HAL
open science

Risque de longévité et détermination du besoin en capital : travaux en cours

Frédéric Planchet

To cite this version:

Frédéric Planchet. Risque de longévité et détermination du besoin en capital : travaux en cours. domain_other. Université Jean Moulin - Lyon III, 2009. tel-00443005

HAL Id: tel-00443005

https://theses.hal.science/tel-00443005v1

Submitted on 26 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Risque de longévité et détermination du besoin en capital : travaux en cours

Frédéric PLANCHET
ISFA – Laboratoire SAF

Version 1.6 / Septembre 2008

Sommaire

La prise en compte de l'expérience propre au groupe dans l'analyse de la mortalité 10

Les modèles stochastiques de mortalité 13

1. Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité 17

1.1. Introduction 17

1.2. Le modèle de mortalité 18

1.2.1. Présentation 18
1.2.2. Application numérique 20
1.3. Application à un régime de rentes viagères 22

1.3.1. Problématique 22
1.3.2. Résultats 23
1.4. Conclusion 27

1.5. Bibliographie 28

2. Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée 30

2.1. Introduction 30

2.2. Le modèle de mortalité 31

2.2.1. Présentation 31
2.2.2. Application numérique 32
2.3. Application à un régime de rentes viagères 33

2.3.1. Problématique 33
2.3.2. Résultats 34
2.4. Conclusion 37

2.5. Bibliographie 38

3. Modèles prospectifs de mortalité avec dérive contrainte 39

3.1. Introduction 39

3.2. Le modèle de mortalité 41

3.2.1. Rappels sur le modèle de Lee-Carter 41

3.2.2. Fermeture de la table ... 41
3.2.3. Présentation générale du modèle ... 42
3.2.4. Une spécification simple du modèle ... 43
3.3. Application numérique ... 44
3.3.1. Passage du modèle Lee-Carter standard au Lee-Carter logistique ... 44
3.3.2. Analyse de la composante prospective ... 46
3.3.3. Application à un régime de rentes viagères ... 48
3.4. Conclusion ... 49
3.5. Bibliographie ... 49
4. Risque de modèle et détermination du capital économique ... 53
4.1. Introduction ... 53
4.2. Description du modèle ... 53
4.2.1. Présentation ... 53
4.2.2. Cas particulier de la loi log-normale ... 55
4.2.3. Estimation des paramètres du modèle ... 56
4.2.4. Conséquence sur le niveau du capital de l'estimation des paramètres ... 57
Cas du modèle log-normal ... 57
Cas du modèle mélangé ... 58
4.2.5. Application numérique ... 58
Simulation de la loi mélangée ... 58
Résultats ... 59
Identification des valeurs extrêmes ... 60
Ajustement du modèle mélangé ... 61
4.3. Conclusion ... 62
4.4. Bibliographie ... 62
5. Contraintes opérationnelles : la prise en compte des extrêmes ... 63
5.1. Calcul de VaR en assurance ... 65
5.1.1. Notations ... 67
5.2. Estimation de quantiles extrêmes ... 67
5.2.1. Estimation naturelle ... 68
5.2.2. Ajustement à une loi paramétrique ... 68
5.2.3. Approximation GPD ... 68
5.2.4. Estimateur de Hill ... 69
5.2.5. Illustration ... 70
5.3. Application du bootstrap ... 71
5.3.1. Présentation ... 71
5.3.2. Calcul d'un intervalle de confiance pour une VaR ... 73
5.3.3. Illustration numérique ... 75
5.4. Robustesse du SCR ... 76
5.4.1. Estimation des paramètres des variables de base ... 76
5.4.2. Simulation ... 77

5.4.3. Spécification du modèle 77
Contexte et motivation 77
Modélisations avancées 79
5.5. Conclusion 81
5.6. Bibliographie 82
Annexe A : Loi de Pareto généralisée (GPD) 85
A.1 Définition 85
A.2 Quelques propriétés 85
A.3 Estimation des paramètres 86
Annexe B : Résultats probabilistes 88
B.1 Loi du maximum 88
B.2 Épaisseur des queues de distribution 89
B.3 Loi des excès au-delà d'un seuil 90
Annexe C : Estimation du paramètre de queue 91
C.1 Méthodes paramétriques 91
C.2 Méthodes semi-paramétriques 92

Préambule

Le présent travail fait suite à la thèse de doctorat préparée au sein du laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière (SAF) de l'Université Lyon 1 et soutenue le 20 novembre 2006 sur le thème du *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères : identification et mesure des risques, allocation d'actif, suivi actuariel*.

Les thématiques présentées dans ce travail ont depuis été développées et ont donné lieu aux publications suivantes :

PLANCHET F. [2007c] « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress*

PLANCHET F., JUILLARD M. [2007] « Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité – application à un régime de rentes », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 75 (3).

PLANCHET F.; JUILLARD M.; THEROND P. [2008] « Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée », Assurances et gestion des risques, à paraître.

PLANCHET F., LELIEUR V. [2007] « Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations », à paraître dans le *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 7, n°14.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2007a] *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THEROND P.E. [2007b] « Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de Value-at-Risk », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 74 (4).

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2007c] « Model risk and determination of economic capital in the Solvency 2 project »,, *Proceedings of the 16th AFIR Colloquium*.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2007d] *Mesure et gestion des risques d'assurance*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2008] « Expected Shortfall of Claims Events: Some Practical Aspects », *Proceedings of the 38th ASTIN Colloquium*.

PLANCHET F., WINTER P. [2007] « L'utilisation des splines bidimensionnels pour l'estimation de lois de maintien en arrêt de travail », *Bulletin français d'actuariat*, vol. 7, n°13.

Les sujets présentés ici sont également actuellement développés dans le cadre des cinq thèses suivantes, co-encadrées avec le Professeur Jean-Claude AUGROS au sein du Laboratoire SAF (équipe d'accueil n°2429) :

- ✓ FARJALLAH Mariem (en cours depuis 2007) : *Gestion dynamique de couvertures en assurance.*
- ✓ KAMEGA Aymric (début en septembre 2008) : *Outils théoriques et opérationnels adaptés au contexte de l'assurance vie en Afrique subsaharienne francophone.*
- ✓ MANDHOUJ Khouloud (début en octobre 2008) : *Etude de la Structure de Dépendance multidimensionnelle et Application en Assurance*.
- ✓ MERHI Nisrine (début en octobre 2008) : *modélisation des décisions de l'assureur dans la gestion de la participation aux bénéfices - conséquences de ces décisions sur l'évaluation des options et garanties d'un contrat d'assurance vie*.
- ✓ KALAMOUN Mehdi (début en octobre 2008) : *Conception d'un modèle d'actifs intégré pour la détermination du SCR.*

A l'exception de la première dont la soutenance est prévue en novembre 2010, les quatre autres thèses devraient normalement être soutenues à la fin de l'année 2011.

Enfin, le contenu du présent travail est constitué, pour la première partie, par des adaptations de PLANCHET et JUILLARD [2007] (section 1), PLANCHET et al. [2008] (section 2) et PLANCHET [2007c] (section 3) et pour la seconde par des adaptations de PLANCHET et THÉROND [2007b] (section 4) et [2007c] (section5).

Le contenu de ces articles et ouvrages publiés depuis 2006 dans le cadre d'une activité d'enseignement et de recherche à l'Institut de Science Financière et d'Assurances a été adapté pour préserver la cohérence d'ensemble de ce document. Les articles d'origine sont systématiquement cités en référence[1].

Pour terminer, on soulignera que ce travail prolonge les approches générales décrites dans les ouvrages PLANCHET et al. [2005], PLANCHET et THEROND [2006], [2007a] et [2007d].

[1] La plupart des références citées dans ce document sont disponibles en ligne sur le site http://www.ressources-actuarielles.net.

Introduction

L'assurance est caractérisée par l'inversion de son cycle de production : d'une part le prix d'un contrat est fixé d'avance (« prime »), et d'autre part son coût n'est connu qu'a posteriori. Au surplus, dans certaines situations (retraite, invalidité, contrats de responsabilité civile, assurance construction) il existe une durée très longue, parfois de plusieurs années ou plusieurs dizaines d'années, entre la détermination de la prime et la fin du paiement des sinistres.

Les risques pris en charge par les contrats d'assurance sont très majoritairement des risques mutualisables, ce qui conduit à en fonder la gestion technique sur la loi des grands nombres (pour la détermination de la charge espérée) et le théorème de la limite centrée (pour les fluctuations autour de cette espérance). Les bases théoriques sur lesquelles reposent ces analyses ont été établies par les travaux fondateurs de Condorcet et Laplace[2]. De manière très schématique le bilan d'une compagnie d'assurance est donc de la forme :

Bilan simplifié

A	E
	L

avec L les provisions mathématiques et E les fonds propres, qui conduisent à un niveau global d'actif $A = L + E$ qui va devoir être investi et géré.

De fait, la réglementation applicable aux organismes assureurs prévoit la constitution de « provisions mathématiques » dont le niveau est fixé en référence à l'espérance (actualisée ou non suivant les cas) des charges futures complétées par des fonds propres ou « marge de solvabilité » dont le rôle est d'absorber les fluctuations d'échantillonnage et les autres risques supportés par l'assureur. Toutefois la quantification des risques n'est pas explicite mais implicite.

En effet, les règles prudentielles actuelles sont définies par un cadre européen, Solvabilité 1, laissant une marge de manœuvre importante au régulateur local de chaque pays ; ainsi, en France, les provisions mathématiques (article R331-1 du code des assurances) sont-elles déterminées sur des bases « prudentes » largement encadrées par la réglementation[3] et la marge de solvabilité est calculée de manière très simple en fonction du montant des provisions (assurance vie) ou des montants de cotisations et de sinistres (assurance non vie). En conséquence, le dispositif actuel intègre à différents niveaux des marges pour risque, mais le niveau de celles-ci reste implicite. L'objectif du dispositif Solvabilité 2 en cours d'élaboration (voir les documents de la Commission Européenne

[2] Le lecteur intéressé par l'histoire de la théorie du risque pourra notamment consulter Pradier [2003].
[3] On pourra par exemple se reporter à l'intervention de Marc PORIN aux entretiens de l'assurance en 1997 (PORIN [1997]). Cette intervention est disponible sur http://www.ffsa.fr/webffsa/portailffsa.nsf/073ca870743e6428c1256c31003ed8a0/c4bd6f141d78706ec12570c3005413a5/$FILE/a7.pdf

cités en bibliographie ainsi que PLANCHET et al. [2005] Pour une présentation synthétique) est de remédier à cette insuffisance en proposant un cadre d'analyse qui permette de quantifier explicitement les marges de risques, en ayant préalablement procédé à une analyse exhaustive de ceux-ci.

En parallèle le développement des contrats d'épargne incorporant différentes garanties telles que des garanties de taux, des possibilités de rachat ou encore des garanties sur le montant du capital investi (« garanties plancher ») a amené les assureurs à analyser de manière plus fine les risques associés à ces contrats. En s'appuyant sur les approches et les résultats de la finance de marché, et notamment la théorie des options, une littérature abondante s'est développée avec l'objectif de quantifier le risque associé à de telles clauses et d'en déduire leur « prix ». On peut par exemple citer BALLOTA [2004], BALLOTA et al. [2005], BIFFIS et MILLOSSOVICH [2004] ou encore JORGENSEN [2004]. DEVOLDER [2001] propose une synthèse critique de ces approches, qui sont également détaillées de manière opérationnelle dans THÉROND [2007].

Au global, les années récentes sont ainsi marquées par le développement de différents dispositifs conduisant à repenser de manière conséquente la gestion et le pilotage des risques d'assurance : projet Solvabilité 2 (règles prudentielles), normes IFRS[4] « assurance » (règles comptables) et également cadre MCEV[5] (reporting financier). Le lecteur intéressé trouvera une synthèse de ces référentiels dans THEROND [2007].

On peut schématiser de manière très synthétique les évolutions principales induites par ces réformes en relevant les points suivants :

- ✓ Le passage quasi-systématique d'hypothèses d'évaluation prudentes et/ou conventionnelles à des hypothèses « réalistes » dans une logique « best estimate » (BLUM et OTTO [1998]).
- ✓ Une analyse plus exhaustive des risques portés par l'assureur qui conduit à s'intéresser tout particulièrement aux risques non mutualisables ; le premier de ces risques est évidemment constitué par les différents risques financiers sur les contrats d'épargne et de retraite, mais l'examen attentif de passifs d'assurance non financier met aussi en évidence des risques de ce type, chaque fois que l'hypothèse classique d'indépendance se trouve mise en cause. Le risque systématique de mortalité en est un exemple (CAIRNS et al. [2004]).
- ✓ Enfin, le cadre conceptuel plus spécifique du dispositif prudentiel Solvabilité 2 met en avant un critère de contrôle de la probabilité de ruine pour la fixation du capital de solvabilité (*Solvency Capital Requirement* ou SCR), qui contraint de fait à porter une attention particulière au comportement des queues de distribution, à l'actif comme au passif (PLANCHET et THEROND [2007c]). Au surplus, ce critère modifie les modèles de gestion actif / passif (ALM) traditionnels en introduisant un lien fort entre l'allocation effectuée et le niveau du capital de solvabilité.

[4] « International Financial Reporting Standards ».
[5] « Market Consistent Embedded Value ».

De manière transversale on peut signaler que ces dispositifs puisent largement dans la culture d'inspiration financière via les notions de « *fair value* » et de couverture. Certaines conséquences de ces emprunts sont discutées dans PLANCHET [2006b]. CHENUT et al. [2003] et [2004] analysent de manière détaillée les implications de cette approche dans le cas des garanties plancher pour des contrats en unités de compte. BALLOTA et al. [2005] aborde la prise en compte des sauts à l'actif avec les implications en terme de valorisation (marchés incomplets).

Au-delà des réflexions théoriques sur ces sujets, pour lesquels une littérature universitaire abondante existe, d'importants besoin de modélisations étayés théoriquement et utilisables en pratique se sont fait jour. Ces besoins concernent tout autant l'assurance non vie que l'assurance vie. La question de la détermination du SCR dans un contexte d'assurance non vie est par exemple abordée dans PLANCHET et THEROND [2005a] dans un cadre mono-périodique, le modèle proposé étant étendu avec une dynamique inter-temporelle par BRUNEAU et al. [2007].

Nous avons choisi dans le présent document de nous restreindre au cas de l'assurance vie et de la retraite et d'imaginer des réponses à ces besoins au travers de 2 thèmes précis :

- ✓ l'analyse du risque de mortalité supporté par un régime de rente, tant dans sa dimension prospective (anticipation des évolutions futures des taux de décès) qu'au travers de l'analyse de l'aléa non mutualisable qui subsiste une fois la tendance donnée et supposée juste ;
- ✓ les implications du critère de « non ruine à un an avec une probabilité de 99,5 % » sur lequel le dispositif Solvabilité 2 fonde la détermination du capital de solvabilité.

Le risque (systématique) de mortalité est en effet potentiellement très dangereux pour un régime de rentes : toute déviation de la mortalité par rapport à la tendance anticipée lors de la tarification affecte en effet l'ensemble du portefeuille ; ainsi, si l'espérance de vie a été sous-estimée, le régime doit faire face à des charges supplémentaires non prévues. Ce risque est analysé de manière détaillée dans la première partie de ce travail.

La seconde partie est consacrée à la mise en œuvre opérationnelle du critère de contrôle de la « probabilité de ruine » en Solvabilité 2 ; plus précisément, on cherche quelles sont les contraintes minimales auxquelles doit satisfaire un modèle interne[6] pour fournir un niveau de capital qui ne soit pas manifestement sous-estimé. Cette analyse permet de mettre en évidence un certain nombre de points que le régulateur pourrait intégrer dans ses règles d'homologation de tels modèles.

Les introductions des 2 parties composant ce travail développent assez largement le contexte de chacune des problématiques étudiées.

Enfin, une bibliographie générale reprend l'ensemble des références citées dans le texte, y compris l'introduction générale, les introductions des parties et la conclusion

[6] Le modèle interne en Solvabilité 2 est une modélisation actif / passif propre à l'entité, modélisation sur laquelle elle peut s'appuyer pour justifier de son niveau de capital de solvabilité, y compris en justifiant d'un niveau inférieur à la situation de référence définie par la « formule standard » ; on se reportera à THEROND [2007] pour un développement détaillé.

générale. Les références propres à chacune des 5 sections sont reprises dans des bibliographies de la section correspondante.

Partie 1 : Mortalité prospective et mortalité stochastique[7]

La prise en compte de l'expérience propre au groupe dans l'analyse de la mortalité

Que ce soit dans le cadre de l'évaluation des engagements d'un régime de retraite, la valorisation d'un portefeuille d'épargne ou encore le suivi technique de contrats en cas de décès, la mortalité constitue un paramètre déterminant du résultat des valorisations. La question se pose donc du choix pertinent de l'hypothèse à retenir.

D'une manière générale, les normes comptables IFRS conduisent à privilégier, au travers d'une approche « économique » de la valorisation de l'entreprise, le choix d'hypothèses « réalistes », tenant compte de l'expérience du portefeuille[8] (IFRS assurance) ou de l'entreprise (IAS 19). Dans le cas particulier de la mortalité, cela conduit naturellement à vouloir se tourner vers des « tables d'expérience » en lieu et place de références exogènes (tables nationales, tables réglementaires dans le cas des assureurs, etc.) pas nécessairement en phase avec la réalité du risque.

Mais, dès lors que le risque est viager, et notamment dans les problématiques de rentes, la table de mortalité utilisée se doit d'être prospective afin de prendre en compte l'évolution future des taux de décès, ce qui induit de fortes contraintes en terme de volume de données si l'on souhaite construire une « surface de mortalité » spécifique de la population concernée anticipant correctement les évolutions à venir.

Ainsi, lors de la construction des nouvelles tables de mortalité réglementaires utilisées par les assureurs pour le provisionnement de leur engagements viagers[9], les quelques centaines de milliers de têtes observées sur une dizaine d'années n'ont pas suffit à construire une table autonome (ou « endogène ») et il est apparu nécessaire de s'appuyer sur des tables construites préalablement sur l'ensemble de la population française pour dégager des tendances de long terme.

En pratique, la taille des groupes existants et le nombre d'années disponibles sont donc souvent insuffisants pour espérer réaliser une construction robuste d'une telle table « endogène », obtenue uniquement à partir des observations issues du groupe considéré. Ceci est valable tant sur des portefeuilles de rentiers que dans le cas d'entreprises.

Doit-on pour autant renoncer à tenir compte de l'information apportée par les observations ? La réponse est bien entendu négative. En effet, les déterminants de la mortalité sont nombreux : le sexe, le mode de vie, le niveau de revenu, la région d'habitation figurent parmi les plus importants. Une population particulière donnée (portefeuille d'assureur ou rentiers futurs et en cours dans le cas d'un régime supplémentaire d'entreprise) présente donc *a priori* une mortalité différente de celle décrite par des références nationales ou de place.

---

[7] Ce texte est adapté de PLANCHET [2007a].
[8] Voir sur ce point IASB INSURANCE WORKING GROUP [2006], §14-16.
[9] Les tables TGH et TGF 05 de l'arrêté du 01/08/2006.

Dans ce contexte, dès lors que l'on abandonne une évaluation prudentielle des engagements au profit d'une évaluation « réaliste » avec une quantification qui se veut explicite de la marge de risque, il est indispensable de prendre en compte l'information apportée par les données disponibles, sous peine de déformer « l'image économique fidèle » de l'entreprise que l'on entend donner.

Se pose toutefois la question du moyen d'y parvenir, compte tenu des difficultés techniques exposées précédemment.

Un examen plus attentif de la structure d'une table de mortalité prospective conduit alors à distinguer le niveau de la mortalité (âge par âge) d'une part et son évolution anticipée dans le futur d'autre part. Déterminer le niveau de la mortalité à un moment donné revient à fixer une table du moment, proposer une tendance pour l'évolution future conduit à lui ajouter une dimension prospective pour aboutir à une surface de mortalité, ou table prospective.

Les données disponibles fournissent en général une détermination suffisamment riche pour la construction d'une table du moment, quitte à procéder à des extrapolations en dehors de la plage où des observations sont disponibles. Ces extrapolations sont aisées dans le cadre des modèles paramétriques de mortalité, comme par exemple le modèle classique de Makeham (MAKEHAM [1874]) ou les modèles de régression logistique.

C'est au moment de déterminer la tendance d'évolution des taux de mortalité dans le futur que les données s'avèrent insuffisantes en pratique : historiques trop faibles (souvent moins de 10 ans) et effectifs insuffisants (quelques dizaines de milliers) pour supprimer le bruit issu des fluctuations d'échantillonnage rendent la démarche prospective délicate à appliquer directement, sauf à prendre des risques importants sur l'appréciation de la tendance. Il existe par exemple des versions paramétriques du célèbre modèle de Lee-Carter qui permettent d'estimer une surface de mortalité à partir d'un nombre réduit de paramètres : la diminution du nombre de paramètres permet une estimation plus fiable et augmente le pouvoir prédictif du modèle, mais elle augmente en parallèle le risque d'inadéquation du modèle à la réalité.

Toutefois, on peut noter à ce stade que la question n'est pas tant fondamentalement ici de construire une table de mortalité que d'être en mesure de sélectionner une hypothèse bien adaptée au groupe pour le risque considéré, et à tout le moins mieux adaptée qu'une référence réglementaire utilisée de manière arbitraire. En effet, si l'objectif de construire une table spécifique pour la population étudiée s'avère délicat à atteindre, une démarche pragmatique consiste à se tourner vers les différentes références existantes et à rechercher celle qui, parmi elle, représente le mieux le comportement de la population en terme de mortalité. Les outils statistiques d'analyse de l'adéquation d'une loi de mortalité donnée *a priori* à des observations issues de l'expérience sont classiques et peuvent ici être employées avec succès.

Ainsi, il est donc important de noter qu'en pratique l'analyse de la mortalité d'expérience du groupe peut conduire à retenir comme « table d'expérience » une table exogène au groupe, par exemple la TPG 1993, une table INSEE, ou plus généralement toute table dont on aurait des raisons de penser qu'elle peut raisonnablement représenter la mortalité de la population considérée ; d'une manière générale, la justification de l'adéquation d'une table à un groupe donné pour un risque donné (vie ou décès) relève

d'une analyse différente de la construction d'une table de mortalité propre au groupe. Et cette analyse est plus robuste et plus simple à mettre en œuvre que la construction proprement dite.

Face à ces contraintes, l'obtention d'une information raisonnablement fiable sur la mortalité d'expérience du groupe passe donc *in fine* par le positionnement de cette mortalité par rapport à une référence, que celle-ci soit une table nationale, une table de place, ou une table d'expérience construite sur une population plus large présentant des similitudes de comportement sur ce registre.

Une table de mortalité est, on l'a vu, essentiellement décrite par le niveau de la mortalité à un moment donné et la tendance future d'évolution des taux de décès (ou de tout autre grandeur décrivant la survie, comme par exemple l'indicateur classique d'espérance de vie). Cette structure conduit à observer que le positionnement par rapport à une référence peut, en fonction de la qualité des données à disposition, s'envisager de deux manières :

- ✓ un positionnement sur le niveau uniquement, la tendance reprenant strictement la tendance de la référence proposée ;
- ✓ un positionnement conjoint sur le niveau et la tendance. Plus délicat à mettre en œuvre techniquement, il permet une appréciation plus fine du risque de longévité lorsque le volume de données est suffisant.

Pour l'une ou l'autre de ces deux approches, les outils techniques existent : on peut citer notamment les régressions logistiques ou le modèle de Cox (COX [1972]) et ses dérivés.

On peut d'ailleurs noter que les nouvelles tables réglementaires TGH et TGF 05 légitiment d'une certaine manière cette démarche. En effet, la relative petite taille des portefeuilles utilisés pour la construction a nécessité comme on l'a rappelé *infra* le calage des tendances sur des tables prospectives préalablement construites pour l'occasion sur la base de données INSEE. Ainsi, les tables réglementaires elles-même sont en un certain sens le résultat d'un positionnement de la mortalité des assurés par rapport à la mortalité générale.

Au global, et en guise de conclusion on peut retenir que les évolutions aussi bien des dispositifs prudentiels (Solvabilité 2) que des dispositifs comptables (IFRS) ou des approches de valorisation d'une activité d'assurance (EEV / MCEV) impliquent de prendre en compte l'expérience du groupe dans les hypothèses de mortalité retenues. Si la construction d'une « table d'expérience » propre au groupe et élaborée à partir de ses seules données n'est en pratique pas une solution systématiquement envisageable, les techniques de positionnement de la mortalité d'expérience par rapport à une référence externe fournissent une palette d'outils opérationnels conduisant à une appréciation plus réaliste du risque porté.

Il apparaît ainsi délicat aujourd'hui de faire l'économie d'une étude fine de la mortalité d'un portefeuille ou des membres d'un régime de retraite dans le but de mesurer de la manière la plus réaliste possible la valeur actuelle des engagements pris. Cette problématique fait notamment l'objet des travaux présentés dans PLANCHET et al. [2006],

PLANCHET et JUILLARD [2007], PLANCHET et LELIEUR [2007] et PLANCHET et WINTER [2007].

Cette démarche conduit naturellement à des modèles prospectifs intégrant une anticipation du niveau de la mortalité futur. Cette approche peut être complétée en intégrant une incertitude sur le niveau des taux effectivement observés autour de la tendance prédite. Cela conduit aux modèles stochastiques de mortalité.

Les modèles stochastiques de mortalité

La modélisation de la mortalité est classiquement effectuée via une spécification de la fonction de risque $\mu(x,t)$, en fonction de l'âge x et de l'année courante t : $\mu(x,t)$ est le taux instantané de décès à la date t pour un individu d'âge x à cette date. La connaissance de ce taux permet en effet de calculer la probabilité de survie entre t et T ($t < T$) d'un individu d'âge x en t :

$$S(x,t,T) = \mathbf{exp}\left(-\int_t^T \mu(x+u-t,u)\,du\right)$$

Dans le cas particulier où le taux de décès instantané $\mu(x,t)$ ne dépend que de l'âge, on retrouve l'expression classique[10] $S(x,t,T) = \mathbf{exp}\left(-\int_x^{x+T-t} \mu(u)\,du\right) = \frac{S(x+T-t)}{S(x)}$, avec $S(x) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^x \mu(u)\,du\right)$ la fonction de survie du modèle.

On peut remarquer que $\mu(x,T) = \lim_{t\to T} -\frac{\partial}{\partial T}\mathbf{ln}\,S(x,t,T)$. Cette égalité, rappelle la définition du taux d'intérêt instantané par rapport au prix d'un zéro-coupon ; elle conduit à introduire la notion de taux instantané de décès « forward », défini par $\mu(x,t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\mathbf{ln}\,S(x,t,T)$, de sorte que $\mu(x,T) = \lim_{t\to T}\mu(x,t,T)$; ces analogies avec les modèles de taux d'intérêt font l'objet de nombreux développements dans la littérature (cf. CAIRNS et al. [2004] qui propose une bibliographie sur ce thème).

Dans le cas où le taux instantané de décès est une fonction déterministe et en supposant celle-ci correctement spécifiée, le risque de mortalité se mutualise ; en effet, la loi des grands nombres s'applique, et assure que sur un portefeuille de taille importante, les fluctuations d'échantillonnage sont faibles. Au surplus le théorème central limite permet de quantifier l'amplitude de ces fluctuations.

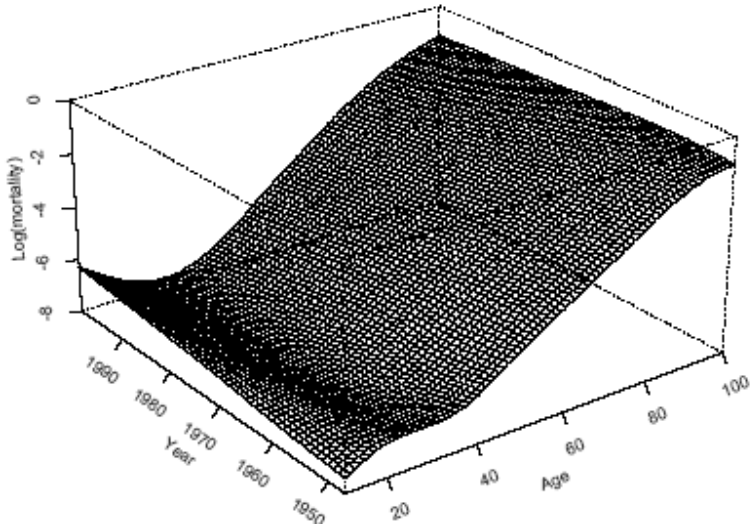
A ce risque mutualisable s'ajoute un risque d'erreur de spécification : si la mortalité observée dans le futur est différente de celle prévue par le modèle, l'écart n'est bien entendu pas mutualisable, puisque toutes les têtes concernées sont affectées dans le même sens par l'écart de la réalisation par rapport à la prévision. Dans l'approche standard de la

[10] Voir PLANCHET et THEROND [2006].

mortalité la manière de se prémunir contre ce risque consiste à retenir une modélisation prudente intégrant une prime de risque : par exemple pour assurer un risque viager, la réglementation a retenu jusqu'au 31/12/2006 une table féminine, les femmes ayant une durée de vie supérieure à celle des hommes[11].

Toutefois, l'idée sous-jacente de ces modélisations est qu'il existe une « vraie valeur » de $\mu(x,t)$, que l'on cherche à approcher au mieux. On construit ainsi des « surfaces de mortalité » régulières, comme par exemple dans CURRIE et al. [2004] :

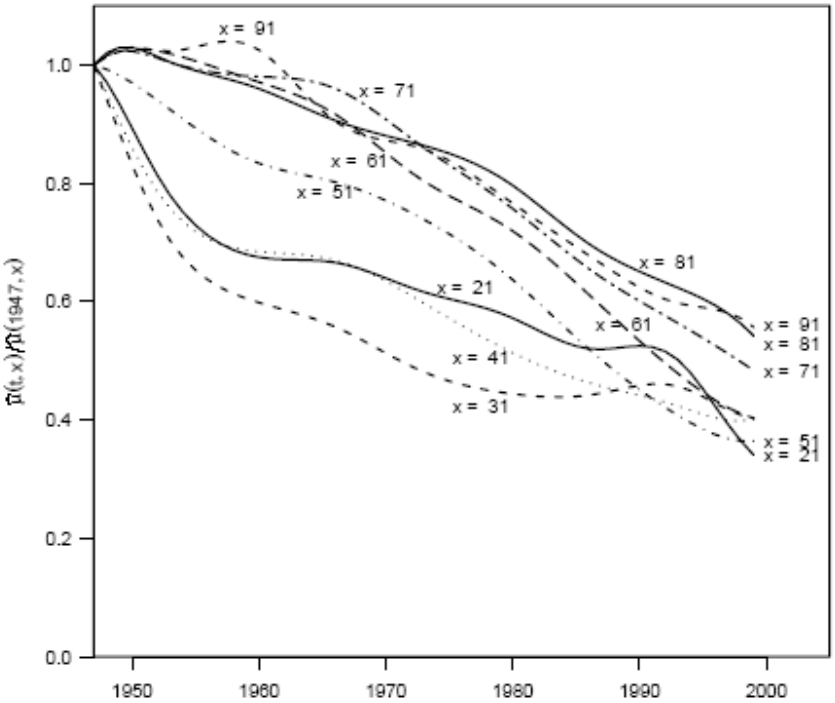
Figure 1 - Surface de mortalité régulière



Cependant, un examen plus fin de cette surface fait apparaître que l'évolution du taux instantané de mortalité présente, aux différents âges, des variations erratiques autour de la tendance qui se dégage[12] :

[11] Cette règle a été modifiée par l'arrêté du 01/08/2006.
[12] Voir CAIRNS et al. [2004] pour une analyse détaillée.

Figure 2 - Evolution des taux de décès au cours du temps



On est donc conduit à rechercher une modélisation capable de rendre compte de ses fluctuations autour de la valeur tendancielle : c'est là l'objectif des modèles stochastiques de mortalité.

Les modèles stochastiques proposent de considérer que le taux de mortalité futur est lui même aléatoire, et donc $\mu(x,t)$ devient un processus stochastique. Le taux de mortalité observé pour un âge et une année donnés est alors une réalisation d'une variable aléatoire : on peut noter l'analogie avec les méthodes de lissage bayésiennes[13]. Le phénomène de mortalité intègre alors explicitement les deux risques décrits ci-dessus.

Dans la littérature, les approches stochastiques des phénomènes de mortalité sont nombreuses. Plusieurs modèles classiques sont de fait des modèles stochastiques ; en premier lieu, les lissages bayésiens, et le modèle de Kimeldorf-Jones[14] entrent dans cette catégorie.

Les modèles avancées de construction de tables prospectives, comme le modèle de Lee-Carter[15] ou les modèles poissoniens, sont également des cas particuliers de modèles stochastiques, bien qu'ils soient à l'origine élaborés pour construire des extrapolations (temporelles) de la surface $\mu(x,t)$ déterministe ; en ce qui concerne la modélisation de Lee-Carter ou les modèles poissoniens, on peut toutefois noter que les taux de mortalité

[13] Voir PLANCHET et THEROND [2006].
[14] KIMELDORF et JONES [1967].
[15] Ce modèle est décrit par exemple dans BROUHNS et al. [2002].

aux différents âges sont supposés parfaitement corrélés, la composante aléatoire (k_t) ne dépendant que du temps[16]. Ceci est clairement contredit par le graphique précédent.

Un autre exemple simple de modèle stochastique consiste à déformer une table de mortalité classique par une perturbation aléatoire, en posant[17] :

$$q_{xt}^{1} = a_t q_x + b_t$$

avec $E(a_t) = 1$ et $E(b_t) = 0$. On peut également consulter SOININEN [1995] qui propose une approche très formelle de ce risque.

La modélisation stochastique de la mortalité peut également s'inspirer des approches développées pour modéliser le défaut sur un marché de taux d'intérêt ou de dette (on pourra par exemple consulter LE PAGE [2000] pour une présentation des principaux modèles de ce type) ; la durée avant le défaut joue alors le rôle de la durée de vie. Ce sont ces classes de modèles qui sont aujourd'hui les plus étudiés. Ces approches sont notamment intéressantes dans la perspective de la valorisation en « juste valeur » d'engagements comportant à la fois le risque financier et le risque démographique.

Enfin, signalons l'existence d'approches utilisant la théorie des valeurs extrêmes pour évaluer certains dérivés de mortalité, comme par exemple le produit proposé par Swiss Ré ; on pourra consulter sur ce point BEELDERS et COLAROSSI [2004].

L'utilisation potentielle d'un modèle stochastique est donc double :

- ✓ un tel modèle permet de quantifier le risque systématique non diversifiable en intégrant explicitement l'incertitude sur les taux de mortalité futurs ;
- ✓ l'évaluation en « juste valeur » au sens des normes IFRS de la valeur d'un contrat d'assurance vie peut être effectuée dans le contexte général de l'absence d'opportunité d'arbitrage, en traitant de manière symétrique les risques financier et démographique.

Une littérature abondante est consacrée au second point : on pourra notamment consulter BIFFIS et MILLOSOVITCH [2004], CAIRNS et al. [2004], DAHL [2004], MOLLER [1998] et SCHRAGER [2004]. Cet aspect ne sera pas abordé dans la présent document.

Les modèles développés dans ce cadre ne constituent donc qu'une approche possible pour introduire une mesure du risque systématique, et à certains égards pas nécessairement l'approche la plus pertinente. En particulier, les modèles de type Poisson s'avèrent bien adaptés pour les applications en assurance[18].

[16] Cette composante est modélisée par un processus ARIMA.
[17] Voir LEE [2000].
[18] On se reportera à PLANCHET et THEROND [2006] et à HADERER [2003] pour une application.

1. Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité

1.1. Introduction

Les analyses prospectives de mortalité conduisent à anticiper les évolutions futures des taux de décès aux différents âges. Dans les modèles maintenant classiques de construction de tables prospectives, comme le modèle de Lee-Carter (voir notamment LEE et CARTER [1992], LEE [2000], SITHOLE et al. [2000]) ou les modèles poissoniens (*cf.* BROUHNS et al. [2002] et PLANCHET et THEROND [2006] pour une présentation et une discussion de ces modèles), la dérive de mortalité future est anticipée à partir des observations passées.

Même en admettant qu'il est légitime de prolonger dans les années à venir les tendances observées par le passé (on pourra se reporter à CAREY et TULAPURKAR [2003] pour des analyses intégrant des considérations biologiques et environementales, ainsi que GUTTERMAN et VANDERHOOF [1999] pour une discussion sur ce point), plusieurs sources d'incertitude viennent perturber la détermination de la tendance future : choix de la période d'observation, fluctuations stochastique des taux de mortalité, événements exceptionnels, *etc.*. Cette incertitude fait peser sur les assureurs de rentes viagères et les régimes de retraite un risque systématique (non mutualisable) dont l'impact financier peut être très important.

Ainsi, en France, la récente actualisation des tables utilisées par les assureurs pour le provisionnement des rentes viagères illustre les difficultés d'une telle anticipation et les enjeux financiers associés : par rapport aux tables TPG[19] 1993 en vigueur jusqu'au 31/12/2006, les nouvelles tables TGH 05 et TGF 05 qui entrent en vigueur le 01/01/2007 conduisent à des majorations de provision parfois supérieures à 20%, comme l'illustre le tableau suivant :

Figure 3 - Comparaison des coefficients de provisionnement TPG 1993 et TGH/TGF 05

Age	Génération	TPG 1993	Femmes	Femmes / TPG	Hommes	Hommes / TPG
50	1955	26,81647	28,40552	5,9%	26,75507	-0,2%
55	1950	24,26368	25,95575	7,0%	24,07474	-0,8%
60	1945	21,50832	23,30185	8,3%	21,25828	-1,2%
65	1940	18,53412	20,39677	10,0%	18,22126	-1,7%
70	1935	15,39467	17,28922	12,3%	15,08772	-2,0%
75	1930	12,25679	14,08680	14,9%	12,05698	-1,6%
80	1925	9,35194	10,96271	17,2%	9,12890	-2,4%
85	1920	6,88306	8,15548	18,5%	6,64827	-3,4%
90	1915	4,93310	5,89309	19,5%	4,73880	-3,9%
95	1910	3,46780	4,29408	23,8%	3,40109	-1,9%

Dans ce contexte il apparaît opportun de rechercher à mesurer le risque associé à cette erreur d'anticipation et de quantifier son impact en termes de provisions pour un régime de rentiers.

On utilise pour cela dans la présente étude le modèle de Lee-Carter (voir notamment LEE et CARTER [1992], LEE [2000], SITHOLE et al. [2000]) pour construire une surface de mortalité $\mu(x,t)$. Après un ajustement des taux passés, les taux de mortalité pour les années futures se

[19] Tables obtenues sur la base de la mortalité de la population féminine sur la période 1961-1987, utilisées depuis le 1er juillet 1993.

déduisent classiquement de l'extrapolation de la composante temporelle. On peut noter que l'utilisation de la variante log-Poisson (*cf.* BROUHNS et al. [2002]) conduirait à des résultats très proches, qui ne seront pas repris ici.

A partir de ce modèle de référence, on propose un modèle stochastique de mortalité en considérant que le taux de mortalité futur $\mu(x,t)$ est lui-même aléatoire, et que donc $\mu(x,t)$ est un processus stochastique (comme fonction de *t* à *x* fixé). L'aléa est introduit de manière à capturer l'incertitude sur l'estimation de la tendance future de la composante temporelle des taux de mortalité.

Après avoir construit un jeu de tables prospectives sur des données nationales à l'aide de ce modèle, nous l'utilisons pour calibrer l'incertitude sur la dérive anticipée et appliquons le modèle ainsi obtenu pour déterminer la distribution de l'engagement d'un régime de rentes. Les conséquences en termes d'analyse du risque pesant sur le régime et de provisionnement sont examinées.

Le présent article complète l'analyse présentée dans PLANCHET et al. [2006], auquel le lecteur pourra se référer pour les détails méthodologiques des modèles de base.

1.2. Le modèle de mortalité

1.2.1. Présentation

Le modèle retenu pour construire les tables prospectives est un modèle stochastique adapté du modèle de Lee-Carter (LEE et CARTER [1992]). On rappelle que la modélisation proposée pour le taux instantané de mortalité dans Lee-Carter est la suivante :

$$\mathbf{ln}\,\mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt},$$

en supposant les variables aléatoires ε_{xt} indépendantes, identiquement distribuées selon une loi $N(0,\sigma^2)$ et que l'on dispose d'un historique $t_m \le t \le t_M$. La question de l'ajustement des paramètres du modèle n'est pas abordée ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux nombreuses références sur le sujet (citées par exemple dans PLANCHET et THEROND [2006]) .

Une fois ajustée la surface de mortalité sur les données passées, il reste à modéliser la série (k_t) pour extrapoler les taux futurs ; pour cela, on utilise la modélisation la plus simple que l'on puisse imaginer, une régression linéaire en supposant une tendance affine :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

avec (γ_t) un bruit blanc gaussien de variance σ_γ. On obtient ainsi des estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ qui permettent de construire des surfaces projetées en utilisant simplement $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$.

Afin de simplifier l'écriture des formules à venir, on pose $\tau = t - t_m + 1$ et $T = t_M - t_m + 1$, ce qui conduit aux expressions :

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{T}\sum \tau k_\tau - \frac{T+1}{2}\bar{k}}{T^2 - 1} \text{ et } \hat{b} = \bar{k} - \frac{T+1}{2}\hat{a},$$

avec $\bar{k} = \frac{1}{T}\sum k_\tau = \frac{1}{T}\sum k_t$. De plus, le vecteur $\left(\hat{a},\hat{b}\right)$ est distribué selon une loi normale d'espérance (a,b) et de variance :

$$\Sigma = \frac{12\sigma_\gamma^2}{T\left(T^2-1\right)}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{T+1}{2} \\ -\frac{T+1}{2} & \frac{(T+1)(2T+1)}{6} \end{bmatrix}$$

On peut donc construire des réalisations de la mortalité future en effectuant des tirages dans la loi du vecteur $\left(\hat{a},\hat{b}\right)$. La variable k_t^* ainsi obtenue est telle que $E\left(k_t^*\right) = k_t$. On obtient alors des réalisations des taux instantanés de sortie *via* :

$$\mu_{xt}^* = \mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t^*\right).$$

Comme $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$ est une variable gaussienne d'espérance $k_t = at + b$ et de variance :

$$\sigma_\tau^2 = \frac{12\sigma_\gamma^2}{T\left(T^2-1\right)}\left(\tau^2 - \tau(T+1) + \frac{(T+1)(2T+1)}{2}\right),$$

on note que :

$$E\left(\mu_{xt}^*\right) = E\left(\mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t^*\right)\right) = \mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t + \frac{\beta_x^2\sigma_t^2}{2}\right),$$

et donc :

$$E\left(\mu_{xt}^*\right) = \mu_{xt}\,\mathbf{exp}\left(\frac{\beta_x^2\sigma_t^2}{2}\right) > \mu_{xt}.$$

Le modèle stochastique a donc tendance à surestimer les taux de sortie par rapport à la surface de référence fournie par le modèle de Lee-Carter. Compte tenu du notre objectif de « perturber » la surface de mortalité, mais sous l'hypothèse que celle-ci définie correctement la tendance future espérée des taux instantanés de décès cette propriété du modèle est pénalisante et il convient d'adapter l'approche proposée.

PLANCHET et al. [2006] proposent une version corrigée du biais du modèle définie par :

$$\mu_{xt}^* = \mathbf{exp}\left(\alpha_x - \frac{\beta_x^2\sigma_t^2}{2} + \beta_x k_t^*\right)$$

Cette version du modèle satisfait par construction $E\left(\mu_{xt}^*\right) = \mu_{xt}$. Elle apparaît donc cohérente avec l'objectif recherché. Toutefois, on peut lui reprocher de déformer de manière arbitraire la distribution des taux stochastiques ; en effet, si le modèle $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$ est pertinent, alors les

taux de sortie μ_{xt}^{*} réellement observés seront bien issus du modèle $\mu_{xt}^{*} = \mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t^{*}\right)$ et non de la version corrigée du biais.

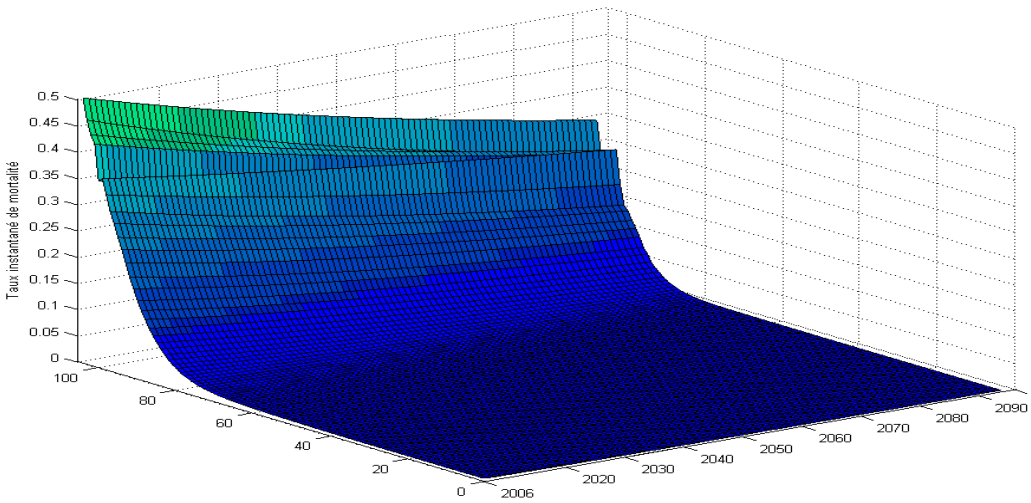
On utilise ici une approche différente et *a priori* plus naturelle consistant à utiliser comme surface de référence déterministe la surface moyenne du modèle stochastique, soit $E\left(\mu_{xt}^{*}\right) = \mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t + \frac{\beta_x^2 \sigma_t^2}{2}\right)$. En effet, si le mécanisme aléatoire dont sont issus les taux de décès est bien associé à $k_t^{*} = \hat{a}t + \hat{b}$, alors la mortalité de référence déterministe est bien définie par la surface moyenne ci-dessus, et non plus par la surface de Lee-Carter.

1.2.2. Application numérique

On présente ici les résultats obtenus tout d'abord sur la famille de tables prospectives proposée puis, dans un second temps, les conséquences en terme de valorisation de l'engagement du régime de rentes.

La table prospective utilisée dans cette étude est celle utilisée dans PLANCHET et al. [2006] ; elle est construite à partir des tables du moment fournies par l'INED[20] dans MESLE et VALLIN [2002] et conduit à la surface de mortalité Lee-Carter suivante :

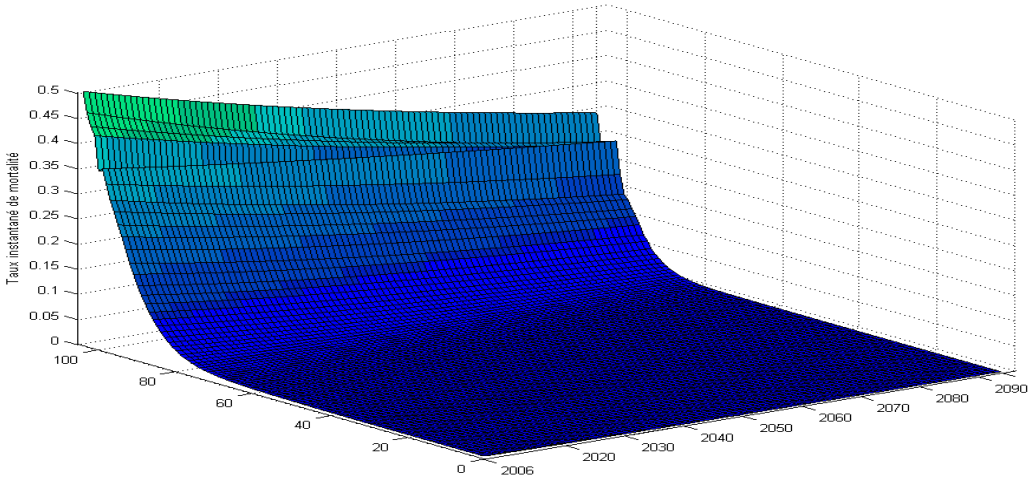
Figure 4 - Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter



La surface de référence ajustée de notre modèle stochastique est présentée sur le graphe ci-dessous :

[20] Ces tables sont disponibles sur http://www.ined.fr/publications/cdrom_vallin_mesle/Tables-de-mortalite/Tables-du-moment/Tables-du-moment-XX.htm

Figure 5 - Surface de mortalité de référence du modèle stochastique



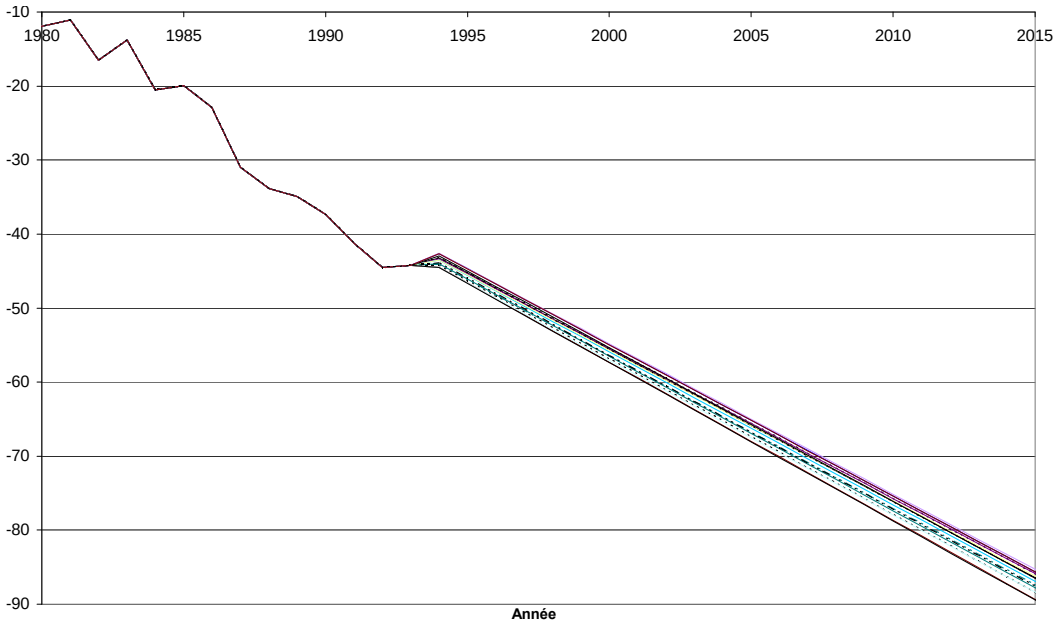
On remarque que la différence entre les deux graphes est très faible car du fait de la faible valeur des coefficients β_x, $\mathbf{exp}\left(\frac{\beta_x \sigma_t^2}{2}\right)$ est proche de 1. En ce qui concerne le volet prédictif du modèle, nous obtenons sur nos données :

$$\hat{b} = 49.38604\,,\ \hat{a} = -2.05775 \text{ et } \hat{\sigma}_\gamma = 3.98227882$$

$$\hat{\sigma}_b = 1.18058\,,\ \hat{\sigma}_a = 0.04282 \text{ et } \hat{\sigma}_t^2 = 1.39367413 + 0.00183378\mathrm{t}^2 - 0.08802152\mathrm{t}$$

Une centaine de tirages de trajectoires de k_t permet d'obtenir le graphe suivant :

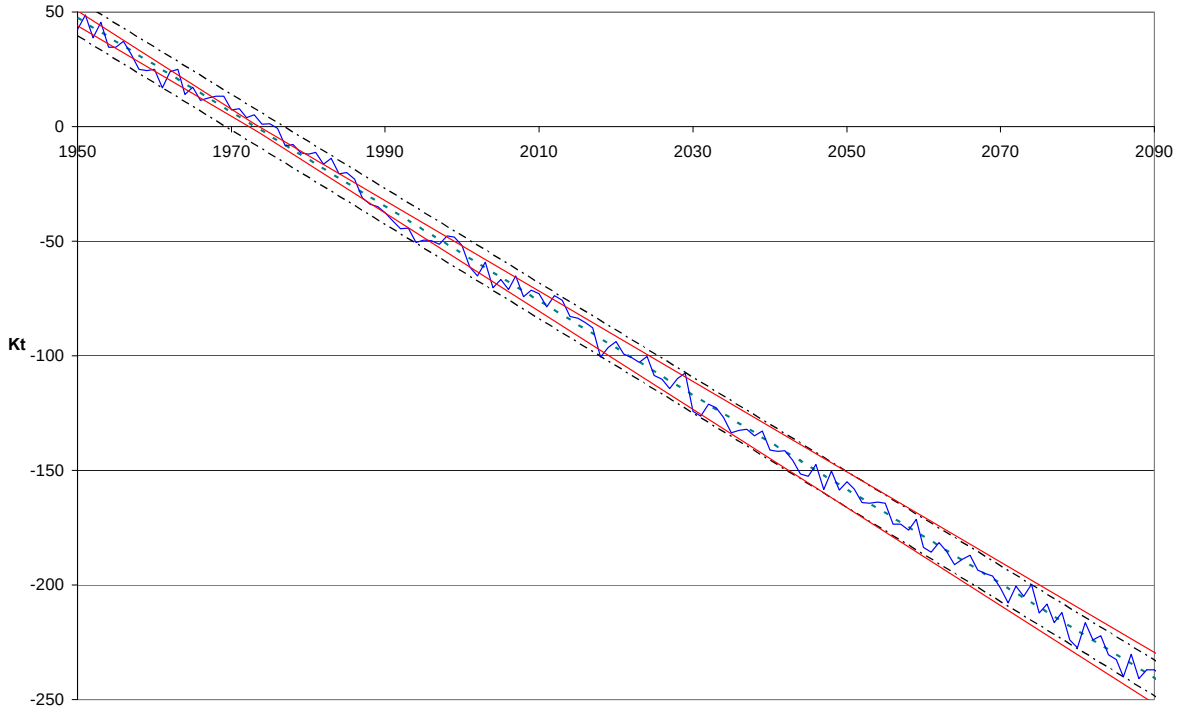
Figure 6 - Simulation de trajectoires de la tendance



On constate sur le graphe que les différentes trajectoires simulées de k_t prennent quasiment la même valeur en 2006. Ceci montre que le modèle tire sa volatilité de la dérive de la mortalité et non d'un saut brutal de mortalité entre 2005 et 2006.

Si l'on cherche à comparer la volatilité de la dérive temporelle modélisée dans cet article avec celle du modèle utilisé dans PLANCHET et al. [2006], on obtient le graphe suivant :

Figure 7 - « couloir de variation » de la tendance



Alors que dans PLANCHET et *al.* [2006] le modèle utilisé ne prenait en compte que l'oscillation de la dérive temporelle k_t autour de sa moyenne, le modèle actuel simule l'erreur d'ajustement qui a pu être faite sur la dérive temporelle passée.

Si dans PLANCHET et *al.* [2006] les différentes trajectoires de k_t étaient situées entre deux droites parallèles délimitant le couloir de variation de la tendance à 95 %, on constate sur le graphique ci-dessus que les trajectoires de la dérive temporelle sont situées entre deux droites s'éloignant l'une de l'autre avec le temps. Les variations de la tendance temporelle et celles du taux instantané de mortalité étant comparables, le graphique ci-dessus traduit l'hypothèse du modèle : la mortalité stochastique tire sa volatilité non pas des fluctuations annuelles qui, comme nous l'avons démontré dans PLANCHET et *al.* [2006] restent faibles, mais plutôt de la dérive aléatoire de la mortalité qui n'est vraiment observable que dans le futur.

1.3. Application à un régime de rentes viagères

1.3.1. Problématique

Dans la suite, nous utiliserons pour les applications numériques un portefeuille constitué de 374 rentiers de sexe féminin âgés en moyenne de 63,8 ans au 31/12/2005. La rente annuelle

moyenne s'élève à 5,5 k€. Avec un taux d'escompte des provisions de 2,5 %, la provision mathématique initiale, s'élève à 37,9 M€ avec la table prospective déterminée *supra*.

Nous noterons dans la suite de l'article :

- ✓ L_0 le montant des provisions mathématiques à la date initiale,
- ✓ $\tilde{F}_t$ le flux de prestation (aléatoire) à payer à la date *t*,
- ✓ *i* le taux (discret) d'escompte des provisions mathématiques,
- ✓ **J** l'ensemble des individus,
- ✓ *x*(*j*) l'âge en 0 de l'individu *j* et r_j le montant de sa rente annuelle.

La problématique est décrite de manière détaillée dans PLANCHET et *al.* [2006] ; nous retiendrons ici que l'on s'intéresse à la loi de du montant de l'engagement du régime :

$$\Lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{F}_t (1+i)^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \sum_{j \in \boldsymbol{J}} r_j * \mathbf{1}_{]t;\infty[}\left(T_{x(j)}\right)$$

qui est une variable aléatoire telle que $E(\Lambda) = L_0$ avec $L_0 = \sum_{t=1}^{\infty} F_t (1+i)^{-t}$.

Lorsque la mortalité future est connue (déterministe), l'analyse de la loi de Λ revient à mesurer les fluctuations d'échantillonnage qui est associé au « risque de volatilité » tel que décrit dans la modélisation proposées par les QIS 2 et 3 par exemple (*cf.* CEIOPS [2006]). Dans le contexte d'une mortalité stochastique, cette analyse nous fournit un moyen de quantifier le risque systématique qui vient s'ajouter à ce risque de base : ici nous pourrons donc mesurer ainsi le risque associé au choix de la dérive.

La méthode retenue consiste à simuler les durées de survie des rentiers, $T_{x(j)}, j \in J$, à calculer des réalisations $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de Λ puis à déterminer la fonction de répartition empirique de l'engagement.

La provision L_0 est approchée par $\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \lambda_n$. La variance de l'engagement est estimée par $\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\lambda_n - \mathrm{L}_0)^2$; on calcule également le coefficient de variation empirique :

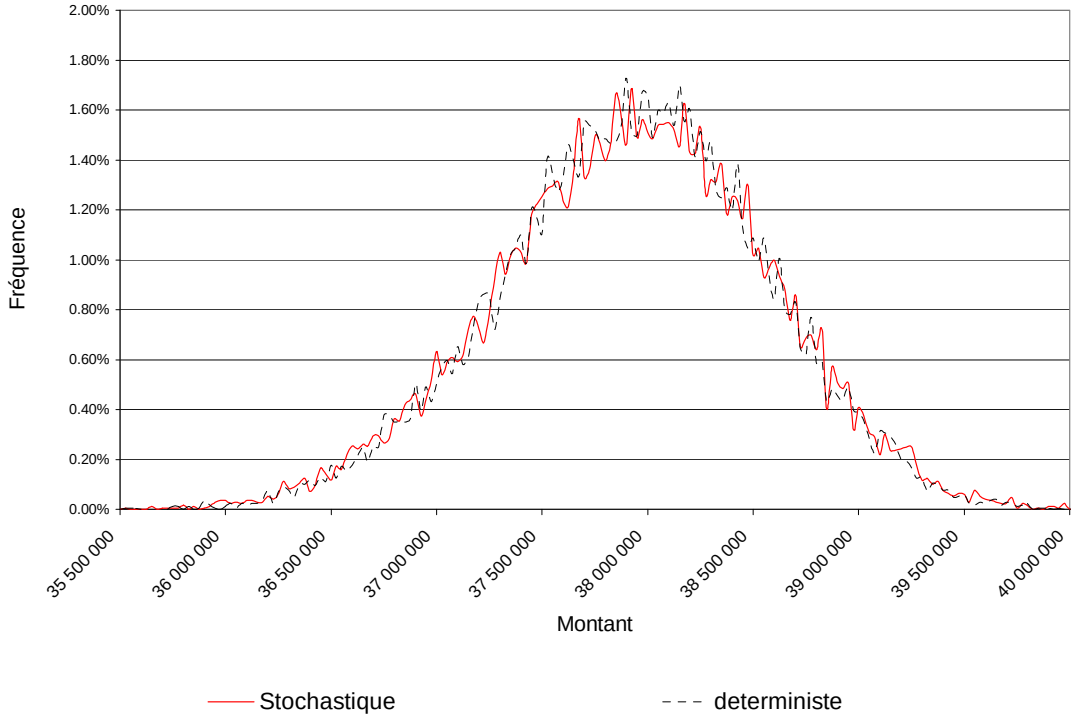
$$cv = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\lambda_n - \mathrm{L}_0)^2}}{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n},$$

qui fournit un indicateur de la dispersion de l'engagement et dans une certaine mesure de sa « dangerosité ».

1.3.2. Résultats

La distribution empirique de l'engagement, représentée ici avec la distribution de référence dans le cas déterministe (avec 20 000 tirages) est présentée ci-dessous :

Figure 8 - Distribution empirique de l'engagement



Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe surface Lee Carter	Déterministe	Stochastique
Espérance	37 937 707	37 937 707	37 937 720
Ecart-type	626 918	626 918	645 601
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 625 000	36 625 000	36 600 000
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 075 000	39 075 000	39 150 000
Coefficient de variation	1,65 %	1,65 %	1,70 %

On remarque tout d'abord que la modification de la surface de référence utilisée dans PLANCHET et *al.* [2006] n'a pas d'impact. Ceci est du au fait déjà observé que pour tout x et pour tout t $\mathbf{exp}\left(\frac{\beta_x \sigma_t^2}{2}\right)$ est proche de 1.

Sur un portefeuille de petite taille, l'impact de la mortalité stochastique sur l'engagement n'est pas très important. En effet le coefficient de variation de l'engagement stochastique n'est que 2,9 % plus élevé que celui de l'engagement déterministe.

Cependant comme nous l'avions montré dans PLANCHET et *al.* [2006] la taille du portefeuille est un paramètre important à prendre en compte. En effet si le niveau absolu de risque systématique ne dépend pas de la taille du portefeuille, il n'en va pas de même pour le risque mutualisable. La part de variance expliquée par la composante stochastique de la mortalité augmente donc avec la taille du portefeuille ; afin de mesurer cet effet, on construit

un portefeuille fictif en répliquant le portefeuille de base n fois. En observant que l'on obtient ainsi une décomposition de l'engagement total Λ en la somme de n variables i.i.d. $\Lambda^{(1)},..,\Lambda^{(n)}$ on trouve que :

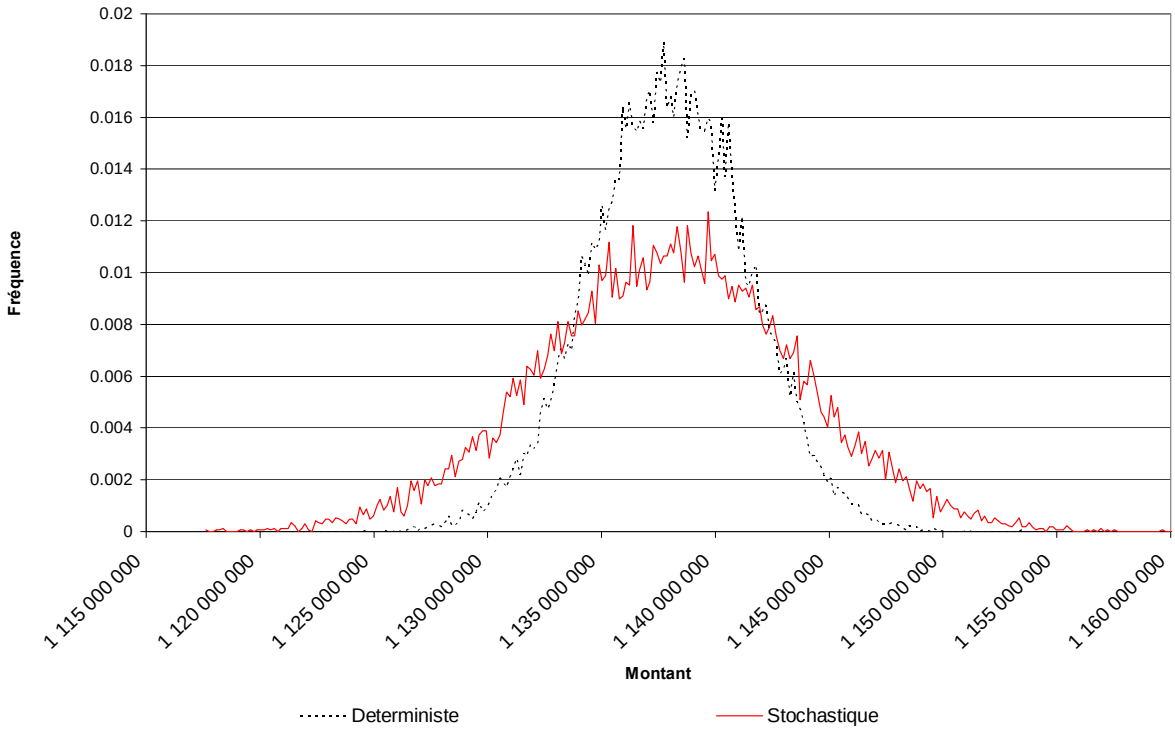
$$V\left[E\left(\Lambda|\Pi\right)\right]=n^2V\left[E\left(\Lambda^{(1)}|\Pi\right)\right] \text{ et } E\left[V\left(\Lambda|\Pi\right)\right]=nE\left[V\left(\Lambda^{(1)}|\Pi\right)\right],$$

ce qui conduit, avec des notations évidentes, à :

$$\omega_n=\left(1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\omega}-1\right)\right)^{-1},$$

avec $\omega=\dfrac{\mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left(\Lambda|\Pi\right)\right]}{\mathbf{V}\left[\Lambda\right]}$. Si l'on multiplie le portefeuille par 30 on obtient les résultats suivants :

Figure 9 - Distribution empirique de l'engagement (taille x30)



Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	1 138 008 113	1 138 076 960
Ecart-type	5 592 212	3 410 560
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	1 131 130 658	1 126 780 658
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	1 144 480 658	1 148 830 658
Coefficient de variation	0,30 %	0,49 %

La prise en compte de la mortalité stochastique augmente le coefficient de variation de 63 %.

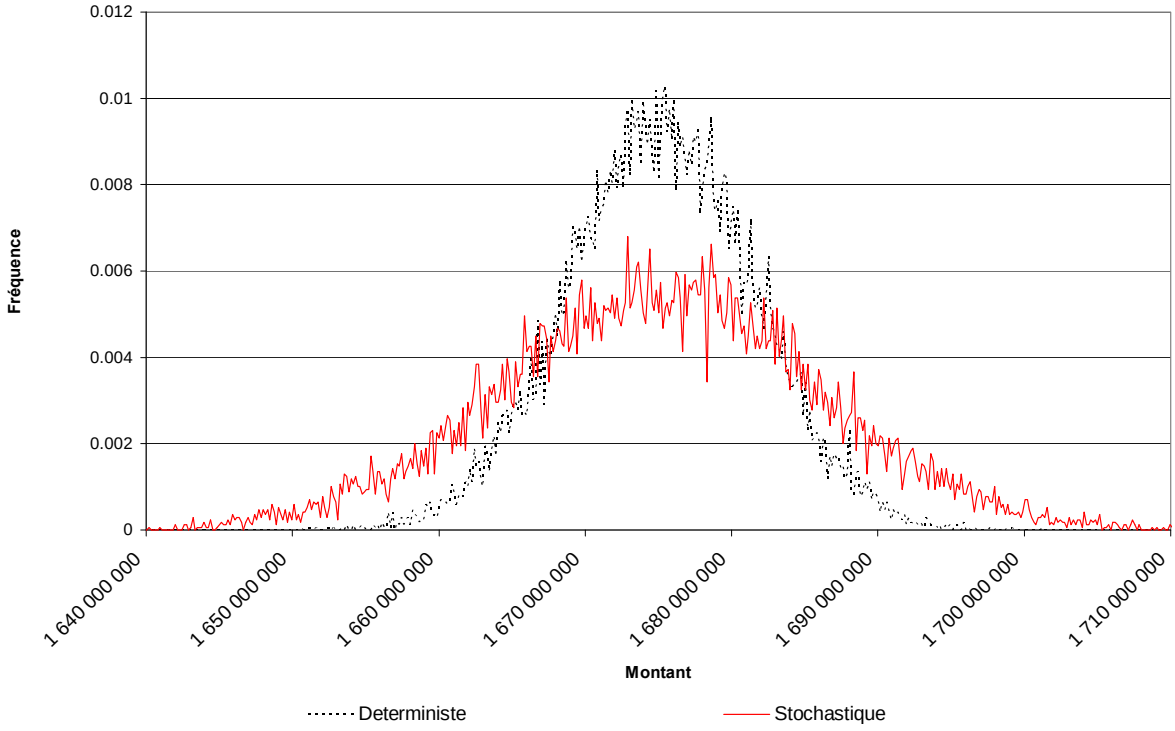
Dans une approche « valeur à risque » (*VaR*), on trouve que le quantile à 75 % de la distribution de l'engagement est de 1 142 M€ dans le cas stochastique, ce qui est supérieur à la valeur obtenue dans le cas déterministe, soit 1 140 M€. En d'autres termes, la prise en compte du risque de dérive conduit ici (en suivant une approche *VaR* pour le calcul de la provision) à augmenter le montant provisionné de 0,17 %.

La prise en compte du risque de dérive a également pour conséquence de doubler l'imprécision dans l'évaluation de l'engagement[21] qui, au niveau de confiance de 95 %, passe de 0,7 % environ à près de 1,3 %

Le graphique du « couloir de variation » de la tendance ayant mis en évidence le faible impact de la dérive de la mortalité dans le futur proche, le coefficient d'actualisation va jouer un rôle important dans la volatilité de la distribution de l'engagement.

En effet l'engagement stochastique tire sa volatilité des rentes qui vont être servies pendant longtemps. Or plus la rente à une durée de vie importante, plus le coefficient d'actualisation appliqué est important. En fixant le taux d'actualisation à 0 on obtient les résultats suivant :

Figure 10 - Distribution empirique de l'engagement (taux technique nul)



Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	1 675 256 646	1 675 129 393
Ecart-type	6 389 153	10 893 496
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	1 662 554 600	1 653 554 600
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	1 687 754 600	1 696 454 600
Coefficient de variation	0,38 %	0,65 %

En prenant un taux technique nul on augmente le coefficient de variation de l'engagement déterministe de 27 % et le coefficient de variation de l'engagement stochastique de 33 %.

[21] L'imprécision est mesurée par la demi-longueur relative de l'intervalle de confiance à 95 %.

Ainsi la prise en compte de la mortalité stochastique induit une plus grande sensibilité de l'engagement au taux d'actualisation.

1.4. Conclusion

Dans PLANCHET et al. [2006] nous avions mis en évidence le fait que l'évaluation de l'engagement d'un régime de rentiers, l'aléa associé aux fluctuations des taux de décès futurs autour de leur tendance n'avait qu'un faible impact que l'on pouvait légitimement négliger.

Le modèle mis en œuvre ici permet de montrer que, si ces régimes sont particulièrement sensibles au risque d'erreur de spécification de la tendance future, l'incertitude sur ce point incluse dans les données passées ne suffit pas à expliquer les évolutions récentes observées.

Incidemment, on insistera sur le fait que l'on a fait ici le choix de modéliser l'aléa sur la tendance future de mortalité à partir des seules fluctuations du paramètre temporel k_t ; cette approche est justifiée par le fait que l'on cherche à identifier la volatilité des taux de décès non associée aux fluctuations d'échantillonnage. Compte tenu des effectifs très importants du groupe utilisé pour construire les tables utilisées ici (la population française), on peut en effet considérer qu'il n'y a plus de fluctuations d'échantillonnage significatives dans l'estimation des taux bruts[22] et que donc il est légitime de considérer la surface passée fixe.

