



HAL
open science

Modèle de reconstruction d'une surface échantillonnée par un méthode de ligne de niveau, et applications

Alexandra Claisse

► **To cite this version:**

Alexandra Claisse. Modèle de reconstruction d'une surface échantillonnée par un méthode de ligne de niveau, et applications. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT: . tel-00443640

HAL Id: tel-00443640

<https://theses.hal.science/tel-00443640>

Submitted on 31 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèle de reconstruction d'une surface échantillonnée par une méthode de ligne de niveau, et applications.

THÈSE DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 18 novembre 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie – Paris 6

Spécialité Mathématiques Appliquées

par

Alexandra CLAISSE

Composition du jury

Rapporteurs : Rémi ABGRALL
Jean-François REMACLE

Examineurs : Cécile DOBRZYNSKI
Pascal FREY
François JOUVE
Yvon MADAY

Directeur de thèse

Invité : Bruno DESPRÉS

Après avis favorables des rapporteurs : Rémi ABGRALL, Jean-François REMACLE et James SETHIAN.



Remerciements

Je tiens, en premier lieu, à remercier Pascal pour m'avoir donné l'opportunité d'effectuer cette thèse, pour avoir eu confiance en moi et pour m'avoir proposé un sujet aussi riche, avec des applications multiples qui donnent un réel sens à ce que l'on fait.

Je remercie très sincèrement Rémi Abgrall, Jean-François Remacle et James Sethian pour avoir accepté et pris le temps de rapporter cette thèse ainsi que Cécile, François Jouve, Yvon Maday et Bruno pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai entendu un jour cette phrase : *Le bonheur ne vaut que s'il est partagé*. Ces mots prennent tout leur sens aujourd'hui et je souhaiterai partager cet accomplissement avec tous ceux qui m'ont entourée pendant ces trois ans.

Je pense en premier lieu à Laurent, qui a été d'un soutien et d'une amitié sans faille et incommensurables. Merci pour tout. Ma Rachida, sans qui cette thèse n'aurait pas été ce qu'elle a été. Ta présence, ta gentillesse et ton amitié ont fait que mes journées au labo n'étaient pas les mêmes quand tu n'étais pas là. Je pense aussi à mon ex expatriée Maya avec qui j'ai adoré partager ces supers moments à l'autre bout du monde et qui même à distance était très présente dans ma vie. Je suis contente que tu sois rentrée !

Un très grand merci aussi à tous ceux qui ont créé une ambiance de travail hors du commun au sein du labo : Evelyne (merci pour ta repartie, les papotages réguliers, reviens vite nous voir !), ma xixou (ma compagne de piscine, de soirée filles, ma "relève"), Joelle (la vie n'est vraiment pas facile... ;)), Fred (merci pour ton aide précieuse à un moment plus "théorique" de ma thèse et pour tes jeux de mots légendaires), Nicole (le 2D01 n'a plus jamais été le même sans toi), Nico L. (pour tes visites du lundi), Cuc (pour tes nems :p), Mathieu G. (ah ah pour ton rire reconnaissable entre tous et ta superbe tarte au citron), Benjamin B., Etienne, Bawer, Matthieu L., Giacomo, Sepideh, Nicolas R., Raphaël, Pierre, Benjamin A., Thomas, Khash (pour ta théorie du complot perpétuelle), Filipa (aie aie aie c'est la catastrophe), Ulrich (Razouuuu), JF, Radu, Driss, Nico S., Nico V. et Franck.

Merci à ceux qui ont pris le temps de relire quelques mots ou plusieurs chapitres de ce manuscrit (Pascal bien sûr, Laurent, Cécile, Fred, Maya, Alexis et Ben).

Merci aussi à ceux qui ont participé à cette thèse, de plus loin par la distance, mais qui ont eu une place importante : Cécile, qui a pris son rôle de "grande sœur" très à cœur, Frédéric A. qui m'a beaucoup aidé sur la fin de ma thèse et sans qui ces beaux exemples 3D n'existeraient pas et notre cher Pascual H. pour ses cours formidables de Scilab en licence, pour son projet Cemrac's, pour sa wii, et sa pascual mobile.

Merci également à ceux avec qui j'ai partagé l'organisation de notre fameux GTT (Stéphane, Joelle et Nico R.).

Une pensée particulière également pour Yvon Maday et Edwige Godlewski qui ont toujours su être à mon écoute et efficaces pour tout type de problème et de requête au cours de cette thèse. Un grand merci aussi à Salima, Florence, Mme Ruprecht et Mme Boulic pour vos démarches parfois compliquées pour nous rendre la vie plus facile au labo.

Merci au projet Gamma (INRIA) pour le financement de ces 3 derniers mois de thèse.

Merci à tous ceux qui ont été en coulisses et qui font partie de ma vie quotidienne pour mon plus grand plaisir.

Merci à mes parents qui m'ont toujours encouragée. Je suis très fière et émue que vous soyez là ensemble aujourd'hui pour partager ce moment si important avec moi.

Et enfin, bien sûr, un immense merci à mon chou pour tout l'amour, l'attention, la compréhension et la patience dont tu as fait preuve pendant ces trois années.

Table des matières

Introduction	1
I Du modèle à l'analyse	19
1 Modèle	23
1.1 La méthode des lignes de niveau	23
1.2 Notre algorithme	25
1.3 Un algorithme représentatif	25
1.4 Notre EDP	27
1.4.1 Existence et unicité de la solution	28
1.4.2 Problème de minimisation équivalent	34
2 Schémas numériques	35
2.1 Présentation des schémas	36
2.2 Approximation des dérivées en espace	36
2.2.1 Approximation du gradient	36
2.2.2 Approximation de la courbure moyenne	37
2.3 Consistance	38
2.3.1 Cas du laplacien	38
2.3.2 Cas du terme général de courbure moyenne	41
2.4 Stabilité	46
2.4.1 Schéma explicite d'ordre un	46
2.4.2 Schéma semi-implicite du premier ordre	51
2.4.3 Convergence	54
II Applications numériques	57
3 Maillages	61

3.1	Définitions générales : adaptation de maillage	61
3.1.1	Estimateur d'erreur	61
3.1.2	Méthodes d'adaptation	62
3.1.3	Maillages isotropes vs. maillages anisotropes	63
3.1.4	Métriques	63
3.1.5	Schéma général d'adaptation de maillage	65
3.2	Notre méthode d'adaptation	67
3.2.1	Estimation d'erreur	67
3.2.2	Tenseur de métrique	68
3.2.3	Discrétisation de la courbe reconstruite sur le maillage adapté	70
4	Implémentation numérique	73
4.1	Résolution d'un système linéaire	73
4.2	Structure de données de maillage et algorithmes	73
4.3	Renormalisation	75
4.4	Schéma général de l'implémentation numérique	77
5	Premiers exemples	79
5.1	Caractérisation de l'échantillon	79
5.2	Comparaison avec le schéma classique du laplacien à 5 points	82
5.3	Étoile	83
5.3.1	Comparaison sur plusieurs maillages	84
5.3.2	Donnée bruitée	87
5.3.3	Autre condition initiale	90
5.4	Traitement des singularités : cas d'un carré	91
5.5	Donnée contenant plusieurs composantes connexes	92
6	Comparaison avec une approche « classique », un schéma d'éléments finis	95
6.1	Approche semi-discrète en temps	95
6.1.1	Formulation variationnelle	95
6.1.2	Existence et unicité d'une solution	96
6.2	Implémentation	97
7	Quelques exemples représentatifs	101
7.1	Cartographie	101
7.2	Océanographie	102
7.3	Application bio-médicale	104

7.4	Application graphique	105
7.4.1	Application à la hiérarchie de modèles	106
	Conclusion et perspectives	109
III	Annexe	113
	Annexe : Calculs coordonnées barycentriques	115
1	Dans le cas des triangles	115
2	Dans le cas des carrés	115
	Table des figures	117
	Bibliographie	121
	Résumé/Abstract	131

Introduction

Motivation

Dans les domaines de la simulation numérique et de la modélisation, le type de données dont on dispose a connu une évolution ces dernières années. L'émergence des données échantillonnées, discrètes, a changé la façon d'aborder les simulations. En effet, la numérisation permet la construction et la manipulation d'une représentation discrète d'un objet du monde réel. On peut ainsi disposer, par exemple, d'un ensemble de points (*cf.* figure 1) pour lequel il n'y a pas de représentation analytique connue, c'est-à-dire, sans équation associée. Un des problèmes géométriques soulevés par l'utilisation de ce genre de données est le suivant :

|| *Peut-on faire passer une surface régulière, simple, fermée et dont on ne connaît pas l'équation, par un ensemble de points ? Si oui, comment ?*

Pour simplifier, on pourra supposer que les points de l'ensemble appartiennent à une surface Γ plus régulière que seulement affine par morceaux, par exemple C^2 , qu'il faudra approcher au mieux. Différentes interrogations découlent de ce problème. Est-ce un problème bien posé (existence et unicité d'une solution) ? Peut-on concevoir un algorithme (schémas numériques) pour trouver cette surface Γ ? Quelles seraient les propriétés numériques de celui-ci ? Que doit-on attendre du degré de régularité de la surface obtenue ? Comment la caractériser sans équation ? Comment l'utiliser une fois construite ?

Dans cette thèse, je vais reformuler ce problème en termes mathématiques pour tenter de répondre à ces questions.

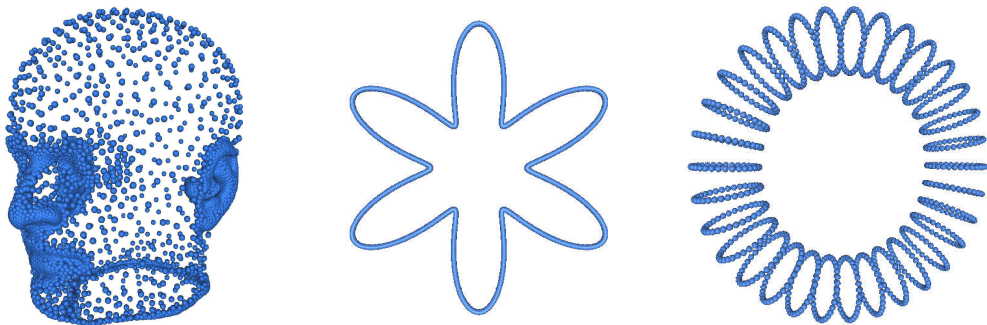


FIG. 1 – Exemples de nuages de points en dimensions 2 et 3.

La motivation générale de ce travail repose sur la construction d'une surface régulière simple fermée et orientable à partir d'un ensemble V de points donnés. Les seules données disponibles sont les coordonnées des points. Par contre, ces points ne sont pas aléatoirement distribués dans \mathbb{R}^3 , mais proviennent d'un échantillonnage ou d'un processus de discrétisation. Ces points peuvent provenir d'images, et ils représentent alors un objet du monde réel. Ils caractérisent, par exemple, le contour d'un objet sur une image segmentée. L'un des buts de cette étude est de pouvoir définir la frontière d'un domaine de calcul à partir de cette surface reconstruite. On montrera que cette approche peut aussi permettre d'améliorer la qualité d'un maillage ou d'une image. Des exemples d'applications sont présentés ci-dessous pour illustrer ce problème.

Dans quel but ?

Ce problème de reconstruction de surface est d'un intérêt crucial :

- dans des simulations numériques mettant en jeu l'évolution au cours du temps d'interfaces aux propriétés physiques ou chimiques différentes (*cf.* figure 2, où l'on peut observer une interface évolutive entre deux fluides). Par exemple, en pré-traitement de ce type de calcul, on peut reconstruire une surface puis utiliser une approximation polynomiale de celle-ci pour servir de support à une méthode d'éléments finis.

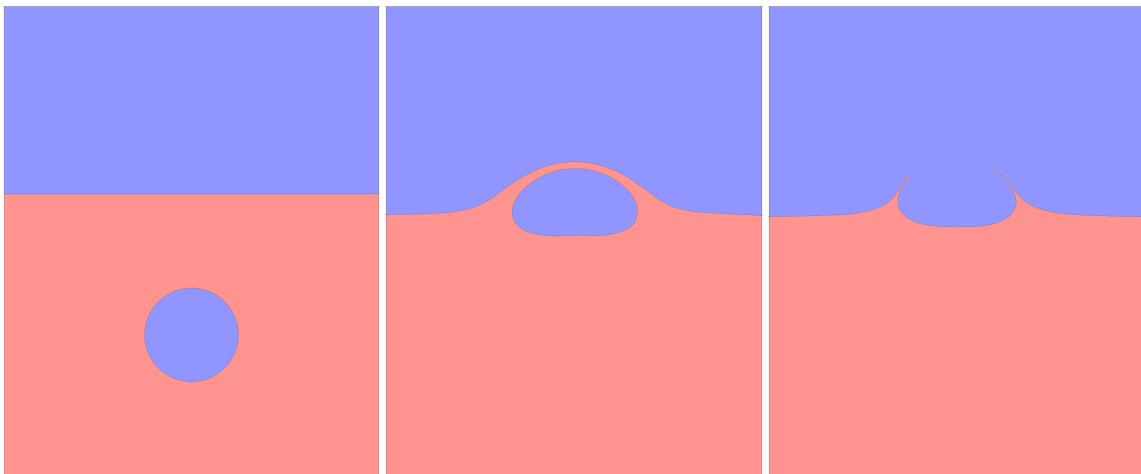


FIG. 2 – *Interface entre deux fluides [BFM09].*

- dans des applications bio-médicales, où la reconstruction virtuelle d'organes (*cf.* figure 3 pour le cas du cerveau), à partir de points provenant d'images IRM (imagerie par résonance magnétique) segmentées, permet d'améliorer la lecture et la compréhension de celles-ci. Une autre application est la reconstruction faciale où les points sont issus d'un scanner (nuage de points surfacique).

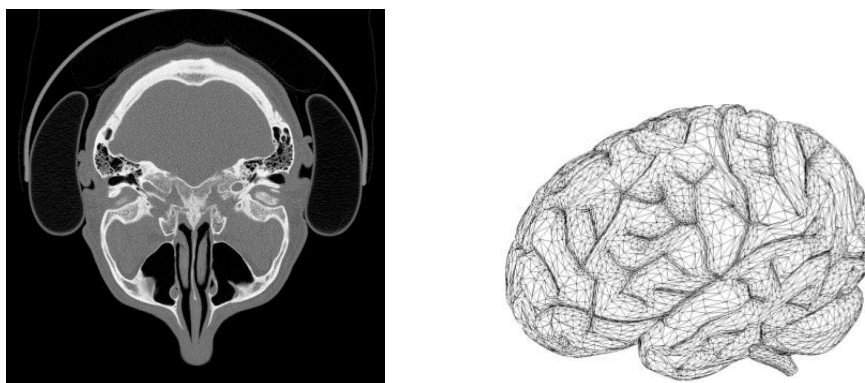


FIG. 3 – Coupe IRM d'un crâne (à gauche) et maillage d'un cerveau dont les points proviennent d'une image IRM (à droite).

- dans des applications industrielles comme l'ingénierie inverse, où il s'agit de reconstruire la surface de pièces de moteur (cf. figure 4¹) dont on ne connaît pas le modèle géométrique initial, afin d'avoir une représentation numérique de ces pièces (visualisation, pilotage de machines outils *etc.*). Cette étape de pré-traitement précède des simulations numériques sur ces nouveaux domaines (combustion, résistance des matériaux *etc.*) éventuellement par des méthodes de type éléments finis.

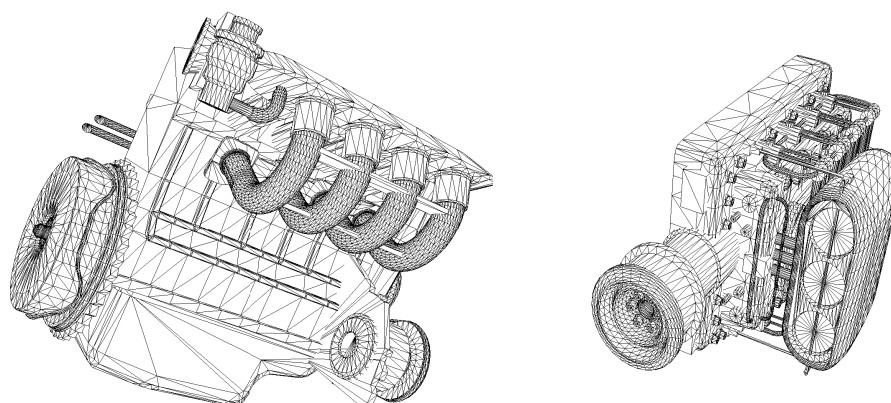


FIG. 4 – Maillages géométriques de pièces de moteur.

- dans des applications graphiques (cf. figure 5²), par exemple pour la visualisation, le traitement d'images ou pour la numérisation d'œuvres d'art (visites virtuelles de musées). Il s'agira de concevoir des modèles hiérarchiques de surface, de résolutions différentes, afin d'adapter la représentation de l'objet à différentes échelles permettant ainsi d'optimiser la visualisation. Lorsque l'utilisateur s'approche virtuellement d'un objet, on substituera des modèles de plus en plus précis pour améliorer la qua-

¹Remarque : les maillages des figures 3, 4 et 5 sont des données et non des surfaces reconstruites.

²statue « l'Ange de Lumière » du Palazzo Bargagli-Petrucci (Italie), donnée numérique fournie par M. Levoy, Université de Stanford.

lité de la visualisation. Un autre exemple concerne des applications en cartographie pour lesquelles on dispose de relevés de points à la surface de terrains (télé-détection, océanographie *etc.*).

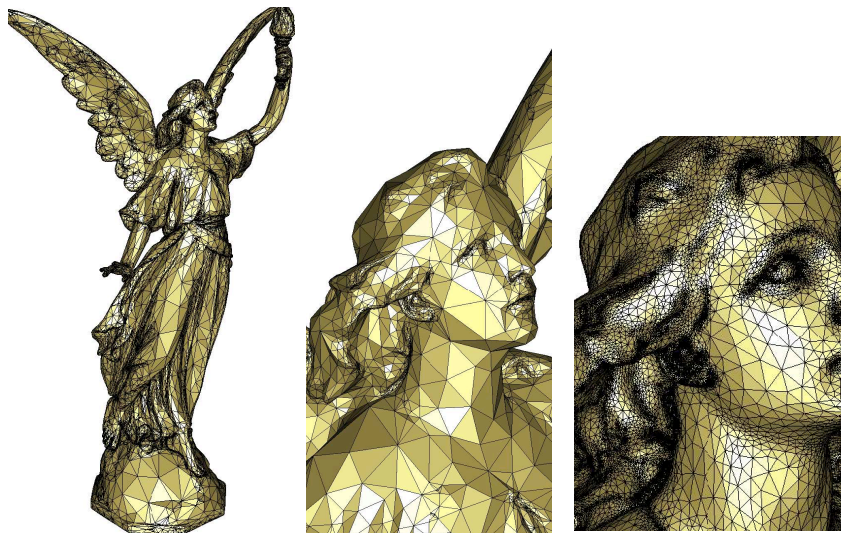


FIG. 5 – *Maillage de statue, modèles hiérarchiques.*

Pour toutes les applications envisagées, il est possible que la donnée initiale (nuage de points) ne soit pas aussi bien définie qu'on puisse l'espérer et contienne, par exemple, du bruit. Dans ce cas, au lieu de chercher une surface interpolante, on préférera trouver la surface qui passe *au mieux* par l'ensemble de points, permettant ainsi de réduire le bruit. En d'autres termes, on souhaite faire passer cette surface au plus près des points, c'est-à-dire dans un voisinage de chacun d'eux, plutôt qu'exactly par tous les points. Ceci revient à appliquer un filtre (*cf.* figure 6), en fonction du degré de confiance accordé à cet échantillon. Par exemple, on peut réduire le rapport signal / bruit (RSB) d'images IRM.

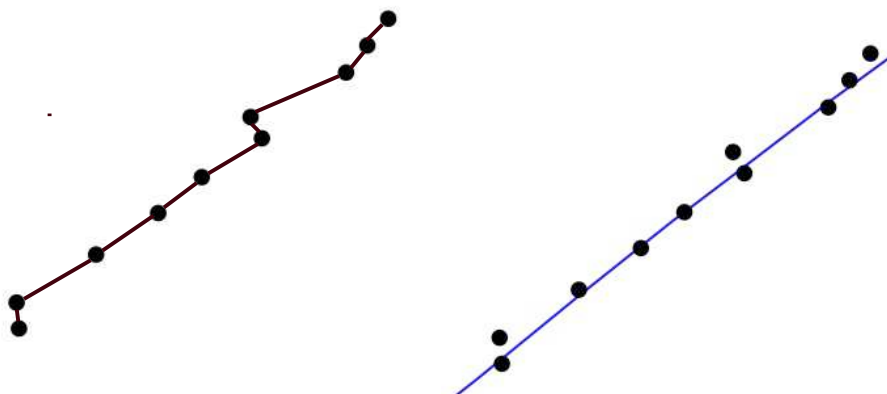


FIG. 6 – *Interpolation affine par morceaux (à gauche) / approximation régulière (à droite) du nuage de points.*

Position du problème

La reconstruction de surface est un domaine de recherche important par ses enjeux, et actif comme l'atteste le nombre d'articles publiés sur le sujet ces dernières années. La liste suivante n'est pas exhaustive mais présente un large éventail des articles publiés récemment : [ZO02] et [OP03] (méthode level set en imagerie), [SK04] (méthode level set), [HdRD⁺92] (calcul de la fonction de distance signée aux points), [SSH05] (reconstruction de forme à l'aide de normales), [ZOMK00] et [Dye03] (minimisation d'une fonctionnelle d'énergie et méthode level set), [ABK98] (diagramme de Voronoï), [Att97] (construction d'un maillage de Delaunay), [BC00] (construction d'une surface orientée par interpolation), [DYS04] (reconstruction de surface par résolution d'une EDP), [CBC⁺01] (reconstruction d'objets 3D avec des bases de fonctions radiales), [MM97] (état de l'art de méthodes de reconstruction). Dans les différents types d'applications évoqués précédemment, il y a un besoin crucial de méthodes robustes et efficaces pour pouvoir utiliser des données arbitraires. L'enjeu, en reconstruction de surface, est de pouvoir générer toutes sortes de formes (*i.e.* de géométrie et de topologie), comme par exemple un objet avec plusieurs composantes connexes ou présentant localement de grandes variations de courbure et éventuellement de grande taille (on peut avoir des millions de points dans l'échantillon).

Ces considérations nous ont amenés à formuler le problème (P) suivant.

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donné un ensemble de points } V \subset \mathbb{R}^3, \text{ numérisé, éventuellement non} \\ \text{uniformément distribués et/ou bruités (cf. figure 6), construire une surface} \\ \text{régulière } \Gamma \text{ passant } \textit{au mieux} \text{ par tous les points de } V, \text{ c'est-à-dire :} \\ \\ \text{Trouver une surface } \Gamma \text{ telle que, pour } \varepsilon > 0 \text{ petit fixé :} \\ \\ \forall x \in V, \quad d(x, \Gamma) \leq \varepsilon, \\ \\ \text{où } d(\cdot, \cdot) \text{ est une fonction de distance (non signée) positive (cf. figure 7).} \end{array} \right.$$

En d'autres termes, on souhaite construire une surface régulière Γ telle que sa distance à V soit petite et réciproquement. Celle-ci peut s'écrire :

$$d_H(V, \Gamma) = \max \left(\sup_{y \in \Gamma} \inf_{x \in V} d(x, y), \sup_{x \in V} \inf_{y \in \Gamma} d(x, y) \right)$$

c'est-à-dire sous la forme d'une distance de Hausdorff. Cette distance joue notamment le rôle d'un indicateur de similarité entre deux formes géométriques en imagerie [Ruc96]. On note que la surface construite sera entièrement contenue dans une bande de taille 2ε centrée autour des points de V (cf. figure 8). Ce problème reste encore très vague en ce qui concerne d_H et la manière dont celle-ci est évaluée. En particulier, il ne donne pas d'indication sur la régularité de la surface construite. On a donc évoqué les deux notions importantes liées à la reconstruction de surface : la proximité et la régularité. On retrouvera cette dualité dans l'équation proposée pour résoudre ce problème (cf. chapitre 2).

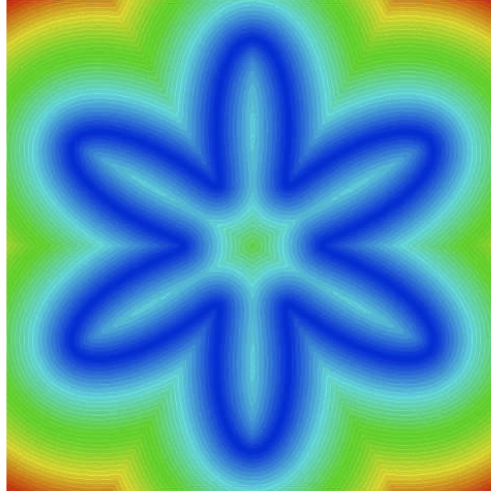


FIG. 7 – Fonction de distance non signée à une étoile définie de manière analytique.

Il va falloir développer et préciser la formulation du problème (P) pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution Γ satisfaisant les deux contraintes de proximité et de régularité.

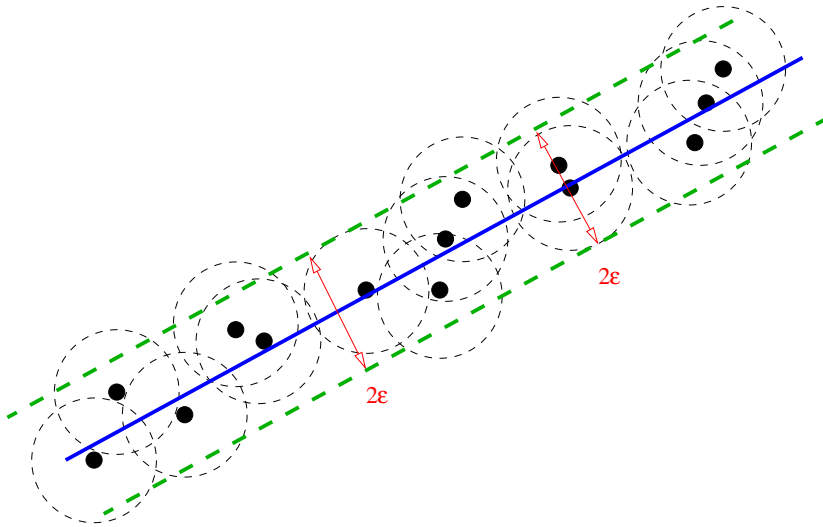


FIG. 8 – Bande de largeur 2ε autour de quelques points de V .

Dans notre problème, les points de V sont issus d'une surface réelle. Pour fixer les idées, on peut prendre le cas des images médicales où l'échantillon V peut caractériser le contour d'un organe. Les points de V peuvent être non uniformément distribués, comme on peut le voir sur la figure 1, où la densité de points varie en fonction de la géométrie et de la technologie de l'échantillonnage (IRM ou scanner sphérique). Dans le premier exemple à gauche, il y a plus de points dans les zones du nez, de la bouche ou des oreilles, qui présentent des concavités. Rappelons que la géométrie et la topologie de la forme que l'on souhaite reconstruire ne sont pas connues *a priori* et peuvent être arbitrairement complexes, comme par exemple contenir plusieurs composantes connexes. De plus, l'échantillon V peut contenir du bruit. Il semble, bien sûr, nécessaire d'avoir un nombre minimal de points dans l'échan-

tillon V pour que la reconstruction soit réaliste. En effet, avec un nombre de points limité, il paraît difficile de reconstruire un visage précisément.

Ce problème (P) va être reformulé en un problème d'évolution, à l'aide de la méthode des lignes de niveau (level set, en anglais). Ce type de formulation offre une certaine flexibilité en matière de gestion des changements de topologie au cours du temps.

Vers un modèle évolutif de reconstruction

En tant que tel, le problème de reconstruction de surface (P) est encore mathématiquement mal posé, c'est-à-dire qu'il n'a pas de solution unique [Lau72]. Il existe, en effet, plusieurs surfaces (voire une infinité) passant au mieux par tous les points d'un échantillon donné et vérifiant

$$d_H(V, \Gamma) = \max \left(\sup_{y \in \Gamma} \inf_{x \in V} d(x, y), \sup_{x \in V} \inf_{y \in \Gamma} d(x, y) \right) \leq \varepsilon.$$

Il va donc falloir préciser (P), en définissant un modèle de construction de cette surface de façon à obtenir une unique surface Γ qui satisfait les deux contraintes de proximité et de régularité.

Examinons, tout d'abord, les différents modes de représentations usuels des courbes et des surfaces.

Représentation de surfaces

Les solutions du problème (P), c'est-à-dire les surfaces reconstruites, peuvent être représentées de différentes façons : paramétriques, explicites ou implicites. Il existe différentes méthodes de reconstruction adaptées à chaque type de représentation.

• Représentations paramétriques

Étant donnés deux paramètres réels r et s , variant dans un certain intervalle I , une surface paramétrée [BFG97, Far83] est définie par la donnée d'une fonction f telle que :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = f(r, s), \forall (r, s) \in I^2\}.$$

– **Avantage**

Les surfaces paramétrées sont faciles à visualiser (*cf.* figure 9) puisqu'il suffit de discrétiser l'espace des paramètres (de dimension deux) pour obtenir la représentation de la fonction.

– **Inconvénients**

Dans notre contexte de construction de surface, pour définir un objet complexe, on ne peut généralement pas utiliser une seule surface paramétrée. Il faudrait une multitude de carreaux paramétrés (surfaces avec condition de raccordement C^2) alors que l'on souhaiterait n'en avoir qu'un seul.

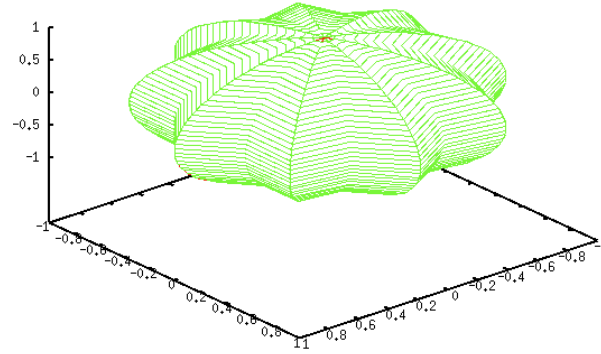


FIG. 9 – Graphe d’une surface paramétrée où $x = \cos(r) \cos(s)$, $y = \cos(r) \sin(s)$ et $z = \sin(r)$.

• Représentations explicites

Les représentations explicites [ABCO⁺01, PG01] prescrivent la localisation exacte de la surface cherchée, c’est-à-dire qu’il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que (cf. figure 10) :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}.$$

– Avantages

Les représentations explicites présentent l’avantage de permettre une visualisation rapide du graphe de la fonction et peuvent représenter les singularités. Elles permettent également un accès aux propriétés de géométrie différentielle associées, comme par exemple obtenir une valeur des normales et des plans tangents à cette surface.

– Inconvénients

Le principal problème, ici, est que les méthodes explicites ne permettent pas de représenter des surfaces fermées. Elles ont, en particulier, des difficultés à appréhender la topologie, c’est-à-dire lorsque l’on a, par exemple, à capturer plusieurs composantes connexes.

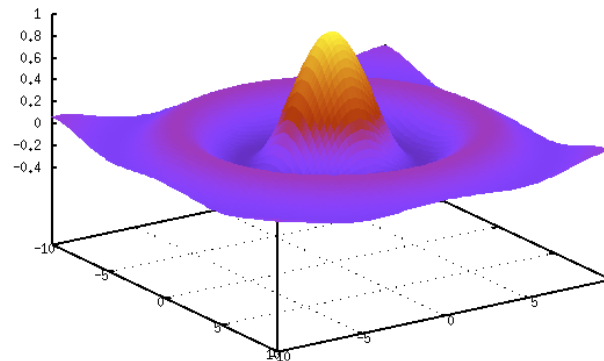


FIG. 10 – Graphe de la surface explicite $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$.

• Représentations implicites

Les représentations implicites définissent la surface reconstruite comme un iso-contour spécifique d'une certaine fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$. La surface est alors définie par (cf. figure 11) :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

– Avantages

Récemment [OF03, ZOMK00, Set99, AJT02, MS97, OP03, CDF08, CF09b], l'attention a été portée sur les représentations implicites, car elles offrent l'avantage de gérer de manière naturelle les complexités topologiques (comme plusieurs composantes connexes), et ont généralement une structure de données simple. Elles permettent également d'utiliser des données bruitées. Un exemple de reconstruction à partir d'une donnée bruitée est représenté sur la figure 6.

– Inconvénients

Le coût de calcul est généralement important pour les grandes données (c'est-à-dire avec un grand nombre de points) car la fonction f est ici définie sur tout \mathbb{R}^3 et non pas seulement sur la surface comme pour le cas des surfaces paramétrées. Pour la représentation d'une telle fonction, on approche celle-ci à l'aide d'une grille régulière et on doit utiliser des méthodes de suivi de contour pour obtenir la visualisation de la surface, ce qui soulève des problèmes de stockage importants.

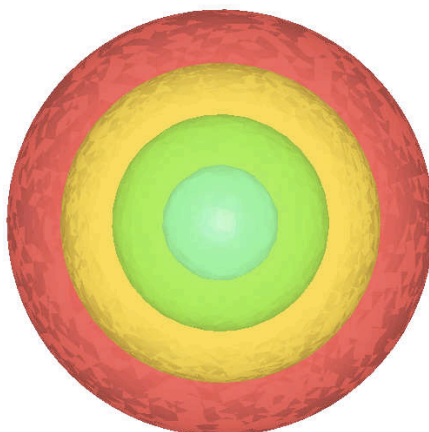


FIG. 11 – *Représentation implicite d'une sphère et des lignes d'isovaleur associées.*

• Autres représentations

Il existe d'autres types de représentation possibles pour les surfaces : les représentations discrètes associées aux points, comme par exemple les maillages de variétés de codimension 1. On peut en voir quelques exemples sur les figures 3, 4 et 5. Dans cette catégorie, on peut également classer les méthodes basées sur une interpolation ou une approximation à l'aide de polynômes (et de points) de contrôle comme les interpolations de Lagrange, les méthodes de type Hermite et les courbes de Bézier.

Les courbes de Bézier ne passent que par les premier et dernier points de contrôle (on voudrait idéalement qu'elle passe au mieux par tous les points dans notre cas). La courbe

suit alors la ligne polygonale joignant les points, comme on peut le voir sur la figure 12 [Far83, Far97, BB97]. On note sur cet exemple, l'impossibilité de passer exactement par les points du nuage ou dans un voisinage de ceux-ci. En dimension deux, les surfaces de Bézier peuvent aussi être définies comme des surfaces paramétriques. Les splines sont des fonctions définies par morceaux par des polynômes (par exemple de contrôle) [Far83, Far97, Tau95]. Les B-splines sont des combinaisons linéaires de splines non négatives à support compact minimal, elles sont une généralisation des courbes de Bézier [Far83, Far97, YDC05]. Les NURBS (bases de splines non uniformes et rationnelles) sont, elles, une généralisation des B-splines. Il existe, également, des combinaisons de splines et de lignes de niveaux : les T-splines [YJ08].

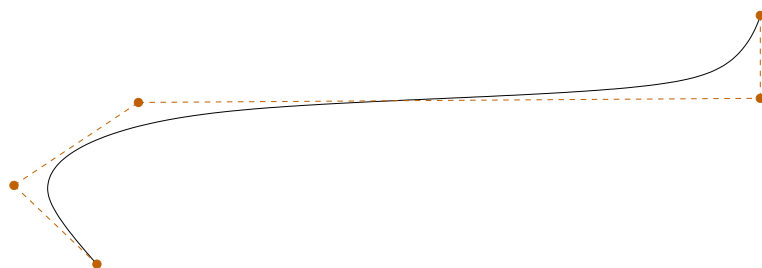


FIG. 12 – Exemple de courbe de Bézier avec points de contrôle et ligne polygonale joignant les points.

Nous avons ici choisi d'utiliser une représentation implicite de la surface que l'on souhaite construire par la méthode des lignes de niveau. La surface Γ sera alors construite comme un isocontour spécifique d'une certaine fonction f , comme on le verra plus loin.

Méthodes de reconstruction

Quel que soit le type de méthodes utilisé, un problème récurrent se pose : celui de la visualisation des surfaces, et de leur exploitation afin de servir de support à des calculs. On souhaite, en principe, construire une approximation affine par morceaux de celle-ci plus facile à manipuler, stocker, et exploiter dans des applications. Il existe plusieurs façons de procéder pour reconstruire une surface. Je vais présenter ici quatre approches différentes. En général, le type de méthode considéré est fortement lié au domaine d'applications. L'idée générale est que l'on souhaite reconstruire une surface pour permettre ensuite une visualisation, des calculs, de la CAO (conception assistée par ordinateur), *etc.*

• Approches géométriques

Les approches de type géométrique sont basées sur la construction de triangulations de Delaunay [DS06, GB97, CsD04]. Une triangulation est construite à partir du nuage de points (les sommets des tétraèdres sont les points de l'échantillon). Elle fournit l'enveloppe convexe du nuage qui est ensuite post-traitée de manière à extraire la surface désirée. C'est-à-dire que la surface discrète est obtenue en isolant un sous-ensemble des faces de tétraèdres composant cette triangulation. Dans ce type de méthode, la surface obtenue est alors seulement affine par morceaux (*cf.* figure 13). On souhaite ici, pour le problème (P), avoir une surface régulière C^2 passant au mieux par tous les points de V . De plus, les

données contenant du bruit ne sont pas bien traitées par ces méthodes géométriques qui s'appuient seulement sur l'échantillon V . Elles ne peuvent donc pas gérer des données à ε près (cf. figure 8). La surface construite dans ce cas précis ne sera alors pas régulière.

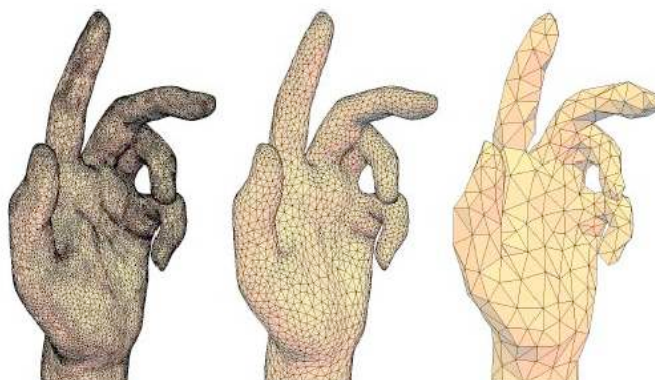


FIG. 13 – Exemple de reconstruction par la méthode de Delaunay pour différents nombres de points [DZM07].

• Approches volumiques

Dans les approches de type volumique, on définit une fonction de distance signée aux points de V sur des grilles cartésiennes. Une discrétisation affine de la ligne de niveau zéro de cette fonction distance est ensuite utilisée pour définir la surface Γ cherchée [BB97, BC00, HdRD⁺92], par exemple avec la méthode Marching Polyhedra [BTMF05, LC87], à partir d'un ensemble de motifs pré-définis. Cette approche nécessite la connaissance de l'orientation de la variété que l'on souhaite reconstruire pour pouvoir distinguer un intérieur et un extérieur. Autrement dit, on souhaite avoir une estimation des normales locales ou des plans tangents [DS06, SSH05]. En réalité, on ne connaît l'orientation de la variété qu'*a posteriori* par approximation, et on peut alors parfois découvrir que la surface que l'on considère est non orientable. Ceci est connu pour être le point noir des méthodes de reconstruction.

• Approches avec contour actif

La méthode des contours actifs (Snakes contours) [KWT88, CCCD93, CKS95, LMT06] est une technique d'extraction de données utilisée en traitement d'images. Le principe de cette méthode repose sur le déplacement de points d'un contour dit actif vers des zones de fort gradient, tout en conservant les caractéristiques de ce contour comme la courbure ou la répartition des points. L'algorithme va alors consister à rétracter ou dilater le contour initial à l'aide d'une somme d'énergies (interne et externe). L'énergie interne va caractériser la forme du contour et l'énergie externe va caractériser le positionnement du contour sur l'image. Les points sont donc ici mobiles (cf. figure 14³).

Avec ce type de méthodes, le nombre de points du contour actif reste invariant. Ceci peut être un handicap pour les zones de forte courbure car cela suppose de disposer de suffisamment d'informations *a priori* pour approcher la forme.

³ données provenant de <http://xphilipp.developpez.com/contribuez/SnakeAnimation.gif>

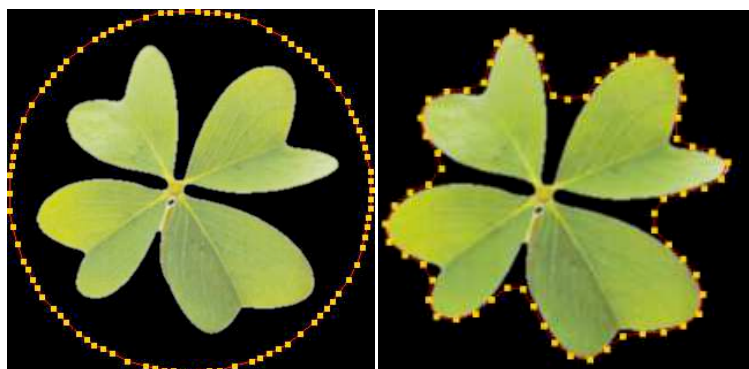


FIG. 14 – Exemple de reconstruction par la méthode des contours actifs.

• Approches continues avec résolution d'une EDP

Les méthodes basées sur la résolution d'une équation aux dérivées partielles (EDP), comme la méthode des lignes de niveau (level set), introduite par Osher et Sethian en 1988 [OS88, ZOMK00] sont des méthodes efficaces pour gérer dynamiquement des interfaces en mouvement. L'algorithme part d'une surface initiale fermée, dont le volume qu'elle délimite englobe les points. Celle-ci va se déformer, en tout point, dans la direction normale, d'une valeur proportionnelle à la courbure locale jusqu'à approcher l'échantillon. Ce processus de déformation est gouverné par une EDP d'évolution.

