



Pilotage technique d'un régime de rentes viagères : identification et mesure des risques, allocation d'actif, suivi actuariel.

Frédéric Planchet

► To cite this version:

Frédéric Planchet. Pilotage technique d'un régime de rentes viagères : identification et mesure des risques, allocation d'actif, suivi actuariel.. Gestion et management. Université Claude Bernard - Lyon I, 2006. Français. $\langle$ NNT : $\rangle$. $\langle$ tel-00443010 $\rangle$

HAL Id: tel-00443010

<https://theses.hal.science/tel-00443010v1>

Submitted on 26 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THESE
présentée
devant l'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1 – ISFA
pour l'obtention
du DIPLOME DE DOCTORAT
(arrêté du 25 avril 2002)
présentée et soutenue publiquement le 20/11/2006
par Frédéric PLANCHET

Pilotage technique d'un régime de rentes viagères : identification et mesure des risques, allocation d'actif, suivi actuariel.

Directeur de thèse : Pr. Jean-Claude AUGROS

JURY :

Pr. Jean-Paul LAURENT (Président)
Pr. Jean-Pierre AUBIN (Rapporteur)
Pr. Jean-Claude AUGROS (Directeur)
Pr. François DUFRESNE (Rapporteur)

Sommaire

Introduction	5
Partie 1 : Le passif, analyse des risques et modélisation	16
A. Présentation générale.....	19
1 Caractéristiques du portefeuille de rentes	19
2 Problématique et méthodologie.....	19
B. Revalorisation, inflation et taux technique.....	24
3 Conséquences financières d'un choix de revalorisation	25
4 Lien entre le taux de croissance, le taux d'inflation et les taux d'intérêt.....	26
C. Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service.....	29
5 Risque associé aux fluctuations autour de la tendance	32
5.1 Cas d'une mortalité déterministe.....	32
5.1.1 Modèle de mortalité	32
5.1.2 Applications numériques.....	35
5.2 Cas d'une mortalité stochastique.....	37
5.2.1 Modèle de mortalité	37
5.2.2 Applications numériques.....	40
5.2.3 Un modèle alternatif.....	48
5.3 Conclusion.....	50
6 Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité	52
6.1 Modèle de mortalité	55
6.2 Applications numériques.....	57
6.2.1 Tables prospectives	58
6.2.2 Application au régime de rentes viagères	60
Partie 2 : L'actif, analyse des risques et modélisation.....	67
D. Modélisation de l'inflation.....	70
7 Approche de Kaufmann et al.....	70
7.1 Résolution par les moindres carrés ordinaires.....	70
7.2 Résolution par la méthode des moindres carrés généralisés	72
8 Modèle de Wilkie	74
8.1 Description du modèle	74
8.2 Exemple numérique : le cas du Royaume Uni	75
9 Modèle de Ahlgrim et al.....	75
E. Prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance.....	78
10 Modélisation de l'actif risqué.....	80

10.1	Présentation du modèle	80
10.2	Estimation des paramètres.....	83
10.2.1	Méthode des moments.....	85
10.2.2	Maximum de vraisemblance	86
10.3	Tests de la validité du modèle	87
10.3.1	Test d'adéquation du Chi-2	87
10.3.2	Test « up and down »	88
10.3.3	Test du rapport de vraisemblances	89
11	Applications	90
11.1	Ajustement du modèle à sauts sur des cours boursiers	90
11.2	Prix d'une option d'achat européenne.....	94
11.3	Solvabilité 2 : impact sur le capital cible	95
11.3.1	Absence de sauts	96
11.3.2	Prise en compte des sauts	98
11.3.3	Application numérique	99
12	Conclusion.....	102
Partie 3 : Analyse des risques actif-passif		103
F.	Prise en compte du risque financier dans la gestion d'un fonds collectif de retraite	105
13	Modèle proposé	108
14	Applications numériques.....	111
14.1	Engagement du régime	111
14.2	Financement <i>via</i> un fonds collectif	112
G.	Rentes en cours de service : un nouveau critère d'allocation d'actifs	116
15	Caractéristiques du portefeuille de rentes	118
16	Modèle proposé	119
16.1	Dynamique du bilan de l'assureur.....	120
16.2	Description du marché financier	121
16.3	Gestion des actifs	122
17	Flux de prestations déterministes	124
17.1	Probabilité de ruine	125
17.2	Maximisation des fonds propres économiques	128
17.2.1	Contraintes réglementaires	128
17.2.2	Fonds propres économiques	129
17.2.3	Etude de sensibilité.....	132
18	Flux de prestations aléatoires	133
18.1	Analyse du risque	134
18.2	Allocation d'actifs	138

18.2.1	Probabilité de ruine	138
18.2.2	Maximisation des fonds propres économiques	139
18.2.3	Conclusion sur la prise en compte du risque de mortalité.....	139
19	Revalorisation des rentes.....	139
19.1	Modélisation de l'inflation	140
19.2	Allocation d'actifs	144
19.2.1	Probabilité de ruine	144
19.2.2	Maximisation des fonds propres économiques	145
20	Conclusion.....	145
	Conclusion générale	147
	Annexe n°1 : le dispositif Solvabilité 2.....	153
21	Modèles proposés par le projet Solvabilité 2	153
21.1	Eléments de solvabilité existants.....	153
21.2	Historique du projet Solvabilité 2	154
21.3	Principes de Solvabilité 2.....	155
21.4	Processus d'élaboration.....	155
21.5	Mesurer le risque	157
21.5.1	Value at Risk (<i>VaR</i>).....	157
21.5.2	Conditional Tail Expectation et <i>TVaR</i>	158
21.5.3	Comparaison des risques.....	159
21.6	Provisions techniques.....	161
21.7	Niveau des fonds propres	164
21.8	Mise en perspective avec les normes IFRS	168
22	Analyse globale de la solvabilité : choix d'un modèle actif/passif.....	168
23	Application numérique	171
	Annexe n°2 : Normes IAS / IFRS	175
24	Cadre général.....	175
25	Norme IFRS 4	176
26	Normes IAS 32 et 39	177
27	Norme IAS 19	179
	Annexe n°3 : Organigrammes (mortalité stochastique)	181
	Table des illustrations.....	184
	Bibliographie.....	186

INTRODUCTION

Les bouleversements du contexte démographique et économique

L'espérance de vie à la naissance a progressé d'environ un trimestre par an depuis une cinquantaine d'années, et en 2006 elle a franchi en France, pour les femmes, le seuil symbolique des 80 ans. Le tableau et le graphique¹ suivant ci-dessous illustrent ce mouvement sur les dernières décennies :

	Femmes			Hommes		
	TV73/77	TV88/90	TV99/01	TD73/77	TD88/90	TD99/01
Espérance de vie à la Naissance	76,5	80,2	82,2	68,6	72,0	74,7
Espérance de vie à 60 ans	20,9	23,5	25	16,1	18,3	19,9
Taux de décès à 60 ans	0,77%	0,57%	0,48%	1,90%	1,57%	1,18%

Tab. 1 : Evolution de l'espérance de vie

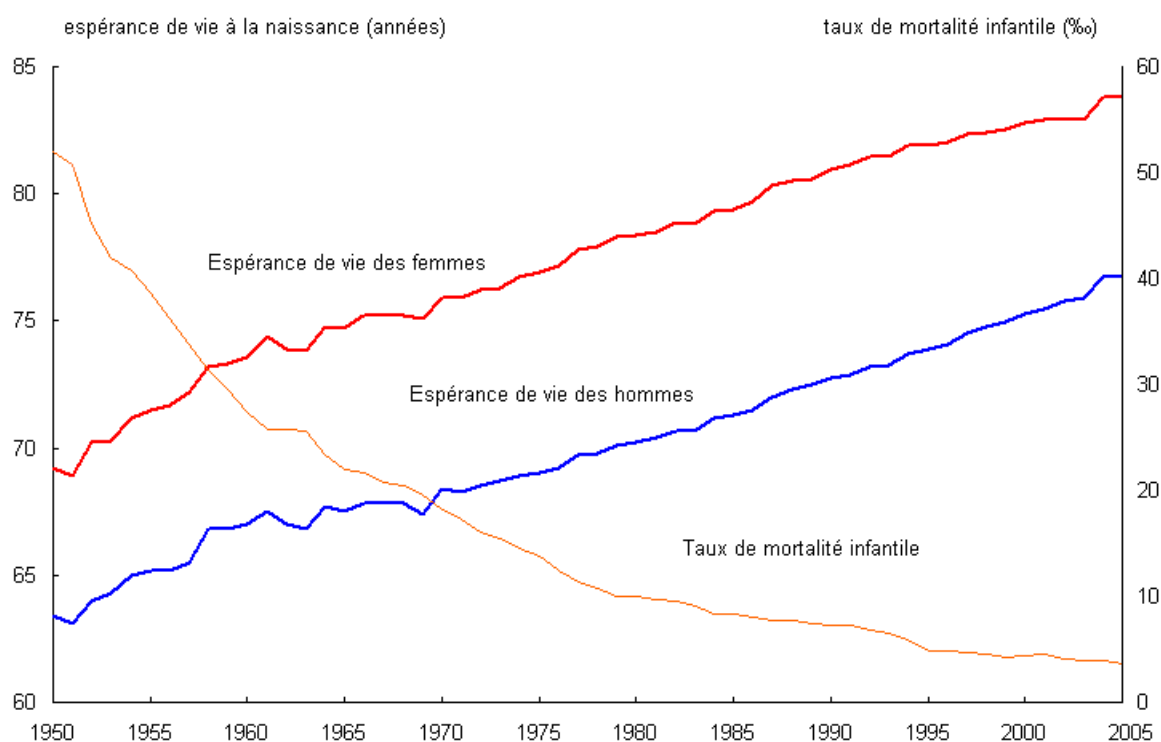


Fig. 1 : Evolution de l'espérance de vie à la naissance depuis 50 ans

¹ Tableaux de l'Economie Française 2006, INSEE.

On constate en particulier que l'espérance de vie des femmes à 60 ans a augmenté de 20 % sur la période 1973-1999, et celle des hommes de 23 %. Ces évolutions ont des conséquences directes sur la charge financière que supportent les régimes de retraite, et, plus généralement, les régimes de rentes viagères. D'une part le coût direct d'une rente viagère s'en trouve majoré en proportion de la majoration de l'espérance de vie et, d'autre part, dans le cas des régimes de retraite publics, le rapport démographique² diminue, augmentant ainsi *a priori* la charge du financement des retraites pour les actifs.

Rien n'indique aujourd'hui une atténuation de ces tendances, et l'INSEE³ prévoit ainsi que le nombre d'actifs de moins de 60 ans rapporté au nombre d'inactifs de plus de 60 ans, aujourd'hui égal à 2,2 devrait progressivement diminuer pour s'établir à 1,4 à l'horizon 2050.

Par ailleurs, l'environnement économique s'est également modifié et, si pendant la période de forte croissance des « trente glorieuses », la dynamique économique associée à la gestion par répartition des régimes de retraite publics a pu compenser l'évolution démographique et, en un certain sens, « masquer » le coût d'un régime de retraite, la situation actuelle ne le permet plus. De plus, pour ce qui concerne les régimes de retraite d'entreprises les contraintes comptables⁴ ont progressivement conduit à clairement identifier dans les comptes la charge financière associée au régime, ce qui a contribué à la prise de conscience du coût de ces instruments de gestion des ressources humaines. La maîtrise des coûts des régimes de retraite supplémentaire et, plus largement, de la protection sociale complémentaire, est ainsi devenue un enjeu majeur de la « bonne gestion » de l'entreprise. De la même manière, les réformes de la comptabilité publique amènent l'Etat à quantifier le montant des engagements qu'il porte envers les populations de fonctionnaires pour les prestations de retraite⁵. On retiendra à ce sujet que le montant de ces engagements est estimé à environ 1 000 Md€ pour la seule fonction publique d'Etat⁶, ce qui représente un montant de l'ordre de grandeur d'une année de PIB.

Enfin, les contraintes réglementaires auxquelles sont soumis les assureurs ont conduit à des majorations régulières et significatives des provisions constituées en représentation des

² Rapport des effectifs d'actifs aux effectifs de retraités.

³ Insee Première n°1092 - juillet 2006 (<http://www.insee.fr/fr/ffc/ipweb/ip1092/ip1092.html>).

⁴ Avec l'application de la norme IAS 19. On pourra se reporter notamment à PLANCHET et THEROND [2004b].

⁵ Norme 13 de la comptabilité publique.

⁶ Et environ autant pour la fonction publique territoriale.

engagements pris dans le cadre de contrats de rentes viagères⁷. On peut retenir comme ordre de grandeur des majorations liées au seul changement de table de mortalité d'environ 20 % en 1993 et comprises entre 10 et 15 % au 01/01/2007 (*cf.* C).

Les bouleversements de l'environnement législatif, réglementaire et comptable

Les évolutions rappelées brièvement ci-dessus se sont accompagnées de nombreuses modifications des environnements législatif, réglementaire et comptable. Ces évolutions se poursuivent, et conditionnent de manière décisive les réflexions relatives au pilotage d'un régime de rentes viagères.

- ✓ *Les évolutions législatives* : la Loi Fillon⁸ du 25/08/2003 a profondément bouleversé le paysage des retraites en France ; elle introduit pour la première fois sur ce sujet la notion de pilotage dynamique d'un régime de retraite public en fixant comme objectif de maintenir constant le rapport de la durée de la vie active à la durée de retraite⁹ (avec 2/3 de la vie en période d'activité et 1/3 en période de retraite). D'un point de vue opérationnel dans le contexte du présent travail, on retiendra les articles 115 et 116, le premier définissant sans ambiguïté le périmètre des régimes d'entreprise et le second organisant le transfert des anciens « régimes spéciaux » (IRS) vers des contrats d'assurance. Ces deux articles incitent fortement à l'externalisation des engagements de retraite¹⁰ et ont des conséquences directes sur les pratiques en matière de contrats de retraite collective qui seront décrites *supra*.
- ✓ *Les évolutions comptables* : L'entrée en application des normes IFRS¹¹ a en premier lieu conduit les entreprises à évaluer et à comptabiliser de manière systématique la charge associée aux régimes de retraite supplémentaire (norme IAS 19) ; les organismes assureurs sont quant à eux directement concernés par la norme IFRS 4 qui a des conséquences directes sur l'évaluation des provisions pour les contrats de rentes viagères qu'ils assurent. On peut noter qu'au travers de la

⁷ Art. A 335-1 du Code des Assurances.

⁸ Loi n° 2003-775 du 21 août 2003 : loi portant réforme des retraites.

⁹ Art. 5 de la Loi Fillon.

¹⁰ Voir par exemple l'article de P. JUNGHANS dans la Tribune du 01/06/2004 sur « La Loi Fillon pousse à l'externalisation ».

¹¹ International Financial Reporting Standard.

norme 13 de la comptabilité publique, l'Etat connaît une évolution comparable à celle des entreprises, avec la nécessité d'évaluer les engagements de retraite au titre des régimes de fonctionnaires. Une présentation sommaire des normes IAS / IFRS est fournie en annexe.

- ✓ *Les évolutions réglementaires* : le dispositif prudentiel est en cours d'harmonisation au niveau européen dans le cadre du projet¹² « Solvabilité 2 » ; les nouvelles règles conduisent à revoir en profondeur les méthodes de provisionnement et, surtout, de détermination des fonds propres (« capital de solvabilité », ou SCR¹³). Compte tenu de l'importance du projet Solvabilité 2, une présentation détaillée en est proposée en annexe.

On retiendra que, tant pour l'IFRS 4 que pour Solvabilité 2, le contexte d'évaluation des engagements d'un régime de rente passe d'une logique actuelle de calcul de provisions sur la base d'hypothèses prudentes auxquelles s'ajoutent des fonds propres directement proportionnels (et égaux à 4 % du montant des provisions mathématiques) à une logique dans laquelle les provisions sont évaluées sur la base d'hypothèses « réalistes » avec une quantification explicite des marges de risque, que ce soit au niveau de la provision ou au niveau des fonds propres¹⁴. En pratique, la détermination d'une hypothèse de mortalité réaliste pour un régime de rente n'est pas aisée, et le corollaire de ce changement de point de vue est la nécessité de la mise en place d'un véritable pilotage technique du régime.

Au surplus, le principe de base posé par le projet Solvabilité 2 pour la détermination du niveau des fonds propres est le contrôle d'une probabilité de ruine (à un an) ; ainsi, les événements extrêmes, tant au passif qu'à l'actif, prennent une importance qu'ils n'avaient pas jusqu'à présent. On sera donc conduit à s'interroger sur la prise en compte d'événements tels que les discontinuités observées dans l'évolution du cours des actifs :

¹² cf. COMMISSION EUROPEENNE [2003], [2004], AAI [2004] et CEIOPS [2006].

¹³ « Solvency Capital Requirement ».

¹⁴ cf. PLANCHET et al. [2005].



Fig. 2 : Evolution discontinue du titre Mercer au mois d'octobre 2004

On peut ajouter à ces évolutions, pour ce qui concerne les organismes d'assurance, des évolutions parallèles sur le plan de la communication externe avec la Loi sur la Sécurité Financière¹⁵ (LSF) et sur le plan de la communication financière avec les démarches¹⁶ d'« European Embedded Value » (EEV) et de « Market Consistent Embedded Value » (MCEV). Les évolutions sur les différents registres, prudentiel, comptable, de communication externe et de communication financière sont bien entendu interconnectées.

Les novations assurantielles

Les articles 115 et 116 de la Loi Fillon, par leur incitation à l'externalisation des engagements de retraite, ainsi que la norme IAS 19 qui permet d'en déterminer les conséquences comptables au niveau du bilan de l'entreprise, ont induit un certain nombre de novations au niveau des contrats d'assurance collectifs de retraite. Ces novations portent sur la garantie de table, la garantie de revalorisation et le transfert intégral du risque vers l'assureur.

La garantie de table

La garantie de table de mortalité consiste à prévoir contractuellement une table de mortalité unique d'évaluation des provisions mathématiques quelles que soient les évolutions réglementaires applicables aux organismes assureurs. Cette contractualisation permet au souscripteur de transférer à l'organisme assureur toute évolution défavorable de la mortalité de la population assurée, contre le versement d'une prime additionnelle à déterminer par

¹⁵ Voir par exemple l'article de F. LUSSEN dans la Tribune du 01/07/2006 sur « Le contrôle interne » et le décret du 13/03/2006.

¹⁶ Voir le site du CFO Forum à l'origine de ces démarches <http://www.cfoforum.nl/>.

l'organisme assureur. La tarification d'une telle clause est délicate. En pratique la prime unique ou la valeur actualisée des chargements prélevés pourra être déterminée par l'intermédiaire d'un abattement applicable sur les taux de décès de la table de mortalité contractualisée (ou, plus généralement, d'un positionnement par rapport à la table contractualisée). La problématique est ramenée à retenir un abattement ou un positionnement « adéquat » en fonction de la population à assurer.

La garantie de revalorisation

On rappelle tout d'abord que l'organisme assureur s'engage, dans un contrat de retraite collective, sur la base d'un montant de rente déterminé. Néanmoins, de nombreux régimes de retraite d'entreprises promettent *a priori* une revalorisation des rentes versées, cet engagement reposant sur une référence « extérieure » dont l'employeur n'a pas la maîtrise (valeur de service du point ARRCO, AGIRC, évolution de la pension Sécurité Sociale, taux d'inflation ...).

Dans le cas où l'entreprise souhaiterait dès à présent obtenir la garantie de revalorisation des rentes au niveau de l'inflation, un adossement de l'échéancier des prestations probables pourra être réalisé à partir d'actifs financiers dont le rendement réalisé est corrélé précisément avec l'inflation. Les actifs financiers pourront être des obligations indexées sur l'inflation ou des produits structurés composés d'obligations, d'actions et de tout autre actif permettant un adossement des flux.

L'adossement (et les éventuelles garanties associées) doit prendre en compte que les régimes prévoient généralement que l'évolution des rentes ne peut être négative (contrairement à l'inflation au cours d'une année donnée). Par ailleurs, l'adossement est difficilement compatible avec un échéancier de prestations dont le terme peut aller au-delà de 50 ans du fait de l'absence d'actifs financiers pour ces maturités.

La mise en place de telles garanties (basées sur un indice de référence) est nécessairement conditionnée par la présence sur les marchés d'actifs financiers corrélés avec le même indice (OAT_i, OAT€_i,...).

Le transfert intégral des risques

La norme IAS 19 prévoit que les contrats d'assurance souscrits par les entreprises au titre de couverture de passifs de retraite à prestations définies viennent minorer l'engagement à retenir dans les comptes consolidés des entreprises.

Le transfert des risques d'assurance d'une part, et des risques financiers d'autre part, peut, après accord des commissaires aux comptes, permettre de supprimer l'engagement externalisé des comptes de l'entreprise. Ce transfert peut s'étendre, en plus de la population des allocataires, à des préretraités ne rendant plus de service à l'entreprise. On remarquera que ce transfert de risque n'est *a priori* pas possible pour des actifs pour lesquels l'entreprise porte *in fine* la responsabilité du paiement des rentes ou du capital constitutif de la rente au moment du départ en retraite. En effet, de nombreux éléments de politique sociale de l'entreprise que l'assureur ne maîtrise pas (évolution des rémunérations, politique de recrutement / licenciement, *etc.*) peuvent impacter fortement le niveau de l'engagement et le rendent de ce fait difficilement assurable. L'assureur l'intervient classiquement en phase de constitution que comme un gestionnaire financier. Il ne porte le risque viager qu'une fois le capital constitutif de la rente prélevé dans le fonds des actifs pour être transféré dans le fonds des retraités.

Ces éléments renforcent le besoin de maîtriser l'évaluation de l'engagement d'un régime de rentes viagères, au-delà du simple calcul « réglementaire » effectué jusqu'alors.

L'analyse des risques

L'un des apports sans doute majeur tant de l'IFRS 4 (au moins dans sa phase 2) que de Solvabilité 2 est d'avoir contribué à structurer la réflexion autour de la segmentation des risques d'une activité d'assurance (et donc en particulier d'une activité d'assurance-vie).

L'analyse des risques est dorénavant déclinée selon quatre catégories principales :

- ✓ Le risque de marché (« market risk ») modélise l'incertitude associée au rendement et à la valeur des actifs financiers,

- ✓ Le risque de souscription (« underwriting risk ») concerne essentiellement l'incertitude associée à la mesure des engagements pris par le régime,
- ✓ Le risque de crédit (« credit risk ») s'attache à prendre en compte le risque de défaut des contre-parties (réassureurs et émetteurs d'obligations),
- ✓ Le risque opérationnel (« operational risk ») prend enfin en considération les risques associés aux procédures de gestion internes de l'assureur et aux conséquences d'un dysfonctionnement à ce niveau.

Le présent travail aborde le risque de marché pour ce qui concerne les placements effectués par le régime et le risque de souscription pour ce qui concerne l'analyse du passif du régime.

Le risque de crédit fait l'objet d'une approche générique qui n'est pas propre aux problématiques de rentes, il ne sera pas abordé ici¹⁷ ; il en est de même pour le risque opérationnel. En ce qui concerne le risque de crédit on pourra noter que les techniques utilisées présentent de nombreuses similitudes avec la construction d'une table de mortalité, le défaut pouvant être analysé comme l'étude du temps d'attente avant le défaut.

On notera à ce stade que tant l'approche comptable que l'approche prudentielle privilégient *via* l'évaluation des provisions et des fonds propres la notion d'engagement au sens d'un montant évalué à la date d'inventaire et « résumant » en un certain sens l'ensemble des flux futurs promis par le régime. Dans cette approche le raisonnement est conduit sur la base de la population arrêtée à la date d'inventaire (« groupe fermé »). Dans le cas d'un régime de rente, il apparaît souvent pertinent de prendre en considération la suite des flux futurs et de raisonner dans le cadre d'une approche « dépenses / ressources ». Cette approche peut être développée en groupe fermé ou en « groupe ouvert », en tenant comptes des nouveaux entrants dans le régime. On notera d'ors et déjà qu'une adéquation dépenses / ressources en groupe fermé est une condition *a minima* de la pérennité du régime¹⁸. Ce point de vue sera notamment retenu dans le cadre de la détermination de l'allocation stratégique d'actifs du régime (Partie 3).

¹⁷ LE PAGE [2000] propose une synthèse assez complète sur ce sujet. On pourra aussi consulter JEANBLANC et RUTOWSKI [1999].

¹⁸ Des projections de ce type sur les régimes de retraite publics montrent depuis très longtemps leur déséquilibre technique.

Dans ce contexte on est amené à considérer dans le cas d'un régime de rentes viagères en cours de service, qui sera l'essentiel du périmètre de ce travail, les éléments suivants :

- ✓ Les risques « classiques » de taux, de valeur de supports de type « actions » pour le risque financier ;
- ✓ Les risques de mortalité (associé aux fluctuations d'échantillonnage), de survie (pour l'incertitude attachée à la durée résiduelle de survie) et d'inflation (qui doit être prise en considération dans le cadre des dispositifs de revalorisation des rentes) pour le risque de souscription.

Le périmètre de l'étude

On le voit, les évolutions démographiques, économiques, législatives, réglementaires et comptables de ces dernières années imposent de reconsidérer l'évaluation des risques associés aux régimes de rentes viagères.

Le champ d'étude offert par ces régimes est potentiellement très étendu et peut être segmenté selon différentes clés : régimes publics *versus* régimes d'entreprises, phase de constitution des droits *versus* phase de restitution, gestion en répartition *versus* gestion en capitalisation, régimes à cotisations définies *versus* régimes à prestations définies, *etc.*.

On a ici délibérément choisi de se restreindre au périmètre strictement délimité des régimes de rentes viagères en cours de service dans le cadre d'une analyse en groupe fermé. Des actifs en phase de constitution seront toutefois pris en compte à la section F dans le cadre de l'analyse du risque financier pour un régime géré au travers d'un fonds collectif. Ce choix est motivé par le constat que l'ensemble des éléments constitutifs des spécificités d'un régime de rentes viagères se retrouve dans ce contexte et que la prise en compte d'un périmètre plus large ne vient pas modifier substantiellement les éléments de base de l'analyse. En pratique, on concentre l'étude sur le risque viager et la prise en compte des spécificités d'un régime de rentes viagères pour la détermination de l'allocation d'actifs.

L'organisation de la thèse

Le présent travail est essentiellement constitué par le contenu des articles et ouvrages publiés depuis 2003 dans le cadre d'une activité d'enseignement et de recherche à l'ISFA ; ceux-ci ont été adaptés et partiellement réécrits pour préserver la cohérence d'ensemble de cette thèse. Les articles d'origine sont systématiquement cités en référence¹⁹. Ce travail prolonge et précise dans le cas d'un régime de rente les approches générales décrites dans les ouvrages PLANCHET et al. [2005] et PLANCHET et THEROND [2006].

Il est structuré de la manière suivante :

- ✓ Dans une première partie on présente de manière détaillée l'analyse du passif d'un régime de rentiers ; le risque systématique de mortalité fait l'objet d'une attention particulière, compte tenu de son apparition récente dans les problématiques d'évaluation d'engagement d'un régime de retraite et du peu de littérature existante dans ce contexte. On n'aborde pas la problématique du positionnement d'une population par rapport à une référence de mortalité donnée, qui relève de techniques classiques de modèles de durée qui dépassent le cadre de ce travail.
- ✓ La seconde partie est consacrée à la présentation des risques d'actif ; compte tenu de l'abondante littérature sur ce registre, on se borne à présenter quelques éléments importants moins souvent mis en avant, à savoir l'importance de la prise en compte d'une modélisation pertinente de l'inflation (dans la perspective de la prise en compte des dispositifs de revalorisation) et le regain d'intérêt pour les modélisations d'actifs risqués non continus²⁰, conséquence directe des réflexions en cours autour du dispositif Solvabilité 2.
- ✓ Enfin, la troisième partie présente les conséquences que l'on peut tirer des analyses précédentes en terme d'adossement actif / passif et, notamment, de détermination de l'allocation stratégique. Elle est également l'occasion d'évoquer le cas d'un régime en phase de constitution et les problématiques de financement des rentes.

¹⁹ La plupart des références citées dans ce document sont disponibles en ligne sur le site <http://www.isfa.info>.

²⁰ On pourra sur ce sujet consulter l'ouvrage de vulgarisation MANDELBROT [2005] qui propose de nombreux exemples illustratifs.

La littérature et les travaux, tant académiques que professionnels, sur le thème des retraites sont extrêmement nombreux, et nous avons choisi ici de ne pas présenter les éléments les plus classiques, préférant renvoyer aux références bibliographiques. Le présent travail s'efforce de présenter un ensemble de réflexions et leurs conséquences en terme de modélisation dans la perspective d'une mise en œuvre effective, et non pour seulement démontrer des résultats qualitatifs.

Aussi, les approches par simulation sont privilégiées au détriment de la recherche de formules fermées, celles-ci n'étant accessibles que dans des versions très simplifiées des modèles concernés.

La montée en puissance des normes IFRS (en particulier de l'IFRS 4 phase 2) et, demain, de Solvabilité 2, rend en effet indispensable la refonte d'une partie importante des modélisations utilisées jusqu'à présent, et nous espérons que les réflexions présentées ici seront utiles dans ce cadre.

PARTIE 1 : LE PASSIF, ANALYSE DES RISQUES ET MODELISATION

La modélisation du passif d'un régime de retraite est un sujet classique d'actuariat vie qui trouve son expression de base la plus connue dans la formule $a_x = \sum \frac{l_{x+h}}{l_x} v^h$; cette expression de l'engagement total associé à une rente unitaire non réversible servie à une tête d'âge x à la date des calculs repose sur les hypothèses suivantes :

- ✓ Le groupe est supposé de taille suffisante pour que les fluctuations d'échantillonnage soient négligées ;
- ✓ Les taux de décès q_x (ou, dans une version prospective q_{xt}) sont déterministes et connus ;
- ✓ Enfin, le taux d'actualisation i tel que $v = \frac{1}{1+i}$ est constant et déterministe.

Le relâchement des hypothèses de mutualisation parfaite et de taux d'actualisation déterministe est classique et conduit à des analyses de la répartition du risque d'assurance (associé aux fluctuations d'échantillonnage) et du risque de taux au travers de l'équation de décomposition de la variance²¹. Ce sujet sera développé à la section F.

Après avoir fixé les grandes lignes du cadre d'analyse à la section A, on rappelle à la section B quelques considérations de nature macro-économique qu'il est utile d'avoir à l'esprit pour assurer la cohérence de long terme de la modélisation en ce qui concerne les liens existants entre le taux d'inflation, le taux d'intérêt et le taux de croissance de l'économie. Les modélisations du taux d'inflation proprement dites sont présentées à la section D de la partie suivante.

La détermination des taux de décès supposés déterministes fait appel dorénavant de manière quasi-systématique aux modèles de mortalité prospectifs dont l'ambition est d'anticiper, dans

²¹ Cf. BOWERS et al. [1986] pour des considérations générales et PLANCHET et MAGNIN [2000] pour un modèle complet et des exemples numériques.

la mesure du possible, les évolutions futures du taux de décès, q_{xt} . La littérature sur ce sujet est abondante²².

Plus récemment certains auteurs²³ ont fait observer que les taux de décès bruts calculés sur de très grands groupes q_{xt} présentent des irrégularités (comme fonction de t) qui conduisent à ne plus les supposer connus mais à considérer que le taux à une date donnée est le résultat d'un tirage aléatoire. Les conséquences de cette propriété sont exploitées dans de nombreux articles pour la construction de modèles de tarification de dérivés de mortalité²⁴.

Toutefois, la prise en compte du caractère intrinsèquement stochastique des taux de décès dans le cadre d'un régime de rentes viagères n'est pas souvent abordée ; cette question est évoquée dans Delwarde et Denuit²⁵. La section C propose des approches adaptées au cas des rentes viagères pour quantifier, dans une perspective « Solvabilité 2 », le risque systématique induit par le comportement stochastique des taux de décès.

Il est précisé que l'on s'intéresse ici à la détermination du passif au sens du montant de l'engagement total du régime, sans considérer la question de la comptabilisation et donc la détermination de ce montant entre la part affectable au passé et la part représentative de droit à acquérir dans le futur²⁶.

En effet, la détermination du montant à provisionner comporte schématiquement deux étapes :

- ✓ L'évaluation de l'engagement total, qui représente la contrepartie financière de la globalité de la promesse faite par le régime ;
- ✓ La répartition de cet engagement total entre une part affectable au passé, représentative de droits acquis, et la part complémentaire représentative de droits futurs, restant à acquérir.

²² Voir notamment sur le modèle de Lee-Carter LEE et CARTER [1992], LEE [2000], SITHOLE et al. [2000] et sur les modèles poissoniens BROUHNS et al. [2002]. PLANCHET et THEROND [2006] propose une présentation et une discussion de ces modèles, et on pourra également se reporter à DELWARDE et DENUIT [2006] pour une présentation complète.

²³ CURRIE et al. [2004].

²⁴ Cf. CAIRNS et al. [2004], DAHL [2004] et SCHRAGER [2004].

²⁵ DELWARDE et DENUIT [2006].

²⁶ Voir sur ce point PLANCHET et THEROND [2004b].

La première étape relève de la compétence de l'actuaire et met en jeu des techniques de projection des montants financiers aléatoires associés au régime considéré. Elle conduit à la notion de « valeur actuelle probable totale » (VAP totale) du régime, qui sera considérée ici.

La seconde étape fait appel à un référentiel comptable permettant de fixer les modalités de répartition de cette VAP totale entre le passé et le futur ; elle conduit en IAS 19 à la notion de « projected benefit obligation » (PBO), représentative des droits passés.

Il est à ce stade important de noter que la notion de VAP totale est déterminée en fonction de méthodes et de techniques essentiellement indépendantes du référentiel comptable utilisé, alors que la notion de PBO découle directement de l'application d'un référentiel comptable particulier.

Dans le cas de rentes en cours de service les notions de VAP totale et de PBO coïncident, l'acquisition de droits futurs étant nulle. Au surplus, que l'on considère un salarié en phase de constitution des droits ou un rentier en phase de restitution, la VAP totale reste la mesure la plus objective du coût mis à la charge du régime (indépendamment de la problématique du financement de cette charge).

A. PRESENTATION GENERALE

1 CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE DE RENTES

Dans la suite, nous utiliserons pour les applications numériques un portefeuille²⁷ constitué de 374 rentiers de sexe féminin âgés en moyenne de 63,8 ans au 31/12/2005. La rente annuelle moyenne s'élève à 5,5 K€. Le graphique *infra* présente les flux de prestations espérés en fonction du temps obtenu à partir de la table de mortalité TV 2000.

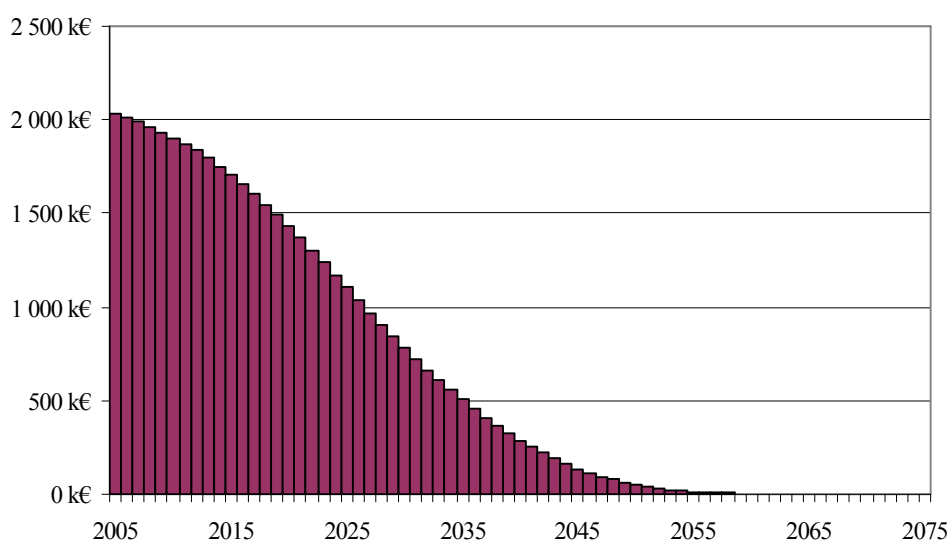


Fig. 3 : Flux de prestations espérées

Avec un taux d'escompte des provisions de 2,5 %, la provision mathématique initiale calculée avec la table prospective construite à la section 5.1.2, s'élève à 38,0 M€. On peut noter que dans Planchet et Thérond²⁸, les calculs menés avec la table du moment féminine TV 2000 conduisaient à une provision de 32,8 M€. Cela met incidemment en évidence l'importance d'une approche prospective de la mortalité pour déterminer le niveau de l'engagement sans le sous-estimer exagérément.

2 PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

Nous noterons dans la suite de ce chapitre :

²⁷ Les données utilisées pour les applications numériques sont reprises de PLANCHET et THEROND [2004].

²⁸ PLANCHET et THEROND [2004].

- ✓ L_0 le montant des provisions mathématiques à la date initiale,
- ✓ $\tilde{F}_t$ le flux de prestation (aléatoire) à payer à la date t ,
- ✓ (Φ_t) la filtration décrivant l'information disponible à la date t ,
- ✓ i le taux (discret) d'escompte des provisions mathématiques,
- ✓ $\mathbf{J}$ l'ensemble des individus,
- ✓ $x(j)$ l'âge en 0 de l'individu j et r_j le montant de sa rente annuelle,
- ✓ Π une surface de mortalité, c'est à dire la donnée d'une famille de fonctions de risque indexée par l'âge à la date des calculs $\mu_x(t)$.

Le portefeuille est exclusivement constitué de rentes en cours de service supposées non réversibles. En 0, l'assureur estime la suite de flux probables de sinistres que nous noterons $(F_t)_{t \geq 1}$:

$$F_t = \mathbf{E}[\tilde{F}_t \mid \Phi_0],$$

avec :

$$\tilde{F}_t = \sum_{j \in \mathbf{J}} r_j * \mathbf{1}_{]t; \infty[}(T_{x(j)}),$$

où $T_{x(j)}$ désigne la date de décès (aléatoire) de la tête d'âge $x(j)$. Avec les notations classiques de l'assurance vie²⁹ :

$$F_t = \sum_{j \in \mathbf{J}} r_j * \frac{l_{x(j)+t}}{l_{x(j)}}.$$

A partir de cette estimation, l'assureur détermine la provision mathématique L_0 :

$$L_0 = \sum_{t=1}^{\infty} F_t (1+i)^{-t}.$$

Dans la suite on analysera le montant aléatoire de l'engagement, soit la variable aléatoire :

$$\Lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{F}_t (1+i)^{-t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \sum_{j \in \mathbf{J}} r_j * \mathbf{1}_{]t; \infty[}(T_{x(j)}).$$

²⁹ Cf. PETAUTON [1996].

Cette variable aléatoire est telle que $E(\Lambda) = L_0$. Pour une analyse détaillée de la loi de Λ lorsque la mortalité est connue (avec éventuellement des taux d'intérêt stochastiques), on se reportera à Planchet et Magnin³⁰. La loi de Λ n'est pas simple dans le cas général. Son analyse peut être simplifiée en observant que $\Lambda = \sum_{j \in J} r_j \Lambda_{x(j)}$ avec :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t; \infty[}(T_x)$$

désignant l'engagement associé au versement d'une rente viagère unitaire à une tête d'âge x à la date des calculs. Avec les notations classiques de l'assurance vie³¹ on a $E(\Lambda_x) = a_x$, annuité viagère sur une tête d'âge x . Conditionnellement au taux d'intérêt et à la surface de mortalité, les variables $\Lambda_{x(j)}$ sont classiquement supposées indépendantes.

Le modèle peut être également écrit dans une version continue, qui simplifie l'obtention de certains résultats, mais ne sera pas développé ici, la version discrète se prêtant mieux à la mise en œuvre numérique *via* des techniques de simulation, ce qui est le choix que nous avons effectué. On a alors :

$$\Lambda_x = \int_0^{+\infty} e^{-rt} \mathbf{1}_{\{T_x \geq t\}} dt = \int_0^{T_x} e^{-rt} dt = \frac{1 - e^{-rT_x}}{r}.$$

On en déduit après quelques manipulations simples que, conditionnellement à la surface de mortalité, on a :

$$E[\Lambda_x | \Pi] = \int_0^{+\infty} \exp \left(- \int_x^{x+t} [r + \mu_{x+u}(u)] du \right) dt.$$

³⁰ PLANCHET et MAGNIN [2000].

³¹ Cf. PETAUTON [1996].

avec $\mu_x(t)$ le taux instantané de mortalité pour un individu d'âge x à l'origine³². En d'autres termes le taux d'actualisation et le taux de hasard ont des rôles complètement symétriques dans l'expression de l'engagement conditionnel. Cette propriété est utilisée de manière intensive dans les modèles de valorisation de dérivés de mortalité. Incidemment l'expression de l'espérance conditionnelle ci-dessus fournit une expression de la transformée de Laplace de la durée de vie résiduelle à partir de la fonction de risque, puisque $E\left(e^{-rT_x}\right) = 1 - rE\left(\Lambda_x(r)\right)$.

On soulignera toutefois que cette symétrie formelle dissimule une asymétrie importante dans la nature des risques associés : le risque financier résulte d'une construction humaine³³ alors que le risque de mortalité comporte une composante biologique « objective » essentielle.

Les propriétés de Λ seront examinées dans un premier temps avec l'hypothèse classique que la mortalité future est connue (déterministe), via l'utilisation d'une table prospective, puis, dans un second temps, dans un contexte de mortalité stochastique. Dans ce second cas on aura donc à considérer des surfaces de mortalité stochastiques Π (la mortalité future n'est donc plus supposée connue avec certitude) et, une surface étant donnée, la loi conditionnelle de l'engagement $\Lambda|\Pi$.

Nous aurons recours aux techniques de simulation, bien adaptées au contexte étudié ici. Nous ne développerons pas la présentation des techniques utilisées, en attirant toutefois l'attention du lecteur sur l'importance d'un choix judicieux des méthodes. On pourra se reporter pour des développements sur ce sujet à Planchet et Jacquemin, Planchet et Thérond et Tenam³⁴.

Il est important de simuler les durées de survie de manière efficace ; on utilise donc ici la « méthode d'inversion » dans le contexte discret, qui repose sur le constat que si on définit la variable T par :

- ✓ $T=0$ si $U < p_0$
- ✓ $T=1$ si $p_0 \leq U < p_0 + p_1$

³² Cette formule reste valable avec un taux d'intérêt non constant.

³³ Voir sur ce point et sur la pertinence de la modélisation financière l'analyse de BERNSTEIN [1996].

³⁴ PLANCHET et JACQUEMIN [2003], PLANCHET et THEROND [2005b] et TENAM [2004].

✓

$$✓ \quad T=j \text{ si } \sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^j p_i$$

avec U une variable uniforme sur $[0,1]$, alors T est distribuée selon la loi $(p_n)_{n \geq 0}$. Le lien entre les probabilités p_i et les taux de décès déterminés précédemment est donné par

$$p_i = q_{x+i} \times \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}).$$

Par rapport à l'approche directe consistant à décider de la survie de

chaque rentier par un tirage à chaque période, en comparant le résultat obtenu au taux de décès à l'âge considéré, le temps de simulation est divisé par un facteur de l'ordre de l'espérance de vie résiduelle à l'âge moyen du groupe (soit dans notre exemple de l'ordre de 20). Cette optimisation est indispensable pour conserver un caractère opérationnel au modèle dans le contexte de la mortalité stochastique, examiné *infra*.

La méthode retenue consiste alors à simuler les durées de survie des rentiers, $T_{x(j)}$, $j \in J$ puis à calculer :

$$\Lambda = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \sum_{j \in J} r_j * \mathbf{1}_{[t; \infty[}(T_{x(j)}),$$

sur la base des réalisations des $T_{x(j)}$, $j \in J$ obtenues. On obtient ainsi des réalisations $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de Λ et on détermine la fonction de répartition empirique de l'engagement :

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{]-\infty, \lambda_n]}(\lambda).$$

On calcule également facilement les estimateurs empiriques des différentes grandeurs d'intérêt (espérance, variance et *VaR* pour l'essentiel).

On notera que dans le cas le plus général, le montant de la rente r_j peut également dépendre de t . C'est notamment le cas lorsque l'on prend en compte une revalorisation des prestations (*cf.* la section 19).

B. REVALORISATION, INFLATION ET TAUX TECHNIQUE³⁵

Les bénéficiaires de rentes viagères vivent dans la société parallèlement aux actifs. Simultanément, ils doivent au cours des années faire face à des acquisitions de biens de consommation divers dont le prix évolue au cours du temps.

Dans ces conditions, se pose la question de ce qui doit apparaître comme l'objectif de revalorisation des rentes qu'ils perçoivent. Deux solutions sont envisageables selon que l'on retient plus précisément le premier ou le second des positionnements évoqués ci-dessous :

- ✓ *Une revalorisation qui soit corrélée avec les revenus des actifs*, ce qui maintient la situation financière relative des retraités par rapport aux actifs, et se traduit par une revalorisation corrélée avec l'évolution des salaires nominaux,
- ✓ *Une revalorisation qui vise à maintenir le pouvoir d'achat des retraités*, quitte à ce que celui-ci régresse par rapport aux salaires nominaux versés aux actifs lorsque ces derniers obtiennent des gains de pouvoir d'achat suite aux effets de la croissance économique.

Il s'agit des deux formes de revalorisations que l'on observe le plus fréquemment dans les régimes de pensions de retraite. Ainsi, les réformes de 1993 sur le régime général des pensions ont conduit à une modification de l'objectif de revalorisation des pensions de retraite du régime général de Sécurité Sociale : celui-ci est passé d'un objectif d'évolution corrélée avec les salaires à un objectif d'évolution corrélée avec le niveau des prix.

A long terme, ce genre de dispositif n'est pas neutre puisque, pour autant que la croissance économique perdure, l'évolution des prix est généralement inférieure à l'évolution des salaires nominaux. Donc, si l'objectif assigné est un maintien de pouvoir d'achat, cela se traduit par une baisse du niveau de revenu relatif des pensionnés par rapport aux actifs comme cela devrait être le cas en ce qui concerne les retraités dans les années à venir par rapport aux actifs.

³⁵ Ce texte est initialement paru dans PLANCHET et THEROND [2005].

En terme d'ordre de grandeur, on pourra retenir qu'avec un taux annuel d'inflation de 2 %, un panier de biens de valeur 100 à la date de liquidation de la rente voit son prix majoré de 50 % en 20 ans. Ainsi, l'existence d'un dispositif de revalorisation est un élément central d'un régime de rentes viagères qui souhaite ne pas voir se dégrader très sensiblement le pouvoir d'achat de ses bénéficiaires.

3 CONSEQUENCES FINANCIERES D'UN CHOIX DE REVALORISATION

Une fois l'objectif de revalorisation défini, se pose la question de la prise en compte technique et financière de celle-ci au travers des tarifs et des provisions mathématiques de rentes à constituer. On rappellera que les provisions mathématiques se doivent de traduire, le plus fidèlement possible, le poids financier des engagements pris par la compagnie d'assurance ou le régime³⁶.

Deux approches sont *a priori* possibles. La première consiste simplement à modifier les flux de rente pour les faire croître au fil du temps en raison du taux de la revalorisation attribuée. C'est cette approche que l'on retient par exemple à la section 19. Elle présente l'avantage de clairement distinguer, dans le montant de la provision, ce qui relève de la revalorisation et ce qui est à attribuer au « niveau atteint » de la rente à la date d'inventaire.

Mais les usages ont mis en avant une seconde approche, consistant à diminuer le taux d'actualisation dans la mesure du taux technique, sans modifier le montant de la rente. L'idée sous-jacente est que la revalorisation attribuée est *in fine* financée par les produits financiers réalisés au-delà du taux d'actualisation. Cette seconde approche présente l'avantage de mettre en évidence simplement un certain nombre de contraintes sur les capacités du régime à servir la revalorisation prévue :

- ✓ Si l'objectif assigné au régime est d'assurer le maintien du pouvoir d'achat des rentes, alors le taux d'intérêt d'actualisation que l'on peut retenir dans le calcul des provisions mathématiques de rentes ne peut pas être supérieur au taux d'intérêt réel dans l'économie sur une longue période. A ce titre, il convient de noter que sur longue période en France, la croissance économique annuelle est d'environ 2 % à 2,5 %. Sur ces bases, si un régime de rentes a pour objectif de maintenir le pouvoir

³⁶ Cf. Art. R331-3 du code des assurances.

d'achat des rentiers on ne saurait édicter un principe d'actualisation des provisions mathématiques donc un taux technique sur la base d'un taux supérieur à 2 % ou 2,5 %. On peut noter que ce niveau est aujourd'hui cohérent avec la contrainte de 60 % du TME imposée aux organismes assureurs pour le provisionnement des engagements de rentes viagères.

- ✓ Si l'objectif assigné au régime de rentes viagères est d'assurer une évolution du pouvoir d'achat des rentiers parallèle à celle des salariés actifs, les principes d'actualisation ne sauraient conduire à préconiser un choix de taux d'actualisation supérieur à 0 %.

Dans le fonctionnement d'un régime de rentes, il est indispensable de définir *a priori* les objectifs que l'on assigne au régime en termes de traitement des retraités par rapport aux actifs. On ne peut occulter le fait qu'il entre dans ce choix une notion d'équité entre différents groupes sociaux et entre les générations successives d'actifs et de bénéficiaires qui nécessite que des principes soient posés après une réflexion approfondie.

Si les options financières et techniques qui en découlent ne sont pas univoques, il convient néanmoins de noter que la revalorisation future des rentes a un coût relativement élevé surtout si l'on a pour objectif de respecter les engagements déjà pris, qu'il s'agisse d'une évolution en termes de pouvoir d'achat ou en termes de niveau de vie relatif par rapport aux actifs.

4 LIEN ENTRE LE TAUX DE CROISSANCE, LE TAUX D'INFLATION ET LES TAUX D'INTERET

A long terme, il est généralement considéré qu'il existe un lien étroit entre *le taux d'intérêt nominal* prévalant sur les marchés financiers, le taux d'inflation, c'est-à-dire l'évolution de l'indice des prix, et *le taux d'intérêt réel*. Plus précisément, le taux d'intérêt nominal est égal à la somme du taux d'intérêt réel et du taux d'inflation :

$$\text{Taux d'intérêt Nominal} = \text{Taux d'Inflation} + \text{Taux d'intérêt Réel}$$

Simultanément, il existe un lien étroit à long terme entre *le taux d'intérêt réel* et *le taux de croissance réel de l'économie*. On considère ainsi que le taux d'intérêt réel ne peut être longuement très différent du taux de croissance de l'économie sauf à provoquer des arbitrages

entre activité financière et activité réelle d'une part, entre investissement dans un pays et investissement dans d'autres pays d'autre part. On peut donc écrire :

$$\text{Taux d'intérêt réel à long terme} = \text{Taux de croissance réel à long terme}$$

Dans la mesure où ces deux règles fondamentales sont observées sur une longue période, c'est-à-dire l'horizon sur lequel se pose la question de la revalorisation des rentes viagères, l'objectif assigné au régime de retraite doit conduire à des règles de tarification et de provisionnement qui soient adaptées. Le débat doit alors se porter sur le *taux d'actualisation* qui permet d'établir les liens entre flux présents et futurs et surtout de donner un tarif et une valorisation aux provisions techniques. On peut observer que l'on a la contrainte suivante :

$$\text{Taux d'intérêt technique d'actualisation} \leq \text{Taux d'intérêt réel à long terme}$$

En effet compte tenu des règles évoquées ci-dessus, les investissements effectués dans le cadre du régime obtiendront un rendement qui sera généralement proche des taux d'intérêt nominaux. Si le taux d'intérêt d'actualisation est égal au taux d'intérêt réel, cela signifie qu'il est pré compté et qu'il ne pourra donc pas être servi une seconde fois, la participation aux bénéfices attribuables aux titulaires de rentes ne pourra donc excéder l'évolution de l'indice des prix. Cela signifie qu'il y aura maintien du pouvoir d'achat de ceux-ci.

Si l'on tente de maintenir le pouvoir d'achat relatif des actifs et des retraités, l'évolution annuelle du pouvoir d'achat des salariés actifs doit être proche de celle des taux d'intérêt nominaux auxquels seront placés, en toute logique, les actifs représentatifs des provisions mathématiques. On ne peut attendre une revalorisation voisine de ce taux d'intérêt nominal fixé comme objectif que si le taux d'actualisation pris en compte, c'est-à-dire pré compté, n'est pas supérieur à 0 %.

Si l'on considère en termes financiers ces deux principes de revalorisation, les résultats pour l'organisme gestionnaire ne sont pas neutres. On rappellera d'ailleurs qu'à l'heure actuelle, les organismes d'assurance sont dans l'obligation de constituer les provisions mathématiques des rentes viagères avec des taux d'actualisation qui ne doivent pas excéder 2,25 %. Cela signifie que lorsque le taux maximum est choisi par l'organisme, sur une longue période, les rentes viagères servies bénéficient d'une revalorisation équivalente à celle de l'indice des

prix³⁷ sauf performance exceptionnelle de la gestion financière, ce qui ne saurait être considéré comme une règle.

Enfin, on soulignera que le poids financier d'un dispositif de revalorisation est très important. Afin de mesurer ce poids financier, on considère à titre illustratif le cas d'une rente en cours de service (non réversible) à un conjoint survivant de 55 ans ; une rente annuelle de 100 € conduit à une provision (au taux technique de 2,25 % et en utilisant les tables TPG 1993) de 2 245 €. En fonction des taux de revalorisation, le coût de ce dispositif, exprimé en pourcentage des provisions mathématiques, est le suivant :

Taux de revalorisation future	1%	2%	3%
Coût (en €)	372	848	1 463
Coût (en % de la provision)	17%	38%	65%

Tab. 2 : Poids de la revalorisation – cas d'une rente de conjoint

On peut illustrer graphiquement l'incidence de la revalorisation sur les flux de prestations :

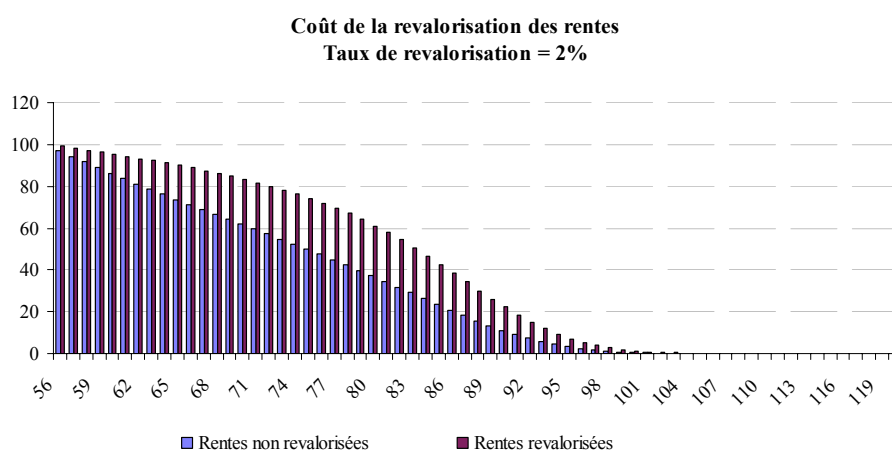


Fig. 4 : Impact de la revalorisation future sur les flux de prestations

On retiendra que pour des prestations de durée potentiellement importante la revalorisation constitue une part importante des provisions mathématiques.