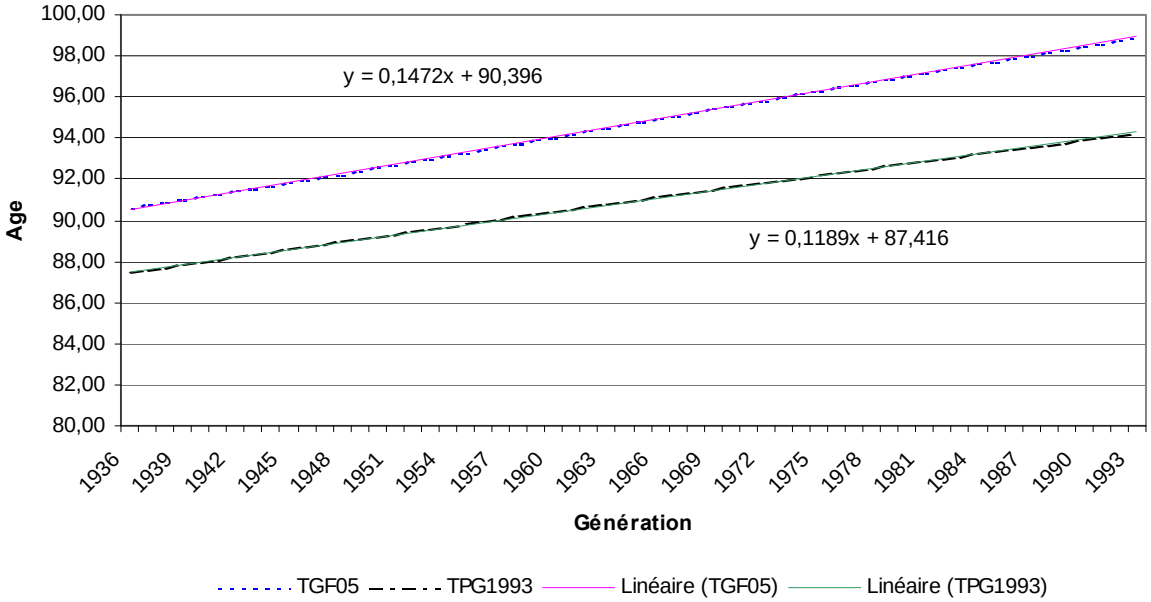
Une approche alternative consisterait à prendre en compte globalement l'incertitude sur le paramètre vectoriel $\theta = (\alpha, \beta, k)$ pour générer des surfaces de mortalité. Cette démarche est techniquement simple à mettre en œuvre à la condition d'utiliser la variante log-Poisson du modèle de Lee-Carter, dans laquelle l'estimation de θ est effectuée par maximum de vraisemblance, puisque, alors, on peut déterminer l'information de Fischer associée et utiliser la normalité asymptotique de l'estimateur[23].

Toutefois, elle nous semble moins pertinente dans le cas présent, notre objectif étant d'isoler le risque associé à une incertitude structurelle sur les taux et non à une incertitude d'estimation.

En conclusion, on peut retenir que le régime de rente est par contre soumis à un risque de modèle important. Il est ainsi possible de reformuler les conséquences du passage des tables TPG 1993 aux tables[24] TGH 05 évoquées en introduction en rapprochant l'évolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans dans les deux modèles prospectifs. On obtient ainsi :

[22] Sur les adaptations du modèle de Lee-Carter au cas de petits échantillons pour lesquels cette hypothèse n'est plus vérifiée, on pourra se reporter à PLANCHET et LELIEUR [2006].
[23] Voir par exemple HAAS [2006] pour une utilisation de cette approche dans le cas de swaps de mortalité.
[24] On rappelle que les TPG 1993 sont des tables féminines.

Figure 11 - Evolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans



On observe que non seulement les niveaux absolus diffèrent sensiblement, mais également que la vitesse de croissance de l'espérance de vie à 60 ans a été sensiblement sous-estimée en 1993 : alors que les TPG 1993 anticipent une augmentation de 1,4 mois par an, les tables TGF 05 prévoient une dérive de 1,8 mois par an, soit 23 % de plus.

Ceci illustre la difficulté à anticiper la tendance de dérive de la mortalité future à partir de données historiques[25]. Dans ce contexte, on peut imaginer d'utiliser comme paramètre de contrôle du modèle, en le fixant comme une contrainte *ex ante* par exemple l'espérance de vie à un âge donné (60 ans) et son évolution future. Cette approche, développée dans PLANCHET [2007], permet de quantifier par exemple l'impact sur les charges du régime d'une erreur de 0,1 mois/an sur la vitesse de dérive de cette espérance et d'intégrer explicitement des indicateurs de l'impact sur l'évaluation de l'engagement du régime d'une erreur de modèle. Le modèle proposé dans PLANCHET [2007] permet ainsi de proposer une valorisation de la charge associée au risque de longévité à environ 6 % de la provision mathématique des rentes. Cet ordre de grandeur est à rapprocher du taux de 0,17 % que l'on déduit de l'incertitude associée au caractère stochastique « endogène » de la mortalité dans le modèle de Lee-Carter ou ses variantes.

On peut enfin rappeler que ce type d'approche fournit un cadre opérationnel pour répondre aux exigences des futures dispositions Solvabilité 2 (et également dans le contexte de l'IFRS 4 phase 2, quoi que sur ce point les normes comptables soient moins exigeantes).

1.5. Bibliographie

BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, 373-393.

CAREY J.R., TULAPURKAR S. Ed. [2003] *Life Span, Evolutionnary, Ecological and Demographic Perspectives*, Population and Development Revue (sup. to vol. 29) , Population Council.

[25] Les populations de référence utilisées pour les 2 séries de tables diffèrent, mais on obtiendrait les même conclusions en utilisant des tables prospectives INSEE à la place des TGF 05.

CEIOPS [2006], « Quantitative Impact Study 2 – Technical Specification », CEIOPS (http://www.ceiops.com)

GUTTERMAN S., VANDERHOOFT I.T. [1999] « Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects », *North American Actuarial Journal*, vol. 2, 135-138.

HAAS S. [2006] *Méthodologie d'évaluation économique des traités proportionnels en réassurance vie - Application au swap de mortalité*, Mémoire d'actuairait, ISFA.

LEE R.D., CARTER L. [1992] « Modelling and forecasting the time series of US mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, 659–671.

LEE R.D. [2000] « The Lee–Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications », *North American Actuarial Journal*, vol. 4, 80–93.

MESLE F., VALLIN J. [2002] « Comment améliorer la précision des tables de mortalité aux grands âges ? Le cas de la France », *Population n°4*, INED, 603.

PLANCHET F., JUILLARD M., FAUCILLON L. [2006], « Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 75.

PLANCHET F. [2007] « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress*

PLANCHET F., LELIEUR V. [2007] « Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations », à paraître dans le *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 7, n°14.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2006] *Modèles de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.

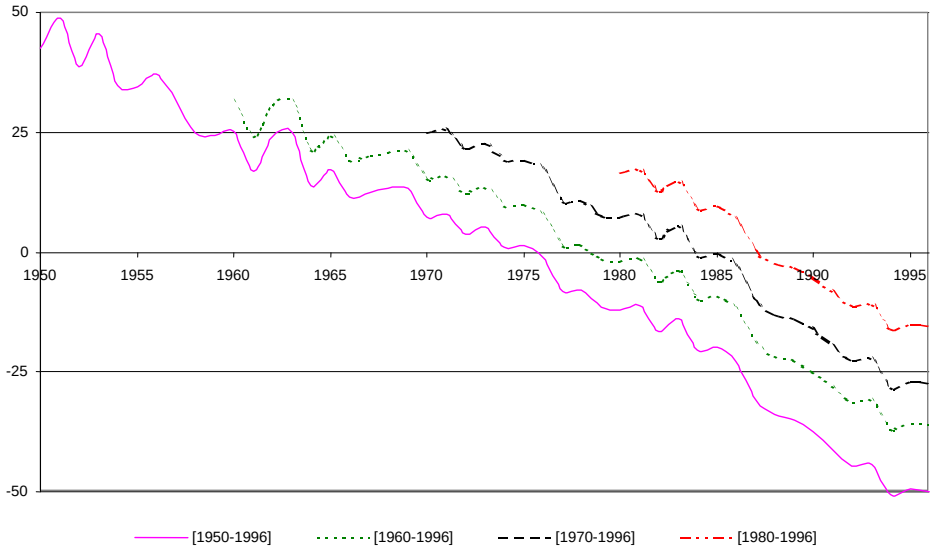
SITHOLE T., HABERMAN S., VERRALL R.J. [2000] « An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 27, 285–312.

2. Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée[26]

2.1. Introduction

Lors de la construction d'une table de mortalité prospective par la méthode de Lee-Carter (LEE et CARTER [1992]) ou l'un de ses dérivés, on est conduit à estimer la tendance future au travers de la modélisation du coefficient $(k_t, t \geq t_M)$. Cette modélisation met en général en évidence une tendance linéaire. Deux risques sont attachés à cette modélisation. On constate tout d'abord que si la forme de la tendance est robuste, notamment relativement au choix de la période d'observation, son niveau ne l'est pas :

Figure 12 - Tendances estimées dans Lee-Carter en fonction de la période d'observation



La prise en compte de ce risque est abordée par exemple dans PLANCHET [2007].

Quand bien même la tendance serait correctement positionnée, les fluctuations autour de cette tendance, et notamment les chocs à la baisse, font porter à un régime de rentes un risque systématique qu'il convient de quantifier.

Cette observation conduit à rechercher une modélisation de la tendance qui, tout en respectant l'allure générale linéaire, prenne en compte des chocs dissymétriques qui peuvent être très importants. Nous proposons ici une telle approche et l'appliquons à la mesure du risque systématique porté par un régime de rentes viagères. En pratique l'hypothèse de mortalité déterministe est donc remplacée par une hypothèse de mortalité stochastique, l'incertitude sur la table traduisant la volatilité associée aux déviations par rapport à la tendance de référence.

Il s'avère que ce risque est potentiellement non négligeable, et doit dès lors être pris en compte dans le cadre des normes comptables IFRS ainsi que dans le contexte des règles prudentielles Solvabilité 2. Le présent article complète les analyses présentées dans les sections précédentes, reprises de PLANCHET et al. [2006] et PLANCHET et JUILLARD [2007], auquel le lecteur pourra se référer pour les détails méthodologiques des modèles de base.

[26] Cet article est adapté de PLANCHET .et al. [2008].

2.2. Le modèle de mortalité

2.2.1. Présentation

Le modèle retenu pour construire les tables prospectives est un modèle stochastique adapté du modèle de Lee-Carter (LEE et CARTER [1992]). Une fois ajustée la surface de mortalité sur les données passées, il reste à modéliser la série (k_t) pour extrapoler les taux futurs ; pour cela, on utilise la modélisation la plus simple que l'on puisse imaginer, une régression linéaire en supposant une tendance affine :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t \,, \tag{1}$$

avec (γ_t) un bruit blanc. Mais alors que dans les approches usuelles, ce bruit est supposé gaussien ou suivre un processus ARIMA, on le suppose ici décrit par le modèle conditionnel suivant, qui distingue 3 plages parmi les résidus de l'ajustement des (k_t) empiriques : la proportion p_- des résidus les plus petits, p_+ des résidus les plus grands et les $1-(p_- + p_+)$ résidus centraux, faibles en valeur absolu. Compte tenu du faible nombre de données disponibles (une cinquantaine d'observations) et du fait que l'on s'intéresse ici aux grandes variations par rapport à la tendance, les faibles écarts étant sans incidence pratique :

- ✓ on fixe arbitrairement $p_- = p_+ = 36\%$;
- ✓ on suppose que l'écart positif γ_t^+ par rapport à la valeur tendancielle[27] suit une loi de Pareto de paramètres (m_+, α_+) ;
- ✓ de même on suppose que si l'écart γ_t^- est distribué selon une loi Pareto(m_-, α_-).

On retient la paramétrisation suivante de la loi de Pareto :

$$S_{m,\alpha}(x) = \left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha} \;,\; x \geq m \,. \tag{2}$$

Le découpage en 3 plages de taille équivalente proposé ici est essentiellement justifié par le fait que l'on s'intéresse aux déviations importantes par rapport à la tendance. Ces déviations ne doivent pas être sensiblement impactées par le choix du début de la plage. Le choix de distributions de Pareto est dans la même logique, l'idée étant de rechercher un modèle compatible avec les observations générant une part importante de risque systématique.

L'estimation des paramètres du modèle est effectuée en deux temps. On calcule tout d'abord des estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ qui permettent de construire la surface projetée de référence en utilisant simplement $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$ via un ajustement de moindres carrés ordinaires. Afin de simplifier l'écriture des formules à venir, on pose $\tau = t - t_m + 1$ et $T = t_M - t_m + 1$, ce qui conduit aux expressions :

[27] Il s'agit donc de l'écart entre la valeur empirique et la valeur tendancielle ajustée par les moindres carrés.

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{T}\sum \tau k_\tau - \frac{T+1}{2}\bar{k}}{T^2 - 1} \text{ et } \hat{b} = \bar{k} - \frac{T+1}{2}\hat{a}, \tag{3}$$

avec $\bar{k} = \frac{1}{T}\sum k_\tau = \frac{1}{T}\sum k_t$. Cette première étape d'estimation n'est donc pas effectuée dans un contexte probabiliste, mais via un simple critère de moindres carrés. Puis dans un second temps on estime les paramètres des déviations m_+, m_-, α_- et α_+ par le maximum de vraisemblance :

$$\hat{m}_+ = \mathbf{min}\left\{\gamma_{(i)}; i \geq n \times p_+\right\},\ \hat{m}_- = -\mathbf{max}\left\{\gamma_{(i)}; i \leq n \times p_-\right\}$$

$$\hat{\alpha}_+ = \frac{\left[n \times p_+\right]}{\sum_{i=1}^{n_+} \mathbf{ln}\left(\frac{\gamma_i}{\hat{m}_+}\right)}, \hat{\alpha}_- = \frac{\left[n \times p_-\right]}{\sum_{i=1}^{n_-} \mathbf{ln}\left(\frac{-\gamma_i}{\hat{m}_-}\right)}$$

où $\left(\gamma_{(i)}\right)$ est la statistique d'ordre associée à $\left(\gamma_i\right)$. La qualité de l'ajustement est évaluée en effectuant des tests de Khi-2 sur les distributions conditionnelles des déviations positives (resp. négatives).

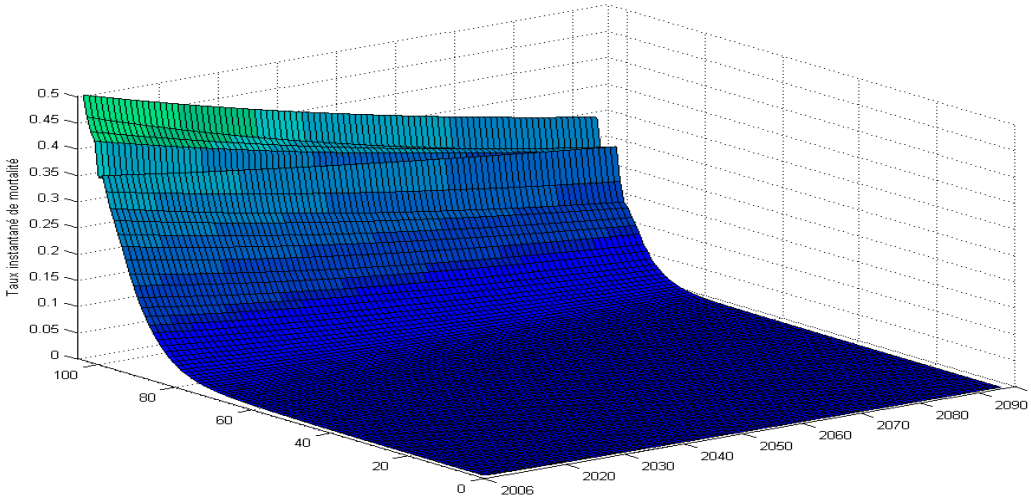
2.2.2. Application numérique

On présente ici les résultats obtenus tout d'abord sur la famille de tables prospectives proposée puis, dans un second temps, les conséquences sur l'évaluation de l'engagement du régime de rentes.

La table prospective utilisée dans cette étude est celle utilisée dans PLANCHET et al. [2006] ; elle est construite à partir des tables du moment fournies par l'INED[28] dans MESLE et VALLIN [2002] et conduit à la surface de mortalité Lee-Carter suivante :

[28] Ces tables sont disponibles sur http://www.ined.fr/publications/cdrom_vallin_mesle/Tables-de-mortalite/Tables-du-moment/Tables-du-moment-XX.htm

Figure 13 - Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter



Les paramètres du modèle stochastique sont les suivants :

Résidus négatifs		Résidus Positifs	
p-	36%	**p+**	36%
M-	1,4385	**M+**	1,3878
α-	1,13	**α+**	1,1105

2.3. Application à un régime de rentes viagères

2.3.1. Problématique

Dans la suite, nous utiliserons pour les applications numériques le portefeuille utilisé précédemment constitué de 374 rentiers de sexe féminin âgés en moyenne de 63,8 ans au 31/12 de l'exercice. La rente annuelle moyenne s'élève à 5,5 k€. Avec un taux d'escompte des provisions de 2,5 %, la provision mathématique initiale, s'élève à 37,9 M€ avec la table prospective déterminée *supra*. Nous noterons encore dans la suite de l'article :

- ✓ L_0 le montant des provisions mathématiques à la date initiale,
- ✓ $\tilde{F}_t$ le flux de prestation (aléatoire) à payer à la date t,
- ✓ i le taux (discret) d'escompte des provisions mathématiques,
- ✓ **J** l'ensemble des individus,
- ✓ $x(j)$ l'âge en 0 de l'individu j et r_j le montant de sa rente annuelle.

La problématique est décrite de manière détaillée dans PLANCHET et *al.* [2006] ; nous retiendrons ici que l'on s'intéresse à la loi de du montant de l'engagement du régime :

$$\Lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{F}_t \left(1+i\right)^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+i\right)^t} \sum_{j \in \boldsymbol{J}} r_j * \mathbf{1}_{]t;\infty[} \left(T_{x(j)}\right) \tag{4}$$

qui est une variable aléatoire telle que $E\left(\Lambda\right) = L_0$ avec $L_0 = \sum_{t=1}^{\infty} F_t \left(1+i\right)^{-t}$.

Lorsque la mortalité future est connue (déterministe), l'analyse de la loi de Λ revient à mesurer les fluctuations d'échantillonnage. Dans le contexte d'une mortalité stochastique, cette analyse nous fournit un moyen de quantifier le risque systématique qui vient s'ajouter à ce risque de base : ici nous pourrons donc mesurer ainsi le risque associé au choix de la dérive. On peut à ce stade noter que même lorsque les paramètres des lois de Pareto perturbatrices sont strictement inférieurs à 1, l'engagement reste intégrable, puisque cette variable est bornée supérieurement (par la table dans laquelle tous les individus sortent à 120 ans).

La méthode retenue consiste à simuler les durées de survie des rentiers, $T_{x(j)}$, $j \in J$, à calculer des réalisations $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de Λ puis à déterminer la fonction de répartition empirique de l'engagement. La provision L_0 est approchée par $\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n$. La variance de l'engagement est estimée par $\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(\lambda_n - \mathrm{L}_0\right)^2$; on calcule également le coefficient de variation empirique :

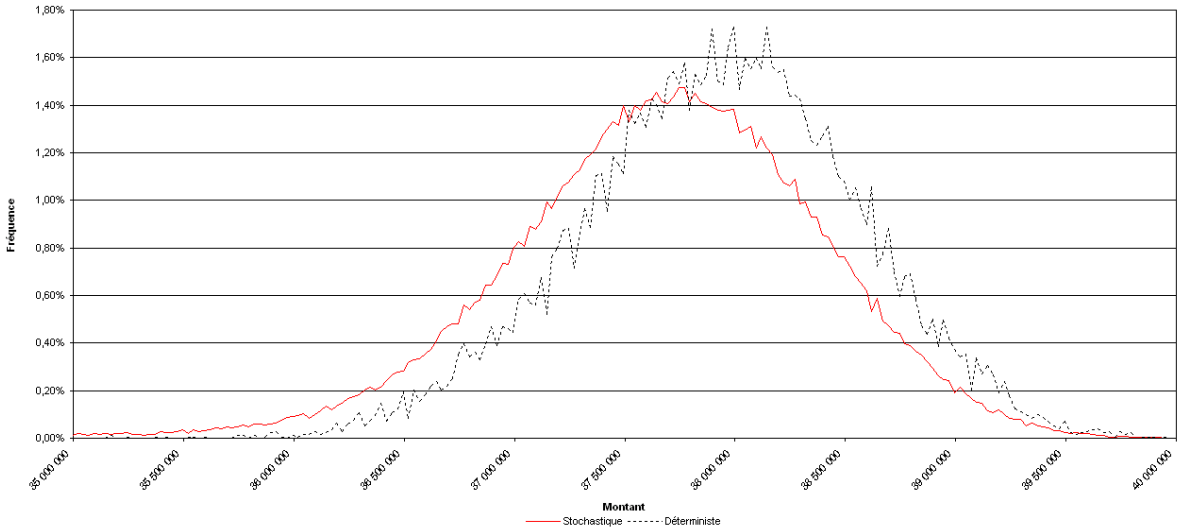
$$cv = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(\lambda_n - \mathrm{L}_0\right)^2}}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n}, \tag{5}$$

qui fournit un indicateur de la dispersion de l'engagement et dans une certaine mesure de sa « dangerosité ».

2.3.2. Résultats

La distribution empirique de l'engagement, représentée ici avec la distribution de référence dans le cas déterministe (avec 20 000 tirages) est présentée ci-dessous :

Figure 14 - Distribution empirique de l'engagement



Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	37 937 707	37 380 862
Ecart-type	626 918	2 418 408
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 625 000	34 295 073
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 075 000	38 945 073
Coefficient de variation	1,65 %	6,47 %

Même sur un portefeuille de petite taille, l'impact de la mortalité stochastique sur la structure de l'engagement est important. On constate deux effets :

- ✓ le coefficient de variation de l'engagement est multiplié par 3 par rapport à la situation de non prise en compte du risque systématique.
- ✓ l'engagement moyen diminue, du fait de l'impact des chocs à la hausse sur les taux de décès.

Les conséquences en termes de gestion du risque sont donc contrastées : la vision « best estimate » de l'engagement est revue à la baisse, mais la présence d'un risque systématique conduit à calibrer une marge pour risque tenant compte de la plus forte volatilité. Au global il n'est pas certain que le montant change notablement, mais sa décomposition dans les logiques « current exit value » est revue de manière sensible.

Cependant comme nous l'avions montré dans PLANCHET et *al.* [2006] la taille du portefeuille est un paramètre important à prendre en compte. En effet si le niveau absolu de risque systématique ne dépend pas de la taille du portefeuille, il n'en va pas de même pour le risque mutualisable. La part de variance expliquée par la composante stochastique de la mortalité augmente donc avec la taille du portefeuille ; afin de mesurer cet effet, on construit un portefeuille fictif en répliquant le portefeuille de base n fois. En observant que l'on obtient ainsi une décomposition de l'engagement total Λ en la somme de n variables i.i.d. $\Lambda^{(1)},..,\Lambda^{(n)}$ on trouve que :

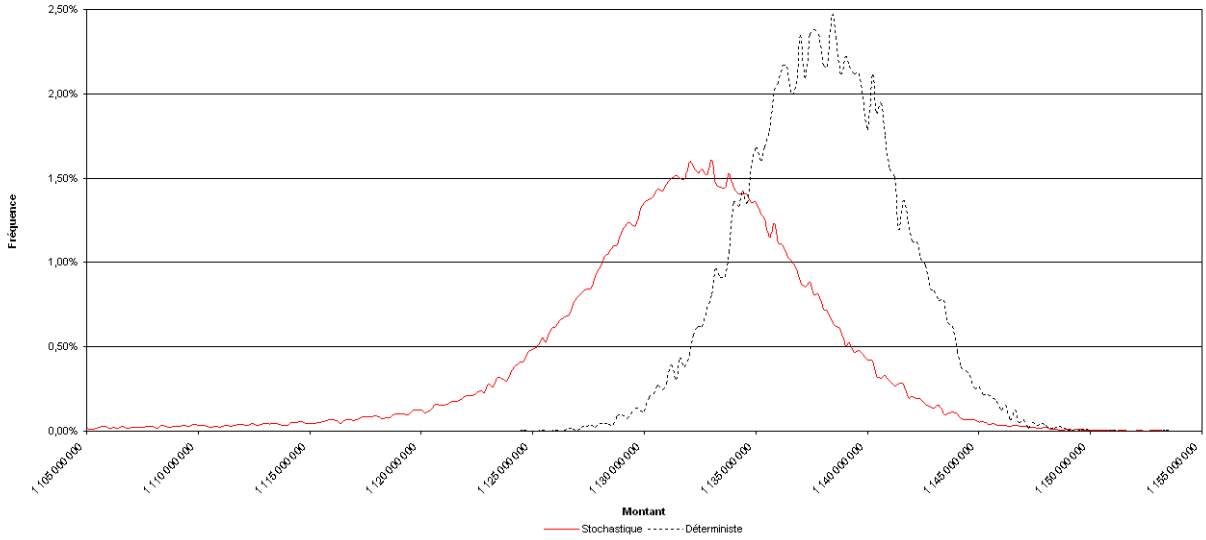
$$V\left[E\left(\Lambda|\Pi\right)\right]=n^2V\left[E\left(\Lambda^{(1)}|\Pi\right)\right] \text{ et } E\left[V\left(\Lambda|\Pi\right)\right]=nE\left[V\left(\Lambda^{(1)}|\Pi\right)\right], \qquad (6)$$

ce qui conduit, avec des notations évidentes, à :

$$\omega_n = \left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)\right)^{-1}, \tag{7}$$

avec $\omega = \dfrac{\boldsymbol{V}\left[\boldsymbol{E}\left(\Lambda|\Pi\right)\right]}{\boldsymbol{V}\left[\Lambda\right]}$. Si l'on multiplie le portefeuille par 30 on obtient les résultats suivants :

Figure 15 - Distribution empirique de l'engagement (taille x30)



Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	1 138 008 113	1 121 529 390
Ecart-type	5 592 212	69 931 571
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	1 131 130 658	1 032 811 610
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	1 144 480 658	1 141 811 610
Coefficient de variation	0,30 %	6,24 %

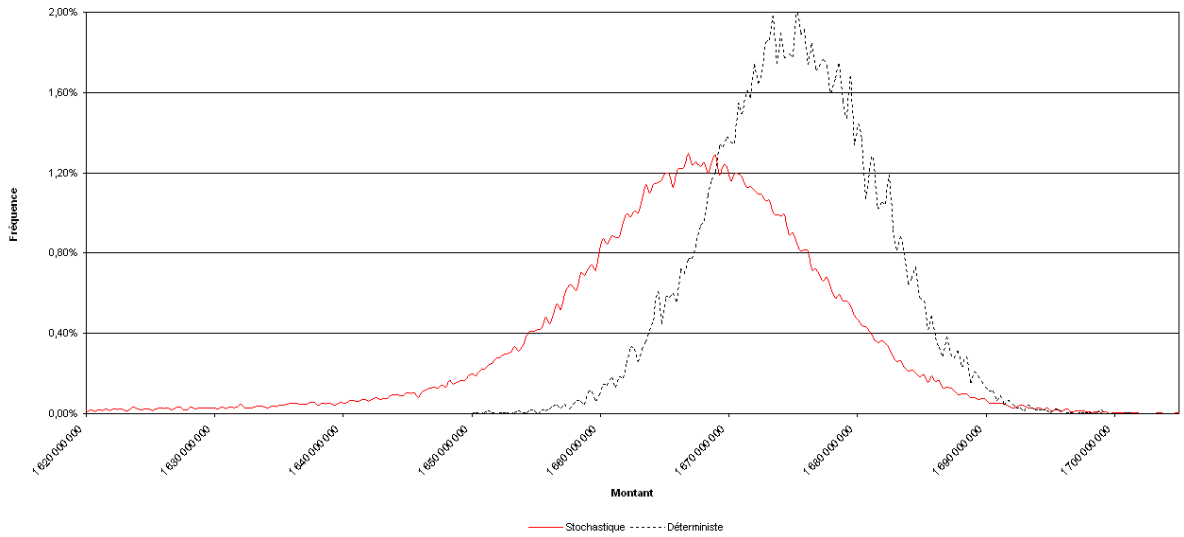
La prise en compte de la mortalité stochastique multiplie le coefficient de variation par 20 en réintroduisant une source de risque.

Dans une approche « valeur à risque » (*VaR*), on trouve que le quantile à 75 % de la distribution de l'engagement est de 1 135 M€ dans le cas stochastique, ce qui est très légèrement inférieur à la valeur obtenue dans le cas déterministe, soit 1 140 M€. En d'autres termes, la prise en compte du risque de dérive conduit ici (en suivant une approche *VaR* pour le calcul de la provision) à baisser marginalement le montant provisionné de 0,17 %. La prise en compte du risque de dérive a également pour conséquence d'augmenter très significativement l'imprécision dans l'évaluation de l'engagement[29] qui, au niveau de confiance de 95 %, passe de [-0,7 % ; 0,7 %] environ à près de [-7,9 % ; 1,8 %].

[29] L'imprécision est mesurée par la longueur relative de l'intervalle de confiance à 95 %.

Par ailleurs l'engagement stochastique tire sa volatilité des rentes qui vont être servies pendant longtemps. Or plus la rente a une durée de vie importante, plus le coefficient d'actualisation est important. En fixant le taux d'actualisation à 0 on obtient les résultats suivant :

Figure 16 - Distribution empirique de l'engagement (taux technique nul)



Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	1 675 256 646	1 647 334 981
Ecart-type	6 389 153	122 294 843
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	1 662 554 600	1 465 849 300
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	1 687 754 600	1 685 449 300
Coefficient de variation	0,38 %	7,42 %

En prenant un taux technique nul on augmente le coefficient de variation de l'engagement déterministe de 27 % et le coefficient de variation de l'engagement stochastique de 19 %. Ainsi la prise en compte de la mortalité stochastique induit une plus grande sensibilité de l'engagement au taux d'actualisation.

2.4. Conclusion

On propose ici un modèle qui intègre explicitement dans les calculs de provision d'un régime de rentes viagères l'incertitude dans la détermination de la tendance à long terme lors de l'ajustement de cette tendance.

Si le niveau de provision n'est pas sensiblement impacté par ce changement, la structure de la provision change : le « best estimate » est revu à la baisse et la marge pour risque à la hausse du fait de ce risque systématique. Ce modèle nous semble de ce fait mieux à même de rendre compte du risque porté par le régime de rente en permettant une segmentation plus pertinente du montant de l'engagement entre les différentes sources de risque.

2.5. Bibliographie

BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, 373-393.

LEE R.D., CARTER L. [1992] « Modelling and forecasting the time series of US mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, 659–671.

LEE R.D. [2000] « The Lee–Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications », *North American Actuarial Journal*, vol. 4, 80–93.

PLANCHET F., JUILLARD M., FAUCILLON L. [2006], « Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 75.

PLANCHET F. [2007] « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress*

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2006] *Modèles de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.

SITHOLE T., HABERMAN S., VERRALL R.J. [2000] « An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 27, 285–312.

3. Modèles prospectifs de mortalité avec dérive contrainte

3.1. Introduction

Les analyses prospectives de mortalité conduisent à anticiper les évolutions futures des taux de décès aux différents âges. Dans les modèles maintenant classiques de construction de tables prospectives, comme le modèle de Lee-Carter (voir notamment LEE et CARTER [1992], LEE [2000], SITHOLE et al. [2000]) ou les modèles poissoniens (*cf.* BROUHNS et al. [2002] et PLANCHET et THEROND [2006] pour une présentation et une discussion de ces modèles), la dérive de mortalité future est anticipée à partir des observations passées.

Même en admettant qu'il est légitime de prolonger dans les années à venir les tendances observées par le passé (on pourra se reporter à CAREY et TULAPURKAR [2003] pour des analyses intégrant des considérations biologiques et environnementales, ainsi que GUTTERMAN et VANDERHOOF [1999] pour une discussion sur ce point), plusieurs sources d'incertitude viennent perturber la détermination de la tendance future : choix de la période d'observation, fluctuations stochastique des taux de mortalité, événements exceptionnels, *etc.*. Cette incertitude fait peser sur les assureurs de rentes viagères et les régimes de retraite un risque systématique (non mutualisable) dont l'impact financier peut être très important.

Ainsi, en France, la récente actualisation des tables utilisées par les assureurs pour le provisionnement des rentes viagères illustre les difficultés d'une telle anticipation et les enjeux financiers associés : par rapport aux tables TPG[30] 1993 en vigueur jusqu'au 31/12/2006, les nouvelles tables TGH 05 et TGF 05 qui entrent en vigueur le 01/01/2007 conduisent à des majorations de provision parfois supérieures à 20%, comme l'illustre le tableau suivant :

Figure 17 - Comparaison des coefficients de provisionnement TPG 1993 et TGH/TGF 05

Age	Génération	TPG 1993	Femmes	Femmes / TPG	Hommes	Hommes / TPG
50	1955	26,81647	28,40552	5,9%	26,75507	-0,2%
55	1950	24,26368	25,95575	7,0%	24,07474	-0,8%
60	1945	21,50832	23,30185	8,3%	21,25828	-1,2%
65	1940	18,53412	20,39677	10,0%	18,22126	-1,7%
70	1935	15,39467	17,28922	12,3%	15,08772	-2,0%
75	1930	12,25679	14,08680	14,9%	12,05698	-1,6%
80	1925	9,35194	10,96271	17,2%	9,12890	-2,4%
85	1920	6,88306	8,15548	18,5%	6,64827	-3,4%
90	1915	4,93310	5,89309	19,5%	4,73880	-3,9%
95	1910	3,46780	4,29408	23,8%	3,40109	-1,9%

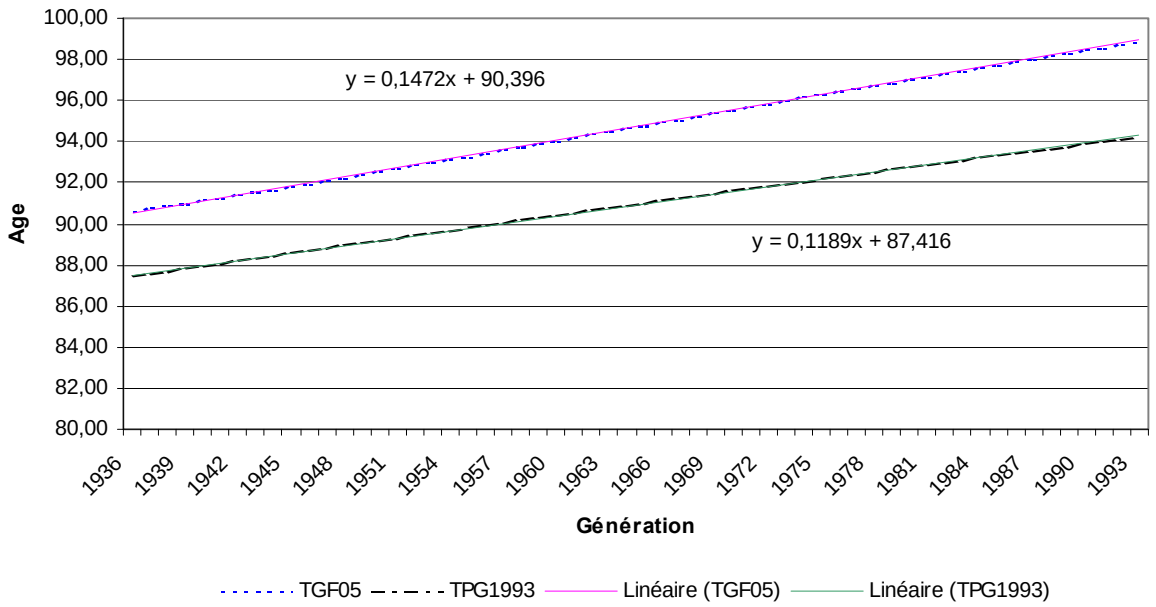
Dans ce contexte il apparaît opportun de rechercher à mesurer le risque associé à cette erreur d'anticipation et de quantifier son impact en termes de provisions pour un régime de rentiers.

