



HAL
open science

Contrôle de l'état hydraulique dans un réseau d'eau potable pour limiter les pertes

Elodie Jaumouillé

► **To cite this version:**

Elodie Jaumouillé. Contrôle de l'état hydraulique dans un réseau d'eau potable pour limiter les pertes. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2009. Français. NNT : . tel-00443827

HAL Id: tel-00443827

<https://theses.hal.science/tel-00443827>

Submitted on 4 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3908

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Par Elodie Jaumouillé

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

CONTRÔLE DE L'ÉTAT HYDRAULIQUE DANS
UN RÉSEAU D'EAU POTABLE POUR
LIMITER LES PERTES

Soutenue le 4 décembre 2009

Devant la commission d'examen formée par :

Président

Rémi Abgrall, Professeur

Université de Bordeaux 1

Rapporteurs

Georges-Henri Cottet, Professeur

Université Joseph Fourier, Grenoble

Emmanuel Creusé, Professeur

Université des Sciences et Technologies de Lille

Examineurs

Philippe Angot, Professeur

Université de Provence, Marseille

Bernard Brémond, Directeur de recherche

Cemagref, Bordeaux

Pierre Fabrie, Professeur

Institut Polytechnique de Bordeaux

Iraj Mortazavi, Maître de conférence

Institut Polytechnique de Bordeaux

Olivier Piller, Chargé de recherche

Cemagref, Bordeaux

Remerciements

Mes premiers remerciements vont aux membres du jury. Je remercie particulièrement Rémi Abgrall pour avoir accepté de présider le jury, et Georges-Henri Cottet et Emmanuel Creusé, rapporteurs, pour leurs conseils et suggestions qui ont contribué à l'amélioration de ce manuscrit.

Je remercie Pierre Fabrie et Iraj Mortazavi, directeurs de ma thèse, pour leur implication depuis le début. Leur rigueur scientifique, leurs idées pertinentes ont contribué à l'avancée de mon travail. Mes remerciements vont également à Olivier Piller qui m'a fait partager son expérience dans les domaines des mathématiques et de l'hydraulique.

Un grand merci à Bernard Brémond pour les discussions et les échanges qui m'ont beaucoup appris, sur les plans scientifique et humain. Avoir pu travailler avec vous est un honneur. Merci pour tout !

J'exprime mes remerciements à tous mes professeurs pour leur enseignement et leur gentillesse. Un grand merci à Angelo Iollo pour ses conseils avisés sur le contrôle et à Patrick Fischer pour son amitié et son soutien.

Je souhaite également remercier mes collègues et amis avec qui j'ai passé d'excellents moments au Cemagref. Spéciale dédicace à Génia, membre de l'équipe 226. Merci pour ta bonne humeur, tes délires et tes discussions parfois surprenantes mais néanmoins (*nevertheless* en anglais) intéressantes ! Je te souhaite bon courage pour cette dernière ligne droite et à bientôt sur nos lignes . . .

J'adresse mes chaleureuses pensées à ma famille, mes amis, mes collègues de l'Observatoire pour leur soutien et leurs encouragements permanents tout au long de ces trois années.

Un merci particulier à ces étudiants londoniens du *XIX^e* siècle qui, en attendant leurs cour(t)s, envoyaient des balles contre les murs. Grâce à eux, le squash est né . . .

Résumé

Les fuites non détectées dans les réseaux d'eau potable sont responsables en moyenne de la perte de 30 % de l'eau transportée. Il s'avère donc primordial de pouvoir contrôler ces fuites.

Pour atteindre cet objectif, la modélisation de l'écoulement de l'eau dans les conduites en tenant compte des fuites a été formulée de différente manière.

La première formulation est un système d'équations différentielles ordinaires représentant des fuites constantes, réparties uniformément le long des conduites. Le système peut s'avérer être numériquement raide lorsque des organes hydrauliques sont rajoutés. Deux méthodes implicites ont été proposées pour sa résolution : la méthode de Rosenbrock et la méthode de Gear. Les résultats obtenus montrent que le débit varie linéairement le long des conduites et que les pertes en eau par unité de longueur sont identiques sur chaque conduite.

La seconde formulation prend en compte la relation entre les fuites et la pression. Un système de deux équations aux dérivées partielles a été proposé. L'EDP de transport-diffusion-réaction, contenant l'opérateur du p-Laplacien, est résolue par une méthode à pas fractionnaires. Deux méthodes ont été testées. Dans la première, la réaction est couplée avec la diffusion et dans la seconde, elle est couplée avec le transport. Les résultats indiquent que les pertes en eau ne sont pas réparties de façon homogène sur le réseau. Cette formulation décrit de manière plus réaliste les réseaux d'eau potable.

Enfin, le problème du contrôle du volume des fuites par action sur la pression a été étudié. Pour cela, un problème d'optimisation est résolu sous la contrainte que la pression doit être minimale pour réduire les fuites et être suffisante pour garantir un bon service aux consommateurs. Les résultats trouvés confirment que la réduction de la pression permet de réduire le volume des fuites de façon significative et que le choix de l'emplacement du ou des points de contrôle est primordial pour optimiser cette réduction.

Mots clés : réseau d'eau potable, fuites, edo, edp, méthode à pas fractionnaires, p-Laplacien, contrôle du volume des fuites, réduction de pression

Abstract

Leakage represents a large part, in average more than 30 %, of the water supplied. Consequently, it is important to control leakage in Water Distribution System (WDS). For this purpose different methods, which take leakage into account, are proposed to model the hydraulics of WDS.

The first formulation considers constant leakage in a network and leads to an ordinary differential equation. It turns out to be a hydraulic stiff problem due to valve and pump operations. This equation is solved using two methods : the first one is a generalised Runge-Kutta method and the second one the Gear method. The results show that the flow rate varies linearly along a pipe and that the water loss per unit of length is identical for each pipe. Magnitude of inertia terms has also been studied.

The second formulation takes pressure-dependent leakage into account. We propose to introduce partial differential equations in order to predict more accurately hydraulic flows in WDS. Thus, the physical advection-diffusion-reaction model is presented. A nonlinear operator, called p-Laplacian, related to the diffusion is included into the model. Two resolutions of this model based on a splitting method are detailed. The results confirm that losses vary nonlinearly with pressure.

Finally, the leakage-control problem is studied. For this purpose, we solve an optimisation problem with the objective to minimize the distributed volume in order to reduce leakage. The condition of sufficient pressure to satisfy consumers is imposed in this optimisation. The results prove that pressure control significantly reduces leakage and that the emplacement of the valve is important to optimise this reduction.

Keywords : Water Distribution System, Leakage, ordinary differential equation, partial differential equation, splitting method, p-Laplacian, pressure reduction

Table des matières

Lexique hydraulique	17
Introduction	21
1 Écriture des équations de Saint-Venant adaptées au phénomène des fuites	27
1.1 Mise en forme des équations de Navier-Stokes	27
1.1.1 Équation de continuité	27
1.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement	27
1.1.3 Simplification des équations	29
1.2 Écriture des équations de Saint-Venant	30
1.2.1 Adimensionnement et simplification	30
1.2.2 Intégration des équations dans le cas de fuites dans les conduites	32
1.2.3 Écriture des équations de Saint-Venant pour les phénomènes transitoires lents	36
2 Modélisation à l'échelle d'un réseau comprenant des fuites non détectées constantes	41
2.1 Modèle physique	41
2.1.1 Définitions et Notations	41
2.1.2 Modélisation dans les réseaux d'eau potable	43
2.2 Résolution du problème hydraulique	48
2.2.1 Formulation réduite du problème hydraulique	48
2.2.2 Méthodes de résolution	50
2.3 Résultats	52
2.3.1 Comparaison des deux formulations et des méthodes de résolution	53
2.3.2 Ordre de grandeur des fuites non détectées	53
2.3.3 Premier cas test	53
2.3.4 Deuxième cas test	58
3 Modélisation d'un réseau comprenant des fuites non détectées dépendantes de la pression	65
3.1 Modèle physique	65
3.1.1 Équations d'état	66
3.1.2 Conditions aux limites	68
3.2 Modèle numérique	69
3.2.1 Méthodes utilisées	70
3.2.2 Notations et choix du maillage	72
3.2.3 Schéma numérique	74

3.3	Résultats	80
3.3.1	Premier cas test : le réseau 3	81
3.3.2	Deuxième cas test : un réseau avec différents exposants de fuite	86
4	Minimisation du volume des fuites par action sur la pression	95
4.1	Formulation du problème de contrôle	96
4.1.1	Variables d'état	96
4.1.2	Paramètres de contrôle	96
4.1.3	Fonctionnelle	97
4.1.4	Contraintes sur l'état	98
4.1.5	Conditions aux limites	99
4.1.6	Calcul de la charge	100
4.2	Résolution directe du problème de contrôle	100
4.2.1	Approximation de la commande par une fonction en escalier	101
4.2.2	Algorithme d'optimisation	101
4.3	Résultats	102
4.3.1	Premier cas test : le réseau 4	103
4.3.2	Deuxième cas test : le réseau 2 avec déplacement des points de contrôle	109
4.3.3	Étude d'un réseau réel	114
	Conclusion et perspectives	121
	A Classification des pertes	129
	B Caractéristiques des réseaux étudiés	130

Table des figures

1.1	Représentation de la section droite d'une conduite	32
2.1	Évolution du débit le long d'une conduite de 1000 m	44
2.2	Représentation du réseau 1	54
2.3	Consommations aux nœuds 2 et 3 du réseau 1	54
2.4	Débits sur les arcs du réseau 1	55
2.5	Charges aux nœuds du réseau 1	56
2.6	Inerties sur la conduite II du réseau 1	57
2.7	Représentation du réseau 1	58
2.8	Débits sur les arcs du réseau 2	59
2.9	Charges aux nœuds du réseau 2	60
2.9	Charges aux nœuds du réseau 2 (suite)	61
2.10	Profil de charge le long du chemin 1-2-3-5-6 du réseau 2	61
3.1	Maillage du réseau 3	81
3.2	Débits sur plusieurs conduites du réseau 3	82
3.3	Charges en plusieurs points sur différents arcs du réseau 3	83
3.3	Charges en plusieurs points sur différents arcs du réseau 3 (suite)	84
3.4	Charges le long de la conduite VI du réseau 3	84
3.5	Comparaison des débits sur la conduite IV du réseau 3	86
3.6	Maillage du réseau 2	87
3.7	Débits sur l'arc V du réseau 2 pour différents exposants de fuite	88
3.7	Débits sur l'arc V du réseau 2 pour différents exposants de fuite (suite)	89
3.8	Débits et charges au nœud 3 du réseau 2 pour différents exposants de fuite	89
3.9	Comparaison du volume d'eau perdu entre les deux modèles de fuite sur le réseau 2	91
3.10	Comparaison des débits sur l'arc IV du réseau 2 à $t = 8h$	91
4.1	Maillage du réseau 4	103
4.2	Consommation au nœud 2 du réseau 4	103
4.3	Fonctions de contrôle pour le réseau 4	104
4.4	Comparaison des débits à la sortie du réservoir sans contrôle et avec contrôle sur le réseau 4	105
4.5	Comparaison des charges sans contrôle et avec contrôle sur le réseau 4	105
4.6	Fonctions de contrôle et différents exposants de fuite pour le réseau 4	107
4.7	Débits à la sortie du réservoir du réseau 4 pour différents exposants de fuite	107
4.7	Débits à la sortie du réservoir du réseau 4 pour différents exposants de fuite (suite)	108
4.8	Charges au nœud 2 du réseau 4 pour différents exposants de fuite	108

4.8	Charges au nœud 2 du réseau 4 pour différents exposants de fuite (suite)	109
4.9	Différents emplacements des points de contrôle sur le réseau 2	110
4.10	Fonctions de contrôle pour les différents points de contrôle sur le réseau 2	111
4.11	Débits à la sortie du réservoir et au nœud 5 du réseau 2	112
4.12	Charges en différents nœuds du réseau 2	112
4.12	Charges en différents nœuds du réseau 2 (suite)	113
4.13	Débits de fuite total sur le réseau 2	114
4.14	Réseau de la ville de Lacanau océan	115
4.15	Contrôle N°1 : point de contrôle à la sortie du réservoir de tête	116
4.16	Contrôle N°2 : point de contrôle sur l'arc reliant les deux secteurs	116
B.1	Représentation du réseau 1	130
B.2	Consommations aux nœuds 2 et 3 du réseau 1	131
B.3	Représentation du réseau 2	131
B.4	Consommations aux nœuds du réseau 2	132
B.5	Consommation au nœud 6 du réseau 2	133
B.6	Représentation du réseau 3	133
B.7	Consommations aux nœuds du réseau 3	134
B.8	Représentation du réseau 4	135
B.9	Consommation au nœud 2 du réseau 4	135

Liste des tableaux

3.1	Cotes sol aux nœuds du réseau 3	82
3.2	Bilan en eau et pourcentage de fuite sur le réseau 3	85
3.3	Volume d'eau perdu sur chaque conduite du réseau 3	85
3.4	Comparaison des volumes d'eau perdus sur chaque conduite du réseau 3	86
3.5	Cotes sol aux nœuds du réseau 2	87
3.6	Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau 2	90
3.7	Volume d'eau perdu sur chaque conduite du réseau 2	90
3.8	Volume d'eau perdu sur chaque conduite du réseau 2 (m^3)	90
3.9	Indice d'écart sur le réseau 2	92
4.1	Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau sur le réseau 4	106
4.2	Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau 4 pour différents exposants de fuite	109
4.3	Cotes sol et charges minimales admissibles sur le réseau 2	110
4.4	Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau 2	114
4.5	Bilan en eau et pourcentage de fuite avec le contrôle N°1 sur le réseau de Lacanau océan	115
4.6	Bilan en eau et pourcentage de fuite avec le contrôle N°2 sur le réseau de Lacanau océan	116
4.7	Bilan en eau et pourcentage de fuite sur le réseau de Lacanau océan	117
4.8	Pourcentage de fuite sur le réseau de Lacanau océan	117
4.9	Bilan en eau et pourcentage de fuite avec le contrôle N°2 sur le réseau de Lacanau océan	117
A.1	Balance de l'eau selon la terminologie utilisée par l'IWA (<i>International Water Association</i>)	129
B.1	Cotes sol aux nœuds du réseau 2	133
B.2	Cotes sol des nœuds du réseau 3	134

Notations

Scalars

ℓ	longueur d'une conduite
R	rayon d'une conduite
S	section droite d'une conduite
S_r	section droite d'un réservoir
ρ	masse volumique de l'eau
β	coefficient de Boussinesq ou de quantité de mouvement
k	coefficient de friction sur une conduite
M	nombre de Mach
Re	nombre de Reynolds
d_f	débit linéique de fuite constant
α	exposant de fuite
c	coefficient de fuite
N	nombre de nœuds dans le réseau
n	nombre de nœuds de consommation dans le réseau
n_f	nombre de nœuds ressources dans le réseau
n_r	nombre de réservoirs dans le réseau
δt	pas de discrétisation en temps
δx	pas de discrétisation en espace

Vecteurs

Q	débits
$Q_{0.5}$	débits en milieu de conduite
Q_c	débits maillants
Q_d	consommations de l'arbre recouvrant
H	charges
z	cotes sol
$J(Q)$	pertes de charge
p	pressions
d	consommations
\mathbf{v}	vitesses du fluide
\mathbf{g}	gravités ou accélérations de la pesanteur

Matrices

A	matrice d'incidence nœud-arc
M_0	matrice d'incidence maille-arc augmentée
σ	tenseur des contraintes
D	tenseur des vitesses de déformation
L	taux d'inertie d'une conduite
τ_w	cisaillement de la paroi
I	matrice identité

Lexique Hydraulique

- Le **réseau d'alimentation en eau potable** stocke, transporte et distribue l'eau potable depuis les lieux de production jusqu'au robinet des consommateurs.
C'est un ensemble complexe constitué d'ouvrages de pompage, de réservoirs, de canalisations, d'accessoires de robinetterie et des branchements qui desservent les installations intérieures des abonnés.
- Un **réservoir** est un ouvrage généralement en béton qui permet de stocker de l'eau.
Dans la grande majorité des cas, chaque réseau possède un réservoir principal, dit **réservoir de tête**. Il est alimenté en eau potable en débit constant et il en assure la distribution. Lorsque le débit distribué est supérieur (resp. inférieur) au débit entrant, le niveau du réservoir baisse (resp. augmente). Le volume d'eau stocké doit être suffisant pour que le réservoir ne se vide pas complètement. Outre la fonction de stockage, le réservoir de tête assure un niveau d'énergie qui permet de distribuer l'eau à une pression suffisante.
Les autres réservoirs sont des **réservoirs d'équilibre**. Ils aident si nécessaire le réservoir principal en périodes de pointe.
Le fond d'un réservoir s'appelle le **radier**. Le niveau d'eau dans un réservoir peut varier entre la **cote radier** et la **cote haut**.
- Pour modéliser un réseau d'alimentation en eau potable, un **graphe** est utilisé. Les canalisations ou conduites sont représentées par des **arcs** et les jonctions par des **nœuds**.
- Un **nœud réservoir** symbolise un réservoir. A l'instant initial ($t = 0$), la hauteur d'eau dans les réservoirs est connue.
- Un **nœud ressource** est une réserve d'eau réelle ou fictive de grande dimension (lac, nappe phréatique, forage ...). Le niveau de l'eau ne varie pas, celui-ci est connu et fixé.
- Un **nœud de consommation** symbolise un groupe de consommateurs plus ou moins éloignés les uns des autres aussi bien dans le plan qu'en altitude. Dans la procédure de modélisation, il peut arriver qu'aucun consommateur ne soit affecté à ce type de nœud .
- Les réseaux de distribution d'eau potable comportent des accessoires, appelés **organes hydrauliques** ou **singularités**, qui facilitent la maintenance et l'entretien, assurent la régulation de certains paramètres (pression, débit,...) sur le réseau.
Parmi les singularités, nous pouvons citer les pompes, les vannes, les régulateurs de pression, les clapets anti-retour ...

- Les **coups de bélier** sont des ondes de surpression et de dépression liées à un changement brutal de l'écoulement dans la conduite (par exemple une fermeture de vanne). Ils peuvent provoquer des dégâts extrêmement importants.
- Dans un réseau, les pertes réelles sont divisées en deux catégories : les fuites détectables et les fuites non détectables (les **fuites diffuses**) dont le débit est inférieur au seuil de détection des appareils de mesure. Les fuites détectables contribuent aux pertes au même titre que les fuites diffuses jusqu'à ce qu'elles soient détectées et réparées. Les **fuites diffuses** perdurent, même en cas de recherches actives de fuites, jusqu'à ce qu'elles soient repérées par hasard ou qu'elles s'aggravent et deviennent détectables.
- Le **débit** d'une canalisation est la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par unité de temps.
Le débit peut aussi être exprimé en fonction de la vitesse du fluide par la relation :

$$Q = S \times V$$

où S est la section droite de la conduite en m^2 et V la vitesse du fluide (en m/s).
L'unité de débit s'exprime en m^3/s mais il est parfois commode pour les débits faibles de l'exprimer en l/s .

- La **charge hydraulique** représente une hauteur de colonne d'eau et est définie par :

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z$$

où $\frac{p}{\rho g}$ est une hauteur de pression, $\frac{V^2}{2g}$ une hauteur cinétique et z la **cote sol**

Selon la configuration du réseau, la hauteur cinétique peut être négligeable devant les autres termes, ainsi la **charge hydraulique** est assimilée à la **hauteur piézométrique** qui se définit par l'équation :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z$$

La charge s'exprime en mètre (m).

- La **pression** est la force exercée par le fluide sur unité de surface. Elle s'exprime en Pascal ou en Bar ($10^5 Pa = 1 Bar$).
En hydraulique urbaine, nous utilisons communément la hauteur de colonne d'eau (mCE ou mH_2O) qui représente la pression exercée par une colonne d'eau d'un mètre sur sa base.
 $1 mCE = 9.81 kPa = 0.0981 Bar$.
- La circulation de l'eau dans les canalisations et dans les organes hydrauliques provoque, notamment par frottement, une perte d'énergie appelée **perte de charge**. Elle s'exprime en mètre (m). La **perte de charge linéique** représente la perte de charge par mètre de longueur. Elle est sans dimension et l'usage veut qu'on l'exprime en m/m . Elle est modélisée par le terme non-linéaire suivant :

$$J = \frac{\lambda |V|V}{D 2g}$$

où λ est un coefficient sans dimension et dépend du nombre de Reynolds, D est le diamètre de la conduite en m .

Nous exprimons la perte de charge en fonction du débit et nous posons :

$$J(Q) = k|Q|^{\gamma-1}Q$$

où k est le coefficient de friction dont l'unité dépend de γ .

Les deux formules les plus fréquemment utilisées sont :

– la formule d'Hazen-Williams :

$$J(Q) = k_1|Q|^{0.852}Q$$

$$\text{avec } k_1 = \frac{\alpha_1}{D^{4.87} Chw^{1.852}}$$

$J(Q)$ en m/m ,

Q en m^3/s ,

D le diamètre de la conduite en m ,

Chw le coefficient de rugosité sans dimension,

Pour ces unités, $\alpha_1 = 10.67$

– la formule de Colebrook :

$$J(Q) = k_2|Q|Q$$

avec dans sa formulation approchée (équation de Swamee-Jain) :

$$k_2 = \frac{\alpha_2}{\left[\log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right)\right]^2 \pi^2 g D^5}$$

$J(Q)$ en m/m ,

$\frac{\varepsilon}{D}$ la rugosité relative de la conduite sans dimension,

Q en m^3/s ,

pour ces unités, $\alpha_2 = 2$

Ces formules sont valables pour les écoulements turbulents que l'on trouve pratiquement dans tous les régimes d'écoulement dans les conduites d'eau potable. En effet, le seuil correspond à 2 cm/s dans une conduite de 0.1 m pour un nombre de Reynolds de 2000.

Introduction

Contexte

Dans les réseaux d'eau potable, les pertes en eau atteignent un niveau alarmant. L'*International Water Association* (IWA) les classe en deux catégories (se référer au tableau de classification en annexe A) : les pertes apparentes et les pertes réelles. Les pertes apparentes correspondent à des erreurs de comptage ou à des consommations non autorisées ; elles ne sont pas traitées ici. Les pertes réelles comprennent les fuites sur le système de transport, y compris sur celui de l'eau brute, ainsi que les fuites et débordements au niveau des réservoirs. Nous nous intéressons aux seules pertes sur le réseau de distribution d'eau potable depuis l'usine de traitement jusqu'au compteur de l'abonné. Ces pertes résultent de casses franches généralement réparées rapidement et de fuites non détectées qui proviennent pour la plupart d'une mauvaise étanchéité des canalisations et des organes hydrauliques.

Les fuites non détectées n'entraînent pas d'interruption de service et le système de distribution continue de fonctionner correctement dans la plupart des cas. Cependant, ces fuites sont responsables de pertes pouvant atteindre 30 % du volume d'eau introduit dans le réseau. Dans un contexte de ressources rares, les fuites diminuent d'autant les potentialités d'alimentation.

Le niveau de fuite dépend de paramètres liés :

- aux caractéristiques des conduites (matériau et âge),
- à leur condition de pose (nature du terrain),
- au nombre de branchements,
- à la capacité de l'exploitant à chercher les fuites et à sa réactivité pour les réparer,
- aux conditions de la gestion technique (pression excessive, coup de bélier, air dans les conduites, ...).

Ces paramètres induisent différentes actions destinées à réduire les fuites :

- le renouvellement des conduites ; c'est une action coûteuse dont les effets sont à long terme,
- la détection des fuites et leur réparation,
- la réduction de pression.

De nombreuses techniques ont été développées pour détecter et localiser les fuites. A partir d'un secteur jugé douteux, il faut identifier le tronçon fuyard (prélocalisation) puis déterminer la position précise de la fuite (localisation). Les techniques de prélocalisation les plus utilisées sont les mesures de nuit et les enregistreurs de bruits. La première technique consiste à mesurer le débit minimum nocturne, en général entre 2 h et 4 h, et d'en déduire les pertes après déduction des consommations nocturnes permanentes. La seconde technique consiste à faire une analyse sonore des conduites pour repérer le bruit généré par les fuites.

Pour une localisation précise des fuites, des méthodes acoustiques ou un gaz traceur sont utilisés en fonction de la nature de la canalisation. Les méthodes ont des seuils de détection en-dessous desquels elles ne sont pas efficaces.

Les pertes d'eau occasionnées par les fuites non détectées dépendent directement de la pression dans les canalisations. Quand les conditions de distribution le permettent, la réduction de pression se traduit par une diminution des pertes. Elle est obtenue par la mise en place de vannes, de réducteurs de pression, de stabilisateurs, en certains points du réseau. Dans ce travail de recherche, nous étudions les conséquences de la baisse de la pression sur la réduction des fuites et leur mise en œuvre sur des réseaux de distribution d'eau.

L'exemple ci-dessous permet en quelques chiffres de se rendre compte de l'importance des fuites dans un réseau d'eau potable et de l'enjeu de la réduction de la pression.

Exemple : (Sources Lyonnaise des Eaux 2007)

Sur la Communauté Urbaine de Bordeaux (CUB), les fuites représentent 13 000 000 m³/an, soit la consommation de la ville de Bordeaux sur un an.

Une baisse de 5% des fuites sur la CUB correspondrait à une économie de 650 000 m³/an, ce qui est équivalent à la consommation d'environ 11 000 habitants pendant une année.

Travaux antérieurs

Modélisation des réseaux

Un réseau de distribution est un système complexe faisant intervenir de nombreux phénomènes physiques. Ces phénomènes sont principalement dus aux variations de la consommation et aux changements de l'écoulement provoqués par l'utilisation d'appareils hydrauliques. Le réseau est représenté par un graphe dans lequel les conduites sont des arcs et les points de consommation des nœuds. Sont connues les caractéristiques des conduites, des réservoirs et des singularités, ainsi que les consommations des abonnés. Les inconnues sont les débits dans les arcs et les charges hydrauliques aux nœuds. De nombreux logiciels tels Porteau [1] et Epanet [2] réalisent cette modélisation. Les modèles hydrauliques classiques supposent que le régime d'écoulement est permanent ou quasi-dynamique. Ils considèrent une suite d'états d'équilibres permanents consécutifs. Pour prendre en compte les phénomènes transitoires lents générés par les variations de conditions limites du réseau, des auteurs ont introduit des termes d'inertie dans les modèles [33], [15].

Modélisation des fuites

De nombreuses études montrent que l'un des facteurs importants influençant les fuites est la pression dans les canalisations. Le débit de la fuite est considéré comme une fonction puissance de la pression avec un exposant de fuite donné. L'exposant de fuite théorique, déduit de l'équation de Torricelli, vaut 0.5. Cependant, des études sur le terrain ont montré qu'il différait significativement de cette valeur et que de nombreux facteurs étaient responsables de l'étendue de sa variation, comme la forme du trou, la nature du sol environnant

et le matériau de la conduite. En effet, lorsqu'un trou se crée, il a tendance à se déformer et à s'agrandir avec les fluctuations de la pression [28], [42]. Ainsi il est admis que l'exposant de fuite est compris entre 0.5 et 2.5 [42].

Introduction des fuites dans la modélisation des réseaux

Dans les logiciels standards, les fuites sont modélisées par des consommations supplémentaires aux nœuds et ne dépendent pas de la pression.

Wang *et al.* [44] incorporent les fuites diffuses et les casses en utilisant une fonction de Dirac dans les équations d'écoulement compressible définies par Wylie et Streeter [46]. McInnis et Karney [29] étudient les effets de la consommation sur les phénomènes transitoires en utilisant un modèle de fuites distribuées basé sur une méthode des caractéristiques. Cependant, il n'existe pas de modèle prenant en compte la relation entre les fuites et la pression avec un exposant de fuite variable, et modélisant les phénomènes transitoires lents.

Intérêts de la réduction de la pression

Beaucoup d'études ont été faites sur l'intérêt de réduire la pression dans les réseaux de distribution en eau potable. Lambert [28] a montré qu'une réduction de pression réduit non seulement les fuites, mais aussi réduit leur taux d'apparition. Ainsi, le contrôle de la pression empêche un vieillissement prématuré du réseau. Les casses sont alors réduites et les pertes en eau diminuent. Par une étude expérimentale, Walski *et al.* [43] ont montré que la réduction de pression est plus efficace quand les fuites et les pressions sont relativement grandes et que dans certains cas, le contrôle de la pression ne peut se faire que pendant les heures creuses. Dans la plupart des études, une ou plusieurs vannes de contrôle, destinées à diminuer la pression, sont placées dans le réseau d'eau potable et une réduction du volume des fuites est observée [41], [35], [36]. Todini [39] propose de modifier ou de renforcer le réseau dans le but d'obtenir une pression homogène et ainsi de limiter les fuites.

Plan de la thèse

Pour réaliser l'objectif de maîtriser la pression dans les conduites, il est indispensable de prendre en compte les fuites dans la modélisation des réseaux d'eau potable. C'est l'objet des premiers chapitres de ce travail de recherche.

Au chapitre un, les équations hydrauliques représentant l'écoulement de l'eau dans un réseau d'eau potable sont écrites. Pour cela, les équations de Navier-Stokes sont dérivées pour obtenir les équations de Saint-Venant adaptées à notre problème. Plusieurs hypothèses sont faites, parmi lesquelles l'incompressibilité de l'écoulement, la présence de phénomènes transitoires lents et la présence de fuites.

Dans le second chapitre, un système d'équations différentielles ordinaires est présenté et étudié. Ce système modélise les fuites non détectées constantes et réparties de façon uniforme sur les conduites. Deux méthodes sont présentées pour résoudre ce système : la méthode de Rosenbrock et la méthode de Gear. Deux cas tests sont réalisés pour valider le modèle

et la méthode. Les développements sont motivés par le besoin de considérer un réseau de conduites complexe dans sa globalité.

Dans le troisième chapitre, un nouveau modèle de deux équations aux dérivées partielles est proposé pour modéliser un écoulement avec des fuites dépendantes de la pression. Une équation de transport-diffusion-réaction est à résoudre et nous proposons deux méthodes à pas fractionnaires pour le faire. Deux cas tests sont étudiés et les résultats sont comparés à ceux donnés par le modèle des fuites constantes et à ceux obtenus avec le logiciel Porteau développé par le Cemagref.

Dans le dernier chapitre, nous choisissons d'utiliser la théorie du contrôle pour agir sur la pression afin de réduire les fuites. Pour cela, nous cherchons à contrôler la pression pour qu'elle ne soit ni trop forte pour éviter l'augmentation des fuites, ni trop faible car il faut garantir un confort d'utilisation aux consommateurs. Un problème d'optimisation sous contraintes est écrit et un algorithme de descente de gradient est utilisé pour le résoudre. Trois cas tests sont étudiés et les résultats sur les volumes d'eau économisés sont présentés.

Chapitre 1

Écriture des équations de Saint-Venant adaptées au phénomène des fuites

Les écoulements considérés dans les réseaux d'eau potable sont couramment représentés par le système d'équations de Saint-Venant.

Dans ce chapitre, nous avons établi par une étude qualitative le modèle de Saint-Venant adapté au problème des réseaux d'eau en présence de fuites non détectées. Dans un premier temps, nous avons simplifié et intégré sur la section d'une conduite les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques. Ensuite, nous avons modifié les équations de Saint-Venant obtenues pour prendre en compte les phénomènes transitoires lents.

1.1 Mise en forme des équations de Navier-Stokes

Nous considérons le cas de fuites non détectées le long d'une conduite de longueur ℓ et de rayon R . Pour décrire l'écoulement, nous utilisons les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, pour un fluide Newtonien et un écoulement incompressible. Comme l'écoulement est supposé incompressible, la masse volumique de l'eau ρ est constante et est égale à la masse volumique de l'eau sans turbulence (ainsi $\rho = \rho_0 = cste$). Nous notons \mathbf{v} le vecteur des vitesses et (v_x, v_r, v_θ) ces trois composantes en coordonnées cylindriques.

1.1.1 Équation de continuité

La masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement est constante. L'équation de conservation de la masse ou de continuité s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

En coordonnées cylindriques, l'équation (1.1) devient :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{1.2}$$

1.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps du tenseur des quantités de mouvement est égale au tenseur des forces extérieures appliquées à ce système.

Nous obtenons l'équation de Cauchy (d'après [8]) :

$$\rho\boldsymbol{\gamma} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (1.3)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes (symétrique) et $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$ représente le vecteur de la gravité. Nous supposons ainsi que le liquide est soumis à la seule action de la pesanteur.

Pour un fluide Newtonien visqueux et en tenant compte de l'équation (1.1), le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est donné par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

où μ est le coefficient de cisaillement et \mathbf{D} est le tenseur des vitesses de déformation.

Nous avons alors

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu\mathbf{D}) \quad (1.4)$$

Nous négligeons les effets thermiques dans le réseau d'eau, donc les coefficients de viscosité peuvent être considérés comme constants, et comme nous avons

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2}\nabla \cdot (\nabla\mathbf{v})$$

alors l'équation (1.4) devient :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} \quad (1.5)$$

Nous introduisons la loi de comportement (1.5) dans l'équation de Cauchy (1.3) et nous obtenons :

$$\rho\boldsymbol{\gamma} = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

Finalement nous obtenons l'équation de Navier-stokes suivante :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1.6)$$

En utilisant le système de coordonnées cylindriques, l'équation de Navier-Stokes (1.6) s'écrit suivant les trois directions :

○ 1^{ière} composante : direction axiale

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2}\right] \quad (1.7)$$

○ 2nd composante : direction radiale

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r \\ &+ \mu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

○ 3^{ième} composante : direction tangentielle

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta \\ &+ \mu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.1.3 Simplification des équations

Les écoulements considérés dans les systèmes de distribution en eau potable sont des écoulements dits en charge. Cela signifie que les conduites sont pleines d'eau et que la vitesse est due à la poussée de l'eau par la pression exercée en amont.

Les écoulements se font principalement le long de l'axe de la conduite et suivant la direction radiale pour les fuites. Nous pouvons alors supposer que la vitesse suivant la direction tangentielle est nulle (i.e. $v_\theta = 0$) et nous travaillons uniquement avec les équations de Navier-Stokes dans les directions axiale (1.7) et radiale (1.8).

De plus, nous supposons que les écoulements sont axisymétriques, ce qui signifie qu'ils sont invariants suivant θ . Nous avons donc $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Ces simplifications peuvent être retrouvées dans de nombreux travaux, comme celui de Ghidaoui [17].

Sous ces hypothèses, l'équation de continuité (1.2) devient donc :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0 \quad (1.10)$$

Le système s'écrit alors :

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] \quad (1.11)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \mu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} \right] \quad (1.12)$$

1.2 Écriture des équations de Saint-Venant

1.2.1 Adimensionnement et simplification

Seule l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.12) va être adimensionnée dans cette partie. L'objectif est de la simplifier.

Nous considérons une conduite de longueur ℓ et de rayon R . Comme nous avons supposé que l'écoulement est incompressible, l'égalité suivante existe : $\rho_0 = \rho$.