³⁷ Cela a justifié la constitution de provisions de revalorisation des rentes dans le passé chez certains organismes assureurs.

C. QUANTIFICATION DU RISQUE SYSTEMATIQUE DE MORTALITE POUR UN REGIME DE RENTES EN COURS DE SERVICE³⁸

Depuis une quinzaine d'années, les tables de mortalité utilisées pour le provisionnement et la tarification des rentes viagères s'attachent à prendre en compte la dérive tendancielle de la mortalité, qui se traduit par une croissance régulière de l'espérance de vie. On constate ainsi en France depuis une trentaine d'année une augmentation de l'espérance de vie à la naissance d'environ un trimestre par an. La nécessité d'utiliser des tables de mortalité prospectives intégrant ce phénomène de dérive a été prise en compte par le législateur et des tables « de génération » ont été homologuées³⁹ en 1993. Ces tables⁴⁰, obtenues sur la base de la mortalité de la population féminine sur la période 1961-1987, servent depuis le 1^{er} juillet 1993 à la tarification et au provisionnement de contrats de rentes viagères (immédiates ou différées). De nouvelles tables⁴¹ ont été construites en 2006 et ont été homologuées pour le 01/01/2007.

Des études récentes⁴² font toutefois apparaître que l'évolution du taux instantané de mortalité présente, aux différents âges, des variations erratiques autour de la tendance qui se dégage, variations non expliquées par les fluctuations d'échantillonnage ; Cairns et al.⁴³ fournit une analyse détaillée de ce phénomène. Sur les données INED utilisées dans le présent travail (*cf.* la section 5.1.2 *infra* pour le descriptif de ces données) on constate le même comportement :

³⁸ Ce texte est adapté de PLANCHET et al. [2006] et PLANCHET et JUILLARD [2006].

³⁹ Décret du 28 juillet 1993 (JO du 30/7/1993) et Art. A335-1 du Code des Assurances.

⁴⁰ La construction de ces tables est présentée dans HIDALGO [1992] qui les a construites.

⁴¹ Voir la note de présentation de ces tables construites par D. SERANT dans PLANCHET [2006]. Elles sont homologuées par l'arrêté du 01/08/2006.

⁴² CURRIE et al. [2004].

⁴³ CAIRNS et al. [2004].

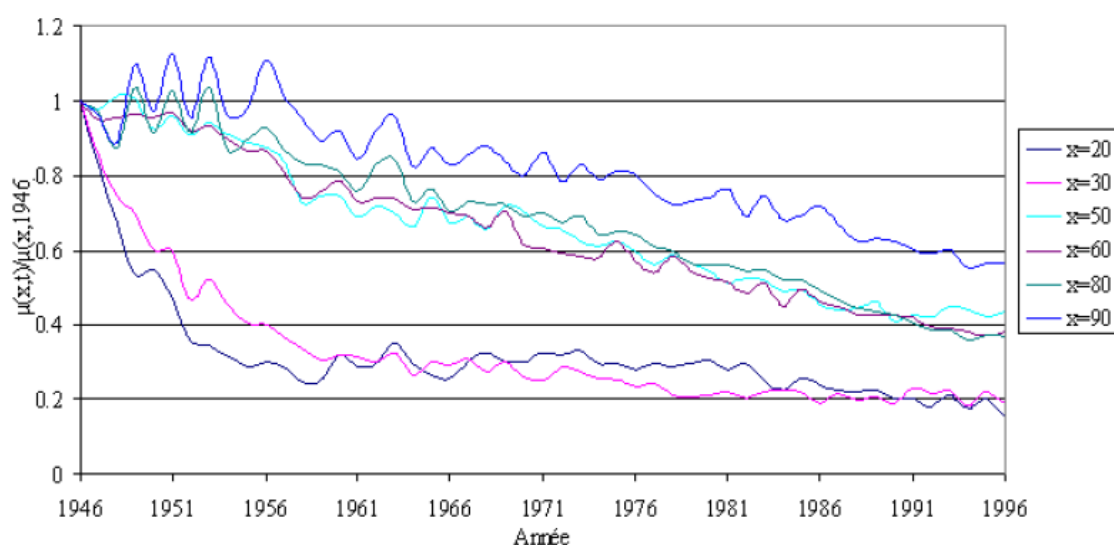


Fig. 5 : *Fluctuations des taux de décès autour de la tendance de long terme*

Ces variations affectent de manière systématique l'ensemble des individus d'âge fixé et ne se mutualisent pas ; elles font donc courir un risque potentiellement important à un régime de rentes, dont l'équilibre technique est construit sur la mutualisation du risque de survie de ses membres.

On est donc conduit à rechercher une modélisation capable de rendre compte de ces fluctuations autour de la valeur tendancielle et d'en tirer des conséquences sur le niveau des provisions mathématiques que doit constituer le régime pour assurer son équilibre technique. De manière plus précise, il importe de quantifier la part dans le risque total auquel est exposé le régime (selon une mesure à définir) de la composante non mutualisable.

Les modèles stochastiques de mortalité fournissent un outil bien adapté à cette analyse. Ils proposent en effet de considérer que le taux de mortalité futur $\mu(x,t)$ est lui-même aléatoire, et que donc $\mu(x,t)$ est un processus stochastique (comme fonction de t à x fixé). Le taux de mortalité effectivement observé pour un âge et une année donnés est alors la réalisation d'une variable aléatoire : on peut noter l'analogie avec les méthodes de lissage bayésiennes⁴⁴.

Dans la littérature, les modélisations stochastiques des phénomènes de mortalité sont nombreuses. On ne considère pas ici les modèles d'inspiration financière nés de la

⁴⁴ Sur ces méthodes de lissage, on pourra consulter TAYLOR [1992].

problématique de tarification de dérivés de mortalité⁴⁵. On notera simplement que l'ajustement de ces modèles, qui exploitent la symétrie des rôles du taux d'intérêt et du taux de décès instantané dans l'expression d'un engagement de rente (*cf.* 2), à des données de mortalité n'est pas immédiat et que, pour la situation qui nous préoccupe ici, la non prise en compte des dépendances entre les âges est problématique (ces modèles proposent une dynamique d'évolution en fonction du temps pour chaque âge sans prendre en compte les corrélations existant entre les âges proches).

Plusieurs modèles classiques sont de fait des modèles stochastiques ; en premier lieu, les lissages bayésiens, et en particulier le modèle de Kimeldorf-Jones⁴⁶ entrent dans cette catégorie. Toutefois, ils sont élaborés essentiellement dans la perspective du lissage d'une table du moment, sans intégrer naturellement la dimension prospective essentielle dans l'analyse de l'engagement d'un régime de rentes.

Les modèles récents de construction de tables prospectives, comme le modèle de Lee-Carter⁴⁷ ou les modèles poissoniens⁴⁸, sont également des cas particuliers de modèles stochastiques, bien qu'ils soient à l'origine élaborés pour construire des extrapolations (temporelles) de la surface $\mu(x, t)$ déterministe. Après un ajustement des taux passés, les taux de mortalité pour les années futures se déduisent directement de l'extrapolation de la composante temporelle (paramétrique ou non paramétrique) du modèle prospectif retenu⁴⁹. On peut évidemment critiquer cette approche purement extrapolative⁵⁰. Des travaux s'appuyant sur des considérations biologiques, environnementales ou économiques pourraient éventuellement permettre de proposer des approches alternatives⁵¹. Ils ne seront toutefois pas abordés ici.

On retient dans cette étude le modèle de Lee-Carter, qui permet aisément de produire des surfaces de mortalité stochastiques et est par ailleurs devenu un standard pour la construction de tables prospectives. La variante log-Poisson⁵² conduit à des résultats très proches.

⁴⁵ Le lecteur intéressé par ces approches pourra consulter DAHL [2004] et SCHRAGER [2004].

⁴⁶ KIMELDORF et JONES [1967].

⁴⁷ Voir notamment LEE et CARTER [1992], LEE [2000], SITHOLE et al. [2000].

⁴⁸ *Cf.* BROUHNS et al. [2002] et PLANCHET et THEROND [2006] pour une présentation et une discussion de ces modèles.

⁴⁹ DELWARDE et DENUIT [2006] proposent une description très complète des approches stochastiques dans ce contexte.

⁵⁰ On pourra par exemple consulter GUTTERMAN et VANDERHOOF [1999] sur ces questions.

⁵¹ Voir le rapport du Population Council CAREY et TULAPURKAR [2003].

⁵² *Cf.* BROUHNS et al. [2002].

Après avoir construit un jeu de tables prospectives sur des données nationales à l'aide de ce modèle, nous l'utilisons pour calibrer la composante aléatoire pour le risque systématique et appliquons le modèle ainsi obtenu pour déterminer le niveau de l'engagement d'un régime de rentes.

5 RISQUE ASSOCIE AUX FLUCTUATIONS AUTOUR DE LA TENDANCE

5.1 CAS D'UNE MORTALITE DETERMINISTE

5.1.1 Modèle de mortalité

On choisit de modéliser les taux instantanés de sortie (taux de hasard) ; le lien avec les données discrètes (annuelles) disponibles est fait sous l'hypothèse classique de constance du taux de hasard sur chaque carré du diagramme de Lexis⁵³, qui conduit à poser $\mu_{xt} = -\ln(1 - q_{xt})$.

Le modèle retenu pour construire les tables prospectives est le modèle de Lee-Carter. Il s'agit d'une méthode d'extrapolation des tendances passées initialement utilisée sur des données américaines, qui est devenue rapidement un standard⁵⁴. La modélisation proposée par ces auteurs pour le taux instantané de mortalité est la suivante⁵⁵ :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt},$$

en supposant les variables aléatoires ε_{xt} indépendantes, identiquement distribuées selon une loi $N(0, \sigma^2)$; l'idée du modèle est donc d'ajuster à la série (doublement indicée par x et t) des logarithmes des taux instantanés de décès une structure paramétrique (déterministe) à laquelle s'ajoute un phénomène aléatoire ; le critère d'optimisation retenu est la maximisation de la variance expliquée par le modèle, ou, de manière équivalente, la minimisation de la variance des erreurs.

⁵³ Cf. PLANCHET et THEROND [2006].

⁵⁴ Voir l'article original LEE et CARTER [1992].

⁵⁵ Une variante de ce modèle dans laquelle la variable modélisée est le logit du taux de décès est en cours d'étude.

Le paramètre α_x s'interprète comme la valeur moyenne des $\ln(\mu_{xt})$ au cours du temps. On vérifie par ailleurs que $\frac{d \ln(\mu_{xt})}{dt} = \beta_x \frac{dk_t}{dt}$ et on en déduit que le coefficient β_x traduit l'élasticité de la mortalité instantanée à l'âge x par rapport à l'évolution générale k_t , au sens où $\frac{d \ln(\mu_{xt})}{dk_t} = \beta_x$. En particulier, le modèle de Lee-Carter suppose la constance au cours du temps de cette sensibilité.

Afin de rendre le modèle identifiable, il convient d'ajouter des contraintes sur les paramètres ; on retient en général les contraintes suivantes :

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x = 1 \text{ et } \sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0 .$$

On obtient alors les paramètres par un critère de moindres carrés (non linéaire) :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t) = \arg \min_{x,t} \sum \left(\ln \mu_{xt}^* - \alpha_x - \beta_x k_t \right)^2$$

Il convient donc de résoudre ce programme d'optimisation, sous les contraintes d'identifiabilité. Le nombre de paramètres à estimer est élevé, il est égal à $2 \times (x_M - x_m + 1) + t_M - t_m - 1$. Les algorithmes de résolution ne sont pas repris ici, le lecteur intéressé pourra consulter les nombreux articles décrivant ce modèle, par exemple Brouhns et Denuit⁵⁶. Une discussion des limites de ce modèle est proposée dans Planchet et Lelieur et dans Serant⁵⁷.

Une fois ajustée la surface de mortalité sur les données passées, il reste à modéliser la série (k_t) pour extrapoler les taux futurs ; pour cela, on utilise en général un modèle ARIMA⁵⁸, mais toute autre modélisation de série temporelle peut être utilisée. Toutefois, compte tenu de l'allure obtenue sur les données disponibles :

⁵⁶ BROUHNS et DENUIT [2002].

⁵⁷ PLANCHET et LELIEUR [2006] et dans SERANT [2005].

⁵⁸ En suivant la démarche de Box et Jenkins.

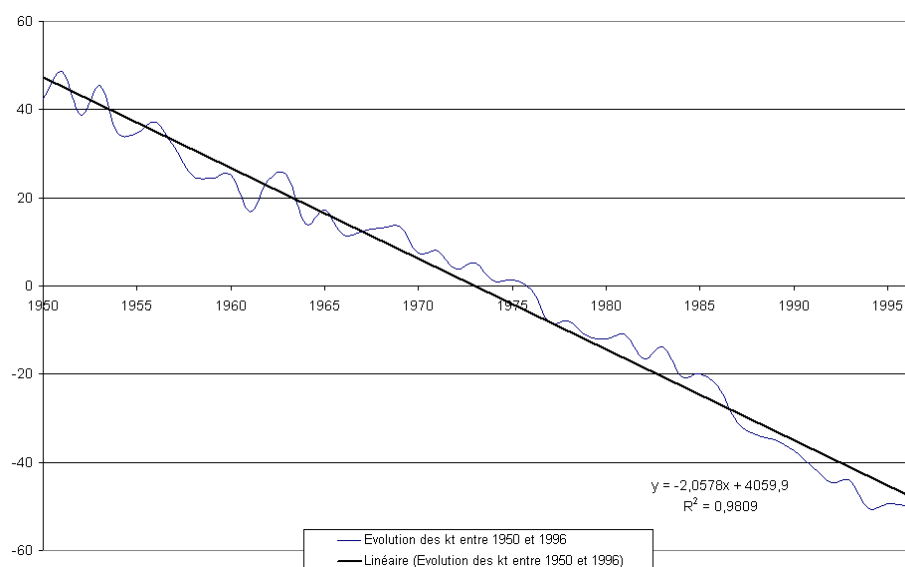


Fig. 6 : Evolution du paramètre $k(t)$ avec le temps

la modélisation la plus simple que l'on puisse imaginer est une régression linéaire de ces coefficients en supposant une tendance affine :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

avec (γ_t) un bruit blanc gaussien de variance σ_γ . On obtient ainsi des estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ qui permettent de construire des surfaces projetées en utilisant simplement $\hat{k}_t = \hat{a}t + \hat{b}$. C'est ce modèle qui sera utilisé par la suite⁵⁹.

Il est précisé que l'objectif du présent travail étant de quantifier dans le risque total auquel est exposé un régime rentier la part issue de l'incertitude sur la mortalité future, nous privilégions le choix d'un modèle stochastique simple et opérationnel. Les limites du modèle de Lee-Carter si elles peuvent en effet avoir un impact sur le niveau absolu de la provision obtenue doivent avoir un impact moindre sur la répartition entre la part mutualisable et la part non mutualisable du risque de mortalité.

On notera également que, compte tenu de la répartition actuelle par âge du groupe étudié, la méthode de fermeture de la table n'est pas déterminante dans la formation du résultat. Plus

⁵⁹ L'utilisation d'un modèle plus complexe pour $k(t)$ n'apporte pas d'information supplémentaire pertinente ; une approche « série temporelle » plus formelle conduit à ajuster un processus AR(4) sans que les résultats soient ensuite sensiblement modifiés.

généralement on peut considérer que l'importance du choix d'une méthode de fermeture peut être relativisée dans le cas d'un régime de rentes⁶⁰. La question de la fermeture des tables est également discutée dans Denuit et Quashie⁶¹ avec un point de vue sensiblement différent.

5.1.2 Applications numériques

On présente ici les résultats obtenus tout d'abord sur la famille de tables prospectives proposée puis, dans un second temps, les conséquences en terme de valorisation de l'engagement du régime de rentes.

La table prospective utilisée dans cette étude est construite à partir des tables du moment fournies par l'INED⁶² ; le lien entre les taux de décès discrets et la version continue nous permet d'obtenir les taux de hasard à ajuster à partir des données de base :

$$\hat{\mu}_{xt} = -\ln(1 - \hat{q}_{xt}).$$

L'ajustement sur les données historiques conduit à la surface de mortalité suivante :

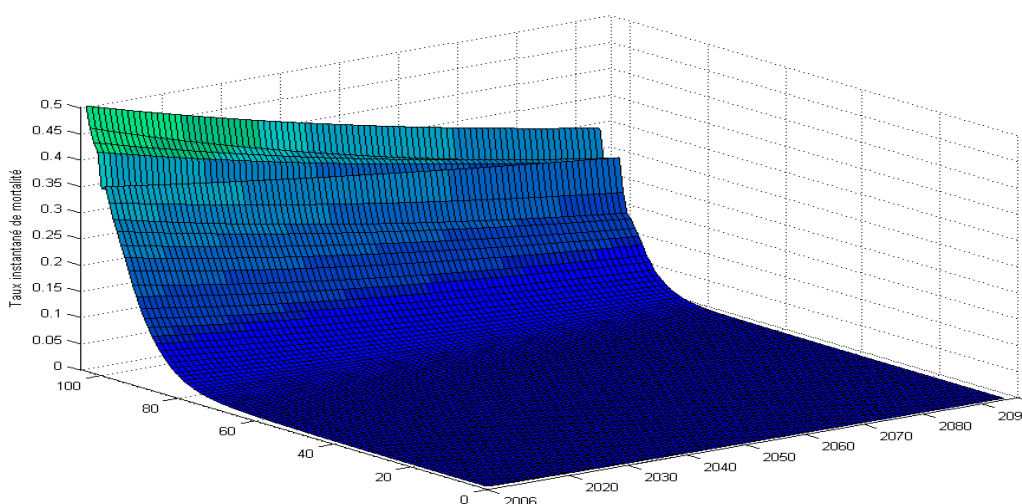


Fig. 7 : Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter

En ce qui concerne le volet prédictif du modèle, nous obtenons sur nos données $\hat{b} = 4059,94439$, $\hat{a} = -2,05775$ et $\hat{\sigma}_\gamma = 3,9388782$.

⁶⁰ Voir sur ce point PLANCHET et THEROND [2006]

⁶¹ DENUIT et QUASHIE [2005].

⁶² Ces tables sont disponibles sur http://www.ined.fr/publications/cdrom_vallin_mesle/Tables-de-mortalite/Tables-du-moment/Tables-du-moment-XX.htm et ont été utilisées dans MESLE et VALLIN [2002].

Au-delà des moments d'ordre un et deux de la distribution de Λ , qui peuvent être obtenus explicitement⁶³, on obtient la distribution de l'engagement du régime par simulation. On présente ci-dessous le résultat dans le cas de 20 000 simulations :

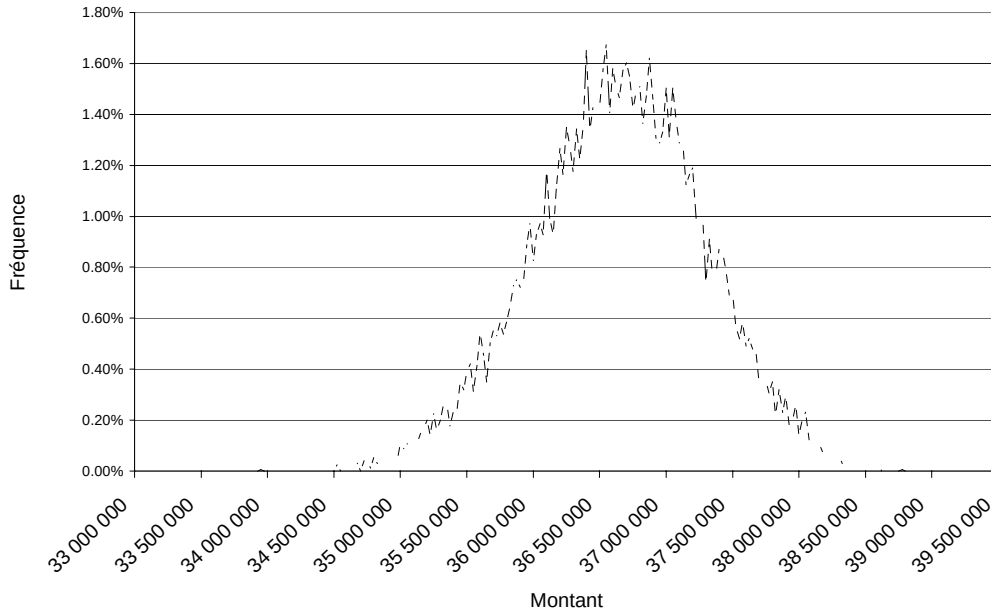


Fig. 8 : Distribution empirique de l'engagement

La provision L_0 est approchée par $\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n$. La variance de l'engagement est estimée par

$\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\lambda_n - L_0)^2$; on s'intéresse plus particulièrement au coefficient de variation empirique :

$$cv = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\lambda_n - L_0)^2}}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n},$$

qui fournit un indicateur de la dispersion de l'engagement et dans une certaine mesure de sa « dangerosité ». On obtient pour ces différents indicateurs les valeurs suivantes :

⁶³ Cf. PLANCHET et MAGNIN [2000].

	Déterministe
Espérance	37 973 994
Ecart-type	631 525
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 700 000
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 175 000
Coefficient de variation	1,66%

Tab. 3 : Caractéristiques de la distribution de l'engagement

On note malgré la taille modeste de la population que l'engagement est évalué avec une précision relative de plus ou moins 6,1 % (rapport de la demi-largeur de l'intervalle de confiance à l'espérance). Le risque démographique est de ce point de vue assez bien maîtrisé.

5.2 CAS D'UNE MORTALITE STOCHASTIQUE

On intègre ici au modèle une composante de risque systématique au travers d'une incertitude sur la surface de mortalité future, la surface construite à la section précédente définissant alors la tendance de référence autour de laquelle la mortalité observée sera supposée fluctuer.

5.2.1 Modèle de mortalité

On utilise l'équation de régression qui a permis d'obtenir la tendance de mortalité future :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

et l'on obtient des réalisations de la mortalité future en effectuant des tirages dans la loi du résidu (γ_t) , $N(0, \sigma_\gamma^2)$. La variable k_t^* est telle que $E(k_t^*) = k_t$. On obtient ainsi des réalisations des taux instantanés de sortie *via* :

$$\mu_{xt}^* = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t^*).$$

On note que dans cette approche $E(\mu_{xt}^*) = E \exp(\alpha_x + \beta_x k_t^*) = \exp\left(\alpha_x + \beta_x k_t + \frac{\beta_x^2 \sigma_\gamma^2}{2}\right)$ et donc :

$$E(\mu_{xt}^*) = \mu_{xt} \exp\left(\frac{\beta_x^2 \sigma_\gamma^2}{2}\right) > \mu_{xt}.$$

Le modèle stochastique a donc tendance à surestimer les taux de sortie. Mais, comme l'illustre le graphique suivant, en pratique ce biais est faible et peu pénalisant pour le modèle,

car peu significatif aux âges élevés. On représente ci-après $\frac{E(\mu_{xt}^*)}{\mu_{xt}}$:

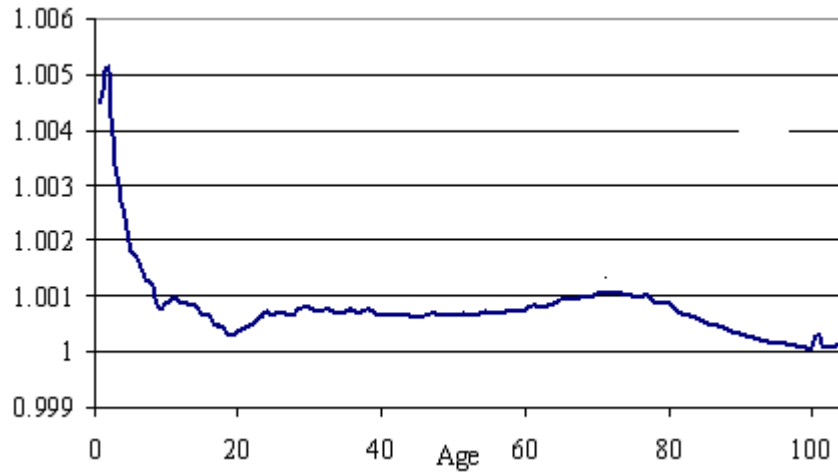


Fig. 9 : Analyse du biais relatif en fonction de l'âge

Incidentement, on peut remarquer qu'il n'est pas immédiat de calculer le biais qui en résulte sur les taux discrets q_x . En effet, l'inégalité de Jensen ($f(EX) \leq Ef(X)$) appliquée à $f(x) = -(1 - e^{-x})$ conduit à $E(q_x^*) \leq 1 - \exp(-E\mu_x^*)$, ce qui ne permet pas de conclure simplement sur le sens du biais. Cela indique toutefois que la relation entre q_x et μ_x n'amplifie pas le biais, et donc le biais sur le taux discret doit être également faible.

On observera que la volatilité σ_γ est un paramètre permettant de contrôler simplement le degré d'incertitude attaché à la mortalité future. Dans le cas particulier $\sigma_\gamma = 0$ on retrouve le modèle déterministe analysé à la section précédente.

Le biais généré sur les taux de sortie par le mode de simulation des surfaces de mortalité, s'il s'avère peu pénalisant au voisinage de la volatilité σ_γ estimée sur les données disponibles, pourrait être potentiellement gênant dans des situations de plus forte volatilité : ce point sera illustré par une application numérique. Aussi, nous utiliserons dans la suite une version corrigée du biais du modèle proposé définie par :

$$\mu_{xt}^* = \exp \left(\alpha_x - \frac{\beta_x^2 \sigma_\gamma^2}{2} + \beta_x k_t^* \right).$$

Cette version du modèle satisfait par construction $E(\mu_{xt}^*) = \mu_{xt}$. Elle apparaît donc plus cohérente avec l'objectif recherché de « perturber » la surface de mortalité, mais sous l'hypothèse que celle-ci définit correctement la tendance future des taux instantanés de décès.

Dans ce contexte, l'engagement du régime intègre deux « sources de risque », et on est donc amené à définir un critère pour l'analyse de la répartition du risque pour le régime de rentes.

On retient comme mesure du risque la variance de la somme des flux futurs actualisés Λ . En conditionnant par la surface de mortalité Π et en utilisant l'équation de décomposition de la variance on obtient :

$$V[\Lambda] = E[V(\Lambda|\Pi)] + V[E(\Lambda|\Pi)].$$

Le second terme du membre de droite de l'expression ci-dessus représente le risque systématique associé au régime de rentes ; le premier terme le risque technique, *i.e.* le risque de mortalité mutualisable. En pratique on retiendra comme indicateur la part de variance expliquée par la composante de risque systématique, soit :

$$\omega(\sigma_\gamma) = \frac{V[E(\Lambda|\Pi)]}{V[\Lambda]}.$$

L'étude *a priori* des propriétés de l'indicateur de risque relatif $\omega(\sigma_\gamma)$ n'est pas triviale, comme on pourra s'en convaincre à partir de l'expression de $E(\Lambda|\Pi)$ à la section 2. Lorsque la taille du groupe tend vers l'infini, $\omega(\sigma_\gamma)$ converge vers 1. En d'autres termes pour un groupe parfaitement mutualisé, toute la variance est expliquée par la composante systématique. Le calcul direct de $\omega(\sigma_\gamma)$ n'est pas aisé, aussi on utilise ici une approche par

simulation : on sélectionne dans un premier temps, au moyen d'un tirage dans une loi $N(0, \sigma_\gamma^2)$ une surface de mortalité (en pratique les réalisations de la gaussienne sont obtenues par inversion de la fonction de répartition en utilisant l'approximation de Moro⁶⁴ ; puis, conditionnellement à cette hypothèse de mortalité, on simule la survie des rentiers (« le passif »).

De manière plus formelle, si $\lambda_{n,m}$ est la réalisation de Λ résultant de la $n^{\text{ème}}$ trajectoire de la mortalité et de la $m^{\text{ème}}$ trajectoire du passif, notons :

$$\bar{\lambda}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \lambda_{n,m} \text{ et } \bar{\bar{\lambda}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{\lambda}_n = \frac{1}{NM} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \lambda_{n,m}.$$

Les quantités ci-après sont des estimateurs sans biais et convergeant respectivement de $E[V(\Lambda|M)]$ et de $V[E(\Lambda|M)]$:

$$\hat{E}[V(\Lambda|M)] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (\lambda_{n,m} - \bar{\lambda}_n)^2,$$

$$\hat{V}[E(\Lambda|M)] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\bar{\lambda}_n - \bar{\bar{\lambda}})^2.$$

Le calibrage du nombre de simulations est effectué de manière empirique en arrêtant l'algorithme lorsque les résultats se stabilisent (écart entre deux résultats successifs $< 10^{-3}$).

5.2.2 Applications numériques

Les applications numériques proposées sont à deux niveaux : dans un premier temps on analyse l'impact de la prise en compte de la mortalité stochastique sur la loi de l'engagement du régime considéré ; puis, dans un second temps, on détermine l'évolution en fonction de la

⁶⁴ Cet algorithme est présenté dans PLANCHET et al. [2005].

volatilité de la surface de mortalité (et donc de l'incertitude attachée à la prévision de cette dernière) de la part de variance expliquée par cette source de risque dans la variance totale.

On détermine tout d'abord pour la valeur estimée de la volatilité de la surface de mortalité ($\sigma_\gamma = 3,94$) la distribution empirique de l'engagement, définie par :

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{1}{NM} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N 1_{]-\infty, \lambda_{n,m}]}(\lambda).$$

On la représente ici avec la distribution de référence obtenue précédemment dans le cas déterministe (avec 20 000 tirages) :

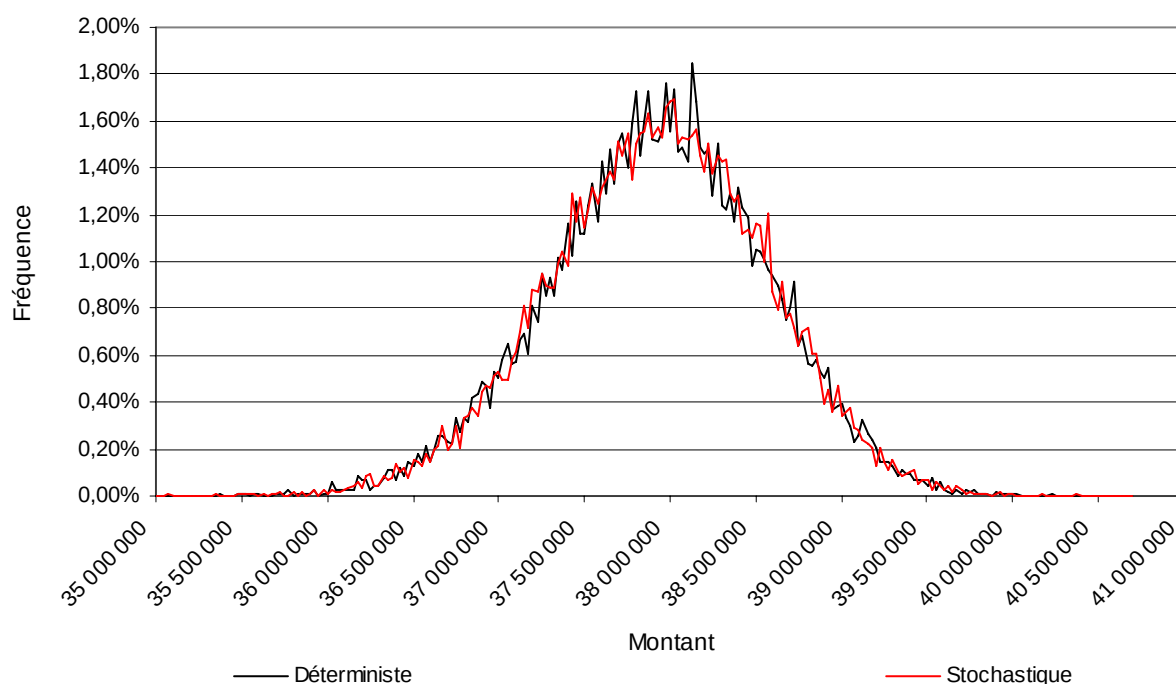


Fig. 10 : Distribution empirique de l'engagement : approche déterministe VS approche stochastique

On peut noter que le coefficient de variation de la distribution de l'engagement est estimé à 1,79 %, dans les deux situations (mortalité déterministe et mortalité stochastique) : alors que l'on aurait pu s'attendre à ce que la prise en compte de ce facteur de risque supplémentaire augmente sensiblement la dispersion, et donc la « dangerosité » de l'engagement, on constate ici une quasi-stabilité.

Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	37 973 994	37 939 862
Ecart-type	631 525	628 266
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 700 000	36 650 000
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 175 00	39 100 000
Coefficient de variation	1.66%	1.66%

Tab. 4 : Caractéristiques de la distribution de l'engagement – modèle stochastique

Dans le cas présent, les données de référence utilisées pour calibrer la mortalité de référence fluctue faiblement, ce qui conduit à un risque associé marginal au regard du risque d'échantillonnage. Ceci est d'autant plus marqué que la population concernée est d'effectif relativement faible.

Dans une approche « valeur à risque » (*VaR*), on trouve que le quantile à 75 % de la distribution de l'engagement est de 37,1 M€ dans le cas stochastique, ce qui est quasiment identique à la valeur obtenue dans le cas déterministe.

Ces résultats sont la conséquence directe de la très faible volatilité estimée sur la série k_t ; dans le cas où cette volatilité augmente, la distribution de l'engagement intégrant le risque systématique diverge rapidement de la situation de référence constituée par le modèle déterministe. A titre d'illustration, on présente ci-après les résultats avec une volatilité multipliée par 10 (le nombre de tirages reste fixé à 20 000) :

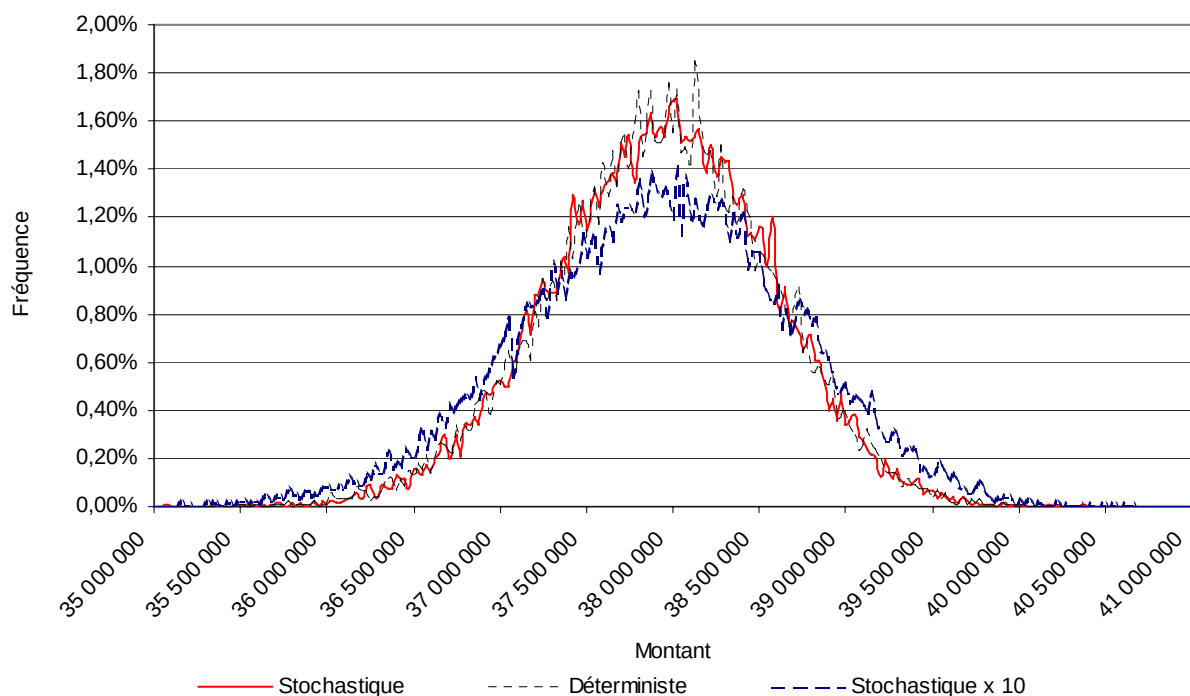


Fig. 11 : Distribution empirique de l'engagement : approche déterministe VS approche stochastique

On peut remarquer que le coefficient de variation de la distribution de l'engagement dans le cas de la prise en compte d'un caractère stochastique de la mortalité à forte volatilité est estimé à 2,06 %, contre 1,66 % dans la situation de référence : le modèle, comme on pouvait s'y attendre, est très sensible à la volatilité de processus de génération des surfaces de mortalité stochastiques. Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique	Stochastique x10
Espérance	37 973 994	37 939 862	37 925 061
Ecart-type	631 525	628 266	778 276
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 700 000	36 650 000	35 600 000
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 175 00	39 100 000	39 375 000
Coefficient de variation	1.66%	1.66%	2.06%

Tab. 5 : *Caractéristiques de la distribution de l'engagement en fonction de la volatilité*

Bien entendu, toutes choses égales par ailleurs, l'impact sur la loi de l'engagement de la prise en compte de la composante non mutualisable du risque est d'autant plus important que les fluctuations d'échantillonnage sont faibles, et donc que le groupe est de taille importante. Afin d'illustrer ce point, les calculs de la distribution de l'engagement ont été menés sur un groupe fictif composé de 100 répliques du groupe de base, ce qui constitue ainsi un groupe de 37 400 rentiers. On obtient le graphique suivant :

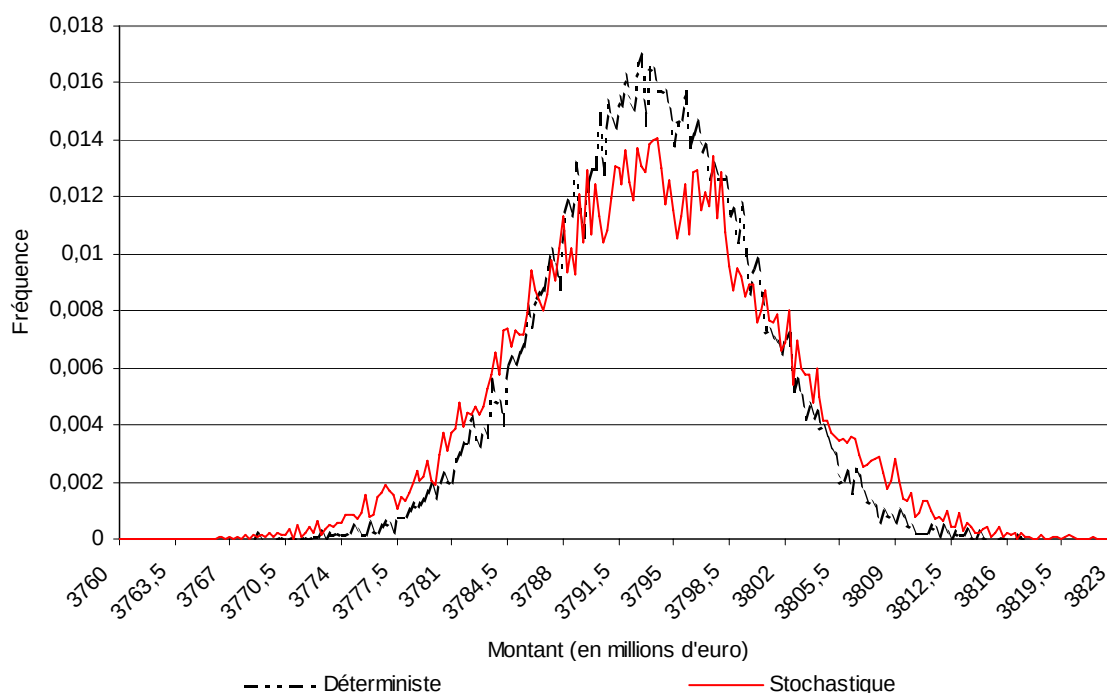


Fig. 12 : Distribution empirique de l'engagement (taille du groupe x100)

On constate sur le graphique l'aplatissement de la distribution de l'engagement, illustrant une situation *a priori* plus risquée pour le régime lorsque la part non mutualisable du risque est prise en compte. Les résultats synthétiques sont détaillés ci-dessous :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	3 793 577 165	3 793 566 113
Ecart-type	6 324 333	7 771 749
Quantile à 5%	3 780 750 000	3 777 750 000
Quantile à 95%	3 803 750 000	3 806 250 000
Coefficient de variation	0.167%	0.205%

Tab. 6 : Caractéristiques de la distribution de l'engagement – effet de taille du groupe

On constate que si l'espérance de l'engagement est bien simplement multipliée par 100 par rapport à la situation de référence, on voit apparaître une différence sensible entre l'approche déterministe classique et l'approche stochastique : l'écart-type augmente en effet de 23 % lorsque l'on prend en compte le risque non mutualisable.

On peut toutefois noter que le risque démographique, même en présence du facteur de risque systématique, reste bien maîtrisé, l'intervalle de confiance à 95 % pour le niveau de

l'engagement étant (en millions d'euros) [3 778;3 807], ce qui donne une précision dans la mesure de l'engagement supérieure à 99 %.

Dans une approche « valeur à risque » (*VaR*), on trouve que le quantile à 75 % de la distribution de l'engagement est de 3 798 M€ dans le cas stochastique, contre 3 797 M€ dans le cas déterministe : là encore on note un très faible impact absolu sur le régime.

Dès lors que la volatilité du processus de mortalité sous-jacent devient significative, la correction de biais s'avère indispensable. Le graphique suivant, qui représente la distribution empirique avec une volatilité égale à 10 fois, puis 20 fois la volatilité de référence du modèle sans correction du biais illustre ce point :

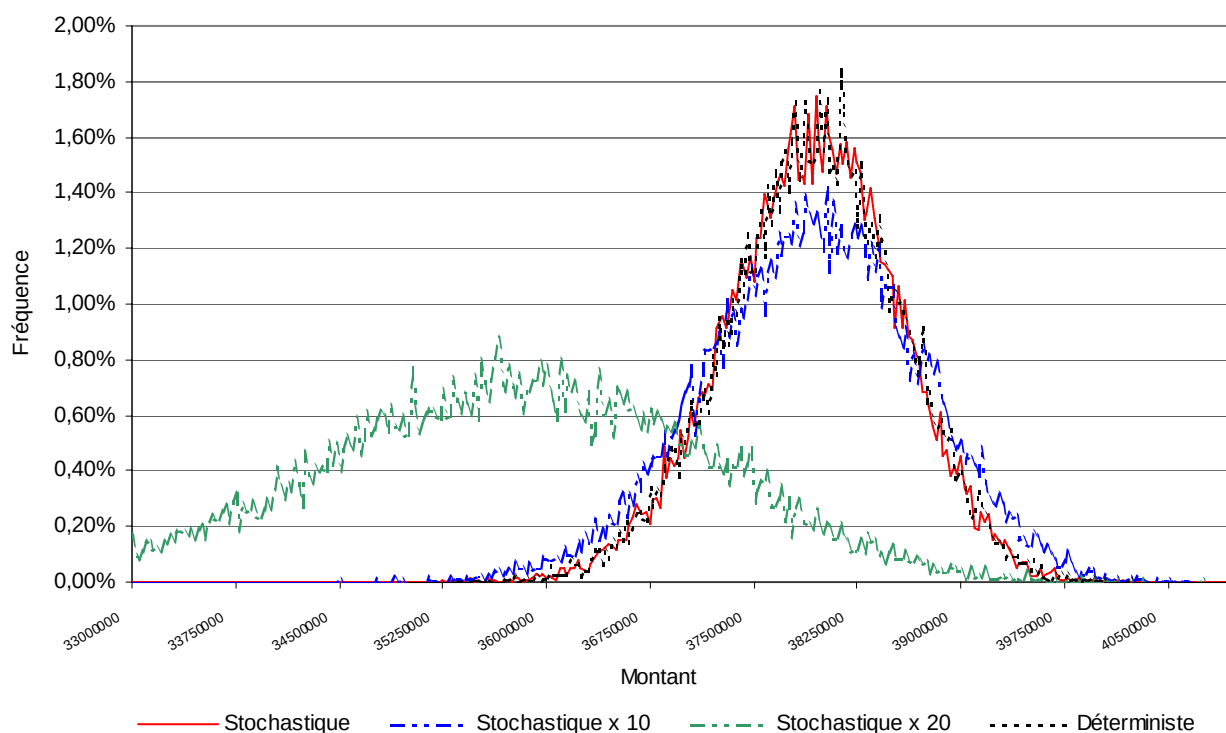


Fig. 13 : Distribution empirique de l'engagement : approche déterministe VS approche stochastique

On note que la distribution intégrant le risque systématique se trouve décalée vers la gauche du fait du biais sur les taux de sortie et qu'elle conduit ainsi à une vision minorée de l'engagement.

Comme les résultats précédents l'ont montré, le comportement de l'engagement est fonction de la volatilité du processus stochastique de mortalité sous-jacent, qu'il importe donc de quantifier. Les estimateurs présentés *supra* nous permettent d'obtenir le graphique d'évolution de la part du risque systématique dans le risque global $\omega(\sigma_\gamma)$ en fonction de la volatilité σ_γ du générateur de tables prospectives.

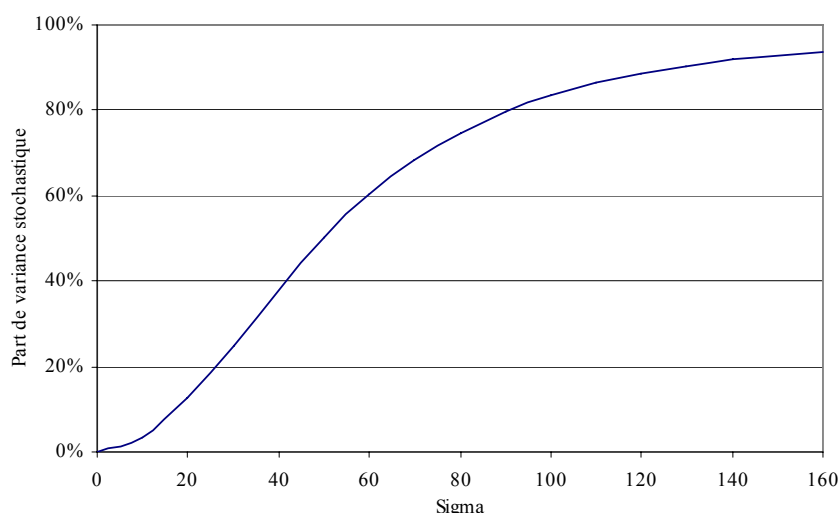


Fig. 14 : Evolution de la part du risque systématique dans le risque global en fonction de σ_γ

On constate (ce qui est intuitif) que la part de risque systématique est croissante en fonction de la volatilité σ_γ . La croissance de la courbe est lente au début et ne s'accélère que pour les valeurs de la volatilité importantes. Avec la volatilité estimée sur nos données, on obtient une part très faible de variance associée au risque systématique de 0,56 %.

A σ_γ fixé, la part de variance expliquée par la composante stochastique de la mortalité augmente avec la taille du portefeuille ; afin de mesurer cet effet, on construit un portefeuille fictif en répliquant le portefeuille de base n fois. En observant que l'on obtient ainsi une décomposition de l'engagement total Λ en la somme de n variables i.i.d. $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}$ on trouve que $V[E(\Lambda|\Pi)] = n^2 V[E(\Lambda^{(1)}|\Pi)]$ et $E[V(\Lambda|\Pi)] = n E[V(\Lambda^{(1)}|\Pi)]$ ce qui conduit, avec des notations évidentes, à :

$$\omega_n = \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \right)^{-1}.$$

On obtient ainsi (la taille du portefeuille est exprimée en nombre de fois la taille du portefeuille de référence) :

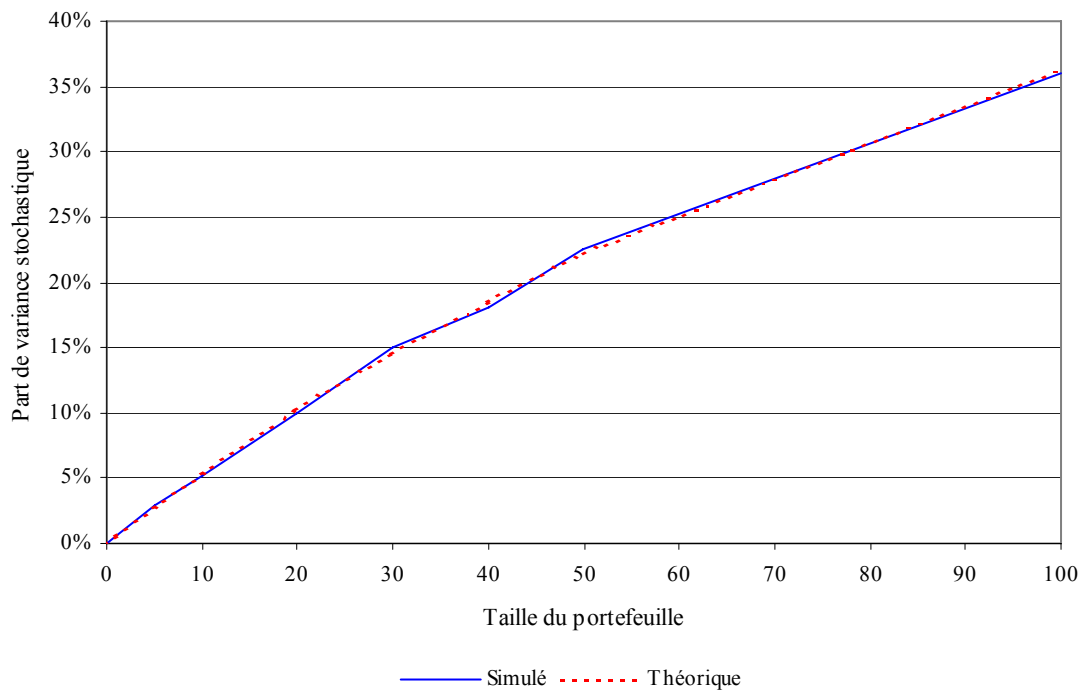


Fig. 15 : Evolution de la part du risque systématique dans le risque global en fonction de la taille du portefeuille

On note une croissance relativement lente⁶⁵ de cette source de risque dans la variance totale, le seuil d'un tiers étant par exemple atteint pour un régime de plus de 300 000 rentiers ; pour des régimes de cette taille les fluctuations d'échantillonnage sont très faibles, et la variance associée est donc petite.

Incidemment on observe sur ce graphique la très grande proximité des valeurs théoriques et des valeurs simulées, ce qui illustre la pertinence d'une approche par simulation dans ce type de problématiques : pour de petites valeurs de n , la taille réduite du portefeuille ne pénalise pas la pertinence du résultat obtenu, et pour de grandes valeurs de n , les temps de simulation restent praticables (sur donc un portefeuille de plus de 300 000 rentiers).

⁶⁵ Quasi linéaire, la courbure de l'hyperbole théorique est très faible.

5.2.3 Un modèle alternatif⁶⁶

Le modèle de mortalité proposé ici s'appuie sur le constat que la tendance extrapolée de l'analyse de la série (k_t) est quasi-linéaire, ce qui conduit en 5.2.1 à proposer pour les perturbations autour de la tendance un bruit blanc gaussien.

Toutefois, une analyse plus fine de la série (k_t) montre (en utilisant par exemple le test de Dickey & Fuller) que la non stationnarité de la série n'est pas correctement modélisée par le modèle linéaire et conduit à proposer une modélisation plus élaborée. En pratique on obtient l'équation auto-régressive suivante :

$$k_t = \mu + \sum_{i=1}^3 a_i k_{t-i} + \varepsilon_t$$

La mise en œuvre de ce modèle alternatif sur les données présentées en 5.2.2 permet de construire une surface de mortalité prospective très proche de la surface obtenue dans le cadre d'une simple régression linéaire ; en effet, on observe que :

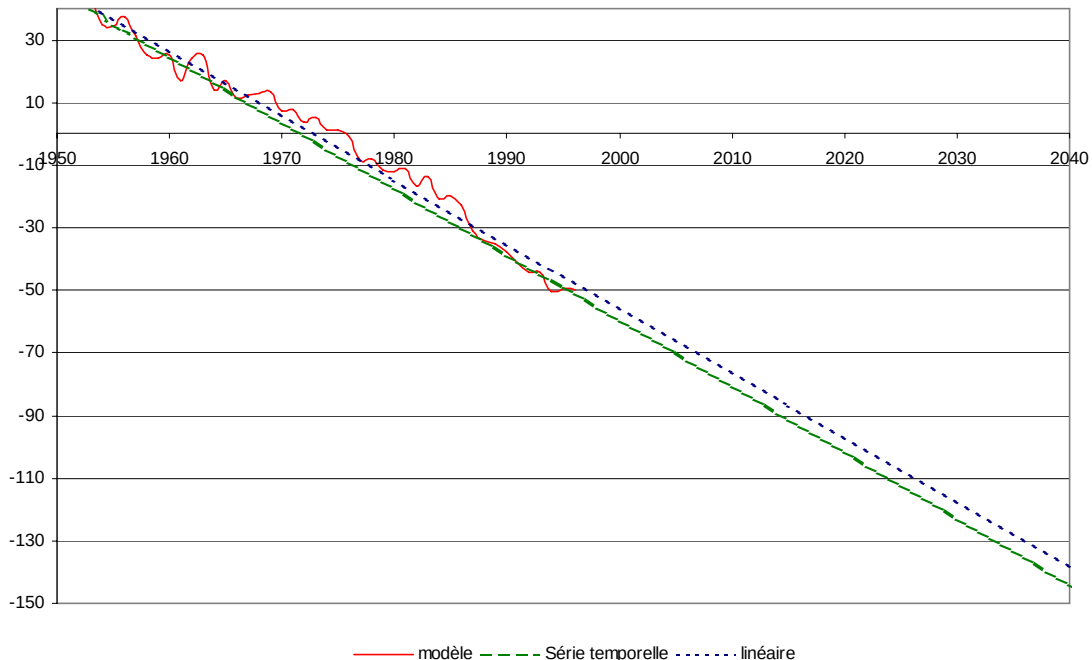


Fig. 16 : Comparaison des $k(t)$ ajustés avec un modèle linéaire et un modèle AR(3)

⁶⁶ Ce modèle est proposé par JUILARD [2006] auquel le lecteur pourra se reporter pour le détail de l'analyse de la série temporelle.

