathcal{C}_3	83
3.8	Shortcut used in Lemma 3.13 if \mathcal{C}_1 does intersect \mathcal{C}_3	83
3.9	Shortcut used in Proposition 3.14	84
3.10	For the proof of Proposition 3.14	85
3.11	The mechanical device	87
3.12	For the proof of Theorem 3.15	87
3.13	Computing Equations 3.10	90
3.14	Computing Equations 3.12	91
3.15	Mechanical device where both obstacle edges are circular edges	93
3.16	For the proof of Theorem 3.15 when both obstacle edges are circular edges	95
3.17	Mechanical device where one obstacle edge is a line segment and the other is a circular edge	99
3.18	Shortcuts in the proof of Proposition 3.25	106
3.19	For the proof of Proposition 3.25 (Case 1)	106
3.20	For the contradictions in the proof of Proposition 3.25 (Case 2)	107
3.21	For the proof of Theorem 3.27	108
1.1	Problème du déplacement des pattes lorsque celle posée en p_1 est en limite d'extension	122
1.2	Robot rectangulaire à pattes	124
2.1	The spider robot.	128
2.2	An example of the free space of a spider robot.	130
2.3	A placement which is not stable.	131
2.4	$HD(P, \theta)$	132
2.5	Helicoidal volume \mathcal{H}_i	133
2.6	$compl(p_{//\theta}(compl(\mathcal{E})))$	134
2.7	Intersection of \mathcal{H}_i with \mathcal{C}_{i_0} for $\ s_{i_0}s_i\ = \sqrt{2}R$ and $\angle(\vec{x}, \overrightarrow{s_{i_0}s_i}) =$ $\theta_2 = \pi/2$	136
2.8	Contribution of \mathcal{C}_{i_0} to $\delta(\mathcal{F})$ ($0 < \ s_1s_{i_0}\ < R$, $R \leq \ s_2s_{i_0}\ <$ $\sqrt{2}R$, $\sqrt{2}R \leq \ s_3s_{i_0}\ < 2R$).	137

2.9 Definition of θ_1, θ_2 and θ_3 ($0 < \|s_{i_0} s_i\| < 2R$). 139

2.10 For the definition of P, u_P, θ_P, γ 140

2.11 Section of \mathcal{H}_i and \mathcal{C}_{i_0} by the "plane" $\Pi_{\theta_2 + \frac{\pi}{2}}$ 141

2.12 For the definition of $T, T(\theta), r'_i(\theta), r''_i(\theta)$ 142

2.13 Section of \mathcal{H}_{e_i} by the "plane" Π_θ 146

2.14 Relevant 2-contact tracings (thick curves) and irrelevant 2-contact tracings (dashed thick curves). 151

2.15 For the proof of Proposition 2.21. 152

2.16 An arbitrary number of relevant 2-contact tracings that have a common endpoint. 153

2.17 Wedge $P_{i_1} A P_{i_2}$ is in \mathcal{F}_e near A 154

2.18 \mathcal{Z}_{D_i} and the relative positions of $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ and D_i that correspond. 163

2.19 \mathcal{Z}_{D_i} and the relative positions of $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ and D_i that correspond. 163

2.20 For the proofs of Propositions 2.26, 2.27 and 2.28. 164

2.21 \mathcal{Z}_{D_i} when $s_{i_0} \in D_i$ 165

2.22 For the computation of \mathcal{Z}_{D_i} and $\mathcal{Z}_{D'_i}$ when $s_{i_0} \in D_i$ 166

2.23 $\forall \theta \in [\gamma_i, \gamma_i + \pi], \mathcal{H}_{D'_i} \cap \Pi_\theta$ coincides with $\mathcal{H}_{D_i} \cap \Pi_\theta$ on \mathcal{C}_{s_i} . . . 167

2.24 $\forall \theta \in [\gamma_i - \pi, \gamma_i], \mathcal{H}_{D'_i} \cap \Pi_\theta$ coincides with $\mathcal{H}_{s_i} \cap \Pi_\theta$ on \mathcal{C}_{s_i} . . . 168

2.25 $\mathcal{Z}_{D'_i}$ and the relative positions of $\mathcal{C}_{s_{i_0}}, D_i$ and s_i that correspond ($\|s_{i_0} s_i\| = \sqrt{2}R$). 169

2.26 A_I belongs to D_i 170

2.27 Section of $\mathcal{H}_{s_i}, \mathcal{H}_{D'_i}$ and \mathcal{H}_{D_i} by the "plane" Π_θ 174

2.28 \mathcal{Y}_s and the relative positions of \mathcal{C}_s and L_{i_0} that correspond ($s \in L_{i_0}$). 175

2.29 Conchoid. 177

2.30 For the Lemma 2.48. 179

2.31 Circular conchoid (when $L = R$). 180

Introduction

L'un des buts majeurs de la robotique réside en la création de robots autonomes. Par robot, on entend un système mécanique équipé de capteurs, d'actionneurs et d'un système de contrôle permettant d'agir sur les actionneurs en fonction d'une part, de la tâche à accomplir, et d'autre part, des informations données par les capteurs. Actuellement, de tels systèmes de contrôle sont bien évidemment des ordinateurs. Un robot est dit autonome si, moyennant une spécification externe "de haut niveau" de la tâche à accomplir, le robot est capable de la mener à bien sans intervention humaine. Le qualificatif "de haut niveau" concernant la tâche à accomplir est assurément subjectif; par exemple l'autonomie d'un bras manipulateur dans un environnement restreint, connu (contexte industriel) est un objectif plus facile à atteindre que l'autonomie d'un véhicule d'exploration planétaire soumis à des contraintes cinématiques et dynamiques dans un environnement inconnu et virtuellement illimité. L'utilité de robots autonomes ou même partiellement autonomes est incontestable et les domaines d'application sont multiples et variés.

Le développement d'un robot autonome pose de nombreux problèmes fondamentaux dans des domaines variés et bien distincts. Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de M. Brady [Bra89] pour une présentation générale des différents aspects. A titre d'exemple, le problème de la perception de l'environnement par le robot (capteurs) est naturellement lié au domaine de la vision; le problème du suivi de trajectoire est lié à la théorie du contrôle. Un autre problème fondamental est celui de la planification de trajectoires. En effet un robot (même électrique) est mobile par essence, il est donc amené à se déplacer. Le calcul de trajectoires doit donc être une tâche élémentaire pour un robot se voulant autonome.

Dans ce mémoire, nous allons uniquement nous intéresser au problème de planification de trajectoires pour différents types de robots. Nous ne nous préoccuperons ni des problèmes que peuvent poser le suivi d'une trajectoire, ni même des problèmes liés à la localisation du robot.

A tout moment, l'homme est amené à planifier des trajectoires, que ce

soit pour servir une tasse de café ou pour conduire une automobile. De plus, l'homme planifie les mouvements de manière généralement inconsciente : le problème peut donc sembler raisonnablement simple, à première vue. En réalité, la planification automatique de trajectoires s'avère être un problème extrêmement difficile. Une vision incorrecte, car par trop réductrice, du problème de la planification de mouvements est celle de la détection de collision entre le robot et les obstacles. L'un des aspects du problème est effectivement la détection de collision entre le robot et des obstacles, lesquels peuvent d'ailleurs être mobiles. Cela étant, les techniques de planification de trajectoires sont a priori fort différentes suivant, par exemple, que l'on veut que le robot effectue de grands déplacements à vitesse élevée ou qu'il effectue des opérations d'assemblage très précises. Le problème de planification devient également radicalement différent dès lors que le robot ne connaît son environnement que par la vision qu'il en a. Lorsque les contraintes physiques (comme la gravité ou les frottements), géométriques, cinématiques ou dynamiques du robot sont prises en compte, le problème devient naturellement de plus en plus difficile. Si de plus, on veut minimiser le temps ou l'énergie dépensée, le problème devient encore plus complexe.

La recherche dans le domaine de la planification de trajectoires débuta à la fin des années soixante. Durant la période qui s'étend jusqu'au début des années quatre-vingts, la recherche a été principalement axée sur l'étude des "bras manipulateurs" utilisés dans l'industrie. Mais c'est à partir des années quatre-vingts qu'un réel effort a été fourni dans le domaine. Cette période a vu l'apparition d'un nouvel et important outil de représentation adapté au problème en la notion d'espace des configurations [LP83]. De nombreux travaux dans les domaines de la robotique, des mathématiques et de l'algorithmique ont permis d'élaborer et d'implanter un certain nombre d'algorithmes de planification de trajectoires. Ces travaux ont également permis d'améliorer la compréhension théorique d'un certain nombre de problèmes et d'en souligner leurs complexités intrinsèques. Le lecteur pourra se référer aux ouvrages de J-C. Latombe [Lat91] et J.T. Schwartz & M. Sharir [SS90] pour un état de l'art complet (à l'époque de leurs parutions) du large domaine qu'est la planification de trajectoires.

Dans ce mémoire, nous allons discuter du problème de planification de trajectoires pour deux grandes classes de robots radicalement différentes : les robots à pattes et les robots sujets à des contraintes cinématiques comme les voitures. Bien que les robots à pattes et les robots sujets à des contraintes cinématiques soient fort dissemblables, ils présentent malgré tout une similitude importante : les techniques classiques de planification de trajectoires ne s'appliquent pas. Nous pouvons tenter dès à présent d'en expliquer grossièrement la cause : pour une position donnée de l'un et l'autre de ces robots,

il n'est pas possible a priori de se mouvoir directement en tout point d'un voisinage sans pour autant que cette impossibilité soit due à un obstacle. Une voiture ne peut se déplacer transversalement à sa direction (ceci dans une utilisation classique du dit véhicule), de même le corps d'un robot à pattes ne pourra se déplacer qu'en des lieux où il lui sera possible de placer ses pattes de façon à être en équilibre sur les dites pattes. Exceptée cette similitude, il est ardu de trouver d'autres liens entre ces deux types de robots. C'est la raison pour laquelle nous allons dès à présent scinder nos réflexions sur ces deux sujets.

La première partie de ce mémoire traite du problème de la planification de trajectoires pour des robots sujets à des contraintes cinématiques. Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons au problème de la planification de trajectoires pour des robots à pattes.

Première partie

Les systèmes non-holonomes

Chapitre 1

Introduction

Le premier pas dans l'étude des mouvements des robots mobiles à roues est de prendre en compte les contraintes cinématiques régissant les mouvements de tels robots. En 1957, L.A. Dubins fut le premier à s'intéresser aux trajectoires sujettes à une contrainte sur le rayon de courbure : il caractérisa, en l'absence d'obstacles, les courbes C^1 de courbure moyenne majorée sur tout intervalle et de longueur minimale entre deux points orientés du plan [Dub57]. Il fallut attendre 1986 pour que le problème de la planification de trajectoires pour des robots mobiles à roues commence à être assidûment étudié [Lau86].

Formellement, un robot est dit non-holonome lorsque son mouvement est soumis à des contraintes s'exprimant par des relations non intégrables entre les composantes du vecteur d'état et ses dérivées. Par suite, l'ensemble des vitesses localement accessibles à chaque instant ne constitue qu'un sous-ensemble de l'espace tangent à l'espace d'état. Dès lors, une courbe incluse dans une composante connexe de l'espace des configurations ne correspond pas nécessairement à une trajectoire exécutable du robot. Le lecteur pourra se référer au livre de J-C. Latombe [Lat91] pour une caractérisation plus complète de la non-holonomie.

Un exemple typique de robot non-holonome est celui d'une voiture : en interdisant le glissement des roues, le vecteur vitesse d'un point de l'essieu arrière d'une voiture est toujours tangent à l'axe de la voiture.

Commandes non optimales et suivi de trajectoires

Du point de vue de la théorie de la commande, les chercheurs se sont principalement intéressés au problème du calcul de trajectoires en l'absence d'obstacle et au problème du suivi d'une trajectoire pré-calculée. Les critères d'optimalité (en temps ou en longueur) des trajectoires ne sont, alors, pas considérés. Citons [LC92] comme ouvrage de référence.

Dans un premier temps, le problème est abordé en l'absence d'obstacle. Murray et Sastry [MS90] présentent une méthode applicable lorsque le système d'équations différentielles exprimant les contraintes cinématiques peut être transformé en une forme dite chaînée. Grâce à cette forme particulière, on peut choisir des commandes sinusoïdales simples permettant de produire des mouvements qui modifient une composante d'état sans changer les autres. Simultanément, Lafferiere et Sussmann [LS90] proposent une méthode pour calculer des trajectoires, pour des systèmes localement commandables en temps (voir section 1.1.1), utilisant des commandes constantes par morceaux. Un chemin initial ne satisfaisant pas nécessairement les contraintes cinématiques est supposé connu, la trajectoire est alors exprimée localement dans une base particulière de l'espace tangent (base de Hall). Les coefficients, calculés à partir de combinaisons linéaires des vecteurs tangents, déterminent des commandes correspondant à des chemins exécutables qui approximent la trajectoire initiale. Dans [Jac91], Jacob reprend cette méthode en utilisant les bases de Lyndon et montre que le nombre d'arcs C^1 constituant la trajectoire peut être réduit. Le problème du calcul de trajectoires utilisant des commandes constantes par morceaux a été également traité par Monaco et Normand-Cyrot [MNc92]. Plus récemment, Rouchon, Fliess, Levine et Martin [RFLM93a] montrent comment le concept de platitude qu'ils ont développé [FLMR92] peut être utilisé pour le calcul de trajectoires. Notons que la plupart des systèmes représentant les modèles de robots non-holonomes, en particulier tous les systèmes pouvant être mis sous forme chaînée, sont plats. Rouchon et coll. présentent dans [RFLM93b] un exemple de système non plat, il s'agit d'un chariot à deux remorques dont le point d'attache n'est pas situé sur l'essieu arrière. Le calcul de trajectoires en présence d'obstacles pour un système quelconque a été abordé par Sussmann et Liu [SL91]: les auteurs proposent un algorithme, basé sur l'utilisation de commandes sinusoïdales, pour construire une suite de trajectoires admissibles convergeant uniformément vers un chemin donné. Cette méthode a été appliquée pour le calcul de trajectoires pour un robot mobile tractant des remorques [TLM⁺92]. Il s'avère que les trajectoires obtenues sont impraticables en raison de leur nature fortement oscillatoire.

Trajectoires optimales

Les chercheurs se sont également intéressés au problème du calcul de trajectoires vérifiant des critères d'optimalité tels que le temps ou la longueur. Ce problème étant plus ardu que le problème du calcul de trajectoires non optimales, les systèmes non-holonomes étudiés sont dès lors moins généraux que ceux considérés dans le paragraphe précédent. Le problème a été abordé

dans un premier temps avec des points de vue de géométrie et de calcul différentiel, et plus récemment, du point de vue de la théorie de la commande optimale.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, Dubins fut le premier à caractériser, en l'absence d'obstacle, les trajectoires de longueur minimale pour un robot sujet à une contrainte sur le rayon de courbure [Dub57]. En 1990, Reeds et Shepp [RS90] caractérisèrent, en l'absence d'obstacles, les trajectoires de longueur minimale pour un robot sujet à une contrainte sur le rayon de courbure mais capable d'effectuer des manœuvres (c'est-à-dire des marches arrière). De même que les plus courts chemins caractérisés par Dubins sont généralement appelés trajectoires ou chemins de Dubins, les plus courts chemins caractérisés par Reeds et Shepp sont généralement appelés trajectoires ou chemins de Reeds et Shepp. A ce stade, les plus courts chemins de Dubins et ceux de Reeds et Shepp sont caractérisés de la façon suivante : étant donné deux points orientés du plan, on connaît une famille finie de chemins dont on sait qu'elle contient un plus court chemin joignant les deux points orientés. Pour calculer un plus court chemin il suffit donc de calculer tous les chemins de la famille finie et prendre le plus court. Différents planificateurs de trajectoires en présence d'obstacles furent implantés sur cette base (voir section 1.4).

Les résultats de Dubins ainsi que ceux de Reeds et Shepp furent re-démontrés simultanément par Boissonnat, Cérézo et Leblond [BCL94b] et par Sussmann et Tang [ST91]. Ces nouvelles démonstrations sont plus directes que les démonstrations originelles. Alors que les trajectoires de Dubins et celles de Reeds et Shepp furent caractérisées à l'aide de résultats classiques de géométrie et de calcul différentiel, Boissonnat et coll. et, Sussmann et Tang utilisèrent le cadre formel de la théorie de la commande optimale et, en particulier, le Principe du Maximum de Pontryagin [PBG74]. Une très bonne approche du Principe du Maximum de Pontryagin est présentée par P. Souères dans sa thèse [Sou93].

Plus récemment, Souères et Laumond [SL92] donnèrent une caractérisation complète du plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp, entre deux configurations (c'est-à-dire deux points orientés du plan). Une partition de l'espace des configurations est effectuée, donnant ainsi directement le type du plus court chemin, lequel détermine de façon unique le chemin le plus court entre deux configurations. La caractérisation complète du plus court chemin pour le système de Dubins fut effectuée peu de temps après par Bui, Souères, Boissonnat et Laumond [BSBL94].

Planification de trajectoires en présence d'obstacles

En présence d'obstacles, les résultats concernant la planification de trajectoires sont très peu nombreux. Un exemple de problème de base toujours ouvert est le suivant : lorsque l'espace libre est une région polygonale simple $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$, existe-t-il un algorithme polynomial calculant une trajectoire (pas forcément la plus courte) pour le système de Dubins, c'est-à-dire une courbe C^1 de courbure bornée en tout point où la courbure est définie, et joignant deux configurations données? Notons que lorsque l'espace libre \mathcal{L} est quelconque, la complexité d'un chemin ne dépend pas seulement de la complexité des obstacles (voir section 1.3.4).

À quelques rares exceptions près, presque tous les travaux effectués sur la planification de trajectoires optimales de systèmes non-holonomes suppose le robot ponctuel. Rappelons que le problème de la planification de trajectoires d'un robot de la forme d'un disque de rayon r en présence d'un ensemble d'obstacles Ω se ramène au problème de la planification de trajectoires d'un robot ponctuel en augmentant les obstacles de r , c'est-à-dire en considérant comme obstacles la somme de Minkowski de Ω et du disque de rayon r . Modéliser un robot de forme quelconque par un disque permet donc de se ramener à un problème de planification de trajectoires pour un robot ponctuel. Nous considérerons dans la suite les robots comme ponctuels.

En présence d'obstacles polygonaux, le problème de l'existence d'une trajectoire C^1 , de courbure bornée en tout point où elle est définie, joignant deux configurations données est abordé par Fortune et Wilfong dans [FW91]. Les auteurs présentent un algorithme déterminant l'existence ou la non existence d'un chemin, de complexité en temps $O(2^{\text{poly}(m,n)})$ où n est le nombre total de sommets des obstacles polygonaux et m est le nombre de bits utilisés pour décrire les coordonnées des sommets des obstacles.

Dans cette thèse, nous nous sommes principalement intéressés aux problèmes de la caractérisation et du calcul de trajectoires optimales pour le système de Dubins, en présence d'obstacles. Nous présentons dans la section 1.1 les robots de type voiture et les systèmes non-holonomes les plus classiques qui en découlent. Nous rappelons également les résultats concernant la commandabilité de ces systèmes (avec ou sans obstacles). Nous rappelons dans la section 1.2 les résultats existant sur la caractérisation des plus courts chemins des systèmes non-holonomes en l'absence d'obstacle. Nous faisons de même, mais en présence d'obstacles, dans la section 1.3. Nous décrivons succinctement dans la section 1.4 les différents planificateurs de trajectoires existants en présence d'obstacles. Enfin nous présentons dans la section 1.5 notre contribution.

roues, à un instant donné, les contraintes cinématiques s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \phi \cos \theta \\ \dot{y} &= v \cos \phi \sin \theta \\ \dot{\theta} &= v \sin \phi \\ \dot{v} &= \alpha \\ \dot{\phi} &= \beta \end{cases} \quad (1.1)$$

La contrainte cinématique correspondant à un roulement sans glissement se traduit par le fait que la vitesse du robot est tangente à l'axe du robot c'est à dire :

$$\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta = 0$$

Cette équation n'est pas intégrable et caractérise la non-holonomie du système (voir [Lat91]).

Un robot satisfaisant aux contraintes cinématiques du système (1.1) (avec $|\phi| \leq \phi_0$) modélise bien une voiture, cependant ce modèle s'avère encore trop détaillé. En effet, la caractérisation des plus courts chemins pour un tel système n'a pu être effectuée, à l'heure actuelle. Certains systèmes simplifiés ont cependant été étudiés : considérons le système dynamique formé uniquement par les trois premières équations du système (1.1). En posant $u_1 = v \cos \phi$ et $u_2 = v \sin \phi$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

où u_1 et u_2 sont des lois de commande². Il est raisonnable de supposer que la borne ϕ_0 sur le rayon maximal de giration est inférieur à $\pi/4$ ce qui implique $|u_2| \leq |u_1|$. D'autre part, dans la mesure où nous ne considérons que des contraintes cinématiques et aucune contrainte dynamique dans la modélisation du robot, nous pouvons borner la vitesse linéaire v par une constante arbitraire, ceci sans aucune perte de généralité. Nous pouvons donc supposer $|u_2| \leq |u_1| \leq 1$.

On appelle robot de type voiture ou unicycle un robot dont les trajectoires satisfont le système (1.2) et dont les lois de commande u_1 et u_2 sont à valeur dans $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 / |u_2| \leq |u_1| \leq 1\}$. Notons que la courbure d'une trajectoire satisfaisant au système (1.2) est, en un point où elle est définie, $\frac{|u_2|}{|u_1|} \leq 1$. Le système (1.2) est appelé système de Dubins si $u_1 = 1$ et $|u_2| \leq 1$, il est appelé système de Reeds et Shepp si $u_1 \in \{-1, 1\}$ et $|u_2| \leq 1$. On

2. On considère les lois de commande dans la classe des fonctions mesurables et bornées sur un intervalle fermé de \mathbb{R} .

appelle robot de Dubins ou robot de Reeds et Shepp un robot satisfaisant aux contraintes cinématiques respectivement décrites par le système de Dubins ou le système de Reeds et Shepp. La figure 1.2 montre les domaines de commande pour les robots de Dubins, de Reeds et Shepp et les robots de type voiture.

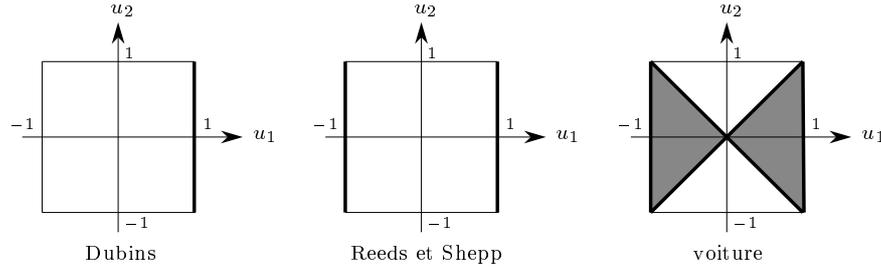


FIG. 1.2 – Domaines de commande correspondant aux différents systèmes

Pour ces deux systèmes, un triplet (x, y, θ) est appelé *configuration*. L'espace des configurations est $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Une configuration peut être vue soit comme un point de $\mathbb{R}^2 \times S^1$ soit comme un point orienté du plan, c'est-à-dire un point du plan muni d'une orientation.

Dans la suite nous nous intéresserons tout particulièrement au système de Dubins

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \dot{\theta} = u_2 \quad |u_2| \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Une courbe dans $\mathbb{R}^2 \times S^1$ joignant deux configurations ω_i et ω_t , et satisfaisant aux équations du système (1.3) sera souvent confondue avec sa projection sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire avec la courbe décrite par le point de référence du robot entre les deux points orientés du plan ω_i et ω_t . Remarquons qu'une telle courbe est une courbe C^1 de courbure $|u_2|$ majorée par 1 en tout point où la courbure est définie. Une telle courbe est également une courbe dont la courbure moyenne est majorée par 1 sur tout intervalle, c'est-à-dire une courbe différentiable dont la dérivée est une fonction 1-lipschitzienne lorsque la courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne. Réciproquement, une courbe de courbure moyenne majorée par 1, de même qu'une courbe C^1 de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie, satisfait aux contraintes du système de Dubins. Fréquemment dans la suite, de telles courbes seront simplement appelées *courbes de courbure bornée*. Lorsque l'on parle de la longueur d'une trajectoire, il s'agit toujours de sa longueur dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire de la distance parcourue par le point de référence de la voiture.

Nous avons défini la borne sur la courbure par $|u_2| \leq 1$. Dans certains ouvrages, la courbure est supposée bornée par une constante $1/R$ (R est le rayon de courbure minimal le long d'une trajectoire). Remarquons qu'il est équivalent, à une homothétie près, de considérer la courbure bornée par 1 ou par une constante positive $1/R$.

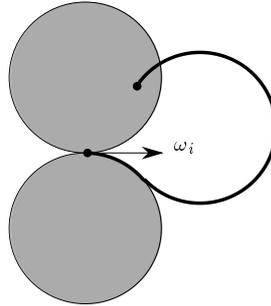
Dans la suite de cette thèse, nous considérerons le robot de type voiture, le robot de Dubins et le robot de Reeds et Shepp comme des robots ponctuels. Peu de travaux ont été effectués sur l'étude des plus courts chemins pour des robots non-holonomes non ponctuels. Pour ces robots non ponctuels, il est nécessaire de considérer les trajectoires de longueurs localement optimales décrites par le point de référence d'un robot lorsque celui-ci se déplace en gardant le contact avec un obstacle. Ces courbes appelées tractrices ont été étudiées, pour les robots de Dubins et de Reeds & Shepp, par X-N. Bui [Bui94].

1.1.1 Commandabilité

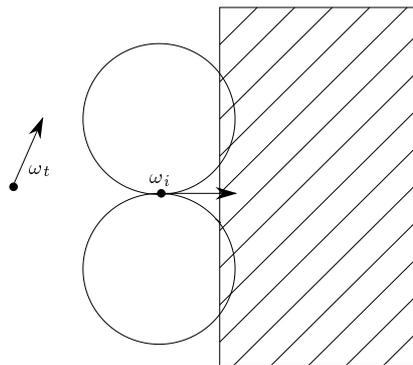
Un système est dit *commandable* si pour toute paire de configurations ω_i et ω_t situées dans l'espace des configurations, il existe une trajectoire satisfaisant aux contraintes du système et joignant ω_i et ω_t . Un système est dit *localement commandable en temps* si, pour toute configuration ω_i , l'ensemble des configurations accessibles depuis ω_i en un temps inférieur à T contient un voisinage de ω_i pour tout $T > 0$. La propriété de commandabilité d'un système dynamique est intrinsèque et ne dépend donc pas de la présence éventuelle d'obstacles. Un système est dit posséder la *propriété d'accessibilité* si pour toute paire de configurations ω_i et ω_t situées dans une même composante connexe de l'espace libre, il existe une trajectoire satisfaisant aux contraintes du système et joignant ω_i et ω_t .

Considérons tout d'abord le système de Dubins. Ce système est clairement commandable car entre deux points orientés du plan, il existe toujours une courbe C^2 de courbure majorée par 1 en tout point; il existe donc, a fortiori, une courbe satisfaisant aux équations du système de Dubins et joignant deux configurations données. Du point de vue de la théorie de la commande, le théorème de Bonnard [Lob81, Théorème.III.4] prouve également la commandabilité du système de Dubins. Cela étant, le système de Dubins n'est pas localement commandable en temps. En effet, étant donnée une configuration initiale ω_i , toute trajectoire satisfaisant aux équations du système de Dubins et joignant ω_i à un point orienté situé dans la région grisée de la figure 1.3 est de longueur supérieure à π (voir [Bui94]).

En présence d'obstacles, le système de Dubins ne vérifie pas la propriété d'accessibilité. En effet, pour des configurations initiale et terminale ω_i et ω_t ,

FIG. 1.3 – *Non commandabilité en temps du système de Dubins*

et un obstacle comme sur la figure 1.4, il n'existe pas de trajectoire satisfaisant aux équations du système de Dubins et joignant ω_i à ω_t dans l'espace libre \mathcal{L} : supposons par l'absurde qu'il existe une telle trajectoire, il existe alors dans \mathcal{L} un plus court chemin \mathcal{T} joignant ω_i et ω_t (voir théorème 1.2). D'autre part, comme nous allons le voir dans le théorème 1.3, tout arc de \mathcal{T} inclus dans l'intérieur de \mathcal{L} (à l'exception possible de ses extrémités) est un chemin de Dubins de type *CSC* ou *CCC* (voir section 1.2.1). Clairement, il n'existe pas pour l'exemple de la figure 1.4, de trajectoire de Dubins, dans \mathcal{L} , de ω_i à ω_t ou de ω_i à une configuration tangente à l'obstacle. Donc, il n'existe pas, dans \mathcal{L} , de plus court chemin joignant ω_i et ω_t , et donc, il n'existe pas de chemin joignant ω_i et ω_t dans \mathcal{L} satisfaisant aux équations du système de Dubins.

FIG. 1.4 – *Le système de Dubins ne vérifie pas la propriété d'accessibilité en présence d'obstacles*

Un robot de type voiture ainsi que le système de Reeds et Shepp sont localement commandables en temps; ces résultats découlent du théorème du

rang (voir [Sou93], [LJTM94] ou [Lat91]) mais peuvent également être montrés sans faire appel à la théorie du contrôle [LJTM94]. Cette propriété implique que ces deux systèmes possèdent la propriété d'accessibilité; nous présentons une preuve issue de [LJTM94]. Supposons dans un premier temps l'espace libre \mathcal{L} ouvert. Pour toute paire de configurations ω_i et ω_t situées dans une même composante connexe de l'espace libre, il existe une courbe \mathcal{C} joignant ω_i et ω_t dans \mathcal{L} (\mathcal{C} n'est sujette à aucune contrainte sur la courbure). Considérons un point orienté ω_1 de cette courbe et $T_1 > 0$ la distance de ce point aux obstacles. La vitesse linéaire d'un robot de type voiture ainsi que d'un robot de Reeds et Shepp est majorée par 1 donc l'ensemble des configurations accessibles depuis ω_1 en un temps inférieur à T_1 est inclus dans l'espace libre \mathcal{L} . Les deux systèmes considérés étant localement commandables en temps, l'ensemble des configurations accessibles depuis ω_1 en un temps inférieur à T_1 contient une boule ouverte B_1 centrée en ω_1 . En considérant $\omega_2 \in B_1 \cap \mathcal{C}$ et en réitérant le processus, la courbe \mathcal{C} peut être pavée par un ensemble de boules ouvertes incluses dans \mathcal{L} . Comme la courbe \mathcal{C} est compacte, elle peut être recouverte par un ensemble fini de telles boules. La propriété d'accessibilité du système de Reeds et Shepp, ainsi que d'un robot de type voiture, est ainsi démontrée de façon constructive dans un espace libre ouvert.

L'existence d'un plus court chemin ne peut être assurée dans un espace libre ouvert. Il est donc important de déterminer si le système de Reeds et Shepp et un robot de type voiture possèdent la propriété d'accessibilité dans un espace libre fermé. La démonstration précédente se généralise facilement si l'espace libre \mathcal{L} est fermé et si l'on suppose de plus que le bord de \mathcal{L} est sans singularité, i.e. en tout point du bord de \mathcal{L} il existe un voisinage dont l'intersection avec l'intérieur de \mathcal{L} est non vide et simplement connexe. Cette hypothèse permet d'éviter les situations décrites par la Figure 1.5.

Le système de Reeds et Shepp, ainsi qu'un robot de type voiture, possède donc la propriété d'accessibilité en présence d'obstacles sous l'hypothèse que l'espace libre \mathcal{L} est fermé et que son bord ne présente pas de singularité.

1.2 Plus courts chemins en l'absence d'obstacles

1.2.1 Plus courts chemins de Dubins

En l'absence d'obstacle, Dubins a montré que le plus court chemin pour le robot de Dubins entre deux configurations est une courbe C^1 , C^2 par morceaux; cette courbe est la concaténation de segments de droites et d'arcs

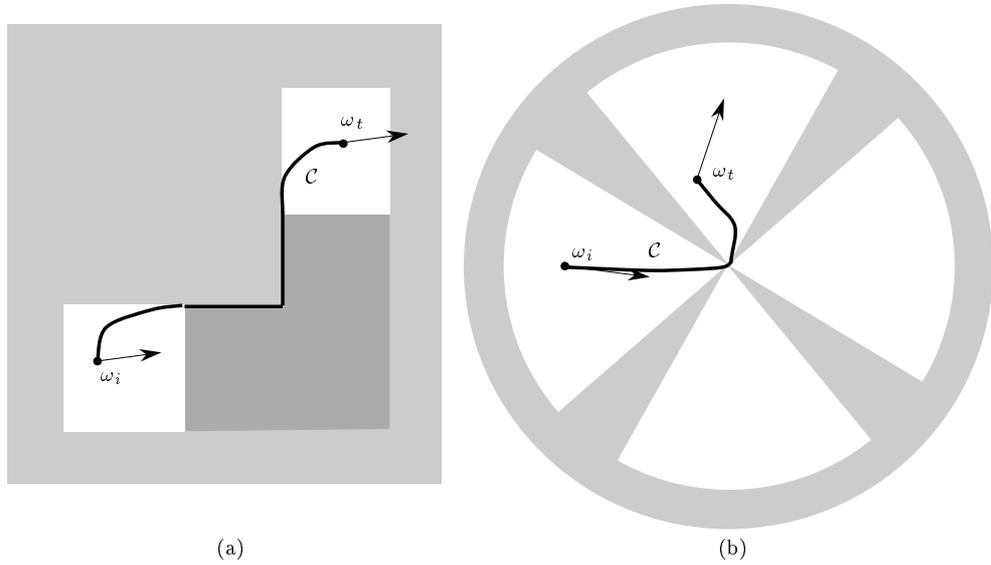


FIG. 1.5 – Exemples où la propriété d'accessibilité n'est pas vérifiée lorsque \mathcal{L} est fermé et que son bord présente des singularités

de cercle, et peut s'écrire sous la forme CSC ou CCC où S est un segment de droite et C est un arc de cercle de rayon minimal, c'est-à-dire de rayon 1. Chaque arc du type S ou C peut être dégénéré, c'est-à-dire de longueur nulle. Ces courbes sont appelées courbes, chemins ou trajectoires de Dubins. On distingue les chemins de Dubins de type CSC et de type CCC . Le type d'un chemin peut être spécifié de façon plus précise : en notant R (resp. L) un arc de cercle parcouru dans le sens des aiguille d'un montre³ (resp. sens trigonométrique), le type d'un chemin peut être RSL , par exemple (voir figure 1.6).

Entre deux configurations il existe au plus six chemins de Dubins qui sont

- de type CCC réunissant les deux chemins de types LR_uL et RL_uR où u représente la longueur de l'arc intermédiaire, vérifiant $u > \pi$, ou
- de type CSC réunissant les quatre chemins de types LSL , LSR , RSL et LSL .

Rappelons que ces résultats, montrés par Dubins en 1957 [Dub57], ont été re-démontrés plus récemment et plus directement par Boissonnat et coll.

³. Un arc de cercle parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre est parcouru en tournant à droite. La notation R et L correspond aux initiales de right et left.

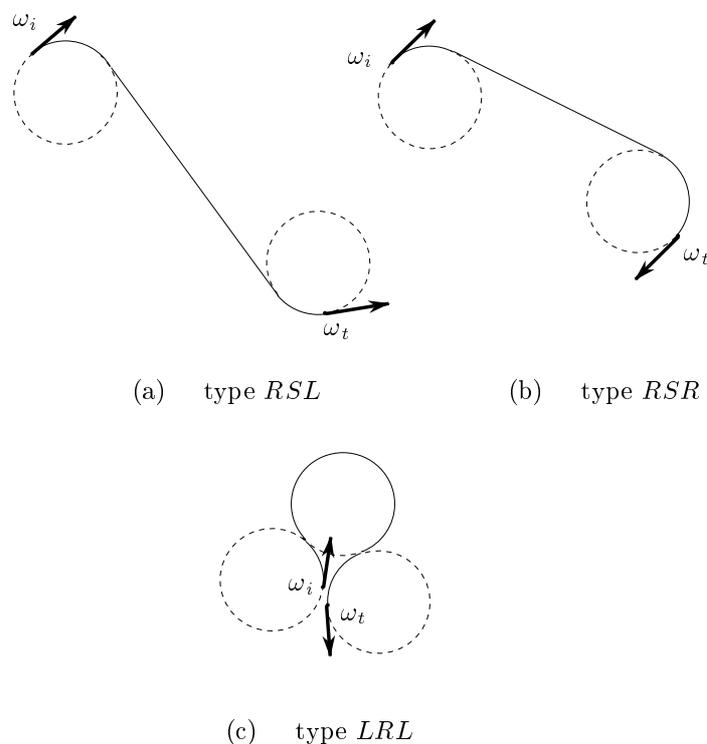


FIG. 1.6 – Exemples de plus courts chemins de Dubins

[BCL94b] et par Sussmann et Tang [ST91] en utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin [PBG74] dans le cadre de la théorie de la commande optimale. Rappelons également que ces travaux ont été complétés par X-N. Bui, P. Souères, J-D. Boissonnat et J-P. Laumond [BSBL94], qui ont donné une caractérisation complète du plus court chemin entre deux configurations : pour une configuration initiale donnée, une partition de l'espace des configurations est calculée de telle sorte que le type de la trajectoire optimale soit invariant pour toute configuration finale située dans une région donnée de la partition.

1.2.2 Plus courts chemins de Reeds et Shepp

Pour le robot de Reeds et Shepp, les trajectoires optimales présentent des points de rebroussement où le robot passe de la marche avant à la marche arrière. Un plus court chemin pour le robot de Reeds et Shepp vérifie que la vitesse angulaire du robot prend des valeurs extrémales ou nulles. En se référant au système (1.2), la loi de commande (u_1, u_2) est à valeurs dans $\{-1, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$. De plus, Reeds et Shepp ont pu montrer un résultat

similaire à celui de Dubins, à savoir qu'en l'absence d'obstacle, il existe un plus court chemin joignant deux configurations. Ce plus court chemin est constitué d'au plus cinq arcs, qui sont des arcs de cercle unitaire ou des segments de droite, et contient au plus deux points de rebroussement. Ceux-ci sont notés par le signe "|" dans le mot représentant le type d'un chemin. Plus précisément, ce plus court chemin est d'un type appartenant à l'une des neuf familles suivantes

- CSC
- $C|C|C$
- $CC|C$ ou $C|CC$
- $CC_u|C_uC$ ou $C|C_uC_u|C$ avec $u < \pi/2$
- $C|C_{\frac{\pi}{2}}SC$ ou $CSC_{\frac{\pi}{2}}C$
- $C|C_{\frac{\pi}{2}}SC_{\frac{\pi}{2}}|C$

Les types de trajectoires sont toutes les combinaisons possibles avec les arcs R et L , sachant que l'on ne peut avoir ni $R|L$ ni $L|R$.

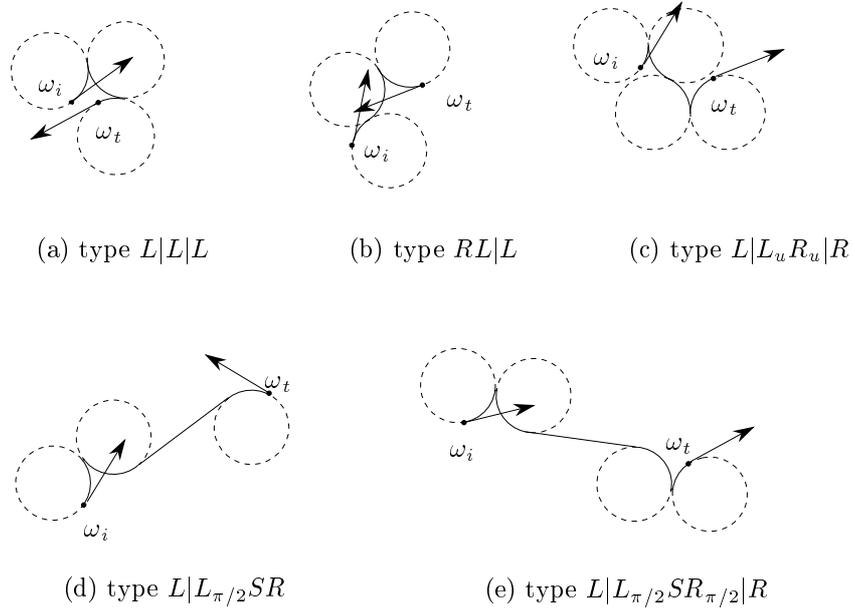


FIG. 1.7 – Exemples de plus courts chemins de Reeds et Shepp

Ces résultats, montrés par Reeds et Shepp en 1990 [RS90], ont également été re-démontrés dans le cadre de la théorie de la commande optimale

par Boissonnat et coll. et par Sussmann et Tang dans les articles précédemment cités [BCL94b, ST91]. Notons que, dans le cadre de la théorie de la commande optimale, les études des plus courts chemins pour le système de Reeds et Shepp et pour le robot de type voiture sont équivalentes. En effet, pour montrer l'existence d'une commande optimale en temps, le domaine de commande (voir figure 1.2) doit être convexe. Il s'ensuit que pour caractériser les plus courts chemins pour le système de Reeds et Shepp, comme pour un robot de type voiture, on étudie en réalité les trajectoires optimales en temps satisfaisant aux équations du système (1.2) pour (u_1, u_2) appartenant au domaine de commande convexifié $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Le Principe du Maximum de Pontryagin permet alors de montrer que, pour les trajectoires optimales en temps, la loi de commande (u_1, u_2) est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$. D'autre part, $(u_1, u_2) = (0, 0)$ correspond à l'arrêt du robot et si $u_1 = 0$ et $u_2 \neq 0$ (sur un intervalle de temps non nul) la trajectoire correspondante du robot est une rotation sur place, ce qui est interdit aussi bien pour le robot de Reeds et Shepp que pour le robot de type voiture. On obtient ainsi que, pour ces deux systèmes, la loi de commande (u_1, u_2) pour des trajectoires optimales en temps est à valeurs dans $\{-1, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$. Les trajectoires optimales en temps étant parcourues à vitesse linéaire extrême, les trajectoires optimales en temps sont donc bien des plus courts chemins et inversement.

La caractérisation des plus courts chemins a été complétée par P. Souères et J-P. Laumond [SL92], qui ont d'une part raffiné les bornes nécessaires sur la longueur des arcs de cercle (par exemple un chemin de type $C_u|C_v|C_w$ est optimal seulement si $u + v + w \leq \pi$) et d'autre part donné une caractérisation complète du plus court chemin entre deux configurations : pour une configuration initiale donnée, une partition de l'espace des configurations est calculée de telle sorte que le type de la trajectoire optimale soit invariant pour toute configuration finale située dans une région donnée de la partition. Citons également les travaux effectués par G. Desaulniers et F. Soumis qui présentent dans [SL92] une partition similaire mais moins fine de l'espace des configurations : à chaque cellule de la partition sont associés au plus deux types de chemins tels que le plus court chemin entre la configuration initiale et une configuration de la cellule soit de l'un de ces types. Notons que G. Desaulniers et F. Soumis ont implanté un algorithme de calcul d'un plus court chemin de Reeds et Shepp sur la base de leur partition.

1.2.3 Plus courts chemins C^2 avec une borne sur la dérivée de la courbure

Dans le cadre des études du plus court chemin entre deux configurations en l'absence d'obstacle, il est intéressant de citer les travaux effectués sur

l'étude des systèmes satisfaisant à une contrainte sur la dérivée de la courbure. Dans le modèle de Dubins, la courbure n'a pas à être continue au cours d'un déplacement, il était donc naturel d'étudier les courbes de longueur minimale joignant deux configurations et satisfaisant au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \dot{\theta} = \kappa \\ \dot{\kappa} = u \end{cases}$$

où u est borné : $u \in [-B, B]$. Notons que les plus courts chemins sont des trajectoires optimales en temps et réciproquement car la vitesse linéaire est constante. Une configuration est, ici, la donnée d'une position, de sa tangente et de sa courbure, soit $(x, y, \theta, \dot{\theta})$.

Pour ce système, les courbes joignant deux configurations sont donc partout C^2 et C^3 sur tout morceau où la loi de commande u est continue. Les résultats concernant le plus court chemin joignant deux configurations sont assez étonnants : le Principe du Maximum de Pontryagin permet de montrer que les trajectoires optimales sont constituées de segments de droite et d'arcs de clothoïde (c'est-à-dire des arcs pour lesquels la dérivée de la courbure est constante et non nulle en tout point). J-D. Boissonnat, A. Cérézo et J. Leblond ont montré dans [BCL94a] qu'un plus court chemin est tel que : soit il ne contient pas de segment de droite, soit il contient une infinité d'arcs de clothoïde. Précisément, à la jonction d'un segment de droite et d'une clothoïde, il y a un point d'accumulation de points de commutation de la loi de commande u , c'est-à-dire de points où la loi de commande u passe de la valeur B à la valeur $-B$ ou réciproquement. De plus, V. Kostov et E. Kostova ont montré [KDK] qu'un plus court chemin joignant des configurations initiales et terminales suffisamment éloignées contient un segment de droite et donc contient un nombre infini d'arcs de clothoïde. En d'autres termes, le nombre d'arcs C^3 constituant un plus court chemin n'est pas borné.

V. Kostov et E. Kostova ont également montré dans [KDK94] comment construire un chemin de longueur sous-optimale entre deux configurations. Sous-optimale signifie que la longueur de la trajectoire n'excède pas la longueur optimale plus une constante qui dépend de la borne B sur la dérivée de la courbure. Dans [KDK93], les auteurs présentent des résultats similaires lorsque le robot est autorisé à faire des manœuvres, c'est-à-dire des marches arrière.

Remarquons qu'il est naturel de borner également la courbure κ des trajectoires étudiées. Dans ce cas, les trajectoires optimales sont constituées de segments de droites, d'arcs de clothoïde mais également d'arcs de cercle

de rayon minimal. Cela étant, la pathologie mentionnée précédemment reste présente car la concaténation d'un segment de droite et d'un arc de cercle n'est pas C^2 et donc, si un plus court chemin contient un segment de droite, il est constitué d'une infinité d'arcs de clothoïde au voisinage des extrémités de ce segment de droite.

1.2.4 Plus courts chemins de courbure bornée sur une variété

De récents travaux ont été effectués par R. Pérez [Pér95] sur l'étude des plus courts chemins de courbure bornée sur une variété riemannienne de dimension n et de courbure constante ε . Un chemin de courbure bornée est défini comme précédemment : c'est une courbe différentiable dont la dérivée est une fonction 1-lipschitzienne lorsque la courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne. Dans le cadre de la théorie du contrôle optimal et à l'aide du Principe du Maximum de Pontryagin, l'auteur montre que les plus courts chemins sont constitués d'arcs de géodésique et d'arcs de courbe C^2 de courbure égale à 1 en tout point. Pérez présente pour $n = 2$ et $\varepsilon \neq 0$ des résultats similaires à ceux de Dubins. Dans \mathbb{R}^3 (c'est-à-dire pour $n = 3$ et $\varepsilon = 0$), R. Pérez montre que les courbes optimales de courbure égale à 1 sont soit des arcs de cercle unitaires, soit des hélices incluses dans des surfaces hélicoïdales. H. J. Sussmann traite également dans [Sus95] le problème dans \mathbb{R}^3 et montre de plus qu'une trajectoire optimale est soit un arc d'hélice, soit une trajectoire de Dubins de type *CSC* ou *CCC*.

1.3 Plus court chemin en présence d'obstacles

Soit Ω un ensemble fermé d'obstacles de \mathbb{R}^2 . Nous étudions les trajectoires des robots dans l'espace libre fermé \mathcal{L} égal à l'adhérence de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Nous considérons l'espace libre \mathcal{L} fermé car cela est nécessaire pour assurer l'existence d'un plus court chemin entre deux configurations. Nous avons considéré Ω fermé pour nous permettre d'étudier les points de contacts éventuels entre une trajectoire et les obstacles Ω . Rappelons que dans la suite les robots sont supposés ponctuels.

1.3.1 Existence d'un plus court chemin pour le système de Dubins

L'existence d'un plus court chemin, en présence d'obstacles, pour le robot de Dubins n'a rien d'évident. Pour s'en convaincre, il suffit de se reporter à la

section suivante où l'on montre que pour certaine paires de configurations, il n'existe pas de plus court chemin pour le robot de Reeds et Shepp, joignant ces configurations. Nous montrons ici l'existence, dans \mathcal{L} , d'un plus court chemin pour le robot de Dubins entre deux configurations, dès lors qu'il existe une trajectoire reliant la configuration initiale à la configuration terminale. Ce résultat découle (voir [JC89, Jac90]) de la preuve de la proposition 1 de Dubins [Dub57]. En effet, Dubins montre, à l'aide du théorème d'Ascoli, qu'il existe une suite de chemins convergeant uniformément vers une courbe C^1 de longueur minimale et satisfaisant la contrainte sur la courbure. Tout chemin de la suite étant situé dans l'espace libre fermé \mathcal{L} , la suite de chemins converge vers une trajectoire de \mathcal{L} .

Il est cependant intéressant de montrer ce résultat dans le cadre de la théorie du contrôle optimal. Cela aide à comprendre pourquoi ce résultat devient faux pour le système de Reeds et Shepp.

Pour le système de Dubins, le problème de l'existence d'une trajectoire optimale en longueur est équivalente au problème de l'existence d'une trajectoire optimale en temps car le robot avance à vitesse constante. Énonçons le problème de l'existence d'une trajectoire optimale en temps dans le cadre formel de la théorie de la commande optimale.

Soient M une variété C^∞ de dimension n , X une fonction de \mathbb{R} dans M appelée trajectoire, u une fonction de \mathbb{R} dans $U \subset \mathbb{R}^m$ appelée loi de commande. Nous voulons montrer l'existence d'une trajectoire $X(t)$ et d'une loi de commande $u(t)$ solution du système d'équations différentielles $dX/dt = f(X(t), u(t))$ et satisfaisant les conditions aux bornes $X(t_0) = X_0$ et $X(t_1) = X_1$ minimisant la fonctionnelle $J(X_0, X_1, t_0, t_1) = t_1 - t_0$. Autrement dit, pour X_0, X_1, t_0 fixés nous voulons minimiser t_1 tel qu'il existe une trajectoire et une loi de commande, solutions du système d'équations différentielles et satisfaisant les conditions aux bornes.

Énonçons une version simplifiée, suffisante pour notre problème, d'un théorème de Fillipov [Ces83, Theorem.9.2.i].

Théorème 1.1 *Soient A un sous-ensemble compact de M , X_0 et X_1 deux points de A , $t_0 \in \mathbb{R}$ et I un intervalle fermé de \mathbb{R} . Sous les hypothèses suivantes, il existe $t_1 \in I$, une trajectoire $X(t)$ dans A et une loi de commande $u(t)$ à valeurs dans U solutions du système d'équations différentielles $dX/dt = f(X(t), u(t))$, satisfaisant les conditions aux bornes $X(t_0) = X_0$ et $X(t_1) = X_1$ et tels que $J(X_0, X_1, t_0, t_1)$ soit le minimum global de la fonction J sur $\{X_0\} \times \{X_1\} \times \{t_0\} \times I$.*

1. U est un compact de \mathbb{R}^m
2. J est continue sur $\{X_0\} \times \{X_1\} \times \{t_0\} \times I$

3. $f(X(t), u(t))$ est continue en X , t et u
4. $f(X(t), U)$ est convexe pour tout X et pour tout t
5. il existe $t_1 \in I$, une trajectoire $X(t)$ dans A et une loi de commande $u(t)$ à valeurs dans U , solutions du système d'équations différentielles $dX/dt = f(X(t), u(t))$ et satisfaisant les conditions aux bornes $X(t_0) = X_0$ et $X(t_1) = X_1$.

Pour le système de Dubins, nous avons $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$, $U = [-1, 1]$, et le système d'équations différentielles est

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) &= \sin \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) &= u(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Soient X_0 et X_1 deux configurations dans M telles qu'il existe, pour le robot de Dubins, une trajectoire joignant X_0 à X_1 dans $\mathcal{L} \times S^1$. Par hypothèse, nous avons l'existence de $t_1 \in \mathbb{R}$, d'une trajectoire $X(t)$ dans $\mathcal{L} \times S^1$ et d'une loi de commande $u(t)$ à valeurs dans U qui sont solutions du système d'équations différentielles (1.4) et satisfaisant les conditions aux bornes $X(0) = X_0$ et $X(t_1) = X_1$. S'il existe une trajectoire de X_0 à X_1 de longueur minimale, elle est évidemment de longueur inférieure ou égale à t_1 . Soit B la boule fermée de \mathbb{R}^2 de rayon t_1 et centrée en $p(X_0)$ projection orthogonale de X_0 sur \mathbb{R}^2 . Nous définissons A comme le compact $(B \setminus \Omega) \times S^1$. Donc, s'il existe une trajectoire de X_0 à X_1 de longueur minimale, elle est contenue dans A . Dès lors, toutes les conditions du théorème 1.1 sont satisfaites. En effet, $U = [-1, 1]$ est compact, $J(X_0, X_1, t_0, t_1) = t_1 - t_0$ est continue sur $\{X_0\} \times \{X_1\} \times \{t_0\} \times \mathbb{R}$, $f(X(t), u(t)) = f(x(t), y(t), \theta(t), u(t)) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t), u(t))$ est continue en X , t et u , $f(X(t), U) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t), U)$ est convexe pour tout $X = (x, y, \theta)$ et pour tout t , enfin, le point 5 du théorème 1.1 est vérifié par hypothèse. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Etant donné des configurations initiale et terminale ω_i et ω_t , il existe, dans l'espace libre \mathcal{L} , un plus court chemin pour le système de Dubins joignant ω_i à ω_t dès lors qu'il existe une trajectoire pour le système de Dubins joignant ω_i à ω_t dans \mathcal{L} .*

1.3.2 Non existence d'un plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp

Rappelons le résultat mentionné dans la section 1.1.1 : le système de Reeds et Shepp étant localement commandable en temps, il est commandable en

présence d'obstacles dès lors que l'espace libre \mathcal{L} est égal à l'adhérence de son intérieur. Nous supposons dans la suite de cette section que \mathcal{L} vérifie cette propriété.

Pour le système de Reeds et Shepp (système 1.2) la loi de commande (u_1, u_2) est à valeurs dans le domaine de commande $\{-1, 1\} \times [-1, 1]$. Ce domaine n'est pas convexe et l'hypothèse du théorème 1.1 nécessitant que $f(X(t), U)$ soit convexe pour tout X et t n'est pas vérifiée. Une méthode classique pour assurer l'existence d'une trajectoire optimale consiste à convexifier le domaine de commande. Le système (1.2) où la loi de commande (u_1, u_2) est à valeurs dans le domaine de commande convexe $[-1, 1] \times [-1, 1]$ est appelé système de Reeds et Shepp convexifié. Le théorème 1.1 est alors applicable pour le système de Reeds et Shepp convexifié et prouve l'existence d'une trajectoire optimale en temps entre deux configurations s'il existe une trajectoire joignant ces configurations. Remarquons que, pour le système de Reeds et Shepp convexifié, le robot peut tourner sur place et que la longueur de la trajectoire n'est plus proportionnelle au temps de parcours car la vitesse du robot n'est plus fixée. Un plus court chemin n'est donc plus forcément une trajectoire optimale en temps. Cependant, le Principe du Maximum de Pontryagin nous montre que pour le système de Reeds et Shepp convexifié, une trajectoire est optimale en temps seulement si les lois de commande u_1 et u_2 sont à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. Donc, en considérant qu'une rotation sur place d'angle θ a une longueur virtuelle θ , la longueur d'une trajectoire est égale au temps de parcours de la trajectoire. Pour ce modèle, le théorème 1.1 nous prouve donc l'existence d'un plus court chemin entre deux configurations dès lors qu'il existe un chemin les reliant. De plus, remarquons qu'il existe toujours un chemin joignant deux configurations d'une même composante connexe de l'espace libre dès lors que le robot peut tourner sur place.

Pour en revenir à l'existence d'un plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp, G. Desaulniers montra dans [Des94] qu'il peut ne pas exister de plus court chemin entre deux configurations. Considérons un point orienté ω_i du plan situé sur le bord d'un obstacle et orienté perpendiculairement au bord vers l'extérieur (voir figure 1.8). Soit ω_t une configuration telle qu'il existe, de ω_i à ω_t , une trajectoire pour le système convexifié de Reeds et Shepp composée d'une rotation sur place d'angle positif $u < \pi/2$ suivie d'une rotation sur un arc de cercle unitaire d'angle positif v tel que $u + v < \pi$ (ω_t peut clairement exister, voir figure 1.8). Desaulniers montre alors qu'il n'existe pas de plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp de ω_i à ω_t . L'idée de la preuve est la suivante : la longueur du plus court chemin entre deux configurations pour le système de Reeds et Shepp est au moins égale à l'angle entre les deux directions de ω_i et de ω_t , soit ici $u + v$. D'autre part, dès lors que le robot s'éloigne des obstacles, il peut simuler une rotation

sur place par une trajectoire de type $C|C|\dots|C$ dans une boule de rayon ε . Donc, pour tout ε , il existe une trajectoire de type $SC|C|\dots|CSC$ de longueur $u + v + \Theta(\varepsilon)$ joignant ω_i à ω_t , pour le système de Reeds et Shepp (voir figure 1.8). Il faut encore montrer qu'il n'existe pas de trajectoire de longueur égale à $u + v$ pour le système de Reeds et Shepp, ce qui est fait dans [Des94].

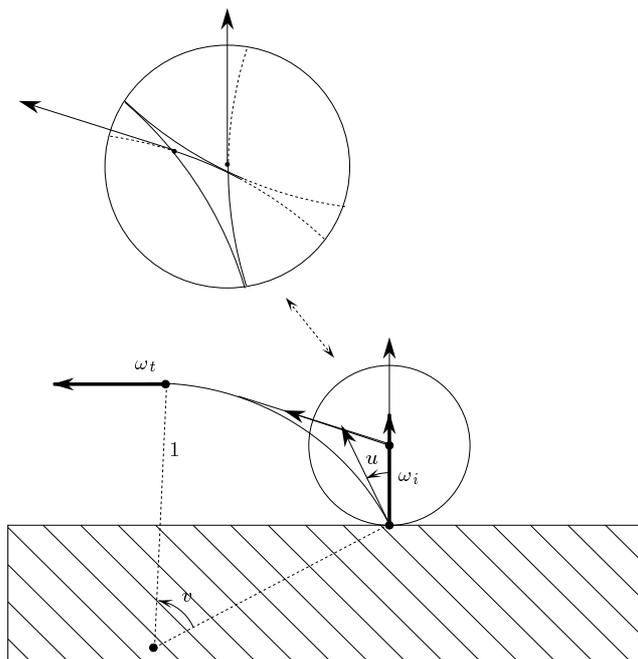


FIG. 1.8 – Configurations pour lesquelles il n'existe pas de plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp

Dans cette démonstration de la non existence d'un plus court chemin de Reeds et Shepp entre deux configurations il est nécessaire que le point de départ soit situé sur le bord d'un obstacle. En effet, dans le cas contraire, le robot de Reeds et Shepp peut simuler une rotation sur place au point de départ par une trajectoire de type $C|C|\dots|C|C$ incluse dans une boule de rayon ε où ε est la distance du point de départ aux obstacles. Au vu de cette remarque il est naturel de se poser la question suivante : s'il existe un chemin pour le système de Reeds et Shepp joignant dans \mathcal{L} deux configurations données, existe-t-il un plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp entre ces configurations? La réponse à cette question est négative; en effet, considérons une configuration initiale ω_i et une configuration terminale ω_t telles que le plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp convexifié soit

une trajectoire constituée d'un arc de cercle unitaire d'angle positif u suivi d'une rotation sur place d'angle positif v en un sommet d'un obstacle, suivi d'un arc de cercle unitaire d'angle positif w comme le montre la figure 1.9. Pour une telle paire de configurations, les arguments de la démonstration de G. Desaulniers s'appliquent pour montrer la non-existence d'un plus court chemin de Reeds et Shepp.

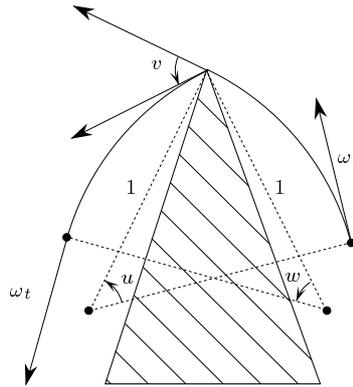


FIG. 1.9 – Configurations pour lesquelles il n'existe pas de plus court chemin pour le système de Reeds et Shepp

Cette remarque permet de mieux comprendre qu'il est crucial dans la démonstration de G. Desaulniers de supposer que le point de départ de la trajectoire appartient à l'un des cercles unitaires tangent à la configuration terminale.

Notons enfin pourquoi il n'est pas possible d'appliquer pour le système de Reeds et Shepp la démonstration de Dubins prouvant l'existence d'une suite de chemin convergeant vers une courbe de longueur minimale et satisfaisant la contrainte sur la courbure : une trajectoire de type $C|C| \dots |C|C$ optimale pour le système de Reeds et Shepp⁴ peut converger vers une trajectoire comportant une rotation sur place et donc ne satisfaisant pas les contraintes du système de Reeds et Shepp.