Comme dans [LZJ⁺05, ZOMK00], on considère ici le problème au niveau continu en développant un modèle basé sur la résolution d'une EDP non linéaire. À cette fin, on propose donc d'utiliser la méthode des lignes de niveau pour obtenir une formulation continue du problème et la résolution numérique de celui-ci sera alors faite à l'aide de schémas spécifiques. Cette approche va permettre de conserver l'orientation de la surface initiale et d'avoir une représentation implicite discrète de la surface ainsi reconstruite. Le formalisme de cette méthode de lignes de niveau (fonction implicite + évolution en temps) permet de faire le lien entre la représentation et la construction de cette surface. Au lieu de résoudre notre EDP sur des grilles régulières, on introduit des maillages triangulaires, adaptés (c'est-à-dire avec une densité de mailles plus importante au voisinage de V qu'ailleurs dans le domaine) et anisotropes (triangles allongés) pour améliorer la précision de la solution et limiter les effets dissipatifs. Un exemple de maillage adapté et anisotrope, utilisé pour ce type d'applications, est présenté sur la figure 15.

L'originalité de cette méthode de reconstruction réside principalement dans :

1. le formalisme par la méthode des lignes de niveau,
2. le choix de l'équation aux dérivées partielles résolue,
3. la création et l'utilisation de maillages triangulaires en dimension deux (tetraédriques en dimension trois) simpliciaux, anisotropes, adaptés et fixes (c'est-à-dire créés une fois pour toutes en pré-traitement),
4. les schémas numériques utilisés pour résoudre l'EDP.

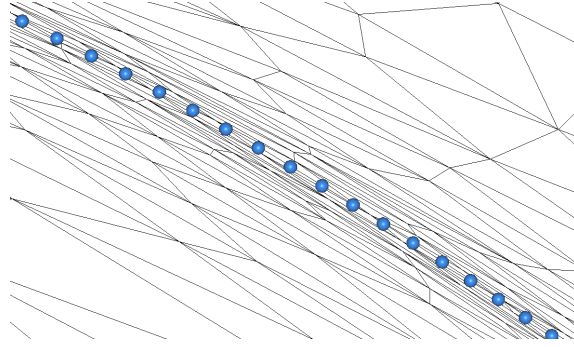


FIG. 15 – Exemple de maillage utilisé, avec adaptation anisotrope autour des points de V .

Notre modèle

On souhaite définir la surface Γ cherchée comme l'isocontour de niveau 0 d'une fonction implicite u et non à l'aide d'une paramétrisation. Pour cela, on formule le problème (P) à l'aide de la méthode des lignes de niveau, initialement conçue pour propager des interfaces au cours du temps, avec une vitesse dépendant de la courbure locale de ces variétés. On présume ici que la surface cherchée Γ est le résultat de l'évolution d'une surface régulière définie de manière implicite par $\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^3, u(t, x) = 0\}$. La fonction ligne de niveau u est définie de telle sorte qu'elle soit négative à l'intérieur du domaine $\Omega(t)$ délimité par $\Gamma(t)$, positive à l'extérieur et nulle en $\Gamma(t)$. L'évolution de $\Gamma(t)$ est gouvernée par une EDP non linéaire qui impose à $\Gamma(t)$ d'avancer dans la direction normale à la surface initiale donnée. Plus précisément, on s'intéresse au problème suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Trouver } u, C^1 \text{ en temps et } C^2 \text{ en espace, satisfaisant :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d(x)(\alpha + \kappa(u)(t, x)), \\ u(0, \cdot) = u_0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

où $d(x)$ est la fonction distance non signée de $x \in \mathbb{R}^3$ aux points de V , α est un paramètre réel qui dépend du signe du produit scalaire $\langle \nabla u, \nabla d \rangle$, et

$$\kappa(u)(t, x) = \nabla \cdot n(u)(t, x) = \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) (t, x)$$

est la courbure moyenne locale à la surface $\Gamma(t)$. On note que la fonction d ne dépend pas du temps. Elle est donc calculée une fois pour toute sur le maillage et restera fixe pendant toute la durée du calcul. Notons que le maillage, lui non plus, n'est pas modifié au cours des itérations. Il est adapté initialement autour du nuage de points.

Notre modèle d'évolution fait apparaître deux termes. Le terme $\alpha d(x)$ caractérise l'attraction de la surface par le nuage de points cible et va permettre à $\Gamma(t)$ de se déformer itérativement. On peut faire alors le lien avec l'énergie externe, dans le cas précédent des contours actifs, qui caractérise le positionnement de la courbe. Le terme $d(x)\kappa(u)(t, x)$ va, lui, jouer le rôle d'un terme de régularisation qui correspond à la tension de surface (κ

dépendant de la normale n) et ainsi permettre à la surface de conserver sa régularité au cours de son évolution. On peut ici faire le lien avec l'énergie interne qui, elle, régit l'allure de la courbe. La convergence sera obtenue lorsque tous les points de V auront une valeur de u correspondant à 0 ou proche de 0.

La condition initiale u_0 est une fonction de distance signée à une surface simple fermée et orientable, dont le volume qu'elle délimite englobe les points de V (une sphère par exemple). Autrement dit, $u_0(x) = \pm d_0(x)$ où d_0 est égale à la distance à $\Gamma(t = 0)$.

Un avant-goût

Mon travail a donc consisté à formuler, étudier et résoudre ce problème non linéaire, modélisé par une équation aux dérivées partielles avec condition initiale (1). Dans un premier temps, nous avons implémenté cette EDP à l'aide d'un code de résolution sur des maillages triangulaires (et tétraédriques) simpliciaux, anisotropes et adaptés autour des points de V en utilisant la méthode des lignes de niveau et des schémas numériques particuliers. Je vais brièvement présenter les schémas que l'on a utilisés pour la résolution de notre problème. Le lecteur en trouvera les détails dans le chapitre 2.

Avec le type de discontinuités développées par les méthodes de lignes de niveau, les schémas aux différences finies centrés classiques, pour approcher le terme de courbure, deviennent imprécis et instables. Raffiner localement le maillage cartésien ne fait que repousser le problème sans le résoudre. De plus, dans le cas des schémas explicites, le pas de temps étant lié à la taille de maille, on ne peut pas raffiner indéfiniment le maillage sans augmenter considérablement le temps de calcul. La méthode des éléments finis est devenue très populaire, utilisant une formulation variationnelle du problème et cherchant des solutions dans des espaces fonctionnels appropriés. Les éléments finis permettent d'utiliser des maillages non structurés triangulaires du domaine, adaptés ou non à la géométrie du domaine ou bien aux variations de solutions. L'approximation des dérivées du second ordre dépend du degré des polynômes associés aux fonctions de forme. Obtenir une bonne valeur des termes de second ordre aux nœuds dans l'équation (1.6) implique l'utilisation de polynômes d'ordre trois, ce qui augmenterait considérablement le nombre de degrés de liberté dans le maillage. Les schémas de type ENO ou WENO (non oscillants) sont maintenant utilisés sur des triangulations, mais sont relativement difficiles à implémenter pour des non spécialistes [HEOC87, JP00, OS91, Abg94, Abg96, AA00]. On propose ici une alternative basée sur un schéma de type différences finies appliqué à des triangulations quelconques mais néanmoins anisotropes. Cette approche permet de calculer une approximation de la courbure en chaque point du maillage sans avoir recours à des schémas d'interpolation d'ordre élevé et est donc relativement facile à implémenter [CF09a].

Le terme de dérivée en temps du premier ordre de l'équation (1) peut être discrétisé en utilisant le schéma d'Euler classique de différences finies suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \sim \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt}$$

où $u_i^n \sim u(t^n, x_i)$ pour tout nœud x_i du maillage, $t^n = n dt$ et dt est le pas de temps considéré.

La fonction distance d est calculée une fois pour toute sur le maillage (invariant lui aussi),

elle ne change donc pas au cours du temps, on note alors $d_i = d(x_i)$. Les deux schémas que l'on a utilisés pour résoudre l'équation (1) sont :

- un schéma explicite du premier ordre :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d_i dt \left(\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)_i^n + \alpha \right),$$

- un schéma semi-implicite du premier ordre (pour accélérer la convergence) :

$$u_i^{n+1} - d_i dt \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^{n+1}|} \right) \right)_i = d_i dt \alpha + u_i^n.$$

On remarque que les dérivées en espace du premier (gradient) et du second (courbure moyenne) ordre de la fonction ligne de niveau u interviennent dans cette équation. Il est donc important, pour ces schémas, de calculer ces dérivées aussi précisément que possible. Avec les méthodes d'approximation de type différences finies, u est définie en chaque point de la grille ainsi que ses dérivées en espace. Nous proposons donc ici une méthode pour évaluer le gradient et la courbure moyenne en chaque sommet d'un maillage T_h donné. Pour chaque point i de T_h , le gradient discrétisé choisi, en dimension deux, est le suivant :

$$(\nabla u)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K (\nabla u)|_K}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} u_{i_2} \nabla \omega_{K i_2}}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}$$

où A_K est l'aire du triangle K , \mathcal{B}_i est le support de i , c'est-à-dire l'ensemble des triangles qui contiennent le point i et ω_{K, i_2} est la coordonnée barycentrique relative au point i_2 dans le triangle K . En procédant de la même manière, notre approximation de la courbure au point i , toujours en dimension deux, est alors :

$$\kappa_i = \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \left(\sum_{i_2 \in K} \left(\frac{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L \left(\sum_{i_3 \in L} u_{i_3} \langle \nabla \omega_{L i_3}, \nabla \omega_{K i_2} \rangle \right)}{|\nabla u|_{i_2} \sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L} \right) \right)}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}.$$

où $|\nabla u|_{i_2} \sim |\nabla u(x_{i_2})|$.

Pour évaluer ce terme de courbure au point i , on va donc chercher la valeur de u aux points voisins et pondérer par les aires des triangles appartenant au support de i , c'est-à-dire l'ensemble des triangles qui contiennent le point i . On a ensuite montré que ces schémas sont consistants et stables en norme L^2 sous une certaine condition de type CFL pour le schéma explicite. Il faut noter que le passage en trois dimensions est une extension directe de cette étude et ne pose donc pas de problème particulier du point de vue de la résolution de l'EDP. Il suffit simplement de considérer des tétraèdres au lieu des triangles. L'essentiel des problèmes numériques viendront de la gestion des maillages (*cf.* chapitre

3). Le détail de ces résultats est dans le chapitre 2.

Nous avons vu que l'on définit une surface $\Gamma(t)$ comme étant la ligne de niveau zéro de la fonction u . Ceci s'écrit $\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^3, u(t, x) = 0\}$, ce que l'on peut encore écrire sous la forme $u(t, \Gamma(t)) = 0$. En dérivant cette dernière expression par rapport à t , on obtient

$$\frac{du}{dt}(t, \Gamma(t, s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \Gamma(t, s)) + \left\langle \frac{d\Gamma(t, s)}{dt}, \nabla u(t, \Gamma(t, s)) \right\rangle = 0, \quad (2)$$

où s est l'abscisse curviligne sur $\Gamma(t)$ et $\Gamma(t, s)$ caractérise une position sur $\Gamma(t)$. L'évolution de $\Gamma(t)$ est purement géométrique. On peut alors étendre cette équation à toutes les lignes de niveau de u .

Cette équation (2) peut s'écrire sous la forme d'une équation du type Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v_n(t, x)|\nabla u|(t, x) = 0$$

où $v_n = \left\langle \frac{d\Gamma(t, s)}{dt}, n(u)(t, x) \right\rangle$ caractérise la vitesse de u dans la direction normale à $\Gamma(t)$.

On cherche donc une solution de viscosité qui va coïncider avec la surface Γ cherchée. On montre que l'on a existence et unicité de la solution à notre problème à l'aide de la théorie de la viscosité [GGV05, CL81, CL83, CL84, CIL92]. On peut trouver cette démonstration dans le chapitre 1. On verra également qu'une solution du problème (P) est également solution d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. À l'équilibre, l'équation (1) se réduit à l'équation elliptique suivante : $-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \alpha$. Le calcul des variations nous donne l'expression d'une fonctionnelle d'énergie I telle que : si u est solution de l'équation elliptique précédente, alors u est également solution du problème de minimisation

$$u = \arg \min_{v \in H^2} I(v).$$

D'un point de vue numérique, les méthodes de génération de maillage et d'adaptation sont présentées dans le chapitre 3. Plus précisément, on verra une méthode particulière d'adaptation autour d'une ligne de niveau de la fonction distance. Plusieurs détails sur l'implémentation de ce problème sont expliqués dans le chapitre 4. En particulier, pour des raisons numériques, je présenterai une méthode de renormalisation de la fonction u pour conserver la propriété

$$|\nabla u| = 1$$

nommée équation eikonale et assurant que la fonction u soit une fonction distance au cours de l'évolution de la surface.

Des premiers exemples analytiques seront présentés dans le chapitre 5 pour montrer l'efficacité et la robustesse de notre méthode pour des données contenant plusieurs composantes connexes, des singularités et du bruit.

Dans le chapitre 6, on peut trouver une comparaison avec une approche classique de résolution d'équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis. On exprime notre problème de construction sous forme variationnelle. Dans cette approche, semi-discrétisée en temps, on se place dans un bon espace fonctionnel et on utilise un théorème classique

d'analyse (Lax Milgram) pour montrer que l'on a existence et unicité d'une solution dans cet espace. Après discrétisation en espace, on résout ensuite numériquement à l'aide d'une formulation en éléments finis de type Lagrange \mathbb{P}_1 , en dimension deux.

Enfin, dans le dernier chapitre, des exemples d'applications plus complexes en deux et trois dimensions seront présentés.

Ces travaux ont fait l'objet de quatre publications [CF09a] (schémas, équation d'Hamilton-Jacobi), [CF09b], [CF08] et [CDF08] (lignes de niveau)⁴.

⁴Cette thèse a été financée par une bourse de la région Ile-de-France

Première partie

Du modèle à l'analyse

Introduction de la première partie

On s'intéresse ici au problème de construction du point de vue continu, en développant un modèle basé sur la résolution d'une équation aux dérivées partielles à l'aide de la méthode des lignes de niveau (level set). Celle-ci permet une gestion naturelle des données bruitées et des changements de topologie au cours du temps. Dans cette première partie, je me suis intéressée à l'analyse liée à notre problème de construction d'une surface régulière d'approximation d'un ensemble de points. Pour des raisons de simplicité, cette étude est faite en deux dimensions, c'est-à-dire dans le cas de la construction d'une courbe d'approximation. Dans un premier chapitre, je présenterai le modèle que l'on a utilisé. Pour ce faire, je commencerai par une introduction sur la méthode des lignes de niveau. Puis je présenterai une méthode de construction représentative du problème que l'on s'est fixé. Je détaillerai ensuite l'équation d'évolution que l'on résout en montrant l'existence et l'unicité d'une solution à notre équation aux dérivées partielles à l'aide de la théorie de la viscosité. Je montrerai que ce problème d'évolution peut s'écrire sous forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Enfin, dans un deuxième chapitre, je présenterai les schémas numériques utilisés pour ce problème de construction ainsi qu'un résultat de consistance et de stabilité en norme L^2 .

Chapitre 1

Modèle

Pour des raisons de simplicité, seul le cas des courbes en deux dimensions est étudié. L'extension en trois dimensions ne pose aucune difficulté conceptuelle (les problèmes pratiques seront mentionnés et précisés dans la partie 2 de la thèse). Dans une première section, je commence par donner quelques rappels sur la méthode des lignes de niveau. J'introduirai ensuite l'algorithme de construction. Une méthode représentative pour notre problème sera ensuite détaillée, ainsi que l'EDP que l'on a utilisée pour notre problème de construction de courbe. Une sous-section montrera les calculs d'existence et d'unicité de la solution au problème d'évolution considéré. Enfin, nous verrons que ce dernier peut s'exprimer sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie.

1.1 La méthode des lignes de niveau

Comme la topologie et la géométrie de la forme que l'on souhaite reconstruire ne sont pas connues *a priori*, la méthode des lignes de niveau pour notre évolution de courbe est utilisée ici comme dans [Set99]. C'est-à-dire que l'on considère un modèle d'évolution à partir de la courbure moyenne.

La méthode des lignes de niveau (ou level set) a été initialement introduite par Osher et Sethian [OS88] pour définir et propager des interfaces au cours du temps. Dans cette approche, appliquée à notre problème, une courbe implicite Γ , qui est habituellement l'isocontour zéro d'une fonction scalaire u , évolue dans la direction normale à la courbe. Cette courbe est implicitement capturée, en résolvant une EDP, pour une fonction ligne de niveau sur une grille ou une triangulation, dont le volume qu'elle délimite englobe les points de l'échantillon V . Les changements de topologie au cours du temps (par exemple le passage de une à plusieurs composantes connexes) et les données bruitées peuvent alors être gérées avec une relative facilité.

La première étape, dans la formulation lignes de niveau d'un problème d'interface, consiste à définir un domaine de calcul $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ou \mathbb{R}^3 dans lequel sera plongée la courbe Γ cherchée, et de considérer Γ comme l'isocontour zéro d'une fonction scalaire u définie sur $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$. Pour cela, on va définir une courbe $\Gamma(t)$ comme une interface virtuelle que l'on va faire évoluer afin d'obtenir Γ . La fonction ligne de niveau u est ensuite définie de sorte qu'elle soit négative à l'intérieur du domaine délimité par $\Gamma(t)$, positive à l'extérieur de ce domaine et nulle sur $\Gamma(t)$. On introduit ensuite $\Gamma(t)_{t \geq 0}$ qui va caractériser l'évolution générale d'une

courbe initiale $\Gamma(0)$ et telle que $\Gamma(t)$, pour tout $t \geq 0$, soit définie implicitement comme étant la ligne de niveau 0 de u , [ZOMK00], c'est-à-dire telle que :

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathcal{D}, u(t, x) = 0\}, \quad \forall t \geq 0.$$

u peut alors être caractérisée de la façon suivante :

- $u(t, x) < 0$ pour $x \in \Omega(t)$,
- $u(t, x) > 0$ pour $x \notin \Omega(t)$,
- $u(t, x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega(t) = \Gamma(t)$,

où $\Omega(t)$, contenu dans \mathcal{D} , est le domaine intérieur délimité par $\Gamma(t)$.

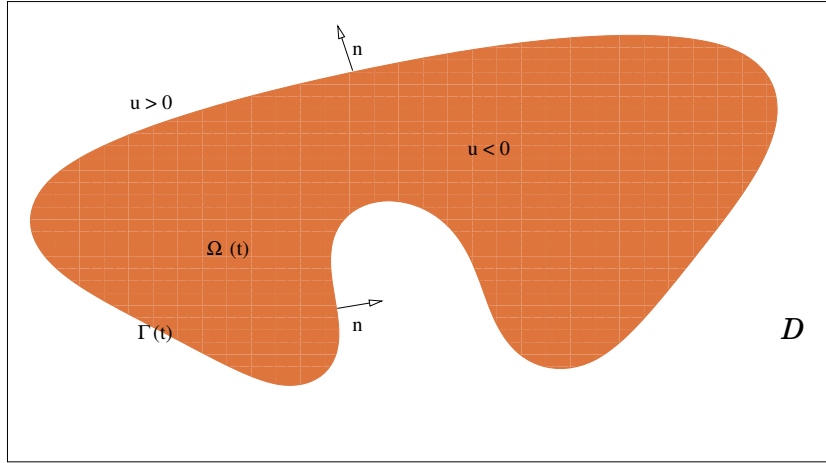


FIG. 1.1 – Déformation de la fonction u .

Les propriétés de géométrie différentielle de la courbe peuvent maintenant être exprimées à l'aide de la fonction u , c'est-à-dire que l'on peut avoir une expression analytique des normales à $\Gamma(t)$ et de la courbure moyenne locale en fonction de u . Plus précisément, on définit, en tout point x non singulier de \mathcal{D} ,

$$n(u)(t, x) = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}(t, x), \quad \kappa(u)(t, x) = \nabla \cdot n(u)(t, x) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)(t, x).$$

Le théorème de Sard [Sar43] nous dit que la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\{x, \nabla u(x) = 0\}$ est nulle. On peut donc sans problème considérer ces expressions pour exprimer le terme de normale et de courbure.

La seconde étape consiste à caractériser mouvement de la courbe $\Gamma(t)$. On vient de définir $\Gamma(t) = \{x \in \mathcal{D}, u(t, x) = 0\}$. Ceci est équivalent à

$$\forall x \in \Gamma(t), \quad u(t, x) = u(t, \Gamma(t)) = 0.$$

En dérivant cette équation par rapport à la variable t , on obtient :

$$\frac{du}{dt}(t, \Gamma(t, s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \Gamma(t, s)) + \left\langle \frac{d\Gamma(t, s)}{dt}, \nabla u(t, \Gamma(t, s)) \right\rangle = 0, \quad (1.1)$$

où s est l'abscisse curviligne à $\Gamma(t)$ et $\Gamma(t, s)$ caractérise une position sur $\Gamma(t)$. L'évolution de $\Gamma(t)$ est purement géométrique, dans le sens où l'équation ne fait intervenir que des termes liés aux propriétés de géométrie différentielle de $\Gamma(t)$. On peut donc alors étendre cette équation (1.1) à toutes les lignes de niveau de la fonction u , qui vont chacune évoluer indépendamment [AG⁺93].

Cette équation, caractérisant le mouvement de la courbe, peut s'écrire sous la forme d'une équation de type Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v_n(t, x)|\nabla u|(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}, \quad (1.2)$$

où $v_n(t, x) = \left\langle \frac{d\Gamma(t, s)}{dt}, \vec{n}(u)(t, x) \right\rangle = \left\langle \frac{d\Gamma(t, s)}{dt}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|}(t, x) \right\rangle$ caractérise la vitesse dans la direction normale à la courbe $\Gamma(t)$ et \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la fonction ligne de niveau en x .

La vitesse v_n dépend généralement des propriétés géométriques de la courbe $\Gamma(t)$ mais elle peut aussi dépendre des conditions initiales du problème, car le gradient de la fonction u intervient dans l'expression de v_n .

Mathématiquement, les solutions de viscosité ont été introduites pour donner un sens physique aux solutions des équations de type Hamilton-Jacobi. Il est bien connu que l'on rencontre souvent des singularités en résolvant ce type d'équation, et alors des techniques appropriées doivent être développées pour sélectionner l'unique solution de viscosité [Bar85, CL84]. Numériquement, ces solutions sont difficiles à calculer, à cause de l'existence de singularités. On cherche ici une solution de viscosité qui va coïncider avec la courbe Γ cherchée.

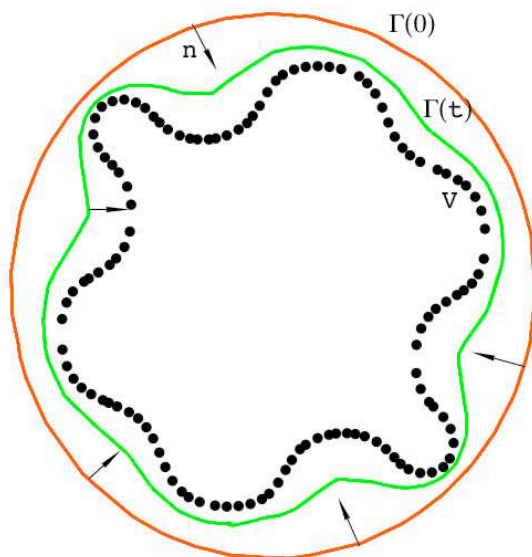
1.2 Notre algorithme

Avant de rentrer dans les détails, voici l'algorithme général que l'on a utilisé pour construire une courbe d'approximation des points de V . La fonction ligne de niveau u est initialisée par une fonction distance signée à une courbe initiale fermée simple, orientable et régulière englobant les points, par exemple un cercle (*cf.* figure 1.2). Cette fonction évolue ensuite à l'aide d'une EDP, présentée dans la section suivante, dans la direction normale à chacune des lignes de niveau, jusqu'à ce que la distance entre la courbe et les points de V soit minimale.

1.3 Un algorithme représentatif

En 2000, Zhao, Osher, Merriman et Kang [ZOMK00] ont proposé une méthode de construction basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie sur des grilles cartésiennes. Cette méthode semblait, dans un premier temps, bien correspondre au problème considéré. Le principe est le suivant. On souhaite trouver la courbe Γ qui correspond à un minimum de la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$E(\Gamma) = \left(\int_{\Gamma} d(x)^p ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

FIG. 1.2 – Algorithme général d'évolution de la courbe $\Gamma(t)$.

où $d(x) = \min_{y \in V} \|x - y\|$.

Cette fonctionnelle d'énergie est indépendante de toute paramétrisation. Un minimum de cette fonctionnelle est alors solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée :

$$d(x)^{p-1} \left(\langle \nabla d(x), n \rangle + \frac{1}{p} d(x) \kappa \right) = 0, \quad (1.3)$$

où n caractérise la normale à la courbe et κ la courbure moyenne locale. Le terme $d(x)^{p-1} \nabla d(x) \cdot n$ va permettre à la courbe d'être attirée vers les points et le terme $\frac{1}{p} d(x)^p \kappa$ va contrôler la régularité de la courbe au cours de son évolution.

Zhao *et al.* ont alors utilisé le formalisme des lignes de niveau pour faire évoluer la courbe Γ . Soit $u(t, x)$ une fonction ligne de niveau associée à Γ , c'est-à-dire telle que $u(t, \Gamma(t)) = 0$, $\Gamma(t)$ étant alors la ligne de niveau 0 de u . Comme précédemment, en dérivant cette équation par rapport à t , on obtient l'équation de type Hamilton-Jacobi suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_n |\nabla u| = 0 \quad \text{où} \quad v_n = \left\langle \frac{d\Gamma}{dt}, n \right\rangle. \quad (1.4)$$

Pour obtenir la formulation ligne de niveau de leur problème, ils ont procédé de la façon suivante : Si Γ est la ligne de niveau zéro de u , alors

$$E(\Gamma) = \left(\int_{\Gamma} d(x)^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = E(u) = \left(\int d(x)^p \delta(u)(x) |\nabla u|(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $\delta(\cdot)$ est la fonction Dirac, dérivée de la fonction de Heaviside H au sens des distributions. L'équation de la déformation de Γ avec le temps est

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left\langle -\frac{\partial E}{\partial \Gamma}, n \right\rangle,$$

$$\text{où } \frac{\partial E}{\partial \Gamma} = \frac{1}{p} \left(\int_{\Gamma} d^p ds \right)^{\frac{1}{p}-1} (pd^{p-1} \langle \nabla d, n \rangle + d^p \kappa).$$

La solution de l'EDP (1.4) est interprétée comme la solution de viscosité de l'EDP de ligne de niveau suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= |\nabla u|(t, x) \left(\int d(x)^p \delta(u)(t, x) |\nabla u|(t, x) dx \right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\times d(x)^{p-1} \left(\left\langle \nabla d(x), \frac{\nabla u}{|\nabla u|}(t, x) \right\rangle + \frac{1}{p} d(x) \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) (t, x) \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Au lieu d'essayer de considérer la fonctionnelle d'énergie, nous nous sommes intéressés à cette EDP (1.5). Celle-ci est composée de deux termes clé :

- un terme d'attraction $C(u, d) d(x)^{p-1} \left\langle \nabla d(x), \frac{\nabla u}{|\nabla u|}(t, x) \right\rangle$,
- un terme de tension de surface $C(u, d) \frac{d(x)^p}{p} \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) (t, x)$,

où $C(u, d)$ contient le terme régularisant sur la fonction distance d , écrit sous forme intégrale et le terme d'adimensionnement $|\nabla u|$. Ce dernier n'est pas nécessaire dans notre cas puisque l'on va travailler, le plus souvent, dans des domaines unités. Nous n'avons pas non plus besoin du terme intégral présent ici, qui est de plus difficile à implémenter. Dans la section suivante, on peut voir que nous avons conservé l'idée d'avoir un terme contrôlant la régularité de la surface et un terme contrôlant la proximité de $\Gamma(t)$ aux points de V . Nous avons donc simplifié (1.5). Dans une prochaine section, on verra que l'on peut également écrire notre problème sous la forme d'une minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Numériquement, ce n'est pas ce problème de minimisation que l'on résout mais l'EDP qui en découle. C'est pour cette raison que nous nous sommes principalement intéressés à celle-ci.

1.4 Notre EDP

Dans cette section, je vais présenter l'EDP que l'on résout pour le problème de construction, montrer qu'il y a existence et unicité de la solution, et écrire ce problème sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie que j'expliciterai.

On rappelle que le problème (P) que l'on considère revient à trouver une surface Γ , à partir d'un échantillon V , telle que la distance $d(x, \Gamma) \leq \varepsilon$, $\forall x \in V$. Autrement dit, à convergence, lorsque $\Gamma(t)$ sera dans un voisinage des points de V , on souhaite avoir $u(t, x) = d(x) \pm \varepsilon$, pour tout x . On s'intéresse donc au problème suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in C^2(\mathbb{R}^3) \text{ satisfaisant :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d(x) \left(\alpha + \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) (t, x) \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

où $d(x)$ est la fonction distance non signée aux points de V , $\kappa(u)(t, x)$ est la courbure

moyenne locale au point x et α est un paramètre réel équivalent au signe du produit scalaire $\nabla u \cdot \nabla d$.

Rappelons que ce modèle se compose de deux termes distincts :

- un terme d’attraction $\alpha d(x)$ qui va permettre à $\Gamma(t)$ d’avancer au cours du temps vers les points de V ,
- un terme de régularisation $d(x) \kappa(u)(t, x)$ correspondant à la tension de surface (κ dépendant de la normale n), et qui va ainsi permettre de lisser $\Gamma(t)$ au cours de son évolution.

De plus, la condition initiale u_0 est choisie pour être une fonction de distance signée à une courbe simple fermée (un cercle par exemple) et englobant les points de V . Autrement dit, $u_0(x) = d(x, \Gamma(t = 0))$.

1.4.1 Existence et unicité de la solution

La notion de solution de viscosité a été introduite en 1981 par Crandall, Ishii et Lions [CL81, CL83, CL84, CIL92] pour donner un sens physique aux solutions des équations de type Hamilton-Jacobi. Elle est très vite apparue comme une notion de solution faible bien adaptée pour les équations elliptiques non linéaires du second ordre.

La théorie de la viscosité s’applique à des EDP de la forme :

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{dans un ouvert } \mathcal{D} \text{ de } \mathbb{R}^2, \quad (1.7)$$

où Du caractérise le gradient de la fonction u , D^2u est la matrice hessienne de u et F est définie par $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l’ensemble des matrices carrées réelles symétriques de taille n .

Sauf quelques cas particuliers (comme les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman), l’équation à laquelle on s’intéresse ne satisfait qu’exceptionnellement les hypothèses des résultats classiques de la théorie de la viscosité. Ceci est particulièrement vrai pour les résultats d’unicité qui sont pourtant des résultats fondamentaux de cette approche. Ceci est dû principalement au spectre extrêmement large des équations auxquelles la notion de solution de viscosité s’applique.

La plupart du temps, on présente les solutions de viscosité comme une notion de solution faible qui permet, en particulier, l’extension de propriétés du type principe du maximum (qui sont classiques pour des solutions régulières d’équations elliptiques) à des solutions moins régulières, typiquement continues.

En 2005, C. Gout, C. Le Guyader et L. Veze [GGV05] ont montré l’existence et l’unicité d’une solution de viscosité pour un problème du type (1.7).

Pour appliquer leur théorie, F doit remplir les deux conditions nécessaires suivantes :

– une condition de monotonie :

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, X) \quad \text{avec} \quad r \leq s, \quad (1.8)$$

où $r, s \in \mathbb{R}$ et $x, p \in \mathbb{R}^n$,

– une condition d'ellipticité :

$$F(x, r, p, Y) \leq F(x, r, p, X) \quad \text{avec} \quad Y \geq X, \quad (1.9)$$

où $X, Y \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ munies de la relation d'ordre usuelle.

Définition 1.4.1. *Quand les deux conditions (1.8) et (1.9) sont réunies, on dit que F est propre.*

Pour les problèmes paraboliques, si F est propre, alors le problème parabolique associé

$$u_t + F(t, x, u, Du, D^2u) = 0 \quad (1.10)$$

l'est aussi. C'est le cadre général dans lequel la théorie de la viscosité a été introduite.

Proposition 1.1. *La fonction F associée au problème (1.6) est propre.*

Démonstration. On va donc ici, dans un premier temps, reprendre la démonstration de [GGV05] et montrer que le problème (1.6) satisfait ces deux dernières conditions (1.8) et (1.9). On rappelle que l'équation aux dérivées partielles que l'on souhaite résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha d + d \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right),$$

que l'on peut écrire, plus précisément, en développant le terme de courbure, comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha d - d \left(\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{|\nabla u|} - \left(\frac{2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{|\nabla u|^3} \right) \right) = 0.$$

Pour $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on note $\frac{p \otimes p}{|p|^2}$ la matrice définie par :

$$\frac{p \otimes p}{|p|^2} = \frac{1}{|p|^2} \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix}.$$

En introduisant cette matrice dans l'équation précédente, on peut alors définir :

$$F(x, y, r, p, X) = -d(x, y) \frac{\text{Tr}(X)}{|p|} + \frac{d(x, y)}{|p|} \text{Tr} \left(\frac{p \otimes p}{|p|^2} X \right) - \alpha d(x, y),$$

où ici X caractérise la matrice hessienne de notre fonction ligne de niveau u , $p = \nabla u$ et Tr désigne l'opérateur trace.

On voit ici que F ne dépend pas directement de r , c'est-à-dire que l'on peut écrire $F(x, y, r, p, X) = F(x, y, p, X)$ et donc on a bien la première propriété (1.8) vérifiée, *i.e.* :

$$F(x, y, r, p, X) \leq F(x, y, s, p, X) \quad \text{pour } r \leq s.$$

Montrons maintenant la condition d'ellipticité (1.9). Posons $A(p) = I - \frac{p \otimes p}{|p|^2}$. On a, pour $p \neq 0$ (singularité en $p = 0$) :

$$A(p) = \begin{pmatrix} \frac{p_1^2}{|p|^2} & \frac{-p_1 p_2}{|p|^2} \\ \frac{-p_1 p_2}{|p|^2} & \frac{p_2^2}{|p|^2} \end{pmatrix}.$$

La matrice $A(p)$ est semi-définie positive. En effet, si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$,

$$v^T A(p) v = \frac{1}{|p|^2} (v_1 p_2 - v_2 p_1)^2 \geq 0.$$

De plus, $A(p)$ est symétrique, ses valeurs propres sont donc positives et il existe alors une base orthonormale autorisant la décomposition $D = P^T A(p) P$ avec P matrice orthogonale et D matrice diagonale avec des valeurs positives. On peut alors écrire $A(p) = \sigma \sigma^T$, avec $\sigma = P D^{1/2}$. On a alors :

$$\text{Tr}(A(p)X) = \text{Tr}(\sigma \sigma^T X) = (\sigma^T X \sigma) = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^T X \sigma_i$$

où σ_i est la i -ème colonne de σ .

Supposons maintenant que, pour $X, Y \in \mathcal{S}(n)$, on ait $Y \geq X$. Alors, comme X et Y sont symétriques, on a :

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \sigma_i^T X \sigma_i \leq \sigma_i^T Y \sigma_i \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_i^T X \sigma_i}{|p|^2} \leq \frac{\sigma_i^T Y \sigma_i}{|p|^2}.$$

Comme $d \geq 0$, on a alors : La fonction F est donc elliptiquement dégénérée pour $p \neq 0$ et F est donc propre. \square

Avant de passer à la suite de la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution à notre problème, je vais faire quelques rappels sur les solutions de viscosité.

Définition 1.4.2. Sous-solutions, sur-solutions, solutions. *On dit d'une fonction $u = [0, T] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est une sous-solution de viscosité de (1.10) si u est semi-continue supérieurement dans $[0, T] \times \mathcal{D}$ et si, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathcal{D})$ telle que $u - \phi$ a un maximum local en un points $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathcal{D}$, on a :*

$$\phi_t(t_0, x_0) + F(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0), D^2\phi(t_0, x_0)) \leq 0.$$

Symétriquement, on dit qu'une fonction $u : [0, T] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est une sur-solution de viscosité de (1.10) si u est semi-continue inférieurement dans $[0, T] \times \mathcal{D}$ et si, pour toute fonction

test $\phi \in C^2([0, T] \times \mathcal{D})$ telle que $u - \phi$ a un minimum local en un point $(x_0, t_0) \in [0, T] \times \mathcal{D}$, on a :

$$\phi_t(t_0, x_0) + F(t_0, x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0), D^2\phi(t_0, x_0)) \leq 0.$$

Enfin, $u : [0, T] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de viscosité de (1.10) si u est sous et sur-solution de (1.10).

La suite de la démonstration, pour établir l'existence et l'unicité de la solution à notre problème 1.6, est basée sur un théorème de Ishii et Sato [IS04], qui s'inscrit dans le cadre particulier des équations paraboliques présentant une singularité en $p = 0$, avec des conditions aux bords particulières. Commençons par énoncer quelques conditions que notre fonction F doit remplir. On suppose ici que \mathcal{D} est un domaine borné de \mathbb{R}^n avec un bord C^1 .

1. La fonction F est $C^0([0, T] \times \overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
2. Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que pour tout (t, x, p, X) appartenant à $[0, T] \times \overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la fonction $u \mapsto F(t, x, u, p, X) - \gamma u$ est croissante sur \mathbb{R} .
3. Pour tout $R > 0$, il existe une fonction continue $w_R : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, satisfaisant $w_R(0) = 0$, telle que si $X, Y \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \mu_2 \in [0, \infty[$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \mu_1 \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

alors,

$$-(F(t, x, u, p, X) - F(t, y, u, q, -Y)) \leq w_R(\mu_1(|x - y|^2 + \rho^2) + \mu_2 + |x - y|) \quad (1.11)$$

$t \in [0, T]$, $x, y \in \overline{\mathcal{D}}$, $u \in \mathbb{R}$ borné et $p, q \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

4. $B \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $p \mapsto B(x, p)$ est positivement homogène de degré 1 en p , c'est-à-dire, $B(x, \lambda p) = \lambda B(x, p)$, $\forall \lambda \geq 0$, $p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.
6. Il existe une constante $\theta > 0$ telle que $\langle \nu(z), D_p B(z, p) \rangle \geq \theta$ pour tout $z \in \partial \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ où $\nu(z)$ est la normale unitaire sortante de Ω en $z \in \partial \mathcal{D}$.

Remarque : En pratique, on peut traiter numériquement les singularités. Le fait que le domaine soit de bord C^1 n'est pas très important pour nous, par contre, la donnée initiale u_0 ne doit pas avoir de singularité.

Théorème 1.2. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, u, Du, D^2u) = 0, & \text{sur }]0, T[\times \mathcal{D}, \\ B(x, Du) = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

avec $u(0, x) = u_0(x)$ pour $x \in \overline{\mathcal{D}}$.

Si les conditions 1 à 6 sont satisfaites, alors, pour toute fonction $u_0 \in C^0(\overline{\mathcal{D}})$, il existe une unique solution de viscosité $u \in C^0([0, T] \times \overline{\mathcal{D}})$ au problème (1.12) satisfaisant $u(0, x) = u_0(x)$.

Corollaire 1.3. *Les fonctions F et B associées au problème (1.6) vérifient les conditions 1 à 6.*

Démonstration. Appliquons le théorème 1.2 à notre problème (1.6), dont la démonstration est dans [GGV05]. En d'autres termes, montrons que F et B vérifient les conditions 1 à 6.

- Vérifions la première condition

$$F(t, x, u, p, X) = -\frac{d(x)}{|p|} \operatorname{Tr} \left(\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right) - \alpha d(x).$$

Soit $A(x, p)$, matrice symétrique définie positive, telle que $A(x, p) = d(x) \left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right)$, on a alors

$$F(t, x, u, p, X) = \frac{-\operatorname{Tr}(A(x, p)X)}{|p|} - \alpha d(x).$$

La fonction F a une singularité en $p = 0$ mais est continue partout ailleurs.