Ainsi les deux approches conduisent à des tendances linéaires très proches l'une de l'autre. Toutefois, les deux modèles se comportent différemment lors de la simulation de surfaces de mortalité. En effet, dans le cas du modèle de régression linéaire, une perturbation à la hausse sur la dérive temporelle est en moyenne compensée l'année d'après, ce qui a pour conséquence directe une très faible volatilité des surfaces ainsi construites. Dans le cas du modèle auto-régressif, si en moyenne le résultat change peu, la volatilité globale induite sur les surfaces de mortalité par la « mémoire » du processus de dérive est sensiblement supérieure. Les surfaces de mortalité générées sont incluses, à 95 % dans le « volume de mortalité » suivant :

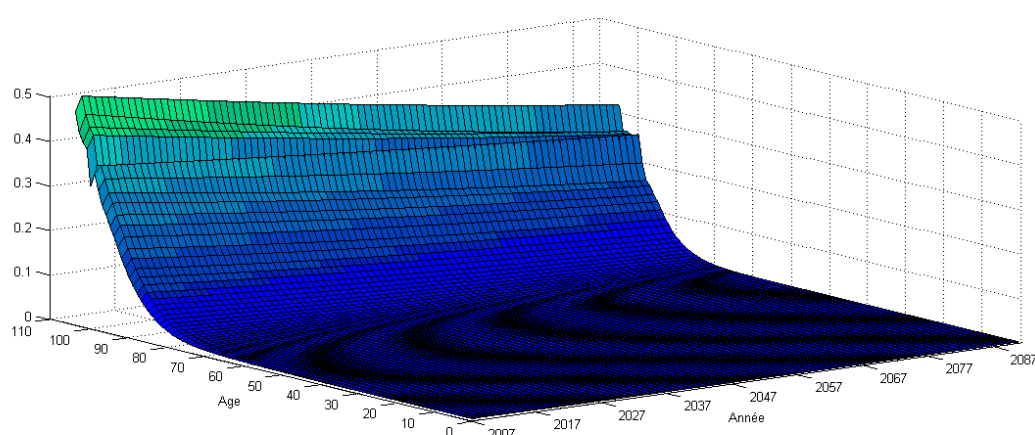


Fig. 17 : Volume de mortalité à 95 % dans le cadre du modèle auto-régressif

Cette volatilité supplémentaire a pour conséquence immédiate d'augmenter la part de risque systématique supportée par le régime de rentes :

	Dérive AR(3)			Ecart AR(3) / linéaire
	Déterministe	Stochastique	Dérive linéaire	
Espérance	38 198 606	38 218 125	37 939 862	0,73%
Ecart-type	626 397	803 479	628 266	27,89%
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 970 868	36 643 307	36 708 460	-0,18%
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 426 343	39 792 943	39 171 264	1,59%
Coefficient de variation	1,64%	2,10%	1,66%	26,96%

Tab. 7 : Comparaison de la distribution de l'engagement modèle AR(3) et modèle linéaire

L'imprécision sur la mesure de l'engagement, mesurée par la demi-longueur de l'intervalle de confiance à 95 % passe ainsi de 3,2 % à 4,1 %. Le tableau ci-dessus fait clairement apparaître que si, en moyenne, les deux modélisations sont très proches, la composante de risque

systematique est plus importante dans la modélisation auto-régressive⁶⁷. Toutefois, au global, l'effet pour le régime reste limité. Cette approche permet de mettre en évidence le fait que si le modèle de régression linéaire est *a priori* suffisant pour construire une surface prospective pertinente, il doit être affiné dans le cadre d'une utilisation pour la quantification du risque systématique de mortalité.

5.3 CONCLUSION

On a mis en œuvre dans la présente section un modèle opérationnel pour quantifier la part de risque systématique de mortalité dans l'engagement d'un régime de rentes. Les résultats obtenus tendent à montrer qu'en-deçà d'un effectif de quelques dizaines de milliers de têtes ce risque est négligeable, les fluctuations d'échantillonnage expliquant alors l'essentiel de la variance.

Pour les gros portefeuilles, si le risque systématique devient significatif d'un point de vue relatif, le risque mutualisable diminuant avec l'effectif concerné, le niveau absolu de risque reste faible. Au global la largeur de l'intervalle de confiance à 95 % pour l'estimation de l'engagement est décroissante avec la taille de la population sous risque, même en intégrant le risque systématique.

La principale limite du modèle proposé est la conséquence directe d'une limitation de la modélisation de Lee-Carter (ou des modèles poissonniens) : les taux de mortalité aux différents âges sont en effet supposés parfaitement corrélés, la composante aléatoire (k_t) ne dépendant que du temps⁶⁸, et le taux de sortie instantané étant obtenu par la formule $\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x k_t$. Ceci est en pratique contredit par la figure Fig. 5 : Fluctuations des taux de décès autour de la tendance de long terme.

Toutefois l'approche proposée dans le présent travail peut être aisément adaptée à l'ensemble des modèles reposant sur une modélisation de la tendance temporelle au travers d'une série temporelle (éventuellement sur plusieurs paramètres). On peut notamment imaginer de se fonder sur des approches utilisant les logits des taux de décès⁶⁹.

⁶⁷ Ceci est une conséquence directe de la « mémoire du processus », un choc sur la surface de mortalité voit ses effets prolongés sur plusieurs années, alors que dans la modélisation linéaire, il est compensé l'année d'après.

⁶⁸ Cette composante est modélisée par un processus ARIMA.

⁶⁹ Voir ces modèles dans PLANCHET [2005] et dans SERANT [2005].

Il nous semble utile de préciser que ce type d'approche fournit un cadre opérationnel pour répondre aux exigences des futures dispositions Solvabilité 2 (et également dans le contexte de l'IFRS 4 phase 2, quoi que sur ce point les normes comptables soient moins exigeantes).

On soulignera toutefois que, si ces approches permettent de quantifier le risque associé au caractère intrinsèquement aléatoire de la mortalité future, autour d'une tendance supposée prévisible, elles n'apportent pas pour autant de réponse à une éventuelle erreur de spécification sur la tendance de référence. On constate ainsi par exemple que les modèles prospectifs construits par le passé ont systématiquement sous-estimé l'augmentation de l'espérance de vie des rentiers, et donc le niveau des provisions d'un régime de rentes. Des modèles strictement extrapolatifs peuvent donc apparaître limités de ce point de vue.

On peut envisager, face aux incertitudes sur l'évolution de la mortalité future, d'introduire dans les modèles une contrainte exogène permettant d'intégrer une opinion *a priori* que l'on peut avoir sur la mortalité future, indépendamment de la tendance passée. Une piste, en cours d'exploration et qui donnera lieu à un prochain travail, consiste à imposer une contrainte sur l'espérance de vie à un âge de référence et à contrôler son évolution de manière exogène.

Une seconde piste consiste à modéliser l'erreur dans l'appréciation de la dérive et de quantifier l'impact de cette erreur sur la distribution de l'engagement : cette analyse est menée à la section 6 du présent chapitre.

En effet, le régime considéré ici est en fait soumis à deux risques distincts : le premier, dont l'étude occupe la présente section, est la conséquence des fluctuations aléatoires des taux de mortalité futurs autour de la tendance définie par la table prospective. Le second est quant à lui associé à l'incertitude sur cette tendance.

Plus précisément, cette incertitude a elle-même deux sources : l'erreur de modèle et l'imprécision associée à la détermination des coefficients de l'interpolation.

Il est délicat d'évaluer *a priori* l'erreur de modèle ; une première approche consiste par exemple à tester la robustesse du modèle proposé en effectuant les estimations sur différentes

plages temporelles. Ces estimations conduisent à des estimations de la mortalité futures qui peuvent être sensiblement divergentes.

L'imprécision attachée aux coefficients de l'interpolation eux même est plus aisée à quantifier. En effet, dans le modèle :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

les coefficients a et b sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires, qui conduit à ce que le couple $(\hat{a}, \hat{b})$ soit un vecteur gaussien. On peut donc simuler différentes droites d'extrapolation et intégrer cette source de variabilité dans le modèle. Il est important de considérer l'existence de cette seconde source de risque, potentiellement beaucoup plus importante pour le régime, les écarts de pente sur la droite d'extrapolation conduisant à des taux de survie de plus en plus divergents au cours du temps.

6 MESURE DE L'INCERTITUDE TENDANCIELLE SUR LA MORTALITE

Les analyses prospectives de mortalité conduisent à anticiper les évolutions futures des taux de décès aux différents âges. Dans les modèles maintenant classiques de construction de tables prospectives, comme le modèle de Lee-Carter ou les modèles poissoniens, la dérive de mortalité future est anticipée à partir des observations passées.

Même en admettant qu'il est légitime de prolonger dans les années à venir les tendances observées par le passé⁷⁰, plusieurs sources d'incertitude viennent perturber la détermination de la tendance future : choix de la période d'observation, fluctuations stochastique des taux de mortalité, événements exceptionnels, *etc.*. Par exemple, selon la période d'observation retenue pour l'ajustement du modèle de Lee-Carter (ou de ses variantes) on obtient des estimations de la série (k_t) sensiblement décalées, comme l'illustre le graphique ci-dessous :

⁷⁰ On pourra se reporter à CAREY et TULAPURKAR [2003] pour des analyses intégrant des considérations biologiques et environnementales, ainsi que GUTTERMAN et VANDERHOOF [1999] pour une discussion sur ce point.

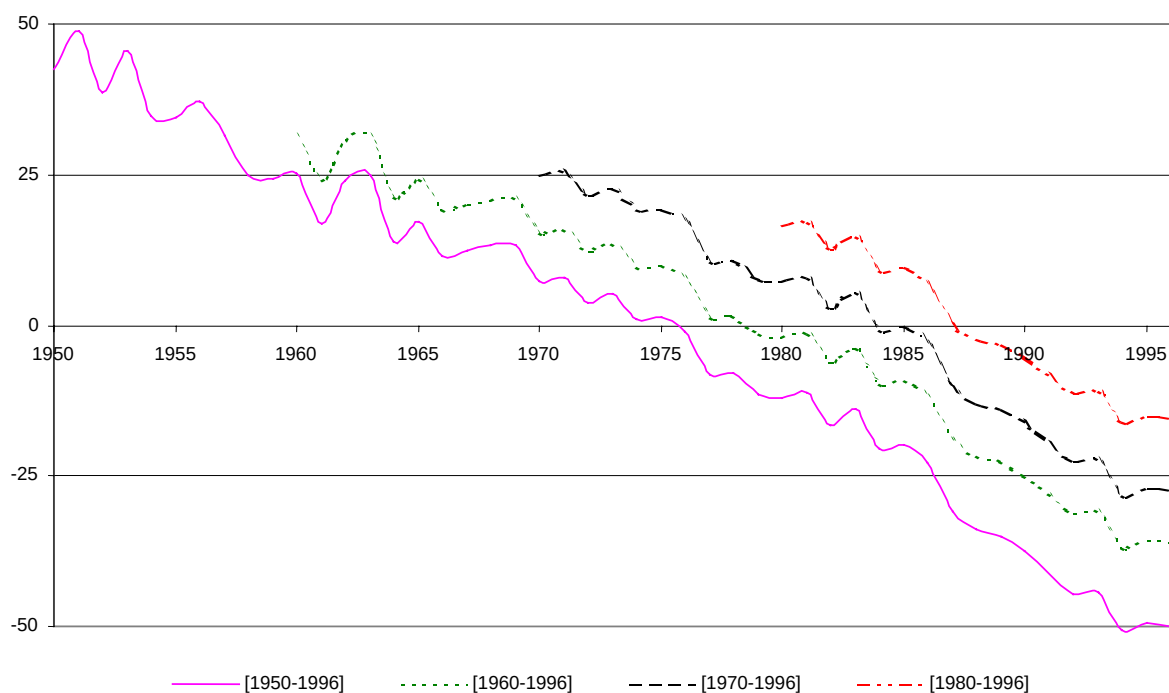


Fig. 18 : Comparaison des séries $k(t)$ en fonction de la plage d'observation

Cette incertitude fait peser sur les assureurs de rentes viagères et les régimes de retraite un risque systématique (non mutualisable) dont l'impact financier peut être très important. Ainsi, sur l'exemple du régime étudié ici on trouve :

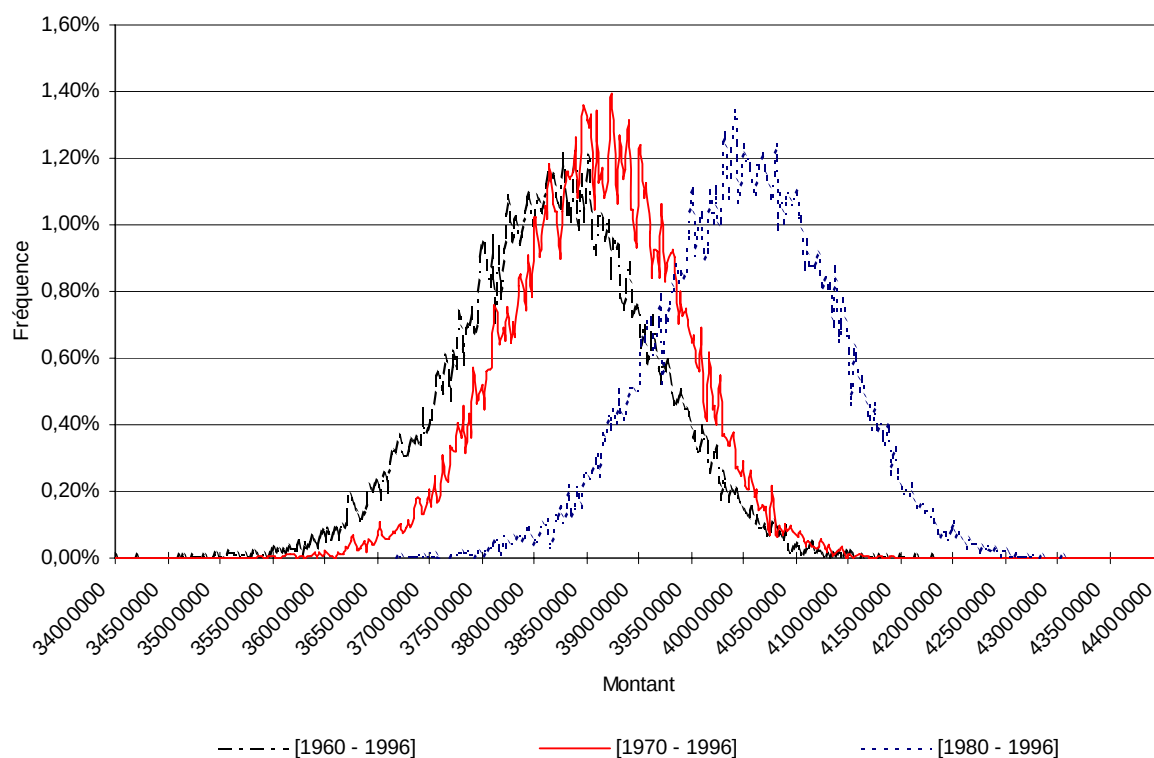


Fig. 19 : Impact de la plage d'observation sur la distribution de l'engagement

La récente actualisation des tables utilisées en France par les assureurs pour le provisionnement des rentes viagères illustre également les difficultés d'une telle anticipation et les enjeux financiers associés : par rapport aux tables TPG⁷¹ 1993 en vigueur jusqu'au 31/12/2006, les nouvelles tables⁷² TGH 05 et TGF 05 qui entrent en vigueur le 01/01/2007 (ces tables sont présentées en détails dans une note de présentation de l'Institut des Actuaire⁷³) conduisent à des majorations de provision parfois supérieures à 20 %, comme l'illustre le tableau suivant :

Age	Génération	TPG 1993	Femmes	Femmes / TPG	Hommes	Hommes / TPG
50	1955	26,81647	28,40552	5,9%	26,75507	-0,2%
55	1950	24,26368	25,95575	7,0%	24,07474	-0,8%
60	1945	21,50832	23,30185	8,3%	21,25828	-1,2%
65	1940	18,53412	20,39677	10,0%	18,22126	-1,7%
70	1935	15,39467	17,28922	12,3%	15,08772	-2,0%
75	1930	12,25679	14,08680	14,9%	12,05698	-1,6%
80	1925	9,35194	10,96271	17,2%	9,12890	-2,4%
85	1920	6,88306	8,15548	18,5%	6,64827	-3,4%
90	1915	4,93310	5,89309	19,5%	4,73880	-3,9%
95	1910	3,46780	4,29408	23,8%	3,40109	-1,9%

Tab. 8 : Comparaison des coefficients de provisionnement TPG 1993 et TGH/TGF 05

Dans ce contexte il apparaît opportun de rechercher à mesurer le risque associé à cette erreur d'anticipation et de quantifier son impact en terme de provisions pour un régime de rentiers.

On utilise pour cela comme précédemment le modèle de Lee-Carter⁷⁴ pour construire une surface de mortalité $\mu(x,t)$. Après un ajustement des taux passés, les taux de mortalité pour les années futures se déduisent classiquement de l'extrapolation de la composante temporelle.

A partir de ce modèle de référence, on propose un modèle stochastique de mortalité en considérant que le taux de mortalité futur $\mu(x,t)$ est lui-même aléatoire, et que donc $\mu(x,t)$ est un processus stochastique (comme fonction de t à x fixé). L'aléa est introduit de manière à capturer l'incertitude sur l'estimation de la tendance future de la composante temporelle des taux de mortalité.

⁷¹ Tables obtenues sur la base de la mortalité de la population féminine sur la période 1961-1987, utilisées depuis le 1^{er} juillet 1993.

⁷² Homologuées par l'arrêté du 01/08/2006.

⁷³ Cf. PLANCHET [2006].

⁷⁴ Voir notamment LEE et CARTER [1992], LEE [2000], SITHOLE et al. [2000].

Après avoir construit un jeu de tables prospectives sur des données nationales à l'aide de ce modèle, nous l'utilisons pour calibrer l'incertitude sur la dérive anticipée et appliquons le modèle ainsi obtenu pour déterminer la distribution de l'engagement d'un régime de rentes. Les conséquences en terme d'analyse du risque pesant sur le régime et de provisionnement sont examinées.

6.1 MODELE DE MORTALITE

Le modèle retenu pour construire les tables prospectives est un modèle stochastique adapté du modèle de Lee-Carter dont les principales caractéristiques sont rappelées à la section 5.1.1. Dans ce cadre, une fois ajustée la surface de mortalité sur les données passées, il reste à modéliser la série (k_t) pour extrapoler les taux futurs ; pour cela, on utilise la modélisation la plus simple que l'on puisse imaginer, une régression linéaire en supposant une tendance affine :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

avec (γ_t) un bruit blanc gaussien de variance σ_γ . On obtient ainsi des estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ qui permettent de construire des surfaces projetées en utilisant simplement $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$.

Afin de simplifier l'écriture des formules à venir, on pose $\tau = t - t_m + 1$ et $T = t_M - t_m + 1$, ce qui conduit aux expressions :

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{T} \sum \tau k_\tau - \frac{T+1}{2} \bar{k}}{T^2 - 1} \text{ et } \hat{b} = \bar{k} - \frac{T+1}{2} \hat{a},$$

avec $\bar{k} = \frac{1}{T} \sum k_\tau = \frac{1}{T} \sum k_t$. De plus, le vecteur $(\hat{a}, \hat{b})$ est distribué selon une loi normale d'espérance (a, b) et de variance :

$$\Sigma = \frac{12\sigma_\gamma^2}{T(T^2-1)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{T+1}{2} \\ -\frac{T+1}{2} & \frac{(T+1)(2T+1)}{6} \end{bmatrix}.$$

On peut donc construire des réalisations de la mortalité future en effectuant des tirages dans la loi du vecteur $(\hat{a}, \hat{b})$. La variable k_t^* ainsi obtenue est telle que $E(k_t^*) = k_t$. On obtient alors des réalisations des taux instantanés de sortie *via* :

$$\mu_{xt}^* = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t^*).$$

Comme $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$ est une variable gaussienne d'espérance $k_t = at + b$ et de variance :

$$\sigma_\tau^2 = \frac{12\sigma_\gamma^2}{T(T^2-1)} \left(\tau^2 - \tau(T+1) + \frac{(T+1)(2T+1)}{2} \right),$$

on note que :

$$E(\mu_{xt}^*) = E(\exp(\alpha_x + \beta_x k_t^*)) = \exp\left(\alpha_x + \beta_x k_t + \frac{\beta_x^2 \sigma_t^2}{2}\right),$$

et donc :

$$E(\mu_{xt}^*) = \mu_{xt} \exp\left(\frac{\beta_x^2 \sigma_t^2}{2}\right) > \mu_{xt}.$$

Le modèle stochastique a donc tendance à surestimer les taux de sortie par rapport à la surface de référence fournie par le modèle de Lee-Carter. Compte tenu de notre objectif de « perturber » la surface de mortalité, mais sous l'hypothèse que celle-ci définie correctement

la tendance future espérée des taux instantanés de décès cette propriété du modèle est potentiellement pénalisante et il convient d'adapter l'approche proposée.

A la section 5 on a utilisé une version corrigée du biais du modèle définie par :

$$\mu_{xt}^* = \exp \left(\alpha_x - \frac{\beta_x^2 \sigma_t^2}{2} + \beta_x k_t^* \right).$$

Cette version du modèle satisfait par construction $E(\mu_{xt}^*) = \mu_{xt}$. Elle apparaît donc cohérente avec l'objectif recherché. Toutefois, on peut lui reprocher de déformer de manière arbitraire la distribution des taux stochastiques ; en effet, si le modèle $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$ est pertinent, alors les taux de sortie μ_{xt}^* réellement observés seront bien issus du modèle $\mu_{xt}^* = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t^*)$ et non de la version corrigée du biais.

On utilise ici une approche différente et *a priori* plus naturelle consistant à utiliser comme surface de référence déterministe la surface moyenne du modèle stochastique, soit

$$E(\mu_{xt}^*) = \exp \left(\alpha_x + \beta_x k_t + \frac{\beta_x^2 \sigma_t^2}{2} \right). \text{ En effet, si le mécanisme aléatoire dont sont issus les}$$

taux de décès est bien associé à $k_t^* = \hat{a}t + \hat{b}$, alors la mortalité de référence déterministe est bien définie par la surface moyenne ci-dessus, et non plus par la surface de Lee-Carter.

6.2 APPLICATIONS NUMERIQUES

On présente ici les résultats obtenus tout d'abord sur la famille de tables prospectives proposée puis, dans un second temps, les conséquences en terme de valorisation de l'engagement du régime de rentes.

6.2.1 Tables prospectives

La table prospective utilisée dans cette étude est comme précédemment (cf. 5.1.1) construite à partir des tables du moment fournies par l'INED⁷⁵ dans Mesle et Vallin⁷⁶ et conduit à la surface de mortalité Lee-Carter suivante :

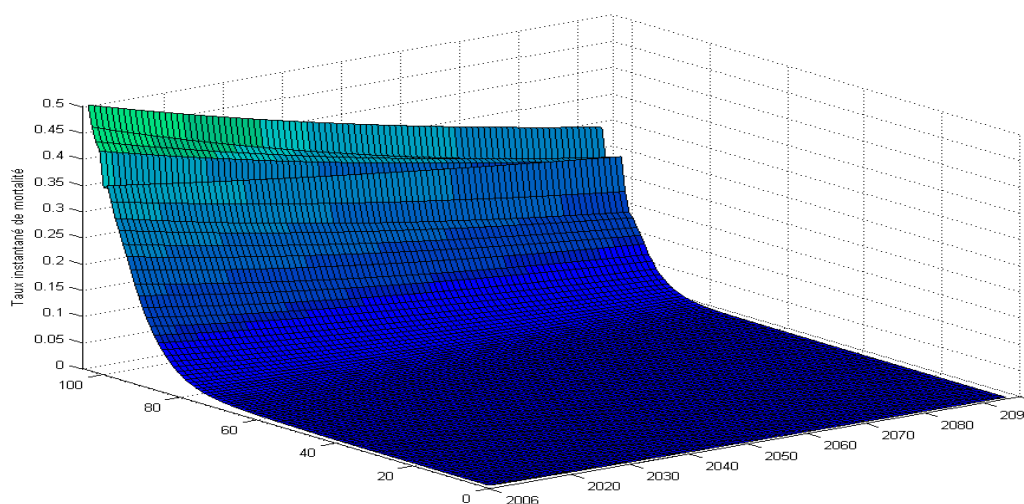


Fig. 20 : Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter

La surface de référence ajustée de notre modèle stochastique est présentée sur le graphe ci-dessous :

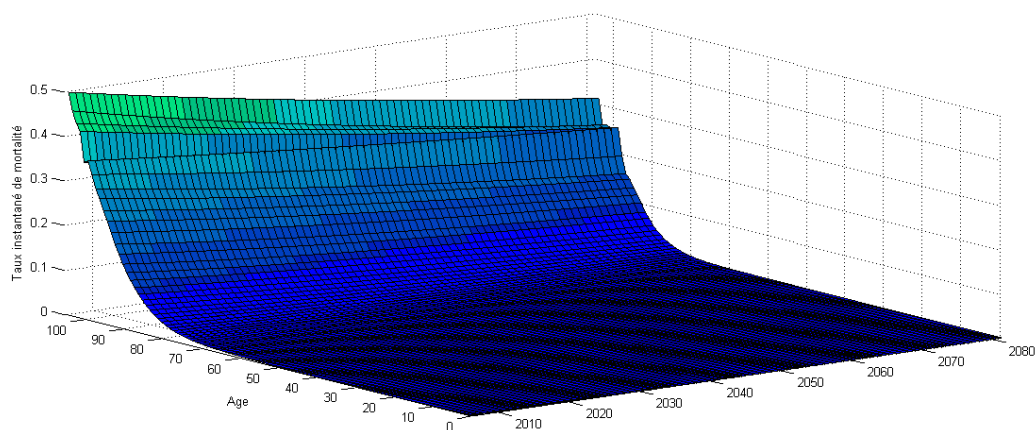


Fig. 21 : Surface de mortalité de référence du modèle stochastique

⁷⁵ Ces tables sont disponibles sur http://www.ined.fr/publications/cdrom_vallin_mesle/Tables-de-mortalite/Tables-du-moment/Tables-du-moment-XX.htm

⁷⁶ MESLE et VALLIN [2002].

On remarque que la différence entre les deux graphes est très faible. En effet l'écart entre les deux surfaces est donné par $\beta_{xt} = \exp\left(\frac{\beta_x \sigma_t^2}{2}\right)$ dont la valeur est proche de un compte tenue de la faible volatilité des données. Nous obtenons en effet les valeurs suivantes des paramètres : $\hat{b} = 4059,94439$, $\hat{a} = -2,05775$ et $\hat{\sigma}_\gamma = 3,9388782$, $\hat{\sigma}_b = 1.18058$, $\hat{\sigma}_a = 0.04282$ et $\hat{\sigma}_t = \sqrt{1.39367413 + 0.00183378t^2 - 0.08802152t}$.

Une centaine de tirages de trajectoires de k_t permet d'obtenir le graphe suivant :

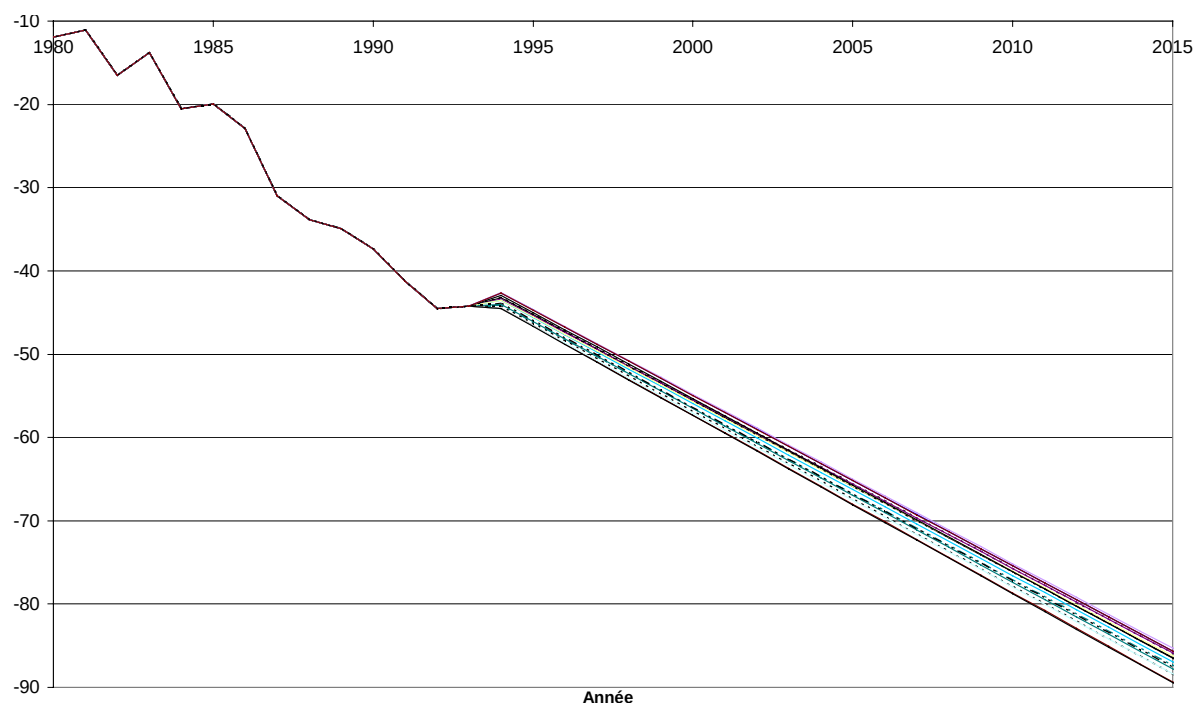


Fig. 22 : Simulation de trajectoires de la tendance

On constate sur le graphe que les différentes trajectoires de k_t sont presque parallèles. Ceci est dû à la faible volatilité de l'estimateur $\hat{a}$. Ainsi le modèle tire la plus grande partie de sa volatilité de la constante $\hat{b}$. Si l'on cherche à comparer la volatilité de la dérive temporelle modélisée dans cette section avec celle du modèle utilisé pour quantifier le risque de fluctuation autour de la dérive, on obtient le graphe suivant :

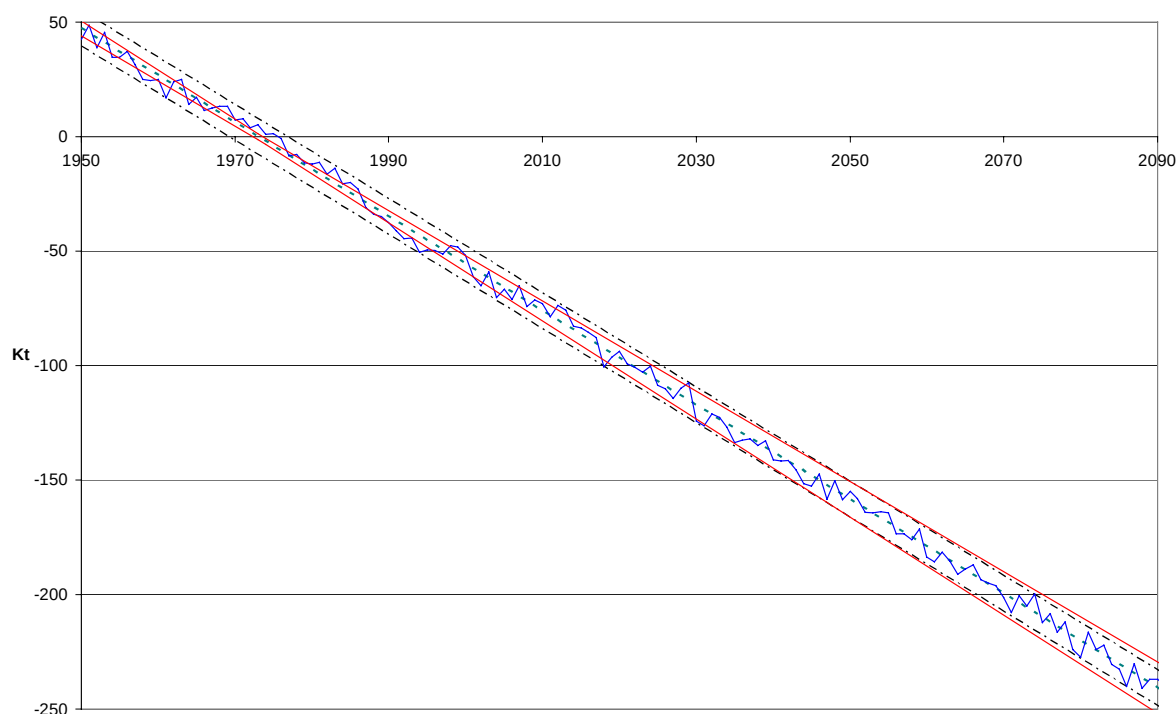


Fig. 23 : « couloir de variation » de la tendance

Alors que précédemment (section 5) le modèle utilisé ne prenait en compte que l'oscillation de la dérive temporelle k_t autour de sa moyenne, le modèle actuel simule l'erreur d'ajustement qui a pu être faite sur la dérive temporelle passée. Si précédemment les différentes trajectoires de k_t étaient situées entre deux droites parallèles délimitant le couloir de variation de la tendance à 95 %, on constate sur le graphique ci-dessus que les trajectoires de la dérive temporelle sont situées entre deux droites s'éloignant l'une de l'autre avec le temps (la volatilité augmente ici avec le temps). Les variations de la tendance temporelle et celles du taux instantané de mortalité étant comparables, le graphique ci-dessus traduit l'hypothèse de base du modèle : la composante stochastique de la mortalité tire, dans cette modélisation, sa volatilité non pas des fluctuations annuelles qui, comme nous l'avons montré *supra* sont faibles, mais plutôt de la dérive aléatoire de la mortalité.

6.2.2 Application au régime de rentes viagères

Lorsque la mortalité future est connue (déterministe), l'analyse de la loi de Λ (cf. 2) revient à mesurer les fluctuations d'échantillonnage qui est associé au « risque de volatilité » tel que décrit dans la modélisation proposée par le QIS 2 par exemple⁷⁷. Dans le contexte d'une

⁷⁷ Cf. CEIOPS [2006].

mortalité stochastique (la mortalité future étant alors inconnue), cette analyse nous fournit un moyen de quantifier le risque systématique qui vient s'ajouter à ce risque de base : nous pourrions donc mesurer ainsi le risque associé au choix de la dérive.

La méthode retenue consiste à simuler les durées de survie des rentiers, $T_{x(j)}$, $j \in J$, à calculer des réalisations $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de Λ puis à déterminer la fonction de répartition empirique de l'engagement. Les algorithmes utilisés sont présentés en annexe.

La provision L_0 est approchée par $\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n$. La variance de l'engagement est estimée par

$\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\lambda_n - L_0)^2$; on calcule également le coefficient de variation empirique :

$$cv = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\lambda_n - L_0)^2}}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \lambda_n},$$

qui fournit un indicateur de la dispersion de l'engagement et dans une certaine mesure de sa « dangerosité ».

On considère la distribution empirique de l'engagement calculé avec un taux technique de 2,5 %. La distribution empirique de l'engagement, représentée ici avec la distribution de référence dans le cas déterministe (avec 20 000 tirages) est présentée ci-dessous :

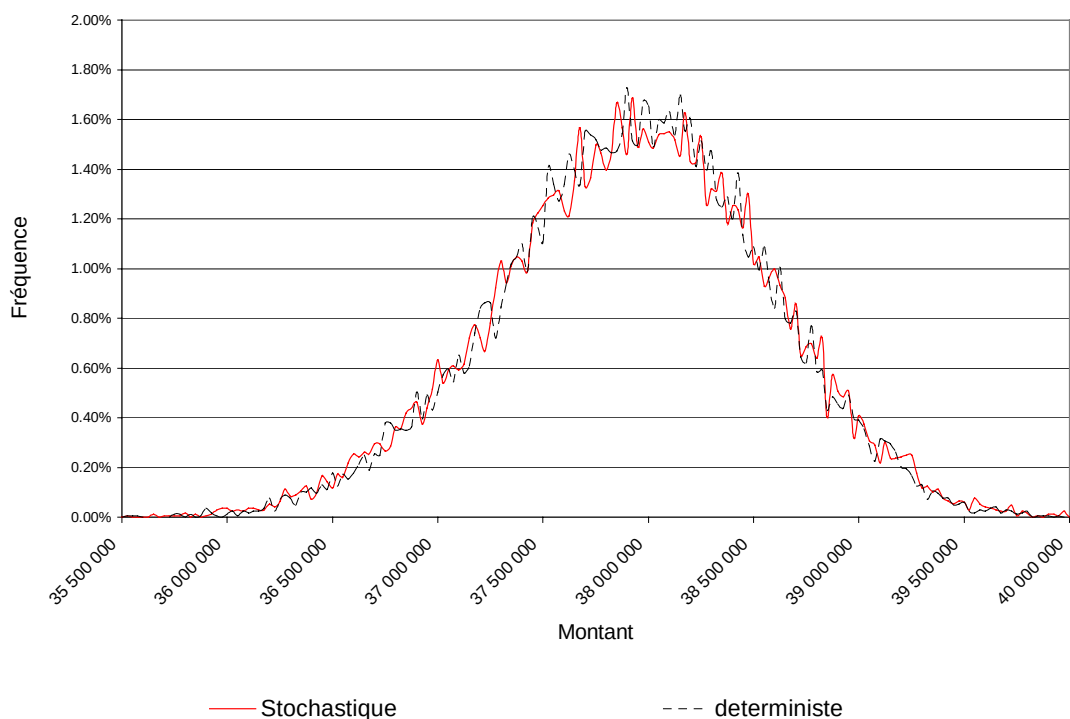


Fig. 24 : Distribution empirique de l'engagement

Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe surface Lee Carter	Déterministe	Stochastique
Espérance	37 937 707	37 937 707	37 937 720
Ecart-type	626 918	626 918	645 601
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	36 625 000	36 625 000	36 600 000
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	39 075 000	39 075 000	39 150 000
Coefficient de variation	1.65%	1.65%	1.70%

Tab. 9 : Caractéristiques de la distribution de l'engagement

On remarque tout d'abord que la modification de la surface de référence utilisée n'a pas d'impact. Ceci est dû au fait que pour tout x et pour tout t $\exp\left(\frac{\beta_x \sigma_t^2}{2}\right)$ est proche de 1. Sur un portefeuille de petite taille, l'impact de la mortalité stochastique sur l'engagement ne semble pas très important. En effet le coefficient de variation de l'engagement stochastique n'est que 2,9 % plus élevé que celui de l'engagement déterministe. On obtient des résultats très proches de ceux obtenus précédemment.

Ainsi tant que le portefeuille n'est pas correctement mutualisé, l'impact du risque systématique est très faible comparé à celui du risque mutualisable. Si l'on multiplie la taille du portefeuille par 30 (qui conduit à une population d'environ 10 000 rentiers) on obtient les résultats suivants :

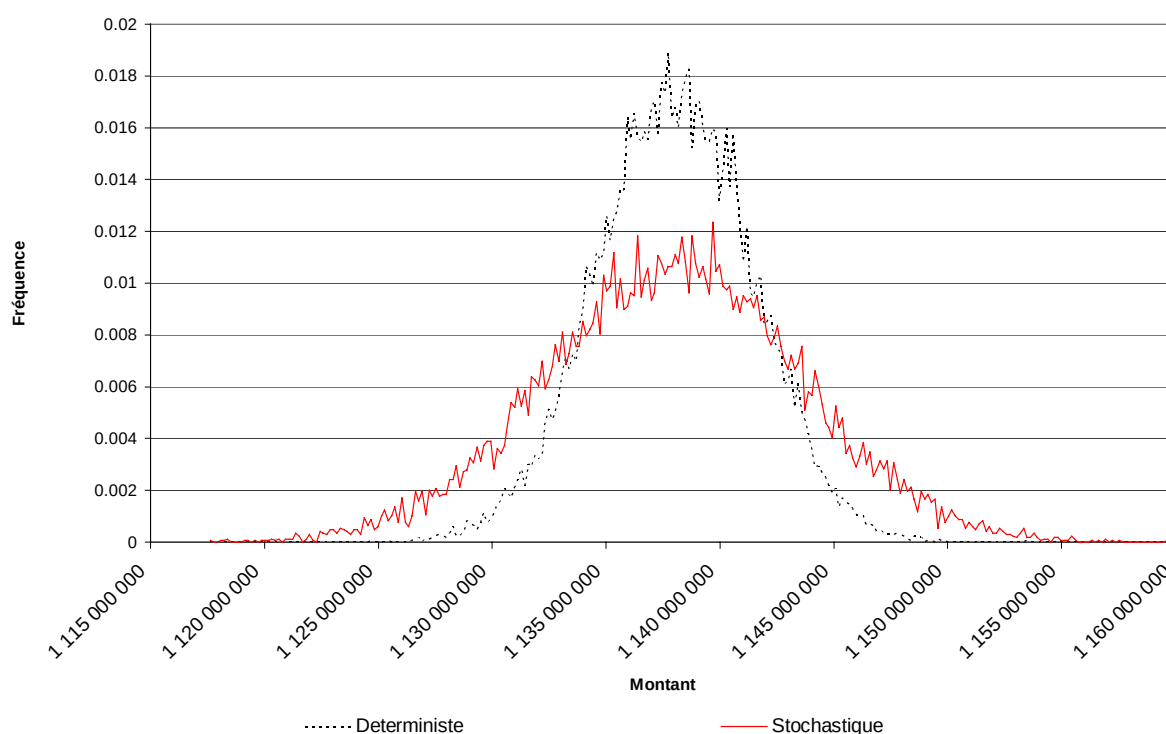


Fig. 25 : Distribution empirique de l'engagement (population x30)

Les résultats détaillés sont repris ci-après :

	Déterministe	Stochastique
Espérance	1 138 008 113	1 138 076 960
Ecart-type	5 592 212	3 410 560
Borne inférieure de l'intervalle de confiance	1 131 130 658	1 126 780 658
Borne supérieure de l'intervalle de confiance	1 144 480 658	1 148 830 658
Coefficient de variation	0.30%	0.49%

Tab. 10 : Caractéristiques de la distribution de l'engagement (taille du groupe x30)

La prise en compte de la mortalité stochastique augmente le coefficient de variation de 63 %.

Dans une approche « valeur à risque » (*VaR*), on trouve que le quantile à 75 % de la distribution de l'engagement est de 1 142 M€ dans le cas stochastique, ce qui est supérieur à la valeur obtenue dans le cas déterministe, soit 1 140 M€. En d'autres termes, la prise en

compte du risque de dérive conduit ici (en suivant une approche *VaR* pour le calcul de la provision) à augmenter le montant provisionné de 0,17 %, ce qui n'est pas significatif.

La prise en compte du risque de dérive a également pour conséquence de doubler l'imprécision dans l'évaluation de l'engagement⁷⁸ qui, au niveau de confiance de 95 %, passe de 0,7 % environ à près de 1,3 %. Toutefois, la marge d'incertitude sur l'engagement reste faible.

A la section 5 nous avons mis en évidence le fait que l'évaluation de l'engagement d'un régime de rentiers, l'aléa associé aux fluctuations des taux de décès futurs autour de leur tendance n'a qu'un faible impact que l'on pouvait légitimement négliger.

Le modèle mis en œuvre ici permet de montrer que, si ces régimes sont particulièrement sensibles au risque d'erreur de spécification de la tendance future, l'incertitude sur ce point incluse dans les données passées ne suffit pas à expliquer les évolutions récentes observées.

Incidemment, on insistera sur le fait que l'on a fait ici le choix de modéliser l'aléa sur la tendance future de mortalité à partir des seules fluctuations du paramètre temporel k_t ; cette approche est justifiée par le fait que l'on cherche à identifier la volatilité des taux de décès non associée aux fluctuations d'échantillonnage. Compte tenu des effectifs très importants du groupe utilisé pour construire les tables utilisées ici (la population française), on peut en effet considérer qu'il n'y a plus de fluctuations d'échantillonnage significatives dans l'estimation des taux bruts⁷⁹ et que donc il est légitime de considérer la surface passée fixe.

Une approche alternative consisterait à prendre en compte globalement l'incertitude sur le paramètre vectoriel $\theta = (\alpha, \beta, k)$ pour générer des surfaces de mortalité. Cette démarche est techniquement simple à mettre en œuvre à la condition d'utiliser la variante log-Poisson du modèle de Lee-Carter, dans laquelle l'estimation de θ est effectuée par maximum de vraisemblance, puisque alors on peut déterminer l'information de Fischer associée et utiliser la normalité asymptotique de l'estimateur⁸⁰.

⁷⁸ L'imprécision est mesurée par la demi-longueur relative de l'intervalle de confiance à 95 %.

⁷⁹ Sur les adaptations du modèle de Lee-Carter au cas de petits échantillons pour lesquels cette hypothèse n'est plus vérifiée, on pourra se reporter à PLANCHET et LELIEUR [2006].

⁸⁰ Voir par exemple HAAS [2006] pour une utilisation de cette approche dans le cas de swaps de mortalité.

Toutefois, elle nous semble moins pertinente dans le cas présent, notre objectif étant d'isoler le risque associé à une incertitude structurelle sur les taux et non à une incertitude d'estimation.

En conclusion, on peut retenir que le régime de rente est par contre soumis à un risque de modèle important. Il est ainsi possible de reformuler les conséquences du passage des tables TPG 1993 aux tables⁸¹ TGH 05 évoquées en introduction (*cf.* page 52) en rapprochant l'évolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans dans les deux modèles prospectifs. On obtient ainsi :

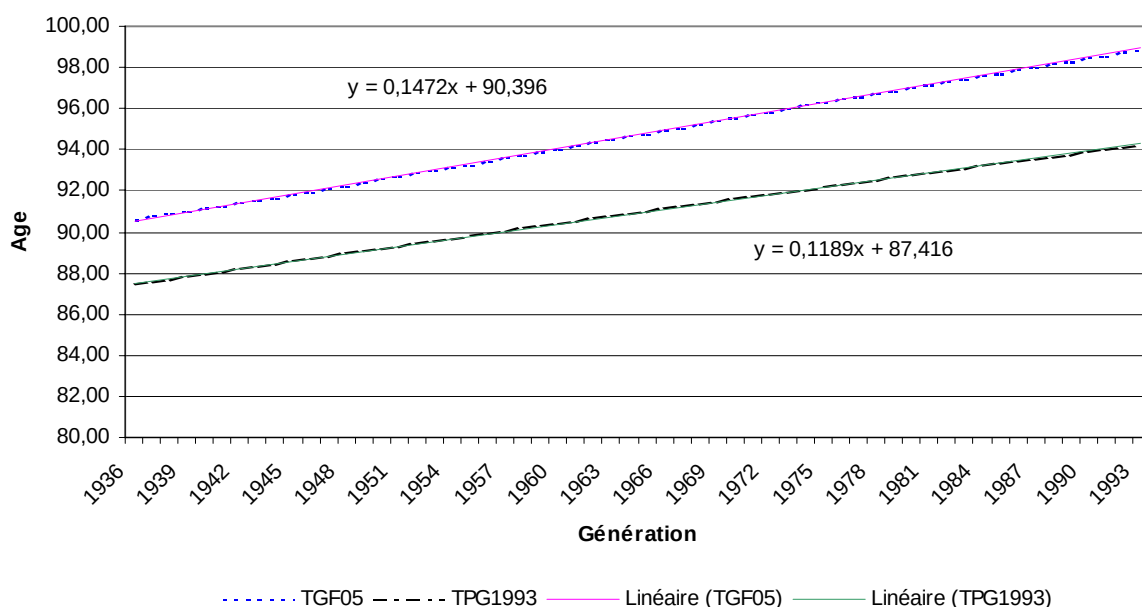


Fig. 26 : *Evolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans*

On observe que non seulement les niveaux absolus diffèrent sensiblement, mais également que la vitesse de croissance de l'espérance de vie à 60 ans a été sensiblement sous-estimée en 1993 : alors que les TPG 1993 anticipent une augmentation de 1,4 mois par an, les tables TGF 05 prévoient une dérive de 1,8 mois par an, soit 23 % de plus.

⁸¹ On rappelle que les TPG 1993 sont des tables féminines.

Ceci illustre la difficulté à anticiper la tendance de dérive de la mortalité future à partir de données historiques⁸². Dans ce contexte, on pourrait imaginer d'utiliser comme paramètre de contrôle du modèle, en le fixant comme une contrainte *ex ante* par exemple l'espérance de vie à un âge donné (60 ans) et son évolution future. Une telle approche permettrait de quantifier par exemple l'impact sur les charges du régime d'une erreur de 0,1 mois/an sur la vitesse de dérive de cette espérance et d'intégrer ainsi explicitement des indicateurs de l'impact sur l'évaluation de l'engagement du régime d'une erreur de modèle.

Il nous semble enfin utile de préciser que ce type d'approche fournit un cadre opérationnel pour répondre aux exigences des futures dispositions Solvabilité 2 (et également dans le contexte de l'IFRS 4 phase 2, quoi que sur ce point les normes comptables soient moins exigeantes).

⁸² Les populations de référence utilisées pour les 2 séries de tables diffèrent, mais on obtiendrait les mêmes conclusions en utilisant des tables prospectives INSEE à la place des TGF 05.

PARTIE 2 : L'ACTIF, ANALYSE DES RISQUES ET MODELISATION

La modélisation des actifs financiers dans le cadre de l'étude d'un régime de rentes viagères intervient principalement en deux occasions :

- ✓ La modélisation de taux d'actualisation aléatoires pour en mesure l'impact sur l'engagement (au sens de « valeur actuelle ») du régime ;
- ✓ La construction d'un modèle plus complet dans le cadre d'une étude d'allocation stratégique d'actif (« approche ALM »).

L'étude de la loi de l'engagement d'un régime de rentes en présence d'un taux d'actualisation stochastique peut apparaître un peu artificielle dans le cadre de l'évaluation d'engagement sur la base d'hypothèses prudentes, comme c'est le cas dans la réglementation actuelle. Elle prend tout son sens dans le cadre des réformes en cours de la solvabilité d'une part, et de la norme comptable IAS 19 d'autre part, l'actualisation devant être effectuée selon un taux de marché (ou une courbe de taux).

La modélisation des taux d'intérêt qu'elle implique constitue la première étape d'une démarche ALM plus large, qui permettra de fixer un cadre pour la gestion financière (*via* l'allocation stratégique) et un outil de pilotage de la solvabilité du régime.

On est ainsi conduit à rechercher des modèles adaptés au contexte des régimes de rentes viagères pour décrire le comportement à long terme des actifs classiquement utilisés dans ce contexte : actions et assimilés, obligations et produits de taux, monétaire et immobilier.

Les modèles d'actifs financiers risqués de type « actions » sont nombreux et la littérature sur le sujet abonde. Toutefois, dans les applications opérationnelles, c'est le plus souvent le modèle de Black & Scholes⁸³, reposant sur une hypothèse de rendements i.i.d. log-normaux, qui est utilisé. Certains modèles plus élaborés utilisent aujourd'hui les variantes de modèle à

⁸³ BLACK et SCHOLES [1973].

« changement de régime » proposé par Hardy⁸⁴ dans lequel le processus des cours bascule à chaque période entre deux modélisations log-normales, chacune étant associée à un contexte économique (« normal » et « crise » par exemple). Ces modélisations présentent un handicap majeur dans le contexte de quantification des risques imposé par Solvabilité 2, dont on rappelle qu'il repose sur le contrôle d'une probabilité de ruine (à un an) à 0,5 %. En effet, elles ont tendance à sous-estimer les événements extrêmes, dont la bonne appréciation conditionne pourtant directement la mesure pertinente du niveau de capital alloué⁸⁵. Pour une description de Solvabilité 2 et ses implications en assurance on pourra se reporter à l'annexe sur ce sujet (Annexe n°1 : le dispositif Solvabilité 2).

On remarquera au surplus que les modèles classiques issus de la finance de marché sont construits en général dans une perspective d'analyse de l'évolution des cours à court terme, alors que les projections utiles pour un régime de rentes viagères sont des projections de long terme. Cette problématique temporelle est une question récurrente que l'on retrouve systématiquement lors de l'adaptation à une démarche d'assurance d'un modèle initialement construit en finance de marché⁸⁶.

On propose à la section E de recourir au modèle proposé initialement par Merton⁸⁷ qui est un « sur-modèle » au modèle de Black et Scholes prenant en compte le caractère intrinsèquement discontinu des cours boursiers.

La section D est quant à elle consacrée à la présentation des modélisations de référence dans les approches assurantielles pour l'inflation. Cette section vient compléter le propos de la section B.

On a choisi ici de ne pas revenir sur les modèles de taux d'intérêt, compte tenu de l'abondante littérature sur le sujet. Le lecteur intéressé trouvera une synthèse très complète sur le sujet dans les travaux de Roncalli⁸⁸.

⁸⁴ HARDY [2001].

⁸⁵ Voir l'exemple présenté à la section 11.3.

⁸⁶ Les conséquences de ce point sur l'évaluation de la *VaR* d'un portefeuille d'assurance sont par exemple développées dans FEDOR et MOREL [2006].

⁸⁷ MERTON [1976].

⁸⁸ RONCALLI [1998].