1.3.3 Caractérisation des plus courts chemins de courbure bornée

Revenons au système de Dubins et caractérisons les trajectoires optimales en présence d'obstacles. Premièrement, nous énonçons un résultat général

⁴ Les trajectoires de type $C|C| \dots |C|C$ ne font pas partie des trajectoires de Reeds et Shepp (voir section 1.2.2) car, en l'absence d'obstacle, il existe une trajectoire de type $C|C|C$ de même longueur.

quant à la nature des obstacles :

Théorème 1.3 *Une trajectoire \mathcal{T} de longueur minimale satisfaisant aux équations du système de Dubins et joignant deux configurations (P_i, θ_i) et (P_t, θ_t) vérifie que tout arc de \mathcal{T} inclus dans l'intérieur de l'espace libre \mathcal{L} (à l'exception possible de ses extrémités) est une trajectoire de Dubins c'est-à-dire du type CSC ou CCC.*

Démonstration : Ce résultat est une conséquence du Principe du Maximum de Pontryagin. Le théorème 25 de [PBG74] montre qu'une trajectoire de longueur minimale incluse dans l'intérieur de l'espace libre \mathcal{L} (à l'exception possible des extrémités) satisfait au Principe du Maximum de Pontryagin. La caractérisation des trajectoires optimales, grâce au Principe du Maximum de Pontryagin est effectuée dans [BCL94b] et [ST91].

Notons que les démonstrations effectuées par Dubins dans [Dub57] pour caractériser les plus courts chemins en l'absence d'obstacles s'appliquent en présence d'obstacles (voir [Jac90]). \square

Lorsque les obstacles sont polygonaux, un résultat plus fort est connu :

Théorème 1.4 *Soit Ω un ensemble d'obstacles polygonaux. Dans \mathcal{L} , une trajectoire de longueur minimale joignant deux configurations et satisfaisant aux équations du système de Dubins est constituée d'un nombre fini de morceaux qui sont, soit des arcs du bord des obstacles, soit des chemins de Dubins (du type CSC ou CCC) entre deux points du bord des obstacles, les points initial et terminal de la trajectoire étant considérés comme des obstacles.*

Démonstration : Ce résultat est montré par Jacobs et Canny dans [JC89]. L'idée de la preuve est de considérer un morceau \mathcal{P} d'une trajectoire optimale joignant deux points du bord des obstacles et de montrer que la longueur de \mathcal{P} est minorée par une constante strictement positive. Il s'ensuit qu'une trajectoire optimale est C^1 par morceaux et donc constituée d'un nombre fini de morceaux car la trajectoire est de longueur finie. Le théorème découle alors du théorème 1.3.

Considérons un morceau \mathcal{P} d'une trajectoire optimale \mathcal{T} , tel que chaque extrémité de \mathcal{P} soit sur le bord de Ω ou soit une extrémité de \mathcal{T} et tel que \mathcal{P} soit inclus dans l'intérieur de l'espace libre (excepté à ses extrémités). Notons $\omega_1 = (P_1, \theta_1)$ et $\omega_2 = (P_2, \theta_2)$ les configurations initiale et terminale de \mathcal{P} . On suppose qu'aucun obstacle n'est réduit à un segment.

Si P_1 et P_2 appartiennent à deux arêtes distinctes des obstacles polygonaux et si ces arêtes ne sont pas deux arêtes adjacentes d'un même obstacle, la longueur de \mathcal{P} est minorée par la plus petite distance euclidienne entre les obstacles ou par le minimum des longueurs des arêtes des obstacles.

Considérons le cas où P_1 et P_2 appartiennent à deux arêtes adjacentes (sommets exclus) d'un même obstacle. La longueur de \mathcal{P} est minorée par la différence $|\theta_1 - \theta_2|$ laquelle est minorée par le minorant des angles aux sommets des obstacles.

Si P_1 et P_2 appartiennent à une même arête (sommets exclus), la différence $|\theta_1 - \theta_2|$ est soit nulle soit égale à π . Si $|\theta_1 - \theta_2| = \pi$, la longueur de \mathcal{P} est minorée par π . Considérons le cas $|\theta_1 - \theta_2| = 0$: par hypothèse \mathcal{P} est inclus dans l'intérieur de l'espace libre (à l'exception des extrémités) donc la ligne droite n'est pas un chemin joignant ω_1 à ω_2 . La configuration ω_1 est donc "devant" ω_2 comme le montre la figure 1.10. La longueur de \mathcal{P} est donc minorée par 2π .

Reste à considérer le cas où P_1 et P_2 appartiennent à une même arête et où P_1 ou P_2 est un sommet de l'arête. Ce cas n'est pas traité dans [JC89] et il n'est pas possible de minorer par une constante strictement positive la longueur de la trajectoire entre P_1 et P_2 . En effet, la longueur de la trajectoire entre P_1 et P_2 peut être arbitrairement petite: une trajectoire de type CC peut être de longueur arbitrairement petite si les orientations en P_1 et P_2 sont arbitrairement proches. Cependant, si P_1 et P_2 sont suffisamment proches alors il est possible de minorer la longueur de la trajectoire par π . Nous présentons cette démonstration dans un cadre plus général dans la preuve du théorème 1.5. \square

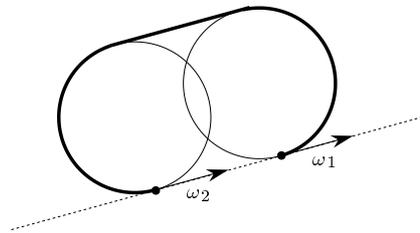


FIG. 1.10 – Trajectoire de longueur supérieure à 2π .

Nous présentons maintenant un résultat, non publié, plus général que le théorème précédent :

Théorème 1.5 *Soit Ω un ensemble d'obstacles tel que le bord des obstacles soit constitué d'un nombre fini d'arcs C^2 tels que la courbure en tout point d'un arc (excepté aux extrémités) appartienne, soit à $\{0\}$, soit à $]0, 1]$, soit à $]1, +\infty[$.*

Une trajectoire de longueur minimale joignant, dans \mathcal{L} , deux configurations ω_i et ω_t et satisfaisant aux équations du système de Dubins (1.3) est constituée d'un nombre fini de morceaux qui sont, soit des arcs du bord des obstacles, soit des chemins de Dubins (du type CSC ou CCC) entre deux points du bord des obstacles, les points initial et final de la trajectoire étant considérés comme des obstacles.

Démonstration : Notons \mathcal{T} une trajectoire optimale joignant ω_i et ω_t dans \mathcal{L} et satisfaisant aux équations du système de Dubins. Par hypothèse, le bord des obstacles est constitué d'un nombre fini d'arcs C^2 de courbure soit nulle, soit inférieure ou égale à 1, soit strictement supérieure à 1, ceci en tout point distinct des extrémités. Ces arcs sont appelés les arêtes des obstacles et les extrémités de ces arcs sont appelés les sommets. Un sommet est dit *pointu* si le bord de l'obstacle n'est pas C^1 au voisinage de ce sommet.

On appelle *point de jonction* un point sur le bord de Ω qui est une extrémité d'un morceau de \mathcal{T} inclus dans l'intérieur de \mathcal{L} . Nous voulons montrer que \mathcal{T} est constitué d'un nombre fini de morceaux qui sont soit des chemins de Dubins, soit des arcs du bord de Ω . D'après le théorème 1.3, cela revient à montrer qu'il existe un nombre fini de points de jonction sur \mathcal{T} . De plus, remarquons que d'après le théorème 1.3, un morceau de \mathcal{T} entre deux points de jonction consécutifs le long de \mathcal{T} est soit un chemin de Dubins, soit une portion du bord de Ω .

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre infini de points de jonction. \mathcal{T} étant de longueur finie, il existe sur \mathcal{T} un point d'accumulation A de points de jonction. Nous supposons de plus, et ceci sans perte de généralité au vu de la démonstration, que l'ensemble des points de jonction au voisinage de A est dénombrable. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de jonction convergeant vers A telle que A_n et A_{n+1} sont deux points de jonction consécutifs de \mathcal{T} et telle que A_n précède A_{n+1} ($\forall n \in \mathbb{N}$) le long de \mathcal{T} . Notons \mathcal{P}_n le morceau de \mathcal{T} entre A_n et A_{n+1} . Notons de plus

$\omega_n = (A_n, \theta_n)$ la configuration initiale de \mathcal{P}_n et $\omega = (A, \theta)$ le point orienté de \mathcal{T} en A .

Nous étudions séparément plusieurs cas suivant la nature de l'obstacle en A :

• **Cas 1 :** Le bord de l'obstacle est C^1 au voisinage de A , c'est-à-dire que A n'est pas un sommet pointu des obstacles (A n'est pas forcément un sommet des obstacles). On note \mathcal{A} le bord de l'obstacle au voisinage de A . Dans ce cas, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que toutes les configurations ω_n ($n > N$) soient orientées dans le même sens le long de \mathcal{A} et tel que la suite $(A_n)_{n > N}$ soit ordonnée le long de \mathcal{A} (voir figure 1.11). En effet, premièrement, si $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ tel que les directions de ω_n et ω_{n+1} soient inversées le long de \mathcal{A} , la différence $|\theta_{n+1} - \theta_n|$ approche π (pour n suffisamment grand) et donc la longueur de \mathcal{P}_n est minorée par $\pi/2$; cela contredit l'hypothèse que A est un point d'accumulation de points de jonction ou que la trajectoire \mathcal{T} est de longueur finie. Deuxièmement, si $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ tel que A_n est situé entre A_{n+1} et A sur \mathcal{A} , la longueur de \mathcal{P}_n est de l'ordre de 2π (voir figure 1.10); cela contredit également l'hypothèse que A est un point d'accumulation de points de jonction ou que la trajectoire \mathcal{T} est de longueur finie.

Donc, pour N suffisamment grand, tous les points A_n ($n > N$) sont situés sur \mathcal{A} du même côté par rapport à A , donc appartiennent à une même arête \mathcal{A}_1 des obstacles.

Considérons le cas où \mathcal{A}_1 est une arête de courbure inférieure à 1 en tout point (voir figure 1.11). Dans ce cas, pour n suffisamment grand, le plus court chemin de courbure bornée de ω_n à ω est soit sur le bord de l'obstacle si l'arête est convexe⁵ (figure 1.11a), soit une trajectoire de Dubins de type LSL ou RSR si l'arête est concave (figure 1.11b). En effet, si l'arête est convexe, le plus court chemin de ω_n à ω est le plus court chemin euclidien de A_n à A et, si l'arête est concave, le plus court chemin, en l'absence d'obstacle, de ω_n à ω est de type LSL ou RSR et ce plus court chemin évite les obstacles pour n suffisamment grand. Nous avons donc une contradiction soit avec le fait que les points $(A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)$ sont des points de jonction, soit avec le fait que \mathcal{T} est de longueur minimale.

5. Une arête est dite convexe (resp. concave) si en tout point de l'arête (excepté aux extrémités), l'obstacle supportant cette arête est convexe (resp. concave) dans un voisinage de ce point.

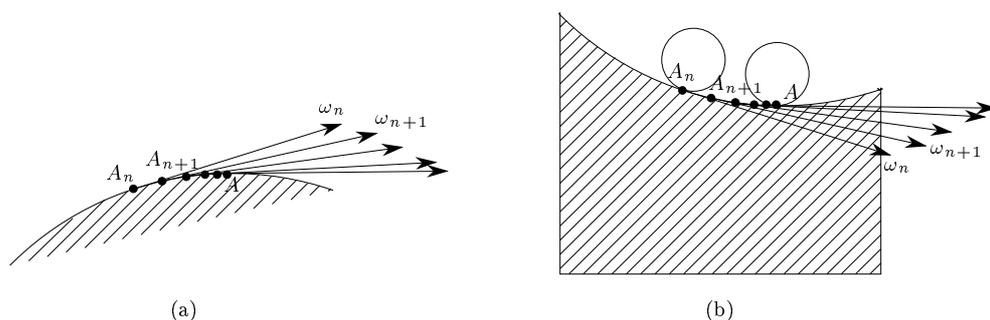


FIG. 1.11 – Pour le cas 1 de la preuve du théorème 1.5

Considérons, à présent, le cas où \mathcal{A}_1 est une arête de courbure supérieure à 1 en tout point. Considérons A_n un point de jonction de la trajectoire dans un voisinage de A . Dans un voisinage suffisamment petit de A_n , l'arête \mathcal{A}_1 est incluse dans la région grisée de la figure 1.12. Or, l'étude effectuée par X-N. Bui [Bui94] montre que, en l'absence d'obstacle, le plus court chemin de Dubins entre une configuration initiale et un point terminal (où l'orientation n'est pas fixée) situé dans cette région grisée est de longueur supérieure à π . Donc, la longueur de \mathcal{P}_n est supérieure à π . Cela contredit l'hypothèse que A est un point d'accumulation de points de jonction ou que la trajectoire \mathcal{T} est de longueur finie.

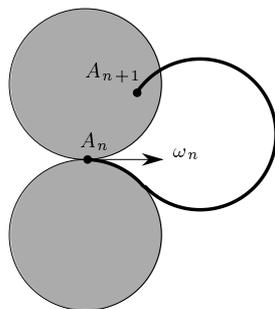


FIG. 1.12 – Pour le cas 1 de la preuve du théorème 1.5

• **Cas 2 :** Le bord de l'obstacle n'est pas C^1 dans tout voisinage de A (A est un sommet pointu des obstacles). Notons \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 les deux arêtes supportant A .

Comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème 1.4, lorsque qu'un point de jonction A_n est égal à A , la longueur de \mathcal{P}_n peut

être arbitrairement petite. Nous évitons cet écueil en montrant que pour n suffisamment grand A_n est distinct de A : supposons par l'absurde qu'il existe une infinité de points de jonction égaux à A . Le plus court chemin, en l'absence d'obstacle, entre deux configurations localisées au même point est de type CCC et sa longueur est minorée par π . Il s'ensuit que la longueur de la trajectoire \mathcal{T} entre deux points de jonction localisés en A est supérieure à π et donc que la longueur de \mathcal{T} est infinie s'il existe une infinité de points de jonction égaux à A . La longueur de \mathcal{T} étant finie, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N \ A_n \neq A$.

A présent nous pouvons extraire de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers A telle que A'_n appartienne à l'intérieur relatif de l'arête \mathcal{A}_1 ou de \mathcal{A}_2 . Considérant la suite $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la preuve présentée dans le cas 1 s'applique et nous avons une contradiction avec l'hypothèse selon laquelle A est un point d'accumulation de points de jonction ou que la trajectoire \mathcal{T} est de longueur finie. Cela conclut la démonstration. \square

Remarque 1.6 Le théorème 1.5 devient faux si l'on ne considère plus l'hypothèse selon laquelle le bord des obstacles est constitué d'un nombre fini d'arcs C^2 de courbure soit inférieure ou égale à 1, soit strictement supérieure à 1, ceci en tout point. En effet, supposons qu'un morceau du bord d'un obstacle soit défini par la courbe d'équation $y = x \sin(1/\sqrt{x})$, $x \in [0, 1]$, alors le plus court chemin de courbure bornée joignant les configurations $(4/\pi^2, 4/\pi^2, 5\pi/4)$ et $(0, 0, 5\pi/4)$ est la ligne droite et est constitué d'un nombre infini de segments de droite joignant deux points du bord de l'obstacle (voir figure 1.13). Notons que le périmètre de l'obstacle considéré est fini.

Un plus court chemin pour le système de Dubins est donc une courbe C^1 , C^2 par morceaux et de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie. Comme réciproquement toute courbe C^1 de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie satisfait aux équations du système de Dubins (1.3), le théorème précédent peut s'énoncer pour les courbes C^1 de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie :

Théorème 1.7 *Soit Ω un ensemble d'obstacles tel que le bord des obstacles soit constitué d'un nombre fini d'arcs C^2 tels que la courbure en tout point d'un arc (excepté aux extrémités) appartienne, soit à $\{0\}$, soit à $]0, 1]$, soit à $]1, +\infty[$.*

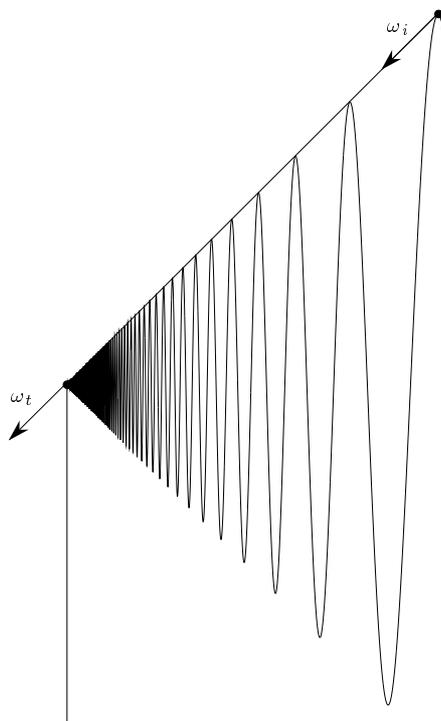


FIG. 1.13 – Trajectoire constituée d'un nombre infini d'arcs joignant deux points du bord de l'obstacle

Une courbe C^1 , de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie et joignant, dans \mathcal{L} , deux points orientés du plan, est constituée d'un nombre fini de morceaux qui sont, soit des arcs du bord des obstacles, soit des chemins de Dubins (du type CSC ou CCC) entre deux points du bord des obstacles, les points initial et final de la trajectoire étant considérés comme des obstacles.

1.3.4 Complexité d'un chemin de courbure bornée pour des obstacles polygonaux quelconques

Théorème 1.8 *La complexité d'un chemin de courbure bornée entre deux configurations n'est pas bornée en fonction de la complexité des obstacles.*

Démonstration : Ce résultat, mentionné par S. Fortune et G. Wilfong dans [FW91], découle de l'exemple de la figure 1.14 : sur cet exemple, on étudie les trajectoires de courbure bornée joignant $\omega_i = (A, \theta_i)$ et $\omega_t = (A, \theta_t)$. Une trajectoire de courbure bornée issue de $\omega_i = (A, \theta_i)$ ne peut revenir en A qu'en effectuant le tour de l'obstacle central. De plus, un chemin de (A, θ_i)

à (A, θ'_i) ne faisant qu'un seul tour autour de l'obstacle central et maximisant $(\theta'_i - \theta_i)$ est constitué de cinq arcs de cercle unitaires passant par les sommets des obstacles A, B, C, D et A comme le montre la figure 1.14. La différence $(\theta'_i - \theta_i)$ peut être majorée par une constante arbitrairement petite ε qui ne dépend que de la position relative des obstacles. Il s'ensuit que l'on peut définir des obstacles, ayant un nombre de sommets fixés, et tels que la complexité d'un chemin de courbure bornée joignant deux configurations soit arbitrairement grande. \square

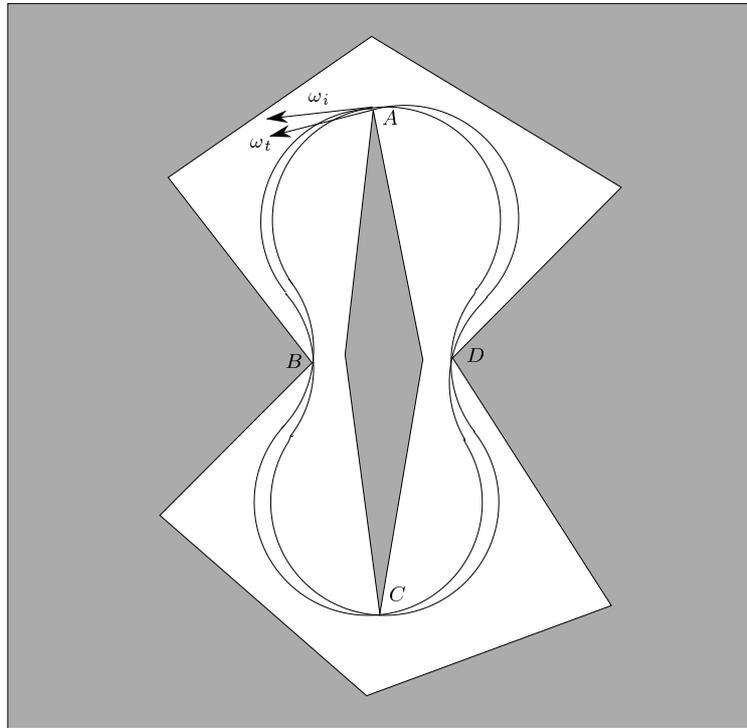


FIG. 1.14 – *Trajectoire de complexité arbitrairement grande*

1.4 Algorithmes de planification de trajectoires

Différents algorithmes de planification de trajectoires de robots non-holonomes se déplaçant en présence d'obstacles ont été implantés sur la base de la caractérisation des plus courts chemins.

Dans la suite, un algorithme est dit *exact* s'il calcule un chemin de longueur minimale dès lors qu'il existe un chemin joignant les configurations initiale et terminale. Un algorithme qui n'est pas exact mais qui calcule une approximation d'un plus court chemin est dit *approché*. Plusieurs types d'algorithmes approchés peuvent être distingués : l'algorithme peut calculer une approximation d'un chemin de longueur minimale; il peut calculer une approximation d'un *chemin de longueur localement minimale*, c'est-à-dire un chemin qui est rallongé par toute déformation dans un voisinage de la trajectoire; ou encore, l'algorithme peut calculer une approximation d'un *chemin robuste* de longueur minimale; un chemin robuste est, comme nous le verrons ultérieurement plus précisément, un chemin tel que pour toute perturbation locale, suffisamment petite en position et en orientation de certains points de la trajectoire, il est possible de déformer localement la trajectoire dans \mathcal{L} . Un algorithme est dit *complet* s'il assure de calculer une trajectoire dès lors qu'il en existe une.

Plusieurs catégories d'algorithmes peuvent être distinguées : d'une part, il y a les algorithmes basés sur une discrétisation de l'espace des configurations ou des obstacles. Ces algorithmes sont généraux quant aux types de systèmes non-holonomes considérés. Ils ne sont pas complets mais certains assurent tout de même de calculer une trajectoire dès lors qu'il en existe une qui soit robuste. Certains sont approchés en ce sens qu'ils calculent une approximation d'un chemin robuste.

D'autre part, il y a les algorithmes utilisant un calcul de trajectoire holonome (trajectoire ne tenant pas compte des contraintes de non-holonomie) et approximant cette trajectoire par un chemin empruntable par le robot. Ces algorithmes ne sont applicables que pour des systèmes localement commandables en temps, ce qui n'est pas le cas du système de Dubins. Contrairement à la catégorie précédente d'algorithmes, ces algorithmes sont complets.

Enfin, il y a les algorithmes qui calculent des trajectoires pour des systèmes non-holonomes, basés sur des hypothèses restrictives quant à la nature des obstacles.

1.4.1 Algorithmes par discrétisation

Algorithme de Barraquand et Latombe

Barraquand et Latombe [BL89, BL93] implantèrent un planificateur de trajectoires pour le système de Reeds et Shepp basé sur une discrétisation de l'espace des configurations $\mathbb{R}^2 \times S^1$. L'algorithme proposé est, comme nous allons le voir, général quant aux types de systèmes non-holonomes considérés. Une trajectoire calculée par ce planificateur est uniquement constituée

d'arcs localement optimaux pour le système de Reeds et Shepp, c'est-à-dire de segments de droite et d'arcs de cercle de rayon minimal égal à 1.

L'espace des configurations est décomposé en rectangles de dimension trois, de même taille. Pour simplifier la présentation, ces rectangles de dimension trois seront simplement appelés des cubes. L'algorithme construit un graphe \mathcal{G} dont les nœuds sont des cubes de la décomposition et dont les arêtes sont des segments de droite de longueur δ ou des arcs de cercle de rayon unitaire de longueur δ (δ est une constante préfixée). A l'étape 0 de l'algorithme, le seul nœud du graphe est le cube contenant la configuration initiale ω_i . On calcule les six configurations atteintes par un chemin issu de ω_i et constitué d'un segment de droite de longueur δ ou d'un arc de cercle de rayon unitaire de longueur δ . Les chemins en collision avec les obstacles sont éliminés et on teste, pour chacune des configurations restantes, si le cube de la décomposition contenant la configuration est un nœud du graphe \mathcal{G} . Si ce cube n'est pas déjà un nœud du graphe, on ajoute ce nœud à \mathcal{G} et l'arête correspondante (on conserve également en mémoire la configuration associée au cube). Quand ceci est fait pour chacune des six configurations, l'étape 1 de l'algorithme est terminée. A chaque étape de l'algorithme, on réitère cette procédure pour chacune des configurations associées aux nœuds créés à l'étape précédente jusqu'à ce que, soit le cube contenant la configuration terminale soit atteint, soit toutes les configurations calculées à une étape donnée de l'algorithme appartiennent à des cubes correspondant à des nœuds déjà existants du graphe. Si le cube contenant la configuration terminale est atteint, on cherche alors dans le graphe \mathcal{G} un chemin issu de la configuration initiale et atteignant la configuration approchant la configuration terminale. Durant le calcul du graphe, il est possible d'ordonner les nœuds créés de telle façon que la trajectoire calculée à la fin minimise la longueur ou le nombre de manœuvres (le minimum est ici considéré sur l'ensemble des trajectoires calculable par l'algorithme).

Comme nous l'avons déjà dit, cet algorithme utilise peu la caractérisation des trajectoires optimales, ce qui lui confère une grande souplesse quant aux systèmes considérés. La complexité de cet algorithme est $O(r^3 \log r)$ en temps $O(r^3)$ en espace mémoire, où $O(r)$ est la taille de décomposition de l'espace des configurations sur chaque axe. Remarquons que le problème classique de ce type d'algorithmes est de choisir adroitement les valeurs de r et de δ . Notons qu'il est possible au besoin de raffiner la décomposition de l'espace des configurations au voisinage de la configuration terminale, et qu'il n'est nullement nécessaire de supposer le robot ponctuel.

Si le but est de minimiser le nombre de manœuvres, l'algorithme est dit (par les auteurs) asymptotiquement optimal car, pour des valeurs de r et de δ suffisamment petites, la trajectoire calculée minimise le nombre de

manœuvres. Similairement, si le but est de minimiser la longueur de la trajectoire, l'algorithme est asymptotiquement optimal. Notons enfin que bien que l'algorithme ne soit pas complet, il l'est cependant asymptotiquement au sens précédent.

Algorithme de Jacobs et Canny

Un autre algorithme fondamental de planification de trajectoires basé sur une discrétisation a été présenté (et implanté) par Jacobs et Canny dans [JC89], également en 1989. Cet algorithme décrit pour le système de Dubins est général et est, dans son principe, applicable pour tout système dont on connaît une caractérisation des plus courts chemins entre deux configurations, en l'absence d'obstacles.

L'algorithme est basé sur une discrétisation du bord des obstacles Ω dans l'espace des configurations, c'est-à-dire que l'on discrétise le bord de $\Omega \times S^1$. Pour le système de Dubins, il n'est en fait pas nécessaire de discrétiser l'ensemble du bord de $\Omega \times S^1$: en effet, une trajectoire passant au contact d'une arête d'un obstacle est tangente à l'obstacle. Il est donc possible de ne discrétiser les arêtes qu'à orientation fixée (modulo π). Chaque sommet P des obstacles est par contre discrétisé dans $\{P\} \times S^1$. Pour toute paire de configurations apparaissant dans la discrétisation, on calcule, s'il existe, le plus court chemin de Dubins (de type *CSC* ou *CCC*) n'entrant pas en collision avec les obstacles. On construit ainsi un graphe \mathcal{G} dont les nœuds sont les configurations apparaissant dans la discrétisation et dont les arêtes sont des chemins de Dubins n'entrant pas en collision avec les obstacles. Etant donné une paire de configurations initiale et terminale ω_i et ω_t , on actualise le graphe \mathcal{G} pour ces deux configurations puis on cherche dans \mathcal{G} un plus court chemin joignant ω_i à ω_t . L'algorithme calcule en un temps $O(n^2(\frac{n+L}{\varepsilon}) \log n + (\frac{n+L}{\varepsilon})^2)$ un chemin de longueur au plus $(1 + \varepsilon)$ fois la longueur du plus court chemin ε -robuste. Un chemin est dit ε -robuste si pour toute perturbation locale inférieure à $\varepsilon/2$ en position et en orientation de certains points de la trajectoire, il est possible de déformer localement la trajectoire dans \mathcal{L} ; les points en question sont les points de contacts entre la trajectoire et les obstacles et les perturbations sont restreintes à $\mathcal{L} \times S^1$. Dans les complexités, n est le nombre total de sommets des obstacles et L est la longueur totale des arêtes des obstacles. Les auteurs présentent également un algorithme calculant un chemin $\varepsilon/2$ -robuste de longueur au plus $(1 + \varepsilon)$ fois la longueur du plus court chemin ε -robuste. La complexité en temps de cet algorithme est $O(n^4 \log n + (\frac{n+L}{\varepsilon})^2)$.

Comparé à l'algorithme de Barraquand et Latombe, l'algorithme de Jacobs et Canny prend beaucoup plus en compte la nature des trajectoires op-

timales. Cela étant, en pratique, la taille des graphes créés par l'algorithme de Jacobs et Canny peut être plus grande que celle des graphes créés par l'algorithme de Barraquand et Latombe.

Algorithme de Wang et Agarwal

Très récemment, Wang et Agarwal [WA96] ont amélioré de façon significative l'algorithme de Jacobs et Canny appliqué au système de Dubins. Les auteurs présentent un algorithme pour calculer un chemin de longueur au plus $(1 + \varepsilon)$ fois la longueur du plus court chemin ε -robuste d'une complexité en temps $O(\frac{n^2}{\varepsilon^2} \log n)$. La complexité de l'algorithme est meilleure que celle de l'algorithme de Jacobs et Canny, mais surtout elle ne dépend plus de la longueur totale L des arêtes des obstacles. Ce gain provient d'un nouveau résultat dans la caractérisation des plus courts chemins : grossièrement, les auteurs montrent que, excepté dans certains cas spécifiques, un point de contact entre une trajectoire optimale et les obstacles se situe près d'un sommet des obstacles (le sommet proche n'est pas forcément une extrémité de l'arête de contact). Il n'est donc pas nécessaire de discrétiser les arêtes des obstacles loin des sommets. Les auteurs présentent également un algorithme pour calculer un chemin $\varepsilon/2$ -robuste de longueur au plus $(1 + \varepsilon)$ fois la longueur du plus court chemin ε -robuste. La complexité en temps de l'algorithme étant $O((n/\varepsilon)^{2.5} \log n)$.

Algorithme de Desaulniers, Soumis et Laurent

Récemment, G. Desaulniers, F. Soumis et J-C. Laurent ont également présenté [DSL95] un planificateur de trajectoires basé sur une décomposition de l'espace libre de travail \mathcal{L} en cellules convexes disjointes et sur une discrétisation, en position et en orientation, du bord de ces cellules. Un graphe ayant pour nœuds les configurations de la discrétisation est alors créé. Les arêtes du graphe sont des trajectoires optimales joignant deux configurations du bord d'une même cellule. Plus précisément, pour une paire de configurations du bord d'une même cellule, on calcule (si elle existe) une trajectoire optimale joignant ces deux configurations vérifiant que la trajectoire reste dans la cellule. Dans la mesure où l'on se restreint aux trajectoires restant dans la cellule, il n'y a pas à tester une collision éventuelle entre les trajectoires et les obstacles. Si une telle trajectoire existe, on crée une arête du graphe entre les deux nœuds correspondant aux deux configurations. Les configurations initiale et terminale sont naturellement rajoutées à la liste des configurations de la discrétisation. Un chemin est alors cherché dans le graphe ainsi calculé. Le chemin calculé est décrit par l'auteur comme presque optimal, ce qui correspond, du point de vue de Barraquand et Latombe, à la notion d'optimalité

asymptotique. Cet algorithme présenté pour le système de Reeds et Shepp est, de même que les précédents, assez général. L'originalité de l'algorithme réside dans l'utilisation d'une caractérisation semi-complète des trajectoires de Reeds et Shepp (en l'absence d'obstacles) pour calculer une trajectoire optimale entre deux nœuds du graphe. Cette caractérisation semi-complète des trajectoires de Reeds et Shepp [DS95] consiste en une partition de l'espace des configurations telle que, à chaque cellule de la partition soient associés au plus deux types de chemins tels que le plus court chemin entre la configuration initiale et une configuration de la cellule soit de l'un de ces types. Cette caractérisation des plus courts chemins de Reeds et Shepp est moins fine que celle décrite dans [SL92] mais est implantée.

Algorithme de Bui

Tous les algorithmes décrit jusqu'à présent, à l'exception de celui de Barraquand et Latombe, s'intéressent à calculer des chemins pour le système de Dubins ou pour le système de Reeds et Shepp, c'est-à-dire que du point de vue de la robotique, le robot associé au système est supposé ponctuel. Rappelons qu'il suffit pour se ramener à un problème de robot ponctuel de modéliser un robot non ponctuel par un robot de la forme d'un disque. L'algorithme de Jacobs et Canny a été généralisé par X-N. Bui au cas de robots polygonaux [Bui94]. L'algorithme prend en compte les trajectoires optimales correspondant aux courbes décrites par le point de référence du robot lorsqu'il se déplace en maintenant le contact avec un obstacle. Ces courbes appelées tractrices ont été également étudiées par P. Tournassoud [Tou88]. L'algorithme de X-N. Bui applicable pour les robots de Dubins comme pour ceux de Reeds et Shepp a été implanté pour un robot de Reeds et Shepp.

Algorithme de Švestka et Overmars

Une autre forme de discrétisation de l'espace des configurations est celle présentée par P. Švestka et M. Overmars dans [SO95]. Les auteurs présentent un algorithme aléatoire ("probabilistic path planning") pour les systèmes de Dubins et de Reeds et Shepp. L'algorithme construit itérativement un graphe dont les nœuds sont des configurations et dont les arcs sont des chemins évitant les obstacles et satisfaisant aux contraintes non-holonomes. Itérativement, une configuration est choisie aléatoirement et un planificateur local de trajectoire calcule, sans tenir compte des obstacles, une trajectoire reliant cette configuration à une configuration "proche" correspondant à un nœud existant du graphe. Si cette trajectoire n'entre pas en collision avec les obstacles, le nœud et l'arête correspondants à la configuration et à la trajectoire

sont rajoutés au graphe. A l'étape suivante on considère une nouvelle configuration aléatoire. Pour une paire de configurations initiale et terminale, on tente de raccorder ces configurations au graphe puis on cherche une trajectoire dans le graphe. Le coût en temps le plus important dans cet d'algorithme provient du planificateur local de trajectoires. Cet algorithme, très général dans son principe, s'avère efficace en pratique mais n'assure ni de trouver un chemin s'il en existe un, ni d'approcher une trajectoire optimale.

Algorithme de Mirtich et Canny

B. Mirtich et J. Canny présentent dans [MC92] un algorithme de calcul de trajectoires non-holonomes basé sur l'utilisation d'un réseau de routes ("roadmaps") qui "maximisent" la distance aux obstacles. L'algorithme est décrit pour le système de Reeds et Shepp mais se généralise bien à d'autres systèmes non-holonomes y compris les systèmes interdisant les manœuvres. L'algorithme calcule un squelette maximisant la distance aux obstacles, dans l'espace des configurations. La distance considérée n'est pas la distance euclidienne mais une distance prenant en compte les contraintes de non-holonomie. Le squelette est calculé "hors ligne" puis réactualisé pour une paire de configurations initiale et terminale. Une trajectoire satisfaisant les contraintes est alors calculée en suivant approximativement le squelette. L'algorithme n'est évidemment pas complet et ne cherche pas à calculer un plus court chemin.

1.4.2 Algorithmes complets

Algorithme de Laumond, Jacobs, Taix et Murray

Tous les algorithmes décrit jusqu'à présent ne sont pas complets. Laumond, Jacobs, Taix et Murray présentent dans [LJTM94] (voir également [Lau94]) le premier algorithme complet de calcul de trajectoires pour un système non-holonyme, en présence d'obstacles. L'algorithme est décrit pour le système de Reeds et Shepp et utilise fondamentalement la possibilité de manœuvre du robot, lequel n'est pas supposé ponctuel. L'algorithme se généralise aux systèmes non-holonomes localement commandables en temps mais ne peut absolument pas se généraliser à un robot du type de celui de Dubins pour lequel les manœuvres sont interdites. L'espace libre est supposé soit ouvert soit égal à l'adhérence de son intérieur.

L'idée générale de l'algorithme est de calculer une trajectoire, entre deux configurations, ne satisfaisant pas les contraintes de non-holonomie du système mais évitant les obstacles. De plus, on assure que le robot ne touche aucun obstacle au cours de la trajectoire (si le robot dans sa position initiale

est au contact d'un obstacle, on considère une configuration initiale secondaire dans un voisinage; il en va de même pour la configuration terminale). Le système de Reeds et Shepp étant localement commandable en temps, on est assuré qu'il existe une trajectoire pour le robot de Reeds et Shepp approchant la trajectoire holonome (voir section 1.1.1). Cette trajectoire est subdivisée en morceaux de telle façon que les trajectoires optimales de Reeds et Shepp joignant les paires de points orientés consécutifs de la subdivision évitent les obstacles. L'hypothèse selon laquelle le robot ne touche aucun obstacle au cours de la trajectoire holonome considérée assure que, pour une subdivision suffisamment fine de la trajectoire, le chemin optimal de Reeds et Shepp joignant deux points consécutifs de la subdivision est tel que le robot évite les obstacles. La trajectoire non-holonome est ainsi calculée puis lissée.

L'opération de lissage est effectuée en considérant des paires de points orientés sur la trajectoire non-holonome et en testant si les trajectoires de Reeds et Shepp joignant les paires de points orientés évitent les obstacles. Si une telle trajectoire de Reeds et Shepp n'évite pas les obstacles, on raffine la subdivision de la trajectoire non-holonome.

L'algorithme est complet et calcule une trajectoire approchant une trajectoire de longueur localement minimale en ce sens que la longueur de la trajectoire approche un minimum local de la fonction longueur des trajectoires. En effet, durant la phase de lissage, chaque itération raccourcit la longueur de la trajectoire. En revanche, il n'est pas prouvé qu'une trajectoire calculée par l'algorithme approche une trajectoire de longueur minimale, ceci même si l'on se restreint aux trajectoires d'une classe d'homotopie donnée.

Remarquons que le nombre de manœuvres dans les trajectoires calculées n'est ni borné ni minimal. Le problème de trouver une trajectoire minimisant le nombre de manœuvres ou dont le nombre de manœuvres est borné s'avère difficile; à notre connaissance, les seuls résultats existant sur ces problèmes sont ceux publiés dans [BL89] et [BL93] donnant une solution approchée du problème sur le nombre optimal de manœuvres et celui publié dans [ART95] traitant du problème à k manœuvres en présence d'obstacles spécifiques appelés obstacles modérés.

La complexité en temps de la deuxième phase de l'algorithme c'est-à-dire la phase correspondant au calcul de la trajectoire non-holonome à partir de la trajectoire holonome est $\Theta(L/\delta^2)$ où L est la longueur de la trajectoire holonome calculée durant la première phase de l'algorithme, et δ est égal au minimum de la distance de la trajectoire holonome pré-calculé aux obstacles moins la demi-longueur du robot. Cette complexité correspond à la complexité intrinsèque de la trajectoire non-holonome [BLJ91] (voir figure 1.15). Cette distance δ est donc un facteur déterminant pour la complexité de la deuxième phase de l'algorithme. Le planificateur implanté pour calculer cette

trajectoire holonome joue donc un rôle important. Pour un robot de la forme d'un disque, la trajectoire holonome est calculée à l'aide du diagramme de Voronoï des obstacles et maximise la valeur de δ pour une classe d'homotopie donnée. Notons que si le robot est supposé ponctuel, la complexité de la deuxième phase de l'algorithme est linéaire en $1/\delta$ d'après [Bui94, Proposition IV-2.4].

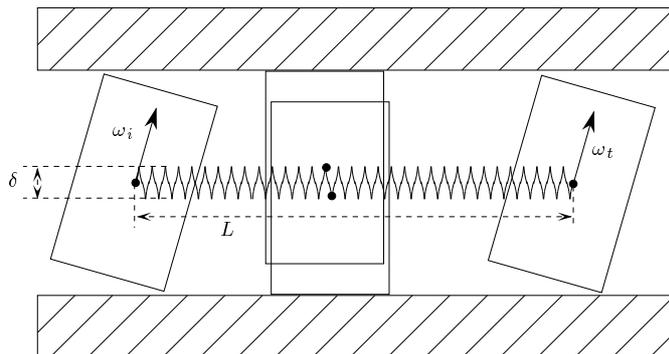


FIG. 1.15 – Trajectoire de complexité $\Theta(L/\delta^2)$

1.4.3 Algorithmes pour des obstacles de courbure bornée

Algorithme de Agarwal, Raghavan et Tamaki

L'algorithme de Laumond et coll. décrit précédemment montre que le problème de planification de trajectoires pour un système non-holonome autorisé à effectuer des manœuvres est dans un sens plus simple que le problème où les manœuvres sont interdites. En effet, pour un système non-holonome où les manœuvres sont interdites, il n'existe pas à l'heure actuelle d'algorithme complet de calcul de trajectoires (pas forcément optimales).

Dans le but de mieux comprendre la nature des trajectoires optimales pour des systèmes sans manœuvre en présence d'obstacles, P. K. Agarwal, P. Raghavan et H. Tamaki ont présenté dans [ART95] une nouvelle approche du problème en se restreignant à un certain type d'obstacles. Le système considéré est celui de Dubins et les obstacles sont convexes, disjoints deux à deux et tels que le bord de chaque obstacle est une trajectoire faisable pour le robot de Dubins. En d'autres termes, les bords des obstacles sont des courbes C^1 de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie. De tels obstacles sont appelés *obstacles modérés*. Très grossièrement, l'algorithme

consiste à discrétiser le bord des obstacles et à construire un graphe comme dans l'algorithme de Jacobs et Canny. Cependant, les auteurs montrent que, suffisamment loin des configurations initiale et terminale, les arcs constituant une trajectoire optimale sont des arcs du bord des obstacles, des arcs de cercle unitaires tangents à deux obstacles (ces cercles sont appelés *cercles ancrés*) ou des segments de droite bi-tangents aux obstacles et/ou aux cercles ancrés. Dans un certain voisinage des configurations initiale et terminale, les auteurs discrétisent le bord des obstacles et construisent un graphe comme dans l'algorithme de Jacobs et Canny. A ce graphe sont ajoutés les arcs constituant le bord des obstacles, tous les arcs de cercle ancrés et les segments de droite bi-tangents qui évitent les obstacles (ces arcs sont en nombre fini). Les auteurs montrent de plus que si les configurations initiale et terminale sont suffisamment loin l'une de l'autre alors il n'est pas nécessaire de discrétiser le bord des obstacles. Il s'ensuit que pour des configurations initiale et terminale suffisamment éloignées, le calcul d'un plus court chemin joignant les deux configurations est exact; de plus la complexité en temps de l'algorithme est alors $O(n^2 \log n)$ où $O(n)$ est la complexité des obstacles. Notons que la démonstration prouvant qu'il n'est pas nécessaire de discrétiser les obstacles loin des configurations initiale et terminale est incomplète dans [ART95], corrigée depuis mais non publiée. Une version moins forte de cette preuve est publiée dans [BL96b] où il est montré qu'il n'est effectivement pas nécessaire de discrétiser loin des configurations initiale et terminale mais ne montre pas qu'il n'est pas nécessaire de discrétiser si l'on suppose juste que les configurations initiale et terminale sont suffisamment éloignées. Notons que Agarwal et coll. discutent également dans [ART95] du problème de la planification de trajectoires lorsque les manœuvres sont autorisées en présence d'obstacles modérés.

1.5 Contributions

Les travaux que nous présentons s'inscrivent dans le cadre de la planification de trajectoires optimales, en présence d'obstacles, pour des robots mobiles non-holonomes du type de Dubins. Nous nous sommes intéressés aux problèmes de la caractérisation et du calcul de plus courts chemins de courbure bornée, c'est-à-dire C^1 et de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie.

Les premiers résultats que nous présentons concernent le calcul de l'enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble fini \mathcal{S} de points du plan, c'est-à-dire d'une région contenant tous les points, de périmètre minimal et dont le bord est de courbure bornée. Nous prouvons l'unicité d'une telle enve-

loppe convexe pour tout ensemble de points de diamètre supérieur à 2. Nous présentons deux algorithmes de calcul. L'un, exact, est basé sur la résolution d'un ensemble de systèmes algébriques et est peu réaliste en pratique. L'autre, approché, est basé sur l'optimisation d'une fonction convexe. Ces travaux sont présentés dans le chapitre 2; un résumé est également présenté dans la section 1.5.1.

Nous présentons ensuite un algorithme polynomial exact pour le calcul d'un plus court chemin de courbure bornée en présence d'obstacles dont le bord est de courbure bornée. De tels obstacles sont appelés obstacles modérés. Nous présentons au chapitre 3 l'article soumis à *International Journal of Geometry & Applications* dont une version résumé est publié au *12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry* [BL96b]; nous présentons également un résumé de l'article dans la section 1.5.2.

1.5.1 Enveloppe convexe de courbure bornée

Nous considérons le problème du calcul d'une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble de points du plan. Nous définissons une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble \mathcal{S} de points comme étant une région de périmètre minimal, contenant \mathcal{S} et dont le bord est C^1 et de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie.

Nous montrons qu'une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble \mathcal{S} est unique si et seulement si le rayon du plus petit disque contenant \mathcal{S} est supérieur ou égal à 1.

Nous montrons que le problème du calcul d'une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble de points est équivalent au problème du calcul d'un polygone \mathcal{Q} de périmètre minimal et d'intersection non vide avec un ensemble de disques unitaires fermés. De plus, ces disques sont centrés en les sommets d'un polygone convexe \mathcal{P} et le bord de \mathcal{Q} coupe ces disques dans l'ordre où ils apparaissent sur le bord de \mathcal{P} . Calculer \mathcal{Q} devient alors équivalent à minimiser la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ M_1, \dots, M_n &\mapsto \|M_1M_2\| + \|M_2M_3\| + \dots + \|M_{n-1}M_n\| + \|M_nM_1\| \end{aligned}$$

sous les n contraintes $M_i \in D_i$ ($1 \leq i \leq n$) où D_1, \dots, D_n sont les disques unitaires fermés centrés en les sommets (pris dans l'ordre) du polygone \mathcal{P} .

La fonction F étant convexe, calculer une valeur approchée du minimum peut se faire grâce aux méthodes classiques d'optimisation. Un algorithme de points intérieurs permet de calculer, pour notre problème, un point réalisant le minimum de F à ε près en temps $O(n^{3.5} \log(n(R+1)/\varepsilon))$ où R est le diamètre de \mathcal{S} . Nous présentons également un algorithme approché très

simple dont l'idée sous-jacente est la simulation de l'évolution d'un élastique qui garde au moins un point de contact avec chaque disque D_i . L'étude de la complexité de cet algorithme n'est pas effectuée, à l'heure actuelle.

Une généralisation naturelle du problème considéré consiste à étudier l'enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble de points dans \mathbb{R}^3 (et dans \mathbb{R}^d). Les algorithmes proposés en dimension deux semblent pouvoir se généraliser aux dimensions supérieures, cependant toutes les démonstrations restent à faire. D'autres problèmes sont également intéressants, comme le problème du calcul d'une enveloppe convexe de bord C^2 et de courbure bornée ou encore le problème du calcul d'une enveloppe convexe minimisant l'aire et non le périmètre de l'enveloppe.

Notons également que l'algorithme présenté peut s'étendre au calcul d'un plus court chemin de courbure bornée entre deux configurations, dans le plan en présence d'obstacles, lorsque celui-ci est convexe. Remarquons enfin qu'une approche du problème de la planification de trajectoires de courbure bornée en présence d'obstacles peut être de calculer l'enveloppe convexe de courbure bornée de chaque obstacle, puis de calculer une trajectoire de courbure bornée en présence d'obstacles de courbure bornée, appelés dans la suite obstacles modérés.

1.5.2 Algorithme polynomial pour le calcul d'un plus court chemin de courbure bornée en présence d'obstacles modérés

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.4.3, les obstacles modérés ont été introduits par Agarwal et coll. dans [ART95] comme des obstacles convexes, disjoints deux à deux et tels que les bords des obstacles soient des courbes C^1 de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie. Nous considérons une définition légèrement plus restrictive des obstacles modérés : un obstacle est dit *modéré* si son bord est une courbe convexe, C^1 constituée de segments de droite et d'arcs de cercle unitaire. Nous proposons un algorithme exact pour le calcul d'un plus court chemin de courbure bornée entre deux configurations. Notons que cet algorithme est le premier algorithme exact résolvant une instance non triviale du problème général du calcul de plus courts chemins de courbure bornée en présence d'obstacles.

Pour simplifier la présentation nous supposons, sans perte de généralité, que les segments de droite du bord des obstacles ne sont pas parallèles, deux à deux. Un arc du bord des obstacles est noté O . Un arc de cercle unitaire est dit *terminal* et noté C_t s'il est tangent à la configuration initiale ou à la configuration terminale. Un arc de cercle unitaire tangent à un obstacle est

noté \bar{C} . Enfin, un arc de cercle unitaire est dit *ancré* et noté $\bar{\bar{C}}$ s'il est en double contact avec les obstacles, ou s'il est tangent à un obstacle et à un cercle terminal, ou s'il est terminal.

Nous montrons qu'un arc de cercle apparaissant dans un plus court chemin de courbure bornée est un arc de cercle ancré, ou est inclus dans un sous chemin de type $C_t C \bar{\bar{C}}$ ou $\bar{\bar{C}} C C_t$, ou est inclus dans un sous chemin de type $X S \bar{\bar{C}} \bar{C} S X'$ où $X, X' \in \{O, \bar{C}\}$ et S désigne un segment de droite de longueur supérieure ou égale à zéro. De plus, nous montrons qu'une trajectoire de type $X S \bar{\bar{C}} \bar{C} S X'$ est optimale seulement si un système algébrique est vérifié, et nous montrons par des calculs sur les résultants que ce système admet toujours un nombre fini de solutions. Nous montrons ainsi que les morceaux de types $\bar{\bar{C}}$, $C_t C \bar{\bar{C}}$, $\bar{\bar{C}} C C_t$ et $X S \bar{\bar{C}} \bar{C} S X'$ qui peuvent apparaître dans une trajectoire optimale sont en nombre fini. Nous montrons également qu'un morceau de type $X S \bar{\bar{C}} \bar{C} S X'$ ne peut apparaître dans une trajectoire optimale que s'il est proche de la configuration initiale ou terminale.

Nous construisons alors un graphe dont les arêtes sont des arcs du bord des obstacles et, des arcs de cercle ancrés et des segments de droite n'entrant pas en collision avec les obstacles et pouvant apparaître dans une trajectoire optimale. Les nœuds du graphe sont les points de tangence entre les arêtes. Un plus court chemin est alors cherché dans ce graphe.

Nous proposons ainsi un algorithme polynomial pour le calcul d'un plus court chemin de courbure bornée entre deux configurations. Si l'on suppose que les obstacles sont disjoints deux à deux, la complexité en temps de l'algorithme est $O(n^4 \log n)$. Sous l'hypothèse supplémentaire raisonnable que la longueur des arcs (arcs de cercle et segments de droite) du bord des obstacles est minorée par une constante strictement positive, la complexité de l'algorithme peut être ramenée à $O(n^2 \log n)$.

Nous montrons également que si les configurations initiale $\omega_S = (S, \vec{U}_S)$ et terminale $\omega_T = (T, \vec{U}_T)$ sont suffisamment éloignées l'une de l'autre et suffisamment éloignées des obstacles, le plus court chemin de courbure bornée entre ω_S et ω_T est le plus court chemin euclidien entre S et T en présence des obstacles Ω ainsi que de deux obstacles \mathcal{R}_S et \mathcal{R}_T . \mathcal{R}_S (resp. \mathcal{R}_T) est une région constituée des deux disques unitaires tangents à ω_S (resp. ω_T) ainsi que d'une petite région située "derrière" ω_S (resp. "devant" ω_T) comme le montre la figure 3.1.

Comme nous l'avons dit, nous avons considéré les obstacles modérés comme étant de bords constitués de segments de droite et d'arcs de cercle unitaire. Il eut été intéressant de considérer une classe plus générale d'obstacles modérés correspondant aux obstacles modérés (au sens d'Agarwal et coll.) dont le bord est constitué de segments de droite et d'arcs de cercle de

rayon supérieur à 1. Pour cette classe d'obstacles, la preuve que nous avons faite pour montrer que les trajectoires optimales de type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ sont en nombre fini est théoriquement applicable. Cependant, il s'avère que, en pratique, les calculs de résultants dépassent les capacités des systèmes de calcul algébrique existant actuellement.

Un problème ouvert très intéressant est le suivant : les calculs que nous avons effectués pour montrer que les trajectoires optimales de type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ sont en nombre fini permettent facilement d'exprimer la longueur d'une trajectoire de type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ en fonction d'une variable correspondant à la position de l'un des arcs \bar{C} sur l'obstacle tangent. Pour un ensemble de jeux de paramètres correspondant aux positions relative de X , X' et des obstacles tangents aux deux arcs \bar{C} , nous avons calculé (à l'aide de MAPLE) le graphe de cette fonction longueur. Il s'avère que pour chaque jeu de paramètres étudié la fonction n'admet pas de minimum dans l'intérieur du domaine sur lequel une trajectoire de type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ peut être de longueur minimale (c'est-à-dire sur le domaine où chaque arc \bar{C} est de longueur supérieure à π). Au vu de cette étude il semble donc qu'un morceau de trajectoire, de type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ peut être optimal seulement si l'un des arcs \bar{C} est ancré ou est tangent à un arc ancré \bar{C} apparaissant dans la trajectoire. Si cela s'avère vrai, cela prouverait la conjecture suivante :

Conjecture 1.9 *En présence d'obstacles modérés, un arc de cercle apparaissant dans une trajectoire optimale est ancré, ou est tangent à un cercle ancré et à un obstacle (ou à un cercle terminal).*

De plus, si cette conjecture est juste, cela tendrait à prouver la conjecture suivante :

Conjecture 1.10 *En présence d'obstacles polygonaux, un arc de cercle en contact avec un obstacle et apparaissant dans une trajectoire optimale est ancré, ou passe par un sommet des obstacles, ou apparaît dans un sous chemin de type $\bar{C}\bar{C}\dots\bar{C}$.*

D'autres problèmes se posent également, nous pouvons citer trois d'entre eux : Peut-on obtenir des résultats similaires pour des robots polygonaux ? Peut-on obtenir des résultats similaires si les manœuvres sont autorisées ? (certains travaux ont été effectués dans ce sens [ART95, BCL94b, RS90]).

Chapitre 2

Enveloppe convexe de courbure bornée

(Une version résumée de ce chapitre a été publiée dans les *Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry* [BL96a])

Résumé

Nous considérons dans ce chapitre le problème du calcul d'une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble \mathcal{S} de points du plan, i.e. un ensemble contenant \mathcal{S} et dont le bord est une courbe de courbure bornée de longueur minimale. Nous montrons que, si le rayon du plus petit disque contenant \mathcal{S} est supérieur ou égal à 1, une telle enveloppe est unique. Nous montrons également que le calcul d'une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble de points se ramène à un problème d'optimisation convexe ou à la résolution d'un ensemble de systèmes algébriques.

2.1 Introduction

L'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{S} de points du plan est définie comme le plus petit ensemble contenant \mathcal{S} , ou de façon équivalente, comme l'ensemble de périmètre minimal qui contient \mathcal{S} . Nous nous intéressons ici aux enveloppes convexes de courbure bornée. Nous définissons une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble \mathcal{S} de points comme étant une région de périmètre minimal contenant \mathcal{S} et dont le bord est de courbure bornée, c'est-à-dire une courbe C^1 de courbure majorée par 1 en tout point où elle est définie.

Ce problème géométrique est d'une part une extension naturelle de l'enveloppe convexe classique, et d'autre part, c'est une instance non triviale du problème du calcul de plus courts chemins de courbure bornée dans le plan encombré d'obstacles polygonaux. En effet, si \mathcal{S} est l'ensemble des sommets d'un ensemble de polygones, l'enveloppe convexe de courbure bornée de \mathcal{S} est le plus petit tour, de courbure bornée, autour des polygones. Notons également qu'une approche du problème de la planification de trajectoires de courbure bornée en présence d'obstacles peut être de calculer l'enveloppe convexe de courbure bornée de chaque obstacle, puis de calculer une trajectoire de courbure bornée en présence d'obstacles de courbure bornée (ce problème sera traité dans le chapitre 3).

Nous présentons deux algorithmes résolvant le problème. Le premier est basé sur l'optimisation d'une fonction convexe et calcule une solution approchée de l'enveloppe convexe de courbure bornée. L'autre algorithme est exact et est basé sur la résolution d'un ensemble de systèmes algébriques.

De façon générale dans la suite, le bord d'une région quelconque \mathcal{R} sera noté $\partial\mathcal{R}$. Un polygone de sommets M_1, \dots, M_n , apparaissant dans cet ordre sur le bord du polygone sera simplement appelé polygone $M_1 \dots M_n$. L'indice i d'un sommet M_i d'un polygone $M_1 \dots M_n$ sera considéré modulo n . Deux polygones seront dit *géométriquement égaux* s'ils définissent une même région; les deux polygones peuvent ne pas être définis par le même nombre de sommets dès lors que certains sommets sont plats.

Dans la suite, \mathcal{S} est un ensemble de points du plan, \mathcal{T} une enveloppe convexe de courbure bornée de \mathcal{S} . \mathcal{P} est l'enveloppe convexe de \mathcal{S} et P_1, \dots, P_n sont les sommets de \mathcal{P} . D_i est le disque fermé unitaire centré en P_i et C_i est le cercle unitaire centré en P_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. \mathcal{Q} est une région polygonale de périmètre minimal et d'intersection non vide avec chacun des disques D_i ($1 \leq i \leq n$). Il faut bien noter que c'est la région polygonale \mathcal{Q} et non son bord qui doit avoir une intersection non vide avec chacun des disques. Comme nous allons le voir, \mathcal{Q} joue un rôle central dans la caractérisation et dans le calcul de \mathcal{T} .

Notons que si le rayon r du plus petit disque contenant \mathcal{S} est inférieur ou égal à 1, tout disque unitaire contenant \mathcal{S} est clairement une enveloppe convexe de courbure bornée de \mathcal{S} . Remarquons de plus que, si $r < 1$, il existe une infinité de tels disques et que, si $r = 1$, un tel disque est unique. Nous supposons dans la suite que $r > 1$.

Dans la section 2.2, nous caractérisons \mathcal{T} et nous montrons que \mathcal{T} se déduit simplement de \mathcal{Q} . Nous étudions \mathcal{Q} dans la section 2.3 et montrons l'unicité de \mathcal{Q} et de \mathcal{T} dans la section 2.4. Enfin, nous résumons les résultats et présentons les algorithmes dans la section 2.5.

2.2 Caractérisation de \mathcal{T}

Nous énonçons deux lemmes utiles pour la proposition 2.3 laquelle montre comment \mathcal{T} se déduit de \mathcal{Q} .

Lemme 2.1 \mathcal{T} est convexe et contient \mathcal{P} .

Démonstration : \mathcal{T} est convexe car dans le cas contraire, son enveloppe convexe est une région dont le bord est de courbure bornée qui contient \mathcal{S} et dont le périmètre est inférieur à celui de \mathcal{T} . Il s'ensuit que \mathcal{T} contient \mathcal{P} car \mathcal{P} est le plus petit convexe contenant \mathcal{S} . \square

Une conséquence évidente de ce lemme est que l'enveloppe convexe de courbure bornée de \mathcal{S} est égale à l'enveloppe convexe de courbure bornée des sommets de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} .

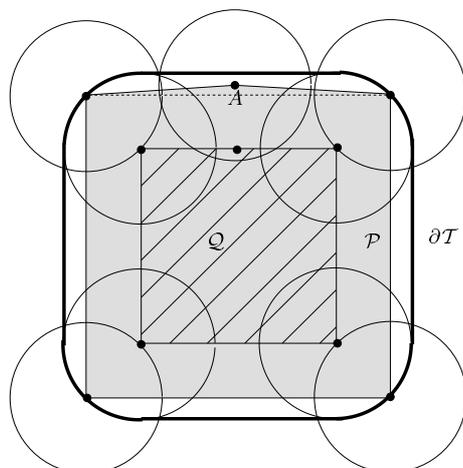
Lemme 2.2 $\partial\mathcal{T}$ est constituée de segments de droite et d'arcs de cercle unitaire passant par des sommets de \mathcal{P} .