- La fonction F ne dépend pas explicitement de u . En effet, toute constante négative γ satisfait alors le deuxième critère.
- L'inégalité de la condition 3 nous donne $\forall r, s \in \mathbb{R}^2$:

$$(Xr, r) + (Ys, s) \leq \mu_1 |r - s|^2 + \mu_2 (|r|^2 + |s|^2)$$

En prenant respectivement $r = \sigma(x, p)e_i$, $s = \sigma(y, q)e_i$ et $A(x, p) = \sigma(x, p)\sigma^T(x, p)$, avec $(e_i)_i$ base orthonormée de \mathbb{R}^2 , on a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A(x, p)X) + \operatorname{Tr}(A(y, q)Y) &\leq \mu_1 \operatorname{Tr}((\sigma(x, p) - \sigma(y, q))(\sigma(x, p) - \sigma(y, q))^T) \\ &\quad + \mu_2 \left(\frac{d(x)}{|p|} + \frac{d(y)}{|q|} \right). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} C &= \operatorname{Tr}((\sigma(x, p) - \sigma(y, q))(\sigma(x, p) - \sigma(y, q))^T) \\ &= \operatorname{Tr}(\sigma(x, p)\sigma^T(x, p) + \sigma(y, q)\sigma^T(y, q) - \sigma(x, p)\sigma^T(y, q) - \sigma^T(y, q)\sigma^T(x, p)) \\ &= \operatorname{Tr}(A(x, p) + A(y, q) - \sigma(x, p)\sigma^T(y, q) - \sigma(y, q)\sigma^T(x, p)) \\ &\leq \frac{d(x)}{|p|} + \frac{d(y)}{|q|} - \frac{2\sqrt{d(x)d(y)}}{\sqrt{|p||q|}}, \end{aligned}$$

donc, en supposant $|p| \leq |q|$, on a alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A(x, p)X) + \operatorname{Tr}(A(y, q)Y) &\leq \mu_1 \left(\frac{\sqrt{d(x)}}{|p|} + \frac{\sqrt{d(y)}}{|q|} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{d(x)}{|p|} + \frac{d(y)}{|q|} \right) \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{\sqrt{d(x)}}{|p|} + \frac{\sqrt{d(y)}}{|q|} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\beta}{|p|} + \frac{\beta}{|q|} \right) \\ &\leq \mu_1 \left(\frac{\sqrt{d(x)}}{|p|} + \frac{\sqrt{d(y)}}{|q|} \right)^2 + \frac{2\beta}{|p|} \mu_2, \end{aligned}$$

où $\beta \geq d(x)$, $\forall x \in \overline{\mathcal{D}}$. De plus,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{d(x)}}{|p|} + \frac{\sqrt{d(y)}}{|q|} \right)^2 &\leq \left[(\sqrt{d(x)} - \sqrt{d(y)}) \frac{1}{|p|} + \sqrt{d(y)} \left(\frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|} \right) \right]^2 \\ &\leq \frac{2(\sqrt{d(x)} - \sqrt{d(y)})^2}{|p|^2} + 2d(y) \left(\frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|} \right)^2. \end{aligned}$$

On a alors

$$\text{Tr}(A(x, p)X) + \text{Tr}(A(y, q)Y) \leq \mu_1 \left(2\xi |x - y|^2 + 2\beta \left(\frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|} \right)^2 \right) + \frac{2\beta}{|p|} \mu_2,$$

où $\sqrt{\xi}$ est la constante de Lipschitz de $x \mapsto \sqrt{d(x)}$. On a donc :

$$\begin{aligned} -F(t, x, u, p, X) + F(t, y, u, q, -Y) &= \text{Tr}(A(x, p)X) + \text{Tr}(A(y, q)Y) - (d(x)\alpha - d(y)\alpha) \\ &\leq \mu_1(2\xi|x - y|^2 + 2\beta\rho^2) + \frac{2\beta}{|p|}\mu_2 + K\alpha|x - y| \\ &\leq \max\left(2\xi, \frac{2\beta}{|p|}, K\alpha\right) (\mu_1(|x - y|^2 + \rho^2) + \mu_2 + |x - y|), \end{aligned}$$

où K est la constante de Lipschitz de $x \mapsto d(x)$ et ρ est un majorant de $\frac{1}{|p|} - \frac{1}{|q|}$.

On a alors $w_R(l) = \max\left(2\xi, \frac{2\beta}{|p|}, K\alpha\right) l$ et donc $w_R(0) = 0$.

- Dans notre cas, $B(x, p) = \langle \nu(x), p \rangle$. La condition 4 est alors satisfaite suivant des conditions sur ν (ν , champ de vecteur $C^{1,1}$).
- Vérifions la condition 5.

$$B(x, \lambda p) = \langle \nu(x), \lambda p \rangle = \lambda \langle \nu(x), p \rangle = \lambda B(x, p), \quad \forall \lambda \geq 0, p \in \mathbb{R}^2 - \{0\},$$

et B est donc positivement homogène de degré 1.

- Soit $z \in \partial\mathcal{D}$ alors $\langle \nu(z), D_p B(z, p) \rangle = |\nu(z)|^2 = 1$. Il suffit donc de prendre $\theta = 1$ pour avoir la condition 6.

□

En vertu du théorème 1.2, on peut donc conclure à l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1.6), sous certaines hypothèses satisfaites par u , mais aussi sous certaines hypothèses sur $\overline{\mathcal{D}}$ ou u_0 .

Bien entendu, le théorème 1.2 ne donne aucune indication sur la nature de la solution, hormis l'existence et l'unicité. Comme dans nombre de problèmes modélisés par une EDP, on s'attachera à calculer une approximation de cette solution, à l'aide de schémas numériques spécifiquement conçus pour notre problème (*cf.* chapitre 2).

Dans la section suivante, je vais montrer que ce problème d'évolution peut s'écrire également sous la forme d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie.

1.4.2 Problème de minimisation équivalent

À l'équilibre, c'est-à-dire lorsque $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, l'équation d'évolution (1.6) peut s'écrire sous la forme de l'équation elliptique suivante :

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \alpha, \quad (1.13)$$

que l'on peut écrire aussi $A(u) = \alpha$, où $A(\cdot)$ est un opérateur elliptique non linéaire du second ordre. Le calcul des variations donne : $A(u) = I'(u)$ où $I(\cdot)$ est une fonctionnelle d'énergie. On va donc chercher u comme point critique de I . Pour calculer l'expression de I , on introduit l'opérateur lagrangien $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tel que :

$$I(u) = \int_{\Gamma} L(p(u), u, x) dx.$$

Cette intégration est faite sur la courbe Γ que l'on cherche puisque, finalement, on souhaite que celle-ci soit la courbe de longueur minimale passant au mieux par tous les points de V .

L'équation d'Euler-Lagrange associée à I est alors donnée par la condition nécessaire pour que I soit stationnaire :

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \nabla_x \cdot (\nabla_p L) = 0.$$

En considérant que l'équation (1.13) correspond à l'équation d'Euler-Lagrange associée à I , on obtient facilement que $L(p(u), u, x) = |p(u)| - \alpha u$. On obtient alors :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \alpha, \quad \nabla_p L = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{|p|} \\ \frac{p_2}{|p|} \end{pmatrix}, \quad \text{où } p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

En prenant donc $p(u) = \nabla u$, on retrouve bien l'équation (1.13).

Donc si u est une solution du problème elliptique (1.13), alors u est solution du problème de minimisation $u = \arg \min_{v \in H^2} I(v)$ et inversement.

Remarque : À l'équilibre, on a une contrainte qui porte seulement sur la courbure et qui donc n'est pas très physique. De ce fait, on note la nécessité d'introduire un critère de convergence numérique, qui porte sur la valeur de u associée à chacun des points du nuage.

Chapitre 2

Schémas numériques

Avec le type de problèmes liés aux discontinuités développées par les méthodes de lignes de niveau, et la perte de la propriété $|\nabla u| = 1$, les schémas aux différences finies centrés classiques, pour approcher le terme de courbure, deviennent imprécis et instables. Les schémas de type différences finies ne sont pas vraiment faits pour approcher des géométries qui peuvent devenir complexes au fil des itérations. Raffiner localement le maillage cartésien repousse le problème sans le résoudre. De plus, dans les schémas explicites, le pas de temps étant lié à la taille de maille, on ne peut pas raffiner indéfiniment le maillage sans que le calcul ne prenne un temps trop important. La méthode des éléments finis est devenue très populaire, utilisant une formulation variationnelle du problème et cherchant des solutions dans des espaces fonctionnels appropriés. Les éléments finis permettent d'utiliser des maillages non structurés triangulaires du domaine, adaptés ou non à la géométrie du domaine ou bien aux variations de solutions. L'approximation des dérivées du second ordre dépend du degré des polynômes associés aux fonctions de forme. Obtenir une bonne valeur des termes de second ordre aux nœuds dans l'équation (1.6) implique l'utilisation de polynômes d'ordre trois, ce qui augmenterait considérablement le nombre de degrés de liberté dans le maillage. Les schémas de type ENO ou WENO (non oscillants) sont maintenant utilisés sur des triangulations mais sont relativement difficiles à implémenter pour des non spécialistes [HEOC87, JP00, OS91, Abg94, Abg96, AA00].

De chaque méthode présentée, on essaie de retenir les points forts :

- comme dans le cas des éléments finis triangulaires, on utilise des maillages non structurés pour nos calculs,
- comme dans les schémas aux différences finies, on utilise la notion de stencil en allant chercher la valeur de notre fonction aux points voisins,
- on ne monte pas en ordre dans les schémas comme dans le cas ENO ou WENO mais on va chercher la valeur de u aux points voisins à l'ordre deux.

De ce fait, on propose ici une alternative basée sur un schéma de type différences finies appliqué à des triangulations quelconques. Cette approche permet de calculer une approximation de la courbure en chaque point du maillage sans avoir recours à des schémas d'interpolation d'ordre élevé et est donc relativement facile à implémenter [CF09a].

2.1 Présentation des schémas

Le terme de dérivée en temps du premier ordre dans l'équation (1.6) que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \left(\alpha + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right),$$

peut être discrétisé en utilisant le schéma classique de différences finies suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{dt},$$

où $u_i^n \sim u(t^n, x_i)$, $t^n = n dt$, x_i est un point du maillage et dt est le pas de temps considéré. Comme la fonction distance d est invariante en temps, on note $d_i = d(x_i)$.

Les deux schémas proposés pour résoudre l'équation (1.6) sont :

- un schéma explicite du premier ordre :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d_i dt \left(\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)_i^n + \alpha \right), \quad (2.1)$$

- un schéma semi-implicite du premier ordre :

$$u_i^{n+1} - d_i dt \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^{n+1}|} \right) \right)_i = d_i dt \alpha + u_i^n. \quad (2.2)$$

2.2 Approximation des dérivées en espace

Les dérivées du premier ordre (gradient) et du second ordre (courbure moyenne) de la fonction ligne de niveau u interviennent dans l'équation du modèle (1.6). Il est donc important pour l'efficacité et la robustesse de ces schémas de calculer les dérivées aussi précisément que possible. Avec les méthodes d'approximation de type différences finies, u est définie en chaque point de la grille ainsi que les dérivées en espace. Sur des triangulations quelconques, on souhaiterait, par analogie, définir ces dérivées en chaque nœud d'une triangulation. Nous proposons donc ici une méthode pour évaluer le gradient et la courbure moyenne en chaque sommet d'une triangulation T_h donnée.

2.2.1 Approximation du gradient

Soit ω_{Kj} la coordonnée barycentrique relative au sommet x_j sur le triangle $K \in T_h$, alors :

$$u|_K = \sum_{j \in K} u_j \omega_{Kj}, \quad \text{and} \quad (\nabla u)|_K = \sum_{j \in K} u_j \nabla \omega_{Kj}. \quad (2.3)$$

Alors, pour chaque point i de T_h , le gradient discrétisé choisi est le suivant :

$$(\nabla u)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K (\nabla u)|_K}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} u_{i_2} \nabla \omega_{Ki_2}}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} \quad (2.4)$$

où A_K est l'aire du triangle K et \mathcal{B}_i est le support de i , c'est-à-dire l'ensemble des triangles qui ont pour sommet le point i .

2.2.2 Approximation de la courbure moyenne

Une fois obtenu le gradient en chaque point du maillage, la même procédure est appliquée à chaque composante du vecteur gradient afin d'obtenir la matrice hessienne de u en chaque point i . À partir de cette matrice, on obtient la valeur de la courbure moyenne en chaque nœud. Les formules précédentes permettent d'écrire la valeur approchée de $\nabla(\nabla u)$ sur tout le triangle K : $\nabla(\nabla u)|_K = \sum_{i \in K} (\nabla u)_i (\nabla \omega_{Ki})^T$, où on a pris le vecteur ligne $(\nabla \omega_{Ki})^T$ pour pouvoir effectuer le calcul du produit. Avec cette définition, $\nabla(\nabla u)|_K$ est une matrice carrée. On cherche donc à obtenir la valeur de $\nabla(\nabla u)_i$, en chaque point i . En utilisant les formules précédentes (2.3) et (2.4), on peut calculer les coefficients de la matrice hessienne de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 (\nabla(\nabla u))_i &= \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K (\nabla(\nabla u))|_K}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \left(\sum_{i_2 \in K} (\nabla u)_{i_2} (\nabla \omega_{Ki_2})^T \right)}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} \\
 &= \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \left(\sum_{i_2 \in K} \left(\frac{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L \left(\sum_{i_3 \in L} u_{i_3} \nabla \omega_{Li_3} \right)}{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L} \right) (\nabla \omega_{Ki_2})^T \right)}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

et la trace de la matrice hessienne est donc :

$$(\nabla \cdot (\nabla u))_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \left(\sum_{i_2 \in K} \left(\frac{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L \left(\sum_{i_3 \in L} u_{i_3} \langle \nabla \omega_{Li_3}, (\nabla \omega_{Ki_2})^T \rangle \right)}{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L} \right) \right)}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}, \quad (2.6)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien.

La courbure moyenne en chaque point i est donc définie par :

$$\kappa_i = \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \left(\sum_{i_2 \in K} \left(\frac{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L \left(\sum_{i_3 \in L} u_{i_3} \langle \nabla \omega_{Li_3}, \nabla \omega_{Ki_2} \rangle \right)}{|\nabla u|_{i_2} \sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L} \right) \right)}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}. \quad (2.7)$$

Dans cette expression (2.7), l'ensemble \mathcal{B}_i caractérise l'ensemble des triangles qui ont pour sommet le point i et \mathcal{B}_{i_2} caractérise l'ensemble des triangles qui ont pour sommet le point i_2 .

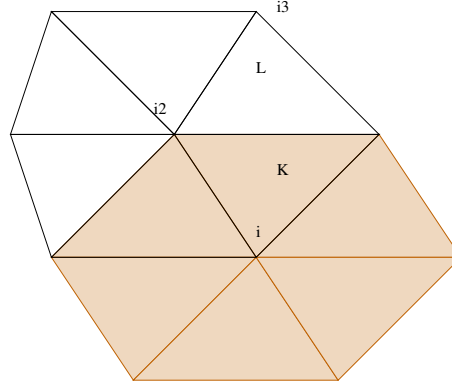


FIG. 2.1 – Partie de la double boule du sommet i .

D'un point de vue numérique, ces deux approximations sont relativement simples à implémenter. La seule difficulté algorithmique est de trouver rapidement l'ensemble des triangles qui composent \mathcal{B}_i , pour tout sommet i . Ceci peut être réalisé en utilisant des structures de données appropriées [FG08] que je présenterai dans le chapitre 4.

2.3 Consistance

Dans ce paragraphe, on montre la consistance des schémas proposés pour l'équation (1.6). On commencera ici par considérer le cas où la fonction u est une fonction distance, c'est-à-dire $|\nabla u| = 1$. Ceci permet de réduire le terme de courbure à un laplacien. Toujours pour simplifier l'exposé, on considère aussi le cas où le maillage est une grille cartésienne. Ces deux hypothèses permettent de mieux comprendre la démonstration. Dans un second temps, on s'intéressera au cas général où $\kappa(u) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$.

2.3.1 Cas du laplacien

Étant donnée une grille cartésienne T_h de taille h , on note K une cellule carrée de T_h et (i, j) le point où va être calculée la valeur du laplacien Δu . Soit $\mathcal{B}_{i,j}$ la boule du point (i, j) , c'est-à-dire l'ensemble des quatre cellules voisines à (i, j) . Par analogie avec les formules (2.3) et (2.4), l'expression du gradient au point (i, j) est la suivante :

$$(\nabla u)|_K = \sum_{(i,j) \in K} u_{i,j} \nabla w_{K,i,j}$$

$$(\nabla u)_{i,j} = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} A_K (\nabla u)|_K}{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} A_K} = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} \sum_{(i_2,j_2) \in K} u_{i_2,j_2} \nabla w_{K,i_2,j_2}}{4},$$

où la valeur 4 au dénominateur de la dernière fraction correspond au nombre de cellules contenant (i, j) . Par extension, l'évaluation de l'opérateur de Laplace est la suivante :

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot (\nabla u))_{i,j} &= (\Delta u)_{i,j} \\
&= \frac{1}{4} \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} A_K \left(\sum_{(i_2, j_2) \in K} \left(\frac{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2, j_2}} A_L \left(\sum_{(i_3, j_3) \in L} u_{i_3, j_3} \langle \nabla \omega_{L, i_3, j_3}, \nabla \omega_{K, i_2, j_2} \rangle \right)}{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2, j_2}} A_L} \right) \right)}{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} A_K} \quad (2.8) \\
&= \frac{1}{4} \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} \sum_{(i_2, j_2) \in K} \left(\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2, j_2}} \sum_{(i_3, j_3) \in L} u_{i_3, j_3} \langle \nabla \omega_{L, i_3, j_3}, \nabla \omega_{K, i_2, j_2} \rangle \right)}{16}.
\end{aligned}$$

Le coefficient $\frac{1}{4}$ dans la dernière équation vient du calcul du terme $\langle \nabla \omega, \nabla \omega \rangle$ dans les cellules carrées (cf. annexe). Le nombre de cellules dans $\mathcal{B}_{i,j}$ multiplié par le nombre de cellules dans \mathcal{B}_{i_2, j_2} apparaît aussi dans le dénominateur. Le stencil du laplacien avec ce schéma est décrit sur la figure 2.2. Après avoir développé tous les calculs, l'expression du laplacien au point (i, j) devient finalement, après simplification (cf. figure 2.2) :

$$\begin{aligned}
(\Delta u)_{i,j} &= -\frac{1}{64h^2} (24u_{i,j} + 8u_{i+1,j} + 8u_{i,j+1} + 8u_{i-1,j} + 8u_{i,j-1} \\
&\quad - 2u_{i+2,j-2} - 2u_{i+2,j+2} - 2u_{i-2,j+2} - 2u_{i-2,j-2} \\
&\quad - 4u_{i-1,j-2} - 4u_{i,j-2} - 4u_{i+1,j-2} - 4u_{i+2,j-1} - 4u_{i+2,j} - 4u_{i+2,j+1} \\
&\quad - 4u_{i+1,j+2} - 4u_{i,j+2} - 4u_{i-1,j+2} - 4u_{i-2,j+1} - 4u_{i-2,j} - 4u_{i-2,j-1}). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

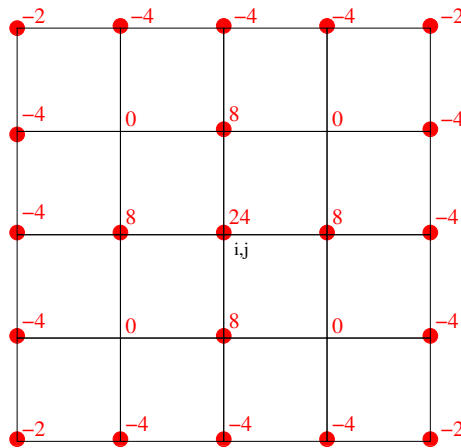


FIG. 2.2 – Stencil du laplacien en (i, j) et coefficients associés.

Définition 2.3.1. L'opérateur discret de Laplace est donné par la formule (2.9).

Proposition 2.1. L'opérateur discret de Laplace (2.9) est consistant à l'ordre deux avec le laplacien.

Démonstration. On commence par raisonner en dimension un d'espace. Si l'on suppose que $u_{i,j}$ ne dépend que de j , c'est-à-dire que si l'on somme chaque coefficient sur chaque colonne de l'expression précédente (2.9), on obtient :

$$\frac{1}{64} \left(\frac{16u_{i+2} - 32u_i + 16u_{i-2}}{h^2} \right) = \frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{(2h)^2} \sim \Delta u.$$

Pour montrer que notre approximation est bien consistante à l'ordre deux avec le laplacien, on utilise les développements de Taylor classiques à l'ordre 4. En particulier, pour u suffisamment régulière ($u \in C^4$),

il existe $y \in [x_i, x_{i+2}]$ tel que :

$$\begin{aligned} u(t^n, x_{i+2}) &= u(t^n, x_i) + 2h \partial_x u(t^n, x_i) + \frac{(2h)^2}{2} \partial_{xx}^2 u(t^n, x_i) \\ &\quad + \frac{(2h)^3}{6} \partial_{xxx}^3 u(t^n, x_i) + \frac{(2h)^4}{24} \partial_{xxxx}^4 u(t^n, y). \end{aligned}$$

Il existe aussi $z \in [x_{i-2}, x_i]$ tel que :

$$\begin{aligned} u(t^n, x_{i-2}) &= u(t^n, x_i) - 2h \partial_x u(t^n, x_i) + \frac{(2h)^2}{2} \partial_{xx}^2 u(t^n, x_i) \\ &\quad - \frac{(2h)^3}{6} \partial_{xxx}^3 u(t^n, x_i) + \frac{(2h)^4}{24} \partial_{xxxx}^4 u(t^n, z). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} &\frac{u(t^n, x_{i+2}) - 2u(t^n, x_i) + u(t^n, x_{i-2})}{(2h)^2} \\ &= \frac{1}{4h^2} \left(4h^2 \partial_{xx}^2 u(t^n, x_i) + \frac{2h^4}{3} \partial_{xxxx}^4 u(t^n, y) + \frac{2h^4}{3} \partial_{xxxx}^4 u(t^n, z) \right) \\ &= \Delta u(t^n, x_i) + \frac{h^2}{12} (\partial_{xxxx}^4 u(t^n, y) + \partial_{xxxx}^4 u(t^n, z)). \end{aligned}$$

Si $\varepsilon_j^n(u)$ désigne l'erreur de consistance, on peut alors écrire :

$$\varepsilon_j^n(u) = \frac{u(t^n, x_{i+2}) - 2u(t^n, x_i) + u(t^n, x_{i-2})}{(2h)^2} - \Delta u(t^n, x_i) \leq C h^2,$$

où C est une constante indépendante de h et qui dépend seulement des dérivées d'ordre quatre en espace. Ceci établit la consistance à l'ordre deux avec l'opérateur de Laplace.

On raisonne maintenant en dimension deux d'espace. Les valeurs suivantes entre crochets correspondent aux coefficients du stencil (et ne doivent pas être pris pour une matrice) :

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ 4 & -8 & -24 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

On découpe l'analyse en trois étapes et l'on considère successivement :

– la croix principale :

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} & & 4 & & \\ & & 0 & & \\ 4 & 0 & -16 & 0 & 4 \\ & & 0 & & \\ & & 4 & & \end{bmatrix}$$

qui correspond à l'expression :

$$\frac{1}{64} \left(\frac{4u_{i,j-2} - 8u_{i,j} + 4u_{i,j+2}}{h^2} + \frac{4u_{i+2,j} - 8u_{i,j} + 4u_{i-2,j}}{h^2} \right) \sim \frac{1}{4} \Delta u; \quad (2.10)$$

– puis les termes :

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} & 4 & & 4 & \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ & -8 & & -8 & \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ & 4 & & 4 & \end{bmatrix}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{64} \left(\frac{4u_{i-2,j+1} - 8u_{i,j+1} + 4u_{i+2,j+1}}{h^2} + \frac{4u_{i+1,j-2} - 8u_{i+1,j} + 4u_{i+1,j+2}}{h^2} \right) \\ & + \frac{1}{64} \left(\frac{4u_{i-2,j-1} - 8u_{i,j-1} + 4u_{i+2,j-1}}{h^2} + \frac{4u_{i-1,j-2} - 8u_{i-1,j} + 4u_{i-1,j+2}}{h^2} \right) \quad (2.11) \\ & \sim \frac{1}{2} \Delta u; \end{aligned}$$

– et enfin les termes résiduels du stencil :

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} & 2 & & & 2 \\ & & 0 & & 0 \\ & & & -8 & \\ & & 0 & & 0 \\ 2 & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \frac{1}{64} \left(\frac{2u_{i-2,j+2} - 4u_{i,j} + 2u_{i+2,j-2}}{h^2} + \frac{2u_{i-2,j-2} - 4u_{i,j} + 2u_{i+2,j+2}}{h^2} \right) \quad (2.12) \\ & \sim \frac{2(2\sqrt{2})^2}{64} \Delta u = \frac{1}{4} \Delta u. \end{aligned}$$

Si on somme (2.10), (2.11) et (2.12), on peut voir alors que le schéma proposé est bien consistant au second ordre avec $\frac{1}{4}\Delta + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{4}\Delta$, c'est-à-dire avec le laplacien en dimension deux. \square

2.3.2 Cas du terme général de courbure moyenne

On considère maintenant le cas général pour l'expression de la courbure, à savoir $\kappa(u) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$, sur une grille cartésienne. Pour tout u , on fixe $a = |\nabla u|$ et selon les

précédents calculs, en chaque point (i, j) de la grille, on peut écrire l'équation suivante :

$$\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{a} \right) \right)_{i,j} = \frac{1}{64} \sum_{K \in \mathcal{B}_{i,j}} \sum_{(i_2, j_2) \in K} \left(\frac{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2, j_2}} \sum_{(i_3, j_3) \in L} u_{i_3, j_3} \langle \nabla \omega_{L, i_3, j_3}, \nabla \omega_{K, i_2, j_2} \rangle}{a_{i_2, j_2}} \right),$$

On note $c_{i,j}$ le coefficient au point (i, j) , qui sera devant $u_{i,j}$ dans le stencil de l'opérateur $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{|\nabla|} \right)$. On a alors :

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \frac{4}{a_{i+1,j}} + \frac{4}{a_{i,j+1}} + \frac{4}{a_{i-1,j}} + \frac{4}{a_{i,j-1}} + \frac{2}{a_{i+1,j+1}} + \frac{2}{a_{i-1,j+1}} + \frac{2}{a_{i-1,j-1}} + \frac{2}{a_{i+1,j-1}}, \\ c_{i-1,j-1} &= 0 \quad c_{i,j-1} = \frac{2}{a_{i+1,j-1}} + \frac{2}{a_{i,j-1}} + \frac{2}{a_{i+1,j+1}} + \frac{2}{a_{i,j+1}}, \\ c_{i+1,j-1} &= 0 \quad c_{i+1,j} = \frac{2}{a_{i-1,j}} + \frac{2}{a_{i-1,j-1}} + \frac{2}{a_{i+1,j-1}} + \frac{2}{a_{i+1,j}}, \\ c_{i+1,j+1} &= 0 \quad c_{i,j+1} = \frac{2}{a_{i+1,j}} + \frac{2}{a_{i-1,j}} + \frac{2}{a_{i+1,j+1}} + \frac{2}{a_{i-1,j+1}}, \\ c_{i-1,j+1} &= 0 \quad c_{i-1,j} = \frac{2}{a_{i-1,j+1}} + \frac{2}{a_{i,j+1}} + \frac{2}{a_{i-1,j-1}} + \frac{2}{a_{i,j-1}}, \\ c_{i-2,j-2} &= \frac{-2}{a_{i-1,j-1}}, \quad c_{i-1,j-2} = \frac{-2}{a_{i,j-1}} - \frac{2}{a_{i-1,j-1}}, \quad c_{i,j-2} = \frac{-4}{a_{i,j-1}}, \\ c_{i+2,j-2} &= \frac{-2}{a_{i+1,j-1}}, \quad c_{i+2,j-1} = \frac{-2}{a_{i+1,j}} - \frac{2}{a_{i+1,j-1}}, \quad c_{i+2,j} = \frac{-4}{a_{i+1,j}}, \\ c_{i+2,j+2} &= \frac{-2}{a_{i+1,j+1}}, \quad c_{i+1,j+2} = \frac{-2}{a_{i,j+1}} - \frac{2}{a_{i+1,j+1}}, \quad c_{i,j+2} = \frac{-4}{a_{i,j+1}}, \\ c_{i-2,j+2} &= \frac{-2}{a_{i-1,j+1}}, \quad c_{i-2,j+1} = \frac{-2}{a_{i-1,j}} - \frac{2}{a_{i-1,j+1}}, \quad c_{i-2,j} = \frac{-4}{a_{i-1,j}}, \\ c_{i+1,j-2} &= \frac{-2}{a_{i+1,j-1}} - \frac{2}{a_{i,j-1}}, \quad c_{i+2,j+1} = \frac{2}{a_{i+1,j+1}} - \frac{2}{a_{i+1,j}}, \\ c_{i-1,j+2} &= \frac{-2}{a_{i-1,j+1}} - \frac{2}{a_{i,j+1}}, \quad c_{i-2,j-1} = \frac{-2}{a_{i-1,j-1}} - \frac{2}{a_{i-1,j}}. \end{aligned}$$

Proposition 2.2. L'opérateur discret $\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{|\nabla|} \right) \right)_{i,j}$ est consistant à l'ordre deux avec

l'opérateur continu $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{|\nabla|} \right)$.

Démonstration. Comme précédemment, on commence par raisonner en dimension un d'espace. On rappelle que le schéma classique ne fait intervenir que les points $i-1, i, i+1$ de la grille (cf. figure 2.3, haut) et alors la formule pour le calcul de la courbure devient :

$$\partial_x \left(\frac{\partial_x u}{a} \right)_i = \frac{\left(\frac{\partial_x u}{a} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial_x u}{a} \right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a_{i-\frac{1}{2}}} \right).$$

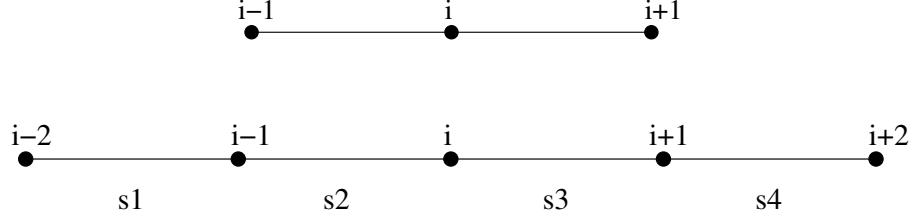


FIG. 2.3 – Cas de la dimension 1 : le stencil classique vs. notre stencil.

Si les points de la grille $i + \frac{1}{2}$ et $i - \frac{1}{2}$ ne sont pas définis, on peut utiliser une valeur moyenne intermédiaire interpolée : $a_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a_{i+1} + a_i)$.

Avec le schéma proposé, l'expression de la courbure est alors :

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\frac{\partial_x u}{a} \right)_i &= \frac{u_{i+2} \omega'_{s_4, i+2} \omega'_{s_3, i+1}}{a_{i+1}} + \frac{u_i \omega'_{s_3, i} \omega'_{s_3, i+1}}{a_{i+1}} + \frac{u_{i-2} \omega'_{s_1, i-2} \omega'_{s_2, i-1}}{a_{i-1}} + \frac{u_i \omega'_{s_2, i} \omega'_{s_2, i-1}}{a_{i-1}} \\ &= \frac{1}{(2h)^2} \left(\frac{u_{i+2} - u_i}{a_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-2}}{a_{i-1}} \right) \sim \partial_x \left(\frac{\partial_x u}{a} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

où $\omega'_{s_p, j}$ est la dérivée de la coordonnée barycentrique au point j dans l'élément s_p . On peut alors observer que cette approximation est consistante avec le schéma classique. Pour calculer l'ordre de consistance de notre schéma avec le schéma classique d'approximation de l'opérateur de courbure $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{a} \right)$, on utilise les développements de Taylor classiques. On commence par réécrire notre schéma sous une autre forme.

On pose $b = \frac{1}{a}$, notre schéma (2.13) est alors équivalent à :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h} \left(\frac{u_{i+2} - u_i}{2h} b_{i+1} - \frac{u_i - u_{i-2}}{2h} b_{i-2} \right) \\ &= \frac{1}{2h} \left[(b_{i+1} - b_i) \left(\frac{u_{i+2} - u_i}{2h} \right) + (b_{i-1} - b_i) \left(\frac{u_i - u_{i-2}}{2h} \right) \right] + b_i \left(\frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{(2h)^2} \right) \\ &\sim b(t^n, x_i) (\partial_{x,x}^2 u(t^n, x_i) + O(h^2)) + \frac{1}{2} (\partial_x u(t^n, x_i) + O(h^2)) \left(\frac{b(t^n, x_i) - b(t^n, x_i)}{h} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_x u(t^n, x_{i-1}) + O(h^2)) \left(\frac{b(t^n, x_{i-1}) - b(t^n, x_i)}{h} \right). \end{aligned}$$

Comme b est affine, on a $\frac{b(t^n, x_{i+1}) - b(t^n, x_i)}{h} = \frac{b(t^n, x_{i-1}) - b(t^n, x_i)}{h} = \partial_x b(t^n, x_i)$. De plus, $\partial_x (b \partial_x u) = b \partial_{x,x}^2 u + \partial_x b \partial_x u$. On a alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h} \left(\frac{u_{i+2} - u_i}{2h} b_{i+1} - \frac{u_i - u_{i-2}}{2h} b_{i-2} \right) \\ &= b(t^n, x_i) (\partial_{x,x}^2 u(t^n, x_i) + O(h^2)) + (\partial_x u(t^n, x_i) + O(h^2)) \partial_x b(t^n, x_i) \\ &= \nabla \cdot (b \nabla u)(t^n, x_i) + C O(h^2), \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de h , qui ne dépend que de b et de ses dérivées en espace. On a donc bien consistance d'ordre deux avec l'opérateur classique de courbure.

Si b n'avait pas été affine, on aurait eu :

$$\frac{b(t^n, x_{i+1}) - b(t^n, x_i)}{h} = \frac{b(t^n, x_{i-1}) - b(t^n, x_i)}{h} = \partial_x b(t^n, x_i) + O(h),$$

et la consistance aurait alors été d'ordre un.

On raisonne maintenant en dimension deux d'espace. Les dérivées sont alors simplement écrites comme ci-dessous :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{a} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial_x u}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial_y u}{a} \right)$$

et alors l'approximation de la courbure au point (i, j) de la grille devient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{a} \right)_{i,j} &= \frac{\left(\frac{\partial_x u}{a} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial_x u}{a} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{h} + \frac{\left(\frac{\partial_y u}{a} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial_y u}{a} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{a_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{a_{i-\frac{1}{2},j}} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{a_{i,j+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{a_{i,j-\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Comme précédemment avec le laplacien, on découpe l'analyse de notre schéma en plusieurs étapes et on considère alors :

- les coefficients de la croix principale dans le stencil :

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} & & 4 & & \\ & & 0 & & \\ 4 & 0 & -16 & 0 & 4 \\ & & 0 & & \\ & & 4 & & \end{bmatrix}$$

qui correspondent à :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{64h^2} \left(\frac{4u_{i,j+2} - 4u_{i,j}}{a_{i,j+1}} - \frac{4u_{i,j} - 4u_{i,j-2}}{a_{i,j-1}} + \frac{4u_{i+2,j} - 4u_{i,j}}{a_{i+1,j}} - \frac{4u_{i,j} - 4u_{i-2,j}}{a_{i-1,j}} \right) \\ &= \frac{4}{64} \times \frac{1}{(2h)^2} \left(\frac{u_{i,j+2} - u_{i,j}}{a_{i,j+1}} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-2}}{a_{i,j-1}} + \frac{u_{i+2,j} - u_{i,j}}{a_{i+1,j}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-2,j}}{a_{i-1,j}} \right) \\ &\sim \frac{1}{4} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{a} \right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

- les coefficients de la seconde et la quatrième colonne du stencil

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} & 4 & & \\ & 0 & & \\ & -8 & & \\ & 0 & & \\ & 4 & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} & 4 & & \\ & 0 & & \\ & -8 & & \\ & 0 & & \\ & 4 & & \end{bmatrix}$$

correspondant respectivement à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i-1,j+2} - 2u_{i-1,j}}{a_{i,j+1}} - \frac{2u_{i-1,j} - 2u_{i-1,j-2}}{a_{i,j-1}} \right) \\ & + \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i-1,j+2} - 2u_{i-1,j}}{a_{i-1,j-1}} - \frac{2u_{i-1,j} - 2u_{i-1,j+2}}{a_{i-1,j+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{et} & \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i+1,j+2} - 2u_{i+1,j}}{a_{i,j+1}} - \frac{2u_{i+1,j} - 2u_{i+1,j-2}}{a_{i,j-1}} \right) \\ & + \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i+1,j+2} - 2u_{i+1,j}}{a_{i+1,j+1}} - \frac{2u_{i+1,j} - 2u_{i+1,j-2}}{a_{i+1,j-1}} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

– les coefficients de la deuxième et quatrième lignes du stencil :

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

correspondant respectivement à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i+2,j+1} - 2u_{i,j+1}}{a_{i+1,j}} - \frac{2u_{i,j+1} - 2u_{i-2,j+1}}{a_{i-1,j}} \right) \\ & - \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i+2,j+1} - 2u_{i,j+1}}{a_{i+1,j+1}} + \frac{2u_{i,j+1} - 2u_{i-2,j+1}}{a_{i-1,j+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{et} & \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i+2,j-1} - 2u_{i,j-1}}{a_{i+1,j}} - \frac{2u_{i,j-1} - 2u_{i-2,j-1}}{a_{i-1,j}} \right) \\ & + \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i+2,j-1} - 2u_{i,j-1}}{a_{i+1,j-1}} - \frac{2u_{i,j-1} - 2u_{i-2,j-1}}{a_{i-1,j-1}} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

On peut facilement observer que la somme des expressions (2.15) à (2.18) donne un terme équivalent à $\frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{a} \right)$.

– les termes restants :

$$\frac{1}{64h^2} \begin{bmatrix} 2 & & & & 2 \\ & 0 & & 0 & \\ & & -8 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 2 & & & & 2 \end{bmatrix}$$

correspondant à :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i+2,j-2} - 2u_{i,j}}{a_{i+1,j-1}} - \frac{2u_{i,j} - 2u_{i+2,j+2}}{a_{i+1,j+1}} \right) \\ & + \frac{1}{64h^2} \left(\frac{2u_{i-2,j+2} - 2u_{i,j}}{a_{i-1,j+1}} - \frac{2u_{i,j} - 2u_{i-2,j-2}}{a_{i-1,j-1}} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\sim \frac{1}{4} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{a} \right).$$

En sommant les termes (2.14) à (2.19), on en déduit que notre schéma est consistant avec $\frac{1}{4}\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{a}\right) + \frac{1}{2}\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{a}\right) + \frac{1}{4}\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{a}\right)$, c'est-à-dire avec l'opérateur $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{a}\right)$. \square

Dans ce paragraphe, on vient d'établir que nos schémas sont tous les deux consistants avec l'opérateur différentiel de l'équation modèle (1.6). Notons que ces résultats ont été obtenus sur des grilles cartésiennes dans le cas du laplacien et pour l'expression générale de la courbure. Toutefois, il n'y a pas de raison particulière pour que ces résultats de consistance ne soient pas vérifiés sur des triangulations arbitraires. Nous allons maintenant montrer la stabilité de nos schémas.

2.4 Stabilité

Dans cette section, on montre la stabilité en norme L^2 de nos schémas. En effet, les schémas (2.1) et (2.2) ne sont pas stables en norme L^∞ . Cela ne pose pas de réels problèmes puisqu'il n'existe pas de schémas stables en norme L^∞ , pour le laplacien, sur des maillages triangulaires. De plus, les schémas proposés sont en fait composés d'opérateurs de projection en norme L^2 , et le critère de convergence de notre algorithme dépend également de la projection L^2 de la valeur de notre fonction u sur les points de l'échantillon V qui ne font pas partie du maillage.

On présente donc ici la stabilité en norme L^2 pour les deux schémas (explicite et semi-implicite) en commençant par considérer le cas du laplacien, comme précédemment, puis en considérant le terme général de courbure moyenne. Un critère général de stabilité (condition de type CFL) est donné pour tout type de maillage et la constante intervenant dans cette condition est explicitée dans le cas des grilles cartésiennes.

2.4.1 Schéma explicite d'ordre un

On rappelle que le schéma explicite d'ordre un que l'on considère pour résoudre l'équation (1.6) est donné par :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d_i dt \left(\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)_i^n + \alpha \right).$$

Pour tout u^n , on fixe $|\nabla u^n|$ et en définissant la matrice de discrétisation M par : $u \mapsto Mu = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u^n|} \right)$ et D la matrice diagonale avec d_i pour coefficients diagonaux, l'équation précédente s'écrit :

$$u_i^{n+1} = ((I + dt D M) u)_i^n + dt d_i \alpha.$$

Cas du laplacien

On considère, dans un premier temps, le cas du laplacien. La propriété de stabilité en norme L^2 est équivalente à montrer que : $\|I + dt D M\|_2 \leq 1$. Le maillage de calcul est ici construit de sorte que les points de l'échantillon V ne font pas partie des points de la triangulation. La matrice D est alors inversible. La norme L^2 de $I + dt D M$ peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\|I + dt D M\|_2 = \|D \Lambda^{-1} (\Lambda D^{-1} + dt \Lambda M)\|_2,$$

où Λ est une matrice diagonale telle que $(\Lambda)_{i,i} = \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K$ et alors on obtient :

$$\|I + dt D M\|_2 \leq \|D \Lambda^{-1}\|_2 \|\Lambda D^{-1} + dt \Lambda M\|_2.$$

Pour avoir la condition de stabilité $\|I + dt D M\|_2 \leq 1$, il suffit de montrer que

$$\|\Lambda D^{-1} + dt \Lambda M\|_2 \leq \frac{1}{\|D \Lambda^{-1}\|_2}.$$

Pour cela, on commence par montrer que la matrice ΛM est symétrique, c'est-à-dire que l'on a : $\langle \Lambda M u, v \rangle = \langle u, \Lambda M v \rangle$, pour tout u et pour tout v . En utilisant (2.5), on a :

$$(\Delta u)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K,i_2} \rangle}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} \quad \text{avec} \quad (\nabla u)_{i_2} = \frac{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L \sum_{i_3 \in L} u_{i_3} \nabla \omega_{L,i_3}}{\sum_{L \in \mathcal{B}_{i_2}} A_L},$$

et on écrit :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda M u, v \rangle &= \sum_i (\Lambda M u)_i v_i = \sum_i v_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K (\Delta u)_i \\ &= \sum_i v_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K,i_2} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} \sum_{i_2 \in K} v_i A_K \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K,i_2} \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant la procédure de renumérotation :

$$(K \in \mathcal{B}_i \Rightarrow i \in K) \quad \text{et} \quad (i_2 \in K \Rightarrow K \in \mathcal{B}_{i_2}), \quad (2.20)$$

on obtient :

$$\langle \Lambda M u, v \rangle = \sum_{i_2} \langle (\nabla u)_{i_2}, \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \sum_{i \in K} v_i \nabla \omega_{K,i_2} \rangle.$$

On montre ensuite que, pour tout sommet i_2 :

$$\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \sum_{i \in K} u_i \nabla \omega_{K,i_2} = - \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \sum_{i \in K} u_i \nabla \omega_{K,i}, \quad (2.21)$$

c'est-à-dire que l'on a, pour tout i_2 :

$$\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \sum_{i \in K} u_i (\nabla \omega_{K,i_2} + \nabla \omega_{K,i}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in \mathcal{B}_{i_2}} \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2} \cap \mathcal{B}_i} u_i A_K (\nabla \omega_{K,i_2} + \nabla \omega_{K,i}) = 0. \quad (2.22)$$

Il suffit donc de prouver que $\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2} \cap \mathcal{B}_i} A_K (\nabla \omega_{K,i_2} + \nabla \omega_{K,i}) = 0$, pour tout i dans \mathcal{B}_{i_2} . Cette

condition est aussi une condition nécessaire, pour que l'égalité (2.22) soit satisfaite pour tout u_i . On considère alors deux cas :

1. si $i = i_2$, le même terme $\nabla\omega_{Ki_2}$ apparaît alors deux fois dans la somme précédente.