On notera également que, au-delà de la question de la durée déjà évoquée *supra*, les modélisations de produits financiers initialement conçues dans le contexte de la finance de marché doivent être adaptées aux spécificités de l'assurance (marchés incomplets, maturités longues, fréquences de réajustement des portefeuilles basses, *etc.*). Ce n'est pas là le sujet de cette thèse et il ne sera pas développé, toutefois il semble utile de renvoyer le lecteur aux articles sur ce thème⁸⁹.

Enfin, on n'aborde pas ici la modélisation d'un actif immobilier, qui fait le plus souvent appel dans le cadre des études de détermination de d'allocation stratégique au même modèle que celui utilisé pour les actifs de type « actions », avec simplement des paramètres spécifiques.

⁸⁹ CHENUT et al. [2003], CHENUT et al. [2004], DEVOLDER [2001] et PLANCHET et THEROND [2005] pour une synthèse.

D. MODELISATION DE L'INFLATION

La modélisation de l'inflation est, on l'a vu, une problématique essentielle de l'analyse d'un régime de retraite, au travers des dispositifs de revalorisation des rentes.

Au-delà des contraintes macro-économiques de long terme décrites à la section B, il est indispensable de modéliser les variations du taux d'inflation de moyen terme, notamment pour la détermination de l'allocation stratégique.

De nombreux modèles ont été proposés dans la littérature pour rendre compte de l'inflation ; dans le cadre de modèles actuariels⁹⁰. Trois de ces modèles sont présentés ci-après. On utilisera dans la suite de cette étude le modèle d'Ahlgrim (*cf.* la section G pour une application).

7 APPROCHE DE KAUFMANN ET AL.

Dans l'article de référence « Introduction to dynamic financial analysis »⁹¹, la valeur du taux d'inflation (i_t) est modélisée à partir de celle du taux court terme (r_t) :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \varepsilon_t$$

où α , β et σ sont des paramètres qui peuvent être estimés à partir de données historiques et ε_t correspond à un bruit blanc de variance σ^2 .

7.1 RESOLUTION PAR LES MOINDRES CARRES ORDINAIRES

Les paramètres du modèle peuvent être estimés selon la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). La formule peut en effet se réécrire de la façon suivante :

$$i = X\lambda + \varepsilon$$

⁹⁰ Voir par exemple KAUFMANN et al. [2001], WILKIE [1995] et AHLGRIM et al. [2003].

⁹¹. *Cf.* KAUFMANN et al. [2001].

avec $\lambda = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ et X une matrice de dimension $(n, 2)$ (n correspond au nombre d'observations, i et ε sont ainsi des vecteurs colonnes de dimension n). La première colonne est l'intercept et la deuxième correspond aux valeurs successives de r_t . Notons également que ε est de matrice de variance covariance égale à $\sigma^2 I_n$. Le coefficient λ est calculé de façon à minimiser la variance des résidus :

$$Var(\varepsilon) = \frac{1}{n} \times (i - X\lambda)'(i - X\lambda) = \frac{1}{n} \times [i'i - 2\lambda'X'i + \lambda'X'X\lambda]$$

On en déduit ensuite que $\frac{\partial Var(\varepsilon)}{\partial \lambda} = \frac{1}{n} \times [-2X'i + 2X'X\lambda]$, ce qui permet de trouver l'expression usuelle des estimateurs des moindres carrés :

$$\hat{\lambda} = (X'X)^{-1}X'i$$

Ces estimateurs ont pour caractéristiques d'être sans biais et de variance minimum. Pour les résidus, on obtient $\hat{\varepsilon} = i - X\hat{\lambda}$ et $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-2} \times \text{var}(\hat{\varepsilon})$.

Au moyen du test de Durbin-Watson, on peut analyser l'indépendance des résidus. Plus précisément, on teste :

- ✓ H0 : Non-corrélation des résidus, contre
- ✓ H1 : Les résidus suivent un processus auto régressif⁹² d'ordre 1.

Dans ces conditions, la statistique de test s'écrit :

⁹². On peut l'écrire sous la forme $\varepsilon_i = \rho \cdot \varepsilon_{i-1} + u_i$ où u_i suit une loi normale $N(0, \sigma^2)$.

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}$$

Dans le cas où l'hypothèse nulle serait refusée, on ne peut considérer que les résidus sont identiquement distribués et que l'estimateur des moindres carrés ordinaires n'est pas de variance minimale. Il faut alors faire appel à des moindres carrés généralisés.

7.2 RESOLUTION PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES GENERALISES

Le modèle s'écrit dans ce contexte (en gardant les dimensions des matrices utilisées au paragraphe précédent) $i = X\lambda + \varepsilon$ où ε est de matrice de variance covariance Σ (symétrique, définie positive, inversible). D'autre part, nous avons pris comme hypothèse que les résidus suivaient un processus auto régressif d'ordre 1; on peut alors écrire :

$$Var(\varepsilon) = \rho^2 Var(\varepsilon) + v^2,$$

ce qui fournit :

$$Var(\varepsilon) = \frac{v^2}{1 - \rho^2}.$$

Dans ces conditions, la matrice de variance covariance s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma = \frac{v^2}{1 - \rho^2} \times \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} = v^2 \times \Omega.$$

Les valeurs exactes des différents éléments de cette matrice sont inconnues, elles doivent donc être estimées. La matrice $\hat{\Omega}$ étant symétrique, il en est de même pour la matrice $\hat{\Omega}^{-1}$.

Celle-ci peut alors s'écrire sous la forme $\hat{\Omega}^{-1} = D'D$. On multiplie ensuite $i = X\lambda + \varepsilon$

par D pour obtenir $Di = DX\lambda + D\varepsilon$. On vérifie que $E(D\varepsilon) = 0$ et $E((D\varepsilon)(D\varepsilon)') = I$. Dans ces conditions, on peut se référer à la méthode des moindres carrés généralisés et aboutir, après simplifications, à :

$$\hat{\lambda} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}(X'\hat{\Omega}^{-1}i_t),$$

avec

$$\hat{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour vérifier le caractère explicatif du modèle, nous pouvons nous intéresser à la statistique du R^2 . Celle-ci fait apparaître la valeur estimée du taux d'inflation ($\hat{i}$) et la valeur moyenne de l'inflation observée ($\bar{i}$) :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t (i_t - \hat{i}_t)^2}{\sum_t (i_t - \bar{i})^2}.$$

L'adéquation des données au modèle est d'autant meilleure que cette statistique est proche de l'unité. Afin de tester la significativité de la régression, on utilise le fait que sous l'hypothèse

que β est nul, le rapport $\frac{R^2}{1 - R^2} \times (n - 2)$ suit une loi de Fisher⁹³ de paramètres (1,n-2).

L'hypothèse de nullité de β est donc rejetée si le rapport est trop grand.

⁹³ SAPORTA [1990].

8 MODELE DE Wilkie

Nous présentons ici le modèle de Wilkie⁹⁴ comme un modèle d'inflation, mais il s'agit en fait d'un modèle plus ambitieux qui intègre également les actifs et les taux d'intérêt. Toutefois, dans le modèle de Wilkie, le taux d'inflation joue un rôle majeur, dans la mesure où la valeur de nombreux paramètres économiques en découle.

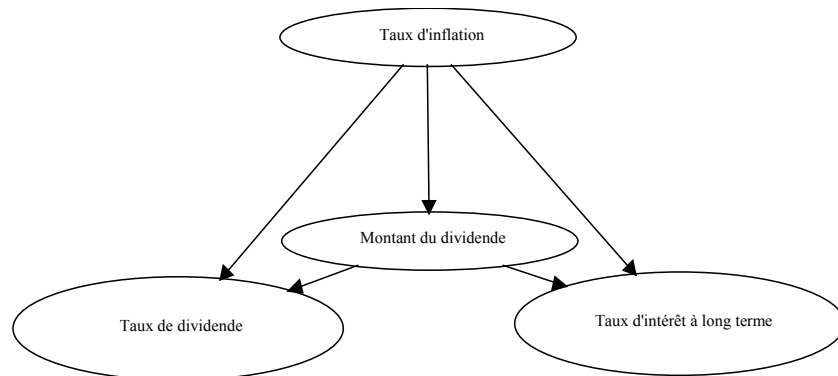


Fig. 27 : Lien entre taux d'inflation et taux d'intérêt

Il s'agit principalement un modèle empirique, établi sur des données économiques du Royaume Uni de 1919 à 1982. L'une des premières modélisations du taux d'inflation fut celle de la « marche aléatoire » (développée par Bachelier⁹⁵ en 1900). Même si ce modèle apparaît cohérent dans le cadre de l'étude du cours d'une action, ces limites se font sentir lorsqu'il s'agit de rendre compte de l'évolution du taux d'inflation. Wilkie propose donc un modèle auto-régressif, détaillé ci-après.

8.1 DESCRIPTION DU MODELE

Il s'agit d'un modèle auto régressif. L'évolution de ce processus est régie par une équation du type :

$$i(t) - i_m = a \times [i(t-1) - i_m] + \sigma \times \varepsilon_t,$$

avec $i(t)$ le taux d'augmentation de l'indice des prix, i_m le taux d'inflation à long terme, a le coefficient de retour à la moyenne, σ l'écart type du bruit et ε une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée réduite.

⁹⁴ WILKIE [1995].

⁹⁵ Voir BACHELIER [1900].

Cependant Wilkie n'utilise pas ce modèle tel quel ; il préfère travailler sur le logarithme de l'indice des prix. En effet, il observe que seules les variations relatives de l'indice des prix sont importantes et non les variations absolues. En se référant à des données empiriques de plusieurs pays de l'OCDE, il remarque que la variable $\delta(t) = \ln I(t) - \ln I(t-1)$ suit une distribution qui peut être approchée par une loi normale centrée. Finalement, le modèle proposé par Wilkie prend la forme suivante :

$$\ln \left[\frac{I(t)}{I(t-1)} \right] = i_m + a \left[\ln \left[\frac{I(t-1)}{I(t-2)} \right] - i_m \right] + \sigma \varepsilon_t,$$

où $I(t)$ correspond à l'indice des prix de l'année t . Cette même équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\ln [1 + i(t)] = i_m + a [\ln [1 + i(t)] - i_m] + \sigma \varepsilon_t.$$

8.2 EXEMPLE NUMERIQUE : LE CAS DU ROYAUME UNI

En se basant sur les données empiriques du Royaume Uni de 1919 à 1982, Wilkie a obtenu les valeurs numériques suivantes : $i_m = 5,75 \%$, $a = 0,6 \%$ et $\sigma = 0,05$.

Remarquons que, sur le long terme, l'inflation peut connaître des évolutions radicalement différentes. Il est donc important de bien choisir la période sur laquelle on estime les différents paramètres et de faire en sorte qu'elle ne comporte pas de phénomène économique exceptionnel.

9 MODÈLE DE Ahlgrim ET AL.

La modélisation proposée par Ahlgrim⁹⁶ suppose que l'indice des prix à la consommation évolue comme suit :

⁹⁶ AHLGRIM et al. [2003].

$$I_{t+\delta} = I_t * \exp \int_t^{t+\delta} (j + x_s) ds ,$$

où j est le taux instantané moyen d'évolution des prix et où le processus x modélise les fluctuations aléatoires autour de la tendance :

$$dx_s = -a x_s ds + \sigma_I dB_s^I ,$$

où B^I un mouvement brownien standard. Dans le contexte d'un système de revalorisation selon l'inflation, on est amené à calculer la quantité :

$$\mathbf{E} \left[\frac{I_{t+\delta}}{I_t} \middle| \Phi_t \right] = \mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} (j + x_s) ds \middle| \Phi_t \right] = e^{j\delta} \mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} x_s ds \middle| \Phi_t \right] .$$

L'avantage du modèle proposé est que ces grandeurs se calculent simplement ; en effet, puisque x est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la variable aléatoire x_s est une gaussienne

dont on peut calculer moyenne et variance : $\mathbf{E}[x_s] = x_0 e^{-as}$ et $\mathbf{V}[x_s] = \sigma_I^2 \frac{1 - e^{-2as}}{2a}$. De

plus $\int_t^{t+\delta} x_s ds$ est une variable gaussienne puisqu'il s'agit de la limite d'une somme de

variables aléatoires gaussiennes. L'expression de la transformée de Laplace d'une variable gaussienne⁹⁷ nous permet donc d'écrire :

$$\mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} x_s ds \middle| \Phi_t \right] = \exp \left\{ \mathbf{E} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \middle| \Phi_t \right] + \frac{1}{2} \mathbf{V} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \middle| \Phi_t \right] \right\} .$$

Comme⁹⁸

⁹⁷. Rappelons que si ε est une variable aléatoire de loi $N(m, \sigma^2)$, $\mathbf{E}[\exp(z * \varepsilon)] = \exp \left\{ zm + z^2 \frac{\sigma^2}{2} \right\}$.

⁹⁸. Cf. LAMBERTON et LAPEYRE [1997] pour le détail des calculs.

$$\mathbf{E} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] = x_t \frac{1-e^{-a\delta}}{a},$$

et :

$$\mathbf{V} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] = \frac{\sigma_I^2}{a^2} \left(\delta - \frac{1-e^{-a\delta}}{a} - \frac{(1-e^{-a\delta})^2}{2a} \right),$$

il vient :

$$\mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ x_t \frac{1-e^{-a\delta}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2} \left(\delta - \frac{1-e^{-a\delta}}{a} - \frac{(1-e^{-a\delta})^2}{2a} \right) \right\},$$

et enfin :

$$\mathbf{E} \left[\frac{I_{t+\delta}}{I_t} \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ j\delta + x_t \frac{1-e^{-a\delta}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2} \left(\delta - \frac{1-e^{-a\delta}}{a} - \frac{(1-e^{-a\delta})^2}{2a} \right) \right\}.$$

Ce modèle sera utilisé dans une problématique d'allocation d'actif à la section 19.1. Il présente notamment l'avantage d'une approche cohérente en terme de modélisation avec les modèles CIR (pour les taux) et de Merton (pour les actions, *cf.* section E) et permet ainsi une présentation homogène des modèles.

E. PRISE EN COMPTE DES SAUTS BOURSIERS DANS LES PROBLÉMATIQUES D'ASSURANCE⁹⁹

Le modèle de référence pour la modélisation de l'évolution des actifs risqués est, dans les modèles d'assurance, celui de Black et Scholes¹⁰⁰, qui considère que les cours peuvent être représentés par un mouvement brownien géométrique. Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements, *etc.* Un certain nombre d'observations empiriques¹⁰¹ contredisent manifestement ces hypothèses : les prix sautent soudainement, les études empiriques montrent que la volatilité n'est pas constante et au surplus les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi log-normale.

Le graphique ci-dessous¹⁰² illustre ces constatations :



Fig. 28 : Evolution discontinue du titre Mercer au mois d'octobre 2004

Dans le contexte actuel d'utilisation du modèle de Black et Scholes en assurance, essentiellement dans le cadre de la détermination d'allocations stratégiques et de l'évaluation d'options (pour des garanties plancher sur des contrats en unités de compte par exemple), cette relative inadéquation du modèle à la réalité s'avère assez peu pénalisante. En pratique elle est largement compensée par la facilité de mise en œuvre du modèle.

Toutefois, le projet Solvabilité 2 en cours d'élaboration¹⁰³ modifie profondément les règles de fixation du niveau des fonds propres en assurance en introduisant comme critère explicite le

⁹⁹ Ce texte est adapté de PLANCHET et THEROND [2005c].

¹⁰⁰ BLACK et SCHOLES [1973].

¹⁰¹ Cf. MANDELROT [1962], [1963] et FAMA [1965].

¹⁰² Evolution fin 2004 du titre de Mercer, données issues de <http://www.yahoo.fr>.

contrôle du risque global supporté par la société. Ce risque devra notamment être quantifié au travers la probabilité de ruine.

Dans ce nouveau contexte, les inconvénients principaux de modélisations de type « brownien géométrique » et notamment l'insuffisance de l'épaisseur des queues de distribution (qui conduit à une trop faible représentation des événements rares) et la non prise en compte des chocs, à la hausse ou à la baisse, sur les cours (qui conduit à ne pas intégrer au modèle d'événements exceptionnels et brutaux) peuvent avoir des conséquences importantes sur l'appréciation du niveau de capital nécessaire pour contrôler la ruine au niveau fixé. Ce point est par exemple abordé dans Ballota¹⁰⁴ pour le cas des options cachées d'un contrat d'épargne, et dans Planchet et Thérond¹⁰⁵ dans le cadre d'un modèle mono périodique simplifié en assurance non-vie pour la détermination d'un capital cible et l'allocation d'actifs.

Comme indiqué au début de ce travail, un grand nombre de solutions alternatives au modèle de Black et Scholes ont été proposées dans la littérature : on peut notamment mentionner le modèle i.i.d. α -stable¹⁰⁶, les modèles à volatilité stochastique, comme par exemple celui de Hull et White¹⁰⁷, des processus mixtes brownien Poisson¹⁰⁸ ou encore des martingales discontinues¹⁰⁹. Les méthodes statistiques associées à ce type de processus sont souvent difficiles à mettre en œuvre¹¹⁰.

Compte tenu de la place privilégiée du mouvement brownien géométrique, nous nous intéressons ici aux modèles généralisant cette approche et incluant le mouvement brownien géométrique comme cas particulier. Le modèle proposé par Merton¹¹¹ est de ce point de vue assez naturel ; c'est donc le modèle que nous retiendrons ici.

Notre objectif est de proposer une méthodologie statistique simple à mettre en œuvre permettant de décider si, dans le contexte rappelé ci-dessus, le modèle original de Black et Scholes peut être utilisé en l'état ou si un modèle intégrant des sauts est mieux adapté aux

¹⁰³ Cf. COMMISSION EUROPEENNE [2003], [2004] et AAI [2004]. Voir également l'annexe n°1.

¹⁰⁴ BALLOTTA [2004].

¹⁰⁵ PLANCHET et THEROND [2005].

¹⁰⁶ Cf. FAMA et ROLL [1971].

¹⁰⁷ HULL et WHITE [1987].

¹⁰⁸ Cf. BELLAMY [1999].

¹⁰⁹ Cf. DRITSCHEL et PROTTER [1999].

¹¹⁰ Voir par exemple D'ESTAMPES [2003] sur ce sujet.

¹¹¹ MERTON [1976].

données disponibles. Nous reprenons le modèle de Merton et nous nous inspirons pour cela de la démarche proposée par Ramezani et Zeng¹¹² pour l'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance.

Après avoir décrit le modèle et la procédure d'estimation proposée, nous illustrons cette approche avec pour exemple le titre Alcatel.

Les conséquences de la présence de sauts dans le modèle d'actif sont prises en considération dans l'article d'origine de Merton et développées par Ballotta¹¹³ dans le contexte des évaluations en norme IFRS de passifs d'assurance.

10 MODELISATION DE L'ACTIF RISQUE

10.1 PRESENTATION DU MODELE

Nous reprenons le modèle proposé par Merton. Nous considérons ainsi que le prix de l'actif S_t présente des sauts log-normaux $V_1, \dots, V_j$ à des instants aléatoires $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$ qui sont les instants de saut d'un processus de Poisson. Entre deux instants de saut on suppose que la dynamique du cours respecte le modèle de Black et Scholes.

Cela conduit après quelques manipulations¹¹⁴ à l'expression suivante du cours :

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\},$$

où

- $B = (B_t)_{(t \geq 0)}$ est un mouvement brownien.
- $N = (N_t)_{(t \geq 0)}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ .
- $U = (U_k)_{(k \geq 1)}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi une loi normale $\mathbf{N}(0, \sigma_u)$.
- Les processus B , N et U sont mutuellement indépendants.

On supposera sans perte de généralité dans la suite que $S(0) = 1$.

¹¹² RAMEZANI et ZENG [1998].

¹¹³ BALLOTTA [2004].

¹¹⁴ On pourra se reporter pour la démonstration à LAMBERTON et LAPEYRE [1997].

Les sauts sont ici, dans un souci de simplicité, supposés symétriques et en moyenne nuls ; des modèles plus élaborés à sauts dissymétriques peuvent également être proposés, comme dans Ramezani et Zeng¹¹⁵. Nous ne les considérerons pas ici, l'objectif étant d'obtenir au modèle d'un niveau de simplicité proche de celui de Black et Scholes.

Le modèle ainsi obtenu permet d'ors et déjà de représenter les différentes situations auxquelles nous nous intéressons : $\sigma_u = 0$ ramène au modèle classique de Black et Scholes, $\sigma = 0$ nous donne une évolution purement discontinue, et dans les autres cas le modèle intègre les deux composantes.

Notons Ψ_t la tribu engendrée par les B_s, N_s pour $s \leq t$ et $U_k \mathbf{1}_{\{k \leq N_t\}}$ pour $j \geq 1$; B est un mouvement brownien standard par rapport à la filtration Ψ , N est un processus adapté à cette même filtration. De plus $\forall t > s$, $N_t - N_s$ est indépendant de la tribu Ψ_s .

La loi de S_t est connue explicitement dans ce modèle :

Proposition 1 : Pour tout $x > 0$, $\Pr[S(t) \leq x] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi \left[\frac{\ln x - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sqrt{n\sigma_u^2 + t\sigma^2}} \right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \Pr[S(t) \leq x] &= \Pr \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x, N_t = n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr \left[\sum_{k=1}^n U_k + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x \right] \Pr[N_t = n], \end{aligned}$$

puisque les processus N , B et U sont mutuellement indépendants. Par ailleurs, les processus

$\sum_{k=1}^n U_k$ et σB_t étant indépendants et gaussiens, leur somme est également gaussienne :

$\sum_{k=1}^n U_k + \sigma B_t \sim \mathcal{N} \left(0; \sqrt{n\sigma_u^2 + t\sigma^2} \right)$. Enfin comme N est un processus de Poisson d'intensité λ ,

pour tout $t > 0$, la variable aléatoire N_t est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre

λt et donc $\Pr[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. $\square$

¹¹⁵ RAMEZANI et ZENG [1998].

Lorsque $\lambda = 0$ (cas de l'absence de sauts) on retrouve la loi log-normale usuelle du brownien géométrique. Dans le cas général, l'expression de la proposition ci-dessus permet d'approcher numériquement la distribution de l'actif en ne conservant qu'un nombre fini de termes dans la somme. En pratique, les 7 premiers termes fournissent une approximation satisfaisante. Les applications numériques présentées dans le présent travail sont effectuées en conservant les 15 premiers termes.

De plus, dans cette modélisation les moments d'ordre quelconque se calculent simplement. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2 : Pour tout $p \in \mathbf{R}$ on a :

$$\mathbf{E} \left[S(t)^p \right] = \mathbf{exp} \left\{ p \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \frac{p^2 \sigma^2}{2} t + \lambda t \left[\mathbf{exp} \left(p^2 \sigma_u^2 / 2 \right) - 1 \right] \right\},$$

Démonstration : Soit $p \in \mathbf{R}$, on a : $\mathbf{E} \left[S(t)^p \right] = \mathbf{E} \left[\mathbf{exp} \left\{ p \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + p \sigma B_t + p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right]$. Les

termes aléatoires de l'exponentielle sont indépendants ce qui ramène le calcul au produit de

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{exp} \{ p \sigma B_t \} \right] \text{ et } \mathbf{E} \left[\mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right].$$

Pour tout $t > 0$, B_t est une v. a. de loi $\mathbf{N}(0; \sqrt{t})$ donc

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{exp} \{ p \sigma B_t \} \right] = \mathbf{exp} \left\{ \frac{p^2 \sigma^2}{2} t \right\},$$

Par ailleurs on a vu (cf. la démonstration de la proposition 1) que

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right] = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbf{E} \left[\mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^n U_k \right\} \right],$$

Comme les sauts sont gaussiens et centrés,

$$\mathbf{E} \left[\mathbf{exp} \left\{ p \sum_{k=1}^n U_k \right\} \right] = \mathbf{exp} \left\{ \frac{n p^2 \sigma_u^2}{2} \right\},$$

et donc

$$\mathbf{E} \left[\exp \left\{ p \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\} \right] = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp \left\{ \frac{n p^2 \sigma_u^2}{2} \right\} = \exp \left\{ \lambda t \left[\exp \left(p^2 \sigma_u^2 / 2 \right) - 1 \right] \right\}.$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat. $\square$

Remarque : La paramétrisation retenue pour le modèle découle directement de l'ajout d'une composante à sauts au modèle décrit par l'équation différentielle stochastique

$\frac{dS_t}{S_t} = \mu t + \sigma dB_t$; elle conduit à un rendement espéré égal à $m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, et non à μ . Lorsque

l'on sera amené à comparer le modèle standard de Black et Scholes avec le modèle de Merton, on imposera comme contrainte l'égalité de l'espérance et de la variance du rendement dans les deux modèles, ce qui conduit donc à ne pas utiliser le même paramètre μ .

En notant m_2 la variance totale du rendement et α^2 la part de cette variance associée à la composante à sauts ($\alpha = \sigma_U \sqrt{\lambda} / \sqrt{m_2}$), la paramétrisation « naturelle » est donc de ce point de vue $(m, m_2, \alpha, \lambda)$ et non $(\mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2)$. Nous utiliserons notre paramétrisation initiale dans la présentation des résultats théoriques, et la paramétrisation « naturelle » pour justifier le niveau des hypothèses effectuées dans les applications numériques proposées.

10.2 ESTIMATION DES PARAMETRES

La démarche d'estimation des paramètres suit celle proposée dans Ramezani et Zeng¹¹⁶ dans le cadre d'un modèle proche. Dans un premier temps des estimateurs sont obtenus par la méthode des moments. Ces estimateurs sont utilisés pour initialiser un algorithme de maximisation de la vraisemblance, et obtenir ainsi des estimateurs plus précis bénéficiant des propriétés classiques des estimateurs du maximum de vraisemblance : convergence, efficacité asymptotique, normalité asymptotique.

Le rendement de l'actif sur $[t, t+h]$ s'écrit :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{\exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t+h) + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=1}^{N_{t+h}} U_i \right)}{\exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right)}$$

¹¹⁶ RAMEZANI et ZENG [1998].

ce qui conduit après simplification à l'expression :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma (B_{t+h} - B_t) + \sum_{N_t}^{N_{t+h}} U_i \right\}$$

On en déduit que, si l'on dispose de n observations des cours équiréparties aux instants $t_i = \frac{iT}{n}$ sur un intervalle $[0, T]$, les variables $x_i = x(t_i) = \ln \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$ sont telles que :

$$x_i = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{T}{n} + \sigma \left[B\left(\frac{iT}{n}\right) - B\left(\frac{(i-1)T}{n}\right) \right] + \sum_{k=1}^{N_{iT/n}} U_k - \sum_{k=1}^{N_{(i-1)T/n}} U_k$$

Cela prouve que les variables aléatoires $x_1, \dots, x_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres termes les rendements sur des intervalles disjoints sont indépendants, et la distribution du rendement dépend de la longueur de l'intervalle mais pas de sa position. Au prix d'un changement d'échelle, on peut donc toujours supposer que le pas de la subdivision est égal à un $\left(\frac{T}{n} = 1\right)$; on est ainsi ramené à déterminer la loi de $r = \ln \frac{S(t+1)}{S(t)}$, qui est indépendante de t . De plus, comme mélange de loi absolument continues, la loi du rendement est absolument continue. On a dans ces conditions le résultat suivant :

Proposition 3 : La densité de r s'écrit :

$$f_r(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \times \sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \times \exp \left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \right) \right] \right]$$

Démonstration : On utilise un argument de conditionnement par rapport au nombre de sauts du processus de Poisson, qui nous conduit à écrire, avec des notations évidentes

$$f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{r|n}(x) \times \mathbf{Pr}[N_s = n] ; \text{ conditionnellement au fait que le processus a sauté } n \text{ fois sur}$$

$[0,1]$, le rendement suit une loi normale comme somme de variables gaussiennes :

$$r_n = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \sigma B(1) + \sum_{i=1}^n U_i \text{ d'après les propriétés de stationnarité des accroissements du}$$

mouvement brownien et du processus de Poisson ; on en déduit que :

$$f_{r|n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times (\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2 \times (\sigma^2 + n\sigma_u^2)} \times \left(x - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)^2\right)$$

ce qui permet d'obtenir le résultat. $\square$

Incidentement, cela montre que la loi du rendement est un mélange de lois normales, la loi de mélange étant la loi de Poisson. On peut avec les résultats précédents obtenir une expression simple de la transformée de Laplace de r :

$$\mathbf{E}\left[e^{-\beta r}\right] = \mathbf{exp}\left\{-\beta\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\beta^2 \sigma^2}{2} + \lambda\left[\mathbf{exp}\left(\beta^2 \sigma_u^2/2\right) - 1\right]\right\}$$

Nous n'utiliserons toutefois pas cette expression dans la suite.

10.2.1 Méthode des moments

Le modèle est décrit par quatre paramètres ; l'égalisation de quatre moments empiriques avec les moments théoriques correspondants conduit à un système de quatre équations à quatre inconnues qui va nous permettre d'en déterminer des estimateurs. Compte tenu de la forme de la loi du rendement, on s'intéresse aux moments centrés. Si $m = \mathbf{E}[r] = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, on va donc calculer $m_k = \mathbf{E}\left[(r - m)^k\right]$; un argument de symétrie conduit à conclure que $m_{2k+1} = 0$. Il suffit donc de déterminer les moments d'ordre pair. On a alors le résultat suivant :

Proposition 4 : *Le moment centré d'ordre $2k$ de r s'écrit :*

$$m_{2k} = E(r - m)^{2k} = e^{-\lambda} \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\sigma_u^2)^k$$

Démonstration : Notons $\sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_u^2$ la variance de la loi conditionnelle à $N = n$. D'après ce qui précède, on a :

$$m_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} x^{2k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}(x - m)^2\right\} dx.$$

Le changement de variable $u = \frac{x-m}{\sigma_n}$ conduit à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} (x-m)^{2k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} (x-m)^2\right\} dx = \sigma_n^{2k} c_{2k},$$

avec $c_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{2k} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$. Le calcul du coefficient c_{2k} s'effectue simplement par

récurrence via une intégration par parties et on trouve finalement $c_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, ce qui termine la démonstration. $\square$

On peut en particulier remarquer avec $k=1$ que la variance de r s'écrit $V[r] = m_2 = \sigma^2 + \lambda\sigma_u^2$, qui est une expression naturelle. Cette expression peut également être obtenue directement par application de l'équation de décomposition de la variance.

La résolution du système non linéaire à quatre équations et quatre inconnues pour obtenir les valeurs des paramètres par cette méthode peut être effectuée par un algorithme de type Newton-Raphson¹¹⁷ et ne pose pas de difficulté particulière.

10.2.2 Maximum de vraisemblance

La méthode des moments a permis d'obtenir un premier jeu d'estimateurs pour les paramètres du modèle ; nous utilisons ce jeu comme valeur initiale pour déterminer le maximum local de la vraisemblance dans son voisinage. Compte tenu de la proposition 3, on obtient l'expression suivante de la vraisemblance :

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_u^2)}} \times \exp\left\{-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_u^2)}\right\} \right] \right]$$

¹¹⁷ Les propriétés de cet algorithme sont rappelées dans PLANCHET et THEROND [2006].

Le but est ici de maximiser la vraisemblance (ou de manière équivalente de minimiser $-\ln L(x, \mu, \sigma^2, \lambda, \sigma_u^2)$). Concernant les contraintes, il vient de manière évidente $\sigma^2 \geq 0$ et $\sigma_u^2 \geq 0$. Ensuite, nous allons étudier les valeurs des estimateurs issues de la méthode des moments pour encadrer les autres paramètres.

Nous disposons des estimateurs obtenus par la méthode des moments. Nous considérons que ces estimateurs approchent à plus ou moins 10 % les estimateurs du maximum de vraisemblance. Par conséquent, nous retenons d'imposer quatre contraintes d'inégalité pour l'optimisation de la log-vraisemblance. On est ainsi amené à un classique problème de maximisation sous contraintes, dont la résolution numérique n'appelle pas de remarque particulière.

10.3 TESTS DE LA VALIDITE DU MODELE

Nous retenons trois tests de base pour nous aider à retenir le modèle le plus pertinent : le classique test du Chi-2, le test « up and down » et le test du rapport des maxima de vraisemblance.

10.3.1 Test d'adéquation du Chi-2¹¹⁸

Notre objectif est ici de vérifier que, après estimation des paramètres, l'adéquation des données à la loi théorique estimée. On divise donc la plage des rendements en k classes. Sous l'hypothèse nulle, si N_i est le nombre d'observations (aléatoires) appartenant à la classe (a_i, a_{i+1}) , on a $E[N_i] = np_i$ où $p_i = \mathbf{Pr}[X \in (a_i, a_{i+1})]$ pour $i = 1, \dots, k$. Les variables N_i suivent des lois binomiales de paramètres n et p_i , et donc, sous l'hypothèse nulle, on a

$$\frac{(N_i - np_i)}{\sqrt{np_i}} \rightarrow N(0, \sqrt{1 - p_i}).$$

¹¹⁸ Voir par exemple SAPORTA [1990].

La statistique $D^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i)^2}{np_i} - n$ est donc la somme de carrés de variables aléatoires asymptotiquement normales liées par la relation $\sum_{i=1}^n N_i = n$. De plus les $p = 4$ paramètres indépendants sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance et il est classique que la loi limite de D^2 est encadrée par les lois χ_{r-p-1}^2 et χ_{r-1}^2 du Chi-2 à $(r - p - 1)$ et $(r - 1)$ degrés de liberté.

Cette approximation est justifiée si n est assez grand et les p_i pas trop petits avec comme règle empirique que $np_i > 1$ et au moins 80 % des $np_i \geq 5$ dans le souci du respect du critère de Cochran. Si tel n'est pas le cas à cause d'une valeur de p_i trop petite, on regroupe les classes contiguës. La p-valeur du test est encadrée par $\Pr[\chi_{r-p-1}^2 > \chi_{obs}^2] \leq \alpha \leq \Pr[\chi_{r-1}^2 > \chi_{obs}^2]$ avec $\chi_{obs}^2 = D^2$.

10.3.2 Test « up and down »

Ce test est utilisé pour vérifier l'indépendance des rendements. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ une suite finie de variables aléatoires réelles telles que : $\Pr(Y_i = Y_j) = 0$ pour $i \neq j$. On souhaite tester pour un seuil $\alpha > 0$, l'hypothèse nulle que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées contre son alternative. On introduit, pour $i = 1, \dots, n-1$, les indicatrices $Z_i = 1_{\{Y_{i+1} > Y_i\}}$.

On appelle alors séquence de la suite $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ (composée de 0 et de 1) une succession du même symbole (0 ou 1) suivie et précédée de l'autre symbole ou du vide. Soit R la variable aléatoire réelle nombre total de séquences de 0 et de 1 relevées dans la réalisation $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$. On montre¹¹⁹ que, sous l'hypothèse H_0 :

- (i) La loi de R est indépendante de la loi commune des Y_i ,

¹¹⁹ Cf. CAPÉRAA et VAN CUTSEM [1988].

- (ii) $E(R) = \frac{2n-1}{3}$ et $V(R) = \frac{16n-29}{90}$,
- (iii) $\frac{R - E(R)}{\sigma(R)} \xrightarrow{Loi} N(0,1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Cette approximation normale est utilisable dès que $n \geq 25$.

Le test « up and down » rejette naturellement l'hypothèse H_0 si on observe un nombre trop faible ou trop élevé de séquences. Sa région critique, de seuil asymptotique α , est donc :

$$W_\alpha = \left\{ (y) : \frac{|R - E(R)|}{\sigma(R)} > q_{1-\alpha/2} \right\}$$

où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile de la loi normale. La *p-valeur* de ce test a pour expression :

$$\alpha = 2 \Pr \left[N(0,1) > \frac{|R - E(R)|}{\sigma(R)} \right].$$

10.3.3 Test du rapport de vraisemblances

Il s'agit ici de s'assurer que l'échantillon suit un modèle de Merton plutôt que le sous-modèle constitué par le modèle de Black et Scholes.

Nous voulons donc tester $H_0 : (\lambda, \Omega) = 0$ contre $H_1 : (\lambda, \Omega) \neq 0$ soit H_0 le modèle à sauts n'est pas adapté contre H_1 les sauts sont pris en compte par le modèle. Pour cela, on considère la statistique :

$$L = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2}{2\sigma^2} \right)}{\prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k! \times \sqrt{\left(\sigma^2 + k\sigma_u^2 \right)}} \times \exp \left(-\frac{\left(x_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2}{2\left(\sigma^2 + k\sigma_u^2 \right)} \right) \right]}$$

où les x_i sont les observations de l'échantillon de rendements. La distribution de $-2 \ln L$ est asymptotiquement celle d'un Chi-2 à p degrés de liberté dans l'hypothèse H_0 , où p est le nombre de paramètres.

11 APPLICATIONS

Nous décrivons ci-après trois applications simples du modèle proposé. L'objectif est d'illustrer à la fois la simplicité de mise en œuvre du modèle, à peine plus complexe que celui de Black et Scholes, et l'intérêt de son utilisation dans les problèmes d'assurance que ce soit pour le provisionnement de certaines garanties dans les contrats d'épargne (exemple 11.2 ci-dessous) ou pour la détermination du capital cible dans le référentiel Solvabilité 2 (exemple 11.3 ci-dessous).

Nous commençons par l'illustration de la méthode d'estimation des paramètres du modèle.

11.1 AJUSTEMENT DU MODELE A SAUTS SUR DES COURS BOURSIERS

Pour les applications numériques, nous utilisons des observations quotidiennes des cours du titre Alcatel, obtenues sur <http://www.yahoo.fr>. A partir de ces cotations, nous recalculons le rendement quotidien de la manière suivante :

$$x_i = x(t_i) = \ln \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$$

Nous obtenons ainsi un échantillon i.i.d. à partir duquel nous calculons les estimateurs empiriques des quatre moments nécessaires à l'estimation initiale des paramètres : espérance empirique et les trois premiers moments centrés.

Nous disposons d'observations quotidiennes des cours pour la période du 25 juin 2002 au 21 janvier 2005, soit 659 cours, dont l'allure générale est la suivante :



Fig. 29 : Cours à la clôture du titre Alcatel

Le rendement quotidien évolue de la manière suivante :

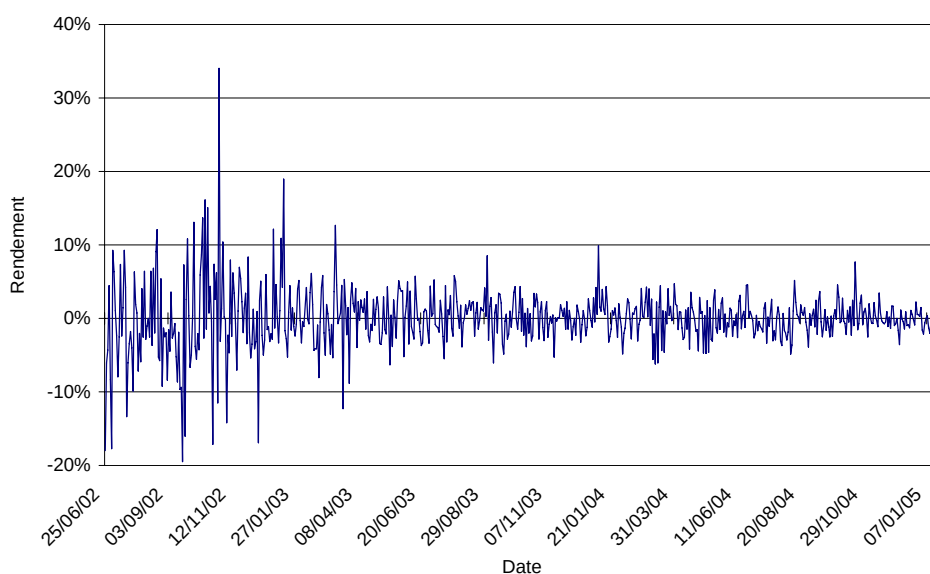


Fig. 30 : Evolution du rendement quotidien

Le cours moyen du titre précédent est de 9,07 €, pour un écart-type de 2,97. Le coefficient de variation vaut 32,70. Le rendement (quotidien) moyen du titre est de 0,000194695, pour un écart-type de 0,042257214 pour la période étudiée. Le coefficient d'asymétrie du rendement du titre est de 0,527 (à comparer à 0 pour celui d'une loi normale) et le coefficient d'aplatissement de la variable rendement vaut 9,76.

Ces premières statistiques sur le rendement nous permettent de penser que l'échantillon ne suit pas une loi normale. Le caractère non gaussien des rendements apparaît clairement sur le graphique ci-dessous, sur lequel on a représenté la distribution empirique et la distribution gaussienne ajustée par le maximum de vraisemblance :

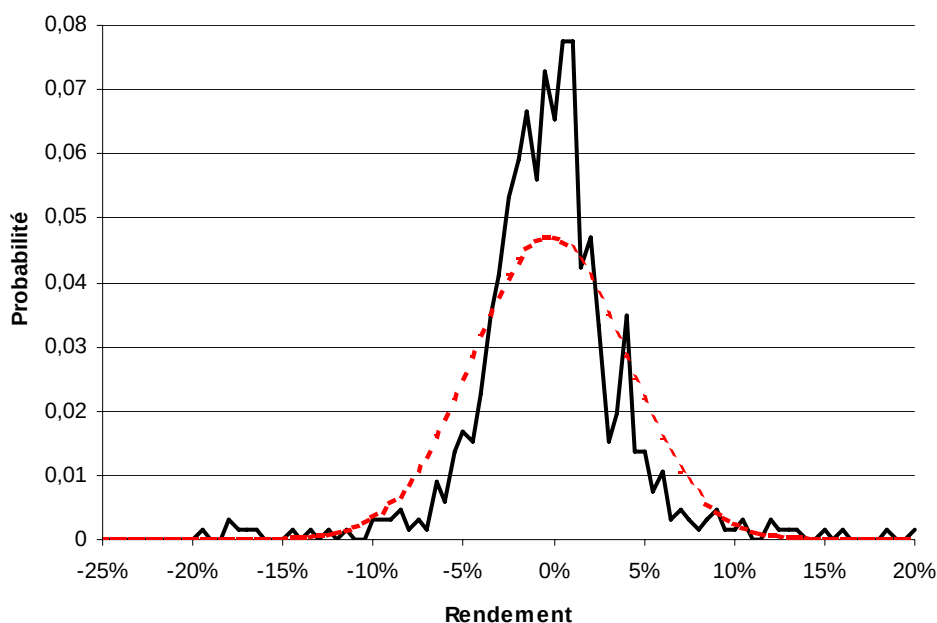


Fig. 31 : Distribution du rendement

Les moments centrés empiriques valent sur cet exemple :

$$\begin{aligned}
 m &= 0,000194695 & m_2 &= 0,001784135 \\
 m_4 &= 4,05434 * 10^{-5} & m_6 &= 2,83631 * 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Les estimateurs de la méthode des moments et ceux du maximum de vraisemblance sont présentés dans le tableau suivant¹²⁰ :

	Méthode des moments	Maximum de vraisemblance
μ	0,00067364	0,00060628
σ^2	0,03095012	0,02785511
λ	0,99328746	0,89395872
σ_u^2	0,02884728	0,03173200

Tab. 11 : Estimateurs des moments et EMV

(En considérant qu'une année comporte 250 jours ouvrés, le rendement annuel moyen du titre est d'environ 5 % et la variance globale est égale à 45 %, soit une volatilité de 67 %).

On constate qu'environ 50 % de la variance du rendement est expliquée par la composante à sauts, qui n'est donc pas négligeable. Au surplus, le passage des estimateurs par la méthode des moments aux estimateurs du maximum de vraisemblance augmente ici légèrement le poids de la composante à sauts. En comparant la distribution avec les sauts et la distribution log-normale, on trouve :

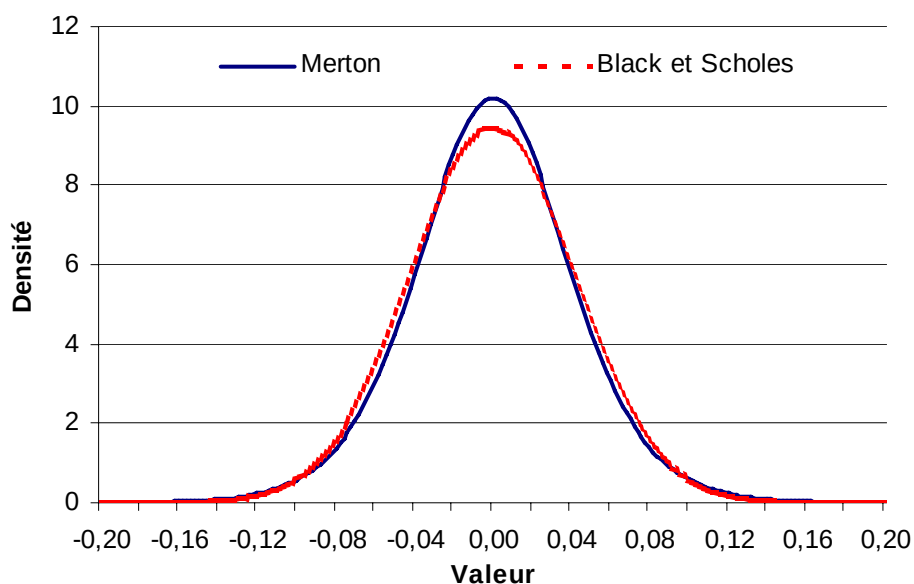


Fig. 32 : Densité des deux modèles de rendement

¹²⁰ L'unité utilisée est le jour.

L'analyse statistique se conclut par de faibles p-valeurs pour les tests d'adéquation de l'échantillon au modèle proposé. Par conséquent, et comme on pouvait s'y attendre, l'adéquation du modèle aux données est imparfaite.

Toutefois, notre but étant d'améliorer le modèle de Black et Scholes, il nous paraît intéressant de comparer les statistiques du Chi-2 pour le modèle de Merton et pour le modèle de Black et Scholes. Nous constatons que la statistique est dans le cas de Black et Scholes nettement supérieure à celle dans le cas de Merton. Cela corrobore le fait que la part de variance expliquée par la composante à sauts n'est pas négligeable.

11.2 PRIX D'UNE OPTION D'ACHAT EUROPEENNE

Afin d'illustrer sur un cas simplifié l'impact du choix du modèle d'actif sur les résultats obtenus, nous nous intéressons ci-après à la valorisation d'une option d'achat européenne avec d'une part le modèle classique de Black et Scholes et d'autre part le modèle de Merton. Nous évaluons également la probabilité d'exercice de l'option.

Dans le cas du modèle de Merton la mesure martingale n'est plus unique et le marché est donc en situation d'incomplétude. Différentes approches peuvent être retenues pour justifier le choix de la mesure utilisée pour tarifier l'option¹²¹. Nous retenons ici la solution initiale de Merton consistant à considérer que le risque associé à la composante à sauts est non systématique (propre au titre) et donc diversifiable : on ne lui associe pas de prime de risque. Cela conduit donc à évaluer simplement l'espérance des flux associés.

Afin de réaliser une comparaison entre les deux approches, nous imposons $\lambda = 1$ et contraignons la variance des rendements dans les deux modèles à être égale, ce qui conduit à imposer $\sigma_{BS}^2 = \sigma^2 + \lambda\sigma_u^2$. Avec une espérance de rendement de 8 % (en taux discret), une volatilité globale de 25 % (*i. e.* $\sigma_{BS} = 0,25$), et une décomposition de la volatilité des rendement avec sauts de $\sigma = 0,15$ et $\sigma_U = 0,2$, on obtient les lois des rendements dans les deux modèles qui ont l'allure suivante :

¹²¹ Voir BALLOTTA [2004] qui détaille ce point.

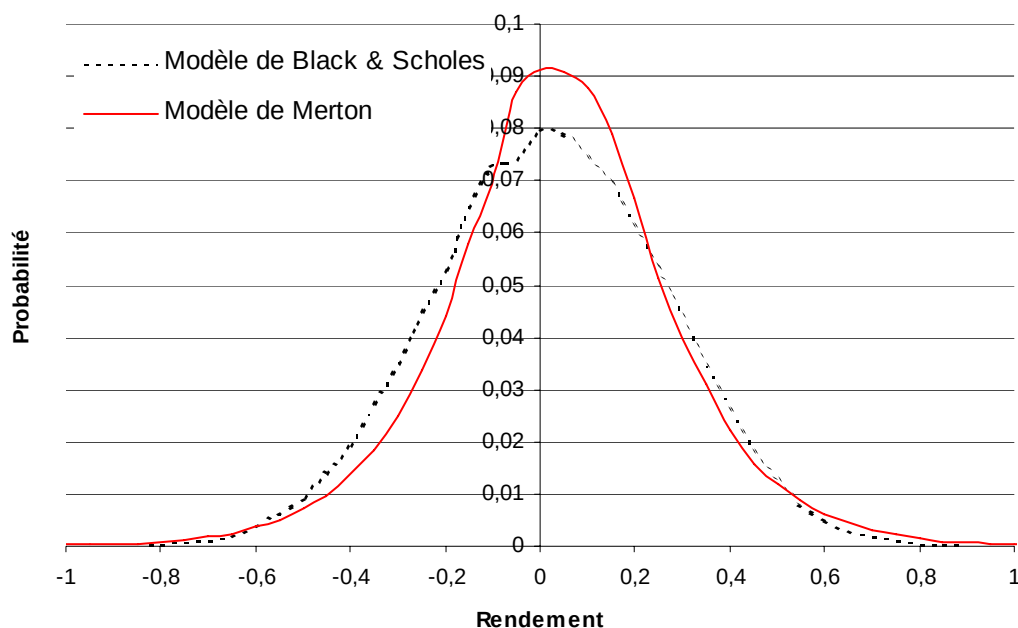


Fig. 33 : Densité du rendement

On remarque notamment la queue de distribution plus épaisse obtenue avec le modèle de Merton.

On considère un titre coté 100 à l'origine, le prix d'exercice est égal à 110 et la maturité de l'option est $T = 1$.

On constate alors que la probabilité d'exercice est quasiment identique dans les deux modèles, égale à 42 % ; le prix de l'option est par contre de 9,15 dans le modèle de Black et Scholes et de seulement 5,20 dans le modèle de Merton. Plus généralement, lorsque l'on fait varier la part de variance associée à la composante à sauts, la probabilité d'exercice reste stable, alors que le prix de l'option varie (et est d'autant plus proche de celui donné par Black et Scholes que la part de volatilité associée aux sauts est faible).

On mesure ainsi l'incidence potentielle sur le provisionnement et la tarification des garanties plancher des contrats en unités de compte du choix du modèle d'actif.

11.3 SOLVABILITE 2 : IMPACT SUR LE CAPITAL CIBLE

Le futur référentiel de solvabilité européen (Solvabilité 2) imposera aux sociétés d'assurance de disposer d'un niveau de fonds propres directement lié aux risques qu'elles supportent (cf.

page 153). Il s'agira donc pour les sociétés de modéliser tous les risques auxquels elles sont soumises et de calculer par le biais d'une mesure de risque le besoin en capital.

Dans un tel contexte, les modèles d'actifs retenus auront un impact sur l'exigence de fonds propres. En particulier, nous allons voir qu'avec des caractéristiques de rendement similaires, modéliser les cours par un brownien géométrique ou par le modèle de Merton a des conséquences importantes sur le capital cible.

Pour illustrer cela, nous reprenons le modèle de Deelstra et Janssen¹²² qui proposent de modéliser une société d'assurance de manière agrégée par deux processus : un pour l'actif $(A_t)_{t \geq 0}$ et un autre pour le passif $(L_t)_{t \geq 0}$. Dans certains cas, par exemple lorsque ces deux processus sont des mouvements browniens géométriques, cette modélisation permet d'obtenir des résultats explicites concernant les probabilités de ruine de la société. Dans ce modèle, la richesse de la société à la date t est égale à $A_t - L_t$ et la société est en ruine à cette date si cette richesse est négative.

Pour illustrer l'impact de la prise en compte des sauts, nous allons modéliser le passif par un mouvement brownien géométrique :

$$L_t = L_0 \exp \left\{ \left(\mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2} \right) t + \sigma_L B_t^L \right\},$$

et allons successivement étudier les situations où le processus d'actif intègre ou pas des sauts.

11.3.1 Absence de sauts

Dans cette situation, on se trouve dans la situation standard de Black et Scholes où l'actif évolue selon le processus A :

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A \right\}.$$

¹²² DEELSTRA et JANSSEN [1998].

Intéressons-nous dans un premier temps à la ruine à l'instant T . La société est en ruine en T si sa richesse est négative ou, de manière équivalente, si

$$a_t = \ln \frac{A_t}{L_t} < 0.$$

Dans notre situation (absence de saut), le processus d'adéquation actif-passif a_t est un mouvement brownien avec dérive ; en effet :

$$a_t = a_0 + \left(\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A - \sigma_L B_t^L.$$

En faisant l'hypothèse courante, en assurance non-vie notamment, que les mouvements browniens B^A et B^L sont indépendants, on peut écrire :

$$a_t = a_0 + \left(\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t.$$

De cette expression, vient le calcul de la probabilité d'être en ruine en t :

$$\Pr[a_t < 0] = \Pr \left[a_0 + \left(\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t < 0 \right].$$

Comme à la date t , $B_t \sim N(0, \sqrt{t})$, il vient :

$$\Pr[a_t < 0] = \Phi \left[\frac{-a_0}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \sqrt{t} \right].$$

Les bonnes propriétés du mouvement brownien font que l'on dispose d'une formule explicite de la probabilité d'être en ruine entre 0 et t . En effet, en remarquant que

$$\Pr[\exists s \in [0, t] \mid a_s < 0] = \Pr \left[\inf_{0 \leq s \leq t} a_s < 0 \right] = \Pr \left[\sup_{0 \leq s \leq t} -a_s > 0 \right],$$

il est possible d'utiliser la relation suivante¹²³ :

¹²³ Démontrée dans REVUZ et YOR [1999].

$$\Pr \left[\sup_{0 \leq s \leq t} (B_t - \beta t) > \alpha \right] = \begin{cases} 1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} + \beta \sqrt{t} \right) + e^{-2\beta\alpha} \Phi \left(\beta \sqrt{t} - \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right) & \text{pour } \alpha > 0 \\ 1 & \text{pour } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Dans notre cas, $\alpha = \frac{a_0}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}$ et $\beta = \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}$. En supposant que la richesse initiale est strictement positive soit $A_0 > L_0$ (le cas contraire correspondant à la ruine en 0), il vient donc :

$$\Pr \left[\inf_{0 \leq s \leq t} a_s < 0 \right] = 1 - \Phi \left(\frac{a_0}{\sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t}} + \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \sqrt{t} \right) + e^{-2 \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} a_0} \Phi \left(\frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \sqrt{t} - \frac{a_0}{\sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t}} \right).$$

11.3.2 Prise en compte des sauts

A présent nous allons voir l'impact de la prise en compte des sauts sur le niveau de la probabilité de ruine. L'actif est maintenant modélisé par le processus suivant¹²⁴ :

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\}.$$

où N est un processus de Poisson d'intensité λ et où les variables aléatoires $U_1, U_2, \dots$ sont mutuellement indépendantes et distribuées selon une loi $N(0, \sigma_U)$.