Démonstration : $\partial\mathcal{T}$ est une courbe fermée convexe de courbure bornée et de longueur minimale contenant \mathcal{P} d'après le lemme précédent. Donc, d'après le théorème 1.3, entre deux points de contact entre $\partial\mathcal{T}$ et \mathcal{P} , $\partial\mathcal{T}$ est une courbe de Dubins. Ces courbes de Dubins sont de type *CSC* car $\partial\mathcal{T}$ est convexe (une courbe de type *CCC* non réduite à un arc de cercle n'est pas convexe). Donc, $\partial\mathcal{T}$ est constitué de segments de droite et d'arcs de cercle unitaire en contact avec \mathcal{P} . De plus, toujours grâce à la convexité de $\partial\mathcal{T}$ un arc de cercle de $\partial\mathcal{T}$ est nécessairement au contact d'un sommet de \mathcal{P} . \square

Remarquons que tous les sommets de \mathcal{P} n'apparaissent pas nécessairement sur $\partial\mathcal{T}$: la figure 2.1 montre $\partial\mathcal{T}$ lorsque \mathcal{P} est un carré; si l'on rajoute à \mathcal{P} un cinquième sommet A situé dans \mathcal{T} , l'enveloppe convexe de courbure bornée des cinq sommets est toujours \mathcal{T} et ces cinq points n'appartiennent pas à $\partial\mathcal{T}$, par construction.

A présent, nous pouvons transformer le problème du calcul de \mathcal{T} en un problème plus classique de géométrie euclidienne (voir figure 2.1) :

Proposition 2.3 \mathcal{T} est la somme de Minkowski du disque unitaire centré à l'origine et d'une région polygonale \mathcal{Q}^* de périmètre minimal parmi les régions d'intersection non vide avec chacun des disques D_i .

FIG. 2.1 – Exemple où tous les sommets de \mathcal{P} n'appartiennent pas à $\partial\mathcal{T}$

Démonstration : Remarquons d'abord que la somme des longueurs des arcs de cercle de $\partial\mathcal{T}$ est égale à 2π car $\partial\mathcal{T}$ est convexe. Le périmètre de \mathcal{T} est donc égal à 2π plus la somme des longueurs des segments de droite de $\partial\mathcal{T}$.

Nous rappelons que l'érodé d'une région \mathcal{T} par le disque unitaire D centré à l'origine est $(\mathcal{T}^c \oplus D)^c$ où " \cdot^c " désigne le complémentaire et \oplus la somme de Minkowski. En d'autres termes, l'érodé de \mathcal{T} par D est $\mathcal{T} \setminus \cup_{P \in \partial\mathcal{T}} D(P)$ où $D(P)$ est le translaté de D centré en P . Notons \mathcal{Q}^* l'érodé de \mathcal{T} par D .

$\partial\mathcal{T}$ étant convexe et de courbure majoré par 1 en tout point où elle est définie, \mathcal{Q}^* est convexe, non vide et la somme de Minkowski de \mathcal{Q}^* et du disque D est égal à \mathcal{T} . De plus, comme \mathcal{T} contient \mathcal{P} , \mathcal{Q}^* a une intersection non vide avec chacun des disques D_i . Le périmètre de \mathcal{T} est égal à 2π plus le périmètre de \mathcal{Q}^* . Donc, \mathcal{Q}^* est de périmètre minimal parmi les régions d'intersection non vide avec chacun des disques D_i . \square

Soit \mathcal{Q} une région polygonale de périmètre minimal et d'intersection non vide avec chacun des disques D_i . Nous allons montrer, dans la section 2.3, certaines propriétés de \mathcal{Q} , et prouver, dans la section 2.4, l'unicité de \mathcal{Q} . Il s'ensuivra que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^*$.

2.3 Caractérisation de \mathcal{Q}

Nous commençons par énoncer trois lemmes qui nous serviront à démontrer la proposition 2.7, qui est centrale dans cette section. Enfin nous énoncerons la proposition 2.9 qui donne une caractérisation géométrique de \mathcal{Q} .

Lemme 2.4 *\mathcal{Q} est convexe.*

Démonstration : \mathcal{Q} est convexe car, dans le cas contraire, son enveloppe convexe a d'une part un périmètre strictement inférieur à celui de \mathcal{Q} et d'autre part a une intersection non vide avec chacun des disques D_i ($1 \leq i \leq n$) et est toujours de courbure bornée, ce qui n'est pas possible au vu de la définition de \mathcal{Q} . \square

Lemme 2.5 *$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$.*

Démonstration : On suppose par l'absurde que $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathcal{P}$. Nous montrons qu'il existe un polygone de périmètre inférieur à celui de \mathcal{Q} et d'intersection non vide avec chacun des disques D_i , ce qui est impossible au vu de la définition de \mathcal{Q} . L'idée de la preuve est de projeter les parties de \mathcal{Q} , extérieures à \mathcal{P} , sur le bord de \mathcal{P} . Remarquons que l'on ne peut pas simplement remplacer les parties de \mathcal{Q} , extérieures à \mathcal{P} , par des arcs de $\partial\mathcal{P}$ car, le polygone obtenu peut ne pas couper tous les disques D_1, \dots, D_n (voir figure 2.2a).

Précisément, nous projetons tout point de \mathcal{Q} extérieur à \mathcal{P} sur le point du bord de \mathcal{P} le plus proche (voir figure 2.2b). Cette transformation raccourcit $\partial\mathcal{Q}$. De plus, tout point de \mathcal{Q} situé dans un disque D_i est projeté sur un point situé dans le même disque car \mathcal{P} est convexe. Cette transformation raccourcit le périmètre de \mathcal{Q} et conserve une intersection non vide avec chacun des disques D_i , $1 \leq i \leq n$. Nous avons donc la contradiction voulue. \square

Lemme 2.6 *$\partial\mathcal{Q}$ a une intersection non vide avec chacun des disques D_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Démonstration : Supposons par l'absurde que $\partial\mathcal{Q}$ ne coupe pas un disque D_{i_0} . $\mathcal{Q} \cap D_{i_0}$ étant non vide par hypothèse, P_{i_0} appartient à l'intérieur de \mathcal{Q} . Donc, d'après le lemme 2.5, P_{i_0} appartient à l'intérieur de \mathcal{P} ce qui contredit l'hypothèse que P_{i_0} est un sommet de \mathcal{P} . \square

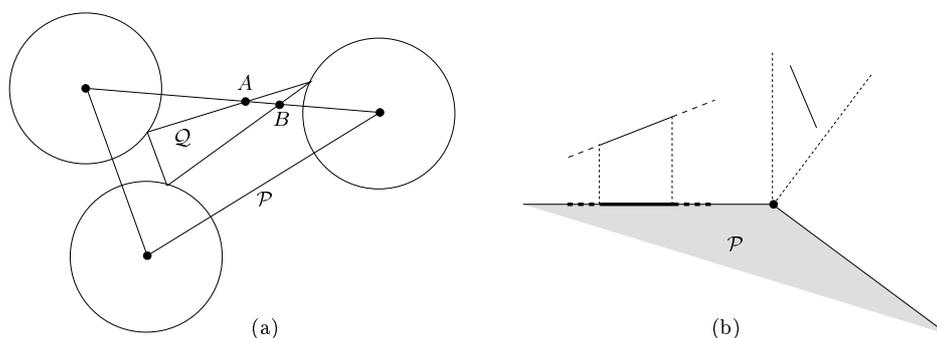


FIG. 2.2 – Pour la preuve du lemme 2.5

Proposition 2.7 *Il existe $M_1^* \in D_1, \dots, M_n^* \in D_n$ tel que le polygone $M_1^* \dots M_n^*$ soit géométriquement égal au polygone Q .*

Démonstration : D'après le lemme 2.6, il existe $M_i \in D_i \cap \partial Q$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Si les points M_1, \dots, M_n apparaissent dans cet ordre sur ∂Q , nous considérons $M_i^* = M_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Le polygone $M_1^* \dots M_n^*$ est géométriquement égal à Q . En effet, comme Q est convexe et $M_i^* \in D_i$, le polygone $M_1^* \dots M_n^*$ est convexe et inclus dans Q . Donc, le périmètre du polygone $M_1^* \dots M_n^*$ est inférieur ou égal à celui de Q et le polygone $M_1^* \dots M_n^*$ a une intersection non vide avec tous les disques D_1, \dots, D_n (car $M_i^* \in D_i$). Comme, par définition, Q est un polygone de périmètre minimal et d'intersection non vide avec tous les disques D_1, \dots, D_n , Q est géométriquement égal au polygone $M_1^* \dots M_n^*$.

Si les points M_1, \dots, M_n n'apparaissent pas dans cet ordre sur ∂Q , nous considérons, dans un premier temps, M'_i le point d'intersection entre ∂Q et le segment $P_i M_i$ qui est le plus proche de P_i (voir figure 2.3). Par construction, $M'_i \in D_i$ et le segment $P_i M'_i$ a une intersection vide avec l'intérieur de Q .

Comme précédemment, si les points M'_1, \dots, M'_n apparaissent dans cet ordre sur le bord de Q , le polygone $M'_1 \dots M'_n$ est géométriquement égal à Q . Dans le cas contraire, il existe M'_i et M'_j consécutifs sur ∂Q tels que les segments $P_i M'_i$ et $P_j M'_j$ se coupent¹; ceci car les segments $P_1 M'_1, \dots, P_n M'_n$ sont dans \mathcal{P} (car \mathcal{P} est convexe et contient Q) et ont une intersection vide avec l'intérieur de Q . Les

1. Par convention, deux segments se coupent si leurs intérieurs relatifs se coupent.

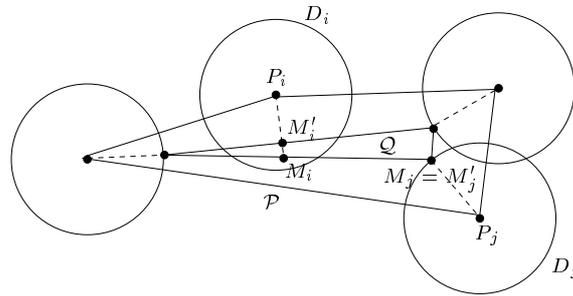


FIG. 2.3 – Pour la preuve de la proposition 2.7

deux segments $P_i M'_i$ et $P_j M'_j$ ne peuvent se couper que si M'_i ou M'_j appartient à l'intersection des deux disques D_i et D_j (voir figure 2.4a). Supposons, sans perte de généralité que $M'_i \in D_i \cap D_j$. Nous définissons alors, $M''_j \in D_j$ égal à M'_i . Le nombre d'intersections entre les segments $P_1 M'_1, \dots, P_n M'_n$ diminue de 1 en remplaçant M'_j par $M''_j = M'_i$ (voir figure 2.4b) : en effet, d'une part les segments $P_i M'_i$ et $P_j M''_j$ ne se coupent pas alors que les segments $P_i M'_i$ et $P_j M'_j$ se coupent et, d'autre part, le "nouveau" segment $P_j M''_j$ ne peut être coupé que par un segment coupant "l'ancien" segment $P_j M'_j$ (car M'_i et M'_j sont consécutifs sur $\partial \mathcal{Q}$). De plus, le segment $P_j M''_j$ a une intersection vide avec l'intérieur

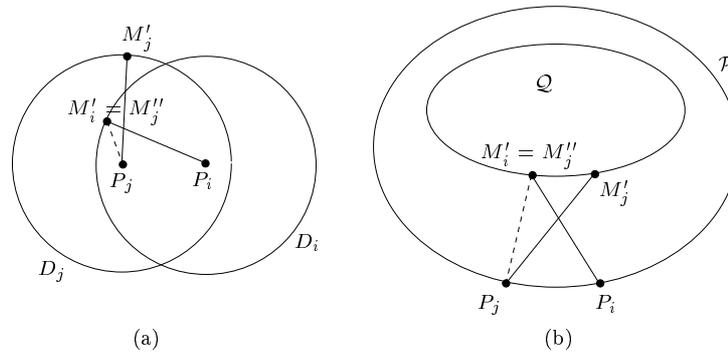


FIG. 2.4 – Pour la preuve de la proposition 2.7

de \mathcal{Q} . En effet (voir Figure 2.5), soit \mathcal{H}_i l'union des deux demi plans, ne contenant pas \mathcal{Q} , limités par les droites supportant les arêtes de \mathcal{Q} incidentes à M'_i . Soit \mathcal{H}_i^c le complémentaire de \mathcal{H}_i . Par construction, $P_i M'_i$ a une intersection vide avec l'intérieur de \mathcal{Q} donc, $P_i M'_i \subset \mathcal{H}_i$. Si $P_j M''_j$ coupe l'intérieur de \mathcal{Q} , $P_j \in \mathcal{H}_i^c$ et

donc, $P_j M_j' \subset \mathcal{H}_i^c$. Il s'ensuit que les segments $P_i M_i'$ et $P_j M_j'$ ne se coupent pas ce qui contredit les hypothèses et prouve que le segment $P_j M_j''$ a une intersection vide avec l'intérieur de \mathcal{Q} .

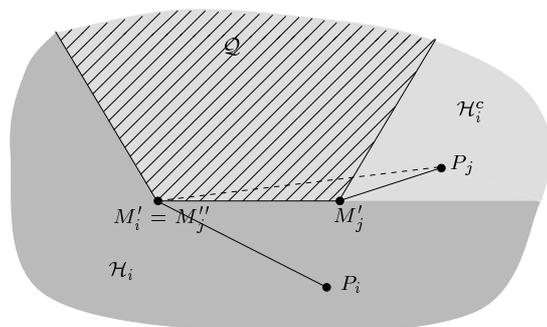


FIG. 2.5 – Pour la preuve de la proposition 2.7

En réitérant cette procédure pour toute paire de points consécutifs sur $\partial\mathcal{Q}$ tels que les segments correspondants se coupent, nous définissons une liste de points M_1^*, \dots, M_n^* appartenant à $\partial\mathcal{Q}$ tels que les segments $P_i M_i^*$ ne se coupent pas deux à deux et ne coupent pas l'intérieur de \mathcal{Q} .

Le fait que les segments $P_1 M_1^*, \dots, P_n M_n^*$ ne se coupent pas, ne coupent pas l'intérieur de \mathcal{Q} et sont inclus dans \mathcal{P} implique que les points M_1^*, \dots, M_n^* apparaissent dans cet ordre sur $\partial\mathcal{Q}$. Comme précédemment, le polygone $M_1^* \dots M_n^*$ est alors géométriquement égal à \mathcal{Q} . \square

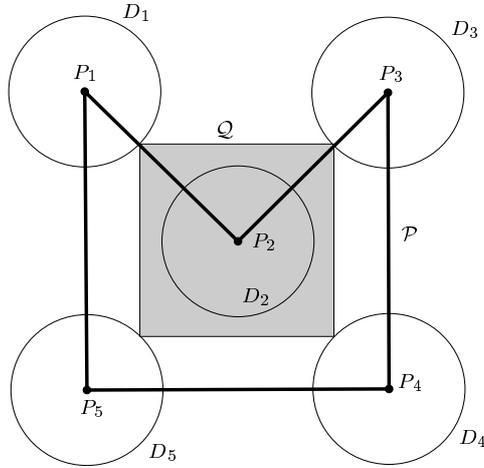
Remarque 2.8 Les points M_1^*, \dots, M_n^* ne sont pas nécessairement uniques. En effet, comme le montre la figure 2.1, le nombre de sommets (non plats) de \mathcal{Q} peut être inférieur au nombre de sommets de \mathcal{P} . Dans ce cas, certains sommets M_i^* de \mathcal{Q} sont des sommets plats et peuvent (en général) glisser le long de $\partial\mathcal{Q}$, dans D_i , sans modifier $\partial\mathcal{Q}$.

Remarquons également que les lemmes 2.5, 2.6 et donc la proposition 2.7 sont vissés à l'hypothèse que \mathcal{P} est convexe (voir figure 2.6).

Proposition 2.9 Si $M_1^* \in D_1, \dots, M_n^* \in D_n$ sont les sommets d'un polygone géométriquement égal à \mathcal{Q} , alors pour sommet M_i^* non plat² :

- M_i^* est situé sur le bord de D_i .

² Si \mathcal{Q} est réduit à un point, $M_i^* = M_j^*$ pour tout (i, j) et nous considérons par convention que les sommets M_i^* sont plats.

FIG. 2.6 – Contre exemple à la proposition 2.7 lorsque \mathcal{P} n'est pas convexe

- Les segments $M_{i-1}^*M_i^*$ et $M_i^*M_{i+1}^*$ sont d'intersection vide avec l'intérieur de D_i .
- La droite $P_iM_i^*$ est la bissectrice des deux droites $M_{i-1}^*M_i^*$ et $M_i^*M_{i+1}^*$ qui sépare M_{i-1}^* et M_{i+1}^* .

Démonstration : Remarquons que le premier point de la proposition est un corollaire évident du deuxième point.

Soit M_i^* un sommet non plat de \mathcal{Q} . \mathcal{Q} étant de périmètre minimal, la ligne polygonale $M_{i-1}^*M_i^*M_{i+1}^*$ est une ligne polygonale $M_{i-1}^*MM_{i+1}^*$ de longueur minimale telle que $M \in D_i$. Le lieu des points M tel que la ligne polygonale $M_{i-1}^*MM_{i+1}^*$ soit de longueur fixée l est une ellipse de foyers M_{i-1}^* et M_{i+1}^* . Cette ellipse n'est réduite au segment $M_{i-1}^*M_{i+1}^*$ car dans ce cas M_i^* serait un sommet plat de \mathcal{Q} . Le fait que la longueur l soit minimale implique alors que, M_i^* est le point commun entre D_i et l'ellipse de foyers M_{i-1}^* et M_{i+1}^* , qui est tangente à D_i et qui ne contient pas D_i (voir figure 2.7). Ceci prouve le deuxième point de la proposition.

Une propriété classique des ellipses est que la normale à l'ellipse en un point M est la bissectrice des droites M_{i-1}^*M et MM_{i+1}^* qui sépare les foyers. Or, au point M_i^* , la normale à l'ellipse est également la normale à D_i laquelle passe par P_i . Donc, la droite $P_iM_i^*$ est la bissectrice des droites $M_{i-1}^*M_i^*$ et $M_i^*M_{i+1}^*$ qui sépare M_{i-1}^* et M_{i+1}^* . \square

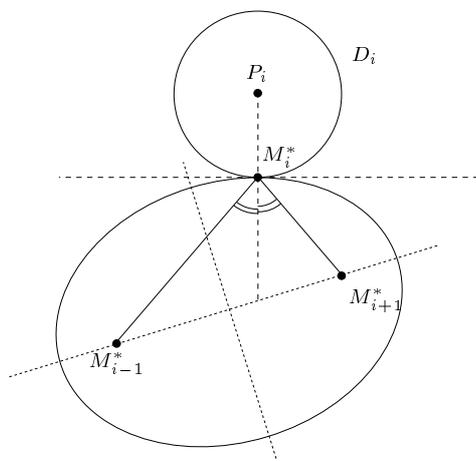


FIG. 2.7 – $P_i M_i^*$ est la bissectrice des deux droites $M_{i-1}^* M_i^*$ et $M_i^* M_{i+1}^*$ qui sépare M_{i-1}^* et M_{i+1}^*

2.4 Unicité de \mathcal{Q} et de \mathcal{T}

Nous définissons la fonction f suivante qui va jouer un rôle central dans le calcul de \mathcal{Q} et donc de \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} f : D_1 \times \dots \times D_n &\rightarrow \mathbb{R} \\ M_1, \dots, M_n &\mapsto \|M_1 M_2\| + \|M_2 M_3\| + \dots + \|M_{n-1} M_n\| + \|M_n M_1\| \end{aligned}$$

où $\|M_i M_{i+1}\|$ représente la distance euclidienne entre deux points M_i et M_{i+1} .

Proposition 2.10 f est convexe.

Démonstration : Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f} : D_1 \times D_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ M_1, M_2 &\mapsto \|M_1 M_2\|. \end{aligned}$$

La fonction \tilde{f} est convexe si et seulement si

$$\forall (M_1, M_2) \in D_1 \times D_2, \quad \forall (M'_1, M'_2) \in D_1 \times D_2, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$\tilde{f}(\lambda M_1 + (1-\lambda)M'_1, \lambda M_2 + (1-\lambda)M'_2) \leq \lambda \tilde{f}(M_1, M_2) + (1-\lambda) \tilde{f}(M'_1, M'_2)$$

Le membre de gauche de l'inégalité est bien défini puisque le domaine de définition de \tilde{f} est convexe. Par définition de \tilde{f} nous

avons :

$$\begin{aligned} & \tilde{f}(\lambda M_1 + (1 - \lambda)M'_1, \lambda M_2 + (1 - \lambda)M'_2) \\ &= \|(\lambda M_2 + (1 - \lambda)M'_2) - (\lambda M_1 + (1 - \lambda)M'_1)\| \\ &\leq \lambda \|M_2 - M_1\| + (1 - \lambda) \|M'_2 - M'_1\| \\ &\leq \lambda \tilde{f}(M_1, M_2) + (1 - \lambda) \tilde{f}(M'_1, M'_2) \end{aligned}$$

La fonction \tilde{f} est donc convexe, ce qui implique que la fonction f , somme de fonctions convexes, est convexe. Notons que f n'est pas strictement convexe. \square

Nous établissons tout d'abord la proposition suivante qui est un corollaire direct de la proposition 2.7.

Proposition 2.11 $f(M_1^*, \dots, M_n^*)$ est le minimum de f si et seulement si le polygone $M_1^* \dots M_n^*$ est de périmètre minimal parmi les régions d'intersection non vide avec chacun des disques D_1, \dots, D_n .

Démonstration : Soit M_1^*, \dots, M_n^* tels que $f(M_1^*, \dots, M_n^*)$ est le minimum de f et soit \mathcal{Q} un polygone de périmètre minimal et d'intersection non vide avec chacun des disques D_1, \dots, D_n . Clairement, le périmètre de \mathcal{Q} est inférieur ou égal à celui du polygone $M_1^* \dots M_n^*$. D'après la proposition 2.7, \mathcal{Q} est géométriquement égal à un polygone $M_1^* \dots M_n^*$ où $M_i^* \in D_i$ (attention : $\star \neq \star$). Comme $f(M_1^*, \dots, M_n^*)$ ne peut être strictement inférieur au minimum de f , $f(M_1^*, \dots, M_n^*)$, qui est égal au périmètre de \mathcal{Q} , est aussi égal à $f(M_1^*, \dots, M_n^*)$, qui est le périmètre du polygone $M_1^* \dots M_n^*$.

Réciproquement, si $f(M_1, \dots, M_n)$ n'est pas le minimum de f , le périmètre du polygone $M_1 \dots M_n$ n'est pas minimal parmi les régions d'intersection non vide avec chacun des disques D_1, \dots, D_n . \square

Lemme 2.12 Soient θ_i l'angle $\angle(\overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i M_i})$ où M_i est un point du bord de D_i et $U_i \subset [0, 2\pi]$ l'ensemble des θ_i tel que $M_i \in \mathcal{P}$ ($1 \leq i \leq n$). Soit g la fonction M_i est un point de C_i ($1 \leq i \leq n$). Soit g la fonction

$$\begin{aligned} g : [0, 2\pi]^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta_1, \dots, \theta_n) &\mapsto \|M_1 M_2\| + \|M_2 M_3\| + \dots + \|M_{n-1} M_n\| + \|M_n M_1\| \end{aligned}$$

et soit $\mathcal{D} \subset [0, 2\pi]^n$ l'ensemble ouvert des $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ tels que le polygone $M_1 \dots M_n$ ait une intersection vide avec l'intérieur de chacun des disques D_1, \dots, D_n .

Alors, g est localement strictement convexe sur \mathcal{D} , i.e. pour tout $\Theta \in \mathcal{D}$, il existe un voisinage ouvert de Θ sur lequel la restriction de g est strictement convexe.

Remarque 2.13 g ne peut être convexe sur \mathcal{D} car \mathcal{D} n'est pas convexe. Remarquons également que $\Theta \in \mathcal{D}$ si et seulement si le polygone $M_1 \dots M_n$ a une intersection vide avec l'intérieur de chacun des disques D_1, \dots, D_n et si le segment $M_i M_{i+1}$ n'est ni tangent à C_i ni à C_{i+1} , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration : Nous montrons dans un premier temps que la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{g} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto \|M_1 M_2\| \end{aligned}$$

est localement strictement convexe sur le domaine \mathcal{G} égal à l'ensemble ouvert des points (θ_1, θ_2) pour lesquels l'intérieur relatif du segment $M_1 M_2$ a une intersection vide avec D_1 et D_2 , et n'est ni tangent à D_1 ni à D_2 . Pour ce faire, nous montrons que le Hessien de \tilde{g} (i.e. la matrice des dérivées secondes) a toutes ses valeurs propres strictement positives en tout point de \mathcal{G} . Comme \tilde{g} est une fonction à deux variables, il est équivalent de montrer que le déterminant et la trace du Hessien sont tout deux strictement positifs en tout point de \mathcal{G} . Les calculs présentés sont extraits de [Bui94, lemme III-2.3]; cependant, la conclusion est différente car ce lemme III-2.3 montre la convexité de la fonction \tilde{g} ce qui est faux en raison de la non convexité de \mathcal{G} .

Considérons les notations suivantes (voir figure 2.8) : soient $\vec{u} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, \hat{u} le vecteur unitaire de direction \vec{u} , \hat{u}^- le vecteur orthogonal direct à \hat{u} , C_1 et C_2 les bords respectifs des disques D_1 et D_2 , P_1 et P_2 leurs centres respectifs, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1 M_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2 M_2}$, \vec{t}_1 et \vec{t}_2 les vecteurs orthogonaux directs à \vec{r}_1 et \vec{r}_2 .

De façon évidente on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} = \vec{t}_1 & \begin{cases} \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial \theta_1} = -\vec{r}_1 \\ \frac{\partial \vec{t}_1}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} & \begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} = \vec{t}_2 \end{cases} & \begin{cases} \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \vec{t}_2}{\partial \theta_2} = -\vec{r}_2 \end{cases} \end{cases}$$

$\vec{u} = -\vec{r}_1 + \overrightarrow{P_1 P_2} + \vec{r}_2$ donc $\partial \vec{u} / \partial \theta_1 = -\vec{t}_1$ et $\partial \vec{u} / \partial \theta_2 = +\vec{t}_2$. Comme $\tilde{g}(\theta_1, \theta_2) = \vec{u} \cdot \hat{u}$ il vient

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta_1} = -\vec{t}_1 \cdot \hat{u} + \lambda \vec{u} \cdot \hat{u}^- \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

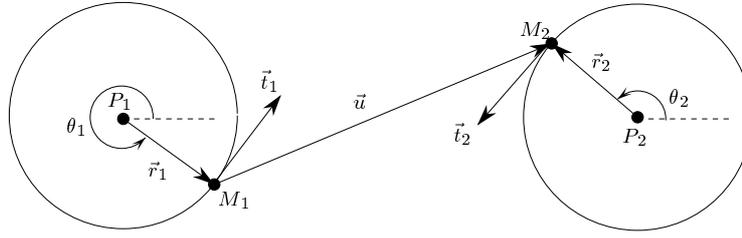


FIG. 2.8 – Pour la preuve du lemme 2.12

$$= -\vec{t}_1 \cdot \hat{u}$$

car la dérivée du vecteur unitaire \hat{u} est orthogonale à \hat{u} . De façon similaire nous calculons la dérivée de \tilde{g} par rapport à θ_2 , après quoi nous calculons les dérivées secondes de \tilde{g} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta_2} &= \vec{t}_2 \cdot \hat{u} \\ \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial \theta_1^2} &= \vec{r}_1 \cdot \hat{u} - \vec{t}_1 \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial \theta_2^2} &= -\vec{r}_2 \cdot \hat{u} + \vec{t}_2 \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= -\vec{t}_1 \cdot \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta_2} \end{aligned}$$

Calculons $\partial \hat{u} / \partial \theta_1$: $\hat{u} = \vec{u} / \tilde{g}(\theta_1, \theta_2)$ donc

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta_1} = \frac{-\vec{t}_1}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)} + \frac{\vec{t}_1 \cdot \hat{u}}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)^2} \vec{u} = \frac{1}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)} (-\vec{t}_1 + (\vec{t}_1 \cdot \hat{u}) \hat{u})$$

En écrivant \vec{t}_1 dans la base (\hat{u}, \hat{u}^-) on obtient

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta_1} = -\frac{\vec{t}_1 \cdot \hat{u}^-}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)} \hat{u}^-$$

De même on établit

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta_2} = \frac{\vec{t}_2 \cdot \hat{u}^-}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)} \hat{u}^-$$

Comme $\vec{t}_i \cdot \hat{u}^- = \vec{r}_i \cdot \hat{u}$ pour $i = 1, 2$, les dérivés secondes de \tilde{g}

s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial \theta_1^2}(\theta_1, \theta_2) &= \vec{r}_1 \cdot \hat{u} + \frac{(\vec{r}_1 \cdot \hat{u})^2}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)} \\ \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) &= -\frac{(\vec{r}_1 \cdot \hat{u})(\vec{r}_2 \cdot \hat{u})}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)} \\ \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial \theta_2^2}(\theta_1, \theta_2) &= -\vec{r}_2 \cdot \hat{u} + \frac{(\vec{r}_2 \cdot \hat{u})^2}{\tilde{g}(\theta_1, \theta_2)} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire le Hessien de \tilde{g} sous la forme

$$\begin{pmatrix} A + \frac{A^2}{L} & \frac{AB}{L} \\ \frac{AB}{L} & B + \frac{B^2}{L} \end{pmatrix}$$

où $A = \vec{r}_1 \cdot \hat{u}$, $B = -\vec{r}_2 \cdot \hat{u}$ et $L = \tilde{g}(\theta_1, \theta_2)$. Le déterminant du Hessien est donc

$$AB \left(1 + \frac{A+B}{L}\right)$$

Par définition de \mathcal{G} , $\forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{G}$, A et B sont strictement positifs. Donc, le déterminant et la trace du Hessien sont tous deux strictement positifs en tout point de \mathcal{G} . Ceci nous montre que \tilde{g} est localement strictement convexe sur \mathcal{G} .

Cela implique évidemment que, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i : U_i \times U_{i+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta_i, \theta_{i+1} &\mapsto \|M_i M_{i+1}\|. \end{aligned}$$

est localement strictement convexe en tout point (θ_i, θ_{i+1}) pour lequel l'intérieur relatif du segment $M_i M_{i+1}$ a une intersection vide avec D_i et D_{i+1} , et n'est ni tangent à D_1 ni à D_2 . Il s'ensuit que \tilde{g}_i est localement strictement convexe sur la projection \mathcal{D}_i de \mathcal{D} sur $U_i \times U_{i+1}$. Il s'ensuit que, la fonction

$$\begin{aligned} g_i : U_1 \times \dots \times U_n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta_1, \dots, \theta_n &\mapsto \|M_i M_{i+1}\| \end{aligned}$$

est localement strictement convexe sur \mathcal{D} . Comme $g = \sum_{1 \leq i \leq n} g_i$, nous pouvons conclure que g est localement strictement convexe sur \mathcal{D} . \square

Nous pouvons à présent établir l'unicité de \mathcal{Q} :

Proposition 2.14 *\mathcal{Q} est unique.*

Démonstration : Soit \mathcal{Q} un polygone de périmètre minimal et d'intersection non vide avec chacun des disques D_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Par hypothèse, le rayon r du plus petit cercle contenant \mathcal{S} est supposé strictement supérieur à 1. Donc $\bigcap_{1 \leq i \leq n} D_i = \emptyset$ et \mathcal{Q} n'est pas réduit à un point. D'après la proposition 2.11, \mathcal{Q} est géométriquement égal à un polygone $M_1^* \dots M_n^*$ tels que $M_i^* \in D_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Soit $M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*$ les sommets non plats de \mathcal{Q} ($q > 1$ car \mathcal{Q} n'est pas réduit à un point) et soit \mathcal{U} l'ensemble des polygones d'intersection non vide avec chacun des q disques D_{i_1}, \dots, D_{i_q} .

Nous montrons la proposition en trois temps : premièrement, nous montrons que le polygone $M_{i_1}^* \dots M_{i_q}^*$ est, parmi les polygones de \mathcal{U} , de périmètre minimal. Deuxièmement, nous montrons qu'il existe un unique polygone de \mathcal{U} de périmètre minimal. Dans un troisième temps, nous considérons les n disques D_1, \dots, D_n .

1) Pour montrer que le polygone $M_{i_1}^* \dots M_{i_q}^*$ est, parmi les polygones de \mathcal{U} , de périmètre minimal, nous montrons en premier lieu que toute perturbation d'un sommet $M_{i_j}^*$ dans D_{i_j} augmente strictement le périmètre du polygone.

Notons que si le polygone $M_{i_1}^* \dots M_{i_q}^*$ n'est tangent à aucun des disques D_1, \dots, D_n , il est possible de montrer simplement qu'il est de périmètre minimal parmi les polygones de \mathcal{U} . Malheureusement, si le polygone est tangent à certains disques de D_1, \dots, D_n il n'est pas possible de conclure simplement. Notons également que l'on ne peut pas ajouter les points de tangence entre le polygone et les disques dans la liste $\{M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*\}$ car alors la deuxième partie de la démonstration n'est plus exacte.

Soit \mathcal{E}_1 (resp. \mathcal{E}_2) l'ellipse de foyers $M_{i_{j-1}}^*$ et $M_{i_{j+1}}^*$ (resp. $M_{i_{j-1}}^*$ et $M_{i_{j+1}}^*$) qui contient $M_{i_j}^*$ (voir figure 2.9). Comme \mathcal{Q} est de périmètre minimal, d'après la preuve de la proposition 2.9, \mathcal{E}_1 est tangente à D_{i_j} en $M_{i_j}^*$ et le disque D_{i_j} est situé à l'extérieur de \mathcal{E}_1 . De plus, la droite L normale à \mathcal{E}_1 en $M_{i_j}^*$ est la bissectrice des deux droites $M_{i_j}^* M_{i_{j-1}}^*$ et $M_{i_j}^* M_{i_{j+1}}^*$ qui sépare $M_{i_{j-1}}^*$ et $M_{i_{j+1}}^*$. Comme $M_{i_{j-1}}^*$ et $M_{i_{j+1}}^*$ sont des sommets plats, ils appartiennent aux segments $M_{i_j}^* M_{i_{j-1}}^*$ et $M_{i_j}^* M_{i_{j+1}}^*$, respectivement. Il s'ensuit que, la droite normale à \mathcal{E}_2 en $M_{i_j}^*$ est L , et donc que, \mathcal{E}_2 est tangente

à \mathcal{E}_1 et à D_{i_j} en $M_{i_j}^*$. De plus, \mathcal{E}_1 est clairement à l'intérieur de \mathcal{E}_2 donc, D_{i_j} est situé à l'extérieur de \mathcal{E}_2 .

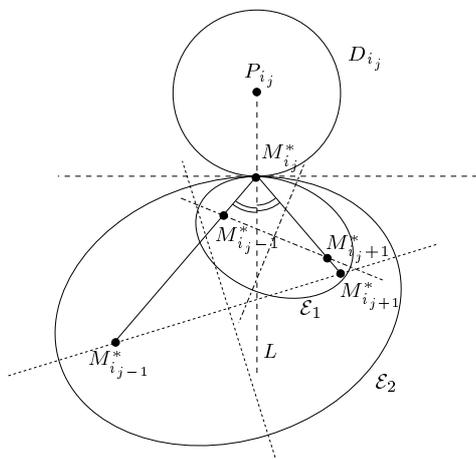


FIG. 2.9 – Pour la preuve de la proposition 2.14

Donc, $\forall M \in D_{i_j}$ tel que $M \neq M_{i_j}^*$, M appartient à la région ouverte situé à l'extérieur de l'ellipse \mathcal{E}_2 et donc,

$$\|M_{i_{j-1}}^* M\| + \|M M_{i_{j+1}}^*\| > \|M_{i_{j-1}}^* M_{i_j}^*\| + \|M_{i_j}^* M_{i_{j+1}}^*\|.$$

Nous avons donc que, toute perturbation de $M_{i_j}^*$ dans D_{i_j} augmente strictement le périmètre du polygone $M_{i_1}^* \dots M_{i_q}^*$.

Il s'ensuit que $(M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*)$ réalise un minimum local de la fonction

$$\begin{aligned} \hat{f} : D_{i_1} \times \dots \times D_{i_q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (M_{i_1}, \dots, M_{i_q}) &\mapsto \|M_{i_1} M_{i_2}\| + \dots \\ &\quad + \|M_{i_{q-1}} M_{i_q}\| + \|M_{i_q} M_{i_1}\|. \end{aligned}$$

En effet, soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^{2n}$ un vecteur suffisamment petit tel que $(M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*) + \vec{u} \in D_{i_1} \times \dots \times D_{i_q}$. Le vecteur \vec{u} est la somme de q vecteurs $(\dots, \vec{0}, \vec{u}_{i_j}, \vec{0}, \dots) \in \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$ tels que $M_{i_j}^* + \vec{u}_{i_j} \in D_{i_j}$. Soit $D\hat{f}(M^*)$ la différentielle de \hat{f} en $M^* = (M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*)$. Comme nous l'avons montré précédemment,

$$D\hat{f}(M^*).(\dots, \vec{0}, \vec{u}_{i_j}, \vec{0}, \dots) \geq 0$$

minimum de \hat{f} , c'est le minimum de la restriction de \hat{f} à $C_{i_1} \times \dots \times C_{i_q}$ et donc, $g(\theta_{i_1}^*, \dots, \theta_{i_q}^*)$ est le minimum de g . Nous avons ainsi que, pour tout $(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_q}) \neq (\theta_{i_1}^*, \dots, \theta_{i_q}^*)$ dans un voisinage suffisamment de $(\theta_{i_1}^*, \dots, \theta_{i_q}^*)$, $g(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_q}) > g(\theta_{i_1}^*, \dots, \theta_{i_q}^*)$. Donc, pour tout $(M_{i_1}, \dots, M_{i_q}) \neq (M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*)$ dans $C_{i_1} \times \dots \times C_{i_q}$ et dans un voisinage suffisamment de $(M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*)$, le périmètre du polygone $M_{i_1} \dots M_{i_q}$ est strictement supérieur à celui du polygone $M_{i_1}^* \dots M_{i_q}^*$. Nous avons donc montré l'unicité du polygone de périmètre minimal et d'intersection non vide avec chacun des disques D_{i_1}, \dots, D_{i_q} .

3) Soit \mathcal{Q}' un polygone de périmètre minimal et d'intersection non vide avec chacun des disques D_1, \dots, D_n . Nous montrons que $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}$. \mathcal{Q}' a évidemment une intersection non vide avec chacun des q disques D_{i_1}, \dots, D_{i_q} . D'après ce qui précède, un polygone de périmètre minimal et d'intersection non vide avec chacun des q disques D_{i_1}, \dots, D_{i_q} est unique et égal à \mathcal{Q} . Donc, soit $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}$ soit le périmètre de \mathcal{Q}' est strictement supérieur à celui de \mathcal{Q} . Comme les périmètres de \mathcal{Q}' et de \mathcal{Q} sont égaux, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}$. \square

Les propositions 2.3 et 2.14 nous permettent d'établir la proposition suivante :

Proposition 2.15 \mathcal{T} est unique.

2.5 Résultats et algorithmes

Rappelons que \mathcal{S} est un ensemble fini de points du plan tel que le rayon du plus petit disque contenant \mathcal{S} soit supérieur à 1. $\mathcal{P} = P_1 \dots P_n$ est son enveloppe convexe et D_1, \dots, D_n sont les disques unitaires fermés centrés, respectivement, en P_1, \dots, P_n . Nous résumons les résultats des propositions 2.3, 2.11, 2.15 et 2.10 dans le théorème suivant :

Théorème 2.16 \mathcal{S} a une unique enveloppe convexe de courbure bornée qui est égale à la somme de Minkowski du disque unitaire centré à l'origine et de n'importe quel polygone $M_1^* \dots M_n^*$ tel que $f(M_1^*, \dots, M_n^*)$ soit le minimum de la fonction convexe

$$f : D_1 \times \dots \times D_n \rightarrow \mathbb{R} \\ M_1, \dots, M_n \mapsto \|M_1 M_2\| + \|M_2 M_3\| + \dots + \|M_{n-1} M_n\| + \|M_n M_1\|.$$

D'après le théorème 2.16, le seul point délicat dans le calcul de l'enveloppe convexe de courbure bornée est donc le calcul d'un point réalisant le minimum

de la fonction f . La minimisation de f peut également être vue comme la minimisation de la fonction :

$$F : \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ M_1, \dots, M_n \mapsto \|M_1 M_2\| + \|M_2 M_3\| + \dots + \|M_{n-1} M_n\| + \|M_n M_1\|$$

sous les n contraintes $M_i \in D_i$, $1 \leq i \leq n$.

Les méthodes classiques d'optimisation résolvent bien ce type de problème. Pour ε donné, calculer (M_1, \dots, M_n) tel que $f(M_1, \dots, M_n) - f^* \leq \varepsilon$ où f^* est le minimum de f , requiert, avec un algorithme de points intérieurs approprié (i.e. "a path-following method"), $O(\sqrt{n} \log(n(R+1)/\varepsilon))$ itérations où R est le maximum des longueurs des arêtes du polygone \mathcal{P} (voir [NN94, Chapter 6]). Chaque itération est réduite au calcul d'un pas de Newton dont la complexité en temps est linéaire en n car, pour notre problème, le système linéaire à résoudre est suffisamment creux. Calculer une approximation à ε près de l'enveloppe convexe de courbure bornée de n points peut donc se faire avec une complexité en temps $O(n\sqrt{n} \log(n(R+1)/\varepsilon))$.

Nous proposons également deux algorithmes exacts pour le calcul d'enveloppes convexes de courbure bornée. Pour ce faire, nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 2.17 \mathcal{S} a une unique enveloppe convexe de courbure bornée qui est égale à la somme de Minkowski du disque unitaire centré à l'origine et d'un polygone $M_1^* \dots M_n^*$ de périmètre minimal tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $M_i^* \in D_i$ et

$$\left(\frac{\overrightarrow{M_i^* M_{i-1}^*}}{\|M_i^* M_{i-1}^*\|} + \frac{\overrightarrow{M_i^* M_{i+1}^*}}{\|M_i^* M_{i+1}^*\|} \right) \times \overrightarrow{P_i M_i^*} = 0 \quad (2.1)$$

où " \times " représente le produit extérieur. De plus, tout sommet M_i^* non plat de \mathcal{Q} est situé sur le bord de D_i .

Démonstration : Les propositions 2.3, 2.7 et 2.9 impliquent que l'enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble \mathcal{S} de points est la somme de Minkowski du disque unitaire centré à l'origine et d'un polygone $M_1^* \dots M_n^*$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $M_i^* \in D_i$, et tel que, pour tout i tel que M_i^* soit un sommet non plat du polygone $M_1^* \dots M_n^*$, l'équation 2.1 soit vérifiée et M_i^* appartienne au bord de D_i .

D'autre part, pour tout i tel que M_i^* soit un sommet plat du polygone $M_1^* \dots M_n^*$, l'équation 2.1 est également vérifiée car alors

$$\frac{\overrightarrow{M_i^* M_{i-1}^*}}{\|M_i^* M_{i-1}^*\|} + \frac{\overrightarrow{M_i^* M_{i+1}^*}}{\|M_i^* M_{i+1}^*\|} = \vec{0}.$$

□

Le calcul du polygone $M_1^* \dots M_n^*$ peut donc se faire par la résolution du système

$$\begin{cases} \left(\frac{\overrightarrow{M_i M_{i-1}}}{\|M_i M_{i-1}\|} + \frac{\overrightarrow{M_i M_{i+1}}}{\|M_i M_{i+1}\|} \right) \times \overrightarrow{P_i M_i} = 0 \\ M_i \in D_i \\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Ce système induit un système semi algébrique à $2n$ inconnues composé de n équations et n inéquations. Ce système peut être résolu en temps doublement exponentiel par l'algorithme de décomposition cylindrique algébrique de Collins [BCK88]. A deux solutions du système, prises dans une même composante connexe de l'ensemble des solutions, sont associées des polygones égaux. On obtient alors le polygone $M_1^* \dots M_n^*$ en comparant les périmètres des polygones associés à une solution de chaque composante connexe des solutions du système.

Le calcul du polygone $M_1^* \dots M_n^*$ peut également se faire en résolvant l'ensemble des $(2^n - 1)$ systèmes suivants pour $\{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$\begin{cases} \left(\frac{\overrightarrow{M_{i_j} M_{i_{j-1}}}}{\|M_{i_j} M_{i_{j-1}}\|} + \frac{\overrightarrow{M_{i_j} M_{i_{j+1}}}}{\|M_{i_j} M_{i_{j+1}}\|} \right) \times \overrightarrow{P_{i_j} M_{i_j}} = 0 \\ M_{i_j} \in C_{i_j} \\ i_j \in \{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

où C_{i_j} est le bord du disque D_{i_j} . Ce système peut être transformé en un système algébrique de q équations (de degré 6) à q inconnues $\tan(\theta_{i_j}/2)$ ($j \in \{i_1, \dots, i_q\}$) où θ_{i_j} est l'angle polaire de $\overrightarrow{P_{i_j} M_{i_j}}$. Pour chaque système on considère la solution correspondant au polygone $M_{i_1} \dots M_{i_q}$ de périmètre minimal. Le polygone \mathcal{Q} est alors, parmi les $(2^n - 1)$ polygones $M_{i_1} \dots M_{i_q}$, le polygone de périmètre minimal d'intersection non vide avec chacun des disques D_i ($i \in \{1, \dots, n\}$). Chacun des $(2^n - 1)$ systèmes peut être résolu en temps $O(2^{O(n)})$ [LL91]. Le calcul de la solution peut donc être effectué en temps $O(2^{O(n)})$.

Remarquons que l'algorithme basé sur la décomposition cylindrique algébrique de Collins est peu réaliste en pratique. L'autre méthode basé sur la résolution de $O(2^n)$ systèmes algébriques est clairement peu efficace mais probablement plus réaliste.

Remarquons également que l'on ne peut pas assurer l'existence de chaque M_i^* sur le bord de D_i (voir figure 2.10) et donc que \mathcal{Q} ne peut pas (par cette méthode) être obtenu par la résolution d'un unique système algébrique.

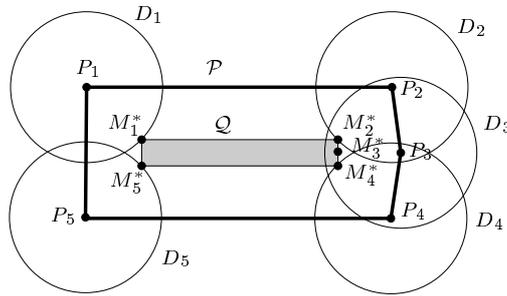


FIG. 2.10 – Exemple pour lequel M_3^* ne peut appartenir au bord du disque D_3

2.6 Conclusion

Nous avons présenté deux algorithmes calculant l'enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble de points, l'un approché et de complexité polynomiale, l'autre exact mais de complexité exponentielle. Tout d'abord, remarquons que deux questions se posent naturellement dans le cadre de ce problème. D'une part, existe-t-il un algorithme polynomial exact pour ce problème? D'autre part, existe-t-il un algorithme polynomial pour le calcul de l'ensemble $\{i_1, \dots, i_q\}$ tel que $\{M_{i_1}^*, \dots, M_{i_q}^*\}$ soit l'ensemble des sommets non plats du polygone $M_1^* \dots M_n^*$?

De nombreuses généralisations du problème considéré apparaissent également naturellement. L'une consiste à étudier l'enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble de points dans \mathbb{R}^3 (et dans \mathbb{R}^d). Nous n'avons pas pour ce problème de caractérisation du bord de l'enveloppe convexe, il semble cependant qu'en dimension trois, le bord d'une telle enveloppe convexe est constitué de calottes sphérique, de régions planaires et de morceaux de cylindre. Les algorithmes présentés en dimension deux semblent pouvoir se généraliser aux dimensions supérieures. Les démonstrations restent cependant à faire.

Une autre extension naturelle du problème consiste à considérer l'enveloppe convexe, d'un ensemble \mathcal{S} de points, telle que le bord de l'enveloppe soit une courbe C^2 pour laquelle la dérivée de la courbure est bornée en tout point où elle est définie. Dans le plan, une telle enveloppe convexe est constituée de segments de droite et d'arcs de clothoïde. Cela étant, dès que les points de \mathcal{S} sont suffisamment éloignés, une telle enveloppe convexe présente des pathologies. En effet, comme nous l'avons mentionné dans la section 1.2.3, pour des points suffisamment éloignés, le bord de l'enveloppe convexe n'est pas constitué d'un nombre fini d'arcs C^3 . Cependant, le problème reste ouvert quant à trouver une approximation de bord C^2 et C^3 par morceaux de

cette enveloppe convexe. Rappelons que le calcul d'une approximation d'un plus court chemin C^2 , avec une borne sur la dérivée de la courbure, entre deux configurations dans le plan sans obstacle est étudié dans [KDK94].

Les enveloppes convexes de courbure bornée que nous avons étudiées minimisent le périmètre de l'enveloppe. Un autre problème intéressant consiste à étudier les enveloppes convexes de courbure bornée minimisant l'aire de l'enveloppe.

Rappelons enfin, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, qu'une approche du problème de la planification de trajectoires de courbure bornée en présence d'obstacles polygonaux consiste à calculer l'enveloppe convexe de courbure bornée de chaque obstacle, puis à calculer une trajectoire de courbure bornée en présence d'obstacles de courbure bornée (ce problème étant traité dans le chapitre suivant).

Chapitre 3

A polynomial-time algorithm for computing a shortest path of bounded curvature amidst moderate obstacles

(Une version résumée de ce chapitre a été publiée dans les *Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry* [BL96b])

Abstract

In this paper, we consider the problem of computing a shortest path of bounded curvature amidst obstacles in the plane. More precisely, given prescribed initial and final configurations (i.e. positions and orientations) and a set of obstacles in the plane, we want to compute a shortest C^1 path joining those two configurations, avoiding the obstacles, and with the further constraint that, on each C^2 piece, the radius of curvature is at least 1. In this paper, we consider the case of moderate obstacles (as introduced by Agarwal et al.) and present a polynomial-time exact algorithm to solve this problem.

3.1 Introduction

In this paper, we consider the problem of computing a shortest path of bounded curvature amidst obstacles in the plane, SBC path for short. More precisely, given prescribed initial and final configurations (i.e. positions and orientations) and a set of obstacles in the plane, we want to compute a

shortest C^1 path joining those two configurations, avoiding the obstacles, and with the further constraint that, on each C^2 piece¹, the radius of curvature is at least 1. This question appears in many applications and goes back to Markov who studied the problem for joining pieces of railways. More recently, a great deal of attention has been paid to this question in the context of non-holonomic robot motion planning [BL93, Lat91, LJTM94, LC92]. A robot is said to be non-holonomic if some kinematics constraints locally restricts the authorized directions for its velocity. A typical non-holonomic robot is a car: assuming no slipping of the wheels on the ground, the velocity of the midpoint between the two rear wheels of the car is always tangent to the car axis. Though the problem considered in this paper is one of the simplest instances of non-holonomic motion planning, it is still far from being well understood.

Even in the absence of obstacles, the problem is not easy. Dubins [Dub57] proved that any SBC path takes one of the following forms CSC or CCC , where C means a circular arc of radius 1 and S a straight line segment. The proof in Dubins paper is quite long and intricate. Recently, a much simpler proof has been obtained using the Minimum Principle of Pontryagin (a central result in Control Theory) [BCL94b, ST91] and a complete characterization of SBC paths has also been established [BSBL94].

The problem becomes much harder in the presence of obstacles. By basic theorems in Control Theory, there exists a SBC path amidst obstacles and joining two given configurations as soon as there exists a BC path, i.e. a (not necessarily optimal) C^1 path joining the two given configurations, avoiding the obstacles and where the radius of curvature is everywhere (where it is defined) greater or equal to 1. Moreover, a SBC path is a concatenation of subpaths either contained in the boundary of some obstacle or joining two obstacle edges (considering the initial and the final configurations as point obstacles); each subpath joining two obstacle edges is a Dubins path, i.e. a path of type CSC or CCC . Computing a shortest path seems however a formidable task. Even if we remove the requirement for the path to be a shortest one and look for a BC path (instead of a SBC path), no polynomial-time algorithm is known. In [FW91], Fortune and Wilfong present an exact algorithm that can decide if a BC path exists but does not generate the path in question. This algorithm runs in time and space that is exponential with respect to the number n of corners of the environment and the number of bits used to specify the positions of the corners. By the remark above, this algorithm can also decide if a SBC path exists.

For computing SBC paths, only approximate algorithms have been pro-

1. As we will see below, the optimal path is piecewise C^2 .

posed in the literature. Jacobs and Canny [JC89] discretize the problem and calculate a path that approximates the shortest one in time $O(n^2(\frac{n+L}{\varepsilon}) \log n + \frac{(n+L)^2}{\varepsilon^2})$, where ε describes the closeness of the approximation and L is the total edge length of the obstacle boundaries. Very recently, Wang and Agarwal [WA96] improved on this result and proposed an algorithm whose time complexity is $O(\frac{n^2}{\varepsilon^2} \log n)$, and thus does not depend on L . In another recent paper, Agarwal et al. [ART95] have considered a restricted class of obstacles, the so-called moderate obstacles: an obstacle is said to be moderate if it is convex and if its boundary is a differentiable curve whose radius of curvature is everywhere greater or equal to 1. This restriction is quite strong but valid in many practical situations. Under the assumption that all the obstacles are disjoint and moderate, Agarwal et al. show that an approximate SBC path can be computed in $O(n^2 \log n + 1/\varepsilon)$ time.

In this paper, we consider also the case of moderate obstacles (in a more restrictive sense than Agarwal et al.) and present a polynomial-time algorithm to compute a SBC path (assuming that the roots of some polynomials of bounded degree can be computed in constant time). To the best of our knowledge, this is the first polynomial-time exact algorithm for a non trivial instance of the problem.

The paper is organized as follows. In Section 3.2, we introduce some notations and show that the problem reduces to finding an Euclidean shortest path when the initial and the final positions are sufficiently far away and also sufficiently far from the obstacles. In the following Sections 3.3, 3.4 and 3.5 we show that SBC paths belong to a finite family. In Section 3.6, we describe an algorithm that computes an optimal path between two given configurations.

3.2 Preliminaries

First, we give some definitions and notations. Let Ω be a set of obstacles. In this paper, the obstacles are assumed to be disjoint and moderate. An obstacle is said to be *moderate* if it is convex and if its boundary is a differentiable curve made of line segments and circular arcs of unit radius. For convenience and without real loss of generality, we assume that no two edges of the obstacles are parallel. A path that avoids the obstacles (i.e. that does not intersect the interior of the obstacles) is called *free*. In the sequel, a free SBC path is simply called an *optimal path*.

Let $\omega_S = (S, \vec{U}_S)$ and $\omega_T = (T, \vec{U}_T)$ be two configurations (i.e. positions and orientations). Let \mathcal{P} be an optimal path joining ω_S to ω_T . As mentioned in the introduction, \mathcal{P} is a finite concatenation of O , C and S -segments; an O -segment is a maximal portion of \mathcal{P} that coincides with the boundary of an

obstacle; a C -segment is a maximal circular arc of unit radius that is not an O -segment; a S -segment is a maximal line segment, possibly on the boundary of some obstacle. To a path, we will associate the sequence of the types (O , C or S) of its segments.

The first and last segments are called *terminal*. A terminal segment is, in general, a C -segment; we denote it by C_t . A C -segment (or a circle of unit radius) is denoted by \bar{C} if it is tangent to at least one obstacle. A C -segment (or a circle of unit radius) is called *anchored* and denoted by $\bar{\bar{C}}$ either if it is tangent to at least two obstacles, or if it is tangent to at least one obstacle and adjacent to a terminal C -segment, or if it is terminal.

The first theorem shows that, when the initial and the final positions are sufficiently far away and also sufficiently far from the obstacles, the optimal path is an Euclidean shortest path for an augmented set of obstacles.

Let M be a point of \mathcal{P} and let $C_L(M)$ (resp. $C_R(M)$) be the unit circle tangent to \mathcal{P} at M and lying on the left (resp. right) side of the path \mathcal{P} oriented from S to T . $C_L(M)$ is oriented counterclockwise and $C_R(M)$ is oriented clockwise. An arc of one of these circles will be oriented accordingly.

Let C'_S (resp. C'_T) be the circle tangent to $C_L(S)$ and $C_R(S)$ ($C_L(T)$ and $C_R(T)$) that does not intersect the ray (S, \vec{U}_S) (the ray $(T, -\vec{U}_T)$) (see Figure 3.1). Let \mathcal{R}_S (resp. \mathcal{R}_T) be the shaded region limited by $C_L(S)$, $C_R(S)$ and C'_S ($C_L(T)$, $C_R(T)$ and C'_T) in Figure 3.1.

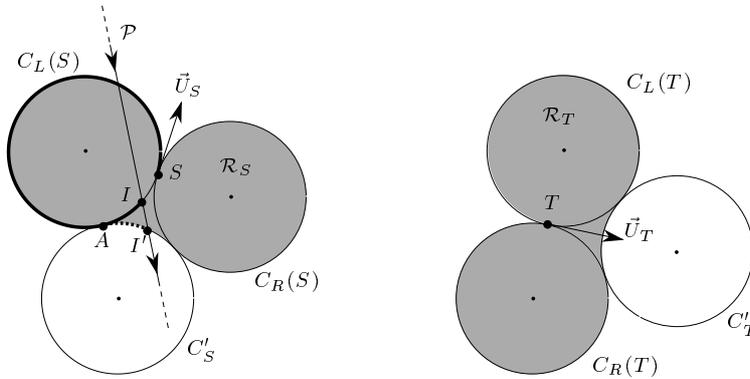


FIG. 3.1 – Regions \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T

Lemma 3.1 *If \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T are disjoint and do not intersect the obstacles, \mathcal{P} does not intersect the interior of \mathcal{R}_S nor that of \mathcal{R}_T .*

Proof: We assume for a contradiction that \mathcal{P} intersects the interior of \mathcal{R}_S . We consider first the case where \mathcal{P} does not intersect the interior of \mathcal{R}_T . As

\mathcal{P} is a path of bounded curvature, \mathcal{P} intersects $C_L(S)$ or $C_R(S)$. Let I be the last intersection point (along \mathcal{P}) between \mathcal{P} and $C_L(S) \cup C_R(S)$; we assume, without loss of generality, that $I \in C_L(S)$. Let I' be the last intersection point (along \mathcal{P}) between \mathcal{P} and \mathcal{R}_S and let II' be the part of \mathcal{P} from I to I' (notice that I and I' can coincide). We denote by A the point common to $C_L(S)$ and C'_S (see Figure 3.1).

First, we assume that $I \neq S$. Let SI be the arc of $C_L(S)$, oriented as $C_L(S)$, that starts at S and ends at I . Let \mathcal{P}' be the concatenation of SI and the part of \mathcal{P} from I to T . \mathcal{P}' is not a path of bounded curvature but it is shorter than \mathcal{P} since the shortest path of bounded curvature from ω_S to I (the orientation at I is not specified) is the arc SI [BB94]. Let \mathcal{P}'' be the path obtained by modifying \mathcal{P}' as follows: if $I' \neq I$, then we replace the arc AI of $C_L(S)$ and II' by the circular arc AI' of C'_S . The path \mathcal{P}'' is shorter than \mathcal{P}' , thus \mathcal{P}'' is shorter than \mathcal{P} . Moreover, \mathcal{P}'' avoids \mathcal{R}_S by construction, and avoids also all the moderate obstacles and \mathcal{R}_T by hypothesis. Hence, the Euclidean shortest path \mathcal{P}''' from S to T avoiding Ω , \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T is shorter than \mathcal{P} . That yields a contradiction because this Euclidean shortest path is a path of bounded curvature from ω_S to ω_T . Indeed, \vec{U}_S (resp. \vec{U}_T) is the vector tangent to \mathcal{P}''' at S (resp. T), by construction, and \mathcal{P}''' is a path of bounded curvature since \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T and all the obstacles of Ω are moderate.

If $I = S$, the orientation of \mathcal{P} at I can only be \vec{U}_S or $-\vec{U}_S$ since I is the last intersection point between \mathcal{P} and $C_L(S) \cup C_R(S)$. But only the latter cases can occur since otherwise, \mathcal{P} would not be optimal. As by definition, I lies before I' along \mathcal{P} , the part of \mathcal{P} from (S, \vec{U}_S) to I' is longer than the shortest Dubins path from (S, \vec{U}_S) to $(S, -\vec{U}_S)$ which is a path of type CCC of length $2\pi + \pi/3$. Let SI' be the concatenation of the arc SA of $C_L(S)$ and the circular arc AI' , and let \mathcal{P}' be the concatenation of SI' and the part of \mathcal{P} from I' to T . As, the length of SI' is at most 2π , \mathcal{P}' is shorter than \mathcal{P} . We then get a contradiction as above.

Similar arguments hold if \mathcal{P} intersects the interior of \mathcal{R}_T . \square

Theorem 3.2 *If \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T are disjoint and do not intersect Ω , \mathcal{P} is the Euclidean shortest path from S to T avoiding Ω and the two additional obstacles \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T .*

Proof: It follows from Lemma 3.1 that \mathcal{P} is also the shortest path from ω_S to ω_T if we consider \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T as some other (moderate) obstacles. On the other hand, the Euclidean shortest path from S to T that avoids Ω , \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T is a path of bounded curvature from (S, \vec{U}_S) to (T, \vec{U}_T) . Hence, \mathcal{P} is the Euclidean shortest path from S to T in the presence of the obstacles Ω , \mathcal{R}_S

and \mathcal{R}_T . □

Corollary 3.3 *A Dubins path of type CCC between two configurations ω_S and ω_T is optimal only if the two regions \mathcal{R}_S and \mathcal{R}_T intersect.*

In the rest of the paper, we will assume that Theorem 3.2 does not apply.