On définit $\omega = \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} \omega_{Ki_2} \mathbb{I}_K$, et on a alors :

$$\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \nabla\omega_{Ki_2} = \int_{\cup_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} K} \nabla\omega = \int_{\partial(\cup K)} \omega \cdot \vec{n} = 0,$$

ce terme disparaît donc puisque $w = 0$ sur $\partial(\cup K)$.

2. si $i \neq i_2$, la somme devient :

$$\sum_{K \in \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_{i_2}} A_K (\nabla\omega_{Ki_2} + \nabla\omega_{Ki}) = A_K (\nabla\omega_{Ki_2} + \nabla\omega_{Ki}) + A_L (\nabla\omega_{Li_2} + \nabla\omega_{Li}),$$

où K et L sont les deux triangles partageant l'arête (i, i_2) , comme on peut le voir sur la figure 2.4.

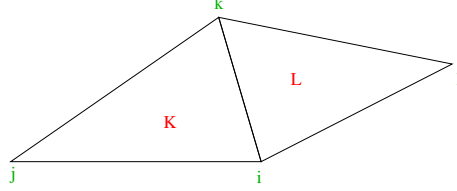


FIG. 2.4 – Configuration de deux triangles partageant l'arête (i, i_2) .

Comme $\sum_{i_2 \in K} \nabla\omega_{Ki_2} = 0$ pour tout sommet i_2 , on a alors

$$\nabla\omega_{Ki_2} + \nabla\omega_{Ki} = -\nabla\omega_{Kk} \text{ et } \nabla\omega_{Li_2} + \nabla\omega_{Li} = -\nabla\omega_{Ll}.$$

En considérant les deux points opposés à l'arête (i, i_2) dans K et L , on aimerait montrer que :

$$A_K \nabla\omega_{Kk} = -A_L \nabla\omega_{Ll}.$$

On remarque que $\nabla\omega_{Kk}$ est orthogonal à l'arête (i, i_2) , tout comme le terme $\nabla\omega_{Ll}$.

De plus, $|\nabla\omega_{Kk}| = \frac{1}{h_k}$ où h_k est la hauteur issue de k dans le triangles K et

$A_K = \frac{h_k}{2} \times |(i, i_2)|$, où $|(i, i_2)|$ est la longueur de l'arête (i, i_2) , on en conclut donc

que $|A_K \nabla\omega_{Kk}| = \frac{|(i, i_2)|}{2}$. De même, sur le triangle L , on obtient une relation simi-

laire : $|A_L \nabla\omega_{Ll}| = \frac{|(i, i_2)|}{2}$. On peut remarquer que les vecteurs $\nabla\omega_{Kk}$ et $\nabla\omega_{Ll}$ sont

de même direction mais de signe opposé. Donc, $A_K \nabla\omega_{Kk} = -A_L \nabla\omega_{Ll}$ et on a le résultat attendu (2.22).

On vient ainsi de prouver (2.21). Par ailleurs, on a l'égalité suivante :

$$\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \sum_{i \in K} v_i \nabla\omega_{K,i_2} = - \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K (\nabla v)_{i_2},$$

d'où l'identité :

$$\langle \Lambda M u, v \rangle = - \sum_{i_2} \langle (\nabla u)_{i_2}, (\nabla v)_{i_2} \rangle \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K. \quad (2.23)$$

Maintenant, on doit comparer $\langle \Lambda M u, v \rangle$ avec $\langle u, \Lambda M v \rangle$. En remplaçant u par v et v par u dans (2.23), on peut écrire :

$$\langle u, \Lambda M v \rangle = \sum_{i_2} \langle (\nabla v)_{i_2}, (\nabla u)_{i_2} \rangle \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K = \langle \Lambda M u, v \rangle.$$

La matrice ΛM est bien symétrique. On en déduit que la matrice $\Lambda D^{-1} + dt \Lambda M$ est elle aussi symétrique (puisque les matrices Λ et D sont diagonales) et, pour avoir la relation $\|I + dt D M\|_2 \leq 1$, il suffit de montrer que :

$$\rho(\Lambda D^{-1} + dt \Lambda M) \leq \frac{1}{\rho(D \Lambda^{-1})} \leq \rho(\Lambda D^{-1}), \quad (2.24)$$

où $\rho(P)$ est le rayon spectral de la matrice P .

On cherche alors dt tel que

$$\rho(\Lambda D^{-1} + dt \Lambda M) \leq \rho(\Lambda D^{-1}).$$

Pour que cette inégalité soit vérifiée, il suffit que

$$\rho(dt \Lambda M) \leq \rho(\Lambda D^{-1}). \quad (2.25)$$

D'après la définition du rayon spectral d'une matrice, cette relation (2.25) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |dt \sum_i u_i (\Lambda M u)_i| &\leq \sum_i u_i (\Lambda D^{-1} u)_i, \\ \Leftrightarrow dt \sum_i u_i (\Lambda M u)_i &\leq \sum_i u_i (\Lambda D^{-1} u)_i. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.23), on en déduit le critère de stabilité suivant pour le pas de temps :

$$dt \sum_i |(\nabla u)_i|^2 \lambda_i \leq \sum_i \frac{\lambda_i}{d_i} u_i^2. \quad (2.26)$$

Pour avoir une expression explicite de ce critère, sur une grille régulière, on doit trouver une borne supérieure pour $\sum_i |(\nabla u)_i|^2 \lambda_i$. Pour cela, d'après la relation (2.4), on rappelle que :

$$(\nabla u)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} u_{i_2} \nabla \omega_{K, i_2}}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}.$$

Et alors, on en déduit que :

$$|(\nabla u)_i|^2 \leq \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K^2 \left| \sum_{i_2 \in K} u_{i_2} \nabla \omega_{K, i_2} \right|^2}{\left(\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \right)^2}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_i |(\nabla u)_i|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K |(\nabla u)_i| \leq \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K^2 \left| \sum_{i_2 \in K} u_{i_2} \nabla \omega_{K, i_2} \right|^2}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} \\
&\leq \max_{K, i_2} |\nabla \omega_{K, i_2}|^2 \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K^2 \left(\sum_{i_2 \in K} u_{i_2} \right)^2}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} \\
&\leq n \max_{K, i_2} |\nabla \omega_{K, i_2}|^2 \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K^2 \sum_{i_2 \in K} u_{i_2}^2}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K},
\end{aligned}$$

où n est le nombre de sommets dans la cellule (ici $n = 4$). On obtient alors, en sommant sur i :

$$\sum_i \lambda_i |(\nabla u)_i|^2 \leq n \max_{K, i_2} |\nabla \omega_{K, i_2}|^2 \frac{\sum_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K^2 \sum_{i_2 \in K} u_{i_2}^2}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}.$$

En utilisant la procédure de renumérotation (2.20), on peut alors écrire :

$$\frac{\sum_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K^2 \sum_{i_2 \in K} u_{i_2}^2}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} = \sum_{i_2} u_{i_2}^2 \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} \sum_{i \in K} A_K^2}{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K}.$$

Sur des grilles cartésiennes, si h est la taille des cellules, on a :

$$\frac{\sum_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K^2 \sum_{i_2 \in K} u_{i_2}^2}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K} \leq 4h^2 \sum_{i_2} u_{i_2}^2$$

et alors on obtient l'estimateur suivant :

$$\sum_i \lambda_i |(\nabla u)_i|^2 \leq 4 \max_{K, i_2} |\nabla \omega_{K, i_2}|^2 \times 4h^2 \sum_{i_2} u_{i_2}^2.$$

On rappelle que $|\nabla \omega_{K, i_2}|^2 = \frac{1}{2h^2}$. Le pas de temps dt doit donc être tel que :

$$8 \sum_{i_2} u_{i_2}^2 \leq \frac{1}{dt} \sum_i \frac{\lambda_i}{d_i} u_i^2 \leq \frac{1}{dt} \sum_i \frac{1}{d_i} \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \right) u_i^2 \leq \frac{1}{dt} \sum_i \frac{4h^2}{d_i} u_i^2.$$

Alors la condition de stabilité (condition de type CFL) est alors que dt doit être tel que :

$$\max_i d_i \ 8 \sum_{i_2} u_{i_2}^2 \leq \frac{1}{dt} 4h^2 \sum_i u_i^2.$$

La condition de type CFL pour assurer la stabilité du schéma explicite est donc finalement :

$$8\beta \leq \frac{1}{dt} 4h^2 \quad \Leftrightarrow \quad dt \leq \frac{h^2}{2\beta}, \quad (2.27)$$

où $\beta = \max_i d_i$.

Proposition 2.3. *Le schéma explicite (2.1) est stable en norme L^2 sous la condition (2.27).*

Remarque : Dans les applications envisagées, on a $\beta < +\infty$ dès lors que le domaine V est un ouvert borné.

Cas du terme général de courbure moyenne

Par analogie avec le cas du laplacien, pour tout u^n on fixe $|\nabla u^n|$ et on considère ici la matrice de discrétisation M telle que $u \mapsto Mu = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u^n|} \right)$. Comme précédemment, on a besoin de montrer que l'on a $\|I + dt DM\|_2 \leq 1$. On utilise alors les mêmes étapes qu'auparavant, c'est-à-dire que dans un premier temps, on doit montrer la symétrie de la matrice ΛM . En utilisant l'équation (2.7), on rappelle que :

$$\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} \left\langle \frac{(\nabla u)_{i_2}}{|\nabla u|_{i_2}}, \nabla \omega_{K, i_2} \right\rangle}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}$$

avec $|\nabla u|_{i_2} = |(\nabla u)_{i_2}|$. Let $\alpha_{i_2} = |\nabla u|_{i_2}$ et alors, si $\alpha_{i_2} \neq 0$:

$$\left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} \left\langle \frac{(\nabla u)_{i_2}}{\alpha_{i_2}}, \nabla \omega_{K, i_2} \right\rangle}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K}.$$

Par analogie, on montre la symétrie de la matrice ΛM de la façon suivante :

$$\langle \Lambda M u, v \rangle = - \sum_{i_2} \langle (\nabla u)_{i_2}, (\nabla v)_{i_2} \rangle \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K}{\alpha_{i_2}} = \langle u, \Lambda M v \rangle.$$

Pour montrer la stabilité en norme L^2 , on procède exactement de la même façon que pour le cas du laplacien.

Cette restriction numérique importante sur le pas de temps renforce davantage la nécessité d'avoir un schéma semi-implicite en temps sur des triangulations non structurées.

2.4.2 Schéma semi-implicite du premier ordre

On rappelle que le schéma semi-implicite du premier ordre, que l'on utilise pour l'équation (1.6), est défini par :

$$u_i^{n+1} - d_i dt \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^{n+1}}{|\nabla u^n|} \right) \right)_i = d_i dt \alpha + u_i^n.$$

Pour tout u^n , on fixe $|\nabla u^n|$ et en introduisant la matrice M de discrétisation telle que $u \mapsto Mu = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u^n|} \right)$, l'équation précédente devient :

$$((I - dt DM)u)_i^{n+1} = u_i^n + dt d_i \alpha.$$

Proposition 2.4. *Le schéma semi-implicite (2.2) est inconditionnellement stable en norme L^2 .*

Démonstration. On commence ici par montrer que la matrice $(I - dt DM)$ est inversible. Pour cela, on va établir que $\text{Sp}(M) \in \mathbb{R}^-$, et qu'alors $\text{Sp}(\Lambda M) \in \mathbb{R}^-$. En utilisant les formules précédentes, dans le cas du laplacien, on écrit :

$$\sum_i u_i (\Delta u)_i = \sum_i u_i \frac{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \sum_{i_2 \in K} \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K i_2} \rangle}{\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K},$$

et alors on a :

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \right) u_i (\Delta u)_i &= \sum_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} \sum_{i_2 \in K} u_i A_K \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K i_2} \rangle \\ &= \sum_{\substack{i, K, i_2 \\ K \in \mathcal{B}_i, i_2 \in K}} u_i A_K \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K i_2} \rangle. \end{aligned}$$

En utilisant la même procédure de renumérotation (2.20), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \right) u_i (\Delta u)_i &= \sum_{\substack{i, K, i_2 \\ K \in \mathcal{B}_{i_2}, i \in K}} u_i A_K \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K i_2} \rangle \\ &= \sum_{i_2} \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} \sum_{i \in K} u_i A_K \langle (\nabla u)_{i_2}, \nabla \omega_{K i_2} \rangle, \end{aligned}$$

et alors :

$$\sum_i \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \right) u_i (\Delta u)_i = \sum_{i_2} \langle (\nabla u)_{i_2}, \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \sum_{i \in K} u_i \nabla \omega_{K i_2} \rangle. \quad (2.28)$$

En utilisant l'équation (2.21), on a :

$$\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} A_K \sum_{i \in K} u_i \nabla \omega_{K i_2} = -(\nabla u)_{i_2} \sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} \sum_{i \in K} A_K.$$

Proposition 2.5. (Formule de Green discrète) $S_i |\nabla u| = 1$,

$$\sum_i \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \right) u_i (\Delta u)_i = - \sum_{i_2} \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_{i_2}} \sum_{i \in K} A_K \right) |(\nabla u)_{i_2}|^2 \quad (2.29)$$

Remarque : On note que dans la formule (2.29) le terme de droite est clairement négatif.

Étant donnée M matrice de discrétisation du laplacien, on a montré que :

$$\sum_i \left(\sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K \right) u_i (Mu)_i \leq 0.$$

Notons que l'on obtient le même résultat dans le cas général de l'opérateur $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{|\nabla|} \right)$.

En introduisant la notation $\lambda_i = \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K$, on a :

$$\sum_i \sum_{K \in \mathcal{B}_i} A_K u_i (\Delta u)_i \leq 0 \Leftrightarrow \sum_i \lambda_i u_i (Mu)_i \leq 0$$

et par conséquent on a :

$$\sum_i (\sqrt{\lambda_i} u_i) (\sqrt{\lambda_i} (Mu)_i) \leq 0.$$

En définissant Λ comme matrice diagonale avec λ_i pour coefficients diagonaux, on peut réécrire cette inégalité de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_i (\sqrt{\Lambda} u)_i (\sqrt{\Lambda} Mu)_i \leq 0 &\Leftrightarrow \sum_i (\sqrt{\Lambda} u)_i ((\sqrt{\Lambda} M \sqrt{\Lambda}^{-1}) \sqrt{\Lambda} u)_i \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_i (\sqrt{\Lambda} u)_i (B \sqrt{\Lambda} u)_i \leq 0, \end{aligned}$$

où $B = \sqrt{\Lambda} M \sqrt{\Lambda}^{-1}$. Soit $v \in \mathbb{R}^N$ tel que $u = \sqrt{\Lambda}^{-1} v$, alors $\sum_i v_i (Bv)_i \leq 0$, et donc, B est une matrice semi définie négative. Comme $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(B)$, M est aussi une matrice semi définie négative. On a alors $u^T M u \leq 0$ pour tout u et si (λ, u) est un élément propre de M , alors $u^T M u = u^T \lambda u = \lambda u^T u \leq 0$. De plus, comme $u^T u \geq 0$, alors $\lambda \leq 0$ et donc : $\text{Sp}(M) \in \mathbb{R}^-$.

Maintenant, pour avoir l'inversibilité de $(I - dt D M)$, on veut montrer que le noyau $\text{Ker}(I - dt D M) = \{0\}$. On suppose qu'il existe $u \neq 0$, tel que $(I - dt D M)u = 0$. En introduisant la matrice diagonale Λ , on obtient que $(I - dt D \Lambda^{-1} \Lambda M)u = 0$, alors $(D \Lambda^{-1} - dt \Lambda M)u = 0$. Par conséquent, on a les deux égalités : $u^T (D \Lambda^{-1} - dt \Lambda M)u = 0$ et $u^T D \Lambda^{-1} u = dt u^T \Lambda M u$, ce qui est impossible, puisque $u^T D \Lambda^{-1} u > 0$ si $u \neq 0$, et ΛM est une matrice symétrique semi-définie négative. Alors, on conclut que le noyau $\text{Ker}(I - dt D M) = \{0\}$ et que la matrice $(I - dt D M)$ est inversible.

On doit maintenant montrer que $\|(I - dt D M)^{-1}\|_2 \leq 1 \Leftrightarrow \|I - dt D M\|_2 \geq 1$. Pour tout u , on a :

$$\begin{aligned} \|(I - dt D M)u\|_2^2 &= u^T (I - dt D M)^T (I - dt D M)u \\ &= u^T (I - dt M^T D) (I - dt D M)u \\ &= u^T u - dt u^T (M^T D + D M)u + dt^2 u^T M^T D D M u \\ &\geq u^T u - dt u^T (M^T D + D M)u \end{aligned}$$

car $u^T M^T D D M u = (D M u)^T (D M u) \geq 0$. On doit ensuite montrer que l'on a l'inégalité $u^T (M^T D + D M) u \leq 0$. La matrice ΛM étant symétrique semi-définie négative, on a alors pour tout u :

$$\begin{aligned} u^T (M^T D + D M) u &= \\ &= u^T ((\Lambda M)^T \Lambda^{-1} D + D \Lambda^{-1} \Lambda M) u = u^T (\Lambda M \Lambda^{-1} D + D \Lambda^{-1} \Lambda M) u \\ &= (\sqrt{D \Lambda^{-1}} u)^T (\sqrt{D \Lambda^{-1}})^{-1} \Lambda M (\sqrt{D \Lambda^{-1}}) (\sqrt{D \Lambda^{-1}} u) \\ &\quad + (\sqrt{D \Lambda^{-1}} u)^T (\sqrt{D \Lambda^{-1}}) \Lambda M (\sqrt{D \Lambda^{-1}})^{-1} (\sqrt{D \Lambda^{-1}} u) \\ &= (\sqrt{D \Lambda^{-1}} u)^T ((\sqrt{D \Lambda^{-1}})^{-1} \Lambda M (\sqrt{D \Lambda^{-1}}) \\ &\quad + (\sqrt{D \Lambda^{-1}}) \Lambda M (\sqrt{D \Lambda^{-1}})^{-1}) (\sqrt{D \Lambda^{-1}} u). \end{aligned}$$

On note $N = (\sqrt{D \Lambda^{-1}})^{-1} \Lambda M (\sqrt{D \Lambda^{-1}}) + (\sqrt{D \Lambda^{-1}}) \Lambda M (\sqrt{D \Lambda^{-1}})^{-1}$. Cette matrice N est symétrique, puisque les matrices ΛM et $(\sqrt{D \Lambda^{-1}})$ le sont. On a alors l'inégalité $u^T (M^T D + D M) u \leq 0$ si et seulement si $\text{Sp}(N) \in \mathbb{R}^-$ mais $\text{Sp}(N) = 2 \times \text{Sp}(\Lambda M) \leq 0$. On a alors le résultat attendu $\|(I - dt D M)^{-1}\|_2 \leq 1$. Il est important de noter ici que ce schéma semi-implicite est stable sans aucune condition CFL restrictive sur le pas de temps. En d'autre terme, il est inconditionnellement stable pour la norme L^2 . \square

On vient donc de montrer que ces schémas explicite et semi-implicite sont tous les deux consistants avec notre équation modèle (1.6), et qu'ils sont stables en norme L^2 . Comme il y a une condition restrictive sur le schéma explicite, on préférera, en pratique, utiliser le schéma semi-implicite car le pas de temps sera indépendant de la taille de maille.

2.4.3 Convergence

Dans le cas linéaire, c'est-à-dire dans le cas du laplacien, le théorème de Lax-Richtmyer peut directement s'appliquer à nos deux schémas. Il établit qu'un schéma consistant, pour un problème linéaire bien posé, est convergent si et seulement si il est stable. Dans le cas de la formulation générale du terme de courbure moyenne, il n'y a pas de résultat équivalent.

Dans [Bar93], il est prouvé que tout schéma monotone, stable et consistant converge dans le contexte des équations elliptiques non linéaires ou paraboliques du second ordre à condition qu'il existe un principe de comparaison pour l'équation limite. Nos schémas n'étant pas monotones, ils ne rentrent pas non plus dans ce cadre.

Ce résultat de convergence est compliqué à établir. Numériquement, on peut obtenir une convergence de notre algorithme à l'aide d'un critère imposé.

Critère d'arrêt

On rappelle que le problème que l'on considère s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \alpha d(x) + d(x) \kappa(u)(t, x), \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

À convergence, on souhaite que notre fonction u coïncide avec la fonction de distance signée aux points de V . En pratique, c'est-à-dire numériquement, on ajoute un critère d'arrêt à notre problème. On le définit de la façon suivante :

$$\max_{x \in V} |\Pi_h u(x)| \leq \varepsilon$$

où $\Pi_h u(x)$ est obtenue par projection L^2 . Autrement dit, on projette la valeur de u aux points de V (qui ne font pas partie du maillage) et lorsque cette valeur est proche de zéro, on considère que l'on est très près des points et que donc on peut s'arrêter.

Dans cette partie, nous avons établi l'existence et l'unicité d'une solution à notre problème de construction de courbe (1.6). Dans ce dernier chapitre, nous avons montré que nos schémas étaient consistants et stables en norme L^2 , sur des grilles régulières. Ces résultats restent valables sur des triangulations quelconques. Il reste à valider cette étude théorique en implémentant les schémas (2.1) et (2.2) pour différents exemples. Ceci fera l'objet de la deuxième partie de la thèse.

Deuxième partie

Applications numériques

Introduction de la deuxième partie

Dans cette seconde partie, on s'intéresse au problème d'évolution (1.6) du point de vue numérique et en particulier aux aspects algorithmiques de la résolution de l'EDP. Dans le chapitre 3, je présente notre méthode d'adaptation de maillage pour résoudre l'EDP (1.6) en commençant par rappeler quelques définitions générales sur les métriques puis en précisant la méthode utilisée. Je présenterai ensuite dans le chapitre 4 les différentes "difficultés" numériques rencontrées lors de l'implémentation. Dans le chapitre 5, je cherche à montrer la robustesse et la précision de la résolution du problème de reconstruction dans un large panel de configurations. En particulier, je vais montrer que notre formulation lignes de niveaux peut gérer des géométries compliquées avec plusieurs composantes connexes ou des fortes variations de courbure et des changements de topologie au cours du temps. Je présenterai donc différents exemples en deux et trois dimensions pour finir l'exposé par une application bio-médicale.

Chapitre 3

Maillages

Dans la plupart des problèmes qui requièrent une discrétisation de l'espace de calcul, la précision de la solution et sa régularité sont intrinsèquement liées à la qualité du maillage et à son adaptation au problème.

Le principal avantage des maillages non-structurés triangulaires est qu'ils permettent de s'adapter à des géométries complexes et de choisir judicieusement la discrétisation dans le domaine de calcul. L'utilisation de simplexes assure également la flexibilité nécessaire pour créer des éléments anisotropes, c'est-à-dire de tailles différentes suivant certaines directions.

Les équations de type Hamilton-Jacobi sont en général résolues sur des grilles régulières avec des schémas d'ordre élevé peu dissipatifs (de type ENO ou WENO) [HEOC87, JP00, OS91] pour éviter les singularités. Ces schémas ont été étendus aux maillages triangulaires dans [Abg94, Abg96, AA00]. Dans le but d'avoir une bonne précision numérique et pour limiter les effets dissipatifs de nos schémas, nous avons utilisé, pour résoudre ce problème de reconstruction, des maillages triangulaires adaptés et anisotropes. Dans un premier temps, je ferai un bref rappel de quelques définitions générales sur les métriques et le principe d'adaptation de maillage puis je présenterai notre méthode d'adaptation anisotrope.

3.1 Définitions générales : adaptation de maillage

Schématiquement, l'adaptation de maillage consiste à concentrer un grand nombre de points et d'éléments dans des zones de forte variation de la solution calculée par éléments finis sur le maillage et à minimiser le nombre de points dans les autres régions. Ceci permet non seulement d'améliorer la précision des résultats mais également de réduire le temps de calcul de la résolution numérique des EDP. Le critère d'adaptation est basé sur un estimateur d'erreur et le résultat de l'analyse est traduit en termes de métriques associées aux nœuds du maillage. La génération du maillage est alors gouvernée par ce champ de métrique pour obtenir un nouveau maillage mieux adapté au comportement local de la solution ou du phénomène physique modélisé.

3.1.1 Estimateur d'erreur

Le principe d'adaptation de maillage repose sur l'estimation de l'erreur commise au cours du calcul et sur l'interprétation de cette erreur en une information numérique pertinente pour le générateur de maillage. Cette information peut correspondre à des contraintes

relatives à la taille locale des éléments du maillage et à leur direction. L'objectif est alors d'équirépartir cette erreur sur le maillage adapté. On a donc besoin de calculer la différence entre la solution exacte u d'une EDP, par exemple, et la solution approchée u_h sur le maillage (u_h est alors, par exemple, une variable \mathbb{P}_1 au sens des éléments finis). Cette différence $e_h = u - u_h$ est appelée erreur d'approximation. En général, u_h n'est pas interpolante, c'est-à-dire que la valeur de u_h calculée en un point du maillage ne correspond pas à u en ce même point. Il n'est, de plus, pas possible de garantir que u_h corresponde à u en au moins un point. Cela fait que l'erreur d'approximation est souvent difficile à calculer. Il peut arriver aussi qu'on ne connaisse pas exactement u . On préconise alors une approche indirecte qui ne fait plus apparaître e_h . On note $\prod_h u$ l'interpolé linéaire de u sur un élément K du maillage. Alors l'erreur d'interpolation $u - \prod_h u$ est l'écart entre la solution exacte u et son interpolé linéaire [Cia91].

Lemme 3.1. Lemme de Céa

Pour des problèmes elliptiques, on a :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \|u - \prod_h u\|_{H^1}$$

où C est une constante dépendant de la dimension et du problème considéré.

Les études faites sur l'erreur d'interpolation montrent expérimentalement que le lien entre l'erreur d'interpolation et l'erreur d'approximation est beaucoup plus fort que la majoration donnée par le lemme de Céa. On peut alors considérer que l'erreur d'interpolation fournit un bon estimateur d'erreur. La démarche d'adaptation peut alors se résumer en trois étapes :

1. construction d'un estimateur de l'erreur d'interpolation, autrement dit un indicateur qui va prescrire les tailles et les directions des arêtes pour équirépartir l'erreur sur le maillage,
2. définition d'une carte de métriques (ensemble des tenseurs de métrique définis en chaque point du maillage initial) ,
3. modification du maillage en fonction des métriques locales.

3.1.2 Méthodes d'adaptation

Il existe trois types de méthodes d'adaptation de maillage [FG08].

– Les r-méthodes

Ces méthodes adaptent les tailles (diamètres) h des mailles en gardant les connectivités du maillage inchangées c'est-à-dire que seuls les points bougent. Le principe de ces méthodes est de déplacer les nœuds du maillage de manière à modifier la densité des éléments dans certaines régions, en fonction du comportement du phénomène physique étudié. Ceci peut être interprété comme une déformation de maillage. Cette méthode procède localement (par bougé de points) mais change globalement la densité et la qualité des mailles.

– Les p-méthodes

Ces méthodes agissent en modifiant le degré de l'approximation p , c'est-à-dire en changeant le degré des polynômes utilisés dans la base des éléments finis. La taille

de maille h est ici préservée. Ces méthodes permettent d'adapter la qualité de l'approximation à la nature des variations de solution.

– **Les h-méthodes**

Celles-ci modifient le maillage en contrôlant la taille et la direction des éléments. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories. Une classe de méthodes est basée sur des modifications locales du maillage courant (modifications de tailles et de direction) par raffinement ou déraffinement. Une autre classe consiste à reconstruire intégralement le maillage à partir d'une discrétisation donnée de sa frontière en imposant les tailles et les directions aux éléments.

Dans les méthodes de type raffinement / déraffinement, le maillage est adapté en subdivisant ou en fusionnant les éléments pour respecter une taille prescrite par l'estimateur d'erreur. La position des points ne varie donc pas, [Riv86, Riv91]. Dans l'autre approche, on souhaite obtenir un maillage « optimal » en termes de taille et de direction par rapport à l'estimateur d'erreur. Le remaillage peut être local ou global. Dans le cas local, le maillage est modifié itérativement en utilisant les outils de modifications topologiques (bascule de faces, bascule d'arêtes et insertion de points) et géométriques (suppression de points, bougé de points) [RLCS02]. Dans le cas global, on construit un nouveau maillage dont les tailles et les directions des mailles coïncident avec les prescriptions de l'estimateur d'erreur. Cette méthode s'appuie sur une génération de maillages non structurés (méthode de Delaunay, octree).

En s'inspirant de ces idées, on propose ici une h-méthode basée sur un estimateur d'erreur d'interpolation géométrique, où l'adaptation est faite sur l'isovaleur zéro de la fonction d , qui intervient dans l'équation (1.6), pour construire une carte de métriques. Cet estimateur est de nature anisotrope c'est-à-dire qu'il prescrit à la fois la taille des éléments mais aussi leur forme et leur direction.

3.1.3 Maillages isotropes vs. maillages anisotropes

On va ici comparer deux types de maillages (et donc d'adaptation) différents. Alors que l'adaptation isotrope contrôle seulement la taille des éléments (c'est-à-dire que l'on a dans ces maillages des triangles à peu près équilatéraux et plus ou moins grands), l'adaptation anisotrope contrôle à la fois la taille mais aussi la forme et l'orientation des éléments à l'aide d'un tenseur de métrique dont on verra les différentes définitions dans les prochaines sous-sections. Sur la figure (3.1) on peut voir les deux types d'adaptation.

3.1.4 Métriques

Dans cette sous-section, je rappelle les notions de métrique, produit scalaire associé à cette métrique, norme euclidienne et distance dans la métrique considérée. Je présenterai également les définitions de longueur moyenne et maillage unité, [Dob05, FG08, ALDF06].

Définition 3.1.1. *On appelle espace métrique euclidien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ défini par un tenseur de métrique. On le note $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$.*

Définition 3.1.2. *Étant donné un point $P \in \mathbb{R}^3$, un tenseur de métrique est une*

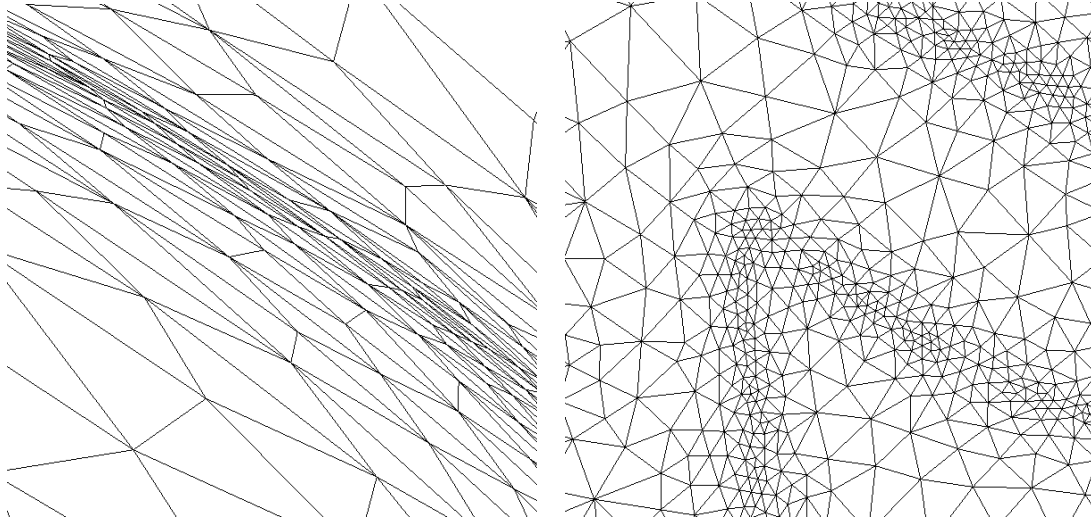


FIG. 3.1 – Comparaison entre l'adaptation anisotrope (à gauche) et l'adaptation isotrope (à droite).

matrice $\mathcal{M} \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$ symétrique définie positive, telle que :

$$\mathcal{M}(P) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

où a, b, \dots, f dépendent de P .

Définition 3.1.3. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , le **produit scalaire** de \vec{u} et \vec{v} dans l'espace euclidien pour une métrique \mathcal{M} , en un point P , est défini de la façon suivante :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathcal{M}(P)} = \vec{u} \mathcal{M}(P) \vec{v} = \langle \vec{u}, \mathcal{M}(P) \vec{v} \rangle$$

Définition 3.1.4. La **norme euclidienne** pour un vecteur \vec{u} dans la métrique \mathcal{M} , en un point P , est :

$$\|\vec{u}\|_{\mathcal{M}(P)} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathcal{M}(P)}} = \sqrt{{}^t \vec{u} \mathcal{M}(P) \vec{u}}$$

À partir d'un espace métrique euclidien $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M})$, on peut alors définir un espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ et un espace métrique $(\mathbb{R}^n, d_{\mathcal{M}})$.

Comme \mathcal{M} est une matrice symétrique définie positive, on peut la décomposer de la façon suivante : $\mathcal{M} = {}^t \mathcal{R} \Lambda \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est la matrice composée des vecteurs propres normalisés de \mathcal{M} telle que ${}^t \mathcal{R} \mathcal{R} = \mathcal{R} {}^t \mathcal{R} = I_n$ (matrice identité) et Λ est celle dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de \mathcal{M} qui sont toutes strictement positives. La matrice \mathcal{M} est représentée par un ellipsoïde en 3D (une ellipse en 2D) dans lequel les éléments doivent s'intégrer. Alors les notions de taille, forme et orientation sont reliées respectivement au volume de l'ellipsoïde, à la longueur de ses semi-axes et à la direction de ses vecteurs principaux (cf. figure 3.2).

Pour construire un maillage adapté, on a besoin de savoir calculer les longueurs des arêtes dans le cas où la métrique varie en tout point de l'espace. Chaque métrique \mathcal{M} définit une

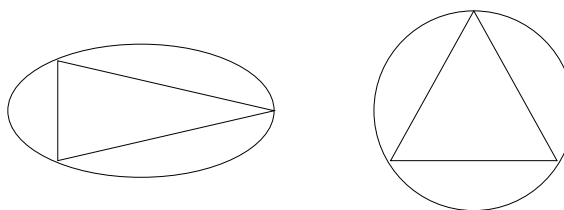


FIG. 3.2 – Métrique anisotrope vs. métrique isotrope en dimension 2.

valeur particulière de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ et on construit alors chaque arête a de telle sorte qu'elle soit de longueur 1 dans cette métrique ($\|a\|_{\mathcal{M}} = 1$).

Si A est un point du maillage auquel on a associé la métrique \mathcal{M} , on veut ajouter un point B tel que l'arête AB soit de longueur 1 dans la métrique $\mathcal{M}(A)$, c'est-à-dire telle que :

$$l_{\mathcal{M}(A)}(AB) = \sqrt{{}^t\vec{A}\vec{B} \mathcal{M}(A) \vec{A}\vec{B}} = 1.$$

Géométriquement, cela signifie que tout élément K possédant le point A doit être inclus dans l'ellipsoïde de centre A associé au tenseur $\mathcal{M}(A)$ et tel que les arêtes issues de A soit de longueur 1 dans $\mathcal{M}(A)$. En pratique, une métrique différente est prescrite en chaque nœud du maillage. Pour calculer la longueur de l'arête CD , il faut tenir compte de la métrique donnée en C mais aussi de celle donnée en D ainsi que des métriques de tous les points intermédiaires du segment $[CD]$.

Définition 3.1.5. *La longueur moyenne de l'arête CD sur toutes les métriques est définie de la façon suivante :*

$$l_{\mathcal{M}}(\vec{C}\vec{D}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\vec{C}\vec{D} \mathcal{M}(C + t\vec{C}\vec{D}) \vec{C}\vec{D}} dt.$$

On s'intéresse donc ici à la longueur d'un chemin donné entre deux sommets et non à la distance entre ces deux points.

Définition 3.1.6. *Un maillage unité est un maillage dont toutes les arêtes sont de longueur moyenne égale à 1.*

3.1.5 Schéma général d'adaptation de maillage

Dans cette sous-section, je présente le schéma d'adaptation de maillage dans le cas de simulation stationnaire. Ce schéma est général et peut s'appliquer à tout type d'applications.

On rappelle que le but de l'adaptation de maillage est d'équirépartir l'erreur d'interpolation sur le maillage. L'idée est donc que l'algorithme d'adaptation va converger à la fois vers une solution mais également vers un maillage adapté à celle-ci.

Le schéma 3.3 est un algorithme itératif au cours duquel la solution est analysée pour décider de la poursuite ou non du processus. On démarre avec un maillage T_0 et une solution S_0 initiaux. La première étape consiste à calculer une nouvelle solution sur T_0 . Cette

solution est ensuite analysée pour décider si on a convergé ou non. Pour cela, l'erreur d'interpolation est calculée sur le maillage grâce à un estimateur d'erreur. Si celle-ci est équirépartie sur le maillage, l'algorithme s'arrête. Sinon un champ de métrique est construit et correspond à une carte de tailles et de directions données en chaque nœud. À l'aide de ce tenseur de métrique et du maillage, un maillage unité est construit puis on interpole la solution sur le nouveau maillage et on réitère cet algorithme jusqu'à obtenir la convergence.

Ce schéma 3.3 ne marche que dans le cas stationnaire. S'il y a une évolution en temps de la solution, le maillage aura alors du retard sur celle-ci et sera adapté à la solution de l'itération précédente.

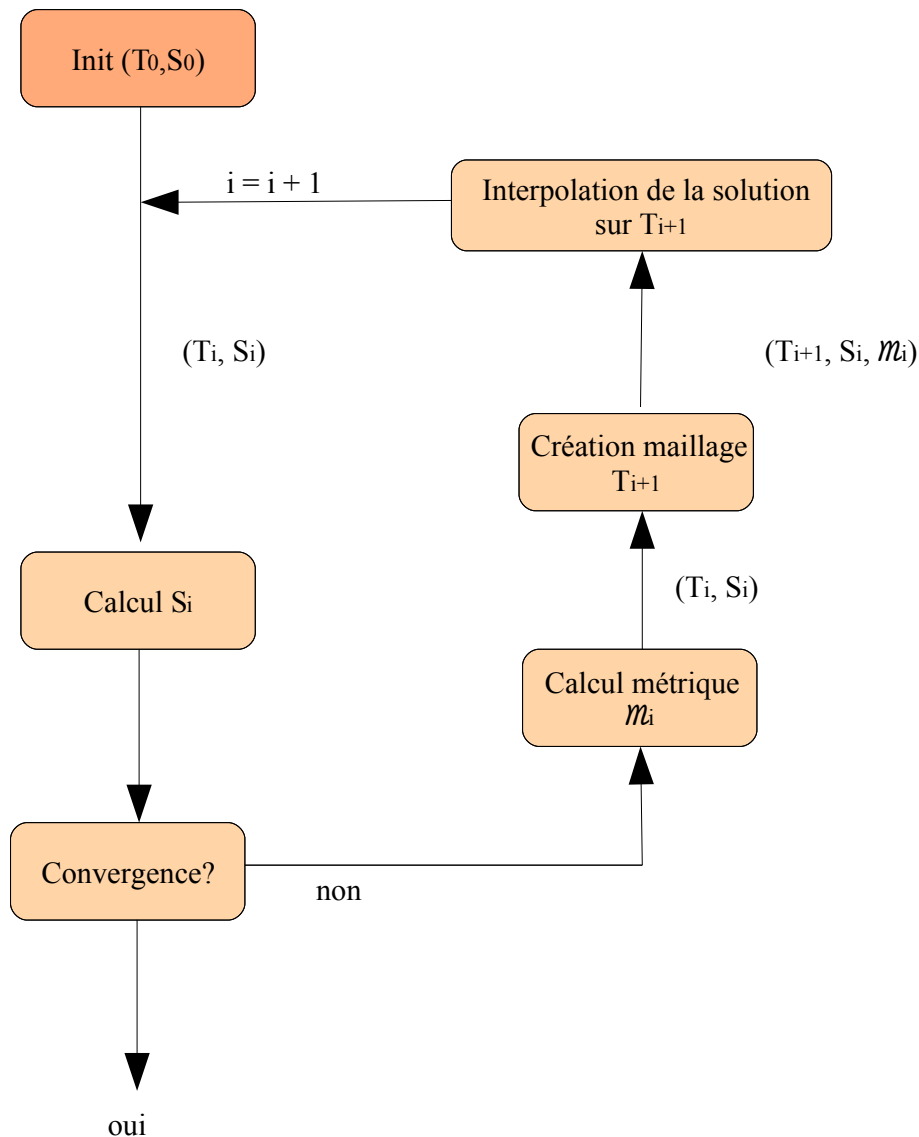


FIG. 3.3 – Schéma général d'adaptation de maillage.