En supposant toujours l'indépendance entre le risque du passif modélisé par B^L et les risques d'actif modélisés par les processus N, B^A et la suite $U_1, U_2, \dots$, le processus d'adéquation actif-passif a la forme :

¹²⁴ Voir la section E pour les propriétés de ce processus.

$$a_t = a_0 + \left(\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k .$$

La probabilité de ruine à la date t est :

$$\Pr[a_t < 0] = \Pr \left[\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k < -a_0 - \left(\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t \right],$$

dont une expression est donnée par la proposition suivante :

Proposition 5 : Lorsque N, B^A, B^L et U sont mutuellement indépendants, on a :

$$\Pr[a_t < 0] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi \left(- \frac{a_0 + \mu_a t}{\sqrt{\sigma_a^2 t + n \sigma_U^2}} \right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \text{où} \quad \mu_a = \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \quad \text{et} \\ \sigma_a = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} .$$

Démonstration : Le résultat provient de l'application du théorème des probabilités totales :

$$\Pr[a_t < 0] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr \left[\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^n U_k < -a_0 - \left(\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t \right] \Pr[N_t = n], \quad \text{en}$$

remarquant que $\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^n U_k \sim N \left(0, \sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t + n \sigma_U^2} \right)$. $\square$

La probabilité d'avoir été en ruine sur l'intervalle $[0, t]$ n'a pas d'expression explicite, et doit être évaluée numériquement. En pratique, on pourra utiliser des méthodes de simulation pour estimer cette quantité.

11.3.3 Application numérique

Dans un contexte de type Solvabilité 2, une société d'assurance devra disposer d'un niveau de fonds propres (le capital cible) qui contrôle le risque global de la société à un horizon prédéterminé. Considérons ici que la mesure du risque global de la société est la probabilité de ruine qu'il s'agit de contrôler à horizon 1 an avec une probabilité de 1 %.

Nous avons supposé qu'au bout d'une année, la société doit avoir un actif assez important pour venir en contrepartie d'un passif qui vaudra, de manière certaine, 100. L'assureur

dispose en 0 de ce même montant en provisions, il s'agit donc de déterminer le montant du capital cible γ tel que :

$$\Pr \left[(100 + \gamma) \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma B_1 + \sum_{k=1}^{N_1} U_k \right\} \leq 100 \right] \leq 0,01.$$

Par ailleurs, nous avons utilisé les paramètres suivants :

$$\mu - \frac{\sigma^2}{2} = \ln 0,08 \quad \lambda = 1,5 \quad \sigma^2 + \lambda \sigma_U^2 = 0,16,$$

Le rendement discret du titre est donc de 8 %, il y a en moyenne 1,5 sauts par an et l'écart-type du rendement est égal à 40 %. Nous nous intéressons à la variation du capital cible en fonction de la part de la variance expliquée par la composante à sauts (α avec les notations introduites *supra* en 10.1).

Selon que le risque est modélisé uniquement par la composante à sauts ($\alpha = 1$) ou uniquement par le mouvement brownien ($\alpha = 0$), les distributions du cours du titre en 1 sont très différentes (pour un prix d'achat de 100 en 0) comme le montre le graphique suivant.

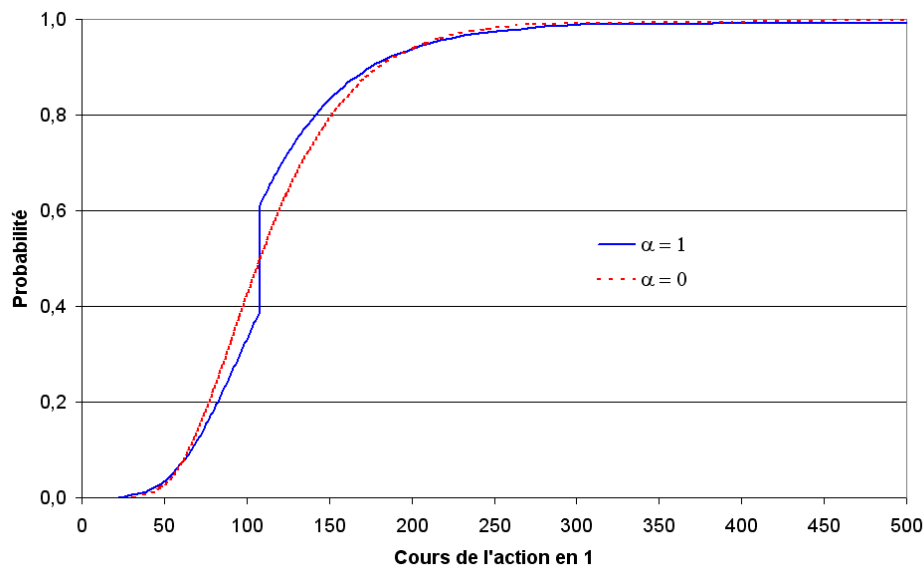


Fig. 34 : Distributions du cours de l'action en 1 pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$

Lorsque toute la variabilité est représentée par les sauts, on remarque qu'une partie de la courbe est plate. Cette partie de la fonction de répartition correspond à la probabilité qu'il n'y ait pas de saut $\Pr[N_1 = 0] = e^{-\lambda} \approx 0,22$ auquel cas le rendement est de 8 %.

Le graphique suivant nous indique le montant du capital cible en fonction de la part de la variabilité représentée par la composante brownienne. Rappelons que nous travaillons à variance du rendement constante et que la variabilité qui n'est pas représentée par le brownien l'est par la composante à sauts.

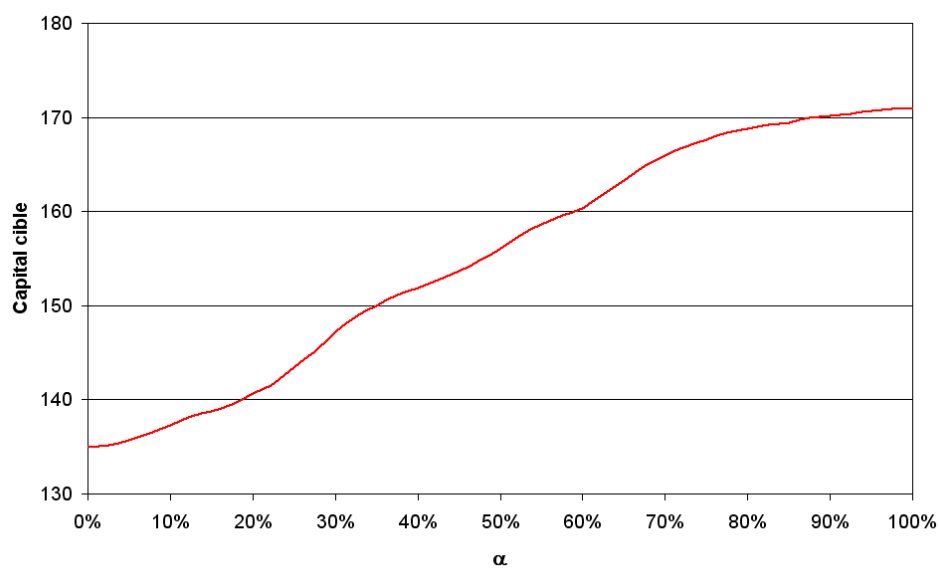


Fig. 35 : Niveau du capital cible γ en fonction de α

Il ressort de cette illustration, que l'utilisation d'un modèle de type Black et Scholes conduit à sous-estimer le niveau du capital cible dans une proportion qui peut être importante. Ainsi si la moitié de la variabilité globale est expliquée par les sauts, le capital cible issu du modèle de Black et Scholes sous-estime de 13,5 % le « vrai » besoin en capital. Ces résultats peuvent être rapprochés de résultats analogues obtenus dans une problématique d'assurance non-vie¹²⁵.

¹²⁵ Voir par exemple PLANCHET et THEROND [2005].

12 CONCLUSION

Le modèle de Black et Scholes est devenu un standard utilisé dans de nombreuses situations pratiques en assurance : calculs d'engagements (garanties planchers sur les contrats en unités de comptes), allocation d'actifs, détermination de la probabilité de ruine, *etc.*.

La principale qualité de ce modèle réside dans sa facilité de mise en œuvre (calcul des fonctionnelles associées, estimation des paramètres, *etc.*), son adéquation aux données étant en générale de qualité modeste.

Le modèle que nous présentons ici, proposé initialement par Merton, nous semble préserver la simplicité d'utilisation, tout en améliorant de manière sensible l'adéquation aux données. Il nous semble d'autant plus intéressant qu'il permet d'intégrer à la modélisation de l'actif des propriétés telles que l'asymétrie et une queue de distribution plus épaisse que celle d'une loi normale, ces propriétés n'étant pas sans conséquence sur l'appréciation du niveau du capital de solvabilité au sens de Solvabilité 2.

Ainsi, les réflexions sur le modèle standard¹²⁶ de Solvabilité 2 doivent à notre sens intégrer ce type de modèle pour garantir une appréciation suffisante de la solvabilité dans ce nouveau référentiel.

¹²⁶ Voir par exemple DJEHICHE et HÖRFELT [2004], PLANCHET et THEROND [2005] ou encore CEIOPS [2006].

PARTIE 3 : ANALYSE DES RISQUES ACTIF-PASSIF

L'analyse des risques actif-passif d'un régime de rentes viagère a fait l'objet de nombreux travaux. Dans le cadre de la détermination de l'allocation stratégique, le modèle fondateur de Markowitz¹²⁷ reste un standard, malgré ses nombreuses limites et a donné lieu à de nombreuses variantes visant à prendre en compte les contraintes liées à la structure du passif¹²⁸. La variante proposée par Leibowitz et Kogelman est par exemple exploitée dans Fargeon et Nissan¹²⁹, donc nous utiliserons certains résultats *infra*.

Le projet Solvabilité 2 vient bouleverser ce paysage ; en effet, jusqu'à présent la réflexion sur l'actif d'un régime de rentes viagère est positionnée en aval de la détermination du niveau global du capital alloué (provision + fonds propres). L'allocation retenue, qui doit bien entendu respecter un ensemble de contraintes réglementaires assez fortes¹³⁰, n'a pas d'incidence sur le niveau du capital alloué.

Le dispositif Solvabilité 2, en introduisant comme critère de détermination du capital de solvabilité (montant de capital à ajouter aux provisions mathématiques) le contrôle d'une probabilité de ruine, induit du même coup un lien fort entre l'allocation effectuée et le montant de capital objet de cette allocation : plus le niveau de risque de l'allocation choisie est élevé, plus le montant de capital de solvabilité est élevé. Ceci complique *a priori* sensiblement la réflexion actif-passif pour un régime de rentes. On notera toutefois que les grandes lignes d'un modèle standard telles que l'on peut les anticiper à la lecture du QIS 2 éludent cette difficulté en fixant le capital sans référence explicite à la probabilité de ruine¹³¹...

Nous analysons à la section G la mise en œuvre d'un critère de contrôle d'une probabilité de ruine pour un régime de rentes, et proposons un nouveau critère évitant le recours direct à

¹²⁷ MARKOWITZ [1952].

¹²⁸ Parmi lesquelles on peut citer CAMPBELL et al. [2001] et LEIBOWITZ et KOGELMAN [1991].

¹²⁹ FARGEON et NISSAN [2003].

¹³⁰ Voir pour l'essentiel les articles R332-1 à R332-18 du Code des Assurances.

¹³¹ CEIOPS [2006]

cette probabilité tout en étant naturellement adapté à la chronique des flux futurs de prestations.

A la section F, nous nous intéressons à la prise en compte du risque financier dans le cadre d'un fonds collectif de retraite. Cette section est l'occasion d'évoquer la prise en compte de rentiers en cours de constitution des droits et les problématiques de financement d'un régime de retraite. On y introduit la notion de « taux de cotisation d'équilibre », qui fournit un indicateur synthétique du coût d'un régime de retraite à prestations définies, en référence au niveau de la masse salariale.

F. PRISE EN COMPTE DU RISQUE FINANCIER DANS LA GESTION D'UN FONDS COLLECTIF DE RETRAITE¹³²

On considère ici un régime qui garantit une pension à des salariés retraités et invalides de l'entreprise 2 % par annuité validée appliqués au dernier salaire. Le bénéficiaire doit justifier d'un minimum d'activité de 15 ans, et le maximum d'annuités est de 37,5. La pension est majorée de 10 % pour 3 enfants élevés, puis de 5 % par enfant supplémentaire. La pension majorée qui sera servie ne peut excéder le salaire de fin de carrière. L'âge d'entrée en jouissance de la pension est de 60 ans.

Une pension de conjoint survivant est accordée aux conjoints de salariés décédés en activité, ainsi qu'une pension de réversion aux conjoints survivants de salariés retraités. Ces pensions s'élèvent à la moitié de celle qu'aurait perçu le salarié au jour de son décès. La majoration familiale est également accordée pour moitié au conjoint survivant, dans la mesure où il a lui-même élevé les enfants ouvrant droit à cette majoration.

Le régime ainsi décrit est un régime assez classique dans les organismes publics, et a servi de modèle à un certain nombre de régimes de retraite supplémentaire d'entreprise destiné à des cadres ou des cadres dirigeants. Un nombre important de ces régimes ont été fermés ces dernières années, du fait de leur coût très élevé pour l'entreprise.

Pour les applications numériques, on considérera un cas réel avec un effectif de bénéficiaires du régime d'environ 30 000 personnes, dont 16 000 salariés actifs et 14 000 inactifs. Les graphiques suivants montrent l'évolution dans le temps des flux espérés que le régime aura à verser au titre des prestations de rentes de conjoints, réversion et retraite :

¹³² Cette section s'appuie sur PLANCHET et MAGNIN [2000].

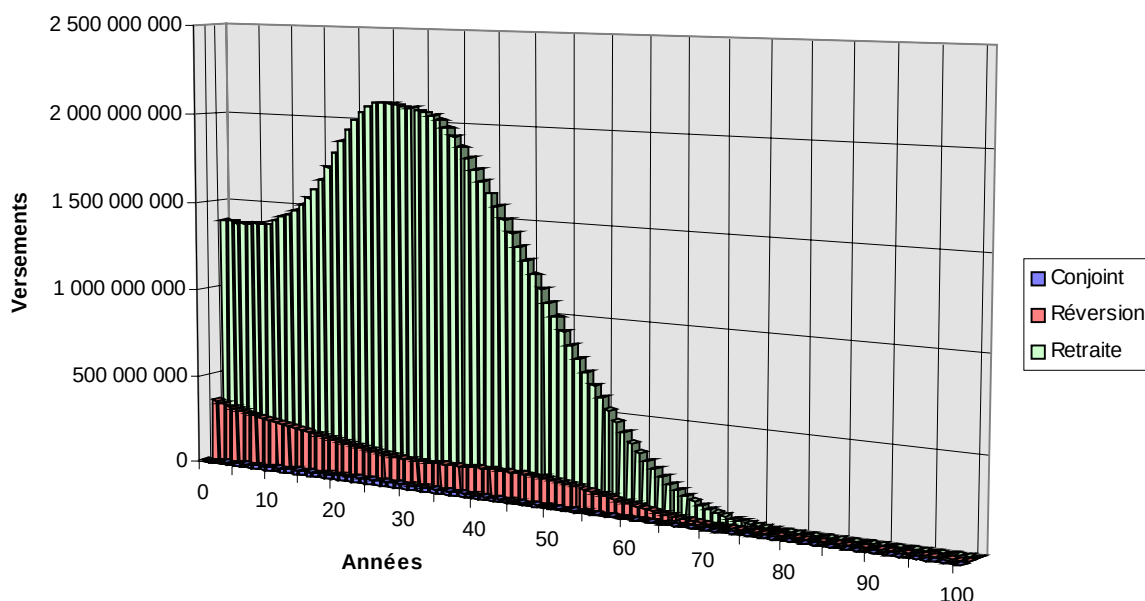


Fig. 36 : *Flux de prestations espérés du régime*

On note bien entendu la prépondérance des prestations de retraite directe. Les prestations de conjoints (associées à des décès en activité) sont très faibles¹³³. La croissance initiale des flux de prestations s'explique par les départs en retraite progressifs des actifs, que les décès des pensionnés ne compensent pas dans un premier temps. Dans une seconde phase (après environ 30 ans), les flux de prestations espérées se mettent à décroître.

On s'intéresse dans un premier temps à la détermination de l'engagement du régime (en présence d'un taux d'actualisation stochastique), puis, dans un second temps, au financement des prestations au travers de la mise en place d'un fonds collectif.

Cette problématique est classique et, dans le contexte prudentiel actuel, le choix d'un taux technique prudent (égal au maximum à 60 % du TME) associé à un choix également prudent de la table de mortalité intègre de fait une marge de risque dans l'évaluation¹³⁴. Aussi, dans la dynamique du fonds collectif :

$$F_i = (F_{i-1} - P_i + C_i)(1 + \tau_i),$$

¹³³ Et en tout état de cause du second ordre par rapport à la retraite directe et la retraite de réversion associée au décès d'un retraité.

¹³⁴ Pour autant qu'on ne prenne pas en compte de manière implicite une revalorisation dans la mesure de l'inflation, qui supprimerait alors la marge de risque associée au taux d'intérêt prudent (cf. la section B sur ce point).

avec $C_i = \alpha \times MS_i$ la cotisation de l'année i , α le taux de cotisation supposé constant, P_i le montant des prestations espérées et MS_i la masse salariale, le taux de cotisation d'équilibre :

$$\alpha_{eq} = \frac{VAP(P) - F_{-1}}{VAP(MS)}$$

inclut-il lui aussi une marge de risque. Cette marge de risque reste toutefois implicite. Ces différents éléments sont synthétisés dans la « table de trésorerie » du régime :

Année	Masse Salariale	Cotisations	Prestations	Taux	Fonds
0	2 473 439 488	1 293 971 470	31 463 228	1.50%	24 829 445 858
1	2 506 275 328	1 311 149 428	49 669 872	1.50%	26 482 289 287
2	2 534 645 760	1 325 991 324	65 581 781	1.50%	28 158 839 303
3	2 549 651 712	1 333 841 636	95 711 570	1.50%	29 837 923 900
4	2 544 468 736	1 331 130 180	131 482 110	1.50%	31 503 135 540
5	2 528 111 104	1 322 572 740	172 454 157	1.50%	33 143 052 924
6	2 504 132 864	1 310 028 606	208 914 678	1.50%	34 757 829 343
7	2 472 483 584	1 293 471 392	256 732 753	1.50%	36 331 486 490
8	2 394 520 832	1 252 685 443	330 904 364	1.50%	37 812 066 570
9	2 299 175 936	1 202 806 085	398 899 169	1.50%	39 195 213 075

Tab. 12 : Table de trésorerie du régime

Incidentement la formule de détermination de la cotisation d'équilibre indique que l'on raisonne ici en groupe fermé (pas de nouveaux entrants dans le régime).

Les approches tant IFRS que Solvabilité 2 conduisent à revoir les hypothèses pour retenir des hypothèses « réalistes ». Nous laissons ici de côté l'hypothèse de mortalité, dont l'impact a été discuté *supra*, et nous intéressons aux conséquences du choix d'un taux d'actualisation « de marché ». Dans ce nouveau contexte, le taux de cotisation d'équilibre du fonds collectif n'inclut plus de marge de risque, et il convient donc d'en déterminer une.

On suppose à présent que le taux de rendement du fonds est aléatoire et on propose donc d'introduire un "fonds de couverture pour aléas financiers", alimenté par une sur-cotisation β . Le taux de cotisation additionnel β sera déterminé en fixant la probabilité de ruine du fonds sur l'horizon de gestion du fonds. Ces éléments sont présentés de manière plus formelle dans la section suivante.

13 MODELE PROPOSE

On note P_{ij} la prestation servie l'année i à l'individu j à condition qu'il soit retraité et encore en vie et π_{ij} la probabilité de servir cette prestation. Le calcul de cette probabilité ne sera pas abordé ici, on pourra se reporter à l'article d'origine¹³⁵. On notera simplement que pendant la phase d'activité on doit intégrer au modèle, outre le décès, d'autres causes de sortie, comme par exemple le turnover, mais que cela ne change pas formellement la modélisation. Le processus de flux peut donc s'écrire comme suit :

$$\forall j \in \{1, \dots, \Lambda\}, \forall i \in \mathbb{N} F_i^j = \begin{cases} P_{ij} \text{ avec la probabilité } \pi_{ij} = \mathbf{Pr}(T_x > i \cap s_j \leq i) \\ 0 \text{ avec la probabilité } 1 - \mathbf{Pr}(T_x > i \cap s_j \leq i) \end{cases}$$

où T_x est la variable aléatoire "durée de survie d'une tête d'âge x " et s_j le nombre d'années jusqu'au départ en retraite. Nous utiliserons un modèle de taux CIR pour le taux d'actualisation, également utilisé pour déterminer le rendement du fonds collectif, soit :

$$dr(t) = a(r - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dz.$$

Pour les applications numériques on utilise la discrétisation d'Euler $r_{t+1} = r_t + a(r - r_t) + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t$ avec (ε_t) un bruit blanc gaussien.

L'engagement associé au salarié j est dans ce cadre une variable aléatoire décrite par :

$$VA^j = \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\prod_{k=1}^i (1 + r_k)} F_i^j,$$

et la provision est calculée avec $VAP^j = E\left[E(VA^j \mid r_i, i = 1, 2, \dots, \Omega)\right]$. On a :

¹³⁵ Cf. PLANCHET et MAGNIN [2000].

$$E\left(VA^j \mid r_i, i = 1, 2, \dots, \Omega\right) = \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\prod_{k=1}^i (1+r_k)} \pi_{ij} P_{ij}.$$

Le calcul de $E\left(\frac{1}{\prod_{k=1}^i (1+r_k)}\right)$ n'est pas trivial, sauf à simplifier excessivement le processus de

taux, aussi on se contentera dans les applications numériques de l'estimateur empirique

$\frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\prod_{k=1}^i (1+r_k^{\lambda})}$. La somme des engagements individuels conduit à l'engagement total du

régime.

L'équation de décomposition de la variance fournit un outil simple pour analyser dans la variance totale de l'engagement la part de variance expliquée par le risque d'assurance et celle expliquée par le risque financier. On écrit pour chaque individu :

$$Var(VA^j) = \underbrace{Var\left[E(VA^j \mid r_i, i = 1, 2, \dots, \Omega)\right]}_{\text{risque de taux}} + \underbrace{E\left[Var(VA^j \mid r_i, i = 1, 2, \dots, \Omega)\right]}_{\text{risque d'assurance}}$$

Le risque de taux est estimé par :

$$\frac{1}{n-1} \sum_{\lambda=1}^n \left[E(VA^j \mid r_i^{\lambda}, i = 1, 2, \dots, \Omega) - \overline{VAP^j} \right]^2$$

et le risque d'assurance par :

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \left[Var(VA^j \mid r_i^{\lambda}, i = 1, 2, \dots, \Omega) \right].$$

Pour le calcul du risque d'assurance, on remarque que¹³⁶ :

¹³⁶ Pour alléger l'écriture on omet l'indice de l'individu.

$$\begin{aligned}
Var(VA / r_j, j = 1, \dots, \Omega) &= \sum_{i=0}^{\Omega} \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right)^2} \pi_{t+i} (1 - \pi_{t+i}) P_i^2(x, h, t) \\
&+ 2 \sum_{i=0}^{\Omega} \sum_{j=i+1}^{\Omega} \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right) \left(\prod_{l'=1}^{t+j} (1+r_{l'})\right)} \pi_{t+i} (1 - \pi_{t+j}) P_i(x, h, t) P_j(x, h, t)
\end{aligned}$$

D'un point de vue pratique on se ramène donc à calculer les estimateurs :

$$\frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\left[\prod_k (1 + r_k^{\lambda}) \right]^2} \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\left[\prod_k (1 + r_k^{\lambda}) \right] \left[\prod_{k'} (1 + r_{k'}^{\lambda}) \right]}$$

des espérances de :

$$\frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(\prod_{l=1}^{t+i} (1+r_l)\right) \left(\prod_{l'=1}^{t+j} (1+r_{l'})\right)}.$$

En supposant les individus indépendants entre eux (conditionnellement à une courbe de taux), les résultats pour le groupe complet s'en déduisent aisément.

Enfin, une fois l'engagement évalué, le taux de cotisation additionnel est déterminé en contrôlant que le modèle :

$$F_i = (F_{i-1} - P_i + (\alpha + \beta) MS_i) (1 + r_i)$$

satisfasse $\mathbf{Pr}\{\exists i / F_i < 0\} \leq \pi_m$ avec π_m la probabilité de ruine maximum admissible.

14 APPLICATIONS NUMERIQUES

14.1 ENGAGEMENT DU REGIME

Une fois actualisés à 1,5 %, ces flux représentent un engagement d'environ 44 Md€ pour les actifs, et 26 Md€ pour les inactifs, soit 70 Md€ pour l'ensemble du régime. Dans la suite nous ignorons les inactifs, considérant que des provisions suffisantes auront été accumulées pour pouvoir faire face exactement à la promesse du régime à leur égard (en d'autres termes, les rentiers actuels sont considérés gérés dans un fonds dédié, ce qui ne change pas fondamentalement le raisonnement).

Au-delà de l'espérance, le modèle proposé permet d'obtenir aisément la distribution empirique de l'engagement :

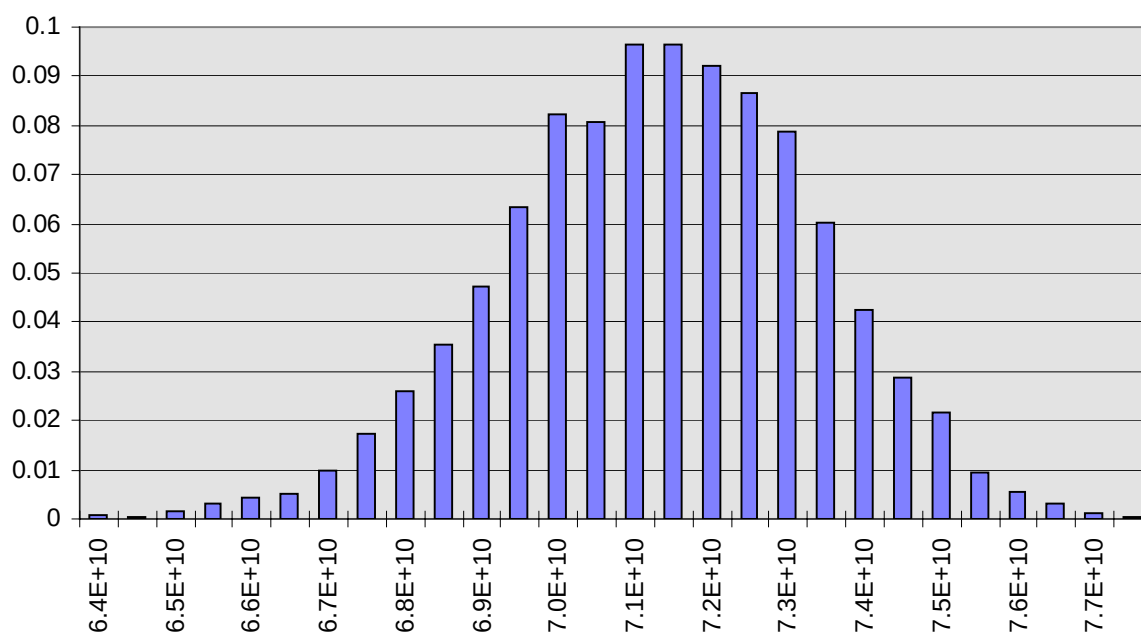


Fig. 37 : Distribution empirique de l'engagement

Pour ce qui concerne la décomposition de la variance entre risque d'assurance et risque financier, sur un groupe de cette taille, seul le risque non mutualisable subsiste et représente plus de 98 % de la variance totale.

14.2 FINANCEMENT *VIA* UN FONDS COLLECTIF

Pour un régime en cours il existe *a priori* déjà un fonds constitué, qui constituera notre fonds initial, F_{-1} . Le niveau de ce fonds est contraint par des dispositions fiscales et comptables : d'un point de vue fiscal, il ne doit pas être trop élevé, car alors la charge de dotation du fonds serait considérée comme non justifiée et donc non déductible. Du point de vue comptable, il doit être suffisamment élevé pour faire face aux engagements pris¹³⁷. Nous supposons ici que le provisionnement des engagements a été régulièrement effectué en conformité avec les règles de la norme IAS 19. Nous ferons ainsi l'hypothèse de croissance linéaire du provisionnement de l'engagement d'un individu, du début de ses cotisations à son départ en retraite¹³⁸ :

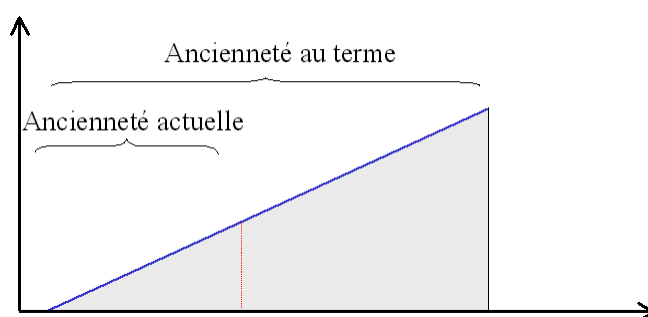


Fig. 38 : Provisionnement des droits passés au sens de l'IAS 19

Or les actifs que nous étudions ont une ancienneté moyenne de 19 ans et ils ont en moyenne 43 ans, ils devraient donc avoir une ancienneté moyenne de 36 ans au moment de leur départ en retraite. Le rapport de 19 sur 36 est environ 53 %, et c'est donc la proportion de l'engagement pour les actifs (44 Md€) que nous retiendrons pour constituer le fonds initial, soit 23 Md€.

Le taux de cotisation résultant est de 52,3 % (incidemment, la valeur de ce taux de cotisation d'équilibre fournit une illustration du coût très élevé du régime étudié, qui est en pratique très largement financé par l'employeur). Ce taux conduit par construction à un fonds équilibré :

¹³⁷ Les principes généraux du provisionnement des engagements sociaux en norme IAS 19 sont décrits dans PLANCHET et THÉRON [2004b].

¹³⁸ Nous suivons en cela la convention de l'« acquisition prorata » de la norme IAS 19.

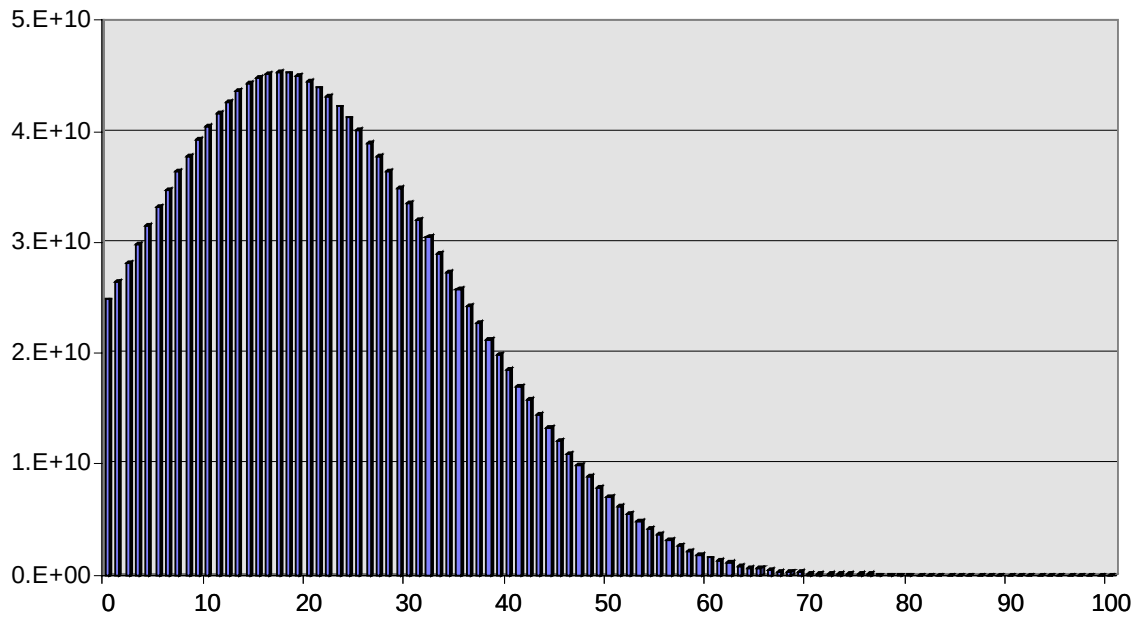


Fig. 39 : Projection du fonds collectif

Partant de cette situation de référence, toute perturbation de la structure des taux de rendement du fonds induit un déséquilibre, dans un sens favorable ou défavorable.

Les paramètres retenus pour le modèle de taux sont les suivants : $r_0 = 1,5 \%$, $a = 0,8$ et $\sigma = 4 \%$. Une trajectoire typique du modèle a l'allure suivante :

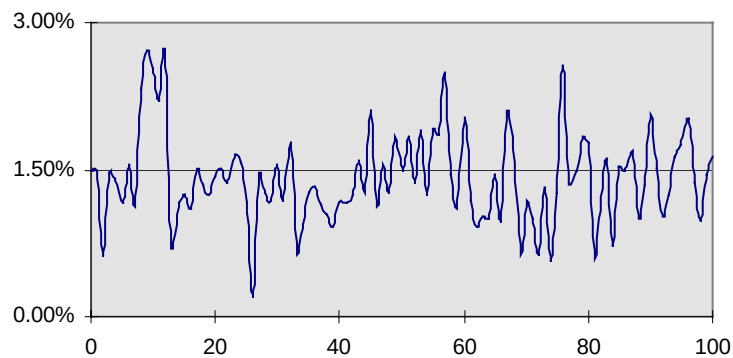


Fig. 40 : Exemple de trajectoire du taux de rendement du fonds

L'indicatrice de ruine est une variable aléatoire $X = 1_{\{\exists i/F_i < 0\}}$ de loi de Bernoulli qui prend la valeur 1 (ruine) avec la probabilité $p = E(X)$, et la valeur 0 sinon. On retient donc comme estimateur de la probabilité de ruine $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

1 000 observations ont été simulées et fournissent une estimation de cette probabilité de 54 %. Partant d'une situation d'équilibre et avec équiprobabilité de perturber les taux à la hausse ou à la baisse, une probabilité de ruine proche d'un demi n'est pas surprenante.

Le graphe ci-après illustre l'évolution du fonds d'un régime dont la ruine est évitée par l'utilisation de cette réserve :

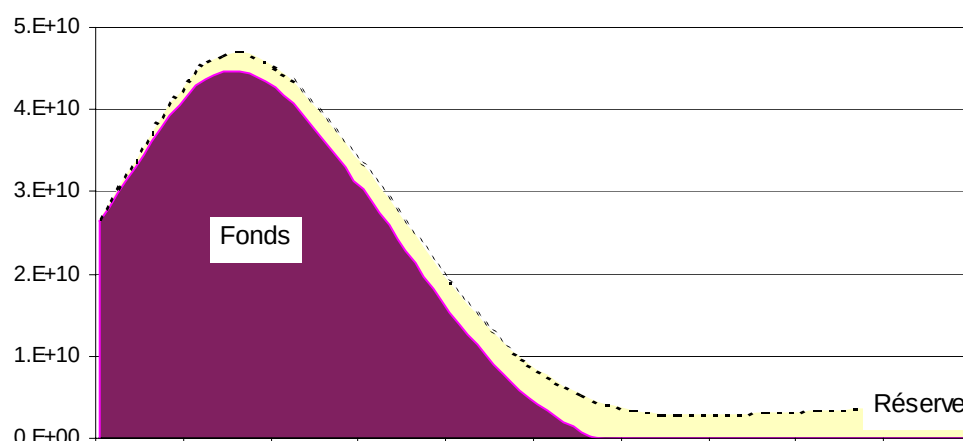


Fig. 41 : *Trajectoire du fonds collectif stabilisée par la réserve*

Nous avons donc effectué différentes séries d'observations en augmentant le taux de cotisation additionnel. Les résultats obtenus figurent dans le tableau qui suit :

Taux de cotisation additionnel	Probabilité de ruine
0%	54%
1%	38%
2%	23%
3%	13%
4%	7%
5%	3%
6%	1%
7%	0%
8%	0%

Tab. 13 : *Probabilité de ruine en fonction du taux de cotisation additionnel*

Graphiquement, l'évolution de la probabilité de ruine en fonction du taux additionnel conduit à :

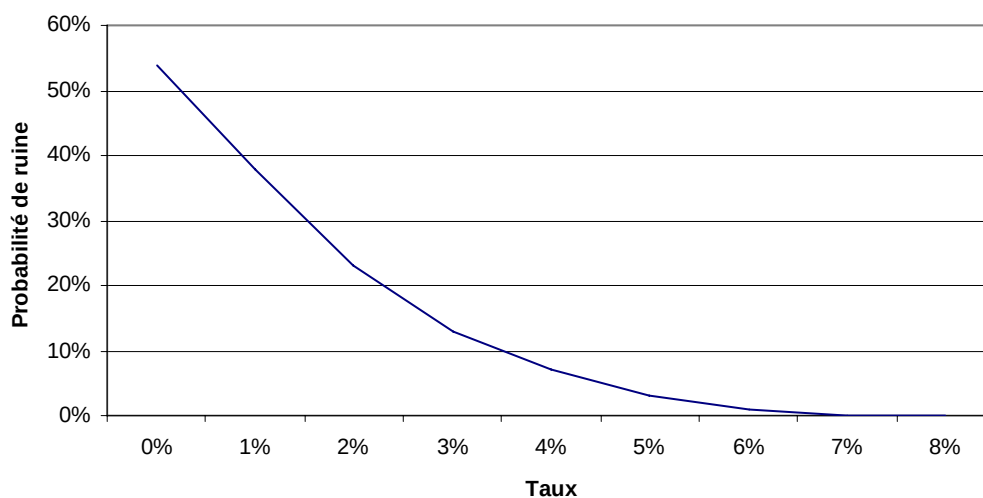


Fig. 42 : Evolution de la probabilité de ruine en fonction du taux de cotisation additionnel

La constitution de cette réserve pour aléas financiers a donc une influence importante sur l'estimation de la probabilité de ruine du régime. En effet, une cotisation additionnelle de 1 %, soit seulement environ 2 % du taux contractuel de cotisation, diminue quasiment du tiers la probabilité de ruine du régime.

Cette approche permet non seulement au gestionnaire d'apprécier le risque de ruine encouru par son régime de retraite, mais aussi l'évaluer le coût que représenterait une couverture supplémentaire correspondant mieux à ses contraintes de solvabilité.

Ainsi la « prime de risque » associée est maintenant explicite (alors qu'elle n'est qu'implicite avec un choix « prudent » du taux d'actualisation).

G. RENTES EN COURS DE SERVICE : UN NOUVEAU CRITERE D'ALLOCATION D'ACTIFS¹³⁹

La détermination de l'allocation d'actif est un thème central dans les problématiques d'assurance vie, particulièrement développé dans le contexte des contrats d'épargne et des régimes de retraite supplémentaire. Dans le cas de la retraite, ou de prestations de rentes viagères, la durée des contrats permet aux services de gestion actif/passif d'élaborer des stratégies d'allocation d'actifs à long terme *a priori* indépendantes de spéculations à court terme (qui relèvent de l'allocation tactique).

La gestion d'un régime de retraite fait intervenir de ce point de vue deux phases distinctes : une première phase de constitution des droits, avec la distinction classique entre les régimes à cotisations définies et les régimes à prestations définies, et une seconde phase de restitution, une fois la rente liquidée. Cette distinction est particulièrement marquée dans le cas des régimes d'entreprise assurés, la nature de l'engagement de l'assureur étant complètement différente dans chacune de ces deux phases ; en pratique l'assureur n'assume en effet un engagement viager que pour la phase de restitution, après le prélèvement du capital constitutif de la rente du fonds des actifs pour le transférer dans le fonds des retraités¹⁴⁰ (l'insuffisance du fonds en phase de constitution conduit simplement à un appel de cotisation complémentaire). Incidemment, il faut donc noter que les fonds des actifs et des retraités sont dans ce cas distincts et les allocations sont différentes dans ces deux phases (cette question est abordée par exemple par Battochio et al.¹⁴¹).

Nous nous intéressons dans ce travail à la question de l'allocation d'actifs en phase de restitution uniquement. En particulier, nous n'abordons pas la question de la fixation du niveau du taux de cotisation d'un régime à prestations définies, qui est une problématique connexe à celle de l'allocation d'actifs pour le fonds des actifs ; une abondante littérature est consacrée à ce sujet : on pourra par exemple consulter les travaux de Boulier et al.¹⁴², Josa-

¹³⁹ Ce texte est adapté de PLANCHET et THEROND [2004a] ; il constitue la version pour l'assurance-vie d'une analyse proposée également dans un contexte non vie dans PLANCHET et THEROND [2005a].

¹⁴⁰ On peut d'ailleurs remarquer que la distinction cotisations définies / prestations définies est dans ce contexte décisive pour l'entreprise, mais pas pour l'assureur d'un régime supplémentaire de retraite.

¹⁴¹ BATTOCHIO et al. [2004].

¹⁴² BOULIER et al. [2001b].

Fombellida et Rincón-Zapatero¹⁴³. L'analyse de l'engagement de tels régimes d'entreprise est décrite à la section F.

L'analyse de la dynamique du régime en phase de restitution conduit dans un premier temps à considérer le groupe fermé des pensionnés en cours de service. Lorsque le régime n'est plus en phase de montée en charge, l'extension au groupe ouvert peut être ensuite prise en compte au travers du pilotage du régime, qui conduit à actualiser régulièrement les études actuarielles sur la base des données révisées. Ce mécanisme inclut de fait une auto-correction et un ajustement lissé au fil du temps des paramètres techniques du régime. Cette approche est de plus en phase avec la gestion de ce type de régime par les assureurs¹⁴⁴.

Les premiers modèles d'allocation d'actifs à intégrer le risque lié aux placements ont été inspirés de techniques financières, en particulier de critères de type Markowitz¹⁴⁵. Mais ces modèles n'intègrent en général pas les contraintes propres à un régime de rente. Certains auteurs tels que Leibowitz et Kogelman¹⁴⁶ et Campbell et al.¹⁴⁷ ont proposé des adaptations de ces modèles pour intégrer ces contraintes spécifiques et, en particulier, la prise en compte de la probabilité de réaliser un rendement minimum (shortfall-risk). Toutefois, Boyle¹⁴⁸ montre les limites de l'utilisation de telles approches lorsque l'on intègre l'estimation des paramètres des actifs, qui peut conduire à une allocation sous-optimale.

Depuis 2001, des auteurs comme Battocchio et al.¹⁴⁹, Charupat et Milevsky¹⁵⁰ ou encore Boulier et al.¹⁵¹ ont développé des modèles intégrant les contraintes assurantielles (notamment le risque de mortalité), mais leur mise en œuvre pratique est délicate du fait de la problématique du choix d'une fonction d'utilité et de l'estimation d'un nombre important de paramètres¹⁵². Une synthèse des travaux récents sur le sujet est proposée par Grasselli¹⁵³.

¹⁴³ JOSA-FOMBELLIDA et RINCON-ZAPATERO [2004]

¹⁴⁴ Ce point sera repris dans la suite de ce travail et est détaillé dans PLANCHET et al. [2005]

¹⁴⁵ MARKOWITZ [1952].

¹⁴⁶ LEIBOWITZ et KOGELMAN [1991].

¹⁴⁷ CAMPBELL et al. [2001].

¹⁴⁸ BOYLE [2004].

¹⁴⁹ BATTOCHIO et al. [2004].

¹⁵⁰ CHARUPAT et MILEVSKY [2002].

¹⁵¹ BOULIER et al. [2001a].

¹⁵² Sur les évolutions récentes de la théorie de la décision dans l'incertain on pourra consulter Bernstein [1996] pour une mise en perspective et l'article fondateur de Kahneman et Tversky [1982]. BERNARD [2000] propose un rappel des principaux éléments de la théorie standard.

¹⁵³ GRASSELLI [2004].

Par ailleurs, dans le cadre des réflexions sur la solvabilité des organismes assureurs issues de « solvabilité 2 »¹⁵⁴, de nouveaux modèles intégrant les paramètres de solvabilité par le biais d'une contrainte sur la probabilité de ruine sont apparus. On détermine ainsi une allocation d'actifs qui contrôle la probabilité de ruine de l'assureur ou en d'autres termes la capacité de faire face à ses engagements, au travers de critères de type Value-at-Risk (*VaR*) ou Tail-Value-at-Risk (*TVaR*). Djehiche et Horfelt¹⁵⁵ proposent une synthèse des différents modèles candidats à devenir des « modèles standards ». On peut également se reporter sur ce point aux propositions¹⁵⁶ du QIS 2.

Dans ce contexte, l'objectif de ce travail est de proposer une démarche de détermination de l'allocation stratégique spécifique des régimes de rentes en phase de restitution intégrant les particularités de l'assurance, sans nécessité de fixer *a priori* un paramètre exogène tel que le niveau de la probabilité de ruine. L'objectif poursuivi est de proposer un critère d'allocation pertinent et opérationnel. Afin de focaliser l'exposé sur le choix du critère proposé et ses propriétés, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont effectuées ; elles seront relâchées dans de futurs développements.

Par ailleurs, nous choisissons délibérément une modélisation très agrégée du régime considéré, suivant en cela la démarche proposée par Deelstra et Janssen¹⁵⁷ : nous disposons au passif d'un échéancier de flux (aléatoire) et à l'actif de deux supports, l'un (localement) sans risque et l'autre risqué. Nous n'abordons en particulier pas la modélisation du mécanisme de fixation du niveau des rentes, défini par le règlement intérieur du régime. Notre problématique se situe en aval.

15 CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE DE RENTES

Dans la suite, nous reprenons pour les applications numériques l'exemple présenté en 1. On rappelle qu'avec un taux d'escompte des provisions de 2,5 %, la provision mathématique

¹⁵⁴ Voir notamment les travaux de l'AAI [2004] et ceux de la COMMISSION EUROPEENNE [2004].

¹⁵⁵ DJEHICHE et HORFELT [2004].

¹⁵⁶ CEIOPS [2006].

¹⁵⁷ Voir JANSSEN [1992] et DEELSTRA et JANSSEN [1998].

initiale calculée avec la TV2000 s'élève à 32,8 M€. La durée¹⁵⁸ du passif est alors de 12,3 ans.

On notera que la courbe ci-dessus est essentiellement en pratique non paramétrique : sa détermination passe par l'application aux flux de prestations, connus, d'une table de mortalité exprimée sous une forme non paramétrique. La table de mortalité étant dans ce contexte en général prospective, les méthodes d'ajustement à des lois paramétriques classiques, telles que le modèle de Makeham par exemple¹⁵⁹, ne s'appliquent pas. Toutefois, un ajustement polynomial peut être effectué pour disposer d'une formulation paramétrique *ex post* :

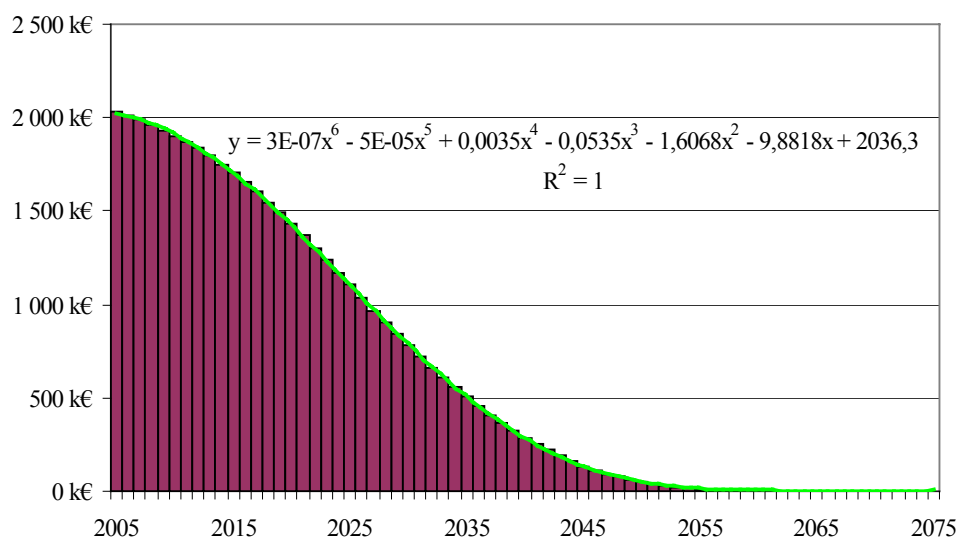


Fig. 43 : Flux de prestations espérés ajustés

Cette paramétrisation du modèle ne simplifie toutefois pas sensiblement les calculs par la suite, elle ne sera pas utilisée.

16 MODELE PROPOSE

Dans la suite, E_t désignera le montant des fonds propres à la date t . Celui-ci sera obtenu comme étant la différence entre le montant de l'actif A_t et le montant des provisions mathématiques L_t . Si l'on note $\tilde{F}_t$ le flux de prestation aléatoire qui aura lieu à la date t , la

¹⁵⁸ On rappelle la définition de la durée de Macaulay, qui peut-être interprétée comme la durée de vie moyenne d'un échéancier de flux : $D(f; i) = \frac{1}{V} \sum_{k \geq 1} k * f_k * (1+i)^{-k}$ où $V = \sum_{k > 1} f_k * (1+i)^{-k}$.

¹⁵⁹ Cf. PETAUTON [2004].

provision mathématique L_t s'obtiendra comme étant la valeur actuelle probable de ces flux au taux d'escompte discret i .

Nous noterons $\mathbf{J}$ l'ensemble des individus et $x(j)$ désignera l'âge en 0 de l'individu j tandis que f_j sera le montant de sa rente annuelle. Enfin, nous nous placerons systématiquement dans l'univers historique par le biais de la probabilité historique $\mathbf{P}$ et de la filtration Φ associée à l'information disponible.

16.1 DYNAMIQUE DU BILAN DE L'ASSUREUR

Le portefeuille est exclusivement constitué de rentes en cours de service supposées non réversibles. L'assureur ne reçoit donc plus de primes et doit donc gérer au mieux ses actifs afin de pouvoir honorer son engagement vis-à-vis des bénéficiaires.

En 0, il estime la suite de flux probables de prestations que nous noterons $(F_t)_{t \geq 1}$:

$$F_t = \mathbf{E}[\tilde{F}_t \mid \Phi_0],$$

où

$$\tilde{F}_t = \sum_{j \in \mathbf{J}} f_j * \mathbf{1}_{]t; \infty[}(T_{x(j)}),$$

où $T_{x(j)}$ désigne la date de décès (aléatoire) de la tête d'âge $x(j)$.

Avec les notations classiques de l'assurance vie, où l_x désigne le nombre de personne en vie à l'âge x sur une base 100 000 à l'âge 0 ($l_0 = 100000$), on a :

$$F_t = \sum_{j \in \mathbf{J}} f_j * \frac{l_{x(j)+t}}{l_{x(j)}}.$$

A partir de cette estimation, la provision mathématique initiale L_0 s'obtient par l'actualisation au taux d'intérêt technique i de ces flux :

$$L_0 = \sum_{t=1}^{\infty} F_t (1+i)^{-t}.$$

Cette approche, issue de la réglementation française, est compatible avec les normes IFRS puisque la seule différence dans le calcul de la provision mathématique réside dans le choix du taux d'intérêt technique (*cf.* 17.2.1 *infra*).

Le bilan de l'assureur en 0 peut alors s'écrire :

Bilan en 0	
A_0	E_0
	L_0

Tab. 14 : Bilan à la date initiale

Supposons que les prestations sont servies en début d'année, le bilan évolue alors selon le processus suivant :

$$\begin{cases} L_t = \sum_{k=t+1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}[\tilde{F}_k | \Phi_t]}{(1+i)^{k-t}} \\ A_t = (1 + \tilde{R}_t) A_{t-1} - \tilde{F}_t \\ E_t = A_t - L_t \end{cases}$$

où $\tilde{R}_t$ désigne la rentabilité (aléatoire) du portefeuille financier entre les dates $t-1$ et t .

16.2 DESCRIPTION DU MARCHE FINANCIER

L'assureur doit constituer son portefeuille financier à partir d'un actif localement sans risque et d'un actif risqué. Nous supposons que l'actif localement sans risque Y a un rendement instantané r_t qui évolue selon le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) :

$$dr_t = a(r_{\infty} - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dB_t^r,$$

où B^r est un **P**-mouvement brownien. Nous supposons par ailleurs, que l'actif risqué X suit un mouvement brownien géométrique

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma_X dB_t^X,$$

où B^X est un **P**-mouvement brownien dont la dépendance avec B^r est linéaire et peut être résumée par la corrélation $dB_t^r dB_t^X = \rho dt$.

De manière à ce que le processus soit bien défini pour $t \in \mathbf{R}_+$, nous choisirons des paramètres qui respectent l'inégalité $a \geq \frac{\sigma_r^2}{2}$. Celle-ci assure que¹⁶⁰ $\mathbf{Pr}[\exists t < +\infty \mid r_t \leq 0] = 0$.

Pour simplifier les écritures, on posera, sans perte de généralité : $X_0 = Y_0 = 1$. Nous supposons également que $\mu \geq r_\infty \geq \ln(1+i) \geq 0$.

Cette hypothèse est naturelle puisque le rendement espéré d'un actif risqué doit être plus élevé que celui d'un placement peu risqué et que le taux maximal d'escompte des provisions, qui est fixé réglementairement, est, par prudence, moins élevé que le rendement escompté des actifs.