3.3 Characterization of the C -segments

We first recall the following lemma mentioned in the introduction which follows from [Dub57] or [BCL94b]:

Lemma 3.4 *Each subpath of an optimal path which has no point in common with the obstacles except possibly its two end points must be of type CCC or CSC.*

We now recall three lemmas and a theorem established by Agarwal et al. [ART95]. For completeness, we give the proofs (in our more restricted case of moderate obstacles).

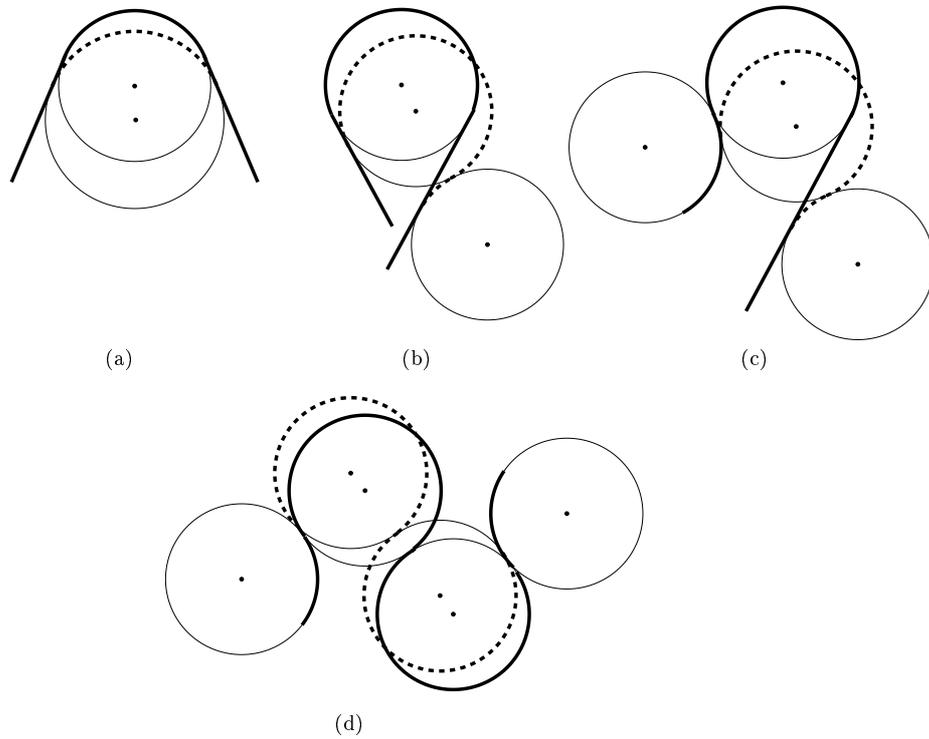
Lemma 3.5 *Any non-terminal C -segment of an optimal path is longer than π .*

Proof: Because the obstacles are moderate, no obstacle can touch the inner side of the C -segment. Moreover, since the C -segment is preceded and followed by some arcs, the path can be shortened using a circular arc of radius greater than 1 (see Figure 3.2a). □

Lemma 3.6 *Any optimal path does not contain a subpath of type CCC, except when the first or the last C -segments of this subpath is terminal.*

Proof: Assume for a contradiction that none of the C segments is terminal. By Lemma 3.5, the length of each C -segment is greater than π . Therefore, the middle C -segment together with some portions of the other two C -segments can be replaced by a shortcut which cannot be obstructed by any moderate obstacle (see Figure 3.3). This contradicts the hypothesis and proves that one of the C -segments is terminal. □

Lemma 3.7 *If an optimal path contains a subpath of type SCS, OCS, SCO or OCO, the C -segment is anchored.*

FIG. 3.2 – *Dubins length-reducing perturbations*

Proof: By Lemma 3.5, the C -segment is longer than π . If the C -segment is not anchored, then, according to Dubins [Dub57], perturbations (b) and (c) of Figure 3.2 shorten the paths in an obstacle-free scene. That yields the lemma since the O -segments are either line segments or circular arcs of unit radius. \square

Theorem 3.8 *Any C -segment appearing in an optimal path belongs to one of the following subpaths:*

$$\bar{C}, \bar{C}\bar{C}, C_t C\bar{C}, \bar{C} C C_t.$$

Proof: A C -segment either is terminal or belongs to a subpath of one of the three types XCY , $XCCY$, CCC where $X, Y \in \{S, O\}$. If the subpath is of type XCY , the C -segment is anchored by Lemma 3.7. If the subpath is of type $XCCY$, both C -segments must be tangent to some obstacle, due to Lemma 3.4. If the subpath is of type CCC , then, by Lemma 3.6, the first or the third C -segment must be terminal. Let us assume without loss of generality that the subpath is $C_t C C$. If the next segment is a C segment, it

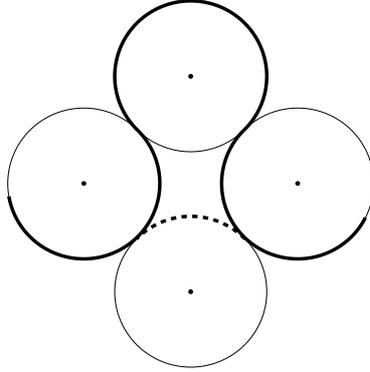


FIG. 3.3 – *Shortcut of a subpath of type CCC (Lemma 3.6)*

is terminal by Lemma 3.6 and one of the two intermediate C -segments must touch an obstacle by Lemma 3.4. If the next segment is not a C segment, the last C -segment must touch an obstacle by Lemma 3.4. \square

We further restrict the possible types of C -segments that may appear in an optimal path:

Theorem 3.9 *Any C -segment of an optimal path belongs to one of the following subpaths:*

$$\bar{C}, \bar{C}\bar{C}, C_t C \bar{C}, \bar{C} C C_t.$$

Proof: It suffices to consider subpaths of types $C_t C \bar{C}$ or $\bar{C} C C_t$ where the \bar{C} -segment is not terminal. Without loss of generality, we consider subpaths of types $C_t C \bar{C}$.

Consider first an optimal subpath of type $C_t C \bar{C} O$ where the O -segment is a circular arc. We use the same perturbation that Dubins used to reduce the length of $CCCC$ -paths (see Figure 3.2d). It follows that the second or the third C -segments of $C_t C \bar{C} O$ must be clamped by some obstacles. Hence, either the third C -segment is anchored or both the second and the third C -segments are tangent to some obstacles.

Consider now an optimal subpath of type $C_t C \bar{C} S$ and the two types of perturbation shown in Figure 3.4. Dubins has shown that perturbation (a) shortens the path and, as shown below, perturbation (b) also shortens the path. Thus, either the third C -segment is anchored or both the second and the third C -segments are tangent to some obstacles.

An optimal subpath of type $C_t C \bar{C} C$ is necessarily of type $C_t C \bar{C} C_t$, in which case the third C -segment is anchored by definition.

We conclude that a subpath of type $C_t C C$ is either of type $C_t C \bar{C}$ or $C_t \bar{C} \bar{C}$.

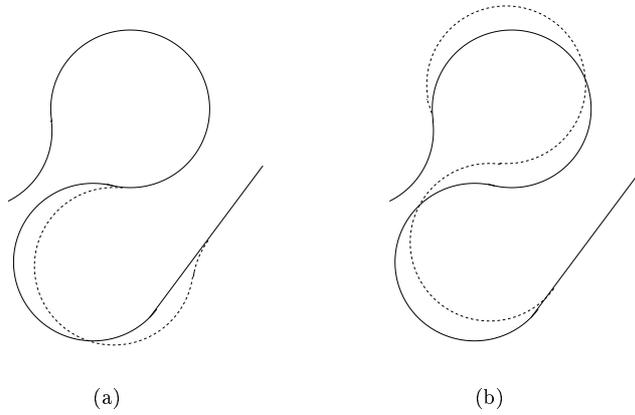


FIG. 3.4 – Length reducing perturbations for CCCS paths

Now, we show that perturbation (b) of Figure 3.4 shortens the path of type CCCS. We consider, without loss of generality, that the straight line segment belongs to the x -axis and that the center of the circle supporting the first C -segment belongs to the y -axis (see Figure 3.5).

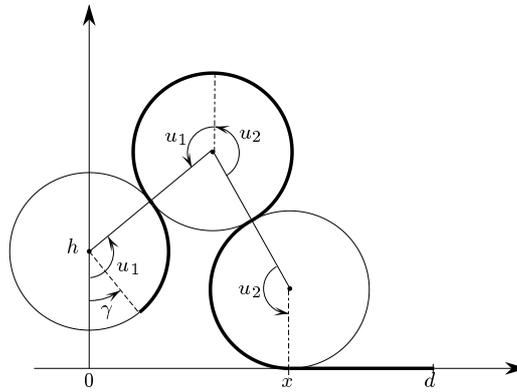


FIG. 3.5 – Study of the perturbation (b) of Figure 3.4

With the notations of Figure 3.5, the length of a CCCS path is equal to $L = 2(u_1 + u_2) - \gamma + d - x$ where γ and d are some constants. Furthermore, we have :

$$\begin{cases} \sin(u_1) + \sin(u_2) = x/2 \\ \cos(u_1) - \cos(u_2) = (h - 1)/2 \end{cases}$$

We compute the derivative of each equation with respect to x and solve the system. We obtain the following solution $((u_1 + u_2) \in (\pi, 2\pi))$ by Lem-

ma 3.5):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\sin(u_2)}{2 \sin(u_1 + u_2)} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\sin(u_1)}{2 \sin(u_1 + u_2)} \end{cases}$$

Therefore,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\sin(u_1) + \sin(u_2)}{\sin(u_1 + u_2)} - 1 = \frac{\cos\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right) - \cos\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)},$$

which is negative since u_1 and u_2 are positive and $(u_1 + u_2) \in (\pi, 2\pi)$. Hence, perturbation (b) of Figure 3.4 shortens a path of type $CCCS$. \square

As, for a given set of obstacles, the number of anchored circles is finite, the number of the subpaths in Theorem 3.9 is finite except for the subpaths of type $\bar{C}\bar{C}$. The two following sections will show that the number of these subpaths is also finite. First, in Section 3.4, we will show that any non-terminal subpath of type $\bar{C}\bar{C}$ of an optimal path is necessarily contained in a subpath of type $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}S X'$ where $X, X' \in \{O, \bar{C}\}$. Then, in Section 3.5, we will show that, given X, X' and two obstacle edges, the number of subpaths of an optimal path of type $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}S X'$ where the C -segments are tangent to the given obstacle edges is finite.

3.4 Characterization of the subpaths of type $\bar{C}\bar{C}$

The section is devoted to the proof of the following theorem :

Theorem 3.10 *Any non terminal subpath of type $\bar{C}\bar{C}$ of an optimal path is necessarily contained in a subpath of type $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}S X'$ where $X, X' \in \{O, \bar{C}\}$. The length of S -segment may be zero.*

In the sequel, we will use the following notations. For a given subpath \mathcal{P} , C_i will denote the i -th C -segment of \mathcal{P} , \mathcal{C}_i will denote the circle supporting C_i and O_i the center of \mathcal{C}_i ($i \in \{1, 2, 3\}$).

We first establish two lemmas and a proposition.

Lemma 3.11 *In a subpath of type CCS of an optimal path where the first C -segment is not terminal, the length of the S -segment is smaller than $4 \cos \alpha$. Here $\alpha = \angle(\overrightarrow{O_2 O_1}, \vec{u})$ and \vec{u} is the direction of the S -segment (see Figure 3.6).*

Proof: Let \mathcal{P} be the optimal subpath of type CCS . Since the length of each C -segment is strictly greater than π and smaller than 2π , α belongs to $(-\pi/2, \pi/2)$ (see Figure 3.6). We distinguish three cases according to the value of α and, in each case, we exhibit a shortcut that clearly cannot intersect the moderate obstacles.

1. $\alpha \in (0, \pi/2)$ (Figure 3.6a): if the length of the S -segment is greater than $4 \cos \alpha$, the dashed C -segment shortens \mathcal{P} .
2. $\alpha \in (-\pi/2, -\pi/3)$ (Figure 3.6b): let \mathcal{C}' be the circle (of unit radius) tangent to \mathcal{C}_1 and to the S -segment, and lying on the same side of S as \mathcal{C}_2 . As $|\alpha| > \pi/3$, \mathcal{C}' intersects \mathcal{C}_2 and therefore the length of the dashed C -segment on \mathcal{C}_1 is smaller than $\pi/3$. Moreover, the length of the dashed C -segment on \mathcal{C}' is smaller than $\pi/2$ because the line segment intersects \mathcal{C}_1 . It follows that the length of the dashed path is smaller than π and so is smaller than the length of the C -segment supported by \mathcal{C}_2 . Hence, if the length of the S -segment is greater than $4 \cos \alpha$, the dashed path shortens \mathcal{P} .
3. $\alpha \in [-\pi/3, 0]$ (Figures 3.6c and 3.6d): if the length of the S -segment is greater than 2 ($\leq 4 \cos \alpha$), then the path that uses the dashed arcs AB and CD is shorter than \mathcal{P} . Indeed, the length of the dashed C -segment AB is shorter than the sum of the lengths of the arcs AI and IB of \mathcal{P} , and similarly the length of the dashed C -segment CD is shorter than sum of the lengths of the arcs CI and ID .

□

We consider now subpaths of type $CCSC$.

Lemma 3.12 *Let \mathcal{P} be a subpath of type $CCSC$ of an optimal path where the first and the last C -segments are not terminal. If the two C -segments \mathcal{C}_2 and \mathcal{C}_3 that are adjacent to the line segment have the same orientation (resp. the opposite orientation), the distance between O_1 and O_3 is less than 2 (resp. 4).*

Proof: By the previous lemma, the length s of the S -segment is less than $4 \cos \alpha$.

If \mathcal{C}_2 and \mathcal{C}_3 have the same orientation,

$$O_1O_3^2 = (\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3})^2 = 4 + s^2 - 4s \cos \alpha < 4.$$

If the two circles have opposite orientations, let O'_3 be the point symmetric to O_3 with respect to the S -segment. The length of O_1O_3 is less than the sum

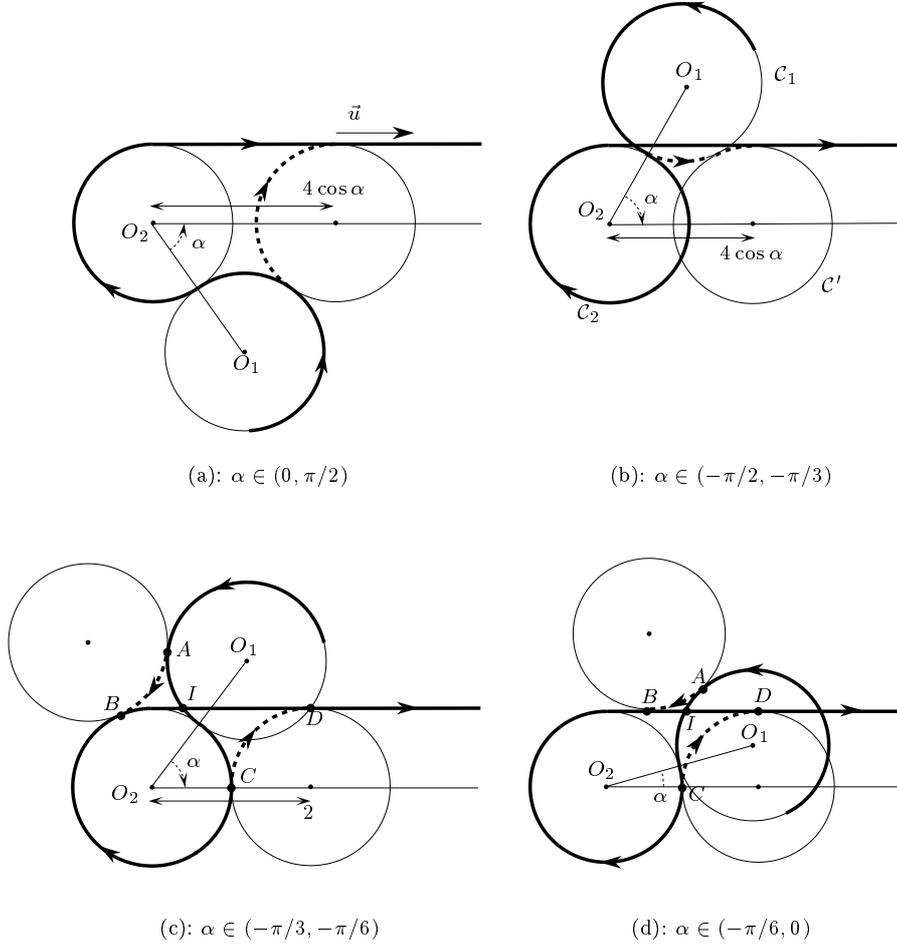


FIG. 3.6 – Shortcuts used in Lemma 3.11

of the length of $O_3O'_3$, which is equal to 2, and of the length of $O_1O'_3$, which is less than 2 by the above inequality. \square

Lemma 3.13 *In a subpath of type CCSC of an optimal path where the first and the last C-segments are not terminal, the two C-segments adjacent to the line segment have the same orientation (clockwise or counterclockwise).*

Proof: We consider a subpath \mathcal{P} of type CCSC of an optimal path where C_1 and C_3 are not terminal and such that C_2 and C_3 have opposite orientations. We show that such a path can be shortened. The previous lemma implies that there exists a circle of unit radius tangent to the circles C_1 and C_3 .

Suppose first that the circles C_1 and C_3 do not intersect. Since the length of C_1 and C_3 are greater than π , there exists a C-segment of length smaller

than π tangent to both C_1 and C_3 (see Figure 3.7). This C -segment clearly shortens \mathcal{P} and avoids the moderate obstacles.

Suppose now that C_1 and C_3 intersect. The previous argument does not hold since there does not necessarily exist a circle tangent to the C -segments C_1 and C_3 (see Figure 3.8a). However, the shortcut shown in Figure 3.8 shortens \mathcal{P} since the length of the dashed C -segment AB is shorter than the sum of the lengths of the arcs AI and IB of \mathcal{P} , and, similarly, the length of the dashed C -segment CD is shorter than the sum of the lengths of the arcs CI and ID .

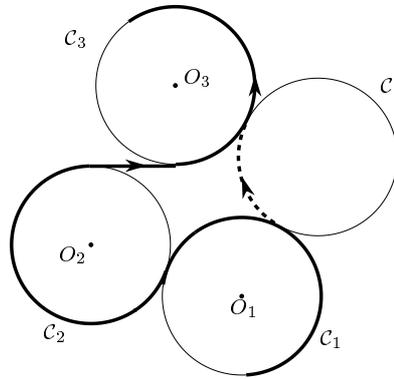


FIG. 3.7 – Shortcut used in Lemma 3.13 if C_1 does not intersect C_3

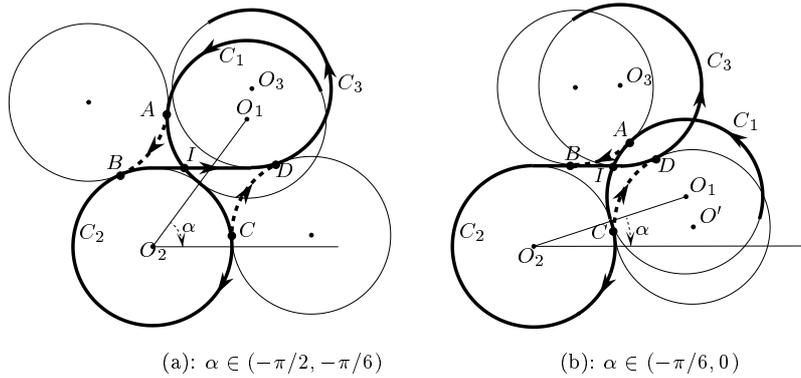


FIG. 3.8 – Shortcut used in Lemma 3.13 if C_1 does intersect C_3

Proposition 3.14 *An optimal path cannot contain a subpath of type $CCSCC$, except when the first or the last C -segment of this subpath is terminal.*

Proof: By Lemma 3.5, the lengths of C_1 and C_4 are greater than π if they are not terminal. According to the previous lemma, both C -segments C_2 and C_3 have the same orientation. We assume, without loss of generality, that the first C -segment C_1 is oriented counterclockwise. Then, we show that the dashed C -segment shown in Figure 3.9 shortens the path. Let M_{12} be the common end point of C_1 and C_2 , and M_{34} the common end point of C_3 and C_4 (see Figure 3.9). Let α and β be defined as in Figure 3.9 and let s be the length of the S -segment.

We show now that there exists a C -segment of length smaller than π oriented clockwise and tangent to C_1 and C_4 . By Lemma 3.12, the length of O_2O_4 is less than 2, implying that the length of O_1O_4 is less than 4. Thus there exist two circles of unit radius tangent to C_1 and C_4 . As the length of O_2O_4 is less than 2, M_{12} belongs to the dashed C -segment between A and B on Figure 3.10. As C_1 is oriented counterclockwise and its length is greater than π , point B belongs to C_1 (see Figure 3.10). Similarly, point D belongs to C_4 . Moreover, the C -segment oriented clockwise and tangent to C_1 at B and to C_4 at D is smaller than π . It follows that this C -segment shortens the subpath of type $CCSCC$. As it avoids all the moderate obstacles, we have shown that an optimal path can not contain a subpath of type $CCSCC$ except when the first or the last C -segment of this subpath is terminal. \square

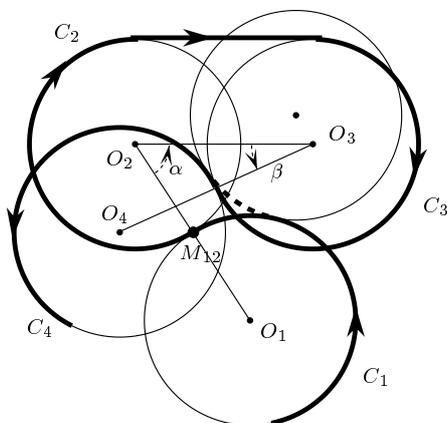


FIG. 3.9 – *Shortcut used in Proposition 3.14*

The proof of Theorem 3.10 now follows. Indeed, let us consider a subpath of type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$, $X \notin \{O, \bar{C}\}$. As X is not terminal, Lemma 3.6 implies that the first S -segment of the subpath cannot have length zero. Therefore, by Theorem 3.9, X is necessarily a C -segment tangent to some obstacle and following another C -segment X_1 . Then, by Proposition 3.14, X_1 is terminal

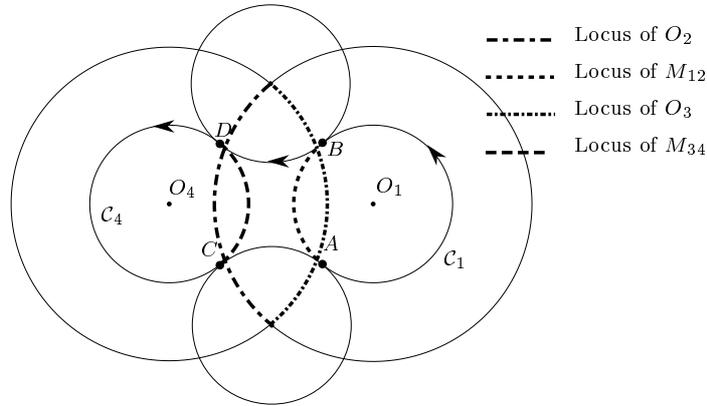


FIG. 3.10 – For the proof of Proposition 3.14

and therefore, X is anchored by definition. This contradicts our assumption and ends the proof of the theorem.

3.5 Bounding the number of subpaths of type $\bar{C}\bar{C}$

This section is devoted to the proof of the following theorem :

Theorem 3.15 *Let \mathcal{X} be a circular edge of some obstacle or an anchored circle. Let \mathcal{X}' be another such circular arc and let \mathcal{O} and \mathcal{O}' be two obstacle edges. Let $X \subset \mathcal{X}$, $X' \subset \mathcal{X}'$, \bar{C} a C -segment tangent to \mathcal{O} and \bar{C}' a C -segment tangent to \mathcal{O}' . The shortest subpath of type $XS\bar{C}\bar{C}'SX'$ belong to a finite family.*

Let \mathcal{P} denote a subpath of type $XS\bar{C}\bar{C}'SX'$. The number of subpaths \mathcal{P} where \bar{C} or \bar{C}' are anchored is finite; so we assume that neither \bar{C} nor \bar{C}' are anchored. Without loss of generality, we assume in the sequel that the path \mathcal{P} is oriented counterclockwise on \bar{C} and clockwise on \bar{C}' as shown in Figures 3.11, 3.15 and 3.17.

The proof is as follows. We first observe that \mathcal{P} is optimal when some mechanical device is at equilibrium. This leads to an algebraic system of equations whose solutions correspond to potential equilibriums of the mechanical device. We then show that this system has a finite number of solutions. This is done as follows. Let $E_1 = 0, \dots, E_r = 0$ be the equations of the system where E_1, \dots, E_r are polynomials in the variables x_1, \dots, x_r . The resultant $R(x_1, \dots, x_{r-1})$ with respect to x_r of two of the E_i , say E_1 and

E_2 , vanishes at $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{r-1}$ iff there exists \tilde{x}_r such that $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r)$ is a common root of E_1 and E_2 [BBF86]. By cascading resultants on the polynomials E_1, \dots, E_r , we eliminate successively the indeterminates x_r, \dots, x_2 and compute a univariate polynomial $R(x_1)$. If $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r)$ is a solution of the system, $R(\tilde{x}_1) = 0$ (the converse is not necessarily true). Then we show that the univariate polynomial $R(x_1)$ is not identically zero and that any value of the indeterminate x_1 determines the other indeterminates. It immediately follows that the algebraic system of equations under consideration has a finite number of roots. However, computing such a polynomial $R(x_1)$ may exceed the capabilities of the current computer algebra systems. To overcome this difficulty, we only compute the leading monomial of $R(x_1)$ which is sufficient to show that $R(x_1) \not\equiv 0$. We now present the proof in full detail.

The mechanical device consists of four fixed objects and one moving object D . The fixed objects are the two obstacles \mathcal{O} and \mathcal{O}' and the two disks of unit radius supporting \mathcal{X} and \mathcal{X}' . The moving object D is the union of two tangent disks (corresponding to the circles \mathcal{C} and \mathcal{C}'). We consider a rubber band of thickness zero attached on \mathcal{X} and on \mathcal{X}' and passing around \mathcal{C} and \mathcal{C}' (see Figure 3.11). The case we are interested in is when both mobile disks are tangent to the obstacles. The moving object D is subject to four forces \vec{F} , \vec{F}' , \vec{R} and \vec{R}' (see Figure 3.11). \vec{F} and \vec{F}' are the two forces, of equal norm F , exerted by the rubber band. \vec{R} and \vec{R}' are the reactions of the obstacles \mathcal{O} and \mathcal{O}' onto the mobile D .

We introduce the following notations (see Figures 3.11 and 3.12). Let \mathcal{C} and \mathcal{C}' be the circles supporting \bar{C} and \bar{C}' . I and I' are the centers of \mathcal{C} and \mathcal{C}' . H and H' are the centers of the circles supporting \mathcal{X} and \mathcal{X}' . In addition, let $\alpha = \angle(\vec{R}, \vec{II'})$, $\alpha' = \angle(\vec{R}', \vec{I'I})$, $\varphi = \angle(\vec{II'}, \vec{F})$ and $\varphi' = \angle(\vec{I'I}, \vec{F}')$.

We first establish a lemma that holds regardless of the nature of the obstacle edges \mathcal{O} and \mathcal{O}' .

Lemma 3.16 *The moving object D is at an equilibrium only if:*

$$\sin(\alpha' - \alpha) + \sin \alpha' \sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha \sin(\alpha' + \varphi') = 0 \quad (3.1)$$

Proof: The moving object D is at an equilibrium iff the sum of the forces \vec{F} , \vec{F}' , \vec{R} , \vec{R}' and the sum of their torques is zero. The sum of the forces is zero iff:

$$\begin{cases} R \cos \alpha + F \cos \varphi = R' \cos \alpha' + F \cos \varphi' \\ R \sin \alpha - F \sin \varphi = R' \sin \alpha' - F \sin \varphi' \end{cases}$$

We consider the torque of the forces with respect to I' ; let A be the supporting point of the force \vec{F} on \mathcal{C} and let $\vec{U} \times \vec{V}$ denote the exterior

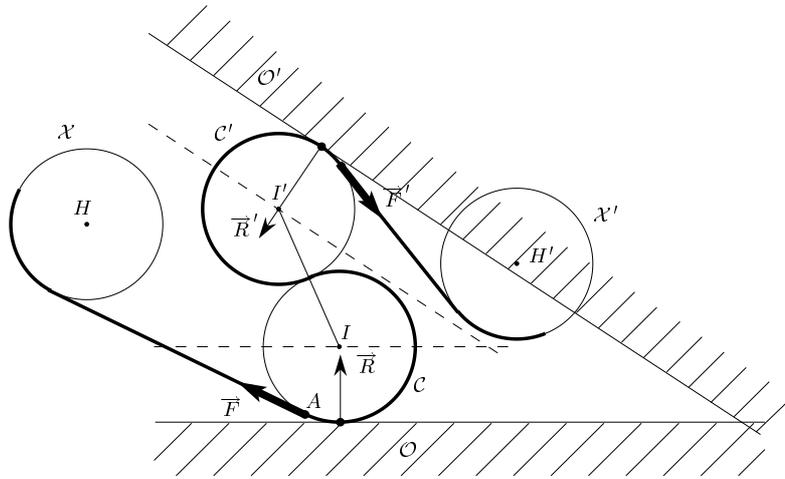


FIG. 3.11 – *The mechanical device*

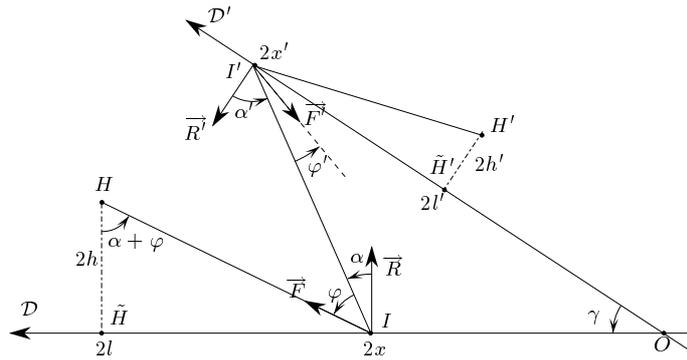


FIG. 3.12 – *For the proof of Theorem 3.15*

product of \vec{U} and \vec{V} ($\forall \vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\vec{F}/I'} &= \vec{F} \times \overrightarrow{AI'} = \vec{F} \times \overrightarrow{AI} + \vec{F} \times \overrightarrow{II'} \\ &= -F - 2F \sin \varphi \\ \mathcal{M}_{\vec{F}/I'} &= -F \\ \mathcal{M}_{\vec{R}/I'} &= 2R \sin \alpha \\ \mathcal{M}_{\vec{R}/I'} &= 0 \end{aligned}$$

The sum of these torques is zero iff $R \sin \alpha - F \sin \varphi = F$. Thus the moving object D is at an equilibrium iff:

$$\begin{cases} R \cos \alpha + F \cos \varphi = R' \cos \alpha' + F \cos \varphi' \\ R \sin \alpha - F \sin \varphi = R' \sin \alpha' - F \sin \varphi' \\ \sin \alpha - F \sin \varphi = F \end{cases}$$

By eliminating R and R' , we get :

$$\begin{aligned} (F + F \sin \varphi) \cos \alpha \sin \alpha' + F \cos \varphi \sin \alpha \sin \alpha' = \\ (F + F \sin \varphi') \cos \alpha' \sin \alpha + F \cos \varphi' \sin \alpha \sin \alpha' \end{aligned}$$

Equation 3.1 follows. \square

Case 1 : Both obstacle edges are line segments

Let \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}') be the oriented line parallel to \mathcal{O} (\mathcal{O}'), passing through I (I') and oriented such that $\angle(\vec{R}, \mathcal{D}) = \pi/2$ ($\angle(\vec{R}', \mathcal{D}') = -\pi/2$) (see Figure 3.12).

Let $\gamma = \angle(\mathcal{D}', \mathcal{D})$. Let O be the intersection point between \mathcal{D} and \mathcal{D}' (O is well defined since no two obstacle edges are parallel). Let \tilde{H} (\tilde{H}') be the orthogonal projection of H (H') onto \mathcal{D} (\mathcal{D}'). Let $2x$ and $2l$ (resp. $2x'$, $2l'$) be the algebraic lengths of OI and $O\tilde{H}$ (OI' , $O\tilde{H}'$) on the oriented line \mathcal{D} (\mathcal{D}'). Let $2h$ be the algebraic distance between H and \mathcal{D} with $2h > 0$ iff $\vec{H\tilde{H}}$ and \vec{R} have the same orientation; $2h'$ is defined similarly except that $2h' > 0$ iff $\vec{H'\tilde{H}'}$ and \vec{R}' have opposite orientations.

Lemma 3.17 *The moving object D is at an equilibrium only if:*

$$\begin{cases} \sin \gamma + \sin(\alpha + \gamma) \sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha \sin(\alpha' + \varphi') = 0 \\ h \sin \gamma \sin(\alpha + \varphi) - l \sin \gamma \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + \gamma) \cos(\alpha + \varphi) + \delta \sin \gamma = 0 \\ h' \sin \gamma \sin(\alpha' + \varphi') - l' \sin \gamma \cos(\alpha' + \varphi') + \cos \alpha \cos(\alpha' + \varphi') + \delta' \sin \gamma = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

where δ (resp. δ') is zero if the path \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X} and \mathcal{C} (\mathcal{X}' and \mathcal{C}') and 1 otherwise.

Proof: Considering the triangle (OII') in Figure 3.12 yields :

$$\alpha' = \alpha + \gamma [2\pi] \quad (3.3)$$

$$\frac{|\sin \gamma|}{2} = \frac{|\sin(\alpha + \pi/2)|}{|2x'|} = \frac{|\sin(\pi/2 - \alpha')|}{|2x|}$$

$\alpha + \varphi$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$\tan(\alpha + \varphi)$	$+$	$-$	$+$	$-$	
$l - x$	$-$	$-$	$+$	$+$	
h	$-$	$+$	$+$	$-$	

TAB. 3.1 – Respective signs of $\tan(\alpha + \varphi)$, $l - x$ and h .

Considering the different cases that may appear, we get :

$$x = \frac{\cos \alpha'}{\sin \gamma} \quad x' = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \tag{3.4}$$

Equations 3.1 and 3.3 yield the first equation of System 3.2. We show how to compute the two other equations of System 3.2 for each possible orientation of X and X' .

- \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X} and \mathcal{C} .

By definition of α and φ , $\alpha + \varphi = \angle(\vec{R}, \vec{F}) [2\pi] = \angle(\vec{H\bar{H}}, \vec{H\bar{I}}) [\pi]$. As $\vec{H\bar{H}}$ and $\vec{H\bar{I}}$ are orthogonal, $\tan(\alpha + \varphi) = \pm(2l - 2x)/2h$ (see Figure 3.12). Considering the different cases that may appear (see Table 3.1 and Figure 3.12), we get :

$$\tan(\alpha + \varphi) = \frac{l - x}{h} \tag{3.5}$$

Using Equations 3.3 and 3.4, we obtain :

$$h \sin \gamma \sin(\alpha + \varphi) - l \sin \gamma \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + \gamma) \cos(\alpha + \varphi) = 0 \tag{3.6}$$

- \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X}' and \mathcal{C}' .

Similarly as above, we obtain :

$$\tan(\alpha' + \varphi') = \frac{l' - x'}{h'} \tag{3.7}$$

$$h' \sin \gamma \sin(\alpha' + \varphi') - l' \sin \gamma \cos(\alpha' + \varphi') + \cos \alpha \cos(\alpha' + \varphi') = 0 \tag{3.8}$$

- \mathcal{P} has opposite orientations on \mathcal{X} and \mathcal{C} .

Let $\mu = \angle(\vec{F}, \vec{I\bar{H}})$ and $\varepsilon = \angle(\vec{I\bar{H}}, \vec{\mathcal{D}})$ (see Figure 3.13). With these definitions, we have :

$$\alpha + \varphi + \mu + \varepsilon = \pi/2 [2\pi]$$

$$\sin \mu = \frac{2}{I\bar{H}} \quad \sin \varepsilon = \frac{2h}{I\bar{H}} \quad \cos \varepsilon = \frac{2l - 2x}{I\bar{H}}$$

Therefore, $\alpha + \varphi + \varepsilon = \pi/2 - \mu [2\pi]$, $\cos(\alpha + \varphi) \cos \varepsilon - \sin(\alpha + \varphi) \sin \varepsilon = \sin \mu$, and :

$$(l - x) \cos(\alpha + \varphi) - h \sin(\alpha + \varphi) = 1 \quad (3.9)$$

By Equations 3.3 and 3.4, we obtain :

$$h \sin \gamma \sin(\alpha + \varphi) - l \sin \gamma \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + \gamma) \cos(\alpha + \varphi) + \sin \gamma = 0 \quad (3.10)$$

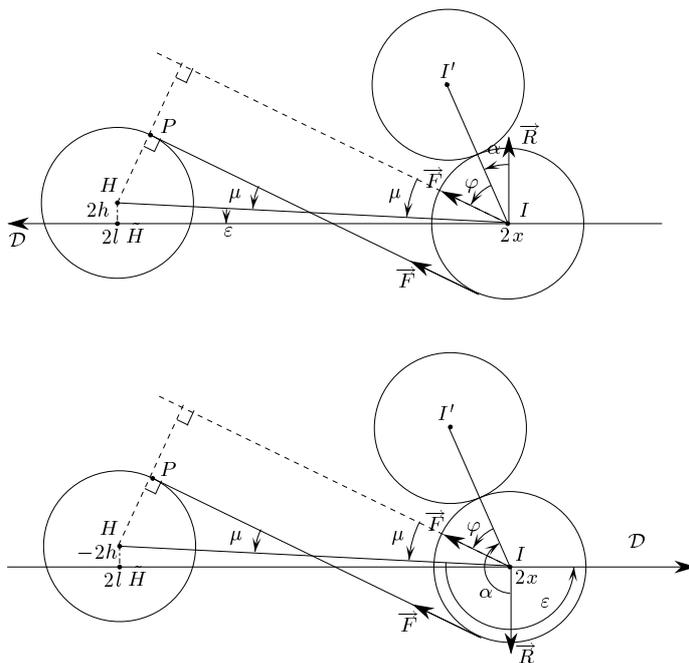


FIG. 3.13 – Computing Equations 3.10

- \mathcal{P} have opposite orientations on \mathcal{X}' and \mathcal{C}' .

Let $\mu' = \angle(\vec{F}', \vec{I'H'})$ and $\varepsilon' = \angle(\vec{I'H'}, \mathcal{D}')$ (see Figure 3.14). We have :

$$\alpha' + \varphi' + \mu' + \varepsilon' = -\pi/2 [2\pi]$$

$$\sin \mu' = \frac{2}{I'H'} \quad \sin \varepsilon' = -\frac{2h'}{I'H'} \quad \cos \varepsilon' = \frac{2x' - 2l'}{I'H'}$$

Therefore, $\alpha' + \varphi' + \varepsilon' = -\pi/2 - \mu'$, $\cos(\alpha' + \varphi') \cos \varepsilon' - \sin(\alpha' + \varphi') \sin \varepsilon' = -\sin \mu'$, and :

$$(x' - l') \cos(\alpha' + \varphi') + h' \sin(\alpha' + \varphi') = -1 \quad (3.11)$$

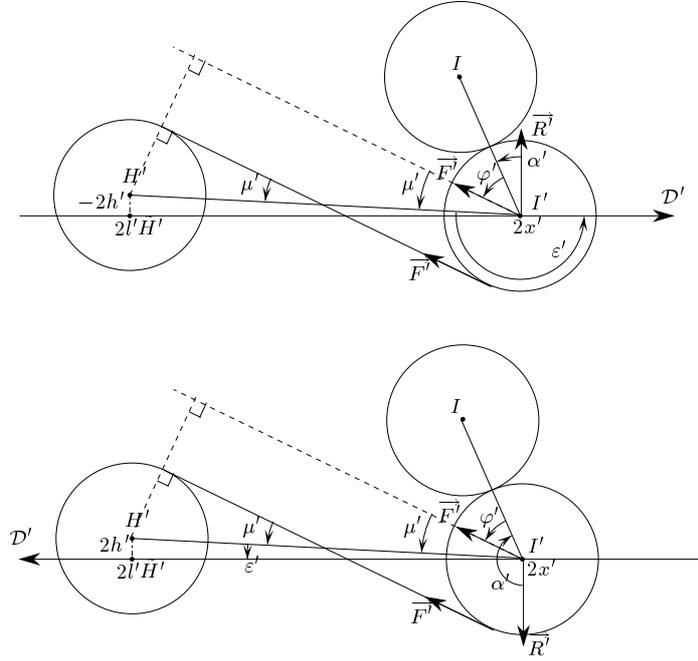


FIG. 3.14 – Computing Equations 3.12

Then, by Equation 3.4 :

$$h' \sin \gamma \sin(\alpha' + \varphi') - l' \sin \gamma \cos(\alpha' + \varphi') + \cos \alpha \cos(\alpha' + \varphi') + \sin \gamma = 0 \quad (3.12)$$

That ends the proof of the lemma. \square

We consider System 3.2 as a system of three equations in the three indeterminates α , $(\alpha + \varphi)$, $(\alpha' + \varphi')$ and show that it has a finite number of roots in $(S^1)^3$. It then follows that the moving object D has a finite number of equilibriums because α determines α' by Equation 3.3.

Using the variable substitution $x = \tan(\frac{\alpha}{2})$, $y = \tan(\frac{\alpha + \varphi}{2})$ and $z = \tan(\frac{\alpha' + \varphi'}{2})$, we transform System 3.2 into an algebraic system where x , y , z are the indeterminates and h , l , h' , l' , $\sin \gamma$, $\cos \gamma$ are considered as six independent parameters. Let $E_i = 0$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) denote the algebraic equation obtained from the i -th equation of System 3.2.

Using MAPLE, we compute the resultant $Q(x, z)$ of E_1 and E_2 with respect to the indeterminate y . Then, we compute the resultant $R(x)$ of $Q(x, z)$ and E_3 with respect to the indeterminate z . $R(x)$ is a uni-variate polynomial of degree 24. Any root of System 3.2 verifies $R(\tan(\alpha/2)) = 0$. Moreover, if x is given, then α , α' , φ and φ' are fixed (see Figure 3.12), and

so y and z are fixed. Therefore, if $R(x) \not\equiv 0$, the mechanical device admits a finite number of equilibriums.

We now prove that $R(x) \not\equiv 0$. The leading and the trailing monomials of $R(x)$ are

$$\begin{aligned} & 2^8 (h + \delta)^4 \sin^8 \gamma ((1 + l' \sin \gamma)^2 + h'^2 \sin^2 \gamma)^2 x^{24}, \\ & 2^8 (h - \delta)^4 \sin^8 \gamma ((1 - l' \sin \gamma)^2 + h'^2 \sin^2 \gamma)^2. \end{aligned}$$

Both coefficients are zero only if $h = \delta = 0$ or if (h, h', l') is equal to either $(1, 0, -1/\sin \gamma)$ or $(-1, 0, 1/\sin \gamma)$ because, by hypothesis, $\sin \gamma \neq 0$ and $\delta \in \{0, 1\}$. If $h = \delta = 0$ then $\cos(\alpha + \varphi) = 0$ and so $E_2 = 0$; hence, the leading and the trailing coefficients (with respect to x) of the resultant of E_1 and E_3 with respect to z are

$$\begin{aligned} & 4 \sin^2 \gamma (y - 1)^4 ((1 + l' \sin \gamma)^2 + h'^2 \sin^2 \gamma), \\ & 4 \sin^2 \gamma (y + 1)^4 ((1 - l' \sin \gamma)^2 + h'^2 \sin^2 \gamma), \end{aligned}$$

where $y = \sin(\alpha + \varphi) = \pm 1$. These two coefficients are zero only if $(h', l') = (0, \pm 1/\sin \gamma)$. Therefore, the leading and the trailing coefficients of $R(x)$ are zero only if (h, h', l') is either $(\delta, 0, -1/\sin \gamma)$ or $(-\delta, 0, 1/\sin \gamma)$. We substitute, in turn, (h, h', l') to those values in $R(x)$. When $(h, h', l') = (\delta, 0, -1/\sin \gamma)$, the leading and trailing monomials of $R(x)$ become

$$\begin{aligned} & 2^{12} \delta'^4 \sin^4 \gamma ((l \sin \gamma + \cos \gamma)^2 + \delta^2 \sin^2 \gamma)^2 x^{20}, \\ & 2^{14} \sin^4 \gamma (\delta'^2 - 4) (l \sin \gamma - \cos \gamma)^4 x^2, \end{aligned}$$

and when $(h, h', l') = (-\delta, 0, 1/\sin \gamma)$, the leading and trailing monomials of $R(x)$ become

$$\begin{aligned} & 2^{14} \sin^4 \gamma (\delta'^2 - 4) (l \sin \gamma + \cos \gamma)^4 x^{22}, \\ & 2^{12} \delta'^4 \sin^4 \gamma ((l \sin \gamma - \cos \gamma)^2 + \delta^2 \sin^2 \gamma)^2 x^4. \end{aligned}$$

We study the two cases $\delta' = 0$ and $\delta' = 1$: if $\delta' = 0$, $R(x) \equiv 0$ only if (h, h', l', l) is equal to either $(\delta, 0, -1/\sin \gamma, \cot \gamma)$ or $(-\delta, 0, 1/\sin \gamma, -\cot \gamma)$. For those values of (h, h', l', l) the leading or the trailing coefficient of the new resultant $R(x)$ is $2^{16} \delta^4 \sin^8 \gamma$. Furthermore, if $\delta = 0$, the leading or the trailing coefficient of the new resultant $R(x)$ is $-2^{20} \sin^8 \gamma$, which is not zero. If $\delta' = 1$, $R(x) \equiv 0$ only if $\delta = 0$, $\gamma = \pm\pi/2$ and $(h, h', l', l) = (0, 0, \pm 1, 0)$. Then either the coefficient of degree 2 (if $l' = 1$) or the one of degree 4 (if $l' = -1$) of the resultant of E_1 and E_3 with respect to z is 64.

Hence, the uni-variate polynomial $R(x)$ is not identically zero, which implies that the number of possible equilibriums of our mechanical device is finite. Furthermore, they can be computed by solving $R(x) = 0$.

Case 2: Both obstacle edges are circular arcs

The skeleton of the proof is similar to the previous case: we compute a system of 4 equations in 4 indeterminates whose solutions correspond to potential equilibriums of the mechanical device. Then, we consider a univariate polynomial $R(x)$ by cascading resultants as explained above. As computing such a polynomial $R(x)$ exceeds the capabilities of the current computer algebra systems, we only compute the leading monomial of $R(x)$ and show that it is not identically equal to zero, which implies that $R(x) \neq 0$.

Let O and O' be the centers of the circles (of unit radius) supporting \mathcal{O} and \mathcal{O}' respectively. Let $2d$ be the length of OO' . Let $2h$ and $2h'$ be the lengths of OH and $O'H'$ respectively. Let $\omega = \angle(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OH})$ and $\omega' = \angle(\overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'H'})$ (see Figure 3.15).

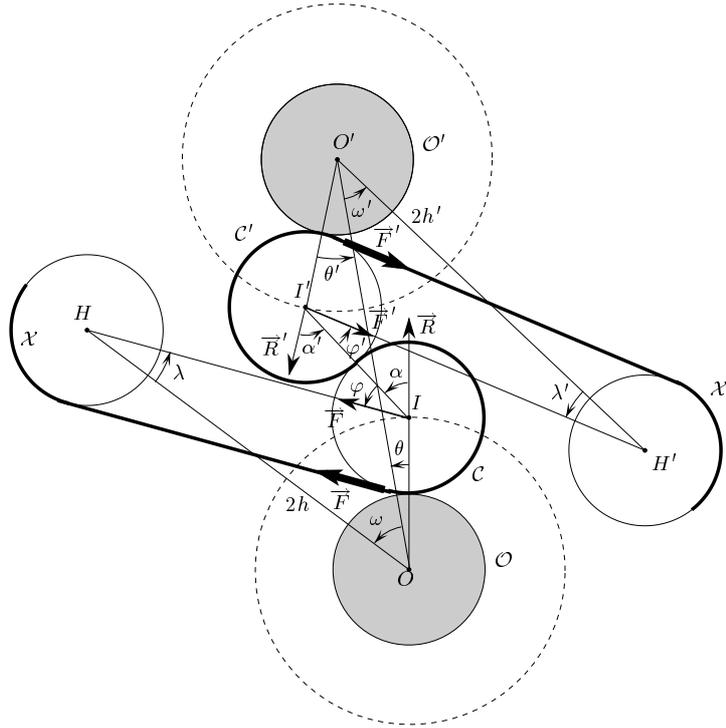


FIG. 3.15 – Mechanical device where both obstacle edges are circular edges

Lemma 3.18 *The moving object D is at an equilibrium only if:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha' - \alpha) + \sin \alpha' \sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha \sin(\alpha' + \varphi) = 0 \\ 2 \cos \alpha + 2 \cos \alpha' + 2 \cos(\alpha' - \alpha) + 3 - d^2 = 0 \\ h \sin(\varphi - \omega) + h \sin(\alpha' + \varphi - \omega) + h \sin(\alpha + \varphi - \omega) \\ \quad - d \sin(\alpha + \varphi) + \delta d = 0 \\ h' \sin(\varphi' - \omega') + h' \sin(\alpha + \varphi' - \omega') + h' \sin(\alpha' + \varphi' - \omega') \\ \quad - d \sin(\alpha' + \varphi') + \delta' d = 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

where δ (resp. δ') is zero if the path \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X} and \mathcal{C} (\mathcal{X}' and \mathcal{C}') and 1 otherwise.

Proof: The first equation of System 3.13 is given by Lemma 3.16. Now, let $\theta = \angle(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OO'})$ and $\theta' = \angle(\overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'O'})$ (see Figure 3.15). Considering the polygon $(OII'O')$ in Figure 3.15, we have:

$$\alpha' - \theta' = \alpha - \theta \ [2\pi] \quad (3.14)$$

$$\cos \theta + \cos(\alpha - \theta) + \cos \theta' = d \quad (3.15)$$

$$\sin \theta - \sin(\alpha - \theta) + \sin \theta' = 0 \quad (3.16)$$

Considering in turn $((Eq3.15)^2 + (Eq3.16)^2)$, $((Eq3.15) \sin \theta - (Eq3.16) \cos \theta)$, $((Eq3.15) \cos \theta + (Eq3.16) \sin \theta)$, $((Eq3.15) \sin \theta' - (Eq3.16) \cos \theta')$ and $((Eq3.15) \cos \theta' + (Eq3.16) \sin \theta')$, we obtain:

$$2 \cos \alpha + 2 \cos \alpha' + 2 \cos(\alpha' - \alpha) + 3 - d^2 = 0 \quad (3.17)$$

$$d \sin \theta = \sin \alpha - \sin(\alpha' - \alpha) \quad (3.18)$$

$$d \cos \theta = 1 + \cos \alpha + \cos(\alpha' - \alpha) \quad (3.19)$$

$$d \sin \theta' = \sin \alpha' + \sin(\alpha' - \alpha) \quad (3.20)$$

$$d \cos \theta' = 1 + \cos \alpha' + \cos(\alpha' - \alpha) \quad (3.21)$$

Equation 3.17 is the second equation of System 3.13. We show how to compute the two other equations of System 3.13 for the possible orientations of X and X' .

- \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X} and \mathcal{C} (see Figure 3.15).

Let $\lambda = \angle(\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HI})$ and consider the triangle (OHI) :

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{2h} = \frac{\sin \lambda}{2}$$

As $\lambda = \alpha + \varphi - \theta - \omega \ [2\pi]$, we get:

$$h \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) = 0 \quad (3.22)$$

That equation can be expanded with respect to θ , and simplified thanks to Equations 3.18 and 3.19 :

$$h \sin(\varphi - \omega) + h \sin(\alpha' + \varphi - \omega) + h \sin(\alpha + \varphi - \omega) - d \sin(\alpha + \varphi) = 0 \quad (3.23)$$

- \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X}' and \mathcal{C}' .

Similarly as above, we obtain the following equations :

$$h' \sin(\alpha' + \varphi' - \theta' - \omega') - \sin(\alpha' + \varphi') = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} h' \sin(\varphi' - \omega') + h' \sin(\alpha + \varphi' - \omega') + h' \sin(\alpha' + \varphi' - \omega') \\ - d \sin(\alpha' + \varphi') = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

- \mathcal{P} has opposite orientations on \mathcal{X} and \mathcal{C} (see Figure 3.16).

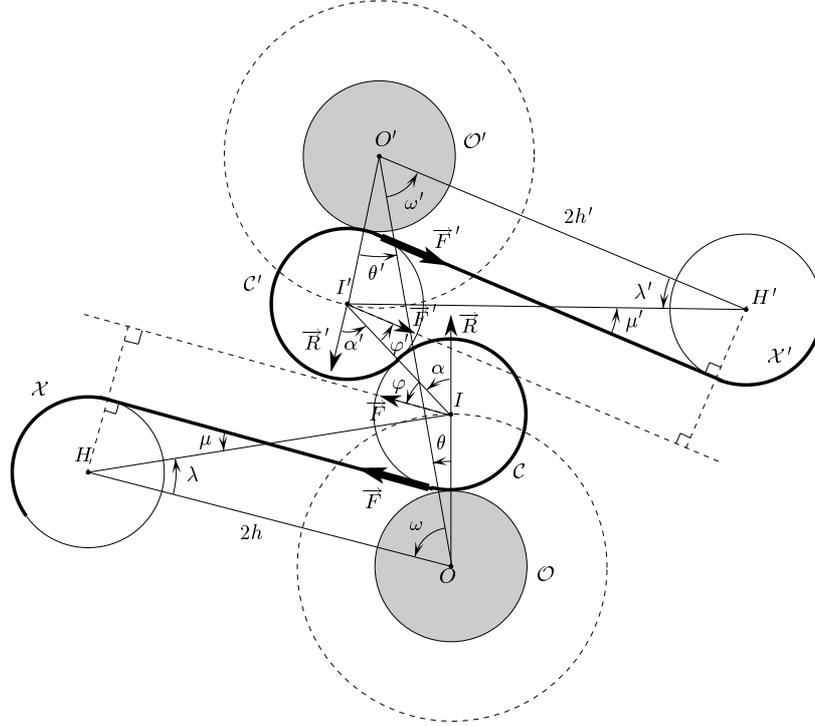


FIG. 3.16 – For the proof of Theorem 3.15 when both obstacle edges are circular edges

Let $\mu = \angle(\vec{F}, \vec{IH})$ and consider the triangle (OHI) :

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi + \mu)}{2h} = \frac{\sin \lambda}{2} = \frac{\sin(\theta + \omega)}{IH}$$

As $\lambda = \alpha + \varphi + \mu - \theta - \omega [2\pi]$, we get :

$$\begin{aligned} 2 \sin(\theta + \omega) &= IH \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) \cos \mu + IH \cos(\alpha + \varphi - \theta - \omega) \sin \mu \\ 2h \sin(\theta + \omega) &= IH \sin(\alpha + \varphi) \cos \mu + IH \cos(\alpha + \varphi) \sin \mu \end{aligned}$$

Eliminating $\cos \mu$ from these two equations gives :

$$\begin{aligned} 2 \sin(\theta + \omega) \sin(\alpha + \varphi) - 2h \sin(\theta + \omega) \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) &= \\ IH \cos(\alpha + \varphi - \theta - \omega) \sin \mu \sin(\alpha + \varphi) - IH \cos(\alpha + \varphi) \sin \mu \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) & \end{aligned}$$

We simplify this equation into :

$$2 \sin(\theta + \omega) \sin(\alpha + \varphi) - 2h \sin(\theta + \omega) \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) = IH \sin \mu \sin(\theta + \omega)$$

As $\sin \mu = 2/IH$ (see Figure 3.16), we have :

$$\sin(\theta + \omega)(h \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) + 1) = 0$$

We can assume that $\sin(\theta + \omega) \neq 0$ because otherwise I lies on the straight line OH and the number of such paths is less than four. Thus, the moving object is at an equilibrium only if :

$$h \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) + 1 = 0 \quad (3.26)$$

Similarly as above, we expand that equation with respect to θ and simplify it, thanks to Equations 3.18 and 3.19 :

$$h \sin(\varphi - \omega) + h \sin(\alpha' + \varphi - \omega) + h \sin(\alpha + \varphi - \omega) - d \sin(\alpha + \varphi) + d = 0 \quad (3.27)$$

- \mathcal{P} have opposite orientations on \mathcal{X}' and \mathcal{C}' .

Similarly as above, we obtain the following equations :

$$h' \sin(\alpha' + \varphi' - \theta' - \omega') - \sin(\alpha' + \varphi') + 1 = 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} h' \sin(\varphi' - \omega') + h' \sin(\alpha + \varphi' - \omega') + h' \sin(\alpha' + \varphi' - \omega') \\ - d \sin(\alpha' + \varphi') + d = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

That ends the proof of the lemma. \square

We now show that System 3.13 has a finite number of roots $(\alpha, \alpha', \varphi, \varphi')$ (in $(S^1)^4$). It then follows that the moving object D has a finite number of equilibriums.

We expand each equation of System 3.13 and apply the variable substitution $x = \tan(\alpha/2)$, $y = \tan(\alpha'/2)$, $z = \tan(\varphi/2)$ and $t = \tan(\varphi'/2)$. This yields an algebraic system consisting of four equations where x, y, z, t are the four indeterminates and $\sin \omega, \cos \omega, d, h, h', l'$ are considered as six

When this monomial is not zero, its degree is 168 and so it is the leading monomial of $R(x)$. Hence $R(x) \equiv 0$ only if $d = 1$ or $h = 0$ or $(\omega', h') = (0, d)$ or $(\omega', h') = (0, 1/d)$. $h \neq 0$ since, otherwise \mathcal{P} is of type $X\bar{C}\bar{C}'SX'$ where X is a circular arc; the proof of Theorem 3.9 shows that \mathcal{P} is optimal only if either \bar{C} or \bar{C}' is anchored which contradicts the assumption made at the beginning of the proof. If $(\omega', h') = (0, d)$ or $(\omega', h') = (0, 1/d)$ we replace ω' and h' by their value in Q and T . Then, we apply the same procedure as above and show that the leading monomial of $R(x)$ is

$$2^{72} d^{16} (d^2 - 1)^{32} h^{16} x^{152}.$$

This leading monomial does not depend on whether $h' = d$ or $h' = 1/d$ and on the orientation of \mathcal{P} on \mathcal{X} and \mathcal{X}' . Since the obstacles are disjoint, $d \neq 1$ and $R(x) \not\equiv 0$ (in the case $d = 1$, it can also be shown that the number of roots of the system of equations is finite).

Hence, the number of roots of System 3.13 is finite since any given value of x determines at most two triplets of values for the other indeterminates y , z and t (see Figure 3.15). It follows that the number of possible equilibriums of our mechanical device is finite.

Case 3: One obstacle edge is a line segment and the other is a circular arc

The proof is similar to the previous case. We assume, without loss of generality, that \mathcal{O} and \mathcal{O}' are respectively a circular edge and a line segment.

Let \mathcal{D}' be the line parallel to \mathcal{O}' passing through I' and oriented such that $\angle(\vec{R}', \mathcal{D}') = -\pi/2$ (see Figure 3.17). Let O be the center of the circle (of unit radius) supporting \mathcal{O} . Let \tilde{O} be the orthogonal projection of O onto \mathcal{D}' and $2d$ the length of $O\tilde{O}$. Let $2h$ be the length of OH . Let \tilde{H}' be the orthogonal projection of H' onto \mathcal{D}' . Let $2x'$ and $2l'$ be the algebraic lengths of $\tilde{O}I'$ and $\tilde{O}\tilde{H}'$ on the oriented line \mathcal{D}' . Let $2h'$ be the algebraic distance between H' and \mathcal{D}' with $2h' > 0$ iff $\vec{H}'\tilde{H}'$ and \vec{R}' have opposite orientations. Let $\omega = \angle(\vec{O\tilde{O}}, \vec{O\tilde{H}'})$.

Lemma 3.19 *The moving object D is at an equilibrium only if:*

$$\begin{cases} \sin(\alpha' - \alpha) + \sin \alpha' \sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha \sin(\alpha' + \varphi) = 0 \\ \cos(\alpha' - \alpha) + \cos \alpha' = d \\ h \sin(\alpha' + \varphi - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) + \delta = 0 \\ h' \sin(\alpha' + \varphi') + \cos(\alpha' + \varphi') (\sin \alpha' + \sin(\alpha' - \alpha) - l') + \delta' = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

where δ (resp. δ') is zero if the path \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X} and \mathcal{C} (\mathcal{X}' and \mathcal{C}') and 1 otherwise.