3.2 Notre méthode d'adaptation

On rappelle que le problème que l'on considère ici est la construction d'une courbe (ou surface) régulière à partir d'un ensemble de points donné par la méthode des lignes de niveau. L'équation (1.6) est instationnaire ; on ne va donc pas appliquer directement le schéma précédent. L'adaptation de maillage va ici avoir lieu autour des points de l'échantillon pour améliorer la précision du résultat de u dans (1.6) à convergence. On va considérer la ligne de niveau zéro de la fonction distance d aux points de V pour construire le maillage approprié à notre problème. La fonction d est calculée de manière discrète aux sommets du maillage. L'adaptation sera alors faite aux données (d) et non au calcul (u). Le maillage sera construit en pré-traitement, c'est-à-dire avant que la résolution de l'EDP soit lancée et sera fixe durant tout le calcul. Autrement dit, on a ici une approche eulérienne. On ne va ici faire de l'adaptation qu'une seule fois avant le lancement du calcul, contrairement aux méthodes classiques d'adaptation où on modifie le maillage au fur et à mesure. Tout le calcul sera fait sur la triangulation adaptée en pré-traitement. De plus, pour la construction de ce maillage adapté, on utilise une méthode un peu différente des méthodes classiques pour définir un estimateur d'erreur et un tenseur de métrique approprié. C'est ce que je vais présenter dans cette section.

3.2.1 Estimation d'erreur

Dans [DF07], une méthode d'approximation géométrique de courbes ou de surfaces d'isovaleurs d'une fonction implicite f (fonction ligne de niveau), suffisamment régulière et définie dans un domaine de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 est présentée. Le contrôle de l'erreur d'approximation permet la construction d'un champ de métrique anisotrope prenant en compte les propriétés intrinsèques de la variété considérée. La majoration de l'erreur d'approximation fait intervenir les dérivées d'ordre 1 et 2 de f et reste valable indépendamment de la dimension. La fonction f est supposée définie en chaque nœud du maillage T_h et on s'intéresse à la discrétisation d'une courbe (ou surface) Γ d'isovaleur $f = c$ particulière, $c \in \mathbb{R}$. Le problème revient à contrôler l'écart entre une approximation affine par morceaux Γ_h de cette isovaleur et Γ . Ceci est possible en définissant un champ de métriques discret qui sert à adapter la triangulation T_h au voisinage de Γ et permet ainsi de garantir la précision de la reconstruction Γ_h .

L'estimation d'erreur va ici est de type géométrique. Soit f une fonction ligne de niveau, implicite, définie sur un domaine de \mathbb{R}^n ($n = 2$ ou 3) et à valeurs dans \mathbb{R} pour laquelle Df existe et a ses dérivées k -lipschitz ($k \geq 1$) sur un ouvert. C'est-à-dire que :

$$\|Df\| = m \quad \text{avec } m > 0 \in (C^1 \cup W^{2,\infty})$$

Théorème 3.2. *Soit $X = \{K \in T_h, K \cap \Gamma \neq \emptyset\}$. On a :*

$$\forall x \in \Gamma_h, \quad d(x, \Gamma) \leq \frac{1}{\min_{p \in X} |Df(p)|} \left| \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j ({}^t(x - x_j)(D^2 f(x_j) - D^2 f(x))(x - x_j)) \right|.$$

où λ_j désigne la coordonnée barycentrique du point x associée au sommet x_j de K .

La démonstration de ce théorème est développée dans [DF07].

3.2.2 Tenseur de métrique

Ici l'idée générale est de définir un tenseur de métrique \mathcal{M} pour contrôler la génération d'éléments anisotropes dans le voisinage d'une interface définie par une fonction ligne de niveaux. On va considérer ici la courbure moyenne locale de la ligne de niveau 0 de la fonction distance d pour prescrire la taille locale des éléments. L'orientation de chaque élément doit être choisie pour coïncider avec les directions normales et tangentes à d . Ceci impliquera automatiquement un raffinement autour des points de V . Plus précisément, on souhaite avoir la configuration de gauche sur la figure 3.4.

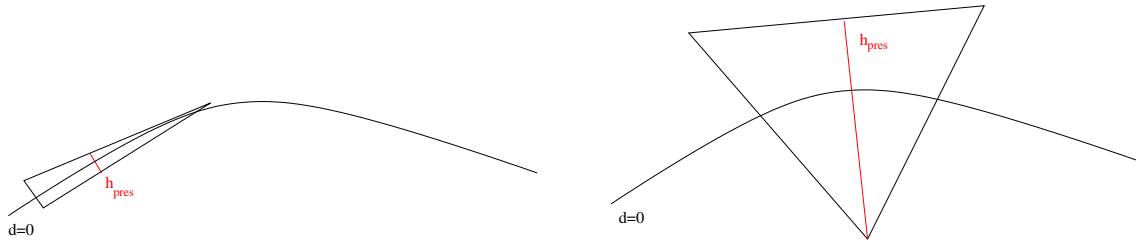


FIG. 3.4 – *Adaptation anisotrope vs. adaptation isotrope.*

Si on utilise les métriques classiques anisotropes [AF03] qui ne dépendent que de la matrice hessienne de la solution considérée, on a un problème pour la méthode des lignes de niveau. En effet, la matrice hessienne de la fonction ligne de niveau f est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \kappa(f) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Autrement dit, dans cette matrice, on trouve une valeur quasi nulle dans la direction du gradient (direction normale) et la courbure moyenne dans la direction perpendiculaire au gradient. Or, ici, comme on peut le voir à nouveau sur la figure 3.4, dans la direction du gradient on souhaite avoir un longueur minimale de maille. Dans l'expression (3.1), le fait d'avoir ε dans la direction du gradient implique que la taille de maille dans cette direction sera très grande, ce qui est le contraire de ce que l'on cherche à avoir.

Un champ de métrique est une donnée de dimension infinie qui n'est pas exploitable numériquement. On va alors faire une approximation discrète de la métrique sur le maillage. Autrement dit, on va définir ce tenseur de métrique en chaque nœud de la triangulation. Plus précisément, le tenseur de métrique que l'on considère ici est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{pres}^2} & 0 \\ 0 & \frac{|\Delta d(x)|}{\varepsilon} \end{pmatrix} \mathcal{R}^t \quad (3.2)$$

où h_{pres} représente la taille minimale de maille prescrite par l'utilisateur pour le nouveau maillage, ε est une valeur de tolérance (de l'ordre de 10^{-2}) et Δd représente la valeur de la courbure moyenne de d (on rappelle que si d est une fonction distance alors $|\nabla d| = 1$).

Le principe d'adaptation de maillage utilisant le tenseur de métrique précédent est le

suivant : étant donnée une triangulation initiale T_0 du domaine de calcul, on calcule la fonction de distance d aux points de V . La triangulation est ensuite adaptée itérativement à l'aide du tenseur de métrique (3.2) en utilisant les opérations classiques de modification de maillages : découpe d'arête, inversion d'arête (*cf.* figure 3.5), relocalisation de points [FG08]. De plus, une procédure de gradation est utilisée pour propager l'information fournie par la métrique sur tout le domaine. C'est-à-dire que l'on peut indiquer le rapport entre les tailles les plus grandes et h_{\min} . On reprend donc le schéma adaptatif 3.3 mais en substituant la fonction distance d (de l'équation (1.6)) à la solution S_i dans la construction de la métrique M_i . Notons toutefois que l'adaptation se fait sur la ligne $d = 0$ et non sur toutes les isolignes.

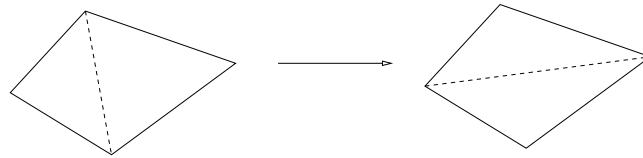


FIG. 3.5 – Inversion d'arête.

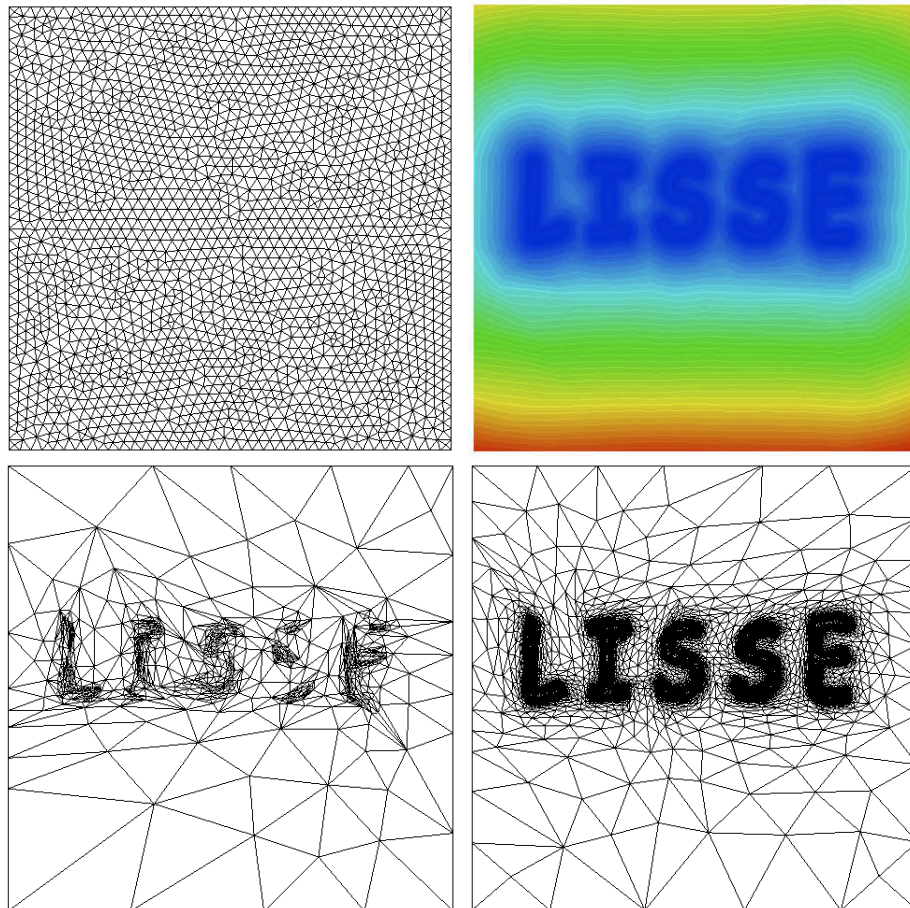


FIG. 3.6 – Schéma itératif pour adapter le maillage autour des points de l'échantillon. En haut à gauche : maillage initial, en haut à droite : fonction distance aux points de V , en bas à gauche : première adaptation, en bas à droite : adaptation finale.

La figure 3.6 montre les différentes étapes de notre schéma d'adaptation. On part d'un maillage initial régulier sur lequel on calcule la fonction distance au point et le tenseur de métrique associé pour l'adaptation. On lance le processus d'adaptation mais celui-ci ne donne pas le maillage attendu dès la première itération.

La figure 3.7 montre la différence entre l'adaptation isotrope et anisotrope autour de la ligne de niveau zéro de la fonction distance d . La triangulation isotrope contient 41 127 points alors que la triangulation anisotrope n'en contient que 11 751 pour une même taille de maille minimale $h_{pres} = 10^{-3}$ et une même valeur de tolérance $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$.

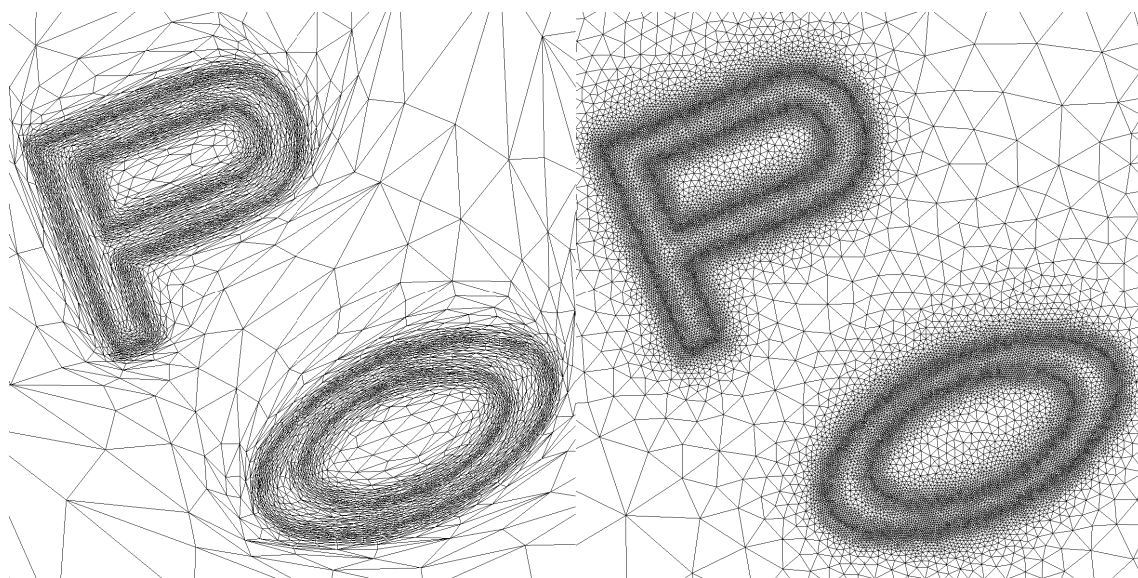


FIG. 3.7 – Impact du tenseur de métrique anisotrope (à gauche) sur l'adaptation de maillage (raffinement isotrope à droite).

3.2.3 Discrétisation de la courbe reconstruite sur le maillage adapté

Après avoir fait les calculs sur le maillage adapté, nous avons besoin de visualiser les résultats obtenus, c'est-à-dire la courbe Γ reconstruite. Pour cela, la courbe résultat va être discrétisée, dans chaque triangle intersecté par la courbe, à l'aide d'un algorithme de marching polyhedra [BTMF05,LC87]. Plus précisément, pour chaque triangle K intersecté, on détermine les points d'intersection de la ligne de niveau sur les arêtes du triangles, à l'aide d'une interpolation linéaire de la valeur de u aux sommets de K . On obtient ainsi une approximation affine par morceaux de la courbe. Sur la figure 3.8, on peut voir un zoom sur la ligne de niveau zéro d'une fonction u à convergence pour la reconstruction d'une courbe. Cette courbe paraît relativement régulière. Cela est dû au fait que dans cette zone les triangles sont très allongés et sont donc bien adaptés à la géométrie du problème.

Grâce à la métrique anisotrope prescrite, on garantit que l'erreur L^2 due à la discrétisation affine de Γ est bornée par ε (tolérance dans tenseur de métrique) petit (*cf.* figure 3.9). Autrement dit, la distance entre Γ et Γ_h (approximation affine) est réduite dans le cas anisotrope.

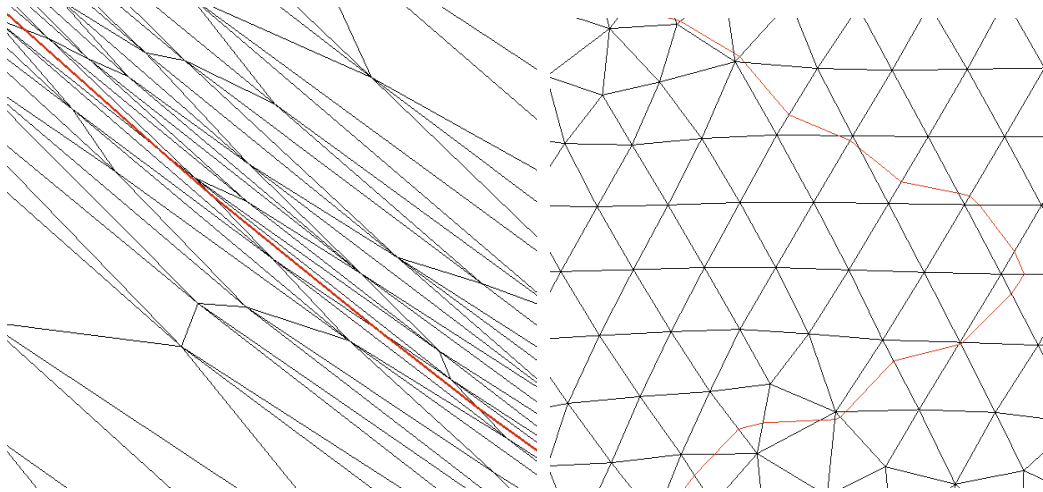


FIG. 3.8 – Zoom sur la ligne de niveau 0 de u sur maillage anisotrope, comparaison avec un maillage isotrope plus grossier.

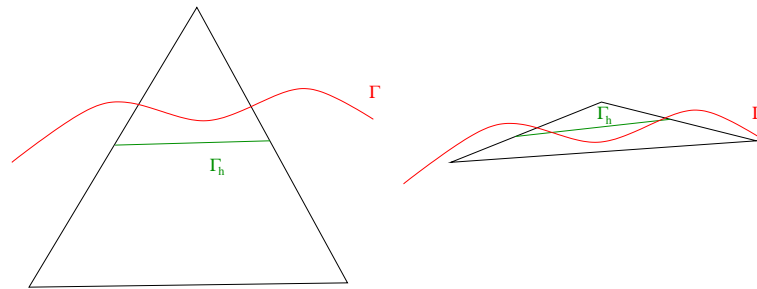


FIG. 3.9 – Approximation affine Γ_h de la courbe Γ sur des triangles intersectés (isotrope ou anisotrope).

Les résultats obtenus dans les chapitres 5 et 7 montrent que l'adaptation anisotrope que l'on a utilisée, c'est-à-dire autour des points de l'échantillon, permet d'obtenir de meilleurs résultats. Les maillages sont alors réellement adaptés à la géométrie (complexe ou non) de notre problème de reconstruction.

Chapitre 4

Implémentation numérique

Dans ce chapitre on évoque brièvement les différentes difficultés numériques qui peuvent se présenter relativement au type de problème considéré. Ces points concernent, en particulier, la convergence numérique des schémas, la résolution d'un système linéaire non symétrique ou encore la structure de données associée à l'énumération des points voisins à un sommet i de la triangulation.

4.1 Résolution d'un système linéaire

On rappelle que notre schéma semi-implicite peut s'écrire sous la forme :

$$((I - dt D M)u)_i^{n+1} = u_i^n + dt d_i \alpha$$

où D est la matrice diagonale telle que $D_{i,i} = d_i$ et M est la matrice associée à l'opérateur $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla}{|\nabla|} \right)$. Au chapitre 2, on a montré que la matrice $(I - dt D M)$ est inversible. On peut alors écrire :

$$u_i^{n+1} = (I - dt D M)^{-1}(u_i^n + dt d_i \alpha).$$

ce qui conduit à résoudre un système linéaire dont la matrice n'est pas symétrique. Pour résoudre celui-ci, on va alors utiliser la méthode itérative GMRES (generalized minimal residual method) qui est une version améliorée de la méthode du gradient conjugué pour traiter le cas de matrices non symétriques. Le préconditionnement de la matrice ici est diagonal [SS86].

On voit, dans l'équation précédente, que u^{n+1} est calculée en fonction de u_n . Les pas de temps utilisés étant petits, il n'y a donc pas de grosse variations de l'une (temps n) à l'autre (temps $n + 1$) des solutions. L'algorithme GMRES converge alors rapidement.

Nous allons maintenant parler de la structure de maillages ainsi que différents algorithmes que nous avons utilisés pour la résolution de notre problème de reconstruction.

4.2 Structure de données de maillage et algorithmes

Dans les schémas numériques que nous avons étudiés (2.1) et (2.2), l'ensemble \mathcal{B}_i des triangles qui contiennent le point i , intervient dans le calcul des gradients et des courbures moyennes. La structure de données classique d'un maillage permet de connaître les

sommets d'un triangle. Par contre, déterminer tous les triangles qui contiennent un point n'est pas immédiat. Une structure de données adaptée à nos problèmes a donc dû être implémentée. Plusieurs difficultés numériques interviennent dans notre implémentation :

- projeter u sur les points de V (qui n'appartiennent pas à la triangulation T_h) pour le critère de convergence,
- trouver rapidement le triangle dans lequel est un point donné n'appartenant pas à T_h , par exemple dans le cas des points de V ,
- interpoler une fonction définie en chaque nœud d'un maillage sur un autre.

Pour ces trois problèmes, le stockage des points voisins est nécessaire. Pour cela, plusieurs méthodes sont possibles. La méthode dite « brutale » qui consiste à : étant donné un point i , parcourir tous les triangles K du maillage et regarder si ce point i est un sommet du triangle K . Cette méthode répond au problème mais est inenvisageable pour des maillages contenant beaucoup de points. La complexité de cette méthode est en $O(n_p^2)$, où n_p est le nombre de points dans le maillage. De plus, cette méthode ne permet pas d'éviter les points que l'on a déjà regardés. Si on ne met pas de marqueur (de couleur), cela causera donc des doublons (c'est-à-dire que l'on traitera plusieurs fois le même point).

On utilise une structure de données qui associe à chaque triangle K , l'indice de ses trois voisins K_i , et l'indice des trois sommets A , B et C opposés à l'arête commune à deux triangles (*cf.* figure 4.1).

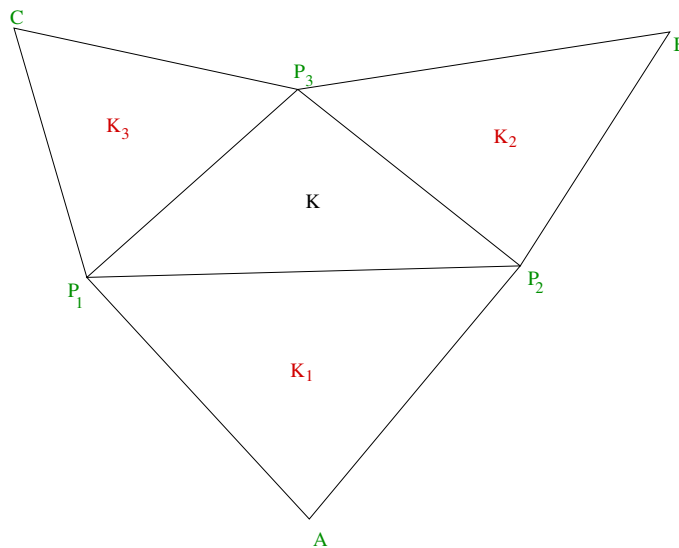


FIG. 4.1 – Définition d'un triangle K et de ses trois voisins K_i .

On utilise ensuite un algorithme rapide à partir de ces informations pour retrouver la boule \mathcal{B}_P du point P d'un triangle K donné (ensemble des points, autres que P , appartenant aux triangles qui contiennent le point P , *cf.* figure 2.1) en un nombre d'itérations limité, [FG08]. La complexité de cette méthode est en $O(n_b)$, où n_b est le nombre d'éléments de la boule. En trois dimensions, un système de coloriage doit être utilisé pour éliminer les zones où l'on est déjà passé. L'algorithme est donc plus compliqué. L'algorithme reste le même pour

trouver la double boule du point (boule des points de la boule de P).

4.3 Renormalisation

Bien que n'importe quelle fonction ligne de niveau puisse être utilisée pour résoudre notre équation (1.6), en pratique, une fonction de distance signée est préférable pour éviter l'imprécision dans les calculs numériques, [SSO94]. De plus, dans notre équation (1.6), $|\nabla u|$ doit rester borné car on ne souhaite pas que la non linéarité domine. Notre fonction ligne de niveau est initialisée par une fonction distance signée à une courbe simple fermée. Malheureusement, l'utilisation de schéma d'ordre un en temps entraîne une dissipation numérique pour la fonction u , malgré l'utilisation de maillages anisotropes. Autrement dit, en quelques itérations la fonction u perd la propriété associée à la notion de distance :

$$|\nabla u| = 1, \quad (4.1)$$

appelée équation eikonale.

En d'autres termes, on a rapidement $|\nabla u| \neq 1$. Pour rétablir une fonction distance, il est donc nécessaire d'avoir recours à une étape de renormalisation qui va assurer à nouveau la propriété (4.1) pour u . Le principe consiste à recalculer la fonction distance à la courbe $\Gamma(t)$ au cours de son évolution. C'est-à-dire que tous les n pas de temps, on modifie artificiellement u pour retrouver (4.1). Néanmoins, comme on s'intéresse à l'isovaleur zéro de u , cette procédure de renormalisation est faite sous la contrainte de garder l'approximation affine de $u = 0$ invariante. En pratique, on va modifier itérativement la valeur de u en chaque sommet de la triangulation. Pour résoudre ce problème de renormalisation sous contrainte, plusieurs approches ont été proposées :

- On trouve d'abord des méthodes basées sur la résolution d'une EDP non linéaire [SFSO98] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \text{sgn}(u)(1 - |\nabla u|) = 0.$$

- On trouve des méthodes de type Fast-Marching [Set99]. Cet algorithme peut être vu comme une extension de l'algorithme de Dijkstra [Dij59] pour calculer le plus court chemin entre des points du domaine. Cela consiste à résoudre l'équation suivante pour chaque élément du maillage :

$$\sum_{j=1}^3 \|\nabla \varphi_j u(a_j)\|^2 = 1 \quad (4.2)$$

où les φ_j sont les fonctions de forme de Lagrange et u_j est la valeur de la fonction ligne de niveau u au point j de l'élément que l'on considère.

- Notre méthode requiert la connaissance des triangles où passe la ligne de niveau zéro de u (c'est-à-dire $\Gamma(t)$). Ces triangles sont ceux où le signe de u n'est pas le même en chacun des trois points. Autrement dit, on a $u(x_i)u(x_{i+1})u(x_{i+2}) < 0$ dans le triangle. Une fois ces triangles trouvés, on cherche les points de $\Gamma(t)$ intersectant les arêtes de ces derniers et on construit les arêtes approchant $\Gamma(t)$ (approximation polynomiale). La deuxième étape consiste à recalculer u de façon à ce que ce soit une fonction distance. On rappelle que $\Gamma(t)$ est la ligne de niveau zéro de u , on va

donc recalculer u de façon à ce qu'elle soit équivalente à la fonction distance à $\Gamma(t)$. Pour cela, si la projection orthogonale sur les arêtes de la level set zéro est possible on choisit cette longueur pour u . Sinon, on calcule la distance du nœud du maillage au nœud le plus proche de la ligne de niveau $\Gamma(t)$. Ceci illustré sur la figure 4.2.

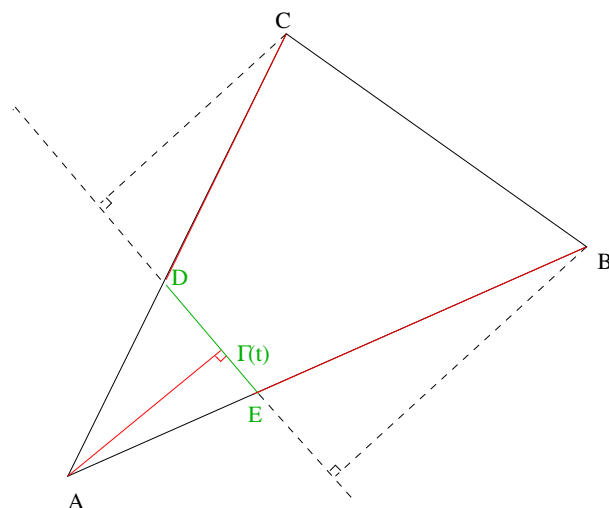


FIG. 4.2 – Exemple de calcul de distance à la courbe $\Gamma(t)$.

Dans cette figure 4.2, on voit que la projection orthogonale des sommets B et C sur le segment de $\Gamma(t)$ n'est pas possible. On choisit alors de considérer pour la valeur de u au point B , la longueur du segment $[BE]$. De même, pour le point C on considère la longueur du segment $[CD]$. On voit également que dans le cas de triangles anisotropes, la projection sera plus proche, cela garantit que l'erreur de projection sera donc minimale. On a donc à faire face à un problème de localisation rapide. Pour cela, on utilise un algorithme de tri (bucket sort) pour aller plus vite pour trouver les arêtes (en dimension deux) et les surfaces (en dimension trois) intersectées.

De toutes ces études numériques, il ressort que nous avons une structure de donnée robuste pour la recherche de points voisins et des algorithmes rapides et efficaces pour l'étape de renormalisation de notre fonction u , dans le cadre de la résolution de l'équation (1.6). À titre d'exemple, le temps CPU pour la résolution de l'équation (1.6), avec le schéma implicite (et donc avec inversion de matrice et résolution d'un système linéaire) est de 0.33 secondes incluant les lectures et écritures des fichiers d'entrée et de sortie, pour un maillage adapté contenant environ 1 500 points et 3 000 triangles. Pour la renormalisation, le temps CPU est de 0.034 secondes sur ce même maillage. Nous avons maintenant tout le matériel nécessaire pour résoudre numériquement notre problème de reconstruction.

4.4 Schéma général de l'implémentation numérique

Dans cette section, je présente le schéma général de l'implémentation numérique de notre problème dans le cas du schéma implicite (*cf.* figure 4.3), dont je rappelle les différents points. La première étape consiste à construire initialement le maillage anisotrope et adapté qui servira de support à la résolution de l'EDP (1.6). On part d'un maillage initial uniforme sur lequel on calcule la fonction distance d aux points de l'échantillon V , en chaque nœud du maillage. On adapte ensuite la triangulation autour de la ligne de niveau $\{d = 0\}$ en utilisant le tenseur de métrique (3.2) et on obtient le maillage T . La donnée initiale u_0 qui, on le rappelle, est une fonction de distance signée à une courbe simple fermée englobant les points, est calculée en chaque sommet de T . On pose $u = u_0$ et on calcule la valeur nodale de la fonction d sur T ainsi que celles du gradient ∇u et de la courbure $\kappa(u)$, en utilisant les opérateurs de projection L^2 proposés. Dans cette étape, on est donc amené à utiliser les structures de données présentées précédemment dont la recherche de points voisins. On rappelle que le schéma implicite s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$((I - dt DM)u)_i^{n+1} = u_i^n + dt d_i \alpha.$$

On assemble donc la matrice $(I - dt DM)$ et le second membre de ce système et on le résout à l'aide de l'algorithme GMRES. On obtient alors u^{n+1} . On regarde si le critère de convergence est vérifié, c'est-à-dire si la valeur de la fonction u aux points de V est très proche de 0. Si c'est le cas, on sort de la boucle, sinon on pose $u^n = u^{n+1}$, on renormalise et on continue jusqu'à valider le critère d'arrêt.

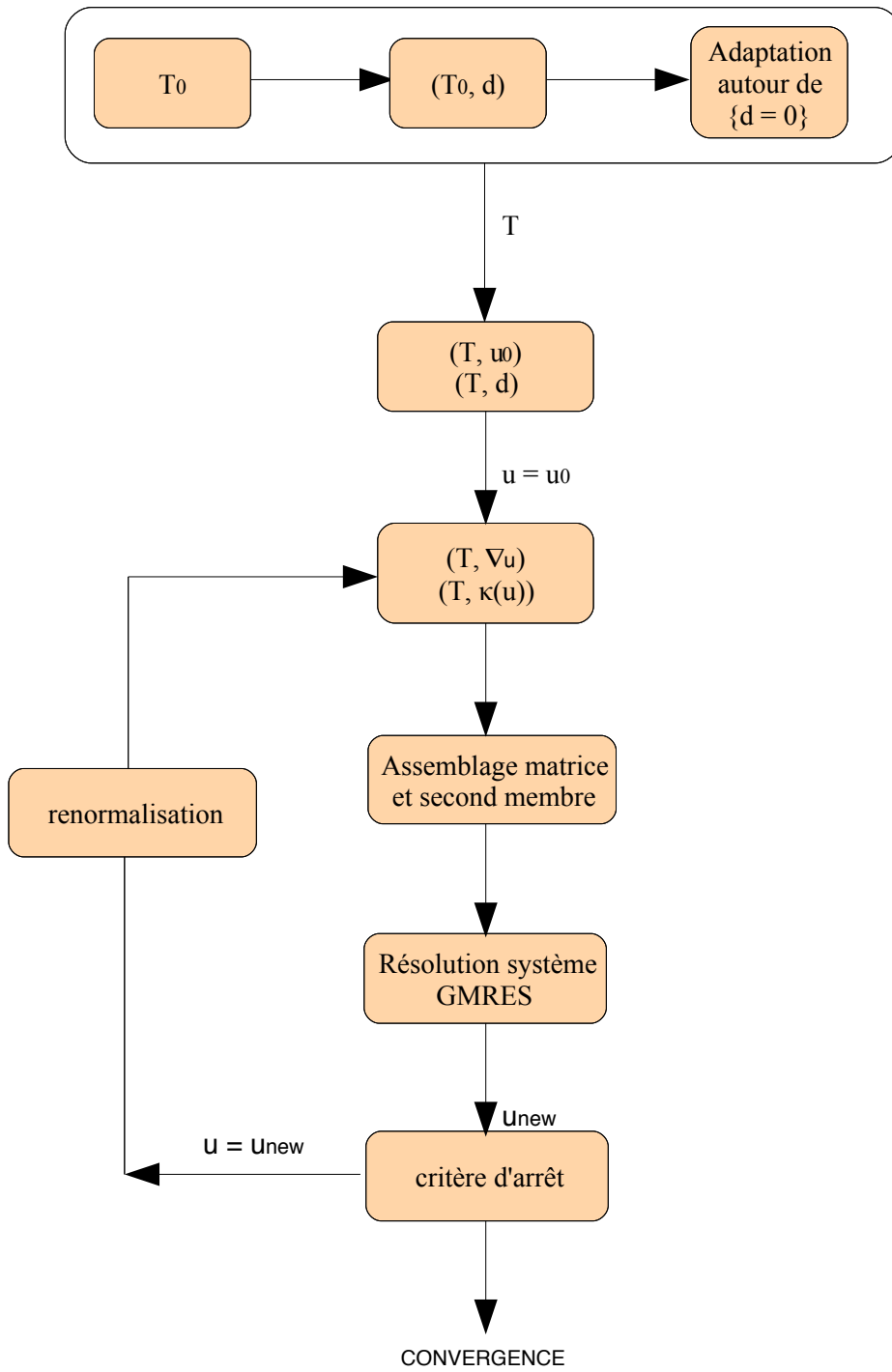


FIG. 4.3 – Schéma général de l'implémentation de notre problème.

Chapitre 5

Premiers exemples

Dans ce chapitre, on présente différents exemples pour montrer l'efficacité et la robustesse de notre méthode pour capturer différentes formes géométriques définies par des nuages de points. Dans un premier temps, nous avons caractérisé l'échantillon ainsi que le maillage associé pour obtenir le meilleur résultat possible. En particulier, nous verrons que la taille de maille doit correspondre au mieux avec la distance minimale entre deux points de V . Nous comparerons ensuite nos schémas avec le schéma classique à cinq points, dans le cas du laplacien, sur des maillages triangulaires cartésiens (carrés coupés en deux). En ce qui concerne les exemples numériques, on a commencé par traiter le cas d'une étoile pour laquelle le rapport entre la courbure moyenne minimale (nulle) et la courbure moyenne maximale (très grande) est grand. On a ajouté ensuite un bruit aléatoire gaussien aux coordonnées des points du nuage, pour montrer que notre méthode gère facilement des données bruitées. Puis, nous avons regardé le cas d'un carré pour différents échantillons afin d'étudier la manière dont notre méthode gère les singularités. Enfin, nous avons regardé le cas où le nuage de points contient plusieurs composantes connexes pour montrer que notre méthode gère de manière naturelle les changements de topologie au cours du temps.

5.1 Caractérisation de l'échantillon

Dans cette section, nous allons regarder, dans le cas où les points de l'échantillon sont sur un cercle, le nombre de points nécessaire à une bonne construction ainsi que les maillages les mieux adaptés à ces nuages de points (en terme de taille).

Nous avons considéré trois échantillons V pour représenter un cercle : l'un contient 10 points, l'autre 100 points et le troisième contient 1000 points. Nous avons considéré cinq maillages réguliers (contenant des triangles équilatéraux) $\text{reg1}, \dots, \text{reg5}$, de tailles différentes. Pour chacun des exemples, un tableau rassemblera les résultats trouvés (taille de maille des triangulations et erreur L^2 de u à convergence) que nous analyserons.

- V contient 10 points

Dans ce tableau 5.1, on voit que c'est sur les maillages reg2 et reg3 que l'erreur de convergence est la plus petite. En revanche, sur la figure 5.1, les courbes obtenues sur ces deux triangulations ne sont pas forcément les meilleures. Ici la distance minimale

maillages	reg1	reg2	reg3	reg4	reg5
h_{\min}	3.04×10^{-3}	6.75×10^{-3}	1.43×10^{-2}	3.03×10^{-2}	5.0×10^{-2}
erreur L^2	8.27×10^{-3}	6.28×10^{-3}	6.23×10^{-3}	1.98×10^{-2}	1.01×10^{-1}

TAB. 5.1 – Résultats obtenus sur les différents maillages dans le cas où V contient 10 points.

entre deux points de l'échantillon est $d_{\min} = 1.85 \times 10^{-1}$. Il ne faut donc pas prendre un maillage très fin afin d'obtenir la courbe Γ attendue. Au contraire, plus les mailles sont grandes et plus la courbe sera régulière.

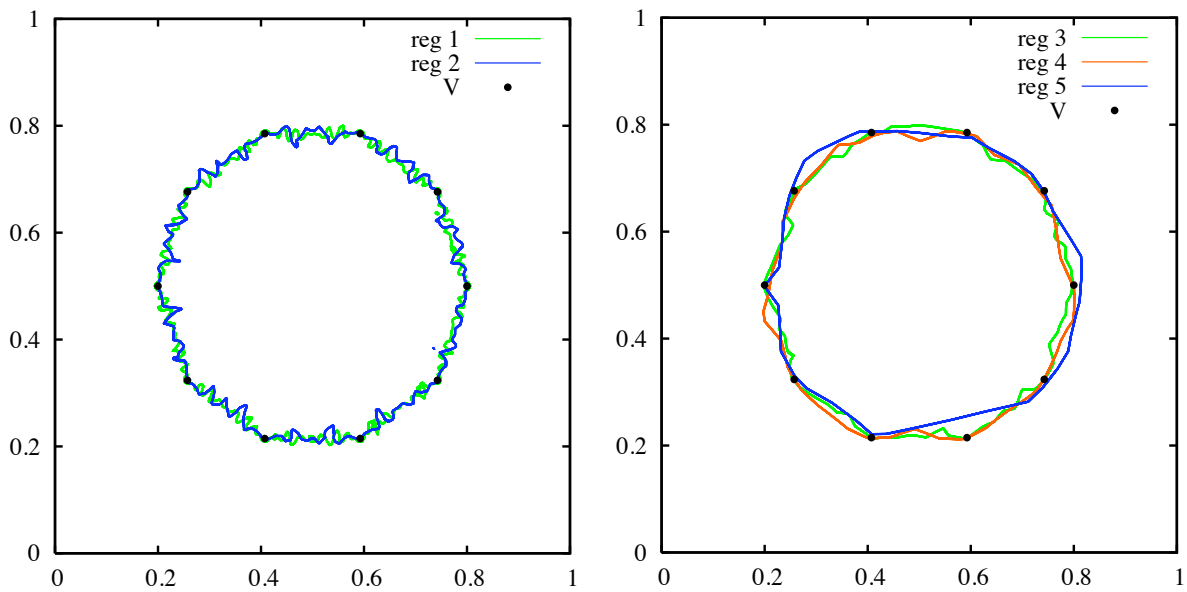


FIG. 5.1 – Courbe Γ à convergence sur les cinq maillages avec V contenant 10 points.

– V contient 100 points

maillages	reg1	reg2	reg3	reg4	reg5
h_{\min}	3.04×10^{-3}	6.75×10^{-3}	1.43×10^{-2}	3.03×10^{-2}	5.0×10^{-2}
erreur L^2	2.42×10^{-3}	5.19×10^{-3}	7.28×10^{-3}	1.29×10^{-2}	1.01×10^{-2}

TAB. 5.2 – Résultats obtenus sur les différents maillages dans le cas où V contient 100 points.

Dans ce tableau 5.2, on voit que c'est sur le maillage le plus fin (reg1) que l'erreur de convergence est la plus petite. La distance minimale entre deux points de V est ici égale à $d_{\min} = 1.8 \times 10^{-2}$. Sur la figure 5.2, on peut comparer les résultats obtenus sur le maillage 1 et sur le maillage reg4. Dans le cas où la taille de maille est de l'ordre de d_{\min} , c'est-à-dire, sur le maillage reg4, la courbe Γ obtenue est plus régulière (au sens où il y a moins de petites oscillations).

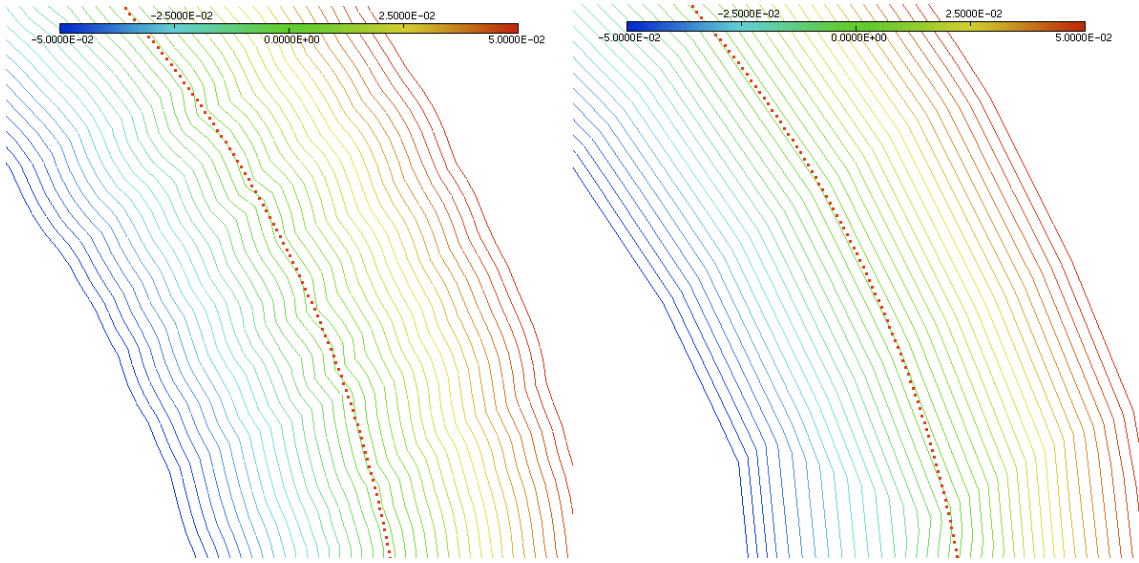


FIG. 5.2 – Lignes de niveau de u à convergence sur deux maillages : $reg1$ (à gauche) et $reg4$ (à droite) avec V contenant 100 points.