L'évolution conjointe des processus X et r sera simulée à partir d'une discrétisation exacte du mouvement brownien géométrique et d'une discrétisation selon le schéma de Milstein pour le processus CIR¹⁶¹ :

$$r_{t+\delta} = r_t + a(r_\infty - r_t)\delta + \sigma\sqrt{r_t}\delta\varepsilon + \frac{\sigma^2}{4}\delta(\varepsilon^2 - 1)$$

avec ε une variable normale centrée réduite. Ce schéma converge en effet plus rapidement que le traditionnel schéma d'Euler.

16.3 GESTION DES ACTIFS

Lorsque l'assureur est amené à désinvestir pour payer les prestations, nous supposons qu'il vend les deux actifs de manière proportionnelle à leur part respective dans la valeur de marché du portefeuille. De manière pratique, cela revient à considérer que l'actif est investi en 0 dans un fonds qui ne fera plus l'objet d'arbitrage et dont l'assureur vendra des parts pour régler les rentes.

Cette hypothèse est moins restrictive qu'il n'y paraît en première lecture : en effet, en pratique l'étude conduisant à déterminer l'allocation optimale sera effectuée chaque année et une

¹⁶⁰ Cf. LAMBERTON et LAPEYRE [1997] pour la démonstration de ce résultat.

¹⁶¹ Cf. PLANCHET et al. [2005] pour une description des différents procédés de discrétisation.

nouvelle allocation est alors déterminée. Ce mécanisme permet notamment d'intégrer « au fil de l'eau » les corrections des erreurs de prédiction sur le niveau de la mortalité. La prise en compte année après année des décès constatés est un point très important, la déformation de la charge future n'étant pas seulement due aux aspects démographiques (*i.e.* le nombre de décès par âge), mais également au niveau des prestations servies aux bénéficiaires décédés (deux bénéficiaires de même âge pouvant avoir des prestations très différentes).

Cette approche est justifiée par la grande inertie du régime : on cherche alors chaque année la trajectoire optimale compte tenu de la situation de la population d'une part et des marchés financiers d'autre part. En ce sens, la prise en compte de réallocations annuelles fixées *a priori* complique le modèle inutilement et nous préférons les intégrer *a posteriori* par le pilotage du régime. Cette démarche est bien connue des assureurs vie notamment dans le cadre des contrats collectifs pour les régimes d'indemnités de fin de carrière ou de retraite supplémentaire, pour lesquels le taux de cotisation d'équilibre est déterminé chaque année sur la base de l'information disponible, comme s'il allait être constant jusqu'à l'extinction du groupe.

Formellement, on a alors :

$$\begin{aligned} A_1 &= (\theta X_1 + (1-\theta)Y_1)A_0 - F_1 = (\theta X_1 + (1-\theta)Y_1) \left[A_0 - \frac{F_1}{\theta X_1 + (1-\theta)Y_1} \right] \\ A_2 &= (\theta X_2 + (1-\theta)Y_2) \left[A_0 - \frac{F_1}{\theta X_1 + (1-\theta)Y_1} \right] - F_2 \\ A_2 &= (\theta X_2 + (1-\theta)Y_2) \left[A_0 - \sum_{s=1}^2 \frac{F_s}{\theta X_s + (1-\theta)Y_s} \right] \end{aligned}$$

où θ désigne la proportion initialement investie en actif risqué. Par récurrence, il vient :

$$A_t = (\theta X_t + (1-\theta)Y_t) \left[A_0 - \sum_{s=1}^t \frac{F_s}{\theta X_s + (1-\theta)Y_s} \right]$$

Notons que cette expression n'est pas équivalente à :

$$A_{t+1} = \left(\theta \frac{X_{t+1}}{X_t} + (1-\theta) \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right) A_t - F_{t+1}$$

Cette approche alternative correspond à la situation dans laquelle l'assureur recompose, chaque début de période, son actif en investissant θ en actif risqué X et $1-\theta$ en actif localement sans risque Y .

Le problème auquel se trouve confronté l'assureur est de composer en 0 son portefeuille d'actifs de manière optimale. Nous verrons dans la suite ce qu'il faut entendre par « de manière optimale ».

Dans la suite du développement, nous supposerons que les suites de flux de prestations et de rendements des actifs sont indépendantes. Cette hypothèse, assez naturelle dans une situation standard, peut s'avérer fautive dans des situations extrêmes telles qu'une guerre civile qui risque de voir conjointement la mortalité exploser et le cours des valeurs mobilières chuter. Nous ne considérerons pas ici ces situations exceptionnelles.

17 FLUX DE PRESTATIONS DETERMINISTES

Supposons que les flux de prestations sont connus en 0. Cette situation correspond au cas d'un portefeuille important, condition qui n'est pas réalisée dans notre exemple (le cas général est traité au paragraphe 18). Cela signifie que les effectifs à chaque âge sont suffisamment importants pour que l'approximation suivante soit valide :

$$\tilde{F}_t \approx \mathbf{E}[\tilde{F}_t] = F_t.$$

D'après la dynamique présentée *supra*, le bilan évolue alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} L_{t+1} = (1+i)L_t - F_{t+1} \\ A_{t+1} = (1+\tilde{R}_{t+1})A_t - F_{t+1} \\ E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1} \end{cases}$$

Notons que E est alors une sous-martingale. En effet d'après les équations ci-dessus, il vient :

$$E_{t+1} = (1+\tilde{R}_{t+1})E_t + (\tilde{R}_{t+1} - i)L_t,$$

or la condition sur le positionnement du rendement de l'actif risqué par rapport au taux sans risque assure que :

$$\forall t \geq 0, \mathbf{E} \left[\tilde{R}_{t+1} \mid \Phi_t \right] \geq i \geq i \frac{L_t}{L_t + E_t},$$

donc

$$\mathbf{E} \left[E_{t+1} \mid \Phi_t \right] \geq (1 + i) E_t \geq E_t.$$

Cela signifie que l'actionnaire verra en moyenne les fonds propres augmenter au cours du temps. En effet, du fait du choix prudent du taux d'actualisation, les fonds propres de l'assureur augmenteront en moyenne du fait des produits financiers qu'ils génèrent et, en l'absence de revalorisation des rentes, du fait de la sur-performance espérée des actifs en représentation des engagements techniques.

17.1 PROBABILITE DE RUINE

Dans cette partie, la contrainte du programme d'optimisation de l'assureur est de contrôler la probabilité de ruine de la société. Il y a ruine de l'assureur lorsque les fonds propres sont réduits à 0, ou en d'autres termes, lorsque l'actif de la société ne suffit plus à couvrir les provisions techniques. Notons τ l'instant de ruine de l'assureur défini comme suit :

$$\tau = \mathbf{Inf} \left\{ t \in \mathbf{N} \mid E_t < 0 \right\}.$$

τ est un temps d'arrêt par rapport à la filtration Φ puisque c'est le temps d'entrée de la suite (E_n) dans l'ensemble $] -\infty; 0[$. La loi de τ est déterminée par la dynamique d'évolution de l'actif ; toutefois les expressions non paramétriques de la suite des flux (F_t) d'une part et de la table de mortalité d'autre part ne permettent pas d'obtenir une expression analytique de cette loi, ce même dans le cas où un ajustement polynomial de (F_t) est effectué. La distribution de τ peut néanmoins être étudiée à l'aide de techniques de Monte Carlo.

Le profit espéré provenant du régime de rentes étant croissant avec la rentabilité espérée du portefeuille financier et donc avec la part investie en actif risqué, l'assureur va composer son portefeuille en fonction de la probabilité de ruine qu'il est prêt à accepter. Le programme d'optimisation, que l'assureur doit résoudre, peut donc s'écrire :

$$\mathbf{Sup} \left\{ \theta \in [0;1] \mid \mathbf{P}(\tau_\theta < \infty) \leq \pi_{\max} \right\},$$

où $\pi_{\max}$ désigne la probabilité de ruine maximale que l'assureur peut accepter.

Les techniques de simulations permettent de résoudre simplement ce programme d'optimisation. La part investie en actif risqué en 0 étant indépendante du cours des deux actifs dans le futur, il est possible d'utiliser ces trajectoires pour différentes allocations initiales de manière à pouvoir comparer, sur les mêmes bases, les différentes allocations.

Dans notre cas, si N est le nombre de trajectoires simulées des actifs, en notant $e_k^n(\theta)$ le montant des fonds propres de la société à la date k , dans l'état du monde n , pour l'allocation initiale définie par θ , un estimateur empirique de la probabilité de ruine est :

$$1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \prod_{k \geq 1} \mathbf{1}_{[0; \infty[}(e_k^n(\theta))$$

Le lecteur pourra se référer à Planchet et Jacquemin¹⁶² pour la génération de réalisations de variables aléatoires¹⁶³ et à Planchet et al.¹⁶⁴ pour la discrétisation de processus continus.

Pour notre exemple, nous avons généré 10 000 trajectoires de l'actif. En faisant varier de 0 % à 100 % avec un pas de 0,05 % la part initiale d'actif risqué, nous avons disposé de 2.10^7 « scénarios » qui nous ont permis de tracer le graphique 3.

Pour les illustrations numériques, nous avons utilisé les paramètres¹⁶⁵ :

$$\begin{aligned} E_0 &= 4 \% * L_0 & \mu &= \ln(1 + 0,07) & \sigma_X &= 0,25 \\ i &= 0,025 & r_0 &= \ln(1 + 0,03) & r_\infty &= \ln(1 + 0,0462) \\ \rho &= -0,1 & a &= 0,5 & \sigma_r &= 0,02 \end{aligned}$$

¹⁶² PLANCHET et JACQUEMIN [2003].

¹⁶³ Nous avons utilisé ici un générateur pseudo-aléatoire pour générer des réalisations de variables aléatoires (v.a.) de loi uniforme qui ont été transformées par la technique de Box-Müller en réalisations de v.a. de loi normale.

¹⁶⁴ PLANCHET et al. [2005].

¹⁶⁵ Le taux d'intérêt à long terme correspond au taux long terme de la courbe des taux au 31 décembre 2003 publiée par l'Institut des Actuaire (modèle de Vasicek & Fong).

Le graphique suivant représente la probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué du portefeuille financier à l'origine.

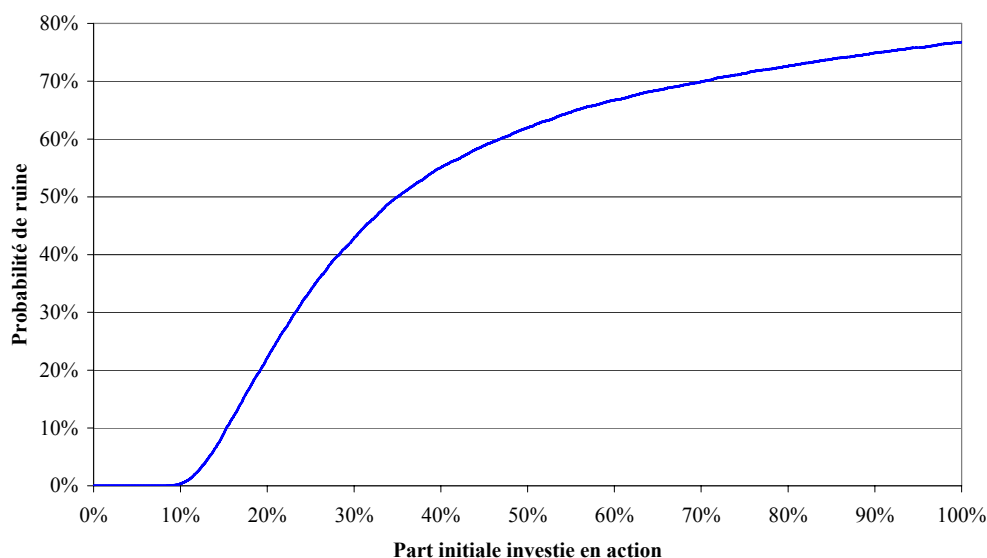


Fig. 44 : Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué

Rappelons que la ruine présentée ici s'entend sur la durée totale du régime soit sur plus de 70 ans et que les probabilités de ruine présentées ne peuvent pas être directement comparées aux probabilités de ruine sur un an évoquées dans les projets concernant le futur référentiel prudentiel européen¹⁶⁶ « Solvabilité 2 ».

Par ailleurs, la ruine définie par l'événement $\{E_t < 0\}$ est une « ruine comptable » : on regarde à chaque date de bilan si la valeur des placements est supérieure au montant des provisions calculées avec un taux d'escompte prudent. Par opposition, on pourrait s'intéresser à la probabilité de « ruine économique » qui serait la probabilité que l'assureur ne puisse plus payer les rentes. Le premier instant de ruine économique τ' serait donc défini comme suit :

$$\tau' = \inf \{ t \in \mathbf{N} \mid A_t \leq 0 \}.$$

En l'absence de précision supplémentaire, c'est de la « ruine comptable » qu'il s'agira lorsque, par la suite, on parlera de ruine.

¹⁶⁶ Cf. COMMISSION EUROPEENNE [2004].

Dans notre exemple, si l'on souhaite limiter à 1 % la probabilité de ruine du régime, on investira moins de 10,9 % de son actif initial en actif risqué. Cette proportion apparaît relativement faible comparée aux pratiques des sociétés d'assurance sur la vie¹⁶⁷.

17.2 MAXIMISATION DES FONDS PROPRES ECONOMIQUES

17.2.1 Contraintes réglementaires

Les dispositions réglementaires françaises actuelles imposent de nombreuses contraintes aux assureurs. Parmi celles-ci les contraintes quantitatives d'escompter les flux futurs dans le calcul de la provision mathématique au taux maximal¹⁶⁸ de **Min** {60% * TME ; 3,5%} et de disposer d'un niveau minimal¹⁶⁹ de fonds propres proportionnel à la provision mathématique.

Le graphique ci-après reprend l'évolution du TME et des taux réglementaires qui y font référence :

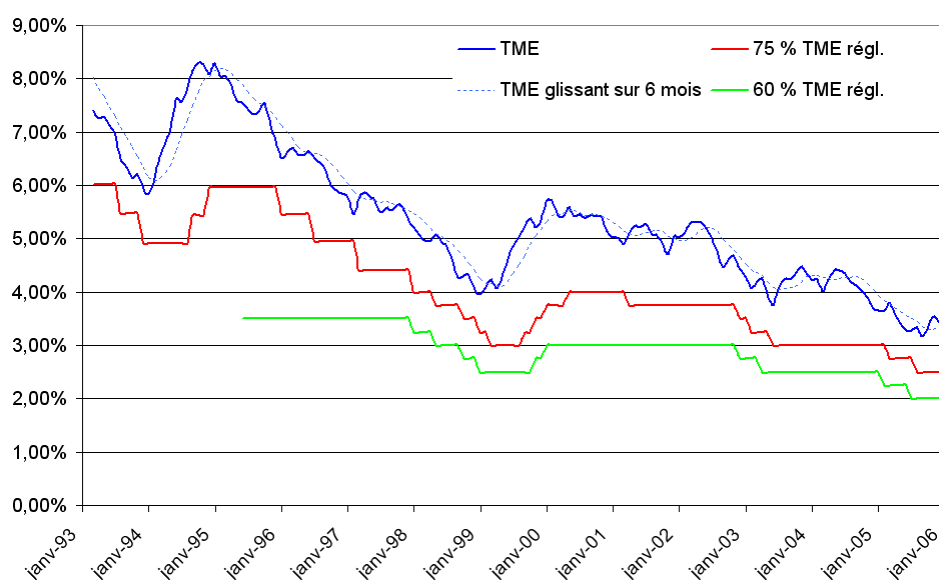


Fig. 45 : Evolution du TME et des taux réglementaires de janvier 1993 à janvier 2006

Dans le cadre d'une comptabilisation selon les normes IAS/IFRS, la norme IFRS 4 *Contrats d'assurance* prévoit que les sociétés pourront escompter leurs provisions sur la base d'un taux

¹⁶⁷ Sur les placements des sociétés d'assurance-vie on pourra consulter notamment <http://www.ffsa.fr/WebFFSA/portailffsa.nsf/html/ODAN-4XEH3J.html>

¹⁶⁸ Par prudence, la réglementation française (cf. article A.331-10 du Code des assurances) impose à l'assureur d'escompter ses provisions à un taux inférieur à Min (60 %*TME ; 3,5 %), où TME est le Taux Moyen des emprunts de l'Etat français.

¹⁶⁹ Le niveau des fonds propres initiaux est le minimum imposé par la marge de solvabilité en France : 4 % des provisions mathématiques dans notre cas. Cf. Art. R.334-1 et suivants du Code des assurances.

de marché (le taux sans risque de maturité égale à la durée du passif). On pourra consulter sur ce sujet Douard¹⁷⁰ et Veron¹⁷¹. L'application de cette norme conduirait donc à des provisions moins importantes. Toutefois on observera que la norme IFRS 4 ne constitue pas un référentiel prudentiel, mais un référentiel comptable ; les problématiques de solvabilité sont en cours de discussion¹⁷² au niveau européen au travers du dispositif¹⁷³ Solvabilité 2. La mise en place du nouveau dispositif prudentiel ne sera pas effective avant 2008, et la forme définitive de celui-ci n'est pas arrêtée ; c'est donc sur la base des comptes établis selon la réglementation française actuelle que la Commission de contrôle des assurances (ACAM) continue d'exercer son contrôle prudentiel, et nous retiendrons donc ces règles dans ce travail. Au surplus, bien que selon l'IFRS 4, le niveau des provisions soit potentiellement moins important que selon la réglementation française, la différence sera, le cas échéant, intégrée aux fonds propres, ce qui ne modifie pas fondamentalement notre problématique puisque nous ne distinguons pas les actifs en contrepartie des provisions et ceux en contrepartie des capitaux propres.

Dans le cadre d'un contrat sans revalorisation des rentes, l'actionnaire tire son profit de deux sources : les revenus financiers engendrés par le capital et le résultat provenant de l'opération d'assurance à proprement parler. En effet, si le taux technique est inférieur au rendement réel des actifs, les provisions mathématiques vont engendrer des profits, le rendement des actifs étant supérieur à l'effet de désactualisation.

17.2.2 Fonds propres économiques

Notons Λ_θ la variable aléatoire :

$$\Lambda_\theta = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{F_t}{\theta X_t + (1-\theta)Y_t}.$$

Cette variable aléatoire est la valeur limite de la quantité utilisée dans le membre de droite de l'équation (12). $E[\Lambda_\theta]$ peut s'interpréter comme la provision mathématique « économique »

¹⁷⁰ DOUARD [2000].

¹⁷¹ VERON [2003].

¹⁷² Les documents sur ce sujet sont disponibles sur le site de la Commission Européenne http://europa.eu.int/comm/internal_market/insurance/solvency_fr.htm

¹⁷³ Cf. notamment COMMISSION EUROPEENNE [2002a] et [2002b].

du régime de rentes, *i.e.* la valeur probable des flux futurs actualisés au taux de rendement du portefeuille financier. En effet, si l'on note $\tilde{R}_t(\theta)$ le rendement du portefeuille d'actifs entre les dates $t - 1$ et t , il vient :

$$\Lambda_\theta = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{F_t}{\prod_{s=1}^t (1 + \tilde{R}_s(\theta))}.$$

Minimiser $\mathbf{E}[\Lambda_\theta]$ revient à choisir l'allocation qui, en moyenne, « amortira » au mieux les flux de prestations futurs.

Notons que L_0 et E_0 étant fixés, minimiser $\mathbf{E}[\Lambda_\theta]$ revient également à maximiser la quantité $(E_0 + L_0 - \mathbf{E}[\Lambda_\theta])$ que l'on désignera dans la suite comme étant « les fonds propres économiques » de l'assureur en 0.

Il est donc possible d'écrire le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{Inf} \mathbf{E}[\Lambda_\theta] \\ \theta \in [0;1] \end{cases}$$

Par la suite, nous désignerons ce programme comme étant le critère de « maximisation des fonds propres économiques » (MFPE dans la suite). Les techniques de Monte Carlo permettent de résoudre ce problème :

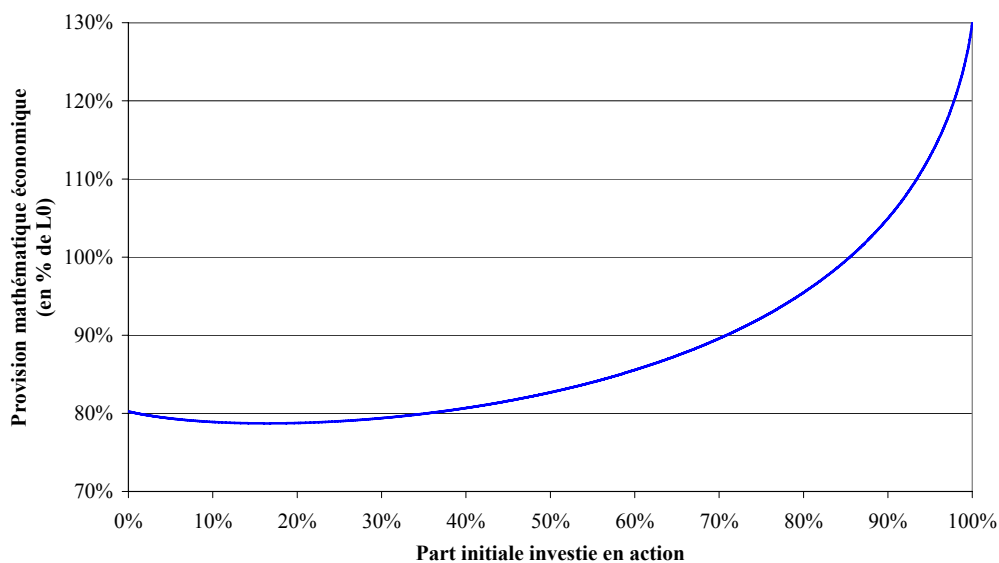


Fig. 46 : Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué

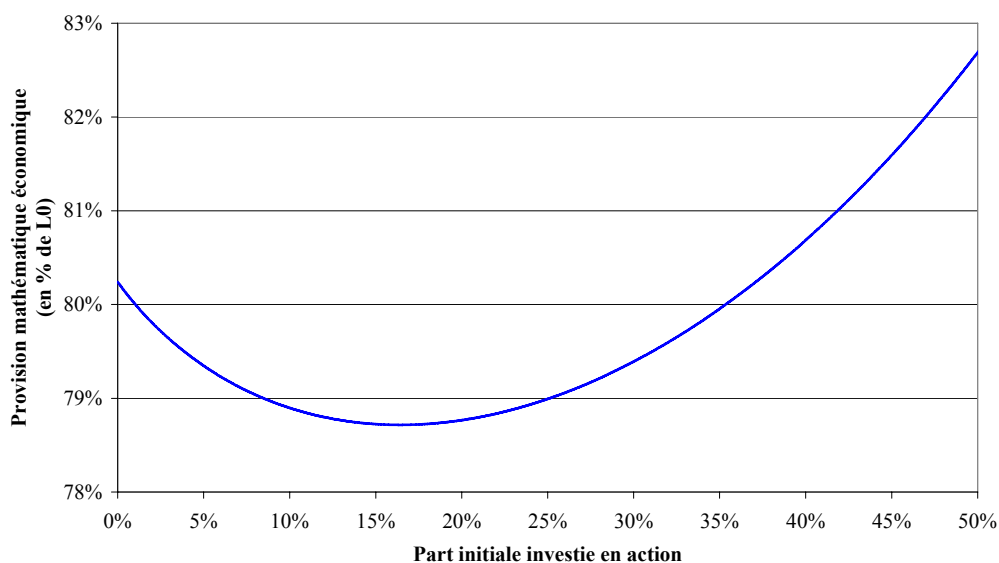


Fig. 47 : Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué

Avec les mêmes paramètres que précédemment, le portefeuille optimal est composé pour 16,4 % d'actif risqué. Cette proportion initiale investie en actif risqué correspond à une probabilité de ruine comptable de 12,5 %. La ruine comptable intervient en moyenne pendant la deuxième année et son ampleur moyenne est de 372 K€ ce qui représente moins de 1 % de la provision mathématique initiale L_0 . Néanmoins, pour cette allocation, aucune des

simulations qui ont été effectuées n'a conduit à la « ruine économique » c'est à dire à l'épuisement total des ressources de l'assureur.

Par construction, ce critère d'allocation d'actifs induit une bonne adéquation des flux d'actif et de passif. Enfin, il présente l'avantage de ne pas avoir à fixer *a priori* un paramètre exogène tel que le niveau de la probabilité de ruine par exemple.

17.2.3 Etude de sensibilité

A l'image de la probabilité de ruine, l'allocation optimale selon le critère de maximisation des fonds propres économiques est relativement sensible aux paramètres des modèles d'actifs.

Les graphiques suivants présentent l'évolution de l'allocation optimale en fonction de la variation du paramètre étudiée et la probabilité de ruine associée à cette allocation optimale ; les autres paramètres restant constants.

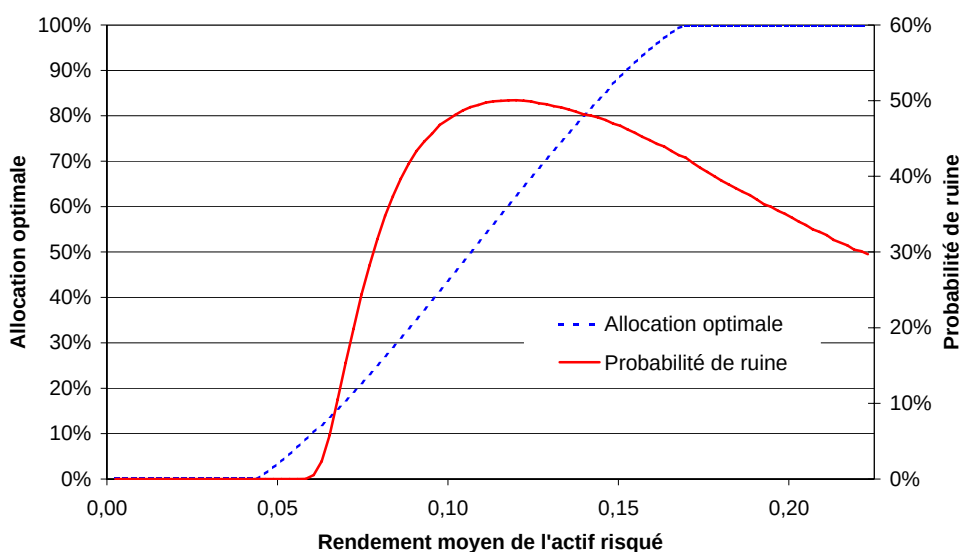


Fig. 48 : Sensibilité au rendement de l'actif risqué

L'allocation optimale fournie par le critère de MFPE est évidemment croissante avec le rendement de l'actif risqué. En particulier, le portefeuille n'est diversifié que si $0,046 \leq \mu \leq 0,17$. La probabilité de ruine associée à l'allocation optimale est initialement croissante avec μ et donc avec l'allocation optimale puis décroissante pour $\mu \geq 0,12$.

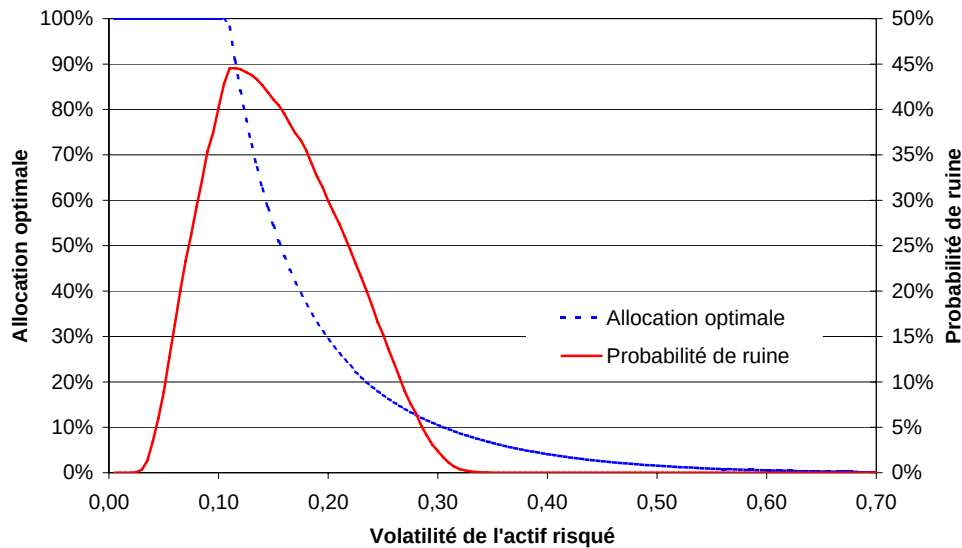


Fig. 49 : Sensibilité à la volatilité de l'actif risqué

L'allocation optimale fournie par le critère de MFPE est décroissante avec la volatilité de l'actif risqué. Le portefeuille est uniquement constitué d'actif risqué pour $\sigma_X \leq 0,1$. La probabilité de ruine est croissante dans un premier temps avec l'augmentation de la volatilité de l'actif risqué et le maintien de l'allocation optimale à des niveaux proches de 1 puis décroît avec l'allocation optimale lorsque la volatilité croît au-delà de 0,11.

18 FLUX DE PRESTATIONS ALEATOIRES

Dans ce paragraphe, les flux de prestations sont aléatoires : ils dépendent de l'évolution démographique du groupe de rentiers. Le graphique suivant représente l'intervalle de confiance à 95 % des prestations futures :

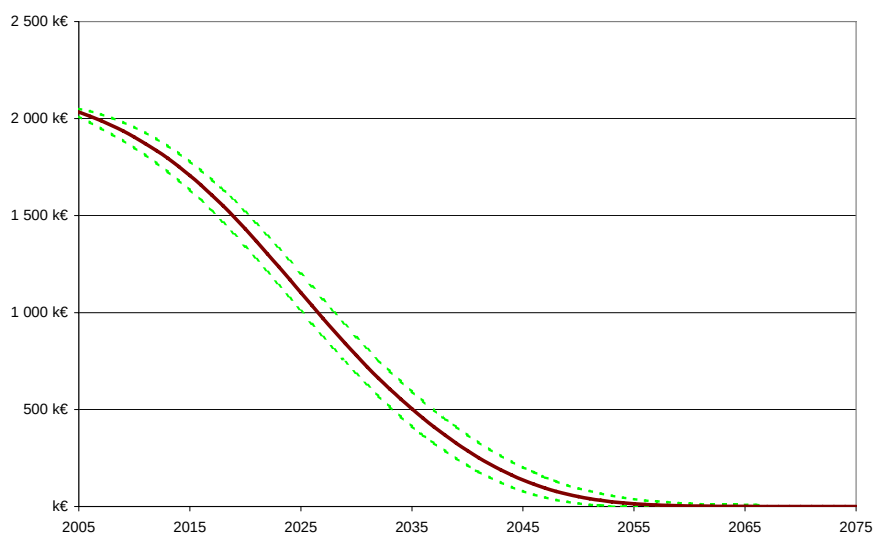


Fig. 50 : Intervalle de confiance à 95 % des flux de prestations futurs

Cet intervalle est relativement étroit du fait de la bonne mutualisation des décès. Toutefois, comme le montrent les travaux de Currie¹⁷⁴, le risque de mortalité comporte une autre composante, non mutualisable, associée à l'évolution aléatoire du taux instantané de décès autour de la tendance modélisée par les tables prospectives. De nombreux auteurs proposent des modélisations adaptées à la mesure de cette partie systématique du risque de mortalité¹⁷⁵.

Les résultats obtenus à la section C ont montré que le risque systématique de mortalité était de faible importance pour un régime de rentes viagères. Nous nous restreindrons donc dans cette étude à la partie non systématique, et donc mutualisable, du risque de mortalité. En particulier, nous supposons que la table de mortalité utilisée correspond parfaitement à la loi de probabilité de la mortalité des rentiers et nous étudierons l'impact des fluctuations d'échantillonnage sur l'allocation d'actifs.

Après avoir étudié la part du risque de mortalité dans le risque global, nous examinons l'impact de sa prise en compte sur l'allocation d'actifs.

18.1 ANALYSE DU RISQUE

Considérons la provision mathématique « économique » $E[\Lambda_0]$. Lorsque les flux de prestations ne sont pas connus en 0, Λ_0 peut s'écrire :

¹⁷⁴ CURRIE et al. [2004].

¹⁷⁵ On pourra notamment se reporter à CAIRNS et al. [2004], DAHL [2004], LEE [2000] et SCHRAGER [2004].

$$\Lambda_{\theta} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_t}{\theta X_t + (1-\theta)Y_t}.$$

La variance de Λ_{θ} peut être proposée comme indicateur du risque global du portefeuille. Sa décomposition nous permet d'apprécier les parts respectives des risques financiers et de mortalité. En effet, en conditionnant Λ_{θ} par l'évolution des placements, l'équation de décomposition de la variance (cf. la section 5.2) conduit à l'égalité suivante :

$$\mathbf{V}[\Lambda_{\theta}] = \mathbf{E}[\mathbf{V}(\Lambda_{\theta} | X, Y)] + \mathbf{V}[\mathbf{E}(\Lambda_{\theta} | X, Y)].$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation de décomposition de la variance représente le risque financier associé au régime de rentes ; le second terme le risque technique de mortalité¹⁷⁶.

Via des techniques de simulations, en faisant l'hypothèse réaliste d'indépendance entre l'évolution des actifs et la mortalité, on génère N trajectoires d'actifs risqués, M trajectoires de passif et disposer ainsi de $N*M$ « états du monde » pour chaque θ .

Si $\lambda_{n,m}(\theta)$ est la réalisation de Λ_{θ} résultant de la $n^{\text{ème}}$ trajectoire de l'actif risqué, de la $m^{\text{ème}}$ trajectoire du passif, notons :

$$\bar{\lambda}_n(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \lambda_{n,m}(\theta),$$

et

$$\bar{\bar{\lambda}}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{\lambda}_n(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \lambda_{n,m}(\theta).$$

Les quantités ci-après sont des estimateurs sans biais et convergent respectivement de $\mathbf{E}[\mathbf{V}(\Lambda_{\theta} | X, Y)]$ et de $\mathbf{V}[\mathbf{E}(\Lambda_{\theta} | X, Y)]$.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (\lambda_{n,m}(\theta) - \bar{\lambda}_n(\theta))^2$$

$$\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\bar{\lambda}_n(\theta) - \bar{\bar{\lambda}}(\theta))^2$$

¹⁷⁶ Pour autant que la table de mortalité utilisée soit pertinente.

Ces résultats nous permettent d'obtenir le graphique ci-après d'évolution du risque global associé au régime de rentes et d'évolution du risque financier dans le risque global en fonction du choix de portefeuille initial :

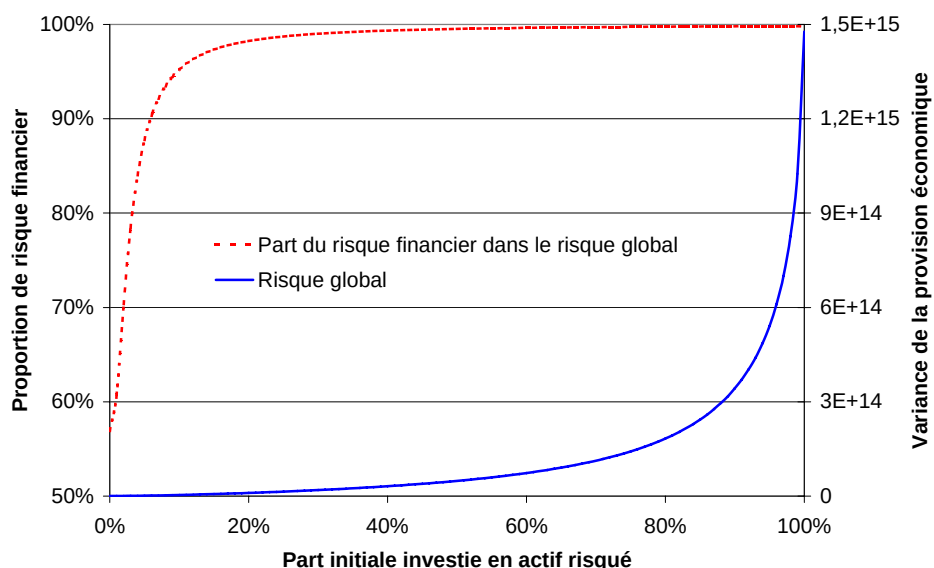


Fig. 51 : Evolution du risque global et de la part du risque financier dans le risque global en fonction de la part d'actif risqué

Le risque associé au régime est plus de 3 000 fois plus important lorsque l'actif est exclusivement composé d'actif risqué que lorsqu'il est uniquement composé de l'actif localement sans risque. Alors même que le nombre de rentiers est réduit et donc que la loi des grands nombres ne joue pas pleinement son rôle de mutualisation, la part du risque financier représente toujours plus 55 % du risque global. En particulier le risque de mortalité représente moins de 1 % du risque global dès lors que le portefeuille financier est initialement composé de plus de 30 % d'actif risqué.

Afin de mesurer l'impact de la mutualisation sur le risque supporté par le régime, nous avons répliqué à l'identique le portefeuille de rentiers de manière à ce qu'ils soient dix fois plus nombreux.

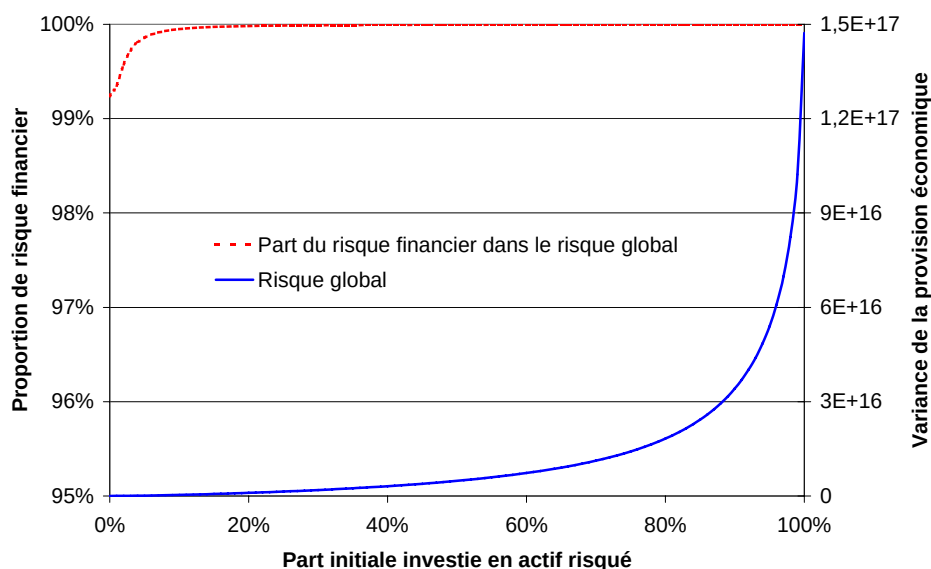


Fig. 52 : *Evolution du risque global et de la part du risque financier dans le risque global en fonction de la part d'actif risqué pour un portefeuille de rentiers dix fois plus important*

L'effet de la mutualisation s'observe par le fait que quelle que soit l'allocation d'actif effectuée, le risque global est toujours moins de 100 fois plus important lorsqu'il y a 3 740 individus que lorsqu'il y en a dix fois moins.

De ce fait, la part du risque financier dans le risque global est nettement plus importante que dans le cas précédent, ceci résulte du fait que le risque démographique est mutualisable et donc décroissant (en pourcentage) avec l'effectif alors que le risque financier est constant (en pourcentage) avec l'effectif. Le tableau suivant récapitule l'impact de la mutualisation sur l'allocation déterminée en 17.2.

	Part du risque financier dans le risque global	Part du risque financier dans le risque global (portefeuille x10)
$\theta = 16,4 \%$	97,65 %	99,98 %

Tab. 15 : *Effet de la mutualisation sur la part du risque financier*

Ainsi lorsque le nombre de rentier est assez important et dans le cas d'une loi de mortalité déterministe, le risque purement « assurantiel » est négligeable par rapport au risque financier.

18.2 ALLOCATION D'ACTIFS

Dans cette partie, nous étudions l'impact de la prise en compte du risque de mortalité sur les critères d'allocation proposés dans le paragraphe 17.

18.2.1 Probabilité de ruine

Si $e_k^{n,m}(\theta)$ est le niveau de fonds propres à la date k , dans l'état du monde $n \times m$ pour l'allocation θ , l'expression *infra* est un estimateur convergent de la probabilité de ruine :

$$1 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \prod_{k \geq 1} \mathbf{1}_{[0;\infty[}(e_k^{n,m}(\theta))$$

Avec les mêmes paramètres que précédemment, nous obtenons la courbe suivante :

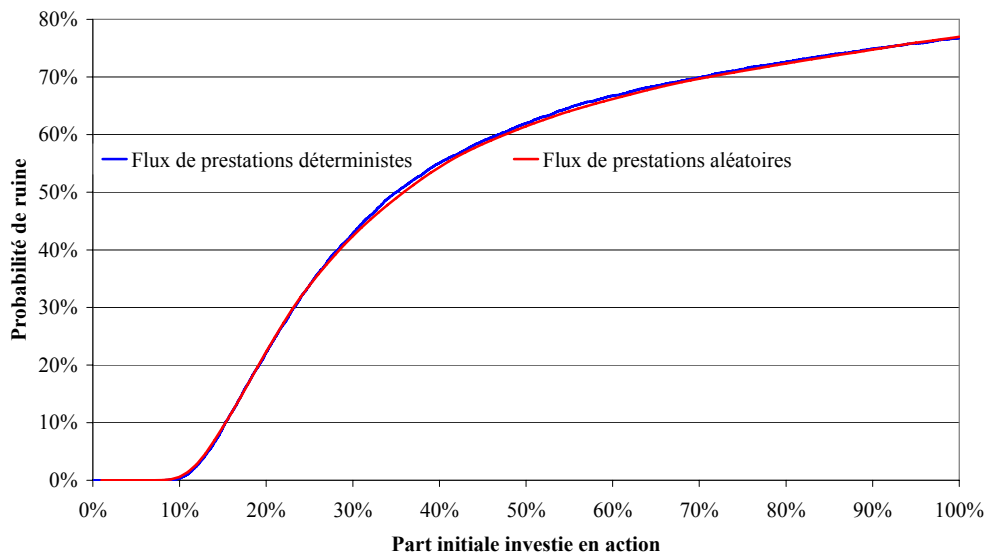


Fig. 53 : Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué

La courbe de la probabilité de ruine intégrant la nature aléatoire de la mortalité est pratiquement confondue avec celle obtenue en 17.1. Cela semble indiquer que la prise en compte de la nature aléatoire des flux de prestations affecte peu, dans le cas présent, l'allocation d'actifs déterminée à partir du critère de la probabilité de ruine.

Ce résultat est toutefois peu intuitif puisque la prise en compte de la mortalité augmente le risque global (au travers d'une augmentation de la variance), les effets dus aux variations de la mortalité se compensent donc en moyenne.

18.2.2 Maximisation des fonds propres économiques

Les flux de prestations et les rendements des actifs financiers étant indépendants, on a :

$$\mathbf{E}[\Lambda_\theta] = \mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}_t}{\theta X_t + (1-\theta)Y_t}\right] = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[\frac{1}{\theta X_t + (1-\theta)Y_t}\right] * \mathbf{E}[\tilde{F}_t]$$

Donc le programme d'optimisation qui consiste à maximiser le capital économique en 0 aura, lorsque les flux de prestations sont aléatoires, la même solution que lorsque ces flux sont connus en 0. Cette propriété est un avantage de ce critère puisque la prise en compte du risque de mortalité peut être lourde en terme de temps de simulation.

18.2.3 Conclusion sur la prise en compte du risque de mortalité

Bien que non négligeable au vu du faible nombre de rentiers, le risque de mortalité n'affecte pas le choix de portefeuille au sens des deux critères exposés. Ce résultat est d'autant plus intéressant que la prise en compte du risque technique dans le critère de la probabilité de ruine peut conduire à des temps de calculs relativement importants (mais jamais hors de portée des outils micro-informatiques récents) . En effet générer une simulation du passif nécessite de générer une trajectoire de mortalité pour chacun des n individus (avec ici $n=374$) et de réévaluer le montant de la provision mathématique à chaque date en fonction des effectifs encore sous risque, le nombre de réalisations de variables aléatoires à simuler est donc très important.

19 REVALORISATION DES RENTES

Nous avons jusqu'à présent supposé que les rentes n'étaient pas revalorisées ; ceci n'est bien entendu pas réaliste, et il est nécessaire que le régime prévoie des règles de revalorisation des pensions. Les deux formes de revalorisations que l'on observe le plus fréquemment dans les régimes de pensions de retraite sont la revalorisation alignée sur l'évolution des salaires ou celle visant à maintenir le pouvoir d'achat des retraités. A long terme, le choix du dispositif n'est pas neutre, puisque pour autant que la croissance perdure, l'évolution des prix est généralement inférieure à la croissance des salaires (voir sur ce point la section B). Dans ce

paragraphe, nous supposons que les rentes sont revalorisées de manière à tenir compte de l'inflation, pour maintenir le pouvoir d'achat des rentes¹⁷⁷.

Notons I_t l'indice des prix à la consommation à la date t et L_t^I le montant de la provision mathématique à la date s . Cette quantité s'obtient¹⁷⁸ par :

$$L_s^I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} \left[\tilde{F}_{s+k} * \frac{I_{s+k}}{I_s} \mid \Phi_s \right]}{(1+i)^k}.$$

En faisant l'hypothèse réaliste d'indépendance entre l'évolution de la mortalité et celle des prix, il vient :

$$L_s^I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} [\tilde{F}_{s+k} \mid \Phi_s] * \mathbf{E} \left[\frac{I_{s+k}}{I_s} \mid \Phi_s \right]}{(1+i)^k}.$$

La revalorisation des rentes représente un engagement supplémentaire pour l'assureur donc la provision mathématique de l'assureur sera plus importante que lorsque les rentes n'étaient pas revalorisées :

$$L_0^I \geq L_0.$$

La quantité $L_0^I - L_0$ peut alors s'interpréter comme la valeur en 0 de l'engagement de revaloriser les rentes de manière à maintenir le pouvoir d'achat des bénéficiaires.

Dans une logique conforme à l'IFRS 4 on ne cherche pas à ajuster ici le taux d'actualisation (*cf.* B), mais on évalue l'engagement supplémentaire associé à l'existence de cette prestation, le taux retenu étant un taux de marché. Le modèle retenu doit toutefois préserver la cohérence macro-économique de long terme des paramètres, qui devra être vérifiée *ex-post*.

19.1 MODELISATION DE L'INFLATION

De nombreux modèles ont été proposés dans la littérature pour rendre compte de l'inflation¹⁷⁹ ; dans le cadre de modèles actuariels, on peut notamment citer les travaux de

¹⁷⁷ Ce qui se trouve être la situation des régimes de retraite obligatoires aujourd'hui.

¹⁷⁸ Le fait d'introduire un processus de revalorisation des rentes lié à l'évolution de l'inflation ne modifie pas l'approche de valorisation des flux futurs probables sous la probabilité historique retenue ici.

¹⁷⁹ On se reportera à la section D.

Wilkie et de Kaufmann et al.¹⁸⁰. Nous retenons ici la modélisation proposée par Ahlgrim et al.¹⁸¹ qui suppose que l'indice des prix à la consommation évolue de la manière suivante :

$$I_{t+\delta} = I_t * \exp \int_t^{t+\delta} (j + x_s) ds ,$$

où j est le taux instantané moyen d'évolution des prix et où le processus x modélise les fluctuations aléatoires autour de la tendance :

$$dx_s = -a x_s ds + \sigma_I dB_s^I ,$$

où B^I un **P**-mouvement brownien. Nous ferons l'hypothèse d'indépendance entre le processus x et l'évolution des taux d'intérêt ; en effet, la modélisation que nous retenons de l'inflation incorpore une tendance déterministe, avec des fluctuations aléatoires autour ; une éventuelle dépendance entre x et le niveau des taux d'intérêt est donc ici un effet du second ordre, que nous négligerons. On cherche donc à calculer la quantité :

$$\mathbf{E} \left[\frac{I_{t+\delta}}{I_t} \middle| \Phi_t \right] = \mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} (j + x_s) ds \middle| \Phi_t \right] = e^{j\delta} \mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} x_s ds \middle| \Phi_t \right] .$$

Puisque x est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, la variable aléatoire x_s est une gaussienne dont on peut calculer moyenne et variance :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[x_s] &= x_0 e^{-as} \\ \mathbf{V}[x_s] &= \sigma_I^2 \frac{1 - e^{-2as}}{2a} \end{aligned}$$

De plus $\int_t^{t+\delta} x_s ds$ est une gaussienne puisqu'il s'agit de la limite d'une somme de variables aléatoires gaussiennes. L'expression de la transformée de Laplace d'une gaussienne¹⁸² nous permet donc d'écrire :

¹⁸⁰ Voir les articles de WILKIE [1995] et de KAUFMANN et al. [2001].

¹⁸¹ AHLGRIM et al. [2003], voir 9 pour la description du modèle.

¹⁸² Rappelons que si ε est une variable aléatoire de loi $N(m, \sigma^2)$, $\mathbf{E}[\exp(z * \varepsilon)] = \exp \left\{ zm + z^2 \frac{\sigma^2}{2} \right\}$.

$$\mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ \mathbf{E} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] + \frac{1}{2} \mathbf{V} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] \right\}$$

Comme¹⁸³

$$\mathbf{E} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] = x_t \frac{1 - e^{-a\delta}}{a},$$

et :

$$\mathbf{V} \left[\int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] = \frac{\sigma_I^2}{a^2} \left(\delta - \frac{1 - e^{-a\delta}}{a} - \frac{(1 - e^{-a\delta})^2}{2a} \right),$$

il vient :

$$\mathbf{E} \left[\exp \int_t^{t+\delta} x_s ds \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ x_t \frac{1 - e^{-a\delta}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2} \left(\delta - \frac{1 - e^{-a\delta}}{a} - \frac{(1 - e^{-a\delta})^2}{2a} \right) \right\},$$

et enfin :

$$\mathbf{E} \left[\frac{I_{t+\delta}}{I_t} \mid \Phi_t \right] = \exp \left\{ j\delta + x_t \frac{1 - e^{-a\delta}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2} \left(\delta - \frac{1 - e^{-a\delta}}{a} - \frac{(1 - e^{-a\delta})^2}{2a} \right) \right\}.$$

Le nouveau montant de la provision mathématique en 0 est donc donné par :

$$L_0^I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E} [\tilde{F}_k \mid \Phi_0] * \exp \left\{ jk + x_0 \frac{1 - e^{-ak}}{a} + \frac{\sigma_I^2}{2a^2} \left(k - \frac{1 - e^{-ak}}{a} - \frac{(1 - e^{-ak})^2}{2a} \right) \right\}}{(1+i)^k}.$$

Nous retiendrons pour les applications numériques, les paramètres suivants estimés par Fargeon et Nissan¹⁸⁴ sur les données de l'inflation française depuis janvier 1990, soit :

$$j = 0,0279 \qquad a = 0,7369 \qquad \sigma_I = 0,0056$$

On obtient alors un montant de provision mathématique initiale de 47,9 M€. Le processus de revalorisation des rentes conduit donc à augmenter l'engagement de l'assureur de 46 %. Le poids relatif de la revalorisation est donc très important. L'assureur devra augmenter d'autant la part de ses fonds propres alloués au régime. Par ailleurs les flux espérés en 0 ont l'allure suivante :

¹⁸³ Cf. LAMBERTON et al. [1997] pour le détail des calculs.

¹⁸⁴ FARGEON et NISSAN [2003].

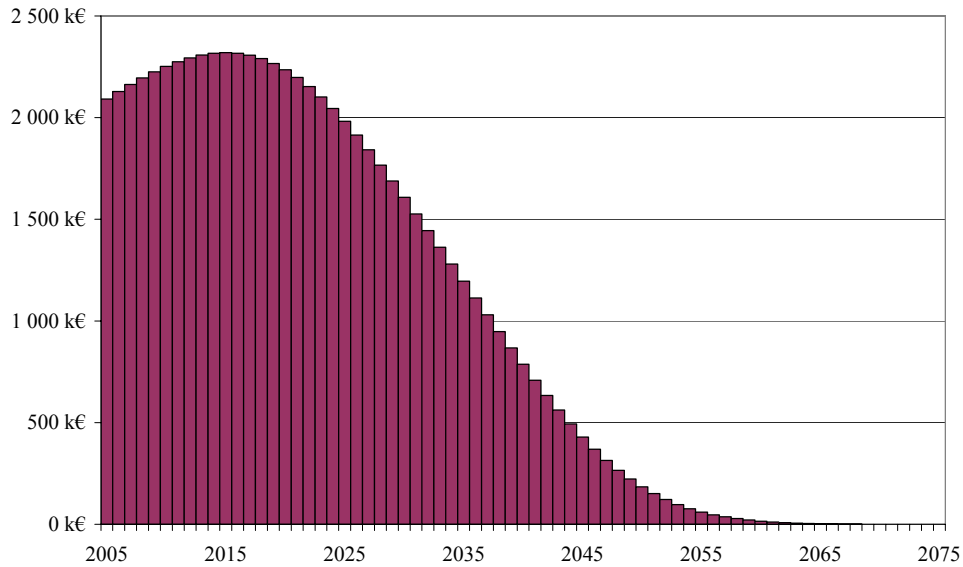


Fig. 54 : Flux de prestations revalorisés espérés

La courbe des flux futurs n'est plus strictement décroissante comme dans le cas où il n'y a pas de revalorisation. En effet c'est l'année 2015 qui, en moyenne, verra le débours (nominal) le plus important. La durée du passif augmente sensiblement pour s'établir à 14,9 ans.