Nous notons avec une * les quantités sans dimension et nous posons :

- $v_x = V_x v_x^*$ où V_x est l'unité sur l'échelle de vitesse suivant l'axe de la conduite
- $v_r = V_r v_r^*$ où V_r est l'unité sur l'échelle de vitesse suivant la direction radiale
- $t = T t^*$ où $T = \frac{k\ell}{a}$ est l'unité sur l'échelle de temps relative aux phénomènes transitoires, ℓ est la dimension caractéristique suivant l'axe Ox , a est la célérité de l'onde de pression, k est un facteur d'échelle et $\frac{\ell}{a}$ est le temps de l'onde pour parcourir la conduite
- $p = \frac{\rho_0 a V_x}{k} p^* = \frac{\rho a V_x}{k} p^*$ où $\frac{\rho a V_x}{k} = \ell \left(\rho \frac{V_x}{T} \right)$ est l'unité sur l'échelle de la pression, estimée comme étant la variation de la quantité de mouvement de la conduite
- $x = \ell x^*$
- $r = R r^*$ où R est la dimension caractéristique suivant l'axe radial, ici le rayon de la conduite
- $M = \frac{V_x}{a}$ est le nombre de Mach
- $\rho = \rho_0 \rho^* = \rho \rho^*$

Remarque : Voici les ordres de grandeur de quelques variables :

$T \simeq 10 \text{ s}$	$\ell \simeq 1000 \text{ m}$
$V_x \simeq 1 \text{ m/s}$	$R \simeq 0.5 \text{ m}$
$V_r \simeq 10^{-3} \text{ m/s}$	$a \simeq 1000 \text{ m/s}$
$\rho \simeq 1000 \text{ kg/m}^3$	$k \simeq 10$
$\frac{\ell}{a} \simeq 1 \text{ s}$	$\mu \simeq 10^{-3} \text{ kg/ms ou Pa.s (à } 20^\circ\text{C)}$

L'équation (1.12) peut se réécrire sans dimension de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{V_r}{V_x} \left[\rho^* \left(\frac{V_x}{T} \frac{\partial v_r^*}{\partial t^*} + \frac{V_x^2}{\ell} v_x^* \frac{\partial v_r^*}{\partial x^*} + \frac{V_x V_r}{R} v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \right) - \frac{\mu^*}{\rho^*} \left[\frac{V_x}{\ell^2} \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial x^{*2}} + \frac{V_x}{R^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \right) - \frac{V_x v_r^*}{R^2 r^{*2}} \right] \right] \\ = \frac{a V_x}{k R} \left[- \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{k R}{\rho a V_x} f_r \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Il semble naturel de dire que l'écoulement par les fuites est très petit par rapport à l'écoulement suivant l'axe de la conduite. Nous supposons donc que la vitesse radiale est très petite par rapport à la vitesse axiale (i.e. $V_r \ll V_x$) et nous avons $\frac{V_r}{V_x} \ll 1$. Cette hypothèse permet de négliger l'inertie radiale et la viscosité radiale.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.13) peut alors s'écrire :

$$-\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{kR}{\rho a V_x} f_r = 0$$

et donc

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + f_r = 0$$

Comme nous avons supposé que seule la force de gravité s'exerce sur l'eau et nous savons que la gravité dérive d'un potentiel, nous avons :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = f_r = -\rho g_r = -\rho g \frac{\partial z}{\partial r} \quad (1.14)$$

L'équation (1.14) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial r}(p + \rho g z) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{p}{\rho g} + z = H(t, x)$$

où $H(t, x)$ est la hauteur piézométrique ou charge hydraulique qui par conséquent est la même sur une surface droite.

Une fois simplifiée, l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale peut s'écrire :

$$\frac{p}{\rho g} + z = H(t, x)$$

Cette équation est celle de Bernoulli qui s'applique le long d'une trajectoire.

Finalement, le système à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 & (1.15a) \\ \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] & (1.15b) \\ \frac{p}{\rho g} + z = H(t, x) & (1.15c) \end{cases}$$

1.2.2 Intégration des équations dans le cas de fuites dans les conduites

Dans cette partie, nous intégrons les équations sur la section droite de la conduite.

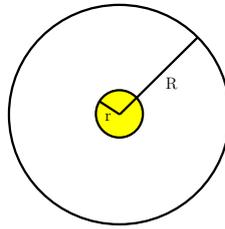


FIGURE 1.1 – Représentation de la section droite d'une conduite

Nous notons R le rayon de la conduite et $S = \pi R^2$ sa section.

Si r est le rayon polaire, nous avons $s = \pi r^2$ et donc $ds = 2\pi r dr$. Et nous avons $0 \leq s \leq S$.

Notations

Pour alléger l'écriture, nous procédons à des simplifications dans les notations.

En effet, la section S dépend du temps t et de l'espace x . Mais dans la suite, nous notons S à la place de $S(t, x)$. Comme l'écoulement est supposé incompressible, $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$, et donc $S = S(t, x) = cste$. Avec le même raisonnement pour le rayon R , nous notons R à la place de $R(t, x)$ et nous avons $R = R(t, x) = cste$.

De même, les composantes v_x et v_r de la vitesse, et la pression p dépendent du temps t , de l'espace x et du rayon r . Mais nous notons $v_x(r)$, $v_r(r)$ et $p(r)$ au lieu de $v_x(t, x, r)$, $v_r(t, x, r)$ et $p(t, x, r)$ respectivement.

Conditions aux limites

Pour qu'il y ait des fuites dans une conduite, il faut que l'écoulement dans la direction axiale adhère à la paroi. Sinon, l'eau glisse le long de la paroi et les fuites n'existent pas.

Notons Γ la paroi intérieure de la conduite.

La condition limite traduisant la présence de fuite dans une conduite s'écrit de la façon suivante :

$$v_x|_{\Gamma} = 0 \quad (1.16)$$

Moyennisation de l'équation de continuité

Nous intégrons l'équation de continuité (1.15a)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0$$

sur la section S de la conduite.

Nous pouvons alors écrire

$$\int_0^S \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) ds = \int_0^S \frac{\partial v_x}{\partial x} ds + \int_0^S \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} ds = 0$$

Formule de Leibnitz 1.2.1 La fonction $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} \psi(x, s) ds$ suffisamment régulière est dérivable et

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} \psi(x, s) ds = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, s) ds + \frac{db(x)}{dx} \psi(x, b(x)) - \frac{da(x)}{dx} \psi(x, a(x))$$

En utilisant la formule de Leibnitz, nous obtenons :

$$\int_0^S \frac{\partial v_x}{\partial x} ds = \frac{d}{dx} \int_0^S v_x ds - \frac{\partial S}{\partial x} v_x|_{\Gamma} = \frac{d}{dx} \int_0^S v_x ds$$

et par un changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_0^S \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} ds &= \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} 2\pi r dr \\ &= 2\pi R v_r|_{\Gamma} \end{aligned}$$

En posant $\bar{V} = \frac{1}{S} \int_S v_x ds$, où \bar{V} représente la vitesse moyenne, et en utilisant les propriétés d'un écoulement incompressible, l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial(S\bar{V})}{\partial x} = -2\pi R v_r|_{\Gamma}$$

Posons $Q = S\bar{V}$, l'équation peut s'écrire en fonction du débit Q et nous trouvons :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2\pi R v_r|_{\Gamma} \quad (1.17)$$

Le second membre de l'équation (1.17) est appelé le flux massique radial : il caractérise les fuites. S'il est nul, c'est qu'il n'y a pas de fuite au niveau de la section droite de la conduite.

Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Nous intégrons l'équation (1.15b)

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]$$

Comme $\rho = cste$ et que la gravité dérive d'un potentiel, cette équation s'écrit :

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho g z) + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]$$

En utilisant l'équation (1.15c), cette équation devient :

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] = -\rho g \frac{\partial H}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] \quad (1.18)$$

Dans un premier temps, nous intégrons le premier membre de l'équation (1.18).

En remarquant que

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right] &= \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_x v_r)}{\partial r} - v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right) \right] \\ &= \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_x v_r)}{\partial r} \right] \quad \text{par (1.15a)} \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Leibnitz, les conditions aux bords et celle d'incompressibilité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^S \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_x v_r)}{\partial r} \right] ds &= \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^S v_x ds + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^S v_x^2 ds + \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_x v_r)}{\partial r} 2\pi r dr \right] \\ &= \rho \left[\frac{\partial (S\bar{V})}{\partial t} + \frac{\partial (\beta S\bar{V}^2)}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

où $\beta = \frac{1}{S\bar{V}^2} \int_S v_x^2 ds$ est le coefficient de Boussinesq ou de quantité de mouvement, dépendant notamment de la moyenne de la vitesse.

Remarque : β est le coefficient correcteur (valeur proche de 1) qui prend en compte la répartition réelle des vitesses à l'intérieur de la section [30].

β varie avec la forme des sections d'écoulement et la nature des parois qui limitent ces sections. Il donne une indication sur le degré de turbulence de l'écoulement.

Il est strictement supérieur à 1 et on a :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{4}{3} \quad \text{pour les écoulements laminaires non uniformes} \\ \beta &\approx 1 \quad \text{pour les écoulements turbulents} \\ \beta &= 1 \quad \text{pour les écoulements uniformes} \end{aligned}$$

Rappel : Un écoulement laminaire est caractérisé par des trajectoires de particules de fluide stables et régulières produisant des couches de fluide contiguës qui glissent les unes sur les

autres et ne se mélangent pas. Par contre, un écoulement turbulent est instationnaire et irrégulier. Un écoulement est uniforme quand une répartition uniforme des vitesses est observée.

Maintenant, nous intégrons le second membre de l'équation (1.18). Les termes de ce second membre sont étudiés séparément :

◦ premier terme :

$$-\int_0^S \rho g \frac{\partial H}{\partial x}(s) ds = -\rho g S \frac{\partial H}{\partial x}$$

◦ second terme

$$\mu \int_0^S \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} ds = \mu \frac{\partial^2 (S\bar{V})}{\partial x^2}$$

◦ troisième terme

$$\begin{aligned} \mu \int_0^S \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) ds &= \mu \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) 2\pi r dr \\ &= 2\pi \mu R \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{\Gamma} \right) \\ &= -2\pi R \tau_w \end{aligned}$$

où nous posons $\tau_w = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} \Big|_{\Gamma} \right)$ le cisaillement à la paroi.

Comme S est constante et avec la condition aux limites $v_x|_{\Gamma} = 0$, la première équation de la conservation de quantité de mouvement se réécrit donc :

$$\rho \frac{\partial (S\bar{V})}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\beta S\bar{V}^2)}{\partial x} + \rho g S \frac{\partial H}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 (S\bar{V})}{\partial x^2} + 2\pi R \tau_w = 0$$

Comme $Q = S\bar{V}$, que S est constante, et avec l'équation de continuité, nous avons :

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\rho}{S} \frac{\partial (\beta Q^2)}{\partial x} + \rho g S \frac{\partial H}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2\pi R \tau_w = 0$$

Remarque : Les deux premiers termes de cette équation représentent les termes d'inertie (temporelle et de convection), le troisième terme vient des forces extérieures dérivant d'un potentiel (de la pression et de la gravité), et les deux derniers termes représentent les termes visqueux du système (de diffusion et de frottements).

Récapitulatif

Après intégration des équations de Navier-Stokes sur la section de la conduite, nous obtenons le système de Saint-Venant pour un écoulement incompressible suivant :

$$(1.19) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) = -2\pi R v_r|_{\Gamma} \quad (1.19a) \\ \rho \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) + \frac{\rho}{S} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) + \rho g S \frac{\partial H}{\partial x}(t, x) - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(t, x) + 2\pi R \tau_w(t, x) = 0 \quad (1.19b) \\ \frac{p}{\rho g} + z = H(t, x) \quad (1.19c) \end{array} \right.$$

1.2.3 Écriture des équations de Saint-Venant pour les phénomènes transitoires lents

Un réseau de distribution est un système complexe faisant intervenir de nombreux phénomènes dynamiques. Ces phénomènes sont dus aux variations des consommations et à tous les changements produits par l'utilisation d'appareils hydrauliques (fermeture ou ouverture de vannes, mise en marche de pompes, ...).

Les phénomènes qui en résultent peuvent être classés en deux catégories : les phénomènes transitoires rapides avec création d'un coup de bélier et les phénomènes transitoires lents.

Prendre en compte les phénomènes transitoires lents revient à se placer dans le cas où l'échelle de temps qui génère les phénomènes transitoires est grande devant le temps de propagation de l'onde. Ainsi cela revient à considérer un système incompressible. Les phénomènes d'inertie et leur impact sont aussi pris en compte.

Nous avons donc modifié les équations de Saint-Venant (1.19) pour prendre en compte les phénomènes transitoires lents. Pour cela un adimensionnement et des hypothèses sont nécessaires.

Deuxième adimensionnement

Nous utilisons l'adimensionnement posé précédemment et introduisons d'autres variables sans dimension. Nous posons :

- $\bar{V} = V_x \bar{V}^*$ où V_x est l'unité sur l'échelle de vitesse suivant l'axe de la conduite
- $H = \frac{a V_x}{g k} H^*$
- $Q = V_x S Q^*$
- $Re_\ell = \frac{\ell V_x \rho}{\mu}$ est le nombre de Reynolds relatif à la longueur longitudinale de la conduite

– $\tau_w = \frac{\rho \mathbf{f} V_x^2}{8} \tau_w^*$ où $\frac{\rho \mathbf{f} V_x^2}{8}$ est l'unité sur l'échelle de cisaillement de la conduite, \mathbf{f} est la constante de friction et ρ la masse volumique du fluide

En appliquant cet adimensionnement à l'équation de Navier-Stokes (1.19b), nous obtenons l'équation sans dimension qui suit :

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + kM \frac{\partial(\beta Q^{*2})}{\partial x^*} + \frac{\partial H^*}{\partial x^*} - k \frac{M}{Re_\ell} \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^{*2}} + \frac{kM \ell \mathbf{f}}{4R} \tau_w^* = 0 \quad (1.20)$$

Hypothèses pour les phénomènes transitoires lents

Nous faisons l'hypothèse d'un faible nombre de Mach. En effet, $M = \frac{V_x}{a} \simeq \frac{1}{1000} \simeq 10^{-3}$. Pour négliger les phénomènes rapides, nous prenons un pas de temps k assez grand (i.e. $k \simeq 100$), donc $kM \sim 10^{-1}$.

Et comme le nombre de Reynolds relatif à la longueur de la conduite est grand (i.e. $Re_\ell \simeq 10^9$), nous avons $\frac{kM}{Re_\ell} \ll 1$. Par contre, pour une conduite rugueuse, $\mathbf{f} > 10^{-2}$ et le dernier terme ne peut pas être négligé.

En appliquant cette simplification à l'équation sans dimension (1.20), le 4^{ime} terme peut être négligé et l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + kM \frac{\partial(\beta Q^{*2})}{\partial x^*} + \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{kM \ell \mathbf{f}}{4R} \tau_w^* = 0$$

Remarque : le terme $kM \frac{\partial(\beta Q^{*2})}{\partial x^*}$ correspond à des pertes d'énergie dues à la turbulence et n'a pas été négligé comme dans les équations de Saint-Venant courantes pour les écoulements en charge.

Récapitulatif

Dans la mesure où le travail de recherche effectué dans cette thèse a été réalisé pour résoudre des problèmes de terrain, il nous a semblé intéressant de garder les équations avec leurs dimensions. Ainsi, dans les chapitres suivants, toutes les équations sont dimensionnées.

Finalement, pour les phénomènes transitoires lents dans une conduite des réseaux d'eau potable, nous avons trouvé le système de Saint-Venant modifié suivant :

$$(1.21) \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) = -2\pi R v_{r|\Gamma} & (1.21a) \\ \frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial H}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) + J(Q(t, x)) = 0 & (1.21b) \end{cases}$$

où $J(Q(t, x))$ est le terme des pertes de charge (linéique) égal à $J(Q(t, x)) = \frac{2\pi}{gR} \tau_w$.

La charge et la pression sont reliées par l'équation de Bernoulli :

$$H(t, x) = \frac{p}{\rho g}(t, x) + H(x)$$

En hydraulique, les pertes de charges peuvent être calculées de deux manières différentes : avec la formule d'Hazen-Williams et la formule de Darcy-Weisbach. Pour généraliser, nous écrivons :

$$J(Q(t, x)) = k|Q(t, x)|^{\gamma-1}Q(t, x)$$

où k est le coefficient de friction.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons retrouvé les équations de Saint-Venant pour les écoulements en charge sur une conduite d'un réseau d'eau potable.

Pour cela, nous sommes partis des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques. Nous avons émis de nombreuses hypothèses comme l'incompressibilité de l'écoulement, l'adhérence à la paroi pour avoir des fuites, la turbulence de l'écoulement pour prendre en compte les phénomènes transitoires lents.

En tenant compte de ses hypothèses, les équations de Navier-Stokes ont été intégrées sur la section droite d'une conduite.

Ainsi, des équations de Saint-Venant ont été modifiées pour modéliser l'écoulement incompressible d'un fluide dans les conduites d'un réseau d'eau potable prenant en compte les fuites. Avec ces équations, deux modèles vont pouvoir être développés : le premier prenant en compte les fuites non détectées constantes et le second comprenant la relation entre les fuites et la pression.

Chapitre 2

Modélisation à l'échelle d'un réseau comprenant des fuites non détectées constantes

Il est indispensable de tenir compte des fuites dans la modélisation des réseaux d'eau potable puisqu'elles sont responsables en moyenne de la perte de 30% de l'eau transportée. Dans les logiciels (comme Porteau, Epanet) simulant le comportement hydraulique des systèmes de distribution d'eau, les réseaux d'eau sont représentés par un graphe constitué d'un ensemble de nœuds et d'arcs. Les fuites peuvent être incorporées en tant que consommation supplémentaire aux nœuds.

Dans ce chapitre, nous présentons une formulation prenant en compte les fuites non détectées constantes pour modéliser précisément l'écoulement dans les réseaux d'eau. Cette formulation découle des équations de Saint-Venant modifiées écrites pour les phénomènes transitoires lents au chapitre précédent et considère des fuites constantes réparties de manière homogène le long de chaque conduite.

Ce travail de recherche est justifié par le besoin de considérer un réseau de conduites complexe dans sa globalité. Il s'appuie sur le travail de thèse d'O. Piller qui a développé plusieurs modèles pour comprendre et simuler les réseaux d'eau [33]. Un travail de master contribue également au développement de cette partie [4].

Dans un premier temps, nous présentons le modèle physique proposé pour modéliser l'écoulement de l'eau dans les réseaux d'eau et prenant en compte les fuites non détectées constantes. Ensuite, nous proposons plusieurs méthodes pour résoudre ce modèle et nous le validons sur des cas tests.

2.1 Modèle physique

2.1.1 Définitions et Notations

Définitions

Un réseau de distribution en eau potable est composé d'un ensemble de conduites ou canalisations et d'organes hydrauliques appelés singularités. Pour faciliter l'implémentation

informatique, le réseau est représenté par un graphe orienté composé de N nœuds et a arcs.

Nous distinguons trois sortes de nœuds dans un réseau de distribution en eau potable :

- nœud réservoir : Un réservoir est un ouvrage généralement en béton qui permet de stocker de l'eau. Lorsque le débit distribué est supérieur (resp. inférieur) au débit entrant, le niveau du réservoir baisse (resp. augmente). Le volume d'eau stocké doit être suffisant pour que le réservoir ne se vide pas complètement. Outre la fonction de stockage, le réservoir de tête assure un niveau d'énergie qui permet de distribuer l'eau à une pression suffisante. Le fond d'un réservoir est la cote radier, le haut du réservoir est la cote haut. A l'instant initial ($t = 0$), la charge aux réservoirs est connue.
- nœud ressource : Un nœud ressource est une réserve d'eau réelle ou fictive de grande dimension (lac, nappe phréatique, forage ...). Le niveau de l'eau ne varie pas, ainsi la charge est connue et fixée.
- nœud de consommation : Il symbolise un groupe de consommateurs plus ou moins éloignés les uns des autres aussi bien dans le plan qu'en altitude.

Nous distinguons n_r nœuds réservoirs, n_f nœuds ressources et n nœuds de consommation. Ainsi, $N = n_r + n_f + n$.

Notations

Nous définissons :

- $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^a$ le vecteur des débits sur les a arcs du réseau
- $\mathbf{H}^N \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des charges aux N nœuds du réseau
- $\mathbf{d}^n \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des consommations aux n nœuds de consommation du réseau
- $\mathbf{d}^r \in \mathbb{R}^{n_r}$ le vecteur des consommations aux n_r réservoirs du réseau

Le vecteur des charges s'écrit sous la forme : $\mathbf{H}^N = {}^t(\mathbf{H}, \mathbf{H}^f, \mathbf{H}^r)$ où \mathbf{H} est le vecteur des charges aux n nœuds de consommation, \mathbf{H}^f le vecteur des charges aux n_f nœuds ressources et \mathbf{H}^r le vecteur des charges aux n_r réservoirs.

Pour modéliser le réseau, nous introduisons la matrice d'incidence nœud-arc connue, notée $\mathbf{A}^N \in \mathcal{M}_{N,a}$. Cette matrice contient les informations sur la topologie du réseau.

Elle est définie par :

$$\mathbf{A}_{i,j}^N = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc } j \text{ sort du nœud } i \\ -1 & \text{si l'arc } j \text{ entre dans le nœud } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette matrice se décompose en trois sous-matrices : ${}^t\mathbf{A}^N = ({}^t\mathbf{A} \quad {}^t\mathbf{A}^f \quad {}^t\mathbf{A}^r)$

où $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,a}$, $\mathbf{A}^f \in \mathcal{M}_{n_f,a}$, $\mathbf{A}^r \in \mathcal{M}_{n_r,a}$ sont les matrices d'incidences nœud-arc réduites respectivement aux n nœuds de consommation, aux n_f nœuds ressources et aux n_r réservoirs.

Si un seul arc entre en un nœud i ou sort d'un nœud i , ce nœud est une feuille. Sinon, nous parlons de nœud interne.

2.1.2 Modélisation dans les réseaux d'eau potable

Dans le chapitre précédent, nous avons écrit les équations de Saint-Venant modifiées sur une conduite. Une généralisation à l'ensemble des conduites du réseau permet d'écrire :

$$(2.1) \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) = -2\pi Rv_{r|\Gamma} & (2.1a) \\ \frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial H^N}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) + \mathbf{J}(Q(t, x)) = 0 & (2.1b) \end{cases}$$

avec le terme de pertes de charge défini de la façon suivante :

$$\mathbf{J}(Q(t, x)) = k|Q(t, x)|^{\gamma-1} Q(t, x)$$

Sur un arc j , $(Q^2)_j = Q_j^2$ et $(|Q|^{\gamma-1} Q)_j = |Q_j|^{\gamma-1} Q_j$.

La première équation est l'équation de continuité et la seconde celle de la conservation de la quantité de mouvement.

Ces équations représentent l'écoulement dans les conduites en charge et tiennent compte des fuites dans les réseaux d'eau potable.

Équation de continuité

Nous réécrivons l'équation de continuité sur une conduite comme suit :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) = -d_f(t) \quad (2.2)$$

où $d_f = 2\pi Rv_{r|\Gamma}$ représente le débit de fuite que nous supposons constant et réparti de façon homogène sur chaque conduite. Cependant, le débit de fuite peut varier dans le temps.

En intégrant cette équation sur une partie de conduite de longueur x , l'équation (2.2) s'écrit :

$$Q(t, x) = Q(t, 0) - d_f(t)x \quad (2.3)$$

En considérant une conduite de longueur ℓ et en utilisant l'équation (2.3), le débit peut s'écrire en fonction du débit en milieu de conduite $Q_{0.5}$ de la manière suivante :

$$Q(t, x) = Q_{0.5}(t) + d_f(t) \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \quad (2.4)$$

Exemple : Regardons sur un exemple simple l'évolution du débit le long d'une conduite de mille mètres (i.e. $\ell = 1000 m$) pour différents niveaux de fuites d_f que nous supposons constants sur la conduite et dans le temps.

Nous imposons un débit en sortie égal à dix litres par seconde (i.e. $Q(t, \ell) = 10 l/s$).

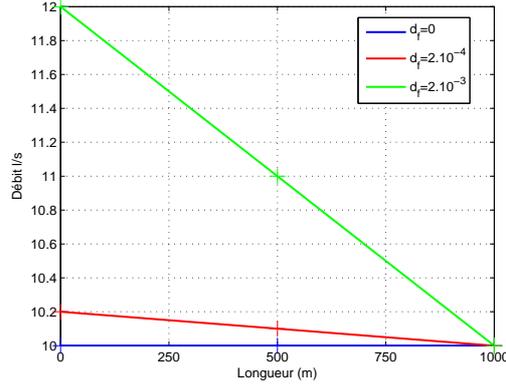


FIGURE 2.1 – Évolution du débit le long d'une conduite de 1000 m

Le débit Q a été calculé à partir du débit en milieu de conduite à partir de l'équation (2.4). La figure 2.1 représente les débits le long de la conduite pour trois niveaux de fuite différents ($d_f = 0$, 2.10^{-4} et $2.10^{-3} l/s/m$, ce qui représente respectivement 0 %, 2 % et 17 % de fuites sur la conduite).

Nous constatons que le débit varie linéairement le long de la conduite et qu'il dépend du niveau de fuite. Plus le niveau de fuite est grand, plus le débit en amont de l'écoulement doit être grand pour satisfaire le débit en fin de conduite.

Quand le niveau de fuite est nul, le débit est constant le long de la conduite.

Équation de continuité aux nœuds de consommation

Pour écrire la loi de continuité en un nœud de consommation i , nous utilisons la première loi de Kirchhoff. Elle impose que la somme des débits entrant au nœud i doit être égale à la somme des débits sortant de ce nœud.

Nous avons alors :

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_i^+} Q_j(t, 0) - \sum_{j \in \mathcal{J}_i^-} Q_j(t, \ell) + d_i^n(t) = 0 \quad (2.5)$$

où \mathcal{J}_i^+ est l'ensemble des arcs sortant du nœud i

\mathcal{J}_i^- est l'ensemble des arcs entrant au nœud i

En utilisant l'équation (2.4), nous pouvons réécrire l'équation (2.5) en fonction des débits en milieu de conduites.

L'équation de continuité se réécrit comme suit :

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_i^+} Q_{j,0.5}(t) - \sum_{j \in \mathcal{J}_i^-} Q_{j,0.5}(t) + q(t) = 0 \quad (2.6)$$

Nous notons

– $q(t) = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \left(\frac{\ell}{2} d_f \right)_j (t) + d_i^n(t)$, le vecteur comprenant la somme des fuites des arcs adjacents au nœud i et la consommation au nœud i .

Comme notre variable d'état est le débit en milieu de conduite, le débit de fuite imposé au

nœud i est proportionnel à la moitié de la longueur de chacune des conduites adjacentes.

– $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_i^+ \cup \mathcal{J}_i^-$, l'ensemble des arcs entrant et sortant du nœud i .

Finalement, l'équation de continuité (2.6) aux nœuds de consommation peut s'écrire matriciellement de la manière suivante :

$$\mathbf{A} \mathbf{Q}_{0.5} + \mathbf{q} = \mathbf{0}_n \quad (2.7)$$

où $\mathbf{Q}_{0.5} \in \mathbb{R}^a$ est le vecteur des débits en milieu de conduite et $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des besoins en eau aux nœuds de consommation (fuites et consommations).

Équation de continuité aux nœuds réservoirs

Aux nœuds réservoirs, l'équation de continuité s'écrit :

$$\mathbf{S}_r \frac{\partial \mathbf{H}^r}{\partial t} = -\mathbf{A}^r \mathbf{Q}_{0.5} - \mathbf{q}_f \quad (2.8)$$

avec $\mathbf{S}_r \in \mathcal{M}_{n_r, n_r}$ la matrice diagonale telle que $S_{r,i,i}$ est la surface de la section droite du réservoir i , et $\mathbf{q}_f \in \mathbb{R}^{n_r}$ est le vecteur des besoins en eau aux réservoirs.

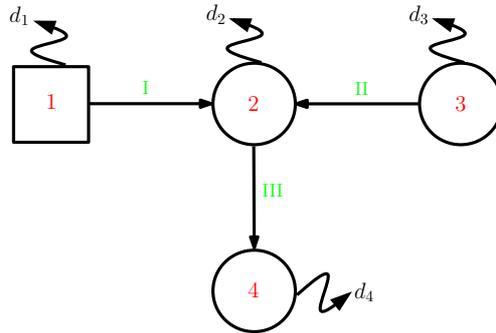
Le membre de gauche de l'équation de continuité aux réservoirs représente la mise à jour du niveau du réservoir.

Remarque : \mathbf{S}_r dépend de \mathbf{H}^r si le réservoir n'est pas cylindrique.

Équation de continuité aux nœuds ressources

Compte tenu de l'échelle de temps sur laquelle nous travaillons (i.e. une journée), nous supposons que la variation du niveau de l'eau aux nœuds ressources est nulle. Il n'est donc pas nécessaire d'écrire une équation de continuité en ces nœuds.

Exemple : Sur un réseau simple (représenté ci-dessous) composé de trois arcs de même longueur ℓ et de quatre nœuds de consommation, nous imposons le même débit de fuite d_f sur chaque arc. Nous écrivons l'équation de continuité en chaque nœud.



La matrice d'incidence nœud-arc associée à ce graphe est la suivante :

$$\mathbf{A}^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{A}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'incidence réduite au réservoir, et $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'incidence réduite aux nœuds de consommation.

L'équation de continuité au réservoir s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r \frac{\partial \mathbf{H}^r}{\partial t} &= -\mathbf{A}^r \mathbf{Q}_{0.5} - \mathbf{q}_f \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{I,0.5} & \mathbf{Q}_{II,0.5} & \mathbf{Q}_{III,0.5} \end{pmatrix} - \left(d_1^r + \frac{\ell}{2} d_f \right) \\ &= -\mathbf{Q}_{I,0.5} - \left(d_1^r + \frac{\ell}{2} d_f \right) \end{aligned}$$

Aux nœuds de consommation, les équations de continuité sont :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{I,0.5} \\ \mathbf{Q}_{II,0.5} \\ \mathbf{Q}_{III,0.5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_2^n + \frac{3\ell}{2} d_f \\ d_3^n + \frac{\ell}{2} d_f \\ d_4^n + \frac{\ell}{2} d_f \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi pour chaque nœud, nous pouvons écrire l'équation de continuité. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{I,0.5}(t) + \mathbf{Q}_{II,0.5}(t) = \mathbf{Q}_{III,0.5}(t) + d_2^n(t) + \frac{3\ell}{2} d_f & \text{(au nœud 2)} \\ \mathbf{Q}_{II,0.5}(t) + d_3^n(t) + \frac{\ell}{2} d_f = 0 & \text{(au nœud 3)} \\ \mathbf{Q}_{III,0.5}(t) = d_4^n(t) + \frac{\ell}{2} d_f & \text{(au nœud 4)} \end{cases}$$

Équation de quantité de mouvement

Pour se ramener à des notations matricielles, nous intégrons le long d'une conduite de longueur ℓ l'équation de quantité de mouvement trouvée précédemment et qui s'écrit :

$$\frac{1}{gS} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}^N}{\partial x} + \frac{1}{gS^2} \frac{\partial (\beta \mathbf{Q}^2)}{\partial x} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}(t, x)) = 0 \quad (2.9)$$

avec le terme de pertes de charge défini de la façon suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}(t, x)) = k |\mathbf{Q}(t, x)|^{\gamma-1} \mathbf{Q}(t, x)$$

De plus, notre variable d'état étant le débit en milieu de conduite, nous utilisons l'équation (2.4) pour écrire l'équation de quantité de mouvement en fonction de cette variable.

Chaque terme de l'équation (2.9) est intégré sur une conduite de longueur ℓ :

- Terme d'inertie temporelle : ce terme représente la variation de débit dans le temps.

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t} dx &= \frac{1}{gS} \int_0^\ell \left[\frac{\partial Q_{0.5}}{\partial t} + \frac{\partial d_f}{\partial t} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right] dx \\ &= \mathbf{L} \frac{\partial Q_{0.5}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.10)$$

avec $\mathbf{L} \in \mathcal{M}_{a,a}$ la matrice d'inertie au niveau des conduites et $L_{j,j} = \frac{\ell_j}{gS_j}$ est l'élément de la matrice associé à la conduite j .

- Terme de variation de charge en espace : la différence de charge entre les deux extrémités de la conduite de longueur ℓ est égale à la perte de charge sur la conduite.

$$\int_0^\ell \frac{\partial \mathbf{H}^N}{\partial x} dx = -\delta \mathbf{H} \quad (2.11)$$

$\delta \mathbf{H}$ peut s'exprimer comme $\delta \mathbf{H} = {}^t \mathbf{A} \mathbf{H} + {}^t \mathbf{A}^f \mathbf{H}^f + {}^t \mathbf{A}^r \mathbf{H}^r = {}^t \mathbf{A}^N \mathbf{H}^N$.

Le vecteur des différences de charge est une tension au sens de la théorie des graphes.

- Terme d'inertie de convection

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \frac{1}{gS^2} \frac{\partial (\beta Q^2)}{\partial x} dx &= \frac{\beta}{gS^2} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \left[Q_{0.5} + d_f \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right]^2 dx \\ &= -2\beta \mathbf{P} Q_{0.5}\end{aligned}\quad (2.12)$$

où $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{a,a}$ est une matrice diagonale telle que $P_{j,j} = \frac{L_{j,j} d_f}{S_j}$.

- Terme de pertes de charge : il correspond à l'énergie dégradée le long de la conduite. Nous choisissons la formulation d'Hazen-Williams pour la quantifier.

Nous notons

$$\begin{aligned}\xi(d_f, Q_{0.5}) &= \int_0^\ell J(Q) dx \\ &= \int_0^\ell k \left| Q_{0.5} + d_f \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right|^{\gamma-1} \left[Q_{0.5} + d_f \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right] dx \\ &= \frac{k}{(\gamma+1)d_f} \left[\left| Q_{0.5} + d_f \frac{\ell}{2} \right|^{\gamma+1} - \left| Q_{0.5} - d_f \frac{\ell}{2} \right|^{\gamma+1} \right]\end{aligned}\quad (2.13)$$

Des formulations similaires ont été proposées par McInnis et Karney [29] et Todini [39].

Finalement, en tenant compte des équations (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\mathbf{L} \frac{\partial Q_{0.5}}{\partial t} - \delta \mathbf{H} - 2\beta \mathbf{P} Q_{0.5} + \boldsymbol{\xi}(d_f, Q_{0.5}) = 0_a \quad (2.14)$$

où

– $\mathbf{L} \frac{\partial Q_{0.5}}{\partial t}$ est le terme d'inertie au niveau des conduites,

- $\delta \mathbf{H}$ est la différence de charge sur les conduites,
- $2\beta \mathbf{P} \mathbf{Q}_{0.5}$ est un terme additionnel correspondant à l'inertie de convection causée par les fuites,
- $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{d}_f, \mathbf{Q}_{0.5})$ est le terme de pertes de charge par effet de friction qui tient compte des fuites.