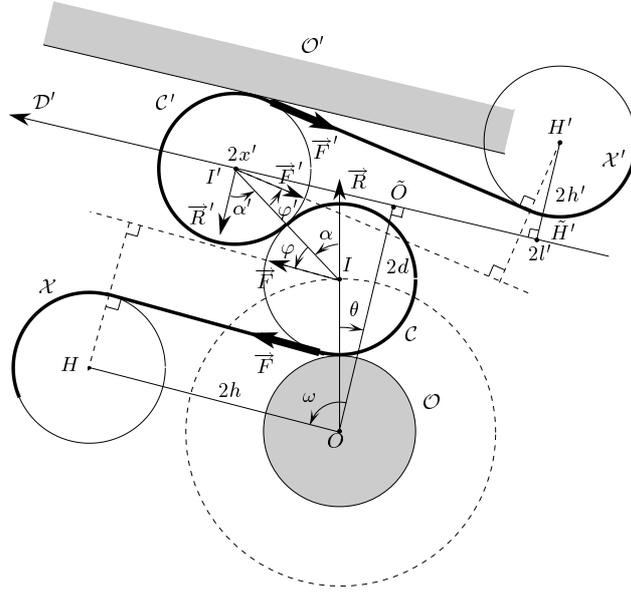


FIG. 3.17 – Mechanical device where one obstacle edge is a line segment and the other is a circular edge

Proof: The first equation of System 3.30 is given by Lemma 3.16. Now, let $\theta = \angle(\vec{OI}, \vec{OO})$. Considering the polygon $(OII'\tilde{O})$ in Figure 3.17, we have :

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha - \theta [2\pi] \\ \cos \theta + \cos(\alpha - \theta) &= d \\ -\sin \theta + \sin(\alpha - \theta) &= x'\end{aligned}$$

Which gives :

$$\cos(\alpha' - \alpha) + \cos \alpha' = d \quad (3.31)$$

$$\sin(\alpha' - \alpha) + \sin \alpha' = x' \quad (3.32)$$

Equation 3.31 is the second equation of System 3.30. We show how to compute the two other equations of System 3.30 for each possible orientation of X and X' .

• If \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X} and \mathcal{C} , then Equation 3.22 still holds :

$$h \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) = 0$$

Thus, as $\alpha' = \alpha - \theta [2\pi]$:

$$h \sin(\alpha' + \varphi - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) = 0 \quad (3.33)$$

• If \mathcal{P} has opposite orientations on \mathcal{X} and \mathcal{C} , then Equation 3.26 still holds :

$$h \sin(\alpha + \varphi - \theta - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) + 1 = 0$$

Thus, as $\alpha' = \alpha - \theta [2\pi]$:

$$h \sin(\alpha' + \varphi - \omega) - \sin(\alpha + \varphi) + 1 = 0 \quad (3.34)$$

• If \mathcal{P} has the same orientation on \mathcal{X}' and \mathcal{C}' , then Equation 3.7 still holds :

$$\tan(\alpha' + \varphi') = \frac{l' - x'}{h'}$$

By Equation 3.32, we obtain :

$$h' \sin(\alpha' + \varphi') + \cos(\alpha' + \varphi') (\sin \alpha' + \sin(\alpha' - \alpha) - l') = 0 \quad (3.35)$$

• If \mathcal{P} has opposite orientations on \mathcal{X}' and \mathcal{C}' , then Equation 3.11 still holds :

$$(x' - l') \cos(\alpha' + \varphi') + h' \sin(\alpha' + \varphi') = -1$$

Using Equation 3.32, we get :

$$h' \sin(\alpha' + \varphi') + \cos(\alpha' + \varphi') (\sin \alpha' + \sin(\alpha' - \alpha) - l') + 1 = 0 \quad (3.36)$$

That ends the proof of the lemma. \square

We now show that System 3.30 has a finite number of roots $(\alpha, \alpha, \varphi, \varphi')$ (in $(S^1)^4$). We consider the variable substitution $x = \tan(\alpha/2)$, $y = \tan(\alpha'/2)$, $z = \tan(\varphi/2)$ and $t = \tan(\varphi'/2)$, and we apply exactly the same procedure as in Case 2, except that $E'_{14} = E_{14}/16(1 + y^2)^2$. It follows that the leading monomial of $R(x)$ is

$$2^{64} d^{32} h^{16} (l'^2 + (h' - d)^2)^4 (l'^2 + (h' + d)^2)^4 x^{176}.$$

This leading monomial does not depend on the orientation of \mathcal{P} on \mathcal{X} and \mathcal{X}' . Hence the polynomial $R(x) \equiv 0$ only if $h = 0$ or $(l', h') = (0, \pm d)$. As above, we can eliminate the case $h = 0$ and if $(l', h') = (0, d)$ or $(l', h') = (0, -d)$ we replace l' and h' by their value in Q and T . In both cases, the leading monomial of $R(x)$ becomes :

$$2^{80} d^{32} h^{16} x^{160}.$$

This leading monomial does not depend on the orientation of \mathcal{P} on \mathcal{X} and \mathcal{X}' . Thus we have shown that $R(x) \not\equiv 0$. It follows that the number of roots of System 3.30 is finite because any given value of x determines at most two

triplets of values for the other indeterminates y , z and t (see Figure 3.17). Therefore, the number of possible equilibriums of our mechanical device is finite.

That ends the proof of Theorem 3.15.

Remark 3.20 Although the degree of $R(x)$ is very large in Cases 2 and 3, we can prove that the number of potential equilibriums of the mechanical device is much smaller. Indeed, let S be an algebraic system of n equations in n indeterminates. It is known that the number of complex roots of S is either infinite or less or equal to the generic number of roots, i.e. the number of roots for a generic⁴ choice of the parameters. Moreover, the set of parameters for which the number of roots of S is not equal to the generic number of roots is included in an algebraic set, and thus is of measure 0. The algebraic systems under consideration in Cases 1, 2 and 3 have the same number of equations and indeterminates and we have shown that the number of roots of these systems is finite for any choice of the parameters. It follows that the number of roots of these systems are, with probability 1, maximal for a random choice of the parameters. In order to estimate the number of solutions of our systems, we use Gröbner basis and compute the number of roots for some pseudo random choices of the parameters. In this way, we obtain that the maximal number of roots of System 3.13 is 36, with probability close to 1, instead of $336 = 2 \cdot \text{degree}(R(x))$.

3.6 The algorithm

Let $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m$ be the disjoint moderate obstacles. We denote by \mathcal{S}_O the set of the obstacle edges and by n its size.

Let S and F be the initial and the final point of the optimal path that we want to compute. By Theorems 3.9 and 3.10, any C -segment is either an anchored C -segment, or is adjacent to a terminal C -segment and to an anchored C -segment, or belongs to a subpath of type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ where $X, X' \in \{O, \bar{C}\}$ (the lengths of the S -segments being possibly zero).

The algorithm computes first the set $\mathcal{S}_{\bar{C}}$ of all the maximal free anchored arcs of circle. A *maximal free anchored arc* is a maximal arc of an anchored circle that does not intersect the interior of the obstacles. It will be simply called a free anchored arc in the sequel. We will also say for short that an arc (or a subpath) intersects an obstacle iff it intersects the interior of the obstacle.

4. A choice of the parameters is called generic if the values of the parameters do not satisfy any algebraic relation other than those of the system.

To each obstacle and for a given r , we associate a *grown obstacle* which is the Minkowski sum of the obstacle and of a disk of radius r . Let \mathcal{A}_r be the arrangement of the boundaries of these grown obstacles. A point is said of *level i* in \mathcal{A}_r if it belongs to the interior of i grown obstacles. The vertices of level 0 are simply the vertices of the boundary of the union of the grown obstacles. Because the obstacles are disjoint, there are $O(n)$ such vertices by a result of Kedem et al. [KLPS86]. The same bound holds for the number of vertices of the k first levels for any constant k by the random sampling theorem of Clarkson and Shor [CS89].

Lemma 3.21 *The number of free anchored arcs is $O(n)$ and these arcs can be computed in $O(n \log n)$ time.*

Proof: A circle of unit radius is intersected by at most five obstacles. Indeed, the obstacles are disjoint and moderate which implies that each one contains a circle of unit radius. The claim follows since there are at most five pairwise disjoint circles of unit radius that may intersect a given circle of unit radius. It follows that any point is of level at most five in \mathcal{A}_1 . Hence, \mathcal{A}_1 has linear size and can be computed in $O(n \log n)$ time by standard techniques.

Since the centers of the anchored circles are the vertices of \mathcal{A}_1 and each anchored circle is intersected by at most five obstacles, the lemma is proved. \square

Once the free anchored arcs have been computed, we compute the set \mathcal{S}_S of all the free line segments that are tangent to two arcs of $\mathcal{S}_{\bar{c}} \cup \mathcal{S}_O$.

Lemma 3.22 *\mathcal{S}_S has size $O(n^2)$ and can be computed in $O(n^2 \log n)$ time.*

Proof: First, we compute all the free line segments tangent to two obstacles. Let us consider each obstacle in turn, say \mathcal{O}_1 for concreteness. Let D_θ be an oriented line of orientation θ tangent to \mathcal{O}_1 . The set of common points between \mathcal{O}_1 and D_θ is either a single point or a line segment; let P_θ be either this single point or the middle point of the line segment. If D_θ intersects \mathcal{O}_i ($i = 2, \dots, m$), we call P_i the point common to D_θ and \mathcal{O}_i that is closer to P_θ . Let $f_i(\theta)$ be the algebraic length of $P_\theta P_i$ on the oriented line D_θ .

Let \mathcal{E}^+ (resp. \mathcal{E}^-) be the lower (upper) envelope of the functions f_i that are positive (negative). As the obstacles are pairwise disjoint, $f_i(\theta) \neq 0$ and $f_i(\theta) \neq f_j(\theta)$ for all θ and $i \neq j$. It follows that \mathcal{E}^+ and \mathcal{E}^- can be computed in $O(n \log n)$ time. A line segment joining P_θ to P_i is free iff $(\theta, f_i(\theta))$ belongs to \mathcal{E}^+ or \mathcal{E}^- . Moreover, a line segment $P_\theta P_i$ is tangent to \mathcal{O}_i iff P_i is an end-point of f_i . Hence, computing the free line segments tangent to \mathcal{O}_1 and another obstacle reduces to compute \mathcal{E}^+ and \mathcal{E}^- .

Repeating the above procedure for all the obstacles, we conclude that all the free line segments tangent to two obstacles can be computed in $O(n^2 \log n)$ time.

We now compute the free line segments tangent to a free anchored arc and to either an obstacle or another anchored free arc. Let C_1, \dots, C_p be the anchored free arcs. We consider in turn each free anchored arc, say C_1 for concreteness, and apply exactly the same procedure as above to compute the free line segments tangent to C_1 and to an obstacle. As above, these segments can be computed in $O(n \log n)$ time by computing the envelopes \mathcal{E}^+ and \mathcal{E}^- . It remains to compute the free line segments tangent to C_1 and to the other anchored free arcs C_2, \dots, C_p . We define a function g_i involving C_1 and C_i and similar to the function f_i defined above. To each end point of g_i that lies between \mathcal{E}^+ and \mathcal{E}^- corresponds a free line segment tangent to C_1 and C_i . Deciding if such an end point lies between \mathcal{E}^+ and \mathcal{E}^- can be done in $O(\log n)$ time by binary search once the envelopes have been computed. As the number of free anchored arcs is $O(n)$ by Lemma 3.21, the free line segments tangent to C_1 and to another anchored free arc can be computed in $O(n \log n)$ time. Hence, the free line segments tangent to an anchored free arc and to either an obstacle or another anchored free arc can be computed in $O(n^2 \log n)$ time in total.

This achieves the proof. \square

We consider now the subpaths of type $C_t C \bar{C}$ and $\bar{C} C C_t$. We compute the set \mathcal{S}_C of all the circular arcs that avoid the obstacles and are tangent to a terminal circle and to an anchored free arc. As there are $O(n)$ anchored free arcs, this step can easily be done in $O(n^2)$ time.

By Theorem 3.9, $\mathcal{S}_{\bar{C}} \cup \mathcal{S}_O \cup \mathcal{S}_S \cup \mathcal{S}_C$ contains all the arcs potentially taken by an optimal path except the subpaths of type $X S \bar{C} \bar{C} S X'$. We consider, in turn, all the quadruplets $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{X}')$ where \mathcal{X} and \mathcal{X}' are obstacle edges or anchored arcs, and where \mathcal{O} and \mathcal{O}' are two obstacle edges. First, we compute the family of potential optimal subpaths of type $X S \bar{C} \bar{C} S X'$ where X (resp. X') is an arc of \mathcal{X} (\mathcal{X}') and the two C -segments $\bar{C} \bar{C}$ are respectively tangent to \mathcal{O} and \mathcal{O}' . In a second step, we will check whether or not these potential optimal subpaths intersect other obstacles.

By solving an algebraic system as described in the proof of Theorem 3.15, we compute the family of potential optimal subpaths of type $X S \bar{C} \bar{C} S X'$ when neither of the two C -segments, tangent to \mathcal{O} and \mathcal{O}' respectively, is anchored. That step can be performed in constant time for each chosen quadruplet assuming that the roots of a polynomial of bounded degree can be computed in constant time. Hence the total time complexity of this step is $O(n^4)$. We also compute the subpaths of type $X S \bar{C} \bar{C} S X'$ and $X S \bar{C} \bar{C} S X'$. As the number of anchored C -segments is $O(n)$, the total number of these

subpaths is $O(n^4)$ and they can be easily computed in $O(n^4)$ time. It remains to compute the set $\mathcal{S}_{\bar{C}\bar{C}}$ of those subpaths that avoid the obstacles.

Lemma 3.23 $\mathcal{S}_{\bar{C}\bar{C}}$ can be computed in $O(n^4 \log n)$ time.

Proof: We show that we can check in $O(\log n)$ time whether or not a given subpath of type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ intersects the obstacles. We consider successively the case of an arc of circle and the case of a line segment.

As mentioned in the proof of Lemma 3.21, a circle of unit radius intersects at most five obstacles. We can identify the obstacles that intersect the circle supporting a given arc \bar{C} by locating in $O(\log n)$ time the center of this circle in the arrangement \mathcal{A}_1 . It then remains to check if the arc \bar{C} (not the whole circle) actually intersects one of the obstacles. Each such test can be done in $O(\log n)$ time since each obstacle has $O(n)$ edges [DS90].

We describe now how to check if a line segment S of a subpath of type $XS\bar{C}\bar{C}SX'$ intersects the obstacles. By Lemma 3.11, the length of S is at most 4. It follows that if S intersects an obstacle, each of its end points are contained in the obstacle grown by a disk of radius 4. As the obstacles are disjoint and moderate, a point can only be contained in $g = O(1)^5$ such grown obstacles; hence, arrangement \mathcal{A}_4 has linear size and can be computed in $O(n \log n)$ time. We locate one endpoint of S in \mathcal{A}_4 and find the at most g obstacles that may intersect S . We consider in turn each of these obstacles and check if S indeed intersects the obstacle. This can be done in $O(\log n)$ time [DS90]. \square

By Theorems 3.9, $\mathcal{S}_{\bar{C}} \cup \mathcal{S}_O \cup \mathcal{S}_S \cup \mathcal{S}_C \cup \mathcal{S}_{\bar{C}\bar{C}}$ contains all the arcs potentially taken by an optimal path.

Let \mathcal{G} be the weighted graph whose nodes are the tangent points between two arcs of $\mathcal{S}_{\bar{C}} \cup \mathcal{S}_O \cup \mathcal{S}_S \cup \mathcal{S}_C \cup \mathcal{S}_{\bar{C}\bar{C}}$ and whose edges are the arcs of $\mathcal{S}_{\bar{C}} \cup \mathcal{S}_O \cup \mathcal{S}_S \cup \mathcal{S}_C \cup \mathcal{S}_{\bar{C}\bar{C}}$. The final step of the algorithm consists in searching a shortest path in this graph.

Theorem 3.24 *An optimal path amidst a set of disjoint moderate obstacles with n edges in total can be computed in $O(n^4 \log n)$ time.*

Improving the performances of the algorithm

We now show that the time complexity of the algorithm can be reduced in most practical situations. This is a consequence of the fact that the subpaths of type $\bar{C}\bar{C}$ can only be encountered near the endpoints of the path.

5. g is the maximal number of disjoint disks of unit radius that can be packed in a disk of radius 6.

Proposition 3.25 is a consequence of a claim of Agarwal et al. [ART95]. We give here a complete proof.

Proposition 3.25 *Let \mathcal{P} be an optimal path consisting of four parts \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 and \mathcal{P}_4 in this order where \mathcal{P}_2 and \mathcal{P}_3 are C -segments. Let \mathcal{C}_2 and \mathcal{C}_3 be the circles supporting \mathcal{P}_2 and \mathcal{P}_3 , and let O_2 and O_3 be their centers.*

1. *If \mathcal{C}_3 is not obstructed by any obstacle or if \mathcal{C}_2 is obstructed by an obstacle, then for any M on \mathcal{P}_1 , the Euclidean distance between M and O_3 is smaller than 3.*
2. *If \mathcal{C}_3 is obstructed by an obstacle or if \mathcal{C}_2 is not obstructed by any obstacle, then for any M on \mathcal{P}_4 , the Euclidean distance between M and O_2 is smaller than 3.*

Proof: We only prove the first claim; the second one is symmetrical. We assume, without loss of generality, that \mathcal{P}_2 and \mathcal{P}_3 are oriented counterclockwise and clockwise respectively.

We recall some notations introduced in Section 3.2: let M be a point of \mathcal{P} and let $C_L(M)$ (resp. $C_R(M)$) be the unit circle tangent to \mathcal{P} at M and lying on the left (resp. right) side of the path \mathcal{P} oriented from S to T . $C_L(M)$ is oriented counterclockwise and $C_R(M)$ is oriented clockwise. An arc of one of these circles will be oriented accordingly.

We show that for any M on \mathcal{P}_1 , $C_L(M)$ intersects \mathcal{C}_3 . It will immediately follow that the Euclidean distance between M and O_3 is smaller than 3.

Suppose for a contradiction that there exists M on \mathcal{P}_1 such that $C_L(M)$ does not intersect \mathcal{C}_3 . Let M_0 be the point of \mathcal{P}_1 such that for any point M located after M_0 on the relative interior of \mathcal{P}_1 , $C_L(M)$ properly intersects \mathcal{C}_3 (see Figure 3.18); M_0 exists because \mathcal{P}_2 is greater than π by Lemma 3.5. Let M_1 be the common point to $C_L(M_0)$ and \mathcal{C}_3 , and M_2 be the common end point of \mathcal{P}_2 and \mathcal{P}_3 .

We distinguish whether $M_1 \in \mathcal{P}_3$ or not. In each case we show that the dashed path of Figure 3.18 shortens \mathcal{P} and avoids all the moderate obstacles, which contradicts the fact that \mathcal{P} is optimal.

Case 1: $M_1 \in \mathcal{P}_3$.

We first show that the arc $[M_0M_1]$ of $C_L(M_0)$ is not obstructed by any moderate obstacle. A disk of unit radius that intersects $[M_0M_1]$ without intersecting the portion $\mathcal{P}(M_0, M_1)$ of \mathcal{P} between M_0 and M_1 is included in the region \mathcal{R} inside the closed curve that is the concatenation of $\mathcal{P}(M_0, M_1)$ and of the arc $[M_1M_0]$ of $C_L(M_0)$ (see Figure 3.19). By the definition of M_0 , the relative interior of the arc of \mathcal{P}_1 located after M_0 is strictly included in the

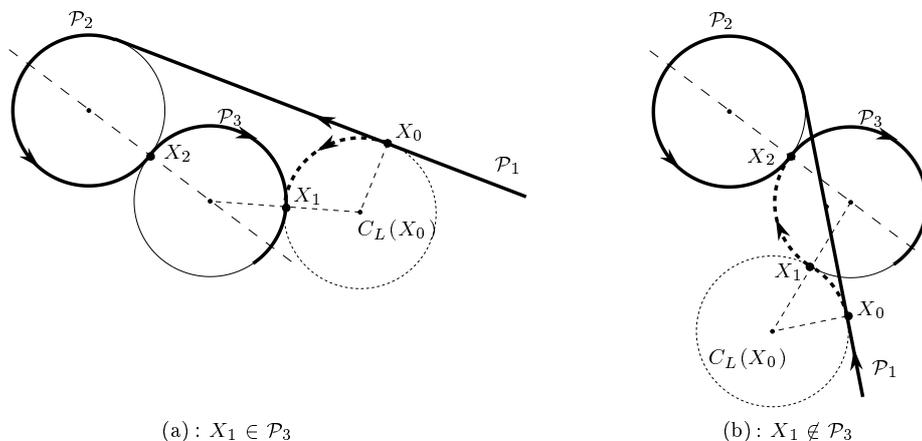


FIG. 3.18 – Shortcuts in the proof of Proposition 3.25

disk of radius 3 centered at O_3 . It follows that the only disks of unit radius included in \mathcal{R} are the disks whose boundaries are \mathcal{C}_2 and $C_L(M_0)$ (which may possibly intersect). Since \mathcal{P}_2 is not an arc of the boundary of the obstacles by hypothesis, $[M_0M_1]$ is not obstructed by any moderate obstacle.

By the definition of M_0 , $[M_0M_1]$ is smaller than π and so shortens \mathcal{P} because \mathcal{P}_2 is strictly greater than π .

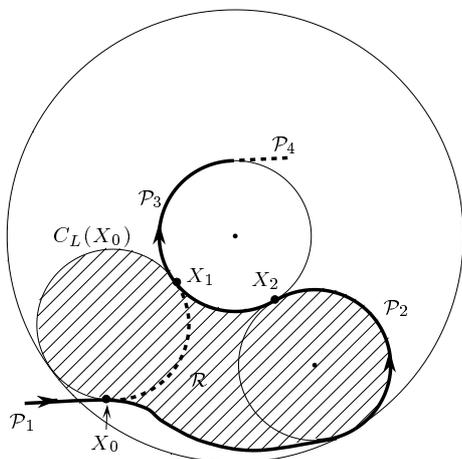


FIG. 3.19 – For the proof of Proposition 3.25 (Case 1)

Case 2: $M_1 \notin \mathcal{P}_3$.

First notice that the circle \mathcal{C}_2 is not obstructed by any obstacle. Indeed, otherwise M_0 must lie in the hashed region of Figure 3.20a and, as \mathcal{P}_3 is

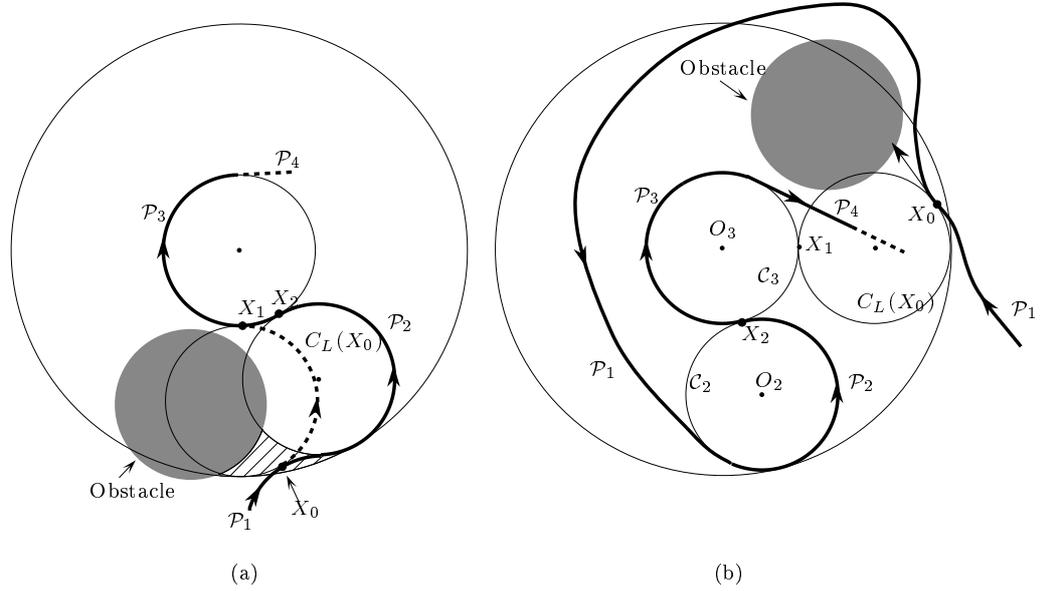


FIG. 3.20 – For the contradictions in the proof of Proposition 3.25 (Case 2)

greater than π , $M_1 \in \mathcal{P}_3$ which contradicts the hypothesis. By the hypothesis of the first claim of the proposition, it follows that \mathcal{C}_3 is not obstructed by any obstacle. That implies that the arc $[M_0M_1]$ of $C_L(M_0)$ avoids all the moderate obstacles because otherwise, the portion of \mathcal{P} between M_0 and M_2 cannot lie entirely in the disk of radius 3 centered at O_3 (see Figure 3.20b), which contradicts the definition of M_0 . Hence, the concatenation of the arc $[M_0M_1]$ of $C_L(M_0)$ and the arc $[M_1M_2]$ of \mathcal{C}_3 avoids all the moderate obstacles.

Moreover, the concatenation of $[M_0M_1]$ and $[M_1M_2]$ shortens \mathcal{P} . Indeed, the arc $[M_0M_1]$ is smaller than π by the definition of M_0 , and, the arc $[M_1M_2]$ is smaller than π because $M_1 \notin \mathcal{P}_3$ and \mathcal{P}_3 is greater than π . It can be easily shown that the concatenation of two circular arcs of unit radius whose lengths are smaller than π is a shortest path of bounded curvature (even if there is no obstacle). Hence, the concatenation of the arcs $[M_0M_1]$ and $[M_1M_2]$ shortens \mathcal{P} and avoids all the moderate obstacles which contradicts the hypothesis that \mathcal{P} is optimal. \square

Remark 3.26 The previous proof yields that an optimal path contains at most two non-terminal $\bar{C}\bar{C}$ -subpaths (i.e. subpaths of type $\bar{C}\bar{C}$ where both \bar{C} -segments are not terminal). For details see [ART95].

Theorem 3.27 Let \mathcal{P} be an optimal path joining S to F . Any subpath of \mathcal{P} of type $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}SX'$, where $X, X' \in \{O, \bar{C}\}$, is contained in one of the two disks of radius 9 centered at S or F .

Proof: This theorem follows from Proposition 3.25 and we use the notations introduced in that proposition. Let \mathcal{P}_1 (resp. \mathcal{P}_4) be the portion of \mathcal{P} between S (resp. F) and the first (resp. last) \bar{C} in the considered subpath. From Proposition 3.25, we have $\forall M \in \mathcal{P}_1 MO_3 \leq 3$ or $\forall M \in \mathcal{P}_4 MO_2 \leq 3$. Assume without loss of generality that $\forall M \in \mathcal{P}_1 MO_3 \leq 3$. Then, the starting point S and the whole subpath $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}$ is included in the disk of radius 3 centered at O_3 (see Figure 3.21).

On the other hand, by Lemma 3.11, the length of the line segment preceding X' is smaller than 4. Therefore, S and the whole subpath $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}SX'$ is included in a disk of diameter $3 + 2\sqrt{5} + 1 < 9$ (see Figure 3.21). Hence the subpath of type $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}SX'$ is included in a disk of radius 9 centered at S . \square

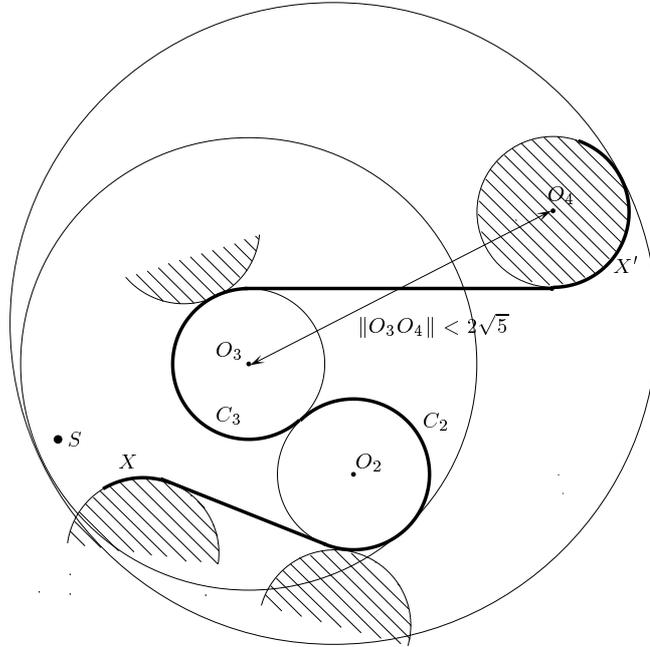


FIG. 3.21 – For the proof of Theorem 3.27

According to Theorem 3.27, we can improve the procedure that computes the subpaths of type $X\bar{S}\bar{C}\bar{C}SX'$. Indeed, instead of considering all n^4 quadruplets $(\mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{X}')$, we can only consider those that intersect one of the disks of radius 9 centered at S and F . If k is the number of such quadruplets, the time complexity of the algorithm becomes $O(n^2 \log n + k^4 \log k)$. In particular, if the length of any obstacle edge is bounded from below by some

positive constant, then $k = O(1)$.

Theorem 3.28 *Given a set of disjoint moderate obstacles with n edges whose lengths are bounded from below by some positive constant. An optimal path between two configurations amidst those obstacles can be computed in $O(n^2 \log n)$ time.*

3.7 Final remarks and open questions

The geometric results and the algorithm hold even if the obstacles are not disjoint. However, the time-complexity increases since the number of anchored C -segments may be not linear.

In this paper, we have considered moderate obstacles whose boundaries consist of line segments and circular arcs of unit radius. If an obstacle is not moderate, we can first compute its convex hull of bounded curvature as explained in [BL96a]. However, it would be interesting to consider more general moderate obstacles (in the sense of Agarwal et al.) and, in particular, obstacles whose boundaries consist of line segments and circular arcs of radii greater than or equal to 1. The system of equations corresponding to the equilibriums of the mechanical device (see Section 3.5) is very similar to the one in Lemma 3.18. However, the computations exceed the capabilities of the current computer algebra systems⁶ and we have not been able to apply techniques similar to those of Section 3.5.

Many other questions remain open. We mention two of them we plan to consider in near future: Can similar results be obtained for polygonal robots? Can similar results be obtained if backwards moves are allowed? (preliminary results in that direction can be found in [ART95, BCL94b, RS90]).

Acknowledgments: The authors would like to thank the GDR MEDICIS (GDR CNRS 1026) for giving them the opportunity to use the machines of the GAGE group at Ecole Polytechnique.

6. Using AXIOM, the size of the process exceeds 500MB.

Chapitre 4

Conclusion et problèmes ouverts

Les robots existant dans le domaine industriel ont actuellement des possibilités de déplacement très limitées. Cependant, les objectifs de la robotique grandissent sans cesse : robots d'exploration terrestre ou sous-marine, robots d'intervention dans des environnements inconnus ou dangereux. . . La planification de trajectoires s'avère être une composante nécessaire de l'autonomie des robots dans ce genre de contexte. Planifier des trajectoires pour des robots holonomes est un problème à présent bien résolu. Les recherches sont maintenant principalement orientées vers l'étude des robots non-holonomes qui sont les robots mobiles les plus répandus dans la pratique.

Une particularité du domaine de recherche qu'est la planification de trajectoires pour des robots non-holonomes réside dans sa pluridisciplinarité. Etant donné la richesse du sujet, le problème a été abordé de différents points de vue; les méthodes de résolution proposées jusqu'à présent s'appuient sur plusieurs disciplines comme la robotique, la géométrie algorithmique et des thèmes plus mathématiques comme la théorie du contrôle optimal et l'optimisation sous contraintes. Mon approche du problème est principalement axée sur la géométrie algorithmique et utilise la théorie du contrôle optimal, les techniques de résolution de systèmes algébriques et les techniques d'optimisation sous contraintes.

Les applications de la planification de trajectoires de robots non-holonomes sont également nombreuses en dehors du contexte de la robotique. Citons les problèmes de tracé d'autoroutes et de voies de chemin de fer, et de façon plus générale, les problèmes de tracé de courbes sous contraintes, dans le domaine de l'informatique graphique et de la CAO. Notons également que les grands problèmes de la géométrie algorithmique comme le calcul de plus courts chemins et le calcul d'enveloppes convexes se posent également dans le contexte de la non-holonomie.

L'étude des trajectoires optimales en temps est une instance fondamen-

tale du problème de la planification de trajectoires quelconques. D'un point de vue pratique, il s'avère que, pour des robots non-holonomes, la caractérisation des trajectoires optimales est utilisée dans tous les algorithmes de planification de trajectoires en présence d'obstacles, existant à l'heure actuelle. Ces algorithmes sont encore très rudimentaires et sont pour la plupart basés sur une discrétisation brutale et coûteuse de l'espace. Cela étant, planifier des trajectoires optimales en temps est naturellement un problème plus ardu que planifier des trajectoires quelconques. Il s'ensuit que les systèmes non-holonomes étudiés, jusqu'à présent, pour la planification de trajectoires optimales sont des modèles très simplifiés des voitures. En particulier, pour les modèles étudiés jusqu'à présent les trajectoires optimales en temps sont également des plus courts chemins.

Dans le cadre de la non-holonomie, nous avons présenté dans cette thèse d'une part un algorithme de calcul d'enveloppes convexes de courbure bornée et, d'autre part, un algorithme de calcul de plus courts chemins de courbure bornée en présence d'obstacles modérés, c'est-à-dire dont le bord est de courbure bornée. Ces travaux se justifient par eux mêmes et s'unissent de surcroît pour former un algorithme de calcul de chemins de courbure bornée en présence d'obstacles polygonaux. En effet, une approche du problème de la planification de trajectoires de courbure bornée en présence d'obstacles polygonaux consiste à calculer l'enveloppe convexe de courbure bornée de chaque obstacle, puis à calculer une trajectoire de courbure bornée en présence d'obstacles modérés. Notons que cet algorithme est, parmi ceux existants, l'un des très rares à calculer, sans utiliser de discrétisation massive, une trajectoire pour un robot non-holonyme en présence d'obstacles polygonaux.

Nous présentons à présent une collection de problèmes ouverts, ce qui permet de donner une idée de l'ampleur des travaux à effectuer sur les problèmes algorithmiques et combinatoires existant dans le domaine de la non-holonomie. La plupart de ces problèmes peuvent être considérés du point de vue de la robotique, cependant, nous les présentons, pour la plupart, du point de vue du domaine des courbes et des surfaces sujettes à des contraintes sur la courbure.

L'un des problèmes de base non résolu à l'heure actuelle est celui du calcul d'une trajectoire de courbure bornée (pas nécessairement la plus courte) entre deux configurations en présence d'obstacles polygonaux. Le problème étant d'assurer le calcul d'une trajectoire dès lors qu'il en existe une.

Un autre problème de base est celui de l'existence d'un algorithme polynomial déterminant s'il existe un chemin de courbure bornée joignant deux configurations en présence d'obstacles polygonaux. Rappelons qu'un algorithme de complexité exponentielle existe pour ce problème [FW91]. Notons également qu'en présence d'obstacles polygonaux, décider si une courbe de

courbure bornée reliant deux configurations est de longueur minimale, est un problème qui, jusqu'à présent, est conjecturé comme étant NP-dur.

Une extension naturelle de tous les problèmes étudiés jusqu'à présent consiste à augmenter la dimension. Rappelons que récemment, les plus courts chemins de courbure bornée dans \mathbb{R}^3 en l'absence d'obstacles ont été caractérisés [Sus95, Pér95]. Ces travaux soulèvent de nombreux problèmes de généralisations de résultats existant en dimension 2. Citons, entre autres, la généralisation en dimension 3 du calcul d'enveloppes convexes de courbure bornée ainsi que du calcul de plus courts chemins de courbure bornée en présence d'obstacles modérés.

Une autre extension naturelle du problème de la planification de trajectoires consiste à considérer un modèle de voiture plus réaliste que celui de Dubins. Un modèle intéressant est celui d'un robot de type voiture soumis à deux lois de commande et sujet à quatre contraintes : les commandes sont l'accélération tangentielle du véhicule et la position du volant ; les contraintes sont, d'une part une borne sur le rayon de giration du véhicule, d'autre part une borne sur la vitesse ainsi qu'une borne sur l'accélération tangentielle, enfin une borne sur l'accélération normale déterminée par les limites d'adhérence des roues.

Citons pour finir, les travaux en cours de rédaction dans lesquels nous nous intéressons au calcul, dans le plan, d'un plus court chemin de courbure bornée passant par une suite de points ordonnés. Ce problème est une instance fondamentale du problème général du calcul de plus courts chemins de courbure bornée en présence d'obstacles polygonaux. En effet, nous pouvons remarquer que si l'on suppose les obstacles polygonaux, convexes et loin les uns des autres, alors les points de contact entre une trajectoire optimale et les obstacles sont tous des sommets des obstacles; si de plus, on suppose connus les points de contact entre les obstacles et une trajectoire optimale, le problème du calcul de cette trajectoire est alors équivalent au problème du calcul d'un plus court chemin de courbure bornée passant par la suite de points de contacts.

Deuxième partie

Les robots à pattes

Chapitre 1

Planification de trajectoires de robots à pattes

1.1 Introduction

L'étude des robots à pattes date du début des années quatre-vingts. Dans ce domaine, les chercheurs se sont principalement intéressés aux problèmes de dynamique et de contrôle des robots à pattes [RR84, RR90] et rares sont ceux qui se sont intéressés à la planification de trajectoires en présence d'obstacles. A notre connaissance les seuls articles traitant du sujet sont [HNKU84, HK91, BDDP95]. Dans [HNKU84, HK91] le problème est abordé à l'aide de méthodes heuristiques tandis que [BDDP95] présente des algorithmes géométriques exacts résolvant le problème pour une classe particulière de robots à pattes lorsque les zones d'appui autorisées pour les pattes constituent un ensemble discret de points.

En présence d'obstacles, planifier des trajectoires peut se décomposer en deux sous-problèmes: d'une part il faut planifier des trajectoires pour le corps du robot et d'autre part il faut déplacer les pattes. Le problème du déplacement des pattes pour une trajectoire donnée du corps du robot est discuté dans [BDDP95] pour le type de robot considéré dans l'article.

Précisons ce que l'on entend par obstacle. Un obstacle définit une région où le robot ne peut pas poser ses pattes; cette région est caractérisée par la projection de l'obstacle sur le sol. Cela étant, le corps d'un robot à pattes peut passer au dessus de certains obstacles et ne peut pas passer au dessus d'autres obstacles sans rentrer en collision avec ces obstacles. Dans la suite nous ne considérons que des obstacles tels que le corps du robot puisse passer au dessus sans rentrer en collision avec l'obstacle. Cette hypothèse n'est pas réellement restrictive, en effet, nous abordons le problème de la planification de trajectoires par le calcul de l'espace des positions possibles du corps du

robot; si le corps du robot ne peut pas passer au dessus de certains obstacles sans qu'il y ait collision, il suffit de retrancher de l'espace susdit les régions correspondant à ces obstacles. Nous posons donc le problème de la planification de trajectoires pour le corps du robot lorsque les pattes ne sont autorisées à se poser que dans certaines régions, le corps du robot n'entrant jamais en collision avec les obstacles. Nous définissons une *zone d'appui* comme étant une composante connexe de l'ensemble des points où le robot est autorisé à poser ses pattes. On appelle *point d'appui* un point d'une zone d'appui.

Comparé au classique problème du déménageur de piano, de nouveaux types de contraintes apparaissent dans le problème de la planification de trajectoires des robots à pattes. Le robot doit satisfaire, d'une part, une contrainte de stabilité et d'autre part une contrainte d'accessibilité. On appelle *placement* du robot une position de son corps. Un point d'appui est dit *accessible* pour un placement du robot si une patte s'y appuyant ne dépasse pas une certaine élongation. Un placement du robot sera dit *stable* si le centre de gravité du robot se situe au dessus de l'enveloppe convexe des points d'appui accessibles pour ce placement. Grâce à cette définition, nous avons l'assurance que, pour tout placement stable, il existe trois points d'appui accessibles tels que le centre de gravité du robot se situe au dessus de l'enveloppe convexe de ces trois points d'appui.

Nous résolvons le problème de planification de trajectoires lorsque le robot à pattes est d'un type particulier appelé robot araignée et lorsque les zones d'appui sont des régions polygonales situées dans un plan horizontal. Par définition, le corps d'un *robot araignée* est ponctuel, toutes les pattes sont attachées au corps du robot et peuvent atteindre des points d'appui situés à une distance inférieure à R du corps (voir Figure 2.1); plus exactement, R est la distance maximale entre un point d'appui et la projection du corps du robot sur le plan contenant les zones d'appui. Le robot araignée doit être pourvu d'au moins quatre pattes, trois pour la stabilité statique et une quatrième pour permettre un déplacement des pattes. Rajouter des pattes supplémentaires au robot n'a aucune influence sur le problème car toutes les pattes sont attachées au même point.

Remarquons qu'en pratique, les pattes d'un robot ne sont pas toutes attachées au même point. Cela dit, considérer toutes les pattes attachées au même point ne constitue pas forcément un acte de simplification abusif: le robot Ambler développé à l'université de Carnegie Mellon [JW89] est un bon exemple de robot araignée, en effet, toutes les pattes sont attachées sur un même axe vertical.

Nous rappelons fort succinctement l'algorithme proposé par J-D. Boissonnat, O. Devillers, L. Donati et F. Preparata [BDDP95]. Le robot considéré est un robot araignée et les zones d'appui autorisées pour les pattes constituent

un ensemble discret de points du plan $\{s_1, \dots, s_n\}$. L'algorithme est basé sur le calcul de *l'espace libre* du robot, c'est-à-dire l'ensemble des placements stables du robot. Nous notons \mathcal{F} l'espace libre du robot araignée et \mathcal{A} l'arrangement des cercles de rayon R centrés en les s_i (voir figure 2.2). Pour tout placement du robot dans une cellule Γ de \mathcal{A} , l'ensemble des points d'appui accessibles par le robot est invariant. La région de Γ incluse dans \mathcal{F} est donc exactement l'intersection de Γ avec l'enveloppe convexe des points d'appui accessibles par le robot depuis Γ . Notons que l'on montre ainsi que le bord de l'espace libre est constitué d'arcs de cercles de l'arrangement \mathcal{A} et de segments portés par les droites $s_i s_j$ ($i \neq j$). L'algorithme décrit dans [BDDP95] est basé sur cette idée. De plus, en utilisant une structure de données sophistiquée permettant le maintien "hors ligne" d'enveloppes convexes, la complexité en temps de l'algorithme est $O(|\mathcal{A}| \log n)$ où $|\mathcal{A}|$ désigne la taille combinatoire de \mathcal{A} . Les auteurs montrent, de plus, que $|\mathcal{F}| = \Theta(|\mathcal{A}|)$. La taille de \mathcal{A} est quadratique dans le cas le pire mais si k représente la *densité des points d'appui* c'est-à-dire le nombre maximal de disques de rayon R centrés en les s_i pouvant recouvrir un point du plan, alors $|\mathcal{A}| = O(kn)$ (voir [Sha91]). Donc, pour des points d'appui clairsemés dans le plan $k = O(1)$ et $|\mathcal{F}|$ est linéairement dépendant du nombre de points d'appui. Les auteurs résolvent également le problème du déplacement des pattes lors du suivi d'une trajectoire par le corps du robot; nous décrivons dans la section 1.3 cet algorithme en montrant qu'il se généralise dans le cas où les zones d'appui ne sont pas ponctuelles.

Remarquons que l'algorithme de calcul de l'espace libre ne se généralise pas pour des zones d'appui autres que des points. En effet, pour des zones d'appui non ponctuelles, une généralisation naturelle de l'algorithme consiste à regarder l'arrangement des bords des zones d'appui agrandies de R . De même que précédemment, pour tout placement du robot dans une cellule de cet arrangement, la liste des zones d'appui accessibles par le robot est invariante. Cependant, du fait que les zones d'appui ne sont plus ponctuelles, l'ensemble des points d'appui accessibles par le robot n'est pas invariant pour tout placement du robot dans une cellule de l'arrangement. La condition de stabilité ne peut donc pas s'exprimer par le calcul d'une unique enveloppe convexe par cellule de cet arrangement.

1.2 Contribution

Nous présentons un algorithme de planification de trajectoires pour un robot araignée lorsque les zones d'appui autorisées pour le robot sont des régions polygonales. Nous abordons le problème de la planification de trajec-

toires par le calcul de l'espace libre \mathcal{F} du robot araignée. Dès lors que l'espace libre est calculé, déterminer une trajectoire pour le corps du robot revient à trouver une trajectoire pour un point dans l'espace libre. Nous montrons à la section 1.3 que l'algorithme présenté dans [BDDP95] traitant du déplacement des pattes lorsque le corps du robot suit une trajectoire pré-calculée, se généralise aisément lorsque les zones d'appui sont des régions polygonales.

L'originalité de l'algorithme que nous présentons provient du lien que nous avons établi entre le problème de planification de trajectoires pour un robot araignée et le problème de planification de trajectoires d'un robot de la forme d'un demi-disque se déplaçant en translation et rotation. Dans la suite un robot en forme de demi-disque sera appelé *robot demi-disque*. Plus précisément, le calcul de l'espace libre (dans \mathbb{R}^2) du robot araignée lorsque les zones d'appui constituent un ensemble de régions s_1, \dots, s_n se déduit du calcul de l'espace libre (dans $\mathbb{R}^2 \times S^1$) d'un robot demi-disque se déplaçant en translation et rotation parmi les s_i considérés comme obstacles. Une autre particularité de notre algorithme réside dans la méthode de calcul de l'espace libre du robot demi-disque se déplaçant en translation et rotation. Nous utilisons un algorithme de calcul d'enveloppe "inférieure" de courbes pour des courbes définies sur le tore $S^1 \times S^1$. Cette pratique étant en soi non triviale car la notion d'enveloppe inférieure n'a pas, a priori, de sens pour des courbes définies sur un tore. Dans la suite le lecteur pourra peut être s'étonner de ne pas nous voir calculer précisément tout l'espace libre du robot demi-disque. En effet, nous ne calculons que la partie de l'espace libre du robot demi-disque qui nous intéresse pour le calcul du bord de l'espace libre du robot araignée. Cela dit le lecteur pourra se convaincre que le calcul de tout l'espace libre du robot demi-disque se déduit facilement de la partie que nous allons calculer.

Lorsque les zones d'appui autorisées pour les pattes constituent un ensemble de n points dans le plan $\{s_1, \dots, s_n\}$, l'algorithme proposé, bien que nécessitant un calcul d'espace libre en dimension trois est d'une complexité presque optimale: l'algorithme est d'une complexité en temps $O(|\mathcal{A}| \log n)$ et en espace mémoire $O(|\mathcal{A}| \alpha(n))$ où $\alpha(n)$ est la pseudo inverse de la fonction d'Ackerman¹ et \mathcal{A} est l'arrangement des cercles de rayon R centrés en les s_i . Comme cela a été montré dans [BDDP95], la taille de \mathcal{F} est $\Theta(|\mathcal{A}|)$. Ces travaux ont fait l'objet d'une communication à la conférence *IEEE Robotics and Automation* en 1994 [BDL94a]. Comparé à l'algorithme décrit dans [BDDP95], notre algorithme est plus simple, présente la même complexité en temps et une complexité en espace mémoire très légèrement moins performante. Cependant, contrairement à l'algorithme décrit dans [BDDP95]

1. $\alpha(n) \leq 3$ pour toute valeur de n envisageable en pratique.

notre algorithme se généralise parfaitement pour des zones d'appui quelconques.

Lorsque les zones d'appui autorisées pour les pattes constituent un ensemble de polygones (soit n le nombre total d'arêtes des polygones), notre algorithme calcule l'espace libre \mathcal{F} du robot araignée en temps $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n) \log n)$ et en espace mémoire $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n))$ où $n\alpha_k(n) = \lambda_k(n)$ est une fonction presque linéaire: $\lambda_k(n)$ est la longueur maximale d'une suite de Davenport-Schinzel d'ordre k sur un alphabet de n lettres (notons que $\alpha(n) = \alpha_3(n)$); \mathcal{A}_e est l'arrangement des bords des zones d'appui agrandies de R . L'arrangement \mathcal{A}_e est au pire quadratique. La complexité de l'algorithme peut être améliorée, en effet, le terme $\alpha_8(n)$ apparaissant dans la complexité n'est pas optimal: ce terme apparaît lors du calcul de l'enveloppe inférieure de n courbes se coupant deux à deux au plus six fois (voir proposition 2.34); cependant, ce nombre maximal d'intersections n'est pas une borne fine et une analyse plus approfondie permettrait de réduire à quatre ce nombre maximal d'intersections. Cette analyse ramènerait à $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_6(n) \log n)$ la complexité en temps de l'algorithme; cela dit, cette analyse est longue, déplaisante et ma foi guère productive.

Notre approche montre que la taille de l'espace libre \mathcal{F} est $O(|\mathcal{A}|\alpha(n))$ lorsque les zones appui sont n points. Cette borne n'est pas fine car, comme on l'a vu, $|\mathcal{F}| = \Theta(|\mathcal{A}|)$. La question se pose donc de savoir si $O(|\mathcal{A}_e|)$ est une borne supérieure pour la taille de \mathcal{F} .

Nous présentons au chapitre suivant l'article, dont une version résumée a été publié au *Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics* [BDL94b], décrivant l'algorithme de calcul de l'espace libre lorsque les zones d'appui constituent un ensemble discret de points dans le plan et sa généralisation lorsque les zones d'appui sont des régions polygonales.

1.3 Déplacement des pattes

Une fois l'espace libre \mathcal{F} calculé, planifier des trajectoires pour le corps du robot araignée ne pose aucun problème. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'algorithme présenté dans [BDDP92] pour le calcul de \mathcal{F} lorsque les zones d'appui sont ponctuelles ne se généralise pas pour des zones d'appui non ponctuelles. Cependant, l'algorithme de planification du mouvement des pattes se généralise bien. L'idée générale de l'algorithme est la suivante: considérons une trajectoire \mathcal{C} dans l'espace libre \mathcal{F} ainsi qu'une position initiale des pattes du robot; lors du suivi de la trajectoire par le corps du robot, un certain nombre de positions critiques apparaissent, soit lorsque le robot arrive en limite de stabilité, soit lorsque l'une de ses pattes

arrive en limite d'extensibilité; pour chacune de ces positions critiques, on calcule l'ensemble des points d'appui accessibles par le robot, puis on pose une patte libre dans la direction du mouvement et enfin, on retire la patte adéquate. Plus précisément, si le robot arrive en limite de stabilité, on calcule le point d'intersection I entre la trajectoire et l'enveloppe convexe des points d'appui accessibles par le robot; puis on place une patte libre du robot sur le premier point d'appui autorisé rencontré en parcourant cette enveloppe convexe à partir de I (le sens de parcours importe peu). Le problème est plus délicat lorsque le robot arrive en limite d'extensibilité de l'une de ses pattes. Soit G le corps ponctuel du robot (plus exactement G est la projection du corps du robot sur le plan des points d'appui). Soit p_1 le point d'appui correspondant à la patte en extension maximale et, p_2 et p_3 les deux autres points d'appui. Deux cas de figures sont à considérer. Supposons qu'il existe un point d'appui accessible $p \neq p_1$ tel que G soit contenu dans le triangle (p, p_2, p_3) . Alors, le robot peut avancer en posant une patte libre en p et en enlevant sa patte en p_1 . Dans le cas contraire, il n'existe pas de point d'appui accessible dans la région \mathcal{E}_1 de la figure 1.1. Considérons l'ensemble

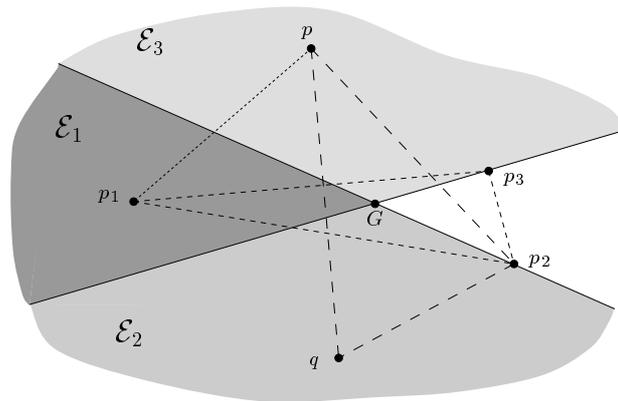


FIG. 1.1 – *Problème du déplacement des pattes lorsque celle posée en p_1 est en limite d'extension*

\mathcal{P} des points d'appui accessibles depuis G . Par hypothèse, le corps du robot peut suivre la courbe \mathcal{C} , donc l'enveloppe convexe de $\mathcal{P} \setminus p_1$ contient G . De plus, comme p_2 appartient à cette enveloppe convexe, il existe deux points p et q dans cette enveloppe convexe tels que le triangle (p_2, p, q) contienne G . Ni p ni q n'appartiennent à \mathcal{E}_1 donc l'un de ces points est situé dans la région \mathcal{E}_2 de la figure 1.1 et l'autre dans la région \mathcal{E}_3 . Supposons, sans perte de généralité, que $q \in \mathcal{E}_2$ et $p \in \mathcal{E}_3$. Le point G appartient alors au triangle $p_1 p_2 p$ (et également au triangle $p_1 p_3 q$). Le mouvement des pattes du robot

est alors le suivant : le robot pose sa patte libre en p et enlève celle en p_3 ; puis il pose sa patte libre en q ce qui lui permet d'enlever celle en p_1 . Le robot peut alors poursuivre sa trajectoire jusqu'au prochain point critique.

L'étude de la complexité de cet algorithme dans [BDDP92] n'est par contre pas généralisable. La cause en est la suivante : si l'ensemble des zones d'appui est réduit à un unique carré arbitrairement grand, le nombre de déplacement des pattes entre deux positions (dans ce carré) est également arbitrairement grand. Donc, la complexité du déplacement des pattes n'est pas uniquement reliée à la complexité des zones d'appui mais également à la longueur de la trajectoire du corps du robot.

1.4 Robots polygonaux à pattes

Jusqu'à présent, nous avons restreint l'étude des robots à pattes aux robots araignée. Notre approche se généralise-t-elle aux robots n'ayant pas toutes leurs pattes attachées au même point? Avant de répondre à cette question nous allons voir comment l'approche utilisée dans [BDDP92] peut se généraliser.

Soit un robot dont le corps est polygonal et tel qu'une patte soit attachée à chaque sommet du polygone. Pour simplifier la présentation, nous considérerons un robot dont le corps est rectangulaire. De même que précédemment, nous considérons que chaque patte à une extensibilité maximale R ; plus précisément, R est la distance maximale entre la projection (sur le plan des points d'appui) du point d'attache d'une patte et son point d'appui. Soit G la projection sur le plan des points d'appui du point de référence du robot situé à l'intersection des diagonales du rectangle. Nous restreignons notre étude au problème de planification de trajectoires du corps du robot en translation uniquement et lorsque les zones d'appui constituent un ensemble discret de points du plan $\{s_1, \dots, s_n\}$.

Introduisons tout d'abord quelques notations. Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 les quatre points d'attache des pattes et $\vec{U}_i = \overrightarrow{A_i G}$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$ (voir figure 1.2). Soit \mathcal{A} l'arrangement des cercles de rayon R centrés en les s_i et \mathcal{A}_i ($i \in \{1, \dots, 4\}$) le translaté de \mathcal{A} par \vec{U}_i .

La i -ème patte (c'est-à-dire la patte attachée en A_i) peut se poser en un point s_j si et seulement si G est contenu dans le translaté par \vec{U}_i du disque de rayon R centré en s_j (voir figure 1.2). Donc, l'ensemble des points d'appui accessibles par la i -ème patte est invariant lorsque G appartient à une cellule de l'arrangement \mathcal{A}_i . Plus généralement, l'ensemble des points d'appui accessibles par chaque patte est invariant lorsque G appartient à une cellule de l'union des arrangements $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ et \mathcal{A}_4 . Soit \mathcal{A}^4 l'union de ces

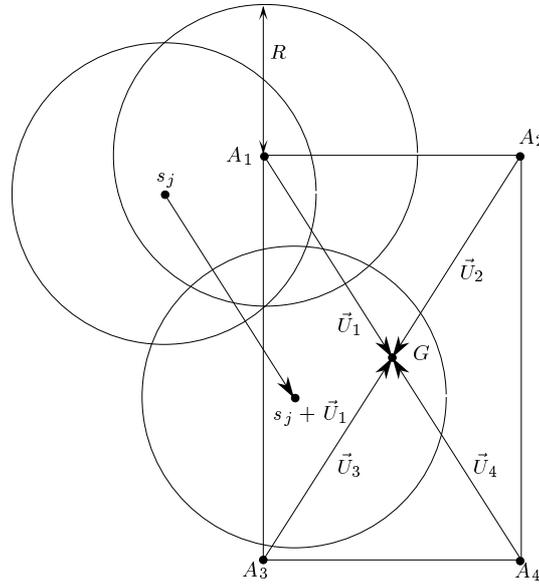


FIG. 1.2 – Robot rectangulaire à pattes

arrangements.

Quelle est l'ensemble des points d'une cellule Γ de l'arrangement \mathcal{A}^4 pour lesquels il existe des points d'appui accessibles assurant la stabilité du placement? Un placement du robot est stable si et seulement si il existe trois points d'appui accessibles par trois pattes distincts tels que G appartienne au triangle formé par ces trois points. Soit \mathcal{S}_i ($i \in \{1, \dots, 4\}$) l'ensemble des points d'appui accessibles par la i -ème patte lorsque $G \in \Gamma$ et attribuons aux points de \mathcal{S}_i la couleur i . Alors, il existe un placement stable des pattes en un point de Γ si et seulement si G appartient à un triangle tricolore² formé des points de $\mathcal{S}^4 = \cup_{1 \leq i \leq 4} \mathcal{S}_i$.

Donc, dans une cellule Γ de \mathcal{A}^4 , l'ensemble des placements stables pour le robot est l'union des triangles tricolores de sommets pris dans \mathcal{S}^4 . Pour un ensemble de n points coloriés avec une couleur parmi $k \geq 3$ couleurs, un algorithme de calcul de l'union des triangles tricolores en temps optimal $O(n \log n)$ est présenté dans [BDP91].

Calculer l'espace libre du robot à pattes peut alors se résumer à :

- Calculer l'arrangement \mathcal{A}^4 .
- Pour chaque cellule Γ de l'arrangement, colorier de couleurs différentes les points accessibles par chaque patte. Calculer l'union des triangles

2. Un triangle tricolore est un triangle dont les sommets ont des couleurs distinctes.

tricolores et calculer l'intersection avec la cellule Γ .

Ainsi décrit, cet algorithme a une complexité en temps de $O(n^3 \log n)$. Il serait bien sûr judicieux de calculer dynamiquement les unions de triangles tricolores pour ne pas recalculer entièrement l'union des triangles pour chaque cellule de l'arrangement. Malheureusement, l'algorithme décrit dans [BDP91] ne se dynamise pas, ne serait ce que pour un maintien "hors ligne".

Nous venons de voir comment peut se généraliser l'algorithme présenté dans [BDP91] pour des robot à pattes relativement génériques. L'approche que nous avons suivie pour les robots araignée, qui consiste à augmenter la dimension du problème et à calculer l'espace libre d'un robot holonome en translation et rotation parmi des obstacles ne semble pas se généraliser pour des robots à pattes n'ayant pas toutes leurs pattes attachées au même point.

D'autres extensions restent encore à étudier, en particulier :

- Le cas du robot segment (i.e. le corps du robot est un segment aux extrémités duquel plusieurs pattes sont attachées) présente-il des simplifications significatives par rapport au robot à pattes polygonal? Notons qu'un tel robot a été construit à l'université de Carnegie Mellon [KS92].
- Qu'advient-il lorsque les zones d'appui ne sont plus situées dans un plan horizontal mais sur une surface polyédrique?

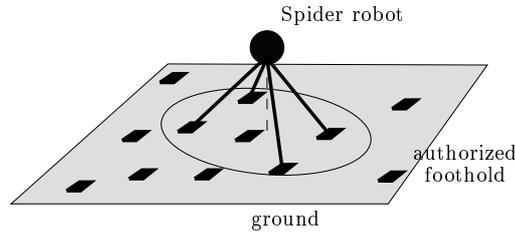
Chapitre 2

Motion Planning of Legged Robots

(Une version résumée de ce chapitre a été publiée dans les *Proceedings of the 1st Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics* [BDL94b])

Abstract

We study the problem of computing the free space \mathcal{F} of a simple legged robot called the spider robot. The body of this robot is a single point and the legs are attached to the body. The robot is subject to two constraints: each leg has a maximal extension R (accessibility constraint) and the body of the robot must lie above the convex hull of its feet (stability constraint). Moreover, the robot can only put its feet on some regions, called the foothold regions. The free space \mathcal{F} is the set of positions of the body of the robot such that there exists a set of accessible footholds for which the robot is stable. We present an efficient algorithm that computes \mathcal{F} in $O(n^2 \log n)$ time and $O(n^2 \alpha(n))$ space for point footholds where $\alpha(n)$ is an extremely slowly growing function ($\alpha(n) \leq 3$ for any practical value of n). We also present an algorithm to compute \mathcal{F} when the foothold regions are pairwise disjoint polygons with n edges in total. This algorithm computes \mathcal{F} in $O(n^2 \alpha_8(n) \log n)$ time using $O(n^2 \alpha_8(n))$ space ($\alpha_8(n)$ is also an extremely slowly growing function). These results are close to optimal since $\Omega(n^2)$ is a lower bound for the size of \mathcal{F} .