Même avec une volatilité de l'inflation très petite ($\sigma_I = 0,0056$) cette suite de flux est volatile puisque l'intervalle de confiance autour de cette courbe est très large en comparaison avec celui obtenu lorsque les rentes ne sont pas revalorisées :

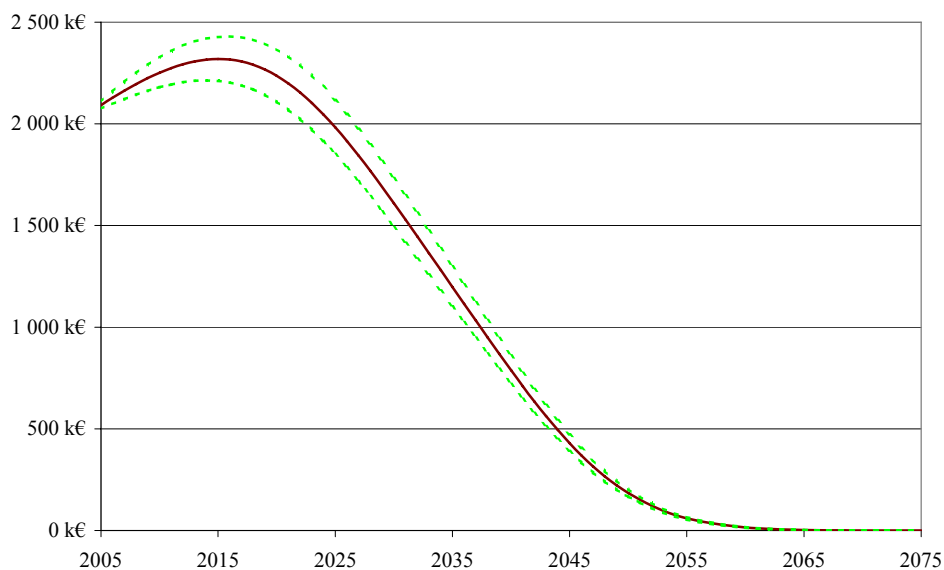


Fig. 55 : Flux de prestations revalorisées – intervalle de confiance à 95 %

La largeur de cet intervalle provient du fait que le risque d'inflation n'est pas mutualisable.

19.2 ALLOCATION D'ACTIFS

Dans cette partie, nous ferons l'hypothèse de parfaite mutualisation des décès et donc que les flux de passif sont connus en 0. En effet les illustrations du paragraphe 18 nous ont permis d'observer que la mortalité n'a pas d'impact sur l'allocation déterminée par le critère des fonds propres économiques et un impact négligeable sur l'allocation déterminée à partir de la probabilité de ruine.

19.2.1 Probabilité de ruine

Le graphique suivant compare les probabilités de ruine selon que les rentes sont ou non revalorisées :

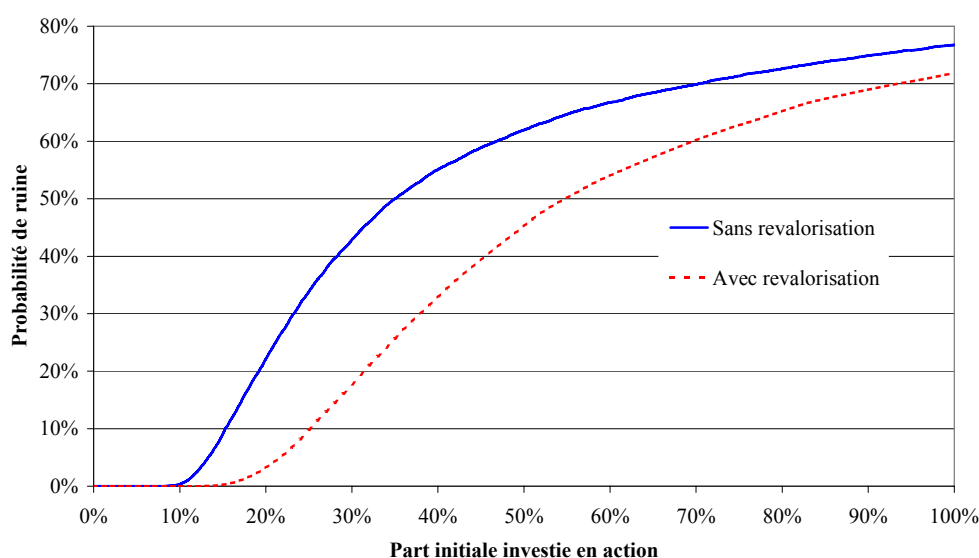


Fig. 56 : Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué

Quelle que soit l'allocation en actif risqué, la probabilité de ruine est inférieure à celle obtenue lorsque les rentes n'étaient pas revalorisées. En effet, bien que l'assureur supporte le risque supplémentaire de voir l'inflation augmenter de manière importante et de ne pas disposer d'assez de réserves pour faire face à ses engagements, l'augmentation de la durée du passif et par-là de la durée de vie moyenne de l'actif joue en faveur de l'investissement en actif risqué. Ainsi, si l'on se fonde sur la probabilité de ruine pour choisir son allocation d'actifs, l'augmentation de la durée du passif est un facteur favorisant l'investissement en actif risqué.

19.2.2 Maximisation des fonds propres économiques

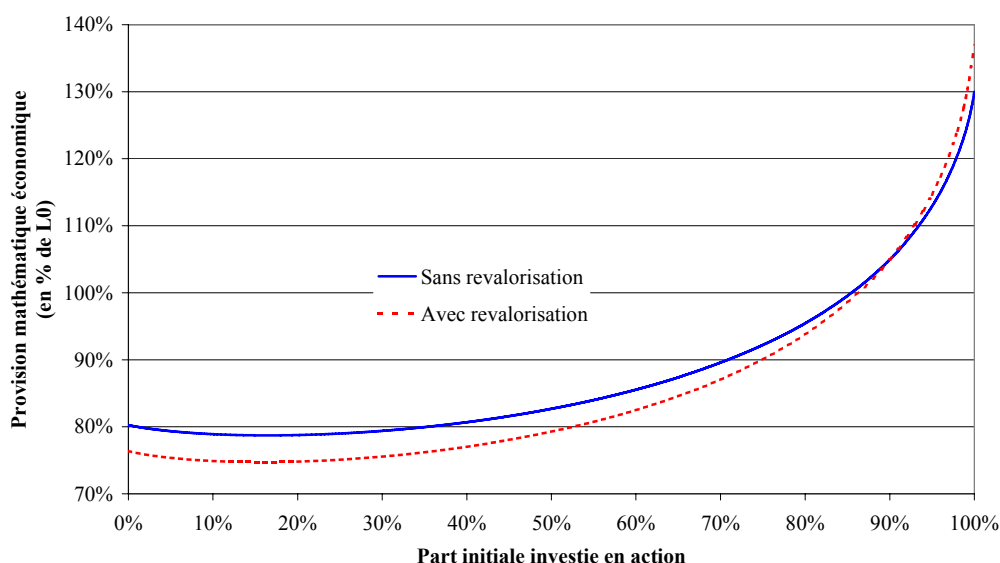


Fig. 57 : Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué

Comme le montre le graphique ci-dessus la provision mathématique économique exprimée en fonction de la provision initiale admet un minimum non trivial pour $\theta = 0,158$.

20 CONCLUSION

L'application des techniques de simulation à des portefeuilles réels permet de proposer des allocations stratégiques d'actifs intégrant des critères plus complexes, et sans doute mieux adaptés à l'activité de l'assurance vie, que le traditionnel modèle de Markowitz et ses dérivés.

On propose ici, pour un régime de rentiers, un critère d'allocation s'appuyant sur la minimisation de l'espérance des flux de prestations futurs actualisés au taux de rendement de l'actif de la société. Ce critère (MFPE) est illustré sur un portefeuille réel et fournit une allocation relativement prudente par rapport aux pratiques du marché. A l'image de critères tels que la probabilité de ruine, il s'avère relativement sensible aux paramètres des modèles d'actifs utilisés.

Le critère de MFPE présente toutefois deux avantages : tout d'abord, il intègre la structure du passif par le biais du profil de flux futurs et ne nécessite pas la simulation de la mortalité

lorsque l'on fait l'hypothèse d'indépendance entre celle-ci et l'évolution des marchés financiers et de l'inflation. En termes opérationnels, ce dernier point est important, puisque la mortalité est lourde à simuler même sur un groupe très réduit. Par ailleurs la prise en compte de l'obligation réglementaire de revaloriser les rentes ne pose pas de problème pratique.

De plus, l'utilisation de ce critère ne repose pas sur un paramètre exogène, tel que le niveau de la probabilité de ruine, dont la détermination peut prêter à discussion (*cf.* les travaux en cours concernant Solvabilité 2) ou encore sur le choix délicat d'une fonction d'utilité de l'assureur.

L'objectif poursuivi ici était de valider la pertinence du critère MFPE dans le cas d'un régime de rentiers dans un cadre simplifié ; nous poursuivons nos travaux pour intégrer au modèle la prise en compte d'obligations indexées sur l'inflation (OATi), le caractère réversible de la rente et la politique de rémunération des actionnaires.

CONCLUSION GENERALE

Synthèse et analyse des résultats

Au terme de cette étude, on peut tenter de tirer un certain nombre de conclusions des travaux présentés :

- ✓ Le risque systématique de mortalité associé au caractère stochastique de la mortalité future n'est pas d'une importance déterminante pour un régime de rentes viagères.
- ✓ Un tel régime est en revanche confronté à un risque de modèle très important et très difficile à évaluer *a priori* (quasiment par définition) dans le choix de la dérive de la mortalité future ; une approche purement rétrospective ne permet pas de capturer une information suffisante pour calibrer ce facteur de risque.
- ✓ Le risque financier est un élément très important des risques portés par le régime, sachant que la part du risque d'assurance¹⁸⁵ dans le risque total diminue rapidement avec la taille du groupe.
- ✓ Du point de vue des assureurs, la prise en charge du risque de revalorisation apparaît aujourd'hui délicate compte tenu du faible nombre d'instruments disponibles pour réaliser un adossement et du poids financier potentiel de ce risque.

De manière synthétique, on peut ainsi retenir qu'un régime de rentes viagères doit faire face à deux risques essentiels : l'incertitude sur l'évolution future de la mortalité et le risque de placement. Ces deux risques sont de nature sensiblement différente, au sens où si le risque de placement peut être maîtrisé et quantifié dans le cadre d'une modélisation convenable de l'actif (en s'attachant à ne pas sous-estimer les queues de distribution, ce

¹⁸⁵ Lié aux fluctuations d'échantillonnage.

qui implique de ne pas se contenter des modèles log-normaux usuels), la prise en compte de l'incertitude sur l'évolution future de la mortalité passe par le pilotage technique du régime et la réalisation d'analyses de sensibilité à la tendance de mortalité future.

Apport du présent travail

Les évolutions en cours tant des dispositifs comptables (IFRS) que prudentiels (Solvabilité 2) conduisent à remplacer des marges de risques implicites calibrées via des choix prudents d'hypothèses par une quantification explicite de la marge de risque. Cette quantification implique donc de disposer d'une information robuste sur la distribution de l'engagement du régime, et non plus seulement de calculer son espérance. Les modèles présentés ici y contribuent.

Ce contexte et les conclusions de notre travail nous amènent à proposer un certain nombre de règles auquel doit se conformer le suivi technique d'un régime de rentes viagères.

En premier lieu, il apparaît délicat de prétendre fixer *a priori* des hypothèses réalistes et pérennes pour l'évaluation des engagements du régime, et il convient donc de mettre en place un pilotage technique ; par pilotage on entend l'actualisation régulière des hypothèses, notamment de mortalité¹⁸⁶, afin d'intégrer « au fil de l'eau » les évolutions constatées de la mortalité et d'ajuster en fonction de ces observations les dérivées modélisées. Les opérations de construction de tables de mortalité d'expérience ou, à tout le moins, le positionnement de la mortalité d'expérience par rapport à une référence externe lorsque la taille du groupe ne permet pas une construction autonome prennent dans ce contexte une grande importance. Dans le cas particulier d'un portefeuille d'assureur, la norme IFRS 4 définit ainsi explicitement les conditions dans lesquelles l'expérience de l'assureur peut être prise en compte¹⁸⁷.

¹⁸⁶ Par exemple tous les 3 ou 5 ans.

¹⁸⁷ Voir sur ce point IASB INSURANCE WORKING GROUP [2006], §14-16.

Un régime de rentes viagères comporte une grande inertie. Il n'est pas alors illégitime de raisonner chaque année compte tenu de la situation de la population et des anticipations quant à son évolution d'une part et des marchés financiers d'autre part. Cette démarche est bien connue des assureurs vie notamment dans le cadre des contrats collectifs pour les régimes d'indemnités de fin de carrière ou de retraite supplémentaire, pour lesquels le taux de cotisation d'équilibre¹⁸⁸ est déterminé annuellement sur la base de l'information disponible, comme s'il allait être constant jusqu'à l'extinction du groupe.

D'un point de vue opérationnel, les techniques de simulation permettent d'obtenir simplement et efficacement, quelle que soit la taille du groupe, l'ensemble des indicateurs d'engagement et de risque dont le régime a besoin, et ce sans simplification excessive de ses règles de fonctionnement. Au surplus, la complexité inhérente à la modélisation du résultat d'un régime de retraite (et, plus généralement, d'une activité d'assurance) rend incontournable le recours aux techniques de simulation pour obtenir des résultats numériques. Elles nous semblent donc devoir être privilégiées par rapport à la recherche d'approches analytiques qui contraignent fortement les modèles. Ces approches par simulation permettent incidemment de répondre aux exigences des états réglementaires C8 et C9 si des garanties en cas de décès viennent compléter les prestations proposées par le régime.

Toutefois, si le principe de base des évaluations de Monte-Carlo est simple et universel (utilisation de la convergence forte de la loi des grands nombres), une mise en œuvre efficace nécessite de prendre quelques précautions. En effet, l'utilisation de résultats approchés par simulation est source de différentes erreurs :

- ✓ Fluctuations d'échantillonnage liées au nombre fini de tirages effectués ;
- ✓ Biais de discrétisation lors de la transformation d'un modèle continu dans sa version discrète ;
- ✓ Erreurs associées aux approximations utilisées par certaines techniques d'inversion ;

¹⁸⁸ Tel qu'il a été défini à la section 14.2.

- ✓ Biais induits par un choix inapproprié du générateur de nombres aléatoires.

Aussi, les algorithmes utilisés en pratique doivent permettre un contrôle quantitatif de l'ensemble de ces sources d'erreurs afin de pouvoir calibrer le nombre de tirages nécessaire pour le degré de précision (un niveau de confiance étant fixé *a priori*) requis. Cet aspect technique de la mise en œuvre des modèles n'a pas été abordé dans le présent travail, il fera l'objet d'une formalisation ultérieure.

Par ailleurs, les analyses d'allocation d'actifs d'un régime de rentes viagère doivent à notre sens prendre en compte dorénavant des supports indexés sur l'inflation tels que les OATi afin de gérer au mieux le risque associé à la garantie de revalorisation. Les développements sur ce sujet restent à écrire, la littérature étant encore peu développée dans le contexte des rentes viagères¹⁸⁹.

Ces différents éléments permettent de tracer les contours de ce que pourrait être la structure d'un modèle interne (au sens de solvabilité 2) pour un régime de rentes, modèle permettant à la fois une représentation réaliste du régime et fournissant les outils nécessaires à son pilotage. On propose de retenir ainsi le « cahier des charges » suivant :

- ✓ Le modèle s'appuie sur des calculs tête par tête¹⁹⁰ et fait appel aux techniques de simulation ;
- ✓ L'actif intègre des taux stochastiques (modèle de type CIR), la prise en compte de discontinuités pour les actions (et, plus généralement, les actifs autres que les produits de taux) et une prise en compte explicite de l'inflation ;
- ✓ L'évaluation du passif fait appel à des tables de mortalités prospectives et permet des mesures de sensibilité de l'engagement à une erreur d'appréciation de la dérive ;

¹⁸⁹ Dans le contexte proche des contrats d'épargne on pourra par exemple consulter MIRABEL [2003].

¹⁹⁰ A la suite de l'Article 115 de la Loi Fillon un débat a vu le jour sur la légitimité des calculs individuels dans le cadre d'un régime de retraite d'entreprise. On se reportera à l'article de SERIZAY et WINTER dans la semaine juridique n°49 « Les régimes à prestations définies et le caractère individualisable - Débat entre l'actuaire et le juriste ».

- ✓ Les flux de prestation distinguent le niveau atteint de la revalorisation des rentes ;
- ✓ Au-delà de la probabilité de ruine à un an, le critère d'allocation d'actifs permet de contrôler la probabilité de ruine sur la durée de vie du groupe fermé ;
- ✓ L'ensemble des indicateurs de passif, de solvabilité et les règles d'allocation sont calculés prioritairement en groupe fermé, l'équilibre projeté dans ces conditions étant une condition nécessaire de la pérennité du régime.

Limites des travaux présentés

L'ensemble des éléments présentés fournit des composants élémentaires pour construire un modèle actif / passif complet pour un régime de rentes, mais l'intégration de ces composants reste à faire : ainsi la prise en compte du modèle d'actifs à sauts dans le cadre du critère MFPE n'a pas été faite, la prise en compte des OATi comme support spécifique dans le cadre de l'allocation reste également à élaborer. Cette première série de limites n'est pas pénalisante sur le fond, au sens où aucune difficulté conceptuelle ne vient empêcher de les lever simplement.

Nous avons par ailleurs, pour des raisons pratiques à la fois de facilité de mise en œuvre et de précision dans le maquettage du régime considéré, privilégié systématiquement une approche par simulation permettant de produire sans beaucoup de formalisme les éléments chiffrés utiles à l'analyse.

Cette approche présente l'inconvénient de rendre délicate la démonstration de certains résultats *a priori* intuitifs, comme par exemple le fait que l'indicateur de risque relatif $\omega(\sigma_\gamma)$ introduit à la section 5.2.1 soit une fonction croissante de σ_γ , ou l'existence d'un minimum non trivial pour le critère MFPE à la section 17.2.2. Si ceci n'est pas pénalisant en pratique, des investigations à ce niveau permettraient sans doute d'établir un certain nombre de résultats qualitatifs sur ce registre utiles à la validation de la cohérence d'ensemble de la modélisation proposée. Au surplus, disposer d'un minimum

de résultats analytiques fournit des « points d’ancrage » utiles pour calibrer des simulations. Toutefois le travail nécessaire à l’obtention de ces résultats est sans doute important.

Enfin, les résultats numériques présentés ici ont été déterminés dans le cadre de prestations non réversibles (à l’exception de la section F) ; l’extension au cas de rentes réversibles ne pose toutefois pas de difficulté, et ne remet pas en cause les résultats obtenus (on peut en première approche considérer que l’existence d’une réversion à 60 % augmente l’engagement d’environ 10 %).

Perspectives

En premier lieu, les perspectives de court terme consistent à intégrer des éléments de modélisation proposés dans le présent travail pour lever ainsi la première série de limites évoquée ci-dessus et donner lieu à la construction d’un modèle interne « générique » (*cf.* 22) pour le pilotage de régimes de rentes viagères.

Par ailleurs, compte tenu des incertitudes fortes pesant sur l’évolution future de la mortalité et de l’impact décisif de cette hypothèse sur le niveau de l’engagement du régime, il apparaît intéressant de construire des modèles prospectifs dans lesquels l’espérance de vie résiduelle cible à un âge et un horizon fixé (par exemple 60 ans dans 30 ans) est un paramètre du modèle, afin de permettre des analyses de sensibilité pertinentes. Les modèles logistiques fournissent un cadre d’analyse *a priori* bien adapté pour cela.

Enfin, nous travaillons à enrichir le critère d’allocation d’actif MFPE pour intégrer au modèle la prise en compte d’obligations indexées sur l’inflation (OATi) et la politique de rémunération des actionnaires.

ANNEXE N°1 : LE DISPOSITIF SOLVABILITE 2

Une société d'assurance se doit d'être solvable, c'est à dire d'assumer ses engagements vis-à-vis des assurés et des bénéficiaires de contrats. L'importance des sommes en jeu et le rôle croissant des entreprises d'assurance dans la société ont conduit l'État à établir des normes permettant le contrôle de la solidité financière des différents intervenants du secteur de l'assurance (sociétés commerciales, IP, mutuelles).

Ces enjeux ont été repris au niveau européen dans le but d'harmoniser les systèmes des différents états membres. Ceci a notamment permis la mise en place de l'agrément unique qui permet à un assureur européen d'intervenir dans les autres pays de l'Union européenne s'il a reçu un agrément dans son pays d'origine. Dans cette optique d'harmonisation européenne, la Commission européenne s'est attachée à établir un système de solvabilité commun. Dans un premier temps, elle a harmonisé les systèmes de marge de solvabilité (Solvabilité 1).

Puis elle a commencé à élaborer un référentiel unique visant à mieux évaluer et intégrer le risque dans les contraintes imposées aux assureurs en vue d'assurer leur solidité financière dans le cadre de Solvabilité 2. Ce référentiel est toujours en cours d'élaboration, mais les éléments d'ores et déjà définis conduisent à privilégier certaines approches qui sont présentées ici.

Les références des documents de la Commission européenne sont indiquées dans le texte ; ces documents sont disponibles en ligne sur le site de la Commission européenne¹⁹¹.

21 MODELES PROPOSES PAR LE PROJET SOLVABILITE 2

21.1 ELEMENTS DE SOLVABILITE EXISTANTS

De nombreux éléments réglementaires concourent à assurer la solvabilité de l'entreprise d'assurance ; on peut notamment citer :

- ✓ L'exigence de marge de solvabilité (Solvabilité 1).
- ✓ Les règles d'allocation d'actifs (dispersion, liquidité, *etc.*).

¹⁹¹ http://europa.eu.int/comm/internal_market/insurance/solvency_fr.htm

- ✓ L'état T3 de gestion actif-passif.
- ✓ Les provisions relatives aux placements (PAF, PDD, PRE).
- ✓ Le test d'exigibilité.
- ✓ Les états C8 et C9 relatifs à la réassurance.

Ces éléments sont relativement disparates et l'objectif de Solvabilité 2 est de les intégrer dans un système cohérent.

21.2 HISTORIQUE DU PROJET SOLVABILITE 2

A la suite de Solvabilité 1 qui était consacré à la marge de solvabilité, le projet Solvabilité 2 a pour but de mettre à jour le système de solvabilité européen en intégrant tous les risques qui pèsent de manière effective sur les sociétés d'assurance.

Solvabilité 2 s'inscrit dans un cadre réglementaire et économique changeant : évolution des techniques de gestion des risques, nouvelles normes comptables (IFRS), *etc.*.

Compte tenu de l'ampleur des travaux à mener, le projet a ainsi été scindé en deux phases :

- ✓ Une première phase de réflexions sur la forme générale que doit prendre le système de solvabilité européen : les principes.
- ✓ Une seconde étape de détermination des méthodes de prise en compte des différents risques : la mise en œuvre des principes.

La première phase de réflexion sur la forme globale du futur système européen de solvabilité est close depuis le 9 avril 2003. Des principes généraux ont été établis en vue de guider les travaux pendant la phase 2. Parallèlement cette phase préliminaire a permis de fixer les méthodes de travail et d'élaboration des éléments du futur système¹⁹². La structure retenue est une structure à 3 piliers identique à celle de Bâle 2¹⁹³ :

- ✓ Exigences quantitatives en termes de capitaux (provisions techniques et capital cible).
- ✓ Gestion interne du risque et surveillance prudentielle par les autorités de contrôle.
- ✓ Information publique en vue d'améliorer la discipline de marché.

¹⁹² cf. MARKT/2539/03

¹⁹³ MARKT/2509/03 - §II.7

21.3 PRINCIPES DE SOLVABILITE 2

Le système de solvabilité doit fournir aux autorités de contrôle les moyens d'évaluer correctement la solvabilité globale de la société d'assurance. Il doit donc couvrir non seulement la mesure quantitative de la solvabilité, mais également des aspects qualitatifs influençant l'exposition au risque de la société¹⁹⁴. Ces aspects qualitatifs ne seront pas développés ici.

Les entreprises d'assurance doivent ainsi être incitées à mieux mesurer et gérer leurs risques, ce qui se traduit en pratique par des principes harmonisés de gestion des risques et de veille prudentielle¹⁹⁵.

Concernant l'exigence de fonds propres, un système à deux niveaux (exigence « cible » et exigence minimale dite « garde-fou ») doit permettre aux autorités de contrôle de disposer du temps nécessaire pour ajuster le mode de détermination de l'exigence cible¹⁹⁶.

Solvabilité 2 doit être cohérent tant avec l'approche Lamfalussy que les règles applicables dans le secteur bancaire (Bâle 2) et recherche une harmonisation des méthodes de contrôle quantitatif et qualitatif maximale¹⁹⁷. La seconde phase doit permettre de déterminer les règles qui seront effectivement appliquées par les sociétés d'assurance. Des groupes de travail (assistés pour certains par des experts externes) feront des propositions sur les différents points techniques du projet.

21.4 PROCESSUS D'ELABORATION

Solvabilité 2 suit les recommandations de l'approche Lamfalussy, en 4 niveaux, décrite de manière synthétique par le schéma ci-après :

¹⁹⁴ MARKT/2509/03 - §II.6

¹⁹⁵ MARKT/2509/03 - §II.8

¹⁹⁶ MARKT/2509/03 - §II.9

¹⁹⁷ Voir notamment MARKT/2509/03 - §II.10 et §II.12

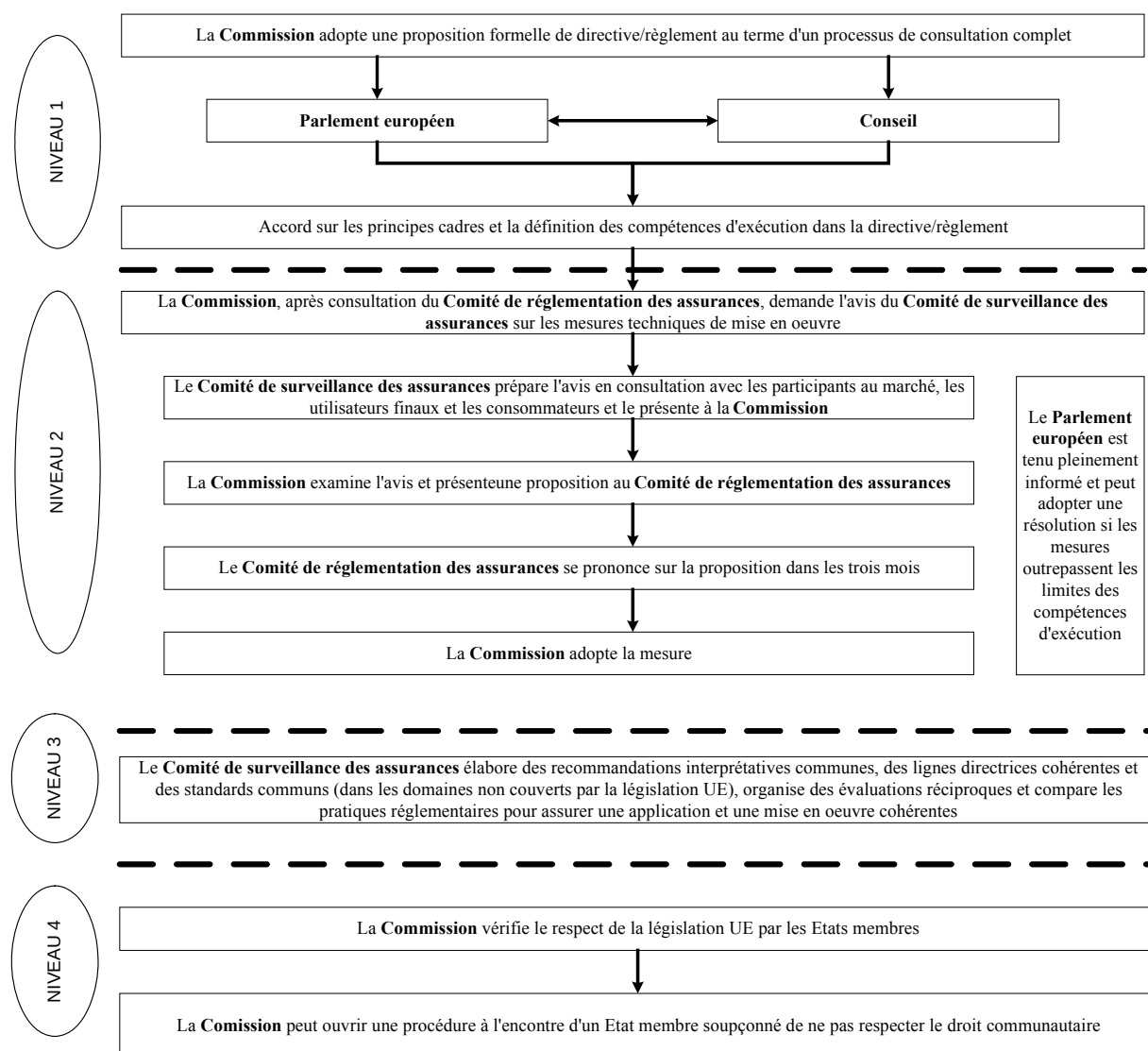


Fig. 58 : *Processus d'élaboration du dispositif Solvabilité 2*

Dans le cadre du premier pilier, les sociétés d'assurance vont être soumises à des exigences particulières en termes de fonds propres. Celles-ci porteront sur deux niveaux, les provisions techniques et le capital cible.

ACTIF	PASSIF
Placements	Fonds propres
	Provisions Techniques (brutes de réassurance)
Part des réassureurs dans les Provisions Techniques	
Créances et autres actifs	Dettes et autres passifs

Tab. 16 : *Bilan-type d'un assureur*

Les exigences associées à ces deux postes sont abordées successivement dans les paragraphes suivants.

21.5 MESURER LE RISQUE

Le choix de la « bonne manière » de mesurer les risques est au centre des problématiques de Solvabilité 2. Ce choix impacte à la fois l'évaluation des provisions et celle du capital cible.

Avant de détailler ces 2 volets, les paragraphes qui suivent proposent un rapide tour d'horizon des mesures de risques acceptables dans le contexte Solvabilité 2. L'objectif est de rappeler brièvement les caractéristiques des principales mesures de risque afin de guider le choix dans le cadre de la mise en œuvre d'une démarche Solvabilité 2.

21.5.1 Value at Risk (VaR)

On rappelle que si X est une variable aléatoire (un risque, ici la charge ultime de sinistres minorée des montants déjà payés) et $0 \leq \alpha \leq 1$ une probabilité, $VaR(X, \alpha)$ est le quantile d'ordre α de X , soit :

$$VaR(X, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$$

L'utilisation de cette mesure de risque s'est développée dans les milieux financiers (*cf.* les différents accords de Bâle) et trouve son origine dans le monde gaussien dans lequel on dispose de formules analytiques (portefeuille combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes).

La VaR fait partie de l'ensemble des fonctionnelles ϕ faisant correspondre à un « risque » X (une variable aléatoire) un réel positif $\phi(X)$, éventuellement infini. Ces fonctionnelles sont appelées mesures de risque. Denuit et Charpentier¹⁹⁸ présentent les principales mesures de risque :

- ✓ VaR , $TVaR$ et Conditional Tail Expectation.
- ✓ Mesure de risque d'Esscher.
- ✓ Mesure de risque de Wang (représentation des mesures de risque).

¹⁹⁸ DENUIT et CHARPENTIER [2004] ; voir également DEMPSTER [2002].

Le choix de la mesure de risque est déterminant car deux mesures de risque différentes peuvent conduire à classer différemment les mêmes risques. Artzner et al.¹⁹⁹ qualifient de cohérente toute mesure de risque respectant les conditions suivantes :

- ✓ Invariance par translation : $\varphi(X + a) = \varphi(X) + a$
- ✓ Sous-additivité : $\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$
- ✓ Homogénéité : $\varphi(a X) \leq a \varphi(X)$
- ✓ Monotonie : $\mathbf{P}[X \leq Y] = 1 \Rightarrow \varphi(X) \leq \varphi(Y)$

La *VaR* n'est pas cohérente car elle n'est pas sous-additive : Si X et Y sont deux risques indépendants de loi de Pareto(2,1) et Pareto(2,2) :

$$X \sim \text{Par}(\alpha, \theta) \Leftrightarrow \mathbf{P}[X \leq x] = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

on obtient :

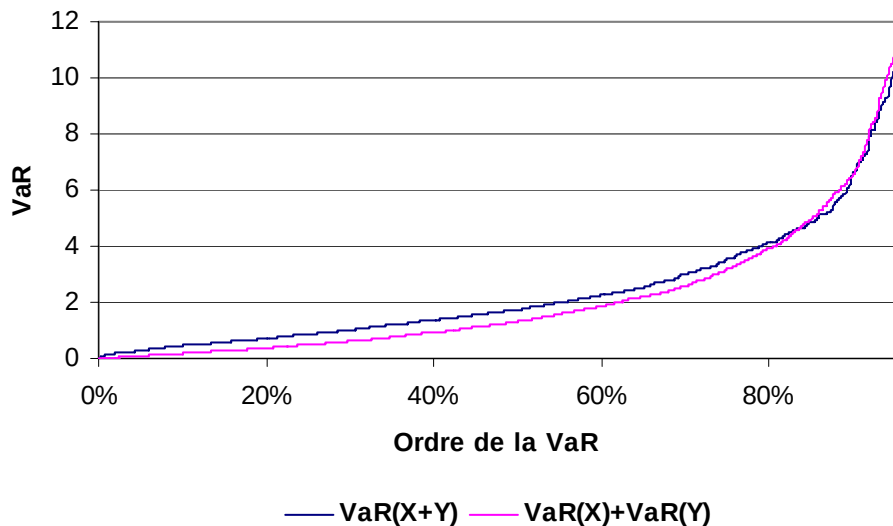


Fig. 59 : *Illustration de la non sous-additivité de la VaR*

21.5.2 Conditional Tail Expectation et TVaR

¹⁹⁹ ARTZNER et al. [1999].

L'idée de la $TVaR$ est d'obtenir une information sur « ce qui se passe » lorsque la VaR est dépassée :

$$TVaR(X, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X, s) ds$$

La Conditional Tail Expectation (CTE) est la valeur moyenne des pertes au-delà de la VaR :

$$CTE(X, \alpha) = \mathbf{E}[X | X > VaR(X, \alpha)]$$

Intuitivement, la CTE représente le « risque moyen » dans les pires $1-\alpha$ cas. Ces 2 notions coïncident si la fonction de répartition de X est continue.

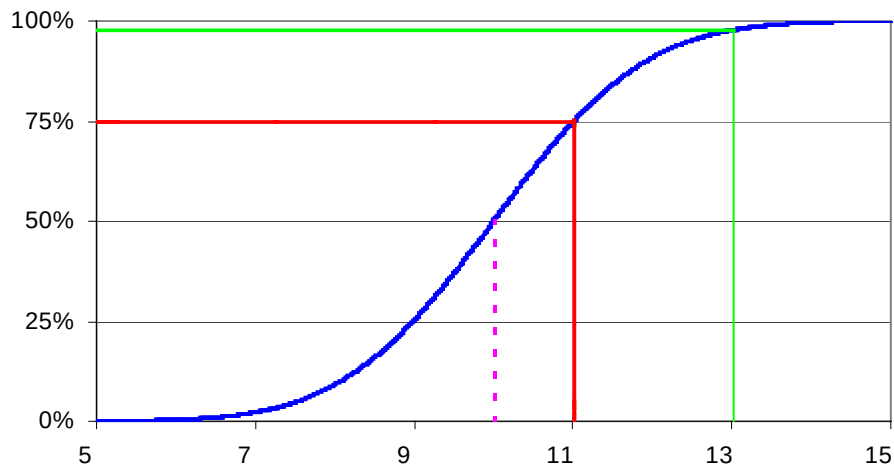


Fig. 60 : Espérance, VaR et TVaR

On notera que, pour un seuil fixé, on a systématiquement $TVaR(X) \geq VaR(X)$. Dans l'exemple ci-dessus, la $TVaR$ à 75% du risque X est égal à la VaR à 97,7% de ce même risque. D'une manière générale on peut observer que :

$$TVaR(X, \alpha) = VaR(\tilde{X}, \alpha) \text{ et } TVaR(X, \alpha) = VaR(X, \beta)$$

où $\tilde{X}$ est par définition la transformée de Hardy-Littlewood de X .

21.5.3 Comparaison des risques

On peut avoir simultanément pour des variables aléatoires X et Y :

$$VaR(X, \alpha) \leq VaR(Y, \alpha) \text{ et } VaR(X, \beta) \geq VaR(Y, \beta)$$

ce qui signifie que le résultat de la comparaison de 2 risques peut, avec la VaR , être différent suivant le niveau de risque accepté. Dans ces conditions, comment dire si X est moins dangereux que Y ou l'inverse ? On définit alors l'ordre stochastique sur les distributions en disant que X est moins dangereux que Y si la VaR de Y domine celle de X quel que soit le niveau de risque.

$$Y \text{ domine } X \Leftrightarrow \forall \alpha > 0, VaR(Y, \alpha) \geq VaR(X, \alpha)$$

Mais alors $E(X) = E(Y)$ et « X moins dangereux que Y » entraîne $X = Y$ (en loi) : deux risques de même espérance ne sont pas comparables. Ceci montre que la VaR est un outil d'un maniement relativement peu adapté à la comparaison des risques, ce qui conduit à s'intéresser aux autres mesures disponibles.

On définit alors l'ordre l'ordre convexe croissant (icx) en disant que X est moins dangereux que Y si la $TVaR$ de Y domine celle de X quel que soit le niveau de risque (si $E(X) = E(Y)$ la restriction de l'icx est appelée ordre convexe).

Cet ordre est caractérisé par les primes stop-loss : X est moins dangereux que Y si la prime SL d'un traité de priorité t est toujours plus faible pour X que pour Y , quelle que soit la valeur de t . De plus, si on ajoute un aléa indépendant centré à X on augmente le risque au sens de l'ordre convexe. Au moment de choisir un critère entre VaR et $TVaR$, on pourra ainsi se référer aux points suivants :

- ✓ La VaR n'apporte pas d'information sur la queue de distribution,
- ✓ La $TVaR$ contient toujours un chargement de sécurité : $TVaR(X, \alpha) \geq E(X)$
- ✓ L'ordre associé à la $TVaR$ a une interprétation naturelle en assurance.
- ✓ Mais les préférences associées à la VaR sont plus stables que celles associées à la $TVaR$.

En pratique toutefois, Solvabilité 2 donne des indications pour guider le choix, et on doit considérer les 2 approches comme complémentaires et non exclusives l'une de l'autre. En effet, le besoin pour la fixation d'un niveau de capital n'est pas à proprement parler la comparaison des risques. Ces deux mesures ne fournissent pas la même information :

- ✓ La *VaR* nous indique la charge de sinistres au-delà de laquelle il y a ruine avec la probabilité α
- ✓ La *TVaR* (ou la *CTE*) nous renseigne sur l'ampleur de la ruine au-delà de ce seuil (une fois le seuil atteint).

L'objectif essentiel de la solvabilité est de contrôler la probabilité de ruine: la *VaR* est un outil « naturel » pour le faire. La *TVaR* fournit alors une mesure de l'intensité de la ruine lorsque elle-ci survient²⁰⁰.

21.6 PROVISIONS TECHNIQUES

Le calcul des provisions techniques diffère d'un état membre à un autre. Solvabilité 2 vise à harmoniser les règles de calcul des provisions en y intégrant de manière quantitative de la prudence.

Plusieurs pistes sont envisagées mais le principe directeur est de mesurer le risque et de choisir le montant de provision en référence à un niveau de risque prédéterminé. Ceci nécessite d'être capable, au préalable, de modéliser la charge ultime de sinistres et de définir ce qu'est le risque (voir la section précédente).

Le projet Solvabilité 2 se focalise sur la provision pour sinistres à payer qui peut être décomposée en trois parties selon l'information relative aux sinistres dont dispose la société :

- ✓ Sinistres connus dont le coût est déterminé mais qui n'ont pas été entièrement réglés (PSAP).
- ✓ Sinistres connus dont le coût n'est pas encore déterminé (PSAP).
- ✓ Sinistres survenus mais pas encore connus (IBNR).

Comme actuellement dans la législation française, la provision pour sinistres à payer comprend également une provision de gestion destinée à payer les frais de gestion des sinistres²⁰¹. Supposons que la charge ultime de sinistres à laquelle a été ôté le montant de sinistres déjà payé (distribution conditionnelle) ait la distribution suivante :

²⁰⁰ Voir notamment DEELSTRA et JANSSEN [1998].

²⁰¹ MARKT/2543/03 - §74

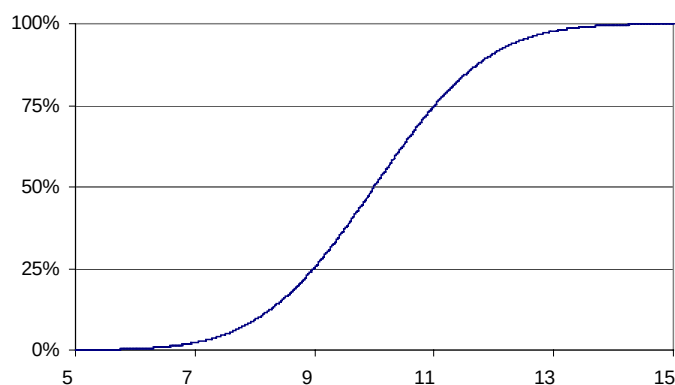


Fig. 61 : *Distribution de la charge sinistre*

Le « best estimate²⁰² » correspond à la charge ultime espérée, supposée ici égale à 10. Il s'agit de l'application directe du principe d'équivalence qui « résume » une variable aléatoire par son espérance (valeur d'une loterie en univers neutre au risque²⁰³).

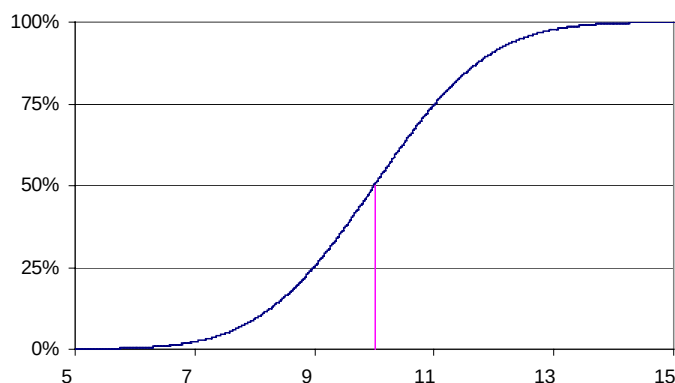


Fig. 62 : *Détermination du « best estimate »*

Actuellement la prudence contenue dans le niveau des provisions techniques n'est pas quantifiée et provient principalement de l'absence d'actualisation et du choix prudent des lois sous-jacentes.

Le contrôle de la sécurisation du dispositif provient donc pour l'essentiel du niveau de fonds propres requis (marge de solvabilité). Le projet Solvabilité 2 préconise l'utilisation de la

²⁰² Sur la notion de « best estimate » on pourra notamment consulter BLUM et OTTO [1998].

²⁰³ Cf. BERNARD [2000].

Value-at-Risk ou valeur ajustée au risque (*VaR*) comme méthode de détermination des PSAP²⁰⁴.

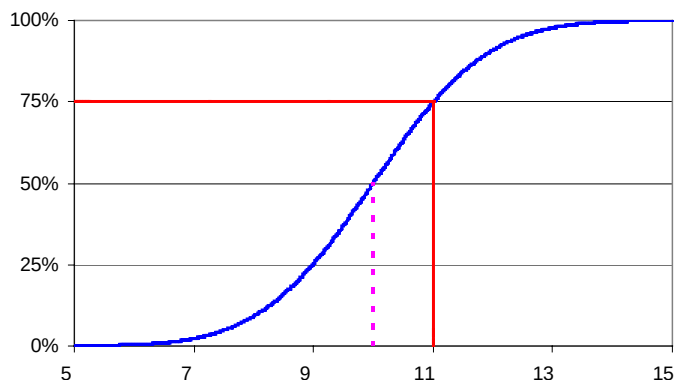


Fig. 63 : Utilisation de la VaR

Des alternatives à la *VaR* ont toutefois été proposées, celles-ci consistent à :

- ✓ Fixer le niveau des PSAP au « best estimate » majoré par un coefficient lié à la volatilité de la branche concernée.
- ✓ Fixer le niveau des PSAP au « best estimate » majoré de la « market value margin ».

C'est notamment l'approche retenue par l'IASB dans le cadre des normes IFRS, cependant le calcul de la « market value margin » n'est pas encore fixé. Il impose d'être capable de définir la prime de risque d'un produit d'assurance.

Illustration : L'approche australienne consiste actuellement à prendre le maximum des montants déterminés par :

- ✓ La VaR à 75 %,
- ✓ Le « best estimate » majoré d'un coefficient lié à la volatilité de la branche. On peut retenir à ce stade que:
- ✓ Ou bien on fixe *a priori* la probabilité d'insuffisance des provisions (critère de type *VaR*) et le montant des provisions s'en déduit;
- ✓ Ou bien on fixe *a priori* le montant des provisions (« best estimate » et variantes) et la probabilité d'insuffisance des provisions s'en déduit.

²⁰⁴ MARKT/2543/03 - §79

Solvabilité 2 privilégie la première approche. Enfin, on peut noter que, si actuellement les provisions techniques en assurance non-vie ne sont pas escomptées (sauf dérogation), pour rester cohérent avec les travaux entrepris par l'IASB, Solvabilité 2 permettra vraisemblablement l'actualisation à un taux sans risque correspondant à la durée du passif considéré²⁰⁵. Au global on peut retenir que l'impact du passage à Solvabilité 2 est délicat à anticiper ; en particulier, le nouveau mode de calcul peut aboutir à des provisions moins élevées, comme l'illustre le graphique ci-dessous :

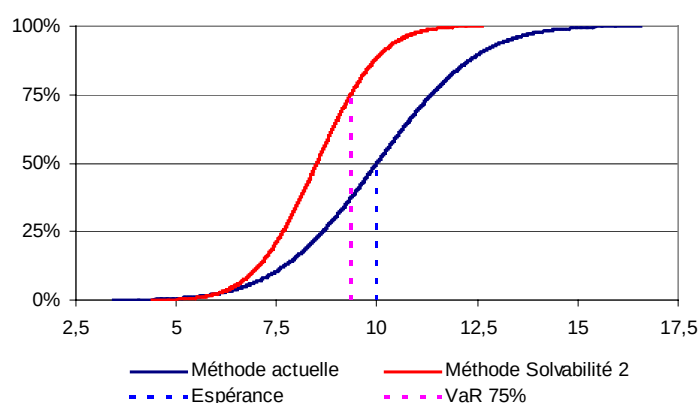


Fig. 64 : Comparaison de la méthode actuelle de provisionnement et de Solvabilité 2

21.7 NIVEAU DES FONDS PROPRES

Dans le bilan de l'assureur la sécurité se situe à deux niveaux : dans les provisions techniques et au niveau des fonds propres.

ACTIF	PASSIF
Placements	Capital
	Provisions techniques

Tab. 17 : *Bilan simplifié*

²⁰⁵ Voir MARKT/2543/03 - §80

Le niveau de sécurité qui sera exigé pour les fonds propres dépendra donc de celui qui aura été requis au niveau des provisions techniques²⁰⁶. La Commission européenne prévoit de fixer des exigences de fonds propres à deux niveaux²⁰⁷ :

- ✓ Un niveau de capital souhaitable : le capital cible, et
- ✓ Un niveau de capital minimum : le « garde-fou ».

Le capital cible est le niveau de fonds propres souhaitable économiquement, c'est à dire le niveau de fonds propres dont la société a besoin pour fonctionner avec une faible probabilité de faillite. Le « garde-fou » est le niveau seuil en dessous duquel une intervention prudentielle de dernier ressort serait inéluctable. Le choix de la mesure de risque²⁰⁸ convenable est en discussion :

- ✓ La *VaR* (approche « probabilité de ruine » directe)
- ✓ La *TVaR* ou la *CTE* (privilégié par l'AAI)

En pratique une approche mixte combinant la *VaR* pour les sinistres « courants » et *TVaR* / *CTE* pour les sinistres « rares » (queue de distribution lourde) pourrait être retenue.

Le « garde-fou » sera calculé « de manière simple et objective ». En assurance non-vie ce pourrait être un pourcentage des provisions techniques comme l'actuelle marge de solvabilité. Il n'est pas prévu que l'utilisation de modèles internes permette de déroger au montant déterminé par la formule qui sera mise en place. La présence de ce « plancher » permettra aux autorités de contrôle de disposer de davantage de temps pour affiner la détermination du capital cible.

Associé aux provisions techniques, le capital cible doit contrôler la ruine de la société sur un laps de temps fixé avec une très forte probabilité. Il peut être rapproché des notions de « capital économique » ou de capital requis par les agences de notation. Le niveau de ce

²⁰⁶ En un sens le point déterminant est le niveau global du bilan, et pas à ce stade la décomposition entre provisions et capital de solvabilité.

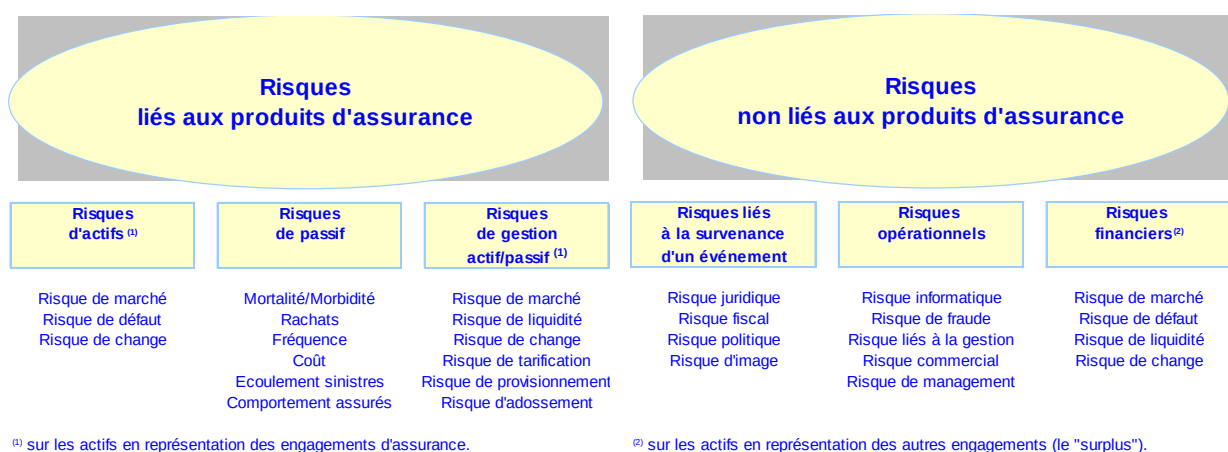
²⁰⁷ MARKT/2509/03 - §24

²⁰⁸ MARKT/2543/03 - §89

capital sera déterminé par une formule intégrant de manière quantitative les différents risques d'actif, de passif et d'actif-passif auxquels est soumise la société²⁰⁹.

Les entreprises qui le souhaitent pourront déroger à cette formule et aboutir à un niveau de fonds propres requis moindre en construisant un modèle interne permettant de justifier que ce niveau de fonds propres est suffisamment prudent²¹⁰.

La formule standard sera commune à toutes les entreprises européennes et sa mise en œuvre ne devra pas être trop compliquée. Certains paramètres de cette formule pourront être fixés au niveau national de manière à retranscrire la réalité du marché national. Elle intégrera explicitement les risques majeurs auxquels sont soumises les sociétés d'assurance, analysés typiquement suivant une grille de la forme :



⁽¹⁾ sur les actifs en représentation des engagements d'assurance.

⁽²⁾ sur les actifs en représentation des autres engagements (le "surplus").

Fig. 65 : Grille d'analyse des risques

La commission européenne pourrait ainsi s'inspirer de la norme RBC adoptée par le National Association of Insurance Commissioners pour établir la formule standard. Cette norme, en vigueur aux États-Unis depuis 1993, consiste à calculer un indice à partir de différents risques :

$$RBC = R_0 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + (R_3 + R_4)^2} + R_5^2$$

où R₀ représente le risque de filiales, R₁ le risque des obligations, R₂ le risque des actions et de l'immobilier, R₃ le risque d'insolvabilité des créanciers (clients ou réassureurs), R₄ le risque d'insuffisance des provisions pour sinistres et R₅ le risque d'insuffisance des primes.

²⁰⁹ Voir DJEHICHE et HORFELT [2004] pour une revue des modèles candidats pour être des modèles standards.

²¹⁰ MARKT/2543/03 - §86-96

Le total (RBC) est comparé aux fonds propres économiques (marge actif-passif réelle). Le QIS 2 suit une démarche analogue²¹¹. On peut noter que ces formules d'aggrégation des risques s'appuient implicitement sur l'hypothèse de risques conjointement gaussiens.

Les entreprises d'assurance pourront déroger à la formule standard si elles ont construit un modèle interne leur permettant de justifier que le niveau de prudence requis est assuré avec un niveau de fonds propres moindre que celui qui aurait été déterminé par la formule de base. Le modèle interne sera implémenté informatiquement et permettra de simuler la ruine de la société à la fin de la période d'observation²¹² et d'en déduire le niveau de fonds propres qui contrôle la probabilité de ruine à un niveau de prudence prédéterminé par les autorités de contrôle.

Cette démarche de type DFA fait déjà l'objet de développements par de grands groupes d'assurance et d'études avancées²¹³.

Le modèle aura été validé au préalable par une autorité externe à la société qui n'est actuellement pas encore définie : autorités de contrôle, actuaire indépendant ? Le processus de validation du modèle interne est déterminant du fait des risques de distorsion de la concurrence induits par des écarts de modèle²¹⁴ et de la difficulté de validation et de suivi d'un modèle interne.

A ce sujet l'International Association of Insurance Supervisors préconise notamment d'utiliser le back-testing pour tester les modèles²¹⁵. De plus les modèles internes devront être périodiquement soumis au processus de validation.

L'impact de Solvabilité 2 sur les fonds propres exigés est difficile à anticiper :

- ✓ Les provisions techniques peuvent être amenées à évoluer et contiendront une part de fonds propres (la prime de risque au-delà du « best estimate »).
- ✓ Quelle est la probabilité de ruine des assureurs avec leurs fonds propres actuels ?

²¹¹ Voir sur ce sujet les documents du CEIOPS [2006].

²¹² MARKT/2543/03 - §89

²¹³ Voir par exemple KAUFMANN et al. [2001].

²¹⁴ Ce point est souligné dans GEMA [2002] Position de l'ACME sur Solvency II. Europe – La lettre du GEMA, décembre 2002.