Formulation matricielle du problème

Les équations de continuité et de quantité de mouvement trouvées dans cette partie définissent le problème sous forme matriciel suivant :

$$(2.15) \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{0.5} + \mathbf{q} = 0_n & (2.15a) \\ \mathbf{S}_r \frac{\partial \mathbf{H}^r}{\partial t} = -\mathbf{A}^r \mathbf{Q}_{0.5} - \mathbf{q}_f & (2.15b) \\ \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{Q}_{0.5}}{\partial t} - \delta \mathbf{H} - 2\beta \mathbf{P} \mathbf{Q}_{0.5} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{d}_f, \mathbf{Q}_{0.5}) = 0_a & (2.15c) \end{cases}$$

Nous avons à résoudre ce problème qui est un système algébro-différentiel car il combine une équation algébrique (2.15a) et deux équations différentielles (2.15b et 2.15c). Dans cette partie, nous transformons ce système en une équation différentielle ordinaire.

2.2 Résolution du problème hydraulique

Les matrices et les vecteurs utilisés dans la formulation (2.15) dépendent du nombre de nœuds et du nombre de conduites du réseau. Suivant le réseau étudié, les temps de calculs peuvent être plus ou moins longs. Pour remédier à ce problème, il est courant d'utiliser la théorie des graphes pour développer une formulation réduite permettant de diminuer le nombre d'inconnues.

Cette partie s'appuie en partie sur le travail de thèse d'O. Piller effectué sur la modélisation des réseaux d'eau potable [33].

2.2.1 Formulation réduite du problème hydraulique

Cette formulation permet de minimiser les composantes du vecteur inconnu des débits ($\mathbf{Q}_{0.5} \in \mathbb{R}^a$).

Pour cela, la notion de débits maillants \mathbf{Q}_c est introduite ($\mathbf{Q}_c \in \mathbb{R}^{a-n}$). Cette notion est souvent utilisée dans les réseaux électriques (tension de maille).

Nous écrivons

$$\mathbf{Q}_{0.5} = {}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_d \quad (2.16)$$

avec

- \mathbf{M}_0 est la matrice d'incidence maille-arc augmentée. $\mathbf{M}_0 \in \mathcal{M}_{a-n,a}$ où les $a - n$ lignes correspondent soit à des chaînes entre nœuds réservoirs, soit à des cycles.

La matrice \mathbf{M}_0 est définie par

$$\mathbf{M}_0 = \left(-{}^t(\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) | \mathbf{I}_{a-n} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_0 {}^t \mathbf{A} = 0_{a-n}$$

avec $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{n,n}$ la matrice d'incidence de l'arbre recouvrant les nœuds de consommation et $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}_{n,a-n}$ la matrice d'incidence du co-arbre associé.

– Le vecteur $\mathbf{Q}_d \in \mathbb{R}^a$ est défini par

$$\mathbf{Q}_d = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{q} \\ 0_{a-n} \end{pmatrix}$$

Nous proposons deux formulations à notre problème hydraulique écrit sous forme matricielle (2.15).

Formulation 1 : Nous posons $\mathbf{Y} = {}^t(\mathbf{Q}_c, \mathbf{H}^r)$ le vecteur d'état composé du vecteur des débits maillants ($\mathbf{Q}_c \in \mathbb{R}^{a-n}$) et du vecteur des charges aux réservoirs ($\mathbf{H}^r \in \mathbb{R}^{n_r}$).

Le problème (2.15) peut se réécrire ainsi :

$$\begin{cases} (\mathbf{M}_0 \mathbf{L}^t \mathbf{M}_0) \frac{\partial \mathbf{Q}_c}{\partial t} = \mathbf{M}_0 \left(-\boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{A}^f \mathbf{H}^f + {}^t \mathbf{A}^r \mathbf{H}^r + 2\beta \mathbf{P}({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_d) - \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{Q}_d}{\partial t} \right) \\ \mathbf{S}_r \frac{\partial \mathbf{H}^r}{\partial t} = -\mathbf{A}^r ({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_d) - \mathbf{q}_f \end{cases}$$

puisque $\mathbf{M}_0 \delta \mathbf{H} = \mathbf{M}_0 ({}^t \mathbf{A} \mathbf{H} + {}^t \mathbf{A}^f \mathbf{H}^f + {}^t \mathbf{A}^r \mathbf{H}^r) = \mathbf{M}_0 ({}^t \mathbf{A}^f \mathbf{H}^f + {}^t \mathbf{A}^r \mathbf{H}^r)$ car $\mathbf{M}_0 {}^t \mathbf{A} = 0$.

Le système global s'écrit :

$$\mathbf{M}_1 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{F}}_1(t, \mathbf{Y})$$

avec \mathbf{M}_1 est une matrice creuse symétrique définie positive, indépendante du temps définie

$$\text{par : } \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 \mathbf{L}^t \mathbf{M}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_r \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{F}}_1(t, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 \left(-\boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{A}^f \mathbf{H}^f + {}^t \mathbf{A}^r \mathbf{H}^r + 2\beta \mathbf{P}({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_d) - \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{Q}_d}{\partial t} \right) \\ -\mathbf{A}^r ({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_d) - \mathbf{Q}_f \end{pmatrix}$$

Le principal intérêt, outre la réduction du nombre d'inconnues, est la transformation de l'équation algébro-différentielle d'ordre 1 en une équation ordinaire différentielle.

Formulation 2 : Nous posons $\mathbf{Y} = {}^t(\mathbf{Q}_c, \mathbf{H}^r, \mathbf{q})$ le vecteur d'état composé du vecteur des débits maillants, du vecteur des charges aux réservoirs et du vecteur des consommations aux nœuds de consommation et des fuites associées ($\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$).

Le problème s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} (\mathbf{M}_0 \mathbf{L}^t \mathbf{M}_0) \frac{\partial \mathbf{Q}_c}{\partial t} + \mathbf{M}_0 \mathbf{L} \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ \mathbf{M}_0 \left(-\boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{A}^f \mathbf{H}^f + {}^t \mathbf{A}^r \mathbf{H}^r + 2\beta \mathbf{P} \left({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{q} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ \mathbf{S}_r \frac{\partial \mathbf{H}^r}{\partial t} = -\mathbf{A}^r \left({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \mathbf{q}_f \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = g(t) \end{cases}$$

Le problème global s'écrit :

$$\mathbf{M}_2 \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{F}}_2(t, \mathbf{Y})$$

avec \mathbf{M}_2 la matrice creuse et indépendante du temps définie par :

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 \mathbf{L}^t \mathbf{M}_0 & 0 & \mathbf{M}_0 \mathbf{L} \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \mathbf{S}_r & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$$

et $\tilde{\mathbf{F}}_2(t, \mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 \left(-\boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{A}^f \mathbf{H}^f + {}^t \mathbf{A}^r \mathbf{H}^r + 2\beta \mathbf{P} \left({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ -\mathbf{A}^r \left({}^t \mathbf{M}_0 \mathbf{Q}_c + \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \mathbf{Q}_f \\ g(t) \end{pmatrix}$

Cette formulation permet d'avoir toutes les dérivées du même côté, même si la dérivée par rapport au temps de la fonction des consommations est connue. Une équation différentielle ordinaire est à résoudre.

2.2.2 Méthodes de résolution

Dans un réseau d'eau, les opérations hydrauliques, comme une ouverture et une fermeture de vanne, créent des changements brutaux dans l'écoulement car le coefficient de friction associé à cet équipement peut devenir très petit ou très grand. Les problèmes définissant l'écoulement dans un réseau d'eau sont alors considérés comme numériquement raides.

Il est d'usage d'utiliser des méthodes avec contrôle du pas de temps pour prendre en compte les changements brutaux dans la trajectoire de l'équation. Pour résoudre ces problèmes, les méthodes explicites doivent être utilisées avec un pas de temps très petit pour être efficaces. C'est pourquoi, on leur préfère les méthodes implicites (par exemple celles de Runge-Kutta ou multi-pas) pour la résolution numérique des problèmes raides.

Nous proposons et présentons deux méthodes pour résoudre le problème hydraulique : une méthode dite de Rosenbrock et la méthode de Gear.

Le vecteur d'état \mathbf{Y} et la matrice du problème global dépendent de la formulation choisie :

- pour la formulation 1, $\mathbf{Y} = {}^t(\mathbf{Q}_c, \mathbf{H}^r)$ et matrice \mathbf{M}_1
- pour la formulation 2, $\mathbf{Y} = {}^t(\mathbf{Q}_c, \mathbf{H}^r, \mathbf{q})$ et matrice \mathbf{M}_2

Méthode de Rosenbrock

Les méthodes de type Rosenbrock sont des méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg, alliant rapidité et précision dans la résolution des problèmes raides. L'idée générale de ces méthodes est de remplacer les systèmes non linéaires qui apparaissent dans les schémas implicites par des systèmes linéaires. Ce sont des méthodes linéairement implicites.

Notre problème s'écrit sous sa forme générale :

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{Y}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$$

Remarque : Il est à noter que si le réservoir n'est pas cylindrique, sa surface dépend de la charge au réservoir et donc la matrice \mathbf{M} dépend de \mathbf{Y} . Cette matrice est alors incluse dans la fonction \mathbf{F} .

En discrétisant notre problème, le schéma s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + \delta t \mathbf{F}(t^{n+1}, \mathbf{Y}^{n+1})$$

En faisant une linéarisation du terme $\mathbf{F}(t^{n+1}, \mathbf{Y}^{n+1})$, l'équation s'écrit :

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + \delta t \left[\mathbf{F}(t^n, \mathbf{Y}^n) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(t^n, \mathbf{Y}^n) (\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n) + \delta t \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t^n, \mathbf{Y}^n) \right]$$

En posant

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + k$$

nous trouvons l'équation

$$\left(\mathbf{I} - \delta t \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(t^n, \mathbf{Y}^n) \right) k = \delta t \mathbf{F}(t^n, \mathbf{Y}^n) + \delta t^2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t^n, \mathbf{Y}^n)$$

Cette écriture correspond à une itération de l'algorithme de Newton pour résoudre le système issu du schéma d'Euler implicite.

Cette équation peut être généralisée et la méthode de Rosenbrock à s pas est alors formulée [24]. Nous écrivons :

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

où les k_i ($i \in [1, s]$) sont solutions des s équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{I} - \gamma \delta t \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(t^n, \mathbf{Y}^n) \right) k_i &= \delta t \mathbf{F}(t^n + \alpha_i \delta t, \mathbf{Y}^n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) \\ &+ \delta t \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(t^n, \mathbf{Y}^n) \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} k_j + \gamma_i \delta t^2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t^n, \mathbf{Y}^n) \end{aligned}$$

où $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$ est la matrice jacobienne de \mathbf{F} par rapport à x et $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$ est la dérivée partielle de \mathbf{F} par rapport à t .

Les coefficients γ , α_i , α_{ij} , γ_{ij} , γ_i et b_i sont des constantes indépendantes du problème, déterminées pour assurer la stabilité et l'ordre de consistance voulu.

Méthode de Gear

Cette méthode proposée en 1969, appelée aussi méthode BDF pour *Backward Differentiation Formula*, est réputée être très stable.

Elle utilise le développement suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \frac{1}{2\delta t} (3 \mathbf{Y}^{n+1} - 4 \mathbf{Y}^n + \mathbf{Y}^{n-1})$$

L'équation différentielle ordinaire définie précédemment s'écrivant sous la forme générale

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} = \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{Y}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$$

peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \mathbf{Y}^{n+1} - 2 \mathbf{Y}^n + \frac{1}{2} \mathbf{Y}^{n-1} &= \delta t \mathbf{F}(t^{n+1}, \mathbf{Y}^{n+1}) \\ \iff \frac{3}{2} \mathbf{Y}^{n+1} &= 2 \mathbf{Y}^n - \frac{1}{2} \mathbf{Y}^{n-1} + \delta t \mathbf{F}(t^{n+1}, \mathbf{Y}^{n+1}) \end{aligned}$$

Nous posons

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \frac{3}{2} \mathbf{y} - 2 \mathbf{Y}^n + \frac{1}{2} \mathbf{Y}^{n-1} - \delta t \mathbf{F}(t^{n+1}, \mathbf{y})$$

Pour trouver la valeur approchée de la solution de l'équation $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = 0$, nous utilisons la méthode de Newton.

Nous construisons par récurrence une suite (\mathbf{y}_m) définie par

$$\mathbf{y}_{m+1} = \mathbf{y}_m - (\mathbf{G}'(\mathbf{y}_m))^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{y}_m)$$

avec

$$\mathbf{G}'(\mathbf{y}) = \frac{3}{2} \mathbf{I} - \delta t \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

Sous de bonnes hypothèses (i.e. la fonction \mathbf{G} régulière et \mathbf{y}_0 suffisamment proche de \mathbf{Y}^{n+1}), (\mathbf{y}_m) converge vers la solution de l'équation $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = 0$, et la convergence est très rapide.

2.3 Résultats

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus par la résolution du modèle hydraulique (2.15) sur une période de 24 h. Deux réseaux sont étudiés pour lesquels un même débit de fuite constant est imposé le long des conduites.

Les principales caractéristiques de ces réseaux sont données en annexe B. Vous y trouverez par exemple les longueurs et les diamètres des conduites, les coefficients de fuite et de rugosité, les consommations aux nœuds ...

Nous définissons les symboles suivants utilisés pour représenter graphiquement un réseau :
– un arc orienté représente une conduite,

- trois symboles différents définissent les trois types de nœuds possibles : un carré pour un réservoir, un triangle pour un nœud ressource et un rond pour un nœud de consommation,
 - une flèche sortant d'un nœud symbolise une consommation en ce nœud,
 - une flèche droite entrant dans un réservoir représente le débit q_e alimentant ce réservoir.
- Il est constant tout au long de l'expérience.

Ces notations sont valables dans l'ensemble de la thèse.

2.3.1 Comparaison des deux formulations et des méthodes de résolution

La formulation 1 qui a pour variables d'état le débit maillant et la charge au réservoir est plus rapide que la formulation 2, qui elle a pour variables d'état le débit maillant, la charge au réservoir et la consommation aux nœuds. Grâce au meilleur conditionnement de la matrice \mathbf{M}_1 , la correction du pas de temps est moins fréquente que celle pour la formulation 2. Ainsi la formulation 1 est choisie pour sa rapidité avec des résultats similaires.

Le solveur *ode23s* du logiciel Matlab est utilisé pour résoudre le problème avec la méthode de Rosenbrock. Ce solveur admet un contrôle du pas de temps.

Bien qu'un solveur (i.e. *ode15s*) correspondant à la méthode de Gear améliorée existe, nous avons fait le choix de reprogrammer plus simplement la méthode de Gear. Ce programme permet de choisir le pas de temps et donne d'excellents résultats. Nous préférons cette méthode pour sa simplicité et sa rapidité pour une précision équivalente à la méthode de Rosenbrock.

2.3.2 Ordre de grandeur des fuites non détectées

Un réseau d'eau potable est considéré très fuyard lorsque le débit de fuite est plus grand que $2.10^{-4} l/s/m$, soit environ $17 m^3/j/km$.

Dans la suite, nous parlons de borne supérieure pour le débit de fuite d_f et nous posons $d_{f_{sup}} = 2.10^{-4} l/s/m$. Cependant, dans le cadre d'un travail exploratoire, cette borne supérieure peut être dépassée pour tester les limites des modèles.

2.3.3 Premier cas test

Présentation du réseau

Le premier cas test étudié est le réseau 1 qui contient quatre nœuds et trois arcs. Parmi les quatre nœuds, les trois types de nœuds définis dans la première partie de ce chapitre sont représentés, soit un réservoir, un nœud ressource utilisé pour alimenter un secteur non modélisé et deux nœuds de consommation.

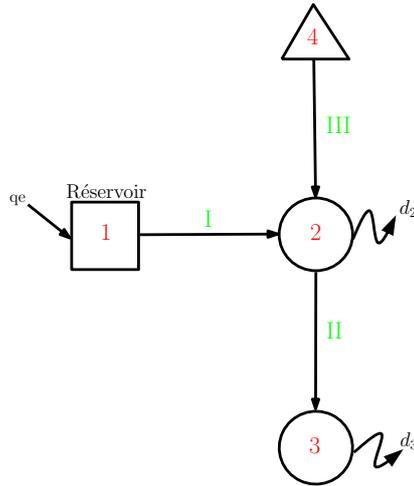


FIGURE 2.2 – Représentation du réseau 1

Pour modéliser les fuites, un débit de fuite est réparti de façon homogène sur chaque conduite. Il est identique sur toutes les conduites et égal à $8.3 \cdot 10^{-5} \text{ l/s/m}$. Le réservoir 1 est un réservoir de tête. Il est alimenté par un débit q_e constant dans le temps.

Consommations

Les consommations sur le réseau sont représentées sur la figure 2.3. Seuls les nœuds 2 et 3 symbolisent les débits à distribuer aux abonnés. Les fonctions les représentant sont connues sur toute la période de calculs (i.e. sur 24 h).

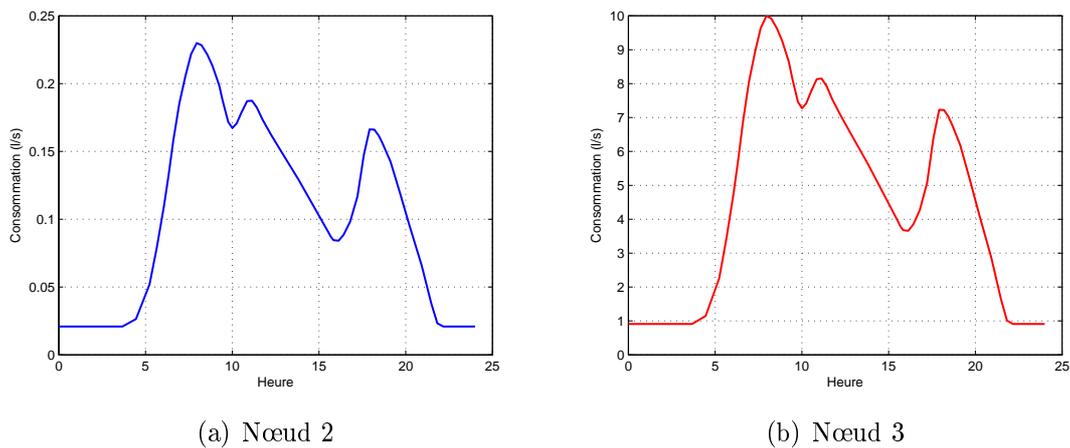


FIGURE 2.3 – Consommations aux nœuds 2 et 3 du réseau 1

Les consommations ont la même allure, il s'agit de consommations domestiques pavillonnaires. Des périodes de pointe sont présentes indiquant de fortes consommations de la part des abonnés (vers 8 h, 12 h et 18 h). La nuit, les consommations sont faibles. Nous parlons de période creuse.

Elles ont la même forme mais pas la même intensité, car la consommation est plus importante au nœud 3 qu'au nœud 2. Les fuites étant réparties sur les arcs, elles n'apparaissent pas dans ces courbes.

Calcul des débits sur les arcs

Les débits sur les trois arcs sont représentés en fonction du temps sur la figure 2.4. Dans le modèle hydraulique, la variable d'état est le débit en milieu de conduites. Ainsi, les débits représentés sont les débits en milieu des trois conduites.

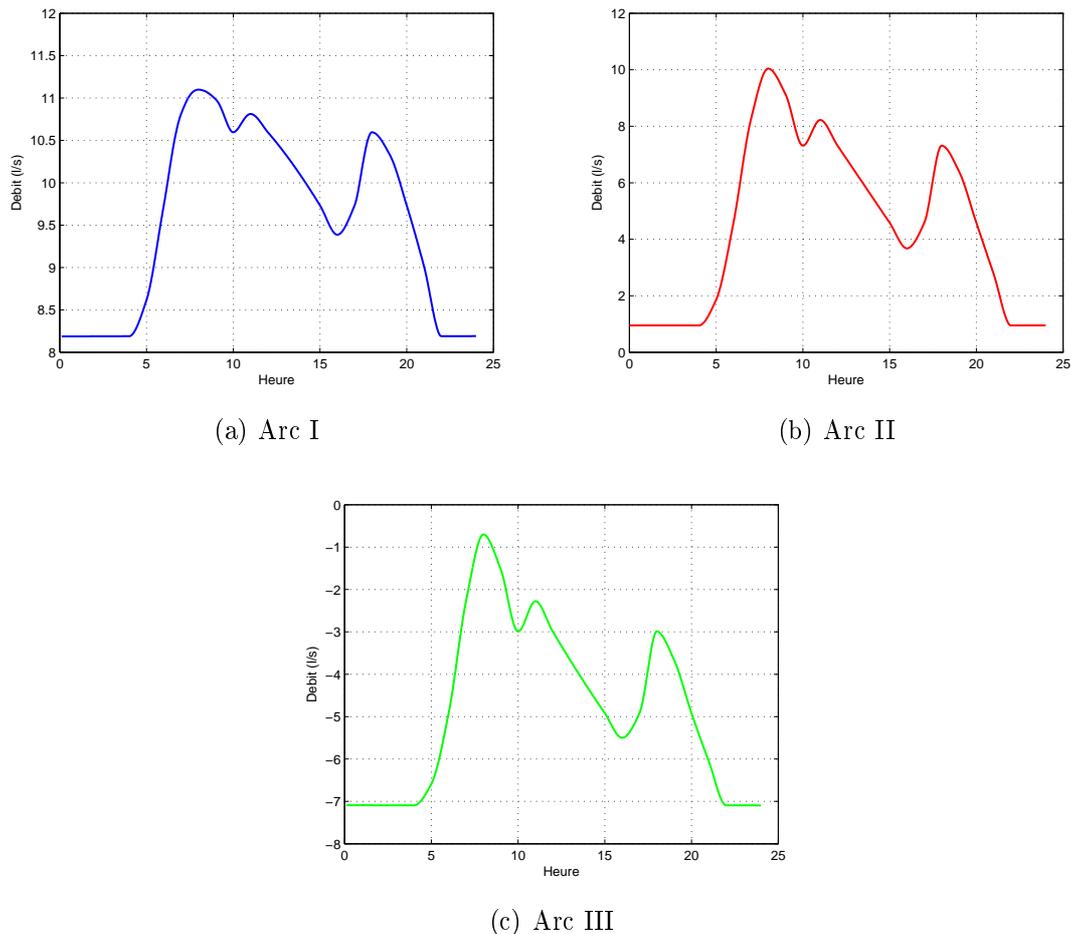


FIGURE 2.4 – Débits sur les arcs du réseau 1

L'allure des courbes est la même que celle de la consommation. En effet, pour être satisfaite, la consommation aux nœuds induit des débits sur les arcs, dont l'allure se calque sur celle des consommations. Les fuites ont un faible impact sur la forme des courbes des débits. En périodes de pointe, les débits sont plus grands qu'en périodes creuses.

L'équation de continuité (2.7) écrite au nœud 3 traduit l'égalité de ce qui entre et de ce qui sort en ce nœud. Ainsi, le débit sur l'arc II (figure 2.4(b)) est égal à la somme de la consommation au nœud 3 (figure 2.3(b)) et de la moitié du débit de fuite de la conduite

rapporté au nœud 3 (soit $0.041 l/s$).

Le débit obtenu sur l'arc III est négatif tout le long de l'expérience. Cela implique que l'écoulement sur cet arc se fait dans le sens contraire de l'orientation de ce dernier. L'écoulement se fait donc du nœud 2 vers le nœud ressource qui sert à alimenter un secteur non pris en compte dans cette modélisation.

Calcul des charges aux nœuds

Les charges aux quatre nœuds sont tracées en fonction du temps sur la figure 2.5.

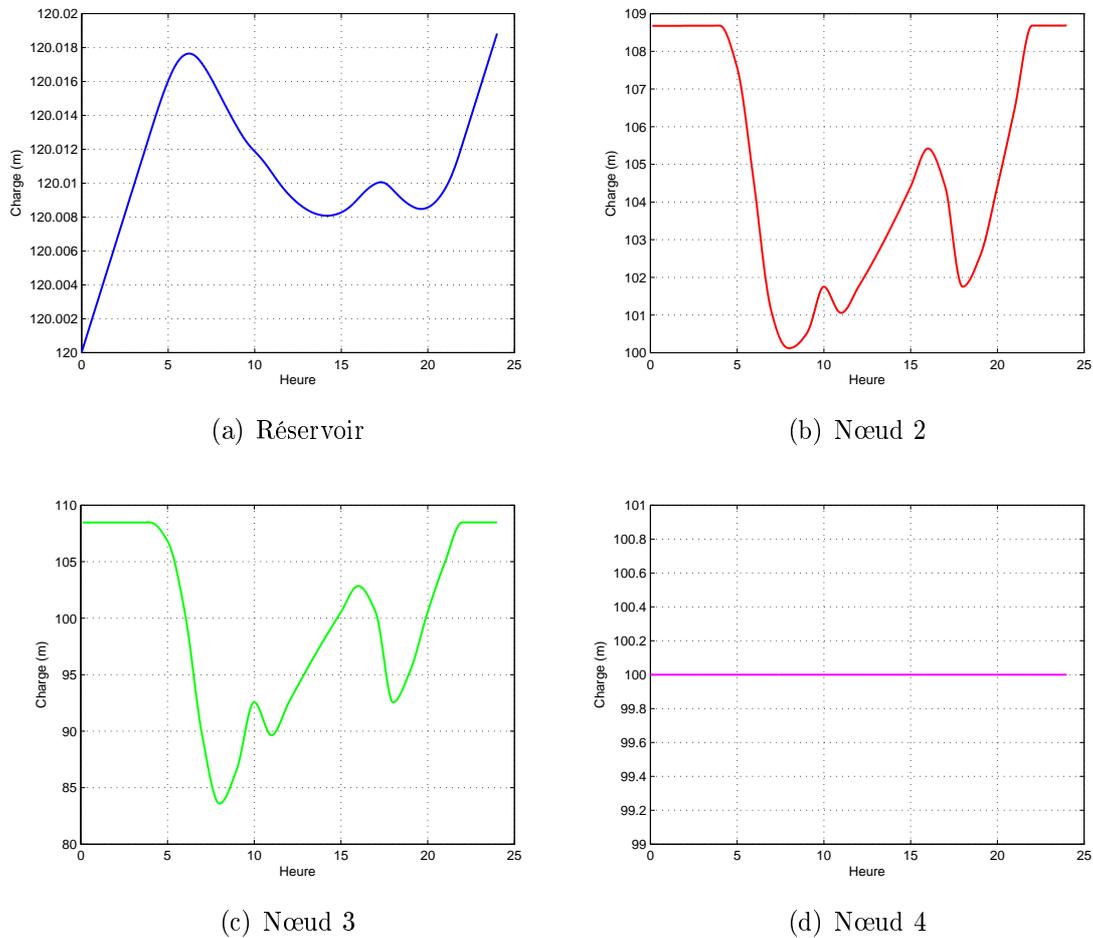


FIGURE 2.5 – Charges aux nœuds du réseau 1

La charge au réservoir est connue à l'instant initial ($H^r(t = 0) = 120 m$). Sur la figure 2.5(a), nous constatons que la charge est égale à $120 m$ à $t = 0$ et reste aux alentours de cette valeur le reste du temps.

Un débit constant q_e est ajouté en entrée du réservoir. Ce débit représente une partie du réseau non modélisée qui alimente le réservoir. Il est supérieur à la consommation moyenne de la journée puisque la charge en fin d'expérience est plus grande que la charge initiale. En période creuse, le réservoir se remplit car le débit injecté est plus important que celui

distribué. Le phénomène inverse est observé en période de pointe.

Aux nœuds de consommation 2 et 3, la charge est inversement proportionnelle au débit. En effet, plus le débit est fort, plus la pression est petite et ainsi plus la charge est petite (cf équation de Bernoulli).

En un nœud ressource, la charge est connue et ne varie pas dans le temps. Au nœud ressource, la charge H^f est égale à 100 m et est constante sur les 24 h .

Ordre de grandeur

Pertes de charge

Le calcul de la perte de charge n'est pas faite de la même manière que dans les logiciels de modélisation des réseaux d'eau. Elle est intégrée sur toute la longueur de la conduite et dépend des fuites (équation 2.13). Dans un article de conférence [25], nous avons montré que la différence n'est pas significative pour des fuites non détectées inférieures à 2.8 l/s/m .

Calcul des inerties

Nous représentons sur la figure 2.6 les termes d'inertie de l'arc II, pour différents débits de fuite d_f dont $d_f = 8.10^{-4}\text{ l/s/m}$ représentant une fuite trop importante sur un réseau mais intéressante dans le cadre d'un travail exploratoire. Dans le modèle hydraulique développé dans ce chapitre, l'inertie temporelle est définie par le terme $\mathbf{L}\frac{\partial Q_{0.5}}{\partial t}$ et l'inertie de convection par le terme $2\beta\mathbf{P}Q_{0.5}$.

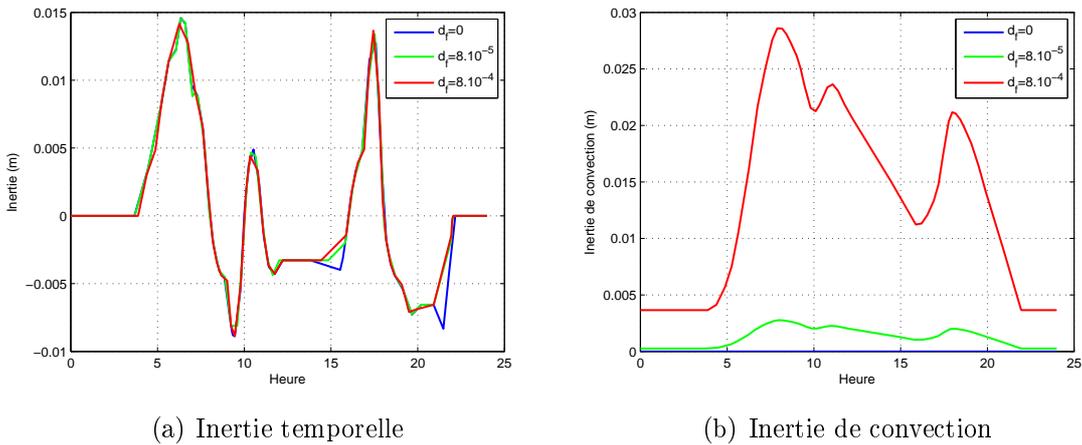


FIGURE 2.6 – Inerties sur la conduite II du réseau 1

L'inertie temporelle ne dépend pas du débit de fuite, quand ce dernier est acceptable. De plus, elle équivaut à plus ou moins 0.01 m sur une conduite d'un kilomètre, ce qui n'est pas significatif puisque la précision de certains paramètres hydrauliques est de l'ordre du centimètre (la cote sol par exemple). La matrice d'inertie \mathbf{L} correspondant à cette conduite est égale à $12\text{ ms}^2/\text{l}$ pour un débit exprimé en l/s .

Cependant, si une variation de débit équivalente à 10 l/s apparaît en 2 minutes, le terme d'inertie est conséquent (i.e égal à 1). Ce phénomène apparaît lors de consommations rares et soudaines, comme dans un réseau rural, en fin de distribution ou au niveau d'un poteau d'incendie. Dans ces cas là, il est intéressant de prendre en compte le terme d'inertie temporelle dans la modélisation.

Quant à l'inertie de convection, elle dépend fortement du débit de fuite. Pour un niveau de fuite très fort (i.e. $d_f = 8.10^{-5}\text{ l/s/m}$), $2\beta\mathbf{P}$ est de l'ordre de $2.4\cdot 10^{-3}$. Le terme d'inertie de convection est donc toujours négligeable car même en cas de très grosse fuite, il est inférieur à 3 mm . Ceci valide la tendance actuelle d'utiliser des modèles permanents en transitoire lent sans inertie de convection. Néanmoins, nous faisons le choix de la conserver dans les équations puisqu'elle ne coûte rien en terme de temps de calculs.

Nous avons donc choisi de garder les termes d'inerties temporelle et de convection dans les modèles définis dans cette thèse. Ainsi, nous avons des modèles plus complets que ceux utilisés dans la plupart des logiciels de modélisation des réseaux d'eau, puisqu'ils ne tiennent pas compte des inerties créées par les phénomènes transitoires lents. Cependant, nous ne les tracerons plus car leur étude ne fait pas l'objet de ce travail de recherche.

2.3.4 Deuxième cas test

Présentation du réseau

Le second cas test étudié est le réseau 2. Il contient une maille, six arcs, et six nœuds, dont un réservoir et cinq nœuds de consommation.

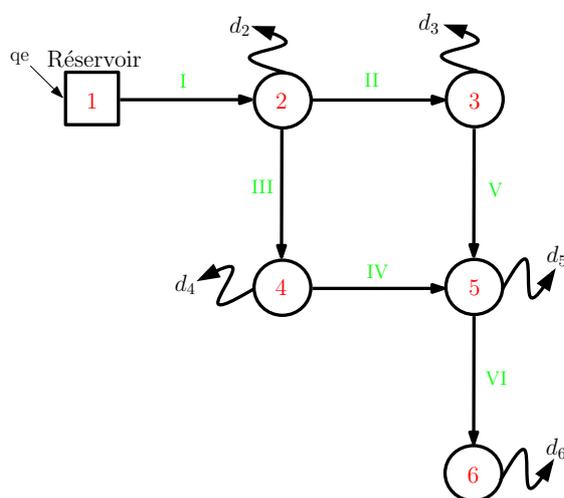
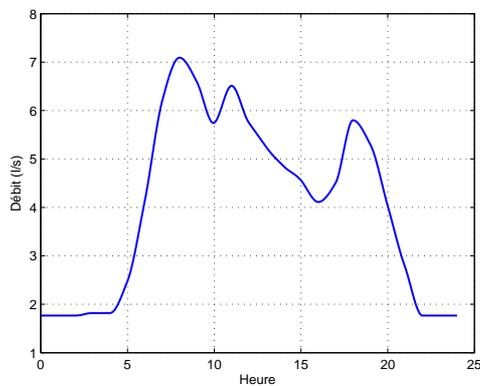


FIGURE 2.7 – Représentation du réseau 1

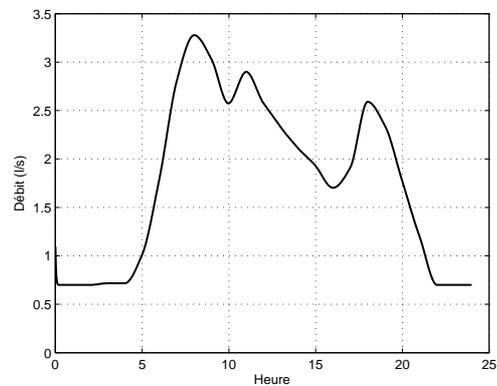
Un débit de fuite constant est réparti de manière homogène sur chaque conduite. Le réservoir est alimenté par un débit constant dans le temps pendant toute la durée des calculs. Les consommations ont des formes et des intensités différentes.

Calcul des débits sur des arcs

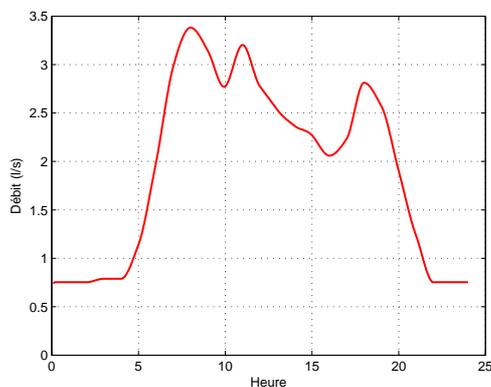
Nous présentons quatre courbes représentant les débits au milieu des arcs.