– V contient 1000 points

maillages	reg1	reg2	reg3	reg4	reg5
h_{\min}	3.04×10^{-3}	6.75×10^{-3}	1.43×10^{-2}	3.03×10^{-2}	5.0×10^{-2}
erreur L^2	2.03×10^{-3}	4.46×10^{-3}	3.38×10^{-3}	5.08×10^{-3}	1.18×10^{-2}

TAB. 5.3 – Résultats obtenus sur les différents maillages dans le cas où V contient 1000 points.

Dans ce cas, l'échantillon contient beaucoup de points et on voit alors que quel que soit le maillage, les erreurs de convergence sont petites. Dans tous les cas, on obtient un cercle régulier. Sur la figure 5.3, on voit la courbe Γ à convergence sur le maillage $reg1$. (pour info ici $d_{\min} = 1.88 \times 10^{-3}$).

En conclusion à cette sous-section, si l'échantillon contient peu de points, pour que la forme que l'on souhaite reconstruire soit relativement représentative, contrairement à ce que l'on pourrait penser, il vaut mieux prendre un maillage grossier. Bien entendu, plus l'échantillon aura de points et meilleurs sera la construction. Dans le cas précédent de l'étoile, $d_{\min} = 9 \times 10^{-4}$. Prendre un maillage adapté de taille 3×10^{-3} est donc raisonnable pour obtenir une bonne reconstruction.

Nous allons maintenant comparer notre schéma d'approximation du terme de courbure au schéma classique du laplacien à 5 points sur un maillage régulier.

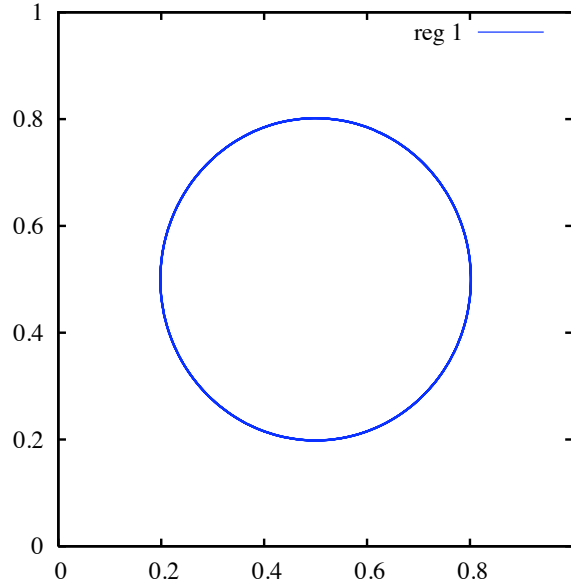


FIG. 5.3 – Courbe Γ à convergence sur le maillage le plus fin *reg1*, avec V contenant 1000 points.

5.2 Comparaison avec le schéma classique du laplacien à 5 points

Dans cette section, nous allons comparer notre schéma du laplacien avec le schéma classique à 5 points, sur des maillages triangulaires réguliers (carrés coupés en deux), pour valider notre méthode. On s'attend à obtenir des résultats au moins aussi biens avec notre approche.

On rappelle que le schéma classique de différences finies à cinq points pour le laplacien, sur une grille régulière (*cf.* figure 5.4 à gauche), est défini de la façon suivante :

$$(\Delta u)_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}, \quad (5.1)$$

où $u_{i,j} \sim u(x_i, y_j)$ et h est le pas de maillage.

Considérons le cas du schéma semi-implicite, sur une triangulation, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + d_i dt \alpha + dt d_i (\nabla u)_i^{n+1} \\ \Leftrightarrow ((I - dt D M)u)_i^{n+1} &= u_i^n + d_i dt \alpha, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où D est la matrice diagonale de coefficients $D_{i,i} = d_i$ et M est la matrice de discrétisation de l'opérateur de Laplace.

Pour pouvoir comparer notre schéma avec ce schéma à cinq points, on considère un maillage triangulaire cartésien, au sens où les triangles sont des carrés coupés en deux (*cf.* figure 5.4 à droite). D'un point de vue implémentation, il va falloir chercher les points, sur la figure 5.4 à droite, des triangles de \mathcal{B}_i (rappel : triangles qui contiennent le point i) qui sont reliés orthogonalement à i .

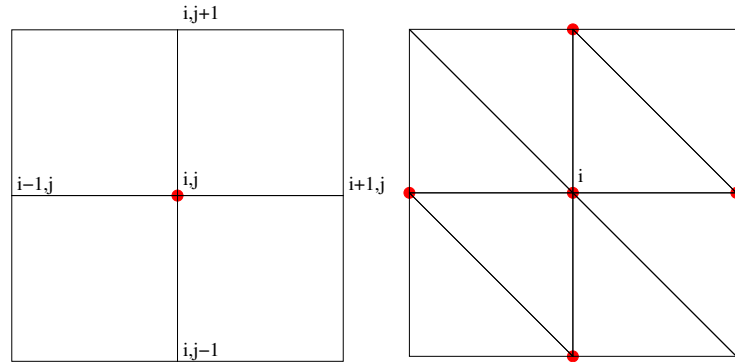


FIG. 5.4 – Exemples de grille cartésienne en dimension deux (à gauche) et de maillage triangulaire régulier où les triangles sont des carrés coupés en deux (à droite).

Dans le tableau 5.4, se trouvent les statistiques relatives à ces calculs (taille h du maillage, nombre de points n_p dans la triangulation, erreur L^2 de convergence pour les deux schémas et nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence).

maillage	n_p	25921
	h	6.25×10^{-3}
schéma à 5 points	erreur L^2	5.76×10^{-3}
	nombre d'itérations	65
notre schéma	erreur L^2	5.86×10^{-3}
	nombre d'itérations	65

TAB. 5.4 – Comparaison entre le schéma classique à 5 points du laplacien et notre schéma.

Les résultats obtenus sont relativement similaires dans les deux cas. L'erreur de convergence est là aussi inférieure à la taille de maille. Ce schéma à 5 points n'est utilisable que dans le cas de grilles régulières ou dans le cas d'un maillage triangulaire cartésien comme nous venons d'utiliser. Les résultats obtenus pour l'un ou l'autre des schémas sont du même ordre. Le schéma classique à 5 points ne peut pas être étendu à nos maillages triangulaires anisotropes. Cela plaide donc pour notre schéma.

Nous allons maintenant voir comment notre méthode gère le cas d'un nuage de points en forme d'étoile où le rapport entre la courbure moyenne maximale et minimal est non borné.

5.3 Étoile

On considère, ici, le cas d'un échantillon de points en forme d'étoile. Ce cas test permet d'examiner les cas où le rapport entre la courbure moyenne minimale (nulle ici) et la courbure moyenne maximale (très élevée) aux points de V est petit. L'équation paramétrique associée à cette étoile est de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = 0.5 - \cos(t)(0.3 + 0.16 \cos(6t)) \\ y(t) = 0.5 - \sin(t)(0.3 + 0.16 \cos(6t)), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

5.3.1 Comparaison sur plusieurs maillages

Pour montrer l'efficacité de notre méthode sur tout type de maillages, on souhaite ici reconstruire une courbe en forme d'étoile sur quatre maillages de type différents, de taille équivalente, sur le carré unité. Dans un premier temps, on considère le cas d'un maillage régulier au sens où les triangles sont tous à peu près de la même taille et équilatéraux. Cette triangulation contient environ 30 000 nœuds pour une taille de maille de l'ordre de 10^{-3} . Nous avons ensuite construit des maillages adaptés isotropes et anisotropes pour diminuer le nombre de sommets dans la triangulation. La taille minimale de maille (calculée comme étant le minimum des longueurs des arêtes) de ces maillages est pratiquement équivalente à la taille des mailles du maillage régulier précédent. Dans le tableau suivant 5.5, sont repertoriées différentes caractéristiques des maillages (nombre de points n_p , taille de maille h_{\min}). Sur la figure 5.6, on peut voir les deux maillages isotrope et anisotrope.

maillages	reg	iso	aniso
n_p	27650	8886	1552
h_{\min}	3×10^{-3}	2.69×10^{-3}	2.24×10^{-3}

TAB. 5.5 – Caractéristiques des différents maillages considérés.

Les maillages anisotrope et isotrope ont été adaptés autour de la ligne de niveau zéro de la fonction distance au points (*cf.* figure 5.5) dans les mêmes conditions (gradation de la taille des mailles, largeur de bande d'adaptation *etc.*). Cette adaptation n'a lieu qu'une seule fois, en pré-traitement de notre calcul de reconstruction de courbe. Comme espéré, le maillage anisotrope contient environ six fois moins de points que le maillage isotrope et seize fois moins de points que le maillage régulier. Ici encore, la taille minimale de maille h_{\min} est égale au minimum des longueurs des arêtes pour chaque triangle. La condition

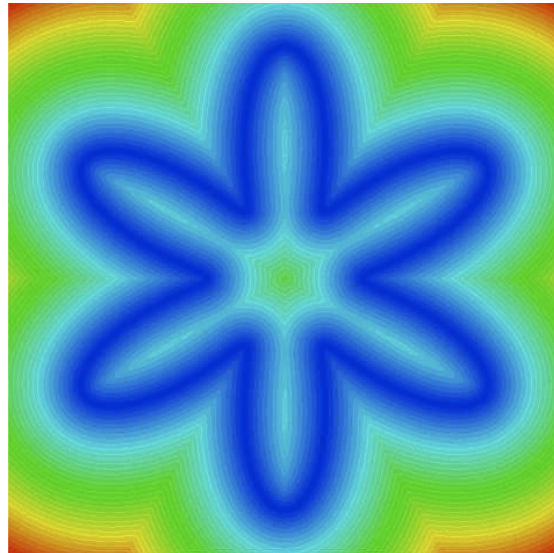


FIG. 5.5 – Fonction distance à l'étoile.

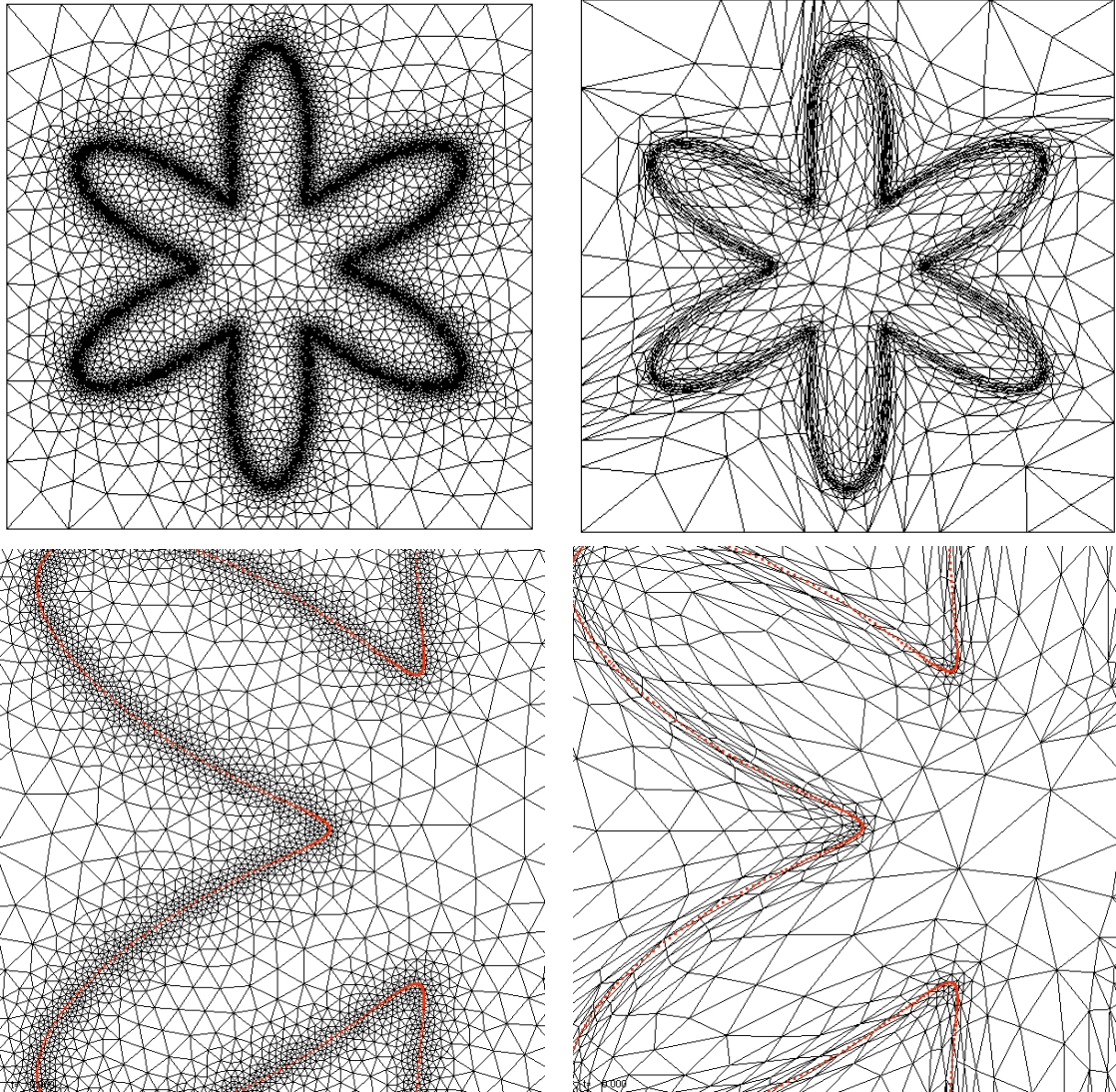


FIG. 5.6 – Maillages isotrope et anisotrope adaptés autour de la ligne $d = 0$ et zoom avec les points de V .

initiale est, rappelons-le, une fonction de distance signée à une courbe simple fermée et dont la surface qu'elle délimite englobe les points (*cf.* figure 5.7). Nous partons ici d'un cercle entourant les points de l'étoile, ni trop proche (pour analyser la convergence), ni trop éloigné (pour éviter des calculs inutiles). Dans le tableau 5.6 se trouvent les résultats que l'on a obtenus avec les schémas explicite et semi-implicite décrits dans le chapitre 2.

Dans le cas du schéma explicite, le pas de temps choisi est $dt = \frac{h_{\min}^2}{\beta}$ conformément à la condition CFL calculée précédemment, où β est ici égal à 1 puisque l'on est sur un carré unité. Dans le cas du schéma semi-implicite, on a pris $dt = 10 h_{\min}$. Dans le tableau 5.6, on peut trouver le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir la convergence numérique du schéma. Dans le cas du schéma explicite, il y a eu une étape de redistanciation tous les 150

	maillages	reg	iso	aniso
	n_p	27650	8886	1552
	h_{\min}	3.05×10^{-3}	2.69×10^{-3}	2.24×10^{-3}
explicite	nombre d'itérations	3450	2550	2550
	erreur L^2	3.35×10^{-3}	2.11×10^{-3}	2.20×10^{-3}
implicite	nombre d'itérations	315	225	210
	erreur L^2	3.14×10^{-3}	2.14×10^{-3}	1.77×10^{-3}

TAB. 5.6 – Résultats obtenus sur les différents maillages dans le cas des schémas explicite et implicite.

pas de temps alors que dans le cas du schéma implicite, celle-ci a eu lieu tous les 15 pas de temps. L'erreur de convergence est calculée de la façon suivante : $err = \max_{x \in V} |u(x)|$ où u est calculée par projection L^2 sur les points de V , qui ne font pas partie des sommets du maillage. On voit, dans le tableau 5.6 que cette erreur L^2 est de l'ordre du pas de maillage h_{\min} . Dans le cas des deux maillages adaptés, l'erreur L^2 est même inférieure à h_{\min} . L'adaptation permet donc d'augmenter la précision de la solution à convergence. C'est-à-dire, à nombre de points fixé, l'adaptation anisotrope permet d'obtenir une meilleure approximation numérique que dans le cas isotrope (la taille minimale de maille serait plus petite en anisotrope qu'en isotrope). De plus, pour un même h_{\min} , il y a un nombre de points bien inférieur en anisotrope et donc on converge plus vite (en temps de calcul). On voit également que, sur la triangulation adaptée anisotrope, la solution est obtenue plus rapidement (en nombres d'itérations et en temps de calcul) que sur les autres maillages et elle est la plus précise. Ceci renforce donc l'utilisation de ce type d'adaptation, avec des triangles allongés, autour des points de l'échantillon afin d'obtenir une solution la plus précise et la plus régulière possible.

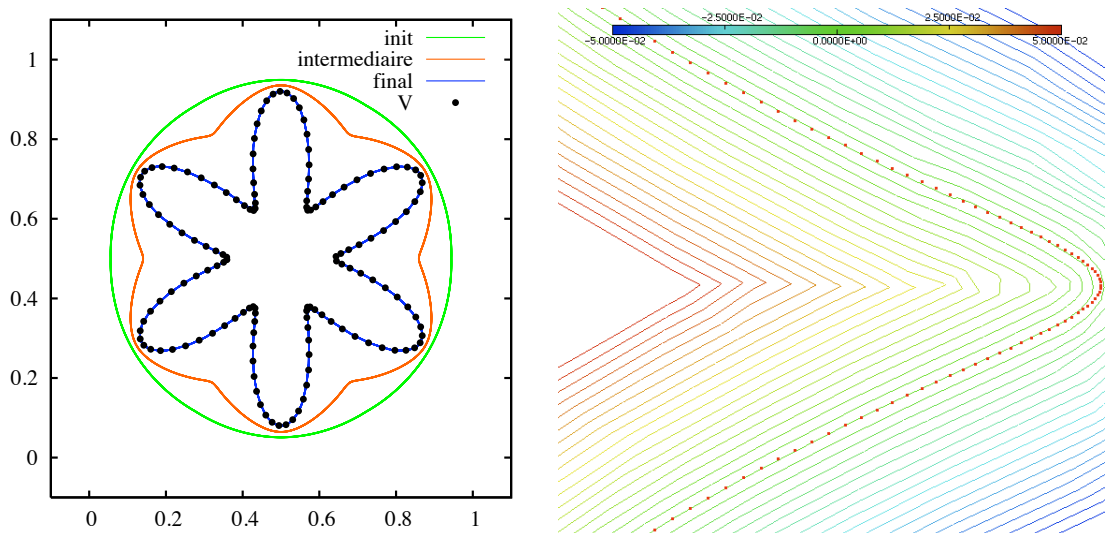


FIG. 5.7 – Courbe $\Gamma(t)$ à différents temps (cas du maillage anisotrope) et un point sur sept de V (à gauche), zoom autour des points de l'étoile avec différentes lignes de niveau de u (à droite).

Sur la figure 5.7, on peut trouver la ligne de niveau $\Gamma(t)$ à différents temps (initial, intermédiaire et final) dans le cas du maillage anisotrope (à gauche) et un zoom sur un ensemble de lignes de niveau de u à convergence autour de points de V (à droite). Une partie des points de V a été représentée à gauche (un point sur sept affiché) pour une meilleure visualisation. On voit que la ligne de niveau zéro de u , à convergence, est régulière et passe au mieux par les points de V . Nous allons maintenant introduire un bruit aléatoire dans l'échantillon et regarder ce qui se passe.

5.3.2 Donnée bruitée

Au vu de tout ce qui a été traité jusqu'à maintenant, on pourrait se demander pourquoi ne pas directement utiliser la ligne de niveau zéro de la fonction distance d pour définir la courbe cherchée. Bien entendu, cela est possible dans le cas où le nuage de points caractérise une courbe déjà régulière. Dans le cas de données bruitées, comme dans l'exemple que l'on peut trouver dans cette sous-section, on va voir que l'on ne peut pas utiliser cette fonction d pour définir Γ .

Un problème récurrent du traitement d'images est le problème du bruit introduit par la numérisation préalable des images. En particulier, on trouve souvent du bruit gaussien sur chaque pixel de l'image. On reprend, ici, l'échantillon V de l'exemple précédent de l'étoile dans lequel on a ajouté un bruit gaussien aléatoire. Pour cela, on utilise la méthode de Box Muller [BM58], qui génère des nombres aléatoires, à distribution normale centrée réduite, à partir de nombres de loi uniforme.

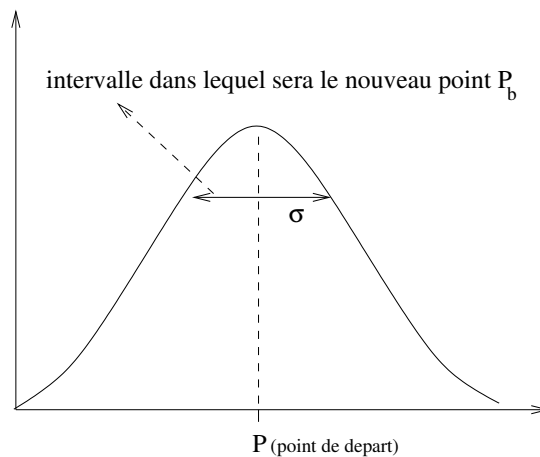


FIG. 5.8 – Loi normale, méthode de Box Muller.

Pour un point donné, on considère U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans $]0, 1]$. Soient x et y les coordonnées de ce point de V , alors les coordonnées « bruitées » (x_b, y_b) seront calculées de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_b = x + \sigma T_1 \\ y_b = y + \sigma T_2 \end{cases}$$

où σ est l'écart-type (cf. figure 5.8) et :

$$\begin{cases} T_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2) \\ T_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2) \end{cases}$$

On a choisi ici de prendre $\sigma = 2 d_{\min}$, où d_{\min} est la distance minimale entre deux points de l'échantillon V avant bruitage.

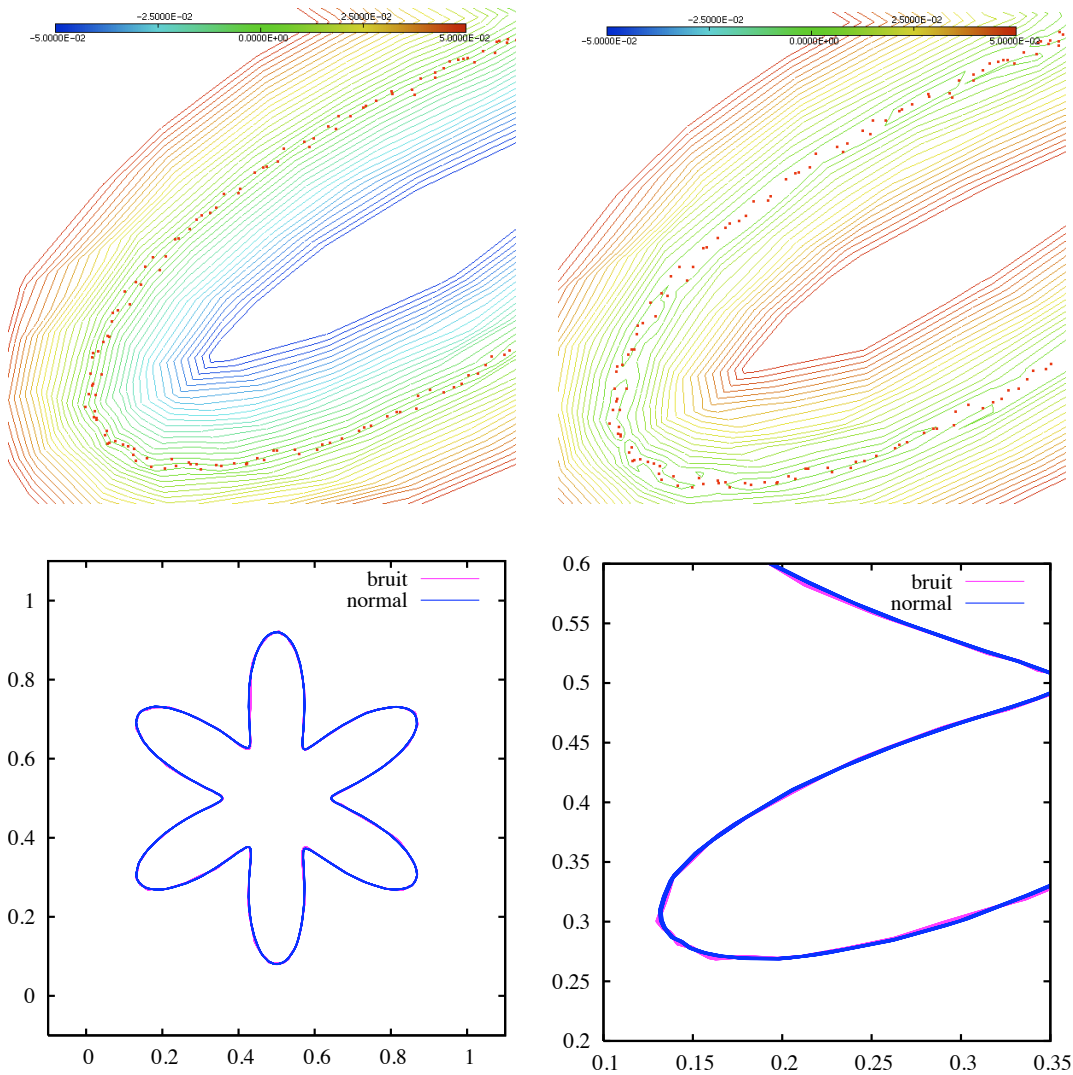


FIG. 5.9 – Comparaison entre u (à gauche) et d (non signée, à droite) pour V bruité (en haut) et comparaison entre u à convergence dans les cas bruité et non bruité (en bas).

Sur la figure 5.9, en haut à gauche, on peut trouver différentes lignes de niveau de u à convergence. On a lancé ici le calcul sur le maillage anisotrope adapté précédent. On voit que la ligne de niveau zéro de u est très régulière sans passer par tous les points de V mais au plus près, sinon elle ne serait pas lisse. On a donc bien le résultat attendu c'est-à-dire que l'on a une courbe d'approximation régulière de ces points. De plus, l'erreur de convergence L^2 sur ce nuage de points V est égale à :

$$err = 8.02 \times 10^{-3}.$$

Cette erreur est bien entendu moins bonne que dans le cas non bruité, elle reste cependant de l'ordre de la taille de maille minimale h_{\min} de notre maillage. Sur la droite de la figure 5.9 en haut, sont représentées différentes lignes de niveau de la fonction distance d non signée aux points (c'est-à-dire que d est positive sur tout le domaine). La ligne de niveau zéro de celle-ci est ici tellement peu régulière qu'on la voit à peine. Il y a des « trous » partout. Ceci prouve donc l'efficacité de notre méthode dans le cas de données bruitées. Le procédé pour obtenir la courbe d'approximation se comporte comme un filtre qui élimine les hautes fréquences liées aux variations locales des coordonnées des points.

Sur la figure 5.9, on peut également comparer la ligne de niveau zéro à convergence dans le cas bruité et dans le cas non bruité. On remarque que ces deux courbes sont très proches l'une de l'autre et paraissent tout aussi régulières l'une que l'autre.

Nous allons maintenant regarder l'influence du terme α dans ce cas bruité. Dans les expériences précédentes, on a choisi $\alpha = 2$. Dans le tableau ci-dessous 5.10, on peut trouver la valeur de l'erreur L^2 calculée sur le maillage, pour différentes valeurs de α au bout de 200 itérations (avec une renormalisation tous les 10 pas de temps).

α	err
1	4.62×10^{-2}
2	8.02×10^{-3}
3	8.22×10^{-3}
4	8.4×10^{-3}

TAB. 5.7 – Influence du coefficient α sur l'erreur L^2 à convergence.

Sur la figure 5.10, on peut voir la courbe $\Gamma(t)$ obtenue après 200 itérations dans le cas où α vaut 1 ou 2.

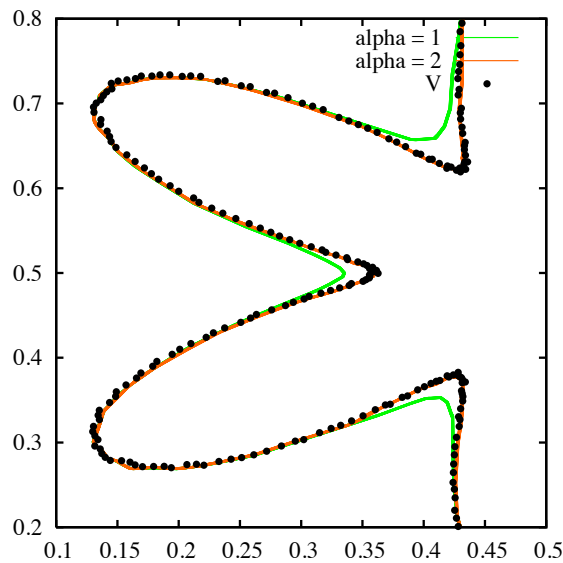


FIG. 5.10 – Courbe $\Gamma(t)$ pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe lorsque que l'on change de condition initiale. En particulier lorsque les points de V sont situés de part et d'autre de u_0 .

5.3.3 Autre condition initiale

On s'intéresse ici au cas où la condition initiale n'englobe pas les points de l'étoile (cf. figure 5.11). On lance le calcul sur le maillage anisotrope adapté précédent dont la taille de maille minimale est $h_{\min} = 2.69 \times 10^{-3}$. On arrive là aussi à capturer une courbe d'approximation régulière passant au mieux par tous les points de V . De plus, l'erreur trouvée à convergence est de l'ordre de h_{\min} , comme précédemment. L'étape de renormalisation a eu lieu, ici, tous les 5 pas de temps, et non tous les 15 pas de temps comme dans le cas précédent, pour des raisons de stabilité. La courbe obtenue est représentée sur la figure 5.11.

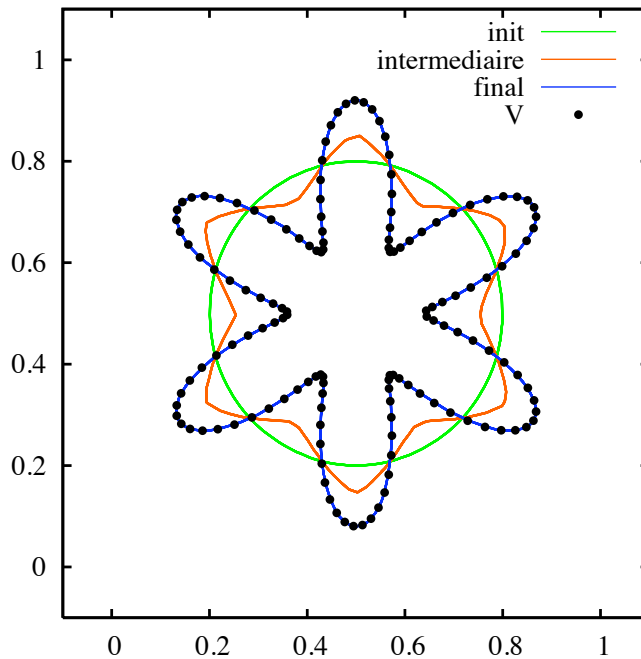


FIG. 5.11 – Courbe $\Gamma(t)$ à différents temps et un point sur sept de l'échantillon avec condition initiale n'englobant pas les points.

Remarque : On peut également partir d'un *offset* de la courbe, c'est-à-dire de la ligne $d = \varepsilon$ comme dans [ZOMK00]. Numériquement c'est tout à fait possible. Cependant, en partant d'un peu plus loin, on peut mieux observer l'évolution de la courbe ainsi que la convergence.

Nous allons maintenant voir comment notre méthode gère les singularités (coins) dans le cas d'un échantillon caractérisant un carré.

5.4 Traitement des singularités : cas d'un carré

Dans cette section, on regarde comment notre méthode se comporte avec les singularités (les coins). On considère le cas d'un carré. On lance le calcul pour différents échantillons de points : 80, 400, 800 et 1600 points.

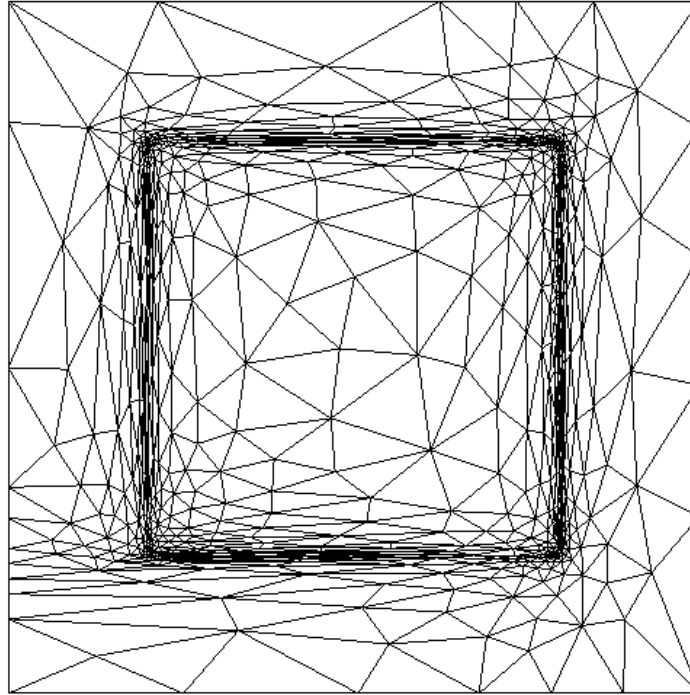


FIG. 5.12 – Maillage anisotrope adapté autour de la ligne $d = 0$ dans le cas du carré.

nombre points dans V	80	400	800	1600
erreur L^2	7.01×10^{-3}	4.52×10^{-3}	4.32×10^{-3}	4.09×10^{-3}

TAB. 5.8 – Résultats obtenus pour les différents échantillons dans le cas d'un carré, avec le schéma explicite.

Sur la figure 5.13, on voit que la méthode des lignes de niveau a tendance à « lisser » les angles droits. La méthode vise à trouver des courbes régulières et donc sans discontinuité. On ne s'attend pas à gérer de manière précise les singularités. Bien entendu, plus il y a de points dans le coin meilleure sera l'approximation de cette singularité, comme on peut le voir dans le tableau 5.8. Les calculs ont été lancés sur un maillage anisotrope, adapté autour de la ligne de niveau zéro de la fonction distance aux points (*cf.* figure 5.12), ayant pour taille minimale de maille $h_{\min} = 2.36 \times 10^{-3}$. Un post-traitement simple pourrait permettre que la courbe passe par les coins exactement. Pour cela, il faudrait que ces points, qui forment les angles droits, soient marqués d'un label, sans cela, il paraît difficile de les distinguer des autres points. Il suffirait ensuite d'imposer que $u = 0$ en ces points.

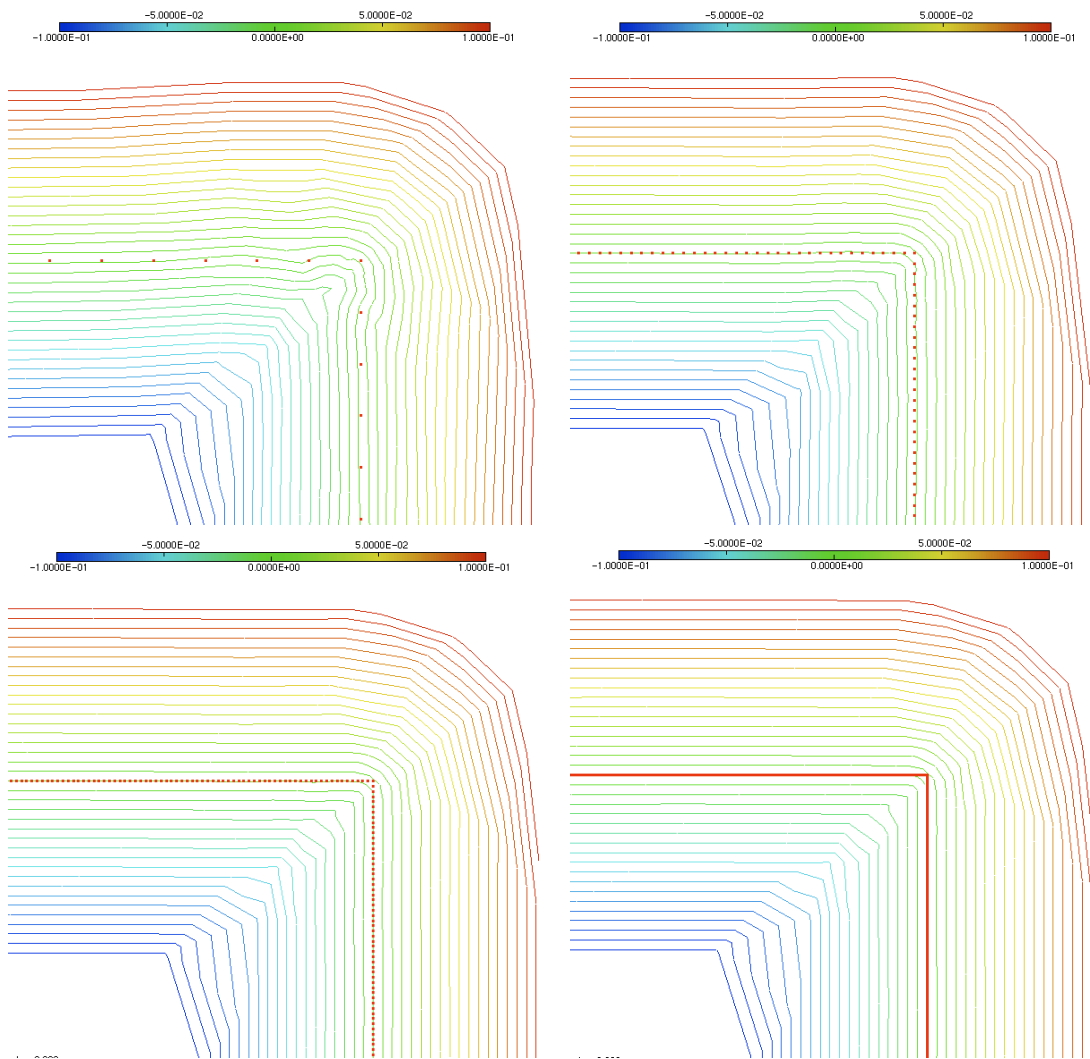


FIG. 5.13 – Cas du carré : zoom sur un coin pour un échantillon qui contient 80 points (en haut à gauche), 200 points (en haut à droite), 400 points (en bas à gauche) et 800 points (en bas à droite).

Nous allons maintenant voir comment se comporte notre méthode dans le cas où l'échantillon V contient plusieurs composantes connexes.

5.5 Donnée contenant plusieurs composantes connexes

Pour montrer l'efficacité de notre approche dans le cas de changements de topologie au cours du temps, on a regardé un cas où le nuage de points est composé de plusieurs composantes connexes. Dans notre cas, on considère le mot "LISSE". On a donc cinq contours de lettre à capturer. On part initialement d'un cercle, c'est-à-dire d'une composante connexe. Il va donc y avoir un changement de topologie. Sur la figure 5.14, on peut voir le maillage adapté autour de la ligne $d = 0$ sur lequel on a fait nos calculs (en haut à gauche) ainsi que l'évolution de la courbe $\Gamma(t)$ à différents temps (en haut à droite). On voit que l'on obtient

cinq courbes régulières distinctes formant les lettres. En bas à gauche de cette figure 5.14, on peut voir un zoom autour de la lettre « S » ainsi que la ligne de niveau zéro de u à convergence. À droite on trouve plusieurs lignes de niveau de u à convergence ainsi que les points de V .

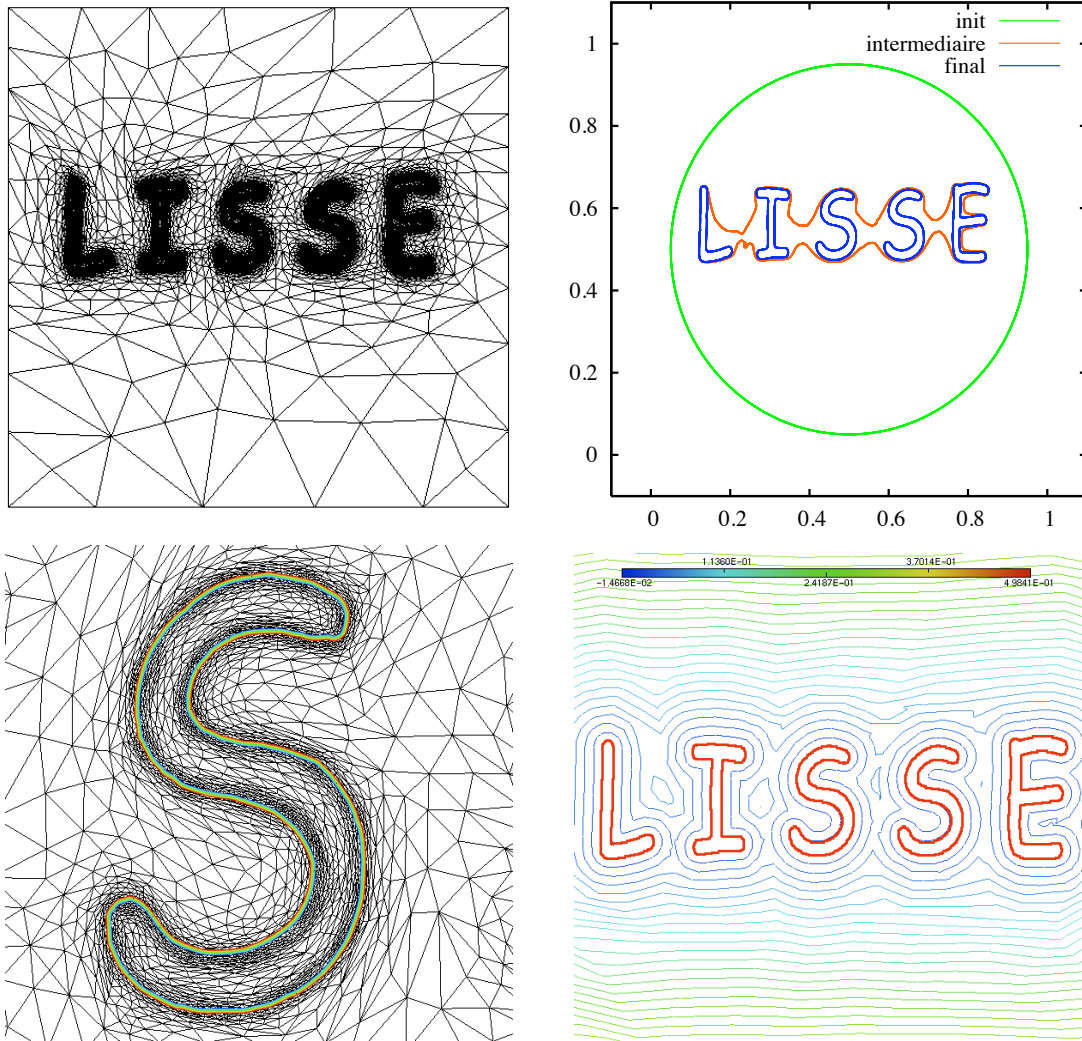


FIG. 5.14 – Maillage de calcul et évolution de la courbe Γ à différents temps (en haut), zoom autour de la lettre « S » et plusieurs lignes de niveau de u à convergence avec les points de V (en bas).