FIG. 2.1 – *The spider robot.*

2.1 Introduction

Although legged robots have already been studied in robotics [RR84, RR90], only a very few papers consider the motion planning problem amidst obstacles [HNKU84, HK91, BDDP95]. In [HNKU84, HK91] some heuristic approaches are described while, in [BDDP95] efficient and provably correct geometric algorithms are described for a restricted type of legged robots, the so-called spider robots to be defined precisely below, and for finite sets of point footholds.

Compared to the classic piano movers problem, legged robots introduce new types of constraints. We assume that the environment consists of regions in the plane, called *foothold regions*, where the robot can safely put its legs. Then the legged robot must satisfy two different constraints: the accessibility and the stability constraints. A foothold is said *accessible* to a *placement* (position of the body of the robot) if it can be reached by a leg of the robot. A placement is called *stable* if there exist accessible footholds and if the center of mass of the robot lies above the convex hull of these accessible footholds. The set of stable placements is clearly the relevant information for planning the motion of a legged robot: we call this set *the free space* of the legged robot. A legged robot has at least four legs, three legs ensure the stability of a placement and a fourth leg permits the motion of the robot.

A first simple instance of a legged robot is the *spider robot*. The spider robot has been inspired by the Ambler, developed at Carnegie Mellon University [JW89]. The body of the spider robot is a single point: all its legs are attached to the body and can reach any foothold at distance less than a constant R from the body (see Figure 2.1). The problem of planning the motion of a spider robot in an environment of point footholds has already been studied by Boissonnat et al. [BDDP95]. However their method assumes that the set of footholds is a finite set of points and cannot be generalized to more complex environments. This paper proposes a new method to compute the free space of a spider robot based on a transformation between this problem and the problem of moving a half-disk amidst obstacles. The algo-

rithm is simpler than the one described in [BDDP95] and the method can be extended to the case of polygonal foothold regions. Once the free space has been computed, it can be used to find trajectories and sequences of legs assignments as described in [BDDP95].

The paper is organized as follows: some notations and results of [BDDP95] are recalled in the next section. Section 2.3 shows the transformation between the spider robot problem and the half-disk problem. We present in Section 2.4 an algorithm that computes the free space of a spider robot for point footholds. Section 2.5 shows how the algorithm can be extended to polygonal foothold regions.

2.2 Notations and previous results

We introduce some notations. In Sections 2, 3 and 4, \mathcal{S} is a discrete set of distinct point footholds $\{s_1, \dots, s_n\}$ in the Euclidean plane. G denotes the body of the robot and R is the maximal length of each leg attached to G . For convenience and without loss of generality, we assume that G belongs to the plane containing the footholds (G can be seen as the orthogonal projection of the body of the robot onto the plane containing the footholds). The free space \mathcal{F} is the set of all stable placements. A placement is said at the limit of stability if it lies on the boundary of the convex hull of the accessible point footholds. Notice that \mathcal{F} is a closed set and contains the placements at the limit of stability. Let $\delta(\mathcal{F})$ denote the boundary of \mathcal{F} and C_i denote the circle of radius R centered at s_i . \mathcal{A} is the arrangement of the circles C_i for $1 \leq i \leq n$, i.e. the subdivision of the plane induced by the circles. This arrangement plays an important role in our problem and we will express the complexity results in term of $|\mathcal{A}|$, the size of \mathcal{A} . In the worst-case, $|\mathcal{A}| = \Theta(n^2)$ but if k denotes the maximum number of disks $D(s_i, R)$ that can cover a point of the plane, it can be shown that $|\mathcal{A}| = O(kn)$ [Sha91]. Clearly k is not larger than n and in case of sparse footholds $|\mathcal{A}|$ may be linearly related to the number of footholds. Let $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Let $\text{CH}(\mathcal{E})$ denote the convex hull of a set \mathcal{E} , $\text{compl}(\mathcal{E})$ the complementary set of \mathcal{E} and $\text{int}(\mathcal{E})$ the interior of \mathcal{E} . We say in the sequel that two objects *properly intersect* if and only if their relative interiors intersect.

The algorithm described in [BDDP95] is based on the following observation: in a cell Γ of \mathcal{A} , the set of footholds that can be reached by the robot is fixed; the portion of Γ that belongs to \mathcal{F} is exactly the intersection of Γ with the convex hull of the footholds that can be reached from Γ . Therefore, the edges of $\delta(\mathcal{F})$ are either circular arcs belonging to \mathcal{A} or portions of line segments joining two footholds; moreover a vertex of $\delta(\mathcal{F})$ incident to two

straight line edges is a foothold (see Figure 2.2). The complexity of \mathcal{F} has been proved to be $|\mathcal{F}| = \Theta(|\mathcal{A}|)$ [BDDP95].

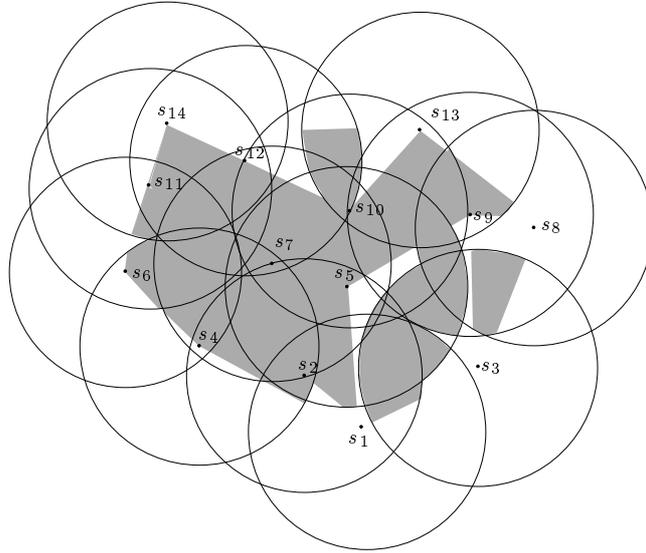


FIG. 2.2 – *An example of the free space of a spider robot.*

The algorithm presented in [BDDP95] computes the free space \mathcal{F} in $O(|\mathcal{A}| \log n)$ time. It uses sophisticated data structures allowing the off-line maintenance of convex hulls.

The algorithm described in this paper has the same time complexity, uses simple data structures and can be extended to the case where the set \mathcal{S} of footholds is a set of polygonal regions and not simply a set of points. For simplicity, we consider first the case of point footholds and postpone the discussion on polygonal footholds to Section 2.5.

General position assumption

To simplify the presentation of this paper, we make some general position assumptions.

No two footholds lie at distance exactly $2R$. This hypothesis is not really restrictive. Indeed, if the robot uses two such footholds, it is at the middle of the two footholds and cannot move.

No three footholds have a circumscribing circle of radius R . Such a configuration will be relevant only for a placement of the robot at the center of the circle and the robot cannot move using such a position for its legs.

We also assume that the line joining two footholds is not exactly at distance R from another foothold. This hypothesis forbids the boundary of \mathcal{F} to contain edges that degenerate into points.

All these hypotheses concern some special points of \mathcal{F} , isolated points or singular points on its boundary, and can be removed by a careful analysis.

2.3 From spider robots to half-disk robots

In this section, we establish the connection between the free space of the spider robot and the free space of a half-disk robot moving by translation and rotation amidst n point obstacles.

Theorem 2.1 *The spider robot does not admit a stable placement at point P if and only if there exists a half-disk (of radius R) centered at P that does not contain any foothold of \mathcal{S} (see Figure 2.3).*

Proof: A placement of the spider robot is not stable if and only if the convex hull of all the reachable footholds does not contain the body G of the robot. That is equivalent to: there exists a closed half-disk of radius R centered at G which does not contain any foothold (see Figure 2.3). \square

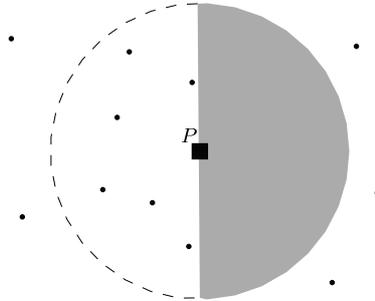
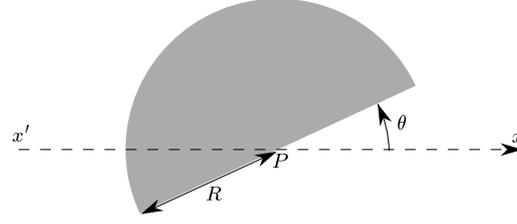


FIG. 2.3 – A placement which is not stable.

Definition 2.2 *Let $HD(P, \theta)$ be the half-disk of radius R centered at P (see Figure 2.4) defined by:*

$$\begin{cases} (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \leq R^2 \\ (x - x_P) \sin \theta - (y - y_P) \cos \theta \leq 0 \end{cases}$$

FIG. 2.4 – $HD(P, \theta)$.

Definition 2.3 $\forall s_i \in \mathcal{S}$ ($1 \leq i \leq n$) let us define:

$$\mathcal{H}_i = \{(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / P \in HD(s_i, \theta)\}$$

$$\mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{H}_i$$

$$\mathcal{C}_i = C_i \times S^1$$

\mathcal{H}_i will be called the helicoidal volume centered at s_i (see Figure 2.5).

Notice the typographical distinction between the circle C_i defined in \mathbb{R}^2 and the torus \mathcal{C}_i defined in $\mathbb{R}^2 \times S^1$. For convenience, we will often identify S^1 and the interval $[0, 2\pi]$ of \mathbb{R} . This allows to draw objects of $\mathbb{R}^2 \times S^1$ in \mathbb{R}^3 and to speak of the θ -axis. Π_{θ_0} denote the "plane" $\{(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / \theta = \theta_0\}$.

Definition 2.4 We define the free space \mathcal{L} of a half-disk robot moving by translation and rotation amidst the set of obstacles \mathcal{S} as the set of $(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ such that the half-disk $HD(P, \theta + \pi)$ and \mathcal{S} have an empty intersection.

Proposition 2.5 $\mathcal{L} = \text{compl}(\mathcal{H})$.

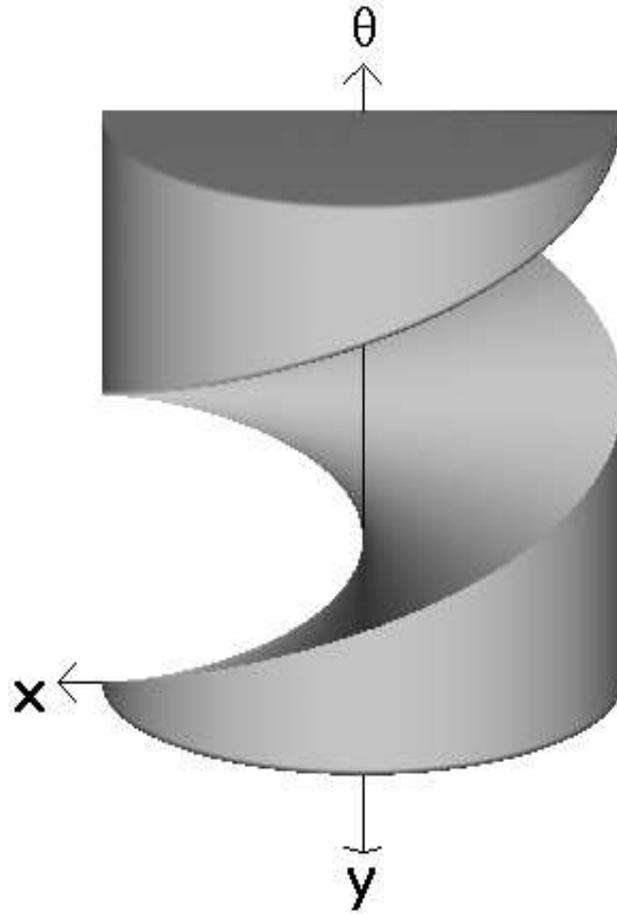
Proof: $\forall \theta \in S^1$, the set $\mathcal{L} \cap \Pi_{\theta}$ is the free space of the half disk $HD(P, \theta + \pi)$ moving by translation only, amidst the obstacle s_1, \dots, s_n . Thus, $\mathcal{L} \cap \Pi_{\theta}$ is the complementary set of the union of the n Minkowski's sums $s_i \ominus HD(O, \theta + \pi) = HD(s_i, \theta)$ where O is the origin of the reference frame. Therefore, we have:

$$\forall \theta \in S^1 \quad \mathcal{L} \cap \Pi_{\theta} = \text{compl}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} HD(s_i, \theta)\right)$$

and Definition 2.3 yields the result. \square

Let $p_{//\theta}$ denote the mapping (called "orthogonal projection"): $\mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, (P, \theta) \mapsto P$.

Theorem 2.6 $\mathcal{F} = \text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\mathcal{H})))$

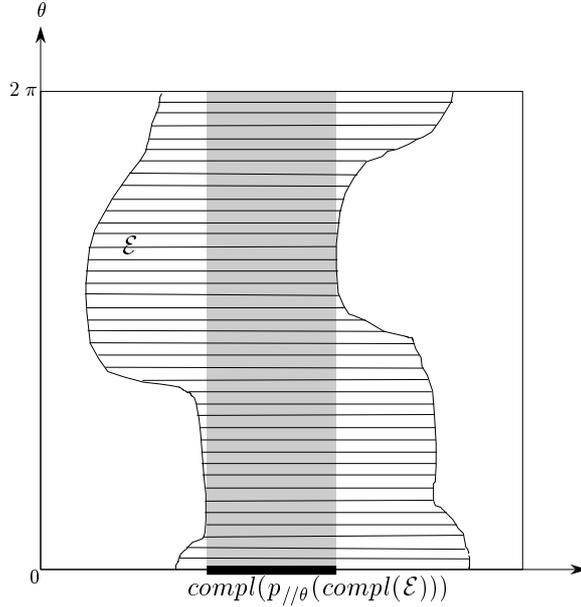
FIG. 2.5 – *Helicoidal volume \mathcal{H}_i .*

Proof: According to Theorem 2.1 and Definitions 2.2 and 2.4, $\mathcal{F} = \text{compl}(p_{//\theta}(\mathcal{L}))$. The result then follows from Proposition 2.5. \square

Remark 2.7 $\text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\mathcal{H}))) \times S^1$ is the largest "cylinder" included in \mathcal{H} , whose axis is parallel to the θ -axis (see Figure 2.6). The basis of this cylinder is \mathcal{F} .

Remark 2.8 Among the previously defined objects, notice which one are closed or open sets. $HD(s_i, \theta)$ and \mathcal{H}_i are closed by definition, \mathcal{H} is closed (union of closed sets), \mathcal{L} is open (complementary of \mathcal{H}), $\text{compl}(\mathcal{F})$ is open (projection of \mathcal{L}) and \mathcal{F} is closed (complementary of $\text{compl}(\mathcal{F})$).

Remark 2.9 The results of this section do not depend on the fact that the footholds are points. For more general foothold regions, we simply need to

FIG. 2.6 – $\text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\mathcal{E})))$.

replace the helicoidal volumes by their analogs. This will be done in Section 2.5.

2.4 Computation of \mathcal{F}

In this section, we propose an algorithm to compute \mathcal{F} based on Theorem 2.6.

A first attempt to use Theorem 2.6 may consist in computing \mathcal{L} and to project its complementary on to the horizontal plane. The motion planning of a convex polygonal robot in a polygonal environment has been extensively studied (see for example [KS90, KST97]). Such algorithms can be generalized to plan the motion of a half-disk. It should lead to an algorithm of complexity $O(n\lambda_s(n) \log n)$, where $\lambda_s(n)$ is an almost linear function of n . The projection can be done using classical techniques, such as projecting all the faces of \mathcal{L} and computing their union. Since the complexity of the 3D object \mathcal{L} is not directly related to the complexity of its projection, this approach do not provide a combinatorial bound on \mathcal{F} . However, assuming $|\mathcal{F}| = O(\lambda_s(|\mathcal{A}|))$ (which will be proved in this paper) the time complexity the algortihm of Kedem et al. is $O(n\lambda_s(n) \log n + \lambda_s(|\mathcal{A}|) \log^2 n)$.

In this paper, we present a direct computation of \mathcal{F} . This approach provides an upper bound on the size of \mathcal{F} , namely $|\mathcal{F}| = O(\lambda_s(|\mathcal{A}|))$. It also provides an algorithm to compute \mathcal{F} in $O(\lambda_s(|\mathcal{A}|) \log n)$ time. As in [SS87] and contrary to [KST97], the algorithm proposed here is sensitive to $|\mathcal{A}|$ which is usually less than quadratic. Another advantage of our direct computation, is to avoid the explicit construction of the 3D object \mathcal{L} which is useless for our application. Our algorithm manipulates only two dimensional arrangements or lower envelopes and we provide a detailed description of the curves involved in the construction.

Let us now detail the computation of \mathcal{F} in the case of point footholds. We know that each arc of the boundary $\delta(\mathcal{F})$ of \mathcal{F} is either a straight line segment belonging to a line joining two footholds or an arc of a circle C_i (see Section 2.2). The circular arcs $\delta(\mathcal{F}) \cap C_i$ are computed first (Sections 2.4.1, 2.4.2 and 2.4.3) and linked together with the line segments in a second step (Sections 2.4.4 and 2.4.5).

2.4.1 Computation of $\delta(\mathcal{F}) \cap \mathcal{A}$

We compute the contribution of each circle C_{i_0} , $i_0 = 1, \dots, n$, to $\delta(\mathcal{F})$ in turn. \mathcal{C}_{i_0} is the torus $C_{i_0} \times S^1$. We assume that C_{i_0} is parameterized by u and \mathcal{C}_{i_0} by (u, θ) .

Since \mathcal{F} is a closed set, the contribution of C_{i_0} to $\delta(\mathcal{F})$ is the difference between the contribution of C_{i_0} to \mathcal{F} and the contribution of C_{i_0} to the interior of \mathcal{F} . According to Theorem 2.6, $\mathcal{F} \cap C_{i_0} = \text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{i_0})))$ and in general position $\text{int}(\mathcal{F}) \cap C_{i_0} = \text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\text{int}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}_{i_0})))$. Let \mathcal{Z}_i denote $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{C}_{i_0}$ (see Figure 2.7). Clearly, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{i_0} = \cup_i \mathcal{Z}_i$. On the other hand, $\text{int}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}_{i_0} = \text{int}(\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i)$. Indeed, $\text{int}(\mathcal{H}_{i_0}) \cap \mathcal{C}_{i_0} = \emptyset$ and, according to the general position assumption, for $i \neq i_0$, $\text{int}(\mathcal{H}_i) \cap \mathcal{C}_{i_0} = \text{int}(\mathcal{Z}_i)$ (notice that $\text{int}(\mathcal{H}_i)$ is the interior of \mathcal{H}_i in $\mathbb{R}^2 \times S^1$ but $\text{int}(\mathcal{Z}_i)$ denotes the interior of \mathcal{Z}_i in $S^1 \times S^1$). It follows that $\mathcal{F} \cap C_{i_0} = \text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\cup_i \mathcal{Z}_i)))$ and $\text{int}(\mathcal{F}) \cap C_{i_0} = \text{int}(\text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i))))$. Therefore,

$$\delta(\mathcal{F}) \cap C_{i_0} = \text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\cup_i \mathcal{Z}_i))) \setminus \text{int}(\text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i)))).$$

Thus, the contribution of C_{i_0} to $\delta(\mathcal{F})$ comes from the computation of $\cup_i \mathcal{Z}_i$ and $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i$.

Geometrically, $\text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\cup_i \mathcal{Z}_i)))$ is the orthogonal projection of the largest vertical strip Σ_{i_0} included in $\cup_i \mathcal{Z}_i$. Similarly, $\text{compl}(p_{//\theta}(\text{compl}(\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i)))$ is the projection, along a direction parallel to the θ -axis, of the largest vertical strip Σ'_{i_0} included in $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i$. Thus, $\delta(\mathcal{F}) \cap C_{i_0}$ is the vertical projection onto C_{i_0} of the vertical strip $\Sigma_{i_0} \setminus \text{int}(\Sigma'_{i_0})$ (see Figure 2.8).

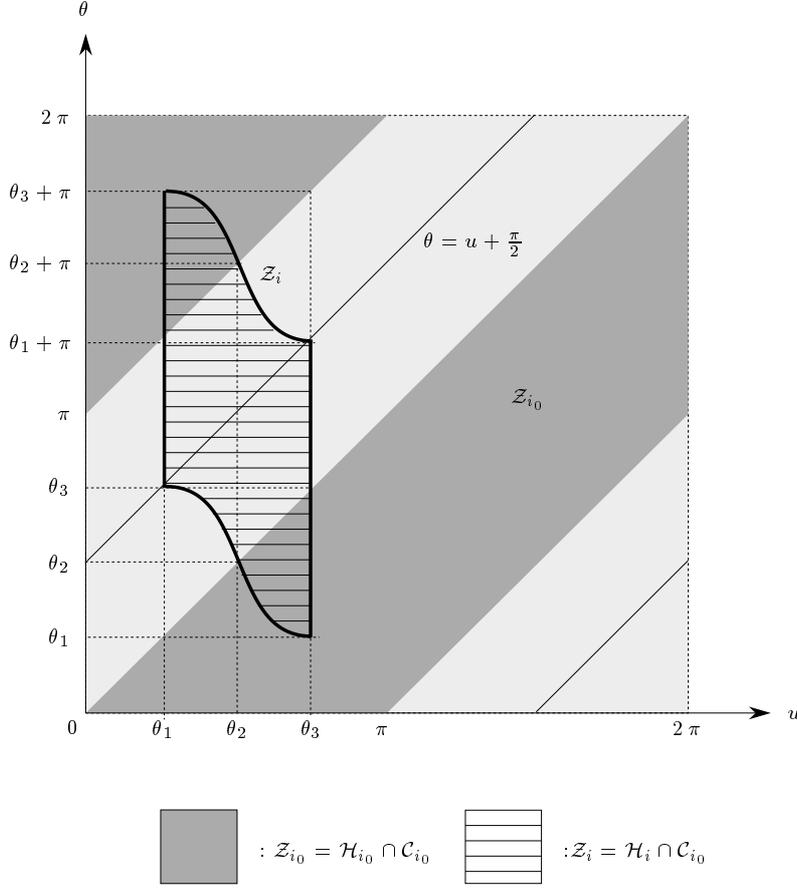


FIG. 2.7 – Intersection of \mathcal{H}_i with \mathcal{C}_{i_0} for $\|s_{i_0}s_i\| = \sqrt{2}R$ and $\angle(\vec{x}, \overrightarrow{s_{i_0}s_i}) = \theta_2 = \pi/2$.

In order to compute \mathcal{F} efficiently, we need to compute the union of the regions \mathcal{Z}_i efficiently. More precisely, we will show that the union of the regions \mathcal{Z}_i can be computed in $O(k_{i_0} \log k_{i_0})$ time where k_{i_0} is the number of helicoidal volumes \mathcal{H}_i intersecting \mathcal{C}_{i_0} .

This is possible because the \mathcal{Z}_i have a special shape that allows to reduce the computation of their union to the computation of a small number of lower envelopes of curves drawn on \mathcal{C}_{i_0} with the property that two of them intersect at most once. The geometric properties of the \mathcal{Z}_i are discussed in Section 2.4.2 and, in Section 2.4.3, we present and analyze the algorithm for constructing $\delta(\mathcal{F}) \cap \mathcal{C}_{i_0}$.

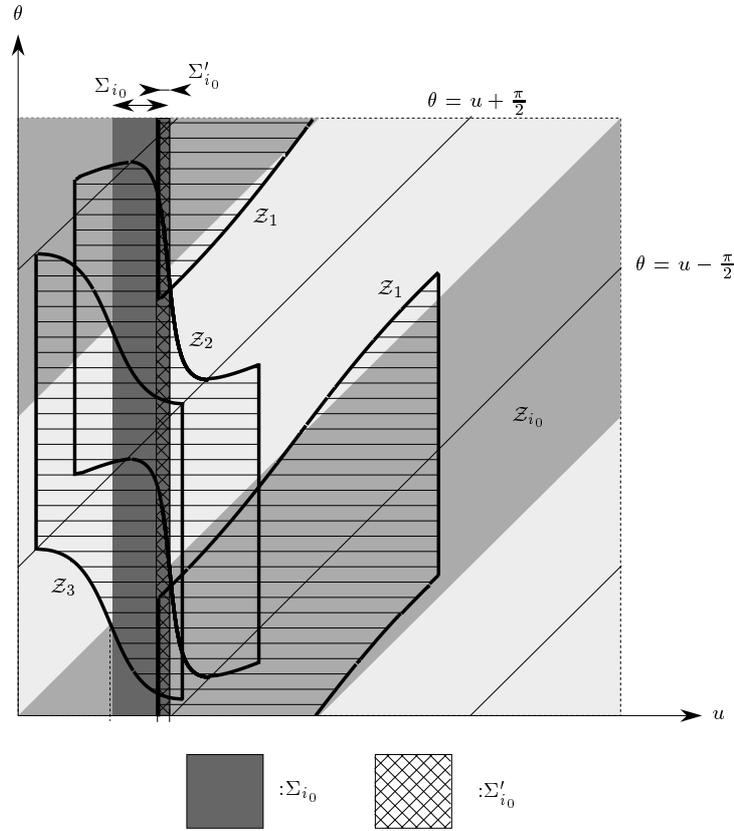


FIG. 2.8 – Contribution of \mathcal{C}_{i_0} to $\delta(\mathcal{F})$ ($0 < \|s_1 s_{i_0}\| < R$, $R \leq \|s_2 s_{i_0}\| < \sqrt{2} R$, $\sqrt{2} R \leq \|s_3 s_{i_0}\| < 2R$).

2.4.2 Properties of the \mathcal{Z}_i

We study here the regions $\mathcal{Z}_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{C}_{i_0}$. For convenience, we will use the vocabulary of the plane when describing objects on the torus \mathcal{C}_{i_0} . For instance, the curve drawn on the torus \mathcal{C}_{i_0} with equation

$$a\theta + bu + c = 0$$

will be called a line. The line $u = u_0$ will be called vertical and oriented according to increasing θ . Lower and upper will refer to this orientation. The discussion below considers only non empty regions \mathcal{Z}_i .

We introduce here a few notations. Let $HC_i(\theta)$ be the half-circle of the boundary of $HD(s_i, \theta)$, i.e. $HC_i(\theta) = C_i \cap HD(s_i, \theta)$. Let $r_i(\theta)$ be the radius of C_i that makes an angle θ with the x -axis, i.e. $r_i(\theta) = \{s_i + \lambda \vec{u}_\theta / \lambda \in [0, R]\}$ where \vec{u}_θ is the unit vector whose polar angle is θ . The boundary of \mathcal{H}_i is

composed of the three following patches:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &= \{(HC_i(\theta), \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1\} \\ \mathcal{R}_i^+ &= \{(r_i(\theta), \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1\} \\ \mathcal{R}_i^- &= \{(r_i(\theta + \pi), \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1\}\end{aligned}$$

Proposition 2.10 *The region \mathcal{Z}_{i_0} is the subset of \mathcal{C}_{i_0} defined by $\{(u, \theta) \in S^1 \times S^1 / \theta \leq u \leq \theta + \pi\}$ and shown in dark grey in Figure 2.7.*

Proof: For any $\theta_0 \in S^1$ the intersection between \mathcal{H}_{i_0} and the "plane" $\{(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / \theta = \theta_0\}$ is the half-disk $HD(s_{i_0}, \theta_0)$. \square

Proposition 2.11 *For $i \neq i_0$, \mathcal{Z}_i is a connected region bounded by two vertical line segments of length π , and two curved edges ρ_i^+ and ρ_i^- that are translated copies of one another. Specifically $\rho_i^+ = \rho_i^- + (0, 0, \pi)$.*

Proof: Consider the two points of intersection between the circles C_{i_0} and C_i ($i \neq i_0$). Let $u = \theta_1$ and $u = \theta_3$ be the parameters of these two points using the natural parameterization of C_{i_0} (see Figure 2.9). The half circle $HC_i(\theta)$ intersects C_{i_0} at $u = \theta_3$ (resp. at $u = \theta_1$) for $\theta \in [\theta_1, \theta_1 + \pi]$ (resp. for $\theta \in [\theta_3, \theta_3 + \pi]$) (see Figure 2.9). Hence, $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{C}_{i_0}$ consists of the two vertical line segments of length π $\{(u, \theta) \in \{\theta_3\} \times [\theta_1, \theta_1 + \pi]\}$ and $\{(u, \theta) \in \{\theta_1\} \times [\theta_3, \theta_3 + \pi]\}$ (see Figure 2.7).

On the other hand, the definitions of \mathcal{R}_i^+ and \mathcal{R}_i^- clearly yield that $\mathcal{R}_i^+ = \mathcal{R}_i^- + (0, 0, \pi)$. Therefore, the two curved edges $\rho_i^- = \mathcal{R}_i^- \cap \mathcal{C}_{i_0}$ and $\rho_i^+ = \mathcal{R}_i^+ \cap \mathcal{C}_{i_0}$ are translated copies of one another (see Figure 2.7). \square

When not necessary, we will not specify which one of ρ_i^+ or ρ_i^- (resp. \mathcal{R}_i^+ or \mathcal{R}_i^-) is considered, and we will simply use the notation ρ_i (resp. \mathcal{R}_i). In addition to the previous notations, ρ_i^l or ρ_i^j will denote a portion of ρ_i .

Proposition 2.12 *Let ρ_i^l and ρ_j^l be some connected portions of ρ_i and ρ_j respectively. If ρ_i^l or ρ_j^l is the graph of a function of θ and if this function is defined over a θ -interval smaller than π , then ρ_i^l and ρ_j^l intersect at most once.*

Proof: Let (u_I, θ_I) be a point of intersection between ρ_i^l and ρ_j^l and I be the point of the circle C_{i_0} with parameter u_I . Since ρ_i^l is a portion of the intersection between \mathcal{C}_{i_0} and \mathcal{R}_i , I is a point of intersection between C_{i_0} and the diameter of $HD(s_i, \theta_I)$. Therefore, the line passing through s_i and I has slope θ_I .

By applying the same argument to ρ_j^l , we obtain that s_i and s_j belong to the same straight line of slope θ_I . Therefore, if ρ_i^l and ρ_j^l intersect twice, at

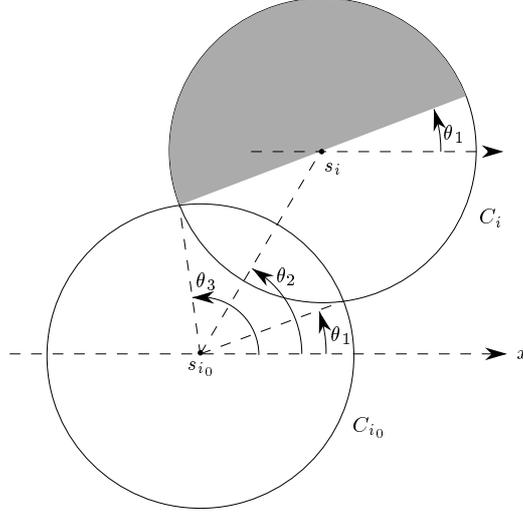


FIG. 2.9 – Definition of θ_1, θ_2 and θ_3 ($0 < \|s_{i_0}s_i\| < 2R$).

(u_I, θ_I) and (u_J, θ_J) , then $\theta_I = \theta_J[\pi]$. If ρ'_i or ρ'_j is defined over a θ -interval smaller than π , then $\theta_I = \theta_J[2\pi]$. Furthermore, if ρ'_i or ρ'_j is the graph of a function of θ , then (u_I, θ_I) and (u_J, θ_I) are equal. \square

Proposition 2.13 *If $\sqrt{2}R \leq \|s_{i_0}s_i\| < 2R$, ρ_i is the graph of a function of θ defined over a θ -interval smaller than π .*

Proof: If $\sqrt{2}R \leq \|s_{i_0}s_i\| < 2R$, $r_i(\theta)$ (and also $r_i(\theta + \pi)$) intersects C_{i_0} in at most one point, which proves that ρ_i is the graph of a function of θ . Furthermore, the θ -interval where ρ_i is defined is clearly smaller than π . \square

As a consequence of Propositions 2.12 and 2.13, if the distances $\|s_{i_0}s_i\|$ and $\|s_{i_0}s_j\|$ belong to $[\sqrt{2}R, 2R)$, ρ_i and ρ_j intersect at most once.

Proposition 2.14 *If $\sqrt{2}R \leq \|s_{i_0}s_i\| < 2R$, the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ properly intersects \mathcal{Z}_i . Furthermore, the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ properly intersect neither ρ_i^+ nor ρ_i^- .*

Proof: Let (u_P, θ_P) be a point of ρ_i and P the point of C_{i_0} with parameter u_P . By definition, $u_P = \angle(\vec{x}, \overrightarrow{s_{i_0}P}) [2\pi]$ and $\theta_P = \angle(\vec{x}, \overrightarrow{s_iP}) [\pi]$ (see Figure 2.10). Let $\gamma = \angle(\overrightarrow{Ps_{i_0}}, \overrightarrow{Ps_i}) [2\pi]$. When $\sqrt{2}R \leq \|s_{i_0}s_i\| < 2R$, then $\gamma \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ and $\gamma = \frac{\pi}{2} [\pi]$ only when $\|s_{i_0}s_i\| = \sqrt{2}R$ and (u_P, θ_P) is an endpoint of ρ_i . Thus, if (u_P, θ_P) is not an endpoint of ρ_i , $\theta_P - u_P \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ because $\theta_P - u_P = \gamma[\pi]$. Therefore, the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ intersect neither ρ_i^+ nor ρ_i^- , except possibly at their endpoints.

It remains to show that the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ properly intersects \mathcal{Z}_i . This follows from the fact that the point of C_{i_0} $(\theta_2, \theta_2 + \frac{\pi}{2})$, where $\theta_2 = \angle(\vec{x}, \overrightarrow{s_{i_0}s_i}) [2\pi]$, belongs to the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ and also to the relative interior of \mathcal{Z}_i if $R \leq \|s_{i_0}s_i\| < 2R$ (see Figures 2.7 and 2.11). \square

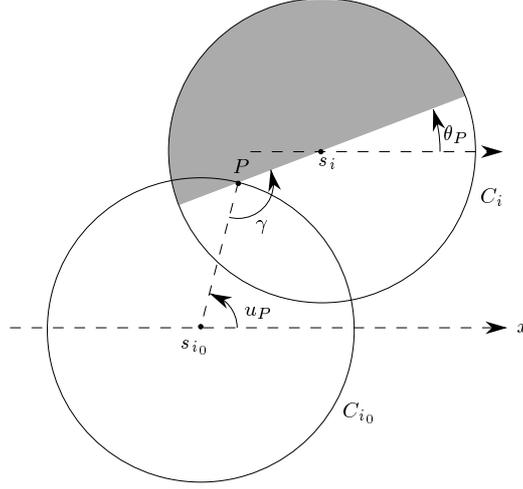


FIG. 2.10 – For the definition of P , u_P , θ_P , γ .

Proposition 2.15 *If $0 < \|s_{i_0}s_i\| < R$ (resp. $R \leq \|s_{i_0}s_i\| < \sqrt{2}R$), ρ_i can be subdivided into two (resp. three) sub-curves denoted ρ_i^k , $k \in \{1, 2\}$ (resp. $k \in \{1, 2, 3\}$), such that each piece is the graph of a function of θ defined over a θ -interval smaller than π .*

Proof:

Case 1: $0 < \|s_{i_0}s_i\| < R$.

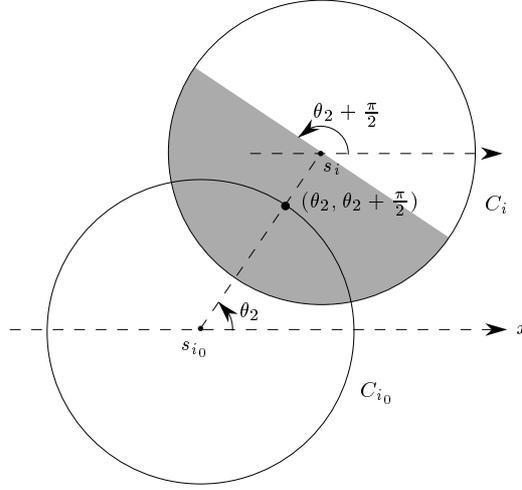
Any radius of C_i intersects C_{i_0} at most once. Hence, ρ_i is the graph of a function of θ .

ρ_i is defined over a θ -interval greater than π but smaller than 2π . By splitting this interval in two equal parts, we split ρ_i in two sub-curves ρ_i^1 and ρ_i^2 which are defined over a θ -interval smaller than π (see \mathcal{Z}_1 in Figure 2.8).

Case 2: $R \leq \|s_{i_0}s_i\| < \sqrt{2}R$.

In that case, the θ -interval where $r_i(\theta)$ (or $r_i(\theta + \pi)$) intersects C_{i_0} is smaller than π , which implies that ρ_i is defined over a θ -interval smaller than π .

It may exist two points of intersection between $r_i(\theta)$ and C_{i_0} . In order to overcome this difficulty, we split $r_i(\theta)$ into two segments (of fixed lengths, independently of θ) as follows (see Figure 2.12). Let $r_i(\theta_T)$ be one of the two

FIG. 2.11 – Section of \mathcal{H}_i and C_{i_0} by the "plane" $\Pi_{\theta_2 + \frac{\pi}{2}}$.

radii of C_i that are tangent to C_{i_0} . Let T be the point where $r_i(\theta_T)$ and C_{i_0} are tangent and $T(\theta)$ the point of $r_i(\theta)$ which is identical to T when $\theta = \theta_T$. Cutting $r_i(\theta)$ at $T(\theta)$ defines two sub-radii $r'_i(\theta)$ and $r''_i(\theta)$ that intersect C_{i_0} in at most one point each; without loss of generality, let $r''_i(\theta)$ denote the sub-radius not connected to s_i . We define

$$\mathcal{R}_i^{'+} = \{(r'_i(\theta), \theta)\} \quad \mathcal{R}_i'^{-} = \{(r'_i(\theta + \pi), \theta)\}$$

$$\mathcal{R}_i''^{+} = \{(r''_i(\theta), \theta)\} \quad \mathcal{R}_i''^{-} = \{(r''_i(\theta + \pi), \theta)\}$$

The intersection of \mathcal{R}_i' (i.e. $\mathcal{R}_i^{'+}$ or $\mathcal{R}_i'^{-}$) and C_{i_0} consists of one continuous curve ρ_i^2 , which is the graph of a decreasing function of θ . The intersection of \mathcal{R}_i'' and C_{i_0} consists of two continuous curves ρ_i^1 and ρ_i^3 , which are both graphs of increasing functions of θ (see \mathcal{Z}_2 on Figure 2.8). \square

As $\mathcal{R}_i^{'+} = \mathcal{R}_i'^{-} + (0, 0, \pi)$ and $\mathcal{R}_i''^{+} = \mathcal{R}_i''^{-} + (0, 0, \pi)$, ρ_i^{k+} and ρ_i^{k-} are translated copies of one another by vector $(0, 0, \pi)$. We denote \mathcal{Z}_i^k the sub-region of \mathcal{Z}_i below ρ_i^{k+} and above ρ_i^{k-} .

Proposition 2.16 *If $0 < \|s_{i_0}s_i\| < R$, the line $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ properly intersects \mathcal{Z}_i^1 and \mathcal{Z}_i^2 . Furthermore, the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ properly intersect none of the edges ρ_i^{1+} , ρ_i^{1-} , ρ_i^{2+} and ρ_i^{2-} .*

If $R \leq \|s_{i_0}s_i\| < \sqrt{2}R$, the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ (resp. $\theta = u - \frac{\pi}{2}$) properly intersects \mathcal{Z}_i^2 (resp. \mathcal{Z}_i^1 and \mathcal{Z}_i^3). Furthermore, the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ properly intersect none of the edges ρ_i^{1+} , ρ_i^{1-} , ρ_i^{2+} , ρ_i^{2-} , ρ_i^{3+} and ρ_i^{3-} .

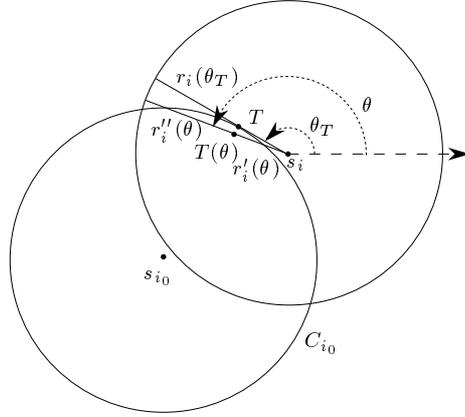


FIG. 2.12 – For the definition of T , $T(\theta)$, $r'_i(\theta)$, $r''_i(\theta)$.

Proof: The proof is similar to the proof of Proposition 2.14. Let (u_P, θ_P) denote a point of a curve ρ_i^k . P is the point of C_{i_0} with parameter u_P and $\gamma = \angle(\overrightarrow{Ps_{i_0}}, \overrightarrow{Ps_i}) [2\pi]$. We show that $\gamma \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, except possibly when (u_P, θ_P) is an endpoint of ρ_i^k . As $\gamma = \theta_P - u_P [\pi]$, it follows that the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ intersect neither ρ_i^{k+} nor ρ_i^{k-} , except possibly at their endpoints.

Case 1: $0 < \|s_{i_0}s_i\| < R$.

$\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ for any $P \in C_{i_0}$. Thus, the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ properly intersect neither ρ_i^+ nor ρ_i^- . Therefore, the same result holds for the sub-curves $\rho_i^{k\pm}$ of ρ_i^\pm . Moreover (see Figure 2.11), the point $(\theta_2, \theta_2 - \frac{\pi}{2}) \in C_{i_0}$ belongs to the relative interior of \mathcal{Z}_i . Therefore, the line $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ properly intersects \mathcal{Z}_i . It follows that the line $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ properly intersects \mathcal{Z}_i^1 and \mathcal{Z}_i^2 because it properly intersects neither ρ_i^+ nor ρ_i^- .

Case 2: $R \leq \|s_{i_0}s_i\| < \sqrt{2}R$.

Let (u_{P_1}, θ_{P_1}) be the point connecting ρ_i^1 and ρ_i^2 , and (u_{P_2}, θ_{P_2}) be the point connecting ρ_i^2 and ρ_i^3 . According to the construction of ρ_i^1 , ρ_i^2 and ρ_i^3 , the tangent lines to C_{i_0} at P_1 and P_2 pass through s_i . At most two tangent lines to C_{i_0} pass through s_i , thus P_1 and P_2 are the only points of C_{i_0} where $\gamma = \frac{\pi}{2} [\pi]$. Therefore, the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ properly intersect neither ρ_i^{k-} nor ρ_i^{k+} ($k = 1, 2, 3$). At last, the points $(\theta_1, \theta_1 - \frac{\pi}{2})$, $(\theta_2, \theta_2 + \frac{\pi}{2})$ and $(\theta_3, \theta_3 - \frac{\pi}{2})$ of C_{i_0} clearly belong to the relative interior of \mathcal{Z}_i^1 , \mathcal{Z}_i^2 and \mathcal{Z}_i^3 respectively. \square

2.4.3 Construction of $\delta(\mathcal{F}) \cap C_{i_0}$

We have seen in section 2.4.1 that the contribution of a circle C_{i_0} to $\delta(\mathcal{F})$ is given by the computation of $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i$ and $\cup_i \mathcal{Z}_i$. Propositions 2.14 and 2.16 show that the set of regions \mathcal{Z}_i can be split into two subsets Ω_1 and Ω_2 as

follows. As we know, a region \mathcal{Z}_i (or \mathcal{Z}_i^k) is the region below ρ_i^+ (or ρ_i^{k+}) and above ρ_i^- (or ρ_i^{k-}). For convenience, if not specified, \mathcal{Z}_i (resp. ρ_i) will denote either \mathcal{Z}_i or \mathcal{Z}_i^k (resp. ρ_i or ρ_i^k). Ω_1 (resp. Ω_2) is the set of regions \mathcal{Z}_i , $i \neq i_0$, such that the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ (resp. $\theta = u - \frac{\pi}{2}$) intersects \mathcal{Z}_i but neither ρ_i^+ nor ρ_i^- . By Propositions 2.14 and 2.16, the lines $\theta = u \pm \frac{\pi}{2}$ do not properly intersect the curves ρ_i . Thus, for $\mathcal{Z}_i \in \Omega_1$, we can consider the curves ρ_i^+ in the domain $\{(u, \theta) \in S^1 \times [u + \frac{\pi}{2}, u + \frac{3\pi}{2}]\}$ and the curves ρ_i^- in $\{(u, \theta) \in S^1 \times [u - \frac{\pi}{2}, u + \frac{\pi}{2}]\}$. The union of the $\mathcal{Z}_i \in \Omega_1$ is therefore computed as the region that lies below the upper envelope of the ρ_i^+ and above the lower envelope of the ρ_i^- . We compute similarly the union of the regions of Ω_2 .

Let us analyze the complexity of the above construction. The k_{i_0} helical volumes \mathcal{H}_i that intersect C_{i_0} can be found in $O(k_{i_0})$ amortized time once the Delaunay triangulation of the footholds has been computed which can be done in $O(n \log n)$ time [DD90, Tur91]. Since two curves ρ_i and ρ_j intersect each other at most once (Propositions 2.12, 2.13, 2.15) the upper and lower envelopes can be computed in $O(k_{i_0} \log k_{i_0})$ time and $O(k_{i_0} \alpha(k_{i_0}))$ space where α is the pseudo inverse of the Ackerman's function [Her89]. The union of Ω_1 and Ω_2 can be done in $O(k_{i_0} \alpha(k_{i_0}))$ time because each envelope is the graph of a function of u and two arcs of the two envelopes intersect each other at most once. At this time, we have computed $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i$.

The computation of $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i \cup \mathcal{Z}_{i_0}$ can be done as follows. Let $\rho_{i_0}^+$ and $\rho_{i_0}^-$ denote the upper and lower edges of \mathcal{Z}_{i_0} . As already observed, $\rho_{i_0}^+$ and $\rho_{i_0}^-$ are the line $\theta = u$ and $\theta = u - \pi$ (see Figure 2.7). We add to set Ω_2 the region \mathcal{Z}_{i_0} . The computation of $\cup_i \mathcal{Z}_i$ can be performed, as described above, within the same time and space bounds because Proposition 2.12 holds if only one of the two considered curved edges is a graph of a function of θ defined over a θ -interval smaller than π .

According to Theorem 2.6, Remark 2.7 and Section 2.4.1, the contribution of C_{i_0} to the interior of \mathcal{F} is $\text{int}(\text{compl}(p_{\parallel\theta}(\text{compl}(\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i))))$, that is the interior of the projection onto C_{i_0} of the largest vertical strip Σ'_{i_0} included in $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i$. This projection is easily computed because the curved edges of $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_i$ are monotone with respect to u (see Figures 2.6, 2.8). The computation of the contribution of C_{i_0} to the closure of \mathcal{F} , $\text{compl}(p_{\parallel\theta}(\text{compl}(\cup_i \mathcal{Z}_i)))$, is done similarly by projecting the strip Σ_{i_0} . These computations yield the contribution of C_{i_0} to $\delta(\mathcal{F})$. Clearly, this step can be done in $O(k_{i_0} \log k_{i_0})$ time.

Moreover we label an arc of $\delta(\mathcal{F})$ either by i if the arc belongs to the circle C_i or by (i, j) if the arc belongs to the straight line segment $[s_i, s_j]$. The labels of the edges of $\delta(\mathcal{F})$ incident to C_{i_0} can be found as follows, without increasing the complexity. An arc of $\delta(\mathcal{F}) \cap C_{i_0}$ corresponds to a

vertical strip $\Sigma_{i_0} \setminus \Sigma'_{i_0}$. An endpoint P of an arc is either the projection of a vertical edge of the strip or the projection of a point of intersection between two curved edges. In the first case, P is the intersection of C_{i_0} with some C_i and in the second case, P is the intersection of C_{i_0} with some line segment $[s_i, s_j]$. Hence, the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F})$ incident to C_{i_0} can be found at no extra-cost during the construction.

Since \mathcal{A} is the arrangement of the circles of radius R centered at the footholds, $\sum_{i_0=1}^n k_{i_0} = |\mathcal{A}|$. The above considerations yield the following theorem:

Theorem 2.17 *We can compute $\delta(\mathcal{F}) \cap \mathcal{A}$ and the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F})$ incident to the arcs of $\delta(\mathcal{F}) \cap \mathcal{A}$ in $O(|\mathcal{A}| \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}| \alpha(n))$ space.*

2.4.4 Computation of the arcs of $\delta(\mathcal{F})$ issued from a foothold

The previous section has shown how to compute all the vertices of \mathcal{F} that are incident to at least one circular arc. It remains to find the vertices of \mathcal{F} incident to two straight edges. As we have seen in Section 2.2, for any cell Γ of \mathcal{A} , the convex hull of the footholds reachable from any point of Γ coincides with $\mathcal{F} \cap \Gamma$. Therefore, a vertex of \mathcal{F} incident to two straight edges of $\delta(\mathcal{F})$ is a foothold. Furthermore, considering a foothold s_{i_0} in a cell Γ of \mathcal{A} , s_{i_0} is a vertex of \mathcal{F} incident to two straight edges of $\delta(\mathcal{F})$ if and only if s_{i_0} is a vertex of the convex hull of the footholds reachable from s_{i_0} . The k'_{i_0} footholds contained in the disk $D(s_{i_0}, R)$ can be found in $O(k'_{i_0})$ amortized time because we have already computed the Delaunay triangulation of the footholds [DD90, Tur91]. Thus, we can decide if s_{i_0} is a vertex of the convex hull of these k'_{i_0} footholds in $O(k'_{i_0})$ time and space. When s_{i_0} is a vertex of the convex hull, we can also find the two edges of the convex hull adjacent to s_{i_0} in $O(k'_{i_0})$ time and space. As the sum of the k'_i for $i \in \{1, \dots, n\}$ is bounded by the size of \mathcal{A} , we obtain the following theorem:

Theorem 2.18 *The footholds belonging to $\delta(\mathcal{F})$ and the labels of the arcs of $\delta(\mathcal{F})$ issued from these footholds can be found in $O(|\mathcal{A}|)$ time and space.*

2.4.5 Construction of \mathcal{F}

Theorem 2.19 *The free space of the spider robot can be computed in $O(|\mathcal{A}| \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}| \alpha(n))$ space.*

Proof: By Theorem 2.17, we have computed all the circular arcs of $\delta(\mathcal{F})$ and the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F})$ incident to them. By Theorem 2.18, we

have computed all the vertices of $\delta(\mathcal{F})$ that are incident to two straight edges of $\delta(\mathcal{F})$ and the label of these two edges. It remains to sort the vertices of $\delta(\mathcal{F})$ that appear on the line segments (s_i, s_j) . We only consider the line segments (s_i, s_j) such that the corresponding label (i, j) appears during previous computations. Then, we sort the vertices of $\delta(\mathcal{F})$ that belong to each such relevant line. Since $|\delta(\mathcal{F})| = \Theta(|\mathcal{A}|)$ [BDDP95], all these sorting can be done in $O(|\mathcal{A}| \log n)$ time. It is then an easy task to deduce a complete description of $\delta(\mathcal{F})$. \square

2.5 Generalization to polygonal foothold regions

2.5.1 Introduction and preliminaries

We consider now the case where the set of footholds is no longer a set of points but a set \mathcal{S} of pairwise disjoint polygonal regions bounded by n line segments e_1, \dots, e_n . Clearly, \mathcal{S} is a subset of the free space \mathcal{F} of the spider robot. Let \mathcal{F}_e denote the free space of the spider robot using as foothold regions only the edges e_1, \dots, e_n . Suppose that the spider robot admits a stable placement outside \mathcal{S} with its feet inside some polygonal footholds; then the placement remains stable if it retracts its legs on the boundary of these polygonal regions. Hence, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \cup \mathcal{S}$. We show how to compute \mathcal{F}_e .

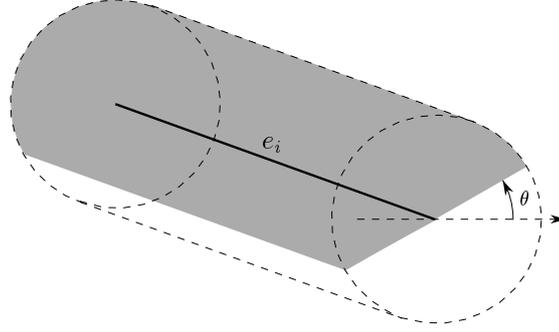
As observed in Remark 2.9, all we have done in Section 2.3 remains true if the foothold regions are line segments provided that \mathcal{H}_i is replaced by \mathcal{H}_{e_i} the generalized helicoidal volume defined by (see Figure 2.13):

$$\mathcal{H}_{e_i} = \{(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / P \in HD(s, \theta), s \in e_i\}.$$

The helicoidal volume associated to a point site s_i will be, up to the end, denoted by \mathcal{H}_{s_i} .

Similarly, we define the generalized circle C_{e_i} as the set of points at distance R from e_i . Let \mathcal{A}_e denote the arrangement of the n generalized circles C_{e_1}, \dots, C_{e_n} . Notice that $|\mathcal{A}_e| = \Theta(n^2)$.

Each arc of the boundary $\delta(\mathcal{F}_e)$ of \mathcal{F}_e is either an arc of C_{e_i} , corresponding to a maximal extension of one leg, or an arc corresponding to placements at the limit of stability of the spider robot. Similarly to what we did in Section 2.4, we compute first the contribution of each C_{e_i} to $\delta(\mathcal{F}_e)$ (Sections 2.5.2). Thereafter, we compute the arcs of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that correspond to placements where the spider robot is at the limit of stability (Section 2.5.3). At last, we show how to construct \mathcal{F}_e (and \mathcal{F}) in Section 2.5.4.

FIG. 2.13 – Section of \mathcal{H}_{e_i} by the "plane" Π_θ .

2.5.2 Computation of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e$

We compute the contribution to $\delta(\mathcal{F}_e)$ of each generalized circles C_{e_i} in turn. We consider the contribution of $C_{e_{i_0}}$ to $\delta(\mathcal{F}_e)$ for some $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. $C_{e_{i_0}}$ is composed of two half circles and two straight line segments. In order to compute the contribution of $C_{e_{i_0}}$ to $\delta(\mathcal{F}_e)$, we evaluate first the contribution of the half circles and then the contribution of the straight line segments. For convenience, we will not compute the contribution of the half circles to $\delta(\mathcal{F}_e)$ but the contribution of the whole circles. Similarly, we will compute the contribution of the whole straight lines supporting the line segments of $C_{e_{i_0}}$.

Let s_{i_0} and s'_{i_0} denote the two endpoints of the line segment e_{i_0} , and let $C_{s_{i_0}}$ and $C_{s'_{i_0}}$ denote the unit circles centered at s_{i_0} and s'_{i_0} respectively. Let l_{i_0} and l'_{i_0} denote the two straight line segments of $C_{e_{i_0}}$, and L_{i_0} and L'_{i_0} their supporting lines. We show how to compute the contributions of $C_{s_{i_0}}$ and L_{i_0} to $\delta(\mathcal{F}_e)$; the contributions of $C_{s'_{i_0}}$ and L'_{i_0} can be computed likewise.

Let $\mathcal{C}_{s_{i_0}} = C_{s_{i_0}} \times S^1$ and $\mathcal{L}_{i_0} = L_{i_0} \times S^1$. Basically, we compute $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ and $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{L}_{i_0}$, as explained in Section 2.4.1, by computing $\cup_i(\mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}})$, $\cup_{i \neq i_0}(\mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}})$, $\cup_i(\mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{L}_{i_0})$ and $\cup_{i \neq i_0}(\mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{L}_{i_0})$. The properties of the new regions $\mathcal{Z}_{e_i} = \mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ and $\mathcal{Y}_{e_i} = \mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{L}_{i_0}$ are different though similar to the properties of $\mathcal{Z}_{s_i} = \mathcal{H}_{s_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ described in Section 2.4.2. The analysis of \mathcal{Z}_{e_i} and \mathcal{Y}_{e_i} are subdivided into two parts: first, we consider the line D_i supporting e_i and we examine the regions $\mathcal{Z}_{D_i} = \mathcal{H}_{D_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ and $\mathcal{Y}_{D_i} = \mathcal{H}_{D_i} \cap \mathcal{L}_{i_0}$ where \mathcal{H}_{D_i} is the generalized helicoidal volume induced by D_i :

$$\mathcal{H}_{D_i} = \{(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / P \in HD(s, \theta), s \in D_i\}.$$

Then, we deduce \mathcal{Z}_{e_i} (resp. \mathcal{Y}_{e_i}) from \mathcal{Z}_{D_i} , \mathcal{Z}_{s_i} and $\mathcal{Z}_{s'_i}$ (resp. \mathcal{Y}_{D_i} , $\mathcal{Y}_{s_i} = \mathcal{H}_{s_i} \cap \mathcal{L}_{i_0}$ and $\mathcal{Y}_{s'_i}$) where s_i and s'_i are the two endpoints of e_i . Thereafter, we

compute the contribution of $C_{e_{i_0}}$ to $\delta(\mathcal{F}_e)$ in a way similar to what we did in Section 2.4.3. The following theorem sums up these results:

Theorem 2.20 *We can compute $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e$ and the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to the arcs of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e$ in $O(|\mathcal{A}_e|^{\alpha_7(n)} \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|^{\alpha_8(n)})$ space.*

The proof of this theorem is detailed in Appendix A.

2.5.3 Arcs of $\delta(\mathcal{F}_e)$ corresponding to the placements where the spider robot is at the limit of stability

We now have to compute the edges of \mathcal{F}_e that do not belong to \mathcal{A}_e . The arcs of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e$ correspond to placements at the limit of accessibility of the spider robot, and reciprocally. Thus, other edges of \mathcal{F}_e correspond to placements at the limit of stability of the spider robot. We denote by \mathcal{S}_e the set of those edges. A placement P of the spider robot is at the limit of stability if and only if there exists a closed half-disk of radius R centered at P that does not contain any foothold except at least two footholds located on the diameter of the half-disk such that P is between these footholds. Thus, the edges of \mathcal{S}_e are supported by the curves drawn by the midpoint of a ladder of length $2R$ moving by translation and rotation such that the ladder touches the boundary of the foothold regions in two points but does not intersect the interior of the foothold regions. Thus, edges of \mathcal{S}_e are supported by the projection (onto \mathbb{R}^2) of the edges of the boundary of the free space of the ladder moving by translation and rotation amidst the foothold regions considered as obstacles, i.e. the set of $(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ such that the ladder of length $2R$, which has its midpoint at P and makes an angle θ with the x -axis, does not collide with the interior of the foothold regions. According to [SS87], the edges of the boundary of the free space of the ladder can be computed in $O(|\mathcal{A}_e| \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|)$ space. Clearly, the projection (onto \mathbb{R}^2) of each edge can be computed in constant time. The intersections between the projected edges do not need to be computed. Thus, we can compute, in $O(|\mathcal{A}_e| \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|)$ space (using [SS87]), a set of curves in \mathbb{R}^2 that support the arcs of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that correspond to placements at the limit of stability of the spider robot. However, it remains to compute the portions of these curves that belong to $\delta(\mathcal{F}_e)$.

We introduce first some definitions and notations. The *ladder* has length $2R$. The relative interior of an e_i is called a *wall*. An endpoint of an e_i is called a *corner* (when several walls share an endpoint, we define only one corner at that point). A *placement* of the ladder is a pair $(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ where P is

the location of the midpoint of the ladder and θ is the angle between the x -axis and the ladder. A *free placement* of the ladder is a placement where the relative interior of the ladder does not intersect the walls. A *placement of type corner-ladder* is a placement of the ladder such that the relative interior of the ladder touches a *corner*. A *placement of type wall-endpoint* is a placement of the ladder such that an endpoint of the ladder touches a *wall*. A *placement of type corner-endpoint* is a placement of the ladder such that an endpoint of the ladder touches a *corner*. We now define *k-contact placements* of the ladder.

A *1-contact placement* is a free placement of type corner-ladder or wall-endpoint. A *2-contact placement* is either the combination of two 1-contact placements or a free placement of type corner-endpoint. A 2-contact placement is said of type (corner-ladder, corner-ladder), (corner-ladder, wall-endpoint), (wall-endpoint, wall-endpoint), or (corner-endpoint), in accordance to the types of placements involved in the 2-contact placement. Given two walls (resp. a wall and a corner, two corners, one corner), the set of 2-contact placements induced by these two walls (resp. the wall and the corner, the two corners, the single corner) is called a *2-contact curve*. A *3-contact placement* is either the combination of a 1-contact placement, and a 2-contact placement, or is a free placement of type corner-endpoint such that the ladder at that placement is parallel and has no common point with a wall ending at the corner; that last type of 3-contact placement, denoted (corner-endpoint, //), is considered in order that, any 2-contact curve ends at a 3-contact placement. Notice that, reciprocally, any 3-contact placement is an endpoint of a 2-contact curve. The types of the 3-contact placements are naturally defined by (corner-ladder, corner-ladder, corner-ladder), (corner-endpoint, wall-endpoint). . . A *k-contact placement*, $k > 3$, is the combination of p 1-contact placements, q 2-contact placements and r 3-contact placements such that $p + 2q + 3r = k$.