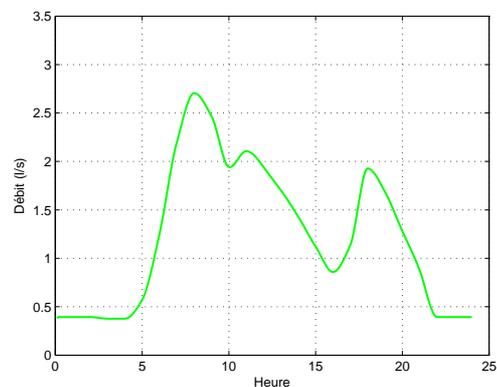
(a) Arc I



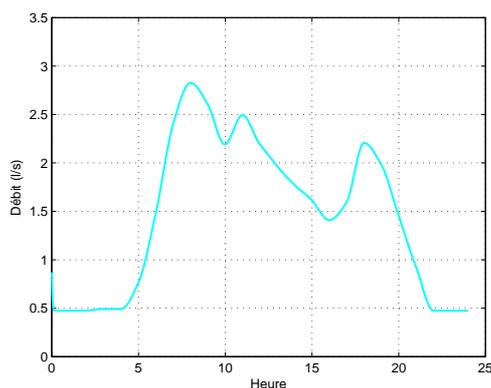
(b) Arc II



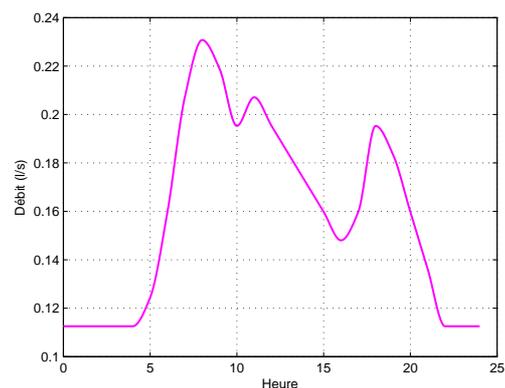
(c) Arc III



(d) Arc IV



(e) Arc V



(f) Arc VI

FIGURE 2.8 – Débits sur les arcs du réseau 2

Les débits varient dans le temps pour suivre les consommations. Les débits en amont du réseau sont plus forts que les débits en aval du réseau puisque le service en route (i.e. les consommations) est présent. En effet, l'écoulement part du réservoir, et pour satisfaire

l'équation de continuité, le débit entrant en un nœud se sépare en plusieurs débits. Les consommations aux nœuds 3 et 4 ont des formes totalement différentes, mais cette différence n'apparaît pas dans les résultats des débits des arcs II et III. En effet, ces derniers ne sont pas significativement différents car la consommation au nœud 5 prédomine sur les autres consommations. L'équation de continuité (2.7) implique que le débit sur l'arc VI soit égal à la somme de la consommation au nœud 6 et du débit de fuite rapporté au nœud 6 (soit $0.1 l/s$).

Calcul des charges aux nœuds

Les résultats obtenus pour les charges aux nœuds sont présentés sur la figure 2.9.

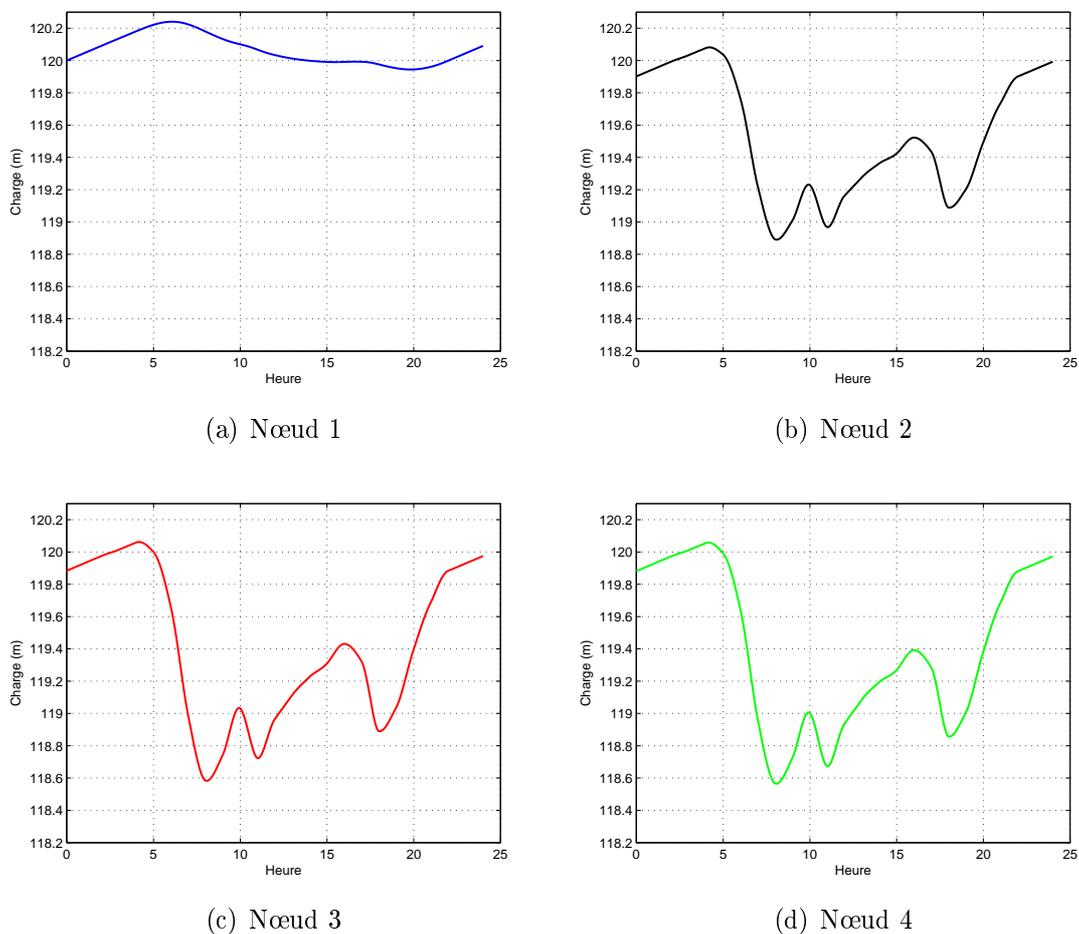
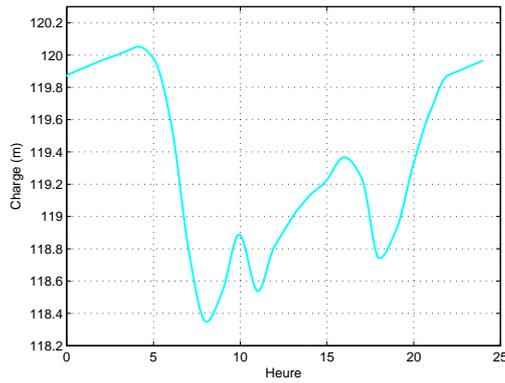


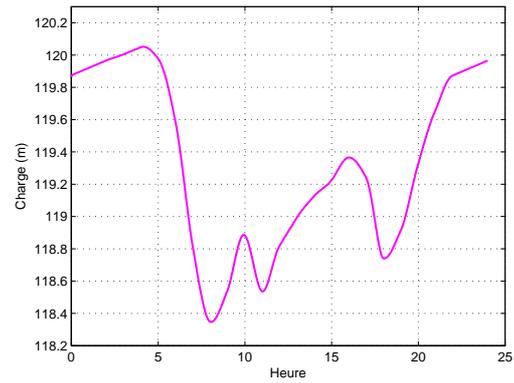
FIGURE 2.9 – Charges aux nœuds du réseau 2

Grace au débit q_e qui alimente le réservoir, la charge au réservoir ne varie pas beaucoup dans le temps. Il correspond à la moyenne des consommations et des fuites sur le réseau puisque la charge en fin d'expérience est égale celle du départ.

Les charges sont inversement proportionnelles aux débits. En effet, quand la consommation est forte, la charge est plus petite que lorsque la consommation est faible. Les charges aux nœuds 3 et 4 sont presque identiques, car les débits sur les arcs II et III sont du même ordre de grandeur et les consommations aux nœuds 3 et 4 n'influencent pas le résultat à cause de



(e) Nœud 5



(f) Nœud 6

FIGURE 2.9 – Charges aux nœuds du réseau 2 (suite)

la forte consommation au nœud 5.

Les charges sont représentées le long du chemin 1 – 2 – 3 – 5 – 6 à l’instant $t = 8 h$ sur la figure 2.10. La perte de charge est grande entre le réservoir (i.e. nœud 1) et le nœud 2 car le débit est important sur l’arc I. Au contraire, elle est faible entre les nœuds 5 et 6 car le débit sur l’arc VI est petit. Entre les autres nœuds, les pertes de charges sont similaires car l’ordre de grandeur des débits est le même.

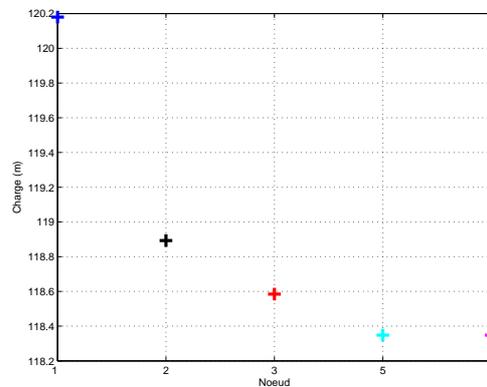


FIGURE 2.10 – Profil de charge le long du chemin 1-2-3-5-6 du réseau 2

Entre chaque nœud, la perte de charge est non linéaire contrairement à celle obtenue par les modèles permanents. En effet, dans notre cas le débit n’est pas constant le long d’une conduite.

Calcul des pertes

Le débit de fuite appliqué sur chaque conduite est de l’ordre de $2.10^{-4} l/s/m$. Il est réparti de façon homogène sur chaque conduite.

Il provoque une perte de plus de $17 m^3$ sur chaque arc en $24 h$, soit une perte d’environ $104 m^3$

sur le réseau de six kilomètres en une journée. Cela représente quasiment la consommation d'une famille sur une année.

Conclusion

Un modèle hydraulique prenant en compte les fuites constantes est développé dans ce chapitre. Les fuites sont représentées par un débit de fuite constant réparti de façon homogène le long de chaque conduite. Il peut dépendre du temps et prendre une valeur différente sur chaque arc. Les développements sont motivés par la nécessité de considérer un réseau de conduites dans son ensemble.

En intégrant les équations de continuité et de quantité de mouvement le long d'une conduite, un système d'équations différentielles ordinaires a été obtenu. Les variables d'état sont les débits au milieu des arcs et les charges aux réservoirs. Le débit étant linéaire le long d'une conduite, à partir du débit en milieu de conduite, les débits tout au long de celle-ci peuvent être calculés. Une des nouveautés de ce modèle par rapport aux modèles classiques est le calcul de la perte de charge qui est intégrée sur chaque conduite et dépend des fuites.

Le modèle développé est un modèle complet tenant compte des termes d'inerties temporelle et convection dues aux phénomènes transitoires lents. Ces termes sont souvent négligés dans les logiciels de modélisation des réseaux d'eau, mais nous avons montré que dans certains cas la valeur du terme d'inertie temporelle est grande. Il est donc intéressant de conserver ces termes pour tenir compte des changements rapides des conditions limites.

Un problème réduit est formulé afin de réduire le nombre de variables qui peut être grand pour certains réseaux. Les variables d'état sont devenues le débit maillant et les charges aux réservoirs. Deux méthodes implicites (celles de Rosenbrock et de Gear) sont proposées pour résoudre le problème hydraulique qui peut s'avérer être numériquement raide lorsque des vannes sont rajoutées au réseau. Ces méthodes donnent des résultats similaires, cependant celle de Gear est préférée pour son efficacité et sa simplicité d'implémentation.

Le modèle est validé sur deux cas tests. Comme les pertes en eau sont identiques sur chaque conduite, la topologie du réseau et la pression ne sont pas prises en compte. Cependant en cas de suspicion de fuite sur une conduite, un fort débit de fuite peut être imposé sur celle-ci. Les résultats trouvés seront plus précis que ceux obtenus par le logiciel Porteau. Puisque le terme d'inertie temporelle devient significatif, les variables hydrauliques obtenues seront alors proches de celles observées sur le terrain.

Chapitre 3

Modélisation d'un réseau comprenant des fuites non détectées dépendantes de la pression

De nombreuses études ont montré que la pression dans les canalisations joue un rôle important dans l'évolution des fuites [28], [42]. Ces auteurs ont montré que les fuites augmentent avec la pression et que cette relation était généralement non linéaire. Par conséquent, considérer que les fuites sont constantes le long des conduites n'est pas suffisant.

Vu l'importance de la relation entre les fuites et la pression, nous proposons un modèle hydraulique prenant en compte cette dépendance [6]. Nous introduisons des équations aux dérivées partielles provenant des équations de Saint-Venant développées dans le premier chapitre. Une équation de transport-diffusion-réaction est formulée, contenant un opérateur non-linéaire relatif à la diffusion. Cet opérateur est le p-Laplacien et apparaît dans de nombreux problèmes aussi bien en mathématiques fondamentales qu'en sciences expérimentales (problème de réaction-diffusion non-linéaire, écoulements de fluides non-Newtoniens, ...). Pour exemple, Glowinski et Marocco [21] ont étudié l'approximation par éléments finis de modèles contenant cet opérateur non-linéaire. Nous utilisons un schéma semi-implicite pour résoudre ce p-Laplacien.

L'originalité de la méthode développée dans ce chapitre réside dans l'utilisation de méthodes numériques pour résoudre le modèle hydraulique prenant en compte les fuites dont le débit varie non-linéairement avec la pression. Dans la première partie, nous présentons le modèle hydraulique à étudier. Ensuite, nous développons les méthodes numériques utilisées pour le résoudre. Enfin, nous validons ce modèle sur différents cas tests.

3.1 Modèle physique

Dans ce chapitre, nous reprenons les équations développées dans le premier chapitre. Nous écrivons :

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) = -d_f \\ \frac{\partial H}{\partial x}(t, x) = -\frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) - J(Q(t, x)) \end{array} \right. \quad (3.1a)$$

$$(3.1b)$$

Le débit de fuite \mathbf{d}_f dépend de la pression, contrairement au chapitre précédent dans lequel il était considéré comme étant constant le long des conduites. Le problème à résoudre est un système d'équations aux dérivées partielles.

3.1.1 Équations d'état

Dans ce paragraphe, nous allons réécrire le modèle (3.1). Il est composé de deux équations : l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement.

Équation de continuité

La première équation du système (3.1) est l'équation de continuité. Nous l'écrivons de la manière suivante dans cette partie :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) = -\mathbf{d}_f \quad (3.2)$$

où \mathbf{d}_f est le débit de fuite dépendant de la pression.

Le débit de fuite est souvent écrit sous sa forme générale :

$$\mathbf{d}_f = c \max(0, \mathbf{H}(t, x) - \mathbf{z}(x))^\alpha \quad (3.3)$$

c est le coefficient de fuite strictement positif. Il donne l'ordre de grandeur des fuites. Plus le coefficient c est grand, plus les fuites sont importantes.

α est appelé l'exposant de fuite. Il prend en compte la capacité du trou à s'agrandir. En effet, des trous ronds ou des fissures longitudinales ou verticales ne vont pas évoluer de la même manière. Des études expérimentales ont montré que l'exposant de fuite α est compris entre 0.5 et 2.5 [28],[42].

Dans la suite, nous supposons que le réseau est bien dimensionné, c'est-à-dire que la pression est toujours positive (i.e. $\mathbf{H} - \mathbf{z} \geq 0$), et même strictement positive sinon il n'y a pas de fuite.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) = -c(\mathbf{H}(t, x) - \mathbf{z}(x))^\alpha \quad (3.4)$$

Remarques :

- L'équation de Torricelli est un cas particulier de l'équation (3.3) pour un exposant de fuite α égal à 0.5.
- Les coefficients c et α pourraient dépendre de l'espace. Néanmoins, nous supposons qu'ils sont constants et identiques sur toutes les conduites.
- Comme le coefficient de fuite c est positif et que la pression est positive, la variation du débit le long de la conduite est négative (i.e. $\frac{\partial Q}{\partial x} < 0$).

Équation de quantité de mouvement

L'équation (3.1b) du système (3.1) est l'équation de quantité de mouvement. Elle dépend des deux variables d'état : Q , le débit et H , la charge. Nous souhaitons que l'équation de quantité de mouvement ne dépende que du débit. Pour cela, nous utilisons l'équation de continuité (3.4).

De l'équation de continuité, la charge peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{H}(t, x) = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right| \right)^{\frac{1}{\alpha}} + z(x) \quad (3.5)$$

Ainsi $\mathbf{H}(t, x) \geq z(x)$ et la pression est toujours positive ou nulle.

A partir de l'équation (3.5), la variation de charge en espace s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}(t, x) = -\frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right) + \frac{\partial z}{\partial x}(x) \quad (3.6)$$

puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\text{sign} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad \text{car} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} < 0 \end{aligned}$$

En remplaçant le terme $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}$ de l'équation de quantité de mouvement (3.1b) par son expression obtenue ci-dessus, nous obtenons l'équation de quantité de mouvement suivante exprimée uniquement en fonction des débits :

$$\frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right) + \frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) + \mathbf{J}(Q(t, x)) + \frac{\partial z}{\partial x}(x) = 0 \quad (3.7)$$

Équations d'état du modèle hydraulique avec fuites dépendantes de la pression

Nous notons (\mathcal{P}) le modèle représentant l'écoulement de l'eau dans les conduites en tenant compte des fuites dépendantes de la pression. Ce modèle est constitué de l'équation de quantité de mouvement écrite en fonction des débits (3.7) et de l'équation définissant les charges (3.5).

Le problème (\mathcal{P}) s'écrit :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right)(t, x) + \frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) + \mathbf{J}(Q(t, x)) + \frac{\partial z}{\partial x}(x) = 0 & (3.8a) \\ \mathbf{H}(t, x) = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left| \frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right) + z(x) & (3.8b) \end{cases}$$

avec Q le débit, H la charge et J le terme de pertes de charge défini comme suit

$$J(Q(t, x)) = k|Q(t, x)|^{\gamma-1}Q(t, x)$$

Pour que ce modèle soit bien défini, il faut que le réseau comporte des fuites (i.e. $c > 0$).

3.1.2 Conditions aux limites

Le réseau d'eau potable est représenté par un graphe orienté. Les conduites sont représentées par des arcs. Nous avons besoin de conditions aux limites aux nœuds ne dépendant que du débit pour résoudre le problème (\mathcal{P}). La condition aux limites en un nœud dépend du type du nœud. Il existe trois sortes de nœuds : les réservoirs, les nœuds ressources et les nœuds de consommation (cf lexique hydraulique).

Les conditions aux limites sont décrites ci-dessous :

- Aux réservoirs : Nous rappelons qu'au réservoir la charge est connue à l'instant initial $t = 0$.

Deux équations doivent être prises en compte :

- l'équation de continuité (3.4)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t) = -c(\mathbf{H}^r(t) - z)^\alpha$$

où z est la cote sol au réservoir.

- la mise à jour du réservoir

$$\mathbf{S}_r \frac{\partial \mathbf{H}^r}{\partial t}(t) = -\mathbf{A}^r Q(t)$$

où \mathbf{S}_r est la matrice des sections des réservoirs.

En intégrant cette équation sur l'intervalle de temps $[0, T]$, nous obtenons la charge au réservoir \mathbf{H}^r :

$$\mathbf{H}^r(t) = H^r(0) - \mathbf{S}_r^{-1} \int_0^t \mathbf{A}^r Q(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

En injectant l'équation de mise à jour du réservoir (3.9) dans l'équation de continuité (3.4), nous obtenons la condition limite aux réservoirs :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t) = -c \left[H^r(0) - \mathbf{S}_r^{-1} \int_0^t \mathbf{A}^r Q(\tau) d\tau - z \right]^\alpha \quad (\text{CL1})$$

La condition limite aux réservoirs est une condition de type Neumann.

- Aux nœuds ressources : En ce nœud, la charge est connue et constante à tout instant.

La condition aux limites s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t) = -c(\mathbf{H}^f(t) - z)^\alpha = -CL_{ressource} \quad (\text{CL2})$$

où z est la cote sol du nœud ressource. Nous remarquons que le paramètre $CL_{ressource}$ est constant puisque la charge \mathbf{H} est connue à tout instant.

○ Aux nœuds de consommation : En ce nœud, la consommation est connue tout au long de l'expérience. Il existe plusieurs conditions selon que le nœud est un nœud interne ou une feuille.

– équation de continuité : Cette équation est celle définie au second chapitre décrivant la première loi de Kirchhoff. La condition aux limites est une condition de type Dirichlet et s'écrit :

$$\mathbf{A} \mathbf{Q}(t) = -\mathbf{d}^n(t) \quad (\text{CL3})$$

où \mathbf{A} est la matrice d'incidence nœud-arc réduite aux nœuds de consommation du graphe orienté et \mathbf{d}^n est le vecteur des consommations aux nœuds de consommation.

– équation de transmission : Cette équation représente l'égalité des charges de part et d'autre d'un nœud de consommation.

Nous notons Γ_G et Γ_D respectivement les bords gauche et droit d'un nœud de consommation.

Les cotes sol de part et d'autre du nœud sont les mêmes. Ainsi, nous avons $z|_{\Gamma_G}(t) = z|_{\Gamma_D}(t)$.

Cette relation et l'égalité des charges de part et d'autre d'un nœud de consommation donnent l'égalité suivante :

$$(\mathbf{H} - \mathbf{z})|_{\Gamma_G}(t) = (\mathbf{H} - \mathbf{z})|_{\Gamma_D}(t)$$

En connaissant l'équation reliant les charges aux débits (3.8b) et en prenant le même couple (c, α) de part et d'autre, la condition aux limites s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}|_{\Gamma_G}(t) = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}|_{\Gamma_D}(t) \quad (\text{CL4})$$

Remarque : Nous avons défini quatre conditions aux limites pour le problème (\mathcal{P}) . Nous utilisons les conditions aux limites dans les cas suivants :

Si le nœud est une feuille (i.e. un nœud ayant un seul arc adjacent) et

– un réservoir : la condition aux limites utilisée est la condition aux limites (CL1)

– un nœud ressource : la condition aux limites utilisée est la condition aux limites (CL2)

– un nœud de consommation : la condition aux limites utilisée est la condition aux limites (CL3)

Si le nœud est un nœud de consommation interne, la condition aux limites (CL3) est appliquée à gauche du nœud et la condition aux limites (CL4) est appliquée à droite du nœud.

3.2 Modèle numérique

Dans cette partie, nous présentons la méthode choisie pour résoudre le problème hydraulique (\mathcal{P}) .

Nous décrivons la méthode à pas fractionnaires ou splitting choisie pour résoudre l'équation (3.8a) du problème (\mathcal{P}) et nous énonçons les avantages de cette méthode.

3.2.1 Méthodes utilisées

Calcul des débits

L'équation de quantité de mouvement à résoudre est l'équation (3.8a) :

$$\frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (t, x) + \frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) + \mathbf{J}(Q(t, x)) + \frac{\partial z}{\partial x}(x) = 0$$

avec

$$\mathbf{J}(Q(t, x)) = k|Q(t, x)|^{\gamma-1} Q(t, x)$$

Cette équation regroupe les trois phénomènes les plus rencontrés dans les problèmes physiques.

- le phénomène de transport est représenté par le terme $\frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}$. Il symbolise le transport horizontal des molécules d'eau dans les conduites. Si ce terme est intégré sur la longueur d'une conduite, le terme d'inertie de convection du chapitre 2 est retrouvé,
- le phénomène de diffusion est défini par le terme du p-Laplacien $\frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$. Cette diffusion est liée à la prise en compte des fuites,
- le phénomène de réaction est représenté par $\mathbf{J}(Q) + \frac{\partial z}{\partial x}$ dans l'équation (3.8a). Il représente les pertes dues aux frottements de l'eau sur les parois des conduites et les informations sur le relief du terrain (i.e. inclinaison des conduites).

La présence de différents phénomènes physiques dans une équation aux dérivées partielles représente parfois une difficulté lors de sa résolution. En effet, une même méthode numérique n'est pas nécessairement efficace pour la résolution de différents phénomènes.

Une méthode à pas fractionnaires permet de découpler une équation et d'associer un solveur adapté à chaque phénomène physique. Cette méthode apporte deux intérêts majeurs. Elle permet de résoudre exactement ou numériquement chacune des sous équations alors que cela est impossible ou difficile avec l'équation entière. De plus, elle permet de traiter des variables ou des opérateurs correspondant à des échelles très différentes.

L'équation de transport-diffusion-réaction (3.8a) est découplée. Pour une meilleure convergence en terme d'erreur, Beale et Majda [3] proposent de séparer les termes de transport et de diffusion. Les méthodes numériques efficaces pour résoudre ces deux phénomènes physiques sont de natures différentes : explicite pour le transport et implicite pour la diffusion. Il est donc indispensable de séparer ces deux termes. Quant au terme de réaction, nous proposons deux méthodes. Dans la première, la réaction est couplée avec la diffusion, dans la seconde elle est associée au transport. La résolution nous indiquera l'association la plus adéquate pour notre problème hydraulique. Pour cela, nous considérons un découpage de l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles égaux de longueur δt .

Première méthode : Transport et Diffusion-Réaction

A chaque instant, la phase de transport est résolue en premier pour donner un débit intermédiaire Q^* , et la phase de diffusion-réaction en second pour obtenir le débit final Q .

Phase transport

L'équation de transport s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{gS} \frac{\partial Q^*}{\partial t}(t, x) + \frac{\beta}{gS^2} \frac{\partial Q^{*2}}{\partial x}(t, x) = 0 \quad \text{sur } [t^n, t^{n+1}[\\ CI : Q^*(t^n, x) = Q(t^n, x) \\ 1 \text{ CL}_{\text{amont}} \end{array} \right.$$

Quand $n = 0$, nous posons que $Q(t^n, x) = Q_0(x)$.

Nous supposons que le coefficient de Boussinesq β est constant et est égal à 1.

La condition limite CL_{amont} à utiliser est soit la condition (CL1), (CL2), (CL3) ou (CL4) définie précédemment. Cette condition dépend du type de nœud en amont de l'écoulement.

Phase diffusion-réaction

L'équation de diffusion-réaction s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{c^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right) + \mathbf{J}(Q(t, x)) + \frac{\partial z}{\partial x}(x) = 0 \quad \text{sur }]t^n, t^{n+1}] \\ CI : Q(t^n, x) = Q^*(t^{n+1}, x) \\ 1 \text{ CL}_{\text{amont}} \\ 1 \text{ CL}_{\text{aval}} \end{array} \right.$$

L'équation de diffusion-réaction est une équation non linéaire contenant l'opérateur du p-Laplacien.

Les conditions limites CL_{amont} et CL_{aval} sont choisies parmi les conditions (CL1), (CL2), (CL3) et (CL4). Elles dépendent du type de nœuds en amont et en aval de l'écoulement.

Deuxième méthode : Transport-Réaction et Diffusion

A chaque instant, la phase de réaction associée à celle du transport est résolue en premier, et la phase de diffusion en second.

Phase transport-réaction

L'équation de transport-réaction s'écrit de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{gS} \frac{\partial \mathbf{Q}^*}{\partial t}(t, x) + \frac{\beta}{gS^2} \frac{\partial \mathbf{Q}^{*2}}{\partial x}(t, x) + \mathbf{J}(\mathbf{Q}^*(t, x)) + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}(x) = 0 \quad \text{sur }]t^n, t^{n+1}[\\ CI : \mathbf{Q}^*(t^n, x) = \mathbf{Q}(t^n, x) \\ 1 \text{ CL}_{\text{amont}} \end{array} \right.$$

Quand $n = 0$, nous posons que $\mathbf{Q}(t^n, x) = \mathbf{Q}_0(x)$.

La condition limite est identique à celle utilisée dans la phase transport de la première méthode à pas fractionnaires proposée.

Phase diffusion

L'équation de diffusion se formule :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{gS} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}(t, x) \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}(t, x) \right) = 0 \quad \text{sur }]t^n, t^{n+1}[\\ CI : \mathbf{Q}(t^n, x) = \mathbf{Q}^*(t^{n+1}, x) \\ 1 \text{ CL}_{\text{amont}} \\ 1 \text{ CL}_{\text{aval}} \end{array} \right.$$

Les conditions limites CL_{amont} et CL_{aval} sont les mêmes que celles utilisées dans la phase de diffusion-réaction de la première méthode proposée ci-dessous.

Calcul des charges

Une fois les débits \mathbf{Q} calculés à tous les temps de l'intervalle $[0, T]$, les charges sont calculées grâce à l'équation (3.8b) donnant la relation entre les charges et les débits :

$$\mathbf{H}(t, x) = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x)}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right) + \mathbf{z}(x)$$

3.2.2 Notations et choix du maillage

Pour résoudre le problème hydraulique, une discrétisation des conduites est nécessaire. Ainsi, en chaque point de discrétisation, un débit et une charge sont obtenus.

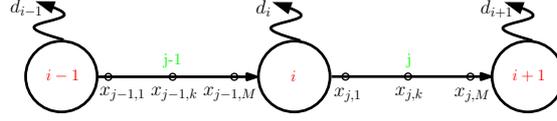
Notations

Nous avons choisi de discrétiser chaque conduite en M points dont les extrémités, avec $3 \leq M \leq P$. Pour que la discrétisation soit intéressante, le nombre minimal de points sur

une conduite est de 3 (i.e un point à chaque extrémité et un au milieu de la conduite). P est le nombre maximal de points possibles sur une conduite.

Nous notons \mathcal{J} l'ensemble des arcs du réseau. Nous dirons que $Q_{j,i}$ et $H_{j,i}$ sont respectivement le débit et la charge sur l'arc j ($j \in \mathcal{J}$) et au point i ($i \in [1, M]$).

Par convention, nous notons le premier et le dernier point de discrétisation d'un arc suivant son orientation : $x_{j,1}$ est la position du premier point de l'arc j et $x_{j,M}$ est la position du dernier point de l'arc j (cf dessin ci-dessous).



Nous posons l'égalité des cotes sol de part et d'autre d'un nœud : $z_{j-1,M} = z_{j,1}$. Nous parlons alors de cote sol au nœud i .

Avec l'égalité des charges de part et d'autre d'un nœud, nous avons l'égalité suivante : $H_{j-1,M}(t) = H_{j,1}(t)$. Nous parlons de charge au nœud i .

L'équation de continuité au nœud de consommation i s'écrit : $Q_{j-1,M}(t) = Q_{j,1}(t) + d_i(t)$. $Q_{j-1,M}$ et $Q_{j,1}$ sont les débits sur les arcs adjacents au nœud i .

Les matrices d'incidence nœud-arc définies dans le second chapitre sont modifiées pour tenir compte de la discrétisation des conduites. Elles sont constituées de 1, 0 et -1 comme définies précédemment, mais leurs tailles changent. Dans ce chapitre, $\mathbf{A}^N \in \mathcal{M}_{M,a}$.

Maillage irrégulier

Le maillage choisi est un maillage irrégulier avec une discrétisation plus fine de part et d'autre des nœuds.

En effet, pour ne pas créer d'erreurs près des nœuds et sur le calcul des pertes de charges, il faut que les discrétisations soient fines aux bords. Deux maillages sont alors possibles :

- maillage 1 : un maillage irrégulier avec des discrétisations fines aux bords
- maillage 2 : un maillage régulier fin

Sur un cas test simple d'une conduite j (voir en annexe), nous avons comparé les résultats obtenus avec les deux maillages.

Le maillage 1 donne des résultats identiques au maillage 2 (en terme de volume d'eau perdu), mais cela quinze fois plus rapidement.

Si le maillage 2 est grossier, une erreur de plus de 7% sur le volume des fuites est observée. Néanmoins, si les conduites sont horizontales (i.e. $z_{j,1} = z_{j-1,M}$), un maillage grossier donne des résultats similaires pour les maillages 1 et 2.

Pour que la méthode utilisée soit généralisable à tout réseau et avec un temps de calculs acceptable, nous prenons un maillage irrégulier avec une discrétisation plus fine aux bords.

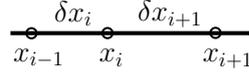
Nous notons alors les pas de discrétisation en espace

$$\delta x_{j,i} = x_{j,i} - x_{j,i-1} \quad \text{et} \quad \delta x_{j,i+1} = x_{j,i+1} - x_{j,i}$$

Sur chaque conduite j , nous prenons la même discrétisation. Ainsi, pour simplifier les notations nous écrivons

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{et} \quad \delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$$

comme illustré sur le dessin ci-dessous



3.2.3 Schéma numérique

Dans cette partie, nous présentons les schémas choisis pour résoudre les deux méthodes à pas fractionnaires développées précédemment.

Nous notons $Q_i = Q(x_i)$, $Q_{i+1} = Q(x_i + \delta x_{i+1})$ et $Q_{i-1} = Q(x_i - \delta x_i)$ pour alléger l'écriture.

Discrétisation et résolution des deux méthodes

Dans la phase transport et la phase transport-réaction des méthodes à pas fractionnaires proposées, les * ont été enlevées pour une meilleure lisibilité.

Première méthode : Transport et Diffusion-Réaction

La première méthode à pas fractionnaires est celle dans laquelle le transport est traité en premier et la réaction associée à la diffusion ensuite.

Phase transport

Le schéma de la phase de transport s'écrit :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\beta \delta t}{S} \left[\left(\frac{f(Q_i^n) - f(Q_{i-1}^n)}{Q_i^n - Q_{i-1}^n} \right)^+ \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\delta x_i} - \left(\frac{f(Q_{i+1}^n) - f(Q_i^n)}{Q_{i+1}^n - Q_i^n} \right)^- \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\delta x_{i+1}} \right] \quad (3.10)$$

avec

$$f(Q) = Q^2$$

et par définition

$$v = v^+ - v^- \quad \text{et} \quad |v| = v^+ + v^-$$

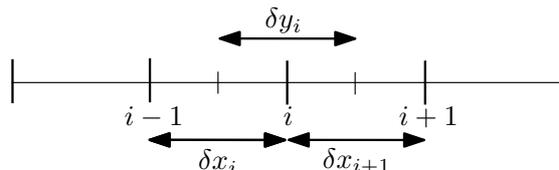
où δt est le pas de discrétisation en temps, v^+ et v^- sont respectivement la partie positive et négative de la fonction v .

C'est un schéma explicite du premier ordre qui permet de prendre en compte le sens de l'écoulement dans les conduites. Suivant son sens, un schéma amont ou un schéma aval est écrit. Il est à écrire pour les M points de discrétisation de chaque conduite.

Une seule condition aux limites est nécessaire. Elle dépend du sens de l'écoulement sur chaque conduite et du type de nœud en amont de l'écoulement. Ce schéma étant explicite, il est assez simple à résoudre. Une résolution conduite par conduite ou une résolution globale sur le réseau peut être envisagée.