En pratique les observations ci-dessus conduisent à la conclusion que le régime de rente est soumis à un risque de modèle important. Il est ainsi possible de reformuler les conséquences du passage des tables TPG 1993 aux tables[31] TGH 05 évoquées ci-dessus en rapprochant

[30] Tables obtenues sur la base de la mortalité de la population féminine sur la période 1961-1987, utilisées depuis le 1er juillet 1993.
[31] On rappelle que les TPG 1993 sont des tables féminines.

l'évolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans dans les deux modèles prospectifs. On obtient ainsi :

Figure 18 - Evolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans



On observe que non seulement les niveaux absolus diffèrent sensiblement, mais également que la vitesse de croissance de l'espérance de vie à 60 ans a été sensiblement sous-estimée en 1993 : alors que les TPG 1993 anticipent une augmentation de 1,4 mois par an, les tables TGF 05 prévoient une dérive de 1,8 mois par an, soit 23 % de plus. On note également que les anticipations de l'espérance de vie suivent des tendances linéaires, ce que nous utiliserons par la suite.

Ceci illustre la difficulté à anticiper la tendance de dérive de la mortalité future à partir de données historiques[32]. Dans ce contexte, on propose d'utiliser comme paramètre de contrôle du modèle, en le fixant comme une contrainte *ex ante* l'espérance de vie à un âge donné (60 ans) et son évolution future. Une telle approche permet de quantifier par exemple l'impact sur les charges du régime d'une erreur de 0,1 mois / an sur la vitesse de dérive de cette espérance et d'intégrer explicitement des indicateurs de l'impact sur l'évaluation de l'engagement du régime d'une erreur de modèle.

On utilise pour cela dans la présente étude le modèle de Lee-Carter (voir notamment LEE et CARTER [1992], LEE [2000], SITHOLE et al. [2000]) pour construire une surface de mortalité $\mu(x,t)$.

Après un ajustement des taux passés, les taux de mortalité pour les années futures se déduisent de l'extrapolation de la composante temporelle en intégrant la contrainte posée *a priori*. On peut noter que l'utilisation de la variante log-Poisson (*cf.* BROUHNS et al. [2002]) conduirait à des résultats très proches, qui ne seront pas repris ici.

Les applications numériques du présent travail sont reprises des résultats obtenus dans EL HORR et al. [2007].

[32] Les populations de référence utilisées pour les 2 séries de tables diffèrent, mais on obtiendrait les mêmes conclusions en utilisant des tables prospectives INSEE à la place des TGF 05.

3.2. Le modèle de mortalité

3.2.1. Rappels sur le modèle de Lee-Carter

Le modèle retenu pour construire les tables prospectives est adapté du modèle de Lee-Carter (LEE et CARTER [1992]). On rappelle que la modélisation proposée pour le taux instantané de mortalité dans Lee-Carter est la suivante :

$$\mathbf{ln}\,\mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt},$$

en supposant les variables aléatoires ε_{xt} indépendantes, identiquement distribuées selon une loi $N(0,\sigma^2)$ et que l'on dispose d'un historique $t_m \le t \le t_M$. La question de l'ajustement des paramètres du modèle n'est pas abordée ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux nombreuses références sur le sujet (citées par exemple dans PLANCHET et THEROND [2006]) .

Une fois ajustée la surface de mortalité sur les données passées, il reste à modéliser la série (k_t) pour extrapoler les taux futurs ; pour cela, on utilise en général une modélisation très simple que la base d'une régression linéaire en supposant une tendance affine :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

avec (γ_t) un bruit blanc gaussien de variance σ_γ. On obtient ainsi des estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ qui permettent de construire des surfaces projetées en utilisant simplement $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$.

Dans la suite, après avoir brièvement présenté la méthode de fermeture de la table proposée, on présente une adaptation de ce modèle qui prend en compte une contrainte que l'on se fixe *a priori* sur l'évolution future des taux de mortalité.

3.2.2. Fermeture de la table

L'estimation des taux bruts de mortalité n'est en général possible que jusqu'à un âge limite relativement éloigné de l'âge maximum de survie. En pratique, les valeurs brutes estimées présentent une grande instabilité aux âges élevés du fait du faible effectif disponible. On dispose ainsi rarement de données de bonne qualité au-delà de 90-95 ans. Par conséquent, on a recours à une méthode de fermeture permettant de compléter la table avant d'effectuer l'ajustement.

Les différentes méthodes de fermeture de table ne seront pas détaillées ici et le lecteur intéressé pourra, sur ce sujet, consulter PLANCHET et THEROND [2006] ou encore DENUIT et QUASHIE [2005]. On retient dans cette étude un modèle simple dans lequel les taux de mortalité aux grands âges, jusqu'à 120 ans, sont extrapolés en se basant sur la formule suivante :

$$q_x = a \times \mathbf{exp}(bx),$$

où a et b sont des réels déterminés par la contrainte $q_{120} = 1$ et par le raccordement aux taux q_x pour les âges inférieurs à $x_0 = 86$, âge auquel nous commençons l'extrapolation.

Au surplus, on rappelle que dans le contexte de l'évaluation de l'engagement d'un régime de rentes viagères, compte tenu de l'âge moyen des rentiers, la méthode de fermeture

finalement retenue n'a qu'une importance relative (voir PLANCHET et THEROND [2006] pour une quantification de cet impact).

3.2.3. Présentation générale du modèle

La formulation usuelle du modèle de Lee-Carter $\mathbf{ln}\,\mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t$ repose sur un modèle implicitement décrit en temps continu. Toutefois, pour le besoin des applications numériques, il s'avère nécessaire de faire une hypothèse permettant de se ramener aux observations, par nature discrètes. L'hypothèse classique consiste à supposer la constance de la fonction de hasard sur chaque carré du diagramme de Lexis, ce qui conduit à $\mu_{xt} = -\mathbf{ln}\left(1 - q_{xt}\right)$.

Dans un premier temps, afin d'éviter cette hypothèse (contestable aux âges élevés notamment), le modèle est écrit directement en temps discret en utilisant les « logits » des taux de décès :

$$\mathbf{ln}\frac{q_{xt}}{1-q_{xt}} = \alpha_x + \beta_x k_t .$$

Comme la transformation inverse de la fonction logistique est $y \to \dfrac{e^y}{1+e^y}$ il est équivalent de poser :

$$q_{xt} = \frac{\mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t\right)}{1+\mathbf{exp}\left(\alpha_x + \beta_x k_t\right)} .$$

Cette approche présente l'avantage de proposer une paramétrisation explicite des taux de décès q_{xt}. En ce qui concerne l'estimation des paramètres du modèle, la démarche est strictement identique à celle proposée par Lee-Carter, en remplaçant systématiquement $\mathbf{ln}\,\mu_{xt}$ par $\mathbf{ln}\dfrac{q_{xt}}{1-q_{xt}}$. Cette formulation est de plus bien adaptée à la prise en compte d'une contrainte sur l'évolution de l'espérance de vie (générationnelle) à un âge donné pour la partie prospective ; en effet on a :

$$e_{xt} = \sum_{h>0}\prod_{k=0}^{h-1}\left(1 - q_{x+k,t+k}\right),$$

et on dispose d'une expression explicite pour q_{xt} en fonction des paramètres $\left(\alpha, \beta, k\right)$. On peut également remarquer que :

$$q_{xt} = 1 - \frac{e_{xt}}{1+e_{x+1,t+1}} .$$

Disposer d'une surface prospective complète est équivalent à déterminer les valeurs $\left(k_t\,; t \geq t_M\right)$. On se donne $\left(e_{xt}\,; t \geq t_M\right)$ pour un âge x fixé ; on veut en déduire les valeurs $\left(k_t\,; t \geq t_M\right)$.

A ce stade, il reste donc à spécifier l'âge x_0 retenu comme « âge pivot » pour l'intégration de l'avis d'expert dans le modèle, ainsi que la forme de l'évolution future de l'espérance de vie à cet âge, c'est à dire la forme de $t \to e_{x_0 t}$, $t \geq t_M$.

On notera ici que par « continuité » de (k_t), la valeur k_{t_M+1} ne doit pas être « trop loin » de k_{t_M} , ce qui induit une contrainte sur $t \to e_{x_0 t}$, $t \geq t_M$. Dans les cas (les plus courants en pratique) où l'allure générale de (k_t) est linéaire, on peut ainsi imaginer de simplement introduire l'avis d'expert au travers d'une rupture de pente sur la droite $t \to k_t$, $t \geq t_M$. Toutefois cette approche ne sera pas privilégiée du fait du caractère non immédiatement appréhensif de (k_t), l'espérance de vie résiduelle étant une notion intuitivement plus aisée.

3.2.4. Une spécification simple du modèle

La spécification la plus simple que l'on puisse imaginer pour $t \to e_{x_0 t}$, $t \geq t_M$, et globalement en phase avec les observations passées, est une évolution linéaire de l'espérance de vie future. Cette forme est au surplus en phase avec ce que l'on constate sur les tables prospectives usuelles (TGP 1993, TGH/TGF 05, etc.). On pose donc :

$$e_{x_0}(t) = a \times t + b ,$$

a et *b* étant les 2 paramètres de notre modèle fixé *ex ante* par l'avis d'expert.

Dans le cas général, une fois fixée la forme de $t \to e_{x_0 t}$, $t \geq t_M$, la détermination de $t \to k_t$, $t \geq t_M$ au travers de la relation $e_{xt} = \sum_{h>0} \prod_{k=0}^{h-1} \left(1 - q_{x+k,t+k}\right)$ n'est pas simple car il est délicat de fixer un horizon *a priori* pour limiter le nombre de (k_t) pris en compte. On propose donc ici d'utiliser des coefficients approchés, obtenus en contraignant (k_t) à avoir une forme polynomiale :

$$k(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 , t \geq t_M .$$

Avec cette hypothèse, on a une relation de la forme $e_x(t) = \varphi_{xt}(a_0, a_1, a_2, a_3)$ et on se ramène ainsi à rechercher $\theta = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ minimisant l'écart quadratique entre les valeurs « à dire d'expert » pour l'espérance de vie à l'âge pivot et la prédiction de ces valeurs par le modèle, c'est à dire à cherchant à résoudre le programme :

$$\underset{(a_0, a_1, a_2, a_3)}{Min} \sum_{t=t_M}^{t_M+h} \left(a + bt - \varphi_{x_0 t}(a_0, a_1, a_2, a_3)\right)^2$$

avec :

$$\sum_{h>0} \prod_{k=0}^{h-1} \left(1 - \frac{\mathbf{exp}\left(\alpha_{x+k} + \beta_{x+k}\left(a_0 + a_1(t+k) + a_2(t+k)^2 + a_3(t+k)^3\right)\right)}{1 + \mathbf{exp}\left(\alpha_{x+k} + \beta_{x+k}\left(a_0 + a_1(t+k) + a_2(t+k)^2 + a_3(t+k)^3\right)\right)}\right) = \varphi_{xt}(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

La résolution du programme ci-dessus ne pose pas de problème particulier numériquement. On notera simplement qu'il convient de projeter les taux de décès sur un horizon bien plus

important que l'horizon de projection des espérances de vie résiduelles : par exemple, pour estimer l'espérance de vie à 65 ans en 2050 il faut disposer des taux de décès jusqu'en 2105 dans l'hypothèse d'un âge maximum de survie de 120 ans.

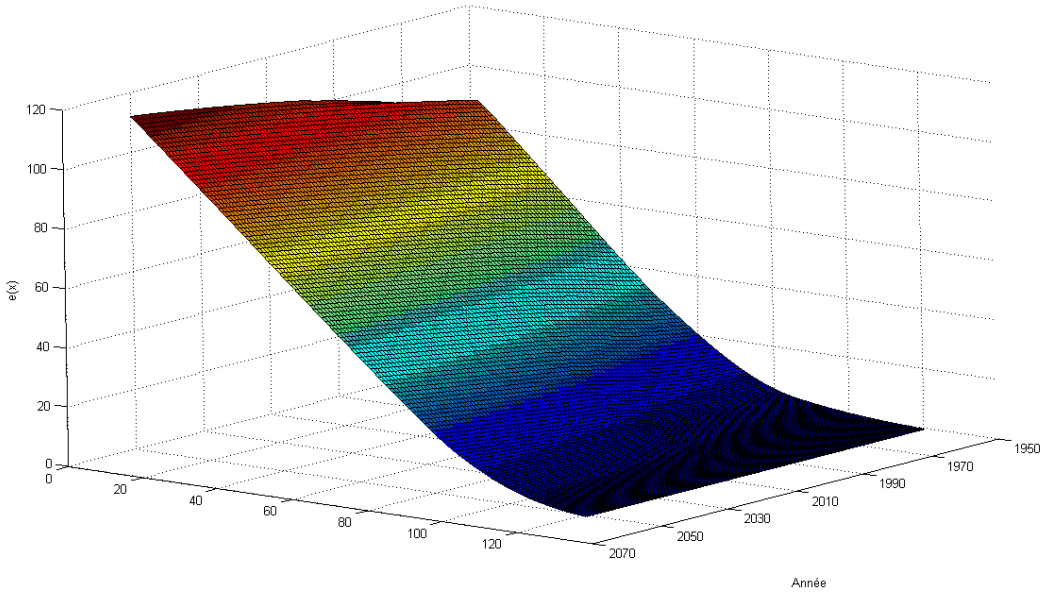
3.3. Application numérique

L'illustration numérique proposée ici est structurée en trois parties : dans un premier temps, nous justifions de la pertinence de l'utilisation des logits des taux de décès en lieu et place de la fonction de hasard, puis nous analysons le comportement de notre modèle pour sa composante prospective en introduisant l'avis d'expert. Enfin, on montre l'application que l'on peut faire de ce modèle pour la quantification du risque de longévité porté par un régime de rentes viagères.

3.3.1. Passage du modèle Lee-Carter standard au Lee-Carter logistique

La table prospective utilisée dans cette étude est construite à partir des tables du moment fournies par l'INED[33] dans MESLE et VALLIN [2002]. L'ajustement sur les données historiques du modèle de Lee-Carter « logistique » conduit à la surface de mortalité suivante :

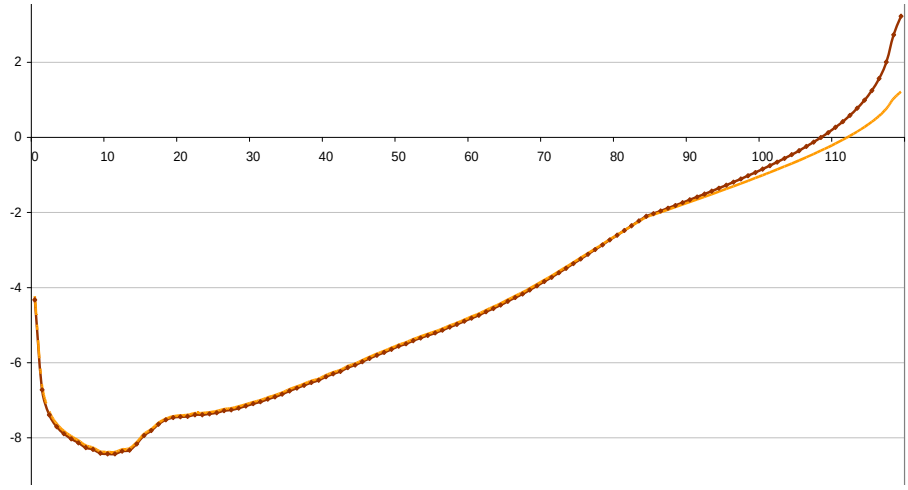
Figure 19 - Surface de mortalité ajustée (Lee-Carter sur les logits)



La proximité des deux modèles (Lee-Carter standard et Lee-Carter logistique) est illustrée par la comparaison des différents paramètres, effectuée ci-dessous :

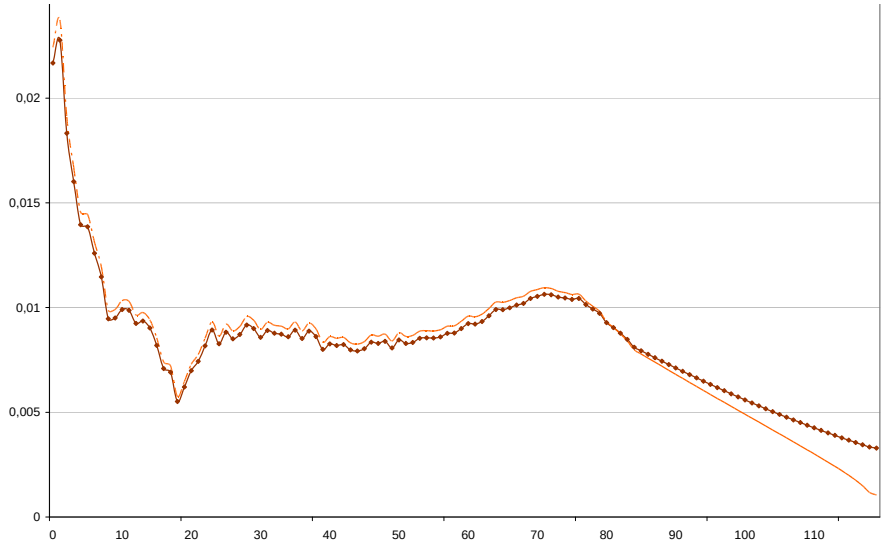
[33] Ces tables sont disponibles sur http://www.ined.fr/publications/cdrom_vallin_mesle/Tables-de-mortalite/Tables-du-moment/Tables-du-moment-XX.htm

Figure 20 - Comparaison des estimations de α_x



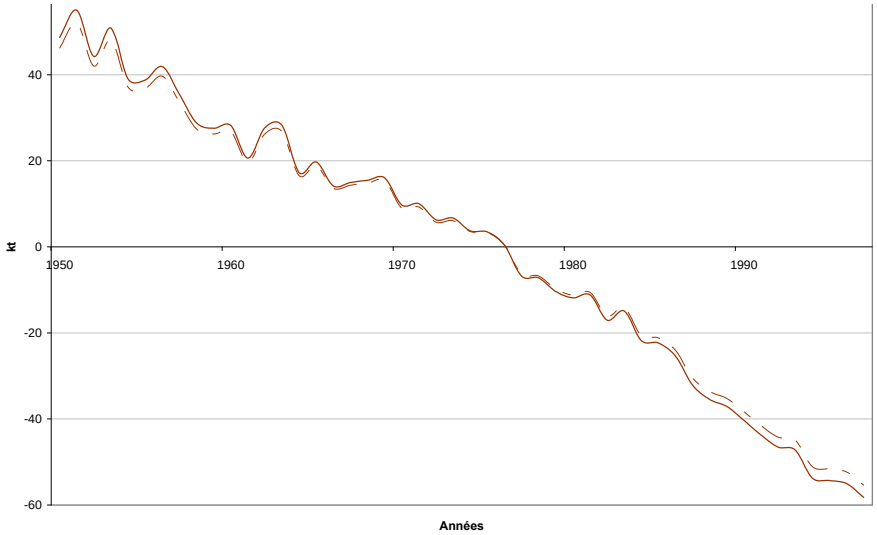
On note comme attendu un écart qui se creuse aux âges élevés et une grande proximité des valeurs ailleurs ; la situation est analogue avec le paramètre β_x :

Figure 21 - Comparaison des estimations de β_x



Pour ce qui concerne la composante temporelle, les différences entre les deux modèles sont négligeables :

Figure 22 - Comparaison des estimations de k_t



On utilise dorénavant la version du modèle sur la base des logits des taux de décès. Les résultats ci-après illustrent le comportement du modèle contrôlé par l'avis d'expert.

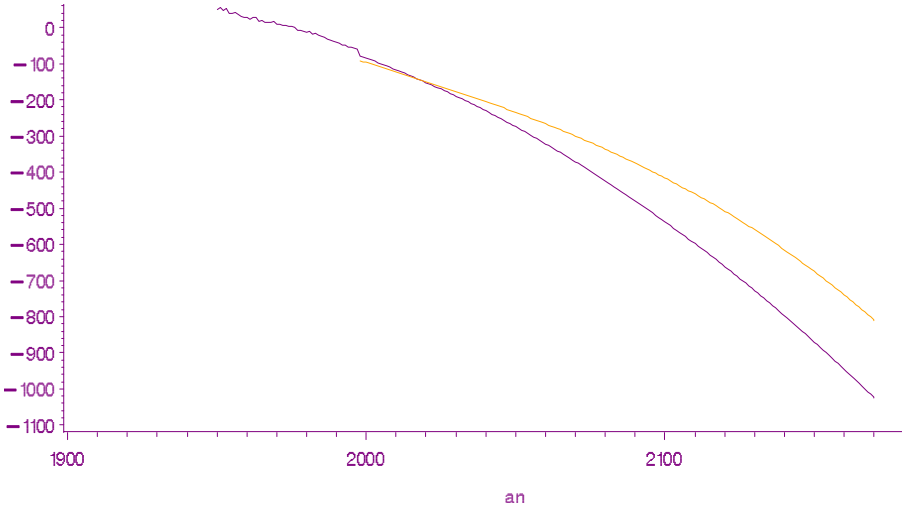
3.3.2. Analyse de la composante prospective

Afin de simplifier l'expression de l'avis d'expert, d'une part, et d'assurer la continuité de l'évolution de l'espérance de vie, d'autre part, on contraint $e_{64}(t_M)$ à être égale à la valeur issue de l'ajustement initial, soit environ 28 ans sur nos données.

Il reste alors à fixer $e_{64}(t)$ pour une date t déterminée *ex ante*. On retient $t = 2050$ comme horizon d'expression de l'avis d'expert, soit une opinion prospective à environ 50 ans. Deux situations sont alors comparées : $e_{64}(2050) = 38$ (qui sera notre situation de référence) et $e_{64}(2050) = 48$.

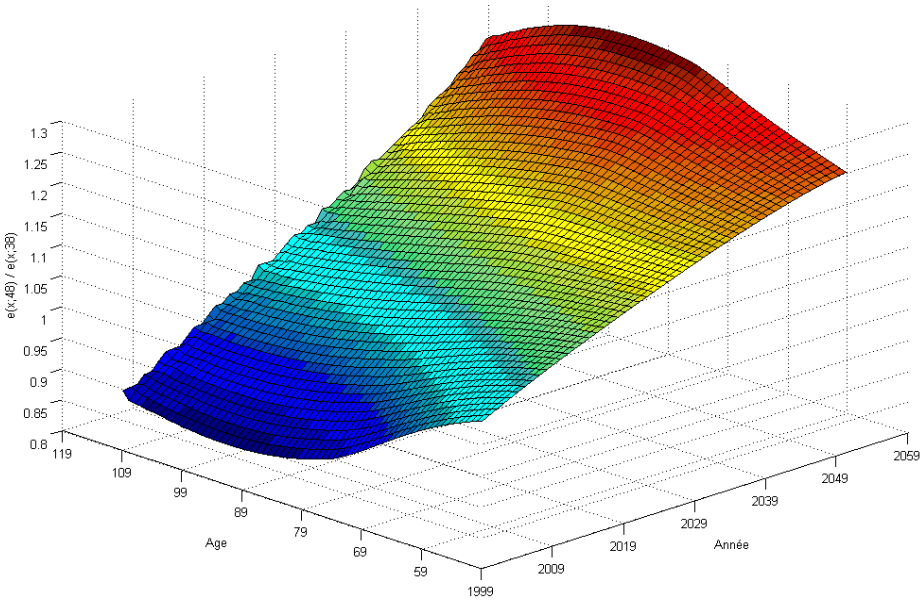
On s'intéresse tout d'abord à l'impact de l'intégration de l'avis d'expert dans la projection du paramètre temporel :

Figure 23 - Comparaison des estimations de k_t dans le modèle contraint et le modèle non contraint



Le rapport des deux surfaces de mortalité ainsi obtenues sur la plage d'âges 60-120 ans est représenté ci-après :

Figure 24 - Surface de mortalité ajustée (Lee-Carter sur les logits)

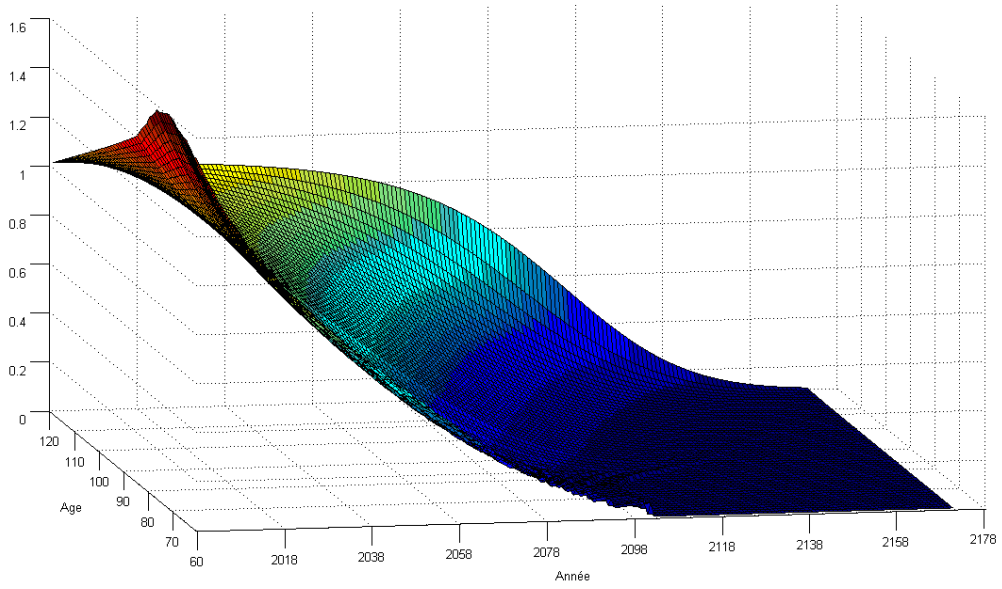


On note en premier lieu que l'avis d'expert formulé à un âge donné se répercute sur l'ensemble des âges. Il s'agit là d'une conséquence du caractère très structurant (et donc très contraignant) du modèle de Lee-Carter, dans lequel la seule donnée de $t \to k_t$, $t \geq t_M$ détermine entièrement la surface prospective pour tous les âges.

On remarque, ce qui n'est pas intuitif, qu'anticiper une augmentation plus importante de l'espérance de vie à 64 ans conduit à court terme à réviser à la baisse l'estimation de l'espérance de vie aux âges plus élevés pendant quelques années. Bien entendu, dans le long terme, l'espérance de vie à tous les âges concernés devient supérieure à l'espérance qui était anticipée dans le modèle de référence.

Cette évolution comparée des espérances de vie dans les deux situations est la conséquence d'une projection de long terme des taux de sortie instantanés. La figure ci-après présente l'évolution du rapport des taux des décès dans les deux hypothèses de travail :

Figure 25 - Surface de mortalité ajustée (Lee-Carter sur les logits)



On retrouve en mode « inversé » les caractéristiques de la surface précédente. On observe que l'écart d'espérance de vie anticipé à 64 ans à un horizon d'environ 50 ans (+ 26 %) implique une décroissance beaucoup plus forte des taux de décès à tous les âges (au-delà de 60 ans). On observe ainsi des abattements de plus de 90 % après un siècle.

Cela donne une idée de la contrainte que représente un gain d'espérance de vie résiduelle à 64 ans sur les taux de décès annuels. En d'autres termes, une faible variation des taux de décès annuels n'impacte quasiment pas l'espérance de vie résiduelle. En d'autres termes l'engagement d'un régime de rente est peu sensible à des phénomènes instantanés affectant la mortalité sur une année.

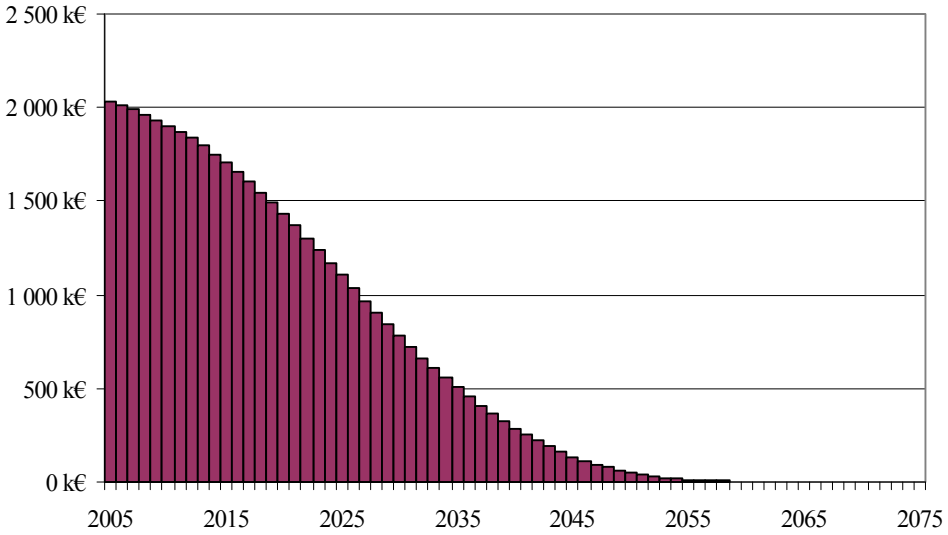
3.3.3. Application à un régime de rentes viagères

Un régime de rente est confronté principalement à un risque financier et, de manière seconde, à un risque de mauvaise anticipation de la mortalité des rentiers ; ce risque de longévité (voir PLANCHET et al. [2006]) doit, dans le contexte du projet de réforme des règles prudentielles « Solvabilité 2 », être quantifié. Le modèle que nous proposons ici permet de proposer une évaluation de ce risque, nous illustrons cela dans la suite de ce paragraphe.

Nous utilisons encore pour cette illustration le portefeuille[34] constitué de 374 rentiers de sexe féminin âgés en moyenne de 63,8 ans au 31/12/2005. La rente annuelle moyenne s'élève à 5,5 k€. La figure 2 *infra* présente les flux de prestations espérés en fonction du temps obtenu à partir de la table de mortalité TV 2000.

[34] Il s'agit en fait du portefeuille utilisé dans PLANCHET et al. [2006].

Figure 26 - Flux de prestations espérées



En raisonnant pour simplifier à taux technique nul (*ie* le capital constitutif d'un € de rente est exactement égal à l'espérance de vie à cet âge), on trouve que l'engagement du régime passe de 67 M€ dans la situation de référence $e_{64}(2050) = 38$ à 70,9 M€ en supposant une valeur cible plus élevée de 10 ans. Cet écart d'un peu moins de 6 % peut être associé au risque de longévité.

On remarquera incidemment que l'écart de 10 ans sur 50 ans de projection est cohérent avec l'écart de presque 2 ans observé sur 10 ans lors de l'actualisation des tables réglementaires en France (voir l'introduction du présent article).

3.4. Conclusion

Alors que la mauvaise anticipation de l'espérance de vie future aux âges de service des prestations constitue un risque majeur pour les régimes de rente, le modèle proposé fournit un outil opérationnel simple à mettre en œuvre et de nature à permettre une mesure de la sensibilité de l'engagement du régime à diverses hypothèses d'évolution de cette espérance de vie.

En particulier, le modèle proposé fournit un cadre simple et justifiable pour quantifier un besoin en capital spécifique pour le risque de longévité porté par le régime de rentes de manière plus lisible et plus robuste que les modèles stochastiques de mortalité.

3.5. Bibliographie

BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, 373-393.

CAREY J.R., TULAPURKAR S. Ed. [2003] *Life Span, Evolutionnary, Ecological and Demographic Perspectives*, Population and Development Revue (sup. to vol. 29) , Population Council.

GUTTERMAN S., VANDERHOOFT I.T. [1999] « Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects », *North American Actuarial Journal*, vol. 2, 135-138.

EL HORR R., SARAC-DEDIC J., FERRIER C., SILVANT M. [2007] « Modèles de mortalité avec dérive contrainte », *Rapport de groupe de travail ISFA.*

LEE R.D., CARTER L. [1992] « Modelling and forecasting the time series of US mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, 659–671.

LEE R.D. [2000] « The Lee–Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications », *North American Actuarial Journal*, vol. 4, 80–93.

MESLE F., VALLIN J. [2002] « Comment améliorer la précision des tables de mortalité aux grands âges ? Le cas de la France », *Population n°4*, INED, 603.

PLANCHET F., JUILLARD M., FAUCILLON L. [2006], « Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 75.

PLANCHET F., LELIEUR V. [2006] « Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations », à paraître dans le *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 7 n°14

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2006] *Modèles de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.

SITHOLE T., HABERMAN S., VERRALL R.J. [2000] « An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 27, 285–312.

Partie 2 : Détermination du capital de solvabilité dans le référentiel[35] Solvabilité 2

Le projet Solvabilité 2 a l'ambition de conduire les entreprises d'assurance à identifier, quantifier, puis contrôler l'ensemble des risques qu'elles portent. Le contrôle des risques est assuré par un niveau minimal de capital à allouer à l'activité, le SCR, de même nature que l'actuelle marge de solvabilité.

Mais alors que la marge de solvabilité est déterminée par des règles simples mais heuristiques et sans quantification explicite du niveau de contrôle du risque, le projet Solvabilité 2 propose de fixer le SCR de sorte que l'entreprise puisse justifier d'une capacité à tenir ses engagements avec une probabilité supérieure à 99,5 % à l'horizon d'un an.

Comment exprimer de manière plus explicite cette contrainte ?

Une remarque préliminaire s'impose : alors que jusqu'à présent la marge de solvabilité est fixée indépendamment des choix en matière d'investissement de l'actif, ce nouveau critère de détermination du SCR implique que ces choix impactent dorénavant le besoin en capital. De manière plus directe, une allocation plus risquée conduit à un besoin en capital plus important.

D'un point de vue pratique, on est donc conduit à mettre en place un modèle actif / passif pour fixer le SCR ; de manière plus précise, une fois ce « modèle interne » mis en place, il devient possible de simuler le besoin en capital conduisant à un bilan équilibré à l'horizon un an. Le quantile à 99,5 % de la distribution de ce « surplus » fournit une estimation du SCR.

On dispose donc d'un moyen en principe simple de calculer le SCR dans le cadre d'un modèle interne[36].

Il ne faut toutefois pas perdre de vue le fait que le SCR étant par définition un quantile d'ordre élevé de la distribution du surplus, son niveau est finalement déterminé par les événements extrêmes tant au passif qu'à l'actif. Ces événements (sinistres de montant très élevé, variations très brutales de la valeur d'un actif, etc.) ne doivent pas être considéré comme des accidents au sens où ils sont au cœur des mécanismes économiques, comme l'on montré notamment les travaux de Benoît Mandelbrot ou Daniel Zajdenweber[37].

Cela impose une première contrainte sur les composants du modèle actif passif, qui doivent correctement représenter les valeurs extrêmes. De fait, les modélisations actif / passif usuelles laissent souvent de coté ces questions : la très classique hypothèse de rendements gaussiens indépendants sous estime par exemple notoirement ce type de valeurs, et donc son utilisation dans le cadre de la détermination du SCR conduit à une sous estimation systématique du besoin en capital.

On peut formuler la même remarque pour la modélisation du passif.

Il est bien entendu possible de pallier à ce risque de modèle en mettant en œuvre des approches adaptées à ces contraintes spécifiques de représentation des événements extrêmes.