Nous venons donc de voir plusieurs cas d'échantillons de points avec des difficultés différentes (singularités, forte variation de courbure et plusieurs composantes connexes). Nous allons maintenant valider notre méthode sur des exemples plus concrets sans le chapitre 7. Avant cela, dans le chapitre qui suit, nous allons comparer notre schéma à celui obtenu à l'aide d'une formulation variationnelle. On résout ensuite à l'aide de la méthode des éléments finis. La comparaison entre cette dernière approche et notre méthode sera à la fois théorique et numérique.

Chapitre 6

Comparaison avec une approche « classique », un schéma d'éléments finis

Dans ce chapitre, on exprime notre problème de construction de courbe d'approximation sous une forme variationnelle, pour ensuite le résoudre par une formulation en éléments finis triangulaires affines. Dans une première section, je vais présenter les différentes étapes de calcul pour écrire le problème variationnel associé, je montrerai ensuite l'existence et l'unicité d'une solution, puis je présenterai un exemple de résolution ainsi qu'une comparaison avec notre méthode.

6.1 Approche semi-discrète en temps

6.1.1 Formulation variationnelle

On rappelle que le problème de reconstruction de courbe est régi par l'EDP d'évolution suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d(x) \left(\alpha + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) (t, x) \right), \quad x \in \mathcal{D}, \quad (6.1)$$

avec la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (6.2)$$

où, on le rappelle, α est un réel, d est la fonction de distance non signée aux points de l'échantillon, u_0 est une fonction de distance signée à une courbe simple fermée (cercle par exemple) englobant les points de V et \mathcal{D} est le domaine de calcul, ouvert borné de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3), de frontière $\partial\mathcal{D}$ supposée C^1 .

À cette EDP, on rajoute une condition de Neumann homogène correspondant à une condition de sortie libre :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0, \quad x \in \partial\mathcal{D}, t \in \mathbb{R}. \quad (6.3)$$

On commence par discrétiser l'équation (6.1) en temps en considérant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x) = \frac{u^{n+1} - u^n}{dt},$$

où dt est le pas de temps, en posant $u^0 = u_0$.

On suppose dans la suite que $d \in H^1(\mathcal{D})$ la fonction distance non signée aux points de l'échantillon. On note

$$H^1(\mathcal{D}, d) = \{w \in L^2(\mathcal{D}) / \int_{\mathcal{D}} d |\nabla w|^2 < \infty\}.$$

Cet ensemble est un espace de Hilbert. En effet, $H^1(\mathcal{D}, d)$ est un espace vectoriel, le produit scalaire qui lui est associé est : $\langle u, v \rangle_{H^1(\mathcal{D}, d)} = \int_{\mathcal{D}} uv + \int_{\mathcal{D}} d \nabla u \cdot \nabla v$, et $H^1(\mathcal{D}, d)$ est complet puisque $\int_{\mathcal{D}} d |\nabla w|^2 \leq \|d\|_{L^\infty} \|\nabla w\|_{L^2}^2$ et L^2 est complet.

On considère ensuite le schéma semi-implicite en temps. On se donne à chaque pas de temps $u^n \in H^1(\mathcal{D}, d)$ et on cherche la solution $u^{n+1} \in H^1(\mathcal{D}, d)$ de :

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + dt \alpha d(x) + dt \left(\nabla \cdot \left(\frac{d \nabla u^{n+1}}{|\nabla u^n|} \right) \right) (x) + dt \left(\frac{\nabla d \cdot \nabla u^n}{|\nabla u^n|} \right) (x). \quad (6.4)$$

Cette relation (6.4) est bien une discrétisation de (6.1) car les deux derniers termes correspondent à une décomposition du terme $d \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$.

Soit $u^{n+1} \in H^1(\mathcal{D}, d)$ vérifiant (6.4), considérons une fonction test v dans $H^1(\mathcal{D}, d)$. On multiplie l'équation (6.4) par v et on intègre sur \mathcal{D} . On a alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} u^{n+1}(x)v(x) + dt \int_{\mathcal{D}} d(x) \frac{\nabla v(x) \cdot \nabla u^{n+1}(x)}{|\nabla u^n(x)|} dx \\ &= \int_{\mathcal{D}} u^n(x)v(x) dx + dt \alpha \int_{\mathcal{D}} d(x)v(x) dx - dt \int_{\mathcal{D}} \frac{\nabla d(x) \cdot \nabla u^n(x)}{|\nabla u^n(x)|} v(x) dx, \end{aligned}$$

Les termes de bord s'annulent ici à cause de la condition $\frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} = 0$.

La formulation variationnelle de notre problème (6.4) est donc de la forme :

$$\mathcal{A}(u^{n+1}, v) = \mathcal{L}(v), \quad (6.5)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u^{n+1}, v) &= \int_{\mathcal{D}} u^{n+1}(x)v(x) dx + dt \int_{\mathcal{D}} d(x) \frac{\nabla v(x) \cdot \nabla u^{n+1}(x)}{|\nabla u^n(x)|} dx, \\ \mathcal{L}(v) &= \int_{\mathcal{D}} u^n(x)v(x) dx + dt \alpha \int_{\mathcal{D}} d(x)v(x) dx - dt \int_{\mathcal{D}} \frac{\nabla d(x) \cdot \nabla u^n(x)}{|\nabla u^n(x)|} v(x) dx. \end{aligned}$$

6.1.2 Existence et unicité d'une solution

On rappelle maintenant le théorème suivant :

Théorème 6.1. (Lax-Milgram)

Soit V un espace de Hilbert réel, \mathcal{A} une forme bilinéaire, continue et coercive sur V , et \mathcal{L} une forme linéaire continue sur V . Alors il existe un unique élément u^{n+1} de V solution du problème variationnel (6.5).

Pour appliquer ce théorème à notre problème variationnel, on doit montrer que \mathcal{L} est linéaire et continue et que \mathcal{A} est bilinéaire, continue et coercive.

- Les propriétés de linéarité de \mathcal{L} et \mathcal{A} sont immédiates,
- Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v) &\leq \|u^n\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + dt \alpha \|d\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2} \\ &\quad + dt \|\nabla d\|_{L^2} \left\| \frac{\nabla u^n}{|\nabla u^n|} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq C \|v\|_{L^2} \leq C \|v\|_{H^1(\mathcal{D},d)}, \end{aligned}$$

car $\|\nabla d\|_{L^2} = 1$ puisque d est une fonction distance, $\|d\|_{L^\infty}$ est bornée puisque \mathcal{D} est borné et $\left\| \frac{\nabla u^n}{|\nabla u^n|} \right\|_{L^2} = 1$. La forme linéaire \mathcal{L} est donc continue.

- On suppose maintenant que $|\nabla u^n|(x) = 1 + \beta(x)$, où $\beta(x) \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Cette hypothèse paraît légitime car u^n est une fonction ligne de niveau que l'on renormalise très souvent de façon à assurer que u^n soit une fonction distance. Cependant, l'équation $|\nabla u| = 1$ n'est valable qu'à l'instant où on renormalise, elle peut donc varier légèrement entre deux redistanciations (*cf.* tableau 6.1).

n	0	1	2	3	4	5
$ \nabla u^n $	1	1.142	1.150	1.158	1.166	1.17

TAB. 6.1 – Exemples de valeurs numériques de $|\nabla u^n|$.

À l'aide de cette hypothèse, nous allons montrer que \mathcal{A} est continue et coercive. En utilisant, là aussi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u^{n+1}, v) &\leq \|u^{n+1}\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + dt C(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\mathcal{D},d)} \|u^{n+1}\|_{H^1(\mathcal{D},d)} \\ &\leq (1 + dt C(\varepsilon)) \|u^{n+1}\|_{H^1(\mathcal{D},d)} \|v\|_{H^1(\mathcal{D},d)}. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire \mathcal{A} est donc continue.

- La forme bilinéaire \mathcal{A} est aussi coercive puisque

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(w, w) &\geq C(\varepsilon) \left(\|w\|_{L^2}^2 + \int_{\mathcal{D}} |\nabla w|^2 d(x) dx \right) \\ &\geq C(\varepsilon) \|w\|_{H^1(\mathcal{D},d)}^2. \end{aligned}$$

On a donc existence et unicité d'une solution dans $H^1(\mathcal{D}, d)$ du problème variationnel (6.5), grâce au théorème de Lax-Milgram.

6.2 Implémentation

Approximation par éléments finis \mathbb{P}^1 Lagrange

On suppose que le domaine \mathcal{D} est de frontière polygonale par morceaux, entièrement recouvert par une triangulation T_h . On note p_i les sommets du maillage. On considère le

problème (6.1)-(6.3) écrit sous la forme variationnelle (6.5). L'espace variationnel discret s'écrit alors :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\mathcal{D}}) \text{ tel que pour tout } K \in T_h \text{ on ait : } v_h|_K \in \mathbb{P}^1\}, \text{ muni de la norme } L^2.$$

Proposition 6.2.

- Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun de sommets p_i du maillage.
- Une base de V_h est :

$$\omega_i \in V_h, \quad \omega_i(p_j) = \delta_{ij}.$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Ces fonctions sont les fonctions « chapeaux » et on a pour tout $v_h \in V_h$:

$$v_h = \sum_{i=1}^N v_h(p_i) \omega_i,$$

où N est le nombre de points dans la triangulation. Les $v_h(p_i)$ sont les degrés de liberté de v_h .

Dans la formulation continue de la section précédente, il faut bien sûr en plus de la discrétisation en temps, discrétiser en espace et résoudre un système linéaire. Nous avons préféré considérer ici le schéma explicite, car plus facile à implémenter pour une comparaison.

Comme dans le chapitre précédent, on fait ici nos calculs sur des maillages triangulaires. On considère u comme une fonction \mathbb{P}^1 , c'est-à-dire définie en chaque nœud du maillage. La fonction test v et la fonction distance d seront alors elles aussi \mathbb{P}^1 . Autrement dit, on va considérer des fonctions u_h, v_h et d_h approchant u, v et d telles que u_h, v_h et d_h appartiennent à l'espace d'approximation V_h .

Bien entendu, comme nous l'avons précisé précédemment, pour avoir une bonne approximation de la valeur de courbure de u et des gradients, c'est-à-dire pour avoir une valeur aux nœuds, nous aurions dû augmenter l'ordre des schémas en éléments finis c'est-à-dire considérer des variables \mathbb{P}^2 . Les gradients seraient alors calculés en chaque point du maillage. Nous ne l'avons pas fait ici parce que cela aurait considérablement augmenté le nombre de degrés de liberté et donc le temps de calcul. De plus, ces schémas \mathbb{P}^2 ne sont pas stables, il y a de nombreuses oscillations au bout de quelques pas de temps. Ceci est dû au fait que la variable ici ne satisfait pas le principe du maximum. On résout donc le problème variationnel discret à l'aide de FreeFem++⁵.

Cas de l'étoile

On souhaite ici construire une courbe à partir d'un nuage de points en forme d'étoile. Une étape de redistanciation a été effectuée tous les 100 pas de temps pour conserver la propriété $|\nabla u| = 1$ au cours du temps.

Le calcul a été effectué sur le maillage anisotrope précédent (cf. figure 5.6 à droite) qui contient 1552 sommets pour une taille de maille minimale $h_{\min} = 2.24 \times 10^{-3}$.

⁵<http://www.freefem.org/ff++/>

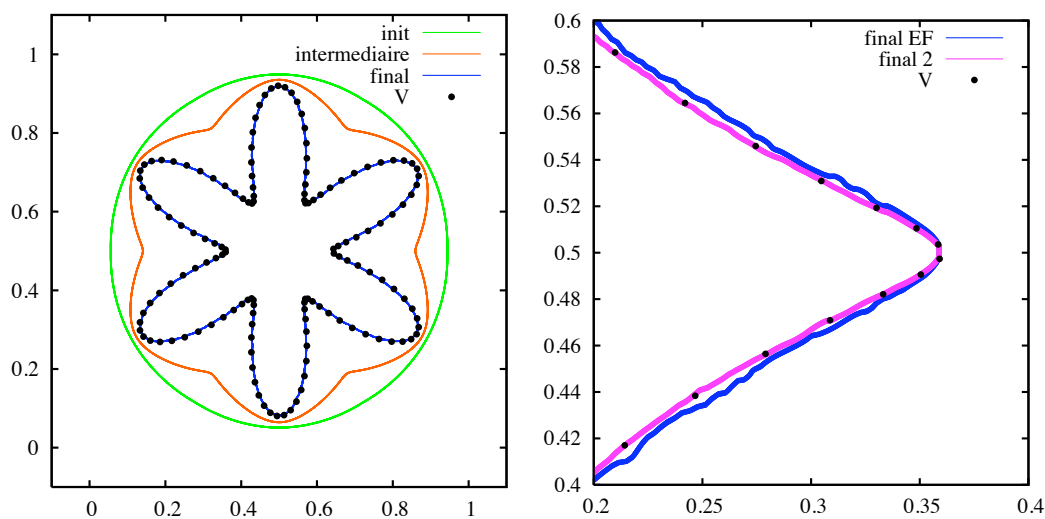


FIG. 6.1 – Construction d’une courbe en forme d’étoile par résolution d’un problème variationnel en éléments finis à différents temps (à gauche). Comparaison avec la méthode initiale « final 2 » à convergence (à droite).

Sur la figure 6.1 à gauche, on peut voir l’évolution de la ligne de niveau 0 de u à différents temps (initial, intermédiaire et final) ainsi qu’une partie des points de V (un point sur sept affiché pour une meilleure visualisation).

On peut également comparer le résultat obtenu avec notre méthode sur le même maillage (cf. figure 6.1 à droite). On voit que la courbe construite avec notre méthode (courbe « final 2 ») est plus régulière que celle obtenue avec la résolution du problème variationnel discret. De plus, dans le tableau 6.2, on peut voir la valeur de l’erreur L^2 de convergence dans les deux cas. Cette erreur correspond au maximum des valeurs de u aux points de V , obtenues par projection L^2 . On voit que notre approche est donc plus précise que celle faite par éléments finis.

méthodes	EF	notre méthode
erreur L^2	3.69×10^{-3}	2.20×10^{-3}

TAB. 6.2 – Comparaison de l’erreur L^2 de convergence entre les deux méthodes.

Dans le cas des éléments finis \mathbb{P}^1 , les dérivées d’ordre 1 sont calculées pour être des variables \mathbb{P}^0 , c’est-à-dire définies sur la surface d’un triangle tout entier. Les gradients et le terme de courbure de notre équation (6.1) ne sont donc pas approchés de manière assez précise. Ceci explique les différentes remarques que l’on peut faire sur les résultats obtenus sur la figure 6.1 et dans le tableau 6.2.

Cela justifie donc pleinement notre démarche d’approcher le mieux possible les dérivées en espace et de considérer nos schémas particuliers pour définir les termes de gradient et de courbure (Chapitre 2).

Cas de l'étoile avec bruit gaussien

Nous allons maintenant tester cette formulation éléments finis sur le nuage de points bruité précédent. On rappelle que le bruit imposé est un bruit gaussien de variance $2 \times d_{\min}$, où d_{\min} est la distance minimale entre les points de l'échantillon V . Comme précédemment, on considère la fonction u comme une variable \mathbb{P}^1 . Sur la figure 6.2, on peut voir une comparaison entre les lignes Γ obtenues à convergence en utilisant notre formulation et celle des éléments finis. La courbe bleue (correspondant à la méthode des éléments finis) n'est pas du tout régulière et est loin des points.

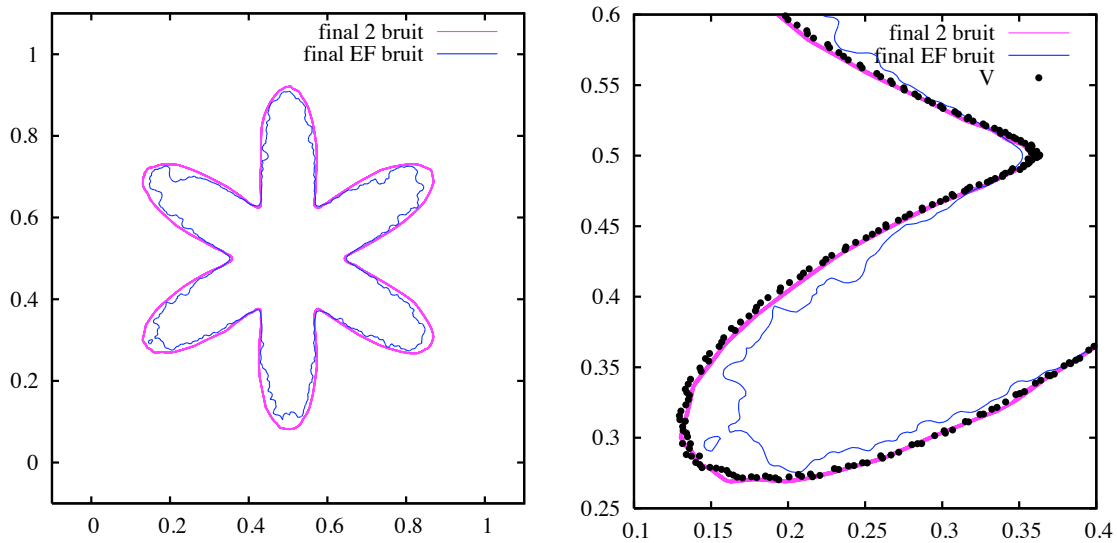


FIG. 6.2 – Comparaison entre la méthode des éléments finis et notre modèle à l'aide des courbes Γ obtenues pour un nuage de points bruité.

Cette formulation éléments finis ne gère donc pas bien les données bruitées.

Chapitre 7

Quelques exemples représentatifs

Comme mentionné dans l'introduction, il existe quatre grands types d'applications à la reconstruction de surface : la gestion et le suivi d'interfaces en simulations numériques, la reconstruction virtuelle du contour d'un organe en bio-médical, la redéfinition de modèles géométriques en ingénierie inverse et la visualisation de surfaces complexes provenant d'échantillons numérisés. Dans ce chapitre, nous allons illustrer quatre applications en deux et trois dimensions, parmi les classes représentatives énoncées dans l'introduction. En particulier, nous verrons, en deux dimensions, le cas de la cartographie et de l'océanographie. En trois dimensions, nous verrons la construction de la surface d'un cerveau, d'une tête de statue et d'une pièce de moteur. Les résultats en dimension trois restent encore préliminaires. Bien que la fonctionnelle (1.6) s'étende sans problème en dimension trois, tous les aspects numériques comme la construction de maillages adaptés, le calcul de la métrique pour cette adaptation et l'étape de renormalisation sont très spécifiques et complexes à implémenter.

7.1 Cartographie

Les images satellites nous permettent d'avoir une visualisation des frontières naturelles (montagnes, côtes) des pays qui composent notre planète. L'idée, dans l'exemple qui suit, est de capturer la frontière de la France à partir d'une donnée échantillonnée (nuage de points) provenant d'images satellitaires segmentées.

L'échantillon contient ici 2059 points uniformément distribués, correspondant à des pixels de l'image originale (de taille 460×461 pixels). Sur la figure 7.1, on peut voir à gauche la courbe Γ à convergence et à droite un zoom sur différentes lignes de niveau de u autour des points. Sur la figure 7.2, on peut voir le maillage qui a servi à la construction de la frontière de la France ainsi qu'un maillage construit à partir de la ligne de niveau zéro de u à convergence (*cf.* figure 7.1) pour servir de nouveau support de calcul. En particulier, ce maillage peut servir dans des calculs de météorologie pour le calcul de trajectoire des vents, le déplacement des anticyclones *etc.*

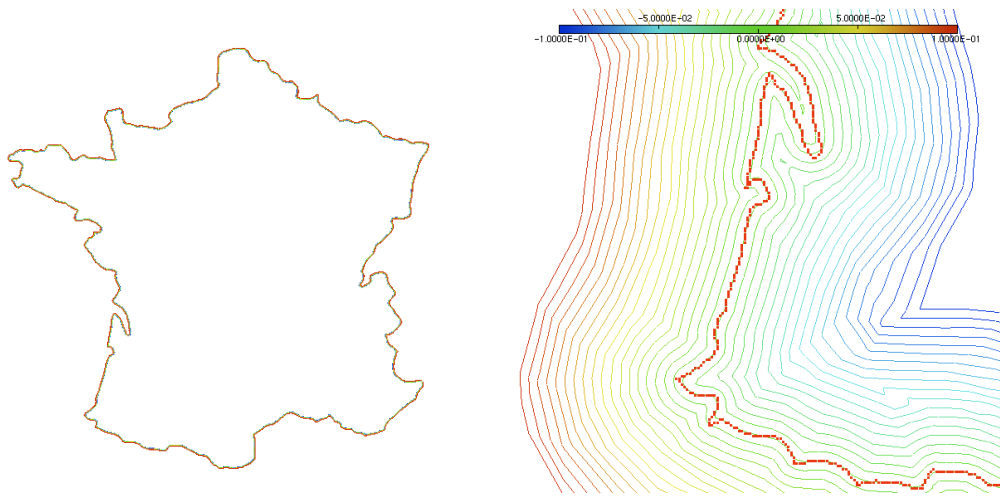


FIG. 7.1 – Cartographie de la France - Ligne de niveau 0 à convergence (à gauche) et zoom autour des points avec plusieurs lignes de niveau de u (à droite).

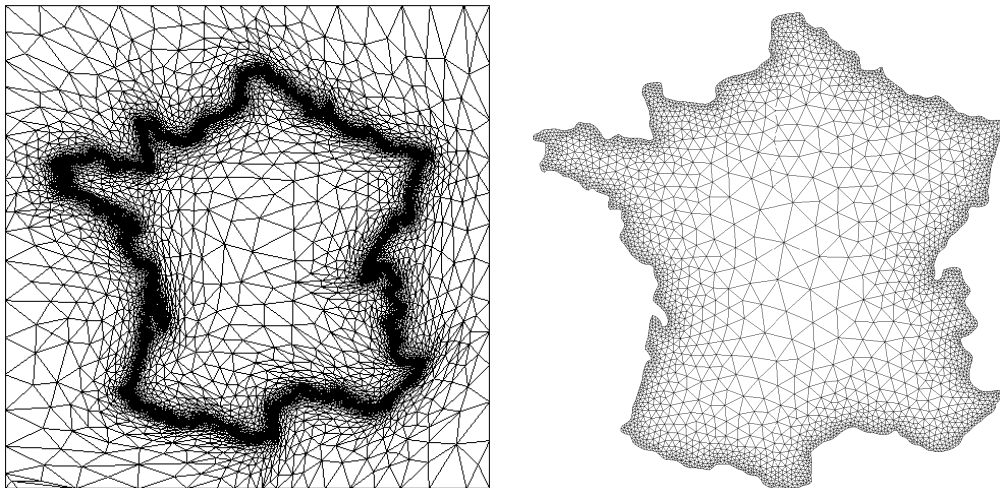


FIG. 7.2 – Maillage utilisé pour la reconstruction (à gauche) et maillage de calcul créé à partir de l'iso valeur 0 de u (à droite).

7.2 Océanographie

Dans cette section, nous avons reconstruit le contour de l'île de Pâques afin d'étudier des écoulements marins autour de cette île Chilienne.

Sur la figure 7.3, à gauche, on peut voir un ensemble de lignes de niveau de u à convergence ainsi que l'échantillon de points. Ce dernier contient 2195 points uniformément distribués, correspondant à des pixels de l'image initiale (de taille 1682×1189 pixels). Sur la figure 7.3, à droite, on peut voir le maillage sur lequel a été effectuée cette reconstruction.

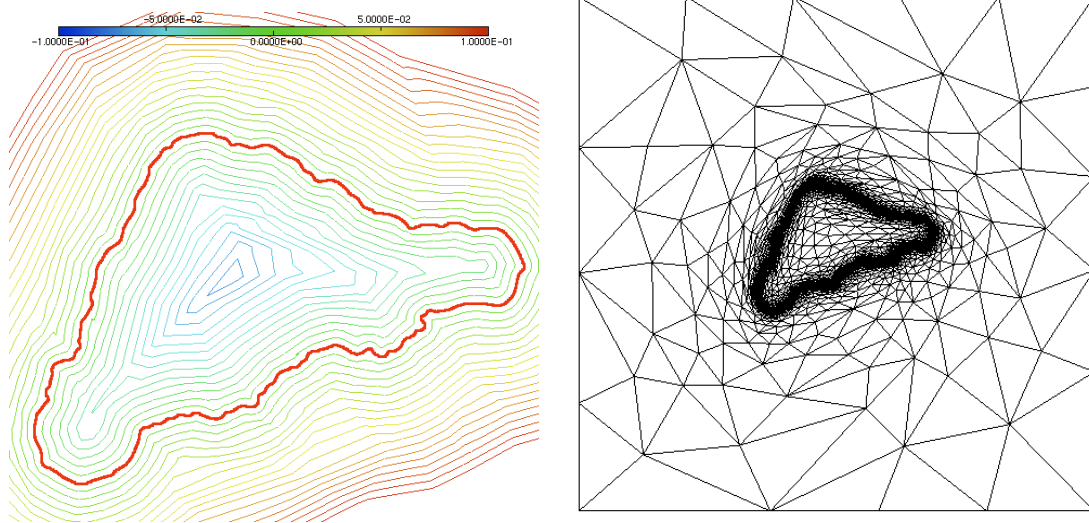


FIG. 7.3 – *Reconstruction de la frontière de l'île de Pâques. À gauche, différentes lignes de niveau de u à convergence et points de l'échantillon, à droite maillage utilisé pour la reconstruction.*

Application aux équations de Stokes

À partir de la courbe Γ obtenue, on peut construire le maillage du domaine extérieur à cette courbe pour discrétiser l'espace marin. Sur la figure 7.4 se trouvent : à gauche, le maillage de l'océan, au milieu les lignes de courant relatives à l'écoulement, et à droite la solution sur le maillage. L'écoulement fluide, très simplifié, est ici caractérisé par les équations de Stokes [BFM09] soumises aux conditions aux limites suivantes : un profil de vitesse imposé sur le bord inférieur, des conditions de glissement sur les bords latéraux et une condition de Neumann homogène sur le bord supérieur (condition de sortie libre). Cette modélisation de flux maritime peut être utilisée comme une initialisation dans un modèle de couplage en météorologie.

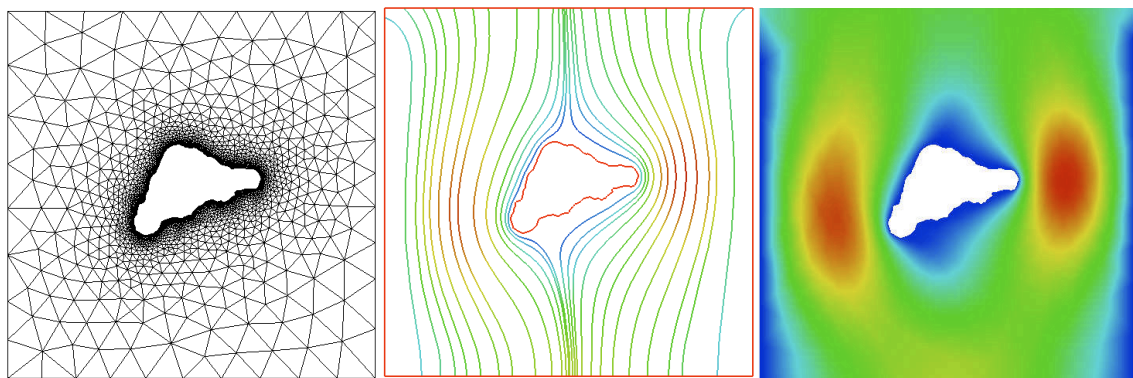


FIG. 7.4 – *Maillage de calcul pour l'écoulement, flux maritimes autour de l'île de Pâques modélisés à l'aide des équations de Stokes et champ de vitesse solution.*

7.3 Application bio-médicale

Le domaine bio-médical est une grande source d'applications. Nous allons ici reconstruire la surface d'un cerveau humain. Ceci peut avoir deux buts. Le premier peut consister à améliorer la précision des images provenant d'un examen médical appelé IRM (Image par Résonance Magnétique) et donc à faciliter la visualisation. Le deuxième peut consister à construire un nouveau support de calcul pour ensuite étudier, par exemple, la déformation des structures cérébrales en prélude d'une intervention chirurgicale ou pour étudier le développement de certaines pathologies.

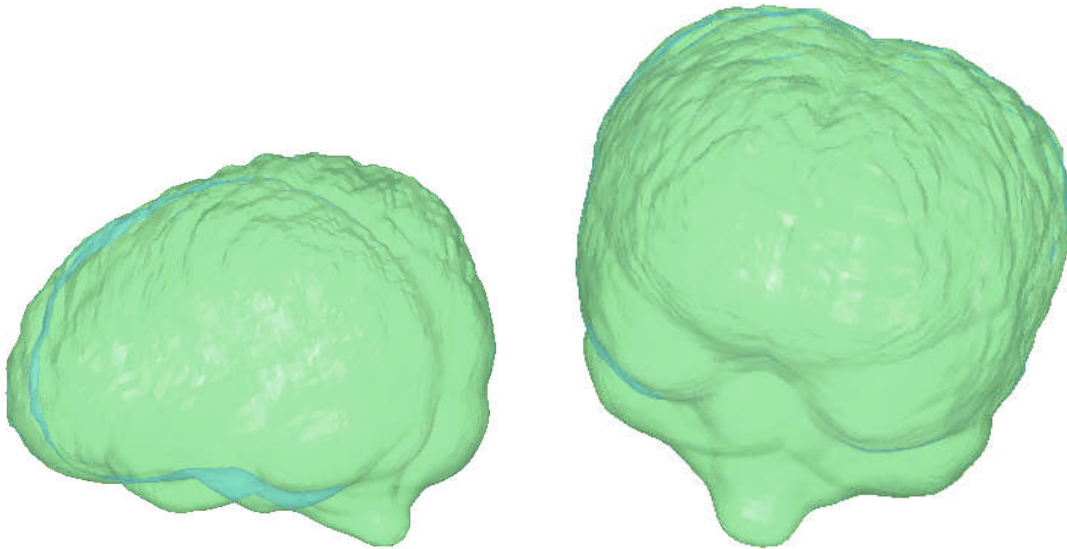


FIG. 7.5 – Construction de la surface d'un cerveau.

Le maillage de calcul (*cf.* figure 7.6) contient ici 1 355 559 points pour une taille de maille minimale de l'ordre de 5.58×10^{-4} et un échantillon V contenant 14 287 points.

Application à la déformation des structures cérébrales

Le modèle ainsi reconstruit va servir de support à un calcul d'élasticité pour estimer la déformation de structures cérébrales. Ce problème de modélisation est régi par une équation aux dérivées partielles qui modélise le comportement visco élastique non linéaire de ces structures. À cette EDP, on ajoute une condition d'incompressibilité et une équation aux dérivées ordinaires qui modélise l'évolution en temps de la déformation.

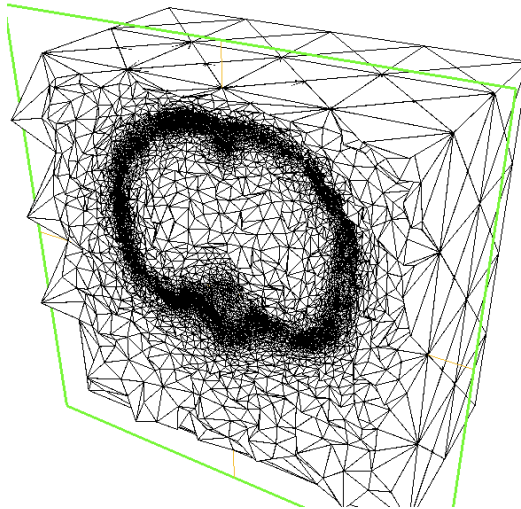


FIG. 7.6 – Coupe du maillage de calcul pour la reconstruction du cerveau

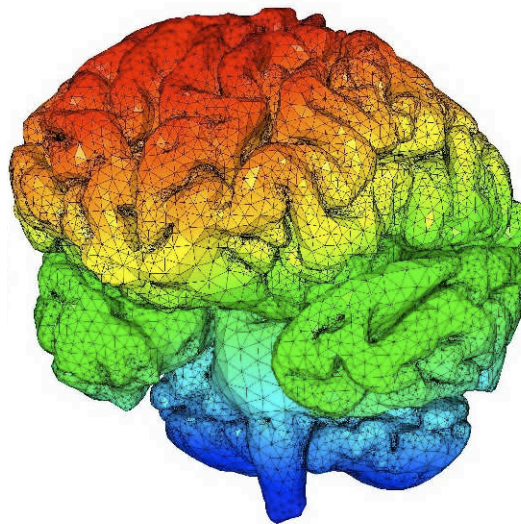


FIG. 7.7 – Champ de déformation (déplacement) des structures cérébrales.

7.4 Application graphique

Nous regardons ici le cas de la numérisation d'œuvres d'art et en particulier celui de la construction de la surface d'une tête de statue (*cf.* figure 7.9). Nous avons vu dans l'introduction que, dans le contexte de visites virtuelles de musées, on est amené à construire des modèles hiérarchiques de surface, de résolution différentes, afin d'adapter la représentation de l'objet à différentes échelles permettant ainsi d'optimiser la visualisation. En pratique, on souhaite que lorsque l'utilisateur s'approche virtuellement d'un objet (une statue par exemple), on substitue des modèles de plus en plus précis pour améliorer la qualité de la visualisation.

On s'intéresse ici à la reconstruction de la tête de la statue « igea »⁶ (cf figure 7.8). Le maillage en tétraèdres, utilisé pour la reconstruction, contient 621923 points.

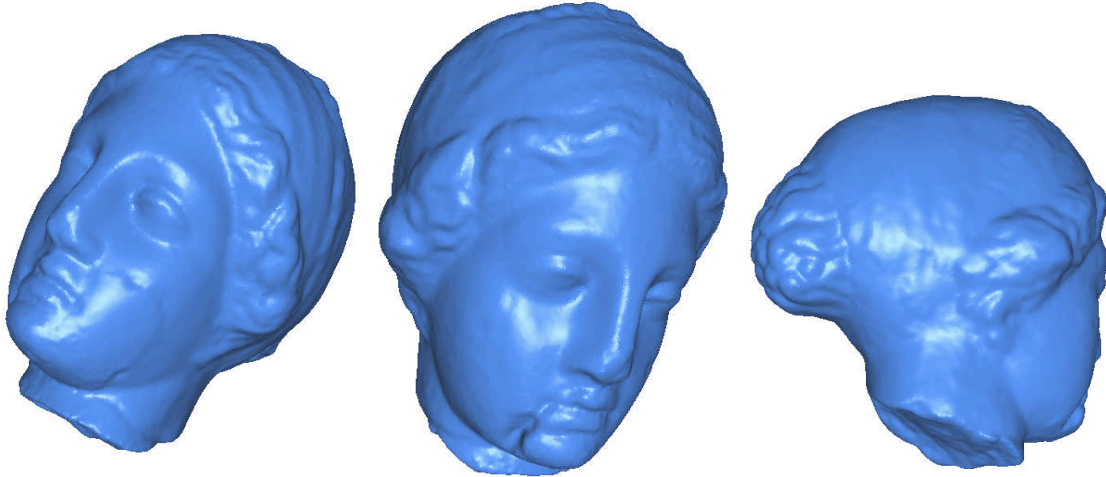


FIG. 7.8 – *Reconstruction d'une tête de statue.*

7.4.1 Application à la hiérarchie de modèles

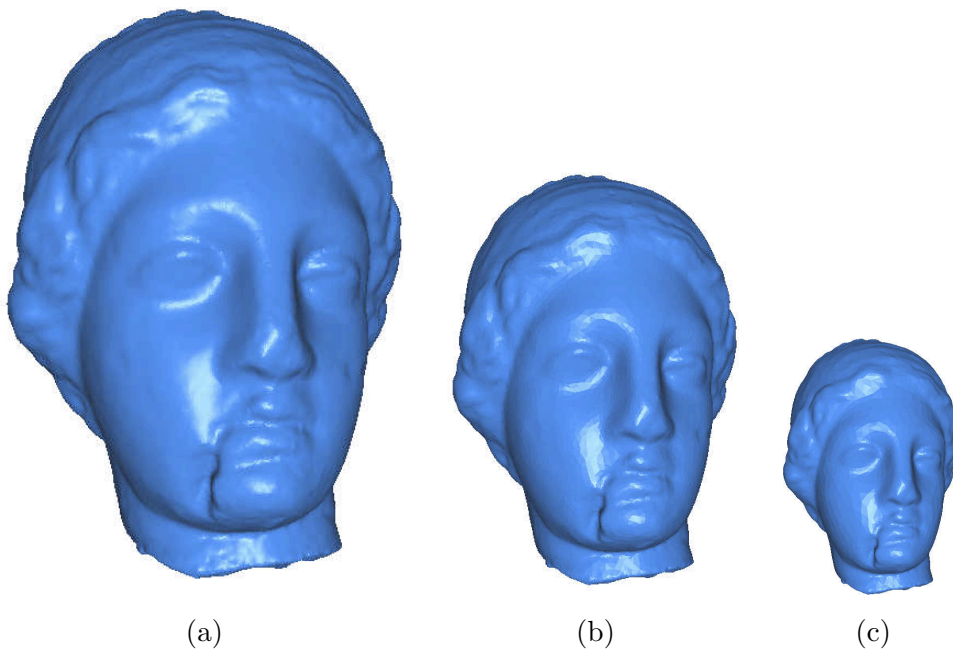


FIG. 7.9 – *Hiérarchie de modèles pour la tête d'une statue.*

⁶ donnée provenant de <http://www.cyberware.com/>

Pour une meilleure visualisation de la surface reconstruite, nous avons construit un maillage de cette iso-surface (*cf.* figures 7.9 et 7.10 (a)) qui contient 229 671 nœuds. Pour illustrer la hiérarchisation des surfaces à différentes échelles, nous avons construits des maillages dérafinés (*cf.* figures 7.9 et 7.10 (b) et (c)) qui contiennent respectivement 21 240 et 12 235 sommets, [Fre00]. Plus on se rapproche de la tête et plus le maillage doit être fin pour que la visualisation soit précise.

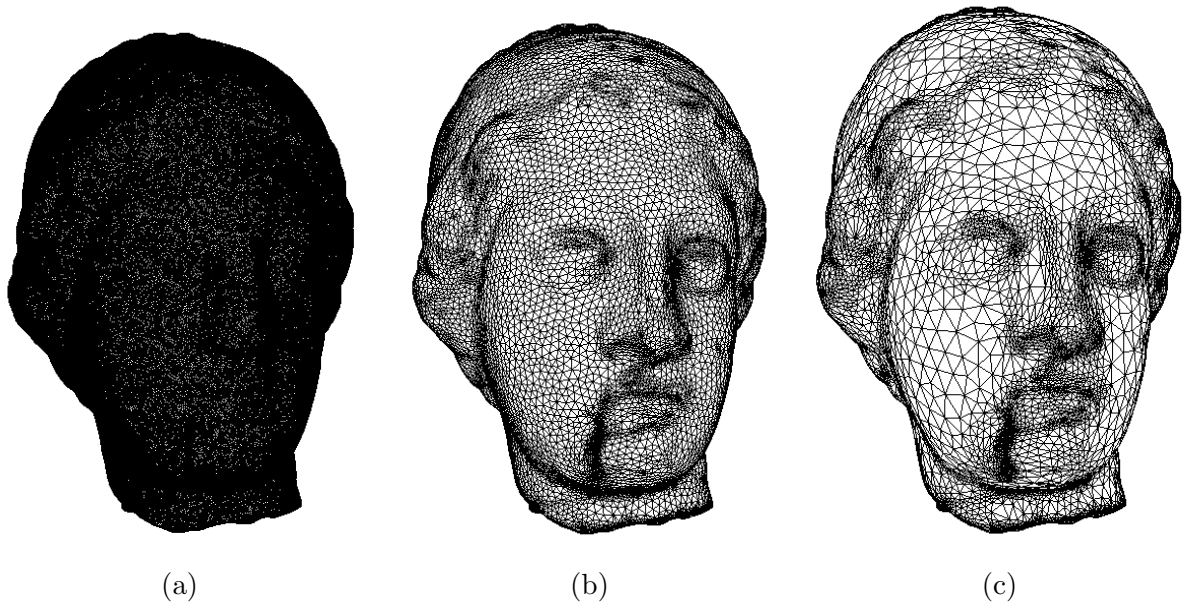


FIG. 7.10 – Maillages construits à la suite de la reconstruction pour la hiérarchie de modèles.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons proposé et mis en œuvre une méthode de reconstruction de surface à partir d'un ensemble de points. On rappelle ici le problème (P) que l'on a considéré :

$$\begin{array}{l}
 \text{(P)} \quad \left\| \begin{array}{l}
 \text{Étant donné un ensemble de points } V \subset \mathbb{R}^3, \text{ numérisé, éventuellement non} \\
 \text{uniformément distribués et/ou bruités (cf. figure 6), on souhaite construire} \\
 \text{une surface régulière } \Gamma \text{ passant au mieux par tous les points de } V, \text{ c'est-à-dire :} \\
 \\
 \text{Trouver une surface } \Gamma \text{ telle que, pour } \varepsilon > 0 \text{ petit fixé :} \\
 \\
 \forall x \in V, \quad d(x, \Gamma) \leq \varepsilon, \\
 \\
 \text{où } d(\cdot, \cdot) \text{ est une fonction de distance (non signée) positive.}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Nous avons choisi une représentation implicite avec une formulation lignes de niveau pour la surface Γ reconstruite. Autrement dit, nous avons considéré une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, telle que Γ soit un isocontour spécifique de cette fonction. Nous avons présumé ici que la surface cherchée Γ est le résultat de l'évolution d'une surface régulière définie de manière implicite par $\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^3, u(t, x) = 0\}$. Pour faire évoluer cette surface $\Gamma(t)$, nous avons considéré le problème suivant :

$$\left\| \begin{array}{l}
 \text{Trouver } u \in C^1(\mathbb{R}) \times C^2(\mathbb{R}^3) \text{ satisfaisant :} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d(x)(\alpha + \kappa(u)(t, x)), \\
 \\
 u(0, \cdot) = u_0,
 \end{array} \right. \quad (1)
 \end{array} \right.$$

où $d(x)$ est la fonction distance non signée de $x \in \mathbb{R}^3$ aux points de V , α est un paramètre réel qui dépend du signe du produit scalaire $\langle \nabla u, \nabla d \rangle$, et $\kappa(u)(t, x) = \left(\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) (t, x)$ est la courbure moyenne locale à la surface $\Gamma(t)$. Ce modèle d'évolution fait apparaître deux termes : un terme d'attraction (αd) et un terme de tension de surface ($d\kappa$) qui vont permettre à $\Gamma(t)$ d'avancer jusqu'à V tout en restant régulière. La condition initiale u_0 est une fonction de distance signée à une surface simple fermée et orientable, dont le volume qu'elle délimite englobe les points de V .