Phase diffusion-réaction

Pour discrétiser le terme non-linéaire de diffusion sous forme conservative, nous utilisons le maillage suivant :



L'approximation de la fonction f , représentant la diffusion, au point i s'écrit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{\delta y_i}$$

avec $\delta y_i = \frac{\delta x_i + \delta x_{i+1}}{2}$, $f_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\delta x_{i+1}}$ et $f_{i-\frac{1}{2}} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\delta x_i}$

Ainsi la forme discrétisée du terme de diffusion au point i est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right) &\simeq \frac{2}{c^{\frac{1}{\alpha}}(\delta x_i + \delta x_{i+1})} \left[\left| \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\delta x_{i+1}} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\delta x_{i+1}} \right. \\ &\quad \left. - \left| \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\delta x_i} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\delta x_i} \right] \end{aligned}$$

Pour simplifier la résolution, le terme $\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(t, x) \right|^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est explicite.

Le schéma pour la phase diffusion-réaction s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{gS} \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\delta t} - \frac{2}{c^{\frac{1}{\alpha}}(\delta x_i + \delta x_{i+1})} &\left[\left| \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\delta x_{i+1}} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\delta x_{i+1}} \right. \\ &\quad \left. - \left| \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\delta x_i} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{\delta x_i} \right] + J(Q_i^n, Q_i^{n+1}) + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec

$$J(Q_i^n, Q_i^{n+1}) = k|Q_i^n|^{\gamma-1}Q_i^{n+1}$$

Le schéma est un schéma semi-implicite. Le terme de pertes de charge J est linéairement implicite.

Résolution

Nous posons

$$A = \frac{1}{gS\delta t}, \quad B = \frac{2}{c^{\frac{1}{\alpha}}(\delta x_i + \delta x_{i+1})}, \quad V_{i+1} = \frac{1}{\delta x_{i+1}} \left| \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\delta x_{i+1}} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1},$$

$$V_i = \frac{1}{\delta x_i} \left| \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\delta x_i} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1}, \quad P_i = k |Q_i^n|^{\gamma-1}, \quad C_i = A + BV_{i+1} + BV_i + P_i$$

Le schéma (3.11) se réécrit de la façon suivante :

$$-BV_i Q_{i-1}^{n+1} + C_i Q_i^{n+1} - BV_{i+1} Q_{i+1}^{n+1} = A Q_i^n - \frac{\partial z}{\partial x} \quad (3.12)$$

Ce schéma est valable pour les $(M-2)$ points de discrétisation de chaque conduite. Il faut y rajouter deux conditions aux limites qui dépendent de la nature des nœuds qui se trouvent aux extrémités de chaque conduite.

Cela revient à résoudre un système de $M \times a$ équations (où M est le nombre de points de discrétisation sur une conduite et a est le nombre de conduites).

Nous écrivons ce système sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{N} \quad (3.13)$$

avec $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{M \times a, M \times a}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{M \times a}$ est le vecteur inconnu des débits au temps t^{n+1} et $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{M \times a}$ est un vecteur connu.

En notant $M' = M \times (a-1) + 1$, le vecteur \mathbf{N} est défini par :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1, \mathbf{A}Q_2^n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1, \dots, \mathbf{A}Q_{M-1}^n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_1, n_M, \\ n_{M+1}, \mathbf{A}Q_{M+1}^n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_2, \dots, \mathbf{A}Q_{2M-1}^n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_2, n_{2M}, \\ \dots, \\ n_{M'}, \mathbf{A}Q_{M'+1}^n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a, \dots, \mathbf{A}Q_{M \times a}^n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a, n_{M \times a} \end{bmatrix}$$

La pente de la conduite j est représentée par la variation de cote sol $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_j$.

La matrice carrée \mathbf{M} s'écrit :

Les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice \mathbf{M} et n_j du vecteur \mathbf{N} dépendent des conditions aux limites.

Pour déterminer les solutions du système d'équations (3.13), nous avons utilisé la méthode de Gauss. Elle consiste à transformer le système d'équations en un système triangulaire équivalent et ensuite à le résoudre en faisant une remontée.

Limites de la méthode de résolution

La non-linéarité du terme de diffusion $\frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ peut créer des problèmes pour les valeurs extrêmes de la gamme des exposants de fuite α .

Pour éviter ce problème, l'équation de diffusion-réaction (3.11) a été réécrite sous forme de schéma implicite, à l'exception du terme de pertes de charge \mathbf{J} qui reste semi-implicite.

L'équation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{gS} \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\delta t} - \frac{2}{c^{\frac{1}{\alpha}}(\delta x_i + \delta x_{i+1})} \left[\left| \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\delta x_{i+1}} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\delta x_{i+1}} \right. \\ \left. - \left| \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{\delta x_i} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{\delta x_i} \right] + J(Q_i^n, Q_i^{n+1}) + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec

$$J(Q_i^n, Q_i^{n+1}) = k|Q_i^n|^{\gamma-1}Q_i^{n+1}$$

Nous avons utilisé l'algorithme de Newton pour résoudre cette équation. La méthode de Newton est décrite dans le chapitre 2 de la thèse.

Deuxième méthode : Transport-Réaction et Diffusion

La seconde méthode à pas fractionnaires est celle pour laquelle la réaction associée au transport est traitée en premier et ensuite la diffusion est traitée seule. Les deux phases sont présentées et leur résolution se fait par des méthodes similaires à celles utilisées pour résoudre la première méthode à pas fractionnaires. La discrétisation du terme de perte de charge $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ est encore semi-implicite.

Phase transport-réaction

Le schéma explicite de la phase de transport-réaction s'écrit :

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} = \frac{1}{1 + gS\delta tk |Q_i^n|^{\gamma-1}} \left(Q_i^n - \frac{\beta\delta t}{S} \left[\left(\frac{f(Q_i^n) - f(Q_{i-1}^n)}{Q_i^n - Q_{i-1}^n} \right)^+ \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\delta x_i} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{f(Q_{i+1}^n) - f(Q_i^n)}{Q_{i+1}^n - Q_i^n} \right)^- \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\delta x_{i+1}} \right] - gS\delta t \frac{\partial z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Phase diffusion

Le schéma implicite pour la phase de diffusion s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{gS} \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\delta t} - \frac{2}{c^{\frac{1}{\alpha}}(\delta x_i + \delta x_{i+1})} \left[\left| \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\delta x_{i+1}} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\delta x_{i+1}} \right. \\ \left. - \left| \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\delta x_i} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{\delta x_i} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Conditions de stabilité

Une condition nécessaire de stabilité est déterminée à partir de l'équation de transport que nous résolvons par un schéma explicite.

En effet, la condition de stabilité n'est pas déterminée par l'équation de diffusion-réaction, car sa résolution se fait par un schéma semi-implicite, ce qui rend la convergence plus rapide et élimine la contrainte de stabilité.

L'équation de transport est la suivante :

$$\frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) + \frac{\beta}{gS^2} \frac{\partial Q^2}{\partial x}(t, x) = 0$$

La condition de stabilité ou condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL) s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{2\beta}{S} \frac{\delta t}{\delta x} \max_i |Q_i^n| \leq 1 \quad (3.17)$$

En posant $\delta x = \min(\delta x_i, \delta x_{i+1})$.

La discrétisation du terme de réaction étant semi-implicite, compléter l'équation de transport avec celui-ci revient à rajouter un terme stabilisant. La CFL (3.17) est donc bien adaptée aux deux méthodes de splitting proposées.

Application numérique

- $\beta = 1$
- $S = 0.0123 \text{ m}^2$
- $\delta x = 250 \text{ m}$
- $\max_i |Q_i^n| = 10 \text{ l/s} = 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$

Ainsi comme

$$\delta t \leq \frac{S\delta x}{2\beta} \frac{1}{\max_i |Q_i^n|}$$

nous trouvons que

$$\delta t \leq 150$$

Pour la bonne stabilité du modèle hydraulique (\mathcal{P}), le pas de temps δt doit être inférieur à 150 s.

Discrétisation de l'équation donnant les charges

Une fois le calcul des débits effectué sur la période $[0, T]$, les charges peuvent être calculées à l'aide d'un schéma amont ou aval.

Si $Q < 0$, le schéma aval s'écrit :

$$H_i^n = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \left| \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\delta x_{i+1}} \right|^{\frac{1}{\alpha}} + z_i$$

Si $Q > 0$, le schéma amont s'écrit :

$$H_i^n = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \left| \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\delta x_i} \right|^{\frac{1}{\alpha}} + z_i$$

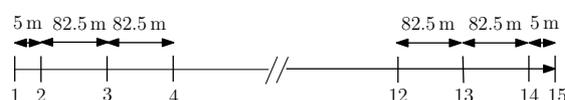
3.3 Résultats

Dans cette partie, nous analysons les résultats obtenus (comme les débits, les charges et les fuites) avec la résolution du modèle hydraulique (\mathcal{P}) prenant en compte les fuites dépendantes de la pression.

Deux cas tests sont étudiés. Le premier est le réseau 3 sur lequel l'exposant de fuite α est fixé. Le second est le réseau 2 sur lequel nous faisons varier l'exposant de fuite. Le même couple (c, α) est pris sur chaque conduite et les caractéristiques de ces réseaux sont présentées en annexe B.

Le choix du nombre de points de discrétisation correspond à une réalité physique. En effet, plus le nombre de points est grand, mieux la dépendance des fuites de la pression est prise en compte. Cependant, il est difficile en réalité d'avoir une localisation des fuites précise sur les conduites. Donc, peu de points peuvent suffire pour se rapprocher au plus près de la réalité du terrain.

Le maillage irrégulier choisi partage la conduite en quatorze segments inégaux ; pour une conduite de 1000 m de longueur, la discrétisation est la suivante :



soit un segment de 5 m, douze segments de 82,5 m et un segment de 5 m.

Choix de la méthode à pas fractionnaires

Les deux méthodes à pas fractionnaires proposées sont résolues : la première avec la phase de transport et la phase de diffusion-réaction, et la seconde avec la phase de transport-réaction et la phase diffusion.

Les résultats présentés sont similaires en terme de volume d'eau perdu sur le réseau. Cependant, la convergence est beaucoup plus lente avec la seconde méthode. En effet, la nature des méthodes numériques étant similaires (i.e. implicite pour la diffusion et semi-implicite pour la réaction), la convergence est meilleure pour la phase de diffusion-réaction. De plus, coupler le terme de réaction qui est d'ordre 2 avec un laplacien (i.e. terme de diffusion) est plus naturel que de l'associer avec un gradient (i.e. terme de transport).

Ainsi, les résultats présentés dans la suite ont été obtenus avec la méthode à pas fractionnaires qui découple l'équation des débits en une équation de transport et en une équation de diffusion-réaction.

3.3.1 Premier cas test : le réseau 3

Présentation du réseau

Le réseau étudié est le réseau 3, il est composé de six nœuds, dont deux réservoirs et quatre nœuds de consommation, et de six conduites (figure 3.1).

En l'absence de connaissances précises sur le matériau des conduites, sur la nature du sol environnant et sur le niveau de fuite sur le réseau, Lambert suppose que la relation est linéaire entre la pression et les fuites [28]. Pour cet exemple, nous prenons un exposant de fuite constant et égal à un (i.e. $\alpha = 1$) et un coefficient de fuite c égal à $6.10^{-5} l/s/m^2$ sur l'ensemble du réseau.

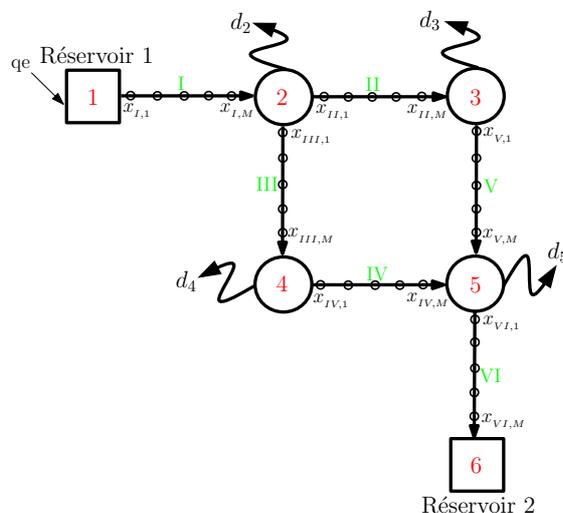


FIGURE 3.1 – Maillage du réseau 3

Le réservoir 1 est le réservoir principal, dit réservoir de tête. Nous y faisons entrer de l'eau pour simuler un apport régulier correspondant à la consommation moyenne de la journée. Le réservoir 2 est un réservoir d'équilibre. Il est présent pour aider le réservoir de tête à fournir de l'eau au réseau aux périodes de pointe.

Les cotes sol associées aux six nœuds sont répertoriées dans le tableau 3.1. Elles varient linéairement le long de chaque conduite.

Nœuds	1	2	3	4	5	6
z (m)	100	95	85	70	85	80

TABLE 3.1 – Cotes sol aux nœuds du réseau 3

Calcul des débits

Les figures des débits (figure 3.2) présentent chacune quatre courbes donnant l'évolution de la variable dans le temps en quatre points de chaque conduite. Ces points correspondent au premier, sixième, dixième et dernier points ; ils sont respectivement situés à 0 m , 335 m , 665 m et 1000 m du début de chaque conduite.

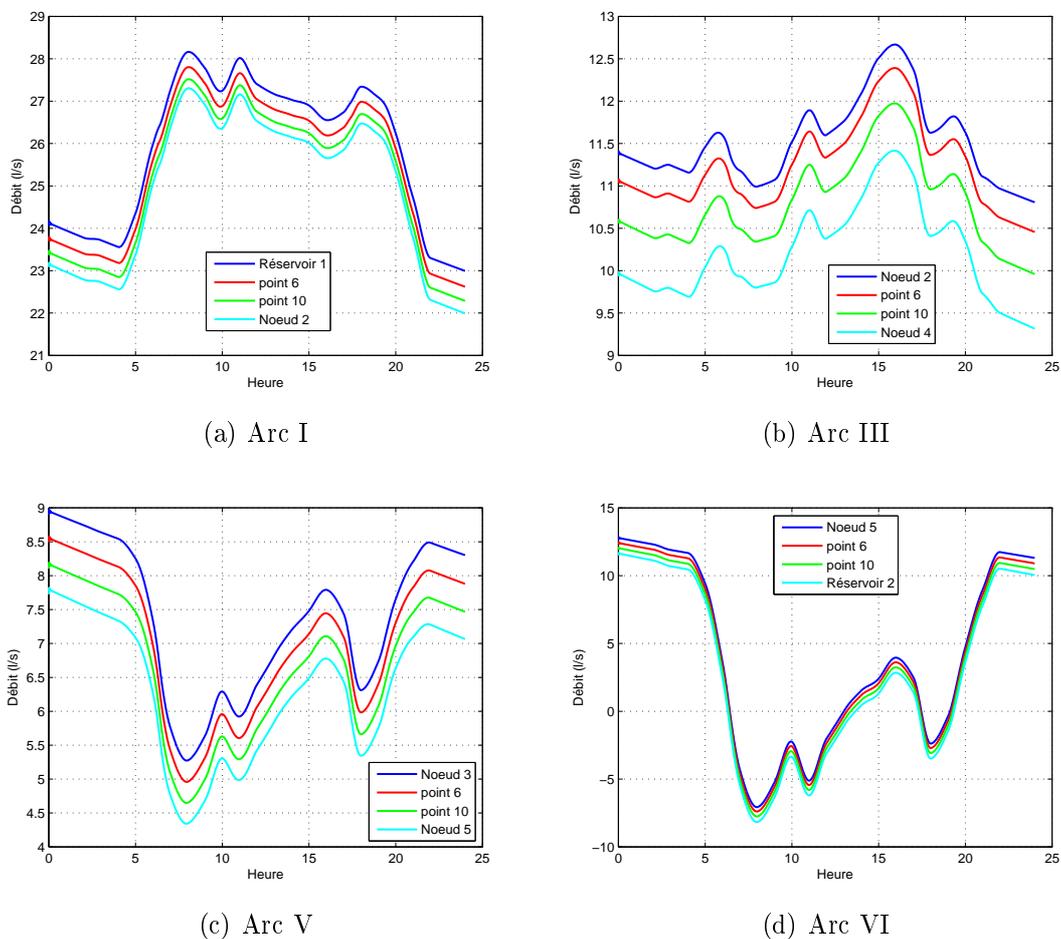


FIGURE 3.2 – Débits sur plusieurs conduites du réseau 3

Regardons les débits obtenus sur l'arc I (figure 3.2(a)). Comme les débits sont positifs, l'écoulement se fait dans le sens de l'orientation de l'arc. Ainsi, l'eau s'écoule du réservoir 1 vers le nœud 2. Nous constatons que les quatre débits observés ne sont pas superposés. En effet, le débit au réservoir (courbe bleue) est supérieur à tous les autres débits. De même, le débit au point 6 (courbe rouge) est supérieur aux débits en aval. En effet, de l'eau est perdue entre chaque point de discrétisation, c'est pour cela que le débit en début de conduite

(i.e. au réservoir) et supérieur à celui en fin de conduite (i.e. au nœud 2). Ainsi, le débit en un point de l'écoulement est plus grand que le débit au point consécutif dans le sens de l'écoulement.

La différence entre deux courbes représente le débit de fuite entre ces deux courbes. Le volume d'eau perdu sur la conduite I est calculé en intégrant dans le temps la différence entre les débits au réservoir 1 et ceux au nœud 2.

Les mêmes tendances sont observées pour les arcs III et V (figures respectivement 3.2(b) et 3.2(c)). La forme est différente sur chaque arc car elle dépend des consommations et des pressions.

Regardons maintenant les débits obtenus sur l'arc VI. Nous constatons que les débits ne sont pas toujours positifs. Cela montre que l'écoulement change de sens au cours du temps. Il s'écoule la plupart du temps du nœud 5 vers le réservoir 2, et du réservoir 2 vers le nœud 5 pendant les périodes de pointe. Le réservoir 2 joue bien son rôle de réservoir d'équilibre en alimentant le réseau quand la consommation est la plus importante.

Calcul des charges

Analysons maintenant les courbes des charges (figure 3.3).

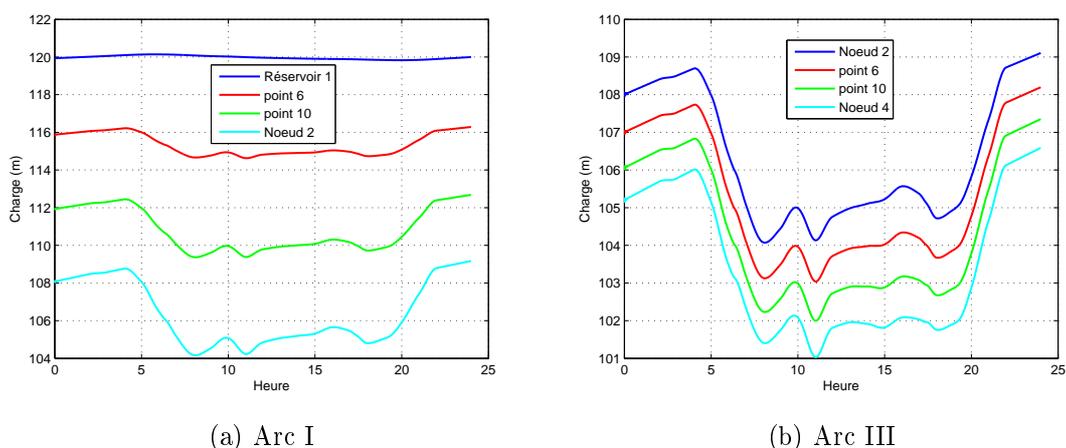


FIGURE 3.3 – Charges en plusieurs points sur différents arcs du réseau 3

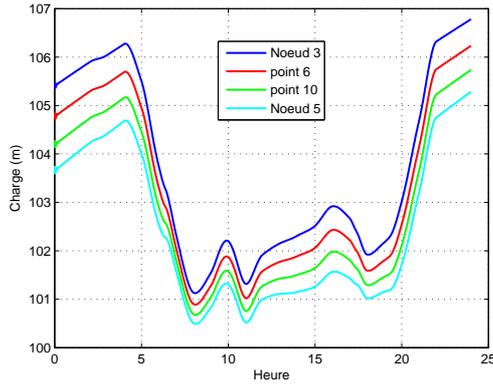
Sur chaque arc, les quatre points observés donnent des résultats différents, puisque les courbes obtenues ne sont pas superposées.

Sur l'arc I, la charge au réservoir 1 est toujours supérieure aux autres charges. L'écoulement se fait bien du réservoir vers le nœud 2. L'écoulement se fait également du début de la conduite vers la fin de la conduite sur les arcs III et V (figures 3.3(b) et 3.3(c)).

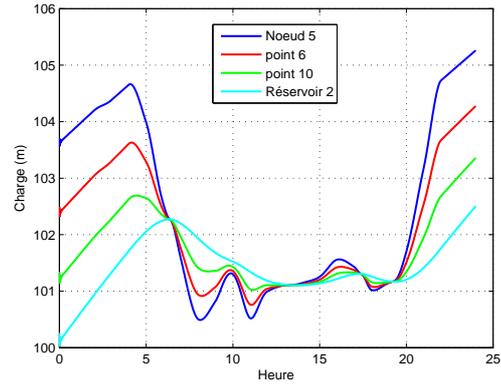
La différence entre les courbes s'explique par les pertes de charge entre deux points de la conduite.

Sur l'arc VI, les courbes se croisent (figure 3.3(d)). Nous remarquons qu'elles se coupent aux mêmes instants que les débits changent de signe (i.e. 6 h30, 13 h, 17 30 et 19 h, figure 3.2(d)).

La charge au nœud 5 (courbe bleue) est supérieure à celle du réservoir 2 (courbe bleu ciel),



(c) Arc V



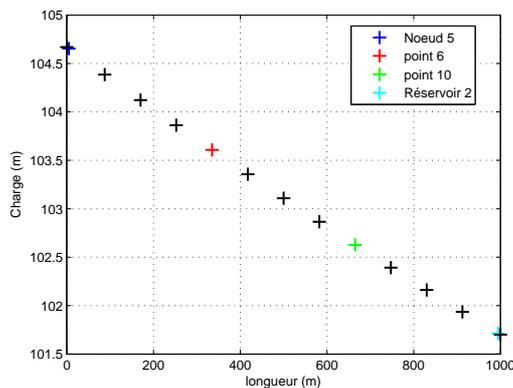
(d) Arc VI

FIGURE 3.3 – Charges en plusieurs points sur différents arcs du réseau 3 (suite)

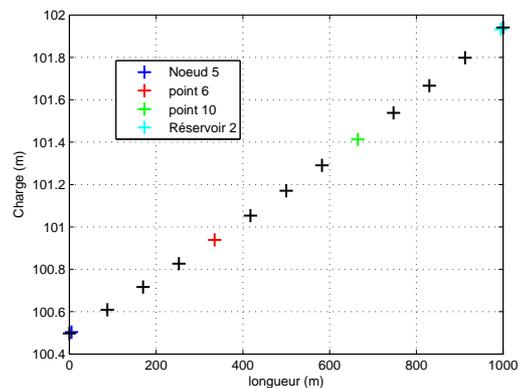
sauf en période de fortes consommations. Le réservoir 2 aide le réservoir de tête en période pleine, et l'écoulement se fait dans l'autre sens.

Les courbes 3.4 montrent l'évolution de la charge le long de la conduite VI en deux instants donnés (en $t = 4 h$ et $t = 8 h$). Les graphiques comprennent quinze points, ce sont les quinze points de discrétisation sur la conduite. Les deux premiers et les deux derniers sont très proches car le maillage est très fin aux bords.

En période creuse ($t = 4 h$), la charge est plus grande au nœud 5 qu'au réservoir 2 : l'écoulement se fait du nœud 5 vers le réservoir. Par contre, en période de pointe ($t = 8 h$), l'écoulement se fait dans l'autre sens.



(a) $t=4h$



(b) $t=8h$

FIGURE 3.4 – Charges le long de la conduite VI du réseau 3

Une des conditions aux limites concerne l'équation de transmission imposant l'égalité des charges de part et d'autre d'un nœud de consommation (cf condition aux limites (CL4)). Si nous regardons la charge au nœud 5, nous constatons qu'elle est identique sur l'arc V (courbe bleue ciel sur la figure 3.3(c)) et sur l'arc VI (courbe bleue sur la figure 3.3(d)).

Calcul des pertes

Le réseau présente 29.6 % de fuite (cf tableau 3.2). Mais ces fuites ne sont pas réparties de manière uniforme sur le réseau (cf tableau 3.3). Les fuites sont plus importantes sur les conduites III et IV puisque sur ces conduites les pressions sont les plus fortes.

	volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
Sur le réseau	2002.1	592.4	29.6

TABLE 3.2 – Bilan en eau et pourcentage de fuite sur le réseau 3

Arcs	I	II	III	IV	V	VI
Pression moyenne (mCE)	15.6	14.9	22.3	25.3	17.9	19.4
Cote sol moyenne (m)	97.5	90.0	82.5	77.5	85	82.5
Volume d'eau perdu (m^3)	80.2	76.6	114.6	130.4	92.4	99.7

TABLE 3.3 – Volume d'eau perdu sur chaque conduite du réseau 3

Sur cet exemple, la dépendance des fuites à la pression est prise en compte. Les fuites ne sont pas réparties de manière homogène sur un réseau puisque les pressions sont elles-mêmes différentes. De plus, nous remarquons que le volume d'eau perdu est proportionnel à la pression moyenne.

Construire un modèle hydraulique prenant en compte les fuites dépendantes de la pression est essentiel pour représenter au mieux la topologie du terrain et les variations de pression sur le réseau.

Comparaison avec le logiciel Porteau

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats obtenus sur les débits et les pertes par le modèle des fuites dépendantes de la pression développé dans ce chapitre et les résultats obtenus par le logiciel Porteau (version 2.2). Ce logiciel est développé par le Cemagref et permet de modéliser le comportement hydraulique et la qualité de l'eau dans un réseau. Le régime d'écoulement considéré est permanent et les termes d'inertie ne sont pas pris en compte dans la résolution. La fonction donnant la variation des consommations dans le temps est une fonction constante par morceaux.

Dans Porteau, il est possible d'ajouter des fuites comme une consommation supplémentaire aux nœuds. Connaissant le volume total d'eau perdu sur le réseau (i.e. $592.4 m^3$), nous avons réparti ce volume de façon égale sur les six arcs. Ainsi sur chaque conduite, la moitié du volume d'eau perdu est réparti sur les deux nœuds extrémités comme une consommation. De cette manière, avec le modèle des fuites dépendantes de la pression et avec le logiciel Porteau, nous avons le même volume total d'eau perdu. Cependant, avec Porteau les pertes sont égales sur chaque arc (soit $98.7 m^3$).

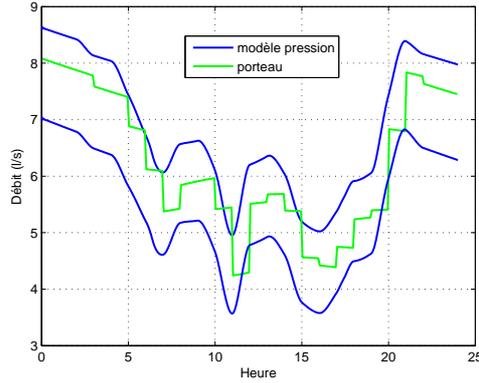


FIGURE 3.5 – Comparaison des débits sur la conduite IV du réseau 3

Le débit de Porteau est représenté sur la figure 3.5. Il est constant sur la conduite puisque les fuites sont reportées à chaque extrémité, et est en escalier car la consommation n'est pas lissée (courbe verte). Avec le modèle des fuites dépendantes de la pression, le débit varie le long de la conduite, car les fuites sont réparties tout du long. Les deux courbes bleues représentées sur la figure représentent le débit en début et le débit en fin de conduite. Ils indiquent la plage des débits sur celle-ci. En un instant donné, ils peuvent être différents de plus d'1 l/s.

Le débit de Porteau appartient souvent à la plage des débits donnée par le modèle des fuites dépendantes de la pression. Cependant, des différences significatives apparaissent sur le volume d'eau perdu (cf tableau 3.4).

Arcs	I	II	III	IV	V	VI
modèle pression	80.4	76.8	114.8	130.6	92.6	99.9
Porteau	98.7	98.7	98.7	98.7	98.7	98.7

TABLE 3.4 – Comparaison des volumes d'eau perdus sur chaque conduite du réseau 3

Comme les débits de Porteau sont constants sur les conduites, les volumes d'eau perdus sont sous-estimés lorsque les pressions sont grandes (i.e. sur les arcs III et IV).

Cette comparaison montre qu'il y a des différences entre les résultats obtenus par le logiciel Porteau et le modèle des fuites dépendantes de la pression. Notre modèle est plus précis, car les termes d'inertie sont pris en compte et les fuites dépendent de la pression. Même si les modèles permanents sont de plus en plus performants, ils ont des limites par rapport au modèle dans lequel la relation entre les fuites et la pression est prise en compte et les termes d'inertie sont présents.

3.3.2 Deuxième cas test : un réseau avec différents exposants de fuite

Nous étudions le comportement d'un second réseau (i.e. le réseau 2) pour différentes valeurs de l'exposant de fuite α .

Le coefficient de fuite c a été calibré pour un exposant de fuite α égal à un, afin d'avoir un niveau de fuite cohérent sur le réseau (d'environ 30%). Nous ne changeons pas la valeur du coefficient de fuite quand nous faisons varier l'exposant de fuite. Même si les résultats obtenus en terme de volumes de fuite ne sont pas réalistes pour certains exposants de fuite, il est important de ne changer que ce paramètre pour analyser l'influence de l'exposant de fuite sur les résultats. Le couple (c, α) choisi est appliqué sur chaque conduite.

Le même maillage en espace est utilisé pour les différents exposants de fuite étudiés. Cependant, ce n'est pas le même maillage en temps. Pour les cinq exposants $\alpha = 0.6, 1, 1.5, 2$ et 2.2 , les pas de temps δt retenus après essais sont respectivement $10\text{ s}, 100\text{ s}, 10\text{ s}, 1\text{ s}$ et 1 s . En effet, même si la condition de stabilité (3.17) ne dépend pas de l'exposant de fuite α , la vitesse de convergence du modèle diffère pour les différents α . Une adaptation du pas de temps est ainsi faite.

Présentation du réseau

Pour mieux observer les résultats avec un exposant de fuite α différent de un, le réseau du premier cas test a été modifié pour ne garder qu'un seul réservoir. Ainsi, les débits de transit entre les deux réservoirs n'existent plus. Les débits dans les canalisations représentent essentiellement les consommations et les fuites facilitant d'autant l'interprétation des résultats. Nous étudions un réseau de six arcs et six nœuds dont un réservoir et cinq nœuds de consommation (cf figure 3.6).

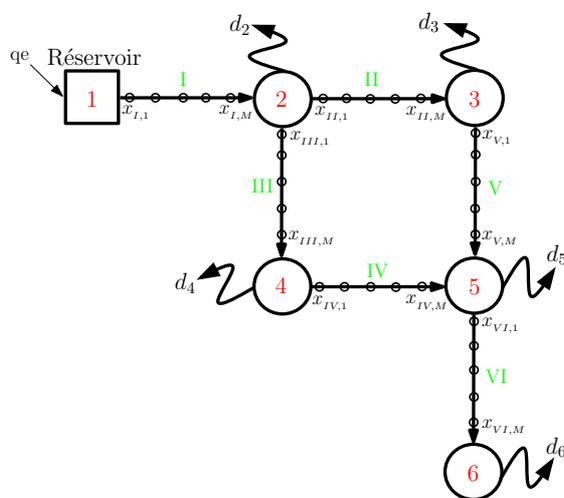


FIGURE 3.6 – Maillage du réseau 2

Les cotes sol associées aux six nœuds sont répertoriées dans le tableau 3.5.

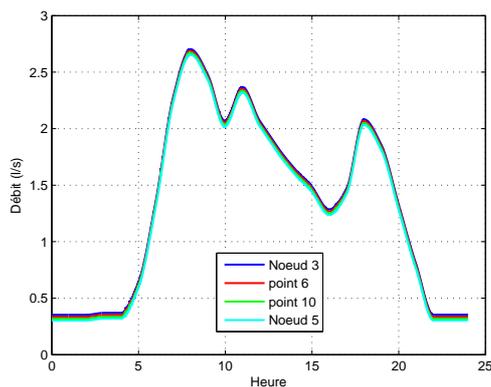
Nœuds	1	2	3	4	5	6
z (m)	100	95	85	70	85	80

TABLE 3.5 – Cotes sol aux nœuds du réseau 2

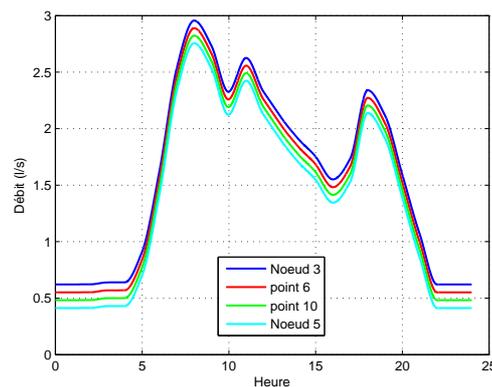
Calculs des débits et des charges

Les débits et les charges en quatre points de la conduite V sont observés pour différents niveaux de fuite (figures 3.7 et 3.8).

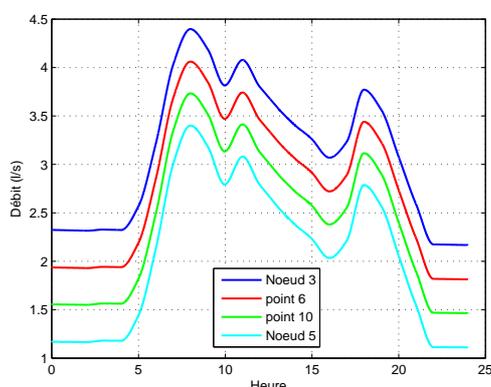
Pour les différents exposants de fuite étudiés, les quatre courbes ne sont pas superposées (figures 3.7). En effet, comme pour le premier cas test, les débits sont différents le long d'une conduite en raison des fuites. Le débit en fin de conduite (i.e. au nœud 5) est plus petit que le débit en début de conduite (i.e. au nœud 3) puisque de l'eau a été perdue tout le long celle-ci.