Mais même en supposant que le modèle représente correctement la réalité, une difficulté pratique importante subsiste. En effet, la complexité du modèle interne ainsi construit nécessite pour sa mise en œuvre de recourir à des techniques de simulation. Pour chaque

[35] Ce texte est adapté de PLANCHET [2007b].
[36] La question de l'adéquation du modèle standard tel que l'on peut se l'imaginer via le QIS 3 aux principes de base de Solvabilité 2 n'est pas abordée ici.
[37] On pourra notamment lire « Une approche fractale des marchés » de B. Mandelbrot et « L'économie des extrêmes » de D. Zajdenweber.

« état du monde » que l'on génère on obtient une réalisation du surplus. En répétant le mécanisme on construit la distribution empirique du surplus, distribution qui constitue *in fine* la référence de base pour le calcul du SCR.

Compte tenu des contraintes informatiques et notamment du temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une réalisation du surplus, le nombre de points disponibles reste limité : quelques centaines en pratique. Mais sur un échantillon de 1 000 valeurs, le quantile à 99,5 % est finalement déterminé par les 5 valeurs les plus grandes de l'échantillon… On mesure ainsi le risque d'échantillonnage auquel on se trouve confronté.

Fixer le niveau du SCR va donc nécessiter de modéliser convenablement la loi du surplus. Deux approches sont envisageables : un ajustement paramétrique global de l'ensemble de cette distribution ou le recours à la théorie des valeurs extrêmes qui permet de ne modéliser que la « queue de distribution ». Mais, quelle que soit l'option retenue, les travaux existants sur le sujet mettent en évidence une grande imprécision dans la mesure ainsi obtenue du capital de solvabilité.

Doit-on pour autant considérer que ce critère de probabilité de ruine n'a pas de sens ? Sans doute pas, mais à la condition que le régulateur fixe des règles strictes sur les modélisations admissibles et ne laisse pas l'entreprise libre de ses choix lors de l'élaboration d'un modèle interne.

4. Risque de modèle et détermination du capital économique

4.1. Introduction

Le projet Solvabilité 2 (cf. COMMISSION EUROPEENNE [2003], [2004] et AAI [2004]) en cours d'élaboration modifie profondément les règles de fixation du niveau des fonds propres en assurance en introduisant comme critère explicite le contrôle du risque global supporté par la société, risque qui devra être quantifié au travers de la probabilité de ruine à horizon un an.

Cette exigence de capital de solvabilité (*Solvency Capital Requirement* ou SCR) pourra être obtenue par une formule standard commune à tous les assureurs et construite selon une approche modulaire[38] des risques ou via un modèle interne, plus adapté au risque réellement supporté par l'assureur. Dans les deux situations, l'objectif reste le même : déterminer le niveau de ressources dont doit disposer aujourd'hui l'assureur pour ne pas être en ruine dans un an dans un cas sur 200.

Le niveau retenu de 99,5 %, implique la nécessite d'estimer convenablement un quantile d'ordre élevé de la distribution d'intérêt (en pratique ici celle du surplus, ou marge actif-passif). Cette question est largement développée dans la littérature financière, confrontée à ces questions depuis les accords de Bâle 2 dans le milieu bancaire. On peut par exemple citer ROBERT [1998] ou encore GAUTHIER et PISTRE [2000].

Dans ce contexte nouveau en assurance, les modélisations classiques tant de l'actif que du passif, qui portent une attention limitée à la modélisation de la queue de distribution peuvent s'avérer pénalisante car elles conduisent à une trop faible représentation des valeurs extrêmes. Ce point est par exemple illustré pour les modélisations de l'actif dans BALLOTTA [2004] pour le cas des options cachées d'un contrat d'épargne, et dans PLANCHET et THEROND [2005] dans le cadre d'un modèle mono périodique simplifié en assurance non-vie pour la détermination du capital cible et de l'allocation d'actifs. THEROND et PLANCHET [2007] attirent aussi l'attention sur l'importance des extrêmes dans la détermination du capital de solvabilité (SCR).

Dans le présent article, nous développons ce point de vue en perturbant un modèle de référence simple en alourdissant sa queue de distribution ; on montre qu'il est possible d'obtenir ainsi des situations dans lesquels le modèle de base sous-estime de manière significative le capital de solvabilité, tout en étant difficilement discernable statistiquement du modèle perturbé si une attention particulière n'est pas portée aux valeurs extrêmes.

Nous proposons une approche empirique pour décider si des modélisations de type « valeurs extrêmes » doivent être mises en œuvre sur la base d'un échantillon observé.

4.2. Description du modèle

4.2.1. Présentation

On considère une distribution de probabilité décrite par sa fonction de survie S_0 ; plus précisément on suppose que la variable positive X est définie par la fonction de survie suivante :

[38]. L'étude d'impact quantitatif QIS 3 menée par le CEIOPS (http://www.ceiops.org) donne une bonne idée de ce que sera la formule standard lorsque les directives Solvabilité 2 auront été adaptées.

$$S_X(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \le m \\ \left(\dfrac{x}{m}\right)^{-\alpha} S_0(m) & x > m \end{cases}$$

En d'autres termes, X est distribuée selon la loi S_0 jusqu'au seuil m, et ensuite selon une loi de Pareto de paramètre (m,α). En particulier $P(X > m) = S_X(m) = S_0(m)$. Nous ne reviendrons pas ici sur les motivations qui conduisent à retenir la loi de Pareto, nous bornant à renvoyer le lecteur à EMBRECHTS et al. [1997] pour les aspects théoriques de la question et ZAJDENWEBER [2000] pour un éclairage pratique.

On vérifie que l'égalité ci-dessus définit bien une fonction décroissante, continue si S_0 est continue, telle que $S_X(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} S_X(x) = 0$. S_X définit donc bien une fonction de survie.

L'existence des moments de S_X est conditionnée par l'existence des moments du même ordre pour la loi de Pareto de paramètre (m,α). Le moment d'ordre k n'existe donc que pour $k < \alpha$.

Dans le contexte de la présente étude on choisira le seuil m de sorte qu'il corresponde à un quantile élevé de la distribution S_0, par exemple tel que $S_0(m) = 1{,}5\%$. Le modèle « mélangé » ainsi défini se comporte donc « presque » comme le modèle de base associé à S_0 (pour la part $1 - S_0(m)$ des observations), mais diffère au-delà de ce seuil. On déduit de la définition de S_X que :

$$P(X > x | X > m) = \frac{P(X > x)}{P(X > m)} = \frac{S_X(x)}{S_X(m)} = \left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha},$$

ce qui signifie que la loi de X conditionnellement au fait que le seuil m est dépassé est une loi de Pareto (m,α). Symétriquement on trouve que :

$$P(X > x | X \le m) = \frac{P(x < X \le m)}{P(X \le m)} = \frac{S_X(x) - S_X(m)}{1 - S_X(m)} = \frac{S_0(x) - S_0(m)}{1 - S_0(m)}.$$

La fonction quantile de X pour des valeurs de p inférieures à $1 - S_0(m)$ est donnée simplement par :

$$x_p = m \times \left(\frac{1-p}{S_0(m)}\right)^{-1/\alpha}.$$

Cette expression se déduit simplement de l'égalité $1 - p = \left(\dfrac{x}{m}\right)^{-\alpha} S_0(m)$ valable pour $x > m$. Logiquement on a $x_{1-S_0(m)} = m$.

On souhaite comparer le cas où le risque X est distribué simplement comme S_0 et le cas où la queue de distribution est alourdie comme ci-dessus (« distribution mélangée »). Plus précisément on souhaite comparer les fonctions quantile dans les 2 situations, pour des

quantiles d'ordre élevé. D'un point de vue pratique, on veut donc comparer le montant du capital de solvabilité dans les 2 situations.

Dans le cas où X est distribué selon S_0 la fonction quantile est par définition $x_p = S_0^{-1}(1-p)$. Dans ce cas encore on a bien entendu $x_{1-S_0(m)} = m$.

Dans la suite de ce papier, on considère que la distribution de référence est log-normale, à la fois du fait de sa simplicité d'utilisation et du fait de sa très grande utilisation dans les problèmes d'assurance.

4.2.2. Cas particulier de la loi log-normale

On considère maintenant que le risque de base est log-normal, et donc :

$$x_p = VaR_p(X) = S_0(1-p) = F_0^{-1}(p) = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p)\right).$$

On a $S_0(m) = P\left(Z > \frac{\ln(m)-\mu}{\sigma}\right) = 1-\phi\left(\frac{\ln(m)-\mu}{\sigma}\right)$. On en déduit l'expression explicite de la fonction quantile dans le cas du modèle mélangé :

$$x_p = m \times \left(\frac{1-p}{1-\phi\left(\frac{\ln(m)-\mu}{\sigma}\right)}\right)^{-1/\alpha}.$$

Dans les applications, on fixe m en contrôlant $1-S_0(m)$ à un niveau assez grand mais inférieur à p ; typiquement dans un contexte Solvabilité 2 $p = 99{,}5\%$ et on choisira $S_0(m) = 2\%$ ou $S_0(m) = 1\%$. On note $p_0 = 1-S_0(m)$ le niveau choisi, de sorte que $x_p = S_0^{-1}(1-p_0) \times \left(\frac{1-p}{1-p_0}\right)^{-1/\alpha}$.

Dans le cas d'une distribution de référence log-normale on obtient donc pour le modèle mélangé :

$$x_p^{MEL} = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p_0)\right) \times \left(\frac{1-p}{1-p_0}\right)^{-1/\alpha},$$

formule à comparer à la version obtenue dans le modèle direct log-normal :

$$x_p^{LN} = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p)\right).$$

Le rapport des deux quantiles s'écrit donc :

$$r(\alpha) = \mathbf{exp}\left(\sigma\left(\phi^{-1}(p_0) - \phi^{-1}(p)\right)\right) \times \left(\frac{1-p}{1-p_0}\right)^{-1/\alpha}.$$

On peut noter incidemment que ce rapport ne dépend pas du paramètre μ. $r(\alpha)$ est une fonction décroissante de α : lorsque α diminue, le risque associé à la distribution mélangée augmente et donc le capital requis pour le couvrir aussi.

On sera confronté à une situation de risque de modèle dans le cas où malgré une valeur $r(\alpha) >> 1$ un échantillon issu du modèle mélangé serait difficilement discernable d'un échantillon log-normal. Le modèle log-normal est largement répandu en assurance et, en particulier, c'est sur ce modèle qu'ont été calibrés une partie des paramètres de la formule standard décrite dans QIS 3. C'est cette situation que nous allons nous attacher à examiner plus attentivement dans la suite de cet article.

4.2.3. Estimation des paramètres du modèle

L'estimation des paramètres peut être effectuée par la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, la log-vraisemblance s'écrit, en notant $\left(x_{(1)},..,x_{(n)}\right)$ la statistique d'ordre associée à l'échantillon $(x_1,..,x_n)$ et k le plus petit indice tel que $x_{(k)} \geq m$:

$$l(x_1,..,x_n;\mu,\sigma,\alpha) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{ln}\left(\frac{1}{\sigma x_{(i)}\sqrt{2\pi}}\mathbf{exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{ln}\left(x_{(i)}-\mu\right)}{\sigma}\right)\right]\right) + \sum_{i=k}^{n}\mathbf{ln}\left(\alpha m^{\alpha} S_0(m) x_{(i)}^{-\alpha-1}\right)$$

ce qui conduit après simplification à :

$$l(x_1,..,x_n;\mu,\sigma,m,\alpha) = cste - (k-1)\mathbf{ln}(\sigma) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\mathbf{ln}\left(x_{(i)}\right)-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$+(n-k+1)\mathbf{ln}(\alpha) + \alpha(n-k+1)\mathbf{ln}(m) - \alpha\sum_{i=k}^{n}\mathbf{ln}\left(x_{(i)}\right) + (n-k+1)S_0(m)$$

Du fait de la présence de $k = \mathbf{min}\left\{i; x_{(i)} \geq m\right\}$ l'expression de la log-vraisemblance est difficilement utilisable en l'état. On peut toutefois décomposer le problème de maximisation en remarquant que :

$$\max_{(\mu,\sigma,m,\alpha)} l(x_1,..,x_n;\mu,\sigma,m,\alpha) = \max_{m}\max_{(\mu,\sigma,\alpha)} l(x_1,..,x_n;\mu,\sigma,m,\alpha).$$

On note alors qu'une fois m fixé, les expressions des dérivées partielles de la log-vraisemblance sont les expressions classiques des deux lois sous-jacentes, sur les plages de données les concernant. Les estimateurs de μ et σ sont ainsi les classiques estimateurs empiriques pour l'échantillon gaussien $\left(\mathbf{ln}\, x_{(i)}; i = 1,..,k-1\right)$:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{ln}\, x_{(i)} \text{ et } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\mathbf{ln}\, x_{(i)} - \hat{\mu}\right)}.$$

L'estimateur du paramètre de queue α est fourni par l'expression :

$$\hat{\alpha} = \frac{n-k+1}{\sum_{i=k}^{n} \mathbf{ln}\left(\frac{x_{(i)}}{m}\right)}.$$

Il reste à éliminer m, inconnu, dans l'équation ci-dessus. En pratique on pourra donc procéder de la manière suivante :

- ✓ on fixe k (en commençant par exemple par $k = 95\% \times n$) ;
- ✓ on calcule $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$;
- ✓ on calcule $\hat{m} = \mathbf{exp}\left(\hat{\mu} + \hat{\sigma}\phi^{-1}\left(k/n\right)\right)$;
- ✓ L'estimateur (pseudo maximum de vraisemblance) du paramètre de queue α est alors fourni par l'expression $\hat{\alpha} = \frac{n-k+1}{\sum_{i=k}^{n} \mathbf{ln}\left(\frac{x_{(i)}}{\hat{m}}\right)}$.

On obtient une valeur $l(k)$ de la log-vraisemblance ; on recommence avec $k' > k$, et on conserve l'estimation des paramètres associée à la valeur maximale de la séquence $l(k)$ ainsi obtenue.

On notera que les estimateurs ci-dessus sont *a priori* biaisés (même si en tant qu'estimateurs du maximum de vraisemblance ils sont asymptotiquement sans biais).

4.2.4. Conséquence sur le niveau du capital de l'estimation des paramètres

BOYLE et WINDCLIFF [2004] mettent en évidence l'importance de l'étape d'estimation des paramètres, du fait de la perte d'information à ce niveau, dans la pertinence des résultats fournis par un modèle théorique. Comme ici on dispose de formules fermées pour la fonction quantile dans chacun des modèles, le niveau du capital de solvabilité sera simplement estimé, dans le modèle mélangé, par

$$\hat{x}_p^{MEL} = \mathbf{exp}\left(\hat{\mu} + \hat{\sigma}\phi^{-1}\left(p_0\right)\right) \times \left(\frac{1-p}{1-p_0}\right)^{-1/\hat{\alpha}},$$

et, dans le modèle log-normal, par

$$\hat{x}_p^{LN} = \mathbf{exp}\left(\hat{\mu} + \hat{\sigma}\phi^{-1}\left(p\right)\right).$$

Cas du modèle log-normal

On vérifie facilement que la fonction $f_a(x, y) = \mathbf{exp}(x + ay)$ est convexe ; on en déduit avec l'inégalité de Jensen (DACUNHA-CASTELLE et DUFLO [1982]) que :

$$E\left(\hat{x}_p^{LN}\right) = E\,\mathbf{exp}\left(\hat{\mu} + \hat{\sigma}\phi^{-1}\left(p\right)\right) \geq \mathbf{exp}\left(E\left(\hat{\mu}\right) + E\left(\hat{\sigma}\right)\phi^{-1}\left(p\right)\right).$$

Comme dans le modèle log-normal le paramètre μ est estimé sans biais, et que l'on peut remplacer $\hat{\sigma}$ par sa version corrigée du biais $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\hat{\sigma}$, on en conclut que :

$$E\left(\hat{x}_p^{LN}\right) \geq x_p^{LN} = \mathbf{exp}\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p)\right).$$

En d'autres termes, la procédure d'estimation du capital de solvabilité dans un modèle log-normal conduit à le surestimer en moyenne.

Cas du modèle mélangé

Dans le cas du modèle mélangé, on doit examiner le comportement de $f_{a,b}(x,y,z) = \mathbf{exp}\left(x + ay + \frac{b}{z}\right)$ avec $b = \mathbf{ln}\left(\frac{1-p_0}{1-p}\right) > 0$. Un simple calcul matriciel permet de vérifier la positivité de la matrice hessienne associée, et du même coup le caractère convexe de $f_{a,b}$. Mais il n'est pas aisé d'en déduire le sens du biais sur l'estimation du SCR, les paramètres n'étant plus sans biais.

Les simulations numériques tendent à mettre en évidence un biais négatif, *ie* une sous-estimation du SCR, ce qui constitue un point pénalisant en pratique (cf. *infra*).

4.2.5. Application numérique

D'un point de vue pratique, l'estimation du SCR ne s'effectue pas sur des données observées mais sur des valeurs simulées issues d'un modèle (le « modèle interne ») ; on pourra par exemple sur ce point consulter THEROND et PLANCHET [2007]. Les contraintes de calcul font qu'il n'est pas envisageable de disposer d'un nombre arbitrairement grand de réalisations de la marge actif-passif simulée et que l'estimation du SCR devra donc être effectuée sur un échantillon de taille modeste.

De ce fait, la modélisation de la marge actif-passif est déterminante quant à la détermination du niveau de capital.

Simulation de la loi mélangée

La simulation d'un échantillon issu de la loi mélangée peut être obtenu simplement de la manière suivante :

- ✓ tirage d'une valeur *u* distribuée uniformément sur $[0,1]$;
- ✓ si $u > p_0$, tirage de *x* dans la loi de Pareto de paramètres (m,α) ;
- ✓ si $u < p_0$, tirage de *x* dans la loi $S(x) = \frac{S_0(x) - S_0(m)}{1 - S_0(m)}$.

Ce dernier tirage peut être effectué avec une méthode de rejet : on effectue un tirage dans la loi log-normale, et on le rejette si la valeur obtenue est supérieure à *m*. En effet, comme :

$$P\left(X > x \middle| X \leq m\right) = \frac{S_0(x) - S_0(m)}{1 - S_0(m)},$$

cela conduit exactement à la loi cherchée.

Résultats

Pour l'illustration numérique on retient :

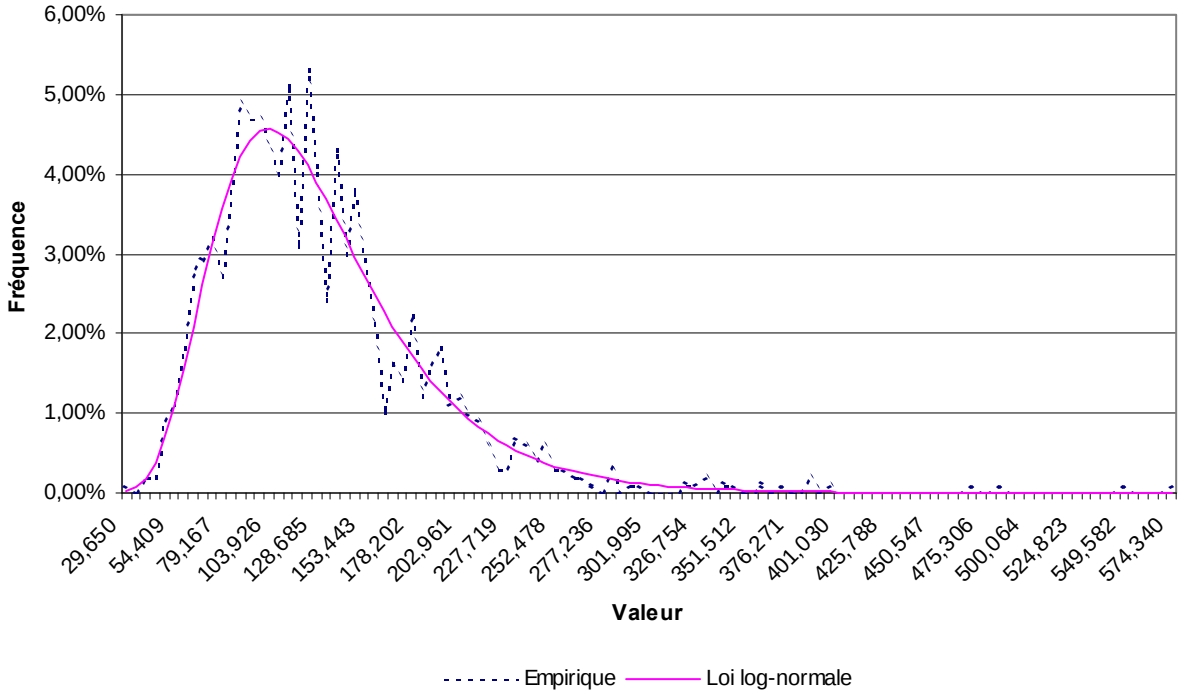
Seuil distribution (p_0)	98,50%
Seuil SCR (p)	99,50%
m (seuil)	353,554

log-normale		Pareto	
$\mu =$	5	$\gamma =$	353,554
$\sigma =$	0,4	$\alpha =$	3,9

Avec ces hypothèses, la valeur théorique du ratio des SCR dans le modèle mélangé et dans le modèle log-normal de référence est égale à 113 % ; en d'autres termes, utiliser le modèle log-normal conduit à sous estimer le besoin en capital de plus de 10 % si le modèle dont sont issues les données est le modèle mélangé.

On génère alors 2 échantillons de 1 000 réalisations de chacun des 2 modèles et on étudie l'adéquation de l'échantillon issu de la loi « mélangée » à une loi log-normale. On obtient l'ajustement suivant :

Figure 27 - Ajustement de la loi log-normale sur un échantillon mélangé



L'ajustement est largement accepté par un test du Khi-2. Une analyse trop rapide conduirait donc à accepter un ajustement inadapté à la réalité des données. Il convient d'examiner le comportement de la queue de distribution.

Identification des valeurs extrêmes

On remarque que si on fixe une probabilité $p > p_0$, alors la probabilité que le quantile d'ordre *p* de la distribution log-normale soit dépassé dans la distribution mélangée est :

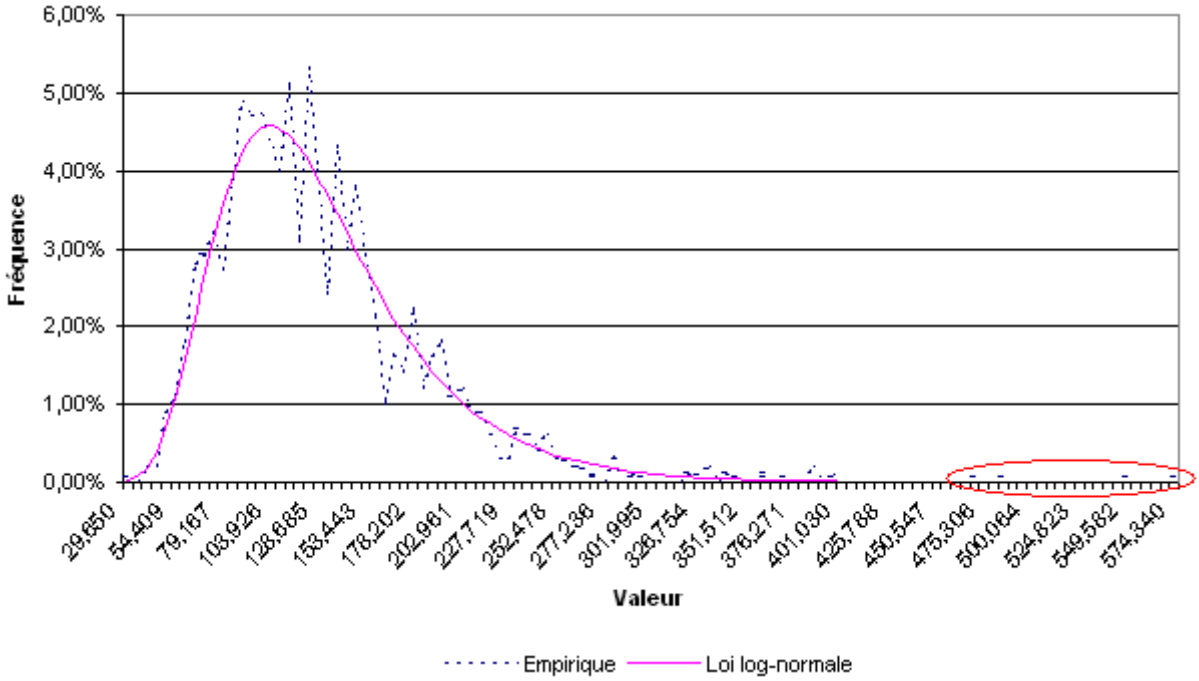
$$\pi(p) = 1 - \left(\frac{\exp\left(\mu + \sigma\phi^{-1}(p)\right)}{m} \right)^{-\alpha} S_0(m)$$

Dans notre exemple, si $p = 99{,}8\%$ alors $\pi(p) = 0{,}50\%$; en conséquence, sur un échantillon de 1 000 valeurs, on trouvera en moyenne deux valeurs qui dépassent $S_0^{-1}(1 - 99{,}8\%)$, alors que ce seront 5 valeurs qui dépasseront ce seuil si la distribution sous-jacente est la distribution mélangée. Comme le nombre de valeurs N_u dépassant un seuil *u* est approximativement normal on a :

$$P(N_u \geq k) \approx 1 - \phi\left(\frac{k - nS(u)}{\sqrt{nS(u)(1 - S(u))}} \right).$$

Cela fournit un test pour rejeter l'hypothèse que la distribution sous-jacente est log-normale en comptant le nombre de dépassements du seuil $S_0^{-1}(1 - 99{,}8\%)$ dans l'échantillon. Par exemple, dans notre application, au seuil de confiance 10 % cette règle conduit à rejeter l'hypothèse nulle dès que $k \geq 4$. Sur l'échantillon présenté sur le graphique *supra* on remarque ainsi que 4 points sont dans cette situation :

Figure 28 - Identification des valeurs extrêmes

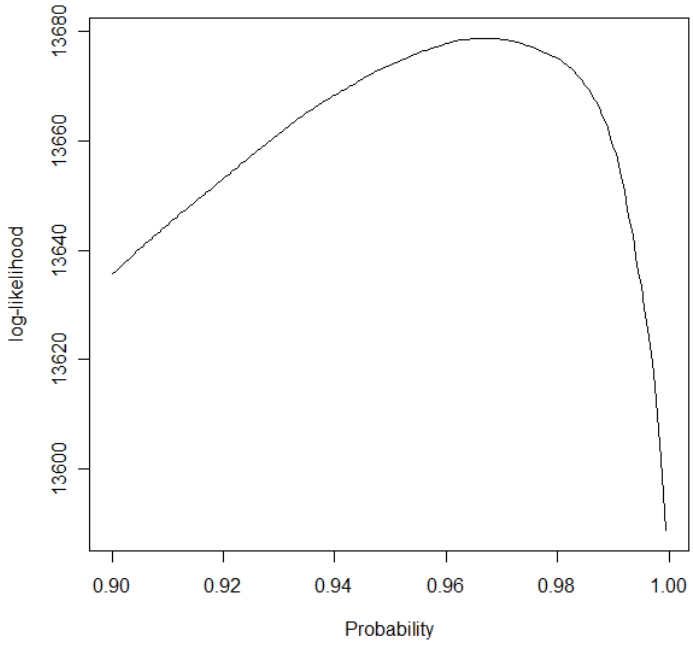


On serait donc conduit à rejeter l'ajustement log-normal et à utiliser un modèle tenant compte de la présence de ces valeurs extrêmes.

Ajustement du modèle mélangé

L'ajustement par maximum de vraisemblance du modèle mélangé ne présente pas de difficulté pratique ; en effet, le calcul itératif de la log-vraisemblance effectué avec différentes valeurs de k fait apparaître un maximum de pente lorsque $\frac{k}{n} \approx p_0 = 1 - S_0(m)$, comme l'illustre le graphique ci-dessous :

Figure 29 - Calcul du maximum de vraisemblance : identification de m



Les valeurs obtenues sur un échantillon « typique » sont de la forme :

	Estimation	Théorique	
μ	4,958	5	
σ	0,386	0,4	
γ	317,097799	353,553971	
α	3,475	3,9	
Ratio estimé=	117%	113%	
Capital de solvabilité			
SCR LN	416,00	415,85	0,0%
SCR mélangé	451,29	468,59	-3,7%

L'estimation du SCR dans un échantillon log-normal est relativement robuste dans le cas d'un échantillon de taille 1000 ; par contre, on observe une sous-estimation du capital dans le cas du modèle mélangé. On peut retenir au global que, si les données sont issues du modèle mélangé, le fait de considérer qu'elles sont en fait issues d'un échantillon log-normal conduit à une sous-estimation importante du besoin en capital, et que même dans le cadre du modèle bien spécifié, l'estimation conduit encore à une légère sous-estimation.

Cet exemple met en évidence l'importance d'une modélisation appropriée de la queue de distribution.

4.3. Conclusion

Les résultats présentés ici, dans un cadre très simplifié, mettent une nouvelle fois en évidence le manque de robustesse inhérent au critère de fixation du capital de solvabilité dans le projet Solvabilité 2.

De ce fait, il nous semble indispensable que les modalités de mise en œuvre du critère de probabilité de ruine soient explicitées à terme et que soient notamment précisées les contraintes sur la modélisation de la queue de distribution dans le cadre d'un modèle interne. Ces contraintes doivent être exprimées à trois niveaux : pour la modélisation de l'actif, pour la modélisation du passif, et enfin dans le cadre de l'exploitation de la distribution empirique d'une marge actif-passif simulée en « sortie » du modèle.

4.4. Bibliographie

AAI [2004] *A global framework for insurer solvency assessment*, http://www.actuaires.org.

BALLOTTA L. [2004] « Alternative framework for the fair valuation of participating life insurance contracts ». *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium* 1, 337-67.

BOYLE P., WINDCLIFF H. [2004] « The 1/n pension investment puzzle », *North American Actuarial Journal* 8.

COMMISSION EUROPEENNE [2003] « Conception d'un futur système de contrôle prudentiel applicable dans l'Union européenne - Recommandation des services de la Commission ». Document de travail, MARKT/2509/03.

COMMISSION EUROPÉENNE [2004] « Solvency II - Organisation of work, discussion on pillar I work areas and suggestions of further work on pillar II for CEIOPS », Document de travail, MARKT/2543/03.

DACUNHA-CASTELLE D., DUFLO M. [1982] *Probabilités et statistiques : problèmes à temps fixe*, Paris : Masson.

EMBRECHTS P., KLUPPELBERG C., MIKOSCH T. [1997] *Modelling extremal events*, Berlin : Springer Verlag.

GAUTHIER C., PISTRE N. [2000] « Evénements extrêmes sur les spreads de crédit », Working Paper ENSAE.

PLANCHET F., THEROND P.E. [2004] « Allocation d'actifs d'un régime de rentes en cours de service ». *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium* 1, 111-34.

PLANCHET F., THEROND P.E. [2005] « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », *Proceedings of the 15th AFIR Colloquium*.

ROBERT C. [1998] « Mouvements extrêmes des séries financières haute fréquence », *Finance* 19, 221-71.

THEROND P.E., PLANCHET F. [2007] « Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de Value-at-Risk », *Assurances et gestion des risques* 74 (4).533-63.

ZAJDENWEBER D. [2000] *Économie des extrêmes*, Paris : Flammarion

5. Contraintes opérationnelles : la prise en compte des extrêmes

Á l'instar de ce qu'a connu le monde bancaire ces dernières années avec les accords dits de Bâle II, le monde européen de l'assurance se prépare à se doter d'un nouveau référentiel prudentiel qui résultera du projet Solvabilité 2. Construit également sur une structure à trois piliers, le futur système de solvabilité vise à ce que les entreprises d'assurance mesurent et gèrent mieux les risques auxquels elles sont soumises. Une bonne gestion des risques pourra avoir pour conséquence une moindre exigence en termes de capitaux propres.

Le premier pilier, consacré aux exigences quantitatives, fait largement référence à des mesures de risques bien connues des financiers, les Value-at-Risk (VaR). Les travaux en cours sur Solvabilité 2 prévoient que les assureurs devront disposer d'un montant de provisions techniques[1] évaluées dans une logique « best estimate » majoré éventuellement d'une marge pour risque déterminée dans une logique de coût du capital. Ils devront de plus disposer d'un niveau de fonds propres leur permettant de ne pas être en ruine, à horizon un an, avec une très forte probabilité (*a priori* 99,5 %). Pour mémoire, dans le système actuel, les montants de provisions sont, le plus souvent, déterminés par des méthodes déterministes prudentes (méthodes et hypothèses conservatrices d'estimation de la charge ultime de sinistres et absence d'actualisation ou actualisation à un taux résolument prudent). L'exigence minimale de fonds propres est quant à elle régie par le système de la marge de solvabilité : les assureurs doivent disposer d'un niveau de fonds propres et de plus-values latentes sur les placements financiers supérieur à une exigence de marge de solvabilité qui est exprimée en pourcentage des provisions mathématiques en assurance vie, et en pourcentage des primes perçues ou des sinistres payés en assurance non-vie. Ce système est donc entièrement déterministe et ne fait pas explicitement référence au risque réellement supporté par la compagnie. En particulier, deux entreprises qui ont des profils de risque très différents mais les mêmes éléments comptables se voient exiger un même niveau de capitaux propres[2]. Il convient néanmoins de préciser que, d'un point de vue prudentiel, ce système s'avère relativement efficace au vu du faible nombre de sociétés d'assurance européennes qui ont fait faillite au cours des dernières années.

La référence à une VaR, pour le calcul du besoin en capital pose quelques problèmes pratiques. En effet, si pour des quantiles de niveau plus faible les assureurs disposent d'un nombre conséquent d'observations et de méthodes stochastiques de provisionnement robustes, il en va différemment pour le niveau élevé du quantile retenu pour la détermination du niveau souhaitable de fonds propres ou *Solvency Capital Requirement* (SCR). En effet, l'assureur n'observe pas directement la variable d'intérêt (le résultat), il ne dispose donc pas de matériel statistique pour estimer directement la VaR.

---

[1]. Le passif d'une société d'assurance est essentiellement composé des provisions techniques d'une part, et des fonds propres d'autre part.

[2]. Ce constat est néanmoins à modérer de par l'intervention de l'autorité de contrôle (l'ACAM) qui peut relever les exigences de capitaux propres des assureurs.

Une formule standard[3] sera proposée et aura pour vocation d'approcher autant que possible le critère de probabilité de ruine. Le projet prévoit, qu'en parallèle, les sociétés pourront construire un modèle interne qui, sur la base de la modélisation de l'ensemble des variables influant la solvabilité de la compagnie, permettra de simuler la situation de la société à horizon un an et ainsi de mesurer le niveau de fonds propres dont a besoin aujourd'hui la compagnie pour ne pas être en ruine, un an plus tard, avec une probabilité de 99,5 %.

La construction d'un tel modèle est une problématique à part entière : elle nécessite la modélisation fine des variables de base et de leurs interactions. Un tel modèle doit de plus intégrer des contraintes techniques liées à la puissance de calcul informatique. Par ailleurs, le montant à estimer est un quantile extrême de la distribution. Une estimation empirique naïve robuste par le quantile empirique à 99,5 % nécessiterait un nombre de simulations extrêmement important, chacune de ces réalisations résultant de la simulation de différents phénomènes tels que la sinistralité, l'écoulement des provisions techniques, l'évolution des actifs financiers, etc. L'estimation d'un tel quantile devra donc passer par l'utilisation des techniques issues de la théorie des extrêmes qui s'est particulièrement développée depuis le milieu des années 70 et les travaux de PICKANDS [1975] et HILL [1975], et plus récemment de SMITH [1987], DEKKERS et DE HAAN [1989] ou encore DEKKERS et al. [1989] et a été rapidement appliquée aux problématiques financières et assurantielles (EMBRECHTS et al. [1997]). Or ces résultats utilisent les données de queue ; cela pose un nouveau problème, celui de la robustesse de ces données qui, rappelons-le, ne sont pas observées mais simulées. En effet, les modèles internes passeront, le plus souvent, par une modélisation paramétrique des variables de base (évolution du cours des actions par exemple), or ces modèles ne collent pas parfaitement aux observations. En particulier les paramètres sont estimés sur l'ensemble de la distribution au risque de ne pas bien représenter les queues de distribution. Dans la problématique qui nous intéresse, ce sont justement ces queues de distribution qui vont engendrer les situations les plus catastrophiques en termes de solvabilité, *i.e.* les valeurs extrêmes sur lesquelles vont reposer l'estimation de la VaR à 99,5 %.