Now, we define a *2-contact tracing* as the projection onto \mathbb{R}^2 of a 2-contact curve. Similarly as above, we define the types of the 2-contact tracings. Notice that, to any point P of a given 2-contact tracing \mathcal{K} corresponds a unique placement (P, θ) of the ladder. It follows that, to any point P of a 2-contact tracing \mathcal{K} corresponds a unique pair (M, N) of points of contact between the ladder at (P, θ) and the walls (when P is an endpoint of \mathcal{K} , a 3-contact placement corresponds to P . However (M, N) is unique by continuity). Notice that M and N are equal when \mathcal{K} is a 2-contact tracing of type corner-endpoint. The points M and N are called the *contact points corresponding to $P \in \mathcal{K}$* .

A 2-contact tracing is either a straight line segment, an arc of ellipse, an arc of conchoid or a circular arc. Indeed, a 2-contact tracing of type (corner-ladder, corner-ladder) is a straight line segment; a 2-contact tracing of type

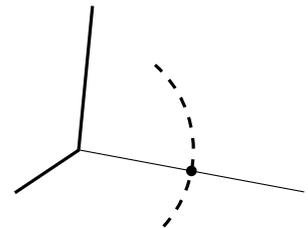
(corner-ladder, wall-endpoint) is an arc of conchoid (see Appendix B); a 2-contact tracing of type (wall-endpoint, wall-endpoint) is an arc of ellipse; a 2-contact tracing of type (corner-endpoint) is a circular arc (see figures below). As we said before, we can compute all these 2-contact tracings in $O(|\mathcal{A}_e| \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|)$ space [SS87], it remains to compute the parts of these curves that belong to $\delta(\mathcal{F}_e)$.

We first show that only some portions of the 2-contact tracings correspond to positions at the limit of stability of the spider robot. These portions are called the relevant 2-contact tracings. Then, we prove that we do not have to take into consideration the intersections between the relative interior of relevant 2-contact tracings. We also show that, if a point A is an end-point of several relevant 2-contact tracings, only two of them can support edges of \mathcal{S}_e in the neighborhood of A . Then, we compute a graph whose edges are relevant 2-contact tracings and where the degree of each node is at most two. Finally, given two vertices of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e$ that are connected (along $\delta(\mathcal{F}_e)$) by arcs that correspond to placements at the limit of stability of the spider robot, we compute these arcs using the graph.

As mentioned above, a placement P of the spider robot is at the limit of stability if and only if there exists a closed half-disk of radius R centered at P that does not contain any foothold except at least two footholds located on the diameter of the half-disk, one on each side of P , these footholds are called *contact points* at placement P . Thus, a point P of a 2-contact tracing \mathcal{K} may be on an arc of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that correspond to placements at the limit of stability of the spider robot only if P is between the two contact points corresponding to $P \in \mathcal{K}$. The portions of the 2-contact tracings for which that property holds are called the *relevant 2-contact tracings*. The other portions are called the *irrelevant 2-contact tracings*. We now show how to compute the relevant 2-contact tracings for each type of contact (see Figure 2.14). Let \mathcal{K} denote a 2-contact tracing, let $P \in \mathcal{K}$ and let M and N be the two contact points corresponding to $P \in \mathcal{K}$.

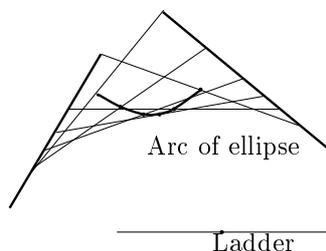
Type (corner-endpoint):

\mathcal{K} is a circular arc, and M and N coincide with one endpoint of the ladder. Thus, all the 2-contact tracings of type (corner-endpoint) are wholly irrelevant.

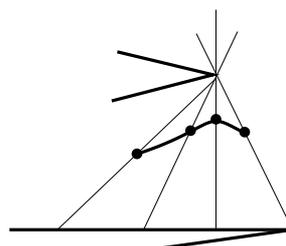


Type (wall-endpoint, wall-endpoint):

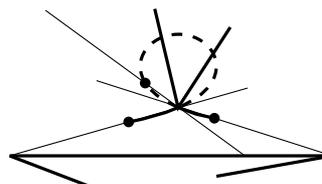
\mathcal{K} is an arc of ellipse, M and N are the endpoints of the ladder and thus, P is between them. Thus, all the 2-contact tracings of type (wall-endpoint, wall-endpoint) are wholly relevant.

**Type (corner-ladder, wall-endpoint):**

\mathcal{K} is an arc of conchoid. If the distance between the corner and the wall is greater than R , then, \mathcal{K} is wholly relevant.



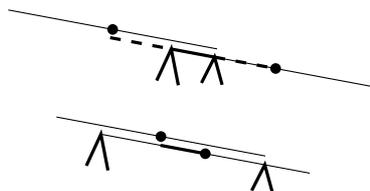
Otherwise, if that distance is smaller than R , then, the two relevant portions and the irrelevant portion of \mathcal{K} are incident to the corner involved in the type of \mathcal{K} .



Notice that if the corner is an endpoint of the wall, then \mathcal{K} degenerates in a line segment and the irrelevant portion of \mathcal{K} is the portion which is not supported by the wall (see Figure 2.14).

Type (corner-ladder, corner-ladder):

\mathcal{K} is a line segment. If the distance between the two corners is greater than R , then, \mathcal{K} is wholly relevant; otherwise, the portion of \mathcal{K} which is relevant is the line segment joining the two corners.



We show now that the intersections between the relative interiors of the relevant 2-contact tracings are not pertinent for the spider robot motion problem. We recall that, if a vertex A of $\delta(\mathcal{F}_e)$ belongs to \mathcal{A}_e , then we know by Theorem 2.20 the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to A . Otherwise, if $A \notin \mathcal{A}_e$, then the two edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that end at A correspond to placements at the limit of stability of the spider robot.

Proposition 2.21 *Any vertex A of $\delta(\mathcal{F}_e)$, such that $A \notin \mathcal{A}_e$, is an endpoint*

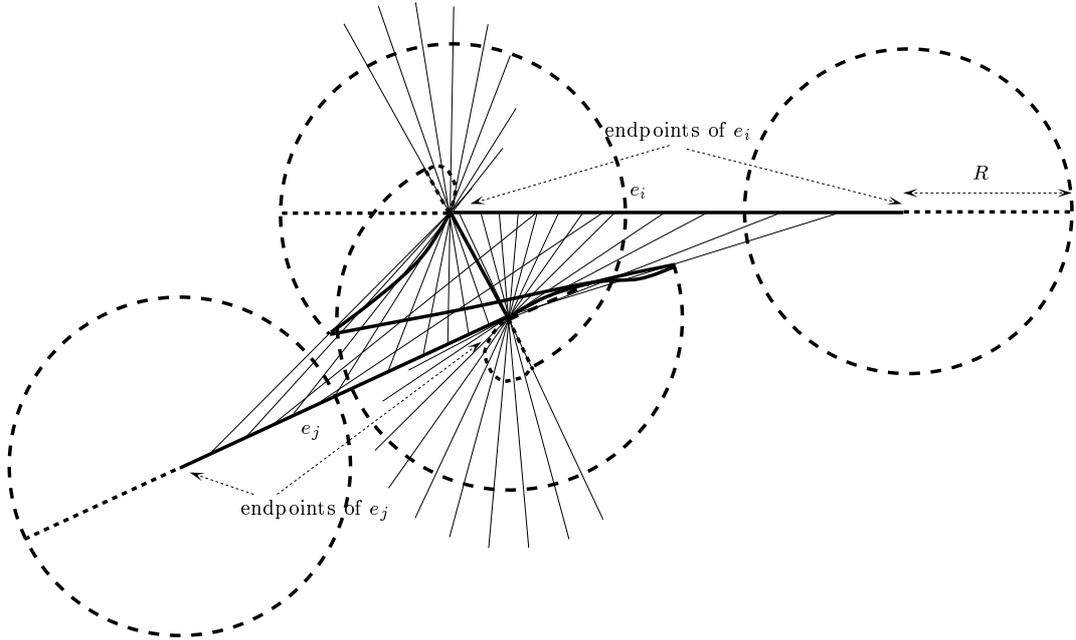


FIG. 2.14 – *Relevant 2-contact tracings (thick curves) and irrelevant 2-contact tracings (dashed thick curves).*

of the two relevant 2-contact tracings that support the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ ending at A .

Proof: Since the two edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that end at A correspond to placements at the limit of stability of the spider robot, they are both supported by some relevant 2-contact tracings. Thus, we only have to prove that A is an endpoint of these two relevant 2-contact tracings.

Let \mathcal{K}_1 and \mathcal{K}_2 be these two relevant 2-contact tracings and assume for a contradiction that A is not an endpoint of \mathcal{K}_1 (nothing is assumed for A with respect to \mathcal{K}_2). Let $L_1 = (A, \theta_1)$ (resp. $L_2 = (A, \theta_2)$) be the placement of the ladder that correspond to $A \in \mathcal{K}_1$ (resp. $A \in \mathcal{K}_2$) and let M_1 and N_1 (resp. M_2 and N_2) be the corresponding contact points (see Figure 2.15). First, notice that $L_1 \neq L_2$. Indeed, otherwise, L_1 is at least a 3-contact placement and then, A must be an endpoint of \mathcal{K}_1 , which contradicts our assumption.

By the definition of the relevant 2-contact tracings, A is between M_1 and N_1 . Moreover, A cannot be equal to M_1 or N_1 since A is not an endpoint of \mathcal{K}_1 . It follows that neither M_2 nor N_2 is equal to A , because otherwise L_1 would be a 3-contact placement. Therefore A is strictly between M_1 and

N_1 , and strictly between M_2 and N_2 . Thus, A is strictly inside the polygon $(M_1M_2N_1N_2)$.

On the other hand, since A does not belong to any C_{e_i} , the walls supporting M_1 , N_1 , M_2 and N_2 intersect the open disk D_A of radius R centered at A . Thus, there exists four points M'_1 , N'_1 , M'_2 and N'_2 on these walls and in D_A , that are close enough to M_1 , N_1 , M_2 and N_2 respectively to ensure that A belongs to the interior of the polygon $(M'_1M'_2N'_1N'_2)$. Since the distances from A to M'_1 , N'_1 , M'_2 and N'_2 , are strictly smaller than R , A belongs to the interior of \mathcal{F}_e . This contradicts our assumption that A is a vertex of $\delta(\mathcal{F}_e)$ and yields the result. \square

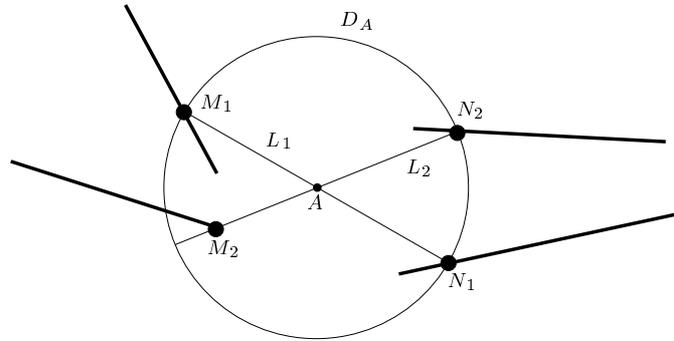


FIG. 2.15 – For the proof of Proposition 2.21.

Consider now the adjacency graph \mathcal{G} of the relevant 2-contact tracings such that two relevant 2-contact tracing are connected in \mathcal{G} if and only if they have a common endpoint (the intersections between the relative interior of the relevant 2-contact tracings are not considered). Notice that, given the set of relevant 2-contact tracings, \mathcal{G} can simply be computed in $O(|\mathcal{A}_e| \log n)$ time. Now, given two vertices of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e$ that are connected along $\delta(\mathcal{F}_e)$ by arcs of \mathcal{S}_e , we want to compute these arcs. For computing these arcs, we cannot simply use the graph \mathcal{G} because the degree of some nodes of \mathcal{G} may be arbitrary large (see Figure 2.16). We show in the next proposition that we can deduce from \mathcal{G} a graph \mathcal{G}' such that the degree of each node of \mathcal{G}' is at most two and that \mathcal{G}' supports any portion of $\delta(\mathcal{F}_e)$ which is the concatenation of arcs of \mathcal{S}_e .

We consider four hypotheses (H1,...,H4) that avoid to consider degenerate cases. They are not essential but substantially simplify the proof of the following proposition. In order to ensure that the degree of each vertex of the free space of the ladder is three, we make the three hypotheses H1, H2

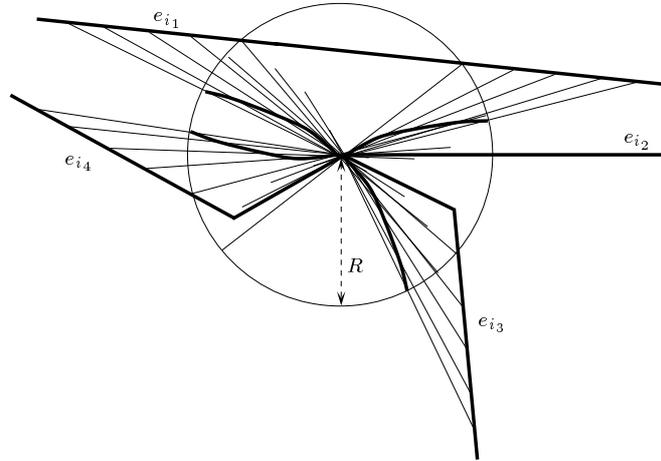


FIG. 2.16 – An arbitrary number of relevant 2-contact tracings that have a common endpoint.

and H3.

H1 The line segments e_1, \dots, e_n compose the boundary of a set of non degenerated polygons (i.e. no polygon is reduced to a line segment or to a point).

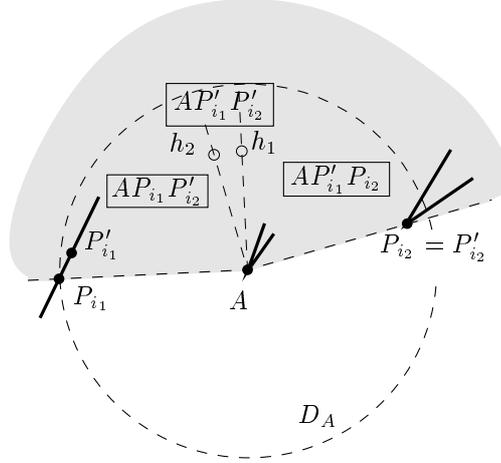
H2 The ladder does not admit any 4-contact placement.

H3 The arc of conchoid drawn by an endpoint of the ladder when its other endpoint moves along a wall while the ladder remains in contact with a corner, is not tangent to any other wall. According to Lemma 2.48 this hypothesis only avoids degenerate cases.

H4 The ladder does not admit any 3-contact placement when its midpoint is located at a corner.

Proposition 2.22 *For any node A of \mathcal{G} of degree k such that $A \notin \mathcal{A}_e$, at most two relevant 2-contact tracings can support $\delta(\mathcal{F}_e)$ in a sufficiently small neighborhood of A . Moreover, we can determine these at most two curves in $O(k \log k)$ time and $O(k)$ space.*

Proof: Let $A \notin \mathcal{A}_e$ a node of \mathcal{G} of degree k , D_A is the open disk of radius R centered at A . We will distinguish two cases: A is or is not a corner.

FIG. 2.17 – Wedge $P_{i_1}AP_{i_2}$ is in \mathcal{F}_e near A . **A is a corner.**

Let $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ be the relevant 2-contact tracings that end at A , and let $L_i = (A, \phi_i)$ be the placement of the ladder that corresponds to $A \in \mathcal{K}_i$. We assume that $k > 2$, otherwise Proposition 2.22 is trivial.

The 2-contact tracing \mathcal{K}_i has to involve at least a different contact from the corner-ladder contact in A ; if this contact is a corner-ladder contact we define $P_i = P'_i$ as the corner ($\neq A$) defining this contact (notice that $P_i = P'_i \in D_A$ by Hypothesis H4); if this contact is a wall-endpoint contact we define P_i as the contact point between this wall and the ladder at placement L_i , since $A \notin \mathcal{A}_e$, the wall must intersect D_A and we define P'_i as a point in that intersection in a neighborhood of P_i .

Fact: $\forall i \neq j, \phi_i \neq \phi_j$,
 otherwise, placement $L_i = L_j$ is a 3-contact with midpoint on a corner contradicting Hypothesis H4.

Fact: A is a non-flat vertex of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$ or belongs to the interior of \mathcal{F}_e .

Assume that $A \in \delta(\mathcal{F}_e)$. Then, A lies on the boundary of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$ because, otherwise, the P'_i provide footholds such that the spider robot can move in a neighborhood of A . Furthermore, A must be a non-flat vertex of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$, by Hypothesis H4.

Assume that A does not belong to the interior of \mathcal{F}_e , and let P_{i_1} and P_{i_2} be the two vertices of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$ such that P_{i_1}, A and P_{i_2} are consecutive along the boundary of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$. We will exhibit a stable placement for the spider robot at any position P inside the intersection of the wedge

$P_{i_1}AP_{i_2}$ and a neighborhood of A . Let h_1 and h_2 be two points in the wedge $P_{i_1}AP_{i_2}$ such that the wedges $P_{i_1}Ah_1$ and $h_2AP_{i_2}$ have angle $\frac{\pi}{2}$.

— If P is in the wedge $P_{i_1}Ah_2$, and is close enough to A , the footholds A , P_{i_1} and P'_{i_2} yield a stable placement for the spider robot (see Figure 2.17).

— If P is in the wedge h_2Ah_1 , and is close enough to A , footholds A , P'_{i_1} and P'_{i_2} yield a stable placement for the spider robot.

— If P is in the wedge $h_1AP_{i_1}$, and is close enough to A , footholds A , P'_{i_1} and P_{i_2} yields a stable placement for the spider robot.

Fact: \mathcal{K}_i , $i \notin \{i_1, i_2\}$, cannot support an edge of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to A .

We assume that A is a non-flat vertex of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$ because, otherwise, A belongs to the interior of \mathcal{F}_e and the claim is obvious. A 2-contact tracing \mathcal{K}_i , $i \notin \{i_1, i_2\}$, cannot be an arc of ellipse because, otherwise, L_i is a 3-contact placement contradicting Hypothesis H4. Thus, \mathcal{K}_i can be either the segment AP_i or an arc of conchoid which is tangent to the segment AP_i at A by Lemma 2.47. The point P_i strictly belongs to the wedge $P_{i_1}AP_{i_2}$, because we have shown that $\phi_i \notin \{\phi_{i_1}, \phi_{i_2}\}$. Thus, \mathcal{K}_i is strictly inside the wedge $P_{i_1}AP_{i_2}$ and thus inside \mathcal{F}_e , in a neighborhood of A . Therefore, \mathcal{K}_i cannot support $\delta(\mathcal{F}_e)$, in a neighborhood of A .

Hence, by sorting the P_i in polar order around A , we can determine, in $O(k \log k)$ time, if A is a non-flat vertex of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$, and if so, determine i_1 and i_2 . If A is a non-flat vertex of $\text{CH}(A, P_1, \dots, P_k)$, then, only \mathcal{K}_{i_1} and \mathcal{K}_{i_2} can support an edge of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to A . Otherwise, A belongs to the interior of \mathcal{F}_e and none of the 2-contact tracings $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ can support an edge of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to A .

A is not a corner.

Fact: *There is only one relevant placement L with center in A .*

Indeed, either A is in a wall, and the only possible orientation for the ladder is the orientation of the wall, or A is not a foothold, and thus, if there is two distinct relevant 2-contact placements at A , there exists four contact points P_1, P_2, P_3, P_4 such that $|AP_i| \leq R$ and that the interior of $\text{CH}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ contains A . Since $A \notin \mathcal{A}_e$, there exists four footholds P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 in D_A and in some neighborhoods of P_1, P_2, P_3, P_4 , respectively, such that A belongs to the interior of $\text{CH}(P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)$. Thus, $A \notin \delta(\mathcal{F}_e)$ which contradicts our assumption.

Fact: *There are at most six 2-contact tracings incident to A .*

Since the general position hypothesis H2 forbid k -contacts for $k > 3$, A corresponds to a 3-contact placement. The three possible choices of two contacts among three gives three 2-contact tracing intersecting in A and thus, six arcs incident to A .

Fact: *There are three 2-contact tracings incident to A .*

If the 3-contact placement L is of type (corner-endpoint, //), then there are

only three 2-contact tracings incident to A , that are two circular arcs and one line segment. Otherwise, it comes from the general position hypotheses H1, H2 and H3 (designed to ensure that property) that a 2-contact tracing cannot be valid on both side of the 3-contact, i.e. on one side of the 3-contact placement, the placements are not free. We detail below that proof.

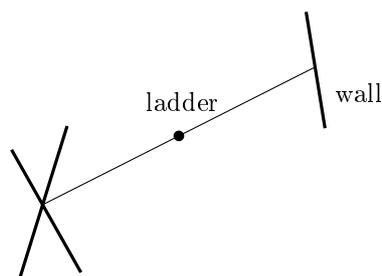
Fact: There are two relevant 2-contact tracings incident to A .

According to Hypothesis H4, at the 3-contact placement L , two contact points are on the same side of A . Thus, only two of the three 2-contact tracings incident to A are relevant.

Now, we prove that Hypotheses H1, H2 and H3 ensure that three 2-contact tracings are incident to A , by considering in turn each possible type of the 3-contact placement $L = (A, \phi)$.

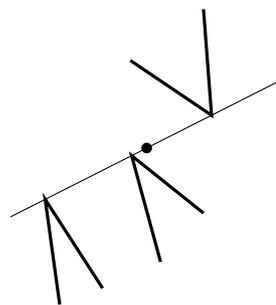
Type (wall-endpoint, wall-endpoint, wall-endpoint):

This type of 3-contact placement cannot occur because the walls do not intersect each others since the polygonal foothold regions are pairwise disjoint, by assumption.



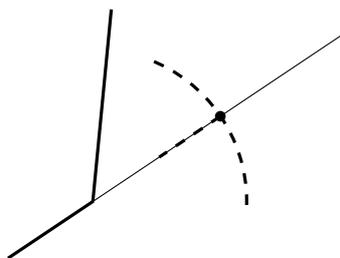
Type (corner-ladder, corner-ladder, corner-ladder):

This type of 3-contact placement does not appear because that contradicts Assumption H2, that says that there is no 4-contact placement.



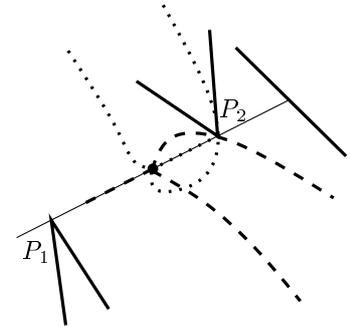
Type (corner-endpoint, //):

There are clearly three 2-contact tracings incident to A , that are two circular arcs and one line segment.



Type (wall-endpoint, corner-ladder, corner-ladder):

Let P_1 and P_2 denote the corners involved in the 3-contact placement, and let P'_1 be the point of the ladder that coincide with P_1 when the ladder is at placement L . The wall and the ladder at L are not collinear by Hypothesis H2. Thus, translating the ladder in a direction parallel to P_1P_2 is possible in only one way if we forbid the ladder intersecting the wall. Thus, only one 2-contact tracing of type (corner-ladder, corner-ladder) ends at A .



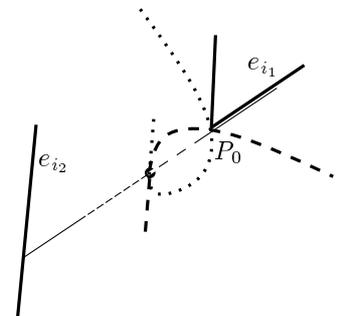
According to Lemma 2.47, the conchoid drawn by P'_1 when the ladder moves keeping contact with P_2 and the wall, is not tangent to the ladder at placement L , and thus the ladder cannot move in both direction without intersecting one of the walls incident to P_1 (there is at least one wall incident to P_1 and not parallel to P_1P_2 by Hypothesis H1). Thus, only one 2-contact tracing of type (wall-endpoint, corner-ladder) involving P_1 ends at A . That result applies symmetrically to the 2-contact tracing involving P_2 .

Type (wall-endpoint, wall-endpoint, corner-ladder):

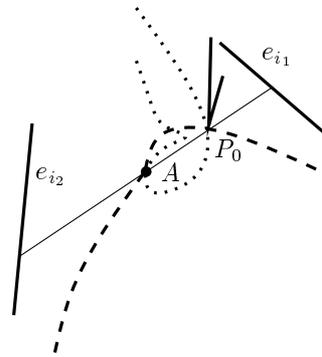
We denote by P_0 , e_{i_1} and e_{i_2} the corner and the two walls involved in the 3-contact placement.

According to Hypothesis H2, the two walls are not both parallel to the ladder at L .

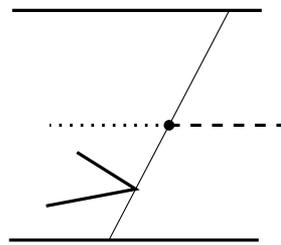
If the ladder at L is collinear to one wall, then, by Hypotheses H1 and H2, there exists another wall non parallel to the ladder and incident to the corner. Then, there are three 2-contact tracings incident to A that are, a line segment, an arc of conchoid and an arc of ellipse.



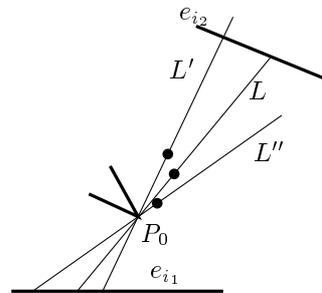
We now suppose that neither e_{i_1} nor e_{i_2} is parallel to the ladder at L . According to Hypothesis H3 (which has been designed especially for that case), the ladder at placement L can move only in one direction, remaining in contact with P_0 and e_{i_1} without intersecting e_{i_2} . Thus, only one 2-contact tracing of type (wall-endpoint, corner-ladder) involving e_{i_1} ends at A . Similarly, only one 2-contact tracing of type (wall-endpoint, corner-ladder) involving e_{i_2} ends at A .



It remains to prove that only one arc of the ellipse drawn by the midpoint of the ladder keeping the contact with e_{i_1} and e_{i_2} is valid. If e_{i_1} and e_{i_2} are parallel, the ellipse degenerates to a line segment parallel to e_{i_1} (and to e_{i_2}) and only one arc of the ellipse, incident to A , is valid. Now, we assume that e_{i_1} and e_{i_2} are not parallel. Let $\varepsilon > 0$ small enough and L' (resp. L'') be the placement of the ladder with orientation $\phi + \varepsilon$ (resp. $\phi - \varepsilon$) in contact with P_0 and e_{i_1} .

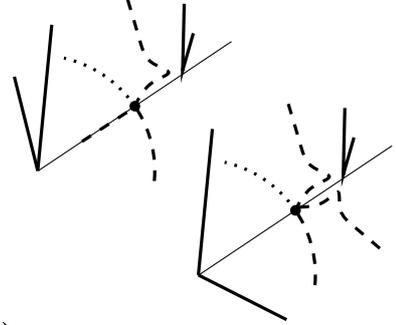


By Hypothesis H3, the ladder at either L' or L'' intersects e_{i_2} . Let t' (resp. t'') be the translation parallel to e_{i_1} that map the ladder at L' (resp. L'') to the position in contact with both e_{i_1} and e_{i_2} . The translations t' and t'' have opposite directions since exactly one of the ladder at L' and L'' intersects e_{i_2} . Thus, at most one of the ladder at $t'(L')$ and $t''(L'')$ is free, because one has to intersect a wall incident to P_0 (which exists and is not of direction ϕ by Hypothesis H1). Therefore, at most one of the two arcs of ellipse incident to A is a 2-contact tracing.



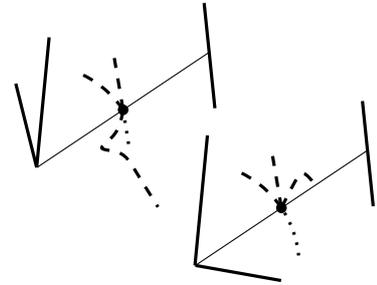
Type (corner-endpoint, corner-ladder):

Clearly, only three 2-contact tracings end at A that are either, a line segment, an arc of conchoid and a circular arc, or two arcs of conchoid and a circular arc.



Type (corner-endpoint, wall-endpoint):

In this case, it is also clear that, three 2-contact tracings end at A , that are, a circular arc and, either an arc of conchoid and an arc of ellipse, or two arcs of ellipse.



□

Now, consider the graph \mathcal{G} and each node A in turn. If $A \in \mathcal{A}_e$, we disconnect all the edges of \mathcal{G} that end at A . Notice that for each such node A , we know, by Theorem 2.20, if $A \in \delta(\mathcal{F}_e)$ and, in such a case, the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to A . If $A \notin \mathcal{A}_e$, we disconnect the edges ending at A except those (at most two) that may support $\delta(\mathcal{F}_e)$ in a neighborhood of A (see Proposition 2.22). In this way, we obtain a graph \mathcal{G}' such that the degree of each node is one or two. We consider each connected component of this new graph as a curve. Let Δ be this set of curves. We do not know if these curves are simple or not, but, in accordance with the graph \mathcal{G}' , they behave like simple curves. Indeed, given any pair of points on a curve $\mathcal{K} \in \Delta$, there is one or two ways (depending if \mathcal{K} is a closed curve or not) to connect them on \mathcal{K} in accordance with the graph \mathcal{G}' . In the sequel, these curves are called *pseudo-simple*. Then, according to Propositions 2.21 and 2.22, we get the following theorem:

Theorem 2.23 *We can compute, in $O(|\mathcal{A}_e| \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|)$ space, a set Δ of pseudo-simple curves that support the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ corresponding to placements at the limit of stability of the spider robot. Moreover, any portion \mathcal{P} of $\delta(\mathcal{F}_e)$ either intersects \mathcal{A}_e or belongs to a unique curve of Δ .*

2.5.4 Construction of \mathcal{F}_e and \mathcal{F}

We can now construct \mathcal{F}_e and \mathcal{F} . Let $\lambda_k(n)$ denote the maximum length of the Davenport-Schinzel sequence of order k on n symbols and $\alpha_k(n) = \lambda_k(n)/n$.

Theorem 2.24 *Given, as foothold regions, a set of n non intersecting straight line segments that satisfies Hypotheses H1, H2, H3 and H4, we can compute the free space \mathcal{F}_e of the spider robot in $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n)\log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n))$ space.*

Proof: By Theorem 2.20, we can compute the contribution of \mathcal{A}_e to $\delta(\mathcal{F}_e)$ and the label of the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to them in $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_7(n)\log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n))$ space. By Theorem 2.23, we can compute, in $O(|\mathcal{A}_e|\log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|)$ space, a set Δ of pseudo-simple curves that support the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that do not belong to \mathcal{A}_e . Moreover, any portion \mathcal{P} of $\delta(\mathcal{F}_e)$ such that $\mathcal{P} \cap \mathcal{A}_e = \emptyset$ belongs to a unique curve of Δ . Thus, by sorting all the vertices of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e \cap \Delta$ on the relevant curves of Δ , we obtain all the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that belong to a connected component of $\delta(\mathcal{F}_e)$ intersecting \mathcal{A}_e . Indeed, for each vertex $A \in \delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}_e \cap \Delta$, we know, in a neighborhood of A , the part of the curve of Δ that belongs to $\delta(\mathcal{F}_e)$ because we can simply determine, for each edge, a side of the edge that belongs to \mathcal{F}_e . Then, it is an easy task to deduce all the connected components of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that intersect \mathcal{A}_e .

It remains to compute the connected components of $\delta(\mathcal{F}_e)$ that do not intersect \mathcal{A}_e . Each of these components must be a closed curve of Δ . Moreover, all the curves of Δ belong to \mathcal{F}_e . Thus, according to Theorem 2.23, any closed curve \mathcal{K} of Δ that does not intersect \mathcal{A}_e is either a connected component of $\delta(\mathcal{F}_e)$ or is strictly included in \mathcal{F}_e . Therefore, by considering, in addition, all the closed curves of Δ that do not intersect \mathcal{A}_e , we finally obtain a set Ψ of closed curves that contains $\delta(\mathcal{F}_e)$ and such that any curve of Ψ is either a connected component of $\delta(\mathcal{F}_e)$ or is strictly included in \mathcal{F}_e .

At last, as we can simply determine, for each curve of Ψ , a side of the edge that belongs to \mathcal{F}_e , we can easily deduce from Ψ the free space \mathcal{F}_e . That concludes the proof since all these computations can be done in $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n)\log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n))$ space. \square

As we said at the beginning of Section 2.5, the free space of the spider robot using as foothold regions a set of polygonal regions is obtained by adding these polygonal regions to \mathcal{F}_e . This does not increase the geometric complexity of the free space nor the complexity of the computation. Thus, we get the following theorem:

Theorem 2.25 *Given a set of pairwise disjoint polygonal foothold regions with n edges in total that satisfies Hypotheses H1, H2, H3 and H4, we can compute the free space \mathcal{F} of the spider robot in $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n)\log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n))$ space.*

The function $\alpha_8(n)$ is extremely slowly growing and can be considered as a small constant in practical situations. This result is almost optimal since, as shown in [BDDP95], $\Omega(|\mathcal{A}_e|)$ is a lower bound for the size of \mathcal{F} .

2.6 Conclusion

We have seen in Theorem 2.19 that, when the foothold regions are n points in the plane, the free space of the spider robot can be computed in $O(|\mathcal{A}|\log n)$ time and $O(|\mathcal{A}|\alpha(n))$ space where $\alpha(n)$ is the pseudo inverse of the Ackerman's function and \mathcal{A} the arrangement of the n circles of radius R centered at the footholds. By [BDDP95] the size of \mathcal{F} is known to be $\Theta(|\mathcal{A}|)$. The size of \mathcal{A} is $O(n^2)$ but, if k denotes the maximum number of disks of radius R centered at the footholds that can cover a point of the plane, it can be shown that $|\mathcal{A}| = O(kn)$ [Sha91]. Thus, in case of sparse footholds, the sizes of \mathcal{A} and \mathcal{F} are linearly related to the number of footholds. Moreover $|\mathcal{F}|$ is usually much smaller than $|\mathcal{A}|$, even when \mathcal{A} has quadratic size.

When the foothold regions are n straight line segments or polygons with n edges in total, the free space of the spider robot can be computed in $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n)\log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n))$ space. $n\alpha_k(n) = \lambda_k(n)$ is the maximum length of the Davenport-Schinzel sequence of order k on n symbols; \mathcal{A}_e is the arrangement of the n curves consisting of the points lying at distance R from the straight line edges. Notice that $\alpha(n) = \alpha_3(n)$ and also that the size of \mathcal{A}_e is $O(n^2)$.

It should be observed that, in the case of point footholds, our algorithm implies that $O(|\mathcal{A}|\alpha(n))$ is an upper bound for $|\mathcal{F}|$. However, this bound is not tight since $|\mathcal{F}| = \Theta(|\mathcal{A}|)$ [BDDP95]. In the case of polygonal footholds, our analysis implies that $O(|\mathcal{A}_e|\alpha_8(n))$ is an upper bound of $|\mathcal{F}|$. We let as an open problem to close the (small) gap between this upper bound and the $\Omega(|\mathcal{A}_e|)$ lower bound.

Once the free space \mathcal{F} is known, several questions can be answered. In particular, given two points in the same connected component of \mathcal{F} , the algorithm in [BDDP95] allows to compute a motion, i.e. a sequence of leg assignments that allow the robot to move from one point to the other.

2.7 Appendix A : Proof of Theorem 2.20

We prove in this appendix the Theorem 2.20 stated in Section 2.5.2. We use the notations introduced in Section 2.5.2. To avoid confusion, the objects, $C_i, \mathcal{C}_i, \mathcal{H}_i, \mathcal{R}_i^\pm, \mathcal{Z}_i, \rho_i^\pm$, associated to a point site s_i are denoted by $C_{s_i}, \mathcal{C}_{s_i}, \mathcal{H}_{s_i}, \mathcal{R}_{s_i}^\pm, \mathcal{Z}_{s_i}, \rho_{s_i}^\pm$. We analyze the regions \mathcal{Z}_{e_i} in Section 2.7.1. We examine in Section 2.7.2 the regions $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$. Then, in Section 2.7.3, we show how to compute the contribution to $\delta(\mathcal{F}_e)$ of all the circles (of radius R) centered at the endpoints of the e_i . At last, we study the regions \mathcal{Y}_{e_i} and show how to compute the contribution of the line segments of the C_{e_i} to $\delta(\mathcal{F}_e)$, in Section 2.7.4.

2.7.1 Properties of the \mathcal{Z}_{e_i}

We study here the regions $\mathcal{Z}_{e_i} = \mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$. We use for the torus $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ the vocabulary introduced in Section 2.4.2. As we said above, we study first the regions $\mathcal{Z}_{D_i} = \mathcal{H}_{D_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$. For convenience, we identify in the sequel the slope of a straight line D_i with the angle γ_i between the (oriented) x -axis and D_i ; γ_i is defined modulo π . We assume, for the sake of simplicity, that the regions \mathcal{Z}_{e_i} and \mathcal{Z}_{D_i} under consideration are not reduced to the empty set.

Proposition 2.26 *If $s_{i_0} \notin D_i$, \mathcal{Z}_{D_i} is a connected region bounded by two vertical line segments of length π , and two curved edges $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_i}^-$ which are symmetrical with respect to the lines $\theta = \gamma_i$ and $\theta = \gamma_i + \pi$ (see Figures 2.18 and 2.19).*

Proof: Since $s_{i_0} \notin D_i$, \mathcal{Z}_{D_i} is bounded by two vertical line $u = u_1$ and $u = u_2$ where u_1 and u_2 are the parameters on the circle $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ of the two points I_1 and I_2 at distance R from D_i (see Figure 2.20). Let s be a generic point of D_i and s_1 (resp. s_2) be the point of D_i at distance R from I_1 (resp. I_2). Let \mathcal{Z}_s denote the intersection between the torus $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ and the helicoidal volume \mathcal{H}_s associated to s .

\mathcal{Z}_{D_i} is the union of the regions \mathcal{Z}_s , $s \in D_i$. As \mathcal{Z}_s is connected (see Proposition 2.11) and continuous with respect to s , \mathcal{Z}_{D_i} is connected.

For any $s \neq s_1$ (resp. $s \neq s_2$) the circle of radius R centered at s does not contain I_1 (resp. I_2), thus \mathcal{Z}_{s_1} (resp. \mathcal{Z}_{s_2}) coincides with \mathcal{Z}_{D_i} on the line $u = u_1$ (resp. $u = u_2$). Therefore, \mathcal{Z}_{D_i} is a region bounded by two vertical line segments of length π (see Proposition 2.11).

The region \mathcal{Z}_{D_i} is symmetrical with respect to the line $\theta = \gamma$ because the Minkowski's sum of $HD(O, \gamma_i + \theta)$ and D_i is equal to the Minkowski's sum of $HD(O, \gamma_i - \theta)$ and D_i . Since γ_i is defined modulo π , $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_i}^-$ are also symmetrical with respect to the line $\theta = \gamma_i + \pi$. \square

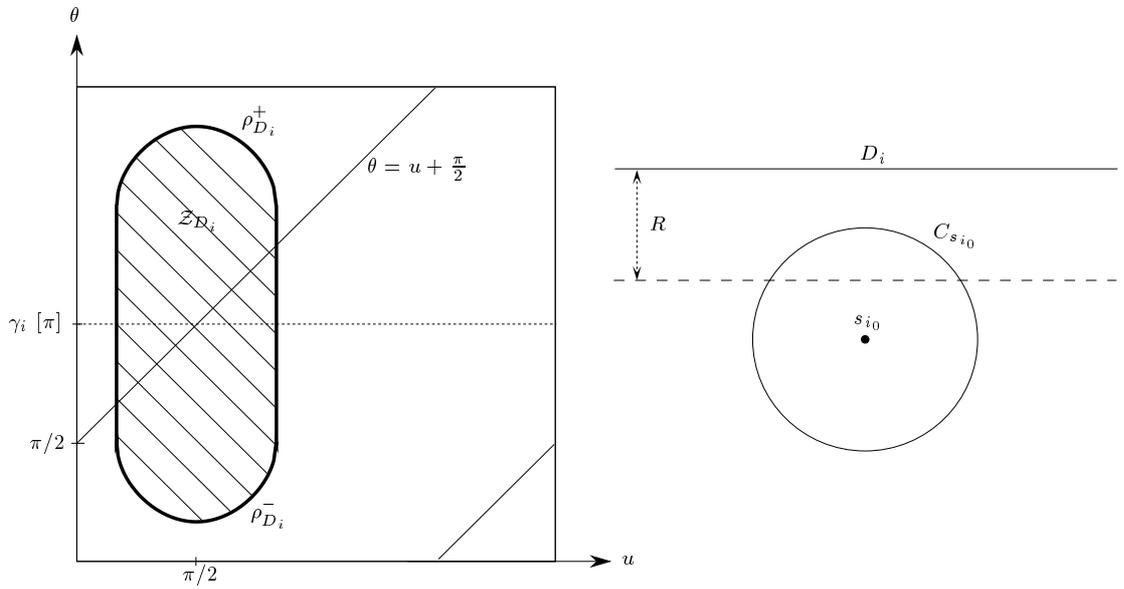


FIG. 2.18 – Z_{D_i} and the relative positions of $C_{s_{i_0}}$ and D_i that correspond.

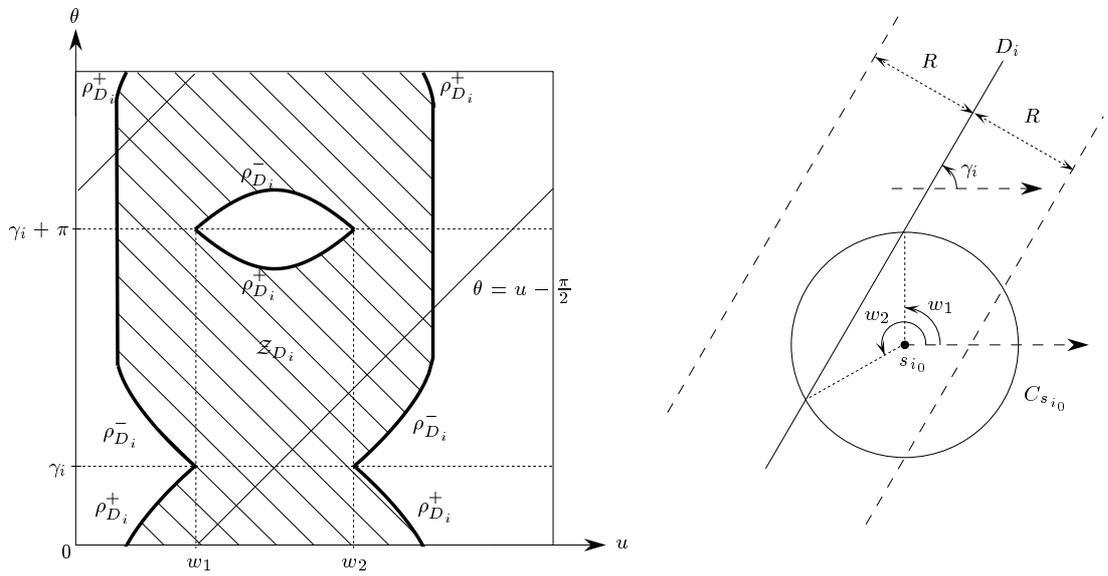


FIG. 2.19 – Z_{D_i} and the relative positions of $C_{s_{i_0}}$ and D_i that correspond.

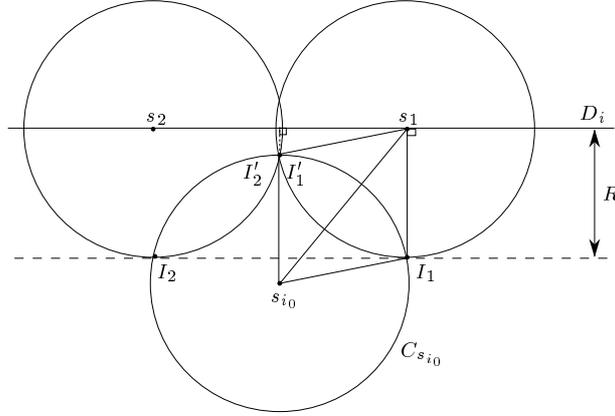


FIG. 2.20 – For the proofs of Propositions 2.26, 2.27 and 2.28.

Proposition 2.27 *If D_i does not intersect $C_{s_{i_0}}$, the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ properly intersects the region \mathcal{Z}_{D_i} but neither its upper nor its lower edges $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_i}^-$ (see Figure 2.18).*

Proof: We use here the notations of the previous proof.

Let I'_1 (resp. I'_2) denote the point of intersection distinct from I_1 (resp. I_2) between $C_{s_{i_0}}$ and the circle of radius R centered at s_1 (resp. s_2) (see Figure 2.20). Let u'_1 (resp. u'_2) be its parameter on $C_{s_{i_0}}$. By the definition of s_1 and I_1 , the lines $(s_1 I_1)$ and D_i are orthogonal; therefore, $(s_{i_0} I'_1)$ and D_i are also orthogonal. The same argument shows that $(s_{i_0} I'_2)$ and D_i are orthogonal. It follows that $I'_1 = I'_2$ and $u'_1 = u'_2$.

On the other hand, since D_i does not intersect $C_{s_{i_0}}$, the angle $\angle(\overrightarrow{I_1 s_{i_0}}, \overrightarrow{I_1 s_1})$ is greater than $\pi/2$ and therefore $\|s_{i_0} s_1\| \geq \sqrt{2} R$. Similarly, $\|s_{i_0} s_2\| \geq \sqrt{2} R$. The region \mathcal{Z}_{D_i} contains \mathcal{Z}_{s_1} (resp. \mathcal{Z}_{s_2}) which contains the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ for u in the interval $[u_1, u'_1]$ (resp. $[u'_2, u_2]$) (see Proposition 2.14). Since $u'_1 = u'_2$, \mathcal{Z}_{D_i} contains the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ for $u \in [u_1, u_2]$. Furthermore, for $u = u_1$ (resp. $u = u_2$) this line intersects the vertical edge of \mathcal{Z}_{s_1} (resp. \mathcal{Z}_{s_2}) (see Proposition 2.14) which coincides with the vertical edge of \mathcal{Z}_{D_i} (see the previous proof). \square

Proposition 2.28 *If D_i intersects $C_{s_{i_0}}$ such that $s_{i_0} \notin D_i$, the line $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ properly intersects the region \mathcal{Z}_{D_i} but neither its upper nor its lower edges $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_i}^-$ (see Figure 2.19).*

Proof: We use the notations of the two last proofs.

Since D_i intersects $C_{s_{i_0}}$, the angle $\angle(\overrightarrow{I_1 s_{i_0}}, \overrightarrow{I_1 s_1})$ is smaller than $\pi/2$ (see Figure 2.20). Thus, $\|s_{i_0} s_1\| < \sqrt{2} R$ and the same holds for $\|s_{i_0} s_2\|$. Therefore, for any point s on the line segment $[s_1 s_2]$, $\|s_{i_0} s\| < \sqrt{2} R$.

As we know, \mathcal{Z}_{D_i} is defined for $u \in [u_1, u_2]$. Consider any $u^* \in [u_1, u_2]$ and the corresponding point I on $C_{s_{i_0}}$. There exists s on the line segment $[s_1 s_2]$ such that the circle of radius R centered at s pass through I . Thus, one of the two vertical edges of \mathcal{Z}_s lies on the line $u = u^*$. Furthermore, since $\|s_{i_0} s\| < \sqrt{2} R$, that vertical edge of \mathcal{Z}_s is intersected by the line $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ (see Proposition 2.16). This edge is contained in \mathcal{Z}_{D_i} (because $\mathcal{Z}_s \subset \mathcal{Z}_{D_i}$), therefore, we have shown that $\forall u \in [u_1, u_2]$, the point $(u, u - \frac{\pi}{2})$ belongs to \mathcal{Z}_{D_i} . The result follows because \mathcal{Z}_{D_i} is bounded by the lines $u = u_1$ and $u = u_2$. \square

Proposition 2.29 *If $s_{i_0} \in D_i$, \mathcal{Z}_{D_i} is the region shown in Figure 2.21. The line $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ belongs to the relative interior of \mathcal{Z}_{D_i} . The curves $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_i}^-$ belong to the lines $\theta = u$, $\theta = u + \pi$, $\theta = -u + 2\gamma_i$, $\theta = -u + 2\gamma_i + \pi$.*

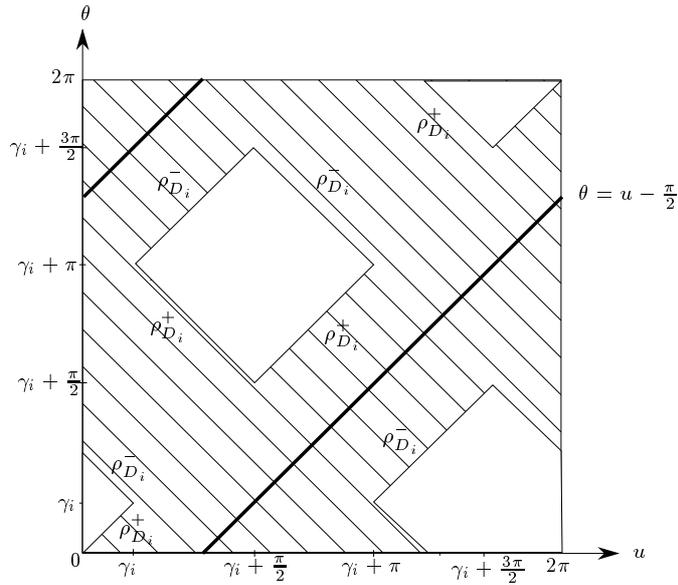


FIG. 2.21 – \mathcal{Z}_{D_i} when $s_{i_0} \in D_i$.

Proof: For any $\theta \in S^1$, $\mathcal{H}_{D_i} \cap \Pi_\theta$ intersects $C_{s_{i_0}}$. Moreover, according to Figure 2.22, for any $\theta \in [\gamma_i, \gamma_i + \frac{\pi}{2}]$ and for any $u \in [2\gamma_i - \theta, \theta + \pi]$, the point (u, θ) belongs to $(\mathcal{H}_{D_i} \cap \Pi_\theta) \cap C_{s_{i_0}}$ and so belongs to $\mathcal{H}_{D_i} \cap C_{s_{i_0}}$. It follows that the boundary of \mathcal{Z}_{D_i} is supported by the lines $\theta = u - \pi$ and $\theta = -u + 2\gamma_i$ when $\theta \in [\gamma_i, \gamma_i + \frac{\pi}{2}]$.

\mathcal{Z}_{D_i} is symmetrical with respect to the line $\theta = \gamma_i$ (see the proof of Proposition 2.26). Moreover, γ_i is defined modulo π , which gives the characterization of \mathcal{Z}_{D_i} .

For any $\theta \in S^1$, the point of $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ corresponding to the parameter $\theta + \pi/2$ belongs to the half-disk $HD(s_{i_0}, \theta)$ (see Figure 2.22). Moreover, the point of $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ corresponding to the parameter $(\theta + \pi/2, \theta)$ belongs to the relative interior of \mathcal{H}_{D_i} . Therefore, the line $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ belongs to the relative interior of \mathcal{Z}_{D_i} (see Figure 2.21). \square

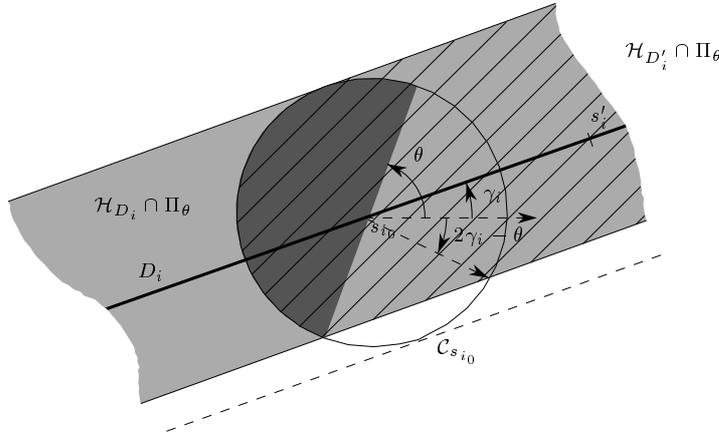


FIG. 2.22 – For the computation of \mathcal{Z}_{D_i} and $\mathcal{Z}_{D'_i}$ when $s_{i_0} \in D_i$.

We now study \mathcal{Z}_{e_i} . Let s_i and s'_i be the two endpoints of e_i and let D_i denote the line supporting e_i . The following proposition states that the boundary of \mathcal{Z}_{e_i} is made of pieces of the boundaries of \mathcal{Z}_{s_i} , $\mathcal{Z}_{s'_i}$ and \mathcal{Z}_{D_i} . We recall that $\rho_{D_i}^\pm$, $\rho_{s_i}^\pm$ and $\rho_{s'_i}^\pm$ denote the upper and the lower edges of \mathcal{Z}_{D_i} , \mathcal{Z}_{s_i} and $\mathcal{Z}_{s'_i}$, respectively.

Proposition 2.30 *For any $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ can be split into a few vertical strips such that the region \mathcal{Z}_{e_i} is bounded from above and from below by an arc of $\rho_{D_i}^\pm$, $\rho_{s_i}^\pm$ or $\rho_{s'_i}^\pm$. Moreover, on each strip, the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ or $\theta = u - \frac{\pi}{2}$ properly intersects \mathcal{Z}_{e_i} but neither its upper edge nor its lower edge.*

Proof: Let D'_i be the half straight line starting at s_i and passing through s'_i . Let $\mathcal{H}_{D'_i}$ be the helicoidal volume induced by D'_i :

$$\mathcal{H}_{D'_i} = \{(P, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 / P \in HD(s, \theta), s \in D'_i\}$$

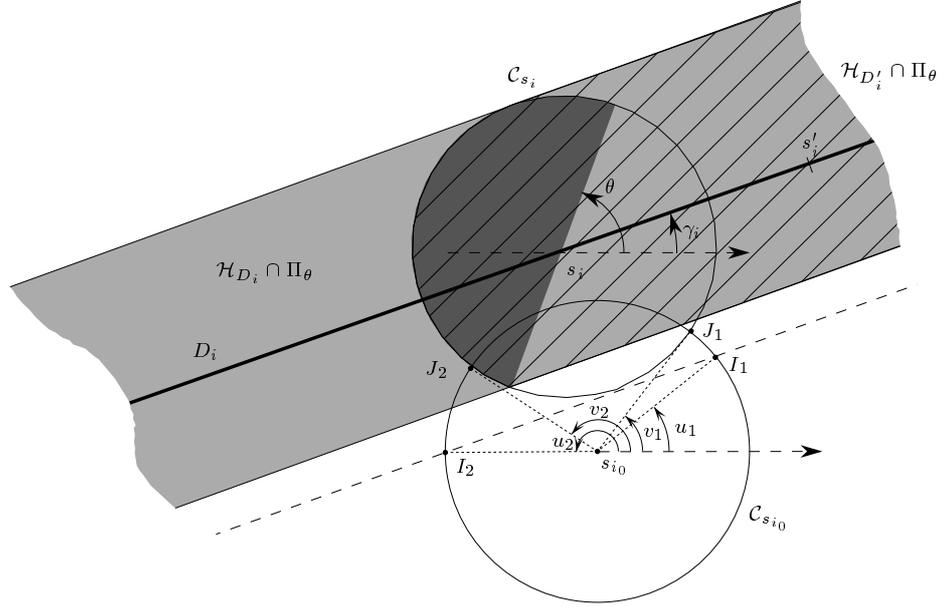


FIG. 2.23 - $\forall \theta \in [\gamma_i, \gamma_i + \pi]$, $\mathcal{H}_{D'_i} \cap \Pi_\theta$ coincides with $\mathcal{H}_{D_i} \cap \Pi_\theta$ on C_{s_i} .

and let $\mathcal{Z}_{D'_i}$ be intersection between $\mathcal{H}_{D'_i}$ and $C_{s_{i_0}}$. We show how to deduce $\mathcal{Z}_{D'_i}$ from \mathcal{Z}_{D_i} and \mathcal{Z}_{s_i} . Then, we prove the proposition for $\mathcal{Z}_{D'_i}$ instead of \mathcal{Z}_{e_i} . That will yield the result because \mathcal{Z}_{e_i} can be deduced from $\mathcal{Z}_{D'_i}$ and s'_i in the same way we deduce $\mathcal{Z}_{D'_i}$ from \mathcal{Z}_{D_i} and \mathcal{Z}_{s_i} . If $\mathcal{Z}_{s_i} = \emptyset$, then $\mathcal{Z}_{D'_i} = \mathcal{Z}_{D_i}$ and Propositions 2.27, 2.28 and 2.29 yield the result. We suppose in the sequel that $\mathcal{Z}_{s_i} \neq \emptyset$. Furthermore, we assume that $s_i \neq s_{i_0}$; we treat this simple case at the end.

We set a few notations. Until now, γ_i denoted the angle (defined modulo π) between the x -axis and D_i . We consider here that $\gamma_i = \angle(\vec{x}, \overrightarrow{s_i s'_i}) [2\pi]$. Let u_1, u_2, v_1 and v_2 be the parameters of the points I_1, I_2, J_1, J_2 defined on the circle $C_{s_{i_0}}$ as follow (see Figure 2.23): I_1 and I_2 are the two points at distance R from D_i ; J_1 and J_2 are the two points of intersection between $C_{s_{i_0}}$ and C_{s_i} ; I_1, J_1, J_2 and I_2 are consecutive on $C_{s_{i_0}}$. The region \mathcal{Z}_{s_i} is defined for $u \in [v_1, v_2]$. If $s_{i_0} \notin D_i$, \mathcal{Z}_{D_i} is defined for $u \in [u_1, u_2]$ and otherwise, \mathcal{Z}_{D_i} is defined for $u \in S^1$. Notice that $[v_1, v_2]$ is included in $[u_1, u_2]$.

We show now that $\mathcal{Z}_{D'_i}$ coincides with \mathcal{Z}_{D_i} or \mathcal{Z}_{s_i} on some regions of $S^1 \times S^1$:

- For $\theta \in [\gamma_i, \gamma_i + \pi]$, $\mathcal{H}_{D'_i} \cap \Pi_\theta$ coincides with $\mathcal{H}_{D_i} \cap \Pi_\theta$ on C_{s_i} (see

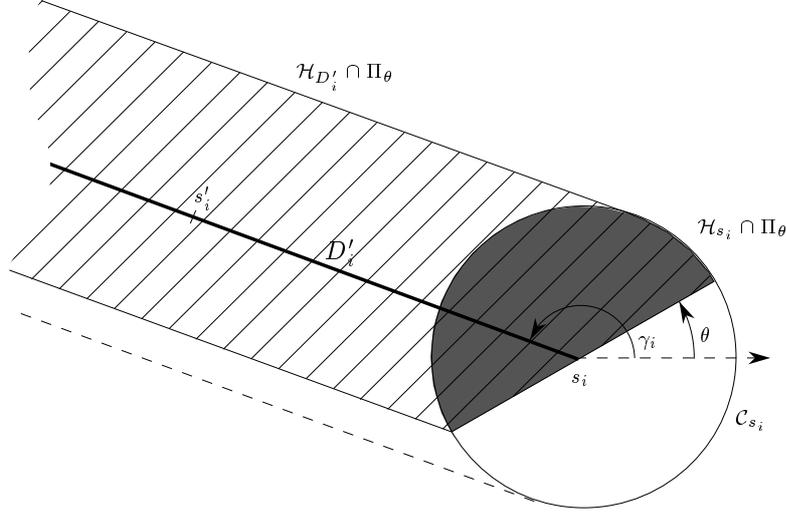


FIG. 2.24 – $\forall \theta \in [\gamma_i - \pi, \gamma_i]$, $\mathcal{H}_{D'_i} \cap \Pi_\theta$ coincides with $\mathcal{H}_{s_i} \cap \Pi_\theta$ on \mathcal{C}_{s_i} .

Figure 2.23). Therefore, $\mathcal{Z}_{D'_i}$ coincides with \mathcal{Z}_{D_i} for $(u, \theta) \in [v_1, v_2] \times [\gamma_i, \gamma_i + \pi]$ (see Figure 2.25).

- For $\theta \in [\gamma_i - \pi, \gamma_i]$, $\mathcal{H}_{D'_i} \cap \Pi_\theta$ coincides with $\mathcal{H}_{s_i} \cap \Pi_\theta$ on \mathcal{C}_{s_i} (see Figure 2.24). Therefore, $\mathcal{Z}_{D'_i}$ coincides with \mathcal{Z}_{s_i} for $(u, \theta) \in [v_1, v_2] \times [\gamma_i - \pi, \gamma_i]$ (see Figure 2.25).
- If $s_{i_0} \notin D_i$, then, in $[u_k, v_k] \times S^1$ ($k \in \{1, 2\}$), $\mathcal{Z}_{D'_i}$ coincides either with \mathcal{Z}_{D_i} or with the empty set, depending of the relative positions of D'_i and s_i . Precisely, $\mathcal{Z}_{D'_i}$ coincides with \mathcal{Z}_{D_i} in $[u_k, v_k] \times S^1$ if and only if I_k is at distance R from D'_i (see Figure 2.23).
- Similarly, if $s_{i_0} \in D_i$, then, in $S^1 \setminus [v_1, v_2] \times S^1$, $\mathcal{Z}_{D'_i}$ coincides with \mathcal{Z}_{D_i} if $s_{i_0} \in D'_i$ and coincides with the empty set otherwise.