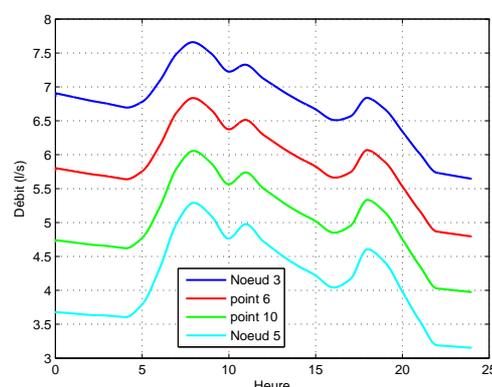
(a) $\alpha = 0.6$



(b) $\alpha = 1$



(c) $\alpha = 1.5$

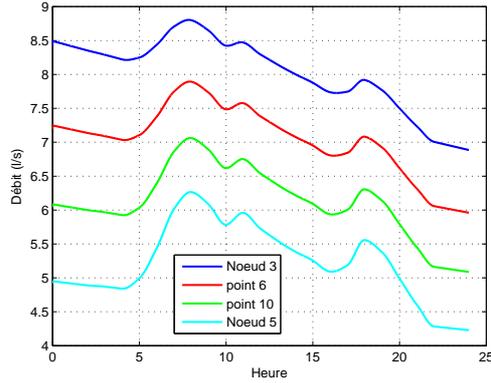


(d) $\alpha = 2$

FIGURE 3.7 – Débits sur l'arc V du réseau 2 pour différents exposants de fuite

Nous remarquons que plus l'exposant de fuite est grand, plus les débits dans les arcs sont grands (exemple débit en sortie du nœud 3, figure 3.8). En effet, plus il y a de fuite sur le réseau, plus le volume d'eau perdu est fort et plus le débit doit être grand pour assurer la consommation. Ce phénomène est d'autant plus visible sur les graphiques qu'un seul réservoir est présent.

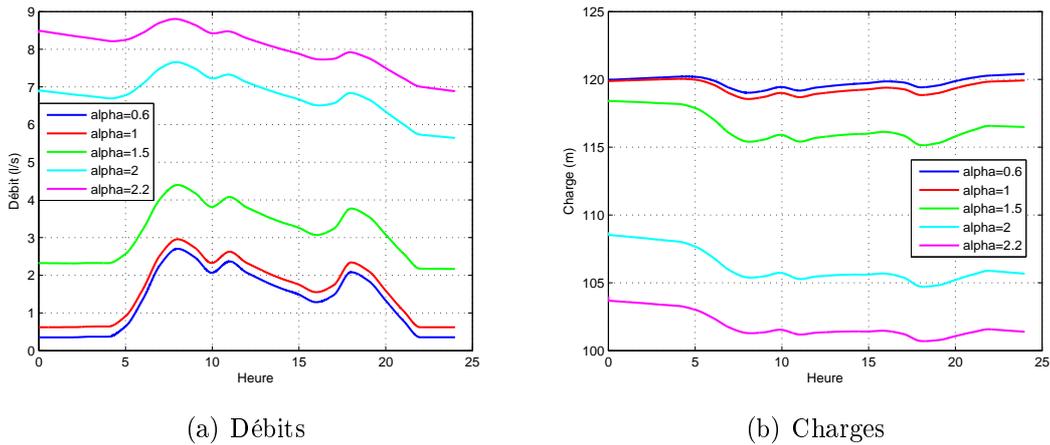
Quand l'exposant de fuite augmente, les volumes d'eau perdus sur les conduites augmentent (se référer au tableau 3.6), ce qui se traduit par des écarts de plus en plus importants entre les débits d'entrée et de sortie (par exemple entre le débit au nœud 3 (courbe bleue) et le débit au nœud 5 (courbe bleue ciel) sur la figure 3.7).



(e) $\alpha = 2.2$

FIGURE 3.7 – Débits sur l’arc V du réseau 2 pour différents exposants de fuite (suite)

Ces résultats se retrouvent sur les courbes des charges (figure 3.8(b)). Les débits augmentent avec α , les pertes de charge également, donc les charges diminuent.



(a) Débits

(b) Charges

FIGURE 3.8 – Débits et charges au nœud 3 du réseau 2 pour différents exposants de fuite

Remarque : Les résultats des débits pour $0.6 \leq \alpha \leq 2.2$ ont été obtenus avec le schéma semi-implicite de l’équation de diffusion-réaction (3.11).

Pour les autres exposants, l’efficacité de la méthode de Newton pour résoudre cette équation a été validée pour le cas d’une conduite. Sa généralisation à l’échelle d’un réseau n’a pas été faite.

Calcul des pertes

Nous avons vu que plus l’exposant de fuite α est grand, plus le volume entrant est grand pour assurer la consommation. Ces résultats se retrouvent dans le tableau 3.6. De même, plus l’exposant de fuite est grand, plus le volume d’eau perdu est important.

Les fuites ne sont pas réparties de façon identique sur le réseau (cf tableau 3.7). Sur certaines conduites, le volume d'eau perdu est plus important. Ceci est vrai sur les conduites où la différence entre la charge et la cote sol est grande, car sur ces conduites la pression est plus grande (par exemple les conduites III et IV).

	volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
$\alpha=0.6$	283.28	25.62	9.0
$\alpha=1$	362.14	104.48	28.8
$\alpha=1.5$	799.58	542.30	67.8
$\alpha=2$	1758.80	1501.10	85.4
$\alpha=2.2$	2071.70	1814.00	87.6

TABLE 3.6 – Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau 2

Arcs	I	II	III	IV	V	VI
$\alpha=0.6$	3.36	3.97	4.53	4.88	4.35	4.53
$\alpha=1$	11.55	15.25	19.11	21.64	17.78	19.04
$\alpha=1.5$	47.75	71.57	104.60	125.85	90.95	101.58
$\alpha=2$	110.94	152.81	324.68	416.96	224.05	271.70
$\alpha=2.2$	133.85	151.13	422.17	556.70	241.17	308.97
Cote sol moyenne (m)	97.5	90.0	82.5	77.5	85	82.5

TABLE 3.7 – Volume d'eau perdu sur chaque conduite du réseau 2

Comparaison avec le modèle prenant en compte les fuites constantes

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats obtenus sur les pertes en eau par le modèle hydraulique prenant en compte les fuites non détectées constantes développé dans le chapitre 2 avec ceux donnés par le modèle hydraulique prenant en compte les fuites dépendantes de la pression développé dans ce chapitre.

Pour un exposant de fuite fixé

Dans les deux modèles, nous avons calibré les différents paramètres définissant les fuites pour que le volume d'eau total perdu représente $104.48 m^3$. Cela correspond à un exposant de fuite égal à un. Le tableau 3.8 représente la répartition des pertes en eau sur les six conduites.

Modèle	I	II	III	IV	V	VI
fuites constantes	17.41	17.41	17.41	17.41	17.41	17.41
fuites dépendantes de la pression	11.55	15.25	19.11	21.64	17.78	19.04

TABLE 3.8 – Volume d'eau perdu sur chaque conduite du réseau 2 (m^3)

Les deux modèles ne donnent pas les mêmes résultats. Le modèle des fuites constantes sur-estime ou sous-estime le volume d'eau perdu. Sur l'arc I, le modèle des fuites constantes sur-estime les pertes (figure 3.9(a)). Comme la pression est plus faible sur cet arc, le volume perdu réel est plus petit que le volume des pertes donné par le modèle des fuites constantes. Sur l'arc IV, l'inverse est observé car la pression est plus forte.

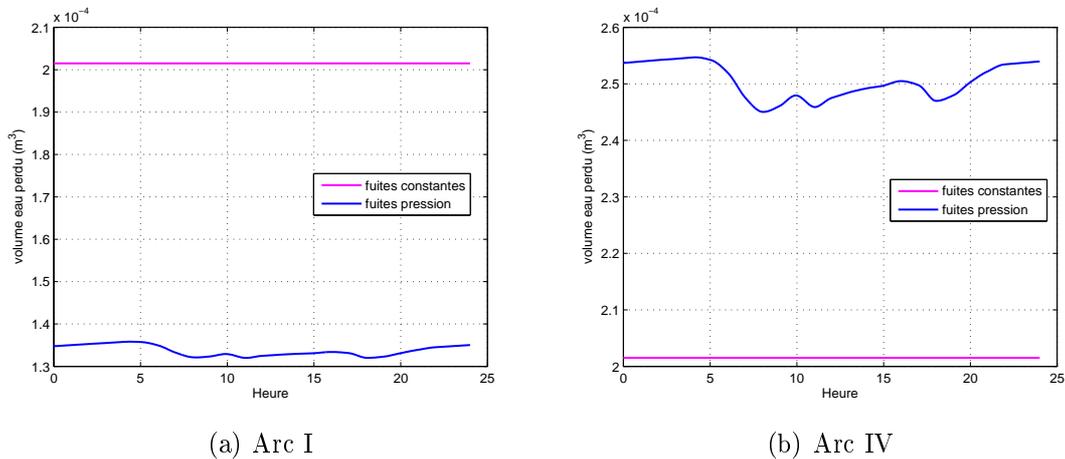


FIGURE 3.9 – Comparaison du volume d'eau perdu entre les deux modèles de fuite sur le réseau 2

La figure 3.10 représente l'évolution des débits le long de l'arc IV à une heure de pointe (i.e. $t = 8 h$) pour les deux modèles.

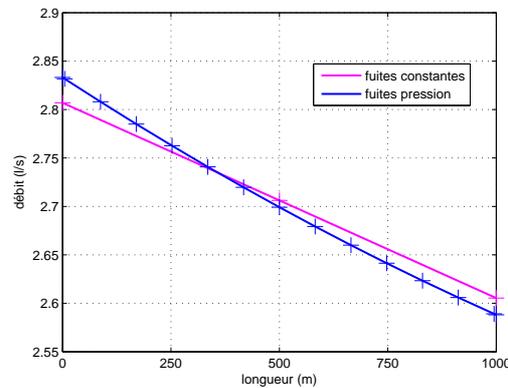


FIGURE 3.10 – Comparaison des débits sur l'arc IV du réseau 2 à $t = 8 h$

Pour le modèle des fuites constantes le débit varie linéairement le long de la conduite, ce qui n'est pas le cas pour le débit donné par l'autre modèle.

Le débit de fuite sur la conduite est la différence entre le débit en amont et le débit en aval de la conduite. Quand les fuites dépendantes de la pression, le débit de fuite est plus important que celui du modèle des fuites constantes. Ce dernier sous-estime les pertes (comme nous le retrouvons dans la tableau 3.8).

Cette comparaison confirme qu'il est important de prendre en compte la relation entre les

fuites et la pression, puisque la pression n'est pas la même sur la longueur de la conduite. Sinon, des erreurs peuvent être faites sur le volume d'eau perdu sur les conduites.

Pour différents exposants

Nous venons de montrer que des différences apparaissent entre les pertes calculées par les deux modèles. Nous appelons indice d'écart, le rapport entre les pertes obtenues par le modèle des fuites dépendantes de la pression et celles données par le modèle des fuites constantes. Lorsque cet indice est égal à un, les deux modèles donnent des pertes similaires. Le modèle des fuites constantes donne des pertes égales sur chaque conduite. Elles sont équivalentes à $4.27 m^3$, $17.41 m^3$, $90.38 m^3$, $250.18 m^3$, et $302.33 m^3$ pour respectivement $\alpha = 0.6$, $\alpha = 1$, $\alpha = 1.5$, $\alpha = 2$ et $\alpha = 2.2$.

Le tableau 3.9 répertorie l'indice d'écart sur les six conduites et pour les différents exposants.

Arcs	I	II	III	IV	V	VI
$\alpha=0.6$	0.79	0.93	1.06	1.14	1.02	1.06
$\alpha=1$	0.66	0.88	1.10	1.24	1.02	1.09
$\alpha=1.5$	0.53	0.79	1.16	1.39	1.01	1.12
$\alpha=2$	0.44	0.61	1.30	1.67	0.90	1.09
$\alpha=2.2$	0.44	0.50	1.40	1.84	0.80	1.02

TABLE 3.9 – Indice d'écart sur le réseau 2

L'indice est toujours différent de un : les deux modèles ne calculent jamais le même volume d'eau perdu. Cependant, plus l'exposant de fuite est grand, plus l'indice s'éloigne de la valeur moyenne et donc plus l'écart entre les deux modèles est important (en terme de pertes).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle hydraulique représentant l'écoulement de l'eau dans un réseau d'eau potable en tenant compte des fuites dépendantes de la pression. Les équations de continuité et de quantité de mouvement amènent à un système d'équations aux dérivées partielles. Les variables d'état sont les débits et les charges. L'équation de quantité de mouvement est écrite uniquement en fonction des débits et l'opérateur du p-Laplacien apparaît.

Deux méthodes de splitting sont proposées pour résoudre cette équation. Dans le premier splitting, la réaction est associée à la diffusion et dans le second, la réaction est associée au transport. Les deux méthodes conduisent à des résultats identiques, mais le premier splitting est préféré car les méthodes numériques utilisées pour résoudre la diffusion et la réaction sont de même nature et la convergence est donc plus rapide. La non-linéarité du terme de diffusion engendre des difficultés dans la résolution pour certains exposants de fuite. Une méthode de Newton permet de remédier à ce problème.

Le modèle a été validé sur deux cas tests et les résultats ont été comparés à ceux obtenus par le modèle hydraulique prenant en compte les fuites constantes développé dans le chapitre

précédent et à ceux obtenus par le logiciel Porteau. Les résultats ont confirmé que les fuites ne sont pas réparties de façon homogène sur un réseau. Il est donc important de bien prendre en compte la relation entre les fuites et la pression, car la pression n'est pas la même le long des conduites et les pertes dépendent de celle-ci. Un des avantages de ce modèle est la discrétisation des conduites qui permet de mieux prédire l'écoulement sur celles-ci, notamment si leurs longueurs sont grandes. Ce modèle ne présente pas les limites des modèles permanents (comme Porteau) qui ne tiennent pas compte des termes d'inertie et de la relation entre les fuites et la pression.

Chapitre 4

Minimisation du volume des fuites par action sur la pression

Comme nous l'avons précisé en introduction, le problème de la réduction des fuites est complexe et nécessite des actions coordonnées dans différents domaines du management des réseaux d'eau. Avec les formulations mises en place et les méthodes de résolution destinées à prendre en compte les fuites dans les modèles hydrauliques explicitées dans les chapitres précédents, nous considérons maintenant le contrôle du volume des fuites par réduction de la pression.

Nous choisissons donc d'agir sur la pression pour réduire le volume des fuites. La régulation de la pression doit être faite en tenant compte de deux contraintes. La première indique que la pression doit être suffisante pour assurer la quantité d'eau nécessaire aux consommateurs. La seconde impose que la pression ne doit pas être excessive pour ne pas accroître les fuites et voir apparaître l'éclatement des conduites. Dans de nombreuses études, une ou plusieurs vannes de contrôle sont placées sur le réseau dans le but de diminuer la pression [41], [36].

Dans ce chapitre, la théorie du contrôle est utilisée pour réguler la pression dans le but de minimiser le volume des fuites. La théorie du contrôle optimise les propriétés des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande, le but étant d'amener un système d'un état initial donné à un état final au moyen de cette commande (ou contrôle), en respectant éventuellement certains critères.

Ces méthodes permettent de stabiliser le système et de le rendre plus performant. Ainsi les domaines d'applications sont nombreux comme l'automobile, l'aéronautique, et l'hydraulique, et la théorie du contrôle est souvent utilisée dans la modélisation mathématique des problèmes physiques.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la formulation du problème de contrôle. Ensuite, la méthode de résolution choisie est décrite. Enfin, la formulation est validée sur des cas tests et sur un réseau réel correspondant à une ville du littoral du sud-ouest de la France.

4.1 Formulation du problème de contrôle

En théorie du contrôle, on agit sur l'état du système en utilisant des fonctions appelées contrôles ou commandes.

Pour que la formulation du problème de contrôle soit rigoureusement bien posée, plusieurs paramètres sont à définir :

- les variables d'états qui définissent les grandeurs caractéristiques du problème,
- les paramètres de contrôle : selon que le contrôle soit aux frontières ou distribué, ces variables apparaîtront soit comme conditions initiales ou aux limites du problème, soit directement comme terme source dans les équations d'état,
- une fonctionnelle coût ou objectif qui définit les objectifs que l'on souhaite atteindre. Cette fonctionnelle est une fonction explicite des variables d'état et peut également dépendre des paramètres de contrôle,
- des contraintes physiques du problème traduisant l'évolution des variables d'état en fonction des paramètres de contrôle, en respectant les lois physiques.

Nous définissons ces paramètres dans les paragraphes suivants.

4.1.1 Variables d'état

Dans le chapitre précédent, nous avons écrit le problème représentant l'écoulement de l'eau dans les conduites en tenant compte des fuites dépendantes de la pression. Le problème que nous avons étudié est le suivant :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (t, x) + \frac{1}{gS^2} \frac{\partial(\beta Q^2)}{\partial x}(t, x) + \mathbf{J}(Q(t, x)) + \frac{\partial z}{\partial x}(x) = 0 \\ \mathbf{H}(t, x) = \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\left| \frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right) + z(x) \end{array} \right. \quad (4.1a)$$

$$(4.1b)$$

où \mathbf{J} est le terme de pertes de charge qui est défini par :

$$\mathbf{J}(Q(t, x)) = k |Q(t, x)|^{\gamma-1} Q(t, x)$$

Les variables d'état sont les débits Q et les charges H .

4.1.2 Paramètres de contrôle

Nous voulons minimiser le volume des fuites en agissant sur la pression par l'intermédiaire d'une ou plusieurs vannes placées en différents endroits du réseau. Celles-ci créent une perte de charge locale entraînant à l'aval une réduction de pression.

Soit n_c le nombre de points de contrôle. Nous notons $\mathbf{u}(t)$ l'ensemble des contrôles ou commandes sur le réseau et $\mathbf{u}(t)$ est défini par :

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n_c}(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, à chaque point de contrôle correspond une fonction de contrôle dépendante du temps.

Cette fonction \mathbf{u} doit appartenir à l'ensemble des commandes admissibles. Nous notons cet ensemble \mathcal{U}_{ad} et il est défini par :

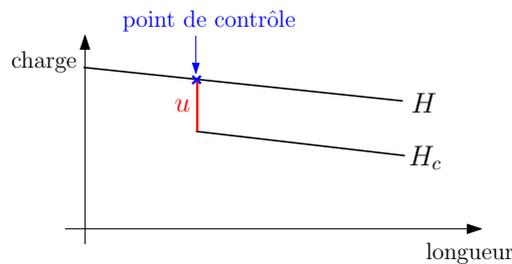
$$\mathcal{U}_{ad} = \{\mathbf{u} \in L^2(0, T), \mathbf{u}(t) \geq 0\}$$

Il est muni de la norme euclidienne s'écrivant :

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\int_0^T |\mathbf{u}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque : Travailler dans l'espace L^2 est intéressant en raison de ses bonnes propriétés de dérivabilité.

Le contrôle \mathbf{u} a la dimension d'une pression. Si nous notons H_c la charge contrôlée, la pression contrôlée s'écrit $H_c - z = H - z - \mathbf{u}$. A l'emplacement du point de contrôle, \mathbf{u} peut être assimilé à une perte de charge locale (car $\mathbf{u} = H - H_c$), comme l'illustre le dessin ci-dessous. Cette perte de charge locale entraîne une diminution de la charge à l'aval de l'écoulement.



Le contrôle doit être positif, puisqu'il représente la pression maximale de laquelle on peut diminuer la pression au point de contrôle, tout en respectant les contraintes. Aucune borne maximale n'est donnée : la caractéristique du réseau impose une borne physiquement admissible. Plus le contrôle \mathbf{u} est grand, plus la pression est réduite.

4.1.3 Fonctionnelle

Notre objectif est de minimiser le volume des fuites en réduisant la pression. Minimiser le volume des fuites revient à minimiser le volume d'eau entrant dans le réseau.

En effet, avec la loi de continuité, nous savons que le volume d'eau rentrant dans le système est égal au volume d'eau sortant du système. Comme le volume sortant du système est égal à la somme du volume des fuites et du volume des consommations, et que le volume des consommations est connu, minimiser le volume des fuites revient à minimiser le volume

d'eau rentrant dans le système.

La fonctionnelle ou fonction coût associée à notre problème est la suivante (pour T donnée) (P. Fabrie [13]) :

$$\mathcal{J}(\mathbf{Q}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \int_{t=0}^T \left[\left(\mathbf{A}^r \mathbf{Q}(t, \mathbf{u}) \right)^2 + k_1 \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{ref}(t)\|_2^2 \right] dt + k_2 \left\| \mathbf{A}^r \mathbf{Q}(T, \mathbf{u}) - \mathbf{Q}_{ref} \right\|_2^2 \quad (4.2)$$

où \mathbf{A}^r est la matrice d'incidence réduite aux nœuds réservoirs et $\mathbf{u}_{ref}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{ref(1)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{ref(n_c)}(t) \end{pmatrix}$.

Remarque : Le débit Q à la sortie du réservoir peut être positif ou négatif. Son signe change si l'eau sort ou entre dans le réservoir.

Généralement, la fonctionnelle ne dépend pas explicitement du paramètre de contrôle \mathbf{u} . Le problème d'optimisation peut alors être mal posé car il est possible d'obtenir un contrôle qui, bien que donnant une fonctionnelle optimale, serait non borné. Pour éviter cette difficulté, le problème d'optimisation est régularisé introduisant une dépendance entre la fonctionnelle et le paramètre de contrôle.

Le premier terme de la fonctionnelle représente le volume d'eau entrant dans le réseau. Ce volume est la somme des débits à l'entrée ou à la sortie des réservoirs.

Le second terme permet de régulariser la fonctionnelle. Le coefficient k_1 est très faible pour que le premier terme ait plus d'importance que le second.

Le troisième terme a été ajouté pour imposer une contrainte sur le point final $\mathbf{Q}(T, \mathbf{u})$. Pour la même raison que précédemment, le coefficient k_2 est très faible.

4.1.4 Contraintes sur l'état

Des contraintes sont appliquées sur les nœuds du réseau (i.e. sur les nœuds de consommation et les réservoirs). Les points intermédiaires créés sur chaque conduite ne sont pas contraints. L'ensemble des contraintes du système est noté \mathcal{F} .

Les contraintes dépendent du type de nœud :

- Aux nœuds de consommation : Cette contrainte garantit une pression suffisante aux nœuds de consommation. En effet, notre objectif est de réduire au maximum la pression pour réduire le volume des fuites tout en assurant une pression minimale aux consommateurs.

Si on note x_i l'emplacement d'un nœud de consommation sur une conduite, cette contrainte s'écrit :

$$H_c(t, x_i) - z(x_i) \geq H_{x_i, min} - z(x_i) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.3)$$

où $H_{x_i, min} - z(x_i)$ est la pression minimale acceptable et $H_c - z = H - z - \mathbf{u}$ est la pression contrôlée.

Cette contrainte est imposée sur tous les nœuds de consommation.

- Aux réservoirs : Deux contraintes apparaissent naturellement,
 - Une contrainte assurant une quantité d'eau suffisante dans le réservoir. En effet, si on diminue trop la pression le réservoir peut se vider. Si nous notons x_{res} la position d'un réservoir sur la conduite, cette contrainte se traduit par l'équation :

$$H(t, x_{res}) - z_{radier}(x_{res}) > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.4)$$

avec z_{radier} la cote du fond du réservoir.

- Une contrainte garantissant un niveau d'eau dans le réservoir au temps final au moins égal à celui au temps initial. Cette contrainte permet au réservoir d'être à nouveau opérationnel à la fin de l'expérience.

Cette contrainte s'écrit :

$$H(T, x_{res}) - H(t = 0, x_{res}) \geq 0 \quad (4.5)$$

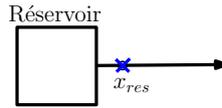
Nous remarquons que ces contraintes aux réservoirs ne sont effectives que pour des réservoirs d'équilibre en situation normale de fonctionnement. En effet, le réservoir de tête n'a pas besoin d'être contraint, puisqu'on lui apporte de l'eau tout au long de l'expérience afin que son niveau d'eau reste relativement constant.

4.1.5 Conditions aux limites

Le contrôle apparaît dans les conditions aux limites du problème (\mathcal{P}). Les conditions aux limites changent en fonction de l'emplacement des points de contrôle sur le réseau. Dans la suite, l'emplacement d'un point de contrôle est représenté par une croix bleue sur les graphiques.

Voici les conditions aux limites dans les cas les plus fréquents.

- Le point de contrôle est placé à la sortie d'un réservoir (voir dessin ci-dessous)

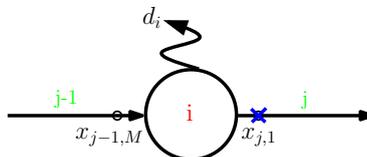


Dans ce cas là, la condition limite au réservoir s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(t, x_{res}) = -c \left[H(t = 0, x_{res}) - \int_0^t \mathbf{A}^r \mathbf{S}_r^{-1} \mathbf{Q}(\tau) d\tau - z(x_{res}) - \mathbf{u}(t) \right]^\alpha \quad (4.6)$$

Comme le contrôle \mathbf{u} appartient à l'ensemble des commandes admissibles \mathcal{U}_{ad} , \mathbf{u} est positif ($\mathbf{u}(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$). L'ajout du contrôle dans la condition limite au réservoir permet de diminuer la pression à la sortie de ce dernier.

- Le point de contrôle est placé après un nœud de consommation (voir dessin ci-dessous)



Au nœud de consommation interne, deux conditions aux limites sont indispensables. Nous trouvons :

– L'équation de continuité

$$\mathbf{Q}_{j-1,M}(t) = \mathbf{Q}_{j,1}(t) + \mathbf{d}_i(t) \quad (4.7)$$

– L'équation de transmission

$$\mathbf{H}_{j,1}(t) = \mathbf{H}_{j-1,M}(t) - \mathbf{u}(t) \quad (4.8)$$

Nous réécrivons cette équation en fonction du débit \mathbf{Q} puisque nous avons choisi de résoudre en premier le problème en fonction du débit.

Connaissant la relation (4.1b) entre le débit \mathbf{Q} et la charge \mathbf{H} , l'équation de transmission au nœud de consommation s'écrit :

$$\left| \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}(t, x_{j,1}) \right|^{\frac{1}{\alpha}} = \left| \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}(t, x_{j-1,M}) \right|^{\frac{1}{\alpha}} - c^{\frac{1}{\alpha}} \mathbf{u}(t) \quad (4.9)$$

Remarque : Nous rappelons que $z_{j-1,M} = z_{j,1}$.

Cette équation généralise la condition aux limites (CL4) du chapitre 3.

4.1.6 Calcul de la charge

Dans la résolution de l'équation (4.1a) de notre problème hydraulique (\mathcal{P}), le contrôle apparaît uniquement dans les conditions aux limites.

Au nœud i contenant le point de contrôle, le calcul de la charge \mathbf{H} se fait en modifiant l'équation (4.1b) comme suit :

$$\mathbf{H}(t, x_i) = \frac{1}{c^{1/\alpha}} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{Q}(t, x_i)}{\partial x} \right|^{1/\alpha} \right) + \mathbf{z}(x_i) + \mathbf{u}(t) \quad (4.10)$$

Le nœud i peut être un réservoir ou un nœud de consommation.

Aux autres nœuds, la charge est calculée grâce à l'équation (4.1b).

Le problème de contrôle peut s'énoncer de la manière suivante :

Déterminer les variables d'état \mathbf{Q} et \mathbf{H} , et le paramètre de contrôle \mathbf{u} , tels que la fonctionnelle objectif \mathcal{J} soit optimale sous les contraintes \mathcal{F} .

4.2 Résolution directe du problème de contrôle

Deux méthodes sont principalement utilisées pour résoudre un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes.

Une méthode, que l'on qualifie souvent de primal-dual, consiste à transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte. Cela s'effectue en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange donnant des conditions d'optimalité du premier ordre.

Une autre méthode consiste à utiliser directement un algorithme d'optimisation. Cela nécessite la détermination du gradient de la fonctionnelle ou au moins une approximation de celui-ci.

Nous avons choisi d'utiliser un algorithme d'optimisation pour résoudre le problème de contrôle. Cet algorithme est détaillé dans cette partie ainsi que la fonction choisie pour approximer le contrôle ou la commande.

4.2.1 Approximation de la commande par une fonction en escalier

Nous considérons une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N$. On paramétrise le problème de contrôle optimal sur chaque intervalle $[t_{i-1}, t_i[$. Nous avons donc

$$\mathbf{u}(t) = u_i \quad t \in [t_{i-1}, t_i[\quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

Nous choisissons de garder le contrôle constant sur chaque intervalle, alors nous pouvons écrire :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(t)$$

où la fonction φ_i est la fonction étagée suivante :

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et les coefficients u_i sont des coefficients à déterminer.

4.2.2 Algorithme d'optimisation

A chaque point de contrôle, il faut trouver la fonction de contrôle appartenant à l'ensemble des commandes admissibles \mathcal{U}_{ad} . Trouver cette fonction de contrôle revient à calculer tous les coefficients u_i définissant la fonction en escalier.

L'algorithme d'optimisation choisi est une méthode de descente. Il consiste à partir d'un point aléatoire puis de se déplacer dans la direction de la plus forte pente. En appliquant plusieurs itérations, l'algorithme converge vers une solution qui est le minimum de la fonctionnelle \mathcal{J} . Nous ne calculons pas le gradient de la fonctionnelle, nous en faisons une approximation par différences finies.

Si la fonction de contrôle contient N paliers, calculer la fonction de contrôle revient à faire N algorithmes de descente pour calculer les u_i sur les N intervalles.

Comme la fonctionnelle et certaines contraintes dépendent du temps final T , les calculs des u_i doivent se faire simultanément.

Nous calculons les u_1^k, \dots, u_N^k sur les N intervalles. Si l'un d'eux sature une contrainte, cette contrainte reste saturée jusqu'à la fin de la convergence de l'algorithme de descente. Il est facile de voir que les u_i vont être différents sur les N intervalles étudiés. En effet, la pression minimale acceptable varie dans le temps.

Pour chaque point de contrôle, nous cherchons la fonction de contrôle qui lui est associée .
 Pour un point de contrôle, cela revient à faire l'algorithme décrit ci-dessous.

On pose $\mathbf{u}^k = {}^t(u_1^k, \dots, u_N^k)$

1. Initialisation : $k = 0 : u_1^0 = u_2^0 = \dots = u_N^0 = 0$
2. Itération k : Méthode de descente pour calculer les u_i^{k+1} :

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \rho_k \nabla \mathcal{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{u}^k)$$

où ρ_k est le pas de descente.

On approxime le gradient par des différences finies d'ordre 1, on écrit alors

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \rho_k \frac{\mathcal{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{u}^k + h) - \mathcal{J}(\mathbf{Q}, \mathbf{u}^k)}{h}$$

Ce qui revient à calculer

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{k+1} = u_1^k - \rho_k \frac{\mathcal{J}(\mathbf{Q}, u_1^k + h, u_2^k, \dots, u_N^k) - \mathcal{J}(\mathbf{Q}, u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k)}{h} \\ u_2^{k+1} = u_2^k - \rho_k \frac{\mathcal{J}(\mathbf{Q}, u_1^k, u_2^k + h, \dots, u_N^k) - \mathcal{J}(\mathbf{Q}, u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k)}{h} \\ \vdots \\ u_N^{k+1} = u_N^k - \rho_k \frac{\mathcal{J}(\mathbf{Q}, u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k + h) - \mathcal{J}(\mathbf{Q}, u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k)}{h} \end{array} \right.$$

3. Critère d'arrêt pour chaque u_i^{k+1} :

- si une des contraintes (4.3), (4.4) ou (4.5) n'est pas satisfaite sur l'intervalle $t \in [t_{i-1}, t_i[$, stop pour le u_i concerné
- sinon, on pose $k = k + 1$ et on retourne à 2

4. Calcul des débits \mathbf{Q} et des charges \mathbf{H} avec le code hydraulique pour les coefficients optimaux u_i trouvés.

4.3 Résultats

A travers quelques exemples, nous allons valider notre problème de contrôle. Placer un point de contrôle revient à placer une vanne de contrôle sur le réseau.

Tout d'abord, avec un seul point de contrôle, nous regardons l'impact du contrôle en fonction du nombre de paliers de la fonction de contrôle et en fonction de la taille des fuites. Ensuite, nous déplaçons le point de contrôle et regardons les différences obtenues sur le volume d'eau perdu. Finalement, les résultats obtenus sur un réseau réel sont présentés. Pour les différents exemples, les calculs ont été effectués sur une période de 24 h ($T = 24$).

Remarque : Les caractéristiques des réseaux étudiés ci-dessous sont données dans l'annexe B. Vous y trouverez par exemple les longueurs et les diamètres des conduites, les coefficients de fuite et de rugosité, les consommations aux nœuds ...

Choix de certains paramètres du problème de contrôle

Dans la fonctionnelle \mathcal{J} (équation 4.2), les termes 2 et 3 sont rajoutés pour la régulariser. Les coefficients k_1 et k_2 sont choisis de telle sorte que le premier terme représentant le volume d'eau à minimiser soit prépondérant. Plusieurs couples (k_1, k_2) sont testés et pour des raisons de rapidité de calculs, nous choisissons $(k_1, k_2) = (10^{-5}, 10^{-5})$.

Le gradient de la fonctionnelle est déterminé en l'approximant par différences finies. Plusieurs pas h sont testés et nous utilisons le pas $h = 10^{-2}$.

4.3.1 Premier cas test : le réseau 4

Présentation du réseau

Pour la validation de la formulation du problème de contrôle, nous avons utilisé le réseau 4 (figure 4.1).

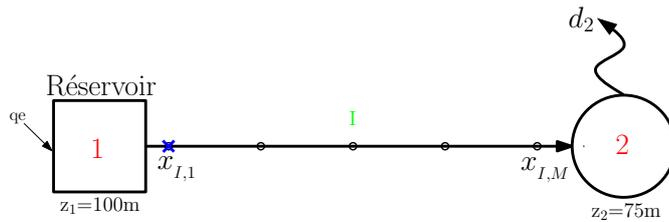


FIGURE 4.1 – Maillage du réseau 4

Il est composé d'une seule conduite et de deux nœuds. Le nœud 1 est un réservoir et le nœud 2 est un nœud de consommation.

Un seul point de contrôle est présent et se situe à la sortie du réservoir (i.e. au point d'abscisse $x_{I,1}$).

La consommation est une donnée, elle varie dans le temps et elle est de la forme suivante :

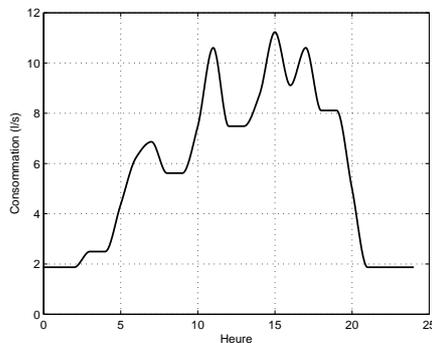


FIGURE 4.2 – Consommation au nœud 2 du réseau 4

Résultats pour un exposant de fuite fixé

Dans cette partie, nous avons considéré un exposant de fuite égal à 1 (i.e. $\alpha = 1$). Pour voir l'influence de la réduction de la pression sur le volume des fuites, nous comparons les débits, les charges et les pertes obtenus sans contrôle et avec contrôle.

Calcul des fonctions de contrôle

Nous avons choisi d'étudier deux fonctions de contrôle. Nous avons fait varier le nombre de paliers de cette fonction ($N = 5$ et $N = 10$). Les fonctions de contrôle obtenues sont représentées sur les figures 4.3(a) et 4.3(b), respectivement pour une fonction à cinq paliers et dix paliers.