Ceci pose le problème de la robustesse de ce critère de VaR à 99,5 %, avec en ligne de mire le souci de la sécurité des assurés : les sociétés d'assurance pourraient être tentées, en jouant sur les paramètres ou sur les modèles des variables de base, de sous-estimer le SCR. Après avoir décrit les spécificités du calcul de VaR en assurance, nous présentons différentes méthodes d'estimation de quantiles extrêmes, puis nous explicitons et illustrons les limites de la mesure de risque proposée pour déterminer le SCR dans le projet Solvabilité 2. Dans un souci de clarté, les principaux résultats de la théorie des extrêmes utilisés dans ce travail sont présentés en annexe.

Cette section reprend l'article THEROND et PLANCHET [2007b].

On soulignera toutefois que les résultats de la théorie des valeurs extrêmes doivent être utilisés avec précaution dans ce contexte, du fait du faible nombre de données disponible en pratique, d'une part, et du niveau du quantile qui, si il peut apparaître élevé au regard du matériel statistique disponible, n'est pas forcément encore dans le domaine de validité des résultats de cette théorie. On pourra par exemple consulter

[3]. Dans le cadre des études d'impact quantitatives QIS2, QIS3 et QIS4 portant sur les exigences de fonds propres auxquelles pourrait conduire le projet Solvabilité II, le Comité Européen des Contrôleurs d'Assurance et de Pensions Professionnelles (CEIOPS) a publié un modèle qui vise à la mesure de chaque risque et à l'agrégation des capitaux correspondants par une formule du type de celle du RBC américain.

PLANCHET et THEROND [2008], qui suggèrent qu'un modèle paramétrique à distance finie *ad'hoc* peut être une solution plus robuste dans le contexte du calcul du SCR.

5.1. Calcul de VaR en assurance

La transposition de la VaR (et de la TVaR) aux problématiques d'assurance est récente et impose une approche radicalement différente de l'approche bancaire. En effet, la situation de référence du monde bancaire consiste à estimer la VaR sur un échantillon important de gains / pertes sur un portefeuille ou une position. Les données sont disponibles en quantité, avec une fréquence importante. Les approches de type VaR historique sont ainsi le socle sur lequel sont construits de nombreux modèles bancaires (cf. CHRISTOFFERSEN et al. [200])). L'adaptation des techniques bancaires au portefeuille d'actifs d'un assureur nécessite un certain nombre d'aménagements, essentiellement pour tenir compte de la durée de détention plus importante. On pourra par exemple se reporter à FEDOR et MOREL [2006] qui présentent des analyses quantitatives sur ce sujet. Dans le cadre de la détermination du capital de solvabilité, de nouvelles difficultés apparaissent ; la nature des données disponibles invalidant l'approche historique. Il convient ici de revenir sur les situations d'assurance dans lesquelles on est amené à évaluer des VaR ; en pratique on peut en distinguer principalement deux, dont on va voir qu'elles imposent des approches différentes :

- ✓ le calcul d'une provision via un quantile à 75 % de la distribution des sinistres ;
- ✓ la détermination du niveau du capital de solvabilité (SCR) pour contrôler une probabilité de ruine en imposant que celle-ci soit inférieure à 0,5 % à horizon un an.

La première situation constitue une simple évolution par rapport à la situation qui prévaut actuellement ; en effet, les provisions sont aujourd'hui calculées sur la base d'une espérance (approche *best estimate*, cf. BLUM et OTTO [1998]). On conçoit que, du point de vue de la technique statistique, les deux calculs (calcul d'une espérance et calcul d'une VaR à 75 %) ne soient pas fondamentalement distincts. En particulier on dispose dans les deux cas de données permettant de mettre en oeuvre les techniques classiques de statistique inférentielle.

En pratique, on propose souvent une modélisation de la charge des sinistres à l'aide d'un modèle paramétrique et tout se ramène alors à l'estimation des paramètres de la loi considérée (cf. PARTRAT et BESSON [2005] pour une revue des lois les plus utilisées en pratique).

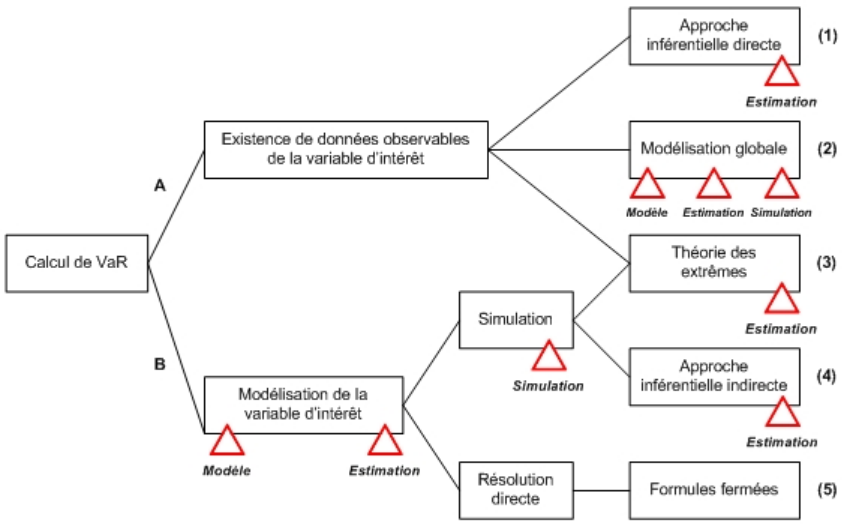
Pour ce qui concerne la détermination du capital de solvabilité (SCR), la situation est radicalement différente ; en effet, on ne dispose que de très peu de données directes (quelques années au plus d'observation du résultat par exemple) et d'aucune donnée dans la zone de la distribution concernée (si on en avait, l'assureur aurait fait faillite...). Alors que dans le cas précédent la variable d'intérêt était directement observable, la VaR à calculer est maintenant la résultante d'un modèle, souvent complexe, mettant en jeu les différents postes du bilan de l'assureur : prestations, provisions, actifs financiers, etc. La démarche va donc consister à construire un modèle en décrivant chaque poste du bilan ; en pratique l'approche consiste à modéliser le passif, dont le poste le plus important est constitué des provisions

techniques, puis l'actif et enfin les éventuelles interactions actif / passif. Après avoir estimé les paramètres de ces modèles, on peut obtenir, en général par des techniques de simulation, une estimation de la loi du résultat ; de cette estimation, on déduira enfin le niveau de la VaR cherchée. La mise en pratique d'une telle démarche comporte à chaque étape des risques qu'il importe *a minima* d'identifier :

- ✓ un risque de modèle : le modèle utilisé n'offre qu'une représentation imparfaite de la réalité ; au surplus, les modèles usuellement employés tant à l'actif qu'au passif conduisent à sous-estimer les situations extrêmes ; nous reviendrons sur ce point potentiellement très pénalisant dans l'approche Solvabilité 2 ;
- ✓ un risque d'estimation : les paramètres estimés qui alimenteront le modèle sont entachés d'une erreur. Les conséquences de cette erreur peuvent être lourdes dans le cas d'un modèle peu robuste (voir par exemple WINDCLIFF et BOYLE [2004] pour une illustration dans le cas du modèle de Markowitz (MARKOWITZ [1952]) ;
- ✓ un risque de simulation : la distribution du résultat sera, en général, obtenue par simulation, et ne sera donc qu'approchée.

De plus, s'agissant de l'estimation d'un quantile d'ordre élevé (VaR à 99,5 %), et la forme de la loi du résultat n'étant en général pas aisée à ajuster globalement à un modèle paramétrique, il faudra se tourner vers les techniques de valeurs extrêmes pour calculer finalement la mesure de risque, avec l'apparition ici d'un nouveau risque d'estimation, sur la queue de la distribution simulée. La figure ci-dessous propose une synthèse de ces différents risques et des situations dans lesquelles on les rencontre.

Figure 30 - Typologie des différents risques rencontrés



Typiquement les études de variations extrêmes de variables financières classiques s'inscrivent dans le cadre des branches A3 ou A1 : on dispose d'un nombre important d'observations et les variables sont relativement régulières (elles possèdent généralement des moments d'ordre 3 ou 4). En assurance, l'estimation d'une VaR à 75 % dans le cadre de la détermination d'une provision Solvabilité 2 par exemple, correspondra, dans le meilleur cas, à la branche A1 pour les risques pour lesquels on dispose de beaucoup d'observations (risques non-vie à forte fréquence) et le plus fréquemment aux branches B4 ou B5 (on se donne un modèle, paramétrique le plus

souvent, puis selon le cas on estime les paramètres et l'on en déduit la VaR ou l'on procède par les méthodes de Monte Carlo).

L'estimation du SCR procède, quant à elle, de la branche B3 qui cumule les risques de modèle, de simulation et d'estimation (à deux reprises). Les risques d'estimation et de simulation ne sont pas spécifiques à la problématique du présent travail, et les techniques propres à les contrôler sont robustes et accessibles.

En revanche, le risque de modèle prend ici une importance particulière ; de fait, et comme on l'illustre infra, la mesure correcte du capital de solvabilité impose de refondre l'ensemble de la modélisation des postes du bilan pour prendre en compte correctement les événements extrêmes et éviter ainsi une sous-estimation du capital de solvabilité.

5.1.1. Notations

Considérons un *n*-échantillon de variables aléatoires (v.a.) $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de fonction de répartition F et de fonction de survie $\bar{F}:x\mapsto 1-F(x)\triangleleft$. La statistique d'ordre associée sera notée $X_{n,n},\ldots,X_{1,n}$ et est définie par

$$\mathbf{min}\left\{X_1,\ldots,X_n\right\}=X_{n,n}\leq X_{n-1,n}\leq\ldots\leq X_{1,n}=\mathbf{max}\left\{X_1,\ldots,X_n\right\}.$$

Par ailleurs, on notera F_u la fonction de répartition de la v.a. ${}_uX$ qui représente le surplus au-delà du seuil *u* de *X*, lorsque *X* dépasse le seuil *u*, soit

$$F_u(x):=\mathbf{Pr}\left[{}_uX\leq x\right]=\mathbf{Pr}\left[X-u\leq x\mid X>u\right].$$

On notera de plus x_F la borne supérieure du support de *X* de fonction de répartition *F*, soit

$$x_F:=\mathbf{sup}\left\{x\in\mathbb{R}\mid F(x)<1\right\}.$$

Enfin, nous noterons N_u le nombre d'observations qui dépassent le seuil *u*, soit

$$N_u=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i>u}.$$

5.2. Estimation de quantiles extrêmes

Plaçons-nous dans la situation standard où l'on observe directement des réalisations du phénomène dont on souhaite déterminer la valeur qu'il ne dépassera qu'avec une faible probabilité.

L'objet de ce paragraphe est de préciser les différentes méthodes d'estimation possibles et de mesurer les erreurs d'estimation commises relativement à la quantité de données disponibles.

Les différentes méthodes sont illustrées à partir d'un échantillon simulé de réalisations d'une variable aléatoire de loi de Pareto de première espèce.

5.2.1. Estimation naturelle

Comme $X_{k,n}$ est un estimateur naturel du quantile d'ordre $1-(k-1)/n$, un estimateur naturel de $F^{-1}(p)$ $(p \in]0;1[)$ est

$$([pn]-pn+1)X_{n-[pn]-1,n}+(pn-[pn])X_{n-[pn],n},$$

où [.] désigne l'opérateur partie entière.

Cette méthode nécessite pour être efficace en pratique un volume de données jamais disponible dans notre contexte.

5.2.2. Ajustement à une loi paramétrique

Une méthode naturelle consiste à ajuster l'ensemble des données à une loi paramétrique puis à estimer la fonction quantile au niveau de probabilité souhaité. En effet, on rappelle que si $\hat{\theta}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance (e.m.v.) du paramètre θ de la loi de *X*, alors $F_{\hat{\theta}}^{-1}(p)$ est l'e.m.v. de $F_{\theta}^{-1}(p)$. De plus, les méthodes quantiles bootstrap BC (BCa) (cf. EFRON et TIBSHIRANI [1993] et le paragraphe 5.3) permettent d'obtenir des intervalles de confiance de l'estimation. Cette méthode d'estimation se décompose en deux étapes :

- ✓ ajustement à une loi paramétrique : choix d'une ou plusieurs lois, estimation des paramètres, tests d'adéquation ;
- ✓ inversion de la fonction de répartition (analytiquement quand c'est possible, numériquement sinon).

La principale difficulté de cette méthode consiste en le choix des lois paramétriques qui vont être utilisées. Elles doivent répondre à la double contrainte de permettre une évaluation numérique de leur fonction quantile aux ordres souhaités et doivent être en adéquation avec les données. Ce dernier point est particulièrement problématique dans la mesure où l'estimation des paramètres est effectuée sur l'ensemble de la distribution observée et représente rarement bien les valeurs extrêmes. À moins d'être assuré que la loi choisie pour l'ajustement est la véritable loi d'où sont issues les données, ce qui est exceptionnel en pratique, l'intérêt de cette méthode apparaît très limité dans un contexte d'estimation de quantiles extrêmes.

5.2.3. Approximation GPD

Connue sous le nom de méthode *Peaks Over Threshold* (POT), cette technique repose sur le théorème de Pickands-Balkema-de Haari (cf. l'annexe B.3) qui établit que, pour *u* assez grand, F_u peut être approximée par une distribution Pareto généralisée (GPD). Une fois les paramètres de la GPD estimés (cf. l'annexe A3), comme $\bar{F}(x)=\bar{F}(u)\times\bar{F}_u(x-u)$, on dispose de l'approximation suivante :

$$\bar{F}(x)\approx\frac{N_u}{n}\left(1+\frac{\hat{\xi}}{\hat{\beta}}(x-u)\right)^{-1/\hat{\xi}},$$

pour $x>u$. L'inversion de cette fonction de répartition nous fournit un estimateur de la fonction quantile F^{-1} aux ordres élevés :

$$\hat{x}_p = u + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\beta}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-p)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right).$$

N.B. Si l'on choisit comme seuil une des observations $X_{k+1,n}$ (par exemple le quantile empirique à 99 % pour estimer le quantile à 99,5 %) alors $N_u = k$ et l'estimateur se réécrit de la manière suivante :

$$\hat{x}_p = X_{k+1,n} + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\beta}}\left(\left(\frac{n}{k}(1-p)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right),$$

pour $p > 1 - k/n$.

Cette méthode présente en pratique la difficulté du choix du seuil *u*. En effet, *u* doit être assez grand pour que l'approximation GPD soit bonne mais pas trop proche du quantile à estimer de manière à ce que l'on dispose de suffisamment de matériel statistique pour que l'estimation de la probabilité d'être entre u et ce quantile (estimation qui fait apparaître N_u) soit fiable. La problématique posée par le choix de *u* est similaire à celle du choix du nombre d'observations à utiliser dans le cadre de l'estimation de Hill de l'épaisseur de la queue de distribution (cf. l'annexe C.2.4). Une approche pratique visant à choisir le seuil *u* consiste à tracer

$$e_n(u) := \frac{1}{N_u}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i - u\right]^+ ,$$

l'estimateur empirique de l'espérance résiduelle de *X* et à choisir *u* de manière à ce que $e_n(x)$ soit approximativement linéaire pour $x \geq u$. En effet, comme la fonction espérance résiduelle d'une loi GPD de paramètre $\xi < 1$ est linéaire :

$$e(v) := \mathbf{E}\left[{}_v X\right] = \frac{\beta + \xi v}{1 - \xi},$$

on cherchera un *u* aussi petit possible sous la contrainte que l'estimateur empirique de l'espérance résiduelle des excès au delà de *u* soit approximativement linéaire.

Il ne faut pas attendre de cette technique la bonne valeur de *u*, elle fournit néanmoins une aide précieuse. En pratique, plusieurs valeurs de *u* doivent être testées.

5.2.4. Estimateur de Hill

Considérons les fonctions de répartition appartenant au domaine d'attraction maximum (DAM) de Fréchet $(\xi > 0)$. Le théorème taubérien (cf. l'annexe B.2) nous indique que $\overline{F}(x) = x^{-1/\xi}\mathcal{L}_F(x)$, où $\mathcal{L}_F$ est une fonction à variation lente. Ainsi, on a

$$\frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(X_{k+1,n})} = \frac{\mathcal{L}_F(x)}{\mathcal{L}_F(X_{k+1,n})}\left(\frac{x}{X_{k+1,n}}\right)^{-1/\xi}.$$

Pour *k* suffisamment petit et $x > X_{k+1,n}$, on peut négliger (au premier ordre) le rapport des fonctions à variation lente ; il vient alors

$$\bar{F}(x) \approx \bar{F}(X_{k+1,n})\left(\frac{x}{X_{k+1,n}}\right)^{-1/\xi}.$$

D'où l'on déduit l'estimateur de F :

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n}\left(\frac{x}{X_{k+1,n}}\right)^{-1/\xi_k^H},$$

pour $x > X_{k+1,n}$. L'inversion de cette fonction nous donne l'estimateur de Hill de la fonction quantile pour des ordres $p > 1 - k/n$:

$$\hat{x}_p^H = X_{k+1,n}\left(\frac{n}{k}(1-p)\right)^{-\xi_p^H}.$$

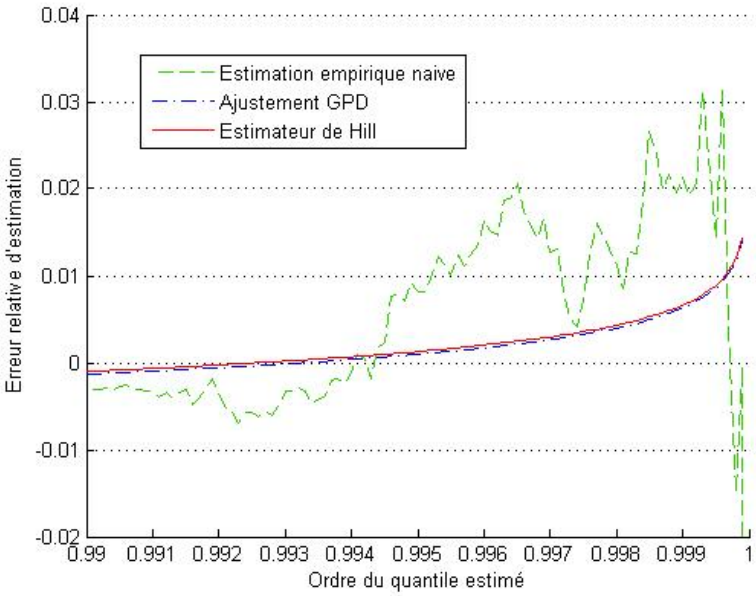
Le problème du choix de k est similaire à celui rencontré dans l'estimation du paramètre de queue ξ (cf. l'annexe C.2.4).

5.2.5. Illustration

Le graphe ci-dessous illustre les différentes techniques dans le cadre de l'estimation d'un quantile extrême d'une loi de Pareto de première espèce, i.e. de fonction de répartition

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, \text{ pour } x > x_0.$$

Figure 31 - Estimation d'un quantile extrême : erreur relative d'estimation



Une telle loi appartient au DAM de Fréchet. La méthode POT (exacte dans le cas d'une loi de Pareto de première espèce) et l'estimateur de Hill donnent des résultats comparables et nettement plus précis que l'estimateur naturel.

5.3. Application du bootstrap

La méthode du bootstrap proposée initialement par EFRON [1979] est devenue d'application courante en assurance (cf. PARTRAT et JAL [2002] et VERALL et ENGLAND [1999]). Plus généralement, le lecteur intéressé trouvera une revue des applications de la méthode bootstrap en économétrie dans HOROWITZ [1997].

Dans le contexte d'estimation de valeurs extrêmes, son application nous permet de disposer d'intervalles de confiance utiles à l'appréciation de la robustesse des estimations.

5.3.1. Présentation

Le principe de la méthode classique consiste à remarquer que, pour un échantillon de taille suffisante, la fonction de répartition F de la loi sous-jacente peut être approchée par la fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_n \le x\}} .$$

En pratique ce principe très général conduit à décliner des méthodes bootstrap adaptées à différents contextes : séries chronologiques, modèles linéaires, modèles de régression non linéaires, etc. On en présente ci-après le principe dans le cas simple de la construction d'un intervalle de confiance pour un estimateur de tendance centrale.

Pour évaluer une fonctionnelle de F de la forme $I(g) = \int g(x)\,dF(x)$, l'approche par simulation classique suggère de calculer

$$I_n(g) = \int g(x)\,dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i),$$

qui constitue une approximation de $I(g)$. La théorie asymptotique fournie des informations sur la loi de la statistique $I_n(g)$: le théorème central limite permet en effet de prouver que la loi asymptotique est normale et d'en déduire, par exemple, des intervalles de confiance de la forme

$$J_\alpha = \left[I_n(g) - \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}}\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), I_n(g) + \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}}\phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

avec $\sigma_g^2 = \mathbf{Var}(g(X))$ qu'il s'agit d'estimer. Toutefois dans certaines situations l'approximation asymptotique n'est pas suffisamment précise, et la méthode bootstrap fournit une approche alternative pour obtenir des informations sur la loi de $I_n(g)$.

Cette technique consiste à considérer des réalisations $I_n^b(g)$, pour $b = 1,\ldots,B$ où $B \le n^n$ obtenues en remplaçant l'échantillon initial $(X_1,\ldots,X_n)$ par les échantillons « bootstrapés » $(X_1^b,\ldots,X_n^b)$ obtenus en effectuant des tirages avec remise dans $(X_1,\ldots,X_n)$. On dit que B est la taille de l'échantillon bootstrap.

En effet, évaluer des statistiques par simulation se ramène alors à générer des échantillons à l'aide de la distribution empirique. Or un tirage dans la distribution empirique s'obtient simplement par un tirage avec remise des n valeurs dans l'échantillon initial. On obtient ainsi au plus n^n échantillons « boostrapés » à partir desquels on va calculer les estimateurs empiriques des statistiques d'intérêt.

Le bootstrap permet ainsi, à partir d'un tirage aléatoire au sein de l'échantillon d'origine, de le perturber afin d'obtenir de nouveaux estimateurs des paramètres.

Une fois que l'on dispose de B estimateurs $I_n^b(g)$ de $I(g)$, en posant

$$\hat{\mu}\left[I_n^1(g),\ldots,I_n^B(g)\right]=\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}I_n^b(g),$$

et

$$\hat{\sigma}^2\left[I_n^1(g),\ldots,I_n^B(g)\right]=\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left[I_n^b(g)-\hat{\mu}\right]^2,$$

on obtient un intervalle de confiance de la forme

$$J_\alpha=\left[\hat{\mu}-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{B}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{B}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

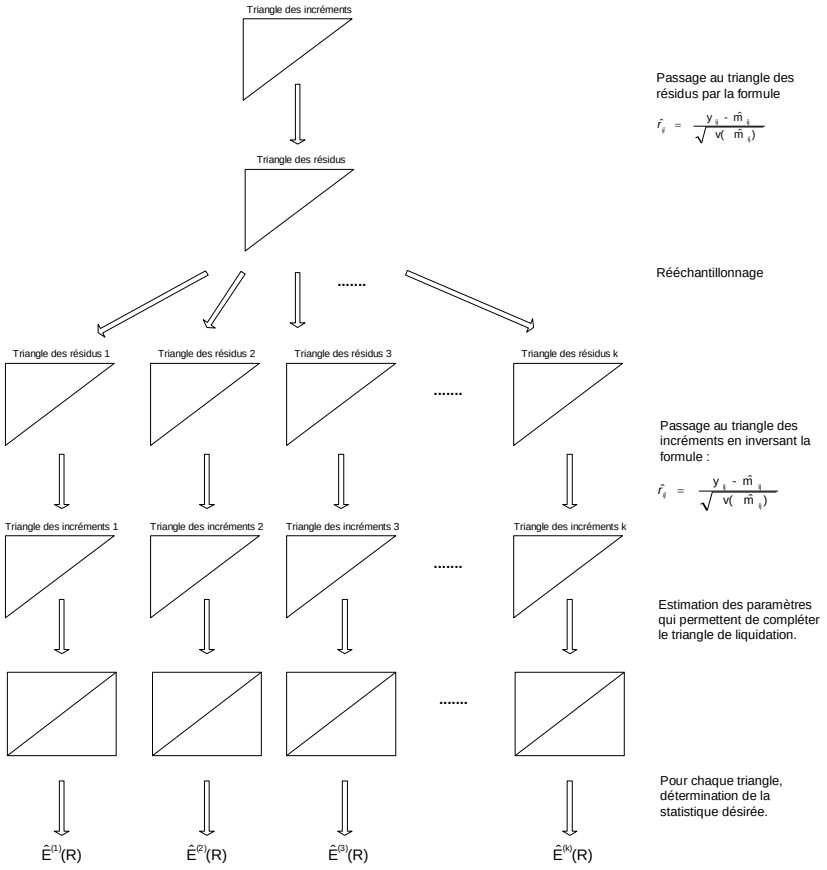
Deux techniques alternatives permettent d'affiner les résultats : le boostrap percentile et la méthode BCa (cf. EFRON et TIBSHIRANI [1993]). Ces techniques sont décrites *infra* dans le cas particulier de l'estimation de quantiles.

La méthode bootstrap n'est toutefois pas pertinente dans tous les cas de figures : elle ne fonctionne par exemple pas lorsque l'on s'intéresse à la valeur maximum de l'échantillon. En effet, par construction, il est impossible de constituer des échantillons contenant des valeurs supérieures à la valeur maximale de l'échantillon de départ. Pour ce type de problème, d'autres méthodes existent telle que celle proposée par ZELTERMAN [1993] qui consiste à ré échantillonner les intervalles entre deux valeurs adjacentes des données de départ plutôt que les données elles-mêmes. Cette méthode semi-paramétrique est illustrée dans le cas de l'estimation par intervalle de l'intensité maximale des séismes dans différentes régions par BOTTARD [1996].

Tel quel, le bootstrap est en revanche très efficace dans toutes les statistiques basées de près ou de loin sur la moyenne. Les calculs de capital de solvabilité ne correspondent pas à cette configuration.

La technique du bootstrap est communément utilisée en assurance pour analyser la variabilité des montants de sinistres et obtenir des erreurs de prédiction pour différentes méthodes de provisionnement, et notamment pour les méthodes basées sur Chain Ladder et sur les modèles linéaires généralisés (cf. PARTRAT et JAL [2002]). Le schéma général (repris de PLANCHET et al. [2005]) est résumé par :

Figure 32 - Méthode boostrap en provisionnement non-vie



5.3.2. Calcul d'un intervalle de confiance pour une VaR

Les différentes techniques de bootstrap sont présentées dans ce paragraphe dans le contexte spécifique de l'estimation par intervalle d'un quantile.

Dans le cas classique, où l'on suppose que les observations sont des réalisations de variables aléatoires dont la loi sous-jacente appartient à une famille paramétrique (gaussienne, log-normale, Pareto, Benktander, etc.), l'estimation d'un quantile d'ordre quelconque peut être envisagée de la manière suivante :

- ✓ estimation $\hat{\theta}$ du paramètre θ (par maximum du vraisemblance quand c'est possible ou par une autre méthode) ;
- ✓ inversion de la fonction de répartition ;
- ✓ estimation ponctuelle de la VaR par $\hat{VaR}(q) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(q)$;
- ✓ recherche d'un intervalle de confiance.

On s'intéresse à la précision de l'estimateur ainsi obtenu. Dans le cas particulier où le paramètre est estimé par l'estimateur du maximum de vraisemblance (e.m.v.), on déduit des propriétés générales de cet estimateur que $\hat{VaR}(q)$ est l'e.m.v. de la VaR (comme fonction d'un e.m.v.). Il est donc asymptotiquement sans biais et gaussien. En obtenant une estimation de sa variance asymptotique, il sera donc possible de construire un intervalle de confiance.

La loi de la statistique $\hat{VaR}(q)$ est toutefois difficile à déterminer. Dans ce contexte, il est conseillé de se tourner vers la méthode bootstrap.

Dans le cas de l'estimation d'une VaR, l'échantillon initial est constitué par les n observations de X utilisées pour estimer les paramètres du modèle. La statistique d'intérêt est $\hat{VaR}(q) = F_{\hat{\theta}}^{-1}(q)$. On cherche à construire un intervalle de confiance de la forme :

$$\mathbf{Pr}\left(b_1 \leq VaR(q) \leq b_2\right) = 1 - \alpha .$$

On distingue trois techniques bootstrap permettant de construire l'intervalle de confiance recherché :

- ✓ bootstrap classique : estimation de la variance bootstrapée de $\hat{VaR}(q)$ que l'on utilise ensuite avec l'hypothèse de normalité asymptotique ;
- ✓ bootstrap percentile : classement des estimations ponctuelles obtenues pour chaque échantillon bootstrap et constitution des bornes de l'intervalle de confiance par les estimations correspondantes ;
- ✓ estimation directe de l'intervalle de confiance bootstrapé via la méthode Bias corrected and accelerated (BCa) (cf. EFRON et TIBSHIRANI [1993]).

Dans la première approche, l'estimation de la variance bootstrapée consiste simplement à calculer la variance empirique de l'échantillon des $\hat{VaR}_b(q) = F_{\hat{\theta}_b}^{-1}(q)$ avec $\hat{\theta}_b$ le paramètre estimé sur le b-ème échantillon bootstrap. On obtient alors aisément un intervalle de confiance en utilisant la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance. En pratique, cette méthode n'est pas recommandée pour les problèmes non-paramétriques (pour lesquels l'estimation, pour chaque échantillon, du quantile reposerait sur son estimateur empirique).

Une méthode plus performante et plus adaptée aux problèmes non-paramétriques est le bootstrap percentile. Cette technique consiste à classer les $\hat{VaR}_b(q)$ par ordre croissant et à prendre comme bornes de l'intervalle de confiance les $B \times \alpha/2$ et $B \times (1-\alpha/2)$-èmes plus grandes valeurs. Cette technique est bien adaptée aux problèmes non-paramétriques car elle ne recourt pas aux propriétés asymptotiques de l'e.m.v.

La méthode BCa (cf. EFRON (1987)) se propose d'optimiser la construction de l'intervalle de confiance, comme la méthode percentile sans s'appuyer sur les propriétés asymptotiques de l'e.m.v. Cette méthode consiste à déterminer les bornes de l'intervalle de confiance en prenant pour b_i la valeur d'ordre $B \times \beta_i$ de l'échantillon des $\hat{VaR}_b(q)$, où

$$\beta_1 = \Phi\left(z_0 + \frac{z_0 + u_{\alpha/2}}{1 - \gamma\left(z_0 + u_{\alpha/2}\right)}\right) \text{ et } \beta_2 = \Phi\left(z_0 + \frac{z_0 + u_{1-\alpha/2}}{1 - \gamma\left(z_0 + u_{1-\alpha/2}\right)}\right),$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, u_c le quantile d'ordre c de cette même loi, le paramètre de correction de biais $z_0 = \Phi^{-1}(k)$ où k est la proportion des échantillons bootstrapés pour lesquels la VaR estimée est inférieure

à la VaR estimée sur l'ensemble des échantillons. Enfin le paramètre d'accélération γ est estimé par :

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{VaR}_i - \widetilde{VaR}\right)^3}{6\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{VaR}_i - \widetilde{VaR}\right)^2\right]^{3/2}},$$

où $\widetilde{VaR}_i$ est l'estimation de la VaR provenant de l'échantillon Jackknife n° i (échantillon observé auquel on a retiré l'observation i) et $\widetilde{VaR}$ est la moyenne de ces n estimations (cf. QUENOUILLE [1949]).

5.3.3. Illustration numérique

On illustre numériquement ces méthodes dans la cas d'une loi log-normale. Dans ce cas il est immédiat de vérifier que :

$$VaR_p(X) = F^{-1}(p) = \mathbf{exp}\left(m + \sigma\phi^{-1}(p)\right),$$

et l'on obtient donc comme estimateur du maximum de vraisemblance de la VaR d'ordre p :

$$\hat{VaR}_p(X) = \mathbf{exp}\left(\hat{m} + \hat{\sigma}\phi^{-1}(p)\right),$$

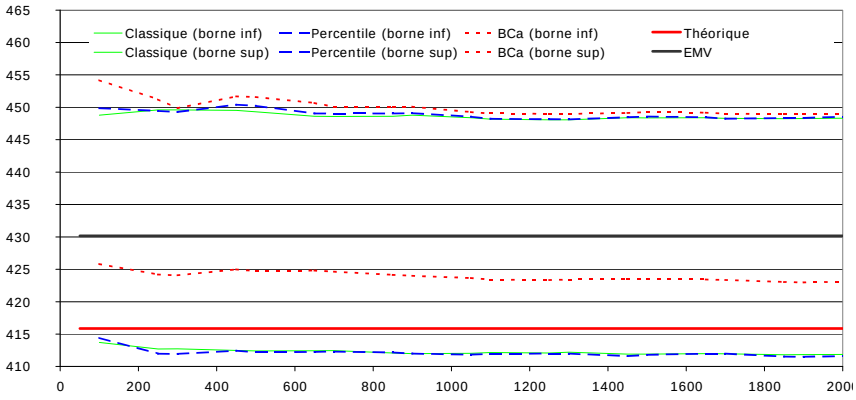
où $\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{m}\right)^2}$.

On retient les valeurs numériques suivantes : $m = 5$, $\sigma = 0{,}4$, ce qui conduit à une VaR théorique à 99,5 % de

$$VaR_{99,5\,\%}(X) = \mathbf{exp}\left(m + \sigma\phi^{-1}(p)\right) = 415{,}85.$$

On estime ce quantile sur la base d'un échantillon de taille 1 000 et on détermine les intervalles de confiance à 90 % avec les méthodes classique, percentile et BCA. On obtient en fonction de la taille de l'échantillon bootstrap les résultats typiques suivants :

Figure 33 - Intervalles de confiance (VaR à 99,5 %)

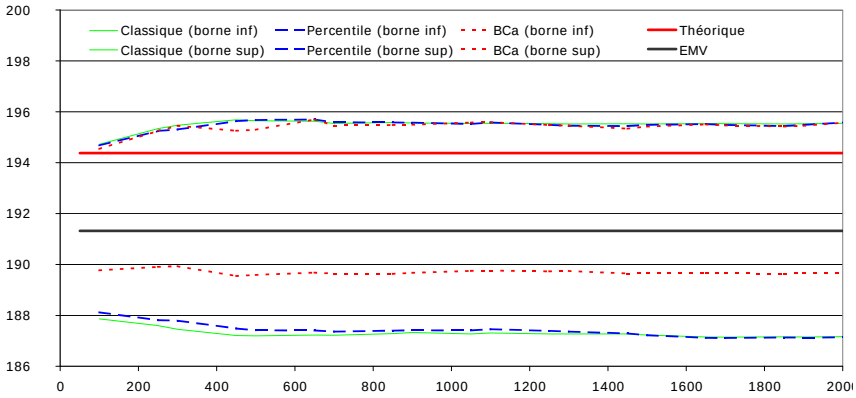


On note que les méthodes classique et percentile sont très proches. La méthode BCa fournit un intervalle dont la borne supérieure est proche des deux autres

méthodes, mais avec une borne inférieure plus élevée. Dans l'exemple ci-dessus on constate par exemple que si la vraie valeur est bien dans les intervalles de confiance « classique » et « percentile », elle est inférieure à la borne inférieure de l'intervalle fournie par la méthode BCa.