²¹⁵ IAIS [2003] Stress Testing by Insurers. Guidance Paper.

Le QIS 2 devrait donner quelques éléments d'appréciation sur ce second point dans les semaines à venir.

Solvabilité 2 marque en fait le passage d'un système de solvabilité déterministe dans lequel la prudence est contenue dans les hypothèses d'évaluation des provisions et dans différents matelas à un système où la prudence est quantifiée de manière explicite « *ex ante* ».

21.8 MISE EN PERSPECTIVE AVEC LES NORMES IFRS

L'échéancier de constitution des standards de solvabilité 2 a été établi de manière à venir à la suite de la mise en place des normes IFRS. Si les dispositions de la phase 2 (version définitive) de la norme « assurance » (IFRS 4) ne sont pas encore complètement définies, les orientations de Solvabilité 2 semblent toutefois s'éloigner des projets évoqués par l'IASB principalement sur deux points : les PSAP et la provision pour égalisation.

Concernant la provision pour égalisation, l'IASB préconise sa suppression comme c'est actuellement le cas dans la norme provisoire IFRS 4 (phase 1) alors que les services de la Commission insistent sur son intérêt et prévoient son maintien éventuellement dans les fonds propres avec une fiscalité aménagée.

Pour les PSAP, le modèle le plus souvent évoqué concernant leur évaluation est :

$$\text{PSAP} = \text{« Best estimate »} + \text{« Risk margin Value »}$$

L'écart entre la provision déterminée par Solvabilité 2 et la provision calculée selon les normes IAS sera-t-il intégré aux fonds propres ?

22 ANALYSE GLOBALE DE LA SOLVABILITE : CHOIX D'UN MODELE ACTIF/PASSIF

Un modèle interne consiste à simuler les flux futurs de l'entreprise de manière à déterminer une fonction reliant le niveau des fonds propres au « risque » de l'entreprise. Sa mise en place nécessite donc :

- ✓ La détermination de ce qui caractérise le risque de l'entreprise (la faillite).
- ✓ Le choix d'une mesure de risque (VaR , $TVaR$).
- ✓ La modélisation de l'entreprise (actif, passif et actif-passif).

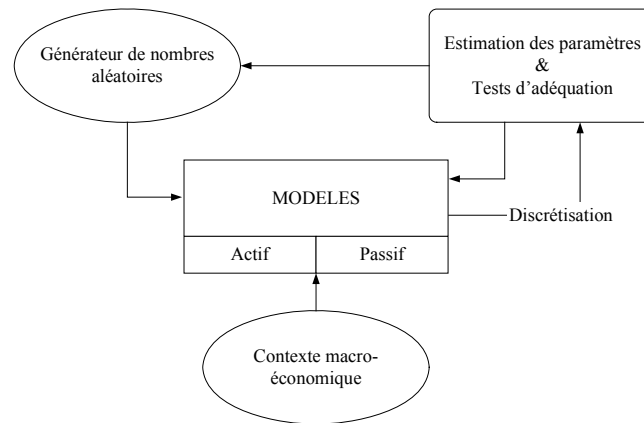


Fig. 66 : Structure d'un modèle interne

La simulation des flux futurs de l'entreprise va donc nécessiter de modéliser les éléments qui sont à la source de ces flux, à savoir les sinistres et les placements.

Généralement, le choix d'un modèle se fonde sur l'hypothèse implicite que la variable modélisée aura dans le futur le même comportement que par le passé. Ceci se traduit notamment dans le choix des paramètres qui sont estimés sur des données historiques. La modélisation d'une variable passe donc par trois étapes : choix d'un modèle, estimation des paramètres du modèle sur la base des données historiques et étude de la robustesse du modèle en vue d'accepter ou de rejeter le modèle choisi.

Remarque : Pour certaines variables pour lesquelles les données historiques sont trop peu nombreuses, les modèles devront être déterminés de manière « ad'hoc » (avis d'experts par exemple).

Le modèle doit notamment intégrer, à l'actif :

- ✓ Évolution des cours et des dividendes/loyers des actifs financiers (actions, OPCVM, immobilier).
- ✓ Évolution des taux d'intérêt.

- ✓ Évolution de l'inflation.
- ✓ Dépendance entre ces différents éléments.
- ✓ Défaut des émetteurs d'obligations.

et au passif :

- ✓ Survenance et montants de sinistres.
- ✓ Sinistres catastrophiques.
- ✓ Défaut des réassureurs.
- ✓ Dépendance entre les branches (auto et MRH par exemple).

Au passif comme à l'actif, les variables modélisées ne sont pas toujours indépendantes. Par exemple une baisse des taux d'intérêt a un impact sur le prix de l'immobilier. Dans le cas de d'un portefeuille d'assurance dommage des événements tels que les tempêtes de 1999 ont pu affecter simultanément les portefeuilles Auto et MRH : les montants de sinistres de ces deux branches ne sont donc pas indépendants. Les modèles internes devront donc de préférence intégrer de la dépendance de manière à être plus pertinents.

L'exigence en capital sera fonction de ce sur quoi est mesurée la ruine. En effet, plusieurs alternatives peuvent être envisagées ; on peut par exemple dire qu'il y a ruine :

- ✓ Si la marge actif-passif (valeur actuelle de l'actif moins valeur actuelle du passif) est négative,
- ✓ Si les fonds propres économiques (capitaux + part des fonds propres dans les provisions techniques) deviennent négatifs au moins un instant sur l'horizon fixé.
- ✓ Si les fonds propres économiques (capitaux + part des fonds propres dans les provisions techniques) sont négatifs à l'horizon fixé.

Ces différentes approches conduiront à des résultats différents pour un même seuil de probabilité de ruine. Elles sont également sensibles à l'horizon : dans la deuxième approche, augmenter l'horizon conduit systématiquement à augmenter les fonds propres, ce qui n'est pas le cas dans la 1^{ère} approche.

L'horizon doit également refléter les branches pratiquées par l'entreprise d'assurance. Un horizon trop court risque de masquer les risques afférents à des branches longues.

23 APPLICATION NUMERIQUE

L'exemple exposé ci-après est celui d'une société ne pratiquant pour unique branche que la responsabilité civile générale. Il est issu de He²¹⁶ et a pour vocation d'illustrer ce que peut être un modèle global de solvabilité de base. Le modèle consiste en la modélisation de l'évolution des différentes catégories d'actifs (actions, immobilier, obligation, *etc.*) et des montants futurs de prestations.

A partir de ces éléments, il est possible pour chaque état du monde du passif et de l'actif, de déterminer la valeur actuelle de l'actif et du passif et, par leur différence, la marge actif-passif. La distribution de cette marge est ensuite observée de manière à déterminer le niveau de fonds propres qui correspond au niveau de prudence souhaité. Dans cet exemple, le niveau de prudence est mesuré par le biais de la probabilité de ruine (*VaR*) : on déterminera le niveau de fonds propres qui contrôle la probabilité de ruine à 1 %.

Le modèle de Vasicek a été retenu pour modéliser la courbe des taux :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dZ_t$$

où :

- ✓ r_t est le taux d'intérêt continu instantané
- ✓ b tendance autour de laquelle oscille le taux spot
- ✓ a intensité de la force de rappel sur la tendance
- ✓ σ volatilité instantanée supposée constante
- ✓ Z_t mouvement brownien standard

Les taux simulés permettront de reconstituer le prix des obligations et d'actualiser les flux de prestations pour déterminer dans chaque simulation la valeur actuelle du passif.

²¹⁶ HE [2004].

Pour ce qui concerne les obligations, on rappelle que, en considérant qu'une obligation est une somme de zéro-coupons de maturité adéquate, le prix d'une obligation peut se déduire facilement de la courbe des taux. En effet, soit une obligation de nominal N , arrivant à maturité en T et de taux coupon c %, son prix théorique à l'instant t , déduite de la courbe des taux en vigueur en t est :

$$P_t^{oblig} = N * \left(c \sum_{t+1}^T B(t, i) + B(t, T) \right)$$

avec $B(t, T) = E \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} / F_t \right]$. Enfin, les actions, OPCVM et actifs immobiliers sont modélisés par des mouvements browniens géométriques.

$$\frac{dP_t^i}{P_t^i} = \mu^i dt + \sigma^i dZ_t^i$$

où $i \in \{\text{Action, OPCVM, Immobilier}\}$. La corrélation entre ces trois actifs est modélisée par la matrice de covariance des trois browniens géométriques :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{Action}^2 & \sigma_{OPCVM, Action} & \sigma_{immobilier, Action} \\ \sigma_{OPCVM, Action} & \sigma_{OPCVM}^2 & \sigma_{immobilier, OPCVM} \\ \sigma_{immobilier, Action} & \sigma_{OPCVM, immobilier} & \sigma_{immobilier}^2 \end{pmatrix}$$

Concernant les prestations, le modèle de Renshaw et Verrall a été retenu. Pour chaque état du monde simulé, la valeur actuelle des prestations est obtenue en actualisant celles-ci au taux d'intérêt sans risque (modèle de Vasicek).

$$VA(\text{Passif}) = \sum_{t=1}^T F_t * \frac{B(0, T)}{B(t, T-t)}$$

où :

- ✓ T est l'horizon de la simulation.
- ✓ F_t est le flux versé en t .
- ✓ $B(t, s)$ est le prix en t d'un zéro-coupon versant 1 en $t+s$.

On retient pour cette illustration un horizon de projection de 15 ans et un nombre de simulations égal à 10 000, ainsi que les valeurs suivantes des différents paramètres :

Modèle de taux

$a = 91,95\%$

$b = 4,60\%$

$r_0 = 2,05\%$

$\sigma = 3,00\%$

Autres actifs

	Action	OPCVM	Immobilier
$\mu =$	6%	5,5%	4%
Taux de dividende =	3%	3%	3%

	Action	OPCVM	Immobilier	
$\Sigma =$	3,0%	0,9%	0,8%	Action
	0,9%	1,9%	0,4%	OPCVM
	0,8%	0,4%	1,1%	Immobilier

Frais de gestion : 11% des prestations

On obtient alors les résultats suivants :

ACTIF		PASSIF	
Placements	35 000	Fonds propres	16 000
Obligation	21 500		
Action	1 000		
OPCVM	11 000	Provisions	19 000
Immobilier	1 500		

Tab. 18 : Bilan

ainsi que la distribution de la marge actif-passif :

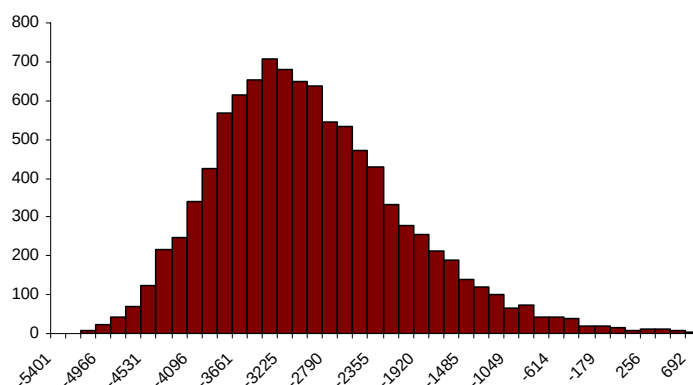


Fig. 67 : *Distribution empirique de la marge actif-passif*

La sensibilité du capital cible au niveau des provisions peut également être mesurée. Intuitivement, plus le niveau de prudence au niveau des provisions est important, plus le niveau du capital cible sera faible pour un même niveau de prudence fixé. Ainsi, dans notre exemple :

Prudence dans le calcul des provisions	Niveau de fonds propres qui contrôle la probabilité de ruine à 1%
- 10 %	6110
0 %	4750
10 %	3368
20 %	1976

Tab. 19 : Niveau des fonds propres et probabilité de ruine

24 CADRE GENERAL

Alors que la comptabilité française, élaborée par le législateur, est un outil de contrôle et de régulation sociale, le modèle comptable anglo-saxon répond à une autre logique : offrir une vision économique de la firme intelligible et fiable, permettant les comparaisons et, ainsi, fournir des outils d'aide à la décision et mesurer la richesse créée pour l'actionnaire.

Les normes IFRS sont établies par l'IASB, l'organisme normalisateur, sur le modèle anglo-saxon. Successeur de l'IAS Committee, l'IASB est un organisme de droit privé dont la création est antérieure à la délégation qui lui a été accordée par l'UE pour établir les normes comptables. A l'image du FASB (son équivalent américain), il doit respecter un certain équilibre dans ses 14 membres : au moins 5 experts-comptables, trois financiers d'entreprise, trois investisseurs et un universitaire. Il n'a pas de caractère spécifiquement européen.

Pour acquérir force légale dans l'UE, les normes IAS/IFRS sont soumises à un mécanisme d'adoption qui se déroule en quatre étapes :

- ✓ Chaque norme fait l'objet d'un avis consultatif de l'European Financial Reporting Advisory Group (EFRAG).
- ✓ A la lumière de cet avis, l'Accounting Regulatory Committee (ARC) prend une décision à la majorité qualifiée.
- ✓ La décision est ensuite validée par la Commission Européenne.
- ✓ La validation est publiée au JOUE.

Le règlement (CE) n° 1606/2002 adopté le 19/07/2002 évoque 3 critères d'appréciation :

- ✓ La conformité aux textes législatifs européens existants.
- ✓ La capacité à donner lieu à une information financière de haute qualité.
- ✓ La contribution au « bien public européen ».

Du point de vue d'un organisme assureur, les principales normes impactant les comptes (en raison de leur lien direct avec l'activité d'assurance) sont les suivantes :

Actif	Normes	Passif	Normes
Ecart acquisition	22, 36	Fonds propres	1, 27, 32
Immobilisations incorporelles	36, 38	Surplus non alloué	4, 39
Immobilisations corporelles	16, 36	Provision assurance	4, 39
Impôts différés	12	Provision réassurance	4, 39
Actions, obligations	39	Avantages personnels	19
Dérivés	39	Provisions instruments financiers	39
Prêts	39	Dettes engagements portant intérêt	39, 32
Participations immobilières	40	Dérivés	39
Créances d'assurance	4, 39	Provisions	37
Créances de réassurance	4, 39	Impôts (à payer, différés)	12
Disponibilités	7, 39	Autres	
Autres			

Pour ce qui concerne les entreprises, c'est la norme IAS 19 relative au provisionnement des engagements sociaux qui modifie les pratiques de provisionnement des engagements au titre des régimes de retraite supplémentaire.

On présente brièvement ci-après les principales caractéristiques de ces normes.

25 NORME IFRS 4

La norme IFRS 4 prévoit les principes de comptabilisation des contrats d'assurance. De par la complexité du sujet, cette norme est provisoire dans l'attente d'une norme définitive (phase 2) en cours d'élaboration.

Cette norme provisoire autorise les assureurs à continuer de comptabiliser leurs contrats d'assurance et leurs contrats contenant des clauses de participation discrétionnaire selon les normes locales avec quelques ajustements.

Un contrat d'assurance au sens de la norme IFRS est « *Un contrat par lequel une partie (l'assureur) accepte un risque d'assurance significatif d'une autre partie (le titulaire de la police) en convenant d'indemniser le titulaire de la police si un événement futur incertain spécifié (l'événement assuré) affecte de façon défavorable le titulaire de la police.* »

Cette définition ne recoupe pas celle du droit français ce qui implique que certains contrats vont être requalifiés en instruments financiers (par exemple les contrats d'investissement avec risque d'assurance non significatif).

Les principales dispositions spécifiques de l'IFRS 4 sont les suivantes :

- ✓ Suppression des provisions pour catastrophe ou des provisions d'égalisation.
- ✓ Mise en place de tests de suffisance du passif qui consiste en la comparaison de la VAP des flux futurs et du montant comptabilisé. Une éventuelle insuffisance serait dotée en impactant le résultat.
- ✓ Possible décomposition d'un contrat d'assurance qui contient un dérivé incorporé (le plus souvent financier) qui ne répond pas à la définition de contrat d'assurance et doit être évalué selon l'IAS 39.
- ✓ Comptabilité reflet (« shadow accounting »).

26 NORMES IAS 32 ET 39

La norme IAS 32 (Instruments financiers : Information à fournir et présentation) doit être considérée avec l'IAS 39 (Instruments financiers : Comptabilisation et évaluation).

L'IAS 32 traite de la présentation des instruments financiers figurant au bilan et de l'information devant être fournie sur ces instruments.

Elle s'applique à tous les instruments financiers : actifs financiers, passifs financiers, instruments de capitaux propres.

L'émetteur d'un instrument financier doit le classer en passif ou capitaux propres (en fonction de la substance de l'instrument financier plutôt que de sa forme juridique ; exemple des obligations convertibles). On peut noter dans les informations à fournir sur les instruments financiers (non exhaustif) : la méthode de gestion des risques financiers, les méthodes d'évaluation des instruments financiers, l'exposition au risque de taux et au risque de crédit, la juste valeur des actifs et des passifs (dire si impossible), les couvertures.

L'IAS 39 traite des principes de comptabilisation, d'évaluation et d'informations sur les instruments financiers. Elle consacre notamment l'utilisation de la « juste valeur ».

Elle s'applique à tous les instruments financiers, à l'exception notamment des actifs et passifs détenus dans le cadre des avantages au Personnel (*cf.* IAS 19). Les actifs et passifs financiers sont initialement comptabilisés à leur coût qui est la juste valeur de la contrepartie donnée ou reçue en échange (y compris les coûts de transaction).

Ensuite, les actifs et les passifs sont comptabilisés de la manière indiquée dans le tableau ci-après.

Catégorie d'actifs	Évaluation et comptabilisation
Prêts et créances émis (non détenus à des fins de transactions) « <i>Originated loans and receivables</i> »	Coût amorti, après déduction des réductions pour dépréciation ou créances irrécouvrables. <i>Variation du coût amorti (« surcote/décote ») en résultat</i>
Titres de participation détenus jusqu'à leur échéance « <i>Held-To-Maturity investments</i> »	Coût amorti, après déduction des réductions pour dépréciation ou créances irrécouvrables. <i>Variation du coût amorti (« surcote/décote ») en résultat</i>
Actifs financiers détenus à des fins de transaction « <i>Financial assets held for trading</i> »	Juste valeur, <i>variations de valeur constatées dans le résultat de l'exercice</i>
Actifs financiers disponibles à la vente « <i>Available-For-Sale financial assets</i> »	Juste valeur, sauf dans de rares cas <i>variations de valeur constatées dans les fonds propres puis dans le résultat de l'exercice de la vente</i>

Tab. 20 : Comptabilisation des actifs et passifs par catégorie

On notera sur cette classification que :

- ✓ La catégorie HTM est soumise à de fortes contraintes (reclassement en AFS notamment si vente prématurée).
- ✓ Dans la catégorie HTM, seulement des actifs avec une date d'échéance (donc pas les actions).
- ✓ La catégorie AFS constitue une catégorie par défaut.

Un dérivé est un instrument financier dont la valeur évolue en fonction de la valeur du sous-jacent, pour lequel l'investissement nécessaire est nettement inférieur à l'investissement nécessaire pour acquérir le sous-jacent et réglé à une date future. Selon l'IAS 39, les dérivés

doivent être séparés de leur contrat hôte et valorisés en juste valeur. La variation de valeur passe en résultat. Les opérations de couverture sont admises si elles sont « très efficaces ».

27 NORME IAS 19

La norme fixe quelques principes simples qui conduisent à décider si un avantage doit donner lieu à la constitution d'une provision. Plus précisément, les critères qui intéressent l'actuaire sont ceux qui conduisent à déterminer les avantages qui doivent donner lieu à des projections au-delà de l'exercice.

Schématiquement, la norme propose les deux critères d'analyse principaux que sont le fait que l'avantage soit gagé par la valeur ajoutée produite ou pas et le fait que l'avantage induise une distorsion par rapport à d'autres entreprises du même secteur ou pas.

Sur la base du premier critère, on ne projette par exemple pas les cotisations employeur à un régime de retraite supplémentaire à cotisations définies (« article 83 ») pour des salariés, puisqu'en contrepartie de cet avantage ils produisent de la valeur ajoutée; à l'inverse, la prise en charge d'une cotisation « mutuelle » pour des retraités doit être projetée puisqu'il n'y a pas de création de valeur en contrepartie (ou plus précisément cette création de valeur est terminée).

Il est important de noter qu'il est nécessaire que la valeur ajoutée produite soit concomitante de la consommation de l'avantage (à 12 mois près) ; en d'autres termes, si l'avantage peut être reporté au-delà de l'exercice, il convient de projeter et de constituer une provision. C'est par exemple le cas des régimes de type CET ou DIF, puisqu'il est possible de reporter les droits acquis au-delà de l'exercice.

En ce qui concerne le second critère, il conduit à projeter et à constituer une provision pour un avantage du type « attribution de 2 jours par an de congés payés supplémentaires pour tous les salariés de plus de 5 ans d'ancienneté », car une entreprise concurrente qui n'applique que le dispositif légal doit, toutes choses égales par ailleurs, avoir une valeur de marché plus importante que celle qui a consenti cet avantage.

La détermination du montant à provisionner comporte schématiquement deux étapes : tout d'abord l'évaluation de l'engagement total, qui représente la contrepartie financière de la globalité de la promesse faite par l'employeur, puis la répartition de cet engagement total entre une part affectable au passé, représentative de droits acquis, et la part complémentaire représentative de droits futurs, restant à acquérir.

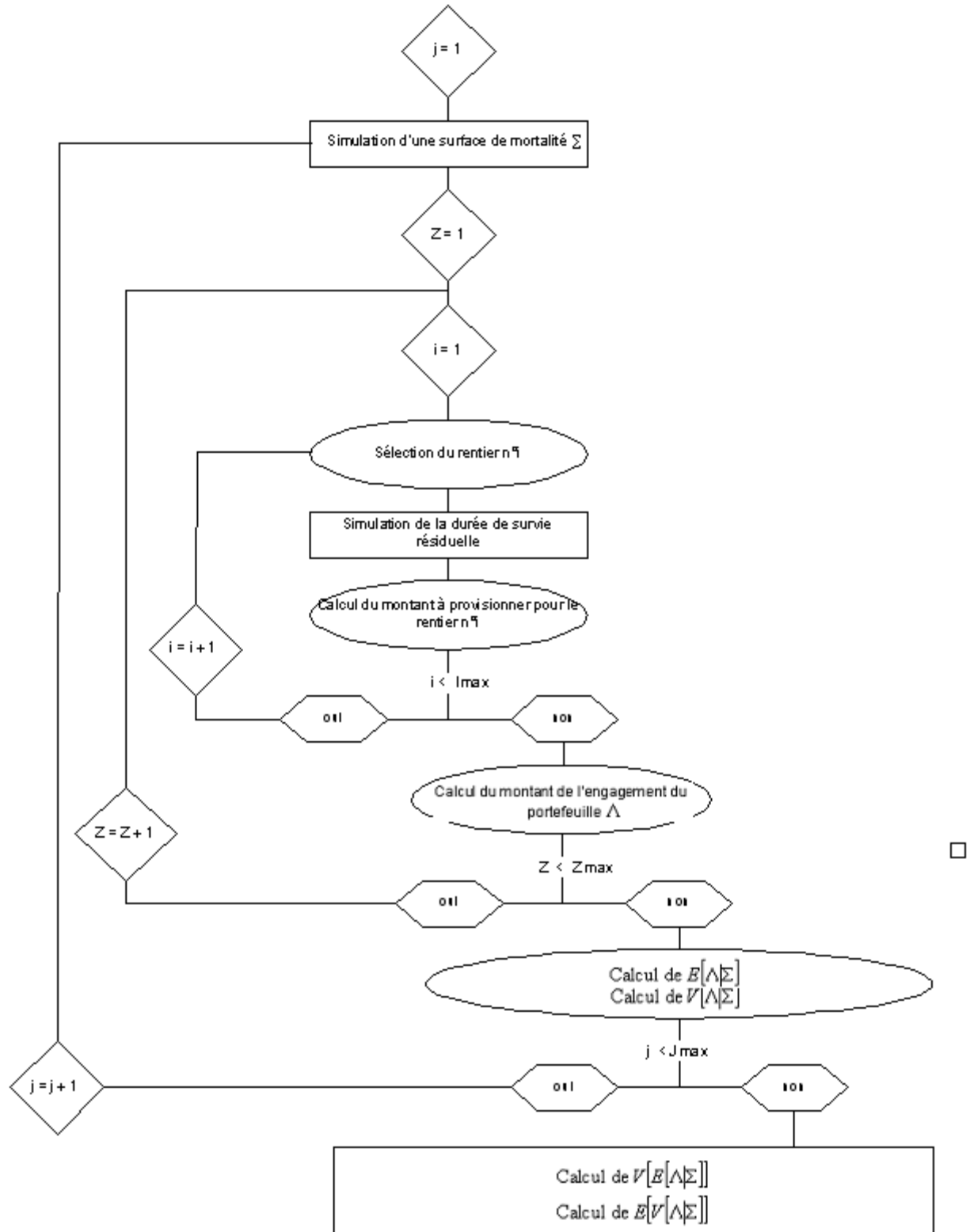
La première étape relève de la compétence de l'actuaire et met en jeu des techniques de projection des montants financiers aléatoires associés au régime considéré. Elle conduit à la notion de « valeur actuelle probable totale » (VAP totale) du régime.

La seconde étape fait appel à un référentiel comptable permettant de fixer les modalités de répartition de cette VAP totale entre le passé et le futur ; elle conduit en IAS 19 à la notion de « projected benefit obligation » (PBO), représentative des droits passés.

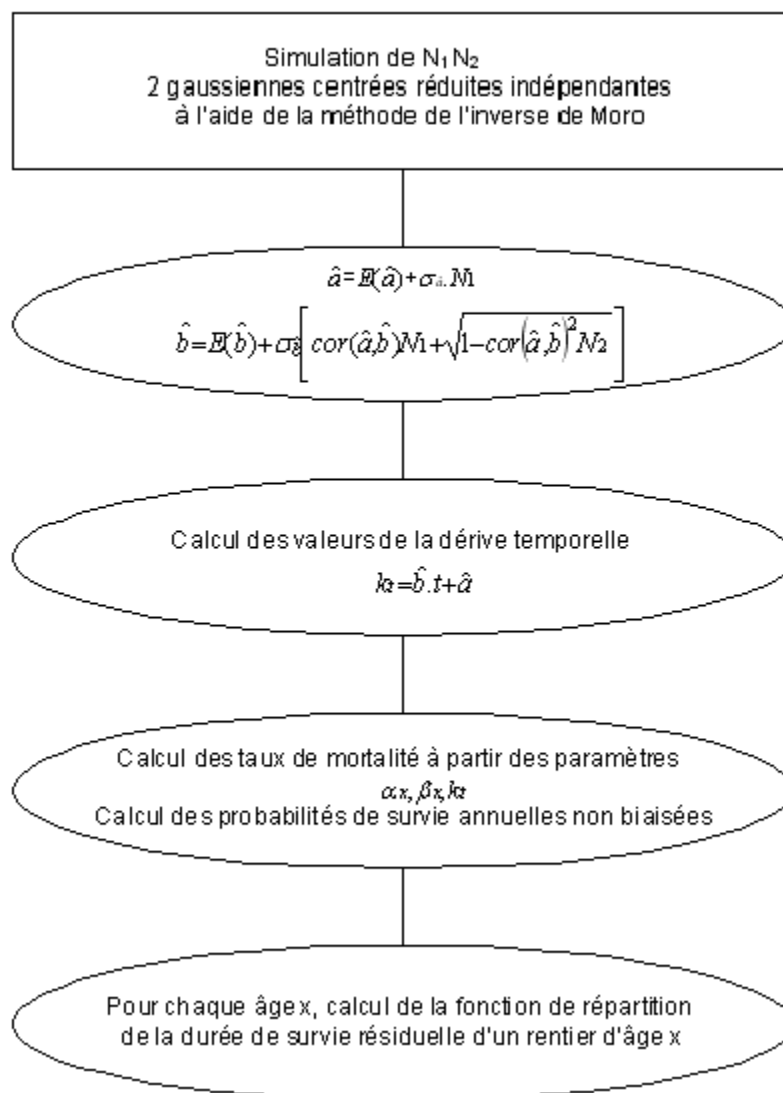
Il est à ce stade important de noter que la notion de VAP totale est déterminée en fonction de méthodes et de techniques essentiellement indépendantes du référentiel comptable utilisé, alors que la notion de PBO découle directement de l'application d'un référentiel comptable particulier.

ANNEXE N°3 : ORGANIGRAMMES (MORTALITE STOCHASTIQUE)

Algorithme principal



Simulation d'une surface de mortalité (incertitude sur la tendance)



Simulation d'une variable gaussienne (algorithme de Moro)

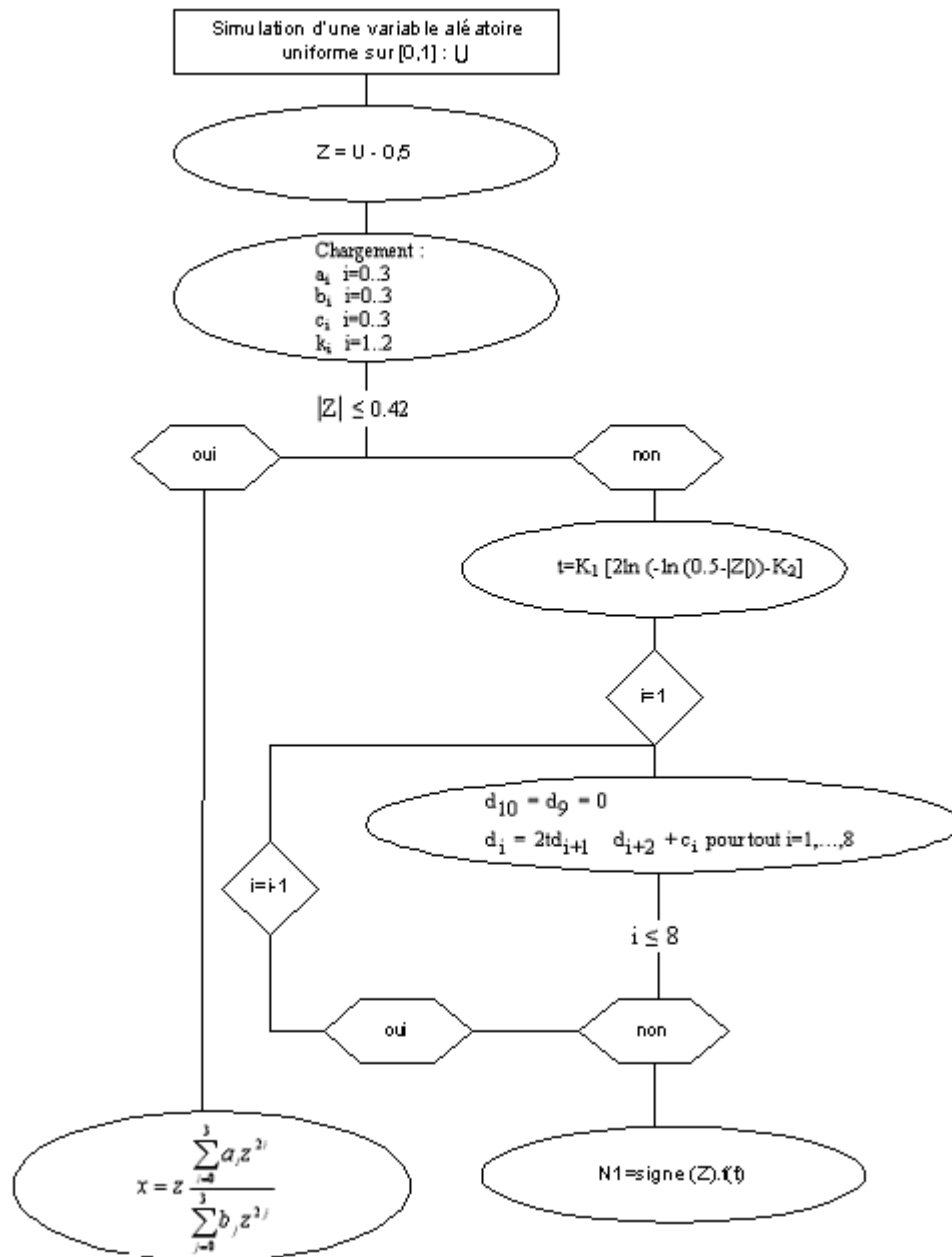


TABLE DES ILLUSTRATIONS

Fig. 1 :	Evolution de l'espérance de vie à la naissance depuis 50 ans.....	5
Fig. 2 :	Evolution discontinue du titre Mercer au mois d'octobre 2004.....	9
Fig. 3 :	Flux de prestations espérées.....	19
Fig. 4 :	Impact de la revalorisation future sur les flux de prestations.....	28
Fig. 5 :	Fluctuations des taux de décès autour de la tendance de long terme.....	30
Fig. 6 :	Evolution du paramètre $k(t)$ avec le temps.....	34
Fig. 7 :	Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter.....	35
Fig. 8 :	Distribution empirique de l'engagement.....	36
Fig. 9 :	Analyse du biais relatif en fonction de l'âge.....	38
Fig. 10 :	Distribution empirique de l'engagement : approche déterministe VS approche stochastique.....	41
Fig. 11 :	Distribution empirique de l'engagement : approche déterministe VS approche stochastique.....	43
Fig. 12 :	Distribution empirique de l'engagement (taille du groupe x100).....	44
Fig. 13 :	Distribution empirique de l'engagement : approche déterministe VS approche stochastique.....	45
Fig. 14 :	Evolution de la part du risque systématique dans le risque global en fonction de σ_γ	46
Fig. 15 :	Evolution de la part du risque systématique dans le risque global en fonction de la taille du portefeuille.....	47
Fig. 16 :	Comparaison des $k(t)$ ajustés avec un modèle linéaire et un modèle AR(3).....	48
Fig. 17 :	Volume de mortalité à 95 % dans le cadre du modèle auto-régressif.....	49
Fig. 18 :	Comparaison des séries $k(t)$ en fonction de la plage d'observation.....	53
Fig. 19 :	Impact de la plage d'observation sur la distribution de l'engagement.....	53
Fig. 20 :	Surface de mortalité ajustée par Lee-Carter.....	58
Fig. 21 :	Surface de mortalité de référence du modèle stochastique.....	58
Fig. 22 :	Simulation de trajectoires de la tendance.....	59
Fig. 23 :	« couloir de variation » de la tendance.....	60
Fig. 24 :	Distribution empirique de l'engagement.....	62
Fig. 25 :	Distribution empirique de l'engagement (population x30).....	63
Fig. 26 :	Evolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans.....	65
Fig. 27 :	Lien entre taux d'inflation et taux d'intérêt.....	74
Fig. 28 :	Evolution discontinue du titre Mercer au mois d'octobre 2004.....	78
Fig. 29 :	Cours à la clôture du titre Alcatel.....	91
Fig. 30 :	Evolution du rendement quotidien.....	91
Fig. 31 :	Distribution du rendement.....	92
Fig. 32 :	Densité des deux modèles de rendement.....	93
Fig. 33 :	Densité du rendement.....	95
Fig. 34 :	Distributions du cours de l'action en 1 pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$	100
Fig. 35 :	Niveau du capital cible γ en fonction de α	101
Fig. 36 :	Flux de prestations espérés du régime.....	106
Fig. 37 :	Distribution empirique de l'engagement.....	111
Fig. 38 :	Provisionnement des droits passés au sens de l'IAS 19.....	112
Fig. 39 :	Projection du fonds collectif.....	113
Fig. 40 :	Exemple de trajectoire du taux de rendement du fonds.....	113
Fig. 41 :	Trajectoire du fonds collectif stabilisée par la réserve.....	114

Fig. 42 :	Evolution de la probabilité de ruine en fonction du taux de cotisation additionnel	115
Fig. 43 :	Flux de prestations espérés ajustés	119
Fig. 44 :	Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué	127
Fig. 45 :	Evolution du TME et des taux réglementaires de janvier 1993 à janvier 2006 ..	128
Fig. 46 :	Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué	131
Fig. 47 :	Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué	131
Fig. 48 :	Sensibilité au rendement de l'actif risqué	132
Fig. 49 :	Sensibilité à la volatilité de l'actif risqué	133
Fig. 50 :	Intervalle de confiance à 95 % des flux de prestations futurs	134
Fig. 51 :	Evolution du risque global et de la part du risque financier dans le risque global en fonction de la part d'actif risqué	136
Fig. 52 :	Evolution du risque global et de la part du risque financier dans le risque global en fonction de la part d'actif risqué pour un portefeuille de rentiers dix fois plus important	137
Fig. 53 :	Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué	138
Fig. 54 :	Flux de prestations revalorisés espérés	143
Fig. 55 :	Flux de prestations revalorisées – intervalle de confiance à 95 %	143
Fig. 56 :	Probabilité de ruine en fonction de la part d'actif risqué	144
Fig. 57 :	Provision mathématique économique (en pourcentage de L_0) en fonction de la part d'actif risqué	145
Fig. 58 :	Processus d'élaboration du dispositif Solvabilité 2	156
Fig. 59 :	Illustration de la non sous-additivité de la VaR	158
Fig. 60 :	Espérance, VaR et TVaR	159
Fig. 61 :	Distribution de la charge sinistre	162
Fig. 62 :	Détermination du « best estimate »	162
Fig. 63 :	Utilisation de la VaR	163
Fig. 64 :	Comparaison de la méthode actuelle de provisionnement et de Solvabilité 2 ...	164
Fig. 65 :	Grille d'analyse des risques	166
Fig. 66 :	Structure d'un modèle interne	169
Fig. 67 :	Distribution empirique de la marge actif-passif	173

BIBLIOGRAPHIE

- AHLGRIM K.C., D'ARCY S.P., GORVETT R.W. [2003] *Report on Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios*, Casualty Actuarial Society & Society of Actuaries, <http://www.casact.org>.
- ARTZNER PH., DELBAEN F., EBER J.M., HEATH D. [1999] « Coherent measures of risk », *Mathematical Finance*, vol. 9, 203-228.
- ASSOCIATION ACTUARIELLE INTERNATIONALE [2004] « A Global Framework for Insurer Solvency Assessment », <http://www.actuaires.org>.
- BACHELIER L. [1900] *Théorie de la spéculation*, Thèse ENS, réed. 1994, Jacques Gabay, Paris.
- BALLOTTA L. [2004] « Alternative framework for the fair valuation of participating life insurance contracts ». *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*, 337-367.
- BATTOCCHIO P., MENONCIN F., SCAILLET O. [2004] « Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases », Forthcoming in *Annals of Operations Research*.
- BELLAMY N. [1999] *Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus*. Thèse de doctorat, Université d'Evry.
- BERNARD P. [2000] *La décision dans l'incertain: préférences, utilité et probabilités*, EURISCO, Support de cours.
- BERNSTEIN P. [1996] *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*, New York : John Wiley & Sons.
- BLACK F., SCHOLES M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities ». *Journal of political Economy*, vol. 81, n°3, 637-654.
- BLUM K.A., OTTO D.J. [1998] « Best estimate loss reserving an actuarial perspective », *CAS Forum Fall*, 55-101.
- BOULIER J.-F., HUANG S. J., TAILLARD G. [2001a] « Optimal Management Under Stochastic Interest », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 28, 173-189.
- BOULIER J.-F., MICHEL S., WISNIA V. [2001b] « Optimizing investment and contribution policies of a defined benefit pension fund », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 28, 173-189.
- BOWERS N., GERBER H., HICKMAN J., JONES D., NESBITT C. [1986] *Actuarial Mathematics*, The society of actuaries.
- BOYLE P., WINDCLIFF H. [2004] « The 1/n pension investment puzzle », *North American Actuarial Journal*, vol. 8.
- BRENNAN M., XIA Y [2002] « Dynamic Asset Allocation under Inflation », *Journal of Finance*, vol. 57, 1201-1238.
- BROUHNS N., DENUIT M. [2001] « Risque de longévité et rentes viagères, Tables de mortalité prospectives pour la population belge », Discussion Paper, Institut de Statistique, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.
- BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, 373-393.

- CAIRNS A., BLAKE D., DOWD K. [2004], « Pricing Frameworks for Securitization of Mortality Risk », *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*, vol. 1, 509-540.
- CAMPBELL R., HUISMAN R., KOEDIJK K. [2001] « Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework », *Journal of Banking & Finance*, vol. 25, 1789-1804.
- CAMPBELL J.Y., VICEIRA L.M. [2001] « Who should buy long term bonds? », *American Economic Review*, vol. 91, 99-127.
- CAPÉRAA Ph., VAN CUTSEM B. [1988] *Méthodes et modèles en statistique non paramétrique*, Presses de l'Université Laval, Paris: Dunod.
- CAREY J.R., TULAPURKAR S. Ed. [2003] *Life Span, Evolutionary, Ecological and Demographic Perspectives*, Population and Development Review (sup. to vol. 29) , Population Council.
- CEIOPS [2004] Document de travail pour la réunion du sous-comité "Solvabilité" du Comité des assurances du 22 avril 2004.
- CEIOPS [2006], « Quantitative Impact Study 2 – Technical Specification », CEIOPS (<http://www.ceiops.com>)
- CHARUPAT N, MILEVSKY, M. [2002] « Optimal asset allocation in life annuities: a note », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 30, 199-209.
- CHENUT X., FRANTZ C., WALHIN J.F. [2003] « Pricing and capital allocation for unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee », *Proceedings of the 13th AFIR Colloquium*, 337-367.
- CHENUT X., DESMEDT S., WALHIN J.F. [2004] « Actuarial Pricing for Minimum Death Guarantees in Unit-Linked Life Insurance: A Multi-Period Capital Allocation Problem », *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*.
- COMMISSION EUROPEENNE [2002a] « Considérations sur la corrélation entre le projet Solvabilité 2 et l'extension de l'approche "Lamfalussy" à la réglementation des assurances », Document de travail, MARKT/2519/02.
- COMMISSION EUROPEENNE [2002b] « Résumé du rapport du groupe de travail sur l'assurance vie », Document de travail, MARKT/2528/02.
- COMMISSION EUROPEENNE [2002c] « Résumé du rapport du groupe de travail sur les provisions techniques en assurance non-vie », Document de travail, MARKT/2529/02.
- COMMISSION EUROPEENNE [2002d] « Considérations sur la forme d'un futur système de contrôle prudentiel », Document de travail, MARKT/2535/02.
- COMMISSION EUROPEENNE [2002e] « Solvabilité 2 : Point sur les travaux en cours », Document de travail, MARKT/2536/02.
- COMMISSION EUROPEENNE [2002f] « Réflexions sur la structure d'une directive cadre et mandats sur des points techniques », Document de travail, MARKT/2539/02.
- COMMISSION EUROPEENNE [2003] « Conception d'un futur système de contrôle prudentiel applicable dans l'Union européenne – Recommandation des services de la Commission », Document de travail, MARKT/2509/03.
- COMMISSION EUROPEENNE [2004a] « Complément: Sujets de discussion et suggestions de demande d'avis à CEIOPS – Document de travail pour la réunion du sous-comité "Solvabilité" du Comité des assurances du 22 avril 2004 », Document de travail, MARKT/2502/04.
- COMMISSION EUROPEENNE [2004b] « Solvency II – Organisation of work, discussion on pillar I work areas and suggestions of further work on pillar II for CEIOPS », Document de travail, MARKT/2543/03.

- CURRIE I.D., DURBAN M., EILERS P.H.C. [2004] « Smoothing and forecasting mortality rates », *Statistical Modelling*, vol. 4, 279-298.
- DAHL M. [2004] « *Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts* ». Insurance: Mathematics and Economics, 35 (1), 113-136.
- DEBON A., MARTINEZ-RUIZ F., MONTES F. [2004] « Dynamic Life Tables: A Geostatistical Approach », IME Congress.
- DEELSTRA G., JANSSEN J. [1998] « Interaction Between Asset Liability Management and Risk Theory », *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, vol. 14, 295-307.
- DELWARDE A., DENUIT M. [2006] *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*, Paris : Economica.
- DEMPSTER M.A.H. (éd.) [2002] *Risk Management: value at risk and beyond*, Cambridge University Press.
- DENUIT M., CHARPENTIER A. [2004] *Mathématiques de l'assurance non-vie*, tome 1, Paris : Economica.
- DENUIT M., QUASHIE A. [2005] « Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges », *Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique Université Catholique de Louvain*, Louvain-la-Neuve, Belgique.
- D'ESTAMPES L. [2003] *Traitement statistique des processus alpha-stables*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- DEVOLDER P. [2001] « les univers virtuels de la finance », *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 1, 10-17.
- DJEHICHE B., HORFELT P. [2004] « Standard Approaches to Asset and Liability Risk », Working paper.
- DOUARD H. [2000] « Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaires », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 4, n°8, 141-151.
- DRITSCHEL M., PROTTER Ph. [1999] « Complete markets with discontinuous security price » *Finance and Stochastics*, vol. 3, 203-214.
- FAMA E.F. [1965] « The behavior of stock market price ». *Journal of business*, vol. 38, 34-195.
- FAMA E.F., ROLL R. [1971] « Parameter estimates for symmetric stable distributions ». *Journal of American Statistical Association*, vol. 66, 331-336.
- FARGEON L., NISSAN K. [2003] *Recherche d'un modèle actuariel d'analyse dynamique de la solvabilité d'un portefeuille de rentes viagères*, Mémoire d'actuariat, ENSAE.
- FEDOR M., MOREL J. [2006] « Value at Risk en assurance: recherche d'une méthodologie à long terme », Actes du congrès ICA 2006.
- GRASSELLI M. [2004] « Méthodes récentes de gestion des fonds de retraite », *Banque & Marchés*, n°72, 52-58.
- GUTTERMAN S., VANDERHOOF I.T. [1999] « Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects », *North American Actuarial Journal*, vol. 2, 135-138.
- HAAS S. [2006] *Méthodologie d'évaluation économique des traités proportionnels en réassurance vie - Application au swap de mortalité*, Mémoire d'actuariat, ISFA.
- HARDY M. R. [2001] « A regime switching model of long-term stock returns », *North American Actuarial Journal*, vol.5 n°2, 41-53.
- HE L. [2004] *Méthodes de provisionnement et analyse de solvabilité d'une entreprise d'assurance non-vie*. Mémoire d'actuariat, ENSAE.

- HIDALGO M. [1992] « Création et utilisation simplifiée des tables de mortalité de générations prospectives femmes appliquées aux assurances de rente : TPG50 », Mémoire d'actuariat, Université Louis Pasteur – Strasbourg.
- HULL J., WHITE A. [1987] « The pricing of options with stochastic volatilities ». *Journal of Finance*, vol. 42, 281–300.
- IASB INSURANCE WORKING GROUP [2006] « Overview of the Board's preliminary conclusions so far (Agenda Paper 2) », Observer notes, 29-30 juin 2006.
- LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2^e édition. Paris : Ellipses.
- LE PAGE D. [2000] *Risque de défaut : une approche par intensité*, Mémoire d'actuariat, ENSAE.
- JANSSEN J. [1992] « Modèles stochastiques de gestion d'actif-passif pour les banques et les assurances », *Transactions of the 24th International Congress of Actuaries*, ICA-ACI, Montréal, 131-139.
- JEANBLANC M., RUTOWSKI M. [1999] *Modelling default risk : an overview*. Mathematical Finance : Theory and Practice, Fundan University.
- JOSA-FOMBELLIDA R., RINCÓN-ZAPATERO J.P. [2004] « Optimal risk management in defined benefit stochastic pension funds », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 34, 489-503.
- JUILLARD M. [2006] « Identification et quantification des risques techniques pour un régime de rentes », Mémoire d'actuariat, ISFA.
- KAHNEMAN D., TVERSKY A. [1982] « On the study of statistical intuitions », *Cognitions* 11: 123-141
- KAUFMANN R., GADMER A., KLETT R. [2001] « Introduction to Dynamic Financial Analysis », *ASTIN Bulletin*, vol. 31, 213-249.
- KIMELDORF G.S, JONES D.A. [1967] « *Bayesian graduation* », *TSA*, XIX
- LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2^e édition, Paris : Ellipses.
- LEE P.J. [2000] « A General Framework for Stochastic Mortality and Investment Risks », *Heriot-Watt University*, Working Paper.
- LEE R.D., CARTER L. [1992] « Modelling and forecasting the time series of US mortality », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 87, 659–671.
- LEE R.D. [2000] « The Lee–Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications », *North American Actuarial Journal*, vol. 4, 80–93.
- LEIBOWITZ M., KOGELMAN S. [1991] « Asset allocation under shortfall constraints », *Journal of portfolio management*, vol. 17, 18-23.
- MANDELBROT B. [1962] « Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy ». *Comptes rendus à l'Académie des sciences*, vol. 254, 3968–3970.
- MANDELBROT B. [1963] « The variation of certain speculative prices ». *Journal of business*, vol. 36, 394–419.
- MANDELBROT B. [2005], *Une approche fractale des marchés*, Paris : Editions Odile Jacob
- MARKOWITZ H. [1952] « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, vol. 7, 77-91.

- MESLE F., VALLIN J. [2002] « Comment améliorer la précision des tables de mortalité aux grands âges ? Le cas de la France », *Population* n°4, INED, 603.
- MERTON R.C. [1976] « Option pricing when underlying stock returns are discontinuous », *Journal of Financial Economics*, vol. 3, 224-44
- MIRABEL A. [2003] « L'apport des obligations indexées sur l'inflation dans la gestion des contrats d'épargne », Mémoire d'actuariat, ISFA.
- PETAUTON P. [2004] *Théorie et pratique de l'assurance vie*, 3^e édition, Paris : Dunod.
- PLANCHET F. [2005] « Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentiers », note méthodologique de l'Institut des Actuaire.
- PLANCHET F. [2006] « Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentes – note de présentation », Publication de l'Institut des Actuaire.
- PLANCHET F., FAUCILLON L., JUILLARD M. [2006] « Etude du risque systématique de mortalité », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 74 (3)
- PLANCHET F., JACQUEMIN J. [2003] « Méthodes de simulation », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 6, n°11, 3-69.
- PLANCHET F., JUILLARD M. [2006] « Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité – application à un régime de rentes », *Assurance et gestion des risques*, Soumis.
- PLANCHET F., MAGNIN F. [2000] « L'engagement d'un régime de retraite supplémentaire à prestations définies », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 4, n°7, 1-28.
- PLANCHET F., LELIEUR V. [2006] « Construction de tables de mortalité prospectives : le cas des petites populations », à paraître dans le *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 6, n°13.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2004a] « Allocation d'actifs d'un régime de rentes en cours de service », *Proceedings of the 14th AFIR Colloquium*, vol. 1, 111-134.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2004b] « Les principes de valorisation des engagements sociaux », *RF Comptable*, n°310.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2005a] « Allocation d'actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non-vie : présentation et mise en œuvre dans la réglementation française et dans un référentiel de type Solvabilité 2 », *Proceedings of the 36th ASTIN Colloquium*.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2005b] « Simulation de trajectoires de processus continus », *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 5, 1-13.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2005c] « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », *Proceedings of the 15th AFIR Colloquium*.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JACQUEMIN J. [2005] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques*, Paris : Economica.
- PLANCHET F., THÉRON P.E. [2006] *Modèles de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.
- PLANCHET F., WINTER P. [2006] « L'utilisation des splines bidimensionnels pour l'estimation de lois de maintien en arrêt de travail », *Bulletin français d'actuariat*, à paraître.
- RAMEZANI C.A.; ZENG Y. [1998] « Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes: application to security prices ». Working paper.

- RENSHAW A.E. [1991] « Actuarial graduation practice and generalized linear and non-linear models », *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 118, 295–312.
- REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*, third edition. Berlin: Springer Verlag.
- RONCALLI T. [1998] « La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique », Thèse Université Montesquieu - Bordeaux IV
- SAPORTA G. [1990] *Probabilités, analyse des données et statistique*, Paris : Editions Technip.
- SCHRAGER D.F. [2004] « *Affine Stochastic Mortality* », Working Paper
- SERANT D. [2005] « Construction de tables prospectives de mortalité », Document interne Fédération Française des Sociétés d'Assurance.
- SITHOLE T., HABERMAN S., VERRALL R.J. [2000] « An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 27, 285–312.
- TAYLOR G. [1992] « A bayesian interpretation of Whittaker-Henderson graduation », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 11, 7-16.
- TENAM E. [2004] *Méthodes de Monte-Carlo pour la finance*, Support de cours de l'université Paris 7.
- VERON N. [2003] « Normalisation comptable internationale : une gouvernance en devenir », Complément au rapport du Conseil d'Analyse Economique : *Les normes comptables et le monde post-Enron*.
- WALTER C. [1994] *Les structures du hasard en économie : efficience des marchés, lois stables et processus fractals*. Thèse de doctorat, IEP Paris.
- WILKIE A.D. [1995] « More on a stochastic asset model for actuarial use », *British Actuarial Journal*, vol. 1, 777-964.

Pilotage technique d'un régime de rentes viagères : identification et mesure des risques, allocation d'actif, suivi actuariel.

Résumé: Les évolutions récentes tant des dispositifs réglementaires et comptables que des pratiques de place conduisent à une analyse plus fine et plus segmentée des risques portés par un régime de rentes viagères. Dans ce contexte, une révision de la modélisation classique d'un tel régime s'impose, en tenant compte notamment au passif du risque associé à l'incertitude sur la mortalité future (mortalité stochastique et risque de modèle) et à l'actif au caractère essentiellement discontinu des cours des actifs dans lequel le régime investit ses avoirs. Le présent travail définit les grandes lignes d'une modélisation actif / passif d'un régime de rentes viagères intégrant ces contraintes.

Mots-clés : Retraite à prestations définies, allocation d'actifs, probabilité de ruine, fonds propres économiques, mutualisation, revalorisation, Solvabilité 2, IFRS 4, évaluation d'engagement.

Technical management of a defined prestation pension scheme : risk identification and measure, asset allocation and actuarial management.

Abstract : Recent evolutions as well of the solvency and accounting rules as practices of place lead to a finer and more segmented analysis risks faced by life annuities plans. In this context, a revision of the traditional modeling of such a plan is essential, by taking into account in particular for the liability of the risk associated with uncertainty on future mortality (stochastic mortality and model risk) and for the asset side of the primarily discontinuous character of the asset's evolution. This work defines the broad outline of a modelling asset / liability management of a life annuities plan integrating these constraints.

Keywords : Defined benefit plan, asset allocation, ruin probability, economics capital, mutualization, pension adjustment, Solvency II, IFRS 4, benefit obligation.