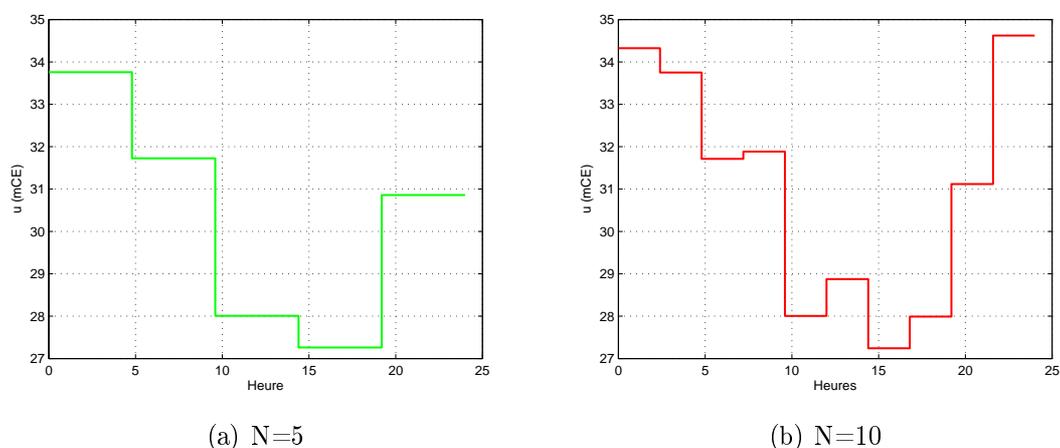


FIGURE 4.3 – Fonctions de contrôle pour le réseau 4

Comme nous l'avons expliqué dans la partie précédente, la fonction de contrôle u a la dimension d'une pression et représente une perte de charge locale. Elle peut s'interpréter comme la pression maximale de laquelle la pression à la sortie du réservoir peut être baissée tout en respectant les contraintes de pression.

Nous observons que la fonction de contrôle est inversement proportionnelle à la consommation. En effet, la pression peut être fortement réduite lorsque la consommation est faible (i.e. pendant les périodes creuses). Lorsque la consommation est forte, la pression peut être moins réduite puisqu'il faut satisfaire les contraintes de pression pour les consommateurs. Nous remarquons que plus le nombre de paliers est grand, plus le contrôle est précis (i.e. plus la fonction de contrôle ressemble à l'inverse de la consommation).

Cependant utiliser une fonction de contrôle précise engendre des coûts en terme de temps de calculs très importants. Pour ce réseau, il est de 27 minutes pour une fonction à cinq paliers ; il est plus de seize fois plus grand pour dix paliers. Ceci est dû à l'augmentation du nombre d'itérations de la méthode de descente.

Calcul des débits

Les débits à la sortie du réservoir avant et après contrôle sont représentés sur la figure 4.4.

Avec la réduction de la pression, une réduction des débits est observée. Cependant le nombre de paliers de la fonction de contrôle n'intervient pas significativement dans les résultats. En effet, les courbes des débits pour les deux fonctions de contrôle trouvées sont superposées. La différence entre le débit sans contrôle et le débit avec contrôle est le gain obtenu sur le débit de fuite.

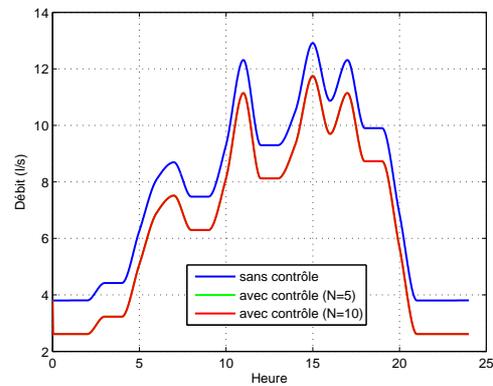
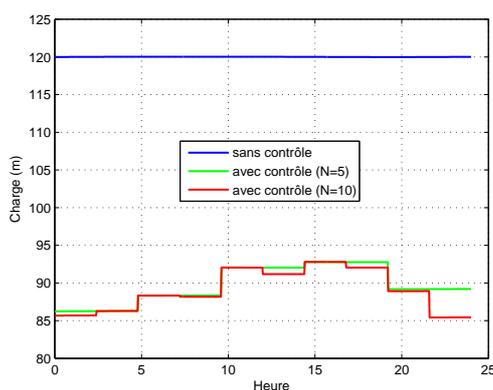


FIGURE 4.4 – Comparaison des débits à la sortie du réservoir sans contrôle et avec contrôle sur le réseau 4

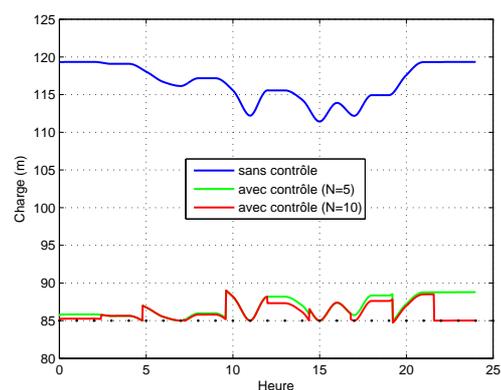
Remarque : Un moyen de trouver le nombre de marches adéquat à un problème est de faire les calculs pour N et $2N$ marches. Si les résultats obtenus sont identiques, cela signifie que N marches suffisent.

Calcul des charges

Les charges à la sortie du réservoir et au nœud de consommation sont représentées sur les figures 4.5(a) et 4.5(b) respectivement.



(a) Charges à la sortie du réservoir



(b) Charges au nœud 2

FIGURE 4.5 – Comparaison des charges sans contrôle et avec contrôle sur le réseau 4

Sur ce réseau, la seule contrainte est la contrainte de pression au nœud de consommation. La pression minimale à garantir aux consommateurs est de 10 mCE . Ainsi, au nœud de

consommation, la charge doit être supérieure ou égale à 85 m , puisque la contrainte s'écrit $H_c(t, x_{I,M}) - z(x_{I,M}) > 10$ et que $z(x_{I,M}) = 75\text{ m}$.

La figure 4.5(b) montre que la charge au nœud 2 a diminué avec le contrôle et a atteint sa valeur minimale admissible pour chaque période étudiée (5 périodes ou 10 périodes). Nous remarquons que celle-ci n'est pas forcément en début ou en fin de palier.

Dans cet exemple, le nœud 2 contraint le système. La charge à la sortie du réservoir ne peut pas baisser plus, puisque la charge au nœud de consommation a atteint sa valeur minimale acceptable.

Calcul des pertes

Le tableau suivant regroupe les volumes d'eau entrant et perdus dans le système, ainsi que le pourcentage de fuite avant et après le contrôle.

	volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
Sans contrôle	659.7	159.5	24.2
Avec contrôle (N=5)	557.7	57.5	10.3
Avec contrôle (N=10)	557.6	57.4	10.3

TABLE 4.1 – Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau sur le réseau 4

Les données décrites dans le tableau 4.1 confirment les conclusions faites à partir des graphiques. Le contrôle permet de réduire le volume des fuites dans le réseau. Il passe de 24.2% à 10.3%. Dans ce cas là, les deux fonctions de contrôle utilisées donnent des résultats similaires.

Résultats pour différents exposants de fuite

Nous reprenons l'exemple précédent pour lequel nous faisons varier l'exposant de fuite. Pour cela, nous regardons les résultats pour trois exposants de fuite différents ($\alpha = 0.5, 1$ et 1.5). Sur chaque conduite, le même couple (c, α) est imposé. La consommation est identique pour les taux de fuite étudiés.

Calcul des fonctions de contrôle

Nous cherchons une fonction de contrôle de cinq paliers permettant de réduire la pression à la sortie du réservoir pour chaque exposant de fuite étudié.

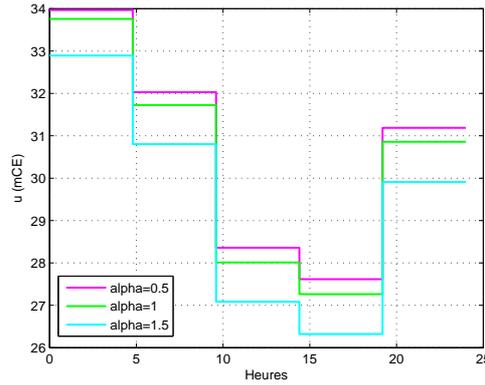


FIGURE 4.6 – Fonctions de contrôle et différents exposants de fuite pour le réseau 4

L'algorithme nous permet d'obtenir les fonctions de contrôle illustrées par la figure 4.6. Quand un contrôle u est petit, la pression ne peut pas être beaucoup réduite.

Les périodes de pointe correspondent aux paliers 3 et 4. Sur ces paliers, la correction de la pression est plus petite et le contrôle est alors plus faible. En effet, pendant les fortes consommations, la pression doit être suffisante pour satisfaire la consommation des abonnés. Les fuites pouvant être assimilées à des consommations supplémentaires, plus l'exposant de fuite est grand (i.e. plus les fuites sont importantes), plus la réduction de pression possible est petite.

Par contre, l'exposant de fuite α n'intervient pas dans les variations du contrôle dans le temps. En effet, les écarts sont constants entre les fonctions de contrôle pour les différents exposants α .

Calcul des débits

Nous observons les débits obtenus à la sortie du réservoir pour les différents exposants de fuite étudiés (figure 4.7).

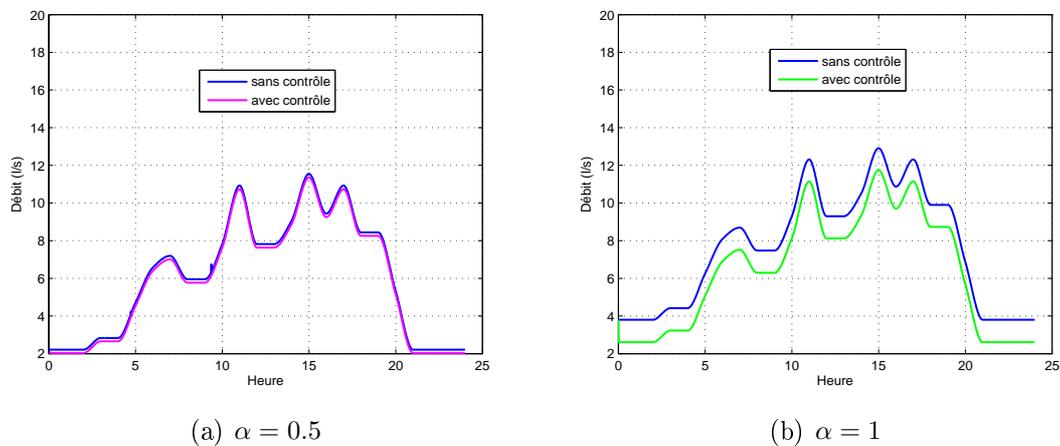
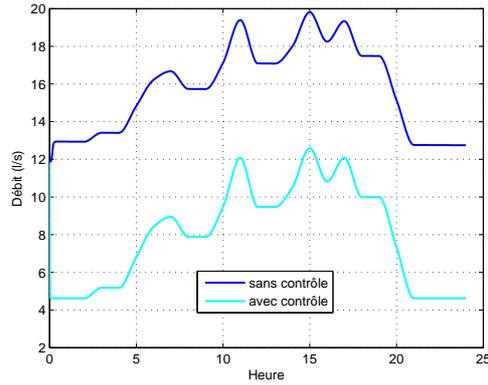


FIGURE 4.7 – Débits à la sortie du réservoir du réseau 4 pour différents exposants de fuite



(a) $\alpha = 1.5$

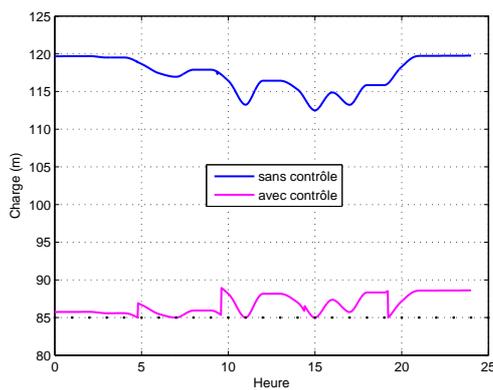
FIGURE 4.7 – Débits à la sortie du réservoir du réseau 4 pour différents exposants de fuite (suite)

Les débits obtenus avec le contrôle sont plus petits que ceux obtenus sans contrôle. Nous constatons que plus l'exposant de fuite est grand, plus la différence entre le débit sans contrôle et le débit avec contrôle est grande.

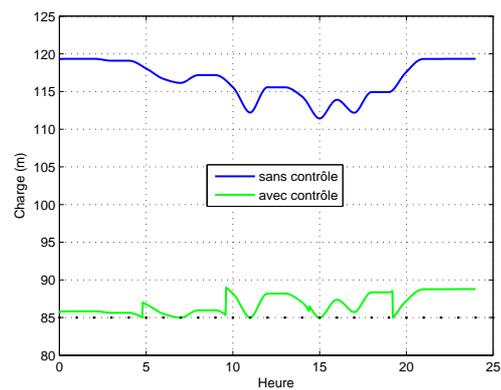
Calcul des charges

Pour le cas $\alpha = 1$, nous avons vu que la contrainte de pression au nœud de consommation imposait en ce nœud une charge minimale égale à 85 m . Pour tout niveau de fuite, cette même contrainte doit être respectée.

Si nous observons la figure 4.8, les charges obtenues au nœud de consommation sont supérieures ou égales à la charge minimale acceptable et cela sur les cinq périodes étudiées (puisque $N = 5$).

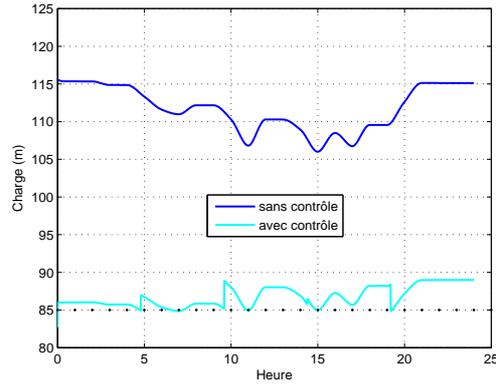


(a) $\alpha = 0.5$



(b) $\alpha = 1$

FIGURE 4.8 – Charges au nœud 2 du réseau 4 pour différents exposants de fuite



(a) $\alpha = 1.5$

FIGURE 4.8 – Charges au nœud 2 du réseau 4 pour différents exposants de fuite (suite)

Le résultat est indépendant des fuites et n'intervient pas dans l'allure de la charge. Sur chaque palier, ce sont les points de plus fortes consommations qui contraignent le problème.

Calcul des pertes

Le bilan en eau et le pourcentage de fuite pour chaque exposant de fuite ont été répertoriés dans le tableau 4.2.

Pour les trois exposants étudiés, l'ajout d'un contrôle de la pression a permis de réduire le volume des fuites.

		volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
$\alpha = 0.5$	Sans contrôle	528.9	28.77	5.4
	Avec contrôle (N=5)	513.3	13.1	2.6
$\alpha = 1$	Sans contrôle	659.7	159.5	24.2
	Avec contrôle (N=5)	557.7	57.5	10.3
$\alpha = 1.5$	Sans contrôle	1365.8	865.6	63.4
	Avec contrôle (N=5)	691.6	191.5	27.7

TABLE 4.2 – Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau 4 pour différents exposants de fuite

4.3.2 Deuxième cas test : le réseau 2 avec déplacement des points de contrôle

Présentation du réseau

Dans cette partie, nous reprenons le réseau 2 comprenant six nœuds dont un réservoir et cinq nœuds de consommation, et six conduites. Nous considérons un exposant de fuite égal à un (i.e. $\alpha = 1$).

Pour satisfaire le consommateur, la pression doit être suffisante aux nœuds de consommation. Cette pression est égale à $10 mCE$. En tout nœud de consommation i , la contrainte de pression s'écrit donc $H_c(t, x_i) - z(x_i) > 10$. Il n'y a pas de contrainte au niveau du réservoir puisque c'est un réservoir de tête.

Connaissant les cotes sols, la charge minimale admissible pour chaque nœud est indiquée dans le tableau suivant :

Nœuds	2	3	4	5	6
z (m)	95	85	70	85	80
Charge minimale (m)	105	95	80	95	90

TABLE 4.3 – Cotes sol et charges minimales admissibles sur le réseau 2

Nous allons faire varier la position du point de contrôle pour voir l'influence de son emplacement sur les résultats. D'abord, le point de contrôle est placé à la sortie du réservoir (figure 4.9(a)), ensuite deux points de contrôle sont placés à la sortie du nœud 2 (le premier sur l'arc II et le second sur l'arc III, figure 4.9(b)).

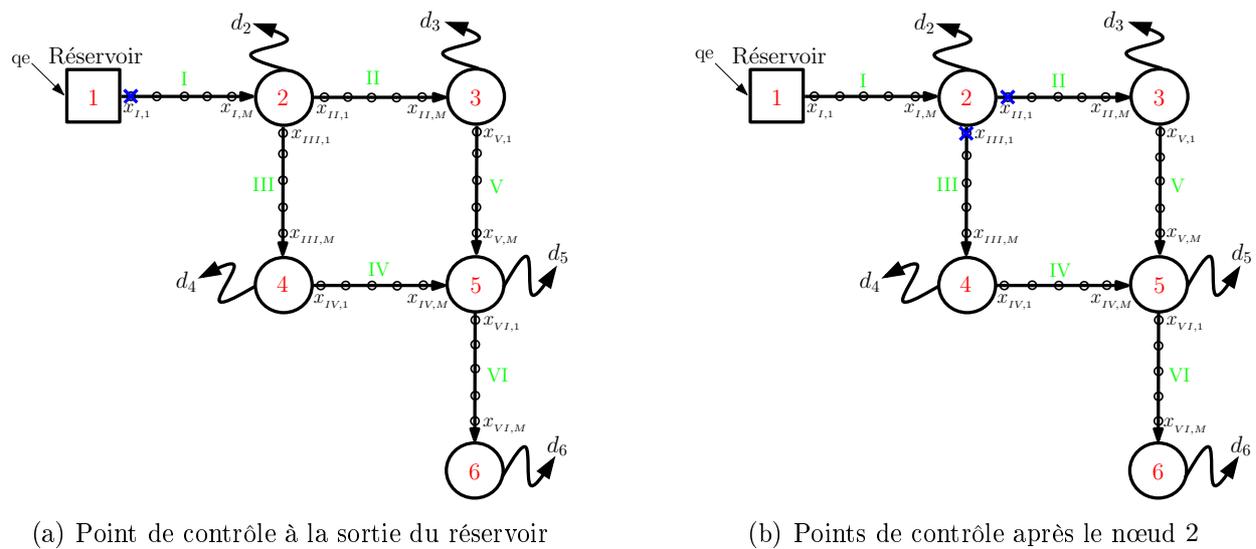
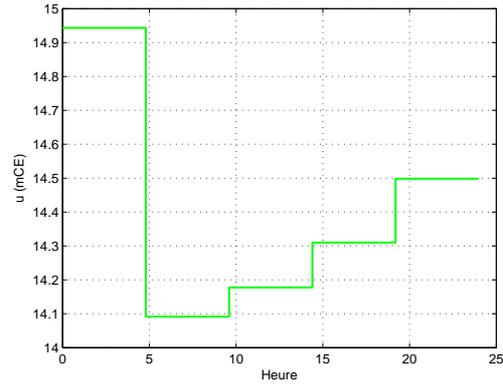


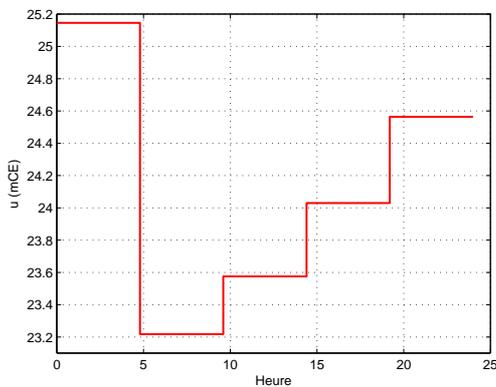
FIGURE 4.9 – Différents emplacements des points de contrôle sur le réseau 2

Calcul des fonctions de contrôle

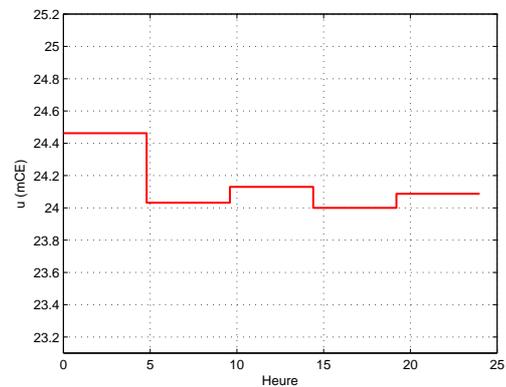
Nous avons choisi de trouver une fonction de contrôle comprenant cinq paliers (i.e. $N = 5$).



(a) Contrôle sortie du réservoir



(b) Contrôle après nœud 2 sur l'arc II



(c) Contrôle après nœud 2 sur l'arc III

FIGURE 4.10 – Fonctions de contrôle pour les différents points de contrôle sur le réseau 2

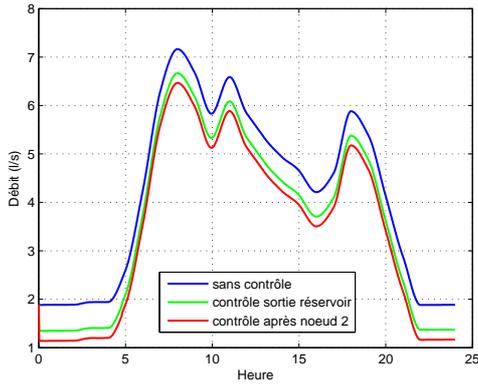
Nous pouvons constater sur les représentations des fonctions de contrôle (figure 4.10) que les fonctions de contrôle obtenues sont différentes entre le cas du point de contrôle placé à la sortie du réservoir et celui des points de contrôle placés après le nœud 2.

Le contrôle est plus fort, c'est-à-dire la pression est plus diminuée, si les points de contrôle sont situés après le nœud 2. Le contrôle est dit plus performant.

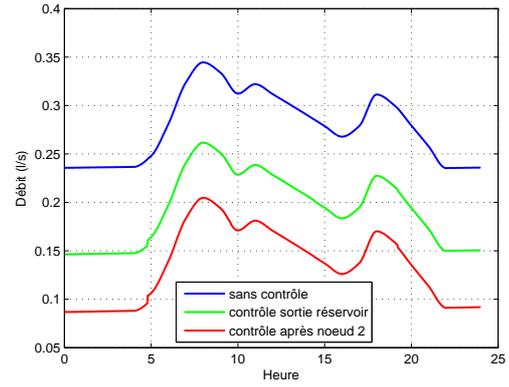
Calcul des débits

Nous pouvons voir sur les courbes des débits à la sortie du réservoir et au nœud 5 (i.e. en $x_{V,M}$), que le contrôle permet de diminuer les débits obtenus sans contrôle (figure 4.11). Plus le contrôle est fort, plus le débit est petit.

C'est ce que nous pouvons observer sur ces courbes. Ce sont les débits obtenus avec le contrôle le plus fort (i.e. le contrôle après le nœud 2) qui sont les plus petits.



(a) Sortie du réservoir

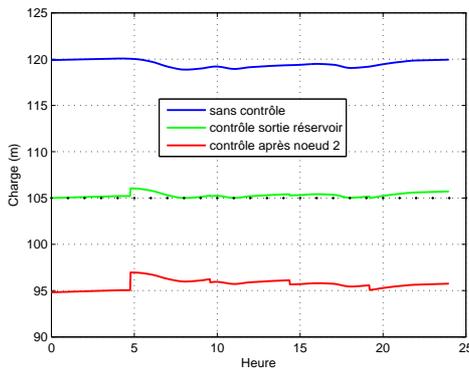


(b) Nœud 5

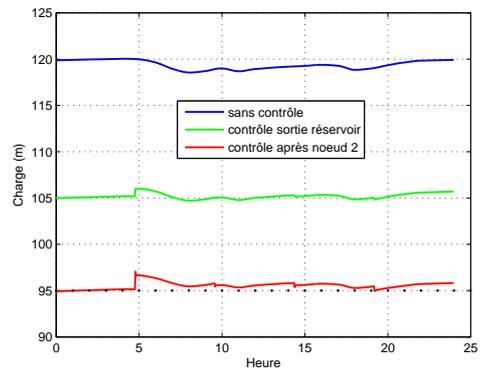
FIGURE 4.11 – Débits à la sortie du réservoir et au nœud 5 du réseau 2

Calcul des charges

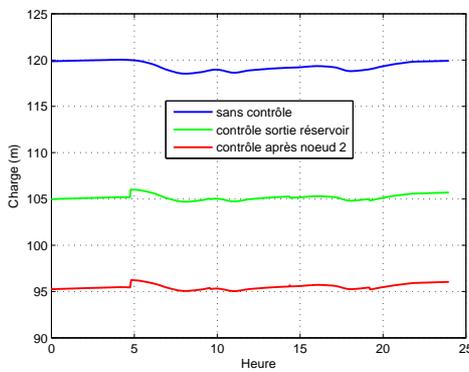
Les résultats des charges obtenues sur quatre nœuds de consommation sont représentés sur les graphiques 4.12.



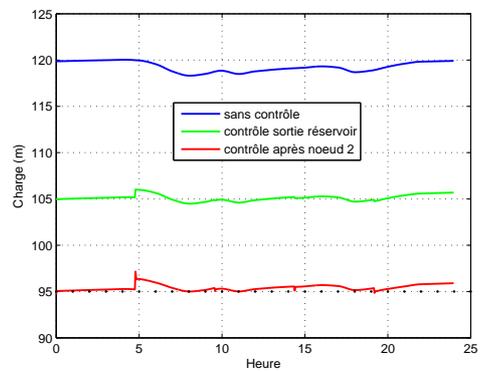
(a) Nœud 2



(b) Nœud 3

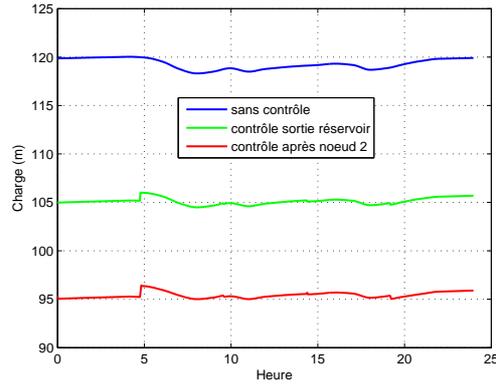


(c) Nœud 4



(d) Nœud 5

FIGURE 4.12 – Charges en différents nœuds du réseau 2



(a) Nœud 6

FIGURE 4.12 – Charges en différents nœuds du réseau 2 (suite)

Regardons d’abord les résultats donnés par le contrôle placé à la sortie du réservoir (courbes vertes). Le nœud 2 contraint le système. En effet, le nœud 2 a atteint sa charge minimale acceptable (i.e. 105 m). Les charges aux autres nœuds sont contraintes par le nœud 2, sinon elles auraient pu diminuer encore (jusqu’à 95 m , 80 m , 95 m et 90 m respectivement pour les nœuds 3, 4, 5 et 6).

Regardons maintenant les résultats apportés par les points de contrôle placés après le nœud 2 (courbes rouges). Comme le contrôle est situé après le nœud 2, il n’y a pas de contrainte de pression en ce nœud.

Les charges obtenues sont plus petites que celles obtenues sans contrôle, mais aussi plus petites que celles obtenues avec le contrôle à la sortie du réservoir. Ce contrôle est bien le plus performant.

Dans ce cas là, le nœud 3 contraint le contrôle sur l’arc II en premier. En ce nœud, la charge minimale acceptable est atteinte (i.e. 95 m). Puis, le nœud 5 contraint le contrôle de l’arc III. Ainsi les charges aux nœuds 4 et 6 n’ont pas atteint leur charge minimale (i.e. respectivement 80 m et 90 m).

Ainsi, en déplaçant le point de contrôle sur le réseau, le nœud le plus contraignant change.

Calcul des débits de fuite et des pertes

Le débit de fuite total sur le réseau est réduit avec les deux contrôles testés (figure 4.13). Nous remarquons que le contrôle le plus performant est bien celui qui se situe après le nœud 2, puisqu’il donne le plus petit débit de fuite.

Sans contrôle le pourcentage de fuite est de 28.8% sur le réseau (tableau 4.4). Avec le contrôle à la sortie du réservoir, il passe à 19% . Et avec le contrôle le plus performant, il est égal à 14.2% .

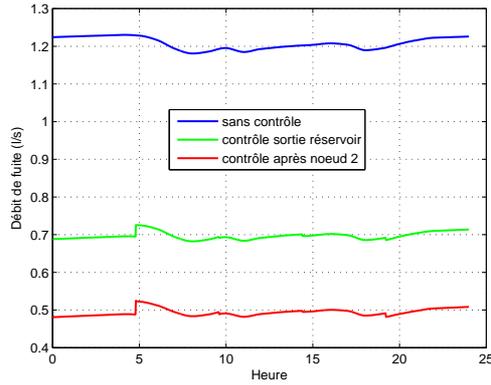


FIGURE 4.13 – Débits de fuite total sur le réseau 2

	volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
Sans contrôle	362.14	104.48	28.8
Avec contrôle à la sortie du réservoir	318.00	60.33	19
Avec contrôles après de nœud 2	300.44	42.77	14.2

TABLE 4.4 – Bilan en eau et pourcentage de fuite dans le réseau 2

Cet exemple montre que le choix de l'emplacement du point de contrôle est important. Un choix pertinent et bien adapté au système étudié permet de rendre le contrôle plus performant, et ainsi de réduire le volume des fuites de manière plus optimale.

4.3.3 Étude d'un réseau réel

Le réseau de Lacanau océan

Le réseau de la ville de Lacanau océan est constitué de 77 arcs et 63 nœuds dont deux réservoirs (figure 4.14). Les conduites ont des longueurs différentes (i.e $5 m \leq \ell \leq 2038 m$) et les coefficients de friction varient sur le réseau. Les données étudiées sont celles de la saison hivernale, pour laquelle les consommations sont faibles, donc les pressions maximales. Deux secteurs peuvent être distingués en fonction de la topologie du terrain : les nœuds du secteur 1 ont les cotes plus hautes que ceux du secteur 2. Les deux secteurs sont reliés par un seul arc. Les deux réservoirs sont situés dans le secteur 1 qui alimente le secteur 2. Le même taux de fuite par unité de longueur est appliqué sur chaque conduite. Le couple (c, α) est égal à $(2 \cdot 10^{-6} l/s/m, 1)$.

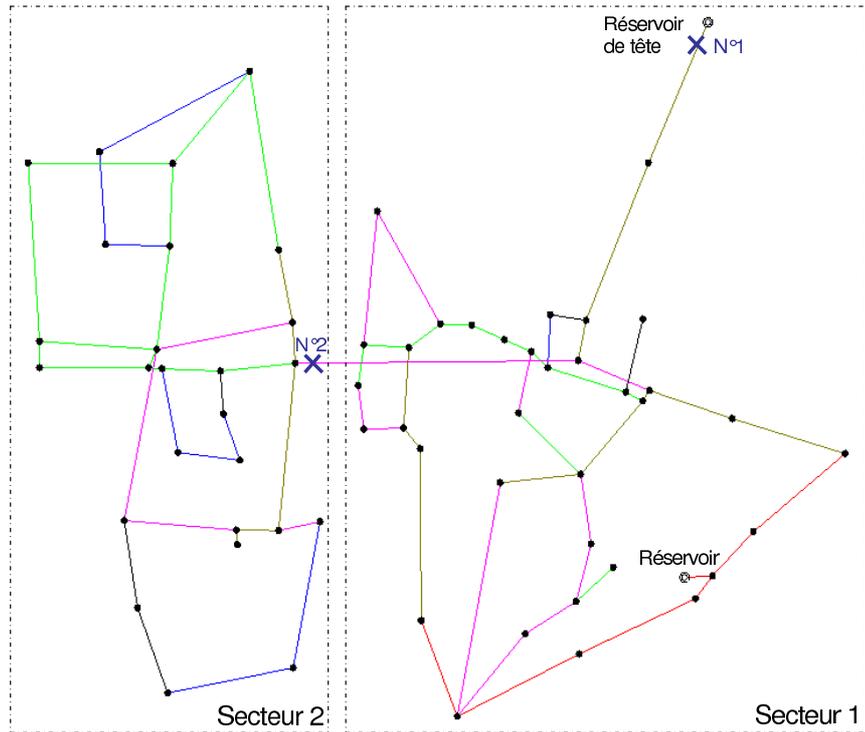


FIGURE 4.14 – Réseau de la ville de Lacanau océan

Les résultats des débits et des charges sont obtenus sur 24 h en résolvant le modèle hydraulique prenant en compte la relation entre les fuites et la pression. Le temps de calculs est de 37 s.

Le volume d'eau perdu est calculé pour trois contrôles différents. Dans un premier temps, un point de contrôle (contrôle N°1) est placé dans le secteur 1 à la sortie du réservoir de tête. Ensuite, ce point de contrôle est déplacé (contrôle N°2) : il est placé sur l'arc reliant les deux secteurs. Finalement, les deux points de contrôle sont placés simultanément.

Pertes en eau

Contrôle N°1

Le point de contrôle N°1 est placé à la sortie du réservoir de tête. Le contrôle du volume d'eau entrant dans le réseau permet de réduire les pertes (tableau 4.5). Le pourcentage de fuite passe de 24.3 % sans contrôle, à 22.3 % avec le contrôle N°1.

	volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
Sans contrôle	955.1	232.2	24.3
contrôle N°1	931.8	208.0	22.3

TABLE 4.5 – Bilan en eau et pourcentage de fuite avec le contrôle N°1 sur le réseau de Lacanau océan

Cependant, le gain sur le volume des fuites n'est pas conséquent. En effet, avec ce contrôle, le point contraignant le système (i.e. le point critique) est dans le secteur 1. En effet, dans ce secteur les cotes sol sont plus élevées et limitent la réduction de la pression sur l'ensemble du réseau (figure 4.15).

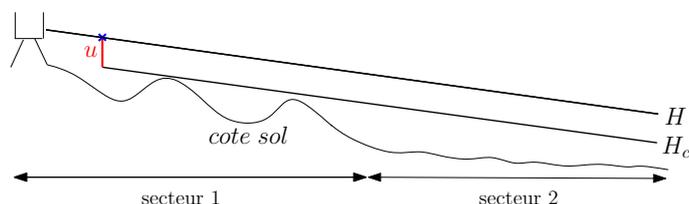


FIGURE 4.15 – Contrôle N°1 : point de contrôle à la sortie du réservoir de tête

La solution n'est donc pas optimale sur le secteur 2. Pour avoir un contrôle plus performant, il est nécessaire de déplacer le point de contrôle.

Contrôle N°2

Le point de contrôle est déplacé après la zone de hautes cotes sols (i.e. sur l'arc reliant les deux secteurs). Ce contrôle est plus performant car le volume des fuites est plus petit (tableau 4.6). Le pourcentage de fuite passe de 24.3 % sans contrôle, à 21.2 % avec le contrôle N°2.

	volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
Sans contrôle	955.1	232.2	24.3
contrôle N°2	919.3	195.5	21.2

TABLE 4.6 – Bilan en eau et pourcentage de fuite avec le contrôle N°2 sur le réseau de Lacanau océan

Le gain en eau sur une journée est conséquent : il représente la consommation d'un habitant sur une année.