Les résultats obtenus par les méthodes bootstrap restent peu robustes pour un quantile élevé. Pour un quantile d'ordre inférieur, comme par exemple le quantile à 75 %, les estimations deviennent nettement plus fiables :

Figure 34 - Intervalles de confiance (VaR à 75 %)



5.4. Robustesse du SCR

L'objet de ce paragraphe est de préciser les limites d'un critère de type VaR extrême pour fixer le capital de solvabilité d'une société d'assurance. En effet la complexité du dispositif à mettre en place rend la pertinence des résultats issus du modèle interne toute relative. Deux points sont plus particulièrement développés et illustrés à l'aide d'un exemple simple : l'erreur d'estimation des paramètres des variables de base puis l'erreur de spécification de modèle de ces variables.

5.4.1. Estimation des paramètres des variables de base

Considérons le modèle interne simplifié inspiré des travaux de DEELSTRA et JANSSEN [1998] dans lequel les sinistres de l'année sont modélisés par une variable aléatoire de distribution log-normale et payés en fin d'année. Supposons de plus que le rendement des actifs financiers sur la période soit gaussien et indépendant de la sinistralité. Formellement, notons $B \sim \mathcal{LN}(m,s)$ la variable aléatoire modélisant le montant à payer en fin de période et $\rho \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ le rendement financier sur la période.

Déterminons le montant minimal d'actif a_0 dont doit disposer l'assureur en début de période pour ne pas être en ruine, en fin de période, avec une probabilité supérieure à $1-\alpha$. Formellement, a_0 est la solution d'un problème d'optimisation :

$$a_0 = \mathbf{min}\left\{a > 0 \,|\, \mathbf{Pr}\left[ae^{\rho} \geq B\right] > 1-\alpha\right\}.$$

Comme $Be^{-\rho} \sim \mathcal{LN}\left(m-\mu, \sqrt{s^2+\sigma^2}\right)$, on dispose d'une expression analytique pour la valeur de a_0 :

$$a_0 = \mathbf{exp}\left\{m-\mu+\Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{s^2+\sigma^2}\right\}.$$

Étudions à présent le sensibilité de a_0 aux paramètres des modèles de base. Par exemple pour le passif, on a :

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial m} = 1 \text{ et } \frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial s} = \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{1+\sigma^2/s^2}}.$$

Ainsi une erreur relative d'estimation du paramètre *m* conduit à la même erreur relative sur a_0. Par ailleurs, une erreur relative de 1 % sur *s* conduit à une erreur relative de $\Phi^{-1}(1-\alpha)\Big/\sqrt{1+\sigma^2/s^2}$ sur a_0. Cela correspond pour une VaR à 99,5 %, lorsque $s \simeq \sigma$, a une erreur 1,82 fois plus grande.

5.4.2. Simulation

La complexité inhérente à la modélisation du résultat d'une activité d'assurance rend incontournable le recours aux techniques de simulation pour obtenir des résultats numériques. Si le principe de base de ces méthodes est simple et universel (utilisation de la convergence forte de la Loi des grands nombres), une mise en œuvre efficace nécessite de prendre quelques précautions. En effet, l'utilisation de résultats approchés par simulation est source de différentes erreurs :

- ✓ fluctuations d'échantillonnage liées au nombre fini de tirages effectués ;
- ✓ biais de discrétisation lors de la transformation d'un modèle continu dans sa version discrète ;
- ✓ erreurs associées aux approximations utilisées par certaines techniques d'inversion ;
- ✓ biais induits par un choix mal approprié du générateur de nombres aléatoires.

Aussi, les algorithmes utilisés devront permettre un contrôle quantitatif de l'ensemble de ces sources d'erreurs afin de pouvoir calibrer le nombre de tirages nécessaire pour le degré de précision (un niveau de confiance étant fixé *a priori*) requis.

5.4.3. Spécification du modèle

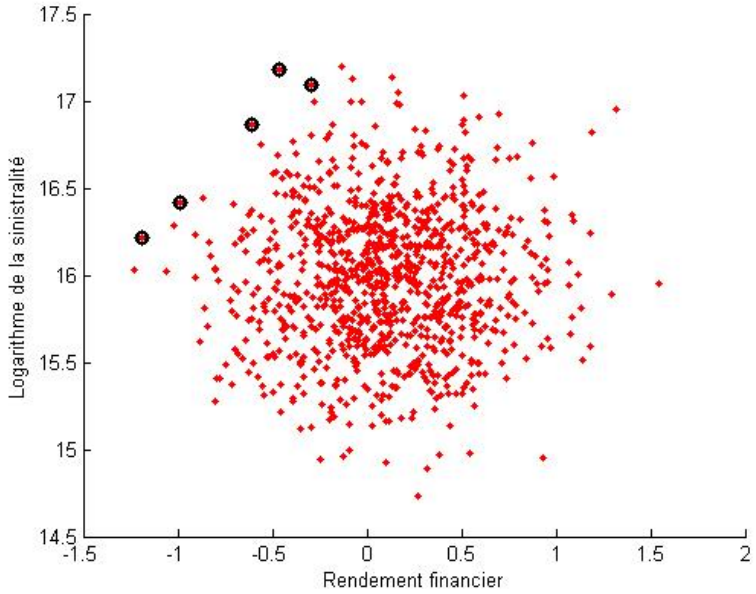
Contexte et motivation

La construction d'un modèle interne nécessite la modélisation des différentes variables influant sur la solvabilité de l'assureur. Pour ce faire, la première étape consiste en la modélisation de ces différentes variables. Dans le cas d'ajustements paramétriques, il est naturel d'effectuer l'estimation des paramètres et les tests d'adéquation sur l'intégralité des données disponibles. Cependant, dans notre

problématique, ce sont les queues de distribution qui vont influer sur le niveau du SCR. Or celles-ci sont souvent mal décrites par l'approche globale utilisant une loi paramétrique simple unique. En particulier, la plupart des modèles usuels (log-normal, Benktander, etc.) conduisent à des lois dans le DAM de Gumbel alors que les observations tendent à opter pour des queues de distribution dans le DAM de Fréchet. En effet, les modèles stochastiques qui fonctionnent actuellement chez les assureurs ont initialement été créés pour effectuer des études de rentabilité ou calculer des provisions techniques ; les résultats étant, le plus souvent, appréciés par des critères de type espérance-variance (ou VaR dans le cœur de la distribution – 75 % par exemple), la modélisation des événements extrêmes a dans ce contexte une influence toute relative. Dans l'approche Solvabilité 2, on ne s'intéresse quasiment plus qu'aux valeurs extrêmes de la variable d'intérêt : le capital dont on doit disposer aujourd'hui pour ne pas être en ruine dans un an. Cette remarque est à nuancer par le fait que la plupart des assureurs qui investissent dans le développement de modèles internes escomptent, qu'à quelques aménagements près, celui-ci leur permettra d'affiner leur plan stratégique et de répondre aux futures exigences comptables résultant du passage à la phase II de la norme dédiée aux contrats d'assurance.

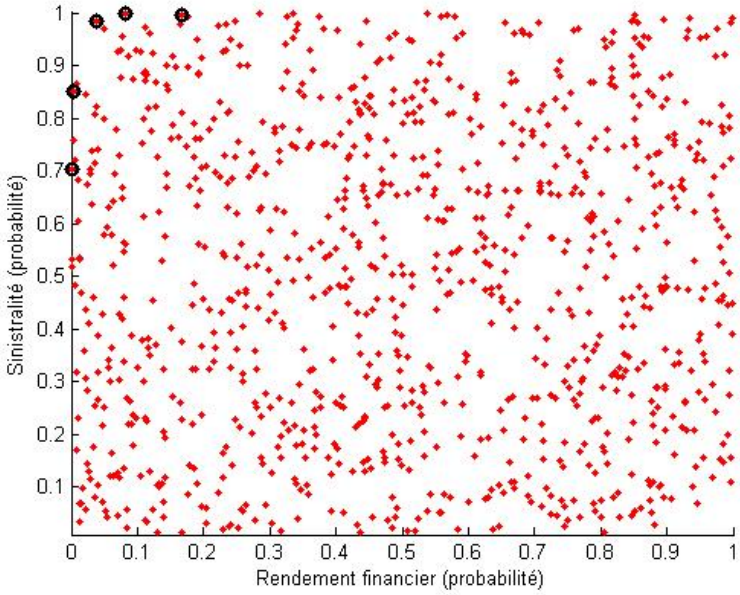
Considérons le modèle présenté ci-dessus. La figure ci-dessous présente un échantillon de 1000 réalisations du montant d'actif dont doit disposer la société en 0 pour ne pas être en ruine en 1.

Figure 35 - Modèle interne simplifié : identification des valeurs extrêmes



Les cinq points soulignés correspondent aux cinq scénarios qui ont conduits aux valeurs maximales.

Figure 36 - Modèle interne simplifié : identification des valeurs extrêmes (probabilités)

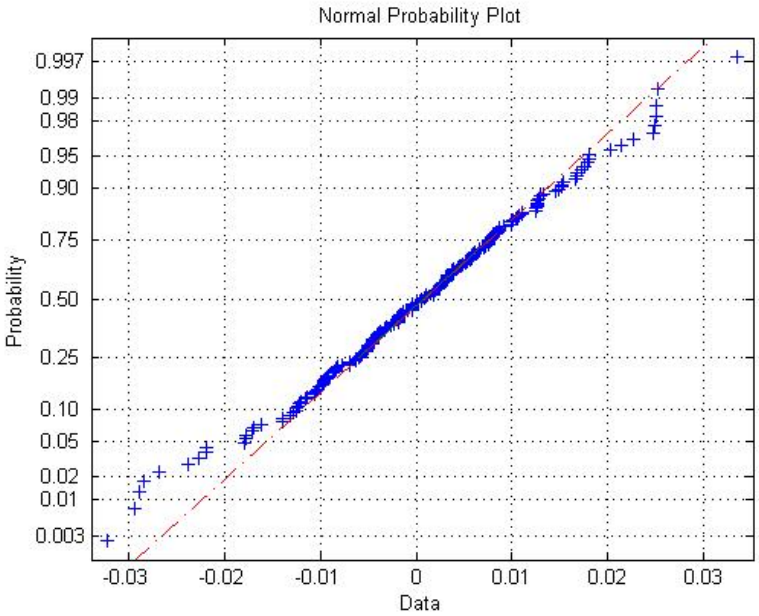


On remarque sur le nuage de points ci-dessus, qui représente les probabilités associées à chaque grandeur, que ces points se situent dans la queue de distribution d'au moins une des deux variables de base. Or justement aux queues de distribution, l'adéquation des données au modèle retenu est souvent imparfaite.

Modélisations avancées

Considérons le QQ-plot normal du rendement journalier du titre TOTAL (de juillet 2005 à avril 2006) :

Figure 37 - Rendement journalier du titre TOTAL : QQ-plot loi empirique vs loi normale



On peut d'ores et déjà observer graphiquement que l'ajustement semble globalement satisfaisant mais que les queues de distribution du modèle (en particulier celle des rendements négatifs pour ce qui nous intéresse) sont trop fines. Les tests statistiques de Jarque-Béra et de Lilliefors au seuil 5 % conduisent en effet à ne pas rejeter l'hypothèse de normalité du rendement. Cependant, dans le cadre de la détermination d'un SCR sur le fondement d'un critère VaR à 99,5 %, le modèle gaussien tendrait à minimiser le risque pris en investissant sur ce placement. Par exemple, sur les données du titre TOTAL, le quantile à 0,5 % du rendement quotidien observé vaut −0,0309 alors que le quantile du même ordre du modèle gaussien ajusté vaut −0,0286, ce qui représente une erreur de l'ordre de 7,5 %. Pour remédier à cela, dans les situations où l'on dispose d'un nombre conséquent d'observations, on pourrait être tenté d'adopter une approche non-paramétrique en utilisant la distribution empirique. Cela n'est toutefois pas satisfaisant en pratique, car de telles approches sont techniquement plus difficiles à implémenter, nécessitent des temps de simulation plus longs et pénalisent une compréhension simplifiée du modèle.

Dans ce contexte, il est naturel de conserver une approche paramétrique et de rechercher un modèle généralisant le modèle classique mais qui représente mieux les queues de distributions.

Supposons que le rendement de l'actif sur la période soit régi par le processus suivant

$$\rho = \mu + \sigma_0 \varepsilon_0 + \sigma_u \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \,,$$

où les $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ sont des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$ et indépendantes de $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

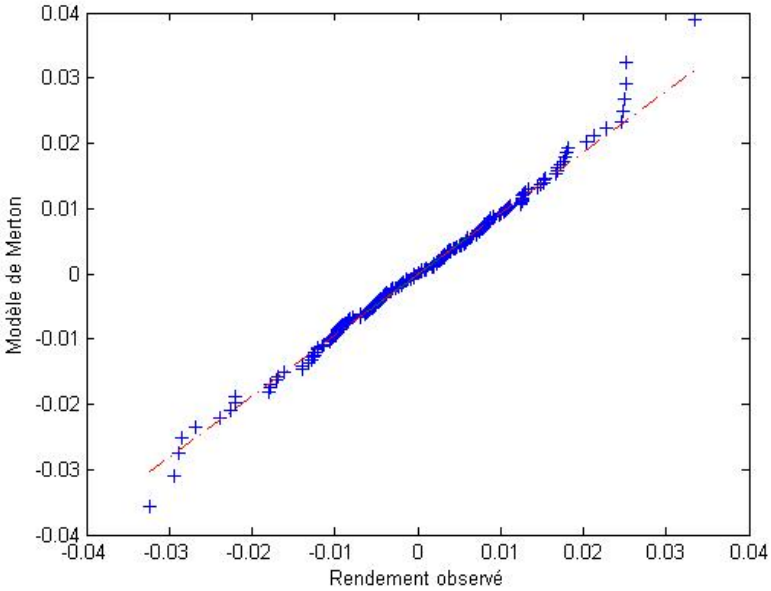
Ce processus est une version mono-périodique du processus de Merton (MERTON [1976]). L'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance nécessite l'utilisation de techniques numériques (cf. PLANCHET et THEROND (2005b)).

Dans notre problématique, on peut toutefois souhaiter calibrer manuellement les paramètres de manière à alourdir les queues de distribution. Par exemple, en fixant l'espérance et la variance globale du rendement (identiques à celle du modèle gaussien), on peut pondérer la variabilité représentée par la composante à sauts de manière à ce que la queue de distribution du modèle soit aussi lourde que celle des observations. Formellement, cela revient à choisir λ, σ_0 et σ_u sous la contrainte :

$$\sigma_0^2 + \lambda \sigma_u^2 = \sigma^2 \,.$$

On représente cet ajustement ci-dessous :

Figure 38 - Rendement journalier du titre TOTAL : QQ-plot empirique vs modèle de Merton



En comparant avec l'ajustement normal, on observe que les queues de distributions ont été alourdies. D'une manière générale, la démarche illustrée supra dans le cas de la modélisation du rendement financier devra être reconduite pour l'ensemble des variables de base à l'actif et au passif sous peine de sous-estimer le SCR.

5.5. Conclusion

Le projet Solvabilité 2 a pour objectif d'établir un référentiel prudentiel harmonisé et cohérent à l'ensemble des sociétés d'assurance européennes. Pour cela, il prévoit notamment d'inciter les sociétés à mieux modéliser leurs risques en les autorisant à construire des modèles internes qui aboutissent à un capital de solvabilité inférieur à celui fourni par la « formule standard ».

Cependant, nous avons vu que la robustesse du critère VaR à 99,5 % sur des données non-observées mais générées par le modèle interne est toute relative. En particulier, les modèles stochastiques actuellement en place chez les assureurs (tant à l'actif qu'au passif) ne sont pas orientés vers l'estimation de valeurs extrêmes et sont, le plus souvent, construits à partir de modélisations des « variables de base » qui sous-estiment les queues de distribution. L'utilisation en l'état de tels modèles conduirait à sous-estimer le SCR. Aussi les sociétés d'assurance qui souhaiteront développer un modèle interne devront modéliser plus finement les queues de distribution.

Parallèlement, les autorités qui auditeront les modèles internes devront porter une attention particulière à celles-ci dans le processus de validation. En particulier, une harmonisation au niveau européen de ces procédures est indispensable sous peine d'introduire une distorsion de concurrence entre les différents intervenants. Au global, la prise en compte du critère de contrôle d'une probabilité de ruine qui sous-tend le dispositif Solvabilité 2 implique donc une profonde refonte des modèles utilisés jusqu'alors dans les sociétés d'assurance.

5.6. Bibliographie

Blum K. A., Otto D. J. (1998) « Best estimate loss reserving : an actuarial perspective », *CAS Forum Fall* 1, 55-101.

Bottard S. (1996) « Application de la méthode du Bootstrap pour l'estimation des valeurs extrêmes dans les distributions de l'intensité des séismes », *Revue de statistique appliquée* 44 (4), 5-17.

Christofiersen P., Hahn J., Inoue, A. (2001) « Testing and comparing value-at-risk measures », *Journal of Empirical Finance* 8 (3), 325-42.

Coles S., Powell E. (1996) « Bayesian methods in extreme value modelling : a review and new developments », *Internat. Statist. Rev.* 64, 119-36.

Davidson R., MacKinnon J.G. (2004) « Bootstrap Methods in Econometrics », working paper.

de Haan L., Peng L. (1998) « Comparison of tail index estimators », *Statistica Neerlandica* 52 (1), 60-70.

Deelstra G., Janssen J. (1998) « Interaction between asset liability management and risk theory », *Applied Stochastic Models and Data Analysis* 14, 295-307.

Dekkers A., de Haan L. (1989) « On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation », *Annals of Statistics* 17, 1795-832.

Dekkers A., Einmahl J., de Haan L. (1989) « A moment estimator for the index of an extreme-value distribution », *Annals of Statistics* 17, 1833-55.

Denuit M., Charpentier A. (2005) *Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome 2 : tarification et provisionnement*, Paris : Economica.

Diebolt J., El-Aroui M., Garrido S., Girard S. (2005a) « Quasi-conjugate bayes estimates for gpd parameters and application to heavy tails modelling », *Extremes* 8, 57-78.

Diebolt J., Guillou A., Rached I. (2005b) « Approximation of the distribution of excesses using a generalized probability weighted moment method », *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 340 (5), 383-8.

Efron B. (1979) « Bootstrap methods: Another look at the Jackknife », *Ann. Statist*., 71-26.

Efron B. (1987) « Better bootstrap confidence intervals », *Journal of the American Statistical Association* 82, 171-200.

Efron B., Tibshirani R. J. (1993) *An introduction to the bootstrap*, Chapman & Hall.

Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Berlin: Springer Verlag.

England P.D., Verall R.J. (1999) « Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving », *Insurance: mathematics and economics* 25, 281-93.

Fedor M., Morel J. (2006) « Value-at-risk en assurance : recherche d'une méthodologie à long terme », *Actes du 28e congrès international des actuaires*, Paris.

Goldie C., Smith R. (1987) « Slow variation with remainder: a survey of the theory and its applications », *Quarterly Journal of Mathematics Oxford* 38 (2), 45-71.

Hill B. (1975) « A simple general approach to inference about the tail of a distribution », *Annals of Statistics* 3, 1163-74.

Horowitz J.L. (1997) « Bootstrap methods in econometrics: theory and numerical performance », in *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Application*, volume 3, 188-222, D. M. Kreps, K. F. Wallis (eds), Cambridge: Cambridge University Press.

Hosking J. R., Wallis J. R. (1987) « Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution », *Technometrics* 29, 339-49.

Jal P., Partrat Ch. (2004) « Evaluation stochastique de la provision pour sinistres », Conférence scientifique de l'Institut des Actuaires, Paris, 20 janvier 2004.

Merton R. (1976) « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous », *Journal of Financial Economics* 3, 125-44.

Partrat C., Besson J.L. (2005) *Assurance non-vie. Modélisation, simulation*, Paris : Economica.

Pickands J. (1975) « Statistical inference using extreme orders statistics », *Annals of Statistics* 3, 119-31.

Planchet F., Thérond P.E. (2005b) « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », *Proceedings of the 15th AFIR Colloquium*, Zürich.

Planchet F., Thérond P.E. (2008) « Expected Shortfall of Claims Events: Some Practical Aspects », Proceedings of the 38th ASTIN Colloquium.

Quenouille M. (1949) « Approximate tests of correlation in time series », *Journal of the Royal Statistical Society*, Soc. Series B, 11, 18-84.

Smith R. L. (1987) « Estimating tails of probability distributions », *Annals of Statistics* 15, 1174-207.
Thérond P.E., Planchet F. (2007) « Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de Value-at-Risk », *Assurances et gestion des risques* 74 (4), 533-63 et in *Proceedings of the 37th ASTIN Colloquium*, Orlando.
Windcliff H. Boyle, P. (2004) « The 1/n pension investment puzzle », *North American Actuarial Journal* 8 (3), 32-45.
Zajdenweber D. (2000) *Économie des extrêmes*, Paris : Flammarion.
Zelterman D. (1993) « A semiparametric Bootstrap technique for simulating extreme order statistics », *Journal of American Statistical Association* 88 (422), 477-85.

Annexe A : Loi de Pareto généralisée (GPD)

A.1 Définition

Définition 1 : *Loi de Pareto généralisée*

Soit $H_{\xi,\beta}$ *la fonction de répartition définie pour* $\beta > 0$ *par*

$$(8)\quad H_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-\left(1+\dfrac{\xi}{\beta}x\right)^{-1/\xi}, & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1-\exp\left(-x/\beta\right), & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Cette fonction de répartition correspond à la loi de Pareto généralisée (GPD) de paramètres ξ *et* β. *Elle est définie pour* $x > 0$ *si* $\xi > 0$ *et pour* $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ *si* $\xi < 0$.

On notera dans la suite $D(\xi,\beta)$ le domaine de définition de $H_{\xi,\beta}$.

On montre (cf. DENUIT et CHARPENTIER [2005]) que la loi de Pareto généralisée peut être vue comme une log-gamma ou encore, dans le cas où $\xi > 0$, comme un mélange de lois exponentielles dont le paramètre suit une loi gamma.

A.2 Quelques propriétés

Les résultats suivants sont énoncés pour une variable aléatoire *Y* distribuée selon une GPD de paramètre (ξ,β).

Propriété 1. Si $\xi < 1$, on a

$$(9)\quad \mathbf{E}\left(1+\frac{\xi}{\beta}Y\right)^{-r} = \frac{1}{1+\xi r}, \text{ pour } r > -1/\xi,$$

$$(10)\quad \mathbf{E}\left[\ln\left(1+\frac{\xi}{\beta}Y\right)\right]^{k} = \xi^k k!, \text{ pour } k \in \mathbb{N},$$

$$(11)\quad \mathbf{E}\left[Y\left(\bar{H}_{\xi,\beta}(Y)\right)^{r}\right] = \frac{\beta}{(r+1-\xi)(r+1)}, \text{ pour } (r+1)/\xi > 0.$$

Propriété 2. La variable aléatoire *Y* admet des moments jusqu'à l'ordre $\left[\xi^{-1}\right]$ et l'on a

$$(12)\quad \mathbf{E}\left[Y^r\right] = \frac{\beta^r \Gamma\left(\xi^{-1}-r\right)}{\xi^{r+1}\Gamma\left(\xi^{-1}+1\right)} r!, \text{ pour } r \leq \left[\xi^{-1}\right].$$

Propriété 3. (Stabilité) La variable aléatoire $Y_u = \left[Y-u \mid Y > u\right]$ est distribuée selon une loi GPD de paramètre $(\xi, \beta+\xi u)$. On en déduit que si $\xi < 1$, alors pour tout $u < y_F$,

$$(13)\quad \mathbf{E}\left[Y-u \mid Y > u\right] = \frac{\beta+\xi u}{1-\xi}, \text{ pour } \beta+u\xi > 0.$$

On rappelle que y_F est la borne supérieure du support de *Y*, soit

$$(14) \qquad y_F = \sup\left\{ y \in \mathbb{R}, F(y) < 1 \right\}.$$

A.3 Estimation des paramètres

Considérons un n-échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la variable aléatoire Y de fonction de répartition $H_{\xi,\beta}$.

A.3.1 Méthode du maximum de vraisemblance

La densité f de Y vaut

$$(15) \qquad f(y) = \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\xi}{\beta} y\right)^{-1/\xi - 1}, \text{ pour } y \in D(\xi, \beta).$$

On en déduit la log-vraisemblance

$$(16) \qquad \ln L(\xi, \beta; Y_1, \ldots, Y_n) = -n \ln \beta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\xi}{\beta} Y_i\right).$$

En utilisant la reparamétrisation $\tau = \xi / \beta$, l'annulation des dérivées partielles de la log-vraisemblance conduit au système

$$(17) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \tau Y_i) =: \hat{\xi}(\tau), \\ \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\xi} + 1\right) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{Y_i}{1 + \tau Y_i}. \end{cases}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de (ξ, τ) est $\left(\hat{\xi} = \hat{\xi}(\hat{\tau}), \hat{\tau}\right)$ où $\hat{\tau}$ est solution de

$$(18) \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\hat{\xi}(\tau)} + 1\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{1 + \tau Y_i}.$$

Cette dernière équation se résout numériquement de manière itérative pour autant que l'on dispose d'une valeur initiale τ_0 pas trop éloignée de τ. En pratique, cette valeur initiale pourra être obtenue par la méthode des moments (pour autant que ceux-ci existent jusqu'à l'ordre 2) ou par la méthode des quantiles.

Lorsque $\xi > -1/2$, HOSKING et WALLIS [1987] ont montré la normalité asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance :

$$(19) \qquad n^{1/2}\left(\hat{\xi}_n - \xi, \frac{\hat{\beta}_n}{\beta} - 1\right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left[0, (1+\xi)\begin{pmatrix} 1+\xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right].$$

Ce résultat permet en particulier de calculer les erreurs approximatives d'estimation commises par les estimateurs du maximum de vraisemblance.

A.3.2 Méthode des moments

D'après les résultats du paragraphe A.2, si $\xi < 1/2$, les deux premiers moments de Y existent et l'on a

$$(20) \qquad \mu_1 := \mathbf{E}[Y] = \frac{\beta}{1-\xi},$$

et

$$(21) \qquad \mu_2 := \mathbf{Var}[Y] = \frac{\beta^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)}.$$

On en déduit que

$$(22) \qquad \xi = \frac{1}{2} - \frac{\mu_1^2}{2\mu_2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\mu_1}{2}\left(1 + \frac{\mu_1^2}{\mu_2}\right).$$

En remplaçant μ_1 et μ_2 par leurs estimateurs empiriques, on obtient les estimateurs de la méthode des moments $\hat{\xi}_{MM}$ et $\hat{\beta}_{MM}$. Ces estimateurs sont simples à mettre en œuvre, mais ne fonctionnant que pour $\xi < 1/2$, ils nécessitent la connaissance *a priori* de cette information.

A.3.3 Méthode des moments pondérés par les probabilités

Une alternative intéressante à la méthode des moments a été proposée par HOSKING et WALLIS [1987]. En remarquant que

$$(23) \qquad \omega_r := \mathbf{E}\left[Y\bar{H}^r_{\xi,\beta}(Y)\right] = \frac{\beta}{(r+1)(r+1-\xi)}, \text{ pour } r = 0;1,$$

on obtient

$$(24) \qquad \beta = \frac{2\omega_0\omega_1}{\omega_0 - 2\omega_1} \quad \text{et} \quad \xi = 2 - \frac{\omega_0}{\omega_0 - 2\omega_1}.$$

En remplaçant ω_0 et ω_1 par leurs estimateurs empiriques, on obtient les estimateurs des moments pondérés par les probabilités $\hat{\xi}_{PWM}$ et $\hat{\beta}_{PWM}$.

Dans le cas d'échantillons de taille réduite, HOSKING et WALLIS [1987] montrent que, lorsque $\xi < 1/2$, ces estimateurs sont plus efficaces que ceux du maximum de vraisemblance. Le domaine de validité de cette méthode est sa principale limite à une utilisation en assurance : si la plupart des risques admettent des moments d'ordre 2, ce n'est pas une généralité (tempêtes, tremblements de terre, risques industriels, responsabilité civile, etc.). Des généralisations (DIEBOLT et al. [2005b]) permettent d'étendre cette méthode à $\xi < 3/2$.

A.3.4 Méthode des quantiles

La fonction quantile d'une loi GPD de paramètre (ξ, β) est donnée par

$$(25) \qquad q_p := H_{\xi,\beta}^{-1}(p) = \frac{\beta}{\xi}\left[(1-p)^{-\xi} - 1\right].$$

En remarquant que

$$(26) \qquad \frac{q_{p_2}}{q_{p_1}} = \frac{(1-p_2)^{-\xi} - 1}{(1-p_1)^{-\xi} - 1}, \text{ pour } p_1, p_2 \in]0;1[,$$

la solution $\hat{\xi}_{MQ}$ de

$$(27) \qquad \frac{Q_{p_2}}{Q_{p_1}} = \frac{(1-p_2)^{-\xi} - 1}{(1-p_1)^{-\xi} - 1}$$

où Q_{p_1} et Q_{p_2} sont les quantiles empiriques d'ordres p_1 et p_2, est l'estimateur des quantiles de ξ.

A.3.5 Méthodes bayésiennes

Des développements récents (cf. COLES et POWELL [1996] ou DIEBOLT et al. [2005a]) proposent des approches bayésiennes pour estimer les paramètres de la loi GPD. Utilisant des algorithmes *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC), ces méthodes permettent d'intégrer une information *a priori* (avis d'expert) dans des contextes où l'on dispose d'un nombre réduit d'observations.

Annexe B : Résultats probabilistes

Sont successivement rappelés dans ce paragraphe des résultats de calcul des probabilités concernant la loi du maximum, l'épaisseur des queues de distribution et la loi des excès au-delà d'un seuil. Les différents résultats sont démontrés dans EMBRECHTS et al. [1997].

B.1 Loi du maximum

Définition 2 : *Lois de même type*

Deux variables aléatoires X et Y sont dites de même type s'il existe deux constantes $a \in \mathbb{R}$ *et* $b > 0$ *telles que* $Y =_d a + bX$ *.*

Définition 3 : *Fisher-Tippett-Gnedenko*

Considérons une suite $X_1, X_2, \ldots$ *de variables i.i.d. S'il existe une suite de réels* (a_n)*, une suite positive* (b_n) *et une loi non-dégénérée H telles que*

$$(28) \qquad \frac{X_{1,n} - a_n}{b_n} \to_d H,$$

alors H est du même type qu'une des lois suivantes :

$$(29) \qquad \begin{aligned} G(x) &= \mathbf{exp}\left\{-(1+\xi x)^{-1/\xi}\right\}, \quad \text{pour } 1+\xi x \geq 0, \\ \Lambda(x) &= \mathbf{exp}\left\{-\mathbf{exp}(-x)\right\}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Les fonctions de répartition $G_+(\xi > 0)$, $\Lambda(\xi = 0)$ et $G_-(\xi < 0)$ correspondent respectivement aux lois de Fréchet, de Gumbel et de Weibull.

Définition 4 : *Domaine d'attraction maximum*

On dira d'une fonction de répartition F qui répond aux hypothèses du théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko qu'elle appartient au domaine d'attraction maximum (DAM) de H.

La représentation de Jenkinson-Von Mises fournit une caractérisation synthétique des lois extrêmes : la distribution généralisée des valeurs extrêmes (Generalized Extreme Value, ou GEV). La fonction de répartition GEV a la forme suivante :

$$(30) \qquad H_{\xi\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \mathbf{exp}\left\{-\left(1+\xi\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\} & \text{si } 1+\xi\dfrac{x-\mu}{\sigma} > 0, \xi \neq 0, \\ \mathbf{exp}\left\{-\mathbf{exp}\left(-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

où le paramètre de localisation μ est directement lié à la valeur la plus probable de la loi, il donne donc une information approximative sur le cœur de la distribution alors que σ est le paramètre de dispersion qui indique l'étalement des valeurs extrêmes. Enfin ξ est l'indice de queue précédemment introduit.

B.2 Épaisseur des queues de distribution

Définition 5 : *Fonction à variation régulière*

Une fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ est dite à variation régulière (en $+\infty$) d'indice α si h vérifie

$$(31) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^{\alpha} \text{ pour tout } t > 0.$$

Si $\alpha = 0$, on parlera de variation lente ; si $\alpha = \infty$, de variation rapide.

Définition 6 : *Théorème taubérien*

Une variable aléatoire de fonction de répartition F et de transformée de Laplace L_F est à variation régulière d'indice $-\alpha(\alpha \leq 0)$ si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées ($\mathcal{L}_F$, $\mathcal{L}_{F^{-1}}$, $\mathcal{L}_L$ et $\mathcal{L}_f$ désignent des fonctions à variation lente) :

(i) $\overline{F}$ est à variation régulière d'indice $-\alpha$, i.e. $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}\mathcal{L}_F(x)$.

(ii) La fonction quantile est à variation régulière :

$$(32) \qquad F^{-1}(1-1/x) = x^{1/\alpha}\mathcal{L}_{F^{-1}}(x).$$

(iii) La transformée de Laplace de F vérifie $L_F(t) = t^{\alpha}\mathcal{L}_L(1/t)$.

(iv) Si la densité existe et vérifie $xf(x)/\overline{F}(x) \to \alpha$ quand $x \to +\infty$, alors la densité est à variation régulière d'indice $-(1+\alpha)$, i.e. $f(x) = x^{-(1+\alpha)}\mathcal{L}_f(x)$.

La condition relative à la transformée de Laplace permet d'établir que la propriété de variation régulière à paramètre fixé est stable par convolution.

B.3 Loi des excès au-delà d'un seuil

Définition 7 : *Pickands-Balkema-de Haari*

Une fonction de répartition F appartient au domaine maximum d'attraction de G_ξ *si, et seulement si, il existe une fonction positive* $\beta(.)$ *telle que*

$$(33) \qquad \lim_{u\to x}\sup_{x>0}\left\{\left|{}_uF(x)-H_{\xi,\beta(u)}(x)\right|\right\}=0\,.$$

Ce théorème établit le lien entre le paramètre de la loi du domaine d'attraction maximum et le comportement limite des excès au-delà d'un seuil grand. En particulier, l'indice de queue ξ est identique au paramètre de la loi GPD qui décrit le coût résiduel des sinistres dépassant un seuil suffisamment élevé.

Ceci permet notamment de distinguer les lois à queue épaisse qui appartiennent au DAM de Fréchet $(\xi>0)$ des lois à queue fine qui appartiennent au DAM de Gumbel $(\xi=0)$. Le tableau suivant indique le comportement limite de certaines lois usuelles.

Lois à queue épaisse $\xi>0$	Lois à queue fine $\xi=0$	Lois bornées à droite $\xi<0$
Cauchy Pareto log-gamma Student α-stable $(\alpha<2)$	gamma normale log-normale Weibull Benktander	uniforme beta

La propriété suivante concerne le nombre N_u de dépassements d'un seuil *u* assez élevé.