It follows that the computation of \mathcal{Z}_{s_i} and \mathcal{Z}_{D_i} provides in constant time $\mathcal{Z}_{D'_i}$. Furthermore, Propositions 2.27, 2.28 and 2.29 yield the result for the vertical strips $[u_1, v_1] \times S^1$ and $[v_2, u_2] \times S^1$ if $s_{i_0} \notin D_i$ (see Figure 2.25), and for $S^1 \setminus [v_1, v_2] \times S^1$ otherwise.

It remains to show the result for $[v_1, v_2] \times S^1$. We claim that the boundary of $\mathcal{Z}_{D'_i}$ is composed of pieces of the boundaries of \mathcal{Z}_{D_i} and \mathcal{Z}_{s_i} . Indeed, the considerations above yield that, for $(u, \theta) \in [v_1, v_2] \times \{\gamma_i, \gamma_i + \pi\}$, $\mathcal{Z}_{D'_i}$ coincides with \mathcal{Z}_{D_i} and also with \mathcal{Z}_{s_i} . Thus, for $(u, \theta) \in [v_1, v_2] \times \{\gamma_i, \gamma_i + \pi\}$, \mathcal{Z}_{D_i}

and \mathcal{Z}_{s_i} coincide (see Figure 2.25). Therefore, the lines $\theta = \gamma_i$ and $\theta = \gamma_i + \pi$ do not support any piece of the boundary of $\mathcal{Z}_{D'_i}$. The claim follows. If the distance between s_{i_0} and s_i is smaller than $\sqrt{2}R$, then we subdivide $[v_1, v_2] \times S^1$ into two or three vertical strips according to the subdivision of $\rho_{s_i}^\pm$ we have considered in Proposition 2.15. Let $U_k \times S^1$ be one of these strips. We recall that $\mathcal{Z}_{s_i}^k$ denotes the part of \mathcal{Z}_{s_i} included in $U_k \times S^1$ and that $\rho_{s_i}^{k+}$ and $\rho_{s_i}^{k-}$ denote its upper and lower edges ($k = 1, 2$ or 3). For convenience, if $\|s_{i_0} s_i\| \geq \sqrt{2}R$, we set $U_k = [v_1, v_2]$, $\mathcal{Z}_{s_i}^k = \mathcal{Z}_{s_i}$ and $\rho_{s_i}^{k\pm} = \rho_{s_i}^\pm$. We know by Propositions 2.14 or 2.16 that the portion of the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ (or $\theta = u - \frac{\pi}{2}$) included in $U_k \times S^1$ belongs to $\mathcal{Z}_{s_i}^k$. Thus, this portion of line belongs to $\mathcal{Z}_{D'_i}$ because $\mathcal{Z}_{s_i}^k \subset \mathcal{Z}_{s_i} \subset \mathcal{Z}_{D'_i}$. That means that, in the strip $U_k \times S^1$, the line $\theta = u + \frac{\pi}{2}$ (or $\theta = u - \frac{\pi}{2}$) properly intersects $\mathcal{Z}_{D'_i}$ but neither its upper edge nor its lower edge (see Figure 2.25).

We consider now the case where $s_i = s_{i_0}$. Then, according to Figure 2.22, $\mathcal{Z}_{D'_i}$ clearly coincides with \mathcal{Z}_{D_i} for $(u, \theta) \in [\gamma_i - \frac{\pi}{2}, \gamma_i + \frac{\pi}{2}] \times S^1$ and coincides with $\mathcal{Z}_{s_{i_0}}$ for $(u, \theta) \in [\gamma_i + \frac{\pi}{2}, \gamma_i + \frac{3\pi}{2}] \times S^1$. Thus, Propositions 2.10 and 2.29 yield the result.

Similarly, \mathcal{Z}_{e_i} can be deduced from $\mathcal{Z}_{D'_i}$ and $\mathcal{Z}_{s'_i}$, which yields the result. \square

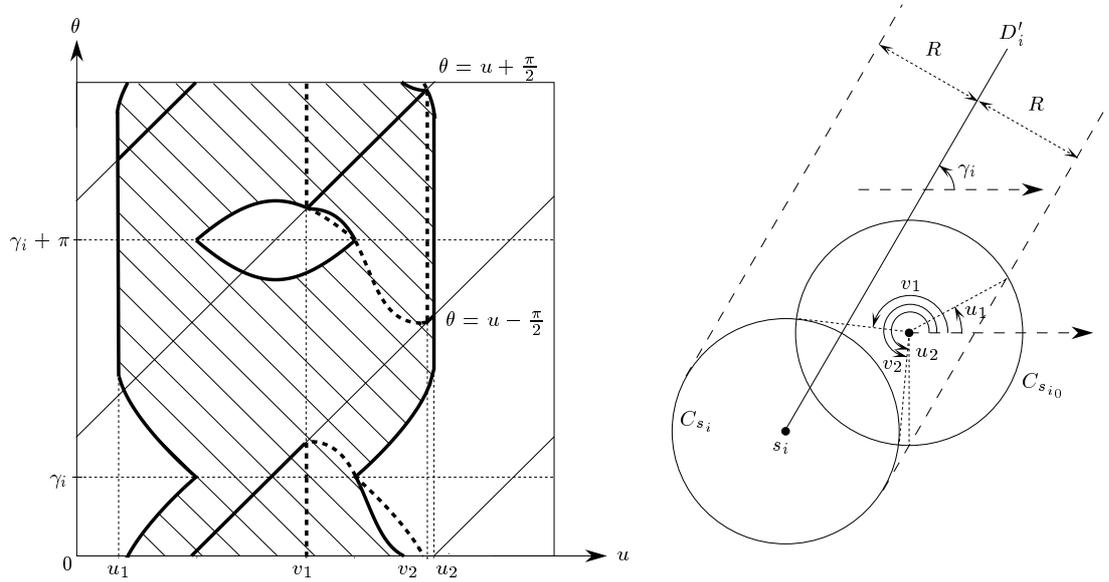


FIG. 2.25 – $\mathcal{Z}_{D'_i}$ and the relative positions of $C_{s_{i_0}}$, D_i and s_i that correspond ($\|s_{i_0} s_i\| = \sqrt{2}R$).

Lemma 2.31 *Let (u_I, θ_I) be a point of $\rho_{D_i}^-$ (resp. $\rho_{D_i}^+$) and I be the point of the circle $C_{s_{i_0}}$ with parameter u_I . The point A_I (resp. B_I) at distance R from I in the direction θ_I (resp. $\theta_I + \pi$) belongs to D_i (see Figure 2.26).*

Proof: If D_i is the line of slope θ_I passing through I the result is obvious. We assume now that D_i is not the line of slope θ_I passing through I .

If $(u_I, \theta_I) \in \rho_{D_i}^-$, then $\exists s \in D_i$ such that $(u_I, \theta_I) \in \rho_s^-$. That means that I belongs to the radius $r_s(\theta_I + \pi)$ of $HD(s, \theta_I)$ because $\rho_s^- = \mathcal{R}_s^- \cap C_{s_{i_0}}$ (see the proof of Proposition 2.11). Hence, s belongs to the straight line segment $[IA_I]$. If $s \neq A_I$ the half-disk robot $HD(I, \theta_I + \pi)$ properly intersects the straight line D_i and so (u_I, θ_I) belongs to the interior of \mathcal{Z}_{D_i} . Hence, $s = A_I$ and so, A_I belongs to D_i .

If (u_I, θ_I) is a point of $\rho_{D_i}^+$, the same arguments show that B_I belongs to D_i . \square

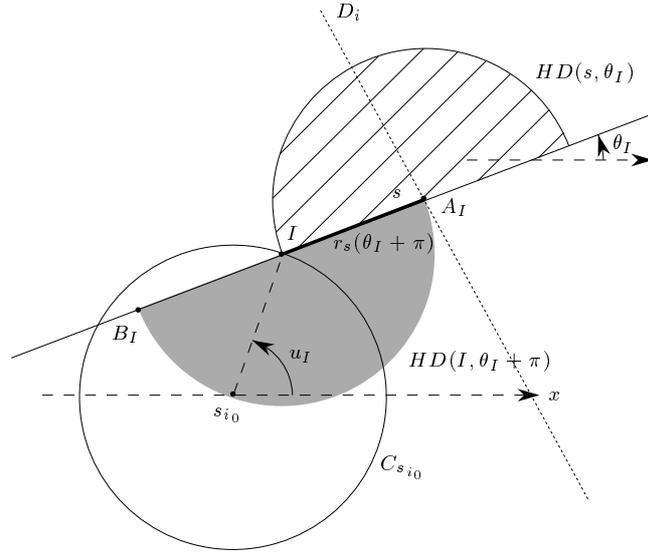


FIG. 2.26 – A_I belongs to D_i .

Proposition 2.32 *Two curves $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_j}^+$ (or, $\rho_{D_i}^-$ and $\rho_{D_j}^-$) intersect at most twice.*

Proof: According to Lemma 2.31, a point on $\rho_{D_i}^+$ (resp. $\rho_{D_i}^-$) corresponds to a point on D_i . Furthermore, at most two points on $\rho_{D_i}^+$ (resp. $\rho_{D_i}^-$) correspond to the same point $A_I \in D_i$ (the two points of intersection between $C_{s_{i_0}}$ and the circle of radius R centered at A_I). Thus, three points on $\rho_{D_i}^+$ (resp. $\rho_{D_i}^-$)

define D_i . Therefore, if there exists three points of intersection between $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_j}^+$ (resp. $\rho_{D_i}^-$ and $\rho_{D_j}^-$), then $D_i = D_j$. \square

Proposition 2.33 *Two curves $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_j}^-$ intersect at most four times.*

Proof: Let (u_I, θ_I) be a point of intersection between $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_j}^-$, and I be the point of the circle $C_{s_{i_0}}$ with parameter u_I . Lemma 2.31 yields that I is the midpoint of a straight line segment of length $2R$ having one end point on D_i and the other on D_j . The curve drawn by the midpoint of a ladder keeping one endpoint on D_i and the other on D_j is an ellipse. On the other hand, I belongs to the circle $C_{s_{i_0}}$. An ellipse and a circle intersect at most four times, thus there is at most four different locations for I . Moreover, (u_I, θ_I) is entirely defined by I because u_I is the parameter of I on $C_{s_{i_0}}$ and I define the position (and orientation) of the ladder and so specify θ_I (see Lemma 2.31). Thus, the curves $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{D_j}^-$ intersect at most four times. \square

Proposition 2.34 *Two curves $\rho_{D_i}^\pm$ and $\rho_{s_j}^\pm$ intersect at most six times.*

Proof: Let (u_I, θ_I) be a point of intersection between $\rho_{D_i}^-$ and $\rho_{s_j}^\pm$, and I be the point of the circle $C_{s_{i_0}}$ with parameter u_I . Consider the curve that is the set of points at distance R from I on the line (Is_j) , when I describe the circle $C_{s_{i_0}}$. This curve is a circular conchoid (see Appendix C).

According to the proof of Proposition 2.12, s_j belongs to the line of slope θ_I passing through I . Thus, the point A_I at distance R from I in the direction θ_I belongs to the circular conchoid defined above. Besides, A_I belongs to D_i (see Lemma 2.31). Thus, A_I is a point of intersection between D_i and the circular conchoid defined above. There is at most six points of intersection between a straight line and a circular conchoid (see Appendix C), and A_I define entirely (u_I, θ_I) . Therefore, the curves $\rho_{D_i}^-$ and $\rho_{s_j}^\pm$ intersect at most six times. Similarly, two curves $\rho_{D_i}^+$ and $\rho_{s_j}^\pm$ intersect at most six times. \square

2.7.2 Properties of the regions $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$

If s_{i_0} does not belong to the line segment e_i , $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ is clearly equal to $\text{int}(\mathcal{Z}_{e_i})$.

If s_{i_0} belongs to e_i but is not one of its endpoints, then, according to Figure 2.22, $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ coincides with $\text{int}(\mathcal{Z}_{e_i})$ for $(u, \theta) \in S^1 \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \times S^1$ and coincides with the empty set for $(u, \theta) \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \times S^1$.

We now consider the case where s_{i_0} is an endpoint of e_i . Let s'_{i_0} be the other endpoint of e_i and $\gamma_{i_0} = \angle(\vec{x}, \overrightarrow{s_{i_0}s'_{i_0}})$. According to Figure 2.24,

$\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ clearly coincides with $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}) = \text{int}(\mathcal{Z}_{e_i})$ for $(u, \theta) \in (\gamma_{i_0} - \frac{\pi}{2}, \gamma_{i_0} + \frac{\pi}{2}) \times S^1$ and $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ coincides with the empty set for $(u, \theta) \in [\gamma_{i_0} + \frac{\pi}{2}, \gamma_{i_0} + \frac{3\pi}{2}] \times S^1$.

Therefore, $\cup_i \text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ is equal to $\cup_{i \neq i_0} \text{int}(\mathcal{Z}_{e_i}) \cup \text{int}(\mathcal{Z}_{e_{i_0}} \cap ([\gamma_{i_0} - \frac{\pi}{2}, \gamma_{i_0} + \frac{\pi}{2}] \times S^1))$. Hence, the computation of $\cup_i \text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ comes from the computation of $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Z}_{e_i}$ and of $\mathcal{Z}_{e_{i_0}}$.

2.7.3 Construction of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$

Let $\lambda_k(n)$ denote the maximum length of the Davenport-Schinzel sequence of order k on n symbols and $\alpha_k(n) = \lambda_k(n)/n$.

Sections 2.7.1 and 2.7.2 allow us to compute the contribution of the circle $\mathcal{C}_{s_{i_0}}$ to $\delta(\mathcal{F}_e)$ in the same way we proceeded in Section 2.4.3.

The k_{i_0} helicoidal volumes \mathcal{H}_{e_i} that intersect $\mathcal{C}_{e_{i_0}}$ can be found in $O(k_{i_0})$ time once the arrangement \mathcal{A}_e of the C_{e_i} have been computed in $O(|\mathcal{A}_e| \log n)$. Thanks to Propositions 2.30, 2.32, 2.33 and 2.34, during the computation of the union of the regions \mathcal{Z}_{e_i} , any two curves involved in the upper and lower envelopes of the curves ρ_i^+ and ρ_i^- , intersect at most six time. Thus, the computation can be done in $O(\lambda_7(k_{i_0}) \log k_{i_0})$ time and $O(\lambda_8(k_{i_0}))$ space [Her89]. Thanks to Section 2.7.2, the computation of $\cup_i \text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{C}_{s_{i_0}}$ can be done within the same time and space bounds.

Since \mathcal{A}_e is the arrangement of the C_{e_i} for $i \in \{1, \dots, n\}$, and \mathcal{A} is the set of circles of radius R centered at the endpoints of each straight line segment e_i , the generalization of Section 2.4.3 yields the following theorem:

Theorem 2.35 *We can compute $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}$ and the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to the arcs of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{A}$ in $O(|\mathcal{A}_e| \alpha_7(n) \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e| \alpha_8(n))$ space.*

2.7.4 Contribution of the straight line segments of \mathcal{C}_{e_i} to $\delta(\mathcal{F}_e)$

We now compute the contribution of the straight line segments of $\mathcal{C}_{e_{i_0}}$ to $\delta(\mathcal{F}_e)$, for some $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. We recall some notations: l_{i_0} denotes one of the two straight line segments of $\mathcal{C}_{e_{i_0}}$, L_{i_0} its supporting line, $\mathcal{L}_{i_0} = L_{i_0} \times S^1$ and $\mathcal{Y}_{e_i} = \mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{L}_{i_0}$; D_i denotes the line supporting e_i , $\mathcal{Y}_{D_i} = \mathcal{H}_{D_i} \cap \mathcal{L}_{i_0}$ and γ_i is the angle between the (oriented) x -axis and D_i . Notice that γ_{i_0} is also the angle between the x -axis and L_{i_0} . \mathcal{L}_{i_0} is a cylinder but for convenience we will use the vocabulary of the plane when describing objects on it.

As usual, we compute $\delta(\mathcal{F}_e) \cap L_{i_0}$ by computing $\cup_i (\mathcal{H}_{e_i} \cap \mathcal{L}_{i_0})$ and $\cup_i (\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{L}_{i_0})$. As in Section 2.4.1, we can express $\cup_i (\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{L}_{i_0})$ in

term of \mathcal{Y}_{e_i} : clearly, $\text{int}(\mathcal{H}_{e_{i_0}}) \cap \mathcal{L}_{i_0} = \emptyset$; if D_i and L_{i_0} are two parallel lines at distance R , then $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{L}_{i_0} = \emptyset$; otherwise, $\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{L}_{i_0} = \text{int}(\mathcal{Y}_{e_i})$, for $i \neq i_0$. For the sake of simplicity, we assume in the following that L_{i_0} and D_i for $i \neq i_0$ are not two parallel lines. Then, $\cup_i (\text{int}(\mathcal{H}_{e_i}) \cap \mathcal{L}_{i_0}) = \text{int}(\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Y}_{e_i})$. It follows that the contribution of L_{i_0} to $\delta(\mathcal{F}_e)$ comes from the computation of $\cup_i \mathcal{Y}_{e_i}$ and $\cup_{i \neq i_0} \mathcal{Y}_{e_i}$.

We study first $\mathcal{Y}_s = \mathcal{H}_s \cap \mathcal{L}_{i_0}$ for $s \in \mathbb{R}^2$, after which we examine $\mathcal{Y}_{D_i} = \mathcal{H}_{D_i} \cap \mathcal{L}_{i_0}$. Then, we deduce \mathcal{Y}_{e_i} from \mathcal{Y}_{D_i} , \mathcal{Y}_{s_i} and $\mathcal{Y}_{s'_i}$ where s_i and s'_i are the endpoints of e_i . We assume, for the sake of clarity, that the regions \mathcal{Y}_s , \mathcal{Y}_{D_i} and \mathcal{Y}_{e_i} under consideration are not reduced to the empty set. Notice in the sequel the typographical difference between ϱ_s^\pm (resp. $\varrho_{D_i}^\pm$) that are edges of \mathcal{Y}_s (resp. \mathcal{Y}_{D_i}) and ρ_s^\pm (resp. $\rho_{D_i}^\pm$) that are edges of \mathcal{Z}_s (resp. \mathcal{Z}_{D_i}).

Proposition 2.36 *The region \mathcal{Y}_s is a connected region bounded by two vertical line segments of length π , and two curved edges ϱ_s^+ and ϱ_s^- which are translated copies of one another. Specifically $\varrho_s^+ = \varrho_s^- + (0, 0, \pi)$.*

Proof: The proof of Proposition 2.11 can easily be extended here (see Figure 2.27). Notice that when $s \in L_{i_0}$, the extension of the proof of Proposition 2.11 still holds but the curves ϱ_s^+ and ϱ_s^- are not continuous (see Figure 2.28). \square

Proposition 2.37 *For any $s \notin L_{i_0}$, the line $\theta = \gamma_{i_0}$ or $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ properly intersects \mathcal{Y}_s . Furthermore, the lines $\theta = \gamma_{i_0}$ and $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ intersect neither ϱ_s^+ nor ϱ_s^- .*

Proof: Since $s \notin L_{i_0}$, the half-disk $HD(s, \gamma_{i_0})$ or $HD(s, \gamma_{i_0} + \pi)$ properly intersects the line L_{i_0} (if the distance between s and L_{i_0} is exactly R , then neither $HD(s, \gamma_{i_0})$ nor $HD(s, \gamma_{i_0} + \pi)$ properly intersects L_{i_0} but this case is irrelevant because then \mathcal{Y}_s is reduced to a vertical segment of length π). The first claim of the proposition follows.

The edges ϱ_s^\pm are the intersection between \mathcal{L}_{i_0} and the portions \mathcal{R}_s^\pm of the boundary of \mathcal{H}_s . Thus, the line $\theta = \gamma_{i_0}$ or $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ intersects ϱ_s^+ or ϱ_s^- if and only if the diameter of half-disk $HD(s, \gamma_{i_0})$ or $HD(s, \gamma_{i_0} + \pi)$ intersects the line L_{i_0} . As the slope of L_{i_0} is γ_{i_0} and $s \notin L_{i_0}$, the lines $\theta = \gamma_{i_0}$ and $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ intersect neither ϱ_s^+ nor ϱ_s^- . \square

Now, we study the regions \mathcal{Y}_{D_i} . First, we state the following proposition which is obvious:

Proposition 2.38 *The region $\mathcal{Y}_{D_{i_0}}$ is equal either to $L_{i_0} \times [\gamma_{i_0} - \frac{\pi}{2}, \gamma_{i_0} + \frac{\pi}{2}]$ or to $L_{i_0} \times [\gamma_{i_0} + \frac{\pi}{2}, \gamma_{i_0} + \frac{3\pi}{2}]$.*

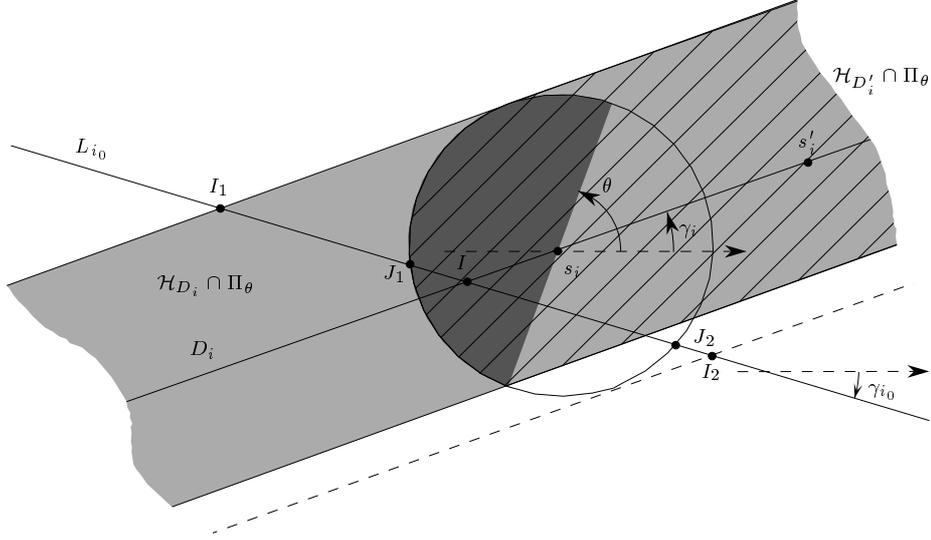


FIG. 2.27 – Section of \mathcal{H}_{s_i} , $\mathcal{H}_{D'_i}$ and \mathcal{H}_{D_i} by the "plane" Π_θ .

Proposition 2.39 For $i \neq i_0$, \mathcal{Y}_{D_i} is a connected region bounded by two vertical line segments of length π , and two curved edges $\varrho_{D_i}^+$ and $\varrho_{D_i}^-$ which are symmetrical with respect to the lines $\theta = \gamma_i$ and $\theta = \gamma_i + \pi$.

Proof: The proof of Proposition 2.26 can easily be extended here (see Figure 2.27). \square

Proposition 2.40 The two curves $\varrho_{D_i}^\pm$ can be subdivided into four sub-curves denoted $\varrho_{D_i}^{k\pm}$ ($k \in \{1, 2\}$) such that $\varrho_{D_i}^{k+}$ and $\varrho_{D_i}^{k-}$ are symmetrical with respect to the lines $\theta = \gamma_i$ and $\theta = \gamma_i + \pi$, and such that the line $\theta = \gamma_{i_0}$ (resp. $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$) properly intersects the region bounded from above by $\varrho_{D_i}^{1+}$ (resp. $\varrho_{D_i}^{2+}$) and from below by $\varrho_{D_i}^{1-}$ (resp. $\varrho_{D_i}^{2-}$) but does not properly intersect these two curves.

Proof: If $i = i_0$, the line $\theta = \gamma_{i_0}$ or $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ is strictly included in \mathcal{Y}_{D_i} (see Proposition 2.38), which yields the result.

If $i \neq i_0$, then D_i and L_{i_0} intersect by hypothesis. Let I be the point where they intersect and let I_1 and I_2 be the two points of L_{i_0} at distance R from D_i (see Figure 2.27). The points I_1 and I_2 play symmetrical roles and similarly, γ_{i_0} is only defined modulo π in S^1 . According to the choice of I_1 , I_2 and γ_{i_0} in Figure 2.27, it comes that, in $\mathbb{R}^2 \times S^1$, $[II_1] \times \{\gamma_{i_0}\} \in \mathcal{H}_{D_i}$ and

$[II_2] \times \{\gamma_{i_0} + \pi\} \in \mathcal{H}_{D_i}$. Thus, $[II_1] \times \{\gamma_{i_0}\} \in \mathcal{Y}_{D_i}$ and $[II_2] \times \{\gamma_{i_0} + \pi\} \in \mathcal{Y}_{D_i}$ because the line segments $[II_1]$ and $[II_2]$ belong to L_{i_0} . On the other hand, as \mathcal{Y}_{D_i} is included in $[I_1I_2] \times S^1$, we can subdivide the curves $\varrho_{D_i}^\pm$ into $\varrho_{D_i}^{1\pm}$ defined in $[II_1] \times S^1$ and $\varrho_{D_i}^{2\pm}$ defined in $[II_2] \times S^1$. According to Proposition 2.40, the result follows. \square

Let s_i and s'_i be the endpoints of the straight line segment e_i supported by D_i .

Proposition 2.41 *For any $i \in \{1, \dots, n\}$, \mathcal{L}_{i_0} can be split into a few vertical strips such that the region \mathcal{Y}_{e_i} is bounded from above and from below by an arc of $\varrho_{D_i}^\pm$, $\varrho_{s_i}^\pm$ or $\varrho_{s'_i}^\pm$. Moreover, on each strip, the line $\theta = \gamma_{i_0}$ or $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ is included in \mathcal{Y}_{e_i} .*

Proof: If neither s_i nor s'_i belongs to L_{i_0} then a straightforward extension of the proof of Proposition 2.30 can be applied here, according to Propositions 2.37, 2.38 and 2.40 (see Figure 2.27). Otherwise, if $s_i \in L_{i_0}$ for example, we need to notice that, on the strip $U_k \times S^1$ we deal with in the proof of Proposition 2.30 (here U_k is equal either to $[IJ_1]$ or to $[IJ_2]$), the lines $\theta = \gamma_{i_0}$ and $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ belongs to \mathcal{Y}_{s_i} ; precisely these lines are equal to $\varrho_{s_i}^+$ and $\varrho_{s_i}^-$ on these strips (see Figure 2.28). Then, the straightforward extension of the proof of Proposition 2.30 holds here. \square

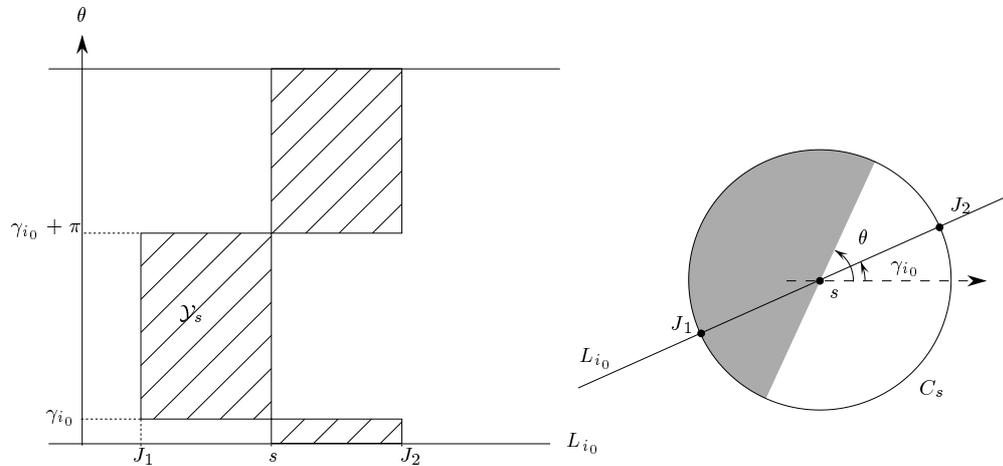


FIG. 2.28 – \mathcal{Y}_s and the relative positions of C_s and L_{i_0} that correspond ($s \in L_{i_0}$).

Proposition 2.42 *If s_i and s_j are two points that are not both on L_{i_0} , then, the curves $\varrho_{s_i}^\pm$ and $\varrho_{s_j}^\pm$ intersect at most once. Otherwise, $\varrho_{s_i}^\pm$ and $\varrho_{s_j}^\pm$ may have at most two common connected part.*

Proof: Assume first that $s_i \notin L_{i_0}$. Then, the curves $\varrho_{s_i}^\pm$ are defined onto θ -intervals smaller than π . Indeed, $\varrho_{s_i}^+$ (resp. $\varrho_{s_i}^-$) is the intersection between $\mathcal{R}_{s_i}^+$ (resp. $\mathcal{R}_{s_i}^-$) and \mathcal{L}_{i_0} , and the radius $r_i(\theta)$ (resp. $r_i(\theta + \pi)$) intersects the line L_{i_0} on a θ -interval smaller than π because $s_i \notin L_{i_0}$. Now, the proof of Proposition 2.12 can easily be extended here.

If s_i and s_j are both on L_{i_0} , then, according to Figure 2.28 the result is obvious. \square

Lemma 2.43 *Let $(I, \theta_I) \in L_{i_0} \times S^1$ be a point of $\varrho_{D_i}^-$ (resp. $\varrho_{D_i}^+$). The point A_I (resp. B_I) at distance R from I in the direction θ_I (resp. $\theta_I + \pi$) belongs to D_i .*

Proof: The proof is the same as the proof of Lemma 2.31. \square

Proposition 2.44 *Two curves $\varrho_{D_i}^\pm$ and $\varrho_{D_j}^\pm$ intersect at most twice.*

Proof: Two curves $\varrho_{D_i}^+$ and $\varrho_{D_j}^+$ (or, $\varrho_{D_i}^-$ and $\varrho_{D_j}^-$) intersect at most twice because the proof of Proposition 2.32 can be applied here. Since a straight line intersects an ellipse at most twice, the proof of Proposition 2.33 yields the result. \square

Proposition 2.45 *Two curves $\varrho_{D_i}^\pm$ and $\varrho_{s_j}^\pm$ intersect at most four times.*

Proof: The proof is similar to the proof of Proposition 2.34. Here, the maximum number of intersection between $\varrho_{D_i}^\pm$ and $\varrho_{s_j}^\pm$ is the maximum number of intersection between a straight line and a conchoid which is four (see Appendix B). \square

The computation of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap L_{i_0}$ can be done in the same way as in Section 2.4.3. Here, the two sets Ω_1 and Ω_2 introduced in Section 2.4.3 are induced by the lines $\theta = \gamma_{i_0}$ and $\theta = \gamma_{i_0} + \pi$ instead of $\theta = u \pm \pi/2$.

According to Section 2.7.3 and to Propositions 2.42, 2.44 and 2.45, the contribution of L_{i_0} to $\delta(\mathcal{F}_e)$ can be computed in $O(\lambda_5(k_{i_0}) \log(k_{i_0}))$ time and $O(\lambda_6(k_{i_0}))$ space. Therefore, if \mathcal{B} denotes the arrangement of straight line segments of \mathcal{A}_e , it comes the following theorem:

Theorem 2.46 *We can compute $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{B}$ and the labels of the edges of $\delta(\mathcal{F}_e)$ incident to the arcs of $\delta(\mathcal{F}_e) \cap \mathcal{B}$ in $O(|\mathcal{A}_e| \alpha_5(n) \log n)$ time and $O(|\mathcal{A}_e| \alpha_6(n))$ space.*

2.8 Appendix B: Conchoids

A conchoid is the curve drawn by the endpoint P of a straight line segment $[PQ]$ of length L when Q moves along a fixed straight line D and when the line PQ contains a fixed point O (see Figure 2.29).

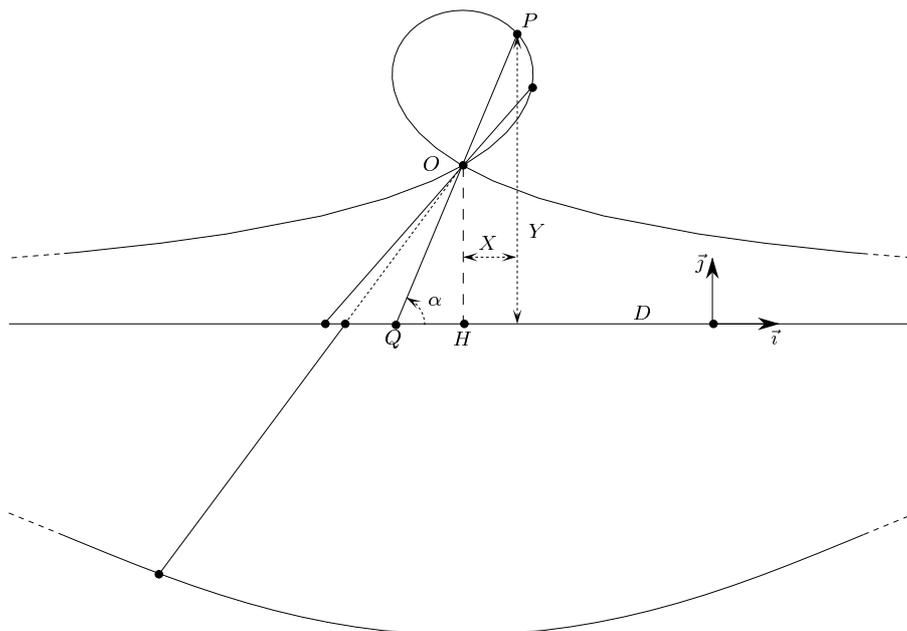


FIG. 2.29 – *Conchoid*.

Let H be the orthogonal projection of O onto D and $h = \|OH\|$. We give a parametric equation of the conchoid in the orthonormal reference frame (H, \vec{i}, \vec{j}) (see Figure 2.29). Let (X, Y) denote the coordinates of P in this reference frame. Let α denote the angle $\angle(\vec{i}, \overrightarrow{QP})$. We have:

$$\begin{cases} X = L \cos(\alpha) - \frac{h}{\tan(\alpha)} \\ Y = L \sin(\alpha) \end{cases}$$

Considering $t = \tan(\alpha/2)$, we obtain:

$$\begin{cases} X = \frac{ht^4 - 2Lt^3 + 2Lt - h}{2t(1+t^2)} \\ Y = \frac{2Lt}{1+t^2} \end{cases}$$

A straight line and a conchoid intersect at most four times because any equation $aX + bY + c = 0$ yields a polynomial of degree at most four in t .

Lemma 2.47 *The line segment $[PQ]$ is tangent to the conchoid at P if and only if $P = O$.*

Proof: The system above yields:

$$\begin{cases} \dot{X} = -L\dot{\alpha} \sin(\alpha) + \frac{h\dot{\alpha}}{\sin^2(\alpha)} \\ \dot{Y} = L\dot{\alpha} \cos(\alpha) \end{cases}$$

The line segment $[PQ]$ is tangent to the conchoid at P if and only if $\frac{\dot{X}}{\dot{Y}} = \cot(\alpha)$. We have:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{X}}{\dot{Y}} - \cot(\alpha) &= -\tan(\alpha) + \frac{h}{L \sin^2(\alpha) \cos(\alpha)} - \cot(\alpha) \\ &= \frac{-1}{\sin(\alpha) \cos(\alpha)} \left(1 - \frac{h}{L \sin(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

As $\sin(\alpha) = \frac{h}{L}$ if and only if $P = O$ (see Figure 2.29), the claim is proved. \square

Lemma 2.48 *Given two straight lines D_1 and D_2 , and a line segment $[P_1P_2]$ of length L such that $P_1 \in D_1$ and $P_2 \in D_2$, there exists at most one point O on $[P_1P_2]$ such that the conchoid \mathcal{K}_1 induced by D_1 , O and L is tangent to D_2 at P_2 . We can decide if such a point O exists and, in case, compute its position, in constant time. Moreover, the conchoid \mathcal{K}_2 induced by D_2 , O and L is tangent to D_1 at P_1 (see Figure 2.30).*

Proof: Consider without loss of generality, D_1 supported by the x -axis; let (X, Y) denote the coordinates, in the frame described above, of the point P_2 on the conchoid induced by D_1 , O and L , and let s denote the slope of D_2 . The conchoid induced by D_1 , O and L that is tangent to D_2 at P_2 must verify that $\dot{Y}/\dot{X} = s$. Thus,

$$\frac{L \cos(\alpha)}{-L \sin(\alpha) + \frac{h}{\sin^2(\alpha)}} = s.$$

It comes h in term of L , α and s . Thus, for D_1 , D_2 , P_1 and P_2 fixed, O comes as the intersection (if existing) of the line segment $[P_1P_2]$ and of the horizontal straight line of equation $(Y = h)$. Therefore, there exists at most

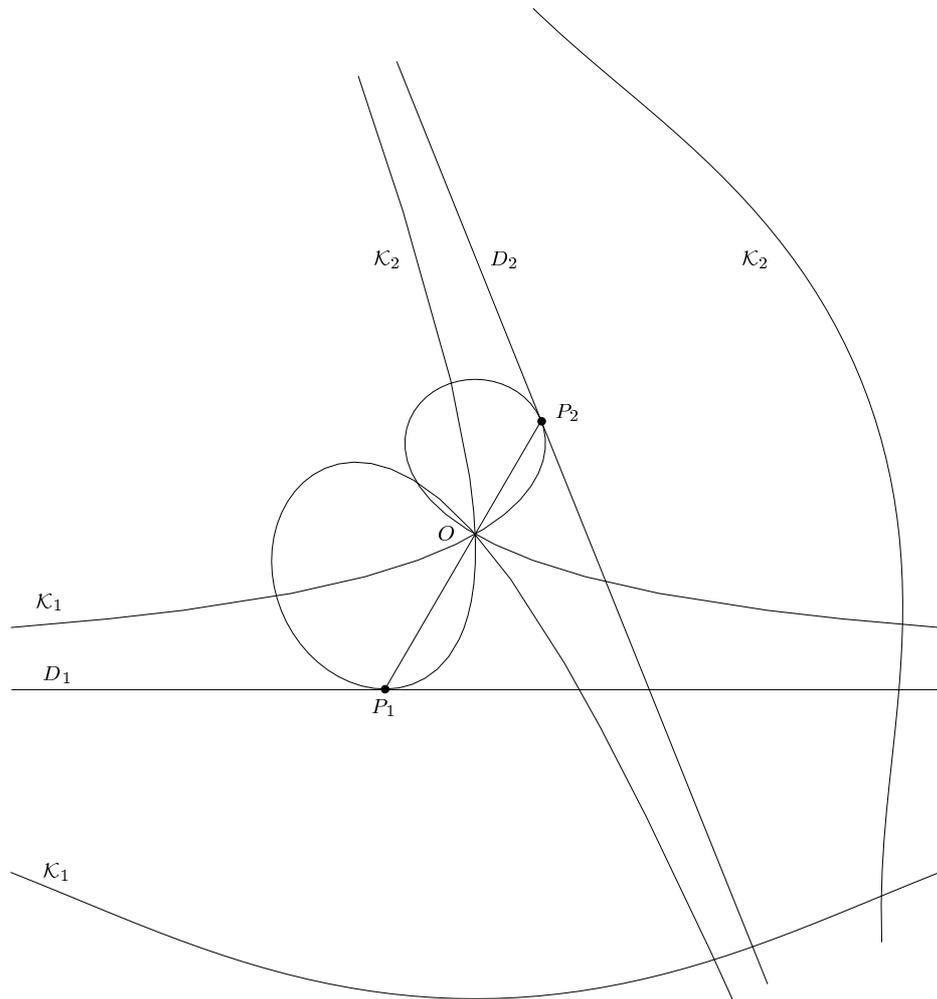


FIG. 2.30 – For the Lemma 2.48.

one such a point O and, we can decide if it exists and, in case, compute its position, in constant time.

We show now, that the conchoid \mathcal{K}_2 induced by D_2 , O and L is tangent to D_1 at P_1 (see Figure 2.30). Indeed, assume for a contradiction that \mathcal{K}_2 is not tangent to D_1 at P_1 . We show that, in any neighborhood of P_1 , there exists a point $P_1^* \in D_1$ such that the line segment $[P_1^*P_2^*]$ of length L , that contains O , intersects D_2 . That will yield the claim. Since $P_1 \in \mathcal{K}_2$, \mathcal{K}_2 properly intersects D_1 at P_1 . Thus, there exists, in any neighborhood of P_1 , a point $P_1^* \in D_1$ such that the line segment, of length L passing through O and touching D_2 , contains P_1^* . Therefore, the line segment, of length L passing through O and

touching D_1 at P_1^* , intersects D_2 . That implies that \mathcal{K}_1 intersects D_2 and contradicts our assumption. \square

2.9 Appendix C : Circular conchoids

A circular conchoid is the curve drawn by the endpoint P of a straight line segment $[PQ]$ of length L when Q moves along a fixed circle C and when the line PQ contains a fixed point O (see Figure 2.31). Let O_1 and R denote the center and the radius of C .

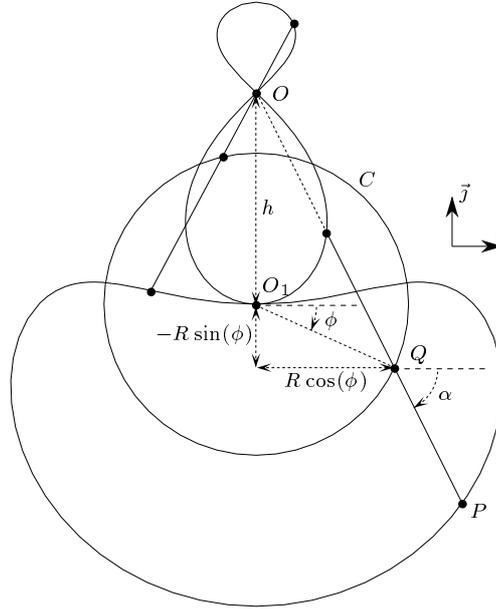


FIG. 2.31 – *Circular conchoid (when $L = R$).*

We give a parametric equation of the circular conchoid in the orthonormal reference frame (O_1, \vec{i}, \vec{j}) (see Figure 2.31).

Let (X, Y) denote the coordinates of P in this reference frame. Let α denote the angle $\angle(\vec{i}, \overrightarrow{O_1P})$, ϕ the angle $\angle(\vec{i}, \overrightarrow{O_1Q})$ and h the Euclidean distance between O and O_1 . We have:

$$\begin{cases} X = R \cos(\phi) + L \cos(\alpha) \\ Y = R \sin(\phi) + L \sin(\alpha) \end{cases}$$

where $\cos(\alpha)$ (resp. $-\cos(\alpha)$) is equal to

$$\frac{-R \cos(\phi)}{\sqrt{R^2 \cos^2(\phi) + (h - R \sin(\phi))^2}} = \frac{-R \cos(\phi)}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2hR \sin(\phi)}}$$

when O belongs (resp. does not belong) to the half straight line ending at Q and passing through P . Similarly, $\sin(\alpha)$ (resp. $-\sin(\alpha)$) is equal to

$$\frac{h - R \sin(\phi)}{\sqrt{R^2 \cos^2(\phi) + (h - R \sin(\phi))^2}} = \frac{h - R \sin(\phi)}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2hR \sin(\phi)}}$$

when O belongs (resp. does not belong) to the half straight line ending at Q and passing through P .

With $t = \tan(\phi/2)$, we obtain:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{1+t^2} \left(R(1-t^2) \mp \frac{LR(1-t^2)}{\sqrt{f(t)}} \right) \\ Y = \frac{1}{1+t^2} \left(2Rt \pm \frac{Lh(1+t^2) - 2LRt}{\sqrt{f(t)}} \right) \end{cases}$$

where:

$$f(t) = R^2 + h^2 - \frac{4hRt}{1+t^2}.$$

A straight line and a circular conchoid intersect at most six times because any equation $aX + bY + c = 0$ yields a polynomial of degree at most six in t .

Bibliographie

- [ART95] Pankaj K. Agarwal, P. Raghavan, and H. Tamaki. Motion planning for a steering-constrained robot through moderate obstacles. In *Proc. 27th Annu. ACM Sympos. Theory Comput.*, pages 343–352, 1995.
- [BB94] J.-D. Boissonnat and X.-N. Bui. Accessibility region for a car that only moves forwards along optimal paths. Rapport de recherche 2181, INRIA, 1994.
- [BBF86] Behnke, Bachmann, and Fladt. *Fundamentals of mathematics, Geometry*, volume 1. MIT Press, 1986.
- [BCK88] B. Buchberger, G.E. Collins, and B. Kutzler. Algebraic methods for geometric reasoning. *Ann. Rev. Comput. Sci.*, 3:85–119, 1988.
- [BCL94a] J.-D. Boissonnat, A. Cérézo, and J. Leblond. A note on shortest paths in the plane subject to a constraint on the derivative of the curvature. Rapport de recherche 2160, INRIA, 1994.
- [BCL94b] J.-D. Boissonnat, A. Cérézo, and J. Leblond. Shortest paths of bounded curvature in the plane. *Internat. J. Intell. Syst.*, 10:1–16, 1994.
- [BDDP92] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, L. Donati, and F. Preparata. Motion planning for a spider robot. In *Proc. 9th IEEE Internat. Conf. Robot. Autom.*, pages 2321–2326, 1992.
- [BDDP95] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, L. Donati, and F. Preparata. Motion planning of legged robots: the spider robot problem. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 5(1–2):3–20, 1995.
- [BDL94a] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, and S. Lazard. From spiders robots to half disks robots. In *Proc. 11th IEEE Internat. Conf. Robot. Autom.*, pages 953–958, 1994.

- [BDL94b] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, and S. Lazard. Motion planning of legged robots. In *The First Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics*. A. K. Peters, Boston, MA, 1994.
- [BDP91] J.-D. Boissonnat, O. Devillers, and F. Preparata. Computing the union of 3-colored triangles. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 1(2):187–196, 1991.
- [BL89] J. Barraquand and J-C. Latombe. On non-holonomic mobile robots and optimal maneuvering. *Revue d'Intelligence artificielle*, 3:77–103, 1989.
- [BL93] J. Barraquand and J-C. Latombe. Nonholonomic multi-body mobile robots: controllability and motion planning in the presence of obstacles. *Algorithmica*, 10:121–155, 1993.
- [BL96a] J.-D. Boissonnat and S. Lazard. Convex hulls of bounded curvature. In *Proc. 8th Canad. Conf. Comput. Geom.*, pages 14–19, 1996.
- [BL96b] J.-D. Boissonnat and S. Lazard. A polynomial-time algorithm for computing a shortest path of bounded curvature amidst moderate obstacles. In *Proc. 12th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 242–251, 1996.
- [BLJ91] A. Bellaïche, J.P. Laumond, and P. Jacobs. Controllability of car-like robot and complexity of the motion planning problem with non-holonomic constraints. In *International Symposium on Intelligent Robotics*, Bangalor, Indie, 1991.
- [Bra89] M. Brady. Robotics science. *System development foundation Benchmark series*, 1989.
- [BSBL94] X-N. Bui, P. Souères, J.-D. Boissonnat, and J-P. Laumond. Shortest path synthesis for Dubins non-holonomic robot. In *Proc. 11th IEEE Internat. Conf. Robot. Autom.*, pages 2–7, 1994.
- [Bui94] X-N. Bui. *Planification de trajectoire pour un robot polygonal non-holonyme dans un environnement polygonal*. thèse de doctorat en sciences, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France, 1994.
- [Ces83] L. Cesari. Optimization, theory and applications. In *Springler-Verlag*, 1983.

- [CS89] K. L. Clarkson and P. W. Shor. Applications of random sampling in computational geometry, II. *Discrete Comput. Geom.*, 4:387–421, 1989.
- [DD90] M. Dickerson and R. L. Drysdale. Fixed radius search problems for points and segments. *Inform. Process. Lett.*, 35:269–273, 1990.
- [Des94] G. Desaulniers. On shortest paths for a car-like robot maneuvering around obstacles. Les Cahiers du GERAD G-94-35, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, Canada, 1994.
- [DS90] D. P. Dobkin and D. L. Souvaine. Computational geometry in a curved world. *Algorithmica*, 5:421–457, 1990.
- [DS95] G. Desaulniers and F. Soumis. An efficient algorithm to find a shortest path for a car-like robot. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 11:819–828, 1995.
- [DSL95] G. Desaulniers, F. Soumis, and J-C. Laurent. A shortest path algorithm for a car-like robot in a polygonal environment. Les Cahiers du GERAD G-95-43, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, Canada, 1995.
- [Dub57] L. E. Dubins. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *Amer. J. Math.*, 79:497–516, 1957.
- [FLMR92] M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C.R. Acad. Sci Paris*, 1:619–624, 1992.
- [FW91] S. Fortune and G. Wilfong. Planning constrained motion. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 3:21–82, 1991.
- [Her89] J. Hershberger. Finding the upper envelope of n line segments in $O(n \log n)$ time. *Inform. Process. Lett.*, 33:169–174, 1989.
- [HK91] S. Hirose and O. Kunieda. Generalized standard foot trajectory for a quadruped walking vehicle. *The International Journal of Robotics Research*, 10(1), February 1991.
- [HNKU84] S. Hirose, M. Nose, H. Kikuchi, and Y. Umetani. Adaptive gait control of a quadruped walking vehicle. In *Int. Symp. on Robotics Research*, pages 253–277. MIT Press, 1984.

- [Jac90] P. Jacobs. Minimal length curvature constrained paths in presence of obstacles. Research Report 90042, LAAS, Toulouse, France, 1990.
- [Jac91] G. Jacob. Lyndon discretization and exact motion planning. In *European Control Conference*, pages 1507–1512, Grenoble, France, 1991.
- [JC89] P. Jacobs and J. Canny. Planning smooth paths for mobile robots. In *Proc. IEEE Internat. Conf. Robot. Autom.*, pages 2–7, 1989.
- [JW89] J. Bares and W.L. Whittaker. Configuration of an autonomous robot for mars exploration. In *World Conference on Robotics Research*, pages 37–52, 1989.
- [KDK] V. Kostov and E. Degtiariova-Kostova. Irregularity of optimal trajectories in a control problem for a car like robot. Research Report (à paraître), INRIA, BP93, 06902 Sophia-Antipolis, France.
- [KDK93] V. Kostov and E. Degtiariova-Kostova. Suboptimal paths in the problem of a planar motion with bounded derivative of the curvature. Rapport de recherche 2051, INRIA, 1993.
- [KDK94] V. Kostov and E. Degtiariova-Kostova. Suboptimal paths in the problem of a planar motion with bounded derivative of the curvature ii. Rapport de recherche 2189, INRIA, 1994.
- [KLPS86] K. Kedem, R. Livne, J. Pach, and M. Sharir. On the union of Jordan regions and collision-free translational motion amidst polygonal obstacles. *Discrete Comput. Geom.*, 1:59–71, 1986.
- [KS90] K. Kedem and M. Sharir. An efficient motion planning algorithm for a convex rigid polygonal object in 2-dimensional polygonal space. *Discrete Comput. Geom.*, 5:43–75, 1990.
- [KS92] E. Krotkov and R. Simmons. Performance of a six-legged planetary rover: power, positionning, and autonomous walking. In *Proc. 9th IEEE Internat. Conf. Robot. Autom.*, pages 169–174, 1992.
- [KST97] K. Kedem, M. Sharir, and S. Toledo. On critical orientations in the Kedem-Sharir motion planning algorithm for a convex

- polygon in the plane. *Discrete Comput. Geom.*, 17:227–240, 1997.
- [Lat91] J.-C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.
- [Lau86] J. P. Laumond. Feasible trajectories for mobile robots with kinematic and environment constraints. In L. O. Hertzberger and F. C. A. Groen, editors, *Conference on Intelligent Autonomous Systems (Amsterdam, the Netherlands, December 8–11, 1986)*, pages 346–354. Elsevier Science Publishers, December 1986.
- [Lau94] J-P. Laumond. Nonholonomic motion planning via optimal control. In *The First Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics*. A. K. Peters, Boston, MA, 1994.
- [LC92] Z. Li and J.F. Canny. *Nonholonomic Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [LJTM94] J-P. Laumond, P. Jacobs, M. Taix, and R.M. Murray. A motion planner for nonholonomic mobile robots. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 10(5):577–593, 1994.
- [LL91] Y.N. Lakshman and D. Lazard. On the complexity of zero-dimensional algebraic systems. In T. Mora and C. Traverso, editors, *Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA)*, pages 217–225. Birkhäuser, 1991.
- [Lob81] C. Lobry. Contrôlabilité des systèmes non linéaires. *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal*, 1:187–214, 1981. CNRS.
- [LP83] T. Lozano-Pérez. Spatial planning: A configuration space approach. *IEEE Trans. Comput.*, C-32:108–120, 1983.
- [LS90] G. Lafferiere and H.J Sussmann. Motion planning for controllable systems without drift: A preliminary report. *Tech. Rep. SYSCON 90-04, Rutgers Center for Systems and Control*, 1990.
- [MC92] B. Mirtich and J. Canny. Using skeletons for nonholonomic path planning among obstacles. In *Proc. 9th IEEE Internat. Conf. Robot. Autom.*, pages 2533–2540, 1992.

- [MNc92] S. Monaco and D. Normand-cyrot. An introduction to motion planning under multirate digital. In *Proc. 31st IEEE Control Decis. Conf.*, pages 1780–1785, 1992.
- [MS90] R.M Murray and S. Sastry. Steering nonholonomic systems using sinusoids. In *Proc. of the CDC*, pages 2097–2101, 1990.
- [NN94] Y. Nesterov and A Nemirovskii. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM, 1994.
- [PBG74] L. Pontryagin, V. Boltianski, R. Gamkrélidzé, and E. Michtchenko. *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*. Edition Mir, Moscou, 1974.
- [Pér95] R. Felipe Monroy Pérez. *Non-Euclidean Dubins' problem: A control theoretic approach*. Ph.D. thesis, University of Toronto, Canada, 1995.
- [RFLM93a] P. Rouchon, M. Fliess, J. Levine, and P. Martin. Flatness and motion planning: the car with n trailers. In *Proc. of 2nd European Control Conference*, pages 1518–1522, 1993.
- [RFLM93b] P. Rouchon, M. Fliess, J. Levine, and P. Martin. Flatness, motion planing and trailer systems. In *Proc. 32nd IEEE Control Decis. Conf.*, 1993.
- [RR84] Special issue on legged locomotion. *Internat. J. Robot. Res.*, 3(2), 1984.
- [RR90] Special issue on legged locomotion. *Internat. J. Robot. Res.*, 9(2), 1990.
- [RS90] J. A. Reeds and L. A. Shepp. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards. *Pacific Journal of Mathematics*, 145(2), 1990.
- [Sha91] M. Sharir. On k -sets in arrangements of curves and surfaces. *Discrete Comput. Geom.*, 6:593–613, 1991.
- [SL91] H.J. Sussmann and W. Liu. Limits of highly oscillatory controls and the approximation of general paths by admissible trajectories. *Tech. Rep. SYSCON-91-02, Rutgers Centerfor systems and Control*, 1991.

- [SL92] P. Souères and J.-P. Laumond. Synthèse des plus courts chemins pour la voiture de reeds et shepp. Research Report LAAS/CNRS 92234, LAAS, Toulouse, France, 1992.
- [SO95] P. Svestka and M. Overmars. Motion planning for car-like robots using a probabilistic learning approach. *To appear in Intern. Journal of Rob. Research*, 1995.
- [Sou93] P. Souères. *Commande optimale et robots mobiles non-holonomes*. Thèse de doctorat en sciences, Université Paul Sabatier de Toulouse, France, 1993.
- [SS87] S. Sifrony and M. Sharir. A new efficient motion-planning algorithm for a rod in two-dimensional polygonal space. *Algorithmica*, 2:367–402, 1987.
- [SS90] J. T. Schwartz and M. Sharir. Algorithmic motion planning in robotics. In J. van Leeuwen, editor, *Algorithms and Complexity*, volume A of *Handbook of Theoretical Computer Science*, pages 391–430. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [ST91] H. J. Sussmann and G. Tang. Shortest paths for the reeds-shepp car: a worked out example of the use of geometric techniques in nonlinear optimal control. Research Report SYCON-91-10, Rutgers University, New Brunswick, NJ, 1991.
- [Sus95] H. J. Sussmann. Shortest 3-dimensional paths with a prescribed curvature bound. In *Conference on Decision & Control*, pages 3306–3311, 1995.
- [TLM⁺92] D. Tilbury, J.-P. Laumond, R. Murray, S. Sastry, and G. Walsh. Steering car-like systems with trailers using sinusoids. In *Proc. 9th IEEE Internat. Conf. Robot. Autom.*, pages 1999–2004, 1992.
- [Tou88] P. Tournassoud. *Géométrie et intelligence artificielle pour les robots*. Hermes, 1988.
- [Tur91] V. Turau. Fixed-radius near neighbors search. *Inform. Process. Lett.*, 39:201–203, 1991.
- [WA96] H. Wang and P. K. Agarwal. Approximation algorithms for curvature constrained shortest paths. In *Proc. 7th ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, pages 409–418, 1996.

Planification de trajectoires de robots mobiles non-holonomes et de robots à pattes

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans la cadre de la planification de trajectoires optimales en présence d'obstacles pour des robots mobiles de type voiture et pour des robots à pattes. Le modèle de robot de type voiture étudié est celui de Dubins. Il s'agit grossièrement d'une voiture se déplaçant en marche avant uniquement et dont le rayon de braquage est minoré par 1.

Nous avons considéré le problème du calcul d'une enveloppe convexe de courbure bornée d'un ensemble \mathcal{S} de points du plan, c'est-à-dire d'un ensemble contenant \mathcal{S} et dont le bord est de courbure bornée et de périmètre minimal. Nous montrons que si le rayon du plus petit disque contenant \mathcal{S} est supérieur à 1, une telle enveloppe est unique. Nous montrons que le calcul d'une enveloppe convexe de courbure bornée se ramène à un problème d'optimisation convexe ou à la résolution d'un ensemble de systèmes algébriques.

Nous proposons également un algorithme exact polynomial pour le calcul de trajectoires optimales en longueur lorsque le robot se déplace en présence d'obstacles dont les bords sont de courbure bornée et constitués de segments de droite et d'arcs de cercle. De tels obstacles peuvent être obtenu comme enveloppes convexes de courbure bornée d'obstacles polygonaux. L'algorithme calcule un graphe et recherche un plus court chemin dans ce graphe. Le calcul de ce graphe est effectué grâce à des techniques de géométrie algorithmique et par la résolution de systèmes algébriques dont nous montrons, à l'aide de résultants, qu'ils ont un nombre fini de solutions.

Nous avons également étudié le problème de la planification de trajectoires pour des robots à pattes dont le corps est ponctuel et dont toutes les pattes sont attachées au même point. Les pattes du robot ont une longueur bornée et ne sont autorisées à se poser que dans certaines régions polygonales du plan. Nous présentons un algorithme quasi optimal pour le calcul de l'ensemble des positions du corps du robot en équilibre stable. Par une transformation judicieuse, nous nous ramenons au calcul de l'espace libre d'un robot de la forme d'un demi disque se déplaçant en présence d'obstacles.

Mots clés : Planification de trajectoires, systèmes non-holonomes, plus courts chemins, robots mobiles, robots à pattes, robotique, géométrie algorithmique.

Motion planning of non-holonomic mobile robots and legged robots

The work presented in this thesis deals with optimal motion planning, in the presence of obstacles, of car-like robots and legged robots. The model of car-like robot studied is the one of Dubins. That is, roughly speaking, a car moving forward with a minimum turning radius.

We consider the problem of computing a convex hull of bounded curvature of a set \mathcal{S} of points in the plane, that is a set containing \mathcal{S} and whose boundary is a curve of bounded curvature of minimal length. We prove that, if the radius of the smallest disk that contains \mathcal{S} is greater than 1, such a hull is unique. We show that the computation of a convex hull of bounded curvature reduces to convex programming or to solving a set of algebraic systems.

We also present an exact polynomial-time algorithm for computing a shortest path for the Dubins robot moving amidst moderate obstacles, that is obstacles whose boundaries are curves of bounded curvature made of line segments and arcs of circle. Such obstacles can be found by computing convex hulls of bounded curvature of polygonal obstacles. The algorithm computes a graph and finds a shortest path in this graph. The graph is computed using computational geometry methods and resolution of algebraic systems.

We also worked on the motion planning problem of a legged robot whose body is a single point and whose legs are attached to the body. The legs have a bounded length and the robot can only put its feet in some polygonal regions of the plane. We present an almost optimal time algorithm for computing the set of stable placements of the body of the robot. By a clever transformation, we turn the problem into the computation of the free space of a half-disk robot moving amidst obstacles.

Keywords : Motion planning, non-holonomic systems, shortest paths, mobile robots, legged robots, robotics, computational geometry.