Le contrôle N°2 est plus performant que le premier contrôle. En effet, le point contraignant le système est maintenant dans le secteur 2, dans lequel les cotes sols sont plus faibles. La marge de manœuvre pour réduire la charge au point de contrôle est donc plus grande (figure 4.16).

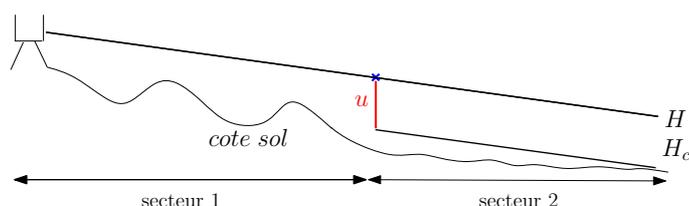


FIGURE 4.16 – Contrôle N°2 : point de contrôle sur l'arc reliant les deux secteurs

Cependant, ce contrôle ne réduit pas le volume des fuites dans la partie du réseau en amont du point de contrôle (i.e. le secteur 1). Or cette partie représente près des deux tiers du réseau (tableaux 4.7 et 4.8).

		réseau	secteur 1	secteur 2
longueur (m)		29075	18509	10566
consommation (m^3)		723.76	344.96	378.80
volume perdu (m^3)	sans contrôle	232.22	137.03	95.19
	contrôle N°1	208.02	121.98	86.04
	contrôle N°2	195.55	136.78	58.77

TABLE 4.7 – Bilan en eau et pourcentage de fuite sur le réseau de Lacanau océan

	secteur 1	secteur 2
sans contrôle	28.5 %	20.1 %
contrôle N°1	26.1 %	18.5 %
contrôle N°2	28.4 %	13.4 %

TABLE 4.8 – Pourcentage de fuite sur le réseau de Lacanau océan

Contrôles N°1 et N°2 simultanés

Nous venons de voir que le contrôle N°1 réduit le volume des fuites faiblement sur les deux secteurs, et que le contrôle N°2, bien que plus performant, ne réduit les fuites que sur le secteur 2. Regardons les gains observés avec les deux points de contrôle placés simultanément sur le réseau (tableau 4.9) :

	volume d'eau entrant (m^3)	volume d'eau perdu (m^3)	pourcentage de fuite (%)
Sans contrôle	955.1	232.2	24.3
contrôles N°1 et N°2	895.1	171.3	19.1

TABLE 4.9 – Bilan en eau et pourcentage de fuite avec le contrôle N°2 sur le réseau de Lacanau océan

Le pourcentage de fuite est de 19.1%. L'économie observée en une journée représente la consommation d' 1.7 habitant. Associer les deux contrôles permet de réduire les fuites de manière plus importante. Tout le réseau est maintenant contrôlé : le contrôle N°1 permet de réduire les fuites dans le secteur 1 et le contrôle N°2 de les réduire dans le secteur 2.

Cet exemple montre que le contrôle du volume entrant dans le réseau permet de réduire les fuites. Le choix de l'emplacement du point de contrôle est important. S'il est placé après une zone dans laquelle les pressions sont faibles, le contrôle est plus performant et la réduction du volume des fuites est optimisée.

Conclusion

Dans ce chapitre, notre attention s'est portée sur la minimisation du volume des fuites en agissant sur la pression. Pour cela, l'écriture d'un problème d'optimisation est nécessaire. Les variables d'état sont les débits et les charges, et le paramètre de contrôle est la perte de charge induite par une vanne de contrôle. Ce paramètre est introduit dans les conditions aux limites du modèle hydraulique développé dans le chapitre 3 prenant en compte la relation entre les fuites et la pression. Une fonctionnelle a été posée traduisant l'objectif que nous souhaitons atteindre, celui-ci étant de minimiser le volume des fuites, ce qui revient à minimiser le volume d'eau entrant dans le réseau d'eau. Des contraintes ont été introduites. Aux nœuds de consommation, la pression doit être suffisante pour assurer une quantité d'eau adéquate aux consommateurs. Quant aux réservoirs d'équilibre, ils ne doivent jamais être vides et leurs niveaux au temps final doivent être égaux à leurs hauteurs d'eau de départ.

La résolution du problème d'optimisation a été faite avec l'algorithme d'optimisation de descente de gradient, qui nécessite l'approximation du gradient de la fonctionnelle par différences finies. Le problème d'optimisation a été étudié et validé sur des cas tests et un réseau réel. Dans tous les cas, le contrôle de la pression a permis de réduire le volume des fuites dans les réseaux. Des fonctions de contrôle en escalier avec différents nombres de marches ont été testées. Les résultats obtenus sur les volumes de fuite gagnés ont été identiques, pour des temps de calculs significativement différents. Sur le réseau réel de la ville de Lacanau, la minimisation du volume des fuites en agissant sur la pression a permis d'économiser sur une année la consommation de presque quatre cents habitants. L'approche développée dans ce chapitre donne d'excellents résultats sur le cas réel étudié, pour des temps de calculs acceptables. De plus, les résultats ont montré que l'emplacement du ou des points de contrôle dans le réseau est important. Un bon choix permet de mieux réduire le volume des fuites. Une étude de sensibilité des nœuds de consommation des réseaux permettrait de connaître les nœuds les plus contraignants et ainsi de choisir l'emplacement optimal des points de contrôle.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une nouvelle méthode pour optimiser l'état hydraulique d'un réseau d'eau potable afin de réduire les pertes. Dans un premier temps, nous avons élaboré un modèle de réseaux d'eau en tenant compte des fuites. Une fois le réseau modélisé, l'enjeu est de maîtriser l'état hydraulique afin de réduire celles-ci.

Dans le premier chapitre, nous avons déduit des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques, les équations de Saint-Venant adaptées à notre problème. Pour cela deux adimensionnements ont été nécessaires pour simplifier les équations et négliger les phénomènes rapides. Une intégration sur la surface droite de la conduite permet d'établir les équations de continuité et de quantité de mouvement unidimensionnelles, en fonction du flux de vitesse et de la charge piézométrique. Le terme d'inertie radiale, lié aux fuites, a été négligé et seule l'équation de continuité prend en compte le débit de fuite. Les équations de Saint-Venant obtenues représentent l'écoulement incompressible d'un fluide dans un réseau d'eau en présence de fuites et de phénomènes transitoires lents.

Ensuite dans le second chapitre, nous avons écrit sous forme matricielle les équations de Saint-Venant afin de prendre en compte la jonction entre les différents arcs. Un système d'équations différentielles a été présenté symbolisant l'écoulement dans les canalisations dans lesquelles les fuites sont constantes et réparties de manière homogène sur leur longueur. Deux méthodes ont été proposées pour résoudre ce système. La première est la méthode de Rosenbrock qui permet de transformer les systèmes non linéaires en systèmes linéaires. La seconde méthode est la méthode de Gear, associée à une méthode de type Newton.

La pertinence de la méthode a été prouvée sur plusieurs cas tests. Les résultats sur les débits, les charges et les volumes d'eau perdus ont pu être clairement identifiés. L'influence des termes d'inertie a été mise en évidence et nous avons montré que leur ordre de grandeur est petit pour des fuites raisonnables. Néanmoins, lors de consommations rares et soudaines ou lors d'ouverture et de fermeture de vannes, l'inertie temporelle peut être conséquente. Nous avons donc fait le choix de garder ces termes d'inertie dans la suite pour avoir un modèle plus complet. Ainsi le modèle est adaptable pour chaque réseau en fonction de ces caractéristiques spécifiques.

Le modèle développé dans le chapitre 2 n'est pas suffisant pour représenter au mieux les phénomènes dans les réseaux d'eau. En effet, imposer des fuites constantes et réparties de manière homogène le long des canalisations n'est pas réaliste, puisque les fuites sont in-

fluencées par la pression. Il est donc important de proposer un modèle prenant en compte la relation entre les fuites et la pression.

Un système d'équations aux dérivées partielles est déduit des équations de Saint-Venant développées dans le premier chapitre. Ce système tient compte de la relation entre les fuites et la pression. Un modèle aux dérivées partielles du type transport-diffusion-réaction a été élaboré. C'est une équation fortement non linéaire et présentant de nombreuses difficultés de résolution. Deux méthodes à pas fractionnaires ont été proposées pour résoudre cette équation. Nous avons pu constater que le couplage de la diffusion et de la réaction est le choix le plus judicieux à faire en terme de rapidité de convergence et de précision.

Cette méthode a été validée sur les réseaux modèles étudiés précédemment. Pour cela, des points de discrétisation ont été introduits sur chaque conduite pour mieux prendre en compte les variations de pression le long de celles-ci. Les volumes d'eau perdus ont été comparés avec ceux obtenus par le modèle des fuites constantes du chapitre 2. En imposant des fuites constantes, des erreurs sont créées. En effet, nous constatons comme prévu que le volume d'eau perdu est différent sur chaque conduite, puisque les pressions sont différentes sur celles-ci. Par ailleurs, les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus par le logiciel Porteau développé par le Cemagref. Dans ce cas là aussi, nous constatons que des erreurs sont commises en appliquant les fuites comme une consommation supplémentaire aux nœuds. Les résultats montrent l'importance du modèle prenant en compte les fuites dépendantes de la pression puisqu'il modélise de manière plus précise la réalité physique du terrain et permet ainsi de prédire l'écoulement sur des conduites de grande longueur.

Comme les fuites dépendent fortement de la pression, nous utilisons le modèle du chapitre 3 pour minimiser le volume de celles-ci en fonction de la pression. La minimisation est alors faite sur le volume distribué. Ainsi, nous avons adapté la théorie du contrôle à notre modèle pour minimiser le volume des fuites en agissant sur la pression. Des contraintes de pression sont introduites car elle doit être suffisante pour garantir un service adéquat aux consommateurs, et être minimale pour réduire les fuites. Pour cela, un problème d'optimisation sous contraintes a été écrit et résolu par une méthode de descente. Cela revient à ajouter une vanne de contrôle en un ou plusieurs points du réseau.

Les résultats obtenus sur deux cas tests et un réseau réel montrent que la réduction de pression diminue considérablement le volume d'eau perdu et met en évidence la pertinence de la méthode. Enfin, un choix judicieux dans l'emplacement du ou des points de contrôle permet d'obtenir un contrôle plus performant et ainsi de diminuer plus encore les fuites dans le réseau.

De nombreux travaux considèrent la minimisation d'une pression de fonctionnement en un point du réseau. L'emplacement de ce contrôle est difficile à situer et peut être variable dans le temps en fonction des configurations hydrauliques. Les résultats obtenus pour cette approche sont donc plus difficilement optimaux. Par opposition, la méthode proposée permet de résoudre cette difficulté et présente un intérêt opérationnel pour le gestionnaire de réseaux car elle minimise directement le volume des fuites.

Perspectives

Pour une meilleure utilisation du modèle prenant en compte la relation entre les fuites et la pression, il est important d'avoir une bonne estimation des fuites sur un réseau. Le débit

de fuite est souvent différent sur les conduites car il dépend de leur matériau, de la topologie du terrain ... Le calage des paramètres des fuites (i.e. du coefficient de fuite c et de l'exposant de fuite α) est alors indispensable. La résolution de ce problème inverse nécessite cependant de disposer de nombreuses mesures hydrauliques sur le réseau : charges, débits, ...

Dans le problème d'optimisation sous contraintes, il serait intéressant de prendre en compte la contrainte sur la qualité de l'eau. La minimisation des fuites engendre des débits, donc des vitesses, plus faibles, ce qui entraîne un temps de séjour de l'eau plus long. L'eau est traitée en utilisant des procédés physiques et chimiques complexes avant d'entrer dans le réseau de distribution. Un résiduel de désinfectant et un faible temps de séjour doivent être maintenus dans le système comme protection finale contre les maladies infectieuses et la formation de produits dérivés issus de la désinfection. Un problème multi-objectif peut être formulé pour minimiser simultanément le volume des fuites et le temps de séjour pour que l'eau soit de bonne qualité.

Bibliographie

- [1] Logiciel Porteau, Cemagref, 1994. [[http ://porteur.cemagref.fr/](http://porteur.cemagref.fr/)] (page consultée le 2 octobre 2009).
- [2] Logiciel Epanet, EPA's Water Supply and Water Resources Division, 2000. [[http ://www.epa.gov/nrmrl/wswrd/dw/epanet.html](http://www.epa.gov/nrmrl/wswrd/dw/epanet.html)] (page consultée le 2 octobre 2009).
- [3] J. Thomas Beale and Andrew Majda. Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 37(156) :243–259, 1981.
- [4] P. Bellay. Modélisation du fonctionnement d'un réseau d'eau avec prise en compte de fuites diffuses. Master's thesis, Université Bordeaux 1, 2006.
- [5] M. Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, 2e cycle, Ecoles d'ingénieurs*. 2001.
- [6] B. Brémond, P. Fabrie, E. Jaumouillé, I. Mortazavi, and O. Piller. Numerical simulation of a hydraulic Saint-Venant type model with pressure-dependent leakage. *Applied Mathematics Letters*, 2009.
- [7] B. Brunone and M. Ferrante. Pressure waves as a tool for leak detection in closed conduits. *Urban Water Journal*, 1(2) :145–155, 2004.
- [8] J-P. Caltagirone. *Physique des Écoulements Continus*, octobre 2006.
- [9] P. Carpentier and G. Cohen. State estimation and leak detection in water distribution networks. *Civil Engineering Systems*, 8 :247–257, 1991.
- [10] AM. Cassa, J.E. Van Zyl, and R.F. Laubscher. A numerical investigation into the behaviour of leak openings in upvc pipes under pressure.
- [11] O. Chesneau. *Un outil d'aide à la maîtrise des pertes dans les réseaux d'eau potable : la modélisation dynamique de différentes composantes du débit de fuite*. PhD thesis, Université Louis Pasteur Strasbourg 1, Octobre 2006.
- [12] A.J. Coetzer, J.E. Van Zyl, and C.R.I. Clayton. An experimental investigation into the turbulent-flow hydraulics of small circular holes in plastic pipes.
- [13] P. Fabrie and M. Colin. *Cours et exercices d'optimisation*. MATMECA, Ecole d'ingénieurs en Modélisation Mathématique et Mécanique, 2008.
- [14] J.D. Faires and R. Burden. *Numerical Methods, Brooks*. Cole Publishing Company, 1998.
- [15] G. Gancel. *Modélisation d'un problème inverse pour la qualité de l'eau dans les réseaux d'eau potable*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2006.
- [16] P. Germain. *Mécanique tome 2*. ellipses, 1986.
- [17] M.S. Ghidaoui. On the fundamental equations of water hammer. *Urban Water Journal*, 1(2) :71–83, June 2004.

- [18] J.C. Gilbert. *Eléments d'optimisation différentiable - théorie et algorithmes*. Syllabus de cours à l'ENSTA, Paris, 2008.
- [19] O. Giustolisi, Z. Kapelan, and D. Savic. Algorithm for Automatic Detection of Topological Changes in Water Distribution Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134 :435, 2008.
- [20] O. Giustolisi, D. Savic, and Z. Kapelan. Pressure-Driven Demand and Leakage Simulation for Water Distribution Networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134 :626, 2008.
- [21] R. Glowinski and A. Marrocco. Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Operationnelle Ser. Rouge Anal. Numer*, 9 :41–76, 1975.
- [22] B. Greyvenstein and J.E. Van Zyl. An experimental investigation into the pressure leakage relationship of some failed water pipes.
- [23] R. Haberman. *Elementary applied partial differential equations : with Fourier series and boundary value problems*. Prentice-Hall, 1983.
- [24] WH Hundsdorfer and J.G. Verwer. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*. Springer Verlag, 2003.
- [25] E. Jaumouillé, O. Piller, and J.E. Van Zyl. A hydraulic model for water distribution systems incorporating both inertia and leakage. In *Water Management Challenges in Global Change*, 2007.
- [26] E. Jaumouillé, O. Piller, and J.E. Van Zyl. Advantages of a hydraulic saint-venant type model with pressure-dependent leakage. 2008.
- [27] Z. Kapelan, D. A. Savic, and G. A. Walters. Incorporation of prior information on parameters in inverse transient analysis for leak detection and roughness calibration. *Urban Water Journal*, 1(2) :129–143, 2004.
- [28] A. Lambert. What do we know about pressure-leakage relationships in distribution systems? *IWA, Conference Proceedings, ISBN 80-7204-197-5*, 2001.
- [29] D. McInnis and B.W. Karney. Transients in distribution networks : Field tests and demand models. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(3) :218–231, 1995.
- [30] A. Paquier. *Modélisation des écoulements en rivière en crue : pour une utilisation adaptée des équations de Saint-Venant*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1, 2002.
- [31] P. Pernès. *Mécanique des milieux continus déformables Application à la mécanique des liquides parfaits et des liquides newtoniens*. Cemagref Editions, 2003.
- [32] P. Pernès. *Hydraulique unidimensionnelle*. Cemagref Editions, 2004.
- [33] O. Piller. *Modélisation du fonctionnement d'un réseau, Analyse hydraulique et choix des mesures pour l'estimation de paramètres*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 1995.
- [34] O. Piller, G. Gancel, and M. Propato. Slow transient pressure regulation in water distribution systems. *Water Management for the 21st Century*, 1(2) :263–268, 2005.
- [35] S.L. Prescott and B. Ulanicki. Improved control of pressure reducing valves in water distribution networks. *Journal of hydraulic engineering*, 2008.
- [36] R. Puust. *Probabilistic leak detection in pipe networks using the SCEM-UA algorithm*. PhD thesis, Tallinn university of technology, 2007.

- [37] J. Rappaz and M. Picasso. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.
- [38] I. L. Ryhming. *Dynamique des fluides*. Presses Polytechniques Romandes, 1985.
- [39] E. Todini. Design, Expansion and Rehabilitation of Water Distribution Networks Aimed at Reducing Water Losses. Where Are We? ASCE, 2008.
- [40] E. Trélat. *Contrôle optimal, Théories & applications*. "Mathématiques Concrètes", 2005.
- [41] B. Ulanicki, P.L.M. Bounds, J.P. Rance, and L.Reynolds. Open and closed loop pressure control for leakage reduction. *Urban Water*, 2 :105–114, 2000.
- [42] JE Van Zyl and CRI Clayton. The effect of pressure on leakage in water distribution systems. *Water management*, 160(2) :109–114, 2007.
- [43] T. Walski, W. Bezts, E.T. Posluszny, M. Weir, and B.E. Whitman. Modeling leakage reduction through pressure control. *AWWA*, pages 147–155, April 2006.
- [44] X.J. Wang, M.F. Lambert, J.A. Liggett, and J.P. Vítkovský. Leak detection in pipelines using the damping of fluid transients. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128 :697, 2002.
- [45] D.C. Wiggert. Unsteady flows in lines with distributed leakage. *Journal of the hydraulics division*, 94 :143–162, 1968.
- [46] E.B. Wylie, V.L. Streeter, and L. Suo. *Fluid transients in systems*. Prentice Hall, 1993.

Annexe A

Classification des pertes

volume entrant dans le système	consommation autorisée	consommation facturée	consommation facturée mesurée (incluant l'eau exportée)	rentree d'argent
			consommation facturée non mesurée	
		consommation non facturée	consommation non facturée mesurée	pertes pour l'exploitant
			consommation non facturée non mesurée	
	pertes	pertes apparentes	consommation non autorisée	
			erreurs de mesure	
		pertes réelles	pertes sur le transport brut ou à l'usine de traitement	
			fuites sur les conduites d'adduction ou de distribution	
			fuites et débordements au niveau des réservoirs	
			fuites sur les branchements jusqu'au compteur	

TABLE A.1 – Balance de l'eau selon la terminologie utilisée par l'IWA (*International Water Association*)

Annexe B

Caractéristiques des réseaux étudiés

La programmation a été faite avec le logiciel Matlab, version 7.1.0.246(R14) Service Pack 3.

Les temps de calculs ont été obtenus sur un ordinateur avec un processeur Intel Core 2 Duo (E8400 3GHz).

Réseau numéro 1

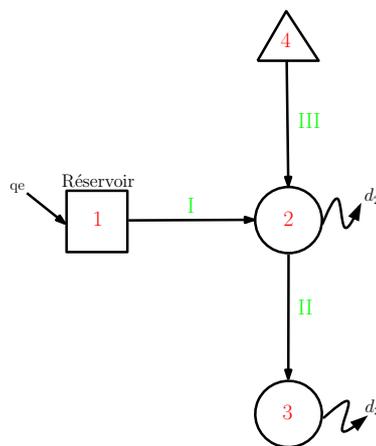
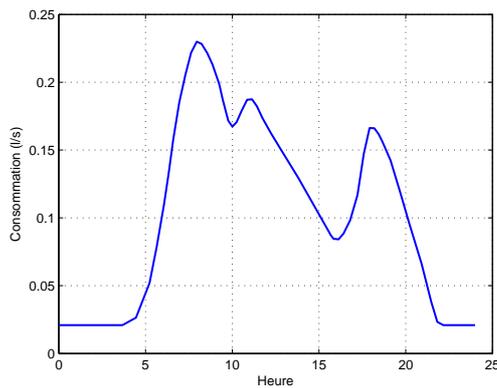


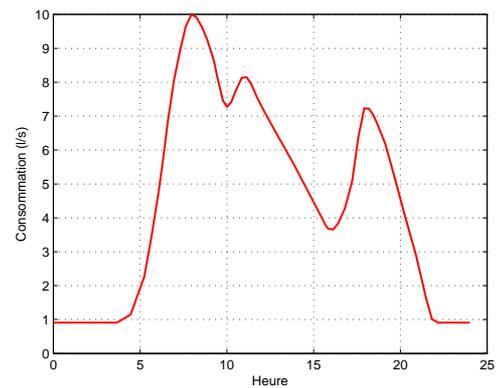
FIGURE B.1 – Représentation du réseau 1

- Sur les conduites :
 - longueur : $\ell = 1000 \text{ m}$
 - diamètre : $D = 100 \text{ mm}$
 - surface de la section droite : $S = 0.0079 \text{ m}^2$
 - coefficient de friction d'Hazen-Williams : $k = 2.307 \cdot 10^{-4}$
 - coefficient de Boussinesq : $\beta = 1$
 - débit linéique de fuite : $d_f = 8.33 \cdot 10^{-5} \text{ l/s/m}$
- Au nœud réservoir de forme cylindrique :
 - charge initiale : $H^r(t = 0) = 120 \text{ m}$
 - surface de la section droite : $S_r = 2000 \text{ m}^2$
 - cote sol : $z = 100 \text{ m}$

- cote radier : $z_{radier} = 118\text{ m}$
- cote haut : $z_{haut} = 122\text{ m}$
- débit entrant : $q_e = 10\text{ l/s}$
- o Au nœud ressource :
 - charge : $H^f(t) = 100\text{ m}$
 - cote sol : $z = 100\text{ m}$
- o Aux nœuds de consommation :
 - cote sol : $z = 100\text{ m}$
 - consommations :



(a) Nœud 2



(b) Nœud 3

FIGURE B.2 – Consommations aux nœuds 2 et 3 du réseau 1

Le temps de calculs de la méthode de Rosenbrock est de 1.24 s, celui de la méthode de Gear est de 9.28 s.

Réseau numéro 2

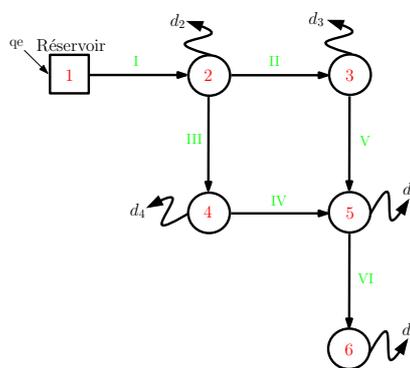
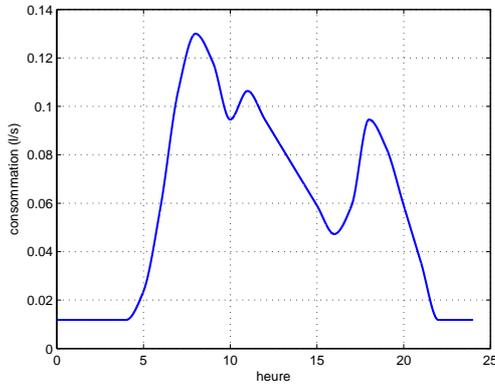


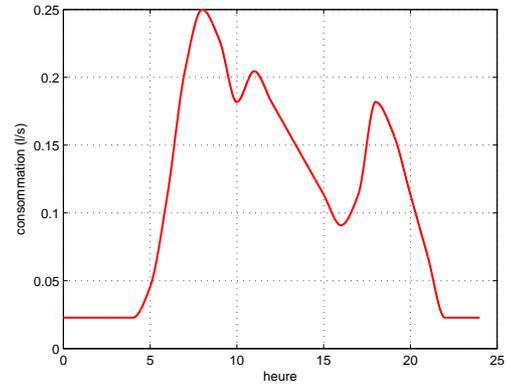
FIGURE B.3 – Représentation du réseau 2

- o Sur les conduites :
 - longueur : $\ell = 1000\text{ m}$

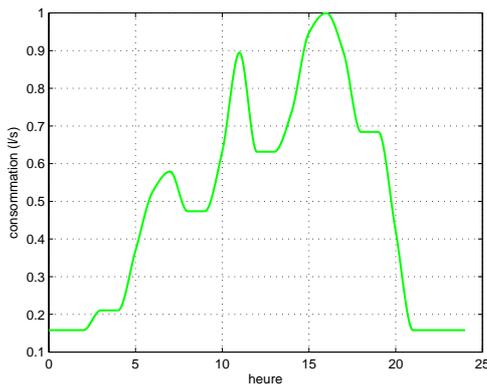
- diamètre : $D = 150 \text{ mm}$
 - surface de la section droite : $S = 0.0177 \text{ m}^2$
 - coefficient de friction d'Hazen-Williams : $k = 3.42 \cdot 10^{-5}$
 - coefficient de Boussinesq : $\beta = 1$
 - débit linéique de fuite : $d_f = 2.015 \cdot 10^{-4} \text{ l/s/m}$
 - coefficient de fuite : $c = 6 \cdot 10^{-6} \text{ l/s/m}^{\alpha+1}$
- o Au nœud réservoir de forme cylindrique :
 - charge initiale : $H^r(t = 0) = 120 \text{ m}$
 - surface de la section droite : $S_r = 200 \text{ m}^2$
 - cote radier : $z_{radier} = 118 \text{ m}$
 - cote haut : $z_{haut} = 122 \text{ m}$
 - débit entrant : $qe = 4.3 \text{ l/s}$
 - o Aux nœuds de consommation :
 - consommations :



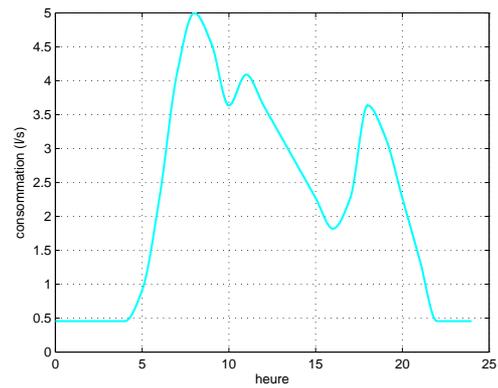
(a) Nœud 2



(b) Nœud 3



(c) Nœud 4



(d) Nœud 5

FIGURE B.4 – Consommations aux nœuds du réseau 2

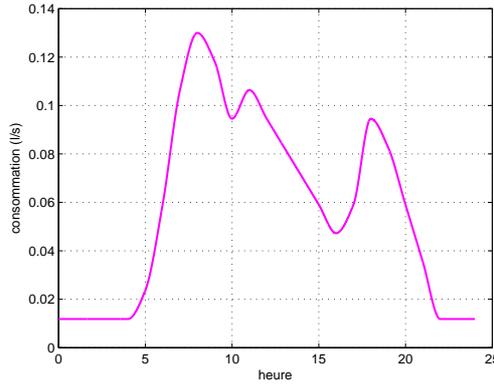


FIGURE B.5 – Consommation au nœud 6 du réseau 2

- Cotes sol aux nœuds :

Nœuds	1	2	3	4	5	6
z (m)	100	95	85	70	85	80

TABLE B.1 – Cotes sol aux nœuds du réseau 2

Le temps de calculs de la méthode de Rosenbrock est de 0.6 s pour les fuites constantes. Pour les fuites dépendantes de la pression, le temps de calculs est d'environ 8 s avec une discrétisation des conduites de 15 points ($M = 15$).

Réseau numéro 3

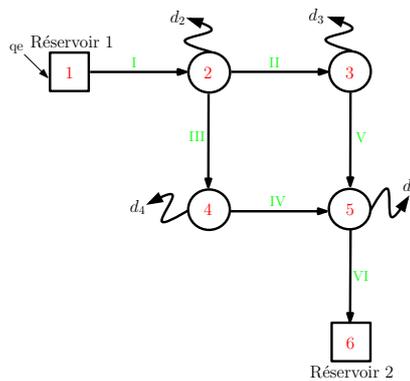
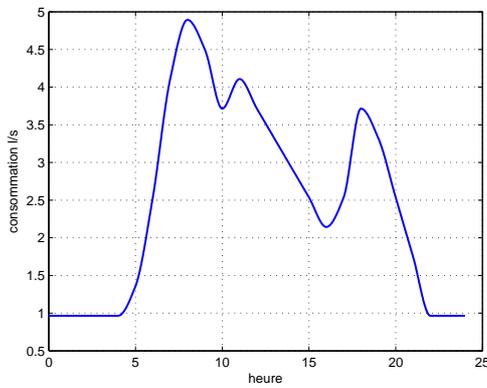


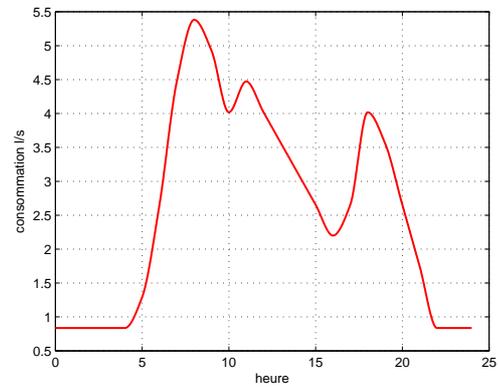
FIGURE B.6 – Représentation du réseau 3

- Sur les conduites :
 - longueur : $\ell = 1000\text{ m}$
 - diamètre : $D = 150\text{ mm}$
 - surface de la section droite : $S = 0.0177\text{ m}^2$
 - coefficient de friction d'Hazen-Williams : $k = 3.42 \cdot 10^{-5}$
 - coefficient de Boussinesq : $\beta = 1$

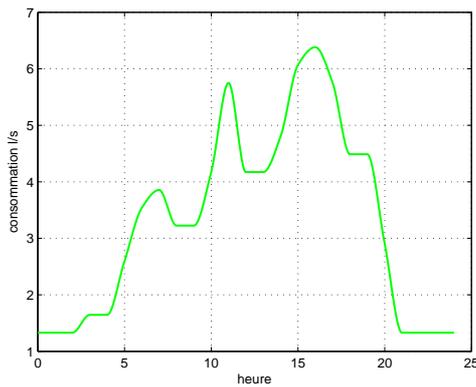
- coefficient de fuite : $c = 6 \cdot 10^{-5} \text{ l/s/m}^{\alpha+1}$
- o Au nœud réservoir 1 de forme cylindrique :
 - charge initiale : $H^r(t = 0) = 120 \text{ m}$
 - surface de la section droite : $S_r = 200 \text{ m}^2$
 - cote radier : $z_{radier} = 118 \text{ m}$
 - cote haut : $z_{haut} = 122 \text{ m}$
 - débit entrant : $q_e = 26 \text{ l/s}$
- o Au nœud réservoir 2 de forme cylindrique :
 - charge initiale : $H^r(t = 0) = 100 \text{ m}$
 - surface de la section droite : $S_r = 100 \text{ m}^2$
 - cote radier : $z_{radier} = 98 \text{ m}$
 - cote haut : $z_{haut} = 102 \text{ m}$
- o Aux nœuds de consommation :
 - consommations :



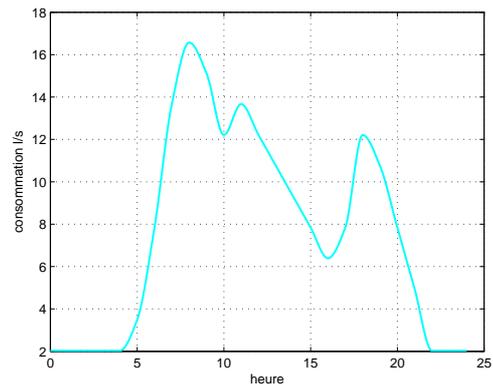
(a) Nœud 2



(b) Nœud 3



(c) Nœud 4



(d) Nœud 5

FIGURE B.7 – Consommations aux nœuds du réseau 3

- o Cotes sol aux nœuds :

Nœuds	1	2	3	4	5	6
$z \text{ (m)}$	100	95	85	70	85	80

TABLE B.2 – Cotes sol des nœuds du réseau 3

Pour les fuites dépendantes de la pression, le temps de calculs est d'environ 9 s avec une discrétisation des conduites de 15 points ($M = 15$).

Réseau numéro 4



FIGURE B.8 – Représentation du réseau 4

- Sur les conduites :
 - longueur : $\ell = 1000 \text{ m}$
 - diamètre : $D = 125 \text{ mm}$
 - surface de la section droite : $S = 0.0123 \text{ m}^2$
 - coefficient de friction d'Hazen-Williams : $k = 8.32 \cdot 10^{-5}$
 - coefficient de Boussinesq : $\beta = 1$
 - coefficient de fuite : $c = 6 \cdot 10^{-5} \text{ l/s/m}^{\alpha+1}$
- Au nœud réservoir de forme cylindrique :
 - charge initiale : $H^r(t = 0) = 120 \text{ m}$
 - surface de la section droite : $S_r = 2000 \text{ m}^2$
 - cote radier : $z_{radier} = 118 \text{ m}$
 - cote haut : $z_{haut} = 122 \text{ m}$
 - débit entrant : $q_e = 8 \text{ l/s}$
 - cote sol : $z = 100 \text{ m}$
- Aux nœuds de consommation :
 - cote sol : $z = 75 \text{ m}$
 - consommation :

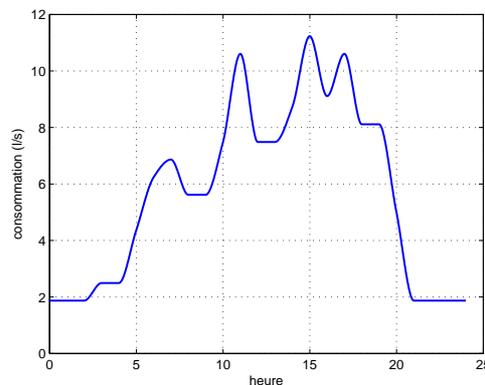


FIGURE B.9 – Consommation au nœud 2 du réseau 4

Pour les fuites dépendantes de la pression, le temps de calculs est d'environ 1.7 s avec une discrétisation des conduites de 15 points ($M = 15$).