Proposition 1 : *Nombre de dépassements d'un seuil élevé*

Le nombre de dépassements du seuil u_n *dans un échantillon de taille n est asymptotiquement distribué selon une loi de Poisson pour autant que la probabilité de dépasser* u_n *diminue proportionnellement à l'inverse de la taille de l'échantillon. Formellement, on a*

$$(34) \qquad \lim_{n\to\infty} n\overline{F}(u_n)=\tau \Rightarrow N_{u_n}\to_d \mathcal{P}(\tau)\,.$$

En effet, comme $\mathbf{Pr}\left[N_{u_n}=k\right]=\mathbf{Pr}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i>u_n}=k\right]$ et que les $X_1,X_2,\ldots$ sont indépendants et identiquement distribués, on a :

$$(35) \qquad \mathbf{Pr}\left[N_{u_n}=k\right]=C_n^k\overline{F}^k(u_n)\left(1-\overline{F}(u_n)\right)^{n-k}, \text{ pour } n\geq k\,.$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Pr}\left[N_{u_n}=k\right] &= C_n^k \bar{F}^k\left(u_n\right)\left(1-\bar{F}\left(u_n\right)\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{\left(1-\bar{F}\left(u_n\right)\right)^k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\bar{F}^k\left(u_n\right)\left(1-\bar{F}\left(u_n\right)\right)^n .
\end{aligned} \tag{36}
$$

Lorsque $n \to \infty$, $n\bar{F}\left(u_n\right) \to \tau$, $\bar{F}\left(u_n\right) \to 0$ et $j/n \to 0$ pour $j \in \{0,\ldots,k-1\}$, donc

$$
\lim_{n\to\infty} P\left[N_{u_n}=k\right] = \frac{\tau^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n\bar{F}\left(u_n\right)}{n}\right)^n = \frac{\tau^k}{k!}e^{-\tau}, \tag{37}
$$

la dernière égalité pouvant se montrer par un développement limité de $\mathbf{ln}\left(1-n\bar{F}\left(u_n\right)/n\right)^n$.

Annexe C : Estimation du paramètre de queue

L'épaisseur de la queue de la fonction de répartition F est résumée par le paramètre ξ de la loi dont elle fait partie du DAM. Ainsi les lois appartenant au DAM de la loi de Fréchet $(\xi > 0)$ voient leur queue décroître en fonction puissance tandis que celles appartenant au DAM de Gumbel $(\xi = 0)$ ont des queues qui décroissent de manière exponentielle.

Les estimateurs de quantiles extrêmes faisant appel à ce paramètre de queue ξ, son estimation doit faire l'objet d'une attention particulière.

L'objet de cette section est donc de présenter les principales méthodes d'estimation de l'épaisseur de la queue de distribution. Sont ainsi notamment présentés les estimateurs de PICKANDS [1975], de HILL [1975] et de DEKKERS et al. [1989].

C.1 Méthodes paramétriques

C.1.1 Ajustement à la loi du maximum

Le théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko nous donne la loi asymptotique de $X_{1,n}$. A supposer que l'on dispose de réalisations de cette v.a., i.e. de m échantillons permettant d'observer m réalisations $x_{1,n}^{(1)},\ldots,x_{1,n}^{(m)}$ de $X_{1,n}$, la méthode du maximum de vraisemblance permettrait d'estimer les paramètres de la loi limite et en particulier ξ.

C.1.2 Ajustement de la loi limite des excès

Considérons une distribution F appartenant au domaine d'attraction maximum de G_ξ. D'après le théorème de Pickands-Balkema-de Haari, il existe une fonction positive $\beta(.)$ telle que

$$
\lim_{u\to x}\sup_{x>0}\left\{\left|{}_uF(x)-H_{\xi,\beta(u)}(x)\right|\right\}=0 . \tag{38}
$$

En particulier, le paramètre ξ de la distribution Pareto généralisée $H_{\xi,\beta}$ est identique à celui de G_ξ. Ainsi pour un seuil u assez élevé, la distribution $H_{\xi,\beta(u)}$ est une bonne approximation de F_u dont on dispose de N_u observations $X_{N_u,n}-u,\ldots,X_{1,n}-u$. Les techniques présentées au paragraphe A.3 permettent alors d'estimer ξ.

En particulier, si $\xi > -1/2$ est estimé par la méthode du maximum de vraisemblance, SMITH [1987] montre que la variance asymptotique de cet estimateur vaut $(1+\xi)^2/N_u$.

C.2 Méthodes semi-paramétriques

C.2.1 Estimateur de Pickands

Pour $k/n \to 0$, l'estimateur de Pickands, défini par

$$(39) \qquad \xi_k^P = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{X_{k,n}-X_{2k,n}}{X_{2k,n}-X_{4K,n}},$$

est un estimateur convergent de ξ. De plus, sous certaines conditions supplémentaires portant sur k et F (cf. Dekkers et de Haan (1989)), il est asymptotiquement gaussien :

$$(40) \qquad \sqrt{k}\left(\xi_k^P-\xi\right) \to_d \mathcal{N}\left(0,\frac{\xi^2\left(2^{\xi+1}+1\right)}{\left(2\left(2^\xi-1\right)\ln 2\right)^2}\right).$$

C.2.2 Estimateur de Hill

Pour $k/n \to 0$, l'estimateur de Hill défini par

$$(41) \qquad \xi_k^H = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\ln\frac{X_{j,n}}{X_{k,n}},$$

est un estimateur convergent de ξ. De plus, sous certaines conditions sur k et F (cf. de Haan et Peng (1998)), il est asymptotiquement gaussien :

$$(42) \qquad \sqrt{k}\left(\xi_k^H-\xi\right) \to_d \mathcal{N}\left(0,\xi^2\right).$$

Bien que plus performant que l'estimateur de Pickands (cf. le rapport des variances asymptotiques), l'estimateur de Hill n'est utilisable que pour les distributions de Fréchet $(\xi > 0)$.

C.2.3 Estimateur de Dekkers-Einmahl-de Haan

L'estimateur de Dekkers-Einmahl-de Haan est une généralisation de l'estimateur de Hill à l'ensemble des lois extrêmes $(\xi \in \mathbb{R})$.

Pour $k/n \to 0$, l'estimateur de Dekkers-Einmahl-de Haan défini par

$$(43) \qquad \xi_k^{DEdH} = 1 + \xi_k^{(1)} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left(\xi_k^{(1)}\right)^2}{\xi_k^{(2)}}\right)^{-1},$$

avec $\xi_k^{(i)} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\ln \frac{X_{j,n}}{X_{k+1,n}}\right)^i$, est un estimateur convergent de ξ. De plus, sous certaines conditions sur k et F (cf. DEKKERS et al. [1989]), il est asymptotiquement gaussien :

$$(44) \qquad \sqrt{k}\left(\xi_k^{DEdH} - \xi\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, 1 + \xi^2\right).$$

Cet estimateur est également connu sous l'appellation d'estimateur des moments, les $\xi_k^{(i)}$ pouvant s'interpréter comme des moments empiriques.

C.2.4 Nombre d'observations à utiliser

Les résultats concernant les estimateurs de l'indice de queue énoncés précédemment sont asymptotiques : ils sont obtenus lorsque $k \to \infty$ et $k/n \to 0$. Comme en pratique, on ne dispose que d'un nombre d'observations n fini, il s'agit de choisir k de manière à ce que l'on dispose de suffisamment de matériel statistique (les $X_{k,n}, \ldots, X_{1,n}$) tout en restant dans la queue de distribution $(k \ll n)$.

En particulier, l'estimateur de Hill satisfaisant la propriété asymptotique

$$(45) \qquad \sqrt{k}\left(\xi_k^H - \xi\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, \xi^2\right),$$

pour $k \to \infty$ avec un *certain taux de croissance* en fonction de n, on pourrait être tenté de choisir k aussi grand que possible de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne commise par ξ_k^H. Cependant, le comportement au deuxième ordre de la fonction à variation lente $\mathcal{L}_F$ introduite dans le théorème taubérien induit un biais lorsque k est trop grand. Des solutions pour fixer k de manière à disposer d'un estimateur asymptotiquement sans biais ont notamment été proposées par GOLDIE et SMITH [1987] puis de HAAN et PENG [1998].

Concernant l'estimateur de Hill pour des fonctions appartenant au DAM de Fréchet, de HAAN et PENG [1998] ont proposé de retenir le nombre d'observation k^* qui réduit l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de Hill, i.e.

$$(46) \qquad k^*(n) = \begin{cases} 1 + n^{2\xi/(2\xi+1)}\left(\dfrac{(1+\xi)^2}{2\xi}\right)^{1/(2\xi+1)}, & \text{si } \xi \in]0;1[\\ 2n^{2/3}, & \text{si } \xi > 1. \end{cases}$$

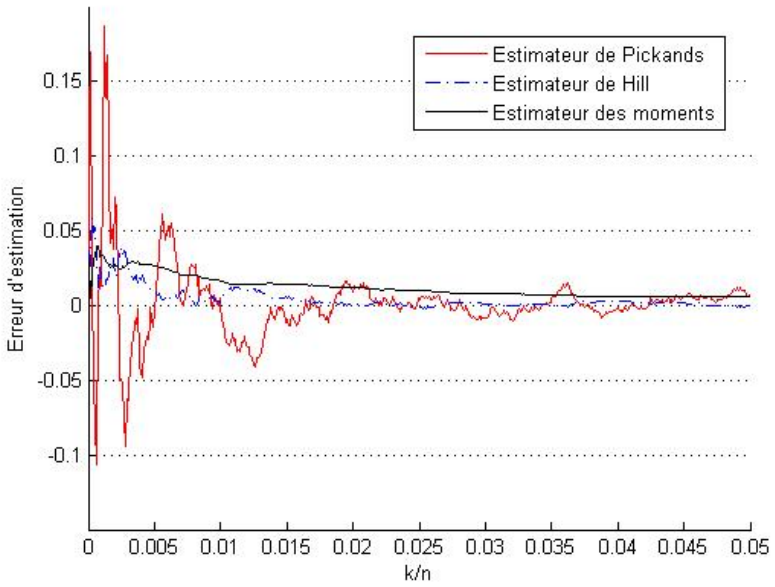
Toutefois, on remarque que k^* s'exprime en fonction de ξ qui n'est pas observé. De plus ce critère ne concerne que l'estimateur de Hill.

En pratique, il sera préférable de suivre la démarche proposée par EMBRECHTS et al. [1997] qui suggèrent de tracer les estimateurs en fonction de k/n et de choisir k dans un intervalle où la droite des estimations est approximativement horizontale (cf. la figure détaillée *infra*).

C.2.5 Illustration

La figure ci-dessous illustre les différents estimateurs du paramètre de queue d'une loi de Pareto de première espèce (de fonction de répartition $F(x) = 1 - (x_0/x)^{\alpha}$, pour $x > x_0$). Cette famille de distributions faisant partie du DAM de Fréchet, les estimations de Pickands, de Hill et de Dekkers-Einmahl-de Haan ont pu être tracées en fonction de *k*.

Figure 39 - Estimation de l'épaisseur de la queue d'une distribution de Pareto



On observe la suprématie de l'estimateur de Hill sur ceux de Pickands et de Dekkers-Einmahl-de Haan. Par ailleurs, pour $k < 0{,}02 \times n$, l'estimateur de Hill est relativement volatile. On serait donc amené à utiliser de l'ordre de 2,5 % des données les plus extrêmes pour estimer l'épaisseur de la queue de distribution.

Conclusion générale

Les évolutions en cours des dispositifs prudentiel (Solvabilité 2), comptable (IFRS) et de reporting financier (MCEV) conduisent à repenser les modèles de valorisation des engagements et les modes de détermination des allocations d'actifs, pour les portefeuilles d'assurance en général et les portefeuilles de rentes en particulier.

Un examen attentif des risques majeurs d'un régime de rente met en évidence trois risques essentiels :

- ✓ Le risque de sous-estimation du capital de solvabilité, conséquence d'une modélisation inadaptée de l'actif et / ou du passif, notamment pour ce qui concerne les événements extrêmes ;
- ✓ le risque d'une mauvaise anticipation de l'espérance de vie des rentiers en cours et futurs, et en pratique d'une sous-estimation de cette espérance de vie ;
- ✓ les risques financiers associés à l'allocation d'actifs ; le régime de rente est en effet confronté à la nécessité d'une gestion à très long terme (facteur de maximisation de sa performance) sous la contrainte de devoir être en mesure à chaque instant de payer les rentes et d'en assurer une revalorisation suffisante.

Les travaux présentés ici proposent des approches et des solutions ou pistes de solutions sur les deux premiers registres. De nombreux champs de réflexions sont ouverts, tout particulièrement pour la modélisation de la mortalité et l'adéquation actif / passif (ALM).

En ce qui concerne la mortalité, plusieurs pistes de réflexions sont explorées :

- ✓ la prise en compte d'avis d'expert (section 3) ;
- ✓ l'utilisation de formes paramétriques différentes de la référence que constitue le modèle de Lee-Carter et ses dérivés ; on peut citer sur ce registre le modèle logistique proposé dans BONGAARTS [2004] et généralisé par HONG-CHIH et YAWEN [2007].

Au-delà de leur intérêt direct pour l'évaluation des engagements d'un régime de rentes, ces études ont des applications directes dans le cadre de la titrisation du risque de longévité (voir par exemple HONG-CHIH et YAWEN [2007])

La question de la détermination de l'allocation d'actifs et du capital de solvabilité offre aussi de nombreuses opportunités de recherche. Tout d'abord la généralisation des approches décrites dans PLANCHET et THÉROND [2004a] en intégrant notamment un modèle de taux, des obligations indexées sur l'inflation, un ajustement annuel de l'allocation, la corrélation entre les actifs ainsi qu'une participation au bénéfice.

Des approches alternatives s'appuyant directement sur la description des règles de gestion et des contraintes de solvabilités peuvent également être développées, via la théorie de la viabilité (AUBIN et al [2007])..

L'analyse des risques portés par un régime de rentes et la mise en place de solutions opérationnelles pour les gérer est devenue un élément essentiel de la pérennité de ces régimes, et la condition du développement d'une offre d'assurance performante.

Enfin, on peut observer que les modèles utilisés en assurance pour décrire l'évolution future des grandeurs déterminant le bilan de l'assureur (valeur des actifs, sinistralité, frais, etc.) sont usuellement des modèles stochastiques ajustés sur des observations passées : par exemple un modèle de Black et Scholes pour les actions avec une estimation des paramètres à partir de données de marché.

Cette approche permet de reproduire dans le futur des tendances passées, mais rend délicate la prise en compte d'informations exogènes : avis d'expert, limite biologique à l'amélioration de l'espérance de vie, relations macro économiques entre l'inflation, le taux d'intérêt réel et le taux de croissance de l'économie par exemple.

Si cette restriction est peu pénalisante en finance de marché, du fait de l'horizon de projection à très court terme, elle peut devenir un véritable handicap dans un modèle qui doit être utilisé sur le long terme, comme c'est le cas en assurance, et notamment en assurance de personnes.

Aussi, il nous semble qu'une réflexion sur des modèles intégrés, prenant en compte les fluctuations de court terme et capables d'intégrer des informations - ou contraintes - de long terme est indispensable dans le cadre de la mise en place d'un modèle standard.

Une démarche de ce type peut *a priori* être menée tant pour les modèles d'actifs, sur le modèle des travaux de Wilkie[42], que pour les modèles de mortalité, *via* la prise en compte d'avis d'experts.

Ce contexte est donc favorable au développement de travaux sur ce thème, dans les domaines décrits par le présent travail. Des travaux sont en cours dans le cadre de 5 thèses en co-encadrement avec le Professeur Jean-Claude AUGROS et qui développement des sujets en lien avec les travaux présentés ici.

[42] Ce point est en cours d'étude dans le cadre d'une thèse co-encadrée par l'auteur.

Bibliographie générale

AHLGRIM K.C., D'ARCY S.P., GORVETT R.W. [2003] *Report on Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios*, Casualty Actuarial Society & Society of Actuaries, http://www.casact.org.

ARTZNER PH., DELBAEN F., EBER J.M., HEATH D. [1999] « Coherent measures of risk », *Mathematical Finance*, vol. 9, 203-228.

ASSOCIATION ACTUARIELLE INTERNATIONALE [2004] « A Global Framework for Insurer Solvency Assessment », http://www.actuaires.org.

AUBIN J.P., PLANCHET F. SAINT-PIERRE P. [2007] « optimal asset allocation for life annuities : a viability approach », ISFA, Working Paper

BACHELIER L. [1900] Théorie de la spéculation, Thèse ENS, rééd. 1994, Jacques Gabay, Paris.

BALLOTTA L. [2004] « Alternative framework for the fair valuation of participating life insurance contracts ». *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*, 337-367.

BALLOTTA L., ESPOSITO G., HABERMAN S. [2005] « The IAS project for life insurance contracts: impact on reserving methods and solvency requirements », Working paper

BATTOCCHIO P., MENONCIN F., SCAILLET O. [2004] « Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases », Forthcoming in *Annals of Operations Research*.

BELLAMY N. [1999] *Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus*. Thèse de doctorat, Université d'Evry.

BERNARD P. [2000] *La décision dans l'incertain: préférences, utilité et probabilités*, EURISCO, Support de cours.

BERNSTEIN P. [1996] *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*, New York : John Wiley & Sons.

BIFFIS E. [2004], « *Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations* » Université Bocconi, Working Paper.

BIFFIS E., MILLOSSOVICH P. [2004], « *The fair value of guaranteed annuity options* » Université de Trieste, Working Paper

BLACK F., SCHOLES M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities ». *Journal of political Economy*, vol. 81, n°3, 637–654.

BLUM K.A., OTTO D.J. [1998] « Best estimate loss reserving an actuarial perspective », *CAS Forum Fall*, 55-101.

BONGAARTS J. [2004] « Long-Range Trends in Adult Mortality : Models and Projection Methods », *Population Council*, working paper n°192.

BOULIER J.-F., HUANG S. J., TAILLARD G. [2001a] « Optimal Management Under Stochastic Interest », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 28, 173-189.

BOULIER J.-F., MICHEL S., WISNIA V. [2001b] « Optimizing investment and contribution policies of a defined benefit pension fund », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 28, 173-189.

BOWERS N., GERBER H., HICKMAN J., JONES D., NESBITT C. [1986] *Actuarial Mathematics*, The society of actuaries.

BOYLE P., WINDCLIFF H. [2004] « The 1/n pension investment puzzle », *North American Actuarial Journal*, vol. 8.

BRENNAN M., XIA Y [2002] « Dynamic Asset Allocation under Inflation », *Journal of Finance*, vol. 57, 1201-1238.

BROUHNS N., DENUIT M. [2001] « Risque de longévité et rentes viagères, Tables de mortalité prospectives pour la population belge », Discussion Paper, Institut de Statistique, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.

BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, 373-393.

BRUNEAU C., FOUQUES B., SGHAIER N. [2007] « Optimal Dynamic Asset Allocation in Solvency 2 when there is Dependence Between Asset Returns: The case of Non Life Insurance Company », *Proceedings of the 16th AFIR Colloquium*

CAIRNS A., BLAKE D., DOWD K. [2004], « Pricing Frameworks for Securitization of Mortality Risk », *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*, vol. 1, 509-540.

CAMPBELL R., HUISMAN R., KOEDIJK K. [2001] « Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework », *Journal of Banking & Finance*, vol. 25, 1789-1804.

CAMPBELL J.Y., VICEIRA L.M. [2001] « Who should buy long term bonds? », *American Economic Review*, vol. 91, 99-127.

CAPÉRAÀ Ph., VAN CUTSEM B. [1988] *Méthodes et modèles en statistique non paramétrique*, Presses de l'Université Laval, Paris: Dunod.

CAREY J.R., TULAPURKAR S. Ed. [2003] *Life Span, Evolutionnary, Ecological and Demographic Perspectives*, Population and Development Revue (sup. to vol. 29) , Population Council.

CEIOPS [2004] Document de travail pour la réunion du sous-comité "Solvabilité" du Comité des assurances du 22 avril 2004.

CEIOPS [2006], « Quantitative Impact Study 2 – Technical Specification », CEIOPS (http://www.ceiops.com)

CHARUPAT N, MILEVSKY, M. [2002] « Optimal asset allocation in life annuities: a note », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 30, 199-209.

CHENUT X., FRANTZ C., WALHIN J.F. [2003] « Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee », *Proceedings of the 13th AFIR Colloquium*, 337-367.

CHENUT X., DESMEDT S.., WALHIN J.F. [2004] « Actuarial Pricing for Minimum Death Guarantees in Unit-Linked Life Insurance: A Multi-Period Capital Allocation Problem », *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*.

COMMISSION EUROPEENNE [2002a] « Considérations sur la corrélation entre le projet Solvabilité 2 et l'extension de l'approche "Lamfalussy" à la réglementation des assurances », Document de travail, MARKT/2519/02.

COMMISSION EUROPEENNE [2002b] « Résumé du rapport du groupe de travail sur l'assurance vie », Document de travail, MARKT/2528/02.

COMMISSION EUROPEENNE [2002c] « Résumé du rapport du groupe de travail sur les provisions techniques en assurance non-vie », Document de travail, MARKT/2529/02.

COMMISSION EUROPEENNE [2002d] « Considérations sur la forme d'un futur système de contrôle prudentiel », Document de travail, MARKT/2535/02.

COMMISSION EUROPEENNE [2002e] « Solvabilité 2 : Point sur les travaux en cours », Document de travail, MARKT/2536/02.

COMMISSION EUROPEENNE [2002f] « Réflexions sur la structure d'une directive cadre et mandats sur des points techniques », Document de travail, MARKT/2539/02.

COMMISSION EUROPEENNE [2003] « Conception d'un futur système de contrôle prudentiel applicable dans l'Union européenne – Recommandation des services de la Commission », Document de travail, MARKT/2509/03.

COMMISSION EUROPEENNE [2004a] « Complément: Sujets de discussion et suggestions de demande d'avis à CEIOPS – Document de travail pour la réunion du sous-comité "Solvabilité" du Comité des assurances du 22 avril 2004 », Document de travail, MARKT/2502/04.

COMMISSION EUROPÉENNE [2004b] « Solvency II – Organisation of work, discussion on pillar I work areas and suggestions of further work on pillar II for CEIOPS », Document de travail, MARKT/2543/03.

COX D.R. [1972] « Regression models and life-tables (with discussion) ». *J. R. Statist. Soc. Ser. B*, pages 187-220.

CURRIE I.D., DURBAN M., EILERS P.H.C. [2004] « Smoothing and forecasting mortality rates », *Statistical Modelling*, vol. 4, 279-298.

DAHL M. [2004] « *Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts* ». Insurance: Mathematics and Economics, 35 (1), 113-136.

DEBON A., MARTINEZ-RUIZ F., MONTES F. [2004] « Dynamic Life Tables: A Geostatistical Approach », IME Congress.

DEELSTRA G., JANSSEN J. [1998] « Interaction Between Asset Liability Management and Risk Theory », *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, vol. 14, 295-307.

DELWARDE A., DENUIT M. [2006] *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*, Paris : Economica.

DEMPSTER M.A.H. (éd.) [2002] *Risk Management: value at risk and beyond*, Cambridge University Press.

DENUIT M., CHARPENTIER A. [2004] *Mathématiques de l'assurance non-vie*, tome 1, Paris : Economica.

DENUIT M., QUASHIE A. [2005] « Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges », *Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique Université Catholique de Louvain*, Louvain-la-Neuve, Belgique.

D'ESTAMPES L. [2003] *Traitement statistique des processus alpha-stables*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

DEVOLDER P. [2001] « les univers virtuels de la finance », , *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 1, 10-17.

DJEHICHE B., HORFELT P. [2004] « Standard Approaches to Asset and Liability Risk », Working paper.

DOUARD H. [2000] « Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaires », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 4, n°8, 141-151.

DRITSCHEL M., PROTTER Ph. [1999] « Complete markets with discontinuous security price » *Finance and Stochastics*, vol. 3, 203-214.

FAMA E.F. [1965] « The behavior of stock market price ». *Journal of business*, vol. 38, 34–195.

FAMA E.F., ROLL R. [1971] « Parameter estimates for symmetric stable distributions ». *Journal of American Statistical Association*, vol. 66, 331–336.

FARGEON L., NISSAN K. [2003] *Recherche d'un modèle actuariel d'analyse dynamique de la solvabilité d'un portefeuille de rentes viagères*, Mémoire d'actuariat, ENSAE.

FEDOR M., MOREL J. [2006] « Value at Risk en assurance: recherche d'une méthodologie à long terme », Actes du congrès ICA 2006.

GRASSELLI M. [2004] « Méthodes récentes de gestion des fonds de retraite », *Banque & Marchés*, n°72, 52-58.

GUTTERMAN S., VANDERHOOFT I.T. [1999] « Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects », *North American Actuarial Journal*, vol. 2, 135-138.

HAAS S. [2006] *Méthodologie d'évaluation économique des traités proportionnels en réassurance vie - Application au swap de mortalité*, Mémoire d'actuairait, ISFA.

HARDY M. R. [2001] « A regime switching model of long-term stock returns », *North American Actuarial Journal*, vol.5 n°2, 41-53.

HE L. [2004] *Méthodes de provisionnement et analyse de solvabilité d'une entreprise d'assurance non-vie*. Mémoire d'actuariat, ENSAE.

HIDALGO M. [1992] « Création et utilisation simplifiée des tables de mortalité de générations prospectives femmes appliquées aux assurances de rente : TPFG50 », Mémoire d'actuariat, Université Louis Pasteur – Strasbourg.

HONG-CHIH H., YAWEN H. [2007] « Extending the Logistic Model for Mortality Forecasting and the Application of Mortality-Linked Securities », *Proceedings of the 11th IME Congress*

HULL J., WHITE A. [1987] « The pricing of options with stochastic volatilities ». *Journal of Finance*, vol. 42, 281–300.

IASB INSURANCE WORKING GROUP [2006] « Overview of the Board's preliminary conclusions so far (Agenda Paper 2) », Observer notes, 29-30 juin 2006.

HADERER M. [2003], « *Réassurance du risque de longévité* », Mémoire ISFA

JANSSEN J. [1992] « Modèles stochastiques de gestion d'actif-passif pour les banques et les assurances », *Transactions of the 24th International Congress of Actuaries*, ICA-ACI, Montréal, 131-139.

JEANBLANC M., RUTOWSKI M. [1999] *Modelling default risk : an overview*. Mathematical Finance : Theory and Practice, Fundan University.

JORGENSEN P.L. [2004] « On accounting standards and fair valuation of life insurance and pension liabilities », *Scandinavian Actuarial Journal*, 5, 372-94.

JOSA-FOMBELLIDA R., RINCÓN-ZAPATERO J.P. [2004] « Optimal risk management in defined benefit stochastic pension funds », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 34, 489-503.

JUILLARD M. [2006] « Identification et quantification des risques techniques pour un régime de rentes », Mémoire d'actuariat, ISFA.

KAHNEMAN D., TVERSKY A. [1982] « On the study of statistical intuitions », Cognitions 11: 123-141

KAUFMANN R., GADMER A., KLETT R. [2001] « Introduction to Dynamic Financial Analysis », *ASTIN Bulletin*, vol. 31, 213-249.

KIMELDORF G.S, JONES D.A. [1967], « *Bayesian graduation* », TSA, XIX

LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2e édition. Paris : Ellipses.

LE PAGE D. [2000] *Risque de défaut : une approche par intensité*, Mémoire d'actuariat, ENSAE.

LEE P.J. [2000] « A General Framework for Stochastic Mortality and Investment Risks », *Heriot-Watt University*, Working Paper.

LEE R.D., CARTER L. [1992] « Modelling and forecasting the time series of US mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, 659–671.

LEE R.D. [2000] « The Lee–Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications », *North American Actuarial Journal*, vol. 4, 80–93.

LEIBOWITZ M., KOGELMAN S. [1991] « Asset allocation under shortfall constraints », *Journal of portfolio management*, vol. 17, 18-23.

MAKEHAM W. M. [1874] « On an Application of the Theory of the Composition of Decremental Forces. », *J. Inst. Actuaries and Assur. Mag*. 18, 317-322.

MANDELBROT B. [1962] « Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy ». *Comptes rendus à l'Académie des sciences*, vol. 254, 3968–3970.

MANDELBROT B. [1963] « The variation of certain speculative prices ». *Journal of business*, vol. 36, 394–419.

MANDELBROT B. [2005], *Une approche fractale des marchés*, Paris : Editions Odile Jacob

MARKOWITZ H. [1952] « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, vol. 7, 77-91.

MESLE F., VALLIN J. [2002] « Comment améliorer la précision des tables de mortalité aux grands âges ? Le cas de la France », *Population n°4*, INED, 603.

MERTON R.C. [1976] « Option princing when underlying stock returns are discontinuous ». *Journal of Financial Economics*, vol. 3, 224-44

MIRABEL A. [2003] « L'apport des obligations indexées sur l'inflation dans la gestion des contrats d'épargne », Mémoire d'actuariat, ISFA.

MOLLER T. [1998], « *Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts* », ASTIN Bulletin 28, 17-47.

PETAUTON P. [2004] *Théorie et pratique de l'assurance vie*, 3e édition, Paris : Dunod.

PLANCHET F. [2005] « Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentiers », note méthodologique de l'Institut des Actuaires.

PLANCHET F. [2006a] « Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentes – note de présentation », Publication de l'Institut des Actuaires.

PLANCHET F. [2006b] « Le risque neutre », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°107 du 04/12/2006.

PLANCHET F. [2007a] « Solvency Capital Requirement », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°113 du 01/06/2007.

PLANCHET F. [2007b] « Mortalité : de l'utilité des tables d'expérience », la Tribune de l'Assurance, n°110 du 01/03/2007.

PLANCHET F. [2007c] « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress*

PLANCHET F., FAUCILLON L., JUILLARD M. [2006] « Etude du risque systématique de mortalité », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 74 (3)

PLANCHET F., JACQUEMIN J. [2003] « Méthodes de simulation », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 6, n°11, 3-69.

PLANCHET F., JUILLARD M. [2007] « Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité – application à un régime de rentes », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 75 (3).

PLANCHET F.; JUILLARD M.; THEROND P. [2008] « Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée », Assurances et gestion des risques, à paraître.

PLANCHET F., MAGNIN F. [2000] « L'engagement d'un régime de retraite supplémentaire à prestations définies », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 4, n°7, 1-28.

PLANCHET F., LELIEUR V. [2007] « Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations », à paraître dans le *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 7, n°14.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2004a] « Allocation d'actifs d'un régime de rentes en cours de service », *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*, vol. 1, 111-134.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2004b] « Les principes de valorisation des engagements sociaux », *RF Comptable*, n°310.

PLANCHET F., THEROND P.E. [2005a] « Allocation d'actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non-vie : présentation et mise en œuvre dans la réglementation française et dans un référentiel de type Solvabilité 2 », *Proceedings of the 36th ASTIN Colloquium*.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2005b] « Simulation de trajectoires de processus continus », *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 5, 1-13.

PLANCHET F., THEROND P.E. [2005c] « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », *Proceedings of the 15th AFIR Colloquium*.

PLANCHET F., THÉROND P.E., JACQUEMIN J. [2005] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2006] *Modèles de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2007a] *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THEROND P.E. [2007b] « Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de Value-at-Risk », *Assurances et gestion des risques*, Vol. 74 (4).

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2007c] « Model risk and determination of economic capital in the Solvency 2 project »,, *Proceedings of the 16th AFIR Colloquium*.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2007d] *Mesure et gestion des risques d'assurance*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉROND P.E. [2008] « Expected Shortfall of Claims Events: Some Practical Aspects », *Proceedings of the 38th ASTIN Colloquium*.

PLANCHET F., WINTER J. [2006] *Les provisions techniques des contrats de prévoyance collective - détermination et pilotage*, Paris : Economica.

PLANCHET F., WINTER P. [2007] « L'utilisation des splines bidimensionnels pour l'estimation de lois de maintien en arrêt de travail », *Bulletin français d'actuariat*, vol. 7, n°13.

PORIN M. [1997] Comptes rendu des *entretiens de l'assurance*, FFSA.

PRADIER P.C. [2003] « L'actuariat au siècle des lumières – risque et décision économiques et statistiques », *Revue économique*, Vol. 54 n°1, 139-156.

RAMEZANI C.A.; ZENG Y. [1998] « Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes: application to security prices ». Working paper.

RENSHAW A.E. [1991] « Actuarial graduation practice and generalized linear and non-linear models », *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 118, 295–312.

REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*, third edition. Berlin: Springer Verlag.

RONCALLI T. [1998] « La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique », Thèse Université Montesquieu - Bordeaux IV

SAPORTA G. [1990] *Probabilités, analyse des données et statistique*, Paris : Editions Technip.

SCHRAGER D.F. [2004] « *Affine Stochastic Mortality* », Working Paper

SERANT D. [2005] « Construction de tables prospectives de mortalité », Document interne Fédération Française des Sociétés d'Assurance.

SITHOLE T., HABERMAN S., VERRALL R.J. [2000] « An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 27, 285–312.

SCHRAGER D.F. [2004], « *Affine Stochastic Mortality* », Working Paper

SOININEN P. [1995], « *Stochastic variation of interest and mortality* », AFIR

TAYLOR G. [1992] « A bayesian interpretation of Whittaker-Henderson graduation », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 11, 7-16.

TENAM E. [2004] *Méthodes de Monte-Carlo pour la finance*, Support de cours de l'université Paris 7.

THÉROND P.E. [2007] *Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière*, Thèse de doctorat, ISFA – Université Lyon1.

VERON N. [2003] « Normalisation comptable internationale : une gouvernance en devenir », Complément au rapport du Conseil d'Analyse Economique : *Les normes comptables et le monde post-Enron*.

WALTER C. [1994] *Les structures du hasard en économie : efficience des marchés, lois stables et processus fractals*. Thèse de doctorat, IEP Paris.

WILKIE A.D. [1995] « More on a stochastic asset model for actuarial use », *British Actuarial Journal*, vol. 1, 777-964.

Table des illustrations

Fig. 1 : Surface de mortalité régulière 14
Fig. 2 : Evolution des taux de décès au cours du temps 15
Fig. 3 : Comparaison des coefficients de provisionnement TPG 1993 et TGH/TGF 05..... 17
Fig. 4 : Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter 20
Fig. 5 : Surface de mortalité de référence du modèle stochastique 21
Fig. 6 : Simulation de trajectoires de la tendance 21
Fig. 7 : « couloir de variation » de la tendance 22
Fig. 8 : Distribution empirique de l'engagement 24
Fig. 9 : Distribution empirique de l'engagement (taille x30) 25
Fig. 10 : Distribution empirique de l'engagement (taux technique nul)..... 26
Les résultats détaillés sont repris ci-après : 26
Fig. 11 : Evolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans 28
Fig. 12 : Comparaison des coefficients de provisionnement TPG 1993 et TGH/TGF 05.. 39
Fig. 13 : Evolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans 40
Fig. 14 : Surface de mortalité ajustée (Lee-Carter sur les logits) 44
Fig. 15 : Comparaison des estimations de α_x 45
Fig. 16 : Comparaison des estimations de β_x 45
Fig. 17 : Comparaison des estimations de k_t 46
Fig. 18 : Comparaison des estimations de k_t dans le modèle contraint et le modèle non contraint..... 46
Fig. 19 : Surface de mortalité ajustée (Lee-Carter sur les logits) 47
Fig. 20 : Surface de mortalité ajustée (Lee-Carter sur les logits) 48
Fig. 21 : Flux de prestations espérées 49
Fig. 22 : Ajustement de la loi log-normale sur un échantillon mélangé 59
Fig. 23 : Identification des valeurs extrêmes 60
Fig. 24 : Calcul du maximum de vraisemblance : identification de m 61
Fig. 25 : Typologie des différents risques rencontrés 66
Fig. 26 : Estimation d'un quantile extrême : erreur relative d'estimation 70
Fig. 27 : Méthode boostrap en provisionnement non-vie 73
Fig. 28 : Intervalles de confiance (VaR à 99,5 %)..... 75
Fig. 29 : Intervalles de confiance (VaR à 75 %)..... 76
Fig. 30 : Modèle interne simplifié : identification des valeurs extrêmes..... 78
Fig. 31 : Modèle interne simplifié : identification des valeurs extrêmes (probabilités)..... 79
Fig. 32 : Rendement journalier du titre TOTAL : QQ-plot loi empirique vs loi normale.. 79
Fig. 33 : Rendement journalier du titre TOTAL : QQ-plot empirique vs modèle de Merton 81
Fig. 34 : Estimation de l'épaisseur de la queue d'une distribution de Pareto 94