Cette équation aux dérivées partielles est en fait une équation de type Hamilton-Jacobi. Nous avons montré, dans le chapitre 1, à l'aide de la théorie de la viscosité, que ce problème (1) a une solution et qu'elle est unique.

Pour résoudre ce problème, nous avons introduit, dans le chapitre 2, des schémas spécifiques, basés sur une approximation, en chaque nœud de la triangulation considérée, des dérivées d'ordre un (gradient) et d'ordre deux (courbure moyenne) en espace. En particulier, nous avons étudié et implémenté un schéma explicite et un schéma implicite (pour accélérer la convergence). Nous avons montré que ces schémas sont consistants et stables en norme L^2 avec un condition restrictive sur le pas de temps, de type CFL, dans le cas du schéma explicite.

Nous avons utilisé, de plus, des triangulations anisotropes (triangles allongés) et adaptées, c'est-à-dire avec un grand nombre de points et d'éléments dans une bande autour de la ligne $d = 0$. Dans le chapitre 3, nous avons explicité le calcul d'un tenseur de métrique permettant la construction de ces maillages.

Dans le chapitre 4, nous avons évoqué brièvement les différentes difficultés numériques rencontrées. Ces points concernent la résolution d'un système linéaire non symétrique (dans le cas du schéma implicite), la structure de donnée associée à l'énumération des points voisins à un sommet i de la triangulation ainsi que l'implémentation de l'étape de renormalisation empêchant la dissipation numérique.

Dans les chapitres 5, 6 et 7, nous avons validé notre approche sur différents exemples et comparaisons (en particulier, nous avons comparé notre méthode à l'approche par éléments finis avec résolution d'un problème variationnel, et nos schémas au schéma classique à 5 points sur des grilles régulières). Parmi les exemples proposés, nous avons traité le cas où il y a de fortes variations de courbure localement autour des points, le cas de données bruitées, lorsque l'échantillon contient plusieurs composantes connexes et lorsque la géométrie de l'objet que l'on souhaite reconstruire contient des singularités.

Nous avons vu que nous pouvions appliquer notre approche à des exemples plus représentatifs (biomédical, graphique et ingénierie inverse). Les résultats obtenus sont très satisfaisants et permettent d'observer que l'on peut utiliser notre approche sur tout type de données.

Perspectives

Ce travail a mis en avant certains problèmes encore non résolus. Les perspectives de recherche sont nombreuses.

- Dans le chapitre 2, nous avons vu que les schémas utilisés sont consistants et stables en norme L^2 . Cependant, cela ne nous permet pas d'affirmer qu'ils sont convergents (car non linéaires), le théorème de Lax-Richtmyer ne s'appliquant pas ici. Nous ne pouvons pas non plus appliquer la théorie de Barles [Bar93] puisque nos schémas ne sont pas monotones. Il serait donc intéressant de se pencher sur ce résultat.

- Nous avons vu que l'étape de renormalisation de la fonction u était numériquement assez lourde à implémenter, surtout en dimension trois. Pour faciliter cette implémentation, nous avons pensé à introduire la condition $|\nabla u| = 1$ comme un terme de pénalisation, dans l'expression de la fonctionnelle d'énergie du problème de minimisation associée à notre problème d'évolution. Cette pénalisation peut prendre plusieurs formes. En particulier, elle peut s'écrire :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathcal{D}} (|\nabla u|^2 - 1)^2 \quad \text{ou bien} \quad \varepsilon \int_{\mathcal{D}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (|\nabla u|^2 - 1)\right).$$

Nous avons tenté d'implémenter ces contraintes mais cela n'a pas donné de résultats satisfaisants pour le moment. Cependant, nous pensons toujours que cela peut être efficace. Ces pénalisations s'écrivant sous forme d'intégrales, cela paraît sans doute plus facile de les utiliser avec la méthode des éléments finis et en particulier de les intégrer dans une formulation variationnelle.

- Dans le chapitre 6, nous avons exprimé notre problème de construction de courbe sous forme variationnelle pour ensuite le résoudre par une formulation en éléments finis triangulaires. Nous avons montré qu'il y avait existence et unicité de la solution au problème variationnel mais nous n'avons pas montré que le schéma éléments finis convergeait. On pourrait aussi faire des estimations d'erreur.
- Le problème de reconstruction de surface n'est pas un problème dicté par une application précise. Comme nous l'avons vu dans l'introduction et dans le chapitre 7, il y a beaucoup de possibilités. Le domaine bio-médical est une grande source d'applications, en partie grâce à l'imagerie médicale. On peut donc penser à reconstruire la surface de n'importe quel organe pour étudier, par exemple après reconstruction, l'écoulement sanguin, la propagation de l'air dans les poumons, la déformation d'organes victimes de certaines pathologies *etc.*

Troisième partie

Annexe

Annexe : Calculs coordonnées barycentriques

Les fonctions coordonnées barycentriques sont calculées de telle sorte que :
 Pour tout point A_i de l'élément que l'on considère, $\omega_i(A_i) = 1$, $\omega_i(A_j) = 0$ pour $i \neq j$ et donc $\sum_i \omega_i = 1$. Sont présentés ici les calculs des ω_i dans un triangle et dans un carré.

1 Dans le cas des triangles

Soit M un point du plan, de coordonnées (x, y) . On note (x_i, y_i) les coordonnées des points A_i du triangle K que l'on considère. On cherche donc les ω_i ($i = 1, 2, 3$) solutions du système suivant :

$$(S) \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 = x \\ \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 = y \end{cases}$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode de Cramer :

$$\omega_1 = \frac{1}{\det(S)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(S)} (x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + x_2 y_3 - y_2 x_3)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\det(S)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(S)} (x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + x_3 y_1 + x_1 y_3)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\det(S)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(S)} (x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

On a alors, avec $\det(S) = 2 \text{aire}(T)$:

$$\nabla \omega_1 = \frac{1}{2 \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} \quad \nabla \omega_2 = \frac{1}{2 \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} \quad \nabla \omega_3 = \frac{1}{2 \text{aire}(T)} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

2 Dans le cas des carrés

Soit R un carré de sommets A_i et de côté h et soient (x_i, y_i) les coordonnées du point A_i . Les coordonnées barycentriques et leur gradient sont calculés de la façon suivante :

$$\omega_1(x, y) = \omega_{R, A_1}(x, y) = \frac{1}{h^2} (x - x_2)(y - y_4)$$

$$\omega_2(x, y) = \omega_{R, A_2}(x, y) = -\frac{1}{h^2}(x - x_1)(y - y_1)$$

$$\omega_3(x, y) = \omega_{R, A_3}(x, y) = \frac{1}{h^2}(x - x_1)(y - y_1)$$

$$\omega_4(x, y) = \omega_{R, A_4}(x, y) = -\frac{1}{h^2}(x - x_2)(y - y_4)$$

Alors,

$$\nabla\omega_1(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y - y_4}{x - x_2} \\ \frac{h^2}{h^2} \end{pmatrix} \quad \nabla\omega_2(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y - y_1}{x - x_1} \\ -\frac{h^2}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\omega_3(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y - y_1}{x - x_1} \\ \frac{h^2}{h^2} \end{pmatrix} \quad \nabla\omega_4(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y - y_4}{x - x_2} \\ -\frac{h^2}{h^2} \end{pmatrix}$$

$\oint_R \nabla\omega_{R,i,j} = \oint_R \nabla\omega_{R,i,j}$ car $\nabla\omega_{R,i,j}$ dépend de x et de y contrairement au cas des triangles où les gradients des coordonnées barycentriques sont constants.

$$\text{Alors, } \oint_R \nabla\omega_1 = \frac{1}{h^2} \oint_R \begin{pmatrix} y_1 - y_4 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \times |R| \begin{pmatrix} h \int_0^h (y - h) dy \\ h \int_0^h (x - h) dx \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{h^2} \times \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} h \int_0^h (y - h) dy \\ h \int_0^h (x - h) dx \end{pmatrix}$$

$$\oint_R \nabla\omega_1 = \begin{pmatrix} \left[\frac{(y - h)^2}{2} \right]_0^h \\ \left[\frac{(x - h)^2}{2} \right]_0^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2h} \\ -\frac{1}{2h} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

Table des figures

1	<i>Exemples de nuages de points en dimensions 2 et 3.</i>	1
2	<i>Interface entre deux fluides [BFM09].</i>	2
3	<i>Coupe IRM d'un crâne (à gauche) et maillage d'un cerveau dont les points proviennent d'une image IRM (à droite).</i>	3
4	<i>Maillages géométriques de pièces de moteur.</i>	3
5	<i>Maillage de statue, modèles hiérarchiques.</i>	4
6	<i>Interpolation affine par morceaux (à gauche) / approximation régulière (à droite) du nuage de points.</i>	4
7	<i>Fonction de distance non signée à une étoile définie de manière analytique.</i>	6
8	<i>Bande de largeur 2ε autour de quelques points de V.</i>	6
9	<i>Graphe d'une surface paramétrée où $x = \cos(r) \cos(s)$, $y = \cos(r) \sin(s)$ et $z = \sin(r)$.</i>	8
10	<i>Graphe de la surface explicite $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$.</i>	8
11	<i>Représentation implicite d'une sphère et des lignes d'isovaleur associées.</i>	9
12	<i>Exemple de courbe de Bézier avec points de contrôle et ligne polygonale joignant les points.</i>	10
13	<i>Exemple de reconstruction par la méthode de Delaunay pour différents nombres de points [DZM07].</i>	11
14	<i>Exemple de reconstruction par la méthode des contours actifs.</i>	12
15	<i>Exemple de maillage utilisé, avec adaptation anisotrope autour des points de V.</i>	13
1.1	<i>Déformation de la fonction u.</i>	24
1.2	<i>Algorithme général d'évolution de la courbe $\Gamma(t)$.</i>	26
2.1	<i>Partie de la double boule du sommet i.</i>	38
2.2	<i>Stencil du laplacien en (i, j) et coefficients associés.</i>	39
2.3	<i>Cas de la dimension 1 : le stencil classique vs. notre stencil.</i>	43
2.4	<i>Configuration de deux triangles partageant l'arête (i, i_2).</i>	48
3.1	<i>Comparaison entre l'adaptation anisotrope (à gauche) et l'adaptation isotrope (à droite).</i>	64
3.2	<i>Métrie anisotrope vs. métrie isotrope en dimension 2.</i>	65
3.3	<i>Schéma général d'adaptation de maillage.</i>	66
3.4	<i>Adaptation anisotrope vs. adaptation isotrope.</i>	68
3.5	<i>Inversion d'arête.</i>	69

3.6	<i>Schéma itératif pour adapter le maillage autour des points de l'échantillon. En haut à gauche : maillage initial, en haut à droite : fonction distance aux points de V, en bas à gauche : première adaptation, en bas à droite : adaptation finale.</i>	69
3.7	<i>Impact du tenseur de métrique anisotrope (à gauche) sur l'adaptation de maillage (raffinement isotrope à droite).</i>	70
3.8	<i>Zoom sur la ligne de niveau 0 de u sur maillage anisotrope, comparaison avec un maillage isotrope plus grossier.</i>	71
3.9	<i>Approximation affine Γ_h de la courbe Γ sur des triangles intersectés (isotrope ou anisotrope).</i>	71
4.1	<i>Définition d'un triangle K et de ses trois voisins K_i.</i>	74
4.2	<i>Exemple de calcul de distance à la courbe $\Gamma(t)$.</i>	76
4.3	<i>Schéma général de l'implémentation de notre problème.</i>	78
5.1	<i>Courbe Γ à convergence sur les cinq maillages avec V contenant 10 points.</i>	80
5.2	<i>Lignes de niveau de u à convergence sur deux maillages : $reg1$ (à gauche) et $reg4$ (à droite) avec V contenant 100 points.</i>	81
5.3	<i>Courbe Γ à convergence sur le maillage le plus fin $reg1$, avec V contenant 1000 points.</i>	82
5.4	<i>Exemples de grille cartésienne en dimension deux (à gauche) et de maillage triangulaire régulier où les triangles sont des carrés coupés en deux (à droite).</i>	83
5.5	<i>Fonction distance à l'étoile.</i>	84
5.6	<i>Maillages isotrope et anisotrope adaptés autour de la ligne $d = 0$ et zoom avec les points de V.</i>	85
5.7	<i>Courbe $\Gamma(t)$ à différents temps (cas du maillage anisotrope) et un point sur sept de V (à gauche), zoom autour des points de l'étoile avec différentes lignes de niveau de u (à droite).</i>	86
5.8	<i>Loi normale, méthode de Box Muller.</i>	87
5.9	<i>Comparaison entre u (à gauche) et d (non signée, à droite) pour V bruité (en haut) et comparaison entre u à convergence dans les cas bruité et non bruité (en bas).</i>	88
5.10	<i>Courbe $\Gamma(t)$ pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.</i>	89
5.11	<i>Courbe $\Gamma(t)$ à différents temps et un point sur sept de l'échantillon avec condition initiale n'englobant pas les points.</i>	90
5.12	<i>Maillage anisotrope adapté autour de la ligne $d = 0$ dans le cas du carré.</i>	91
5.13	<i>Cas du carré : zoom sur un coin pour un échantillon qui contient 80 points (en haut à gauche), 200 points (en haut à droite), 400 points (en bas à gauche) et 800 points (en bas à droite).</i>	92
5.14	<i>Maillage de calcul et évolution de la courbe Γ à différents temps (en haut), zoom autour de la lettre « S » et plusieurs lignes de niveau de u à convergence avec les points de V (en bas).</i>	93
6.1	<i>Construction d'une courbe en forme d'étoile par résolution d'un problème variationnel en éléments finis à différents temps (à gauche). Comparaison avec la méthode initiale « final 2 » à convergence (à droite).</i>	99
6.2	<i>Comparaison entre la méthode des éléments finis et notre modèle à l'aide des courbes Γ obtenues pour un nuage de points bruité.</i>	100

7.1	<i>Cartographie de la France - Ligne de niveau 0 à convergence (à gauche) et zoom autour des points avec plusieurs lignes de niveau de u (à droite).</i>	102
7.2	<i>Maillage utilisé pour la reconstruction (à gauche) et maillage de calcul créé à partir de l'iso valeur 0 de u (à droite).</i>	102
7.3	<i>Reconstruction de la frontière de l'île de Pâques. À gauche, différentes lignes de niveau de u à convergence et points de l'échantillon, à droite maillage utilisé pour la reconstruction.</i>	103
7.4	<i>Maillage de calcul pour l'écoulement, flux maritimes autour de l'île de Pâques modélisés à l'aide des équations de Stokes et champ de vitesse solution.</i>	103
7.5	<i>Construction de la surface d'un cerveau.</i>	104
7.6	<i>Coupe du maillage de calcul pour la reconstruction du cerveau</i>	105
7.7	<i>Champ de déformation (déplacement) des structures cérébrales.</i>	105
7.8	<i>Reconstruction d'une tête de statue.</i>	106
7.9	<i>Hiérarchie de modèles pour la tête d'une statue.</i>	106
7.10	<i>Maillages construits à la suite de la reconstruction pour la hiérarchie de modèles.</i>	107

Bibliographie

Lignes de niveaux et applications

- [AGJ05] G. Allaire, F. De Gournay, and F. Jouve. Optimisation de structures par la méthode des lignes de niveaux. *Actes du 7ème colloque national en calcul des structures, Giens, 2* :229–234, mai 2005.
- [AJT02] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. A level set method for shape optimization. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 334 :1–6, 2002.
- [AJT03] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. Optimisation de formes par la méthode des lignes de niveaux. *ESAIM Proc.*, CANUM, 2003.
- [AS95a] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *J. Comp. Phys.*, 118 :269–277, 1995.
- [AS95b] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. A unified level set approach to etching, deposition and lithography, I : Algorithms and two-dimensional simulations. *J. Comp. Phys.*, 120 :128–144, 1995.
- [AS95c] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. A unified level set approach to etching, deposition and lithography, II : Three-dimensional simulations. *J. Comp. Phys.*, 122 :348–366, 1995.
- [AS97] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. A unified level set approach to etching, deposition and lithography, III : Complex simulations and multiple effects. *J. Comp. Phys.*, 138 :193–223, 1997.
- [BTMF05] R. Bridson, J. Teran, N. Molino, and R. Fedkiw. Adaptive physics based tetrahedral mesh generation using level sets. *Engineering with Computers*, 21 :2–18, 2005.
- [CDF08] A. Claisse, V. Ducrot, and P. Frey. Levelset and mesh adaptation. *DCDS-A*, 23(1-2) :165–183, 2008.
- [Cho93] D.L. Chopp. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *J. Comp. Phys.*, 106 :77–91, 1993.
- [DD01] K. Deckelnick and G. Dziuk. Convergence of numerical schemes for the approximation of level set solutions to mean curvature flow. *Numerical Methods for Viscosity Solutions and Applications*, pages 77–93, 2001.
- [GGV05] C. Gout, C. Le Guyader, and L. Vese. Segmentation under geometrical conditions using geodesic active contours and interpolation using level set methods. *Numerical algorithms*, 39 :155–173, 2005.

- [ML06] P. Macklin and J. Lowengrub. An improved geometry-aware curvature discretization for level set methods : Application to tumor growth. *J. Comp. Physics*, (215) :392–401, 2006.
- [MS95] R. Malladi and J.A. Sethian. Image processing via level set curvature flow. *Proc. Natl. Acad. of Sci.*, 92 :7046–7050, 1995.
- [MS97] R. Malladi and J.A. Sethian. Level set methods for curvature flow, image enhancement and shape recovery in medical images. *Proc. of Conf. on Visualization and mathematics, June, 1995*, 1997.
- [OF03] S. Osher and R. Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Springer-Verlag, New York, 153, Applied mathematical, 2003.
- [OP03] S. Osher and N. Paragios. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*. Springer, 2003.
- [PD97] N. Paragios and R. Deriche. A PDE-based level set approach for detection and tracking of moving objects. *INRIA Preprint 3173*, 1997.
- [PMO⁺99] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H.K. Zhao, and M. Kang. A PDE based fast local level set method. *J. Comp. Phys.*, 155 :410–438, 1999.
- [Set96] J.A. Sethian. *Level set methods : evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, Computer vision and materials sciences, First Edition*. Cambridge University Press, 1996.
- [Set97] J.A. Sethian. Tracking interfaces with level sets. *American Scientist*, pages 254–263, 1997.
- [Set99] J.A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods*. Cambridge University Press, 1999.
- [SFSO98] M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka, and S. Osher. An improved level set method for incompressible two-phase flows. *Computers and fluids*, 27 :663–680, 1998.
- [Sme03] P. Smereka. Semi-implicit level set methods for curvature and surface diffusion motion. *J. Comp. Phys.*, 19 :439–456, 2003.
- [SSO94] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set method for computing solutions to incompressible two-phase flows. *J. Comp. Phys*, 114 :146–159, 1994.
- [Whi98] R.T. Whitaker. A level set approach to 3D reconstruction from range data. *International Journal of computer vision*, 29 (3) :203–231, 1998.
- [ZCMO96] H.K. Zhao, T. Chan, B. Merriman, and S. Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *J. Comp. Phys.*, 127 :179–195, 1996.

Reconstruction de courbes / surfaces

- [AAM87] D. Apprato, R. Arcangéli, and R. Manzanilla. Sur la construction de surfaces de classe C^k tirées d'un grand nombre de données de Lagrange. *M²AN*, 21 :529–2555, 1987.
- [ABCO⁺01] M. Alexa, J. Behr, D. Cohen-Or, S. Fleishman, D. Levin, and C. T. Silva. Point set surfaces. *Proc. of Visualization, IEEE Visualization*, 2001.

- [ABK98] N. Amenla, M. Bern, and M. Kamvysselis. A new Voronoï based surface reconstruction algorithm. *ACM SIGGRAPH proc.*, 1998.
- [ACA07] R. Allègre, R. Chaine, and S. Akkouche. A flexible framework for surface reconstruction from large point sets. *Computers & Graphics*, 31 :190–204, 2007.
- [AG00] D. Apprato and C. Gout. A result about scale transformation families in approximation : application to surface fitting from rapidly varying data. *Numerical Algorithms*, 23 :263–279, 2000.
- [Att97] D. Attali. r -regular shape reconstruction from unorganized points. *ACM Symp. Computational Geometry*, pages 248–253, 1997.
- [BB97] F. Bernardini and C. Bajaj. Sampling and reconstructing manifolds using alpha-shapes. *Proc. 9th Canadian Conf. Computational Geometry*, pages 193–198, 1997.
- [BC00] J.D. Boissonnat and F. Cazals. Smooth shape reconstruction via natural neighbor interpolation of distance functions. *ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 223–232, 2000.
- [CBC⁺01] J.C. Carr, R.K. Beatson, J.B. Cherrie, T.J. Mitchell, W.R. Fright, B.C. McCallum, and T.R. Evans. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions. *ACM SIGGRAPH 2001, Los Angeles, CA*, pages 67–76, 12-17 August 2001.
- [CCCD93] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours in image processing. *Numer. Math.*, 66 :1–31, 1993.
- [CF08] A. Claisse and P. Frey. Construction d’une courbe régulière d’approximation d’un ensemble de points. *C. R. Acad. Sci., Ser.I*, 346 :1017 – 1022, 2008.
- [CF09a] A. Claisse and P. Frey. On numerical schemes for solving a nonlinear PDE with a mean curvature term on triangular meshes. *soumis, M²AN*, 2009.
- [CF09b] A. Claisse and P. Frey. Level set driven smooth curve approximation from unorganized or noisy points set. *ESAIM : Proceedings*, 27 :254–271, May 2009.
- [CKS95] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *Proc. fifth IEEE Internation conference on computer vision, ICCV 95* :694–699, Cambridge, June 1995.
- [CsD04] D. Cohen-steiner and F. Da. A greedy Delaunay-based surface reconstruction algorithm. *The visual computer*, 20 :4–16, 2004.
- [DS06] T. Dey and J. Sun. Normal and feature approximations from noisy point clouds. *Proc. FST & TCS, Lecture Notes in Computer Science, Springer*, 4337 :21–32, 2006.
- [Dye03] R. Dyer. Surface reconstruction. *APMA 990, Final project*, 2003.
- [DYQS04] Y. Duan, L. Yang, H. Qin, and D. Samaras. Shape reconstruction from 3D and 2D data using PDE-based deformable surfaces. *Proc. European Conference on Computer Vision*, 3 :238–251, 2004.
- [DZM07] R. Dyer, H. Zhang, and T. Moeller. Delaunay mesh construction. *Proc. of Eurographics Symposium on Geometry Processing (SGP)*, pages 273–282, 2007.

- [HdRD⁺92] H. Hoppe, T. de Rose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Surface reconstruction from unorganized points. *Proc. Siggraph*, pages 71–78, 1992.
- [HK06] A. Hornung and L. Kobbelt. Robust reconstruction of watertight 3D models from non-uniformly sampled point clouds without normal information. *Proc. Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pages 41–50, 2006.
- [KWT88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *Internation J. of. Comp. Vision*, pages 321–331, 1988.
- [LC87] W.E. Lorensen and H.E. Cline. Marching cubes : a high resolution 3d surface construction algorithm. *Computer Graphics*, 21 :163–169, 1987.
- [LMT06] J. Liang, T. McInerney, and D. Terzopoulos. United snakes. *Medical image analysis*, 10 :215–233, 2006.
- [LTGS95] C.T. Lim, G.M. Turkiyyah, M.A. Ganter, and D.W. Storti. Implicit reconstruction of solids from cloud point sets. In *SMA '95 : Proceedings of the third ACM symposium on Solid modeling and applications*, pages 393–402, New York, NY, USA, 1995. ACM.
- [LZJ⁺05] D. Lu, H. Zhao, M. Jiang, S. Zhou, and T. Zhou. A surface reconstruction method for highly noisy point clouds. *Proc. Variational, geometric, and level set methods in computer vision*, 3752 :283–294, 2005.
- [MM97] R. Mencl and H. Müller. Interpolation and approximation of surfaces from three-dimensional scattered data points. *Scientific Visualization*, pages 223–232, 1997.
- [MPST04] M. Marcon, L. Piccarreta, A. Sarti, and S. Tubaro. Fast point-cloud wrapping through level-set evolution. *Proc. 1st Conf. Visual Media Production*, pages 119–125, 2004.
- [NBM05] O. Nilsson, D. Breen, and K. Museth. Surface reconstruction via contour metamorphosis : an eulerian approach with lagrangian particle tracking. *Proc. IEEE Visualization*, 52 :407–414, 2005.
- [SBS06] O. Schall, A. Belyaev, and H.P. Seidel. Adaptive Fourier-based surface reconstruction. In M.-S. Kim and K. Shimada, editors, *Geometric Modeling and Processing*, volume 4077 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 34–44, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 2006. Springer.
- [SK04] Y. Shi and W.C. Karl. Shape reconstruction from unorganized points with a data-driven level set method. *Proc. IEEE Int'l Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 13–16, 2004.
- [SSH05] I. Semenova, V. Savchenko, and I. Hagiwara. Reconstruction of shapes based on normals analysis. *Proc. GraphiCon*, pages 1–7, 2005.
- [TO99] G. Turk and J. F. O'Brien. Shape transformation using variational implicit functions. *ACM SIGGRAPH, Conference proc. Los Angeles, CA*, 1999.
- [YDC05] Z. Yang, J. Deng, and F. Chen. Fitting unorganized point clouds with active implicit B-spline curves. *Visual Comput.*, 21 :831–839, 2005.
- [YJ07] H. Yang and B. Jüttler. Fitting implicitly defined curves to unorganized points with sharp features. *Curve and Surface Design : Avignon 2006*, pages 274–283, 2007.

- [YJ08] H. Yang and B. Jüttler. Evolution of T-spline level sets for meshing non-uniformly sampled and incomplete data. *Visual Comput*, 24 :435–448, 2008.
- [ZO02] H. Zhao and S. Osher. Visualization, analysis and shape reconstruction of unorganised data sets, in geometric level set methods in imaging. *Vision and Graphics*, S.Osher and N. Paragios eds, Springer, 2002.
- [ZOMK00] H.K. Zhao, S. Osher, B. Merriman, and M. Kang. Implicit and non-parametric shape reconstruction from unorganized data using a variational level set method. *Comput. Vision and Image Understanding*, 80 :295–314, 2000.

Équations de Hamilton-Jacobi

- [AA00] S. Augoula and R. Abgrall. High order numerical discretization for Hamilton-Jacobi equations on triangular meshes. *J. Comp. Phys.*, 15 :197–229, 2000.
- [Abg94] R. Abgrall. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes : analysis and implementation. *J. Comp. Phys.*, 114 :45–58, 1994.
- [Abg96] R. Abgrall. Numerical discretization of the first-order Hamilton-Jacobi equation on triangular meshes. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49 :1339–1373, 1996.
- [Bar85] G. Barles. Remarques sur des résultats d’existence pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *Annales de l’IHP, Analyse non linéaire*, 2 :21–32, 1985.
- [Bar93] G. Barles. Discontinuous viscosity solution of first-order Hamilton-Jacobi equations : a guided visit. *Non-linear analysis : Theory, methods and applications*, 20 :1123–1134, 1993.
- [BS91] G. Barles and P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic analysis*, 4 :271–283, 1991.
- [BS98a] T.J. Barth and J.A. Sethian. Implementation of Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains. *von Karman Institute Lecture Series, Computation Fluid mechanics*, 1998.
- [BS98b] T.J. Barth and J.A. Sethian. Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and level set equations on triangulated domains. *J. Comp. Physics*, 145 :1–40, 1998.
- [CEL84] M.G. Crandall, L.C. Evans, and P.L. Lions. Some properties of viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations. *Tran. AMS*, 282 :487–502, 1984.
- [CIL92] M.G. Crandall, H. Ishii, and P.L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. AMS*, 27/1 :1–67, 1992.
- [CL81] M.G. Crandall and P-L. Lions. Condition d’unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 292 :183–186, 1981.
- [CL83] M.G. Crandall and P-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer Math Soc*, 277 :1–42, 1983.
- [CL84] M.G. Crandall and P-L. Lions. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Mathematics of Computation*, 43 :1–19, 1984.
- [CS86] M.G. Crandall and P.E. Souganidis. Convergence of difference approximations of quasilinear evolution equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 10 :425–445, 1986.

- [HEOC87] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S.R. Charkravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. *J. Comp. Phys.*, 71 :231–303, 1987.
- [IS04] H. Ishii and M.-H. Sato. Nonlinear oblique derivative problems for singular degenerate parabolic equations on a general domain. *Nonlinear Analysis*, 57 :1077–1098, 2004.
- [JP00] G. Jiang and D. Peng. Weighted eno schemes for Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 21 :2126–2143, 2000.
- [Lio82] P.L. Lions. *Generalized solution of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman, London, 1982.
- [OS88] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comp. Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [OS91] S. Osher and C.W. Shu. High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28 :907–922, 1991.
- [Sou85] P.E. Sougadinis. Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *J. Diff. Eqns.*, 59 :1–43, 1985.

Mouvement par courbure moyenne

- [AS96] L. Ambrosio and H.M Soner. Level set approach to mean curvature flow in arbitrary co-dimensions. *J. Diff. Geom.*, 43 :693–737, 1996.
- [BG95] G. Barles and C. Georgelin. A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motions by mean curvature. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32 :484–500, 1995.
- [Bra78] K.A. Brakke. *The motion of a surface by its mean curvature*. Princeton University Press, 1978.
- [BV94] G. Buttazzo and A. Visintin. Motion by mean curvature and related topics. *Proceedings of the International conference at trento, 1992*, Walter de Gruyter, New York, 1994.
- [BW95] L. Bronsard and B. Wetton. A numerical method for tracking curve networks moving with curvature motion. *J. Comp. Phys.*, 120 :66–87, 1995.
- [CGG91] Y. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Diff. Geom.*, 33 :749, 1991.
- [CS93] D.L. Chopp and J.A. Sethian. Flow under curvature : Singularity formation, minimal surfaces, and geodesics. *J. Exper. Math*, 2 :235–255, 1993.
- [ES91] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature I. *J. Differential Geom.*, 33 :635–681, 1991.
- [ES92a] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature III. *J. Geom. Anal.*, 2 :121–150, 1992.
- [ES92b] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature II. *Transactions of the american mathematical society*, 330 :321–332, 1992.
- [ES95] L.C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature IV. *J. Geom. Anal.*, 5 :77–114, 1995.

- [Eva93] L.C. Evans. Convergence of an algorithm for mean curvature motion. *Indiana Univ. Math. J.*, 42 :553–557, 1993.
- [Ilm92] T. Ilmanen. Generalized flow of sets by mean curvature on a manifold. *Indiana University Mathematics Journal*, 41 :671–705, 1992.
- [Set85] J.A. Sethian. Curvature and the evolution of fronts. *Comm. in Math. Phys.*, 101 :487–499, 1985.

Maillages et adaptation

- [AF03] F. Alauzet and P.J. Frey. Estimateur d’erreur géométrique et métriques anisotropes pour l’adaptation de maillage. partie I : aspects théoriques. Rapport de Recherche RR-4759, INRIA, 2003.
- [AG87] E.L. Allgower and S. Gnutzmann. An algorithm for piecewise linear approximation of implicitly defined two-dimensional surfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24 (2) :452–469, 1987.
- [AG90] E.L. Allgower and K. Georg. *Numerical continuation methods : an introduction*. Springer-Verlag, 1990.
- [AG+93] L. Alvarez, F. Guichard, , P.L. Lions, and J.M. Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rat. Mechanics*, 123 :199–257, 1993.
- [ALDF06] F. Alauzet, A. Loseille, A. Dervieux, and P. Frey. Multi-dimensional continuous metric for mesh adaptation. *Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable*, pages 191–214, 2006.
- [BFG97] H. Borouchaki, P. Frey, and P.L. George. Maillage de surfaces paramétriques. Partie 3 : Éléments quadrangulaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 325, Série I :551–556, 1997.
- [BHP98] H. Borouchaki, F. Hecht, and P.Frey. Mesh gradation control. *Int. j. numer. methods eng.*, 43 :1143–1165, 1998.
- [Blo88] J. Bloomenthal. *Polygonization of Implicit Surfaces*. Computer Aided Geometric Design, 1988.
- [Cao07] W. Cao. An interpolation error estimate on anisotropic meshes in \mathbb{R}^n and optimal metrics for mesh refinement. *SIAM, J. Numer. Anal.*, 45 :2368–2391, 2007.
- [Cia91] P.G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problem. *Handbook of numerical analysis Vol. II*, P.G. Ciarlet and J.L. Lions ed., 1991.
- [CSX06] L. Chen, P. Sun, and J. Xu. Optimal anisotropic meshes for minimizing interpolation errors in l^p -norm. *Mathematics of computation*, 76 :179–204, 2006.
- [dAJ04] B.R. de Araujo and J.A.P. Jorge. Curvature dependent polygonization of implicit surfaces. *Computer Graphics and Image Processing, Proc. 17th Brazilian symposium*, pages 266–273, 2004.
- [DF07] V. Ducrot and P. Frey. Contrôle de l’approximation géométrique d’une interface par une métrique anisotrope. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 345 :537–542, 2007.

- [DF08a] C. Dobrzynski and P. Frey. Anisotropic Delaunay mesh adaptation for unsteady simulations. *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, pages 177–194, 2008.
- [DF08b] V. Ducrot and P. Frey. Anisotropic level set adaptation for accurate interface capturing. *Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable*, pages 159–176, 2008.
- [Dob05] C. Dobrzynski. Adaptation de maillage anisotrope 3d et application à l'aérothermique des bâtiments. *Thèse de doctorat*, 2005.
- [FB96] P. Frey and H. Borouchaki. Texel : triangulation de surfaces implicites. Partie I : aspects théoriques. *Rapport de Recherche de l'INRIA - RR3066*, 1996.
- [FB97] P. Frey and H. Borouchaki. Texel : triangulation de surfaces implicites. Partie II : exemples d'application. *Rapport de Recherche de l'INRIA - RR3106*, 1997.
- [FG08] P. Frey and P.-L. George. *Mesh generation : application to finite elements*. Wiley-ISTE, 2008.
- [Fre00] P. Frey. About surface remeshing. *Proceedings, 9th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories*, pages 123–136, October 2000.
- [Fre07] P. Frey. *A differential geometry approach to mesh generation*. Series in Contemporary Applied Mathematics, CAM 9, Higher Education Press, 2007.
- [GB97] P.L. George and H. Bourouchaki. *Triangulation de Delaunay et maillage*. 1997.
- [Hua05] W. Huang. *J. Comp. Phys.*, 204 :633–665, 2005.
- [LC87] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes : A high resolution 3D surface construction algorithm. *Computer Graphics*, 21, Nr. 4, July 1987.
- [PLLdF06] A. Paiva, H. Lopes, T. Lewiner, and L.H. de Figueiredo. Robust adaptive meshes for implicit surfaces. *Sibgraphi*, Manaus :205–212, Oct. 2006.
- [Riv86] M.C. Rivara. Adaptive finite element refinement and fully irregular and conforming triangulations. *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, I. Babuska et al. (eds)*, Wiley, 1986.
- [Riv91] M.C. Rivara. Local modifications of meshes for adaptive and/or multigrid finite element methods. *J. Comp. and Applied Mathematics*, 36 :79–89, 1991.
- [RLCS02] J.-F. Remacle, X. Li, N. Chevaugéon, and M.S. Shepard. Transient mesh adaptation using conforming and non conforming mesh modifications. *Proc. of 11th Int. Meshing Roundtable, Ithaca, NY, USA*, 2002.
- [Tau95] G. Taubin. A signal processing approach to fair surface design. *Proc. of the 22nd International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, pages 351–358, 1995.

Divers

- [BFM09] C. Bui, P. Frey, and B. Maury. A coupling strategy based on anisotropic mesh adaptation for solving two-fluid flows. *soumis à International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2009.
- [BM58] G.E.P. Box and M.E. Muller. A note on the generation of random normal deviates. *The annals of mathematical statistics*, 29 :610–611, 1958.

- [dB78] C. de Boor. *A practical guide to splines*. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg, 1978.
- [Dij59] N. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1 :269–271, 1959.
- [Far83] G. Farin. Smooth interpolation to scattered 3D data. *R.E. Barnhill and W. Boehm (Eds.) Surfaces in Computer Aided Geometric Design, North-Holland*, pages 43–63, 1983.
- [Far97] G. Farin. *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*. Academic Press., 1997.
- [GL83] G.H. Golub and C.F. Loan. Matrix computations. *The John Hopkins University Press, Baltimore, 3rd edition*, 1983.
- [Lau72] P.J. Laurent. *Approximation et optimisation*. Hermann, Paris, 1972.
- [PG01] M. Pauly and M. Gross. Spectral processing of point-sampled geometry. *In Eugene Fiume editor, SIGGRAPH Computer Graphics Proceeding*, pages 379–386, 2001.
- [Ruc96] W. Rucklidge. *Efficient visual recognition using the Hausdorff distance*. Springer, 1996.
- [Sar43] A. Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bull. Am. Math. Soc.*, 48 :883–890, 1943.
- [SS86] Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, 7, Issue 3 :856–869, July 1986.

Résumé

La reconstruction de surface, à partir de données échantillonnées, est un thème de recherche important et très actif depuis quelques années. L'enjeu est de pouvoir générer toute sorte de géométries et de topologies.

Le but de ce travail est de trouver une surface *régulière* (typiquement de classe C^2), notée Γ , passant au plus près de tous les points d'un échantillon V donné, c'est-à-dire telle que la distance euclidienne $d(x, \Gamma)$ soit minimale pour tout $x \in V$. Pour cela, on formule le problème à l'aide d'une équation aux dérivées partielles qui va caractériser l'évolution d'une surface $\Gamma(t)$. Cette EDP est composée d'un terme d'attraction, qui permet à $\Gamma(t)$ d'avancer jusqu'à V , et d'un terme de tension de surface, dont le rôle est de préserver la régularité de $\Gamma(t)$ au cours du temps. On montre d'abord que le problème est bien posé, c'est-à-dire que sa solution existe et qu'elle est unique. Cette EDP est ensuite résolue numériquement à l'aide de la méthode des lignes de niveau, et grâce à des schémas numériques spécifiques (avec approximation des dérivées d'ordre un et deux en espace en chaque nœud du maillage), sur des triangulations adaptées et anisotropes (pour améliorer la précision du résultat). D'un point de vue analyse, on montre que ces schémas sont consistants et stables en norme L^2 . Des exemples d'applications sont présentés pour illustrer l'efficacité de notre approche.

Mots-clés: reconstruction de surface, méthode des lignes de niveaux, schémas numériques, triangulations anisotropes, adaptation de maillage.

Abstract

Over the last years, surface reconstruction from sampled data remains an important and active area of research. The challenge is then to handle a wide range of geometries and topologies.

The aim of this work is to find a *regular* surface (typically C^2 continuous), denoted by Γ , fitting at best a given set of point V , *i.e.* such that the Euclidian distance $d(x, \Gamma)$ is minimal for all $x \in V$. We formulate the problem using a partial differential equation which characterizes the evolution of a surface $\Gamma(t)$. This PDE relies on an attraction term, which involves the distance to the data set, and on a surface tension term which preserves the regularity of $\Gamma(t)$ during its evolution. We show that the problem is well-posed, its solution exists and is unique. This PDE is numerically formulated using the level set method, and it is solved using specific numerical schemes (with an approximation of the first and second order space derivatives in each node of the mesh), adapted anisotropic triangulations (in order to improve the numerical approximation of the manifold). From the analytical point of view, we show that the schemes are consistent and L^2 stable. Some application examples are presented to illustrate the efficiency of our approach.

Keywords: surface reconstruction, level set method, numerical schemes, anisotropic triangulation, mesh adaptation.

